



HAL
open science

Contributions à la théorie du contrôle optimal

Hasan Yilmaz

► **To cite this version:**

Hasan Yilmaz. Contributions à la théorie du contrôle optimal. Mathématiques générales [math.GM].
Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7228 . tel-04007511

HAL Id: tel-04007511

<https://theses.hal.science/tel-04007511>

Submitted on 28 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES MATHÉMATIQUES DE PARIS CENTRE 386

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS, STATISTIQUE ET MODÉLISATION

Contributions à la théorie du Contrôle Optimal

Présentée par Hasan Yilmaz

Thèse de doctorat de Mathématiques Appliquées

Dirigée par Joël Blot et par Simone Scotti

Présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2021

Devant un jury composé de :

<i>Examineur</i>	Philippe BICH	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
<i>Directeur de thèse</i>	Joël BLOT	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
<i>Rapporteur</i>	Aris DANIILIDIS	Professeur à l'Université du Chili
<i>Rapporteur</i>	Naïla HAYEK	Professeur à l'Université Paris 2 Panthéon-Assas
<i>Examineur</i>	Alejandro JOFRE	Professeur à l'Université du Chili
<i>Examinatrice</i>	Guiomar MARTIN-HERRAN	Professeur à l'Université de Valladolid
<i>Co-directeur de thèse</i>	Simone SCOTTI	Maître de Conférence, HDR, à l'Université de Paris



Except where otherwise noted, this is work licensed under <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/>

Abstract

This thesis is made up of contributions to the theory of Optimal Control within the framework of the Pontryagin Maximum Principle for a system governed by an ordinary differential equation, with piecewise continuous control functions and piecewise continuously differentiable state functions.

A first contribution is an improvement of this principle of Pontryagin which consists in lightening the assumptions of the existing results in this framework.

A second contribution is to establish Envelope Theorems in this framework. This type of theorem is considered especially important in theoretical economics.

The realization of these contributions uses recent Multiplier Rules (one of which is original), uses the establishment of a Functional analysis framework which makes it possible to define efficient operators and functionals, uses the rigorous justification of the theorems on ordinary differential equations with piecewise continuously differentiable solutions, and uses new results on nonlinear functionals in integral form.

Keywords : Optimal Control, Pontryagin maximum principle, Envelope Theorem, Calculus of Variations, Static optimization, Ordinary differential equations.

Résumé

Cette thèse est constituée de contributions à la théorie du Contrôle Optimal dans le cadre du Principe du Maximum de Pontryagin pour un système gouverné par une équation différentielle ordinaire, avec des fonctions de contrôle continues par morceaux et des fonctions d'état continûment dérivables par morceaux.

Une première contribution est une amélioration de ce principe de Pontryagin qui consiste à alléger les hypothèses des énoncés existants dans ce cadre.

Une seconde contribution est d'établir des Théorèmes de l'Enveloppe dans ce cadre. Ce type de théorème est considéré comme spécialement important en économie théorique.

La réalisation de ces contributions utilise des Règles des Multiplicateurs récentes (dont l'une est originale), utilise l'établissement d'un cadre d'Analyse Fonctionnelle qui permet de définir des opérateurs et des fonctionnelles efficaces, utilise la justification rigoureuse des théorèmes sur les équations différentielles ordinaires à solutions continûment dérivables par morceaux, et utilise de nouveaux résultats sur les fonctionnelles non linéaires sous forme intégrale.

Mots clefs : Contrôle Optimal, Principe du Maximum de Pontryagin, Théorème de l'enveloppe, Optimisation statique, Calcul des Variations, Équations différentielles ordinaires.

Remerciements

Je remercie Joël BLOT, mon directeur de thèse, pour son soutien tout au long de cette thèse. J'ai pu, à ses côtés, me rendre compte de la réalité de la pratique de la recherche mathématique. Dans ces recherches à la fois difficiles et stimulantes ; sa méthode de travail et sa rigueur m'ont beaucoup inspiré ; et si j'ai pu surmonter quelques difficultés en mathématiques c'est grâce à ce que j'ai appris à ses côtés.

Je remercie Simone SCOTTI d'avoir accepté de co-diriger cette thèse, de m'avoir permis d'accéder au Laboratoire du LPSM de l'Université de Paris ; sans lui cette thèse n'aurait pas pu commencer.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Aris DANILIDIS, de l'Université du Chili, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

Je tiens à remercier Madame le Professeur Naïla HAYEK, mathématicienne à l'Université de Paris 2 Panthéon-Assas, de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse.

Je tiens également à remercier Madame le Professeur Guiomar MARTIN-HERRAN, de l'Université de Valladolid, d'avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur Alejandro JOFRE, de l'Université du Chili, d'avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur Philippe BICH, mathématicien au Centre d'Économie de la Sorbonne à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, d'être examinateur de ma thèse. J'avais suivi les cours de Monsieur BICH durant mon Master de Mathématiques Appliquées à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.

Je remercie l'Université Paris-Diderot Paris 7, devenue Université de Paris, et l'École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre pour le financement de ma thèse.

Je tiens à remercier Madame Amina HARITI, gestionnaire de l'École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre à l'Université de Paris, pour son aide et sa disponibilité durant la procédure de soutenance.

Je remercie Mohammed BACHIR, mathématicien au laboratoire SAMM de l'Université Paris 1 Panthéon Sorbonne pour ses encouragements permanents, ainsi que Jean-Marc BARDET, Directeur du SAMM, pour son accueil.

Je remercie ma mère Emine pour son amour, son abnégation et son dévouement.

Je remercie mon père Rasim pour être parvenu à subvenir à nos besoins.

Je remercie ma sœur Emel ainsi que mes frères Osman, Bekir et Mücahit pour l'entraide entre frère et sœur.

Je remercie ma grand-mère Raziye YILDIRIM pour son amour, sa patience et ses prières.

Enfin, j'en profite pour remercier Rafik MOHAMMED SEGHIR, mon ami de longue date, pour son appui lorsque j'en avais besoin.

Je dédie cette thèse à Mücahit, mon petit frère, qui prendra le relais dans quelques années.

Table des matières

Introduction	8
1 Espaces fonctionnels utilisés	9
1.1 Les espaces des fonctions continues par morceaux	10
1.2 L'espace des fonctions continues par morceaux à paramètre	20
1.3 L'espace des fonctions continûment dérivables par morceaux	23
1.4 Les ensembles des fonctions continues par morceaux et continûment dérivables par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R}	33
1.4.1 L'ensemble des fonctions continues par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R}	33
1.4.2 L'ensemble des fonctions continûment dérivables par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R}	35
1.5 L'espace des fonctions à variation bornée normalisées	38
2 Optimisation statique	54
2.1 Rappels de Calcul différentiel	56
2.2 Énoncé des problèmes d'optimisation statique	59
2.3 Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité	60
2.3.1 Preuve de la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité	61
2.4 Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'égalité et d'inégalité	66
2.4.1 Preuve de la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'égalité et d'inégalité	69
2.5 Théorème de l'enveloppe pour deux problèmes à paramètre avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité.	78
2.5.1 Énoncé d'un théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre .	78
2.5.2 Énoncé d'un théorème de l'enveloppe pour le second problème à paramètre .	79
2.6 Preuve du théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre	81
2.6.1 Résultats d'algèbre topologique.	82
2.6.2 Preuve de la Partie (I)	85
2.6.3 Preuve de la Partie (II)	88
2.6.4 Preuve de la Partie (III)	88
2.7 Preuve du théorème de l'enveloppe pour le second problème à paramètre	88
2.7.1 Preuve de la Partie (I)	89
2.7.2 Preuve de la Partie (II)	90
2.7.3 Preuve de la Partie (III)	91

3	Équations différentielles ordinaires	92
3.1	Résultats fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires pour les solutions PC^1	92
3.2	Équations différentielles ordinaires linéaires	102
3.3	Continuité d'une solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.	112
3.3.1	Résultats préliminaires	112
3.3.2	Énoncé du théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre	115
3.3.3	Preuve du théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.	118
4	Calcul des Variations	124
4.1	Résultats sur l'intégrale de Gelfand	124
4.2	Résultats fondamentaux sur le Calcul des Variations	126
4.2.1	Résultats sur les fonctionnelles définies à partir d'une intégrale	127
4.2.2	Lemme de DuBois-Reymond	134
4.2.3	Équation d'Euler à paramètre	136
4.3	Le théorème de l'enveloppe en Calcul des Variations	138
4.4	Preuve du Théorème de l'enveloppe.	140
4.4.1	Preuve de la Partie (I)	140
4.4.2	Preuve de la Partie (II)	142
4.4.3	Preuve de la Partie (III)	143
5	Contrôle Optimal	144
5.1	Le problème de Mayer et de Bolza en Contrôle Optimal	145
5.1.1	Reformulation des problèmes	146
5.2	Énoncé d'un Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Bolza	147
5.3	Énoncé d'un Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer	150
5.4	Preuve du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer	151
5.4.1	Preuve de la Partie (I)	151
5.4.2	Preuve de la Partie (II)	172
5.4.3	Preuve de la Partie (III)	173
5.4.4	Preuve de la Partie (IV)	173
5.4.5	Preuve de la Partie (V)	173
5.5	Preuve du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Bolza	174
5.5.1	Preuve de la Partie (I)	175
5.5.2	Preuve de la Partie (II)	178
5.5.3	Preuve de la Partie (III)	178
5.5.4	Preuve de la Partie (IV)	179
5.5.5	Preuve de la Partie (V)	179
5.6	Théorème de l'enveloppe en Contrôle Optimal	180
5.7	Preuve du théorème de l'enveloppe pour le problème de Bolza à paramètre	183
5.7.1	Preuve de la Partie (I)	183
5.7.2	Preuve de la Partie (II)	189
5.7.3	Preuve de la Partie (III)	190
	Liste des principales notations	198

Introduction

Cette thèse traite principalement de problèmes de la théorie du **Contrôle Optimal**, plus précisément de **condition nécessaire d'optimalité** dans le cadre du **Principe du Maximum** de PONTYAGIN.

Dans un premier temps, nous présentons une amélioration de la démonstration de Philippe MICHEL du **Principe du Maximum** de PONTYAGIN ; notamment en allégeant les hypothèses des énoncés existants.

L'idée directrice de la démonstration de Philippe MICHEL consiste à associer au problème de **Contrôle Optimal** un problème d'**Optimisation Statique** avec un nombre fini d'inconnues, et d'appliquer sur ce nouveau problème une **Règle des Multiplicateurs** (à la Fritz JOHN) ou un théorème de KARUSH-KUHN-TUCKER.

Ceci a motivé de réaliser une amélioration d'une **Règle des Multiplicateurs** établie par Joël BLOT qui est elle-même une amélioration d'une **Règle des Multiplicateurs** établie par Philippe MICHEL et par Hubert HALKIN indépendamment l'un de l'autre avec des démonstrations très différentes.

Les équations différentielles ordinaires qui gouvernent les problèmes de **Contrôle Optimal** ont des solutions (les fonctions d'état) continûment dérivables par morceaux car les fonctions de contrôle sont continues par morceaux. Ceci a motivé de réaliser un chapitre où sont établis **rigoureusement** les théorèmes de base de la théorie de équations différentielles ordinaires à solutions continûment dérivables par morceaux ; les exposés existants dans la littérature ne convenant pas exactement à notre cadre de travail.

Après ce travail d'amélioration du **Principe du Maximum** de PONTYAGIN comme condition nécessaire d'optimalité, toujours dans le cadre du **Principe du Maximum** de PONTYAGIN, nous abordons une autre question : celle des **théorèmes de l'enveloppe**. Les théorèmes de l'enveloppe sont un outil très important en **Économie Théorique**. Ils concernent les problèmes paramétrés ; ils répondent à la motivation suivante : fournir des conditions qui permettent d'avoir la différentiabilité (en un sens à préciser) de la fonction valeur en fonction du paramètre, et de fournir une expression de cette différentielle.

Dans l'esprit de l'approche de Philippe MICHEL des problèmes de **Contrôle Optimal**, nous commençons par établir un théorème de l'enveloppe pour les problèmes d'**Optimisation Statique** en dimension infinie. Une première application de ce résultat consiste à réaliser un théorème de l'enveloppe pour les problèmes de **Calcul des Variations**. Ensuite nous établissons un théorème de l'enveloppe pour les problèmes de **Contrôle Optimal**.

Les outils mathématiques utilisés dans cette thèse relèvent essentiellement de l'**Analyse fonctionnelle appliquée**. À la différence du travail (fondamental et créateur) de Philippe MICHEL, nous avons introduit des espaces de fonctions adaptés aux problèmes dynamiques considérés, des opérateurs linéaires, des opérateurs et des fonctionnelles non linéaires ; ce qui permet de faire surgir de nouveaux aspects pour le traitement des problèmes.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels utilisés

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des espaces fonctionnels utilisés en Contrôle Optimal et en Calcul des Variations.

Dans la section 1, on s'intéresse aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans un espace vectoriel réel définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} . Ensuite, on introduit l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées à valeurs dans un espace vectoriel réel définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} . En outre, on démontre des propriétés basiques de ces fonctions. Enfin, on démontre que l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées à valeurs dans un espace de Banach définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} est un espace de Banach lorsqu'on fixe une subdivision.

Dans la section 2, on s'intéresse aux fonctions continues par morceaux à paramètre, on établit des résultats utiles dans le cadre des équations différentielles ordinaires.

Dans la section 3, on étudie les fonctions C^1 par morceaux à valeurs dans un espace de Banach définies sur un intervalle compact. Une fonction C^1 par morceaux pouvant ne pas être dérivable en un nombre fini de points; on est amené à introduire une notion de *dérivée étendue*. Ensuite, on établit que l'opérateur de dérivation étendue est un véritable opérateur linéaire continu de l'espace des fonctions C^1 par morceaux dans l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées. En outre, on prouve que l'espace des fonctions C^1 par morceaux à valeurs dans un espace de Banach définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} est un espace de Banach lorsqu'on fixe une subdivision.

Dans la section 4, on généralise les notions de fonctions continues par morceaux et de C^1 par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R} .

Dans la section 5, on s'intéresse à l'espace des fonctions à variation bornée. On commence par introduire les fonctions à variation bornée normalisées et à construire un isomorphisme topologique entre l'espace des fonctions à variation bornée normalisées sur un intervalle compact à valeurs réelles et le dual topologique de l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact. En outre, on généralise ce résultat, en construisant un isomorphisme topologique entre la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles définies sur un intervalle compact et le dual des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^n définies sur un intervalle compact.

Ensuite, on construit un isomorphisme topologique entre le produit cartésien de \mathbb{R}^n et de la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles définies sur un intervalle compact et le dual topologique des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n définies sur un intervalle compact.

Enfin, on établit une injection linéaire continue entre le produit cartésien de \mathbb{R}^n et de la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles définies sur un intervalle compact et le dual topologique des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n définies sur un intervalle compact nulles au bord.

Avec cette injection linéaire continue, on parvient à construire un produit scalaire continu sur le

dual topologique des espaces des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n , définies sur un intervalle compact nulles au bord.

1.1 Les espaces des fonctions continues par morceaux.

Dans cette section, on s'intéresse aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans un espace vectoriel réel définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} . On introduit l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées à valeurs dans un espace vectoriel réel définies sur un intervalle compact de \mathbb{R} . On démontre des propriétés basiques de ces fonctions.

Soit E un espace vectoriel normé réel. Soit U un espace topologique séparé. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Définition 1.1.1. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}$ de points de $[a, b]$ vérifiant $a = \tau_0 < \dots < \tau_{p+1} = b$.

On note $Sub([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Définition 1.1.2. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow U$ une fonction.

On dit que φ est *continue par morceaux* de $[a, b]$ dans U lorsque φ est continue sur $[a, b]$ ou lorsqu'il existe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

- $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$,
- $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi(\tau_i+) := \lim_{t \rightarrow \tau_i+} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans U ,
- $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi(\tau_i-) := \lim_{t \rightarrow \tau_i-} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans U .

Définition 1.1.3. Soit φ une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans U .

On dit que φ est *continue par morceaux normalisée* de $[a, b]$ dans U lorsque $\forall t \in [a, b[$, $\varphi(t+) = \varphi(t)$ et $\varphi(b) = \varphi(b-)$.

Notations 1.1.4. On considère les espaces fonctionnels suivants :

- Pour chaque espace topologique T , $C^0(T, U)$ est l'ensemble des fonctions continues de T dans U .
- $PC^0([a, b], U)$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans U .
- Pour chaque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$, $PC^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est l'ensemble des fonctions φ dans $PC^0([a, b], U)$ dont l'ensemble des points de discontinuité est inclus dans l'ensemble $\{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\}$.
- $NPC_d^0([a, b], U)$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux normalisées de $[a, b]$ dans U .
- Pour chaque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$, $NPC_d^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) = \{\varphi \in PC^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) : \varphi(b) = \varphi(b-) \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, p\} \varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i+)\}$.
- Pour tout ouvert Ω de E et pour chaque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$, $NPC_d^0([a, b], \Omega; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) = \{\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) : \overline{\varphi([a, b])} \subset \Omega\}$ où le surli-gnage désigne l'adhérence topologique.
- Pour tout espace métrique (A, d_A) , $B(A, E)$ est l'ensemble des fonctions bornées de A dans E .
- Pour tout espace métrique (A, d_A) , $BC^0(A, E)$ est l'ensemble des fonctions bornées et continues de A dans E .
- Pour tout espace topologique U , $\mathcal{L}^0([a, b], \mathcal{B}([a, b]), (U, \mathcal{B}(U)))$ est l'ensemble des fonctions mesurables de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(U, \mathcal{B}(U))$; la lettre \mathcal{B} désignant la tribu de Borel.

- $\mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Borel-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} où \mathbf{m}_1 est la mesure de Borel canonique sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$.
- $\mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions Borel-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+ .
- $\mathcal{L}^1([a, b], \overline{\mathcal{B}}([a, b]), \mathbf{l}_1; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ; $\overline{\mathcal{B}}([a, b])$ et \mathbf{l}_1 désignent respectivement la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue.
- Pour chaque espace vectoriel normé réel F , on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ sa norme usuelle.
- On note E^* le dual topologique de E .
- Pour chaque espace vectoriel normé réel F , on note $Isom(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes topologiques de E dans F .
- Pour tout espace vectoriel normé réel F et G , on note $\mathcal{B}(E \times F, G)$ l'ensemble des fonctions bilinéaires continues de $E \times F$ dans G et $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ sa norme usuelle.

De plus,

- On note $dim(E)$ la dimension de E .
- Lorsque A est une partie de E , on note $\text{int}(A)$ l'intérieur de A .
- Lorsque A est une partie de E , on note \overline{A} l'adhérence de A .
- Lorsque A est une partie de E , on note $\text{Fr}(A)$ la frontière de A .
- Lorsque F est un espace vectoriel normé réel et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\text{Im } g$ l'image de g et $\text{Ker } g$ le noyau de g .
- Lorsque A est une partie de E , on note $Vect(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A .
- Pour chaque (A, d) espace métrique, pour chaque sous-ensemble D non vide de A , on note $diam(D)$ le diamètre de D .
- Pour chaque espace topologique T , pour chaque $v \in T$, on note $\mathcal{V}_v(T)$ l'ensemble des voisinages de v .
- Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ et $t \in [a, b]$, lorsqu'elle existe, on note $\varphi'(t)$ (respectivement $\varphi'_d(t)$, respectivement $\varphi'_g(t)$) la dérivée (respectivement la dérivée à droite, respectivement la dérivée à gauche) de φ au point t .
- Soit X un ensemble non vide, on note Id_X la fonction identité de X .
- Soit X un ensemble non vide, soit $A \subset X$, on note 1_A la fonction indicatrice de A .
- Soit $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ n espace vectoriel normé réel; lorsque $E := \prod_{i=1}^n X_i$, on note $\|\cdot\|_1$ la norme sur E , définie par, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i}$. En outre, on note $\|\cdot\|_2$ la norme sur E , définie par, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i}^2}$.
- En plus, on note $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme sur E , définie par, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{X_i}$.
- Par ailleurs, lorsque $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $(X_i, \|\cdot\|_{X_i}) = (X, \|\cdot\|_X)$, on note $\|\cdot\|_{E,1}$ la norme sur E , définie par, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_{E,1} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X$.
- Lorsque $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel normé réel, $x \in X$ et $r > 0$, on note $\overline{B}_{\|\cdot\|_X}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r .
- On note $B_{\|\cdot\|_X}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r .
- On note $S_{\|\cdot\|_X}(x, r)$ la sphère de centre x et de rayon r .

Proposition 1.1.5. $PC^0([a, b], U) \subset \mathcal{L}^0([a, b], \mathcal{B}([a, b]), (U, \mathcal{B}(U)))$.

Démonstration. Soit $\varphi \in PC^0([a, b], U)$.

Puisque $\varphi \in PC^0([a, b], U)$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

- (a) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$,

(b) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi(\tau_i+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans U ,

(c) $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi(\tau_i-) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans U .

Pour chaque $i \in \{0, \dots, p\}$, en utilisant (a), on a $\varphi|_{] \tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0(] \tau_i, \tau_{i+1}[, U)$. Par conséquent, on a

$$\varphi|_{] \tau_i, \tau_{i+1}[} \in \mathcal{L}^0(] \tau_i, \tau_{i+1}[, \mathcal{B}(] \tau_i, \tau_{i+1}[)), (U, \mathcal{B}(U)). \quad (1.1.1)$$

De plus,

$$\forall i \in \{0, \dots, p+1\}, \varphi|_{\{\tau_i\}} \in \mathcal{L}^0(\{\tau_i\}, \mathcal{B}(\{\tau_i\})), (U, \mathcal{B}(U)). \quad (1.1.2)$$

Considérons la famille d'ensemble $(P_j)_{0 \leq j \leq 2p+2}$ définie par, $\forall j \in \{0, \dots, p, p+1, \dots, 2p+2\}$,

$$P_j := \begin{cases}] \tau_j, \tau_{j+1}[& \text{si } j \in \{0, \dots, p\} \\ \{\tau_{j-(p+1)}\} & \text{si } j \in \{p+1, \dots, 2p+2\}. \end{cases}$$

Puisque $(P_j)_{0 \leq j \leq 2p+2}$ est une partition de $[a, b]$, avec (1.1.1) et (1.1.2), on a, en utilisant la proposition 5.2.18, p.44 de [37], $\varphi \in \mathcal{L}^0([a, b], \mathcal{B}([a, b])), (U, \mathcal{B}(U))$. \square

Proposition 1.1.6. $B([a, b], E)$ est un espace vectoriel réel.

La démonstration est effectuée dans [4] (p.25).

Dans la suite, fixons une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$.

Proposition 1.1.7. $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est un sous-espace vectoriel de $B([a, b], E)$.

Démonstration. Montrons que $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) \subset B([a, b], E)$.

Soit $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, pour tout $t \in [a, b]$, on définit

$$\hat{\varphi}_i(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[\\ \varphi(\tau_{i+1}-) & \text{si } t = \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Si $i \in \{0, \dots, p\}$ alors $\hat{\varphi}_i$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

En effet, comme la fonction φ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, $\hat{\varphi}_i$ est aussi continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Au point τ_{i+1} , on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_{i+1} \\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[}} \hat{\varphi}_i(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_{i+1} \\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[}} \varphi_i(t) = \varphi(\tau_{i+1}-) = \hat{\varphi}_i(\tau_{i+1}).$$

Comme $\hat{\varphi}_i$ est continue sur le compact $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\hat{\varphi}_i([\tau_i, \tau_{i+1}])$ est compacte donc en particulier bornée, et ainsi on a

$$\exists M_i \in]0, +\infty[\text{ t.q. } \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \|\hat{\varphi}_i(t)\| \leq M_i.$$

On a en particulier

$$\forall t \in] \tau_i, \tau_{i+1}[, \|\hat{\varphi}_i(t)\| \leq M_i.$$

On pose $M = \max_{0 \leq i \leq p} M_i < +\infty$ car tout ensemble fini non vide inclus dans \mathbb{R} admet un maximum, et on a

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}, \|\varphi(t)\| \leq M.$$

Puisque l'ensemble $\{\|\varphi(\tau_i)\| : i \in \{0, \dots, p+1\}\}$ est fini, on sait qu'il existe $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, $\|\varphi(\tau_i)\| \leq M'$.

Posons $M'' = \max\{M, M'\}$.

On obtient alors

$$\forall t \in [a, b], \|\varphi(t)\| \leq M''$$

donc φ est bornée sur $[a, b]$.

Considérons la fonction $\tilde{0} : [a, b] \rightarrow E, \tilde{0}(t) = 0_E$.

Montrons que $\tilde{0} \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

$\tilde{0}$ est une fonction constante de $[a, b]$ dans E , donc $\tilde{0}$ est une fonction continue de $[a, b]$ dans E .

Par conséquent, on a $\tilde{0} \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\varphi, \psi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, $\lambda\varphi + \psi$ est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$ comme combinaison linéaire de deux fonctions continues sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, par les propriétés des limites, on a

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi + \psi)(\tau_i+) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} (\lambda\varphi + \psi)(t) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \psi(t) \\ &= \lambda\varphi(\tau_i+) + \psi(\tau_i+) \\ &= \lambda\varphi(\tau_i) + \psi(\tau_i) = (\lambda\varphi + \psi)(\tau_i) \text{ existe dans } E. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi + \psi)(\tau_i-) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} (\lambda\varphi + \psi)(t) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \varphi(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \psi(t) \\ &= \lambda\varphi(\tau_i-) + \psi(\tau_i-) \text{ existe dans } E. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, on a

$$(\lambda\varphi + \psi)(\tau_i+) = (\lambda\varphi + \psi)(\tau_i) \text{ et } (\lambda\varphi + \psi)(b-) = \lambda\varphi(b-) + \psi(b-) = (\lambda\varphi + \psi)(b).$$

Donc $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est un sous-espace vectoriel de $B([a, b], E)$.

Ainsi, $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est un espace vectoriel réel. \square

Proposition 1.1.8. $NPC_d^0([a, b], E)$ est un sous-espace vectoriel de $B([a, b], E)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E)$. Puisque $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E)$, il existe $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq r^0+1} \in Sub([a, b])$ t.q. $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq r^0+1})$.

Par conséquent, on obtient que $\varphi \in B([a, b], E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in NPC_d^0([a, b], E)$.

Puisque $\varphi_1 \in NPC_d^0([a, b], E)$, il existe $(\alpha_i^1)_{0 \leq i \leq r^1+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

$\varphi_1 \in NPC_d^0([a, b], E; (\alpha_i^1)_{0 \leq i \leq r^1+1})$.

Puisque $\varphi_2 \in NPC_d^0([a, b], E)$, il existe $(\alpha_i^2)_{0 \leq i \leq r^2+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

$\varphi_2 \in NPC_d^0([a, b], E; (\alpha_i^2)_{0 \leq i \leq r^2+1})$.

Posons $A := \{\alpha_i^1 : 0 \leq i \leq r^1+1\} \cup \{\alpha_i^2 : 0 \leq i \leq r^2+1\}$.

Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $r \in \mathbb{N}$ t.q. $card(A) = r+1$.

Posons $\rho_0 = a$ et $\forall i \in \{1, \dots, r+1\}$, $\rho_i = \min A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$.

Puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, r+1\}$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$ est strictement inclus dans $[a, b]$, on a $\rho_0 < \rho_i$. De plus, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r+1\}$ t.q. $i < j$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{j-1}\}$ est inclus strictement dans $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$, donc $\rho_i < \rho_j$.

Par conséquent, $(\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1} \in \text{Sub}([a, b])$ avec $\{\rho_0, \dots, \rho_{r+1}\} = A$.

Par conséquent, $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{NPC}_d^0([a, b], E; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1})$. Ainsi, en utilisant la Proposition 1.1.7, on a $\lambda\varphi_1 + \varphi_2 \in \text{NPC}_d^0([a, b], E; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1})$ i.e. $\lambda\varphi_1 + \varphi_2 \in \text{NPC}_d^0([a, b], E)$. \square

Proposition 1.1.9. *Soit F un espace vectoriel normé réel. Soit $\varphi_1 \in \text{NPC}_d^0([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\varphi_2 \in \text{NPC}_d^0([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. Alors*

$$(\varphi_1, \varphi_2) := [t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))] \in \text{NPC}_d^0([a, b], E \times F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}).$$

Démonstration. Puisque $\varphi_1 \in \text{NPC}_d^0([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\varphi_2 \in \text{NPC}_d^0([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a

$$(a) \quad \forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \varphi_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, E) \text{ et } \varphi_2|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, F).$$

$$(b) \quad \varphi_1|_{[\tau_p, b]} \in C^0([\tau_p, b], E) \text{ et } \varphi_2|_{[\tau_p, b]} \in C^0([\tau_p, b], F).$$

$$(c) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi_1(\tau_i-) \text{ existe dans } E \text{ et } \varphi_2(\tau_i-) \text{ existe dans } F.$$

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$; en utilisant (a) et [35] (2.2.3. propriété 2° d p.41), on a

$$(\varphi_1, \varphi_2)|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, E \times F).$$

Par conséquent, on a prouvé que

$$\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, (\varphi_1, \varphi_2)|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, E \times F). \quad (1.1.3)$$

De plus, en utilisant (b) et [35] (2.2.3. propriété 2° d, p.41), on a

$$(\varphi_1, \varphi_2)|_{[\tau_p, b]} \in C^0([\tau_p, b], E \times F). \quad (1.1.4)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; en utilisant (c) et [35] (2.2.2 théorème 4 p.40), on a

$$(\varphi_1, \varphi_2)(\tau_i-) = (\varphi_1(\tau_i-), \varphi_2(\tau_i-)) \in E \times F.$$

En résumé, on a obtenu

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, (\varphi_1, \varphi_2)(\tau_i-) = (\varphi_1(\tau_i-), \varphi_2(\tau_i-)) \in E \times F. \quad (1.1.5)$$

Ainsi, en utilisant (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5), on a

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{NPC}_d^0([a, b], E \times F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}).$$

\square

Proposition 1.1.10. *Soit F un espace vectoriel normé réel, Ω un sous-ensemble ouvert de E , $T \in C^0(\Omega, F)$ et $\varphi \in \text{NPC}_d^0([a, b], \Omega, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.*

Alors $\psi := T \circ \varphi \in \text{NPC}_d^0([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. Puisque $\varphi \in \text{NPC}_d^0([a, b], \Omega, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a

$$(a) \quad \forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \varphi|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, \Omega).$$

$$(b) \quad \varphi|_{[\tau_p, b]} \in C^0([\tau_p, b], \Omega).$$

$$(c) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi(\tau_i-) \text{ existe dans } \Omega.$$

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$. En utilisant (a), $T \in C^0(\Omega, F)$, et le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\psi_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, F).$$

Par conséquent, on a prouvé que

$$\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \psi_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, F). \quad (1.1.6)$$

En utilisant (b), $T \in C^0(\Omega, F)$, et le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\psi_{|[\tau_p, b]} \in C^0([\tau_p, b], F). \quad (1.1.7)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; puisque $T \in C^0(\Omega, F)$ et (c), par composition des limites ([35] 2.2.2 3 p.39), on a

$$\psi(\tau_i-) = T(\varphi(\tau_i-)).$$

Par conséquent, on a prouvé que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \psi(\tau_i-) = T(\varphi(\tau_i-)) \text{ existe dans } F. \quad (1.1.8)$$

Ainsi, en utilisant (1.1.6), (1.1.7) et (1.1.8), on a $\psi \in NPC_d^0([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. \square

Considérons la fonctionnelle sur $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ définie par $\|\cdot\|_{NPC^0} : NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\|\varphi\|_{NPC^0} = \sup_{t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}} \|\varphi(t)\|$.

Proposition 1.1.11. $\|\cdot\|_{NPC^0}$ est une norme sur $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. Tout d'abord, cette fonctionnelle est bien définie sur $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

En effet, comme $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, φ est bornée sur $[a, b]$, donc en particulier bornée sur $[a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

(i) Puisque pour chaque $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$ $\|\varphi(t)\| \geq 0$, on a

$$\|\varphi\|_{NPC^0} = \sup_{t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}} \|\varphi(t)\| \geq 0.$$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$,

$$\|\lambda\varphi\|_{NPC^0} = \sup_{t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}} \|\lambda\varphi(t)\| = |\lambda| \sup_{t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}} \|\varphi(t)\| = |\lambda| \|\varphi\|_{NPC^0}.$$

(iii) $\|\tilde{0}\|_{NPC^0} = 0$ et si $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, vérifie

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{NPC^0} &= 0 \\ \Rightarrow \forall t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}, \|\varphi(t)\| &= 0 \\ \Rightarrow \forall t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}, \varphi(t) &= 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que, $\forall i \in \{0, \dots, p+1\}$, $\varphi(\tau_i) = 0$.

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; on a

$$\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[}} \varphi(t) = 0.$$

De plus, on a

$$\varphi(b) = \varphi(b-) = \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t \in]\tau_p, b]}} \varphi(t) = 0.$$

Ainsi $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

- (iv) Soit $\varphi, \psi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.
 Pour tout $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) + \psi(t)\| &\leq \|\varphi(t)\| + \|\psi(t)\| \\ &\leq \|\varphi\|_{NPC^0} + \|\psi\|_{NPC^0}. \end{aligned}$$

Puisque le sup est le plus petit des majorants on a

$$\|\varphi + \psi\|_{NPC^0} \leq \|\varphi\|_{NPC^0} + \|\psi\|_{NPC^0}.$$

□

Pour tout espace métrique (A, d_A) , considérons la norme suivante

$$\|\cdot\|_{A, \infty} : B(A, E) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ définie par, } \forall u \in B(A, E), \|u\|_{A, \infty} = \|u\|_{\infty} = \sup_{t \in A} \|u(t)\|.$$

Lemme 1.1.12. Si $A \subset \mathbb{R}$, en notant \bar{A} son adhérence et $f : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors $\sup_{x \in \bar{A}} f(x) = \sup_{x \in A} f(x)$.

Démonstration. Puisque $A \subset \bar{A}$, on a $\sup_{x \in \bar{A}} f(x) \geq \sup_{x \in A} f(x)$.

Soit $x \in \bar{A}$, par définition, il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq \sup_{x \in A} f(x),$$

par conservation des inégalités larges par passage à la limite et par continuité de f on a $f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x)$.

Donc, $\sup_{x \in A} f(x)$ est un majorant de $\{f(x) : x \in \bar{A}\}$ et comme le sup est le plus petit des majorants, on obtient que $\sup_{x \in \bar{A}} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x)$. □

Proposition 1.1.13. Pour tout $u \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a

$$\|u\|_{[a, b], \infty} = \|u\|_{NPC^0}.$$

Démonstration. Soit $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Puisque $t \in [a, b]$, on a $\|u(t)\| \leq \|u\|_{[a, b], \infty}$.

Par conséquent, $\|u\|_{[a, b], \infty}$ est un majorant de l'ensemble $\{\|u(t)\| : t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}\}$.

Et puisque le sup est le plus petit des majorants, on obtient que

$$\|u\|_{NPC^0} \leq \|u\|_{[a, b], \infty}. \quad (1.1.9)$$

Soit $t \in [a, b]$. Raisonnons par disjonction des cas.

Si $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$, on a $\|u(t)\| \leq \|u\|_{NPC^0}$.

Si $t = \tau_i$ avec $i \in \{0, \dots, p\}$, puisque $(\forall s \in]\tau_i, \tau_{i+1}[, \|u(s)\| \leq \|u\|_{NPC^0})$ et u est continue à droite de τ_i , on obtient

$$\|u(\tau_i)\| = \|u(\tau_i+)\| \leq \|u\|_{NPC^0}.$$

Si $t = b$, puisque $(\forall s \in]\tau_p, b[, \|u(s)\| \leq \|u\|_{NPC^0})$ et u est continue à gauche en b , on obtient

$$\|u(b)\| = \|u(b-)\| \leq \|u\|_{NPC^0}.$$

Ainsi, on a démontré que $\|u\|_{NPC^0}$ est un majorant de l'ensemble $\{\|u(t)\| : t \in [a, b]\}$. Et puisque le sup est le plus petit des majorants, on a

$$\|u\|_{[a, b], \infty} \leq \|u\|_{NPC^0}. \quad (1.1.10)$$

Par conséquent, en utilisant les assertions (1.1.9) et (1.1.10), on a

$$\|u\|_{[a,b],\infty} = \|u\|_{NPC^0}.$$

□

Dans la suite, nous supposons que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On rappelle le théorème de Lebesgue.

Proposition 1.1.14. Théorème de Lebesgue. *Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
- (ii) L'ensemble des points de discontinuité de f est Borel-négligeable.

Démonstration. Voir [35] p.225. □

Proposition 1.1.15. *Soit $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. Alors φ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Puisque $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a $\varphi \in B([a, b], E)$. De plus, puisque l'ensemble des points de discontinuité de φ est inclus dans $\{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$ et puisque un ensemble fini est Borel-négligeable, l'ensemble des points de discontinuité de φ est Borel-négligeable.

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.1.14, on obtient que φ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. □

Proposition 1.1.16. *Pour tout espace métrique (A, d_A) , $(B(A, E), \|\cdot\|_{A,\infty})$ est un espace de Banach.*

La démonstration est effectuée dans [36] (p. 322).

Proposition 1.1.17. *Pour tout espace métrique (A, d_A) , $(BC^0(A, E), \|\cdot\|_{A,\infty})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Puisque $(BC(A, E), \|\cdot\|_{A,\infty})$ est un espace de Banach, il suffit de montrer que $BC^0(A, E)$ est fermé dans $(BC(A, E), \|\cdot\|_{A,\infty})$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BC^0([a, b], E)^{\mathbb{N}}$ et $f \in BC(A, E)$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{A,\infty} = 0$.

Montrons que $f \in BC^0(A, E)$; pour cela il suffit de montrer que f est continue sur A . Soit $\epsilon > 0$, $t_0 \in A$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{A,\infty} = 0$, on a

$$\exists N_{\frac{\epsilon}{3}} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{\frac{\epsilon}{3}}, \|f_n - f\|_{A,\infty} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Et, puisque $f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}$ est continue au point t_0 , on a

$$\exists \delta'_{\frac{\epsilon}{3}}(t_0) > 0 \text{ t.q. } \forall t \in A, d_A(t, t_0) \leq \delta'_{\frac{\epsilon}{3}}(t_0), \|f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t) - f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t_0)\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Posons $\delta_{\epsilon}(t_0) = \delta'_{\frac{\epsilon}{3}}(t_0)$.

Soit $t \in A$ t.q. $d_A(t, t_0) \leq \delta_{\epsilon}(t_0)$, alors

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t_0)\| &= \|f(t) - f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t) + f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t) - f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t_0) + f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t_0) - f(t_0)\| \\ &= \|f - f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}\|_{A,\infty} + \|f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t) - f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t_0)\| + \|f_{N_{\frac{\epsilon}{3}}}(t_0) - f(t_0)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

□

On établit dans la proposition suivante un résultat d'interversion des limites.

Proposition 1.1.18. *Soit $a_0 < b_0$ dans \mathbb{R} , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B([a_0, b_0[, E)^{\mathbb{N}}$.*

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(b_0-)$ existe dans E .

(ii) $\exists v \in B([a_0, b_0[, E)$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n\|_{[a_0, b_0[, \infty} = 0$.

Alors $v(b_0-)$ existe dans E et $v(b_0-) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(b_0-)$

i.e. $\lim_{t \rightarrow b_0-} (\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{t \rightarrow b_0-} u_n(t))$.

Démonstration. Avec (i), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l_n \in E \text{ t.q. } \forall \epsilon > 0, \exists \delta_n^\epsilon > 0 \text{ t.q. } \forall t \in]b_0 - \delta_n^\epsilon, b_0[\cap [a_0, b_0[, \|u_n(t) - l_n\| < \epsilon$$

et grâce à (ii), on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N_\epsilon, \|v - u_n\|_{[a_0, b_0[, \infty} < \epsilon.$$

Montrons d'abord que la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$; posons $\underline{N} = N_{\frac{\epsilon}{4}}$.

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq \underline{N}$; posons $t_0 = \frac{(b_0 - \delta) + b_0}{2}$ où $\delta = \min\{\delta_n^{\frac{\epsilon}{4}}, \delta_{n+p}^{\frac{\epsilon}{4}}, b_0 - a_0\}$. On a

$$\begin{aligned} \|l_{n+p} - l_n\| &= \|l_{n+p} - u_{n+p}(t_0) + u_{n+p}(t_0) - u_n(t_0) + u_n(t_0) - l_n\| \\ &\leq \|l_{n+p} - u_{n+p}(t_0)\| + \|u_{n+p}(t_0) - u_n(t_0)\| + \|u_n(t_0) - l_n\| \\ &\leq \|l_{n+p} - u_{n+p}(t_0)\| + \|u_{n+p}(t_0) - v(t_0)\| + \|v(t_0) - u_n(t_0)\| \\ &\quad + \|u_n(t_0) - l_n\| \\ &\leq \|l_{n+p} - u_{n+p}(t_0)\| + \|u_{n+p} - v\|_{[a_0, b_0[, \infty} \\ &\quad + \|v - u_n\|_{[a_0, b_0[, \infty} + \|u_n(t_0) - l_n\| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Puisque $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et E est un espace de Banach, on sait qu'il existe $l \in E$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$.

Montrons que $v(b_0-)$ existe dans E et $v(b_0-) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(b_0-) = l$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{N}_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq \overline{N}_\epsilon, \|l_n - l\| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$; posons $N = \max\{N_{\frac{\epsilon}{3}}, \overline{N}_{\frac{\epsilon}{3}}\}$; alors il existe $\delta = \min\{\delta_N^{\frac{\epsilon}{3}}, b_0 - a_0\} > 0$ t.q. si $t \in]b_0 - \delta, b_0[\cap [a_0, b_0[=]b_0 - \delta, b_0[$, on a

$$\begin{aligned} \|v(t) - l\| &= \|v(t) - u_N(t) + u_N(t) - l_N + l_N - l\| \\ &\leq \|v(t) - u_N(t)\| + \|u_N(t) - l_N\| + \|l_N - l\| \\ &\leq \|v - u_N\|_{[a_0, b_0[, \infty} + \|u_N(t) - l_N\| + \|l_N - l\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

i.e. $\lim_{t \rightarrow b_0-} (\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{t \rightarrow b_0-} u_n(t))$. □

Dans la proposition suivante, on énonce que l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées à valeurs dans un espace de Banach sur un intervalle compact de \mathbb{R} est un espace de Banach lorsqu'on fixe une subdivision.

Proposition 1.1.19. *($NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{NPC^0}$) est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans $(NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{NPC^0})$ i.e. on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, \forall q \in \mathbb{N}, \|u_{n+q} - u_n\|_{NPC^0} \leq \epsilon.$$

Puisque pour chaque $n, q \in \mathbb{N}$, $u_{n+q} - u_n \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, et on a, en utilisant la Proposition 1.1.13,

$$\forall n, q \in \mathbb{N}, \|u_{n+q} - u_n\|_{NPC^0} = \|u_{n+q} - u_n\|_{[a, b], \infty}. \quad (1.1.11)$$

D'abord, montrons que $(u_n|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $(BC^0([\tau_p, \tau_{p+1}], E), \|\cdot\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]})$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \geq N_\epsilon, q \in \mathbb{N}$.

En utilisant l'assertion (1.1.11), on a

$$\|u_{n+q}|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]} - u_n|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]}\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}], \infty} \leq \|u_{n+q} - u_n\|_{NPC^0} \leq \epsilon.$$

Puisque $(BC^0([\tau_p, \tau_{p+1}], E), \|\cdot\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}], \infty})$ est un espace de Banach,

$$\exists v^p \in BC^0([\tau_p, \tau_{p+1}], E) \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]} - v^p\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}], \infty} = 0.$$

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \geq N_\epsilon, q \in \mathbb{N}$.

En utilisant l'assertion (1.1.11), on a

$$\|u_{n+q}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} - u_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}\|_{[\tau_i, \tau_{i+1}], \infty} \leq \|u_{n+q} - u_n\|_{NPC^0} \leq \epsilon.$$

Puisque $(BC^0([\tau_i, \tau_{i+1}], E), \|\cdot\|_{[\tau_i, \tau_{i+1}], \infty})$ est un espace de Banach, on a

$$\exists v^i \in BC^0([\tau_i, \tau_{i+1}], E) \text{ t.q. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} - v^i\|_{[\tau_i, \tau_{i+1}], \infty} = 0.$$

De plus, puisque

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(\tau_{i+1}-)$ existe dans E ,

(ii) $v^i \in B([\tau_i, \tau_{i+1}], E)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v^i - u_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}\|_{[\tau_i, \tau_{i+1}], \infty} = 0$,

on obtient que, en utilisant la Proposition 1.1.18, $v^i(\tau_{i+1}-)$ existe dans E .

Considérons la fonction $v : [a, b] \rightarrow E$ définie par

$\forall t \in [a, b]$,

$$v(t) = \begin{cases} v^i(t) & \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[\text{ avec } i \in \{0, \dots, p-1\} \\ v^p(t) & \text{si } t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]. \end{cases}$$

Montrons que $v \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Puisque, pour chaque $i \in \{0, \dots, p-1\}$, $v|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} = v^i$, on obtient que $v|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

De plus, puisque $v|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]} = v^p$, on obtient que $v|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]}$ est continue sur $[\tau_p, \tau_{p+1}]$.

Reste à montrer que : $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}$, $v(\tau_{i+1}-)$ existe dans E .

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$; puisque $v(\tau_{i+1}-) = v^i(\tau_{i+1}-)$ et $v^i(\tau_{i+1}-)$ existent dans E , on obtient que $v(\tau_{i+1}-)$ existe dans E .

Ainsi, $v \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \\ \|u_n - v\|_{NPC^0} &\leq \sup_{t \in]\tau_0, \tau_p[} \|u_n(t) - v(t)\| + \dots + \sup_{t \in]\tau_p, \tau_{p+1}[} \|u_n(t) - v(t)\| \\ &= \|u_n|_{[\tau_0, \tau_1[} - v^1\|_{[\tau_0, \tau_1[, \infty} + \dots + \|u_n|_{[\tau_{p-1}, \tau_p[} - v^{p-1}\|_{[\tau_{p-1}, \tau_p[, \infty} \\ &\quad + \|u_n|_{[\tau_p, \tau_{p+1}[} - v^p\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}[, \infty}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n|_{[\tau_p, \tau_{p+1}[} - v^p\|_{[\tau_p, \tau_{p+1}[, \infty} = 0$ et $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} - v^i\|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[, \infty} = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v\|_{NPC^0} = 0.$$

Par conséquent, $(NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{NPC^0})$ est un espace de Banach. \square

1.2 L'espace des fonctions continues par morceaux à paramètre

Dans cette section, on introduit les fonctions continues par morceaux à paramètre, on établit des résultats qui nous seront utiles dans le cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires à solution PC^1 et du Contrôle Optimal.

Soit E un espace vectoriel normé réel et F un espace topologique séparé. Soit U un ouvert de E . Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.2.1. Une fonction $g : [a, b] \times U \longrightarrow F$ est dite continue par morceaux à paramètre, notée PCP^0 , sur $[a, b] \times U$ lorsqu'il existe $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ qui vérifie

- (i) $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}$, $g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[\times U} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times U, F)$ et $g|_{[\tau_p, \tau_{p+1}[\times U} \in C^0([\tau_p, \tau_{p+1}[\times U, F)$,
- (ii) $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall x \in U$, $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} g(t, z)$ existe dans F .

Nous noterons par $disc1(g) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$ et $PCP^0(I \times U, F)$ l'ensemble des fonctions PCP^0 sur $I \times U$.

Proposition 1.2.2. Soit $g \in PCP^0([a, b] \times U, F)$ t.q. $disc1(g) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Soit $x \in C^0([a, b], U)$. On définit la fonction $y : [a, b] \rightarrow F$ en posant : $\forall t \in [a, b]$, $y(t) = g(t, x(t))$.

Alors $y \in NPC_d^0([a, b], F; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$; montrons que $y|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Notons que

$$y|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} = g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[\times U} \circ (Id_{[a, b]}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}, x|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[})$$

où $Id_{[a, b]}$ est la fonction identité de $[a, b]$. Puisque x et $Id_{[a, b]}$ sont continues sur $[a, b]$, on a $x|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ et $Id_{[a, b]}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ sont continues sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ dans respectivement U et $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Et puisque $g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[\times U}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[\times U$, par le théorème de composition des fonctions continues (p.43 dans [35]), on obtient que $y|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Par conséquent, y est continue sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ et

$$y(\tau_i+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} y|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t) = y|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(\tau_i) = y(\tau_i).$$

Notons que

$$y_{|[\tau_p, \tau_{p+1}] = g_{|[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U} \circ (Id_{[a, b]}_{|[\tau_p, \tau_{p+1}]}, x_{|[\tau_p, \tau_{p+1}]}) .$$

On montre par le même raisonnement que $y_{|[\tau_p, \tau_{p+1}]}$ est continue sur $[\tau_p, \tau_{p+1}]$.

Par conséquent, on a

$$y(\tau_p+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_p \\ t > \tau_p}} y_{|[\tau_p, \tau_{p+1}]}(t) = y_{|[\tau_p, \tau_{p+1}]}(\tau_p) = y(\tau_p) \text{ et } y(b-) = y(b) .$$

Reste à montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $y(\tau_i-)$ existe dans F .

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; puisque

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i-} (t, x(t)) = (\tau_i, x(\tau_i)) \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i- \\ z \rightarrow x(\tau_i)}} g(t, z) \text{ existe dans } F,$$

en utilisant le théorème de composition des limites (p.39 de [35]), on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i- \\ z \rightarrow x(\tau_i)}} g(t, z) = \lim_{t \rightarrow \tau_i-} g(t, x(t)) = y(\tau_i-) \text{ existe dans } F .$$

Ainsi, $y \in NPC_d^0([a, b], F; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. □

Proposition 1.2.3. Soit $g \in PCP^0([a, b] \times U, F)$ t.q. $disc1(g) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq q+1} \in Sub([a, b])$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $x \in NPC_d^0([a, b], U; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq q+1})$.

On définit la fonction $y : [a, b] \rightarrow F$ en posant :

$$\forall t \in [a, b], y(t) = g(t, x(t)) .$$

Alors, il existe une famille finie $(\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1} \in Sub([a, b])$ avec

$$\{\rho_0, \dots, \rho_{r+1}\} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1}\} \cup \{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\} \text{ t.q.}$$

$$y \in NPC_d^0([a, b], F; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1}) .$$

Démonstration. Posons $A := \{\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1}\} \cup \{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\}$. Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $r \in \mathbb{N}$ t.q. $card(A) = r+1$. Posons $\rho_0 = a$ et $\forall i \in \{1, \dots, r+1\}$, $\rho_i = \min A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$. Puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, r+1\}$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$ est strictement inclus dans $[a, b]$, on a $\rho_0 < \rho_i$. De plus, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r+1\}$ t.q. $i < j$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{j-1}\}$ est inclus strictement dans $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$, donc $\rho_i < \rho_j$.

Par conséquent, $(\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1} \in Sub([a, b])$ avec $\{\rho_0, \dots, \rho_{r+1}\} = A$.

Soit $i \in \{0, \dots, r-1\}$; montrons que $y_{|[\rho_i, \rho_{i+1}]}$ est continue sur $[\rho_i, \rho_{i+1}]$. Notons que

$$y_{|[\rho_i, \rho_{i+1}]} = g_{|[\rho_i, \rho_{i+1}] \times U} \circ (Id_{[a, b]}_{|[\rho_i, \rho_{i+1}]}, x_{|[\rho_i, \rho_{i+1}]}) .$$

Puisqu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ et $i_1 \in \{0, \dots, q\}$ t.q. $\rho_i \in [\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}[$ et $\rho_i \in [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}[$, on a $[\rho_i, \rho_{i+1}[\subset [\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}[$ et $[\rho_i, \rho_{i+1}[\subset [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1+1}[$.

Par conséquent, $x_{|[\rho_i, \rho_{i+1}[}$ est continue sur $[\rho_i, \rho_{i+1}[$ et $g_{|[\rho_i, \rho_{i+1}] \times U}$ est continue sur $[\rho_i, \rho_{i+1}] \times U$.

Ainsi, en utilisant la continuité de $Id_{[a, b]}_{|[\rho_i, \rho_{i+1}[}$ sur $[\rho_i, \rho_{i+1}[$ et le théorème de composition des fonctions continues, on obtient que $y_{|[\rho_i, \rho_{i+1}[}$ est continue sur $[\rho_i, \rho_{i+1}[$.

Par conséquent, y est continue sur $]\rho_i, \rho_{i+1}[$ et

$$y(\rho_i+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \rho_i \\ t > \rho_i}} y_{|[\rho_i, \rho_{i+1}[}(t) = y_{|[\rho_i, \rho_{i+1}[}(\rho_i) = y(\rho_i) .$$

Notons que

$$y|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]} = g|_{[\rho_r, \rho_{r+1}] \times U} \circ (Id_{[a, b]|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]}, x|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]}) .$$

On montre par le même raisonnement que $y|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]}$ est continue sur $[\rho_r, \rho_{r+1}]$.

Par conséquent, on a

$$y(\rho_r+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \rho_r \\ t > \rho_r}} y|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]}(t) = y|_{[\rho_r, \rho_{r+1}]}(\rho_r) = y(\rho_r) \text{ et } y(b-) = y(b).$$

Reste à montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $y(\rho_i-)$ existe dans F .

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$; puisque

$$\lim_{t \rightarrow \rho_i-} (t, x(t)) = (\rho_i, x(\rho_i-)) \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow \rho_i- \\ z \rightarrow x(\rho_i-)}} g(t, z) \text{ existe dans } F,$$

en utilisant le théorème de composition des limites (p.39 de [35]), on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \rho_i- \\ z \rightarrow x(\rho_i-)}} g(t, z) = \lim_{t \rightarrow \rho_i-} g(t, x(t)) = y(\rho_i-) \text{ existe dans } F.$$

Ainsi $y \in NPC_d^0([a, b], F; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1})$. □

Proposition 1.2.4. Soit \mathcal{P} un espace topologique séparé et G un espace vectoriel normé réel.

Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$.

Soit $f \in C^0([a, b] \times U \times \mathcal{P}, G)$, soit $u \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{P}; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

On définit $g : [a, b] \times U \rightarrow G$ en posant $g(t, x) = f(t, x, u(t))$.

Alors $g \in PCP^0([a, b] \times U, G)$ avec $disc1(g) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Démonstration. Considérons les fonctions linéaires continues $\pi_1 : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$, $\pi_1(t, x) = t$, et $\pi_2 : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ définie par, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$, $\pi_2(t, x) = x$.

(i) Pour chaque $i \in \{0, \dots, p-1\}$, prouvons que

$$g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}] \times U, G) \text{ et } g|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U} \in C^0([\tau_p, \tau_{p+1}] \times U, G).$$

Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Posons $\underline{\pi}_1^i = \pi_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U}$, $\underline{\pi}_2^i = \pi_2|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U}$, $\underline{\pi}_1^p = \pi_1|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U}$ et $\underline{\pi}_2^p = \pi_2|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U}$.

Notons que

$$g|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U} = f \circ (\underline{\pi}_1^i, \underline{\pi}_2^i, u|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U} \circ \underline{\pi}_1^i)$$

et

$$g|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U} = f \circ (\underline{\pi}_1^p, \underline{\pi}_2^p, u|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U} \circ \underline{\pi}_1^p).$$

De plus, puisque $u \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{P}; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a

$$u|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}], \mathcal{P}) \text{ et } u|_{[\tau_p, \tau_{p+1}]} \in C^0([\tau_p, \tau_{p+1}], \mathcal{P}).$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 2 (propriété d, p.41 de [35]), on a

$$(\underline{\pi}_1^i, \underline{\pi}_2^i, u|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U} \circ \underline{\pi}_1^i) \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}] \times U, [\tau_i, \tau_{i+1}] \times U \times \mathcal{P})$$

et

$$(\underline{\pi}_1^p, \underline{\pi}_2^p, u|_{[\tau_p, \tau_{p+1}] \times U} \circ \underline{\pi}_1^p) \in C^0([\tau_p, \tau_{p+1}] \times U, [\tau_p, \tau_{p+1}] \times U \times \mathcal{P}).$$

Ainsi, puisque $f \in C^0([a, b] \times U \times \mathcal{P}, G)$, on a, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues (3^o p.43 de [35]),

$$g_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[\times U} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times U, G) \text{ et } g_{|[\tau_p, \tau_{p+1}[\times U} \in C^0([\tau_p, \tau_{p+1}[\times U, G).$$

(ii) Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, et pour chaque $x \in U$, prouvons que $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} g(t, z)$ existe dans G .

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et $x \in U$; alors on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} (t, z, u(t)) = (\tau_i, x, u(\tau_i-)).$$

Par conséquent, puisque $f \in C^0([a, b] \times U \times \mathcal{P}, G)$, on a, en utilisant le théorème de composition des limites (p.39 de [35]),

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} g(t, z) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} f(t, z, u(t)) = f(\tau_i, x, u(\tau_i-)).$$

Donc $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i^- \\ z \rightarrow x}} g(t, z)$ existe dans G . □

Proposition 1.2.5. *Soit \mathcal{P} un espace topologique séparé et G un espace vectoriel normé réel.*

Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$.

Soit $f \in C^0([a, b] \times \mathcal{P}, G)$, soit $u \in \text{NPC}_d^0([a, b], \mathcal{P}; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Alors la fonction $y : [a, b] \rightarrow G$, définie par, pour tout $t \in [a, b]$, $y(t) := f(t, u(t))$, appartient à $\text{NPC}_d^0([a, b], G; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. Soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$; montrons que $y_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Notons que

$$y_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[} = f \circ (Id_{[a, b]_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[}, u_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[})$$

Puisque $u_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ et $Id_{[a, b]_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ sont continues sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ dans respectivement \mathcal{P} et $[a, b]$, et puisque $f \in C^0([a, b] \times \mathcal{P}, G)$ par le théorème de composition des fonctions continues (p.43 de [35]), on obtient que $y_{|[\tau_i, \tau_{i+1}[}$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$. On montre par le même raisonnement que $y_{|[\tau_p, \tau_{p+1}[}$ est continue sur $[\tau_p, \tau_{p+1}[$.

Reste à montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $y(\tau_i-)$ existe dans G .

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; puisque

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} (t, u(t)) = (\tau_i, u(\tau_i-)),$$

en utilisant le théorème de composition des limites (p.39 de [35]), on a

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} f(t, u(t)) = y(\tau_i-) \text{ existe dans } G.$$

Ainsi, $y \in \text{NPC}_d^0([a, b], G; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. □

1.3 L'espace des fonctions continûment dérivables par morceaux

Dans cette section, on étudie les fonctions continûment dérivables par morceaux (C^1 par morceaux ou PC^1) sur un intervalle compact à valeurs dans un espace de Banach.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.3.1. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ une fonction.

On dit que φ est continûment dérivable par morceaux (C^1 par morceaux ou PC^1) de $[a, b]$ dans E lorsque φ est continûment dérivable sur $[a, b]$ ou lorsqu'il existe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$, avec $p \in \mathbb{N}$, appelée support des coins de φ , t.q.

- $\varphi \in C^0([a, b], E)$
- $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ' existe et continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$
- $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi'(\tau_i+)$ existe dans E
- $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi'(\tau_i-)$ existe dans E .

Notations 1.3.2. On considère les ensembles de fonctions suivants :

- Pour chaque espace vectoriel normé réel X et Y , pour chaque A ouvert non vide de X , $C^1(A, Y)$ est l'ensemble des fonctions continûment Fréchet-différentiables de A dans Y . De plus, lorsqu'une fonction $f : A \rightarrow Y$ est Fréchet-différentiable en un point $x \in A$, on note $D_F f(x)$ la Fréchet-différentielle de f au point x .
- $C^1([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions dérivables de $[a, b]$ dans E et de dérivée continue de $[a, b]$ dans E ,
- Pour tout ensemble \mathcal{O} ouvert de E , $C^1([a, b], \mathcal{O})$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^1([a, b], E)$ t.q. $\varphi([a, b]) \subset \mathcal{O}$.
- $AC([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions absolument continues de $[a, b]$ dans E .
- $PC^1([a, b], E)$ est l'ensemble des fonctions C^1 par morceaux de $[a, b]$ dans E ,
- $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est l'ensemble des fonctions φ dans $PC^1([a, b], E)$ tel que l'ensemble des points où φ' n'existe pas est inclus dans l'ensemble $\{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\}$.
- Pour tout ensemble \mathcal{O} ouvert de E ,

$$PC^1([a, b], \mathcal{O}, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) = \{\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) : \varphi([a, b]) \subset \mathcal{O}\}.$$

Une fonction C^1 par morceaux pouvant ne pas être dérivable en un nombre fini de points, on est amené à introduire une notion de dérivée étendue.

Définition 1.3.3. Soit $\varphi \in PC^1([a, b], E)$. On appelle dérivée étendue de φ la fonction $\mathbf{d}\varphi : [a, b] \rightarrow E$ définie par

$$\mathbf{d}\varphi(t) = \begin{cases} \varphi'(t) & \text{si } t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : i \in \{0, \dots, p+1\}\} \\ \varphi'(\tau_i+) & \text{si } t = \tau_i \text{ avec } i \in \{0, \dots, p\} \\ \varphi'(b-) & \text{si } t = b, \end{cases}$$

où la famille $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$, avec $p \in \mathbb{N}$, est le support des coins de φ .

Proposition 1.3.4. Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$, $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([a, b], E)$.

Démonstration. Considérons la fonction $\tilde{0} : [a, b] \rightarrow E$ définie par $\tilde{0}(t) = 0_E$. Puisque $\tilde{0}$ est une fonction constante, $\tilde{0} \in C^1([a, b], E)$, ce qui implique que $\tilde{0} \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$; alors $\lambda\varphi + \psi$ est continue sur $[a, b]$ comme combinaison linéaire de deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, pour chaque $t \in] \tau_i, \tau_{i+1}[$, par propriétés des fonctions dérivables, on a $(\lambda\varphi + \psi)'(t) = \lambda\varphi'(t) + \psi'(t)$.

Par conséquent, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, $(\lambda\varphi + \psi)' = \lambda\varphi' + \psi'$ est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$ comme combinaison linéaire de deux fonctions continues sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$.

De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, par propriétés des limites, on a

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi + \psi)'(\tau_i+) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} (\lambda\varphi + \psi)'(t) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi'(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \psi'(t) \\ &= \lambda\varphi'(\tau_i+) + \psi'(\tau_i+) \text{ existe dans } E. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, p+1\}$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi + \psi)'(\tau_i-) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} (\lambda\varphi + \psi)'(t) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \varphi'(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \psi'(t) \\ &= \lambda\varphi'(\tau_i-) + \psi'(\tau_i-) \text{ existe dans } E. \end{aligned}$$

Ainsi, $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([a, b], E)$. \square

Proposition 1.3.5. $PC^1([a, b], E)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([a, b], E)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in PC^1([a, b], E)$.

Puisque $\varphi_1 \in PC^1([a, b], E)$, il existe $(\alpha_i^1)_{0 \leq i \leq r^1+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

$\varphi_1 \in PC^1([a, b], E; (\alpha_i^1)_{0 \leq i \leq r^1+1})$.

Puisque $\varphi_2 \in PC^1([a, b], E)$, il existe $(\alpha_i^2)_{0 \leq i \leq r^2+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

$\varphi_2 \in PC^1([a, b], E; (\alpha_i^2)_{0 \leq i \leq r^2+1})$.

Posons $A := \{\alpha_i^1 : 0 \leq i \leq r^1+1\} \cup \{\alpha_i^2 : 0 \leq i \leq r^2+1\}$.

Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $r \in \mathbb{N}$ t.q. $card(A) = r+1$.

Posons $\rho_0 = a$ et $\forall i \in \{1, \dots, r+1\}$, $\rho_i = \min A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$.

Puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, r+1\}$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$ est strictement inclus dans $[a, b]$, on a $\rho_0 < \rho_i$. De plus, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r+1\}$ t.q. $i < j$, on a $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{j-1}\}$ est inclus strictement dans $A \setminus \{\rho_0, \dots, \rho_{i-1}\}$, donc $\rho_i < \rho_j$.

Par conséquent, $(\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1} \in Sub([a, b])$ avec $\{\rho_0, \dots, \rho_{r+1}\} = A$.

Par conséquent, $\varphi_1, \varphi_2 \in PC^1([a, b], E; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1})$. Ainsi, en utilisant la Proposition 1.3.4, on a $\lambda\varphi_1 + \varphi_2 \in PC^1([a, b], E; (\rho_i)_{0 \leq i \leq r+1})$. i.e. $\lambda\varphi_1 + \varphi_2 \in PC^1([a, b], E)$. \square

Proposition 1.3.6. Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$.

Pour chaque $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a $\mathbf{d}\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. Soit $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; on a

$$\mathbf{d}\varphi|_{] \tau_i, \tau_{i+1}[} = \varphi'|_{] \tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0(] \tau_i, \tau_{i+1}[, E). \quad (1.3.1)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; on a

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i+} \mathbf{d}\varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \tau_i+} \varphi'(t) = \varphi'(\tau_i+) = \mathbf{d}\varphi(\tau_i). \quad (1.3.2)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p+1\}$; on a

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i-} \mathbf{d}\varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \tau_i-} \varphi'(t) = \varphi'(\tau_i-). \quad (1.3.3)$$

De plus, en utilisant l'assertion (1.3.3), on a

$$\lim_{t \rightarrow b-} \mathbf{d}\varphi(t) = \lim_{t \rightarrow b-} \varphi'(t) = \varphi'(b-) = \mathbf{d}\varphi(b). \quad (1.3.4)$$

Par conséquent, en utilisant les assertions (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) et (1.3.4), on a

$$\mathbf{d}\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}).$$

□

Proposition 1.3.7. *L'opérateur*

$$\mathbf{d} := \left(\begin{array}{ccc} PC^1([a, b], E) & \longrightarrow & NPC_d^0([a, b], E) \\ \varphi & \longmapsto & \mathbf{d}\varphi \end{array} \right)$$

est linéaire de $PC^1([a, b], E)$ dans $NPC_d^0([a, b], E)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E)$.

En faisant un raisonnement similaire à celui de la démonstration de la Proposition 1.3.5, on sait qu'il existe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ t.q. $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Soit $t \in [a, b]$.

Si $t \in [a, b] \setminus \{\tau_i : i \in \{0, \dots, p+1\}\}$, on a

$$\lambda \mathbf{d}\varphi(t) + \mathbf{d}\psi(t) = \lambda \varphi'(t) + \psi'(t) = (\lambda \varphi + \psi)'(t) = \mathbf{d}(\lambda \varphi + \psi)(t).$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$. Si $t = \tau_i$, on a

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{d}\varphi(\tau_i) + \mathbf{d}\psi(\tau_i) &= \lambda \varphi'(\tau_i+) + \psi'(\tau_i+) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi'(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \psi'(t) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} (\lambda \varphi + \psi)'(t) \\ &= (\lambda \varphi + \psi)'(\tau_i+) = \mathbf{d}(\lambda \varphi + \psi)(\tau_i). \end{aligned}$$

Si $t = b$, on a

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{d}\varphi(b) + \mathbf{d}\psi(b) &= \lambda \varphi'(b-) + \psi'(b-) \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \varphi'(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \psi'(t) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} (\lambda \varphi + \psi)'(t) \\ &= (\lambda \varphi + \psi)'(b-) = \mathbf{d}(\lambda \varphi + \psi)(b). \end{aligned}$$

D'où $\mathbf{d}(\lambda \varphi + \psi)(t) = \lambda \mathbf{d}\varphi(t) + \mathbf{d}\psi(t)$. Ainsi, on a prouvé que

$$\mathbf{d}(\lambda \varphi + \psi) = \lambda \mathbf{d}\varphi + \mathbf{d}\psi.$$

□

Les quatre propositions suivantes sont issues de [35].

Proposition 1.3.8. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow E$ une fonction continue sur I et dérivable à droite sur $\text{int}(I)$. Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall t \in \text{int}(I), f'_d(t) = 0$.*

Démonstration. [35] p.115.

□

Proposition 1.3.9. Théorème de continuité de la primitive. *Soit I un intervalle d'intérieur non vide inclus dans \mathbb{R} , $f : I \rightarrow E$ une fonction localement Riemann-intégrable et $\mathbf{a} \in I$.*

L'application primitive $[t \mapsto \int_{\mathbf{a}}^t f(s) ds]$ est continue sur I .

Démonstration. Voir [35] p.226-227. □

Proposition 1.3.10. Théorème de dérivabilité de la primitive. *Soit I un intervalle d'intérieur non vide inclus dans \mathbb{R} , $f : I \rightarrow E$ une fonction localement Riemann-intégrable et $\mathbf{a} \in I$.*

Si f admet une limite à droite (resp. à gauche) au point $t_0 \in I$, alors l'application primitive $[t \mapsto \int_{\mathbf{a}}^t f(s) ds]$ admet $f(t_0+)$ (resp. $f(t_0-)$) pour dérivée à droite (resp. à gauche) au point t_0 .

Démonstration. Voir [35] p.227. □

Proposition 1.3.11. Corollaire du théorème de dérivabilité de la primitive. *Soit I un intervalle d'intérieur non vide inclus dans \mathbb{R} , $f : I \rightarrow E$ une fonction localement Riemann-intégrable et $\mathbf{a} \in I$.*

L'application primitive $[t \mapsto \int_{\mathbf{a}}^t f(s) ds]$ est dérivable en tout $t_0 \in I$ en lequel f est continue, la dérivée en t_0 étant alors $f(t_0)$.

Démonstration. Voir [35] p.227. □

Théorème 1.3.12. *Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ une fonction.*

Si $\varphi \in PC^1([a, b], E)$ alors on a

$$\forall t_0 \in [a, b], \forall t \in [a, b], \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{d}\varphi(s) ds.$$

Démonstration. Soit $t_0 \in [a, b]$. Puisque $\varphi \in PC^1([a, b], E)$, on sait qu'il existe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ t.q. $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Puisque $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a $\mathbf{d}\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, donc $\mathbf{d}\varphi$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Par conséquent, on peut considérer les fonctions $\psi : I \rightarrow E$, définie par : $\forall t \in I, \psi(t) := \int_{t_0}^t \mathbf{d}\varphi(s) ds$, et $f := \varphi - \psi$.

Puisque $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a $\mathbf{d}\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ donc en particulier $\mathbf{d}\varphi$ est continue à droite sur $[a, b[$.

Donc d'après la Proposition 1.3.10, on obtient que ψ est dérivable à droite sur $[a, b[$ et, $\forall t \in [a, b[, \psi'_d(t) = \mathbf{d}\varphi(t)$.

Par conséquent, f est dérivable à droite sur $[a, b[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables à droite sur $[a, b[$ (voir [35] p.108), et

$$\forall t \in [a, b[, f'_d(t) = \varphi'_d(t) - \psi'_d(t) = \mathbf{d}\varphi(t) - \mathbf{d}\varphi(t) = 0.$$

Ainsi, en utilisant la Proposition 1.3.8, on a : $\forall t \in [a, b], f(t) = f(t_0) = \varphi(t_0)$.

D'où

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{d}\varphi(s) ds.$$

□

Lemme 1.3.13. *Soit Ω un ouvert de E . Soit F un espace vectoriel normé réel. Soit $T \in C^1(\Omega, F)$ et $\varphi \in PC^1([a, b], \Omega)$.*

Alors $\psi = T \circ \varphi \in PC^1([a, b], F)$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\psi(t) = D_F T(\varphi(t)) \cdot \mathbf{d}\varphi(t).$$

Démonstration. Puisque $\varphi \in PC^1([a, b], \Omega)$, il existe $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq r+1} \in Sub([a, b])$ t.q.

(a) $\varphi \in C^0([a, b], \Omega)$

- (b) $\forall i \in \{0, \dots, r\}$ φ' existe et est continue sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$
- (c) $\forall i \in \{0, \dots, r\}$ $\varphi'(\alpha_i+)$ existe dans E
- (d) $\forall i \in \{1, \dots, r+1\}$ $\varphi'(\alpha_i-)$ existe dans E .

Avec (a), puisque $T \in C^1(\Omega, F)$, on a, comme composée de fonctions continues,

$$\psi \in C^0([a, b], F). \quad (1.3.5)$$

Considérons l'opérateur bilinéaire continu $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(E, F) \times E \rightarrow F$, défini par, pour tout $(l, x) \in \mathcal{L}(E, F) \times E$, $\mathcal{Q}(l, x) := l \cdot x$.

Soit $i \in \{0, \dots, r\}$.

Si $t \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$, puisque $D_F T(\varphi(t))$ et $\varphi'(t)$ existent, d'après le théorème de composition des fonctions différentiables, $\psi'(t)$ existe et

$$\psi'(t) = D_F T(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(t)), \varphi'(t)).$$

Ainsi on obtient

$$\forall i \in \{0, \dots, r\}, \psi'_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[} = \mathcal{Q} \circ (D_F T \circ \varphi_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}, \varphi'_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}). \quad (1.3.6)$$

Soit $i \in \{0, \dots, r\}$.

Puisque $\varphi_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[} \in C^0(] \alpha_i, \alpha_{i+1}[, \Omega)$ grâce à (a), et puisque $D_F T \in C^0(\Omega, \mathcal{L}(E, F))$, on a, par composition des fonctions continues,

$$D_F T \circ \varphi_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[} \in C^0(] \alpha_i, \alpha_{i+1}[, \mathcal{L}(E, F)).$$

De plus, en utilisant (b), on obtient

$$(D_F T \circ \varphi_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}, \varphi'_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}) \in C^0(] \alpha_i, \alpha_{i+1}[, \mathcal{L}(E, F) \times E).$$

Ainsi, puisque $\mathcal{Q} \in C^0(\mathcal{L}(E, F) \times E, F)$, on a, par composition de fonctions continues et (1.3.6),

$$\psi'_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[} \in C^0(] \alpha_i, \alpha_{i+1}[, F).$$

Donc on a

$$\forall i \in \{0, \dots, r\}, \psi'_{|] \alpha_i, \alpha_{i+1}[} \in C^0(] \alpha_i, \alpha_{i+1}[, F). \quad (1.3.7)$$

Soit $i \in \{0, \dots, r\}$; on a

$$\begin{aligned} \psi'(\alpha_i+) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}} \psi'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}} \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(t)), \varphi'(t)) \text{ grâce à (1.3.6)} \\ &= \mathcal{Q}\left(\lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_i, \alpha_{i+1}[}} (D_F T(\varphi(t)), \varphi'(t))\right) \\ &= \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(\alpha_i+)), \varphi'(\alpha_i+)) \\ &= \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(\alpha_i)), \varphi'(\alpha_i+)). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\forall i \in \{0, \dots, r\}, \psi'(\alpha_i+) = D_F T(\varphi(\alpha_i)) \cdot \varphi'(\alpha_i+). \quad (1.3.8)$$

Soit $i \in \{1, \dots, r+1\}$; on a

$$\begin{aligned} \psi'(\alpha_i-) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_{i-1}, \alpha_i[}} \psi'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_{i-1}, \alpha_i[}} \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(t)), \varphi'(t)) \text{ grâce à (1.3.6)} \\ &= \mathcal{Q}\left(\lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_i \\ t \in] \alpha_{i-1}, \alpha_i[}} (D_F T(\varphi(t)), \varphi'(t))\right) \\ &= \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(\alpha_i-)), \varphi'(\alpha_i-)) \\ &= \mathcal{Q}(D_F T(\varphi(\alpha_i)), \varphi'(\alpha_i-)). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, r+1\}, \psi'(\alpha_i-) = D_{FT}(\varphi(\alpha_i)) \cdot \varphi'(\alpha_i-). \quad (1.3.9)$$

Ainsi, grâce à (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7), (1.3.8) et (1.3.9), on a $\psi \in PC^1([a, b], F)$ et, en utilisant (1.3.6), (1.3.8) et (1.3.9), on a

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\psi(t) = D_{FT}(\varphi(t)) \cdot \mathbf{d}\varphi(t).$$

□

Théorème 1.3.14. *Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$.*

Soit F un espace vectoriel normé réel.

Soit $\varphi_1 \in PC^1([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\varphi_2 \in PC^1([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, alors

$$(\varphi_1, \varphi_2) := [t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))] \in PC^1([a, b], E \times F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}),$$

et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}(\varphi_1, \varphi_2)(t) = (\mathbf{d}\varphi_1(t), \mathbf{d}\varphi_2(t)).$$

Démonstration. Puisque $\varphi_1 \in PC^1([a, b], E, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\varphi_2 \in PC^1([a, b], F, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on a

- (a) $\varphi_1 \in C^0([a, b], E)$ et $\varphi_2 \in C^0([a, b], F)$
- (b) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ_1' et φ_2' existent sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$ et sont continues sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$
- (c) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi_1'(\tau_i+)$ existe dans E et $\varphi_2'(\tau_i+)$ existe dans F
- (d) $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi_1'(\tau_i-)$ existe dans E et $\varphi_2'(\tau_i-)$ existe dans F .

Avec (a), en utilisant [35] (2.2.3. propriété 2° d p.41), on a

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in C^0([a, b], E \times F). \quad (1.3.10)$$

En utilisant (b) et [35] (4.1.1. propriété b) p.108), on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \forall t \in] \tau_i, \tau_{i+1}[, (\varphi_1, \varphi_2)'(t) \text{ existe et } (\varphi_1, \varphi_2)'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)). \quad (1.3.11)$$

En utilisant (1.3.11) et [35] (2.2.3. propriété 2° d p.41), on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, (\varphi_1, \varphi_2)'_{] \tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0(] \tau_i, \tau_{i+1}[, E \times F). \quad (1.3.12)$$

De plus, grâce à (c), (d), (1.3.12) et [35] (2.2.2 théorème 4° p.40), on a

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad (\varphi_1, \varphi_2)'(\tau_i+) = (\varphi_1'(\tau_i+), \varphi_2'(\tau_i+)) \in E \times F \\ \forall i \in \{1, \dots, p+1\}, \quad (\varphi_1, \varphi_2)'(\tau_i-) = (\varphi_1'(\tau_i-), \varphi_2'(\tau_i-)) \in E \times F. \end{array} \right\} \quad (1.3.13)$$

Avec (1.3.10), (1.3.11), (1.3.12) et (1.3.13), on a $(\varphi_1, \varphi_2) \in PC^1([a, b], E \times F; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et en utilisant (1.3.11) et (1.3.13), on a

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}(\varphi_1, \varphi_2)(t) = (\mathbf{d}\varphi_1(t), \mathbf{d}\varphi_2(t)).$$

□

Proposition 1.3.15. *Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}([a, b])$.*

Soit $\psi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $t_0 \in [a, b]$. Considérons la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow E$, définie par, pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \psi(s) ds$.

Alors $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\varphi(t) = \psi(t).$$

Démonstration. Puisque $\psi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, on obtient que, d'après la Proposition 1.1.15, ψ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, donc φ est bien définie de $[a, b]$ dans E .

On sait, d'après la Proposition 1.3.9, que $[t \mapsto \int_{t_0}^t \psi(s) ds]$ est continue sur $[a, b]$ d'où

$$\varphi \in C^0([a, b], E). \quad (1.3.14)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; ψ est continue sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, d'après la Proposition 1.3.11, φ est dérivable sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$ et $\varphi' = \psi$ sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, donc la dérivée de φ est continue sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Par conséquent, on a prouvé que

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad \varphi' \text{ existe et est continue sur }]\tau_i, \tau_{i+1}[\\ \text{et } \forall t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad \varphi'(t) = \psi(t). \end{array} \right\} \quad (1.3.15)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; puisque $\psi(\tau_i+)$ existe dans E , d'après la Proposition 1.3.10, on obtient que $\varphi'(\tau_i+) = \psi(\tau_i+) = \psi(\tau_i)$ existe dans E .

Donc on a prouvé que

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad \varphi'(\tau_i+) \text{ existe et } \varphi'(\tau_i+) = \psi(\tau_i). \quad (1.3.16)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p+1\}$; puisque $\psi(\tau_i-)$ existe dans E , d'après la Proposition 1.3.10, on obtient que $\varphi'(\tau_i-) = \psi(\tau_i-)$ existe dans E .

Ainsi on a prouvé que

$$\forall i \in \{1, \dots, p+1\}, \quad \varphi'(\tau_i-) \text{ existe et } \varphi'(\tau_i-) = \psi(\tau_i-). \quad (1.3.17)$$

Par conséquent, en utilisant (1.3.14), (1.3.15), (1.3.16) et (1.3.17), on a $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. Puisque $\psi(b-) = \psi(b)$, on a, en utilisant (1.3.17),

$$\varphi'(b-) = \psi(b).$$

Par conséquent, en utilisant (1.3.15) et (1.3.16), on a

$$\forall t \in [a, b], \quad \mathbf{d}\varphi(t) = \psi(t).$$

□

Considérons la fonctionnelle

$$\|\cdot\|_{PC^1} := \left(\begin{array}{ll} PC^1([a, b], E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto \|\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty. \end{array} \right)$$

Théorème 1.3.16. $\|\cdot\|_{PC^1}$ est une norme sur $PC^1([a, b], E)$.

Démonstration. (i) Soit $\varphi \in PC^1([a, b], E)$.

$$\|\varphi\|_{PC^1} = \|\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty \geq 0.$$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in PC^1([a, b], E)$; on a

$$\begin{aligned} \|\lambda\varphi\|_{PC^1} &= \|\lambda\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}(\lambda\varphi)\|_\infty \\ &= |\lambda| \|\varphi(a)\| + |\lambda| \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty \\ &= |\lambda| \|\varphi\|_{PC^1}. \end{aligned}$$

(iii) $\|\tilde{0}\|_{PC^1} = \|\tilde{0}(a)\| + \|\mathbf{d}\tilde{0}\|_\infty = 0$ et pour tout $\varphi \in PC^1([a, b], E)$, on a

$$\begin{aligned} &\|\varphi\|_{PC^1} = 0 \\ \Rightarrow &\|\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty = 0 \\ \Rightarrow &\|\varphi(a)\| = 0 \text{ et } \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty = 0 \\ \Rightarrow &\varphi(a) = 0 \text{ et } \mathbf{d}\varphi = \tilde{0}. \end{aligned}$$

Soit $t \in [a, b]$; puisque $\varphi \in PC^1([a, b], E)$ on a

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \mathbf{d}\varphi(s) \, ds,$$

d'où $\varphi(t) = 0$ donc $\varphi = \tilde{0}$.

(iv) Soit $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E)$,

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|_{PC^1} &= \|\varphi(a) + \psi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi + \mathbf{d}\psi\|_\infty \\ &\leq \|\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi\|_\infty + \|\psi(a)\| + \|\mathbf{d}\psi\|_\infty \\ &= \|\varphi\|_{PC^1} + \|\psi\|_{PC^1}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.17. *L'opérateur $\mathbf{d} \in \mathcal{L}((PC^1([a, b], E), \|\cdot\|_{PC^1}), (NPC_d^0([a, b], E), \|\cdot\|_\infty))$.*

Démonstration. Soit $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E)$; on a

$$\|\mathbf{d}\varphi - \mathbf{d}\psi\|_\infty \leq \|\varphi(a) - \psi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi - \mathbf{d}\psi\|_\infty = \|\varphi - \psi\|_{PC^1}.$$

Par conséquent, l'opérateur \mathbf{d} est 1-lipschitzien de $PC^1([a, b], E)$ dans $NPC_d^0([a, b], E)$. Ainsi, en utilisant la Proposition 1.3.7, on a

$$\mathbf{d} \in \mathcal{L}((PC^1([a, b], E), \|\cdot\|_{PC^1}), (NPC_d^0([a, b], E), \|\cdot\|_\infty)).$$

□

Dans la suite, on fixe une famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$ avec $p \in \mathbb{N}$. Considérons l'opérateur

$$\mathcal{E} := \left(\begin{array}{ccc} PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) & \longrightarrow & E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(a), \mathbf{d}\varphi). \end{array} \right)$$

Proposition 1.3.18. *\mathcal{E} est un opérateur linéaire de $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ dans $E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\varphi, \psi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$;

$$\mathcal{E}(\lambda\varphi + \psi) = ((\lambda\varphi + \psi)(a), \mathbf{d}(\lambda\varphi + \psi)) = (\lambda\varphi(a) + \psi(a), \lambda\mathbf{d}\varphi + \mathbf{d}\psi) = \lambda(\varphi(a), \mathbf{d}\varphi) + (\psi(a), \mathbf{d}\psi) = \lambda\mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{E}(\psi). \quad \square$$

On considère la norme usuelle pour un produit cartésien

$$\|\cdot\|_{E \times NPC^0} := \left(\begin{array}{ccc} E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, \varphi) & \longmapsto & \|x\| + \|\varphi\|_{NPC^0}. \end{array} \right)$$

Proposition 1.3.19. *\mathcal{E} est une isométrie sur $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ dans $E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$. On a

$$\|\mathcal{E}(\varphi)\|_{E \times NPC^0} = \|(\varphi(a), \mathbf{d}\varphi)\|_{E \times NPC^0} = \|\varphi(a)\| + \|\mathbf{d}\varphi\|_{NPC^0} = \|\varphi\|_{PC^1}.$$

□

Proposition 1.3.20. \mathcal{E} est une bijection de $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ dans $E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Démonstration. — \mathcal{E} est une application injective car c'est une isométrie linéaire.

— \mathcal{E} est une application surjective.

Soit $(v, \psi) \in E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, considérons les fonctions $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow E$, définie par, $\forall t \in [a, b]$, $\varphi_1(t) = v$, $\varphi_2 : [a, b] \rightarrow E$, définie par, $\forall t \in [a, b]$, $\varphi_2(t) = \int_a^t \psi(s) ds$.

Posons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Puisque $\varphi_1 \in C^1([a, b], E)$, on a $\varphi_1 \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\mathbf{d}\varphi_1(t) = 0$.

De plus, en utilisant la Proposition 1.3.15, on a $\varphi_2 \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ et $\mathbf{d}\varphi_2(t) = \psi(t)$.

Par conséquent, comme somme de fonctions PC^1 , on a

$$\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$$

et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\varphi(t) = \mathbf{d}\varphi_1(t) + \mathbf{d}\varphi_2(t) = \psi(t).$$

D'où $\mathcal{E}(\varphi) = (\varphi(a), \mathbf{d}\varphi) = (v, \psi)$.

□

Dans la proposition suivante, on prouve que l'espace des fonctions C^1 par morceaux à valeurs dans un espace de Banach sur un intervalle compact de \mathbb{R} est un espace de Banach lorsqu'on fixe une subdivision.

Proposition 1.3.21. $(PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{PC^1})$ est un espace de Banach.

Démonstration. Puisque $(E, \|\cdot\|)$ et $(NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{NPC^0})$ sont des espaces de Banach, on obtient que $(E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{E \times NPC^0})$ est un espace de Banach. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans $(PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{PC^1})$ c'est-à-dire,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}, \text{ tel que, } \forall p, q \geq n_o \quad \|\varphi_p - \varphi_q\|_{PC^1} \leq \epsilon'.$$

Montrons que $(\mathcal{E}(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans

$(E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{E \times NPC^0})$.

En effet, en fixant $\epsilon > 0$ arbitrairement, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $q \geq n_o$ pour tout $p \geq n_o$

$$\|\mathcal{E}(\varphi_p) - \mathcal{E}(\varphi_q)\|_{E \times NPC^0} = \|\mathcal{E}(\varphi_p - \varphi_q)\|_{E \times NPC^0} = \|\varphi_p - \varphi_q\|_{PC^1} \leq \epsilon.$$

Puisque $(E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}), \|\cdot\|_{E \times NPC^0})$ est un espace de Banach, il existe $u \in E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{E}(\varphi_n) - u\|_{E \times NPC^0} = 0$.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n - \mathcal{E}^{-1}(u)\|_{PC^1} = 0$ avec $\mathcal{E}^{-1}(u) \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\varphi_n - \mathcal{E}^{-1}(u)\|_{PC^1} = \|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(\varphi_n)) - \mathcal{E}^{-1}(u)\|_{PC^1} = \|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(\varphi_n) - u)\|_{PC^1}.$$

Puisque \mathcal{E} est une isométrie alors \mathcal{E}^{-1} est aussi une isométrie. En effet, pour tout $(x, \psi) \in E \times NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$,

$$\|(x, \psi)\|_{E \times NPC^0} = \|\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(x, \psi))\|_{E \times NPC^0} = \|\mathcal{E}^{-1}(x, \psi)\|_{PC^1}.$$

Donc on a :

$$\|\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(\varphi_n) - u)\|_{PC^1} = \|\mathcal{E}(\varphi_n) - u\|_{E \times NPC^0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n - \mathcal{E}^{-1}(u)\|_{NPC^0} = 0$.

Ainsi, $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}, \|\cdot\|_{PC^1})$ est un espace de Banach. \square

1.4 Les ensembles des fonctions continues par morceaux et continûment dérivables par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R}

Nous étendons les définitions des fonctions continues par morceaux et continûment dérivables par morceaux au cas où l'intervalle est un intervalle quelconque borné de \mathbb{R} .

1.4.1 L'ensemble des fonctions continues par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R} .

Soit J un intervalle borné de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit E un espace topologique séparé.

Définition 1.4.1. Soit $\varphi : J \rightarrow E$ une fonction.

On dit que φ est continue par morceaux de J dans E lorsque il existe un ensemble fini non vide $disc(\varphi)$ inclus dans J qui vérifie

(a) $\varphi|_{J \setminus disc(\varphi)} \in C^0(J \setminus disc(\varphi), E)$,

(b) $\forall t \in disc(\varphi)$, si $t \neq \sup I$, $\varphi(t+) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} \varphi(s)$ existe dans E ,

(c) $\forall t \in disc(\varphi)$, si $t \neq \inf I$, $\varphi(t-) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} \varphi(s)$ existe dans E .

Proposition 1.4.2. Soit J un intervalle compact non réduit à un point de \mathbb{R} et $\varphi : J \rightarrow E$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est continue par morceaux au sens de la Définition 1.1.2
- (ii) φ est continue par morceaux au sens de la Définition 1.4.1.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Avec (i), il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub(J)$ t.q.

(α) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$,

(β) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi(\tau_i+) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t > \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans E ,

(γ) $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi(\tau_i-) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} \varphi(t)$ existe dans E .

Posons $disc(\varphi) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Soit $t \in J \setminus disc(\varphi)$; il existe $i \in \{0, \dots, p+1\}$ t.q. $t \in] \tau_i, \tau_{i+1}[$, avec (α), on obtient que φ est continue au point t . Par conséquent, (a) est vérifiée.

Puisque (β) et (γ) sont respectivement équivalentes à (b) et (c), on a (ii).

(ii) \Rightarrow (i)

Avec (ii), il existe un ensemble fini non vide $disc(\varphi)$ inclus dans J qui vérifie :

(a) φ est continue sur $J \setminus disc(\varphi)$,

1.4. LES ENSEMBLES DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX ET CONTINÛMENT DÉRIVABLES PAR MORCEAUX POUR UN INTERVALLE QUELCONQUE BORNÉ DE \mathbb{R}

- (b) $\forall t \in \text{disc}(\varphi)$, si $t \neq \sup I$, $\varphi(t+) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} \varphi(s)$ existe dans E ,
- (c) $\forall t \in \text{disc}(\varphi)$, si $t \neq \inf I$, $\varphi(t-) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t}} \varphi(s)$ existe dans E .

Posons $A := \{\max J, \min J\} \cup \text{disc}(\varphi)$. Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $\text{card}(A) = p + 1$. Posons $\tau_0 = \min J$ et $\forall i \in \{1, \dots, p + 1\}$, $\tau_i = \min A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$. Puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, p + 1\}$, on a $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$ est strictement inclus dans J , on a $\tau_0 < \tau_i$. De plus, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, p + 1\}$ t.q. $i < j$, on a $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}\}$ est inclus strictement dans $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$ donc $\tau_i < \tau_j$. Par conséquent, $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}(J)$ t.q. $\{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\} = A$. Puisque pour chaque $i \in \{0, \dots, p\}$, $]\tau_i, \tau_{i+1}[\subset J \setminus \text{disc}(\varphi)$, on a, grâce à (a), φ est continue sur $]\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; remarquons d'abord que $\tau_i \neq \sup J$ car $\tau_i < \tau_{p+1} = \max J$.

Raisonnons maintenant par disjonction des cas; si $\tau_i \in \text{disc}(\varphi)$, grâce à (b), on obtient que $\varphi(\tau_i+)$ existe dans E .

Si $\tau_i \in J \setminus \text{disc}(\varphi)$, on a, grâce à (a), $\varphi(\tau_i+) = \varphi(\tau_i)$ existe dans E .

Par conséquent, (β) est vérifiée.

Soit $i \in \{1, \dots, p + 1\}$; notons d'abord que $\tau_i \neq \inf J$ car $\tau_i > \tau_0 = \min J$.

On fait de nouveau un raisonnement par disjonction des cas; si $\tau_i \in \text{disc}(\varphi)$, grâce à (c), on sait que $\varphi(\tau_i-)$ existe dans E .

Si $\tau_i \in J \setminus \text{disc}(\varphi)$, on a, grâce à (a), $\varphi(\tau_i-) = \varphi(\tau_i)$ existe dans E . Par conséquent, (γ) est vérifié. \square

- On note $C_d^0(J, E)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : J \rightarrow E$ t.q., pour chaque $t \in J$, $t \neq \sup J$, $\varphi(t+) = \varphi(t)$.
- On note $PC^0(J, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de J dans E .
- On note $NPC_d^0(J, E)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in PC^0(J, E)$ continues à droite sur J et si $\sup J \in J$, $\varphi(\sup J-) = \varphi(\sup J)$.
- Soit A un sous-ensemble fini de \mathbb{R} , on note $PC^0(J, E; A)$ l'ensemble des fonctions φ dans $PC^0(J, E)$ tel que l'ensemble des points de discontinuités de φ est inclus dans l'ensemble A . On note $NPC_d^0(J, E; A)$ l'ensemble des fonctions φ dans $NPC_d^0(J, E)$ tel que l'ensemble des points de discontinuités de φ est inclus dans l'ensemble A .

Lemme 1.4.3. *Soit J un intervalle borné de \mathbb{R} non réduit à un point, soit $\varphi \in PC^0(J, E)$. Alors, pour tout I sous-intervalle compact de \mathbb{R} non réduit à un point t.q. $I \subset J$ $\varphi|_I \in PC^0(I, E, \text{disc}(\varphi) \cap I)$.*

Démonstration. Soit $I \subset J$ un sous-intervalle compact de \mathbb{R} non réduit à un point. Puisque $\varphi \in PC^0(J, E)$, il existe un ensemble non vide $\text{disc}(\varphi) \subset J$, t.q. les assertions (a), (b) et (c) de la Définition 1.4.1 soient vérifiées. Posons $\text{disc}(\varphi|_I) := I \cap \text{disc}(\varphi)$.

Si $\text{disc}(\varphi|_I) = \emptyset$, on a, par conséquent, $I \subset J \setminus \text{disc}(\varphi)$. Ainsi, en utilisant (a), on a $\varphi|_I \in C^0(I, E)$ donc $\varphi|_I \in PC^0(I, E, \text{disc}(\varphi) \cap I)$.

Si $\text{disc}(\varphi|_I) \neq \emptyset$, alors on a

$$\begin{aligned} I \setminus \text{disc}(\varphi|_I) &= \{t \in J : t \in I \text{ et } t \notin (I \cap \text{disc}(\varphi))\} \\ &= \{t \in J : t \in I \text{ et } t \notin \text{disc}(\varphi)\} \subset J \setminus \text{disc}(\varphi). \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

En utilisant (1.4.1) et (a), on a $\varphi|_{I \setminus \text{disc}(\varphi|_I)} \in C^0(I \setminus \text{disc}(\varphi|_I), E)$. De plus, en utilisant (1.4.1) et (b), on obtient que, $\forall t \in \text{disc}(\varphi|_I)$, si $t \neq \sup I$, $\varphi|_I(t+)$ existe dans E . Enfin, en utilisant (1.4.1) et (c), on obtient que, $\forall t \in \text{disc}(\varphi|_I)$, si $t \neq \inf I$, $\varphi|_I(t-)$ existe dans E . \square

1.4.2 L'ensemble des fonctions continûment dérivables par morceaux pour un intervalle quelconque borné de \mathbb{R} .

Soit J un intervalle borné de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Définition 1.4.4. Soit $\varphi : J \rightarrow E$ une fonction.

On dit que φ est C^1 par morceaux de J dans E lorsque il existe un ensemble fini non vide $\text{coins}(\varphi)$ inclus dans J qui vérifie :

- (a) $\varphi \in C^0(J, E)$
- (b) $\forall t \in J \setminus \text{coins}(\varphi)$, $\varphi'(t)$ existe et $\varphi'_{|J \setminus \text{coins}(\varphi)} \in C^0(J \setminus \text{coins}(\varphi), E)$
- (c) $\forall t \in \text{coins}(\varphi)$, si $t \neq \sup J$, $\varphi'(t+)$ existe dans E
- (d) $\forall t \in \text{coins}(\varphi)$, si $t \neq \inf J$, $\varphi'(t-)$ existe dans E .

- On note $C^1(J, E)$ l'ensemble des fonctions dérivables de J dans E et de dérivée continue de J dans E .
- On note $PC^1(J, E)$ l'ensemble des fonctions C^1 par morceaux de J dans E .
- Lorsque G est un sous-ensemble de E , $PC^1(J, G)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in PC^1(J, E)$ t.q. $\varphi(J) \subset G$. Soit A un sous-ensemble fini de \mathbb{R} ; on note $PC^1(J, G; A)$ l'ensemble des fonctions φ dans $PC^1(J, G)$ telles que $\text{coins}(\varphi) \subset A$.

Proposition 1.4.5. Soit J un intervalle compact de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit $\varphi : J \rightarrow E$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est C^1 par morceaux sur J dans E au sens de la Définition 1.3.1.
- (ii) φ est C^1 par morceaux sur J dans E au sens de la Définition 1.4.4.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Avec (i), il existe $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}(J)$ t.q.

- (α) $\varphi \in C^0(J, E)$
- (β) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, φ' existe et est continue sur $] \tau_i, \tau_{i+1}[$
- (γ) $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $\varphi'(\tau_i+)$ existe dans E
- (δ) $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$, $\varphi'(\tau_i-)$ existe dans E .

Posons $\text{coins}(\varphi) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$. Soit $t \in J \setminus \text{coins}(\varphi)$; puisque $t \in J$, il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ t.q. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Puisque $t \notin \text{coins}(\varphi)$ et $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}(J)$, on a $t \in] \tau_i, \tau_{i+1}[$. En utilisant (β), on sait que φ' existe au point t . De plus, on a

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in J \setminus \text{coins}(\varphi)}} \varphi'(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in] \tau_i, \tau_{i+1}[}} \varphi'(s) = \varphi'(t). \quad (1.4.2)$$

Par conséquent, l'assertion (b) de la Définition 1.4.4 est satisfaite. Puisque (α), (γ), (δ) sont respectivement équivalentes à (a), (b) et (c) de la Définition 1.4.4, on obtient que φ est C^1 par morceaux au sens de la Définition 1.4.4.

(ii) \Rightarrow (i)

Avec (ii), il existe un ensemble fini non vide $\text{coins}(\varphi) \subset J$ t.q.

- (a) $\varphi \in C^0(J, E)$,
- (b) $\forall t \in J \setminus \text{coins}(\varphi)$, $\varphi'(t)$ existe et $\varphi'_{|J \setminus \text{coins}(\varphi)} \in C^0(J \setminus \text{coins}(\varphi), E)$,
- (c) $\forall t \in \text{coins}(\varphi)$, si $t \neq \sup J$, $\varphi'(t+)$ existe dans E ,
- (d) $\forall t \in \text{coins}(\varphi)$, si $t \neq \inf J$, $\varphi'(t-)$ existe dans E .

Posons $A := \{\max J, \min J\} \cup \text{coins}(\varphi)$. Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $\text{card}(A) = p + 1$. Par un raisonnement similaire à celui de la démonstration de la Proposition 1.4.2, on peut construire $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}(J)$ t.q. $\{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\} = A$.

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$ et soit $t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[$; puisque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in \text{Sub}(J)$ t.q. $\{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\} = A$, on a $t \notin \text{coins}(\varphi)$. Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\},]\tau_i, \tau_{i+1}[\subset J \setminus \text{coins}(\varphi). \quad (1.4.3)$$

Par conséquent, en utilisant (b) et (1.4.3), on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \forall t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[, \varphi'(t) \text{ existe et } \varphi'_{|] \tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0(] \tau_i, \tau_{i+1}[, E). \quad (1.4.4)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$; remarquons d'abord que $\tau_i \neq \sup J$ car $\tau_i < \tau_{p+1} = \max J$.

Raisonnons maintenant par disjonction des cas; si $\tau_i \in \text{coins}(\varphi)$, grâce à (c), on obtient que $\varphi'(\tau_i+)$ existe dans E .

Si $\tau_i \in J \setminus \text{coins}(\varphi)$, on a, grâce à (b), $\varphi'(\tau_i+) = \varphi'(\tau_i)$ existe dans E . Par conséquent, on a démontré par disjonction des cas :

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \tau_i \neq \sup J, \varphi'(\tau_i+) \text{ existe dans } E. \quad (1.4.5)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p + 1\}$; notons d'abord que $\tau_i \neq \inf J$ car $\tau_i > \tau_0 = \min J$.

On fait de nouveau un raisonnement par disjonction des cas; si $\tau_i \in \text{coins}(\varphi)$, grâce à (d), on obtient que $\varphi'(\tau_i-)$ existe dans E .

Si $\tau_i \in J \setminus \text{coins}(\varphi)$, on a, grâce à (b), $\varphi'(\tau_i-) = \varphi'(\tau_i)$ existe dans E . Donc, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, p + 1\}, \tau_i \neq \inf J, \varphi'(\tau_i-) \text{ existe dans } E. \quad (1.4.6)$$

Ainsi, en utilisant (a), (1.4.4), (1.4.5) et (1.4.6), on a démontré (i). \square

Lemme 1.4.6. *Soit J un intervalle borné de \mathbb{R} non réduit à un point et soit $\varphi \in PC^1(J, E)$. Alors pour tout I sous-intervalle compact de \mathbb{R} non réduit à un point t.q. $I \subset J$, on a $\varphi|_I \in PC^1(I, E, \text{coins}(\varphi) \cap I)$.*

Démonstration. Soit $I \subset J$ sous-intervalle compact non réduit à un point. Puisque $\varphi \in PC^1(J, E)$, il existe un ensemble non vide $\text{coins}(\varphi) \subset J$, t.q. les assertions (a), (b), (c) et (d) de la Définition 1.4.4 soient vérifiées.

Posons $\text{coins}(\varphi|_I) := I \cap \text{coins}(\varphi)$.

Si $\text{coins}(\varphi|_I) = \emptyset$, on a $I \subset J \setminus \text{coins}(\varphi)$. Ainsi, en utilisant (b), on a $\varphi|_I \in C^1(I, E)$ donc $\varphi|_I \in PC^1(I, E, \text{coins}(\varphi) \cap I)$.

Si $\text{coins}(\varphi|_I) \neq \emptyset$, alors on a

$$\left. \begin{aligned} I \setminus \text{coins}(\varphi|_I) &= \{t \in J : t \in I \text{ et } t \notin (I \cap \text{coins}(\varphi))\} \\ &= \{t \in J : t \in I \text{ et } t \notin \text{coins}(\varphi)\} \subset J \setminus \text{coins}(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.7)$$

Puisque $I \subset J$, on a, grâce à (a), $\varphi|_I \in C^0(I, E)$. En utilisant (1.4.7) et (b), on a, $\forall t \in I \setminus \text{coins}(\varphi|_I)$, $\varphi'(t)$ existe et $\varphi'_{|I \setminus \text{coins}(\varphi|_I)} \in C^0(I \setminus \text{coins}(\varphi|_I), E)$. De plus, en utilisant (1.4.7) et (c), on a, $\forall t \in \text{coins}(\varphi|_I)$, si $t \neq \sup I$, $\varphi'_{|I}(t+)$ existe dans E .

Enfin, en utilisant (1.4.7) et (d), on a, $\forall t \in \text{coins}(\varphi|_I)$, si $t \neq \inf I$, $\varphi'_{|I}(t-)$ existe dans E . \square

Définition 1.4.7. *Soit $x \in PC^1(J, E)$. On appelle dérivée étendue de x la fonction $\mathbf{d}x : J \rightarrow E$ définie par*

$$\mathbf{d}x(t) = \begin{cases} x'(t) & \text{si } t \in J \setminus \text{coins}(x) \\ x'(t+) & \text{si } t \in \text{coins}(x) \text{ et } t \neq \sup J \\ x'(t-) & \text{si } t \in \text{coins}(x) \text{ et } t = \sup J. \end{cases}$$

Proposition 1.4.8. *Soit $x \in PC^1(J, E)$, on a $\mathbf{d}x \in NPC_d^0(J, E, \text{coins}(x))$.*

Démonstration. Posons $\text{disc}(\mathbf{d}x) = \text{coins}(x)$. Puisque $x \in PC^1(J, E)$, on a

$$\mathbf{d}x|_{J \setminus \text{coins}(x)} = x'|_{J \setminus \text{coins}(x)} \in C^0(J \setminus \text{coins}(x), E). \quad (1.4.8)$$

Soit $t \in \text{coins}(x)$ t.q. $t \neq \sup J$. Raisonnons par disjonction des cas.

Si $t = \max \text{coins}(x)$, on a, $\forall s \in]t, \sup J[$, $\mathbf{d}x(s) = x'(s)$. Alors, on a

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}x(t+) &= \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t \\ s \in J}} \mathbf{d}x(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]t, \sup J[}} \mathbf{d}x(s) = \\ &\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]t, \sup J[}} x'(s) = x'(t+) = \mathbf{d}x(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9)$$

Si $t \neq \max \text{coins}(x)$, en posant $\bar{t} := \min\{s : s \in \text{coins}(x) \text{ et } s > t\}$, on a $]t, \bar{t}[\subset J \setminus \text{coins}(x)$.

Par conséquent, on a, $\forall s \in]t, \bar{t}[$, $\mathbf{d}x(s) = x'(s)$, et

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}x(t+) &= \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t \\ s \in J}} \mathbf{d}x(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]t, \bar{t}[}} \mathbf{d}x(s) = \\ &\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]t, \bar{t}[}} x'(s) = x'(t+) = \mathbf{d}x(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.4.10)$$

d'où, grâce à (1.4.9) et (1.4.10), on a prouvé par disjonction des cas que

$$\forall t \in \text{coins}(x) \text{ et } t \neq \sup J, \mathbf{d}x(t+) \text{ existe dans } E \text{ et } \mathbf{d}x(t+) = \mathbf{d}x(t). \quad (1.4.11)$$

Fixons maintenant $t \in \text{coins}(x)$ t.q. $t \neq \inf J$. Raisonnons de nouveau par disjonctions des cas.

Si $t = \min \text{coins}(x)$, on a, $\forall s \in]\inf J, t[$, $\mathbf{d}x(s) = x'(s)$ et

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}x(t-) &= \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t \\ s \in J}} \mathbf{d}x(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]\inf J, t[}} \mathbf{d}x(s) = \\ &\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]\inf J, t[}} x'(s) = x'(t-). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.12)$$

Si $t \neq \min \text{coins}(x)$, en posant $\underline{t} := \max\{s : s \in \text{coins}(x) \text{ et } s < t\}$, on a $]\underline{t}, t[\subset J \setminus \text{coins}(x)$.

Par conséquent, on a, $\forall s \in]\underline{t}, t[$, $\mathbf{d}x(s) = x'(s)$.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}x(t-) &= \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s < t \\ s \in J}} \mathbf{d}x(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]\underline{t}, t[}} \mathbf{d}x(s) = \\ &\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in]\underline{t}, t[}} x'(s) = x'(t-) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.13)$$

d'où, grâce à (1.4.12) et (1.4.13), on a prouvé, par disjonction des cas, que

$$\forall t \in \text{coins}(x) \text{ et } t \neq \inf J, \mathbf{d}x(t-) \text{ existe dans } E \text{ et } \mathbf{d}x(t-) = x'(t-). \quad (1.4.14)$$

Par conséquent, en utilisant (1.4.8), (1.4.11) et (1.4.14), on a démontré que

$\mathbf{d}x \in PC^0(J, E, \text{coins}(x))$. De plus, en utilisant (1.4.11), on obtient que $\mathbf{d}x$ est continue à droite sur J , et, en utilisant (1.4.14), si $\sup J \in J$ et $\sup J \in \text{coins}(x)$, $\mathbf{d}x(\sup J-) = x'(\sup J-) = \mathbf{d}x(\sup J)$. Ceci démontre que $\mathbf{d}x \in NPC_d^0(J, E, \text{coins}(x))$. \square

1.5 L'espace des fonctions à variation bornée normalisées

Dans la section 5, on s'intéresse à l'espace des fonctions à variation bornée. On commence par introduire les fonctions à variation bornée normalisées et à construire un isomorphisme topologique entre l'espace des fonctions à variation bornée normalisées sur un intervalle compact à valeurs réelles et le dual topologique de l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact. On généralise ce résultat, en construisant un isomorphisme topologique entre la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles sur un intervalle compact et le dual des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact.

Ensuite, on construit un isomorphisme topologique entre le produit cartésien de \mathbb{R}^n et de la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles sur un intervalle compact et le dual topologique des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact.

Enfin, on établit une injection linéaire continue entre le produit cartésien de \mathbb{R}^n et de la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles sur un intervalle compact et le dual topologique des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact nulles au bord.

Avec cette injection linéaire continue, on parvient à construire un produit scalaire continu sur le dual topologique des espaces des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact nulles au bord. Dans cette section, on s'intéresse, dans un premier temps, aux duals topologiques d'espaces vectoriels fondamentaux. Dans un second temps, nous allons définir un produit scalaire sur le dual topologique d'un espace vectoriel normé réel fondamental. Pour résoudre ces deux problèmes, nous sommes amené à introduire l'espace $NBV([a, b], \mathbb{R})$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.5.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ; on dit que f est à variation bornée lorsqu'il existe $C \in [0, +\infty[$ t.q. pour chaque famille finie $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$

$$var(f, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}) := \sum_{i=0}^p |f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i)| \leq C.$$

On note $BV([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à variation bornée de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Définition 1.5.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. On appelle variation totale de f le réel

$$V_a^b(f) = \sup_{(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])} var(f, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1}).$$

Remarque 1.5.3. (1) $BV([a, b], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel, cf. p.111 de [26].

(2) La fonctionnelle $\|\cdot\|_{BV} : BV([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b(f)$, est une norme sur $BV([a, b], \mathbb{R})$, cf. p.111 de [26].

Dans la définition suivante, on introduit les fonctions à variation bornée normalisées.

Définition 1.5.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ; on dit que f est à variation bornée normalisée lorsque f est à variation bornée, $f(a) = 0$ et, $\forall t \in]a, b[$, $f(t-) = f(t)$.

On note $NBV([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à variation bornée normalisées de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Proposition 1.5.5. $NBV([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $BV([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $f, g \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $t \in]a, b[$. En utilisant les propriétés des limites à gauche, on a

$$(\lambda f + g)(t-) = \lambda f(t-) + g(t-) = \lambda f(t) + g(t) = (\lambda f + g)(t),$$

et $(\lambda f + g)(a) = \lambda f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$. □

Remarque 1.5.6. Ainsi, en utilisant la Proposition 1.5.5 et la Remarque 1.5.3, $\|\cdot\|_{NBV} = V_a^b(\cdot)$ est une norme sur $NBV([a, b], \mathbb{R})$.

Proposition 1.5.7. Soit $f \in BV([a, b], \mathbb{R})$ t.q. $f(a) = 0$. Considérons la fonction $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall t \in [a, b]$,

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(a) & \text{si } t = a \\ f(t-) & \text{si } t \in]a, b[\\ f(b) & \text{si } t = b. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f} \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ et $V_a^b(\tilde{f}) \leq V_a^b(f)$.

Démonstration. Commençons par montrer que $\tilde{f} \in BV([a, b], \mathbb{R})$. Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$, soit $h \in]0, \tau_1 - \tau_0[$; considérons la famille finie $(\tilde{\tau}_i)_{0 \leq i \leq p+1}$ définie par

$$\left. \begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \tilde{\tau}_i &= \tau_i - h, \\ \tilde{\tau}_0 &= a \text{ et } \tilde{\tau}_{p+1} = b. \end{aligned} \right\}$$

Puisque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$, on a $(\tilde{\tau}_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$.
Par conséquent, on a

$$\sum_{i=0}^p |f(\tilde{\tau}_{i+1}) - f(\tilde{\tau}_i)| \leq V_a^b(f)$$

i.e.

$$\phi(h) = |f(\tau_1 - h) - f(a)| + \sum_{i=1}^{p-1} |f(\tau_{i+1} - h) - f(\tau_i - h)| + |f(b) - f(\tau_p - h)| \leq V_a^b(f).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de comparaison des limites, on a

$$\sum_{i=0}^p |\tilde{f}(\tau_{i+1}) - \tilde{f}(\tau_i)| = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in]0, \tau_1 - \tau_0[}} \phi(h) \leq V_a^b(f).$$

Donc \tilde{f} est à variation bornée et $V_a^b(\tilde{f}) \leq V_a^b(f)$.

Soit $t_0 \in]a, b[$. Puisque $f(t_0-)$ existe, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0, \forall t \in]t_0 - \eta_\epsilon, t_0[, |f(t) - f(t_0-)| \leq \epsilon. \quad (1.5.1)$$

Soit $\epsilon > 0$, soit $t \in]t_0 - \eta_\epsilon, t_0[$.

Posons $\delta = \frac{t - (t_0 - \eta_\epsilon)}{2} > 0$.

Notons que pour chaque $s \in]t - \delta, t[\subset]t_0 - \eta_\epsilon, t_0[$.

Par conséquent, en utilisant (1.5.1), on a

$$\forall s \in]t - \delta, t[, |f(s) - f(t_0-)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de comparaison des limites et la continuité de la valeur absolue, on a

$$\lim_{s \rightarrow t-} |f(s) - f(t_0-)| = |\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, on a démontré que

$$\forall t_0 \in]a, b[, \tilde{f}(t_0-) = \tilde{f}(t_0).$$

De plus, on a $\tilde{f}(a) = f(a) = 0$. Ainsi $\tilde{f} \in NBV([a, b], \mathbb{R})$. \square

Dans le résultat suivant, on construit un isomorphisme topologique entre l'espace des fonctions à variation bornée normalisées sur un intervalle compact à valeurs réelles et le dual topologique de l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact.

Proposition 1.5.8. *Considérons l'opérateur $\mathcal{T} : NBV([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R})^*$ défini par*

$$\forall f \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \forall u \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \mathcal{T}(f)(u) = \int_a^b u(t) df(t),$$

où $\int_a^b u(t) df(t)$ est l'intégrale de Riemann-Stieltjes de la fonction u par rapport à la fonction f sur $[a, b]$.

Alors \mathcal{T} est une isométrie de $(NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV})$ dans $(C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{T} \in Isom((NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV}), (C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

Démonstration. Soit $f, g \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons que, pour chaque $u \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\lambda f + g)(u) &= \int_a^b u(t) d(\lambda f + g)(t) \\ &= \lambda \int_a^b u(t) df(t) + \int_a^b u(t) dg(t) \\ &= \lambda \mathcal{T}(f)(u) + \mathcal{T}(g)(u) \\ &= (\lambda \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g))(u). \end{aligned}$$

De plus, pour chaque $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$, en utilisant le théorème 1, p.358 de [27], on a

$$\forall u \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \mathcal{T}(f)(u) \leq \|u\|_{\infty} \|f\|_{NBV}.$$

Par conséquent, on a

$$\forall f \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\mathcal{T}(f)\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{NBV}. \quad (1.5.2)$$

Ainsi, on obtient que

$$\mathcal{T} \in \mathcal{L}(NBV([a, b], \mathbb{R}), C^0([a, b], \mathbb{R})^*). \quad (1.5.3)$$

Soit $F \in C^0([a, b], \mathbb{R})^*$; en utilisant le théorème de Riesz, cf. [27] p.385, il existe $f \in BV([a, b], \mathbb{R})$ avec $f(a) = 0$ t.q.

$$\|F\|_{\mathcal{L}} = \|f\|_{BV} \text{ et } \forall u \in C^0([a, b], \mathbb{R}), F(u) = \int_a^b u(t) df(t).$$

Puisque $f \in BV([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des points de discontinuité de f , noté $A(f)$, est au plus dénombrable.

Donc, puisque $\{t \in [a, b] : \tilde{f}(t) \neq f(t)\} \subset A(f)$, cet ensemble est aussi au plus dénombrable.

De plus, puisque $\{t \in [a, b] : f(t) \neq \tilde{f}(t)\} \subset]a, b]$, on a, en utilisant le théorème de la p. 359 de [27],

$$\forall u \in C^0([a, b], \mathbb{R}), F(u) = \int_a^b u(t) df(t) = \int_a^b u(t) d\tilde{f}(t) = \mathcal{T}(\tilde{f})(u).$$

De plus, avec (1.5.2), on a $\|F\|_{\mathcal{L}} = \|\mathcal{T}(\tilde{f})\|_{\mathcal{L}} \leq \|\tilde{f}\|_{NBV}$. Ensuite, en utilisant la Proposition 1.5.7, on a

$$\|\tilde{f}\|_{NBV} \leq V_a^b(f) = \|F\|_{\mathcal{L}}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\forall F \in C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \exists \tilde{f} \in NBV([a, b], \mathbb{R}) \text{ t.q. } \mathcal{T}(\tilde{f}) = F \text{ et } \|F\|_{\mathcal{L}} = \|\tilde{f}\|_{NBV}. \quad (1.5.4)$$

Ainsi, la surjectivité de \mathcal{T} est prouvée.

Soit $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ t.q. $\mathcal{T}(f) = 0$ i.e.

$$\forall u \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \mathcal{T}(f)(u) = \int_a^b u(t) df(t) = 0. \quad (1.5.5)$$

Montrons que $f = 0$. Puisque la fonction $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $t \in [a, b]$, $u(t) = 1$, est continue sur $[a, b]$, avec (1.5.5), on a

$$\int_a^b df(t) = f(b) = 0$$

Reste à démontrer que $\forall t \in]a, b[, f(t) = 0$.

Soit $\bar{t} \in]a, b[$. Considérons, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, la fonction $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour chaque $t \in [a, b]$, par

$$u_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a, \bar{t} - \frac{1}{n}] \\ nt - n\bar{t} + 1 & \text{si } t \in [\bar{t} - \frac{1}{n}, \bar{t}] \\ 1 & \text{si } t \in [\bar{t}, b]. \end{cases}$$

Puisque, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, $u_n \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, on a, en utilisant (1.5.5),

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ suffisamment grand, } \int_a^b u_n(t) df(t) = 0. \quad (1.5.6)$$

Notons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b u_n(t) df(t) &= 0 + \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) + \int_{\bar{t}}^b 1 df(t) \\ &= \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) + f(b) - f(\bar{t}) \\ &= \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) - f(\bar{t}). \end{aligned}$$

Notons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on a

$$\left| \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) \right| \leq V_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}}(f) = V_a^{\bar{t}}(f) - V_a^{\bar{t} - \frac{1}{n}}(f). \quad (1.5.7)$$

De plus, puisque f est continue à gauche de \bar{t} , en utilisant la propriété 4 p.329 de [27], on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(V_a^{\bar{t}}(f) - V_a^{\bar{t} - \frac{1}{n}}(f) \right) = 0.$$

On a, en utilisant le théorème des gendarmes et l'assertion (1.5.7),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$f(\bar{t}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\bar{t} - \frac{1}{n}}^{\bar{t}} u_n(t) df(t) = 0.$$

Ainsi \mathcal{T} est injectif.

Montrons, maintenant, que \mathcal{T} est une isométrie de $(NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV})$ dans $(C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$.

Soit $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$; puisque $\mathcal{T}(f) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^*$, on a, en utilisant (1.5.4),

$$\exists f_1 \in NBV([a, b], \mathbb{R}) \text{ t.q. } \mathcal{T}(f_1) = \mathcal{T}(f) \text{ et } \|\mathcal{T}(f)\|_{\mathcal{L}} = \|f_1\|_{NBV}.$$

Puisque $\mathcal{T}(f_1) = \mathcal{T}(f)$, en utilisant l'injectivité de \mathcal{T} , on a $f = f_1$.

Par conséquent, on a

$$\|\mathcal{T}(f)\|_{\mathcal{L}} = \|f_1\|_{NBV} = \|f\|_{NBV}.$$

Donc \mathcal{T} est une isométrie de $(NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV})$ dans $(C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$. Par conséquent, puisque \mathcal{T} est bijectif, et avec (1.5.3), on a

$$\mathcal{T} \in \text{Isom}((NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV}), (C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})).$$

□

Remarque 1.5.9. *Puisque $(C^0([a, b], \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ est un espace de Banach, en utilisant la Proposition 1.5.8, $(NBV([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{NBV})$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.5.10. *Considérons l'opérateur $\mathcal{C} : NBV([a, b], \mathbb{R})^n \rightarrow (C^0([a, b], \mathbb{R})^*)^n$ défini par*

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \mathcal{C}(f_1, \dots, f_n) := (\mathcal{T}(f_1), \dots, \mathcal{T}(f_n)).$$

Alors $\mathcal{C} \in \text{Isom}((NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), ((C^0([a, b], \mathbb{R})^)^n, \|\cdot\|_1))$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f_1, \dots, f_n), (g_1, \dots, g_n) \in NBV([a, b], \mathbb{R})^n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\lambda(f_1, \dots, f_n) + (g_1, \dots, g_n)) &= \mathcal{C}(\lambda f_1 + g_1, \dots, \lambda f_n + g_n) \\ &= (\mathcal{T}(\lambda f_1 + g_1), \dots, \mathcal{T}(\lambda f_n + g_n)) \\ &= (\lambda \mathcal{T}(f_1) + \mathcal{T}(g_1), \dots, \lambda \mathcal{T}(f_n) + \mathcal{T}(g_n)) \\ &= \lambda(\mathcal{T}(f_1), \dots, \mathcal{T}(f_n)) + (\mathcal{T}(g_1), \dots, \mathcal{T}(g_n)) \\ &= \lambda \mathcal{C}(f_1, \dots, f_n) + \mathcal{C}(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la Proposition 1.5.8, on a

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\mathcal{C}(f_1, \dots, f_n)\|_1 = \|(f_1, \dots, f_n)\|_1. \quad (1.5.8)$$

Montrons que \mathcal{C} est surjectif.

Soit $(F_1, \dots, F_n) \in (C^0([a, b], \mathbb{R})^*)^n$; puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_i \in C^0([a, b], \mathbb{R})^*$, en utilisant la Proposition 1.5.8, il existe $f_i \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ t.q. $\mathcal{T}(f_i) = F_i$.

Par conséquent, on obtient que $\mathcal{C}(f_1, \dots, f_n) = (F_1, \dots, F_n)$. Donc \mathcal{C} est surjectif.

Ainsi, avec (1.5.8), \mathcal{C} est une isométrie de $((NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1)$ dans $((C^0([a, b], \mathbb{R})^*)^n, \|\cdot\|_1)$.

Ceci implique que $\mathcal{C} \in \text{Isom}((NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (C^0([a, b], \mathbb{R})^*)^n, \|\cdot\|_1))$. □

Dans le théorème suivant, on généralise la Proposition 1.5.8, en construisant un isomorphisme topologique entre la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles sur un intervalle compact et le dual des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact.

Théorème 1.5.11. *Considérons l'opérateur $\mathcal{D} : NBV([a, b], \mathbb{R})^n \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*$ défini par*

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \mathcal{D}(f_1, \dots, f_n)(u) = \sum_{i=1}^n \int_a^b (e_i^* \circ u)(t) df_i(t)$$

où $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Alors $\mathcal{D} \in Isom((NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1))$.

Démonstration. Considérons l'opérateur $\mathcal{N} : C^0([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ défini par, pour tout $u \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}(u) = (e_1^* \circ u, \dots, e_n^* \circ u)$.

Puisque $\mathcal{N} \in Isom((C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty), (C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1))$, en notant \mathcal{N}^* l'opérateur adjoint de \mathcal{N} et en utilisant le théorème 4.13.4, p.173 de [23], on a

$$\mathcal{N}^* \in Isom(((C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})). \quad (1.5.9)$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, considérons la fonction linéaire continue

$\pi_i : C^0([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R})$ définie par $\pi_i(u_1, \dots, u_n) = u_i$.

Considérons l'opérateur $\Gamma : (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^n \rightarrow (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^*$ défini par, pour tout

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^n, \Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \circ \pi_i.$$

En utilisant le lemme 2, p.114 de [1], on a

$$\Gamma \in Isom(((C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^n, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})). \quad (1.5.10)$$

Remarquons que $\mathcal{D} = \mathcal{N}^* \circ \Gamma \circ \mathcal{C}$.

Par conséquent, avec (1.5.9) et (1.5.10), on a, en utilisant le Théorème 1.5.10,

$$\mathcal{D} = \mathcal{N}^* \circ \Gamma \circ \mathcal{C} \in Isom((NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)). \quad (1.5.11)$$

□

Théorème 1.5.12. *Considérons l'opérateur $\mathcal{I} : C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\forall u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \mathcal{I}(u) = (u(a), u').$$

Alors, $\mathcal{I} \in Isom((C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1}), (\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1))$ où $\|\cdot\|_{C^1}$ est la norme usuelle sur $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ (cf. définition p.287 de [14]).

Démonstration. Soit $u, v \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; on a

$$\mathcal{I}(\lambda u + v) = ((\lambda u + v)(a), (\lambda u + v)') = (\lambda u(a) + v(a), \lambda u' + v') = \lambda(u(a), u') + (v(a), v').$$

De plus,

$$\forall u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\mathcal{I}(u)\|_1 = \|u(a)\|_{\mathbb{R}^n} + \|u'\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = \|u\|_{C^1}.$$

Par conséquent, on a

$$\mathcal{I} \in \mathcal{L}(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)). \quad (1.5.12)$$

Montrons que \mathcal{I} est injectif.

Soit $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ t.q. $\mathcal{I}(u) = 0$ i.e. $u(a) = 0$ et $u' = 0$.

Puisque $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a, $\forall t \in [a, b]$, $u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s) ds$.

Par conséquent, $\forall t \in [a, b]$, $u(t) = 0 + \int_a^t 0 ds = 0$ i.e. $u = 0$. Donc \mathcal{I} est injectif.

Montrons maintenant que \mathcal{I} est surjectif.

Soit $(\alpha, v) \in \mathbb{R} \times C^0([a, b], \mathbb{R})$; en posant, pour tout $t \in [a, b]$, $u(t) = \alpha + \int_a^t v(s) ds$, on a

$$u(a) = \alpha \text{ et } \forall t \in [a, b], u'(t) = v(t).$$

Par conséquent, on a $\mathcal{I}(u) = (\alpha, v)$; c'est pourquoi \mathcal{I} est surjectif. Ainsi

$$\mathcal{I} \text{ est une bijection.} \quad (1.5.13)$$

Avec les assertions (1.5.12) et (1.5.13), puisque $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach (cf. proposition 1.11, p.287 de [14]) et $\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ est aussi un espace de Banach, en utilisant le théorème de l'isomorphisme de Banach, p.18 de [14], on a

$$\mathcal{I} \in \text{Isom}((C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1}), (\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)).$$

□

Dans le théorème suivant, on établit un isomorphisme topologique entre le produit cartésien de \mathbb{R}^n et de la puissance n -ième de l'espace des fonctions à variation bornée normalisées à valeurs réelles sur un intervalle compact et le dual topologique des fonctions continûment dérivables à valeurs dans \mathbb{R}^n sur un intervalle compact.

Théorème 1.5.13. *Considérons l'opérateur*

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$$

défini par

$$\begin{aligned} \forall (x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n)) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \forall u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{M}(x, f)(u) = \sum_{i=1}^n x_i e_i^*(u(a)) + \sum_{i=1}^n \int_a^b (e_i^* \circ u')(t) df_i(t). \end{aligned}$$

où $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Alors $\mathcal{M} \in \text{Isom}((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (C^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

Démonstration. Considérons l'opérateur $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*$ défini par,

$$\forall (x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n)) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$$

$$\mathcal{P}(x, f) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i^*, \mathcal{D}(f) \right).$$

Soit $(x, f), (y, g) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda(x, f) + (y, g)) &= \mathcal{P}(\lambda x + y, \lambda f + g) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i^*, \mathcal{D}(\lambda f + g) \right) \\ &= \left(\lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i^* + \sum_{i=1}^n y_i e_i^*, \lambda \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g) \right) \\ &= \lambda \mathcal{P}(x, f) + \mathcal{P}(y, g). \end{aligned}$$

De plus, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \\ \|\mathcal{P}(x, f)\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i^* \right\|_{\mathcal{L}} + \|\mathcal{D}(f)\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i^*\|_{\mathcal{L}} + \|D\|_{\mathcal{L}} \|f\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i^*\|_{\mathcal{L}} + \|D\|_{\mathcal{L}} \|f\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i^*\|_{\mathcal{L}} + \|D\|_{\mathcal{L}} \|f\|_1 \\ &\leq (\|D\|_{\mathcal{L}} + \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i^*\|_{\mathcal{L}}) (\|x\|_{\mathbb{R}^n} + \|f\|_1) \\ &= (\|D\|_{\mathcal{L}} + \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i^*\|_{\mathcal{L}}) \|(x, f)\|_1. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), (\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*). \quad (1.5.14)$$

Soit $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, f) = 0 &\Rightarrow (\sum_{i=1}^n x_i e_i^*, \mathcal{D}(f)) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i e_i^* = 0 \text{ et } \mathcal{D}(f) = 0 \\ &\Rightarrow (x, f) = 0. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{P} est injectif.

Soit $(\beta, F) \in (\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*$; puisque $\beta \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\beta = \sum_{i=1}^n x_i e_i^*$.

De plus, puisque \mathcal{D} est surjectif: $\exists f \in NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$ t.q. $\mathcal{D}(f) = F$. Par conséquent, on a

$$\mathcal{P}(x, f) = (\beta, F).$$

Donc \mathcal{P} est surjectif. Puisque \mathcal{P} est un opérateur bijectif linéaire continu de $\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*$, $(\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ et $((\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)$ sont des espaces de Banach, en utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, on a

$$\mathcal{P} \in Isom((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1), ((\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)). \quad (1.5.15)$$

Considérons les fonctions linéaires continues $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\pi_1(\beta, F) = \beta$, et $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ définie par $\pi_2(\beta, F) = F$.

Considérons l'opérateur $\Lambda : (\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n))^*$ défini par

$$\Lambda(\beta, F) = \beta \circ \pi_1 + F \circ \pi_2.$$

En utilisant le lemme 2, p.114 de [1], on a

$$\Lambda \in Isom(((\mathbb{R}^n)^* \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1), ((\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})). \quad (1.5.16)$$

De plus, en utilisant le Théorème 1.5.12 et le théorème 4.13.4, p.173 de [23], on a

$$\mathcal{I}^* \in Isom((\mathbb{R}^n \times C^0([a, b], \mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), (C^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})). \quad (1.5.17)$$

Remarquons que

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}^* \circ \Lambda \circ \mathcal{P}. \quad (1.5.18)$$

En effet, pour chaque $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}^* \circ \Lambda)(\mathcal{P}(x, f)) &= (\mathcal{I}^* \circ \Lambda)(\sum_{i=1}^n x_i e_i^*, \mathcal{D}(f)) \\ &= \mathcal{I}^*(\sum_{i=1}^n x_i e_i^* \circ \pi_1 + \mathcal{D}(f) \circ \pi_2) \\ &= (\sum_{i=1}^n x_i e_i^* \circ \pi_1 + \mathcal{D}(f) \circ \pi_2) \circ \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \forall (x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \forall u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \\ (\mathcal{I}^* \circ \Lambda)(\mathcal{P}(x, f))(u) &= (\sum_{i=1}^n x_i e_i^* \circ \pi_1 + \mathcal{D}(f) \circ \pi_2)(u(a), u') \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i^*(u(a)) + \mathcal{D}(f)(u') \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i^*(u(a)) + \sum_{i=1}^n \int_a^b (e_i^* \circ u')(t) df(t) = M(x, f)(u). \end{aligned}$$

Avec les assertions (1.5.15), (1.5.16), (1.5.17) et (1.5.18), on a

$$\mathcal{M} \in Isom((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1), (C^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})).$$

□

Lemme 1.5.14. *Considérons l'ensemble des restrictions de fonctions affines à l'intervalle $[a, b]$:*

$$Af([a, b], \mathbb{R}^n) = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) : \exists(c^1, c^2) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall t \in [a, b], f(t) = tc^1 + c^2\}.$$

Alors $(Af([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in Af([a, b], \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ t.q. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_{C^1} = 0$.

Puisque $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in Af([a, b], \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists(c_k^1, c_k^2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [a, b], f_k(t) = tc_k^1 + c_k^2.$$

Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$; on a

$$\|c_{k+p}^1 - c_k^1\|_{\mathbb{R}^n} = \|f'_{k+p}(a) - f'_k(a)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f_{k+p} - f_k\|_{C^1}.$$

Par conséquent, puisque $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$, $(c_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n})$.

Donc

$$\exists c^1 \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k^1 = c^1.$$

De plus, puisque $\forall k \in \mathbb{N}, f_k(a) = ac_k^1 + c_k^2$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k^2$ existe et $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k^2 = f(a) - ac^1$. Donc on obtient

$$\forall t \in [a, b], f(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} tc_k^1 + c_k^2 = tc^1 + c^2.$$

Ainsi $Af([a, b], \mathbb{R}^n)$ est un fermé de $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ ce qui implique que $(Af([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach. \square

Lemme 1.5.15. *Considérons $C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n) := \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) : f(a) = f(b) = 0\}$. Alors $(C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ t.q. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k - f\|_{C^1} = 0$.

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}, f_k(a) = 0$ et $f_k(b) = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f(a)\| &\leq \|f_k(a) - f(a)\| \leq \|f_k - f\|_{C^1} \\ \text{et } 0 \leq \|f(b)\| &\leq \|f_k(b) - f(b)\| \leq \|f_k - f\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le théorème des gendarmes, on a $f(a) = f(b) = 0$.

Ainsi $C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ est un fermé de $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$; ce qui implique que $(C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach. \square

Proposition 1.5.16. *Considérons l'opérateur $\mathcal{Y} : Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\forall(A, \sigma) \in Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \mathcal{Y}(A, \sigma) := A + \sigma.$$

Alors $\mathcal{Y} \in \text{Isom}((Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1), (C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1}))$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $(A_1, A_2, \sigma_1, \sigma_2) \in Af([a, b], \mathbb{R}^n)^2 \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^2$; on a

$$\mathcal{Y}(\lambda(A_1, \sigma_1) + (A_2, \sigma_2)) = \lambda A_1 + A_2 + \lambda \sigma_1 + \sigma_2 = \lambda \mathcal{Y}(A_1, \sigma_1) + \mathcal{Y}(A_2, \sigma_2).$$

De plus, pour chaque $(A, \sigma) \in Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a

$$\|\mathcal{Y}(A, \sigma)\|_{C^1} = \|A + \sigma\|_{C^1} \leq \|A\|_{C^1} + \|\sigma\|_{C^1} = \|(A, \sigma)\|_1.$$

Donc

$$\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), C^1([a, b], \mathbb{R}^n)). \quad (1.5.19)$$

Montrons que \mathcal{Y} est injectif.

Soit $(A, \sigma) \in Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ t.q. $\mathcal{Y}(A, \sigma) = 0$.

Puisque $A \in Af([a, b], \mathbb{R}^n)$, il existe $(c^1, c^2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\forall t \in [a, b], A(t) = tc^1 + c^2$.

Notons que

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(A, \sigma) = 0 &\Rightarrow A + \sigma = 0 \\ &\Rightarrow ac^1 + c^2 = 0 \text{ et } bc^1 + c^2 = 0 \\ &\Rightarrow c^1 = c^2 = 0 \\ &\Rightarrow A = 0, \end{aligned}$$

d'où $\sigma = A + \sigma = 0$.

Donc \mathcal{Y} est injectif.

Montrons que \mathcal{Y} est surjectif.

Soit $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$; posons

$$\forall t \in [a, b], A(t) = \frac{(t-b)}{(a-b)}(u(a) - u(b)) + u(b) \text{ et } \sigma = u - A.$$

Puisque $(A, \sigma) \in Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{Y}(A, \sigma) = u$, \mathcal{Y} est surjectif.

Par conséquent, puisque $(Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ et $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})$ sont des espaces de Banach, on a, en utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach,

$$\mathcal{Y} \in Isom((Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1), (C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1})).$$

□

Théorème 1.5.17. *Considérons l'opérateur*

$\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$ défini par,

$\forall (x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{W}(x, f) := (\mathcal{W}_1(x, f), \mathcal{W}_2(x, f))$ où

$$\forall u_1 \in Af([a, b], \mathbb{R}^n), \mathcal{W}_1(x, f)(u_1) := \mathcal{M}(x, f)(u_1),$$

et

$$\forall u_2 \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n), \mathcal{W}_2(x, f)(u_2) := \mathcal{M}(x, f)(u_2).$$

Alors

$$\mathcal{W} \in Isom((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1), (Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)).$$

Démonstration. En utilisant la Proposition 1.5.16 et le théorème 4.13.4, p.173 de [23], on a

$$\mathcal{Y}^* \in Isom((C^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), ((Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})). \quad (1.5.20)$$

Considérons l'opérateur

$\Theta : (Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n))^* \rightarrow Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$, défini par, pour tout $\phi \in (Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n))^*$, $\Theta(\phi) = (\phi(\cdot, 0), \phi(0, \cdot))$. En utilisant le lemme 2, p.114 de [1], on a

$$\begin{aligned} \Theta &\in Isom((Af([a, b], \mathbb{R}^n) \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), \\ &(Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)). \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

Ainsi, avec (1.5.20), (1.5.21) et en utilisant le Théorème 1.5.13, on a

$$\Theta \circ \mathcal{Y}^* \circ \mathcal{M} \in \text{Isom}((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)). \quad (1.5.22)$$

Remarquons que $\mathcal{W} = \Theta \circ \mathcal{Y}^* \circ \mathcal{M}$.

En effet, pour chaque $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$, on a

$$\begin{aligned} (\Theta \circ \mathcal{Y}^* \circ \mathcal{M})(x, f) &= (\Theta \circ \mathcal{Y}^*)(\mathcal{M}(x, f)) \\ &= \Theta(\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y}) \\ &= ((\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(\cdot, 0), (\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(0, \cdot)). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$ et $u_1 \in Af([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(\cdot, 0)(u_1) &= (\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(u_1, 0) \\ &= \mathcal{M}(x, f)(\mathcal{Y}(u_1, 0)) \\ &= \mathcal{M}(x, f)(u_1) \\ &= \mathcal{W}_1(x, f)(u_1) \end{aligned}$$

et pour chaque $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$ et $u_2 \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(0, \cdot)(u_2) &= (\mathcal{M}(x, f) \circ \mathcal{Y})(0, u_2) \\ &= \mathcal{M}(x, f)(\mathcal{Y}(0, u_2)) \\ &= \mathcal{M}(x, f)(u_2) \\ &= \mathcal{W}_2(x, f)(u_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que

$$\mathcal{W} \in \text{Isom}((\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \|\cdot\|_1), (Af([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1)).$$

□

Dans le théorème suivant, on construit un produit scalaire sur l'espace $NBV([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant une propriété de continuité.

Théorème 1.5.18. *Considérons la fonctionnelle*

$\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV} : NBV([a, b], \mathbb{R}) \times NBV([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall f_1, f_2 \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \langle f_1 | f_2 \rangle_{NBV} = \int_a^b f_1(t)f_2(t) dt + f_1(b)f_2(b).$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV}$ est un produit scalaire sur $NBV([a, b], \mathbb{R})$.
- (ii) $\forall f \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_{\varpi} \leq \sqrt{(b-a)+1}\|f\|_{NBV}$ où $\|f\|_{\varpi}$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV}$.

Démonstration. (i)

Pour commencer, montrons que $\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV}$ est bien définie.

Soit $f_1, f_2 \in NBV([a, b], \mathbb{R})$; puisque f_1 et f_2 sont bornées, on obtient que $f_1 f_2 := [t \mapsto f_1(t)f_2(t)]$ est bornée.

De plus, puisque $\forall i \in \{1, 2\}$, f_i possède un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité, on obtient que $f_1 f_2$ possède également un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.1.14, on obtient que $f_1 f_2$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$; d'où $\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV}$ est bien définie.

Soit $f_1, f_2 \in NBV([a, b], \mathbb{R})$; on a

$$\begin{aligned}\langle f_1 \mid f_2 \rangle_{NBV} &= \int_a^b f_1(t)f_2(t) dt + f_1(b)f_2(b) \\ &= \int_a^b f_2(t)f_1(t) dt + f_2(b)f_1(b) \\ &= \langle f_2 \mid f_1 \rangle_{NBV},\end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\forall f_1, f_2 \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \langle f_1 \mid f_2 \rangle_{NBV} = \langle f_2 \mid f_1 \rangle_{NBV}. \quad (1.5.23)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, f_3 \in NBV([a, b], \mathbb{R})$; notons que

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1 + f_2 \mid f_3 \rangle_{NBV} &= \int_a^b (\lambda f_1(t) + f_2(t))f_3(t)dt + (\lambda f_1 + f_2)(b)f_3(b) \\ &= \int_a^b (\lambda f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t))dt + \lambda f_1(b)f_3(b) + f_2(b)f_3(b) \\ &= \lambda \left(\int_a^b f_1(t)f_3(t) + f_1(b)f_3(b) \right) + \int_a^b f_2(t)f_3(t) + f_2(b)f_3(b) \\ &= \lambda \langle f_1 \mid f_3 \rangle_{NBV} + \langle f_2 \mid f_3 \rangle_{NBV}.\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2, f_3 \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \langle \lambda f_1 + f_2 \mid f_3 \rangle_{NBV}. \quad (1.5.24)$$

Soit $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$; puisque pour chaque $t \in [a, b]$, $f(t)^2 \geq 0$ et $f(b)^2 \geq 0$, on a

$$\langle f \mid f \rangle_{NBV} = \int_a^b f(t)^2 dt + f(b)^2 \geq 0.$$

De plus, notons que $\langle 0 \mid 0 \rangle_{NBV} = 0 + 0 = 0$.

Soit $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$ t.q. $\langle f \mid f \rangle_{NBV} = 0$.

Puisque $\langle f \mid f \rangle_{NBV} = 0$, on a

$$\int_a^b f(t)^2 dt + f(b)^2 = 0.$$

Puisque $\int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$ et $f(b)^2 \geq 0$, on a

$$\int_a^b f(t)^2 dt = 0 \text{ et } f(b)^2 = 0.$$

Et puisque $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$, on a $f(a) = 0$. Puisque $f(b)^2 = 0$, on a $f(b) = 0$.

Reste à prouver que f est nulle sur $]a, b[$. Soit $t_0 \in]a, b[$; montrons que $f(t_0) = 0$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $f(t_0) \neq 0$.

f étant continue à gauche de t_0 , $f^2 := [t \mapsto f(t)^2]$ est aussi continue à gauche au point t_0 .

Puisque $f(t_0)^2 \neq 0$, on a $f(t_0)^2 > 0$. Par conséquent, on a

$$\exists \eta > 0, \forall t \in [t_0 - \eta, t_0], f^2(t) \geq \frac{f^2(t_0)}{2},$$

d'où

$$\int_a^b f^2(t) dt \geq \int_{t_0 - \eta}^{t_0} \frac{f^2(t_0)}{2} dt \geq \eta \frac{f^2(t_0)}{2} > 0;$$

ce qui est absurde, donc $f(t_0) = 0$ i.e. $f = 0$ sur $]a, b[$ car t_0 était arbitrairement choisi.

Ainsi, on a prouvé que

$$\forall f \in NBV([a, b], \mathbb{R}), \langle f \mid f \rangle_{NBV} = 0 \Leftrightarrow f = 0. \quad (1.5.25)$$

Ainsi avec (1.5.23), (1.5.24) et (1.5.25), $\langle \cdot | \cdot \rangle_{NBV}$ est un produit scalaire sur $NBV([a, b], \mathbb{R})$.

(ii)

De plus, soit $f \in NBV([a, b], \mathbb{R})$, soit $t \in [a, b]$; notons que

$$|f(t)| \leq |f(t)| + |f(b) - f(t)| = |f(t) - f(a)| + |f(b) - f(t)| \leq V_a^b(f).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \langle f | f \rangle_{NBV} &\leq \int_a^b V_a^b(f)^2 dt + V_a^b(f)^2 \\ &= (b-a)V_a^b(f)^2 + V_a^b(f)^2 \\ &= ((b-a) + 1)V_a^b(f)^2, \end{aligned}$$

d'où, on déduit que

$$\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{(b-a) + 1} V_a^b(f) = \sqrt{(b-a) + 1} \|f\|_{NBV}.$$

□

Théorème 1.5.19. *Considérons la fonctionnelle*

$\langle \cdot | \cdot \rangle_P : (\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n) \times (\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n) \rightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\begin{aligned} \forall (x_1, f_1), (x_2, f_2) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n, \\ \langle (x_1, f_1) | (x_2, f_2) \rangle_P = \langle x_1 | x_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f_1^i | f_2^i \rangle_{NBV}, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n . Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$.
- (ii) $\exists \alpha > 0$, $\forall (x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$, $\|(x, f)\|_{P, \infty} \leq \alpha \|(x, f)\|_1$, où $\|(x, f)\|_{P, \infty}$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$.

Démonstration. (i)

Soit $(x_1, f_1), (x_2, f_2) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$; on a

$$\begin{aligned} \langle (x_1, f_1) | (x_2, f_2) \rangle_P &= \langle x_1 | x_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f_1^i | f_2^i \rangle_{NBV} \\ &= \langle x_2 | x_1 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f_2^i | f_1^i \rangle_{NBV} \\ &= \langle (x_2, f_2) | (x_1, f_1) \rangle_P. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient la symétrie de $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$; notons que

$$\begin{aligned} &\langle \lambda(x_1, f_1) + (x_2, f_2) | (x_3, f_3) \rangle_P \\ &= \langle \lambda x_1 + x_2 | x_3 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle \lambda f_1^i + f_2^i | f_3^i \rangle_{NBV} \\ &= \lambda \langle x_1 | x_3 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x_2 | x_3 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \lambda \langle f_1^i | f_3^i \rangle_{NBV} + \sum_{i=1}^n \langle f_2^i | f_3^i \rangle_{NBV} \\ &= \lambda \langle (x_1, f_1) | (x_3, f_3) \rangle_P + \langle (x_2, f_2) | (x_3, f_3) \rangle_P. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient la bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$.

Soit $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$; on a

$$\langle (x, f) | (x, f) \rangle_P = \langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f^i | f^i \rangle_{NBV} \geq 0.$$

Ainsi on obtient la positivité de $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$.

Soit $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$; notons que

$$\begin{aligned}
 \langle (x, f) | (x, f) \rangle_P &= 0 \\
 \Leftrightarrow \langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f^i | f^i \rangle_{NBV} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \langle f^i | f^i \rangle_{NBV} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle f^i | f^i \rangle_{NBV} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, f^i = 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } f = 0.
 \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$ est définie positive.

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle_P$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$.

(ii)

Puisque les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq \alpha_1 \|x\|_{\mathbb{R}^n}$.

Posons $\alpha := \alpha_1 + \sqrt{(b-a) + 1}$.

Soit $(x, f) \in \mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R})^n$; on a

$$\begin{aligned}
 \|(x, f)\|_{P, \varpi} &= \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \langle f^i | f^i \rangle_{NBV}} \\
 &\leq \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle f^i | f^i \rangle_{NBV}}} \\
 &\leq \|x\|_2 + \sum_{i=1}^n \sqrt{\langle f^i | f^i \rangle_{NBV}} \\
 &= \|x\|_2 + \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{\varpi} \\
 &\leq \alpha_1 \|x\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \sqrt{(b-a) + 1} \|f^i\|_{NBV} \\
 &= \alpha (\|x\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i=1}^n \|f^i\|_{NBV}) = \alpha \|(x, f)\|_1.
 \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant, nous donne une condition équivalente pour obtenir la continuité du produit scalaire.

Lemme 1.5.20. *Soit $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ un espace vectoriel normé réel. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur \mathcal{X} .*

Notons $\|\cdot\|_i$ la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur \mathcal{X} . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\langle \cdot | \cdot \rangle \in C^0((\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X},1}), \mathbb{R})$ où, $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2, \|(x_1, x_2)\|_{\mathcal{X},1} = \|x_1\|_{\mathcal{X}} + \|x_2\|_{\mathcal{X}}$.
- (ii) $\exists c > 0, \forall x \in \mathcal{X}, \|x\|_i \leq c \|x\|_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii)

Supposons (i) i.e.

$$\exists b_1 > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2, \langle x_1 | x_2 \rangle \leq b_1 \|x_1\|_{\mathcal{X}} \|x_2\|_{\mathcal{X}}.$$

Posons $c = \sqrt{b_1}$.

Si $x \in \mathcal{X}$, on a

$$\|x\|_i = \sqrt{\langle x | x \rangle} \leq \sqrt{b_1 \|x\|_{\mathcal{X}}^2} = \sqrt{b_1} \|x\|_{\mathcal{X}} = c \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Supposons (ii).

Soit $x, y \in \mathcal{X}$; puisque $\langle \cdot | \cdot \rangle \in C^0((\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \|\cdot\|_{i,1}), \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
 \langle x | y \rangle &\leq \|\langle \cdot | \cdot \rangle\|_{\mathcal{B}} \|x\|_i \|y\|_i \\
 &\leq \|\langle \cdot | \cdot \rangle\|_{\mathcal{B}c^2} \|x\|_{\mathcal{X}} \|y\|_{\mathcal{X}}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une fonction bilinéaire, l'assertion (i) a été démontrée. □

La proposition suivante nous donne des conditions pour construire un produit scalaire à partir d'un autre produit scalaire.

Proposition 1.5.21. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé réel et $(H, \|\cdot\|_H)$ un autre espace vectoriel normé réel.*

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ un produit scalaire sur H t.q. $\langle \cdot | \cdot \rangle_H \in C^0((H^2, \|\cdot\|_{H,1}), \mathbb{R})$.

Soit $J \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|_X), (H, \|\cdot\|_H))$ injectif. Alors la fonctionnelle $\langle \cdot | \cdot \rangle_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, définie par,

$$\forall (x_1, x_2) \in X, \langle x_1 | x_2 \rangle_X = \langle J(x_1) | J(x_2) \rangle_H,$$

est un produit scalaire sur X et $\langle \cdot | \cdot \rangle_X \in C^0((X^2, \|\cdot\|_{X,1}), \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in X$

$$\langle x_1 | x_2 \rangle_X = \langle J(x_1) | J(x_2) \rangle_H = \langle J(x_2) | J(x_1) \rangle_H = \langle x_2 | x_1 \rangle_X.$$

Par conséquent, on obtient la symétrie de $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2, x_3 \in X$; on a

$$\begin{aligned} \langle \lambda x_1 + x_2 | x_3 \rangle_X &= \langle J(\lambda x_1 + x_2) | J(x_3) \rangle_H \\ &= \langle \lambda J(x_1) + J(x_2) | J(x_3) \rangle_H \\ &= \lambda \langle J(x_1) | J(x_3) \rangle_H + \langle J(x_2) | J(x_3) \rangle_H \\ &= \lambda \langle x_1 | x_3 \rangle_X + \langle x_2 | x_3 \rangle_X. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient la bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$.

Si $x \in X$, on a

$$\langle x | x \rangle_X = \langle J(x) | J(x) \rangle_H \geq 0.$$

Par conséquent, $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$ est positive.

Soit $x \in X$; notons que

$$\begin{aligned} \langle x | x \rangle_X = 0 &\Leftrightarrow \langle J(x) | J(x) \rangle_H = 0 \\ &\Leftrightarrow J(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$ est définie positive. Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$ est un produit scalaire sur X . Notons $\|\cdot\|_{X,\varpi}$ et $\|\cdot\|_{H,\varpi}$ les normes induites respectivement par $\langle \cdot | \cdot \rangle_X$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$. Ensuite, en utilisant le Lemme 1.5.20, on a

$$\exists c_H > 0, \forall h \in H, \|h\|_{H,\varpi} \leq c_H \|h\|_H.$$

Par conséquent, pour chaque $x \in X$, on a

$$\|x\|_{X,\varpi} = \|J(x)\|_{H,\varpi} \leq c_H \|J(x)\|_H \leq c_H \|J\|_{\mathcal{L}} \|x\|_X.$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 1.5.20, on a $\langle \cdot | \cdot \rangle_X \in C^0((X^2, \|\cdot\|_{X,1}), \mathbb{R})$. □

Dans le théorème suivant, on construit un produit scalaire continu sur $C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^*$. Notons que ce résultat sera essentiel dans l'utilisation d'un théorème de Calcul des Variations.

Théorème 1.5.22. *Considérons la fonctionnelle $\langle \cdot | \cdot \rangle_{C^1_{0,0}} : (C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par,*

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_{C^1_{0,0}} = \langle \mathcal{W}^{-1}(0, \phi_1) | \mathcal{W}^{-1}(0, \phi_2) \rangle_P,$$

où \mathcal{W} est l'opérateur défini dans le Théorème 1.5.17.

Alors $\langle \cdot | \cdot \rangle_{C^1_{0,0}}$ est un produit scalaire sur $C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^$ t.q.*

$\langle \cdot | \cdot \rangle_{C^1_{0,0}} \in C^0((C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^ \times C^1_{0,0}([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R})$.*

Démonstration. En utilisant le Théorème 1.5.17, on sait que

$$\mathcal{W}^{-1} \in \text{Isom}((\mathcal{A}f([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_1), (\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)).$$

Par conséquent la fonctionnelle $\langle \cdot | \cdot \rangle_{C_{0,0}^1}$ est bien définie. Montrons que $\mathcal{W}^{-1}(0, \cdot) := [\phi_2 \mapsto \mathcal{W}^{-1}(0, \phi_2)] \in \mathcal{L}((C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), (\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1))$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\phi_1, \phi_2 \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{-1}(0, \cdot)(\lambda\phi_1 + \phi_2) &= \mathcal{W}^{-1}(0, \lambda\phi_1 + \phi_2) \\ &= \mathcal{W}^{-1}(\lambda 0 + 0, \lambda\phi_1 + \phi_2) \\ &= \mathcal{W}^{-1}(\lambda(0, \phi_1) + (0, \phi_2)) \\ &= \lambda\mathcal{W}^{-1}(0, \phi_1) + \mathcal{W}^{-1}(0, \phi_2) \\ &= \lambda\mathcal{W}^{-1}(0, \cdot)(\phi_1) + \mathcal{W}^{-1}(0, \cdot)(\phi_2). \end{aligned}$$

De plus, pour chaque $\phi \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$, on a

$$\|\mathcal{W}^{-1}(0, \phi)\|_1 \leq \|\mathcal{W}^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|(0, \phi)\|_1 = \|\mathcal{W}^{-1}\|_{\mathcal{L}} \|\phi\|_{\mathcal{L}}.$$

Par conséquent, on a

$$\mathcal{W}^{-1}(0, \cdot) \in \mathcal{L}((C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}), (\mathbb{R}^n \times NBV([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)). \quad (1.5.26)$$

Soit $\phi \in C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$; on a

$$\mathcal{W}^{-1}(0, \cdot)(\phi) = 0 \Rightarrow \mathcal{W}^{-1}(0, \phi) = 0 \Rightarrow (0, \phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0.$$

Ainsi

$$\mathcal{W}^{-1}(0, \cdot) \text{ est injectif.} \quad (1.5.27)$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.5.21 et le Théorème 1.5.19, on obtient que $\langle \cdot | \cdot \rangle_{C_{0,0}^1}$ est un produit scalaire sur $C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*$ t.q.

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{C_{0,0}^1} \in C^0((C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^* \times C_{0,0}^1([a, b], \mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R}). \quad \square$$

Chapitre 2

Optimisation statique

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème d'optimisation statique.

Dans la section 1, on commence par faire des rappels sur le calcul différentiel. On rappelle les définitions de fonction Gâteaux-différentiable, Hadamard-différentiable et Fréchet-différentiable en un point. Ensuite, on rappelle des propriétés de ces notions.

Dans les sections 2 et 3, on établit une Règle des Multiplicateurs dans les formes de Fritz JOHN et de KARUSH-KUHN-TUCKER en dimension infinie pour un problème sous un nombre fini de contraintes d'inégalité et pour un problème sous un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Notons que ces deux Règles de Multiplicateurs ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale à comité de lecture cf. [40].

De la même manière que H. HALKIN (cf. [24]), P. MICHEL (cf. [30] p.504) et J. BLOT (cf. [9]), on essaye de généraliser la Règle des Multiplicateurs pour ces deux problèmes d'optimisation statique. Cette généralisation consiste à remplacer l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité sur un voisinage de la solution optimale pour la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes par une notion de différentiabilité en la solution optimale définie dans la section 1.

Pour le problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité, H. HALKIN et P. MICHEL généralisent la Règle des Multiplicateurs en remplaçant l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité sur un voisinage de la solution optimale par l'hypothèse de Fréchet-différentiabilité en la solution optimale pour la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes.

Notons que H. HALKIN et P. MICHEL arrivent au même énoncé avec des preuves très différentes. En effet, P. MICHEL utilise un théorème de séparation et le théorème de point-fixe de Brouwer tandis que H. HALKIN utilise son théorème des fonctions implicites pour les fonctions Fréchet-différentiables (au lieu de Fréchet C^1) en un point.

Pour le problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité, en dimension finie, J. BLOT généralise la Règle des Multiplicateurs en remplaçant l'hypothèse de Fréchet-différentiabilité en la solution optimale par l'hypothèse de Gâteaux-différentiabilité en la solution optimale pour la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes. De plus, il remplace l'hypothèse de continuité sur un voisinage de la solution optimale par une hypothèse de semi-continuité inférieure en la solution optimale pour les fonctions constituant les contraintes. Enfin, il n'émet pas d'hypothèse de continuité pour la fonction de l'objectif.

Notons qu'il existe d'autres façons de généraliser l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité sur un voisinage de la solution optimale, à l'aide de notions de sous-différentielle pour des fonctions localement lipschitziennes comme F.H. CLARKE, cf. [17] et [18]. Toutefois, le cadre utilisé par ces trois auteurs ne rentre pas dans le cadre des fonctions localement lipschitziennes. En effet, en général, une fonction qui est Fréchet-différentiable en un point n'est pas localement lipschitzienne autour de ce point et inversement une fonction qui est localement lipschitzienne autour d'un point

n'est pas nécessairement Fréchet-différentiable en ce point. Ce n'est pas la direction suivie ici.

Dans la section 2, on énonce une Règle des Multiplicateurs sous les formes de Fritz JOHN ou de KARUSH-KUHN-TUCKER en dimension infinie pour un problème sous un nombre fini de contraintes d'inégalité. On suppose que la fonction de l'objectif est Gâteaux-différentiable en la solution optimale et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont Gâteaux-différentiables et semi-continues inférieurement en la solution optimale. En utilisant une approche similaire à celle de P. MICHEL dans sa preuve du théorème de [30] p.504, on prouve le théorème 3.1 de [9] en dimension infinie.

Dans la section 3, on établit une Règle des Multiplicateurs sous les formes de Fritz JOHN ou de KARUSH-KUHN-TUCKER en dimension infinie pour un problème sous un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. On suppose que la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes sont Hadamard-différentiables en la solution optimale, et pour les fonctions constituant les contraintes d'égalité, on suppose, en plus, qu'elles sont continues dans un voisinage de la solution optimale. À l'aide de la méthode de P. MICHEL, on prouve ce théorème. Pour le problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité, notons que ce théorème généralise en dimension infinie les Règles des Multiplicateurs de [[24],[30],[9]].

Dans les sections 4-6, on s'intéresse à deux problèmes d'optimisation en dimension infinie à paramètre avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Dans le premier problème, la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres. Dans le second problème, la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un sous-espace affine inclus dans un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres. Pour chacun de ces problèmes, on établit un théorème de l'enveloppe. Un théorème de l'enveloppe consiste à donner des conditions pour obtenir la différentiabilité de la fonction valeur et à donner une expression de sa différentielle. Dans un théorème de l'enveloppe, en un point fixé, on suppose qu'il existe une solution pour chaque paramètre dans un voisinage de ce point.

Notons qu'à la différence des théorèmes de l'enveloppe, dans les théorèmes de perturbation, en un point fixé où la solution existe, on donne des conditions pour qu'il existe une solution pour chaque paramètre dans un voisinage de ce point. Toutefois, comparé aux hypothèses des théorèmes de l'enveloppe, les théorèmes de perturbation exigent des hypothèses de conditions suffisantes.

Notre objectif est d'établir un théorème de l'enveloppe en allégeant les hypothèses des résultats existants. Parmi les preuves des théorèmes de l'enveloppe, on peut souligner l'existence de deux points de vue. Le premier point de vue consiste à démontrer le théorème de l'enveloppe en utilisant une hypothèse de régularité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker cf. [6] et [22]. Le deuxième point de vue consiste à utiliser un théorème de perturbation pour démontrer le théorème de l'enveloppe cf. [15].

Notre principale contribution est d'éviter à la fois des hypothèses de régularité sur les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker et des hypothèses de conditions suffisantes utilisées dans les théorèmes de perturbation.

Tout d'abord, on évite de supposer la régularité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker. En effet, en construisant un lemme de Gram-Schmidt à paramètre, on parvient à démontrer que les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker sont continus par rapport au paramètre. À l'aide de la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker, on démontre notre théorème de l'enveloppe. Ensuite, en utilisant la Règle des Multiplicateurs établie dans la section 2 de ce chapitre, on parvient à remplacer l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité par l'hypothèse de Hadamard-différentiabilité.

Enfin, notons que notre problème est un problème en dimension infinie.

Notons qu'on pourra retrouver les résultats du théorème de l'enveloppe en optimisation statique

dans [12].

Dans la section 4, on énonce un théorème de l'enveloppe pour deux problèmes d'optimisation à paramètre sous un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Le premier problème est un problème d'optimisation à paramètre où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres. Le second problème est un problème à paramètre où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un sous-espace affine inclus dans un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres.

Dans la section 5, on démontre le théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre d'optimisation en dimension infinie avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Pour cela, on commence par démontrer un lemme de Gram-Schmidt à paramètre. Grâce au lemme de Gram-Schmidt, on démontre un lemme sur la continuité, par rapport au paramètre, des coordonnées d'un vecteur dans un espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre. Ensuite, pour montrer notre théorème de l'enveloppe, on utilise la Règle des Multiplicateurs de la section 2. En outre, à l'aide du lemme sur la continuité par rapport au paramètre des coordonnées d'un vecteur dans un espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre, on démontre la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker.

Dans la section 6, on démontre le théorème de l'enveloppe pour le second problème. Pour prouver ce théorème, on transforme le second problème en un problème où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres. Puis, en utilisant le théorème de l'enveloppe pour ce problème, on démontre le théorème de l'enveloppe pour le second problème.

2.1 Rappels de Calcul différentiel

Dans cette section, on fait des rappels sur le calcul différentiel. On rappelle les définitions de fonction Gâteaux-différentiable, Hadamard-différentiable et Fréchet-différentiable en un point. Ensuite, on rappelle des propriétés de ces notions.

Notons que la plupart des résultats de cette section sont issues de [21].

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé réel, G un ouvert de X , et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace vectoriel normé réel.

Définition 2.1.1. Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$ et $v \in X$. On dit que f admet une dérivée directionnelle à droite (ou Gâteaux-variation) au point x suivant la direction v lorsque la limite $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta}(f(x + \theta v) - f(x))$ existe. On note cette limite $D_G^+ f(x; v)$ et $D_G^+ f(x; v)$ est appelé la dérivée directionnelle à droite (ou Gâteaux-variation) de f au point x suivant la direction v .

Définition 2.1.2. Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$. On dit que f est Gâteaux-différentiable au point x lorsque, pour chaque $v \in X$, $D_G^+ f(x; v)$ existe et $D_G^+ f(x; \cdot) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors, la Gâteaux-différentielle de la fonction f au point x est la fonction $D_G f(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ définie par, pour tout $v \in X$, $D_G f(x) \cdot v = D_G^+ f(x; v)$.

Définition 2.1.3. Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$ et $v \in X$. On dit que f admet une Hadamard-variation au point x d'accroissement v lorsque il existe $D_H^+ f(x; v) \in Y$ t.q., pour toute suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^\mathbb{N}$ convergeant vers 0, pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^\mathbb{N}$ convergeant vers v ,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_n} (f(x + \theta_n v_n) - f(x)) = D_H^+ f(x; v)$. Alors $D_H^+ f(x; v)$ est appelé la Hadamard-variation de f au point x d'accroissement v .

Définition 2.1.4. Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$. On dit que f est Hadamard-différentiable au point x lorsque, pour chaque $v \in X$, $D_H^+ f(x; v)$ existe et $D_H^+ f(x; \cdot) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors, la Hadamard-différentielle de la fonction f au point x est la fonction $D_H f(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ définie par, pour tout $v \in X$, $D_H f(x) \cdot v = D_H^+ f(x; v)$.

Définition 2.1.5. Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$. On dit que f est Fréchet-différentiable au point x lorsque, il existe $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ t.q.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \|h\|_X \neq 0}} \frac{1}{\|h\|_X} (f(x + h) - f(x) - L \cdot h) = 0.$$

Alors L est noté $D_F f(x)$ et on l'appelle la Fréchet-différentielle de f au point x .

La proposition suivante nous donne les liens entre les différents sens de différentiabilité d'une fonction en un point.

Proposition 2.1.6. (cf. [21] p.259 et p.266).

Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$ et $v \in X$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $D_H^+ f(x; v)$ existe, alors $D_G^+ f(x; v)$ existe et $D_G^+ f(x; v) = D_H^+ f(x; v)$.
- (ii) Si f est Hadamard-différentiable au point x , alors f est Gâteaux-différentiable au point x et $D_G f(x) = D_H f(x)$.
- (iii) Si f est Fréchet-différentiable au point x , alors f est Hadamard-différentiable au point x et $D_H f(x) = D_F f(x)$.

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) sont démontrées dans [21] (p.259) et l'assertion (iii) est démontrée dans [21] (p.266). □

Toutefois, les réciproques des assertions (i)-(iii) sont fausses en général. En effet, pour les réciproques des assertion (i)-(ii), on peut trouver un contre-exemple dans [21] (exemple (c) p.252). Pour la réciproque de l'assertion (iii), on peut trouver, de nouveau, un contre-exemple dans [21] (exemple (d) p.252).

Notons que la réciproque de l'assertion (iii) est vraie lorsque $\dim(X) < +\infty$ cf. [21] p.266.

La proposition suivante nous donne une condition pour avoir la réciproque de l'assertion (ii).

Proposition 2.1.7. (cf. [21] p.259).

Soit $f : G \rightarrow Y$ une fonction, soit $x \in G$ t.q. f soit lipschitzienne sur un voisinage de x . Si f est Gâteaux-différentiable au point x , alors f est Hadamard-différentiable au point x et $D_H f(x) = D_G f(x)$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration dans [21] p.259. □

Lemme 2.1.8. (cf. [21] p.263).

Soit Z un espace vectoriel normé réel. Soit $f : G \rightarrow Y$, soit $x \in G$ et $v \in X$, soit Ω un ouvert de Y t.q. $f(x) \in \Omega$.

Soit $g : \Omega \rightarrow Z$ une fonction. Si $D_G^+ f(x; v)$ et $D_H^+ g(f(x); D_G^+ f(x; v))$ existent, alors $D_G^+ (g \circ f)(x; v)$ existe et $D_G^+ (g \circ f)(x; v) = D_H^+ g(f(x); D_G^+ f(x; v))$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration dans [21] p.263. □

La notion de Hadamard-différentiabilité est stable par composition.

Lemme 2.1.9. (cf. [21] p.267).

Soit Z un espace vectoriel normé réel. Soit $f : G \rightarrow Y$, soit $x \in G$, soit Ω un ouvert de Y t.q. $f(x) \in \Omega$.

Soit $g : \Omega \rightarrow Z$ une fonction. Si $D_H f(x)$ et $D_H g(f(x))$ existent, alors $D_H(g \circ f)(x)$ existe et $D_H(g \circ f)(x) = D_H g(f(x)) \circ D_H f(x)$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration dans [21] p.267. □

Proposition 2.1.10. (cf. [21] p.265).

Soit $f : G \rightarrow Y$, soit $x \in G$, soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est Hadamard-différentiable au point x et $D_H f(x) = T$.
- (ii) Pour chaque compact $K \subset X$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{v \in K} \|\frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)) - T \cdot v\|_Y = 0$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration dans [21] p.265. □

Lemme 2.1.11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit E, F_1, \dots, F_n $n + 1$ espaces vectoriels normés réels et $F := \prod_{i=1}^n F_i$ est l'espace normé produit. Soit Ω une partie ouverte de E et $\bar{x} \in \Omega$.

Soit $v : \Omega \rightarrow \prod_{i=1}^n F_i$ une fonction. Ainsi $\forall x \in \Omega$, $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) v est Hadamard-différentiable au point \bar{x} .
- (ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, v_i est Hadamard-différentiable au point \bar{x} .

On a alors pour chaque $\xi \in E$, $D_H v(\bar{x}) \cdot \xi = (D_H v_1(\bar{x}) \cdot \xi, \dots, D_H v_n(\bar{x}) \cdot \xi)$.

Démonstration. Considérons les fonctions linéaires continues : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_i : F \rightarrow F_i$ définie par $\pi_i((y_1, \dots, y_n)) := y_i$ et $u_i : F_i \rightarrow F$ définie par $u_i(y_i) := (0, \dots, y_i, \dots, 0)$.

Supposons (i). Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Remarquons que

$$v_i = \pi_i \circ v.$$

Puisque $\pi_i \in \mathcal{L}(F, F_i)$, π_i est Fréchet-différentiable sur F d'après la proposition 2.4.2 p.33 de [14] et

$$\forall y \in F, D_F \pi_i(y) = \pi_i.$$

De plus, en utilisant l'assertion (iii) de la Proposition 2.1.6, on a

$$\forall y \in F, D_H \pi_i(y) = \pi_i.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 2.1.9, v_i est Hadamard-différentiable au point \bar{x} et

$$D_H v_i(\bar{x}) = D_H \pi_i(v(\bar{x})) \circ D_H v(\bar{x}) = \pi_i \circ D_H v(\bar{x}).$$

D'où, $\forall \xi \in E$, $D_H v(\bar{x}) \cdot \xi = (D_H v_1(\bar{x}) \cdot \xi, \dots, D_H v_n(\bar{x}) \cdot \xi)$.

Supposons (ii). Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $u_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$, u_i est Fréchet-différentiable sur F_i d'après la proposition 2.4.2 p.33 de [14] et

$$\forall y_i \in F_i, D_F u_i(y_i) = u_i.$$

De plus, en utilisant l'assertion (iii) de la Proposition 2.1.6, on a

$$\forall y_i \in F_i, D_H u_i(y_i) = u_i.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 2.1.9, on a $u_i \circ v_i$ est Hadamard-différentiable au point \bar{x} . Par conséquent, on obtient

$$D_H(u_i \circ v_i)(\bar{x}) = D_H u_i(v_i(\bar{x})) \circ D_H v_i(\bar{x}) = u_i \circ D_H v_i(\bar{x}).$$

Puisque $v = \sum_{i=1}^n u_i \circ v_i$, avec (ii) et le Lemme 2.1.9, on obtient que v est Hadamard-différentiable au point \bar{x} et

$$D_H v(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n u_i \circ D_H v_i(\bar{x}).$$

Par conséquent, on a, $\forall \xi \in E$, $D_H v(\bar{x}) \cdot \xi = (D_H v_1(\bar{x}) \cdot \xi, \dots, D_H v_n(\bar{x}) \cdot \xi)$. □

Notations 2.1.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X_1, \dots, X_n n espaces vectoriels normés réels t.q. $X := \prod_{i=1}^n X_i$ est l'espace normé produit.

Soit $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in G$, soit $f : G \rightarrow Y$. Lorsqu'elle existe, on note, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $D_{H,k} f(\hat{x})$ la Hadamard-différentielle de la fonction partielle $[x_k \mapsto f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-1}, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_n)]$ au point \hat{x}_k . Alors $D_{H,k} f(\hat{x})$ est appelé la Hadamard-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable.

Lorsqu'elle existe, on note, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $D_{G,k} f(\hat{x})$ la Gâteaux-différentielle de la fonction partielle $[x_k \mapsto f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-1}, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_n)]$ au point \hat{x}_k . Alors $D_{G,k} f(\hat{x})$ est appelé la Gâteaux-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable.

Lorsqu'elle existe, on note, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, $D_{F,k} f(\hat{x})$ la Fréchet-différentielle de la fonction partielle $[x_k \mapsto f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-1}, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_n)]$ au point \hat{x}_k . Alors $D_{F,k} f(\hat{x})$ est appelé la Fréchet-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable.

Lorsqu'elle existe, on note, pour chaque $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq n$, $D_{H,(k_1,k_2,k_3)} f(\hat{x})$ la Hadamard-différentielle de la fonction partielle

$[(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}) \mapsto f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k_1-1}, x_{k_1}, \hat{x}_{k_1+1}, \dots, \hat{x}_{k_2-1}, x_{k_2}, \hat{x}_{k_2+1}, \dots, \hat{x}_{k_3-1}, x_{k_3}, \hat{x}_{k_3+1}, \dots, \hat{x}_n)]$ au point $(\hat{x}_{k_1}, \hat{x}_{k_2}, \hat{x}_{k_3})$. Alors $D_{H,(k_1,k_2,k_3)} f(\hat{x})$ est appelé la Hadamard-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport aux variables k_1, k_2 et k_3 .

2.2 Énoncé des problèmes d'optimisation statique

Dans cette section, nous allons considérer deux problèmes d'optimisation statique ; le premier est un problème d'optimisation statique en dimension infinie avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et le second est un problème d'optimisation statique en dimension infinie avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Notre objectif est de démontrer pour ces deux problèmes une Règle des Multiplicateurs.

Soit E un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert non vide de E , soit $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $i \in \{0, \dots, m\}$ une fonction, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, soit $g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $i \in \{1, \dots, p\}$ une fonction, soit $h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $j \in \{1, \dots, q\}$ une fonction et $(m, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

On considère les deux problèmes suivants :

$$(\mathcal{I}) \begin{cases} \text{Maximiser} & f_0(x) \\ \text{lorsque} & x \in \Omega \\ & \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(x) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(x) \\ \text{lorsque } x \in \Omega \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, g_i(x) \geq 0 \\ \forall j \in \{1, \dots, q\}, h_j(x) = 0. \end{array} \right.$$

2.3 Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité

Dans cette section, on énonce une Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité. Nous allons dans, un premier temps, énoncer la Règle des Multiplicateurs pour ce problème, puis, dans un second temps nous allons prouver ce théorème.

Dans le théorème suivant, on énonce une Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité.

Théorème 2.3.1. *Soit \hat{x} une solution (\mathcal{I}) . On considère les conditions suivantes :*

- (i) *Pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, f_i est Gâteaux-différentiable au point \hat{x} .*
- (ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i est semi-continue inférieurement au point \hat{x} lorsque $f_i(\hat{x}) > 0$.*
- (iii) *Il existe $w \in E$ t.q. pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $D_G f_i(\hat{x}) \cdot w > 0$ lorsque $f_i(\hat{x}) = 0$.*
- (iv) *la famille $(D_G f_i(\hat{x}))_{1 \leq i \leq m}$ est une famille libre.*

Partie (I)

Sous les assertions (i) et (ii), il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in (\mathbb{R}_+)^{m+1}$, appelé multiplicateur de Fritz John qui satisfait :

- (a) $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$.
- (b) *Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$.*
- (c) $\sum_{i=0}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = 0$.

Partie (II)

Sous les assertions (i), (ii) et (iii), il existe $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_m) \in (\mathbb{R}_+)^{m+1}$ avec $\lambda'_0 = 1$, appelé multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker, qui satisfait aux conclusions de la Partie (I).

Partie (III)

Sous les assertions (i), (ii) et (iv), il existe un unique $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_m) \in (\mathbb{R}_+)^{m+1}$ avec $\lambda'_0 = 1$ qui satisfait aux conclusions de la Partie (I).

Commentaires sur le Théorème 2.3.1.

Dans la Partie (I) du théorème, on suppose que la fonction de l'objectif est Gâteaux-différentiable en la solution optimale et que les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Gâteaux-différentiables en la solution optimale et semi-continues inférieurement en la solution optimale. Avec ces hypothèses, on parvient à construire un multiplicateur de Fritz John associé au problème (\mathcal{I}) .

Dans la Partie (II), on donne une condition pour trouver un multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé au problème (\mathcal{I}) c'est-à-dire où le multiplicateur associé à la fonction de l'objectif est égale à 1.

Dans la Partie (III), on fournit une condition pour obtenir l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (\mathcal{I}) .

Enfin, on peut établir une chronologie succincte des améliorations des Règles des Multiplicateurs pour le problème (\mathcal{I}) .

- Lorsque E est de dimension finie, Fritz JOHN établit, en 1948, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont continûment Fréchet-différentiables, cf. [29].
- Lorsque E est de dimension finie, B.H. POURCIAU (cf. [34]) établit, en 1980, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Fréchet-différentiables en la solution optimale.
- Lorsque E est de dimension finie, Joël BLOT (cf. [9]) établit, en 2016, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Gâteaux-différentiables en la solution optimale et semi-continues inférieurement en la solution optimale. Notons qu'une fonction Gâteaux-différentiable en un point n'est pas, en général, continue en ce point. Or, puisqu'une fonction Fréchet-différentiable en un point est continue en ce point, on évite une hypothèse de continuité en ce point.
- Lorsque E est de dimension infinie, le Théorème 2.3.1 établit une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Gâteaux-différentiables en la solution optimale et semi-continues inférieurement en la solution optimale. Ceci a fait l'objet de la publication intitulée "A generalization of multiplier rules for infinite-dimensional optimization problems", de H. YILMAZ en 2021.

On rappelle un théorème de séparation en dimension finie.

Lemme 2.3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit C un sous-ensemble convexe non vide de \mathbb{R}^n et $z \in \text{Fr}(C)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\langle v | z \rangle = \gamma$ et, pour tout $x \in C$, $\langle v | x \rangle \leq \gamma$. ($\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n)*

Démonstration. Ce lemme est un corollaire du théorème de Hahn-Banach. On peut en trouver une démonstration dans [32] p. 276 et [39] p. 37. \square

Remarque 2.3.3. *Dans le théorème de séparation, si $z = 0$ alors $\gamma = 0$. En effet, si $z = 0$, on a $\langle v | z \rangle = 0$ d'où $\gamma = 0$.*

2.3.1 Preuve de la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité

Supposons que les assertions (i) et (ii) soient vraies. On pose $S := \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(\hat{x}) = 0\}$.

Si $S = \emptyset$, on a $\forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(\hat{x}) \neq 0$. Et puisque \hat{x} est une solution de (\mathcal{I}) , on a $\forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(\hat{x}) \geq 0$.

Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(\hat{x}) > 0. \quad (2.3.1)$$

Ainsi, en utilisant (ii) et (2.3.1), $[x \mapsto \inf_{1 \leq i \leq m} f_i(x)]$ est semi-continue inférieurement au point \hat{x} grâce à 7.4.7 de [19] p.97.

Donc, puisque $\inf_{1 \leq i \leq m} f_i(\hat{x}) = \min_{1 \leq i \leq m} f_i(\hat{x}) > 0$ grâce à (2.3.1), on a

$$\exists \Omega_1 \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q. } \forall x \in \Omega_1, \inf_{1 \leq i \leq m} f_i(x) > 0.$$

D'où

$$\exists \Omega_1 \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q. } \forall x \in \Omega_1, \forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(x) > 0. \quad (2.3.2)$$

Considérons le problème d'optimisation

$$(\mathcal{I}_1) \begin{cases} \text{Maximiser} & f_0(x) \\ \text{lorsque} & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

2.3. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'INÉGALITÉ

Soit $x \in \Omega_1$, en utilisant (2.3.2), on a $x \in \Omega$ et, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i(x) > 0$.

Ainsi, x est un point admissible du problème (\mathcal{I}) .

Puisque \hat{x} est une solution du problème (\mathcal{I}) , on a $f_0(\hat{x}) \geq f_0(x)$.

Donc \hat{x} est une solution du problème (\mathcal{I}_1) .

Puisque \hat{x} est une solution du problème (\mathcal{I}_1) , avec (i), en utilisant le corollaire 2 p.230 de [1], on a

$$D_G f_0(\hat{x}) = 0. \quad (2.3.3)$$

Par conséquent, en prenant

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \lambda_i = 0 \end{array} \right\}$$

on a

$$\begin{aligned} (\lambda_0, \dots, \lambda_m) &= (1, 0, \dots, 0) \neq 0. \\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \lambda_i f_i(\hat{x}) &= 0 f_i(\hat{x}) = 0. \\ \sum_{i=0}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) &= D_G f_0(\hat{x}) = 0 \text{ d'après (2.3.3)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a démontré les conclusions des Parties (I), (II) et (III).

Si $S \neq \emptyset$, il existe $s \in \{1, \dots, m\}$, $\text{card}(S) := s$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $S := \{1, \dots, s\}$. Le traitement de ce cas fait l'objet des sous-sous-sections suivantes.

Éliminer les contraintes inactives.

Montrons qu'il existe U un voisinage ouvert de \hat{x} t.q. \hat{x} est une solution du problème suivant :

$$(\mathcal{NI}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f_0(x) \\ \text{lorsque } x \in U \\ \forall i \in \{1, \dots, s\}, f_i(x) \geq 0. \end{array} \right.$$

Raisonnons par disjonctions des cas,

si $s < m$, on a, $\forall i \in \{s+1, \dots, m\}$, $f_i(\hat{x}) \neq 0$. Et puisque \hat{x} est une solution de (\mathcal{I}) , on a, $\forall i \in \{s+1, \dots, m\}$, $f_i(\hat{x}) \geq 0$.

Par conséquent,

$$\forall i \in \{s+1, \dots, m\}, f_i(\hat{x}) > 0. \quad (2.3.4)$$

Ainsi, en utilisant (ii) et (2.3.4), $[x \mapsto \inf_{s+1 \leq i \leq m} f_i(x)]$ est semi-continue inférieurement au point \hat{x} grâce à 7.4.7 de [19], p.97.

Donc, puisque $\inf_{s+1 \leq i \leq m} f_i(\hat{x}) = \min_{s+1 \leq i \leq m} f_i(\hat{x}) > 0$ grâce à (2.3.4), on a

$$\exists U \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q., } \forall x \in U, \inf_{s+1 \leq i \leq m} f_i(x) > 0.$$

D'où, en particulier on a

$$\forall x \in U, \forall i \in \{s+1, \dots, m\}, f_i(x) > 0. \quad (2.3.5)$$

Notons $\text{Adm}(\mathcal{NI})$ (respectivement $\text{Adm}(\mathcal{I})$) l'ensemble des points admissibles du problème (\mathcal{NI}) (respectivement (\mathcal{I})).

Soit $x \in \text{Adm}(\mathcal{NI})$.

Puisque $x \in \text{Adm}(\mathcal{NI})$, on a $x \in U \subset \Omega$ et, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $f_i(x) \geq 0$.

Par conséquent, en utilisant (2.3.5), on a, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i(x) \geq 0$ et $x \in \Omega$ i.e. $x \in \text{Adm}(\mathcal{I})$.

Ainsi, puisque \hat{x} est solution de (\mathcal{I}) , on a $f_0(\hat{x}) \geq f_0(x)$.

Donc \hat{x} est solution du problème (\mathcal{NI}) .

Si $s = m$, on prend $U = \Omega$; d'où les problèmes (\mathcal{I}) et (\mathcal{NI}) sont identiques.

Par conséquent,

$$\hat{x} \text{ est solution du problème } (\mathcal{NI}). \quad (2.3.6)$$

Preuve de la Partie (I)

Considérons la fonction $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ définie par $F(x) = (f_0(x), \dots, f_s(x))$.

Avec (i), on a $\forall i \in \{0, \dots, s\}$, f_i est Gâteaux-différentiable au point \hat{x} .

Par conséquent, en utilisant la proposition 1, p. 145 de [1], on obtient que F est Gâteaux-différentiable au point \hat{x} et $D_GF(\hat{x}) \cdot \xi = (D_Gf_0(\hat{x}) \cdot \xi, \dots, D_Gf_s(\hat{x}) \cdot \xi)$ pour tout $\xi \in E$.

Posons $C := \text{Im } D_GF(\hat{x}) + \mathbb{R}_-^{s+1}$, où \mathbb{R}_-^{s+1} est l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^{s+1} dont toutes les coordonnées sont négatives.

Puisque E est convexe et $D_GF(\hat{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^{s+1})$, en utilisant la proposition 1 b), p.201 dans [1], on sait que $\text{Im } D_GF(\hat{x}) = D_GF(\hat{x})(E)$ est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} .

Puisque $] -\infty, 0]$ est une partie convexe de \mathbb{R} , on a, en utilisant la propriété 5, p.475 de [30], \mathbb{R}_-^{s+1} est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} .

Puisque $\text{Im } D_GF(\hat{x})$ est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} et \mathbb{R}_-^{s+1} est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} , en utilisant la propriété 6 p.475 de [30], C est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} .

Montrons que C n'est pas un voisinage de 0. Raisonnons par l'absurde, supposons que C est un voisinage de 0, i.e.

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r) \subset C. \quad (2.3.7)$$

Posons $b = (r, \dots, r) \in \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$ car $\|b - 0\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq s+1} |r - 0| = \max_{1 \leq i \leq s+1} r = r \leq r$.

Puisque $b \in \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$, avec (2.3.7), on a $b \in C$, i.e.

$$\text{il existe } u \in E \text{ et } z = (z_0, \dots, z_s) \in \mathbb{R}_-^{s+1} \text{ t.q. } D_GF(\hat{x}) \cdot u + z = b.$$

Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, s\}, D_Gf_i(\hat{x}) \cdot u = r - z_i \geq r. \quad (2.3.8)$$

Par conséquent, $D_Gf_0(\hat{x}) \cdot u > 0$, d'où

$$u \neq 0. \quad (2.3.9)$$

Puisque F est Gâteaux-différentiable au point \hat{x} , on a

$$\exists \delta > 0, \forall t \in]0, \delta], (\hat{x} + tu \in U), \|F(\hat{x} + tu) - F(\hat{x}) - tD_GF(\hat{x}) \cdot u\|_\infty < rt. \quad (2.3.10)$$

Alors, en utilisant (2.3.10) avec $t = \delta$, on a

$$\|F(\hat{x} + \delta u) - F(\hat{x}) - \delta D_GF(\hat{x}) \cdot u\|_\infty < r\delta;$$

ce qui implique que

$$\forall i \in \{0, \dots, s\}, f_i(\hat{x} + \delta u) - f_i(\hat{x}) > \delta D_Gf_i(\hat{x}) \cdot u - \delta r \geq 0.$$

D'où

$$f_0(\hat{x} + \delta u) > f_0(\hat{x}) \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, s\}, f_i(\hat{x} + \delta u) > f_i(\hat{x}) \geq 0.$$

Puisque $\hat{x} + \delta u \in \text{Adm}(\mathcal{NI})$ et $f_0(\hat{x} + \delta u) > f_0(\hat{x})$, \hat{x} n'est pas une solution de (\mathcal{NI}) . Ceci contredit (2.3.6).

Par conséquent, C n'est pas un voisinage de 0 i.e. $0 \in \mathbb{R}^{s+1} \setminus \text{int}(C)$.

De plus, $0 \in \text{Im } D_GF(\hat{x})$ car c'est un sous-espace vectoriel et $0 \in \mathbb{R}_-^{s+1}$, d'où $0 \in C$.

Ceci implique que

$$0 \in C \setminus \text{int}(C) \subset \overline{C} \setminus \text{int}(C) = \text{Fr}(C).$$

2.3. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'INÉGALITÉ

Puisque C est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1} et $0 \in \text{Fr}(C)$, en utilisant le Lemme 2.3.2,

$$\text{il existe } v = (\lambda_0, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{s+1} \setminus \{0\} \text{ tel que, } \forall x \in C, \langle v | x \rangle \leq 0.$$

Par conséquent, on a

$$\forall u \in E, \forall z = (z_0, \dots, z_s) \in \mathbb{R}_-^{s+1}, \sum_{i=0}^s \lambda_i (D_G f_i(\hat{x}) \cdot u + z_i) \leq 0. \quad (2.3.11)$$

On pose, pour tout $i \in \{s+1, \dots, m\}$, $\lambda_i = 0$.

Puisque $(\lambda_0, \dots, \lambda_s) \neq 0$, on a

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \neq 0. \quad (2.3.12)$$

Considérons $(e_{s+1,j})_{1 \leq j \leq s+1}$ la base canonique de \mathbb{R}^{s+1} .

Soit $i \in \{0, \dots, s\}$ en utilisant (2.3.11) avec $u = 0$ et $z = -e_{s+1,i+1}$, on a

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i (D_G f_i(\hat{x}) \cdot 0 - z_i) = \sum_{i=0}^s \lambda_i (-z_i) = -\lambda_i \leq 0$$

d'où

$$\lambda_i \geq 0.$$

Donc

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, \lambda_i \geq 0. \quad (2.3.13)$$

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$.

Si $i \in \{1, \dots, s\}$, puisque $f_i(\hat{x}) = 0$, on a $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$.

Si $i \in \{s+1, \dots, m\}$, puisque $\lambda_i = 0$, on a $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$.

Ainsi on a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \lambda_i f_i(\hat{x}) = 0. \quad (2.3.14)$$

En utilisant (2.3.11), avec $z = 0$, on a

$$\forall u \in E, \sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u \leq 0. \quad (2.3.15)$$

Soit $u \in E$, en appliquant (2.3.15) avec $-u \in E$, on a

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot (-u) \leq 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot (-u) &= \sum_{i=0}^s \lambda_i (-D_G f_i(\hat{x}) \cdot u) \\ &= \sum_{i=0}^s -\lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u = -\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u. \end{aligned}$$

D'où

$$-\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u \leq 0,$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u \geq 0.$$

De plus, grâce à (2.3.15), on a

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot u \leq 0.$$

D'où, on a prouvé que

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = 0. \quad (2.3.16)$$

Puisque $\forall i \in \{s+1, \dots, m\}$, $\lambda_i = 0$, on a donc

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = 0. \quad (2.3.17)$$

Ainsi, en utilisant (2.3.12), (2.3.13), (2.3.14) et (2.3.17), on a bien montré que (a), (b) et (c) sont vérifiées. Ceci démontre la Partie (I).

Preuve de la Partie (II)

Maintenant, supposons que les assertions (i), (ii) et (iii) soient vérifiées.

En utilisant la Partie (I), il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ qui vérifie (a), (b) et (c).

Montrons que $\lambda_0 \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$.

Puisque $\lambda_0 = 0$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^{s+1} \setminus \{0\}$, on a $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^s \setminus \{0\}$.

Puisque (iii) et $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^s \setminus \{0\}$, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot w \geq 0 \text{ et } \exists i_0 \in \{1, \dots, s\}, \lambda_{i_0} D_G f_{i_0}(\hat{x}) \cdot w > 0.$$

En sommant de $i = 1$ jusqu'à s , on a

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot w > 0.$$

Or, en utilisant (2.3.16), on a

$$\sum_{i=0}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot w = \sum_{i=1}^s \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) \cdot w = 0,$$

ce qui est absurde.

Puisque, $\lambda_0 \neq 0$, en prenant

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \geq 0,$$

puisque $\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1$, (a) est vérifiée.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\lambda'_i f_i(\hat{x}) = \frac{\lambda_i f_i(\hat{x})}{\lambda_0} = 0,$$

d'où (b) est vérifiée. On a

$$\sum_{i=0}^m \lambda'_i D_G f_i(\hat{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0} D_G f_i(\hat{x}) = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = \frac{1}{\lambda_0} 0 = 0.$$

Par conséquent, (c) est vérifiée.

Donc $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ avec $\lambda'_0 = 1$ vérifie (a), (b) et (c).

Ceci démontre la Partie (II).

Preuve de la Partie (III)

Maintenant, supposons que les assertions (i), (ii) et (iv) soient vérifiées. En utilisant la Partie (I), il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ qui vérifie (a), (b) et (c). Montrons que $\lambda_0 \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$. Puisque $\lambda_0 = 0$, on a, en utilisant (c),

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = 0.$$

Par conséquent, grâce à (iv), on a

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = 0.$$

Ceci contredit l'assertion (a).

Puisque, $\lambda_0 \neq 0$, en prenant

$$\forall i \in \{0, \dots, m\}, \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \geq 0.$$

Puisque $\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1$, (a) est vérifiée.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$; on a

$$\lambda'_i f_i(\hat{x}) = \frac{\lambda_i f_i(\hat{x})}{\lambda_0} = 0.$$

D'où (b) est vérifiée.

$$\sum_{i=0}^m \lambda'_i D_G f_i(\hat{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0} D_G f_i(\hat{x}) = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \lambda_i D_G f_i(\hat{x}) = \frac{1}{\lambda_0} 0 = 0.$$

Par conséquent, (c) est vérifiée.

Donc $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, avec $\lambda'_0 = 1$, vérifie (a), (b) et (c).

Soit $(\lambda_0^1, \dots, \lambda_m^1) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ et $(\lambda_0^2, \dots, \lambda_m^2) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ avec $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1$ qui vérifie les assertions (a), (b) et (c). En utilisant (c), on a

$$D_G f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^1 D_G f_i(\hat{x}) = 0 \text{ et } D_G f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 D_G f_i(\hat{x}) = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i^1 - \lambda_i^2) D_G f_i(\hat{x}) = 0.$$

D'où, en utilisant l'assertion (iv), on a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \lambda_i^1 = \lambda_i^2.$$

Ceci démontre la Partie (III).

2.4 Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'égalité et d'inégalité

Dans cette section, on énonce une Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Nous allons dans, un premier temps, énoncer la Règle des Multiplicateurs pour ce problème, puis, dans un second temps nous allons prouver ce théorème.

Dans le théorème suivant, on énonce une Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité.

Théorème 2.4.1. *Soit \hat{x} une solution de (\mathcal{P}) . On considère les conditions suivantes :*

- (i) *f est Hadamard-différentiable au point \hat{x} .*
- (ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, g_i est Hadamard-différentiable au point \hat{x} lorsque $g_i(\hat{x}) = 0$.*
- (iii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, g_i est semi-continue inférieurement au point \hat{x} et Gâteaux-différentiable au point \hat{x} lorsque $g_i(\hat{x}) > 0$.*
- (iv) *Pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, h_j est continue au voisinage de \hat{x} et Hadamard-différentiable au point \hat{x} .*
- (v) *$(D_H h_1(\hat{x}), \dots, D_H h_q(\hat{x}))$ est une famille libre.*
- (vi) *Il existe $w \in \cap_{j=1}^q \text{Ker } D_H h_j(\hat{x})$ t.q. pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $D_G g_i(\hat{x}) \cdot w > 0$ lorsque $g_i(\hat{x}) = 0$.*
- (vii) *La famille $((D_G g_i(\hat{x}))_{1 \leq i \leq p}, (D_H h_j(\hat{x}))_{1 \leq j \leq q})$ est une famille libre.*

Partie (I)

Sous les assertions (i)-(iv), il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$, appelé multiplicateur de Fritz John, qui vérifient les assertions :

- (a) $(\lambda_0, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \neq (0, \dots, 0)$.
- (b) *Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0$.*
- (c) $\lambda_0 D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) = 0$.

Partie (II)

Sous les assertions (i)-(v), il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ qui vérifient les assertions (a), (b), (c) et

- (d) $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$.

Partie (III)

Sous les assertions (i)-(vi), il existe $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \in \mathbb{R}^q$ avec $\lambda'_0 = 1$, appelé multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker, qui vérifient les assertions (a), (b) et (c).

Partie (IV)

Sous les assertions (i)-(iv) et (vii), il existe $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \in \mathbb{R}^q$ avec $\lambda'_0 = 1$, déterminés de façon unique, qui vérifient les assertions (a), (b) et (c).

Commentaires sur le Théorème 2.4.1.

Dans la Partie (I) du théorème, on suppose que la fonction de l'objectif est Hadamard-différentiable en la solution optimale et que les fonctions constituant les contraintes d'inégalité inactives sont seulement Gâteaux-différentiables en la solution optimale et semi-continues inférieurement en la solution optimale. De plus, on suppose que les fonctions constituant les contraintes d'inégalité actives sont Hadamard-différentiables en la solution optimale. Enfin, on suppose que les fonctions constituant les contraintes d'égalité sont Hadamard-différentiables en la solution optimale et continues sur un voisinage de la solution optimale. Avec ces hypothèses, on parvient à construire un multiplicateur de Fritz John associé au problème (\mathcal{P}) .

Dans la Partie (II), on donne une condition pour trouver un multiplicateur de Fritz John non nul parmi ces $p + 1$ élément associé au problème (\mathcal{P}) .

Dans la Partie (III), on fournit une condition pour obtenir l'existence d'un multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (\mathcal{P}) .

Dans la Partie (IV), on fournit une condition pour obtenir l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (\mathcal{P}) .

Enfin, on peut établir une chronologie succincte des améliorations des Règles des Multiplicateurs pour le problème (\mathcal{P}) .

2.4. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'ÉGALITÉ ET D'INÉGALITÉ

- Lorsque E est de dimension finie, O.L. MANGASARIAN et S. FROMOVITZ (cf. [29]) établissent, en 1967, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité et d'égalité sont continûment Fréchet-différentiables.
- Lorsque E est de dimension finie, Hubert HALKIN (cf. [24]) établit, en 1974, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité et d'égalité sont continues sur un voisinage de la solution optimale et Fréchet-différentiables en la solution optimale.
- Lorsque E est de dimension finie, Philippe MICHEL (cf. [30]) établit, en 1989, le même résultat que Hubert HALKIN avec une démonstration très différente.
- Lorsque E est de dimension finie, Joël BLOT (cf. [9]) établit, en 2016, une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Fréchet-différentiables en la solution optimale, et les fonctions constituant les contraintes d'égalité sont continues sur un voisinage de la solution optimale et Fréchet-différentiables en la solution optimale.
- Lorsque E est de dimension infinie, le Théorème 2.4.1 établit une Règle des Multiplicateurs dans le cas où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité sont seulement Hadamard-différentiables en la solution optimale et les fonctions constituant les contraintes d'égalité sont continues sur un voisinage de la solution optimale et Hadamard-différentiables en la solution optimale.

Comme souligné dans la Proposition 2.1.6, une fonction Fréchet-différentiable en un point est aussi Hadamard-différentiable en ce point. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie en général. Ceci a fait l'objet de la publication intitulée "A generalization of multiplier rules for infinite-dimensional optimization problems", de H. YILMAZ en 2021.

Dans le Lemme suivant, on énonce le théorème de point-fixe de Schauder.

Lemme 2.4.2. Le théorème de point-fixe de Schauder. *Soit E un espace vectoriel normé réel, soit C une partie non vide, convexe et compacte de E et soit $f : C \rightarrow C$ une fonction continue, alors f admet un point fixe i.e. il existe $x \in C$ t.q. $f(x) = x$.*

Démonstration. On peut trouver une démonstration du point-fixe de Schauder dans [20], p. 119. \square

Lemme 2.4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel normé réel et $x_1, \dots, x_n \in E$. Considérons la fonction $T : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ définie par $T(s) = \sum_{i=1}^n s_i x_i$, quand $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
 T(\lambda s^1 + s^2) &= \sum_{i=1}^n (\lambda s_i^1 + s_i^2) x_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (\lambda s_i^1 x_i + s_i^2 x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda s_i^1 x_i + \sum_{i=1}^n s_i^2 x_i \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^n s_i^1 x_i + \sum_{i=1}^n s_i^2 x_i \\
 &= \lambda T(s^1) + T(s^2).
 \end{aligned}$$

Puisque $\dim(\mathbb{R}^n) = n < +\infty$, en utilisant le théorème I de [35] p. 101, on a $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. \square

Lemme 2.4.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Considérons l'ensemble $\Delta^n := \{(s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n s_j = 1\}$. Alors Δ^n est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Puisque

$$\begin{aligned}\Delta^n &= \{(s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n s_j = 1\} \\ &= \{(s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n : (s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } \sum_{j=1}^n |s_j| = 1\} \\ &= \{(s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n : (s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}_+^n\} \cap \{(s_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |s_j| = 1\} \\ &= \mathbb{R}_+^n \cap S_{\|\cdot\|_1}(0, 1),\end{aligned}$$

puisque $[0, +\infty[$ est une partie fermée de \mathbb{R} , en utilisant le théorème 2.2.17 de [7], \mathbb{R}_+^n est une partie fermée de \mathbb{R}^n .

Et puisque $S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ est une partie fermée de \mathbb{R}^n , d'après le théorème 2.2.14 de [7], en utilisant le théorème 2.2.8 de [7], Δ^n est une partie fermée de \mathbb{R}^n .

De plus, puisque $S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^n d'après l'application 1 p.416. de [30] et $\Delta^n \subset S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ en utilisant la proposition 2.4.11 de [7], on a Δ^n est une partie compacte de \mathbb{R}^n . \square

Lemme 2.4.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit E un espace vectoriel normé réel et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Alors $\mathcal{K} := \{\sum_{i=1}^n s_i x_i : s \in \Delta^n\}$ est une partie convexe et compacte de E .

Démonstration. Notons que $\mathcal{K} = T(\Delta^n)$.

Puisque Δ^n est compact d'après le Lemme 2.4.4 et puisque $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$ d'après le Lemme 2.4.3, on a, en utilisant 5^o, p. 67 de [35], \mathcal{K} est partie compacte de E . De plus, puisque Δ^n est une partie convexe de \mathbb{R}^n , on a, en utilisant la proposition 1.b de [1], \mathcal{K} est une partie convexe de E . \square

2.4.1 Preuve de la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'égalité et d'inégalité

Supposons que les assertions (i)-(iv) soient vraies.

On pose $S := \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(\hat{x}) = 0\}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $S \neq \emptyset$.

En effet, si $S = \emptyset$, on peut éliminer toutes les contraintes d'inégalité.

Puisque $S = \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $g_i(\hat{x}) \neq 0$.

Et puisque \hat{x} est une solution de (\mathcal{P}) , on a, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $g_i(\hat{x}) \geq 0$.

Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, g_i(\hat{x}) > 0. \quad (2.4.1)$$

Ainsi, en utilisant (ii) et (2.4.1), $[x \mapsto \inf_{1 \leq i \leq p} g_i(x)]$ est semi-continue inférieurement au point \hat{x} grâce à 7.4.7 de [19], p.97.

Donc, puisque $\inf_{1 \leq i \leq p} g_i(\hat{x}) = \min_{1 \leq i \leq p} g_i(\hat{x}) > 0$, grâce à (2.4.1), on a

$$\exists \Omega_1 \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q. } \forall x \in \Omega_1, \inf_{1 \leq i \leq p} g_i(x) > 0.$$

D'où

$$\exists \Omega_1 \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q. } \forall x \in \Omega_1, \forall i \in \{1, \dots, p\}, g_i(x) > 0. \quad (2.4.2)$$

Par conséquent, \hat{x} est solution du problème suivant

$$(SP) \begin{cases} \text{Maximiser} & f(x) \\ \text{lorsque} & x \in \Omega_1 \\ & \forall j \in \{1, \dots, q\}, h_j(x) = 0. \end{cases}$$

Puisqu'on parvient à éliminer les contraintes d'inégalité, dans la suite de la preuve, on suppose que $S \neq \emptyset$.

Éliminer les contraintes d'inégalité inactives

Il existe $s \in \{1, \dots, p\}$ t.q. $\text{card}(S) := s$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $S := \{1, \dots, s\}$. Montrons qu'il existe U un voisinage ouvert de \hat{x} t.q., $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, h_j est continue sur U et \hat{x} est une solution du problème suivant

$$(\mathcal{NP}) \begin{cases} \text{Maximiser} & f(x) \\ \text{lorsque} & x \in U \\ & \forall i \in \{1, \dots, s\}, g_i(x) \geq 0. \\ & \forall j \in \{1, \dots, q\}, h_j(x) = 0. \end{cases}$$

Puisque, $\forall i \in \{s+1, \dots, p\}$, $g_i(\hat{x}) \neq 0$ et \hat{x} est une solution de (\mathcal{P}) , on a, $\forall i \in \{s+1, \dots, p\}$, $g_i(\hat{x}) \geq 0$. Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{s+1, \dots, p\}, g_i(\hat{x}) > 0. \quad (2.4.3)$$

Ainsi, en utilisant (iii) et (2.4.3), on obtient que $[x \mapsto \inf_{s+1 \leq i \leq p} g_i(x)]$ est semi-continue inférieurement au point \hat{x} grâce à 7.4.7 de [19], p.97.

Donc, puisque $\inf_{s+1 \leq i \leq p} g_i(\hat{x}) = \min_{s+1 \leq i \leq p} g_i(\hat{x}) > 0$, grâce à (2.4.3), on a

$$\exists U_1 \subset \Omega \text{ un voisinage ouvert de } \hat{x} \text{ t.q. } \forall x \in U_1, \inf_{s+1 \leq i \leq p} g_i(x) > 0.$$

D'où, en particulier

$$\forall x \in U_1, \forall i \in \{s+1, \dots, p\}, g_i(x) > 0. \quad (2.4.4)$$

Puisque (iv), $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, il existe $V_j \subset \Omega$ un voisinage de \hat{x} t.q. h_j est continue sur V_j .

Puisque, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $V_j \subset \Omega$ un voisinage de \hat{x} , $V = \bigcap_{j=1}^q V_j \subset \Omega$ est un voisinage de \hat{x} .

Posons $\underline{V} = \text{int}(V)$, puisque V est un voisinage de \hat{x} , $\text{int}(V)$, est un voisinage ouvert de \hat{x} .

Posons $U := U_1 \cap \underline{V}$.

Puisque U_1 est un voisinage ouvert de \hat{x} et \underline{V} est un voisinage ouvert de \hat{x} : on a U est un voisinage ouvert de \hat{x} .

Puisque, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $U \subset \text{int}(V) \subset V \subset V_j$, h_j est continue sur U .

Notons $\text{Adm}(\mathcal{NP})$ (respectivement $\text{Adm}(\mathcal{P})$) l'ensemble des points admissibles du problème (\mathcal{NP}) (respectivement (\mathcal{P})).

Soit $x \in \text{Adm}(\mathcal{NP})$; puisque $x \in \text{Adm}(\mathcal{NP})$, on a $x \in U \subset \Omega$ et, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $g_i(x) \geq 0$.

Par conséquent, en utilisant (2.4.4), on a, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $g_i(x) \geq 0$ et $x \in \Omega$ i.e. $x \in \text{Adm}(\mathcal{P})$.

Ainsi, puisque \hat{x} est solution de (\mathcal{P}) , on a $f(\hat{x}) \geq f(x)$.

Par conséquent, on obtient

$$\hat{x} \text{ est solution du problème } (\mathcal{NP}). \quad (2.4.5)$$

Preuve de la Partie (I)

On considère les fonctions $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ et $H : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ définies par, $\forall x \in U$, $G(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_s(x))$ et $H(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$.

Avec (i), (ii) et (iv), en utilisant le Lemme 2.1.11, on sait que G et H sont Hadamard-différentiables au point \hat{x} .

De plus, pour chaque $\xi \in E$, $D_H G(\hat{x}) \cdot \xi = (D_H f(\hat{x}) \cdot \xi, D_H g_1(\hat{x}) \cdot \xi, \dots, D_H g_s(\hat{x}) \cdot \xi)$ et $D_H H(\hat{x}) \cdot \xi = (D_H h_1(\hat{x}) \cdot \xi, \dots, D_H h_q(\hat{x}) \cdot \xi)$.

On pose $C := \text{Im}(D_H G(\hat{x}), D_H H(\hat{x})) + \mathbb{R}_-^{s+1} \times \{0_{\mathbb{R}^q}\}$.

Puisque $D_H G(\hat{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^{s+1})$ et $D_H H(\hat{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^q)$, on a

$$(D_H G(\hat{x}), D_H H(\hat{x})) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^{s+1+q}).$$

Puisque E est convexe car espace vectoriel, en utilisant la proposition 1 b), p.201 de [1], on a : $\text{Im}(D_H G(\hat{x}), D_H H(\hat{x}))$ est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1+q} .

Puisque \mathbb{R}_-^{s+1} est une partie convexe et $\{0_{\mathbb{R}^q}\}$ est convexe, en utilisant le théorème 4, p. 267 de [32], on a : $\mathbb{R}_-^{s+1} \times \{0_{\mathbb{R}^q}\}$ est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1+q} .

Par conséquent, C est une partie convexe de \mathbb{R}^{s+1+q} .

Montrons que C n'est pas un voisinage de 0.

Raisonnons par l'absurde, supposons que C est un voisinage de 0 i.e.

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r) \subset C. \quad (2.4.6)$$

Posons $b = (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^{s+1}$.

Considérons $(e_{q,j})_{1 \leq j \leq q}$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

Soit $j \in \{1, \dots, q\}$; on a

$$\|(b, re_{q,j})\|_\infty = r \leq r \text{ et } \|(b, -re_{q,j})\|_\infty = r \leq r$$

d'où

$$(b, re_{q,j}) \in \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r) \text{ et } (b, -re_{q,j}) \in \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, r).$$

Par conséquent, en utilisant (2.4.6) on a $(b, re_{q,j}) \in C$ et $(b, -re_{q,j}) \in C$.

D'où, il existe $u_j \in E$ et $z_j = (z_{0,j}, \dots, z_{s,j}) \in \mathbb{R}_-^{s+1}$ t.q.

$$D_H G(\hat{x}) \cdot u_j + z_j = b \text{ et } D_H H(\hat{x}) \cdot u_j = re_{q,j} \quad (2.4.7)$$

et il existe $\tilde{u}_j \in E$ et $\tilde{z}_j = (\tilde{z}_{0,j}, \dots, \tilde{z}_{s,j}) \in \mathbb{R}_-^{s+1}$ t.q.

$$D_H G(\hat{x}) \cdot \tilde{u}_j + \tilde{z}_j = b \text{ et } D_H H(\hat{x}) \cdot \tilde{u}_j = -re_{q,j}. \quad (2.4.8)$$

On pose $K := \{\sum_{j=1}^q a_j u_j + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j \tilde{u}_j : ((a_j)_{1 \leq j \leq q}, (\tilde{a}_j)_{1 \leq j \leq q}) \in \Delta^{2q}\}$.

Notons que $0 \notin K$.

En utilisant le Lemme 2.4.5, K est une partie convexe et compacte de E .

Puisque G et H sont Hadamard-différentiables au point \hat{x} et K est un compact de E , on a

$$\exists \delta_1 > 0, \forall t \in]0, \delta_1], \forall k \in K, \|G(\hat{x} + tk) - G(\hat{x}) - tD_H G(\hat{x}) \cdot k\|_\infty < rt \quad (2.4.9)$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall t \in]0, \delta_2], \forall k \in K, \|H(\hat{x} + tk) - H(\hat{x}) - tD_H H(\hat{x}) \cdot k\|_\infty < \frac{r}{q}t. \quad (2.4.10)$$

Puisque U est un voisinage de \hat{x} , on a

$$\exists r_0 > 0 \text{ t.q. } \overline{B}(\hat{x}, r_0) \subset U. \quad (2.4.11)$$

On pose $\alpha := \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{r_0}{\sup_{k \in K} \|k\|}\}$.

Ainsi, en utilisant (2.4.9) et (2.4.10), avec $t = \alpha$, on a

$$\forall k \in K, |f(\hat{x} + \alpha k) - f(\hat{x}) - \alpha D_H f(\hat{x}) \cdot k| < r\alpha \quad (2.4.12)$$

$$\forall k \in K, \forall i \in \{1, \dots, s\}, |g_i(\hat{x} + \alpha k) - \alpha D_H g_i(\hat{x}) \cdot k| < r\alpha \quad (2.4.13)$$

$$\forall k \in K, \forall j \in \{1, \dots, q\}, |h_j(\hat{x} + \alpha k) - \alpha D_H h_j(\hat{x}) \cdot k| < \frac{r}{q}\alpha. \quad (2.4.14)$$

2.4. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'ÉGALITÉ ET D'INÉGALITÉ

On pose, pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, pour tout $k \in K$,

$$w_j(k) = \frac{1}{\alpha} h_j(\hat{x} + \alpha k) - D_H h_j(\hat{x}) \cdot k.$$

Soit $j \in \{1, \dots, q\}$; puisque $\varphi := [x \mapsto \hat{x} + \alpha x]$ est une fonction affine sur E , on a $\varphi \in C^0(E, E)$. Par conséquent $\varphi|_K \in C^0(K, E)$.

Soit $k \in K$; on a

$$\|\varphi(k) - \hat{x}\| = \|\hat{x} + \alpha k - \hat{x}\| = \|\alpha k\| = \alpha \|k\| \leq \frac{r_0}{\sup_{k \in K} \|k\|} \|k\| \leq r_0.$$

D'où on déduit

$$\varphi|_K \in C^0(K, \overline{B}(\hat{x}, r_0)). \quad (2.4.15)$$

Ainsi puisque h_j est continue sur U , avec (2.4.11), on a

$$h_j \circ \varphi|_K \in C^0(K, \mathbb{R}).$$

De plus, $D_H h_j(\hat{x}) \in C^0(E, \mathbb{R})$, donc on a

$$D_H h_j(\hat{x})|_K \in C^0(K, \mathbb{R}).$$

Ainsi,

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}, w_j = \frac{1}{\alpha} h_j \circ \varphi|_K - D_H h_j(\hat{x})|_K \in C^0(K, \mathbb{R}). \quad (2.4.16)$$

Soit $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k \in K$; on a

$$\begin{aligned} |w_j(k)| &= \left| \frac{1}{\alpha} h_j(\hat{x} + \alpha k) - D_H h_j(\hat{x}) \cdot k \right| \\ &= \frac{1}{\alpha} |h_j(\hat{x} + \alpha k) - \alpha D_H h_j(\hat{x}) \cdot k| \\ &< \frac{1}{\alpha} \frac{r}{q} \alpha \text{ grâce à (2.4.14)} \\ &= \frac{r}{q}, \end{aligned}$$

d'où

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}, \forall k \in K, |w_j(k)| \leq \frac{r}{q}. \quad (2.4.17)$$

On considère, pour chaque $j \in \{1, \dots, q\}$, les fonctions $\phi_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi_j(k) = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(k)$ et $\tilde{\phi}_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{\phi}_j(k) = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(k)$.

Considérons la fonction $\Phi : K \rightarrow E$ définie par

$$\Phi(k) := \sum_{j=1}^q \phi_j(k) \cdot u_j + \sum_{j=1}^q \tilde{\phi}_j(k) \cdot \tilde{u}_j.$$

Soit $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k \in K$; on a

$$\begin{aligned} \phi_j(k) &= \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(k) \geq \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} \frac{r}{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j(k) &= \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(k) \geq \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} \frac{r}{q} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^q \phi_j(k) + \sum_{j=1}^q \tilde{\phi}_j(k) &= \sum_{j=1}^q \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(k) + \sum_{j=1}^q \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(k) \\
 &= \sum_{j=1}^q \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(k) + \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(k) \\
 &= \sum_{j=1}^q \frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} \\
 &= \sum_{j=1}^q \frac{1}{q} \\
 &= \frac{q}{q} = 1,
 \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\Phi(K) \subset K. \quad (2.4.18)$$

Considérons la fonction $T : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow E$ définie par $T(s) = \sum_{j=1}^q s_j u_j + \sum_{j=1}^q s_{q+j} \tilde{u}_j$.

En utilisant le Lemme 2.4.3, on a $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2q}, E)$.

De plus, en utilisant (2.4.17), on a, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $\phi_j \in C^0(K, \mathbb{R})$ et $\tilde{\phi}_j \in C^0(K, \mathbb{R})$.

Par conséquent, en utilisant 2^o propriété d), p.41 de [35], on a

$$\psi = (\phi_1, \dots, \phi_q, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_q) \in C^0(K, \mathbb{R}^{2q}).$$

Puisque $\Phi = T \circ \psi$, on a, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, p.43 de [35],

$$\Phi \in C^0(K, E). \quad (2.4.19)$$

Puisque K est une partie non vide, convexe et compacte de E , avec (2.4.18) et (2.4.19), en utilisant le théorème du point-fixe de Schauder, Lemme 2.4.2, on a

$$\exists \hat{k} \in K \text{ t.q. } \Phi(\hat{k}) = \hat{k}. \quad (2.4.20)$$

On sait que

$$\begin{aligned}
 D_H H(\hat{x}) \cdot \hat{k} &= D_H H(\hat{x}) \cdot \Phi(\hat{k}) \\
 &= \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) \right) D_H H(\hat{x}) \cdot u_j + \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) \right) D_H H(\hat{x}) \cdot \tilde{u}_j \\
 &= \sum_{j=1}^q \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) \right) r e_{q,j} + \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) \right) (-r e_{q,j}) \text{ grâce à (2.4.8)} \\
 &= \sum_{j=1}^q -\frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) r e_{q,j} - \frac{1}{2r} w_j(\hat{k}) r e_{q,j} \\
 &= \sum_{j=1}^q -w_j(\hat{k}) e_{q,j}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, on a

$$D_H h_j(\hat{x}) \cdot \hat{k} = -w_j(\hat{k}) = -\left(\frac{1}{\alpha} h_j(\hat{x} + \alpha \hat{k}) - D_H h_j(\hat{x}) \cdot \hat{k} \right)$$

ce qui implique que

$$\forall j \in \{1, \dots, q\}, h_j(\hat{x} + \alpha \hat{k}) = 0. \quad (2.4.21)$$

Puisque $\hat{k} \in K$, il existe $(a_j, \tilde{a}_j)_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{R}_+^{2q}$ avec $\sum_{j=1}^q a_j + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j = 1$ t.q.

$$\hat{k} = \sum_{j=1}^q a_j u_j + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j \tilde{u}_j.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 D_H f(\hat{x}) \cdot \hat{k} &= \sum_{j=1}^q a_j D_H f(\hat{x}) \cdot u_j + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j D_H f(\hat{x}) \cdot \tilde{u}_j \\
 &= \sum_{j=1}^q a_j (r - z_{0,j}) + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j (r - \tilde{z}_{0,j}) \text{ (grâce à (2.4.7) et (2.4.8))} \\
 &\geq \sum_{j=1}^q a_j r + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j r \text{ car } (z_{0,j})_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{R}_-^q \text{ et } (\tilde{z}_{0,j})_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{R}_-^q \\
 &= r(\sum_{j=1}^q a_j + \tilde{a}_j) = r
 \end{aligned}$$

2.4. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'ÉGALITÉ ET D'INÉGALITÉ

d'où

$$D_H f(\hat{x}) \cdot \hat{k} \geq r. \quad (2.4.22)$$

Soit $i \in \{1, \dots, s\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} D_H g_i(\hat{x}) \cdot \hat{k} &= \sum_{j=1}^q a_j D_H g_i(\hat{x}) \cdot u_j + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j D_H g_i(\hat{x}) \cdot \tilde{u}_j \\ &= \sum_{j=1}^q a_j (r - z_{i,j}) + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j (r - \tilde{z}_{i,j}) \quad (\text{grâce à (2.4.7) et (2.4.8)}) \\ &\geq \sum_{j=1}^q a_j r + \sum_{j=1}^q \tilde{a}_j r \quad \text{car } (z_{i,j})_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{R}_-^q \text{ et } (\tilde{z}_{i,j})_{1 \leq j \leq q} \in \mathbb{R}_-^q \\ &= r(\sum_{j=1}^q a_j + \tilde{a}_j) = r, \end{aligned}$$

d'où

$$D_H g_i(\hat{x}) \cdot \hat{k} \geq r. \quad (2.4.23)$$

Soit $i \in \{1, \dots, s\}$, en utilisant (2.4.13) avec $k = \hat{k}$, on a, pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$,

$$g_i(\hat{x} + \alpha \hat{k}) - \alpha D_H g_i(\hat{x}) \cdot \hat{k} > -r\alpha,$$

d'où, pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$,

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x} + \alpha \hat{k}) &> \alpha D_H g_i(\hat{x}) \cdot \hat{k} - r\alpha \\ &\geq \alpha r - r\alpha = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, g_i(\hat{x} + \alpha \hat{k}) > 0. \quad (2.4.24)$$

Avec (2.4.15) et (2.4.11), on obtient que $\hat{x} + \alpha \hat{k} = \varphi(\hat{k}) \in \overline{B}(\hat{x}, r_0) \subset U$.

Par conséquent, en utilisant (2.4.21) et (2.4.24), on obtient que $\hat{x} + \alpha \hat{k}$ est admissible pour le problème (\mathcal{NP}) .

D'où, en utilisant (2.4.5), on a

$$f(\hat{x} + \alpha \hat{k}) \leq f(\hat{x}). \quad (2.4.25)$$

En utilisant (2.4.12) avec $k = \hat{k}$, on a $f(\hat{x} + \alpha \hat{k}) - f(\hat{x}) - \alpha D_H f(\hat{x}) \cdot \hat{k} > -r\alpha$; d'où

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + \alpha \hat{k}) - f(\hat{x}) &> \alpha D_H f(\hat{x}) \cdot \hat{k} - r\alpha \\ &\geq \alpha r - r\alpha = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f(\hat{x} + \alpha \hat{k}) > f(\hat{x}), \quad (2.4.26)$$

ce qui contredit (2.4.25).

Par conséquent, C n'est pas un voisinage de 0 i.e. $0 \in \mathbb{R}^{s+1+q} \setminus \text{int}(C)$.

De plus, $0 \in \text{Im}(D_H G(\hat{x}), D_H H(\hat{x}))$ car c'est un espace vectoriel et $0 \in \mathbb{R}_-^{s+1} \times \{0_{\mathbb{R}^q}\}$, d'où $0 \in C$. Ceci implique que

$$0 \in C \setminus \text{int}(C) \subset \overline{C} \setminus \text{int}(C) = \text{Fr}(C).$$

Puisque C est une partie convexe de \mathbb{R}^{1+s+q} et $0 \in \text{Fr}(C)$, en utilisant le Lemme 2.3.2, on a

$$\text{il existe } v = (\lambda_0, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{1+s+q} \setminus \{0\} \text{ tel que } \forall x \in C, \langle v | x \rangle \leq 0.$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_0(D_H f(\hat{x}) \cdot u + z_0) + \sum_{i=1}^s \lambda_i(D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + z_i) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u \leq 0. \quad \left. \begin{array}{l} \forall u \in E, \forall z = (z_0, \dots, z_s) \in \mathbb{R}_-^{1+s} \end{array} \right\} \quad (2.4.27)$$

On pose, pour tout $i \in \{s+1, \dots, p\}$, $\lambda_i = 0$.
 Puisque $(\lambda_0, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_q) \neq 0$, on a

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \neq 0. \quad (2.4.28)$$

Considérons $(e_{s+1,j})_{1 \leq j \leq s+1}$ la base canonique de \mathbb{R}^{s+1} .

Soit $i \in \{0, \dots, s\}$; en utilisant (2.4.27) avec $u = 0$ et $z = -e_{s+1,i+1}$, on a

$$\lambda_0(D_H f(\hat{x}) \cdot 0 + z_0) + \sum_{i=1}^s \lambda_i(D_H g_i(\hat{x}) \cdot 0 + z_i) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot 0 = -\lambda_i \leq 0,$$

d'où

$$\lambda_i \geq 0.$$

Donc on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \lambda_i \geq 0. \quad (2.4.29)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Si $i \in \{1, \dots, s\}$, puisque $g_i(\hat{x}) = 0$, on a $\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0$.

Si $i \in \{s+1, \dots, p\}$, puisque $\lambda_i = 0$, on a $\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0$.

Ainsi

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i g_i(\hat{x}) = 0. \quad (2.4.30)$$

En utilisant (2.4.27), avec $z = 0$, on a

$$\forall u \in E, \lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u \leq 0. \quad (2.4.31)$$

Soit $u \in E$; en appliquant (2.4.31) avec $-u \in E$, on a

$$\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot (-u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot (-u) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot (-u) \leq 0.$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} & \lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot (-u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot (-u) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot (-u) \\ &= -(\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u), \end{aligned}$$

d'où

$$-(\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u) \leq 0,$$

ce qui implique que

$$\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u \geq 0.$$

De plus, grâce à (2.4.31), on a

$$\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u \leq 0,$$

2.4. RÈGLE DES MULTIPLICATEURS POUR UN PROBLÈME AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'ÉGALITÉ ET D'INÉGALITÉ

d'où, on a prouvé que

$$\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^s \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u = 0. \quad (2.4.32)$$

Puisque, $\forall i \in \{s+1, \dots, m\}$, $\lambda_i = 0$, on a

$$\lambda_0 D_H f(\hat{x}) \cdot u + \sum_{i=1}^p \lambda_i D_H g_i(\hat{x}) \cdot u + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u = 0. \quad (2.4.33)$$

Ainsi, en utilisant (2.4.28), (2.4.29), (2.4.30) et (2.4.33), on a bien montré que (a), (b) et (c) sont vérifiées.

Preuve de la Partie (II)

On suppose maintenant (i), (ii), (iii), (iv) et (v).

Raisonnons par l'absurde, supposons que $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$.

Donc, d'après (2.4.33), on a $\sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) \cdot u = 0$.

Avec (v), on a $(\mu_1, \dots, \mu_q) = 0$.

Par conséquent, on a $(\lambda_0, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) = (0, \dots, 0)$; ce qui contredit (a).

Ainsi on a prouvé (d).

Preuve de la Partie (III)

On suppose maintenant (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi).

En utilisant la Partie (II) du Théorème 2.4.1, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ et $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}$ qui vérifient (a), (b), (c) et (d).

Montrons que $\lambda_0 \neq 0$; raisonnons par l'absurde; supposons que $\lambda_0 = 0$.

Avec (b) et (d), on a

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \neq 0.$$

Avec (vi), puisque $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^s \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) \cdot w > 0.$$

Or, en utilisant (2.4.32), on a

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) \cdot w = 0,$$

ce qui est une contradiction.

Par conséquent $\lambda_0 \neq 0$.

Puisque, $\lambda_0 \neq 0$, on peut poser

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \lambda'_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\}, \mu'_j := \frac{\mu_j}{\lambda_0}.$$

Puisque $\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1$, (a) est vérifiée.

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; on a

$$\lambda'_i g_i(\hat{x}) = \frac{\lambda_i g_i(\hat{x})}{\lambda_0} = 0,$$

d'où (b) est vérifiée. Notons que

$$\begin{aligned}
 & \lambda'_0 D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda'_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu'_j D_H h_j(\hat{x}) \\
 &= \frac{\lambda_0}{\lambda'_0} D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda'_0} D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \frac{\mu_j}{\lambda'_0} D_H h_j(\hat{x}) \\
 &= \frac{1}{\lambda'_0} (\lambda_0 D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x})) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

par conséquent, (c) est vérifiée.

Donc $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \in \mathbb{R}^q$, avec $\lambda'_0 = 1$ vérifient (a), (b) et (c).

Preuve de la Partie (IV)

Supposons (i), (ii), (iii), (iv) et (vii). Grâce à la Partie (I) du Théorème 2.4.1 il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ et $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}$ qui vérifient (a), (b), (c). D'abord, montrons que $\lambda_0 \neq 0$; raisonnons par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$.

En utilisant (c), on a

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x}) = 0.$$

Par conséquent, grâce à (vii), on a

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) = 0.$$

Ceci contredit l'assertion (a).

Puisque $\lambda_0 \neq 0$, on peut poser

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \lambda'_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\}, \mu'_j := \frac{\mu_j}{\lambda_0}.$$

Puisque $\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1$, (a) est vérifiée.

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$; on a

$$\lambda'_i g_i(\hat{x}) = \frac{\lambda_i g_i(\hat{x})}{\lambda_0} = 0,$$

donc (b) est vérifiée. Notons que

$$\begin{aligned}
 & \lambda'_0 D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda'_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu'_j D_H h_j(\hat{x}) \\
 &= \frac{\lambda_0}{\lambda'_0} D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda'_0} D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \frac{\mu_j}{\lambda'_0} D_H h_j(\hat{x}) \\
 &= \frac{1}{\lambda'_0} (\lambda_0 D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j D_H h_j(\hat{x})) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

par conséquent, (c) est vérifiée.

Donc $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \in \mathbb{R}^q$, avec $\lambda'_0 = 1$, vérifient (a), (b) et (c).

Soit $(\lambda_0^1, \dots, \lambda_p^1) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu_1^1, \dots, \mu_q^1) \in \mathbb{R}^q$ avec $\lambda_0^1 = 1$ vérifiant (a), (b) et (c).

Soit $(\lambda_0^2, \dots, \lambda_p^2) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$ et $(\mu_1^2, \dots, \mu_q^2) \in \mathbb{R}^q$ avec $\lambda_0^2 = 1$ vérifiant (a), (b) et (c).

En utilisant l'assertion (c), on a

$$D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^1 D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j^1 D_H h_j(\hat{x}) = 0$$

et

$$D_H f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j^2 D_H h_j(\hat{x}) = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i^1 - \lambda_i^2) D_G g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^q (\mu_j^1 - \mu_j^2) D_H h_j(\hat{x}) = 0.$$

Ainsi, en utilisant l'assertion (vii), on a

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i^1 = \lambda_i^2 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, q\}, \mu_j^1 = \mu_j^2.$$

2.5 Théorème de l'enveloppe pour deux problèmes à paramètre avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité.

Dans cette section nous allons énoncer un théorème de l'enveloppe pour deux problèmes à paramètre avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité.

2.5.1 Énoncé d'un théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre

Dans cette sous-section, on énonce un théorème de l'enveloppe pour un problème d'optimisation à paramètre où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres.

Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espace vectoriel normé réel, \mathbb{G} un ouvert de \mathbb{X} . Soit \mathbb{Y} un espace vectoriel normé réel. On considère $f : \mathbb{G} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{G} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, $h_j : \mathbb{G} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$. On étudie le problème suivant :

$$(\mathcal{M}, \pi) \begin{cases} \text{Maximiser} & f(x, \pi) \\ \text{lorsque} & x \in \mathbb{G} \\ & \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i(x, \pi) \geq 0 \\ & \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j(x, \pi) = 0. \end{cases}$$

On note, pour chaque $\pi \in \mathbb{Y}$, $V(\pi)$ la valeur du problème (\mathcal{M}, π) .

Soit $\pi_0 \in \mathbb{Y}$, on considère les conditions suivantes.

(A1) Il existe un voisinage ouvert P de π_0 t.q. pour tout $\pi \in P$, il existe $\underline{x}(\pi)$ solution du problème (\mathcal{M}, π) .

(A2) Il existe $\delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi)$ existe.

(A3) Pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, $D_H \phi(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)$ existe, $\forall \pi \in P$ $D_{H,1} \phi(\underline{x}(\pi), \pi)$ existe et $[\pi \mapsto D_{H,1} \phi(\underline{x}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{X}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(A4) $\forall \pi \in P$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $[x \mapsto h_j(x, \pi)]$ est continue sur un voisinage de $\underline{x}(\pi)$.

(A5) $(D_{H,1} g_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0), \dots, D_{H,1} g_k(\underline{x}(\pi_0), \pi_0), D_{H,1} h_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0), \dots, D_{H,1} h_l(\underline{x}(\pi_0), \pi_0))$ est une famille libre.

(A6) Il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{X}^*}$ sur \mathbb{X}^* t.q. $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{X}^*} \in C^0((\mathbb{X}^* \times \mathbb{X}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R})$.

(A7) Pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, pour chaque $\pi \in P$, $D_H \phi(\underline{x}(\pi), \pi)$ existe et $[\pi \mapsto D_{H,2} \phi(\underline{x}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{Y}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(A2-bis) $\forall \delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi)$ existe.

(A2-ter) $\forall \pi \in P$, $\forall \delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{x}(\pi; \delta\pi)$ existe.

Remarque 2.5.1. Lorsque $\dim(\mathbb{X}) < +\infty$, la condition (A6) est toujours vérifiée.

Dans le théorème suivant, on énonce le théorème de l'enveloppe pour ce problème.

Théorème 2.5.2. Partie (I). *Sous les hypothèses (A1), (A2), (A3), (A4), (A5), (A6), la dérivée directionnelle à droite de la fonction valeur, $V(\cdot)$, au point π_0 suivant la direction $\delta\pi$ existe et*

$$\begin{aligned} D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi, \end{aligned}$$

où $\lambda_1(\pi_0), \dots, \lambda_k(\pi_0), \mu_1(\pi_0), \dots, \mu_l(\pi_0)$ sont les uniques multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker associés à $\underline{x}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}, π_0) .

Partie (II). *Sous les hypothèses (A1), (A2-bis), (A3), (A4), (A5), (A6), la fonction valeur V est Gâteaux-différentiable au point π_0 et on a*

$$\begin{aligned} D_G V(\pi_0) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0). \end{aligned}$$

où $\lambda_1(\pi_0), \dots, \lambda_k(\pi_0), \mu_1(\pi_0), \dots, \mu_l(\pi_0)$ sont les uniques multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker associés à $\underline{x}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}, π_0) .

Partie (III). *Sous les hypothèses (A1), (A2-ter), (A3), (A4), (A5), (A6), (A7), la fonction valeur V est continûment Fréchet-différentiable sur un voisinage ouvert Q de π_0 et, pour chaque $\pi \in Q$,*

$$\begin{aligned} D_F V(\pi) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi), \pi) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi), \pi) \end{aligned}$$

où $\lambda_1(\pi), \dots, \lambda_k(\pi), \mu_1(\pi), \dots, \mu_l(\pi)$ sont les uniques multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker associés à la solution $\underline{x}(\pi)$ pour le problème (\mathcal{M}, π) .

Commentaires sur le Théorème 2.5.2. Les principales contributions du Théorème 2.5.2 sont les suivantes :

- À la différence des théorèmes de l'enveloppe de C. FOURGEAUD et A. PERROT cf. [22] et de K.C. BORDER cf. [6], \mathbb{X} est de dimension infinie.
- Comparé aux théorèmes de l'enveloppe de C. FOURGEAUD et A. PERROT cf. [22] et de K.C. BORDER cf. [6], on ne suppose pas la régularité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker. En effet, en construisant un lemme de Gram-Schmidt à paramètre, on parvient à démontrer que les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker sont continus par rapport au paramètre.
- Comparé aux théorèmes de l'enveloppe de C. FOURGEAUD et A. PERROT, cf. [22], de K.C. BORDER, cf. [6] et de M. CARTER, cf. [15], en utilisant la Règle des Multiplicateurs établie dans la section 2 de ce chapitre, on parvient à remplacer l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité par l'hypothèse de Hadamard-différentiabilité pour la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité et d'égalité.
- Comparé aux théorèmes de l'enveloppe de C. FOURGEAUD et A. PERROT, cf. [22], de K.C. BORDER, cf. [6] et de M. CARTER, cf. [15], pour la solution, on remplace l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité par l'hypothèse d'existence de dérivée directionnelle à droite par rapport au paramètre et aux directions.

2.5.2 Énoncé d'un théorème de l'enveloppe pour le second problème à paramètre

Dans cette sous-section, on énonce un théorème de l'enveloppe pour un problème à paramètre où la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'égalité et d'inégalité ont

2.5. THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR DEUX PROBLÈMES À PARAMÈTRE AVEC UN NOMBRE FINI DE CONTRAINTES D'INÉGALITÉ ET D'ÉGALITÉ.

pour espace de départ le produit cartésien d'un ouvert d'un sous-espace affine inclus dans un espace vectoriel de dimension infinie et de l'espace des paramètres.

Notons que ce théorème sera très utile dans le chapitre de Calcul des Variations.

Soit \mathbb{A} un sous-ensemble affine de \mathbb{X} ; \mathbb{S} le sous-espace vectoriel directeur de \mathbb{A} ; \mathbb{G}^0 un ouvert de \mathbb{A} . On considère les fonctions suivantes $f^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, et $h_j^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$. Lorsque $\pi \in \mathbb{Y}$ on peut ainsi construire le problème suivant :

$$(\mathcal{M}^0, \pi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad f^0(z, \pi) \\ \text{lorsque} \quad z \in \mathbb{G}^0 \\ \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^0(z, \pi) \geq 0 \\ \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^0(z, \pi) = 0. \end{array} \right.$$

Pour chaque $\pi \in \mathbb{Y}$, on note $V^0(\pi)$ la valeur du problème (\mathcal{M}^0, π) .

Soit $\pi_0 \in \mathbb{Y}$, on considère les conditions suivantes.

(A⁰1) Il existe un voisinage ouvert P de π_0 dans \mathbb{Y} t.q., pour chaque $\pi \in P$, il existe $\underline{z}(\pi)$ une solution du problème (\mathcal{M}^0, π) .

(A⁰2) Il existe $\delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \delta\pi)$ existe.

(A⁰3) Pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, $D_H \phi(\underline{z}(\pi_0), \pi_0)$ existe, $\forall \pi \in P$, $D_{H,1} \phi(\underline{z}(\pi), \pi)$ existe et $[\pi \mapsto D_{H,1} \phi(\underline{z}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{S}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(A⁰4) $\forall \pi \in P$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $[z \mapsto h_j^0(z, \pi)]$ est continue sur un voisinage de $\underline{z}(\pi)$ dans \mathbb{G}^0 .

(A⁰5) $(D_{H,1} g_1^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), \dots, D_{H,1} g_k^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), D_{H,1} h_1^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), \dots, D_{H,1} h_l^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0))$ est une famille libre.

(A⁰6) Il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{S}^*}$ sur \mathbb{S}^* t.q. $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{S}^*} \in C^0((\mathbb{S}^* \times \mathbb{S}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R})$.

(A⁰7) Pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, pour chaque $\pi \in P$, $D_H \phi(\underline{z}(\pi), \pi)$ existe et $[\pi \mapsto D_H \phi(\underline{z}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{Y}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(A⁰2-bis) $\forall \delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \delta\pi)$ existe.

(A⁰2-ter) $\forall \pi \in P$, $\forall \delta\pi \in \mathbb{Y}$ t.q. $D_G^+ \underline{z}(\pi; \delta\pi)$ existe.

Remarque 2.5.3. Lorsque $\dim(\mathbb{S}) < +\infty$, la condition (A⁰6) est toujours vérifiée.

Remarque 2.5.4. L'ensemble \mathbb{G}^0 étant un ouvert du sous-espace affine \mathbb{A} , on précise la signification des notations des conditions (A⁰3) et (A⁰7).

Soit $\mathfrak{f} : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\bar{\pi} \in P$. Considérons la fonction $\bar{\mathfrak{f}} : (\mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}) \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x, \pi) \in (\mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}) \times \mathbb{Y}$, $\bar{\mathfrak{f}}(x, \pi) := \mathfrak{f}(x + \underline{z}(\pi_0), \pi)$.

- Notons que l'ensemble $\mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}$ est un ouvert de \mathbb{S} .
- On dit que \mathfrak{f} est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ lorsque la fonction $\bar{\mathfrak{f}}$ est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$. On note $D_H \mathfrak{f}(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) \in \mathcal{L}(\mathbb{S} \times \mathbb{Y}, \mathbb{R})$ sa Hadamard-différentielle au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ qui est égale à $D_H \bar{\mathfrak{f}}(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$.
- On dit que \mathfrak{f} est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ par rapport à sa première variable lorsque la fonction $\bar{\mathfrak{f}}$ est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$ par rapport à sa première variable. On note $D_{H,1} \mathfrak{f}(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) \in \mathcal{L}(\mathbb{S}, \mathbb{R})$ sa Hadamard-différentielle au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ par rapport à sa première variable qui est égale à $D_{H,1} \bar{\mathfrak{f}}(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$.
- On dit que \mathfrak{f} est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ par rapport à sa deuxième variable lorsque la fonction $\bar{\mathfrak{f}}$ est Hadamard-différentiable au point $(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$ par rapport à sa seconde variable. On note $D_{H,2} \mathfrak{f}(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi}) \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{R})$ sa Hadamard-différentielle au point $(\underline{z}(\bar{\pi}), \bar{\pi})$ par rapport à sa deuxième variable qui est égale à $D_{H,2} \bar{\mathfrak{f}}(\underline{z}(\bar{\pi}) - \underline{z}(\pi_0), \bar{\pi})$.

Dans le théorème suivant, on énonce le théorème de l'enveloppe pour ce problème.

Théorème 2.5.5. Partie (I). *Sous les hypothèses $(A^0 1)$, $(A^0 2)$, $(A^0 3)$, $(A^0 4)$, $(A^0 5)$, $(A^0 6)$, $D_G^+ V^0(\pi_0; \delta\pi)$ existe et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π_0) , t.q.*

$$D_G^+ V^0(\pi_0; \delta\pi) = D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi.$$

Partie (II). *Sous les hypothèses $(A^0 1)$, $(A^0 2\text{-bis})$, $(A^0 3)$, $(A^0 4)$, $(A^0 5)$, $(A^0 6)$, V est Gâteaux-différentiable au point π_0 et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π_0) , t.q.*

$$D_G V(\pi_0) = D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0).$$

Partie (III). *Sous $(A^0 1)$, $(A^0 2\text{-ter})$, $(A^0 3)$, $(A^0 4)$, $(A^0 5)$, $(A^0 6)$, $(A^0 7)$, il existe Q un voisinage ouvert de π_0 dans \mathbb{Y} t.q. V est continûment Fréchet-différentiable sur Q et pour chaque $\pi \in Q$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π) , t.q.*

$$D_F V(\pi) = D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi), \pi) + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi), \pi).$$

Ces Théorèmes vont être démontrés dans les sections suivantes.

2.6 Preuve du théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre

Dans cette section, nous démontrons notre théorème de l'enveloppe pour le premier problème à paramètre.

Dans la sous-section **Résultats d'algèbre topologique**, on démontre trois lemmes d'algèbre topologique. Notons que dans cette sous-section, à l'aide d'un lemme de Gram-Schmidt à paramètre, on démontre un lemme sur la continuité par rapport au paramètre des coordonnées d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre.

Pour la preuve de la Partie (I), nous utilisons la Partie (IV) de la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Ensuite, en utilisant le lemme sur la continuité par rapport au paramètre des coordonnées d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre, on démontre la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport à π . Enfin, on parvient à démontrer la Partie (I).

Pour la preuve la Partie (II), en utilisant le fait que la dérivée directionnelle à droite de la solution existe au point π_0 suivant toutes les directions et la Partie (I) de ce théorème, on démontre que la fonction valeur admet une dérivée directionnelle à droite au point π_0 suivant toutes les directions. En outre, on démontre que la dérivée directionnelle à droite de la fonction valeur au point π_0 est linéaire continue par rapport aux directions. Ainsi V est Gâteaux-différentiable au point π_0 .

Pour la preuve de la Partie (III), en ajoutant des hypothèses, on parvient à appliquer la Partie (II) pour chaque π dans un voisinage de π_0 . Ensuite, en démontrant la continuité de la Gâteaux-différentielle de V par rapport à π sur ce voisinage de π_0 , on démontre que V est continûment Fréchet-différentiable sur ce voisinage.

2.6.1 Résultats d'algèbre topologique.

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ deux espaces vectoriels normés réels.

Lemme 2.6.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $w_0 \in \mathbb{W}$ et $W \in \mathcal{V}_{w_0}(\mathbb{W})$. Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq m} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^m$ t.q. $(b_1(w_0), \dots, b_m(w_0))$ est une famille libre. Alors, il existe $W_0 \in \mathcal{V}_{w_0}(\mathbb{W})$, avec $W_0 \subset W$, t.q. $\forall w \in W_0$, $(b_1(w), \dots, b_m(w))$ est une famille libre.*

Démonstration. Pour chaque $w \in W$, on considère l'opérateur linéaire continu $\Phi_w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{E}$, défini par,

$$\forall (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m, \Phi_w(u^1, \dots, u^m) := \sum_{1 \leq i \leq m} u^i b_i(w).$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que

$$\forall W_0 \in \mathcal{V}_{w_0}(\mathbb{W}), W_0 \subset W, \exists w \in W_0, (b_1(w), \dots, b_m(w)) \text{ est une famille liée.} \quad (2.6.1)$$

Puisque $W \in \mathcal{V}_{w_0}(\mathbb{W})$, il existe $\rho > 0$ t.q. $B_{\|\cdot\|_{\mathbb{W}}}(w_0, \rho) \subset W$. Par conséquent, en utilisant (2.6.1), on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists w_k \in B_{\|\cdot\|_{\mathbb{W}}}(w_0, \frac{\rho}{k+1}) \text{ t.q. } \exists u_k = (u_k^1, \dots, u_k^m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \Phi_{w_k}(u_k) = 0. \quad (2.6.2)$$

En posant, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}}$, on a, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in S_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}}(0, 1)$ où $S_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}}(0, 1)$ est la sphère unité de \mathbb{R}^m . En utilisant (2.6.2), on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^m v_k^i b_i(w_k) = 0. \quad (2.6.3)$$

De plus, puisque $S_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}}(0, 1)$ est un compact de \mathbb{R}^m , il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, il existe $v \in S_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}}(0, 1)$ t.q. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v_{\sigma(k)} - v\|_{\mathbb{R}^m} = 0$. Par conséquent, en utilisant (2.6.3) et $(b_i)_{1 \leq i \leq m} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^m$, on a

$$\sum_{i=1}^m v^i b_i(w_0) = 0.$$

Ceci contredit que $(b_1(w_0), \dots, b_m(w_0))$ est une famille libre car $v \in S_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}}(0, 1)$. □

Dans la suite, on suppose qu'il existe $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{E}}$ un produit scalaire sur \mathbb{E} t.q. $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{E}}$ est continu sur l'espace normé produit $(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E},1})$ dans \mathbb{R} .

On note $\|\cdot\|_{\varpi}$ la norme sur \mathbb{E} induite par le produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{E}}$.

Dans le lemme suivant, on démontre un lemme de Gram-Schmidt à paramètre.

Lemme 2.6.2. *Soit W un ouvert de \mathbb{W} .*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^$, pour chaque $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$ t.q., $\forall w \in W$, $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre, il existe $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$ t.q. les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (a) $\forall w \in W, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_i(w) \in \text{Vect}(\{e_1(w), \dots, e_i(w)\})$.
- (b) $\forall w \in W, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ t.q. $i \neq j, (\epsilon_i(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}} = 0$.
- (c) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \exists \alpha_j^i \in C^0(W, \mathbb{R})$ t.q. $\forall w \in W, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_j(w) = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i(w) e_i(w)$
où $\alpha_j^j(w) = 1$ et où $\alpha_j^i(w) = 0$ lorsque $i > j$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme nous allons faire un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, soit $e_1 \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))$.

Puisque, pour chaque $w \in W$, $(e_1(w))$ est une famille libre, on a : $\forall w \in W, e_1(w) \neq 0$.

Par conséquent, en posant $\epsilon_1 = e_1$ et pour chaque $w \in W$, $\alpha_1^1(w) = 1$, on a $\epsilon_1 \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))$ et les assertions (a), (b) et (c) sont vérifiées.

Supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 1$.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^{n+1}$ t.q. $\forall w \in W, (e_i(w))_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille libre. En utilisant la propriété 1) de [30] (p.81), on obtient que pour chaque $w \in W, (e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

Par conséquent, puisque $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$ t.q. les assertions suivantes sont vérifiées.

(a)_n $\forall w \in W, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_i(w) \in Vect(\{e_1(w), \dots, e_i(w)\})$.

(b)_n $\forall w \in W, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ t.q. $i \neq j, (\epsilon_i(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}} = 0$.

(c)_n $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \exists \alpha_j^i \in C^0(W, \mathbb{R})$ t.q. $\forall w \in W, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_j(w) = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i(w) e_i(w)$
où $\alpha_j^j(w) = 1$ et où $\alpha_j^i(w) = 0$ lorsque $i > j$.

On pose, pour chaque $w \in W$,

$$\epsilon_{n+1}(w) = e_{n+1}(w) - \sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\varpi}^2} \epsilon_j(w).$$

Soit $w \in W$; en utilisant (a)_n on a

$$\sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\varpi}^2} \epsilon_j(w) \in Vect(\{e_1(w), \dots, e_n(w)\}). \quad (2.6.4)$$

De plus, puisque $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n+1}$ est une famille libre, en utilisant la proposition de la p.78 de [30], on a

$$\epsilon_{n+1}(w) \notin Vect(\{e_1(w), \dots, e_n(w)\}).$$

Par conséquent, on a $\epsilon_{n+1}(w) \neq 0$.

Puisque, $\forall j \in \{1, \dots, n\}, [w \mapsto (e_{n+1}(w), \epsilon_j(w))] \in C^0(W, (\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E} \times \mathbb{E}, 1}))$ et $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{E}} \in C^0((\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}, 1}), \mathbb{R})$, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, [w \mapsto (e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}] \in C^0(W, \mathbb{R}).$$

De plus, puisque $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{E}} \in C^0((\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}, 1}), \mathbb{R})$, en utilisant le Lemme 1.5.20, on a

$$\|\cdot\|_{\varpi} \in C^0((\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}), \mathbb{R}).$$

Par conséquent, puisque, $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_j \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))$, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, [w \mapsto \|\epsilon_j(w)\|_{\varpi}^2] \in C^0(W, \mathbb{R}). \quad (2.6.5)$$

Donc, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \tilde{\beta}_j := \left[w \mapsto \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\varpi}^2} \right] \in C^0(W, \mathbb{R}).$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés des fonctions continues, on a

$$\epsilon_{n+1} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})). \quad (2.6.6)$$

2.6. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PREMIER PROBLÈME À PARAMÈTRE

Avec (a)_n, on a, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\epsilon_j(w) \in Vect(\{e_1(w), \dots, e_{n+1}(w)\})$.

Par conséquent, on a $\epsilon_{n+1}(w) \in Vect(\{e_1(w), \dots, e_{n+1}(w)\})$; ce qui démontre (a)_{n+1}.

Soit $w \in W$, soit $i \in \{1, \dots, n\}$; on a

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} &= (e_{n+1}(w) - \sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} \epsilon_j(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} \\
 &= (e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} - (\sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} \epsilon_j(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} \\
 &= (e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} - \sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} (\epsilon_j(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} \\
 &= (e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} - \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_i(w)\|_{\mathbb{E}}^2} (\epsilon_i(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} \\
 &= (e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} - (e_{n+1}(w)|\epsilon_i(w))_{\mathbb{E}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ceci démontre (b)_{n+1}.

Soit $w \in W$; on a

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n+1}(w) &= e_{n+1}(w) - \sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} \epsilon_j(w) \\
 &= e_{n+1}(w) - \sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} (\sum_{i=1}^n \alpha_j^i(w) e_i(w)) \\
 &= e_{n+1}(w) - \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \frac{(e_{n+1}(w)|\epsilon_j(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_j(w)\|_{\mathbb{E}}^2} \alpha_j^i(w)) e_i(w) \\
 &= e_{n+1}(w) - \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_j(w) \alpha_j^i(w)) e_i(w) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{n+1}^i(w) e_i(w),
 \end{aligned}$$

où, pour chaque $w \in W$, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\alpha_{n+1}^{n+1}(w) = 1$ et

$$\alpha_{n+1}^i(w) = \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_j(w) \alpha_j^i(w).$$

Puisque $\tilde{\beta}_j \in C^0(W, \mathbb{R})$ pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, et puisque $\alpha_j^i \in C^0(W, \mathbb{R})$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \alpha_{n+1}^i \in C^0(W, \mathbb{R}).$$

Ceci démontre (c)_{n+1}. Ainsi le raisonnement par récurrence est achevé. □

Dans le lemme suivant, on démontre un lemme sur la continuité, par rapport au paramètre, des coordonnées d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre.

Lemme 2.6.3. *Soit W un ouvert de \mathbb{W} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, \mathbb{E})^n$ t.q. $\forall w \in W$, $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre. Pour chaque $w \in W$, on note $F_w := Vect(\{e_i(w) : 1 \leq i \leq n\})$, et $F := \bigcup_{w \in W} (F_w \times \{w\})$. Lorsque $(\mathbf{x}, w) \in F$, on note $(\mathbf{x}^i(\mathbf{x}, w))_{1 \leq i \leq n}$ la liste des coordonnées de \mathbf{x} dans la base $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$.*

Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}^i \in C^0(F, \mathbb{R})$.

Démonstration. Puisque $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$ et, $\forall w \in W$, $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre, en utilisant le Lemme 2.6.2, il existe $(\epsilon_j)_{1 \leq j \leq n} \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))^n$ t.q. les assertions (a), (b) et (c) du Lemme 2.6.2 sont vérifiées.

Avec (b) et puisque, pour chaque $w \in W$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\epsilon_j(w) \neq 0$, on a, $\forall w \in W$, $(\epsilon_j(w))_{1 \leq j \leq n}$ est une famille libre.

Par conséquent, en utilisant (a), on a

$$\forall w \in W, F_w = Vect(\{\epsilon_1(w), \dots, \epsilon_n(w)\}).$$

Soit $w \in W$ et $\mathbf{x} \in F_w$, on a donc

$$\mathbf{x} := \sum_{i=1}^n y^i(\mathbf{x}, w) \epsilon_i(w) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, n\}, y^i(\mathbf{x}, w) := \frac{(\mathbf{x} | \epsilon_i(w))_{\mathbb{E}}}{\|\epsilon_i(w)\|_{\mathbb{E}}^2}.$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Avec (2.6.5), puisque $(\cdot | \cdot)_{\mathbb{E}} \in C^0((\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E},1}), \mathbb{R})$, $\epsilon_i \in C^0(W, (\mathbb{E} \setminus \{0\}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}))$, alors on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i \in C^0(F, \mathbb{R}). \quad (2.6.7)$$

Puisque $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ et $(\epsilon_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ sont deux bases de l'espace vectoriel F_w , on peut considérer la matrice de passage $M(w)$ de $(e_i(w))_{1 \leq i \leq n}$ à $(\epsilon_i(w))_{1 \leq i \leq n}$.

Avec (c), on a $M(w) = (\alpha_j^i(w))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. De plus, puisque, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\alpha_j^i \in C^0(W, \mathbb{R})$, on a $[w \mapsto M(w)] \in C^0(W, GL(n, \mathbb{R}))$ où $GL(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$.

Puisque l'opérateur $\mathcal{V} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, définie par $\mathcal{V}(L) = L^{-1}$, est continu, on a

$$[w \mapsto M(w)^{-1}] \in C^0(W, GL(n, \mathbb{R})).$$

Notons que nous avons la relation suivante entre les matrices colonnes :

$$[\mathbf{x}^1(\mathbf{x}, w) \dots \mathbf{x}^n(\mathbf{x}, w)]^t = M(w)^{-1} [y^1(\mathbf{x}, w) \dots y^n(\mathbf{x}, w)]^t$$

où t est le symbole utilisé pour la transposition d'une matrice.

En utilisant le théorème de composition des fonctions continues et en assimilant les vecteurs de \mathbb{R}^n avec les matrices colonnes à n termes, on a $[(\mathbf{x}, w) \mapsto (\mathbf{x}^1(\mathbf{x}, w) \dots \mathbf{x}^n(\mathbf{x}, w))] \in C^0(F, \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}^i \in C^0(F, \mathbb{R})$. \square

2.6.2 Preuve de la Partie (I)

Avec (A3) et (A5), en utilisant le Lemme 2.6.1, il existe un voisinage ouvert Q de π_0 dans \mathbb{Y} , $Q \subset P$, t.q.

$$\left. \begin{aligned} &\forall \pi \in Q, (D_{H,1}g_1(\underline{x}(\pi), \pi), \dots, D_{H,1}g_k(\underline{x}(\pi), \pi), D_{H,1}h_1(\underline{x}(\pi), \pi) \\ &\dots, D_{H,1}h_l(\underline{x}(\pi), \pi)) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.8)$$

Pour chaque $\pi \in P$, considérons les fonctions $f^\pi := [x \mapsto f(x, \pi)]$, pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, $g_i^\pi := [x \mapsto g_i(x, \pi)]$ et pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, $h_j^\pi := [x \mapsto h_j(x, \pi)]$. Remarquons que pour chaque $\pi \in P$, on peut reformuler (\mathcal{M}, π) sous la forme suivante :

$$(\mathcal{M}, \pi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f^\pi(x) \\ \text{lorsque } x \in \mathbb{G} \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^\pi(x) \geq 0 \\ \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^\pi(x) = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant l'assertion (A3), on a, pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, pour chaque $\pi \in P$, $D_H \phi^\pi(\underline{x}(\pi))$ existe, et, $\forall \pi \in P$, $D_H \phi^\pi(\underline{x}(\pi)) = D_{H,1} \phi(\underline{x}(\pi), \pi)$. De plus, avec (A4), pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, pour chaque $\pi \in P$, h_j^π est continue sur un voisinage de $\underline{x}(\pi)$.

Par conséquent, avec (2.6.8) et puisque, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi)$ est solution du problème (\mathcal{M}, π) , en utilisant la Partie (IV) du Théorème 2.4.1, on a, pour chaque $\pi \in Q$, l'existence d'un unique $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}^{k+l}$ t.q.

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi) \geq 0.$$

2.6. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PREMIER PROBLÈME À PARAMÈTRE

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi)g_i^\pi(\underline{x}(\pi)) = 0. \\ D_H f^\pi(\underline{x}(\pi)) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi)D_H g_i^\pi(\underline{x}(\pi)) + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi)D_H h_j^\pi(\underline{x}(\pi)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\forall \pi \in Q, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi) \geq 0. \quad (2.6.9)$$

$$\forall \pi \in Q, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi)g_i(\underline{x}(\pi), \pi) = 0. \quad (2.6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} & \forall \pi \in Q, \\ & D_{H,1}f(\underline{x}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi)D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi), \pi) + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi)D_{H,1}h_j(\underline{x}(\pi), \pi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.11)$$

Le résultat suivant nous donne la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport au paramètre π .

Lemme 2.6.4. *Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i \in C^0(Q, \mathbb{R}_+)$, et pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, $\mu_j \in C^0(Q, \mathbb{R})$.*

Démonstration. En utilisant (A3), (A6), (2.6.8) et (2.6.11), on peut appliquer le Lemme 2.6.3 avec $\mathbb{E} = \mathbb{X}^*$, $\mathbb{W} = \mathbb{Y}$, $W = Q$, $\forall \pi \in Q$, $e_1(\pi) = D_{H,1}g_1(\underline{x}(\pi), \pi), \dots, e_k(\pi) = D_{H,1}g_k(\underline{x}(\pi), \pi)$, $e_{k+1}(\pi) = D_{H,1}h_1(\underline{x}(\pi), \pi), \dots, e_{k+l}(\pi) = D_{H,1}h_l(\underline{x}(\pi), \pi)$, et on obtient que, $\forall \alpha \in \{1, \dots, k+l\}$, \mathbf{x}_α est continue sur $\bigcup_{\pi \in Q} (F_\pi \times \{\pi\})$.

Par conséquent, puisque, pour tout $\pi \in Q$, $\mathbf{x}(\pi) := -D_{H,1}f(\underline{x}(\pi), \pi) \in F_\pi$, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \lambda_i = \mathbf{x}_i \circ (\mathbf{x}, Id_Q) \in C^0(Q, \mathbb{R}), \text{ et} \\ & \forall j \in \{1, \dots, l\}, \quad \mu_j = \mathbf{x}_{k+j} \circ (\mathbf{x}, Id_Q) \in C^0(Q, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

En utilisant (A1), on a

$$\forall \pi \in Q, V(\pi) = f(\underline{x}(\pi), \pi).$$

Considérons la fonction $\tilde{\varphi} : Q \rightarrow \mathbb{G} \times Q$, définie par, pour tout $\pi \in Q$, $\tilde{\varphi}(\pi) = (\underline{x}(\pi), \pi)$. Avec (A2), en utilisant la proposition 1 p.145 de [1], on a

$$D_G^+ \tilde{\varphi}(\pi_0) \cdot \delta \pi = (D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi), \delta \pi). \quad (2.6.12)$$

Notons que

$$\forall \pi \in Q, V(\pi) = (f \circ \tilde{\varphi})(\pi).$$

Par conséquent, avec (A3), en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$\left. \begin{aligned} & D_G^+ V(\pi_0; \delta \pi) = D_H f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot (D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi), \delta \pi) \\ & = D_{H,1}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi) + D_{H,2}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta \pi. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.13)$$

Ainsi, grâce à (2.6.11), on a

$$\left. \begin{aligned} & D_{H,1}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi) = \\ & - \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0)D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi) \\ & - \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0)D_{H,1}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta \pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.14)$$

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$; raisonnons par disjonction des cas; si $\lambda_i(\pi_0) > 0$; en utilisant le Lemme 2.6.4, il existe un voisinage N de π_0 dans Q t.q.

$$\forall \pi \in N, \lambda_i(\pi) > 0.$$

Par conséquent en utilisant (2.6.10), on obtient que

$$\forall \pi \in N, 0 = g_i(\underline{x}(\pi), \pi) = (g_i \circ \tilde{\varphi}|_N)(\pi).$$

Avec (2.6.12) et (A3), en utilisant le Lemme 2.1.8, on a donc

$$D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi) + D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi = 0.$$

Ainsi, on a

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.15)$$

De plus, si $\lambda_i(\pi_0) = 0$, alors on a

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.16)$$

Donc, en utilisant (2.6.15) et (2.6.16), on a démontré, par disjonction des cas, que

$$\left. \begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.17)$$

Soit $j \in \{1, \dots, l\}$; notons que

$$\forall \pi \in Q, 0 = h_j(\underline{x}(\pi), \pi) = (h_j \circ \tilde{\varphi})(\pi).$$

Avec (2.6.12) et (A3), en utilisant le Lemme 2.1.8, on a donc

$$D_{H,1}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi) + D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi = 0,$$

d'où, on obtient que

$$\left. \begin{aligned} & \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\mu_j(\pi_0) D_{H,1}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi). \end{aligned} \right\} \quad (2.6.18)$$

En utilisant (2.6.17), (2.6.18) et (2.6.14), on a

$$\left. \begin{aligned} & D_{H,1}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot D_G^+\underline{x}(\pi_0; \delta\pi) = \\ & \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.19)$$

En utilisant (2.6.13) dans (2.6.19), on a

$$\left. \begin{aligned} & D_G^+V(\pi_0; \delta\pi) = D_{H,2}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.20)$$

Ainsi on a prouvé la Partie (I) du Théorème 2.5.2.

2.6.3 Preuve de la Partie (II)

Avec (A2-bis), on peut appliquer la Partie (I) du Théorème 2.5.2 pour chaque $\delta\pi \in \mathbb{Y}$ et donc on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \delta\pi \in \mathbb{Y}, D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\}$$

Puisque, $\forall \phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, $D_{H,2}\phi(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \in \mathbb{Y}^*$, on a $[\delta\pi \mapsto D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi)] \in \mathbb{Y}^*$.

Par conséquent, V est Gâteaux-différentiable au point π_0 . Ceci démontre la Partie (II) du Théorème 2.5.2.

2.6.4 Preuve de la Partie (III)

Puisque, pour chaque $\pi \in Q$, les hypothèses de la Partie (II) sont vérifiées avec $\pi_0 = \pi$, on a

$$\begin{aligned} \forall \pi \in Q, D_G V(\pi) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi), \pi) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi), \pi). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (A7) et le Lemme 2.6.4, on a $D_G V \in C^0(Q, \mathbb{Y}^*)$. Ainsi, en utilisant le corollaire 2 p.144 de [1], on obtient que V est Fréchet-différentiable sur Q et $D_F V(\pi) = D_G V(\pi)$ pour tout $\pi \in Q$, et donc $D_F V \in C^0(Q, \mathbb{Y}^*)$.

2.7 Preuve du théorème de l'enveloppe pour le second problème à paramètre

Notre stratégie, pour démontrer le Théorème 2.5.5, est de se ramener au cadre du Théorème 2.5.2. Pour cela, nous commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.7.1. *Soit \mathbb{E} un espace vectoriel normé réel et \mathbb{F} un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} . Soit W un ouvert de \mathbb{F} et $a \in \mathbb{E}$. Considérons la fonction $\tau_a^W : W \rightarrow W + \{a\}$ définie par, $\forall x \in W$, $\tau_a^W(x) = x + a$.*

Alors $\tau_a^W \in C^1(W, \mathbb{E})$ et est une bijection, $(\tau_a^W)^{-1} : W + \{a\} \rightarrow W$ est définie par, $\forall y \in W + \{a\}$, $(\tau_a^W)^{-1}(y) = y - a$ et, $\forall x \in W$, $D_F \tau_a^W(x) = Id_{\mathbb{F}}$ où $Id_{\mathbb{F}}$ est la fonction identité de \mathbb{F} .

Démonstration. Soit $y \in W + \{a\}$; posons $x = y - a \in W$ alors on a

$$\tau_a^W(x) = x + a = y - a + a = y.$$

Par conséquent, τ_a^W est surjective.

Soit $x, x' \in W$,

$$\begin{aligned} \tau_a^W(x) = \tau_a^W(x') &\Rightarrow x + a = x' + a \\ &\Rightarrow x = x'. \end{aligned}$$

Par conséquent, τ_a^W est injective.

Donc τ_a^W est bijective de W dans $W + \{a\}$ et $(\tau_a^W)^{-1} : W + \{a\} \rightarrow W$, définie par $\forall y \in W + \{a\}$, $(\tau_a^W)^{-1}(y) = y - a$.

Notons que

$$\tau_a^W = Id_{\mathbb{F}|_W} + \tilde{a},$$

où \tilde{a} est la fonction constante égale à a sur W .

Par conséquent, $\tau_a^W \in C^1(W, \mathbb{E})$ comme somme de fonctions continûment Fréchet-différentiables sur W et

$$\forall x \in W, D_F \tau_a^W(x) = D_F Id_{\mathbb{F}|W}(x) + D_F \tilde{a}(x) = Id_{\mathbb{F}}.$$

□

2.7.1 Preuve de la Partie (I)

On veut se ramener au cadre du Théorème 2.5.2; pour cela on considère la fonction $\psi : (\mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}) \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y}$, définie par, pour chaque $(x, \pi) \in (\mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}) \times \mathbb{Y}$, $\psi(x, \pi) = (x + \underline{z}(\pi_0), \pi)$ et, $\forall \phi^0 \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, on définit $\phi = \phi^0 \circ \psi$. On peut ainsi construire le problème à paramètre suivant pour chaque $\pi \in \mathbb{Y}$:

$$(\mathcal{M}^1, \pi) \begin{cases} \text{Maximiser} & f(x, \pi) \\ \text{lorsque} & x \in \mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\} \\ & \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i(x, \pi) \geq 0 \\ & \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j(x, \pi) = 0. \end{cases}$$

On note, pour chaque $\pi \in \mathbb{Y}$, $V_1(\pi)$ la valeur du problème (\mathcal{M}^1, π) .

Puisque \mathbb{S} est le sous-espace vectoriel directeur de \mathbb{A} , $\mathbb{S} = \mathbb{A} - \{\underline{z}(\pi_0)\}$ i.e. $\mathbb{A} = \mathbb{S} + \{\underline{z}(\pi_0)\}$.

Puisque \mathbb{G}^0 est un ouvert de \mathbb{A} , $(\tau_{\{\underline{z}(\pi_0)\}}^{\mathbb{S}})^{-1}(\mathbb{G}^0) = \mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}$ est un ouvert de \mathbb{S} . Pour tout $\pi \in \mathbb{Y}$, pour le problème (\mathcal{M}^1, π) , on est dans le cadre du Théorème 2.5.2 avec $\mathbb{X} = \mathbb{S}$ et $\mathbb{G} = \mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}$. Prouvons maintenant que les hypothèses du Théorème 2.5.2 sont vérifiées.

Pour tout $\pi \in \mathbb{Y}$, on note $Adm(\mathcal{M}^1, \pi)$ l'ensemble des points admissibles du problème (\mathcal{M}^1, π) et $Adm(\mathcal{M}^0, \pi)$ l'ensemble des points admissibles du problème (\mathcal{M}^0, π) .

Soit $\pi \in \mathbb{Y}$; notons que

$$\begin{aligned} x \in Adm(\mathcal{M}^1, \pi) &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}, \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i(x, \pi) \geq 0, \\ &\quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j(x, \pi) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x + \underline{z}(\pi_0) \in \mathbb{G}^0, \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^0(x + \underline{z}(\pi_0), \pi) \geq 0, \\ &\quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^0(x + \underline{z}(\pi_0), \pi) = 0) \\ &\Leftrightarrow x + \underline{z}(\pi_0) \in Adm(\mathcal{M}^0, \pi). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a démontré que

$$\forall \pi \in \mathbb{Y}, x \in Adm(\mathcal{M}^1, \pi) \Leftrightarrow x + \underline{z}(\pi_0) \in Adm(\mathcal{M}^0, \pi).$$

Posons, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi) = \underline{z}(\pi) - \underline{z}(\pi_0) \in \mathbb{G}^0 - \{\underline{z}(\pi_0)\}$.

Soit $\pi \in P$; d'après (A⁰1), on a

$$\forall z \in Adm(\mathcal{M}^0, \pi), f^0(z, \pi) \leq f^0(\underline{z}(\pi), \pi).$$

Soit $x \in Adm(\mathcal{M}^1, \pi)$, alors on a $x + \underline{z}(\pi_0) \in Adm(\mathcal{M}^0, \pi)$ et

$$f(x, \pi) = f^0(x + \underline{z}(\pi_0), \pi) \leq f^0(\underline{z}(\pi), \pi) = f(\underline{x}(\pi), \pi).$$

Donc, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi)$ est solution du problème (\mathcal{M}^1, π) ; ce qui démontre (A1).

Puisque, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi) = \underline{z}(\pi) - \underline{z}(\pi_0)$, avec (A⁰2), on obtient que $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi)$ existe et $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi) = D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \delta\pi)$; donc (A2) est vérifiée.

Avec (A⁰3), en utilisant la Remarque 2.5.4, on a

$$\forall \phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}, D_H \phi(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) = D_H \phi^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), \quad (2.7.1)$$

2.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE SECOND PROBLÈME À PARAMÈTRE

et

$$\left. \begin{array}{l} \forall \phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}, \\ \forall \pi \in P, D_{H,1}\phi(\underline{x}(\pi), \pi) = D_{H,1}\phi^0(\underline{z}(\pi), \pi). \end{array} \right\} \quad (2.7.2)$$

Avec (2.7.2), en utilisant (A⁰3) on a $[\pi \mapsto D_{H,1}\phi(\underline{x}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{S}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$. Ceci démontre (A3). Soit $\pi \in P$, soit $j \in \{1, \dots, l\}$; en utilisant (A⁰4), il existe $\Omega_\pi^j \in \mathcal{V}_{\underline{z}(\pi)}(\mathbb{G}^0)$ t.q. $[z \mapsto h_j^0(z, \pi)] \in C^0(\Omega_\pi^j, \mathbb{R})$.

Puisque $\tau_{\underline{z}(\pi_0)}^{\mathbb{G}^0 - \{z(\pi_0)\}} \in C^0(\mathbb{G}^0 - \{z(\pi_0)\}, \mathbb{G}^0)$, on obtient que $(\tau_{\underline{z}(\pi_0)}^{\mathbb{G}^0 - \{z(\pi_0)\}})^{-1}(\Omega_\pi^j) = \Omega_\pi^j - \{z(\pi_0)\}$ est un voisinage de $\underline{x}(\pi) = \underline{z}(\pi) - \underline{z}(\pi_0)$ dans $\mathbb{G}^0 - \{z(\pi_0)\}$.

Par conséquent, on obtient

$$h_j(\cdot, \pi) = h_j^0(\cdot, \pi) \circ \tau_{\underline{z}(\pi_0)}^{\mathbb{G}^0 - \{z(\pi_0)\}}|_{\Omega_\pi^j - \{z(\pi_0)\}} \in C^0(\Omega_\pi^j - \{z(\pi_0)\}, \mathbb{R}).$$

Ceci démontre (A4). Avec (2.7.2), (A⁰5) est équivalent à (A5).

De plus, (A⁰6) est équivalent à (A6).

Par conséquent, en appliquant la Partie (I) du Théorème 2.5.2 pour le problème (\mathcal{M}^1, π) avec $\pi \in \mathbb{Y}$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ t.q.

$$\left. \begin{array}{l} D_G^+ V^1(\pi_0; \delta\pi) = D_{H,2}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{array} \right\} \quad (2.7.3)$$

Puisque pour chaque $\pi \in P$, $f(\underline{x}(\pi), \pi) = f^0(\underline{z}(\pi), \pi)$, on a

$$\forall \pi \in P, V^1(\pi) = V^0(\pi).$$

Ainsi, en utilisant (2.7.1) et (2.7.3), on a

$$\begin{aligned} D_G^+ V^0(\pi_0; \delta\pi) &= D_{H,2}f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned}$$

2.7.2 Preuve de la Partie (II)

Puisque, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi) = \underline{z}(\pi) - \underline{z}(\pi_0)$, avec (A⁰2-bis), on obtient que, pour chaque $\delta\pi \in \mathbb{Y}$, $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi)$ existe et $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \delta\pi) = D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \delta\pi)$; donc (A2-bis) est vérifiée.

Par conséquent, en appliquant la Partie (II) du Théorème 2.5.2 pour le problème (\mathcal{M}^1, π) avec $\pi \in \mathbb{Y}$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ t.q.

$$\left. \begin{array}{l} D_G V^1(\pi_0) = D_{H,2}f(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0) \\ + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0). \end{array} \right\} \quad (2.7.4)$$

Par conséquent, puisque $V^1 = V^0$ sur P , V^0 est Gâteaux-différentiable au point π_0 et avec (2.7.1), on a

$$\begin{aligned} D_G V^0(\pi_0) &= D_{H,2}f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (II).

2.7.3 Preuve de la Partie (III)

Puisque, $\forall \pi \in P$, $\underline{x}(\pi) = \underline{z}(\pi) - \underline{z}(\pi_0)$, avec (A⁰2-ter), on obtient que, pour chaque $\pi \in P$ et $\delta\pi \in \mathbb{Y}$, $D_G^+ \underline{x}(\pi, \delta\pi)$ existe et $D_G^+ \underline{x}(\pi, \delta\pi) = D_G^+ \underline{z}(\pi, \delta\pi)$; donc (A2-ter) est vérifiée.

Soit $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$ et $\pi \in P$.

Avec (A⁰7), en utilisant la Remarque 2.5.4, on a

$$D_H \phi(\underline{x}(\pi), \pi) = D_H \phi^0(\underline{z}(\pi), \pi). \quad (2.7.5)$$

De plus, puisque, $\forall \pi \in P$, $D_{H,2} \phi(\underline{x}(\pi), \pi) = D_{H,2} \phi^0(\underline{z}(\pi), \pi)$, en utilisant (A⁰7), on a $[\pi \mapsto D_{H,2} \phi(\underline{x}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{Y}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$ i.e. (A7) est vérifiée pour (\mathcal{M}^1, π) . Ainsi, en utilisant la Partie (III) du Théorème 2.5.2, il existe Q , un voisinage ouvert de π_0 dans \mathbb{Y} , t.q. V est continûment Fréchet-différentiable sur Q et pour chaque $\pi \in Q$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ t.q.

$$\begin{aligned} D_F V^1(\pi) &= D_{H,2} f(\underline{x}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i(\underline{x}(\pi), \pi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j(\underline{x}(\pi), \pi). \end{aligned}$$

Ainsi, avec (2.7.5) et puisque $V^0 = V^1$ sur P , on a $V^0 \in C^1(Q, \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} D_F V^0(\pi) &= D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi), \pi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi), \pi). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (III).

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étendre la théorie classique des équations différentielles ordinaires (avec des solutions C^1) à des solutions PC^1 . Plusieurs généralisations de la théorie des É.D.O (équations différentielles ordinaires) classique existent déjà ; on peut noter celle de [1], [5] et de [32].

- Dans [1], les auteurs passent par une théorie des équations différentielles ordinaires pour les solutions absolument continues dans le cadre de la dimension finie. Or, nous allons avoir besoin de la dimension infinie.
- Dans [5], en dimension infinie, les auteurs mettent en place une théorie des équations différentielles ordinaires faisant intervenir des solutions primitives d'une fonction réglée.
- Dans [32], l'auteur utilise la notion de solution PC^1 en faisant du bout à bout sur les solutions classiques entre les coins ; cette méthode, quoiqu'assez intuitive, s'avère très difficile à écrire de façons maniable.

Puisque nous avons besoin de travailler avec des solutions PC^1 à valeurs dans un espace de Banach de dimension infini, nous allons démontrer directement les résultats fondamentaux de la théorie des É.D.O dans ce cadre sans nous ramener aux trois généralisations pré-citées.

Dans la section 1, on établit les théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles ordinaires.

Dans la section 2, on établit les théorèmes de base sur les équations différentielles ordinaires linéaires.

Dans la section 3, on établit un théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.

3.1 Résultats fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires pour les solutions PC^1

Dans cette section, on établit les résultats fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires pour les solutions PC^1 à valeurs dans un espace de Banach.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, U un ensemble ouvert de E . Soit $f : [a, b] \times U \rightarrow E$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Nous allons travailler dans la suite de cette section avec les hypothèses suivantes :

- (H1) $f \in PCP^0([a, b] \times U, E)$ où $disc1(f) = \{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\}$.
- (H2) Pour tout $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, il existe $\kappa^{(t_0, x_0)} \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b])), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}_+)$,
 $J \in \mathcal{V}_{t_0}([a, b]), V \in \mathcal{V}_{x_0}(U)$ t.q. $\forall t \in J, \forall x_1, x_2 \in V$,
 $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \kappa^{(t_0, x_0)}(t) \|x_1 - x_2\|$.

Dans cette section, on étudie l'équation différentielle à solution PC^1 suivante :

$$(\mathcal{M}) \quad \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t)),$$

où $\mathbf{d}x$ a été introduite dans la Définition 1.3.3.

Définition 3.1.1. Une solution PC^1 de (\mathcal{M}) est une fonction $u : I_0 \rightarrow U$ où I_0 est un sous-intervalle de $[a, b]$ t.q. $u \in PC^1(I_0, U; \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ et $\forall t \in I_0, \mathbf{d}u(t) = f(t, u(t))$.

Pour chaque $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, un problème de Cauchy pour (\mathcal{M}) est un système de la forme

$$(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)}) \quad \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 3.1.2. Une solution PC^1 du problème $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$ est une fonction $u : I \rightarrow U$ solution PC^1 de (\mathcal{M}) vérifiant $u(t_0) = x_0$.

Lemme 3.1.3. Pour tout $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, il existe $(\alpha, r, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $\kappa(\cdot) \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q., en notant $J_0 := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \cap I$ et $B := \overline{B}(x_0, r)$, on ait
 (i) $\forall t \in J_0, \forall x_1, x_2 \in B, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \kappa(t)\|x_1 - x_2\|$.
 (ii) $\forall (t, x) \in J_0 \times B, \|f(t, x)\| \leq M$.

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$.

Avec (H2), il existe $\kappa \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$, $J \in \mathcal{V}_{t_0}([a, b])$, $V \in \mathcal{V}_{x_0}(U)$ t.q.

$$\forall t \in J, \forall x_1, x_2 \in V, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \kappa(t)\|x_1 - x_2\|. \quad (3.1.1)$$

Puisque $J \in \mathcal{V}_{t_0}([a, b])$, on a : $\exists \alpha_1 > 0$ t.q. $[t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1] \cap [a, b] \subset J$.

Et puisque $V \in \mathcal{V}_{x_0}(U)$, on a : $\exists r_1 > 0$ t.q. $\overline{B}(x_0, r_1) \subset V$.

D'où, en utilisant (3.1.1), on a

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1] \cap [a, b], \forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r_1), \\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \kappa(t)\|x_1 - x_2\|. \end{array} \right\} \quad (3.1.2)$$

Raisonnons par disjonction des cas ; si $t_0 \neq \tau_i$ avec $i \in \{1, \dots, p\}$, puisque f est continue au point (t_0, x_0) , on a en particulier

$$\left. \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0, \forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \cap [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta_1), \\ \|f(t, x)\| \leq 1 + \|f(t, x_0)\| = M_1. \end{array} \right\} \quad (3.1.3)$$

En posant $\alpha := \min\{\delta_1, \alpha_1\}$, $r := \min\{\delta_1, r_1\}$, $M = M_1$ et en utilisant (3.1.2) et (3.1.3), on a à la fois (i) et (ii). Si $t_0 = \tau_i$, avec $i \in \{1, \dots, p\}$, puisque $f|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times U}$ est continue au point (t_0, x_0) , on a en particulier

$$\left. \begin{array}{l} \exists \delta_2 > 0, \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_2] \cap [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta_2), \\ \|f(t, x)\| \leq 1 + \|f(t, x_0)\|. \end{array} \right\} \quad (3.1.4)$$

Puisque $l = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0^- \\ x \rightarrow x_0}} f(t, x)$ existe dans E , on a

$$\left. \begin{array}{l} \exists \delta_3 > 0, \forall t \in [t_0 - \delta_3, t_0] \cap [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta_3), \\ \|f(t, x)\| \leq 1 + \|l\|. \end{array} \right\} \quad (3.1.5)$$

En posant $\alpha := \min\{\delta_2, \delta_3, \alpha_1\}$, $r := \min\{\delta_2, \delta_3, r_1\}$;

$M := \max\{1 + \|f(t, x_0)\|, 1 + \|l\|\}$ et en utilisant (3.1.2), (3.1.4) et (3.1.5), on a de nouveau à la fois (i) et (ii).

Ainsi, par disjonction des cas, on a démontré ce lemme. \square

Lemme 3.1.4. Soit J un sous-intervalle inclus dans $[a, b]$, soit $u \in C^0(J, U)$. Considérons la fonction $y : J \rightarrow E$, définie par, pour tout $t \in J$, $y(t) = f(t, u(t))$, alors $y \in PC^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J) \cap C_d^0(J, E)$.

Si, en plus, on suppose que $\sup J \in J$ implique $\sup J \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, alors $y \in NPC_d^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$.

Démonstration. Considérons la fonction $g : J \rightarrow \mathbb{R} \times E$, définie par, pour tout $t \in J$, $g(t) = (t, u(t))$. Puisque la fonction $[t \mapsto t] \in C^0(J, E)$ et $u \in C^0(J, E)$, on a

$$g \in C^0(J, \mathbb{R} \times E). \quad (3.1.6)$$

Remarquons que $y = f \circ g$. Posons $disc(y) := \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J$.

Si $disc(y) = \emptyset$ on a $J \subset I \setminus \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$.

Puisque $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub(I)$; il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ t.q. $J \subset]\tau_i, \tau_{i+1}[$, d'où $g(J) \subset]\tau_i, \tau_{i+1}[\times U$. Par conséquent, puisque $g \in C^0(J, \mathbb{R} \times E)$ et (H1), on a $y \in C^0(J, E)$. Donc en particulier $y \in NPC_d^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$.

Si $disc(y) \neq \emptyset$, notons que $disc(y) \subset J$ est un ensemble fini.

Soit $t \in J \setminus disc(y)$, puisque g est continue au point t et f est continue au point $g(t) = (t, u(t))$, on a, par composition de fonctions continues, y est continue au point t . Donc (a) est vérifiée.

Soit $t \in disc(y)$ et $t \neq \sup J$, il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ t.q. $t = \tau_i$. On a

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{s \rightarrow t+ \\ s \in J}} y(s) = & \lim_{\substack{s \rightarrow \tau_i \\ s \in]\tau_i, \min\{\tau_{i+1}, \sup J\}[}} f|_{] \tau_i, \min\{\tau_{i+1}, \sup J\}[\times U}(s, u(s)) = f(t, u(t)) = y(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

donc (b) est vérifiée.

Soit $t \in disc(y)$ et $t \neq \inf J$; il existe $i \in \{1, \dots, p+1\}$ t.q. $t = \tau_i$. On a

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{s \rightarrow t- \\ s \in J}} y(s) = & \lim_{\substack{s \rightarrow \tau_i \\ s \in] \min\{\tau_{i-1}, \inf J\}, \tau_i[}} f(s, u(s)) = f(t-, u(t-)) = y(t-). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Par conséquent $u \in PC^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$ et, en utilisant (3.1.7), on a $y \in C_d^0(J, E)$.

On suppose que $\sup J \in J$ implique $\sup J \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$.

Si $\sup J \notin J$, on a $y \in NPC_d^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$.

Si $\sup J \in J$, on a $\sup J \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$.

Raisonnons par disjonction des cas; si $\sup J \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}$, grâce à (a), $y(\sup J-) = y(\sup J)$.

Sinon $\sup J = b$, et on a, grâce à (3.1.8), $y(\sup J-) = y(b-) = f(b-, u(b-)) = f(b, u(b)) = y(b) = y(\sup J)$, donc $y \in NPC_d^0(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$. \square

Lemme 3.1.5. Soit J un sous-intervalle inclus dans I , soit $u \in PC^1(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$. Alors on a

$$\forall t \in J, \forall t_0 \in J, u(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{d}u(s) ds.$$

Démonstration. Soit $t \in J$ et $t_0 \in J$, si $t = t_0$, le résultat est vérifié car $u(t_0) = u(t)$. Si $t \neq t_0$ puisque $u \in PC^1(J, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap J)$, on a, en utilisant le Lemme 1.4.6, $u \in PC^1([\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap [\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}])$. Puisque $(t, t_0) \in [\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}]^2$ on a, d'après le Théorème 1.3.12,

$$u(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{d}u(s) ds.$$

\square

Proposition 3.1.6. Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, soit I_0 un sous-intervalle de \mathbb{R} et soit $u \in C^0(I_0, U)$. Considérons les conditions suivantes :

- (i) u est une solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.
- (ii) $\forall t \in I_0, u(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$.

Alors les assertions suivantes sont vraies :

- (a) (i) \Rightarrow (ii).
- (b) Si, de plus, $\sup I_0 \in I_0$ implique $\sup I_0 \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, alors (ii) \Rightarrow (i).

Démonstration. (a) Supposons (i).

Avec (i), on a $u \in PC^1(I_0, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ et

$$\forall t \in I_0, \mathbf{d}u(t) = f(t, u(t)) \text{ et } u(t_0) = x_0. \quad (3.1.9)$$

Puisque $u \in PC^1(I_0, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$, on a, en utilisant le Lemme 3.1.5,

$$\forall t \in I_0, u(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{d}u(s) ds. \quad (3.1.10)$$

Par conséquent en utilisant (3.1.9) et (3.1.10), on a

$$\forall t \in I_0, u(t) := u(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

(b) Supposons que $\sup I_0 \in I_0$ implique $\sup I_0 \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$. Supposons (ii).

Considérons la fonction $y : I_0 \rightarrow E$ définie par $y(t) := f(t, u(t))$ et la fonction $\psi : I_0 \rightarrow E$ définie par $\psi(t) := \int_{t_0}^t y(s) ds$. Puisque $u \in C^0(I_0, U)$, avec (H1), en utilisant le Lemme 3.1.4, on a $y \in NPC_d^0(I_0, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$.

Puisque $y \in NPC_d^0(I_0, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$, avec (ii), on a, d'après les Propositions 1.3.10 et 1.3.11,

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in I_0 \setminus \{\tau_i : 1 \leq i \leq p\}, u'(t) = y(t), \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{ t.q. } \tau_i \in I_0 \text{ et } \tau_i \neq \sup I_0, u'_d(\tau_i) = u'(\tau_i+) = y(\tau_i). \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{ t.q. } \tau_i \in I_0 \text{ et } \tau_i \neq \inf I_0, u'_g(\tau_i) = u'(\tau_i-) = y(\tau_i-). \\ \text{Si } \sup I_0 \in I_0, u'_g(\sup I_0) = u'(\sup I_0-) = y(\sup I_0). \end{array} \right\} \quad (3.1.11)$$

En utilisant (3.1.11), on a $u \in PC^1(I_0, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ et, $\forall t \in I_0, \mathbf{d}u(t) = f(t, u(t))$. De plus on a $u(t_0) = x_0$. Donc u est une solution PC^1 de $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$. \square

Dans le théorème suivant, dans le cadre des solutions PC^1 , on établit un théorème d'existence et d'unicité locale pour un problème de Cauchy.

Théorème 3.1.7. Théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf

Pour tout $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, il existe $(h, r_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ t.q. pour chaque $h_0 \in]0, h]$, en notant $I_0 = [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]$ et $B_0 := \overline{B}(x_0, r_0)$, il existe une unique solution $u_0 \in PC^1(I_0, B_0, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, d'après le Lemme 3.1.3, il existe $(\alpha, r, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $\kappa(\cdot) \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q., en notant $J_0 := [\max\{t_0 - \alpha, a\}, \min\{t_0 + \alpha, b\}]$ et $B := \overline{B}(x_0, r)$, on a

- (i) $\forall t \in J_0, \forall x_1, x_2 \in B, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \kappa(t) \|x_1 - x_2\|$.
- (ii) $\forall (t, x) \in J_0 \times B, \|f(t, x)\| \leq M$.

Montrons d'abord que :

$$\exists \beta > 0 \text{ t.q. } \forall \beta_0 \in]0, \beta], \min\{t_0 + \beta_0, b\} \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}. \quad (3.1.12)$$

En effet, raisonnons par disjonction des cas ;

si $t_0 = b$, posons $\beta = 1$; soit $\beta_0 \in]0, \beta]$, alors $\min\{t_0 + \beta_0, b\} = b \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$.

Si $t_0 \in [a, b[$, il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ t.q. $t_0 \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Posons $\beta = \frac{\tau_{i+1} - t_0}{2}$; si $\beta_0 \in]0, \beta]$, alors on a

$$\left. \begin{aligned} \tau_i < \min\{t_0 + \beta_0, b\} &\leq \min\{t_0 + \beta, b\} \\ &= \min\{t_0 + \frac{\tau_{i+1} - t_0}{2}, b\} \\ &= \min\{\frac{\tau_{i+1} + t_0}{2}, b\} \\ &= \frac{t_0 + \tau_{i+1}}{2} < \tau_{i+1}. \end{aligned} \right\}$$

Puisque $\kappa(\cdot) \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}([a, b]) \text{ t.q. } \mathbf{m}_1(\mathbf{B}) < \delta_\epsilon, \int_{\mathbf{B}} \kappa(t) d\mathbf{m}_1(t) < \epsilon. \quad (3.1.13)$$

En appliquant (3.1.13) avec $\epsilon = 1$, on a

$$\exists \delta_1 > 0, \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}([a, b]) \text{ t.q. } \mathbf{m}_1(\mathbf{B}) < \delta_1, \int_{\mathbf{B}} \kappa(t) d\mathbf{m}_1(t) < 1. \quad (3.1.14)$$

Posons $h := \min\{\frac{\delta_1}{3}, \alpha, \frac{r}{M}, \beta\}$ et $r_0 = r$.

Soit $h_0 \in]0, h]$. Posons $I_0 = [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]$ et $B_0 := B$. Notons $\mathcal{X} := C^0(I_0, B_0)$. Puisque $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $C^0(I_0, E)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach. De plus, B_0 étant un fermé de E , \mathcal{X} est un fermé de $(C^0(I_0, E), \|\cdot\|_\infty)$. Par conséquent, \mathcal{X} muni de la distance d_∞ , induite par $\|\cdot\|_\infty$, est un espace métrique complet.

Fixons $x \in \mathcal{X}$; en utilisant le Lemme 3.1.4 et (3.1.12), on a : $[t \mapsto f(t, x(t))] \in NPC_d^0(I_0, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$, donc en particulier c'est une fonction Riemann-intégrable sur I_0 . Par conséquent, on a, en utilisant la Proposition 1.3.9, $[t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds] \in C^0(I_0, E)$. On peut donc considérer l'opérateur

$$T : \mathcal{X} \rightarrow C^0(I_0, E), T(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Soit $x \in \mathcal{X}$, soit $t \in I_0$; alors on a :

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - x_0\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - x_0\| \\ &= \|\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds\| \\ &\leq |\int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds| \\ &\leq |t - t_0| M \text{ grâce à (ii)} \\ &\leq hM \\ &\leq \frac{r}{M} M = r; \end{aligned}$$

d'où $T(x) \in \mathcal{X}$. Par conséquent, on a

$$T(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}. \quad (3.1.15)$$

Posons $L := \int_{[\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]} \kappa(s) d\mathbf{m}_1(s) \in \mathbb{R}_+$.

Puisque $\mathbf{m}_1([\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]) = \min\{t_0 + h_0, b\} - \max\{t_0 - h_0, a\} \leq t_0 + h_0 - (t_0 - h_0) = 2h_0 < \delta_1$, on a, en utilisant (3.1.14),

$$L = \int_{[\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]} \kappa(s) d\mathbf{m}_1(s) < 1.$$

Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, soit $t \in I_0$; alors on a

$$\begin{aligned}
 \|T(x_1)(t) - T(x_2)(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))ds)\| \\
 &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))ds\| \\
 &= \|\int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))ds\| \\
 &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|ds \\
 &\leq \int_{\max\{t_0-h_0, a\}}^{\min\{t_0+h_0, b\}} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|ds \\
 &= \int_{\max\{t_0-h_0, a\}, \min\{t_0+h_0, b\}} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|d\mathbf{m}_1(s) \\
 &\leq \int_{\max\{t_0-h_0, a\}, \min\{t_0+h_0, b\}} \kappa(s) \|x_1(s) - x_2(s)\|d\mathbf{m}_1(s) \text{ grâce à (i)} \\
 &\leq \int_{\max\{t_0-h_0, a\}, \min\{t_0+h_0, b\}} \kappa(s) \|x_1 - x_2\|_\infty d\mathbf{m}_1(s) \\
 &= \|x_1 - x_2\|_\infty \int_{\max\{t_0-h_0, a\}, \min\{t_0+h_0, b\}} \kappa(s) d\mathbf{m}_1(s) \\
 &= L \|x_1 - x_2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Puisque $L \|x_1 - x_2\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{\|T(x_1)(t) - T(x_2)(t)\| : t \in I_0\}$, on a

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq L \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Par conséquent, on a prouvé que :

$$\exists L \in [0, 1[, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq L \|x_1 - x_2\|_\infty. \quad (3.1.16)$$

En utilisant (3.1.15) et (3.1.16), d'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, il existe un unique $u_0 \in \mathcal{X}$ t.q. $T(u_0) = u_0$, i.e. $\forall t \in I_0, u_0(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0(s))ds$. Ceci est équivalent, en utilisant la Proposition 3.1.6, à l'existence d'une unique solution $u_0 \in PC^1(I_0, B_0, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$. \square

Remarque 3.1.8. Notons que, pour chaque $h_0 \in]0, h]$, $\max I_0 = \min\{t_0 + h_0, b\} \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$.

Le Lemme suivant est un lemme de recollement des solutions.

Lemme 3.1.9. Soit $a_0 \in]a, b[$, I_1 et I_2 deux sous-intervalles de $[a, b]$ t.q. $\min I_2 = \max I_1 = a_0$ et si $\sup I_2 \in I_2$ alors $\sup I_2 \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$.

Soit $u_1 : I_1 \rightarrow U$ et $u_2 : I_2 \rightarrow U$ deux solutions PC^1 de $(\mathcal{C}_{(a_0, x_0)})$.

Alors la fonction $u : I_1 \cup I_2 \rightarrow U$ définie par

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{si } t \in I_1 \\ u_2(t) & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

est une solution PC^1 de $(\mathcal{C}_{(a_0, x_0)})$ sur $I := I_1 \cup I_2$.

Démonstration. Puisque I_1 et I_2 sont connexes et $I_1 \cap I_2 = \{a_0\} \neq \emptyset$, d'après le théorème 10.1.6 de [19], on a $I_1 \cup I_2$ est connexe. Par conséquent, $I_1 \cup I_2$ est un sous-intervalle de $[a, b]$. De plus, u est bien définie sur $I_1 \cup I_2$ car $u(a_0) = u_1(a_0) = u_2(a_0)$.

Puisque $u|_{I_1} = u_1$, $u|_{I_2} = u_2$, $u_1 \in C^0(I_1, U)$ et $u_2 \in C^0(I_2, U)$, on obtient que u est continue sur $I \setminus \{a_0\}$. De plus, puisque $u(a_0-) = u_1(a_0-) = u_1(a_0) = x_0$ et $u(a_0+) = u_2(a_0+) = u_2(a_0) = x_0$ i.e. $u(a_0+) = u(a_0-) = x_0$, u est continue au point a_0 . Par conséquent on a $u \in C^0(I, U)$.

Soit $t \in I$.

Si $t \in I_1$, en utilisant le Lemme 3.1.5, on obtient que $u_1(t) = x_0 + \int_{a_0}^t \mathbf{d}u_1(s)ds$. Et puisque, u_1 est une solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(a_0, x_0)})$, on a $u_1(t) = x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u_1(s))ds$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 u(t) = u_1(t) &= x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u_1(s)) ds \\
 &= x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u(s)) ds \text{ car } [t, a_0] \subset I_1.
 \end{aligned}$$

3.1. RÉSULTATS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES POUR LES SOLUTIONS PC^1

Si $t \in I_2$, puisque u_1 est une solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(a_0, x_0)})$ et $\sup I_2 \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, en utilisant la Proposition 3.1.6, on a $u_2(t) = x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u_2(s)) ds$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} u(t) = u_2(t) &= x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u_2(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u(s)) ds \text{ car } [a_0, t] \subset I_2. \end{aligned}$$

Donc, par disjonction des cas, on a prouvé que

$$\forall t \in I, u(t) = x_0 + \int_{a_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

De plus, si $\sup I = \sup I_2 \in I$ alors $\sup I \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, d'après la Proposition 3.1.6, on obtient que u est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(a_0, x_0)})$. \square

Définition 3.1.10. Une solution $u \in PC^1(I, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I)$ de (\mathcal{M}) , où I est un sous-intervalle de $[a, b]$, est dite solution non prolongeable PC^1 lorsque : pour toute $v \in PC^1(I_1, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_1)$ de (\mathcal{M}) , où I_1 est un sous-intervalle de $[a, b]$, si v est une solution PC^1 de (\mathcal{M}) t.q. $I \subset I_1$ et $v|_I = u$ alors $I_1 = I$.

Proposition 3.1.11. Soit $u \in PC^1(I, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I)$ une solution PC^1 non prolongeable de (\mathcal{M}) , où I est un sous-intervalle de $[a, b]$. Alors I est un intervalle ouvert de $[a, b]$.

Démonstration. Supposons que I n'est pas un intervalle ouvert de $[a, b]$ i.e. $\bar{t} := \max I$ existe et $\bar{t} \in [a, b[$ ou $\underline{t} = \min I$ existe et $\underline{t} \in]a, b]$.

Si $\bar{t} := \max I$ existe et $\bar{t} \in [a, b[$, posons $x_0 := u(\bar{t}) \in U$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf, il existe $h > 0$ t.q. $\underline{u} : [\max\{\bar{t} - h, a\}, \min\{\bar{t} + h, b\}] \rightarrow U$ est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(\bar{t}, x_0)})$.

Donc, en particulier, $\underline{u}|_{[\bar{t}, \min\{\bar{t} + h, b\}]}$ est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(\bar{t}, x_0)})$. Puisque u et $\underline{u}|_{[\bar{t}, \min\{\bar{t} + h, b\}]}$ sont solutions du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(\bar{t}, x_0)})$ et $\min\{\bar{t} + h, b\} \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, on obtient que, d'après le Lemme 3.1.9, la fonction $\bar{u} : I \cup [\bar{t}, \min\{\bar{t} + h, b\}] \rightarrow E$, définie par

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in I \\ \underline{u}(t) & \text{si } t \in [\bar{t}, \min\{\bar{t} + h, b\}], \end{cases}$$

est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(\bar{t}, x_0)})$.

Puisque $\bar{u}|_I = u$ et u est une solution PC^1 non prolongeable de (\mathcal{M}) , on a $I = I \cup [\bar{t}, \min\{\bar{t} + h, b\}]$. Ceci est absurde car $\min\{\bar{t} + h, b\} \notin I$.

Si $\underline{t} = \min I$ existe et $\underline{t} \in]a, b]$ par un raisonnement similaire on aboutit à une contradiction. Par conséquent, I est un intervalle ouvert de $[a, b]$. \square

Rappelons un énoncé classique.

Lemme 3.1.12. Lemme de Zorn. ([28] p.10-16) Soit \mathcal{U} un ensemble ordonné non vide.

Si l'ordre sur \mathcal{U} est inductif (i.e. toute partie totalement ordonné de \mathcal{U} est majorée) alors \mathcal{U} possède au moins un élément maximal.

Théorème 3.1.13. Soit $u \in PC^1(I, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I)$ solution PC^1 de (\mathcal{M}) , où I est un sous-intervalle de $[a, b]$. Alors u est la restriction d'une et une seule solution PC^1 non prolongeable de (\mathcal{M}) .

Démonstration. Soit \mathcal{U} l'ensemble des w solutions PC^1 de (\mathcal{M}) t.q. $I \subset \text{def}(w) \subset [a, b]$, $w|_I = u$ où $\text{def}(w)$ est le domaine de définition de w .

Nous munissons \mathcal{U} de la relation binaire \succeq définie par, pour chaque $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$,

$$w_1 \succeq w_2 \Leftrightarrow [\text{def}(w_1) \supset \text{def}(w_2) \text{ et } w_1 = w_2 \text{ sur } \text{def}(w_2)].$$

Prouvons que \succeq est une relation d'ordre sur \mathcal{U} .

Reflexive

Soit $w \in \mathcal{U}$; puisque $\text{def}(w) \supset \text{def}(w)$ et $w = w$ sur $\text{def}(w)$, on a $w \succeq w$.

Transitive

Soit $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{U}$ t.q. $w_1 \succeq w_2$ et $w_2 \succeq w_3$.

Puisque $\text{def}(w_1) \supset \text{def}(w_2)$ et $\text{def}(w_2) \supset \text{def}(w_3)$, on a $\text{def}(w_1) \supset \text{def}(w_3)$. Puisque $w_1 = w_2$ sur $\text{def}(w_2)$ et $w_2 = w_3$ sur $\text{def}(w_3)$, on a $w_1 = w_3$ sur $\text{def}(w_3)$.

Et puisque, $w_2 = w_3$ sur $\text{def}(w_3)$, on a $w_1 = w_3$ sur $\text{def}(w_3)$.

Donc $w_1 \succeq w_3$.

Anti-symétrique

Soit $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$ t.q. $w_1 \succeq w_2$ et $w_2 \succeq w_1$. Puisque $w_1 \succeq w_2$, on a $\text{def}(w_1) \supset \text{def}(w_2)$ et $w_1 = w_2$ sur $\text{def}(w_2)$. Et puisque, $w_2 \succeq w_1$, on a $\text{def}(w_2) \supset \text{def}(w_1)$ et $w_2 = w_1$ sur $\text{def}(w_1)$.

Par conséquent, on a $\text{def}(w_1) = \text{def}(w_2)$ et $w_1 = w_2$.

Existence

Soit $\mathcal{F} = (w_j)_{j \in J}$ une famille totalement ordonnée de \mathcal{U} .

Posons $L := \cup_{j \in J} \text{def}(w_j)$.

Puisque, $\forall j \in J$, $\text{def}(w_j)$ est connexe comme sous-intervalle de $[a, b]$ et $\emptyset \neq I \subset \cap_{j \in J} \text{def}(w_j)$, on a L est connexe donc, d'après le théorème 10.1.9 de [19], L est un intervalle de \mathbb{R} t.q. $I \subset L \subset [a, b]$.

Considérons la fonction $z : L \rightarrow U$, définie par : $\forall t \in L$, $z(t) = w_j(t)$ si $t \in \text{def}(w_j)$ avec $j \in J$.

z est une fonction bien définie sur L . En effet, si $t \in L$, il existe $j_0 \in J$ t.q. $t \in \text{def}(w_{j_0})$, donc $z(t) = w_{j_0}(t)$.

Si $t \in \text{def}(w_j)$ avec $j \in J$, $j_0 \neq j$; puisque \mathcal{F} est totalement ordonnée, on a $w_j \succeq w_{j_0}$ ou $w_{j_0} \succeq w_j$.

Si $w_j \succeq w_{j_0}$, on a $\text{def}(w_j) \supset \text{def}(w_{j_0})$ et $w_j = w_{j_0}$ sur $\text{def}(w_{j_0})$.

Par conséquent, $z(t) = w_{j_0}(t) = w_j(t)$.

Si $w_{j_0} \succeq w_j$, on a $\text{def}(w_{j_0}) \supset \text{def}(w_j)$ et $w_{j_0} = w_j$ sur $\text{def}(w_j)$.

Par conséquent, $z(t) = w_{j_0}(t) = w_j(t)$.

Soit $t \in \text{int}(\cup_{j \in J} \text{def}(w_j))$; il existe $r > 0$ t.q. $[t-r, t+r] \subset \cup_{j \in J} \text{def}(w_j)$. Puisque $t+r \in \cup_{j \in J} \text{def}(w_j)$ et $t-r \in \cup_{j \in J} \text{def}(w_j)$, il existe $(j_1, j_2) \in J^2$ t.q. $t+r \in \text{def}(w_{j_1})$ et $t-r \in \text{def}(w_{j_2})$. Puisque $\mathcal{F} = (w_j)_{j \in J}$ une partie totalement ordonnée de \mathcal{U} , on a $w_{j_1} \succeq w_{j_2}$ ou $w_{j_2} \succeq w_{j_1}$.

Si $w_{j_1} \succeq w_{j_2}$, on a $\text{def}(w_{j_1}) \supset \text{def}(w_{j_2})$, d'où $[t-r, t+r] \subset \text{def}(w_{j_1})$. Par conséquent $t \in \text{int}(\text{def}(w_{j_1})) \subset \cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j))$.

Si $w_{j_2} \succeq w_{j_1}$, on a $\text{def}(w_{j_2}) \supset \text{def}(w_{j_1})$, d'où $[t-r, t+r] \subset \text{def}(w_{j_2})$. donc $t \in \text{int}(\text{def}(w_{j_2})) \subset \cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j))$.

Ainsi, $\text{int}(\cup_{j \in J} \text{def}(w_j)) \subset \cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j))$.

De plus, puisque $\forall j \in J$, $\text{int}(\text{def}(w_j))$ est un ouvert de $[a, b]$, on a $\cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j))$ est un ouvert de $[a, b]$.

Et puisque $\cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j)) \subset \cup_{j \in J} \text{def}(w_j)$, on a $\cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j)) \subset \text{int}(\cup_{j \in J} \text{def}(w_j))$. Donc, on a

$$\text{int}(L) = \cup_{j \in J} \text{int}(\text{def}(w_j)). \quad (3.1.17)$$

Soit $t \in L$.

Si $t \in \text{int}(L)$, en utilisant (3.1.17), il existe $j \in J$ t.q. $t \in \text{int}(\text{def}(w_j))$. Puisque $z = w_j$ sur $\text{int}(\text{def}(w_j))$ et $w_j \in C^0(\text{int}(\text{def}(w_j)), U)$, on obtient que z est continue au point t .

3.1. RÉSULTATS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES POUR LES SOLUTIONS PC^1

Si $t = \sup L \in L$, il existe $j \in J$ t.q. $t \in \text{def}(w_j)$; par conséquent, $t \leq \sup \text{def}(w_j)$. Et puisque $L \supset \text{def}(w_j)$, on a $t \geq \sup \text{def}(w_j)$ donc $t = \sup \text{def}(w_j)$. Puisque $z = w_j$ sur $\text{def}(w_j)$ et $w_j \in C^0(\text{def}(w_j), U)$, z est continue au point t .

Si $t = \inf L \in L$, il existe $j \in J$ t.q. $t \in \text{def}(w_j)$; par conséquent, $t \geq \inf \text{def}(w_j)$. Et puisque $L \supset \text{def}(w_j)$, on a $t \leq \inf \text{def}(w_j)$ donc $t = \inf \text{def}(w_j)$. Puisque $z = w_j$ sur $\text{def}(w_j)$ et $w_j \in C^0(\text{def}(w_j), U)$, z est continue au point t . Par conséquent, on obtient

$$z \in C^0(L, U). \quad (3.1.18)$$

Soit $t, t_0 \in L$; puisque $t \in L$ et $t_0 \in L$, il existe $j \in J$ et $j_0 \in J$ t.q. $t \in \text{def}(w_j)$ et $t_0 \in \text{def}(w_{j_0})$.

Si $w_j \succeq w_{j_0}$, puisque $\text{def}(w_j) \supset \text{def}(w_{j_0})$, $(t, t_0) \in \text{def}(w_j)^2$. De plus, puisque w_j est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, w_j(t_0))})$, on a, d'après la Proposition 3.1.6, $w_j(t) = w_j(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w_j(s)) ds$. Et puisque $[\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}] \subset \text{def}(w_j)$, on a : $\forall s \in [\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}]$, $z(s) = w_j(s)$. Par conséquent, $z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$.

Si $w_{j_0} \succeq w_j$, par un raisonnement analogue, on a $z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$. Ainsi, on a démontré que

$$\forall t, t_0 \in L, z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds. \quad (3.1.19)$$

Avec (3.1.18), on a, en utilisant le Lemme 3.1.4, $y := [t \mapsto f(t, z(t))]$

$\in PC^0(L, E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap L) \cap C_d^0(L, E)$. Par conséquent, en utilisant (3.1.19), on a, d'après les Propositions 1.3.10 et 1.3.11,

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in L \setminus \{\tau_i : 1 \leq i \leq p\}, z'(t) = y(t), \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{ t.q. } \tau_i \in L \text{ et } \tau_i \neq \sup L, z'_d(\tau_i) = z'(\tau_i+) = y(\tau_i). \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{ t.q. } \tau_i \in L \text{ et } \tau_i \neq \inf L, z'_g(\tau_i) = z'(\tau_i-) = y(\tau_i-). \end{array} \right\} \quad (3.1.20)$$

En utilisant (3.1.20), on a $z \in PC^1(L, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap L)$.

Si $\sup L \in L$, il existe $j \in J$ t.q. $\sup L = \sup \text{def}(w_j)$. Puisque $z = w_j$ sur $\text{def}(w_j)$, on a

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{d}z(\sup L) = z'(\sup L-) = w'_j(\sup L-) \\ = \mathbf{d}w_j(\sup L) \\ = f(\sup L, w_j(\sup L)) \\ = f(\sup L, z(\sup L)). \end{array} \right\} \quad (3.1.21)$$

En utilisant (3.1.18), (3.1.20) et (3.1.21), on a

$$\forall t \in L, \mathbf{d}z(t) := f(t, z(t)). \quad (3.1.22)$$

Ainsi z est solution PC^1 de (\mathcal{M}) .

Soit $j \in J$; puisque $w_j \in \mathcal{U}$, on a $I \subset \text{def}(w_j)$ et $z|_I = w_j|_I = u$. Par conséquent, $z \in \mathcal{U}$. Soit $j \in J$; puisque $L \supset \text{def}(w_j)$ et $z|_{\text{def}(w_j)} = w_j$, on a $z \succeq w_j$. Donc z est un majorant de \mathcal{F} .

Ainsi, en utilisant le lemme de Zorn, il existe v un élément maximal de \mathcal{U} .

Soit x une solution PC^1 de (\mathcal{M}) t.q. $\text{def}(x) \supset \text{def}(v)$ et $x = v$ sur $\text{def}(v)$. On a donc $x \in \mathcal{U}$ et $x \succeq v$. Et puisque v est un élément maximal de \mathcal{U} , on a $x = v$. Donc $v \in \mathcal{U}$ est bien une solution PC^1 non prolongeable de (\mathcal{M}) t.q. $\text{def}(v) \supset I$ et $v = u$ sur I .

Unicité

Soit $v : K \rightarrow U$, $v_1 : K_1 \rightarrow U$ deux solutions non prolongeables de (\mathcal{M}) , où K et K_1 sont deux sous-intervalles de $[a, b]$, t.q. $K \supset I$, $K_1 \supset I$, $v|_I = v_1|_I = u$.

Soit $C := \{t \in K_1 \cap K : v(t) = v_1(t)\}$; comme v et v_1 sont continues sur $K_1 \cap K$ dans E et $\{0\}$ est un fermé de E , $C = (v - v_1)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $K \cap K_1$.

Soit $t_0 \in C$, $x_0 = v(t_0) = v_1(t_0)$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf, on a : $\exists h > 0, \exists r > 0$ t.q. $\forall h_0 \in]0, h], \exists ! u \in PC^1([\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}], \overline{B}(x_0, r), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\} \cap [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}])$ solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.

Puisque v et v_1 sont continues au point t_0 on peut choisir $\delta_r > 0$ t.q. $v([\max\{t_0 - \delta_r, a\}, \min\{t_0 + \delta_r, b\}]) \subset \overline{B}(x_0, r)$ et $v_1([\max\{t_0 - \delta_r, a\}, \min\{t_0 + \delta_r, b\}]) \subset \overline{B}(x_0, r)$.

Puisque K et K_1 sont ouverts de $[a, b]$, on a $K \cap K_1$ est ouvert dans $[a, b]$, il existe $\alpha > 0$ t.q. $[\max\{t_0 - \alpha, a\}, \min\{t_0 + \alpha, b\}] \subset K_1 \cap K$.

Prenons $h_0 = \min\{\delta_r, \alpha, h\} \in]0, h]$ et posons $I_0 = [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]$.

Puisque $v|_{I_0}$ et $v_1|_{I_0}$ sont dans $PC^1(I_0, \overline{B}(x_0, r), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p + 1\} \cap I_0)$ et sont solutions du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$, on a, par unicité, $v|_{I_0} = v_1|_{I_0}$.

D'où $[\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}] = [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \cap (K \cap K_1) \subset C$, donc C est un ouvert de $K \cap K_1$.

Puisque $\emptyset \neq I \subset C$, on a

$$C = K \cap K_1. \quad (3.1.23)$$

Puisque K_1 et K sont connexes et $\emptyset \neq K \cap K_1$, $K \cup K_1$ est connexe donc c'est un intervalle de $[a, b]$. Considérons la fonction $w : K \cup K_1 \rightarrow U$ définie par

$$w(t) := \begin{cases} v(t) & \text{si } t \in K \\ v_1(t) & \text{si } t \in K_1. \end{cases}$$

Avec (3.1.23), w est une fonction bien définie sur $K_1 \cup K$ dans U .

Soit $t \in K \cup K_1$; raisonnons par disjonction des cas. Si $t \in K$, puisque $w = v$ sur K et $v \in C^0(K, U)$, on a : w est continue au point t .

Si $t \in K_1$, puisque $w = v_1$ sur K_1 et $v_1 \in C^0(K_1, U)$, on a : w est continue au point t .

Par conséquent, w est continue au point t . On a prouvé

$$w \in C^0(K \cup K_1, U). \quad (3.1.24)$$

Puisque $\emptyset \neq I \subset K \cap K_1$, il existe $t_0 \in I$ t.q. $t_0 \in K \cap K_1$.

Posons $x_0 = u(t_0)$; puisque $v|_I = v_1|_I = u$, on a $x_0 = v(t_0) = v_1(t_0)$.

Soit $t \in K \cup K_1$; raisonnons par disjonction des cas.

Si $t \in K$, puisque K est connexe, on a $[\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}] \subset K$.

Donc, $\forall s \in [\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}]$, $w(s) = v(s)$ d'où :

$$w(t) = v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds = w(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds.$$

Si $t \in K_1$, puisque K_1 est connexe, on a $[\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}] \subset K_1$.

Donc, $\forall s \in [\min\{t, t_0\}, \max\{t, t_0\}]$, $w(s) = v_1(s)$ d'où :

$w(t) = v_1(t) = v_1(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, v_1(s)) ds = w(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds$. Donc par disjonction des cas, on a démontré

$$w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds.$$

Par conséquent, on a démontré que

$$\forall t \in K \cup K_1, w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds. \quad (3.1.25)$$

Puisque $K \cup K_1$ est un ouvert de $[a, b]$, avec (3.1.24) et (3.1.25), en utilisant la Proposition 3.1.6, on obtient que w est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$, en particulier w est solution

PC^1 de (\mathcal{M}) .

Puisque $K \cup K_1 \supset K$ et $w|_K = v$, on a $w = v$. Et puisque $K \cup K_1 \supset K_1$ et $w|_{K_1} = v_1$, on a $w = v_1$. Par conséquent, on obtient $v = v_1$. \square

Dans le théorème suivant, on prouve qu'il existe une unique solution PC^1 non prolongeable pour un problème de Cauchy.

Théorème 3.1.14. Existence et unicité globale. *Pour tout $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, le problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$ admet une unique solution PC^1 non prolongeable u , i.e. u est une solution PC^1 non prolongeable de (\mathcal{M}) t.q. $u(t_0) = x_0$.*

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$.

Existence. D'après le Théorème 3.1.7, il existe $h > 0$ et $u_0 : [\max\{t_0 - h, a\}, \min\{t_0 + h, b\}] \rightarrow U$ solution PC^1 de $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$ sur $[\max\{t_0 - h, a\}, \min\{t_0 + h, b\}]$, et par le Théorème 3.1.13, il existe une solution PC^1 non prolongeable u de (\mathcal{M}) qui prolonge u_0 . En particulier $u(t_0) = x_0$. Donc u est une solution PC^1 non prolongeable de $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.

Unicité. Soit $u \in PC^1(I, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I)$ et $u_1 \in PC^1(I_1, U, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_1)$ deux solutions PC^1 non prolongeables de $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$ i.e. $t_0 \in I \cap I_1$. En utilisant le Théorème 3.1.7, $\exists h > 0, r > 0$ t.q. $\forall h_0 \in]0, h], \exists! u_0 \in PC^1([\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}], \overline{B}(x_0, r), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}])$. Puisque u et u_1 sont des solutions PC^1 non prolongeables de $(\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$, on a $x_0 = u(t_0) = u_1(t_0)$. Puisque u et u_1 sont continues au point t_0 , on a $\exists \alpha > 0$ t.q. $[\max\{t_0 - \alpha, a\}, \min\{t_0 + \alpha, b\}] \subset I \cap I_1$ car $I \cap I_1$ et $u([\max\{t_0 - \alpha, a\}, \min\{t_0 + \alpha, b\}]) \subset \overline{B}(x_0, r)$ et $u_1([\max\{t_0 - \alpha, a\}, \min\{t_0 + \alpha, b\}]) \subset \overline{B}(x_0, r)$.

Posons $h_0 := \min\{\alpha, h\} \in]0, h]$, posons $I_0 := [\max\{t_0 - h_0, a\}, \min\{t_0 + h_0, b\}]$. Puisque $u|_{I_0} \in PC^1(I_0, \overline{B}(x_0, r), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$, et $u_1|_{I_0} \in PC^1(I_0, \overline{B}(x_0, r), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\} \cap I_0)$ sont des solutions PC^1 du même problème de Cauchy, par unicité, on a $u|_{I_0} = u_1|_{I_0} = u_0$.

Ainsi, u et u_1 sont deux solutions PC^1 non prolongeables qui prolongent u_0 . Donc d'après le Théorème 3.1.13, on a $u = u_1$. \square

3.2 Équations différentielles ordinaires linéaires

Dans cette section, on établit des résultats essentiels sur les équations différentielles ordinaires linéaires à solutions PC^1 . De plus, on introduit la notion de résolvante, puis on fournit les propriétés fondamentales de cette notion. Enfin, on établit la formule de variations des constantes qui donne une relation entre la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy linéaire et la résolvante du problème linéaire homogène associé. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

Soit $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1} \in Sub([a, b])$. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Soit $A(\cdot) \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et $B(\cdot) \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$.

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(\mathcal{LM}) \quad \mathbf{d}x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t)$$

et pour chaque $(t_0, x_0) \in [a, b] \times E$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{LC}_{(t_0, x_0)}) \quad \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Considérons la fonction $F : [a, b] \times E \rightarrow E$ définie par $F(t, x) := A(t) \cdot x + B(t)$.

Proposition 3.2.1. *F vérifie (H1) et il existe $L > 0$ t.q. F est L -lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.*

Démonstration. Considérons les fonctions $\pi_1 : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(t, x) := t$, $\pi_2 : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ définie par $\pi_2(t, x) := x$ et l'opérateur $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(E, E) \times E \rightarrow E$ défini par $\mathcal{Q}(l, x) := l \cdot x$. Puisque $\pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R})$ et $\pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, E)$, on a

$$\underline{\pi}_1 := \pi_1|_{[a, b] \times E} \in C^0([a, b] \times E, [a, b]) \text{ et } \underline{\pi}_2 := \pi_2|_{[a, b] \times E} \in C^0([a, b] \times E, E). \quad (3.2.1)$$

De plus, $\mathcal{Q} \in C^0(\mathcal{L}(E, E) \times E, E)$.

Notons que

$$F = \mathcal{Q} \circ (A \circ \underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2) + B \circ \underline{\pi}_1. \quad (3.2.2)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$.

En utilisant (3.2.2), on a

$$F|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E} = \mathcal{Q} \circ (A \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}, \underline{\pi}_2|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}) + B \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}. \quad (3.2.3)$$

Avec (3.2.1), $A(\cdot) \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et $B(\cdot) \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$, on a, par composition des fonctions continues, $A \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, \mathcal{L}(E, E))$ et $B \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times E, E)$. Donc on a

$$(A \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}, \underline{\pi}_2|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}) \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times E, \mathcal{L}(E, E) \times E).$$

Puisque $\mathcal{Q} \in C^0(\mathcal{L}(E, E) \times E, E)$, par composition de fonctions continues, on a

$$\mathcal{Q} \circ (A \circ \underline{\pi}_1|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}, \underline{\pi}_2|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E}) \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times E, E).$$

Par conséquent, comme somme de fonctions continues, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, F|_{[\tau_i, \tau_{i+1}] \times E} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[\times E, E). \quad (3.2.4)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p+1\}$, soit $x \in E$. Soit $(t_n) \in]\tau_{i-1}, \tau_i[^\mathbb{N}$ t.q. $t_n \rightarrow \tau_i$ ($n \rightarrow +\infty$), soit $(x_n) \in E^\mathbb{N}$ t.q. $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow +\infty$).

Notons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(t_n, x_n) = \mathcal{Q}(A(t_n), x_n) + B(t_n).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(t_n) = A(\tau_i-) \in \mathcal{L}(E, E)$, on a, par continuité de \mathcal{Q} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{Q}(A(t_n), x_n) = \mathcal{Q}(A(\tau_i-), x).$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(t_n) = B(\tau_i-)$, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n, x_n) = \mathcal{Q}(A(\tau_i-), x) + B(\tau_i-).$$

Par conséquent, en utilisant la caractérisation séquentielle des limites, on a démontré que

$$\forall i \in \{1, \dots, p+1\}, \forall x \in E, \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i- \\ z \rightarrow x}} F(t, z) = A(\tau_i-) \cdot x + B(\tau_i-). \quad (3.2.5)$$

Puisque $A(b-) = A(b)$, $B(b-) = B(b)$, on a, en utilisant (3.2.5),

$$\forall x \in E, \lim_{\substack{t \rightarrow b- \\ z \rightarrow x}} F(t, z) = A(b) \cdot x + B(b).$$

Par conséquent on a

$$F_{|_{[\tau_p, b] \times E}} \in C^0([\tau_p, b] \times E, E). \quad (3.2.6)$$

En utilisant, (3.2.4), (3.2.5) et (3.2.6), on obtient que F vérifie (H1). Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times E$.

Puisque $A(\cdot) \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$, on a $L := \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}} < +\infty$.

Soit $(t, x_1, x_2) \in [a, b] \times E \times E$; on a

$$\begin{aligned} \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| &= \|A(t) \cdot x_1 + B(t) - (A(t) \cdot x_2 + B(t))\| \\ &= \|A(t) \cdot x_1 + B(t) - A(t) \cdot x_2 - B(t)\| \\ &= \|A(t) \cdot x_1 - A(t) \cdot x_2\| \\ &\leq L \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall t \in [a, b], \forall (x_1, x_2) \in E^2, \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|. \quad (3.2.7)$$

Par conséquent, F est L -lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. \square

Remarque 3.2.2. *Puisque F est L -lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on a : F vérifie (H2).*

Dans la proposition suivante, on introduit une norme de Bielecki sur $C^0([a, b], E)$. On peut trouver un exemple d'une norme de Bielecki sur $C^0([0, b], \mathbb{R})$ dans [20].

Proposition 3.2.3. *Soit $t_0 \in [a, b]$ et $L_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonctionnelle*

$$\|\cdot\|_{e, \infty} := \left(\begin{array}{ll} C^0([a, b], E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| \end{array} \right).$$

Alors $\|\cdot\|_{e, \infty}$ est une norme sur $C^0([a, b], E)$.

Démonstration. (i) Soit $x \in C^0([a, b], E)$. Pour tout $t \in [a, b]$, $\exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| \geq 0$ donc

$$\|x\|_{e, \infty} = \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| \geq 0.$$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0([a, b], E)$, alors

$$\|\lambda x\|_{e, \infty} = \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|t - t_0|) \|\lambda x(t)\| = |\lambda| \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| = |\lambda| \|x\|_{e, \infty}.$$

(iii) $\|0\|_{e, \infty} = 0$ et soit $x \in C^0([a, b], E)$;

$$\begin{aligned} &\|x\|_{e, \infty} = 0 \\ \Rightarrow &\forall t \in [a, b], \exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| = 0 \\ \Rightarrow &\forall t \in [a, b], \|x(t)\| = 0 \\ \Rightarrow &\forall t \in [a, b], x(t) = 0 \\ \Rightarrow &x = 0. \end{aligned}$$

(iv) Soit $x, y \in C^0([a, b], E)$. Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$\exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t) + y(t)\| \leq \exp(-L_0|t - t_0|) \|x(t)\| + \exp(-L_0|t - t_0|) \|y(t)\| \leq \|x\|_{e, \infty} + \|y\|_{e, \infty}.$$

Puisque le sup est le plus petit des majorants, on a

$$\|x + y\|_{e, \infty} \leq \|x\|_{e, \infty} + \|y\|_{e, \infty}.$$

\square

Lemme 3.2.4. *Les normes $\|\cdot\|_{e,\infty}$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.*

Démonstration. Puisque $\forall t \in [a, b]$, $\exp(-L_0|t - t_0|) \leq 1$, on a

$$\forall t \in [a, b], \exp(-L_0|t - t_0|)\|x(t)\| \leq \|x(t)\|.$$

Par passage au supremum, on a

$$\|x\|_{e,\infty} \leq \|x\|_\infty. \quad (3.2.8)$$

Puisque $[t \mapsto \exp(-L_0t)]$ est une fonction décroissante sur \mathbb{R} , on a

$$\forall t \in [a, b], \exp(-L_0|t - t_0|) \geq \exp(-L_0|b - a|).$$

D'où

$$\forall t \in [a, b], \exp(-L_0|t - t_0|)\|x(t)\| \geq \exp(-L_0|b - a|)\|x(t)\|.$$

Par passage au supremum, on a

$$\sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|t - t_0|)\|x(t)\| \geq \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L_0|b - a|)\|x(t)\|.$$

Puisque $\exp(-L_0|b - a|) > 0$, on obtient

$$\|x\|_{e,\infty} \geq \exp(-L_0|b - a|)\|x\|_\infty. \quad (3.2.9)$$

Ainsi, en utilisant (3.2.8) et (3.2.9), on a

$$\exp(-L_0|b - a|)\|x\|_\infty \leq \|x\|_{e,\infty} \leq \|x\|_\infty.$$

□

Dans la suite, pour chaque $(t_0, x_0) \in [a, b] \times U$, nous noterons $u(t, t_0, x_0)$ la valeur à l'instant t (si elle est définie) de la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy

$$(\mathcal{L}\mathcal{C}_{t_0, x_0}) \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

et $I(t_0, x_0)$ domaine de définition de $u(\cdot, t_0, x_0)$.

Théorème 3.2.5. *Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times E$, $u(\cdot, t_0, x_0)$ est définie sur $[a, b]$. i.e. $I(t_0, x_0) = [a, b]$.*

Démonstration. En utilisant la Proposition 3.2.1, on a

$$\exists L > 0, \forall t \in [a, b], \forall x_1, x_2 \in E, \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|. \quad (3.2.10)$$

Considérons la norme de Bielecki, $\|\cdot\|_{e,\infty} : C^0([a, b], E) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $x \in C^0([a, b], E)$, $\|x\|_{e,\infty} = \sup_{t \in [a, b]} \exp(-L|t - t_0|)\|x(t)\|$.

Puisque E est un espace de Banach, $(C^0([a, b], E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Ainsi en utilisant le Lemme 3.2.4, $(C^0([a, b], E), \|\cdot\|_{e,\infty})$ est aussi un espace de Banach.

Considérons l'opérateur $\Phi : C^0([a, b], E) \rightarrow C^0([a, b], E)$ défini par

$$\forall x \in C^0([a, b], E), \forall t \in [a, b], \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds.$$

Soit $(x_1, x_2) \in C^0([a, b], E)^2$. Soit $t \in [a, b]$.

Si $t \geq t_0$, on a

$$\begin{aligned}
 \|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x_1(s))ds - (x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x_2(s))ds)\| \\
 &= \|\int_{t_0}^t F(s, x_1(s))ds - \int_{t_0}^t F(s, x_2(s))ds\| \\
 &= \|\int_{t_0}^t (F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s)))ds\| \\
 &\leq \int_{t_0}^t \|F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))\|ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L\|x_1(s) - x_2(s)\|ds \quad (3.2.10).
 \end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned}
 &\exp(-L(t - t_0))\|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\| \\
 &\leq \exp(-L(t - t_0)) \int_{t_0}^t L\|x_1(s) - x_2(s)\|ds \\
 &= \exp(-L(t - t_0))L \int_{t_0}^t \exp(L(s - t_0)) \exp(-L(s - t_0))\|x_1(s) - x_2(s)\|ds \\
 &\leq \exp(-L(t - t_0))L \int_{t_0}^t \exp(L(s - t_0))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty} ds \\
 &= \|x_1 - x_2\|_{e,\infty} \exp(-L(t - t_0))L \int_{t_0}^t \exp(L(s - t_0))ds \\
 &= \|x_1 - x_2\|_{e,\infty} \exp(-L(t - t_0))L \left(\frac{\exp(L(t-t_0)) - \exp(0)}{L} \right) \\
 &= (1 - \exp(-L(t - t_0)))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty} \\
 &\leq (1 - \exp(-L(b - a)))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty}.
 \end{aligned}$$

De même, si $t < t_0$ on a

$$\exp(-L(t_0 - t))\|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\| \leq (1 - \exp(-L(b - a)))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty}.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [a, b], \exp(-L|t - t_0|)\|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t)\| \leq (1 - \exp(-L(b - a)))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty}.$$

Par passage au supremum, on a

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{e,\infty} \leq (1 - \exp(-L(b - a)))\|x_1 - x_2\|_{e,\infty}.$$

Puisque $1 - \exp(-L(b - a)) \in [0, 1[$, Φ est contractante de $(C^0([a, b], E), \|\cdot\|_{e,\infty})$ dans $(C^0([a, b], E), \|\cdot\|_{e,\infty})$. Ainsi d'après le théorème de point fixe de Banach-Picard, on a

$$\exists! \bar{u} \in C^0([a, b], E), \Phi(\bar{u}) = \bar{u}$$

i.e.

$$\exists! \bar{u} \in C^0([a, b], E), \forall t \in [a, b], \bar{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \bar{u}(s))ds.$$

En utilisant la Proposition 3.1.6, \bar{u} est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 3.1.14, on a $u(\cdot, t_0, x_0) = \bar{u}$ d'où $[a, b] = I(t_0, x_0)$. \square

Considérons maintenant l'équation différentielle linéaire homogène

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}) \quad \mathbf{d}x(t) = A(t) \cdot x(t)$$

i.e. le cas où B est la fonction identiquement nulle. Pour chaque $s \in [a, b]$, notons $R(\cdot, s)$ est la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy.

$$(\mathcal{C}_{s, Id_E}) := \begin{cases} \mathbf{d}X(t) = A(t) \circ X(t) \\ X(s) = Id_E. \end{cases}$$

Définition 3.2.6. La résolvante de $(\mathcal{L}\mathcal{H})$ est la fonction $R(\cdot, \cdot) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$.

Théorème 3.2.7. La fonction $R(\cdot, \cdot)$ est bien définie de $[a, b]^2$ dans $\mathcal{L}(E, E)$.

Démonstration. Soit $s \in [a, b]$, posons $\mathfrak{F} = \mathcal{L}(E, E)$. Puisque E est un espace de Banach, \mathfrak{F} est un espace de Banach. Posons $x_0 = Id_E$.

Pour chaque $t \in [a, b]$, considérons la fonction $\mathcal{A}(t) := [X \mapsto A(t) \circ X]$ définie de \mathfrak{F} dans \mathfrak{F} . Soit $t \in [a, b]$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(X_1, X_2) \in \mathfrak{F}$; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) \cdot (\lambda X_1 + X_2) &= A(t) \circ (\lambda X_1 + X_2) \\ &= \lambda A(t) \circ X_1 + A(t) \circ X_2 \\ &= \lambda \mathcal{A}(t) \cdot X_1 + \mathcal{A}(t) \cdot X_2. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $X \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(t) \cdot X\|_{\mathfrak{F}} &= \|A(t) \circ X\|_{\mathfrak{F}} \\ &\leq \|A(t)\|_{\mathfrak{F}} \|X\|_{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\mathcal{A} : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ est bien définie.

Posons, pour chaque $t \in [a, b]$ et $X \in \mathfrak{F}$, $F(t, X) = \mathcal{A}(t) \cdot X$.

Ainsi, pour appliquer le Théorème 3.2.5, il suffit de montrer que

$\mathcal{A} \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$.

Soit $t, t' \in [a, b]$, soit $X \in \mathfrak{F}$; on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t')) \cdot X\|_{\mathfrak{F}} &= \|\mathcal{A}(t) \cdot X - \mathcal{A}(t') \cdot X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|A(t) \circ X - A(t') \circ X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|(A(t) - A(t')) \circ X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|A(t) - A(t')\|_{\mathfrak{F}} \|X\|_{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a prouvé que

$$\forall t, t' \in [a, b], \|\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t')\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} \leq \|A(t) - A(t')\|_{\mathfrak{F}}. \quad (3.2.11)$$

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$, soit $(t, t') \in [\tau_i, \tau_{i+1}]^2$. En utilisant (3.2.11), on a

$$\|\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t) - \mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t')\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} \leq \|A|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t) - A|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t')\|_{\mathfrak{F}}.$$

Puisque $A|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, \mathfrak{F})$, on a $\lim_{t \rightarrow t'} \|A|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t) - A|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t')\|_{\mathfrak{F}} = 0$. Par conséquent, on a

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t) - \mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[}(t')\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} = 0.$$

Par conséquent,

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}[} \in C^0([\tau_i, \tau_{i+1}[, \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})). \quad (3.2.12)$$

Soit $i \in \{1, \dots, p+1\}$. Considérons la fonction $l_i : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ définie par $l_i \cdot X = A(\tau_i -) \circ X \in \mathfrak{F}$ car $A(\tau_i -) \in \mathcal{L}(E, E)$.

Soit $t \in]\tau_{i-1}, \tau_i[$, soit $X \in \mathfrak{F}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(t) - l_i) \cdot X\|_{\mathfrak{F}} &= \|\mathcal{A}(t) \cdot X - l_i \cdot X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|A(t) \circ X - A(\tau_i -) \circ X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|(A(t) - A(\tau_i -)) \circ X\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \|A(t) - A(\tau_i -)\|_{\mathfrak{F}} \|X\|_{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\mathcal{A}(t) - l_i\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} \leq \|A(t) - A(\tau_i -)\|_{\mathfrak{F}}.$$

3.2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES

Puisque $\lim_{t \rightarrow \tau_i^-} \|A(t) - A(\tau_i)\|_{\mathfrak{F}} = 0$, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, p+1\}, \lim_{t \rightarrow \tau_i^-} \|\mathcal{A}(t) - l_i\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} = 0. \quad (3.2.13)$$

Puisque $A(\tau_{p+1}^-) = A(\tau_{p+1})$, on a $l_{p+1} = \mathcal{A}(\tau_{p+1})$.
Par conséquent, en utilisant (3.2.13), on a

$$\lim_{t \rightarrow \tau_{p+1}} \|\mathcal{A}(t) - l_{p+1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})} = 0. \quad (3.2.14)$$

Ainsi, en utilisant (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14), on a

$$\mathcal{A} \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}).$$

Donc, en utilisant le Théorème 3.2.5, on obtient que $R(\cdot, s)$ est définie sur $[a, b]$ tout entier.
Ainsi, $R(\cdot, \cdot)$ est bien définie sur $[a, b]^2$. \square

Théorème 3.2.8. Soit $t_0, t_1 \in [a, b]$; on a

$$\forall t \in [a, b], R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0).$$

Démonstration. Soit $t \in [a, b]$. Puisque $R(\cdot, t_1)$ est la solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_1, Id_E})$, en utilisant la Proposition 3.1.6, on a

$$\begin{aligned} R(t, t_1) &= Id_E + \int_{t_1}^t A(s) \circ R(s, t_1) ds, \text{ donc} \\ R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0) &= (Id_E + \int_{t_1}^t A(s) \circ R(s, t_1) ds) \circ R(t_1, t_0) \\ &= Id_E \circ R(t_1, t_0) + \left(\int_{t_1}^t A(s) \circ R(s, t_1) ds \right) \circ R(t_1, t_0) \\ &= R(t_1, t_0) + \left(\int_{t_1}^t A(s) \circ R(s, t_1) ds \right) \circ R(t_1, t_0). \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur $T : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ défini par $T(X) = X \circ R(t_1, t_0)$.

Puisque $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, E), \mathcal{L}(E, E))$ et $[s \mapsto A(s) \circ R(s, t_1)]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, en utilisant la proposition III, p. 198 de [35], on a

$$T\left(\int_{t_1}^t A(s) \circ R(s, t_1) ds\right) = \int_{t_1}^t T(A(s) \circ R(s, t_1)) ds.$$

Par conséquent, on a

$$R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0) + \int_{t_0}^t A(s) \circ R(s, t_1) \circ R(t_1, t_0) ds.$$

Ainsi, $R(\cdot, t_1) \circ R(t_1, t_0)$ est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_1, R(t_1, t_0)})$. Et puisque $R(\cdot, t_0)$ est aussi solution PC^1 du problème du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_1, R(t_1, t_0)})$, on a, par unicité,

$$\forall t \in [a, b], R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0).$$

\square

Théorème 3.2.9. Les assertions suivantes sont vraies :

- (i) $\forall t_1, t_2 \in [a, b], R(t_2, t_1) = R(t_1, t_2)^{-1}$.
- (ii) $\forall t, t_0 \in [a, b], R(t, t_0) \in Isom(E, E)$.

(iii) $R(\cdot, \cdot) \in C^0([a, b]^2, \mathcal{L}(E, E))$.

(iv) Pour chaque $t \in [a, b]$, $R(t, \cdot) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\forall s \in [a, b], \mathbf{d}_2 R(t, s) = -R(t, s) \circ A(s)$$

où $\mathbf{d}_2 R(t, s) = \mathbf{d}R(t, \cdot)(s)$.

Démonstration. (i)

Soit $t_1, t_2 \in [a, b]$; en utilisant le Théorème 3.2.8, on a

$$R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_2) = R(t_2, t_2) = Id_E,$$

et

$$R(t_1, t_2) \circ R(t_2, t_1) = R(t_1, t_1) = Id_E.$$

Donc, on a

$$R(t_2, t_1) = R(t_1, t_2)^{-1}.$$

(ii)

Soit $(t, t_0) \in [a, b]$; on a $R(t, t_0) = R(t_0, t)^{-1}$. Puisque $R(t, t_0) \in \mathcal{L}(E, E)$, $R(t_0, t) \in \mathcal{L}(E, E)$ et $R(t, t_0)$ est bijective d'inverse $R(t_0, t)$, on a $R(t, t_0) \in Isom(E, E)$.

(iii)

Soit $t_0 \in [a, b]$, soit $(s, t) \in [a, b]^2$; on a

$$\begin{aligned} R(t, s) &= R(t, t_0) \circ R(t_0, s) \text{ grâce au Théorème 3.2.8} \\ &= R(t, t_0) \circ (R(s, t_0))^{-1}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\forall (s, t) \in [a, b]^2, R(t, s) = R(t, t_0) \circ (R(s, t_0))^{-1}. \quad (3.2.15)$$

Considérons les fonctions $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, $\pi_1(t, s) := t$, et $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, $\pi_2(t, s) := s$, et $L : Isom(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ définie par $L(T) = T^{-1}$, et $\mathbf{X} : \mathcal{L}(E, E)^2 \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$, définie par, $\mathbf{X}(X_1, X_2) = X_1 \circ X_2$.

En utilisant (3.2.15), on a

$$R(\cdot, \cdot) = \mathbf{X} \circ (R(\cdot, t_0) \circ \pi_{1|[a,b]}, L \circ R(\cdot, t_0) \circ \pi_{2|[a,b]}). \quad (3.2.16)$$

Puisque $\pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on a

$$\pi_{1|[a,b]} \in C^0([a, b]^2, [a, b]) \text{ et } \pi_{2|[a,b]} \in C^0([a, b]^2, [a, b]).$$

Par ailleurs, $L \in C^0(Isom(E, E), \mathcal{L}(E, E))$ d'après [14] (théorème 1.7.3 p.23) et $\mathbf{X} \in C^0(\mathcal{L}(E, E)^2, \mathcal{L}(E, E))$.

Ainsi, en utilisant le fait que

$$R(\cdot, t_0) \in C^0([a, b], \mathcal{L}(E, E)) \text{ et } L \in C^0(Isom(E, E), \mathcal{L}(E, E)),$$

on a, par composition de fonctions continues,

$$\mathbf{X} \circ (R(\cdot, t_0) \circ \pi_{1|[a,b]}, L \circ R(\cdot, t_0) \circ \pi_{2|[a,b]}) \in C^0([a, b]^2, \mathcal{L}(E, E)).$$

Donc, en utilisant l'assertion (3.2.15), on a

$$R(\cdot, \cdot) \in C^0([a, b]^2, \mathcal{L}(E, E)).$$

(iv)

Soit $t \in [a, b]$. Avec (ii), on a

$$R(t, \cdot) = L \circ R(\cdot, t).$$

Par conséquent, puisque $L \in C^1(\text{Isom}(E, E), \mathcal{L}(E, E))$ grâce au théorème 2.4.4 de [14] (p.34) et $R(t, \cdot) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$, en utilisant le Lemme 1.3.13, on a $R(\cdot, t) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\begin{aligned} \forall s \in [a, b], \mathbf{d}R(t, \cdot)(s) &= D_FL(R(s, t)) \cdot \mathbf{d}R(\cdot, t)(s) \\ &= -R(s, t)^{-1} \circ \mathbf{d}R(\cdot, t)(s) \circ R(s, t)^{-1} \\ &= -R(s, t)^{-1} \circ A(s) \circ R(s, t) \circ R(s, t)^{-1} \\ &= -R(t, s) \circ A(s). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\forall s \in [a, b], \mathbf{d}_2 R(t, s) = -R(t, s) \circ A(s).$$

□

Dans le théorème suivant, on établit la formule de variation des constantes. Cette formule nous donne une relation entre la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy ($\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)}$) et la résolvante R .

Théorème 3.2.10. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(a) $\forall \alpha \in [a, b], [s \mapsto R(\alpha, s) \cdot B(s)] \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$.

(b) (Formule de variation des constantes). Soit $(t_0, x_0) \in [a, b] \times E$, la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy ($\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)}$) est donnée par

$$\forall t \in [a, b], y(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) \cdot B(s) ds.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur bilinéaire continu $T : \mathcal{L}(E, E) \times E \rightarrow E$, défini par, pour chaque $(l, x) \in \mathcal{L}(E, E) \times E$, $T(l, x) = l \cdot x$.

Soit $\alpha \in [a, b]$.

Puisque $B \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et $R(\alpha, \cdot) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E), \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ grâce à (iv) du Théorème 3.2.9, on a, en utilisant la Proposition 1.1.9,

$$(R(\alpha, \cdot), B(\cdot)) \in NPC_d^0([a, b], \mathcal{L}(E, E) \times E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}).$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.1.10, on a

$$\left. \begin{aligned} &\forall \alpha \in [a, b], T \circ (R(\alpha, \cdot), B(\cdot)) \\ &:= [s \mapsto R(\alpha, s) \cdot B(s)] \in NPC_d^0([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\}). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.17)$$

Ceci démontre (a).

Soit $t \in [a, b]$. On peut déduire de (3.2.17) avec $\alpha = t$ et de la Proposition 1.1.15 que $[s \mapsto R(t, s) \cdot B(s)]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Par conséquent $y(\cdot)$ est bien définie sur $[a, b]$ dans E . En utilisant le Théorème 3.2.8, on a

$$y(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t (R(t, t_0) \circ R(t_0, s)) \cdot B(s) ds.$$

Puisque $R(t, t_0) \in \mathcal{L}(E, E)$ et $[s \mapsto R(t_0, s) \cdot B(s)]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ grâce à (3.2.17) et la Proposition 1.1.15, en utilisant la proposition III, p. 198 de [35], on a

$$\int_{t_0}^t R(t, t_0) \cdot (R(t_0, s)) \cdot B(s) ds = R(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot B(s) ds.$$

Par conséquent, on a

$$y(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + R(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot B(s) ds.$$

D'où,

$$\forall t \in [a, b], y(t) = R(t, t_0) \cdot (x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot B(s) ds). \quad (3.2.18)$$

Considérons les fonctions $\psi_1 : [a, b] \rightarrow E$ définie par $\psi_1(t) = x_0$, $\psi_2 : [a, b] \rightarrow E$ définie par $\psi_2(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot B(s) ds$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Avec (3.2.17), on a, en utilisant la Proposition 1.3.15, $\psi_2 \in PC^1([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\psi_2(t) = R(t_0, t) \cdot B(t). \quad (3.2.19)$$

De plus, puisque $\psi_1 \in PC^1([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ car $\psi_1 \in C^1([a, b], E)$, on a, en utilisant la Proposition 1.3.4, $\psi \in PC^1([a, b], E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}\psi(t) = \mathbf{d}\psi_1(t) + \mathbf{d}\psi_2(t) = 0 + R(t_0, t) \cdot B(t) = R(t_0, t) \cdot B(t). \quad (3.2.20)$$

Donc, en utilisant le Théorème 1.3.14, on a $(R(\cdot, t_0), \psi) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E) \times E, \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}(R(\cdot, t_0), \psi)(t) = (\mathbf{d}R(t, t_0), \mathbf{d}\psi(t)).$$

Par conséquent, puisque $R(\cdot, t_0)$ est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_0, Id_E})$, avec (3.2.20), on a

$$\mathbf{d}(R(\cdot, t_0), \psi)(t) = (\mathbf{d}R(t, t_0), \mathbf{d}\psi(t)) = (A(t) \circ R(t, t_0), R(t_0, t) \cdot B(t)). \quad (3.2.21)$$

Avec (3.2.18), notons que $y = T \circ (R(\cdot, t_0), \psi)$.

Puisque T est un opérateur bilinéaire continu sur $\mathcal{L}(E, E) \times E$, d'après le 8.1.5. théorème 5°, p.310 de [35], on a en particulier $T \in C^1(\mathcal{L}(E, E) \times E, E)$.

Puisque $T \in C^1(\mathcal{L}(E, E) \times E, E)$ et $(R(\cdot, t_0), \psi) \in PC^1([a, b], \mathcal{L}(E, E) \times E; \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$, on a, en utilisant le Lemme 1.3.13, $y \in PC^1([a, b], E; \{\tau_i : 0 \leq i \leq p+1\})$ et

$$\forall t \in [a, b], \mathbf{d}y(t) = D_F T((R(\cdot, t_0), \psi)(t)) \cdot \mathbf{d}(R(\cdot, t_0), \psi)(t).$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \mathbf{d}y(t) &= D_F T(R(t, t_0), \psi(t)) \cdot (A(t) \circ R(t, t_0), R(t_0, t) \cdot B(t)) \text{ avec (3.2.21)} \\ &= T(A(t) \circ R(t, t_0), \psi(t)) + T(R(t, t_0), R(t_0, t) \cdot B(t)) \\ &= (A(t) \circ R(t, t_0)) \cdot (x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot B(s) ds) + R(t, t_0) \cdot R(t_0, t) \cdot B(t) \\ &= A(t) \cdot [R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) \cdot B(s) ds] + (R(t, t_0) \circ R(t_0, t)) \cdot B(t) \\ &\text{grâce au Théorème 3.2.8} \\ &= A(t) \cdot y(t) + B(t) \text{ en utilisant (3.2.18).} \end{aligned}$$

Ainsi $y(\cdot)$ est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.

Par unicité de la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy $(\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$, grâce au Théorème 3.1.14, $y(\cdot)$ est la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy $(\mathcal{L}\mathcal{C}_{(t_0, x_0)})$.

Ceci démontre (b). \square

3.3 Continuité d'une solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.

Dans cette section, on démontre un théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, U un ouvert de E . Soit Λ un espace topologique séparé. Soit $f : [a, b] \times U \times \Lambda \rightarrow E$ une fonction.

Supposons que la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

- (P1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ vérifie (H1) i.e. $f(\cdot, \cdot, \lambda) \in PCP^0([a, b] \times U, E)$ avec $disc1(f(\cdot, \cdot, \lambda)) = \{\tau_i^\lambda : 0 \leq i \leq p^\lambda + 1\}$.
- (P2) $\forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times U \times \Lambda$, $D_{G,2}f(t, x, \lambda)$ existe,
- (P3) $\forall K$ compact inclus dans U ,
 $\exists M > 0 \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times K \times \Lambda$, $\|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M$.
- (P4) $\forall (\bar{x}, \bar{\lambda}) \in C^0([a, b], U) \times \Lambda$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} \int_a^b \|f(s, \bar{x}(s), \lambda) - f(s, \bar{x}(s), \bar{\lambda})\| ds = 0.$$

3.3.1 Résultats préliminaires

On commence par établir deux lemmes de topologie.

Lemme 3.3.1. *Soit (X, d) espace métrique. Soit K un compact non vide de (X, d) . Soit Ω un ouvert de X t.q. $K \subset \Omega$. Alors il existe $r > 0$ t.q. $V(K, r) := \{z \in X : d(z, K) := \inf_{x \in K} d(z, x) < r\} \subset \Omega$.*

Démonstration. Si $\Omega = X$ il suffit de prendre $r = 1$.

Si $\Omega \neq X$. Puisque $X \setminus \Omega \neq \emptyset$, $d(\cdot, X \setminus \Omega)$ est continue sur X , cf. [36] (proposition 2.3.3. p.162) car 1-lipschitzienne. Et puisque K est compact, on a, d'après le théorème d'optimisation de Weierstrass, 2.7.4 p.212 de [36], l'existence de $x_0 \in K$ t.q. $\inf_{x \in K} d(x, X \setminus \Omega) = d(x_0, X \setminus \Omega)$.

De plus, puisque $X \setminus \Omega$ est un fermé et $x_0 \in K \subset \Omega$, on a, d'après la contraposée de la proposition 16-4 de [16], $d(x_0, X \setminus \Omega) > 0$.

Posons $r := d(x_0, X \setminus \Omega) > 0$.

Soit $z \in V(K, r)$ i.e. $d(z, K) < r$.

Montrons que $z \in \Omega$; raisonnons par l'absurde, supposons que $z \in X \setminus \Omega$. Alors, on a

$$\begin{aligned} d(z, K) &\geq \inf_{y \in X \setminus \Omega} d(y, K) \\ &= \inf_{y \in X \setminus \Omega} \inf_{x \in K} d(y, x) \\ &= \inf_{x \in K} \inf_{y \in X \setminus \Omega} d(x, y) \\ &= \inf_{x \in K} d(x, X \setminus \Omega) \\ &= r; \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $V(K, r) \subset \Omega$. □

Remarque 3.3.2. *Soit (X, d) un espace métrique.*

Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^ = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ t.q. $r_1 \leq r_2$. Alors $V(K, r_1) \subset V(K, r_2)$. En effet, soit $z \in V(K, r_1)$ i.e. $d(z, K) < r_1$. Puisque $r_1 \leq r_2$, $d(z, K) < r_2$ d'où $z \in V(K, r_2)$.*

Lemme 3.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $x \in X$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de (X, d) .*

Démonstration. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouvert de (X, d) t.q. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$.
Puisque $x \in \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, on a

$$\exists j \in I \text{ t.q. } x \in \mathcal{O}_j.$$

Par conséquent,

$$\{x\} \subset \mathcal{O}_j. \quad (3.3.1)$$

De plus, puisque $x \in \mathcal{O}_j$, \mathcal{O}_j est un ouvert de (X, d) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N, x_n \in \mathcal{O}_j.$$

D'où on a

$$\{x_n : n \in \mathbb{N} \text{ et } n > N\} \subset \mathcal{O}_j. \quad (3.3.2)$$

Soit $n \in \{0, \dots, N\}$, puisque $x_n \in \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ il existe $i_n \in I$ t.q. $x_n \in \mathcal{O}_{i_n}$.

Par conséquent,

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, x_n \in \mathcal{O}_{i_n} \subset \cup_{n=0}^N \mathcal{O}_{i_n}.$$

Donc, on a

$$\{x_n : n \in \{0, \dots, N\}\} \subset \cup_{n=0}^N \mathcal{O}_{i_n}. \quad (3.3.3)$$

Posons $J = \{i_n : n \in \{0, \dots, N\}\} \cup \{j\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} &= \{x_n : n \in \{0, \dots, N\}\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \text{ et } n > N\} \cup \{x\} \\ &\subset \cup_{n=0}^N \mathcal{O}_{i_n} \cup \mathcal{O}_j \cup \mathcal{O}_j \text{ grâce à (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.3)} \\ &= \cup_{i \in J} \mathcal{O}_i. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, on a prouvé que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de (X, d) . \square

Le lemme suivant est un lemme fondamental; il nous permet d'obtenir plus d'information sur la Gâteaux-différentielle partielle de f par rapport à la 2ème variable.

Lemme 3.3.4. *Soit K un compact de E non vide t.q. $K \subset U$. Alors*

$$\exists r > 0, \exists M > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times V(K, r) \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

Démonstration. Puisque K est un compact non vide de E t.q. $K \subset U$, on obtient, en utilisant le Lemme 3.3.1, qu'il existe $r_K > 0$ t.q. $V(K, r_K) \subset U$. De plus en utilisant la Remarque 3.3.2, pour chaque $\alpha \in]0, r_K]$, $V(K, \alpha) \subset V(K, r_K) \subset U$.

Ainsi, pour monter ce lemme, il suffit de démontrer que

$$\exists r \in]0, r_K], \exists M > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times V(K, r) \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que

$$\left. \begin{aligned} &\forall r \in]0, r_K], \forall M > 0, \\ &\exists (t_M^r, x_M^r, \lambda_M^r) \in [a, b] \times V(K, r) \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t_M^r, x_M^r, \lambda_M^r)\|_{\mathcal{L}} > M. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, appliquons (3.3.4) avec $r = \frac{r_K}{n+1}$ et $M = n$; on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (t_n, x_n, \lambda_n) \in [a, b] \times V(K, \frac{r_K}{n+1}) \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t_n, x_n, \lambda_n)\|_{\mathcal{L}} > n. \quad (3.3.5)$$

3.3. CONTINUITÉ D'UNE SOLUTION PC^1 NON PROLONGEABLE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES ET À UN PARAMÈTRE.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque K est un compact et $[y \mapsto \|x_n - y\| = d(x_n, y)]$ est continue sur E comme fonction 1-lipschitzienne (2.3.1 proposition, p.45 de [35]), d'après le théorème d'optimisation de Weierstrass, on a

$$\exists y_n \in K \text{ t.q. } \inf_{y \in K} \|x_n - y\| = \|x_n - y_n\|.$$

Puisque K est compact et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, il existe $y \in K$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_{\varphi(n)} - y\| = 0. \quad (3.3.6)$$

Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V(K, \frac{r_K}{n+1})$, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \frac{r_K}{\varphi(n) + 1}. \quad (3.3.7)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; alors on a

$$\begin{aligned} \|x_{\varphi(n)} - y\| &= \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} + y_{\varphi(n)} - y\| \\ &\leq \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| + \|y_{\varphi(n)} - y\| \\ &< \frac{r_K}{\varphi(n)+1} + \|y_{\varphi(n)} - y\|. \end{aligned}$$

Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, on a, par le théorème de comparaison des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_K}{\varphi(n)+1} = 0$.

Et avec (3.3.6), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_K}{\varphi(n)+1} + \|y_{\varphi(n)} - y\| = 0$.

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{\varphi(n)} - y\| = 0. \quad (3.3.8)$$

Avec (3.3.8), on a, en utilisant le Lemme 3.3.3, $K_0 := \{x_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact.

Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V(K, \frac{r_K}{n+1}) \subset U$ et $y \in K \subset U$, on a $K_0 \subset U$.

Et puisque K_0 est compact et $K_0 \subset U$, on a, en utilisant l'hypothèse (P3),

$$\exists M_1 > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times K_0 \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M_1.$$

D'où on déduit

$$\exists M_1 > 0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N}, \forall (t, \lambda) \in [a, b] \times \Lambda, \|D_{G,2}f(t, x_{\varphi(n)}, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M_1. \quad (3.3.9)$$

Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(t_{\varphi(n)}, \lambda_{\varphi(n)}) \in [a, b] \times \Lambda$, on a, en utilisant (3.3.9),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|D_{G,2}f(t_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}, \lambda_{\varphi(n)})\|_{\mathcal{L}} \leq M_1.$$

Or, en utilisant (3.3.5), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|D_{G,2}f(t_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}, \lambda_{\varphi(n)})\|_{\mathcal{L}} > \varphi(n). \quad (3.3.10)$$

Par conséquent, en utilisant (3.3.10), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) < M_1.$$

D'où, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison des limites, $M_1 = +\infty$; ce qui est absurde. \square

On énonce maintenant le théorème de la moyenne.

Théorème 3.3.5. Théorème de la moyenne. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés réels, Ω un ouvert de X et $a, b \in X$ t.q. $[a, b] \subset \Omega$.*

Soit $\psi : \Omega \rightarrow Y$ une fonction Gâteaux-différentiable en chaque point $x \in [a, b]$. Alors

$$\|\psi(b) - \psi(a)\|_Y \leq \sup_{x \in [a, b]} \|D_G \psi(x)\|_{\mathcal{L}} \|b - a\|_X.$$

Démonstration. On peut trouver une démonstration p.143 de [1]. □

En utilisant le théorème de la moyenne, on parvient à démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.3.6. *Soit $x_0 \in U$. Alors on a, $\exists M^{x_0} > 0, \exists r^{x_0} > 0$ t.q. $\forall t \in [a, b], \forall x_1, x_2 \in B(x_0, r^{x_0}) \subset U, \forall \lambda \in \Lambda,$*

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq M^{x_0} \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Puisque $K := \{x_0\}$ est un compact inclus dans U , en utilisant le Lemme 3.3.4, on a

$$\exists r^{x_0} > 0, \exists M^{x_0} > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times V(K, r^{x_0}) \times \Lambda, \|D_{G,2} f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M^{x_0}.$$

Par conséquent, puisque $V(K, r^{x_0}) := B(x_0, r^{x_0})$, on a

$$\exists r^{x_0} > 0, \exists M^{x_0} > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, \lambda) \in [a, b] \times B(x_0, r^{x_0}) \times \Lambda, \|D_{G,2} f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M^{x_0}. \quad (3.3.11)$$

Soit $t \in [a, b], x_1, x_2 \in B(x_0, r^{x_0}), \lambda \in \Lambda$.

Puisque $B(x_0, r^{x_0})$ est convexe (remarque 13 p.134 de [36]),

$$[x_1, x_2] \subset B(x_0, r^{x_0}). \quad (3.3.12)$$

Ainsi, puisque (P2), $f(t, \cdot, \lambda)$ est Gâteaux-différentiable sur $[x_1, x_2]$, on a, en utilisant le théorème de la moyenne, Théorème 3.3.5,

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|D_{G,2} f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \|x_1 - x_2\|. \quad (3.3.13)$$

En outre, en utilisant (3.3.11) et (3.3.12) on a

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} \|D_{G,2} f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq M^{x_0}. \quad (3.3.14)$$

Par conséquent, en utilisant (3.3.13), on a

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq M^{x_0} \|x_1 - x_2\|.$$

□

3.3.2 Énoncé du théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre

Avec (P1) et le Lemme 3.3.6, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on peut appliquer l'ensemble des résultats de la section 3.1 à l'équation différentielle ordinaire à paramètre

$$(\mathcal{M}_\lambda) \quad \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), \lambda).$$

3.3. CONTINUITÉ D'UNE SOLUTION PC^1 NON PROLONGEABLE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES ET À UN PARAMÈTRE.

Pour chaque $(t_0, x_0, \lambda) \in [a, b] \times U \times \Lambda$ on peut noter $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la valeur à l'instant $t \in [a, b]$, lorsqu'elle est définie, de la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy

$$(\mathcal{E}_{(t_0, x_0, \lambda)}) \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dans le théorème suivant, on énonce le résultat principal de cette section. Il s'agit d'un théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.

Théorème 3.3.7. *Soit I un intervalle compact de $[a, b]$.*

Soit $(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{\lambda}) \in [a, b] \times U \times \Lambda$ t.q. le problème de Cauchy

$$(\mathcal{E}_{(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{\lambda})}) \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), \hat{\lambda}) \\ x(\hat{t}_0) = \hat{x}_0. \end{cases}$$

admet une solution PC^1 non prolongeable $x(\cdot, \hat{t}_0, \hat{x}_0, \hat{\lambda}) = \hat{x}$ définie sur I ($\hat{t}_0 \in I$).

Alors il existe $\hat{J} \in \mathcal{V}_{\hat{t}_0}(I)$, $\hat{V} \in \mathcal{V}_{\hat{x}_0}(U)$, $\hat{W} \in \mathcal{V}_{\hat{\lambda}}(\Lambda)$ t.q. $\forall (t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{V} \times \hat{W}$, la solution PC^1 non prolongeable $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ du problème de Cauchy

$$(\mathcal{E}_{(t_0, x_0, \lambda)}) \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est définie sur I .

De plus, $[(t_0, x_0, \lambda) \mapsto x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda)]$ est continue sur $\hat{J} \times \hat{V} \times \hat{W}$ dans $C^0(I, U)$. Par ailleurs, il existe $L > 0$, pour chaque $(t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}$ et $\mu \in \hat{W}$

$$\left. \begin{aligned} & \|x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) - x|_I(\cdot, t_0, x_0, \mu)\|_\infty \leq \\ & \exp(L \operatorname{diam}(I)) \int_I \|f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda)) - f(s, x(s, t_0, x_0, \mu))\| ds. \end{aligned} \right\}$$

Notons que ce théorème sera démontré dans la sous-section suivante.

Lemme 3.3.8. $\exists L > 0, \exists r > 0$ t.q. $\forall t \in I, \forall x_1, x_2 \in \overline{B}(\hat{x}(t), r) \subset U, \forall \lambda \in \Lambda,$

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Puisque $\hat{x}(\cdot) \in C^0(I, E)$ et I est un compact de \mathbb{R} , on a, d'après le théorème 5° p.67 de [35], $K := \hat{x}(I)$ est un compact de E . De plus, $\hat{x}(I) \subset U$, en utilisant le Lemme 3.3.4, on a

$$\exists \bar{r} > 0, L := \sup_{(t, x, \lambda) \in I \times V(K, \bar{r}) \times \Lambda} \|D_{G,2} f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} < +\infty.$$

Posons $r = \frac{\bar{r}}{2}$. Soit $t \in I$, soit $x \in \overline{B}(\hat{x}(t), r)$.

Puisque $d(x, K) \leq \|x - \hat{x}(t)\| \leq r < \bar{r}$, on a $x \in V(K, \bar{r})$.

Par conséquent, on a prouvé que

$$\forall t \in I, \overline{B}(\hat{x}(t), r) \subset V(K, \bar{r}) \subset U. \quad (3.3.15)$$

Soit $t \in I, x_1, x_2 \in \overline{B}(\hat{x}(t), r), \lambda \in \Lambda$.

Puisque $\overline{B}(\hat{x}(t), r)$ est convexe (remarque 13 p.134 de [36]), on a

$$[x_1, x_2] \subset \overline{B}(\hat{x}(t), r). \quad (3.3.16)$$

Ainsi, puisque (P2), $f(t, \cdot, \lambda)$ est Gâteaux-différentiable sur $[x_1, x_2]$, on a, en utilisant le théorème de la moyenne, Théorème 3.3.5,

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq \sup_{x \in [x_1, x_2]} \|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \|x_1 - x_2\|. \quad (3.3.17)$$

En utilisant (3.3.15) et (3.3.16), on a $[x_1, x_2] \subset V(K, \bar{r})$.

Par conséquent, on a

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} \|D_{G,2}f(t, x, \lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq L. \quad (3.3.18)$$

En utilisant (3.3.17) et (3.3.18), on a

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

□

Lemme 3.3.9. Soit I un intervalle compact de $[a, b]$. Soit $(t_0, x_0, \lambda) \in I \times U \times \Lambda$ et $x \in C^0(I, U)$ t.q.

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds.$$

Alors la solution PC^1 non prolongeable $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ est définie au moins sur I .

Démonstration. Si $t_1 = \max I \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, en utilisant la Proposition 3.1.6, on sait que x est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_0, x_0, \lambda})$, d'où, par le Théorème 3.1.14, $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ est définie sur I .

Si $t_1 \in \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, posons $y_0 = x(t_1)$; en utilisant le théorème d'unicité et d'existence locale, on a : il existe $h_0 > 0$ il existe $\underline{x} \in PC^1([\max\{t_1 - h_0, a\}, \min\{t_1 + h_0, b\}], U)$ solution PC^1 de $(\mathcal{C}_{t_0, x_0, \lambda})$.

Posons $I_0 = [t_1, \min\{t_1 + h_0, b\}]$. Considérons la fonction $\bar{x} : I \cup I_0 \rightarrow U$ définie par

$$\bar{x}(t) := \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in I \\ \underline{x}(t) & \text{si } t \in I_0. \end{cases}$$

Puisque I et I_0 sont connexes et $I \cap I_0 = \{y_0\} \neq \emptyset$, on a : $I \cup I_0$ est connexe. Par conséquent, $I \cup I_0$ est un sous-intervalle de $[a, b]$. De plus, \bar{x} est bien définie sur $I \cup I_0$ car $\bar{x}(t_1) = x(t_1) = \underline{x}(t_1)$.

Puisque $\bar{x}|_I = x$, $\bar{x}|_{I_0} = \underline{x}|_{I_0}$, $x \in C^0(I, U)$ et $\underline{x}|_{I_0} \in C^0(I_0, U)$, on obtient que \bar{x} est continue sur $(I \cup I_0) \setminus \{t_1\}$. De plus, puisque $\bar{x}(t_1-) = x(t_1-) = x(t_1) = y_0$ et $\bar{x}(t_1+) = \underline{x}(t_1+) = \underline{x}(t_1) = y_0$ i.e. $\bar{x}(t_1+) = \bar{x}(t_1-) = y_0$, \bar{x} est continue au point t_1 . Par conséquent, $\bar{x} \in C^0(I, U)$.

Soit $t \in I \cup I_0$.

Si $t \in I$, on a $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s), \lambda) ds + \int_{t_1}^t f(s, x(s), \lambda) ds = x(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, x(s), \lambda) ds = y_0 + \int_{t_1}^t f(s, x(s), \lambda) ds$. Par conséquent, on a

$$\bar{x}(t) = x(t) = y_0 + \int_{t_1}^t f(s, x(s), \lambda) ds = y_0 + \int_{t_1}^t f(s, \bar{x}(s), \lambda) ds \text{ car } [t, t_1] \subset I.$$

Si $t \in I_0$, puisque \underline{x} est une solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_1, y_0, \lambda})$ et $\sup I_0 \notin \{\tau_i : 0 \leq i \leq p\}$, en utilisant la Proposition 3.1.6, on a $\underline{x}(t) = y_0 + \int_{t_1}^t f(s, \underline{x}(s), \lambda) ds$.

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = \underline{x}(t) &= y_0 + \int_{t_1}^t f(s, \underline{x}(s), \lambda) ds \\ &= y_0 + \int_{t_1}^t f(s, \bar{x}(s), \lambda) ds \text{ car } [t_1, t] \subset I_0. \end{aligned}$$

3.3. CONTINUITÉ D'UNE SOLUTION PC^1 NON PROLONGEABLE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES ET À UN PARAMÈTRE.

Donc, par disjonction des cas, on a prouvé que

$$\forall t \in I \cup I_0, \bar{x}(t) = y_0 + \int_{t_1}^t f(s, \bar{x}(s), \lambda) ds.$$

Ainsi, d'après la Proposition 3.1.6, on obtient que \bar{x} est solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_1, y_0, \lambda})$.

De plus, puisque $\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$, \bar{x} est aussi solution PC^1 du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_{t_0, x_0, \lambda})$. En utilisant le Théorème 3.1.14, $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ est définie sur $I \cup I_0$ donc en particulier sur I . Ainsi, par disjonction des cas, $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ est définie sur I . \square

On rappelle le Lemme de Gronwall.

Lemme 3.3.10. Lemme de Gronwall. *Soit Δ un intervalle compact de \mathbb{R} , $\tau \in \Delta$ et $\mathbf{b} > 0$. Soit $\alpha(\cdot) \in \mathcal{L}^0((\Delta, \mathcal{B}(\Delta)), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)))$ et $\omega(\cdot) \in \mathcal{L}^0((\Delta, \mathcal{B}(\Delta)), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)))$ t.q. $\alpha(\cdot)\omega(\cdot) \in \mathcal{L}^1((\Delta, \mathcal{B}(\Delta)), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$.*

Si

$$\forall t \in \Delta, \omega(t) \leq \left| \int_{[\tau, t]} \alpha(s)\omega(s) d\mathbf{m}_1(s) \right| + \mathbf{b}.$$

Alors

$$\forall t \in \Delta, \omega(t) \leq \mathbf{b} \exp \left(\left| \int_{[\tau, t]} \alpha(s) d\mathbf{m}_1(s) \right| \right).$$

Démonstration. On peut trouver une démonstration dans [1] p.183. \square

3.3.3 Preuve du théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre.

Posons $r_1 = r \exp(-L \text{diam}(I))$.

Puisque $\hat{x} \in C^0(I, U)$ et $f(\cdot, \cdot, \hat{\lambda})$ vérifie (H1), on a, en utilisant le Lemme 3.1.4,

$$[s \mapsto f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda})] \in PC^0(I, E, \{\tau_i^{\hat{\lambda}} : 0 \leq i \leq p^{\hat{\lambda}} + 1\} \cap I) \cap C_d^0(I, E).$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.3.9, on obtient que $[t_0 \mapsto \int_{t_0}^{t_0} f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds]$ est continue sur I . Donc, en particulier

$$\left. \begin{aligned} &\exists \delta_1 > 0 \text{ t.q. } , \forall t_0 \in \hat{J} =: [\hat{t}_0 - \delta_1, \hat{t}_0 + \delta_1] \cap I, \\ &\left\| \int_{t_0}^{t_0} f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds \right\| \leq \frac{r_1 \exp(-L \text{diam}(I))}{3} = \delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.19)$$

Avec (P4), $\lim_{\lambda \rightarrow \hat{\lambda}} \int_I \|f(s, \hat{x}(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda})\| ds = 0$, et on a

$$\exists \hat{W} \text{ un voisinage de } \hat{\lambda}, \forall \lambda \in \hat{W}, \int_I \|f(s, \hat{x}(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda})\| ds \leq \delta_2. \quad (3.3.20)$$

Posons $\hat{U} = \overline{B}(\hat{x}_0, \delta_2)$.

Soit $(t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}$.

Considérons la norme de Bielecki, $\|\cdot\|_{e, \infty} : C^0(I, E) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $x \in C^0(I, E)$, $\|x\|_{e, \infty} = \sup_{t \in I} \exp(-L|t - t_0|) \|x(t)\|$.

Puisque E est un espace de Banach, $(C^0(I, E), \|\cdot\|_{e, \infty})$ est un espace de Banach.

Ainsi en utilisant le Lemme 3.2.4 et le théorème p.99 de [35], on obtient que $(C^0(I, E), \|\cdot\|_{e, \infty})$ est aussi un espace de Banach.

Posons $X_{t_0} = X := \overline{B}_{\|\cdot\|_{e,\infty}}(\hat{x}, r_1)$.

Puisque X est un fermé de $(C^0(I, E), \|\cdot\|_{e,\infty})$; X muni de la distance induite de $\|\cdot\|_{e,\infty}$ est un espace complet, cf. théorème II, p.61 de [35].

Soit $x \in X$, soit $t \in I$; puisque $\exp(-L|t - t_0|)\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq r_1$, on a $\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \exp(L|t - t_0|)r_1 \leq \exp(L \text{diam}(I))r_1 = r$, d'où

$$\forall x \in X, \forall t \in I, x(t) \in B(\hat{x}(t), r) \subset U. \quad (3.3.21)$$

Soit $x \in X$; puisque $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ vérifie (H1), en utilisant le Lemme 3.1.4, on a $[s \mapsto f(s, x(s), \lambda)] \in PC^0(I, E, \{\tau_i^\lambda : 0 \leq i \leq p^\lambda + 1\} \cap I) \cap C_d^0(I, E)$.

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.3.9, on obtient que $[t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds]$ est continue sur I .

Ainsi, $[t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds]$ est continue sur I . Donc, on peut définir l'opérateur

$$\Phi_{(t_0, x_0, \lambda)} = \Phi : X \rightarrow C^0(I, E), \forall x \in X, \forall t \in I, \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds.$$

Soit $x \in X$, soit $t \in I$ t.q. $t \geq t_0$.

Soit $s \in [t_0, t] \subset I$; puisque $x \in X$, $\|x(s) - \hat{x}(s)\| \leq r$ grâce à (3.3.21).

En utilisant le Lemme 3.3.8, on a

$$\forall s \in [t_0, t], \|f(s, x(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \lambda)\| \leq L\|x(s) - \hat{x}(s)\|.$$

Par conséquent, en utilisant le corollaire II, p.201 de [35], on a

$$\int_{t_0}^t \|f(s, x(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \lambda)\| ds \leq \int_{t_0}^t L\|x(s) - \hat{x}(s)\| ds. \quad (3.3.22)$$

Notons que

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - \hat{x}(t)\| &= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds - (\hat{x}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds)\| \\ &= \|x_0 - \hat{x}_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds - \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \lambda) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \lambda) ds - \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds\| \\ &\leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds - \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \lambda) ds\| \\ &\quad + \|\int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \lambda) ds - \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds - \int_{t_0}^{t_0} f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds\| \\ &\leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \lambda)\| ds \\ &\quad + \|\int_{t_0}^t (f(s, \hat{x}(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda})) ds\| + \|\int_{t_0}^{t_0} f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds\| \\ &\leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \int_{t_0}^t L\|x(s) - \hat{x}(s)\| ds \\ &\quad + \int_I \|f(s, \hat{x}(s), \lambda) - f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda})\| ds + \|\int_{t_0}^{t_0} f(s, \hat{x}(s), \hat{\lambda}) ds\| \text{ grâce à (3.3.22)} \\ &\leq \delta_2 + L \int_{t_0}^t \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds + \delta_2 + \delta_2 \text{ grâce à (3.3.19) et (3.3.20)} \\ &= 3\delta_2 + L \int_{t_0}^t \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds, \end{aligned}$$

3.3. CONTINUITÉ D'UNE SOLUTION PC^1 NON PROLONGEABLE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES ET À UN PARAMÈTRE.

ce qui implique

$$\begin{aligned}
& \exp(-L(t-t_0))\|\Phi(x)(t) - \hat{x}(t)\| \\
& \leq 3\exp(-L(t-t_0))\delta_2 + \exp(-L(t-t_0))L \int_{t_0}^t \|x(s) - \hat{x}(s)\| ds \\
& \leq 3\delta_2 + \exp(-L(t-t_0))L \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0)) \exp(-L(s-t_0))\|x(s) - \hat{x}(s)\| ds \\
& \leq 3\delta_2 + L \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0))\|x - \hat{x}\|_{e,\infty} ds \\
& = 3\delta_2 + \|x - \hat{x}\|_{e,\infty} L \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0)) ds \\
& \leq 3\delta_2 + r_1 L \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0)) ds \\
& = 3\delta_2 + r_1 L \exp(-L(t-t_0)) \left[\frac{\exp(L(t-t_0)) - 1}{L} \right] \\
& = 3\delta_2 + r_1(1 - \exp(-L(t-t_0))) \\
& \leq 3\delta_2 + r_1(1 - \exp(-L \operatorname{diam}(I))) \\
& = r_1 \exp(-L \operatorname{diam}(I)) + r_1 - r_1 \exp(-L \operatorname{diam}(I)) \\
& = r_1.
\end{aligned}$$

Donc $\exp(-L(t-t_0))\|\Phi(x)(t) - \hat{x}(t)\| \leq r_1$.

De même, si $t \leq t_0$, on a $\exp(-L(t_0-t))\|\Phi(x)(t) - \hat{x}(t)\| \leq r_1$.

Donc on a prouvé que

$$\forall t \in I, \exp(-L|t-t_0|)\|\Phi(x)(t) - \hat{x}(t)\| \leq r_1$$

i.e.

$$\|\Phi(x) - \hat{x}\|_{e,\infty} \leq r_1.$$

Par conséquent, on a

$$\Phi(X) \subset X. \quad (3.3.23)$$

Soit $x, y \in X$; en utilisant (3.3.21), on a, $\forall t \in I$, $\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq r$ et $\|y(t) - \hat{x}(t)\| \leq r$.

En utilisant le Lemme 3.3.8, on a

$$\forall t \in I, \|f(t, x(t), \lambda) - f(t, y(t), \lambda)\| \leq L\|x(t) - y(t)\|. \quad (3.3.24)$$

Soit $t \in I$ t.q. $t \geq t_0$; alors on a

$$\begin{aligned}
& \exp(-L(t-t_0))\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \\
& = \exp(-L(t-t_0))\|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \lambda) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s), \lambda) ds)\| \\
& = \exp(-L(t-t_0))\|\int_{t_0}^t (f(s, x(s), \lambda) - f(s, y(s), \lambda)) ds\| \\
& \leq \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \|f(s, x(s), \lambda) - f(s, y(s), \lambda)\| ds \\
& \leq \exp(-L(t-t_0))L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \text{ grâce (3.3.24)} \\
& = \exp(-L(t-t_0))L \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0)) \exp(-L(s-t_0))\|x(s) - y(s)\| ds \\
& \leq L \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0))\|x - y\|_{e,\infty} ds \\
& = \|x - y\|_{e,\infty} L \exp(-L(t-t_0)) \int_{t_0}^t \exp(L(s-t_0)) ds \\
& = \|x - y\|_{e,\infty} L \exp(-L(t-t_0)) \left[\frac{\exp(L(t-t_0)) - 1}{L} \right] \\
& = (1 - \exp(-L(t-t_0)))\|x - y\|_{e,\infty} \\
& \leq (1 - \exp(-L \operatorname{diam}(I)))\|x - y\|_{e,\infty}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\exp(-L(t-t_0))\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq (1 - \exp(-L \operatorname{diam}(I)))\|x - y\|_{e,\infty}.$$

De même, si $t \leq t_0$, on obtient

$$\exp(-L(t_0-t))\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq (1 - \exp(-L \operatorname{diam}(I)))\|x - y\|_{e,\infty}.$$

D'où, on a, $\forall x, y \in X, \forall t \in I$,

$$\exp(-L|t - t_0|) \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq (1 - \exp(-L \text{diam}(I))) \|x - y\|_{e, \infty}.$$

On a donc démontré que

$$\forall x, y \in X, \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{e, \infty} \leq (1 - \exp(-L \text{diam}(I))) \|x - y\|_{e, \infty}. \quad (3.3.25)$$

Puisque $0 < \exp(-L \text{diam}(I)) < 1$, on a $0 < k = (1 - \exp(-L \text{diam}(I))) < 1$.

Ainsi, en utilisant (3.3.23) et (3.3.25), on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach-Picard et on a donc

$$\left. \begin{array}{l} \forall (t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}, \exists! \bar{x}(\cdot, t_0, x_0, \lambda) \in X = X_{t_0} \text{ t.q.} \\ \Phi_{(t_0, x_0, \lambda)}(\bar{x}(\cdot, t_0, x_0, \lambda)) := \Phi(\bar{x}(\cdot, t_0, x_0, \lambda)) = \bar{x}(\cdot, t_0, x_0, \lambda) \\ \text{i.e. } \forall t \in I, \bar{x}(t, t_0, x_0, \lambda) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) ds. \end{array} \right\} \quad (3.3.26)$$

En utilisant le Lemme 3.3.9, $x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) = \bar{x}(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$ est définie sur I .

Soit $(t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}$, soit $(\tau_0, y_0, \mu) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}$, soit $t \in I$.

Puisque $x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) \in X_{t_0}$ et $x|_I(\cdot, \tau_0, y_0, \mu) \in X_{\tau_0}$, on a

$$\begin{aligned} \|x|_I(t, t_0, x_0, \lambda) - \hat{x}(t)\| &\leq \exp(L|t - t_0|) r_1 \leq \exp(L \text{diam}(I)) r_1 = r \\ \text{et } \|x|_I(t, \tau_0, y_0, \mu) - \hat{x}(t)\| &\leq \exp(L|t - \tau_0|) r_1 \leq \exp(L \text{diam}(I)) r_1 = r, \end{aligned}$$

d'où

$$\forall t \in I, x|_I(t, t_0, x_0, \lambda) \in \overline{B}(\hat{x}(t), r) \text{ et } x|_I(t, \tau_0, y_0, \mu) \in \overline{B}(\hat{x}(t), r).$$

En utilisant le Lemme 3.3.8, on a

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in I, \\ \|f(t, x(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(t, x(t, \tau_0, y_0, \mu), \lambda)\| \leq L \|x(t, t_0, x_0, \lambda) - x(t, \tau_0, y_0, \mu)\|. \end{array} \right\}$$

D'où on déduit

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in I, \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda)\| ds \right| \\ \leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s, t_0, x_0, \lambda) - x(s, \tau_0, y_0, \mu)\| ds \right|. \end{array} \right\} \quad (3.3.27)$$

3.3. CONTINUITÉ D'UNE SOLUTION PC^1 NON PROLONGEABLE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES ET À UN PARAMÈTRE.

Soit $t \in I$; alors on a

$$\begin{aligned}
& \|x(t, t_0, x_0, \lambda) - x(t, \tau_0, y_0, \mu)\| \\
&= \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - (y_0 + \int_{\tau_0}^t f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds)\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) ds - \int_{\tau_0}^t f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) ds - (\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds + \\
&\quad \int_{t_0}^t f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds)\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds - \\
&\quad \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) \\
&\quad + f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) ds\| \\
&\quad + \|\int_{t_0}^t f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\quad + \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + |\int_{t_0}^t \|f(s, x(s, t_0, x_0, \lambda), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda)\| ds| \\
&\quad + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds \\
&\quad + \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + |\int_{t_0}^t L \|x(s, t_0, x_0, \lambda) - x(s, \tau_0, y_0, \mu)\| ds| \\
&\quad + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds + \\
&\quad \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\|.
\end{aligned}$$

Puisque $[s \mapsto L] \in \mathcal{L}^0((I, \mathcal{B}(I)), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)))$ comme fonction continue sur I dans \mathbb{R}_+ . De plus, comme $x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) \in C^0(I, E)$, $x|_I(\cdot, \tau_0, y_0, \mu) \in C^0(I, E)$ et $\|\cdot\| \in C^0(E, \mathbb{R})$, on a

$$[s \mapsto \|x(s, t_0, x_0, \lambda) - x(s, \tau_0, y_0, \mu)\|] \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$$

d'où $[s \mapsto \|x(s, t_0, x_0, \lambda) - x(s, \tau_0, y_0, \mu)\|] \in \mathcal{L}^0((I, \mathcal{B}(I)), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)))$.

De plus, $[s \mapsto L \|x(s, t_0, x_0, \lambda) - x(s, \tau_0, y_0, \mu)\|] \in \mathcal{L}^1((I, \mathcal{B}(I)), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ comme fonction continue sur I .

Ainsi, en utilisant le lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}
& \|x(t, t_0, x_0, \lambda) - x(t, \tau_0, y_0, \mu)\| \\
&\leq (\|x_0 - y_0\| + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds + \\
&\quad \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\|) \exp(|\int_{t_0}^t L|) \\
&\leq (\|x_0 - y_0\| + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds + \\
&\quad \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\|) \exp(L \text{diam}(I)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a démontré que

$$\left. \begin{aligned}
& \forall t \in I, \|x(t, t_0, x_0, \lambda) - x(t, \tau_0, y_0, \mu)\| \\
& \leq (\|x_0 - y_0\| + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds + \\
& \quad \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\|) \exp(L \text{diam}(I)).
\end{aligned} \right\}$$

D'où on déduit

$$\left. \begin{aligned}
& \forall (t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}, \forall (\tau_0, y_0, \mu) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W} \\
& \|x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) - x|_I(\cdot, \tau_0, y_0, \mu)\|_\infty \\
& \leq (\|x_0 - y_0\| + \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds + \\
& \quad \|\int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds\|) \exp(L \text{diam}(I)).
\end{aligned} \right\} \quad (3.3.28)$$

Puisque $x|_I(\cdot, \tau_0, y_0, \mu) \in C^0(I, U)$ et avec (P1), on a, en utilisant le Lemme 3.1.4,

$$[s \mapsto f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)] \in PC^0(I, E, \{\tau_i^\mu : 0 \leq i \leq p^\mu + 1\} \cap I) \cap C_d^0(I, E).$$

Puisque $[s \mapsto f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)] \in PC_d^0(I, E, \{\tau_i^\mu : 0 \leq i \leq p^\mu + 1\} \cap I) \cap C_d^0(I, E)$, en utilisant la Proposition 1.3.9, on a

$$\lim_{t_0 \rightarrow \tau_0} \left\| \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu) ds \right\| = 0.$$

Avec (P4), on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \int_I \|f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, \tau_0, y_0, \mu), \mu)\| ds = 0.$$

Et, puisque $\lim_{x_0 \rightarrow y_0} \|x_0 - y_0\| = 0$, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{(t_0, x_0, \lambda) \rightarrow (\tau_0, y_0, \mu)} \|x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) - x|_I(\cdot, \tau_0, y_0, \mu)\|_\infty = 0.$$

De plus, pour chaque $(t_0, x_0, \lambda) \in \hat{J} \times \hat{U} \times \hat{W}$ et $\mu \in \hat{W}$ en utilisant (3.3.28) avec $\tau_0 = t_0$ et $y_0 = x_0$, on a

$$\left. \begin{aligned} & \|x|_I(\cdot, t_0, x_0, \lambda) - x|_I(\cdot, t_0, x_0, \mu)\|_\infty \leq \\ & \exp(L \operatorname{diam}(I)) \int_I \|f(s, x(s, t_0, x_0, \mu), \lambda) - f(s, x(s, t_0, x_0, \mu), \mu)\| ds. \end{aligned} \right\}$$

Chapitre 4

Calcul des Variations

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes de Calcul des Variations.

Dans la section 1, on traite l'intégrale de Gelfand, on établit des propriétés qui seront nécessaires pour établir l'équation d'Euler à paramètre.

Dans la section 2, on s'intéresse aux fonctionnelles définies à partir d'une intégrale et ayant pour espace de départ le produit cartésien d'un intervalle compact de \mathbb{R} et de l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées. Pour ces fonctionnelles, on démontre un lemme fondamental pour obtenir la Hadamard-différentiabilité en un point avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité partielle sur l'intégrande. Ensuite, on démontre la Hadamard-différentiabilité d'une fonctionnelle définie à partir d'une intégrale et dépendant d'un paramètre avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité sur l'intégrande. En outre, on donne des résultats sur les lemmes de Dubois-Reymond généralisés. Grâce à ces lemmes, on parvient à démontrer une équation d'Euler dépendant d'un paramètre avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité partielle sur l'intégrande. Ainsi, on démontre une équation d'Euler avec des hypothèses plus faibles. En effet, pour montrer l'équation d'Euler, on suppose le plus souvent l'existence d'une Fréchet-différentielle partielle continue, cf. [25] p.106.

Dans la section 3, on énonce un théorème de l'enveloppe dans le cadre du Calcul des Variations. Notons que l'intégrale de Gelfand nous sera très utile pour donner l'expression de la Gâteaux-différentielle et de la Fréchet-différentielle de la fonction valeur.

Dans la section 4, on prouve le théorème de l'enveloppe énoncé dans la section 3. Notre stratégie est de reformuler notre problème de Calcul des Variations en un problème d'optimisation statique. Ainsi, en utilisant les lemmes de la section 2 et un théorème de l'enveloppe du chapitre 2, on démontre ce théorème de l'enveloppe.

Enfin, notons qu'on pourra retrouver la plupart des résultats de ce chapitre dans [12].

Dans la suite du chapitre, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $T \in]0, +\infty[$, A un ouvert de \mathbb{R}^n et Y un espace vectoriel normé réel.

4.1 Résultats sur l'intégrale de Gelfand

Dans cette section, on s'intéresse à l'intégrale de Gelfand, on établit des propriétés qui seront utiles dans les sections suivantes de ce chapitre.

On commence par introduire la notion de fonction \star -faiblement mesurable.

Définition 4.1.1. Soit E un espace vectoriel normé réel et $\varphi : [0, T] \rightarrow E^*$ une fonction. On dit φ est \star -faiblement mesurable lorsque pour chaque $x \in E$, $[t \mapsto \varphi(t) \cdot x] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$.

Dans la définition suivante, on définit la notion de fonction Gelfand-intégrable. On peut trouver plus d'informations sur l'intégrale de Gelfand dans [2] (p.422).

Définition 4.1.2. Soit E un espace vectoriel normé réel et $\varphi : [0, T] \rightarrow E^*$ une fonction \star -faiblement mesurable.

On dit que φ est Gelfand-intégrable sur $B \in \mathcal{B}([0, T])$ par rapport à \mathbf{m}_1 lorsque pour chaque $x \in E$, $[t \mapsto \varphi(t) \cdot x] \in \mathcal{L}^1((B, \mathcal{B}(B)), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ et $[x \mapsto \int_B \varphi(t) \cdot x d\mathbf{m}_1(t)] \in E^*$. Alors la fonction $\int_B^\mathfrak{G} \varphi(t) d\mathbf{m}_1(t) \in E^*$, définie par, pour tout $x \in E$, $\int_B^\mathfrak{G} \varphi(t) d\mathbf{m}_1(t) \cdot x = \int_B \varphi(t) \cdot x d\mathbf{m}_1(t)$, est appelée l'intégrale de Gelfand de φ sur B par rapport à \mathbf{m}_1 .

On dit que φ est Gelfand-intégrable par rapport à \mathbf{m}_1 lorsque, pour chaque $B \in \mathcal{B}([0, T])$, φ est Gelfand-intégrable sur B par rapport à \mathbf{m}_1 .

On note $\mathcal{L}_\mathfrak{G}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; E^*)$ l'ensemble des fonctions Gelfand-intégrable par rapport à \mathbf{m}_1 .

Dans le lemme suivant, on donne une condition pour qu'une fonction \star -faiblement mesurable soit Gelfand-intégrable.

Lemme 4.1.3. Soit E un espace vectoriel normé réel. Soit $\varphi : [0, T] \rightarrow E^*$ une fonction \star -faiblement mesurable t.q. il existe $\psi \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ vérifiant, pour tout $t \in [0, T]$, $\|\varphi(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \psi(t)$. Alors φ est Gelfand-intégrable par rapport à \mathbf{m}_1 et pour chaque $B \in \mathcal{B}([0, T])$, on a

$$\left\| \int_B^\mathfrak{G} \varphi(t) d\mathbf{m}_1(t) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \int_B \psi(t) d\mathbf{m}_1(t).$$

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{B}([0, T])$. Soit $x \in E$ et $t \in B$; notons que

$$|\varphi(t) \cdot x| \leq \|\varphi(t)\|_{\mathcal{L}} \|x\| \leq \psi(t) \|x\|.$$

Par conséquent, on a, pour chaque $x \in E$, $[t \mapsto \varphi(t) \cdot x] \in \mathcal{L}^1((B, \mathcal{B}(B)), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ et

$$\forall x \in E, \left| \int_B \varphi(t) \cdot x d\mathbf{m}_1(t) \right| \leq \int_B \psi(t) d\mathbf{m}_1(t) \|x\|.$$

Par conséquent, puisque $[x \mapsto \int_B \varphi(t) \cdot x d\mathbf{m}_1(t)]$ est linéaire grâce à la linéarité de l'intégrale de Borel, on obtient que φ est Gelfand-intégrable sur B par rapport à \mathbf{m}_1 et

$$\left\| \int_{[0, T]}^\mathfrak{G} \varphi(t) d\mathbf{m}_1(t) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \int_{[0, T]} \psi(t) d\mathbf{m}_1(t).$$

□

Les deux lemmes suivant seront utiles pour montrer l'équation d'Euler.

Lemme 4.1.4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathcal{L}_\mathfrak{G}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}^{m*})$. Alors, on a

$$\forall \varphi \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^m), [t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^m)$. Considérons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{R}^{m*})^m$ la base duale de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathbb{R}^m .

Notons que, pour chaque $t \in [0, T]$, on a $a(t) = \sum_{i=1}^m (a(t) \cdot e_i) e_i^*$.

Donc, pour tout $t \in [0, T]$, $a(t) \cdot \varphi(t) = \sum_{i=1}^m (a(t) \cdot e_i) e_i^*(\varphi(t))$.

Par conséquent, en utilisant les propriétés des fonctions mesurables, on a

$$[t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))).$$

Puisque, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, $[t \mapsto e_i^*(\varphi(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R})$, on obtient que

$$\exists c_i \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, T], |e_i^*(\varphi(t))| \leq c_i.$$

Par conséquent, pour chaque $t \in [0, T]$, $|a(t) \cdot \varphi(t)| \leq \sum_{i=1}^m |a(t) \cdot e_i| c_i$.
 Puisque $a \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}^{m*})$, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$[t \mapsto a(t) \cdot e_i] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}).$$

Ainsi $[t \mapsto \sum_{i=1}^m |a(t) \cdot e_i| c_i] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R})$.

Par conséquent, on obtient que $[t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R})$. \square

Lemme 4.1.5. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}^{m*})$. Alors, la fonction $b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m*}$, définie par, pour tout $t \in [0, T]$, $b(t) := \int_{[0, t]}^{\mathfrak{G}} a(s) d\mathfrak{m}_1(s)$ est absolument continue sur $[0, T]$ et, $\forall t \in [0, T]$, $\mathfrak{m}_1 - p.p.$, $b'(t) = a(t)$ (où $p.p.$ est l'abréviation de presque partout).*

Démonstration. Considérons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{R}^{m*})^m$ la base duale de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathbb{R}^m .

Notons que

$$\forall t \in [0, T], b(t) = \sum_{i=1}^m (b(t) \cdot e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^m \left(\int_{[0, t]} a(s) \cdot e_i d\mathfrak{m}_1(s) \right) e_i^*.$$

Puisque, pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, $[t \mapsto a(t) \cdot e_i] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R})$, en utilisant le Théorème 2 de [27] p. 339, on a $[t \mapsto \int_{[0, t]} a(s) \cdot e_i d\mathfrak{m}_1(s)] \in AC([0, T], \mathbb{R})$.

Par conséquent, on obtient que

$$\mathfrak{a} := \left[t \mapsto \left(\int_{[0, t]} a(s) \cdot e_i d\mathfrak{m}_1(s) \right)_{1 \leq i \leq m} \right] \in AC([0, T], \mathbb{R}^m).$$

Considérons l'opérateur linéaire continu $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m*}$ défini, par pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Z}(x) := \sum_{i=1}^m x_i e_i^*$.

Notons que $b = \mathcal{Z} \circ \mathfrak{a}$.

Ainsi, en utilisant la propriété 1 de [1] p.128, on a $b \in AC([0, T], \mathbb{R}^{m*})$ et, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathfrak{m}_1 - p.p.$,

$$b'(t) = D_F \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{a}'(t) = \mathcal{Z}((a(t) \cdot e_i)_{1 \leq i \leq m}) = \sum_{i=1}^m (a(t) \cdot e_i) e_i^* = a(t).$$

\square

4.2 Résultats fondamentaux sur le Calcul des Variations

Dans cette section, on s'intéresse d'abord aux fonctionnelles définies à partir d'une intégrale et ayant pour espace de départ le produit cartésien d'un intervalle compact de \mathbb{R} et d'un espace fonctionnel. On démontre d'abord un lemme fondamental pour obtenir la Hadamard-différentiabilité en un point avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité sur l'intégrande. En outre, on démontre un lemme similaire lorsque l'intégrande dépend d'un paramètre. Enfin, à l'aide de ce lemme et des résultats sur l'intégrale de Gelfand, on démontre des lemmes de Dubois-Reymond généralisés et une équation d'Euler à paramètre.

4.2.1 Résultats sur les fonctionnelles définies à partir d'une intégrale

Dans le lemme suivant, on démontre un lemme fondamental pour obtenir la Hadamard-différentiabilité en un point avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité sur l'intégrande.

Lemme 4.2.1. *Soit E un espace vectoriel normé réel, G un ouvert de E , $f : [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $z_0 \in NPC_d^0([0, T], G)$. On considère les conditions suivantes :*

- (i) $f \in PCP^0([0, T] \times G, \mathbb{R})$.
- (ii) Il existe $\rho_1 > 0$ et il existe $\zeta \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q., $\forall t \in [0, T]$,
 $\forall u_1, u_2 \in B(z_0(t), \rho_1)$, $|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq \zeta(t) \|u_1 - u_2\|$.
- (iii) Pour tout $t \in [0, T]$, $D_{H,2}f(t, z_0(t))$ existe.

On considère la fonctionnelle $F : NPC_d^0([0, T], G) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour chaque $z \in NPC_d^0([0, T], G)$,
 $F(z) := \int_0^T f(t, z(t)) dt$.

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (a) $NPC_d^0([0, T], G)$ est un ouvert de $NPC_d^0([0, T], E)$.
- (b) Sous (i)-(ii), F est bien définie et lipschitzienne sur $B_{\|\cdot\|_\infty}(z_0, \rho_1)$.
- (c) Sous (i)-(iii), F est Hadamard-différentiable au point z_0 et pour chaque $h \in NPC_d^0([0, T], E)$,
 $[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ et

$$\forall h \in NPC_d^0([0, T], E), D_H F(z_0) \cdot h = \int_{[0, T]} D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t) d\mathbf{m}_1(t).$$

Démonstration. (a)

Soit $z_1 \in NPC_d^0([0, T], G)$; $K := \overline{z_1([0, T])} \subset G$ est un compact de E .

Par conséquent, en utilisant le Lemme 3.3.1, il existe $r > 0$ t.q. $V(K, r) \subset G$.

Montrons que $B_{\|\cdot\|_\infty}(z_1, \frac{r}{2}) \subset NPC_d^0([0, T], G)$.

Soit $z \in B_{\|\cdot\|_\infty}(z_1, \frac{r}{2})$.

Soit $y \in z([0, T])$; il existe donc $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, T]^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z(t_n) - y\| = 0$.

Notons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(z(t_n), K) \leq \|z(t_n) - z_1(t_n)\| \leq \|z - z_1\|_\infty < \frac{r}{2},$$

d'où, par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a

$$d(y, K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(z(t_n), K) \leq \frac{r}{2}.$$

Donc $y \in V(K, r) \subset G$. Ainsi $B_{\|\cdot\|_\infty}(z_1, \frac{r}{2}) \subset NPC_d^0([0, T], G)$. Par conséquent, $NPC_d^0([0, T], G)$ est un ouvert de $NPC_d^0([0, T], E)$.

(b)

Pour chaque $z \in NPC_d^0([0, T], G)$, en utilisant (i) et la Proposition 1.2.3, on a $[t \mapsto f(t, z(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R})$ ce qui implique que $[t \mapsto f(t, z(t))]$ est Riemann-intégrable sur $[0, T]$, donc F est bien définie.

Soit $z_1, z_2 \in B_{\|\cdot\|_\infty}(z_0, \rho_1)$.

Puisque, pour chaque $t \in [0, T]$, $|z_1(t) - z_0(t)| \leq \|z_1 - z_0\|_\infty < \rho_1$ et $|z_2(t) - z_0(t)| \leq \|z_2 - z_0\|_\infty < \rho_1$, on a, en utilisant (ii) :

$$\forall t \in [0, T], |f(t, z_1(t)) - f(t, z_2(t))| \leq \zeta(t) \|z_1(t) - z_2(t)\| \leq \zeta(t) \|z_1 - z_2\|_\infty.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 |F(z_1) - F(z_2)| &= \left| \int_0^T f(t, z_1(t)) dt - \int_0^T f(t, z_2(t)) dt \right| \\
 &\leq \int_0^T |f(t, z_1(t)) - f(t, z_2(t))| dt \\
 &= \int_{[0, T]} |f(t, z_1(t)) - f(t, z_2(t))| d\mathbf{m}_1(t) \\
 &\leq \int_{[0, T]} \zeta(t) \|z_1 - z_2\|_\infty d\mathbf{m}_1(t) \\
 &= \int_{[0, T]} \zeta(t) d\mathbf{m}_1(t) \|z_1 - z_2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

(c)

Soit $h \in NPC_d^0([0, T], E)$; en utilisant (a), il existe $\theta^0 > 0$ t.q., $\forall \theta \in]0, \theta^0[$, $z_0 + \theta h \in NPC_d^0([0, T], G)$.
 Posons $\underline{\theta}^0 = \min\{\theta^0, \frac{\rho_1}{2(\|h\|_\infty + 1)}\}$.

Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, \underline{\theta}^0[^\mathbb{N}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$.

En utilisant (iii), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_n} (f(t, z_0(t) + \theta_n h(t)) - f(t, z_0(t))) = D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t). \quad (4.2.1)$$

Puisque, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[t \mapsto \frac{1}{\theta_n} (f(t, z_0(t) + \theta_n h(t)) - f(t, z_0(t)))] \in PC^0([0, T], \mathbb{R})$,
 en utilisant la Proposition 1.1.5 et (4.2.1), on a

$$[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))). \quad (4.2.2)$$

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 \|z_0(t) + \theta_n h(t) - z_0(t)\| &= \|\theta_n h(t)\| \\
 &= |\theta_n| \|h(t)\| \\
 &\leq \underline{\theta}^0 \|h(t)\| \\
 &\leq \frac{\rho_1}{2(\|h\|_\infty + 1)} \|h\|_\infty \\
 &\leq \frac{\rho_1}{2} < \rho_1
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], z_0(t) + \theta_n h(t) \in B(z_0(t), \rho_1).$$

Donc, en utilisant (ii), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \left| \frac{1}{\theta_n} (f(t, z_0(t) + \theta_n h(t)) - f(t, z_0(t))) \right| \leq \zeta(t) |h(t)| \leq \zeta(t) \|h\|_\infty \quad (4.2.3)$$

avec $\|h\|_\infty \zeta \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$. Par conséquent, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_n} (F(z_0 + \theta_n h) - F(z_0)) \\
 &= \int_{[0, T]} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta_n} (f(t, z_0(t) + \theta_n h(t)) - f(t, z_0(t))) d\mathbf{m}_1(t) \\
 &= \int_{[0, T]} D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t) d\mathbf{m}_1(t).
 \end{aligned}$$

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, on obtient que, pour tout $h \in NPC_d^0([0, T], E)$,

$$D_G^+ F(z_0; h) = \int_{[0, T]} D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t) d\mathbf{m}_1(t).$$

De plus, en utilisant (4.2.1) et (4.2.3), on a

$$\forall h \in NPC_d^0([0, T], E), \forall t \in [0, T], |D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t)| \leq \zeta(t) \|h\|_\infty. \quad (4.2.4)$$

Par conséquent, en utilisant (4.2.2), on a

$$\forall h \in NPC_d^0([0, T], E), [t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}). \quad (4.2.5)$$

Puisque l'intégrale de Borel est linéaire, $D_G^+F(z_0; \cdot)$ est linéaire de $NPC_d^0([0, T], E)$ dans \mathbb{R} . De plus, notons que, pour tout $h \in NPC_d^0([0, T], E)$, on a

$$\begin{aligned} |D_G^+F(z_0; h)| &= \left| \int_{[0, T]} D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t) \, d\mathbf{m}_1(t) \right| \\ &\leq \int_{[0, T]} |D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t)| \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &\leq \int_{[0, T]} \zeta(t) \, d\mathbf{m}_1(t) \|h\|_\infty \text{ grâce à (4.2.4).} \end{aligned}$$

Par conséquent, $[h \mapsto D_G^+F(z_0; h)] \in \mathcal{L}(NPC_d^0([0, T], E), \mathbb{R})$.

Ainsi, F est Gâteaux-différentiable au point z_0 et

$$\forall h \in NPC_d^0([0, T], E), D_GF(z_0) \cdot h = \int_{[0, T]} D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot h(t) \, d\mathbf{m}_1(t).$$

Donc, avec (b), en utilisant la Proposition 2.1.7, F est Hadamard-différentiable au point z_0 et $D_GF(z_0) = D_HF(z_0)$. \square

Lemme 4.2.2. *Sous les hypothèses (i-iii) du Lemme 4.2.1, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(a) *La fonction $[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t))] \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; E^*)$ et*

$$\forall t \in [0, T], \|D_{H,2}f(t, z_0(t))\|_{\mathcal{L}} \leq \zeta(t).$$

(b) *Lorsque $E = \mathbb{R}^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t))] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}^{m^*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m^*}))).$$

Démonstration. (a)

Soit $v \in E$; puisque la fonction constante $[t \mapsto v] \in NPC_d^0([0, T], E)$, en utilisant l'assertion (c) du Lemme 4.2.1 et (4.2.4), on a $[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot v] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$, et

$$\forall t \in [0, T], |D_{H,2}f(t, z_0(t)) \cdot v| \leq \zeta(t) \|v\|.$$

Donc on a

$$\forall t \in [0, T], \|D_{H,2}f(t, z_0(t))\|_{\mathcal{L}} \leq \zeta(t).$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 4.1.3, la fonction $[t \mapsto D_{H,2}f(t, z_0(t))]$ est Gelfand-intégrable par rapport à \mathbf{m}_1 .

(b) Posons, pour tout $t \in [0, T]$, $\Lambda(t) = D_{H,2}f(t, z_0(t))$.

Considérons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{R}^{m^*})^m$ la base duale de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathbb{R}^m et la fonction linéaire continue $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m^*}$ définie par, pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\Psi(x) = \sum_{i=1}^m x_i e_i^*$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, en utilisant l'assertion (c) du Lemme 4.2.1 avec la fonction constante $[t \mapsto e_i] \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^m)$, on a

$$[t \mapsto \Lambda(t) \cdot e_i] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))).$$

Par conséquent, on a

$$\mathcal{Z} := [t \mapsto (\Lambda(t) \cdot e_i)_{1 \leq i \leq m}] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))).$$

Ainsi, en utilisant les propriétés des fonctions mesurables, on a

$$\Lambda = \Psi \circ \mathcal{Z} \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}^{m^*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m^*}))).$$

\square

Remarque 4.2.3. *Considérons la condition forte suivante :*

(FC) : $f \in C^0([0, T] \times G, \mathbb{R})$, $\forall (t, x) \in [0, T] \times G$, $D_{F,2}f(t, x)$ existe et $D_{F,2}f \in C^0([0, T] \times G, E^*)$. Tout d'abord, notons que (FC) implique les conditions (i), (ii) et (iii) du Lemme 4.2.1. La condition (FC) est utilisée pour démontrer que la fonctionnelle F du Lemme 4.2.1 est continûment Fréchet-différentiable sur $C^0([0, T], G)$. Voici les étapes pour y parvenir. Sous (FC), l'opérateur de Nemytskii $N_f : C^0([0, T], G) \rightarrow C^0([0, T], \mathbb{R})$, défini par, pour tout $z \in C^0([0, T], G)$, pour tout $t \in [0, T]$, $N_f(z)(t) = f(t, z(t))$ appartient à $C^1(C^0([0, T], G), C^0([0, T], \mathbb{R}))$ et, $\forall h \in C^0([0, T], E)$, $\forall t \in [0, T]$, $(D_F N_f(z) \cdot h)(t) = D_{F,2}f(t, z(t)) \cdot h(t)$. Ce résultat est démontré dans [10] (Lemme 12). Et puisque l'opérateur $I : C^0([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $\varphi \in C^0([0, T], \mathbb{R})$, $I(\varphi) := \int_0^T \varphi(t) dt$, est linéaire continue, on a $I \in C^1(C^0([0, T], \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Ainsi $F := I \circ N_f \in C^1(C^0([0, T], G), \mathbb{R})$.

La principale amélioration du Lemme 4.2.1 est de donner des conditions plus faibles que (FC) pour que F soit Hadamard-différentiable en un point et d'éviter la condition (FC). Ce lemme nous permet d'alléger les hypothèses sur l'intégrande lorsque l'on aura besoin que F soit seulement Hadamard-différentiable en un point.

Dans le lemme suivant, on démontre la Hadamard-différentiabilité d'une fonctionnelle définie à partir d'une intégrale et dépendant d'un paramètre avec des hypothèses de Hadamard-différentiabilité sur l'intégrande.

Lemme 4.2.4. *Soit W un ouvert de Y contenant $\pi_0 \in Y$, $\phi : [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $[\pi \mapsto x(\pi)]$ une fonction de W dans $C^1([0, T], A)$. On considère les conditions suivantes.*

(i) $\phi \in C^0([0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times W, \mathbb{R})$.

(ii) $x(\cdot)$ est continue au point π_0 .

(iii) Il existe $\rho_2 > 0$ et $\zeta \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q., $\forall t \in [0, T]$,

$$\forall (u_1, v_1, \pi_1), (u_2, v_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}((x(\pi_0)(t), x(\pi_0)'(t), \pi_0), \rho_2),$$

$$|\phi(t, u_1, v_1, \pi_1) - \phi(t, u_2, v_2, \pi_2)| \leq \zeta(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1.$$

(iv) Pour tout $t \in [0, T]$, $\forall \pi \in W$, $D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)$ existe.

(v) Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $[\pi \mapsto D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \rho_2)$.

(vi) Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $[\pi \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \rho_2)$.

(vii) Pour tout $\pi \in B(\pi_0, \rho_2)$,

$$[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)^*, \mathcal{B}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)^*))).$$

On considère la fonctionnelle $\Phi : C^1([0, T], A) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in C^1([0, T], A)$, pour tout $\pi \in W$, $\Phi(x, \pi) := \int_0^T \phi(t, x(t), x'(t), \pi) dt$.

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(a) Sous (i)-(iii), il existe $\alpha > 0$ t.q., pour tout $\pi \in B(\pi_0, \alpha) \subset W$, $[x \mapsto \Phi(x, \pi)]$ est lipschitzienne sur $B_{\|\cdot\|_{C^1}}(x(\pi), \alpha)$.

(b) Sous (i)-(iv), pour tout $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, pour tout $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, pour tout $\varpi \in Y$, $[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot (h(t), h'(t), \varpi)]$ appartient à $\mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R})$, $[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)]$ est Gelfand-intégrable par rapport à \mathfrak{m}_1 , $D_H\Phi(x(\pi), \pi)$ existe et, pour tout $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ et $\varpi \in Y$, on a

$$\begin{aligned} D_H\Phi(x(\pi), \pi) \cdot (h, \varpi) &= \int_{[0, T]} D_{H,2}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot h(t) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &+ \int_{[0, T]} D_{H,3}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot h'(t) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &+ \int_{[0, T]} D_{H,4}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot \varpi d\mathfrak{m}_1(t). \end{aligned}$$

(c) Sous (i)-(v), $[\pi \mapsto D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \alpha)$.

(d) Sous (i)-(vii), $[\pi \mapsto D_H \Phi(x(\pi), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \alpha)$.

Démonstration. (a)

Considérons l'opérateur $M : C^1([0, T], A) \times W \rightarrow NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)$ défini par

$$\forall (x, \pi) \in C^1([0, T], A) \times W, M(x, \pi) := [t \mapsto (x(t), x'(t), \pi)],$$

et la fonctionnelle $F : NPC_d^0([0, T], A \times \mathbb{R}^n \times W) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall z \in NPC_d^0([0, T], A \times \mathbb{R}^n \times W), F(z) := \int_0^T \phi(t, z(t)) dt.$$

Remarquons que $M(C^1([0, T], A) \times W) \subset NPC_d^0([0, T], A \times \mathbb{R}^n \times W)$.

De plus, notons que $\Phi = F \circ M$.

Considérons l'opérateur $\bar{M} : C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \times Y \rightarrow NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)$ défini par

$$\forall (x, \pi) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \times Y, \bar{M}(x, \pi) := [t \mapsto (x(t), x'(t), \pi)].$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(x_1, \pi_1), (x_2, \pi_2) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \times Y$; notons que, pour chaque $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \bar{M}(\lambda(x_1, \pi_1) + (x_2, \pi_2))(t) &= \bar{M}(\lambda x_1 + x_2, \lambda \pi_1 + \pi_2)(t) \\ &= ((\lambda x_1 + x_2)(t), (\lambda x_1 + x_2)'(t), \lambda \pi_1 + \pi_2) \\ &= \lambda(x_1(t), x_1'(t), \pi_1) + (x_2(t), x_2'(t), \pi_2) \\ &= \lambda \bar{M}(x_1, \pi_1)(t) + \bar{M}(x_2, \pi_2)(t) \\ &= (\lambda \bar{M}(x_1, \pi_1) + \bar{M}(x_2, \pi_2))(t); \end{aligned}$$

d'où $\bar{M}(\lambda(x_1, \pi_1) + (x_2, \pi_2)) = \lambda \bar{M}(x_1, \pi_1) + \bar{M}(x_2, \pi_2)$.

Donc \bar{M} est linéaire.

Soit $(x, \pi) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \times Y$; on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\bar{M}(x, \pi)\|_\infty &= \sup_{t \in [0, T]} (\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\pi\|_Y) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t \in [0, T]} \|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\pi\|_Y \\ &= \|x\|_{C^1} + \|\pi\|_Y = \|(x, \pi)\|_1. \end{aligned}$$

Puisque $M = \bar{M}|_{C^1([0, T], A) \times W}$, on a $M \in C^1(C^1([0, T], A) \times W, NPC_d^0([0, T], A \times \mathbb{R}^n \times W))$.

Posons, pour chaque $\pi \in W$, $z(\pi) = M(x(\pi), \pi)$. Avec (ii), la fonction $[\pi \mapsto (x(\pi), \pi)]$ est continue au point π_0 .

Donc, par composition de fonctions continues, z est continue au point π_0 .

Par conséquent, on a

$$\exists \underline{\alpha} > 0, \text{ t.q. } B(\pi_0, \underline{\alpha}) \subset W \text{ et } \forall \pi \in B(\pi_0, \underline{\alpha}), \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_\infty < \frac{\rho_2}{2}.$$

On prend $\alpha := \min\{\underline{\alpha}, \frac{\rho_2}{2}\}$. Soit $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$; montrons que les conditions (i)-(ii) du Lemme 4.2.1 sont vérifiées avec $z_0 = z(\pi)$ pour la fonctionnelle F .

Avec (a), la condition (i) du Lemme 4.2.1 est vérifiée avec $z_0 = z(\pi)$ pour la fonctionnelle F .

Soit $t \in [0, T]$, soit $(u_1, v_1, \pi_1), (u_2, v_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha)$.

Remarquons que $B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha) \subset B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho_2)$. Soit $y \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha)$; notons que

$$\begin{aligned} \|y - z(\pi_0)(t)\|_1 &= \|y - z(\pi)(t) + z(\pi)(t) - z(\pi_0)(t)\|_1 \\ &\leq \|y - z(\pi)(t)\|_1 + \|z(\pi)(t) - z(\pi_0)(t)\|_1 \\ &\leq \alpha + \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_\infty < \alpha + \frac{\rho_2}{2} \leq \frac{\rho_2}{2} + \frac{\rho_2}{2} = \rho_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $y \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho_2)$; donc on a

$$B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha) \subset B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho_2).$$

Ainsi $(u_1, v_1, \pi_1), (u_2, v_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho_2)$. Par conséquent, avec (ii), on a

$$|\phi(t, u_1, v_1, \pi_1) - \phi(t, u_2, v_2, \pi_2)| \leq \zeta(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1.$$

Donc la condition (ii) du Lemme 4.2.1 est vérifiée avec $z_0 = z(\pi)$ pour la fonctionnelle F .

Par conséquent, en utilisant le Lemme 4.2.1, on a, pour tout $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, F est lipschitzienne sur $B_{\|\cdot\|_\infty}(z(\pi), \alpha)$.

Puisque, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, $M(\cdot, \pi)$ est lipschitzien sur $B_{\|\cdot\|_{C^1}}(x(\pi), \alpha)$ et $M(\cdot, \pi)(B_{\|\cdot\|_{C^1}}(x(\pi), \alpha)) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(z(\pi), \alpha)$, on obtient que $[x \mapsto \Phi(x, \pi)]$ est lipschitzien sur $B_{\|\cdot\|_{C^1}}(x(\pi), \alpha)$.

(b)

De plus, en supposant (iv), on obtient que, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, $\forall t \in [0, T]$,

$D_{H,(2,3,4)}\phi(t, z(\pi)(t))$ existe.

Donc la condition (iii) du Lemme 4.2.1 est vérifiée avec $z_0 = z(\pi)$ pour la fonctionnelle F .

Par conséquent, en utilisant le Lemme 4.2.1, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, $\forall u \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)$,

$$[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot u(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R})$$

et, $\forall u \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)$,

$$D_H F(z(\pi)) \cdot u := \int_{[0, T]} D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot u(t) \, d\mathfrak{m}_1(t).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de composition des fonctions Hadamard-différentiables, on a

$$\begin{aligned} D_H \Phi(x(\pi), \pi) &= D_H(F \circ M)(x(\pi), \pi) \\ &= D_H F(M(x(\pi), \pi)) \circ D_H M(x(\pi), \pi) \\ &= D_H F(z(\pi)) \circ \overline{M}; \end{aligned}$$

d'où, $\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha)$, $\forall (h, \varpi) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \times Y$,

$$\begin{aligned} D_H \Phi(x(\pi), \pi) \cdot (h, \varpi) &= D_H F(z(\pi)) \cdot \overline{M}(h, \varpi) \\ &= \int_{[0, T]} D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot (h(t), h'(t), \varpi) \, d\mathfrak{m}_1(t). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le Lemme 4.2.2, pour tout $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$,

$[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)]$ est Gelfand-intégrable par rapport à \mathfrak{m}_1 , avec

$$\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \forall t \in [0, T], \|D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq \zeta(t), \quad (4.2.6)$$

et

$$[t \mapsto D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^*)). \quad (4.2.7)$$

(c)

Maintenant supposons, de plus, que la condition (v) est satisfaite.

Soit $\hat{\pi} \in B(\pi_0, \alpha)$.

Posons, $\forall (t, \pi) \in [0, T] \times B(\pi_0, \alpha)$,

$\beta(t, \pi) := \|D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) - D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$.
 Puisque $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} \in C^0((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^*, \mathbb{R})$ et avec (4.2.7), on a

$$\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \beta(\cdot, \pi) \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T])), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)). \quad (4.2.8)$$

De plus, en utilisant (4.2.6), on a

$$\forall t \in [0, T], \forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \beta(t, \pi) \leq 2\zeta(t). \quad (4.2.9)$$

En outre, en utilisant (v), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \beta(t, \pi) = 0. \quad (4.2.10)$$

Ainsi, en utilisant les assertions (4.2.8), (4.2.9) et (4.2.10) et le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \int_{[0, T]} \beta(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t) = 0. \quad (4.2.11)$$

De plus, notons que, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, pour chaque $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} & (D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) - D_{H,1}\Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})) \cdot h \\ &= D_H\Phi(x(\pi), \pi) \cdot (h, 0) - D_H\Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi}) \cdot (h, 0) \\ &= \int_{[0, T]} D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot (h(t), h'(t)) d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad - \int_{[0, T]} D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi}) \cdot (h(t), h'(t)) d\mathbf{m}_1(t) \\ &= \int_{[0, T]} (D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \\ &\quad - D_{H,(2,3)}\phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi})) \cdot (h(t), h'(t)) d\mathbf{m}_1(t) \\ &\leq \int_{[0, T]} \beta(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t) \|h\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, on a

$$\|D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) - D_{H,1}\Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \leq \int_{[0, T]} \beta(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de comparaison des limites et avec (4.2.11), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) - D_{H,1}\Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Puisque $\hat{\pi} \in B(\pi_0, \alpha)$ était arbitrairement choisi, on a démontré que $[\pi \mapsto D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \alpha)$.

(d)

Supposons, en outre, que les assertions (vi) et (vii) sont satisfaites.

Soit $\hat{\pi} \in B(\pi_0, \alpha)$.

Posons, $\forall(t, \pi) \in [0, T] \times B(\pi_0, \alpha)$,

$\gamma(t, \pi) := \|D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) - D_{H,(2,3,4)}\phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$.

Puisque $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} \in C^0((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)^*, \mathbb{R})$ et avec (vii), on a

$$\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \gamma(\cdot, \pi) \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T])), (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)). \quad (4.2.12)$$

De plus, en utilisant (4.2.6), on a

$$\forall t \in [0, T], \forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \gamma(t, \pi) \leq 2\zeta(t). \quad (4.2.13)$$

Ensuite, en utilisant (vi), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \gamma(t, \pi) = 0. \quad (4.2.14)$$

Ainsi, en utilisant les assertions (4.2.12), (4.2.13), (4.2.14) et le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \int_{[0, T]} \gamma(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t) = 0. \quad (4.2.15)$$

De plus, notons que, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, pour chaque $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ et pour chaque $\varpi \in Y$, on a

$$\begin{aligned} & (D_H \Phi(x(\pi), \pi) - D_H \Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})) \cdot (h, \varpi) \\ &= D_H \Phi(x(\pi), \pi) \cdot (h, \varpi) - D_H \Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi}) \cdot (h, \varpi) \\ &= \int_{[0, T]} D_{H, (2,3,4)} \phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \cdot (h(t), h'(t), \varpi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad - \int_{[0, T]} D_{H, (2,3,4)} \phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi}) \cdot (h(t), h'(t), \varpi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &= \int_{[0, T]} (D_{H, (2,3,4)} \phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) \\ &\quad - D_{H, (2,3,4)} \phi(t, x(\hat{\pi})(t), x(\hat{\pi})'(t), \hat{\pi})) \cdot (h(t), h'(t), \varpi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &\leq \int_{[0, T]} \gamma(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t) (\|h\|_{C^1} + \|\varpi\|). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, on a

$$\|D_H \Phi(x(\pi), \pi) - D_H \Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \leq \int_{[0, T]} \gamma(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de comparaison des limites et avec (4.2.15), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|D_H \Phi(x(\pi), \pi) - D_H \Phi(x(\hat{\pi}), \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Comme $\hat{\pi} \in B(\pi_0, \alpha)$ était arbitrairement choisi, on a démontré que $[\pi \mapsto D_H \Phi(x(\pi), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \alpha)$. \square

4.2.2 Lemme de DuBois-Reymond

On commence par un lemme préliminaire pour le lemme de DuBois-Reymond.

Lemme 4.2.5. *On note $C_c^1(]0, T[, \mathbb{R})$ l'ensemble des $\varphi \in C^1(]0, T[, \mathbb{R})$ dont le support, i.e. l'adhérence de $\{t \in]0, T[: \varphi(t) \neq 0\}$ (noté $\text{supp}(\varphi)$) est compact et inclus dans $]0, T[$.*

À partir d'une fonction $\varphi \in C_c^1(]0, T[, \mathbb{R})$, on considère la fonction $\tilde{\varphi} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \in]0, T[\\ 0 & \text{si } t = T. \end{cases}$$

Alors $\tilde{\varphi} \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R})$ et, pour tout $t \in]0, T[$, $\tilde{\varphi}'(t) = \varphi'(t)$.

Démonstration. Puisque $\varphi \in C_c^1(]0, T[, \mathbb{R})$, $K := \text{supp}(\varphi)$ est un compact et $K \subset]0, T[$.

Posons $G :=]0, T[$; puisque $[t \mapsto d(t, \mathbb{R} \setminus G)]$ est 1-lipschitzienne et K est compact, il existe $t_0 \in K$ t.q. $\inf_{t \in K} d(t, \mathbb{R} \setminus G) = d(t_0, \mathbb{R} \setminus G)$.

Puisque $\mathbb{R} \setminus G$ est fermé et $t_0 \in K \subset G$, on a $r := d(t_0, \mathbb{R} \setminus G) > 0$.

De plus, $]0, r[\subset]0, T[\setminus K$ et $]T - r, T[\subset]0, T[\setminus K$.

En effet, si $t \in]0, r[$, alors $0 < t < r$. En raisonnant par l'absurde, si $t \in K$, $r \leq d(t, \mathbb{R} \setminus G) \leq |t - 0| = t < r$; ce qui est absurde. Donc $t \in]0, T[\setminus K$.

Si $t \in]T - r, T[$, en raisonnant par l'absurde, si $t \in K$, $r \leq d(t, \mathbb{R} \setminus G) \leq |t - T| < r$; ce qui est absurde. Donc $t \in]0, T[\setminus K$.

Par conséquent, on a $]0, r[\cup]T - r, T[\subset]0, T[\setminus K$.

Ainsi, $\tilde{\varphi}|_{]0, r[} = \varphi|_{]0, r[} = 0$ et $\tilde{\varphi}|_{]T - r, T[} = \varphi|_{]T - r, T[} = 0$.

Puisque φ est continûment dérivable sur $]0, T[$, $\tilde{\varphi}|_{]0, T[}$ est continûment dérivable sur $]0, T[$.

De plus, $\tilde{\varphi}(0+) = \tilde{\varphi}(0) = 0$ et $\tilde{\varphi}(T-) = \tilde{\varphi}(T) = 0$.

Ainsi $\tilde{\varphi}$ est continue sur $[0, T]$.

Puisque $\tilde{\varphi}'|_{]0, r[} = \varphi'|_{]0, r[} = 0$ et $\tilde{\varphi}'|_{]T - r, T[} = \varphi'|_{]T - r, T[} = 0$, on a $\tilde{\varphi}'(0+) = \tilde{\varphi}'(0) = 0$ et $\tilde{\varphi}'(T-) = \tilde{\varphi}'(T) = 0$.

Donc $\tilde{\varphi}'(0)$ et $\tilde{\varphi}'(T)$ existent et $\tilde{\varphi}'(0) = 0$ et $\tilde{\varphi}'(T) = 0$.

Par conséquent, $\tilde{\varphi}'$ est continue aux points 0 et T . Donc $\tilde{\varphi} \in C^1_{0,0}([0, T], \mathbb{R})$.

De plus, puisque, $\forall t \in]0, T[$, $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t)$, on a : $\forall t \in]0, T[$, $\tilde{\varphi}'(t) = \varphi'(t)$. \square

Dans le lemme suivant, on énonce un lemme de DuBois-Reymond sur $C^1_c(]0, T[, \mathbb{R})$.

Lemme 4.2.6. *On note $\mathcal{L}^1_{loc}([0, T[, \mathcal{B}([0, T[))$, $\mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ t.q., pour chaque intervalle K compact inclus dans $]0, T[$, $f|_K$ est Borel-intégrable sur K par rapport à \mathbf{m}_1 .*

Soit $a \in \mathcal{L}^1_{loc}([0, T[, \mathcal{B}([0, T[))$, $\mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ t.q.

$$\forall \varphi \in C^1_c(]0, T[, \mathbb{R}), \int_{]0, T[} a(t) \cdot \varphi'(t) d\mathbf{m}_1(t) = 0.$$

Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$, t.q., $\forall t \in]0, T[$, $\mathbf{m}_1 - p.p.$, $a(t) = c$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration de ce Lemme, qu'on peut appeler lemme de DuBois-Reymond (généralisé), dans [13] p.122. \square

Dans le lemme suivant, on énonce un lemme de DuBois-Reymond adapté à nos problèmes en Calcul des Variations.

Lemme 4.2.7. *Soit $a \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ t.q.*

$$\forall \varphi \in C^1_{0,0}([0, T], \mathbb{R}), \int_{[0, T]} a(t) \cdot \varphi'(t) d\mathbf{m}_1(t) = 0.$$

Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$, t.q., $\forall t \in [0, T]$, $\mathbf{m}_1 - p.p.$, $a(t) = c$.

Démonstration. Remarquons que

$$a|_{]0, T[} \in \mathcal{L}^1_{loc}([0, T[, \mathcal{B}([0, T[))$$

Soit $\varphi \in C^1_c(]0, T[, \mathbb{R})$; en utilisant le Lemme 4.2.5, il existe $\tilde{\varphi} \in C^1_{0,0}([0, T], \mathbb{R})$ t.q., $\forall t \in]0, T[$, $\tilde{\varphi}'(t) = \varphi'(t)$.

Puisque $\int_{]0, T[} a|_{]0, T[}(t) \cdot \varphi'(t) d\mathbf{m}_1(t) = \int_{[0, T]} a(t) \cdot \tilde{\varphi}'(t) d\mathbf{m}_1(t) = 0$, d'après le Lemme 4.2.6, il existe $c \in \mathbb{R}$, t.q., $\forall t \in]0, T[$, $\mathbf{m}_1 - p.p.$, $a(t) = c$.

Par conséquent, puisque $\{0, T\}$ est \mathbf{m}_1 -négligeable, on a :

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{m}_1 - p.p., a(t) = c.$$

\square

À l'aide des résultats sur l'intégrale de Gelfand, on généralise le lemme précédent à \mathbb{R}^{m^*} .

Lemme 4.2.8. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T])), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}^{m^*})$ t.q.

$$\forall \varphi \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^m), \int_{[0,T]} a(t) \cdot \varphi'(t) d\mathfrak{m}_1(t) = 0.$$

Alors, il existe $c \in \mathbb{R}^{m^*}$, t.q., $\forall t \in [0, T]$, $\mathfrak{m}_1 - p.p.$, $a(t) = c$.

Démonstration. En utilisant le Lemme 4.1.4, on a

$$\forall \varphi \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^m), [t \mapsto a(t) \cdot \varphi'(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T])), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}).$$

De plus, pour chaque $\varphi \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^m)$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \int_{[0,T]} a(t) \cdot \varphi'(t) d\mathfrak{m}_1(t) &= \int_{[0,T]} \sum_{i=1}^m (a(t) \cdot e_i) e_i^*(\varphi'(t)) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{[0,T]} (a(t) \cdot e_i) e_i^*(\varphi'(t)) d\mathfrak{m}_1(t), \end{aligned}$$

où $(e_i^*)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{R}^{m^*})^m$ est la base duale de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathbb{R}^m .
Par conséquent, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall u \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}), \int_{[0,T]} (a(t) \cdot e_i) u'(t) d\mathfrak{m}_1(t) = 0.$$

Donc, en utilisant le Lemme 4.2.7, on obtient que

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \exists c_i \in \mathbb{R} \text{ t.q., } \forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., a(t) \cdot e_i = c_i.$$

En posant $c = \sum_{i=1}^m c_i e_i^*$, on obtient que

$$\forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., a(t) = \sum_{i=1}^m (a(t) \cdot e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^m c_i e_i^* = c.$$

□

4.2.3 Équation d'Euler à paramètre

Dans le lemme suivant, à l'aide du Lemme 4.2.4 et du lemme de DuBois Reymond, Lemme 4.2.8, on démontre une équation d'Euler dépendant d'un paramètre avec des hypothèses de Hadamard-différentielle partielle sur l'intégrande. Notons que nos hypothèses sont plus faibles que les résultats existants. En effet, pour montrer l'équation d'Euler, on suppose le plus souvent l'existence d'une Fréchet-différentielle partielle continue, cf. [25] (p.106).

Lemme 4.2.9. Dans le cadre du Lemme 4.2.4, on suppose que les conditions (i)-(iv) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées.

Si $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall h \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, $D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) \cdot h = 0$.
- (ii) Il existe $c \in \mathbb{R}^{n^*}$ t.q., pour tout $t \in [0, T]$, $\mathfrak{m}_1 - p.p.$,

$$D_{H,3}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi) = \int_{[0,t]}^{\mathfrak{G}} D_{H,2}\phi(s, x(\pi)(s), x(\pi)'(s), \pi) d\mathfrak{m}_1(s) + c.$$

Démonstration. En utilisant (b) du Lemme 4.2.4, on obtient que

$L_1 := [t \mapsto D_{H,2}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)] \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T])), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}^{n^*})$,
 et $L_2 := [t \mapsto D_{H,3}\phi(t, x(\pi)(t), x(\pi)'(t), \pi)] \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T])), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}^{n^*})$.

Posons, pour chaque $t \in [0, T]$, $a(t) = \int_{[0,t]}^{\mathfrak{G}} L_1(s) d\mathfrak{m}_1(s)$.

En utilisant le Lemme 4.1.5, on obtient que $a \in AC([0, T], \mathbb{R}^{n^*})$ et

$$\forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., a'(t) = L_1(t). \quad (4.2.16)$$

Considérons l'opérateur bilinéaire continu $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{n^*} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, défini par, pour tout $(l, y) \in \mathbb{R}^{n^*} \times \mathbb{R}^n$,
 $\mathcal{Q}(l, y) := l \cdot y$.

(i) \Rightarrow (ii)

Soit $h \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

D'abord, notons que, en utilisant la proposition 1 de [1], p. 128,

$$\bar{b} := [t \mapsto \mathcal{Q}(a(t), h(t))] \in AC([0, T], \mathbb{R})$$

et

$$\begin{aligned} 0 = \bar{b}(T) - \bar{b}(0) &= \int_{[0,T]} \bar{b}'(t) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &= \int_{[0,T]} a'(t) \cdot h(t) + a(t) \cdot h'(t) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &= \int_{[0,T]} L_1(t) \cdot h(t) + a(t) \cdot h'(t) d\mathfrak{m}_1(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{[0,T]} L_1(t) \cdot h(t) d\mathfrak{m}_1(t) = - \int_{[0,T]} a(t) \cdot h'(t) d\mathfrak{m}_1(t).$$

Donc, en utilisant l'hypothèse (i), on a

$$\begin{aligned} 0 = D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) \cdot h &= \int_{[0,T]} (L_1(t) \cdot h(t) + L_2(t) \cdot h'(t)) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &= \int_{[0,T]} (-a(t) \cdot h'(t) + L_2(t) \cdot h'(t)) d\mathfrak{m}_1(t) \\ &= \int_{[0,T]} ((L_2(t) - a(t)) \cdot h'(t)) d\mathfrak{m}_1(t). \end{aligned}$$

Ainsi, on a démontré que

$$\forall h \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^n), \int_{[0,T]} (L_2(t) - a(t)) \cdot h'(t) d\mathfrak{m}_1(t) = 0.$$

Donc, en utilisant le Lemme 4.2.8, on obtient qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{n^*}$ t.q.

$$\forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., L_2(t) = c + a(t).$$

(ii) \Rightarrow (i)

Puisque, $\forall t \in [0, T]$, $\mathfrak{m}_1 - p.p.$, $L_2(t) = a(t) + c$ et $a \in AC([0, T], \mathbb{R}^{n^*})$, on a

$$\forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., L_2'(t) = a'(t) = L_1(t).$$

Soit $h \in C_{0,0}^1([0, T], \mathbb{R}^{n^*})$. En utilisant la proposition 1 de [1], p. 128, on a

$\tilde{b} := [t \mapsto \mathcal{Q}(a(t) + c, h(t))] \in AC([0, T], \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in [0, T], \mathfrak{m}_1 - p.p., \tilde{b}'(t) = a'(t) \cdot h(t) + (a(t) + c) \cdot h'(t) = L_2'(t) \cdot h(t) + L_2(t) \cdot h'(t).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
 D_{H,1}\Phi(x(\pi), \pi) \cdot h &= \int_{[0,T]} (L_1(t) \cdot h(t) + L_2(t) \cdot h'(t)) \, d\mathbf{m}_1(t) \\
 &= \int_{[0,T]} (L'_2(t) \cdot h(t) + L_2(t) \cdot h'(t)) \, d\mathbf{m}_1(t) \\
 &= \int_{[0,T]} \tilde{b}'(t) \, d\mathbf{m}_1(t) \\
 &= \tilde{b}(T) - \tilde{b}(0) = (a(T) + c) \cdot h(T) - (a(0) + c) \cdot h(0) = 0.
 \end{aligned}$$

□

4.3 Le théorème de l'enveloppe en Calcul des Variations

Dans cette section, on énonce un théorème de l'enveloppe dans le cadre du Calcul des Variations. Rappelons qu'un théorème de l'enveloppe consiste à donner des conditions pour obtenir la différentiabilité de la fonction valeur et à donner une expression de sa différentielle. Notons que l'intégrale de Gelfand nous sera très utile pour donner l'expression de la Gâteaux-différentielle et de la Fréchet-différentielle de la fonction valeur.

Commençons par préciser le problème que nous considérons.

Soit $T \in]0, +\infty[$; soit $x_0, x_T \in A$.

On considère les fonctions $f : [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $h_j : [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

Pour chaque $\pi \in Y$, on considère le problème de Lagrange à paramètre suivant

$$(\mathcal{V}, \pi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \int_0^T f(t, x(t), x'(t), \pi) dt \\ \text{lorsque} \quad x \in C^1([0, T], A) \\ \quad \quad \quad x(0) = x_0, x(T) = x_T \\ \quad \quad \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \int_0^T g_i(t, x(t), x'(t), \pi) dt \geq 0 \\ \quad \quad \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, \int_0^T h_j(t, x(t), x'(t), \pi) dt = 0. \end{array} \right.$$

Pour chaque $\pi \in Y$, on note $V(\pi)$ la valeur du problème (\mathcal{V}, π) .

Soit $\pi_0 \in Y$. on considère les conditions suivantes qui serviront d'hypothèses pour le théorème de l'enveloppe.

Conditions sur la solution.

(BSOL1) Il existe P_0 , un voisinage ouvert de π_0 , t.q., $\forall \pi \in P_0$, $\underline{x}(\pi)$ est solution de (\mathcal{V}, π) et $\underline{x}(\cdot)$ est continue au point π_0 .

(BSOL2) Il existe $\omega \in Y$ t.q. $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \omega)$ existe.

(BSOL2-bis) Pour tout $\omega \in Y$, $D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \omega)$ existe.

(BSOL2-ter) Pour tout $\pi \in P_0$, pour tout $\omega \in Y$, $D_G^+ \underline{x}(\pi; \omega)$ existe.

Conditions sur l'intégrande du critère et des contraintes.

(BINT1) Pour tout $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{h_j : j \in \{1, \dots, l\}\}$, $\phi \in C^0([0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times P_0, \mathbb{R})$.

(BINT2) Il existe $\rho > 0$ et $\kappa \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q., pour tout $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{h_j : j \in \{1, \dots, l\}\}$,

$$\forall t \in [0, T], \forall (u_1, v_1, \pi_1) \in B_{\|\cdot\|_1}((\underline{x}(\pi_0))(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0), \rho),$$

$$\forall (u_2, v_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}((\underline{x}(\pi_0))(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0), \rho),$$

$$|\phi(t, u_1, v_1, \pi_1) - \phi(t, u_2, v_2, \pi_2)| \leq \kappa(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1.$$

(BINT3) Pour tout $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{h_j : j \in \{1, \dots, l\}\}$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \pi \in P_0$, $D_{H,(2,3,4)}\phi(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi)$ existe.

(BINT4) Pour tout $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{h_j : j \in \{1, \dots, l\}\}$, pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $[\pi \mapsto D_{H,(2,3)}\phi(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \rho) \subset P_0$.

(BINT4-bis) Pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : i \in \{1, \dots, k\}\} \cup \{h_j : j \in \{1, \dots, l\}\}$, pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $[\pi \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi)]$ est continue sur $B(\pi_0, \rho)$.

(BINT5) Pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, pour tout $\pi \in B(\pi_0, \rho)$, $[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}\phi(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T])), ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)^*, \mathcal{B}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y)^*))$.

Conditions seulement sur les intégrandes des contraintes.

(BCONT) Pour chaque $((\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j)_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\}$, $\underline{x}(\pi_0)(\cdot)$ n'est pas solution de l'équation d'Euler dans la forme de Dubois-Reymond (cf. [25] p.106)

$$\left. \begin{aligned} \forall t \in [0, T], \mathbf{m}_1 - p.p., \\ D_{H,3}\phi_{\lambda,\mu}(t, x(t), x'(t)) = \int_{[0,t]}^{\mathfrak{G}} D_{H,2}\phi_{\lambda,\mu}(s, x(s), x'(s)) d\mathbf{m}_1(s) + c_{\lambda,\mu}, \end{aligned} \right\}$$

où pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{\lambda,\mu}(t, x, v) := \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i g_i(t, x, v, \pi_0) + \sum_{1 \leq j \leq l} \mu_j h_j(t, x, v, \pi_0) \text{ et } c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{R}^{n*}.$$

Dans le théorème suivant on énonce le théorème de l'enveloppe.

Théorème 4.3.1. (Théorème de l'enveloppe) Partie (I). *Sous (BSOL1), (BSOL2), (BINT1), (BINT2), (BINT3), (BINT4) et (BCONT), $D_G^+V(\pi_0; \omega)$ existe et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à la solution $\underline{x}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{V}, π_0) , t.q.*

$$\begin{aligned} D_G^+V(\pi_0; \omega) &= \int_{[0,T]} D_{H,4}f(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t) + \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) \int_{[0,T]} D_{H,4}g_i(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) \int_{[0,T]} D_{H,4}h_j(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Partie (II). *Sous (BSOL1), (BSOL2-bis), (BINT1), (BINT2), (BINT3), (BINT4) et (BCONT), V est Gâteaux-différentiable au point π_0 et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à la solution $\underline{x}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{V}, π_0) , t.q.*

$$\begin{aligned} D_G V(\pi_0) &= \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t) + \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}g_i(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}h_j(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Partie (III). *Sous (BSOL1), (BSOL2-ter), (BINT1), (BINT2), (BINT3), (BINT4-bis), (BCONT) et (BINT5), il existe un voisinage ouvert Q de π_0 dans Y , $Q \subset P_0$, t.q. V est continûment Fréchet-différentiable sur Q et, $\forall \pi \in Q$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à la solution $\underline{x}(\pi)$ pour le problème (\mathcal{V}, π) , t.q.*

$$\begin{aligned} D_F V(\pi) &= \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t) + \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}g_i(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}h_j(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Commentaires sur le Théorème 4.3.1 : les principales contributions du Théorème 4.3.1 sont les suivantes :

- On ne suppose pas de régularité sur les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker.
- On utilise une hypothèse d'Hadamard-différentiabilité partielle pour l'intégrande de la fonction de l'objectif et des fonctions constituant les contraintes d'inégalité et d'égalité.
- Pour la solution, on suppose seulement l'existence d'une dérivée directionnelle par rapport au paramètre.

- On ne suppose pas l'existence d'un produit scalaire continu sur le dual d'un ensemble comme dans le théorème de l'enveloppe du cas statique. Nous verrons que nous avons déjà construit un tel produit scalaire dans le chapitre 1.

Notons que le Théorème 4.3.1 sera démontré dans la section suivante.

4.4 Preuve du Théorème de l'enveloppe.

Notre stratégie est de transformer le problème (\mathcal{V}, π) en un problème (\mathcal{M}^0, π) où $\pi \in Y$. Pour cela, posons $\mathbb{X} := C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$,

$\mathbb{A} := C^1_{x_0, x_T}([0, T], \mathbb{R}^n) = \{x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : x(0) = x_0 \text{ et } x(T) = x_T\}$,

$\mathbb{S} = C^1_{0,0}([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{G}^0 := C^1_{x_0, x_T}([0, T], A) = C^1([0, T], A) \cap C^1_{x_0, x_T}([0, T], \mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{Y} = Y$. On considère les fonctionnelles $f^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(x, \pi) \in \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y}$, $f^0(x, \pi) := \int_0^T f(t, x(t), x'(t), \pi) dt$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $g_i^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x, \pi) \in \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y}$, $g_i^0(x, \pi) := \int_0^T g_i(t, x(t), x'(t), \pi) dt$ et $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $h_j^0 : \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x, \pi) \in \mathbb{G}^0 \times \mathbb{Y}$, $h_j^0(x, \pi) := \int_0^T h_j(t, x(t), x'(t), \pi) dt$.

Pour chaque $\pi \in Y$, le problème (\mathcal{V}, π) peut se réécrire sous la forme suivante

$$(\mathcal{M}^0, \pi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f^0(z, \pi) \\ \text{lorsque } z \in \mathbb{G}^0 \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^0(z, \pi) \geq 0 \\ \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^0(z, \pi) = 0. \end{array} \right.$$

4.4.1 Preuve de la Partie (I)

Pour prouver la Partie (I), nous allons démontrer que les conditions (A⁰1), (A⁰2), (A⁰3), (A⁰4), (A⁰5) et (A⁰6) du Théorème 2.5.5 sont vérifiées pour le problème (\mathcal{M}^0, π) .

On considère les fonctionnelles $F : C^1([0, T], A) \times P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout

$(x, \pi) \in C^1([0, T], A) \times P_0$, $F(x, \pi) := \int_0^T f(t, x(t), x'(t), \pi) dt$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $G_i : C^1([0, T], A) \times P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(x, \pi) \in C^1([0, T], A) \times P_0$, $G_i(x, \pi) := \int_0^T g_i(t, x(t), x'(t), \pi) dt$ et $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $H_j : C^1([0, T], A) \times P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(x, \pi) \in C^1([0, T], A) \times P_0$,

$H_j(x, \pi) := \int_0^T h_j(t, x(t), x'(t), \pi) dt$.

Avec (BSOL1), (BINT1), (BINT2), (BINT3) et (BINT4), les hypothèses (i)-(v) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées pour chaque $\phi \in \{f\} \cup \{g_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$ avec $W = P_0$.

Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ t.q. $B(\pi_0, \alpha) \subset P_0$ et t.q. les assertions (a), (b) et (c) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées pour chaque $\Phi \in \{F\} \cup \{G_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{H_j : 1 \leq j \leq l\}$. Posons $P := B(\pi_0, \alpha)$. En utilisant (BSOL1) et en posant, $\forall \pi \in P$, $\underline{z}(\pi) = \underline{x}(\pi)$, (A⁰1) est vérifiée. Grâce à (BSOL2), puisque $\underline{z} = \underline{x}$ sur P , on obtient que $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \omega)$ existe et $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \omega) = D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \omega)$. Donc (A⁰2) est vérifiée. Pour montrer l'assertion (A⁰3), remarquons que

$$\begin{aligned} f^0|_{\mathbb{G}^0 \times P} &:= F|_{\mathbb{G}^0 \times P} \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^0|_{\mathbb{G}^0 \times P} &:= G_i|_{\mathbb{G}^0 \times P} \\ \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^0|_{\mathbb{G}^0 \times P} &:= H_j|_{\mathbb{G}^0 \times P}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'assertion (b) du Lemme 4.2.4, on obtient que, pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, $D_H \phi(\underline{z}(\pi), \pi)$ existe et

$$\left. \begin{array}{l} \forall \pi \in P, \\ D_H f^0(\underline{z}(\pi), \pi) := D_H F(\underline{x}(\pi), \pi)|_{\mathbb{S} \times Y}. \\ D_H g_i^0(\underline{z}(\pi), \pi) := D_H G_i(\underline{x}(\pi), \pi)|_{\mathbb{S} \times Y}, (1 \leq i \leq k) \\ D_H h_j^0(\underline{z}(\pi), \pi) := D_H H_j(\underline{x}(\pi), \pi)|_{\mathbb{S} \times Y}, (1 \leq j \leq l). \end{array} \right\} \quad (4.4.1)$$

De plus, en utilisant l'assertion (c) du Lemme 4.2.4, pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, on obtient que

$$[\pi \mapsto D_{H,1}\phi(\underline{z}(\pi), \pi)] \in C^0(P, (\mathbb{S}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})).$$

Ceci démontre (A⁰3).

En utilisant la condition (a) du Lemme 4.2.4, pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, $[x \mapsto H_j(x, \pi)]$ est continue sur $B_{\|\cdot\|_{C^1}}(\underline{x}(\pi), \alpha)$.

Par conséquent, pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, $[z \mapsto h_j^0(z, \pi)]$ est continue sur $B_{\|\cdot\|_{C^1}}(\underline{z}(\pi), \alpha) \cap \mathbb{G}^0$. Ceci démontre (A⁰4).

Lemme 4.4.1. *Sous (BSOL1), (BSOL2), (BINT1), (BINT2), (BINT3), (BINT4), la condition (BCONT) est équivalente à l'indépendance linéaire de la famille*

$$(D_{H,1}g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), D_{H,1}h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}.$$

Démonstration. Lorsque $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k$ et $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq l} \in \mathbb{R}^l$ t.q. $(\lambda, \mu) \neq 0$

On considère la fonctionnelle $\tilde{\phi}_{\lambda, \mu} : [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(t, x, v, \pi) \in [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n \times P_0$,

$$\tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, x, v, \pi) := \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(t, x, v, \pi) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(t, x, v, \pi).$$

Notre stratégie est d'appliquer le Lemme 4.2.4 avec la fonctionnelle $\tilde{\phi}_{\lambda, \mu}$. En utilisant (BINT1), la condition (i) du Lemme 4.2.4 est vérifiée.

Avec (BSOL1), la condition (ii) du Lemme 4.2.4 est vérifiée.

Soit $t \in [0, T]$; soit $(u_1, v_1, \pi_1) \in B_{\|\cdot\|_1}((\underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0), \rho)$,

soit $(u_2, v_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}((\underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0), \rho)$; on a

$$\begin{aligned} & |\tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, u_1, v_1, \pi_1) - \tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, u_2, v_2, \pi_2)| \\ &= \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(t, u_1, v_1, \pi_1) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(t, u_1, v_1, \pi_1) \right. \\ & \quad \left. - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(t, u_2, v_2, \pi_2) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(t, u_2, v_2, \pi_2) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| |g_i(t, u_1, v_1, \pi_1) - g_i(t, u_2, v_2, \pi_2)| + \\ & \quad \sum_{j=1}^l |\mu_j| |h_j(t, u_1, v_1, \pi_1) - h_j(t, u_2, v_2, \pi_2)| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \kappa(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1 \\ & \quad + \sum_{j=1}^l |\mu_j| \kappa(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k |\lambda_i| + \sum_{j=1}^l |\mu_j| \right) \kappa(t) \|(u_1, v_1, \pi_1) - (u_2, v_2, \pi_2)\|_1. \end{aligned}$$

Notons que $(\sum_{i=1}^k |\lambda_i| + \sum_{j=1}^l |\mu_j|) \kappa \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$ car $\kappa \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$.

Ceci démontre la condition (iii).

En utilisant (BINT3), on obtient que, pour tout $t \in [0, T]$, $D_{H,(2,3,4)}\tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi)$ existe et

$$\begin{aligned} D_{H,(2,3,4)}\tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i D_{H,(2,3,4)}g_i(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j D_{H,(2,3,4)}h_j(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi). \end{aligned}$$

Ceci démontre la condition (iv).

Par conséquent, pour chaque $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k$ et $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq l} \in \mathbb{R}^l$ t.q. $(\lambda, \mu) \neq 0$, l'opérateur $\tilde{\Phi}_{\lambda, \mu} : C^1([0, T], A) \times P_0 \rightarrow \mathbb{R}$, défini par, $\tilde{\Phi}_{\lambda, \mu}(x, \pi) := \int_0^T \tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, x(t), x'(t), \pi) dt$, vérifie les conclusions (a) et (b) du Lemme 4.2.4.

4.4. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE.

Notons que, pour chaque $(t, x, v) \in [0, T] \times A \times \mathbb{R}^n$, $\phi_{\lambda, \mu}(t, x, v) := \tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, x, v, \pi_0)$. Par conséquent, on a l'assertion non(BCONT) qui est équivalente à

$$\begin{aligned} & \exists((\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j)_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\}, \forall t \in [0, T] \quad \mathbf{m}_1 - p.p. \\ & D_{H,3} \tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \\ & = \int_{[0,t]}^{\mathfrak{G}} D_{H,2} \tilde{\phi}_{\lambda, \mu}(s, \underline{x}(\pi_0)(s), \underline{x}(\pi_0)'(s), \pi_0) d\mathbf{m}_1(s) + c_{\lambda, \mu}. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le Lemme 4.2.9, cette dernière assertion est équivalente à

$$\exists((\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j)_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}^{k+l} \setminus \{0\}, D_{H,1} \tilde{\Phi}_{\lambda, \mu}(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}} = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i D_{H,1} G_i(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}} + \sum_{i=1}^l \mu_j D_{H,1} H_j(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}} = 0.$$

Ceci est aussi équivalent à $(D_{H,1} G_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} G_k(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, D_{H,1} H_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} H_l(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}})$ est une famille liée.

Par conséquent, par contraposition, (BCONT) est équivalente à $(D_{H,1} G_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} G_k(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, D_{H,1} H_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} H_l(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}})$ est une famille libre i.e. $(D_{H,1} g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0), D_{H,1} h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ est une famille libre. \square

Par conséquent, avec (BCONT), en utilisant le Lemme 4.4.1, la condition (A⁰5) est vérifiée.

De plus, en utilisant le Théorème 1.5.22, il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{S}^*}$ sur \mathbb{S}^* t.q. $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{S}^*} \in C^0((\mathbb{S}^* \times \mathbb{S}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R})$ i.e. la condition (A⁰6) est vérifiée. Ainsi, en utilisant la Partie (I) du Théorème 2.5.5, on obtient que $D_G^+ V(\pi_0; \omega)$ existe et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π_0) , t.q.

$$\begin{aligned} D_G^+ V(\pi_0; \omega) & = D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \omega + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \omega \\ & \quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Par conséquent, avec (b) du Lemme 4.2.4 et (4.4.1), on a

$$\begin{aligned} D_G^+ V(\pi_0; \omega) & = \int_{[0,T]} D_{H,4} f(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t) + \\ & \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) \int_{[0,T]} D_{H,4} g_i(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t) \\ & \quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) \int_{[0,T]} D_{H,4} h_j(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) \cdot \omega d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (I) du Théorème 4.3.1.

4.4.2 Preuve de la Partie (II)

En outre, lorsqu'on suppose (BSOL2-bis), puisque $\underline{z} = \underline{x}$ sur P , on obtient que, pour chaque $\omega \in Y$, $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \omega)$ existe et $D_G^+ \underline{z}(\pi_0; \omega) = D_G^+ \underline{x}(\pi_0; \omega)$. Donc (A⁰2-bis) est vérifiée.

Ainsi les conditions (A⁰1), (A⁰2-bis), (A⁰3), (A⁰4), (A⁰5) et (A⁰6) du Théorème 2.5.5 sont vérifiées pour le problème (\mathcal{M}^0, π) .

Donc en utilisant la Partie (II) du Théorème 2.5.5, on a V est Gâteaux-différentiable au point π_0 et il existe un unique $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi_0)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π_0) , t.q.

$$\begin{aligned} D_G V(\pi_0) & = D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0) \\ & \quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi_0), \pi_0). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec (b) du Lemme 4.2.4 et (4.4.1), on déduit

$$\begin{aligned} D_G V(\pi_0) &= \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} f(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t) + \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} g_i(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} h_j(t, \underline{x}(\pi_0)(t), \underline{x}(\pi_0)'(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (II) du Théorème 4.3.1.

4.4.3 Preuve de la Partie (III)

De plus, lorsqu'on suppose que (BSOL2-ter), (BINT4-bis) et (BINT5) sont vérifiées, puisque $\underline{z} = \underline{x}$ sur P , on obtient que, pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $\omega \in Y$, $D_G^+ \underline{z}(\pi; \omega)$ existe et $D_G^+ \underline{z}(\pi; \omega) = D_G^+ \underline{x}(\pi; \omega)$. Donc (A⁰2-ter) est vérifiée.

De plus, avec (4.4.1), on sait que, pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, $D_H \phi(\underline{z}(\pi), \pi)$ existe.

Et grâce à (BINT4-bis) et (BINT5), les hypothèses (vi) et (vii) du Lemme 4.2.4 sont vérifiées. Par conséquent, pour chaque $\Phi \in \{F\} \cup \{G_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{H_j : 1 \leq j \leq l\}$, la condition (d) est vérifiée i.e. la fonction $[\pi \mapsto D_{H,2} \Phi(\underline{x}(\pi), \pi)]$ est continue sur P . Par conséquent, avec (4.4.1), on obtient que, pour chaque $\phi \in \{f^0\} \cup \{g_i^0 : 1 \leq i \leq k\} \cup \{h_j^0 : 1 \leq j \leq l\}$, la fonction $[\pi \mapsto D_{H,2} \phi(\underline{z}(\pi), \pi)]$ est continue sur P . Donc (A⁰7) est vérifiée.

Ainsi les conditions (A⁰1), (A⁰2-ter), (A⁰3), (A⁰4), (A⁰5), (A⁰6) et (A⁰7) du Théorème 2.5.5 sont vérifiées pour le problème (\mathcal{M}^0, π) .

Donc en utilisant la Partie (III) du Théorème 2.5.5, il existe Q un voisinage ouvert de π_0 , $Q \subset P$ t.q. V est continûment Fréchet-différentiable sur Q et, pour chaque $\pi \in Q$, il existe un unique $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$, multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker associé à $\underline{z}(\pi)$ pour le problème (\mathcal{M}^0, π) , t.q.

$$\begin{aligned} D_{FV}(\pi) &= D_{H,2} f^0(\underline{z}(\pi), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i^0(\underline{z}(\pi), \pi) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j^0(\underline{z}(\pi), \pi). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec la conclusion (b) du Lemme 4.2.4 et (4.4.1), on a

$$\begin{aligned} D_{FV}(\pi) &= \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} f(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t) + \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} g_i(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4} h_j(t, \underline{x}(\pi)(t), \underline{x}(\pi)'(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (III) du Théorème 4.3.1.

Remarque 4.4.2. *Contrairement au cas statique, pour chaque $\Phi \in \{G_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{H_j : 1 \leq j \leq l\}$ n'ayant pas l'existence de $D_{H,1} \Phi(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)$ par hypothèse, on ne suppose pas que $(D_{H,1} G_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} G_k(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, D_{H,1} H_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} H_l(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}})$ est une famille libre. C'est pourquoi on considère la condition (BCONT) qui est équivalente à $(D_{H,1} G_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} G_k(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, D_{H,1} H_1(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}}, \dots, D_{H,1} H_l(\underline{x}(\pi_0), \pi_0)|_{\mathbb{S}})$ est une famille libre.*

Chapitre 5

Contrôle Optimal

Dans ce chapitre, notre premier objectif est d'établir une amélioration du Principe du Maximum de Pontryagin pour des problèmes de Contrôle Optimal gouvernés par une équation différentielle ordinaire en présence de contraintes terminales, dans le cadre des fonctions d'état continûment dérivables par morceaux (à valeurs dans un espace de Banach) et des fonctions de contrôle continues par morceaux (à valeurs dans un espace topologique séparé). Pour démontrer ce résultat, nous allons être amené à utiliser les outils d'analyse fonctionnelle introduits dans le chapitre 1, une Règle des Multiplicateurs du chapitre 2 et les théorèmes sur les équations différentielles ordinaires à solutions PC^1 du chapitre 3.

Ensuite, toujours dans le cadre du Contrôle Optimal, notre deuxième objectif, est d'établir un théorème de l'enveloppe en allégeant les hypothèses des théorèmes existants. Pour cela, on va utiliser les outils d'analyse fonctionnelle introduits dans le chapitre 4.

Dans les sections 1-5, nous proposons une généralisation du Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Bolza et un problème de Mayer dans un cadre à horizon fini avec des fonctions de contrôle continues par morceaux et des fonctions d'état continûment dérivables par morceaux. L'équation d'évolution qui gouverne ces problèmes est une équation différentielle ordinaire. Ces problèmes contiennent une liste finie de contraintes d'inégalité terminales et une liste finie de contraintes d'égalité terminales. Notons que les résultats de ces sections ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale à comité de lecture cf. [11].

Notre objectif, dans ces sections, est de démontrer une généralisation du Principe du Maximum de Pontryagin en allégeant les hypothèses de continue Fréchet-différentiabilité sur un voisinage de la solution optimale.

Dans la section 1, nous énonçons les problèmes de Bolza et de Mayer considérés.

Dans la section 2, nous énonçons un théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Bolza.

Dans la section 3, nous énonçons un théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Mayer.

La section 4 est consacrée à la démonstration du théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Mayer. Cette preuve suit le plan de P. MICHEL (cf. [31]). Tout d'abord, nous introduisons des variations en aiguilles pour se ramener à un problème d'optimisation statique de dimension finie. Pour construire un multiplicateur de Fritz John et la fonction adjointe, nous utilisons notre théorème sur la Règle des Multiplicateurs pour un problème avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. Toutefois, le multiplicateur de Fritz John et la fonction adjointe dépendent du support d'aiguilles. Enfin, en utilisant la propriété de l'intersection finie des espaces compacts, on démontre que les multiplicateurs de Fritz John et la fonction adjointe peuvent être rendus indépendants du support des aiguilles.

La section 5 est consacrée à la démonstration du théorème sur le problème de Bolza. Notre stratégie est simplement de transformer le problème de Bolza en problème de Mayer et de traduire les résultats sur le problème de Mayer en résultats sur le problème de Bolza.

Dans les sections 6-7, nous établissons un théorème de l'enveloppe pour un problème de Bolza à paramètre. Un théorème de l'enveloppe consiste à donner des conditions pour obtenir la différentiabilité de la fonction valeur par rapport à un paramètre et à donner une expression de sa différentielle. Comme pour les problèmes d'optimisation statique à paramètre et de Calcul des Variations à paramètre, nous ne supposons pas d'hypothèses de régularité sur les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker et d'hypothèses de conditions suffisantes utilisées dans les théorèmes de perturbations.

En effet, à l'aide du lemme sur la continuité, par rapport au paramètre, des coordonnées d'un vecteur dans un espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre, on parvient à démontrer la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport au paramètre. En outre, grâce à la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport au paramètre, on démontre la continuité de la fonction adjointe par rapport au paramètre. Notons que la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker et la continuité de la fonction adjointe par rapport au paramètre suffit pour démontrer notre théorème de l'enveloppe. Puisque nous n'utilisons pas de théorème de perturbations, nous évitons des hypothèses de conditions suffisante. Enfin, grâce à notre théorème du Principe du Maximum de Pontryagin et le lemme du chapitre 4 donnant la Hadamard-différentiabilité d'une fonctionnelle définie à partir d'une intégrale, on allège les hypothèses de différentiabilité sur la fonction intégrande, le champ de vecteur et les fonctions terminales du critère et des contraintes.

Dans la section 6, on énonce un théorème de l'enveloppe pour le problème de Bolza à paramètre. Le théorème de l'enveloppe est divisé en 3 parties. Dans la Partie (I), on donne des conditions pour obtenir la dérivée directionnelle à droite de la fonction valeur par rapport à un point et à une direction. Ensuite, dans la Partie (II), on donne des conditions pour obtenir la Gâteaux-différentiabilité en un point. En outre, dans la Partie (III), on donne des conditions pour que la fonction valeur soit continûment Fréchet-différentiable.

Notons que l'intégrale de Gelfand nous sera très utile pour donner l'expression de la Gâteaux-différentielle et de la Fréchet-différentielle de la fonction valeur.

Dans la section 7, on prouve le théorème de l'enveloppe énoncé dans la section 6.

5.1 Le problème de Mayer et de Bolza en Contrôle Optimal

Dans cette section, nous travaillons sur le problème de Bolza suivant :

$$(\mathcal{B}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g^0(x(T)) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in PC^0([0, T], U) \\ \forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u), x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = \bar{\xi}_0 \\ \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x(T)) \geq 0 \\ \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Dans le cas où f^0 est identiquement nulle, le problème est appelé problème de Mayer et il est noté (\mathcal{M}) i.e.

$$(\mathcal{M}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad g^0(x(T)) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in PC^0([0, T], U) \\ \forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u), x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = \bar{\xi}_0 \\ \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x(T)) \geq 0 \\ \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Soit $T \in]0, +\infty[$, E un espace de Banach réel, Ω un ouvert de E , U un espace topologique séparé, et $\bar{\xi}_0 \in \Omega$.

On considère les fonctions $f^0 : [0, T] \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \Omega \times U \rightarrow E$, $g^\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ et $h^\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $\beta \in \{1, \dots, q\}$ où $(m, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Comme P. Michel, on démontrera d'abord un Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Mayer qui sera utile pour établir un Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Bolza.

5.1.1 Reformulation des problèmes

En utilisant la notion de dérivée étendue, introduite dans la Définition 1.3.3, on reformule les deux problèmes précédents ainsi :

$$(\mathcal{B}') \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad J(x, u) := \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt + g^0(x(T)) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in NPC_d^0([0, T], U) \\ \quad \forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = \bar{\xi}_0 \\ \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x(T)) \geq 0 \\ \quad \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

On notera (\mathcal{M}') le cas particulier de (\mathcal{B}') où $f^0 = 0$ i.e.

$$(\mathcal{M}') \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad J(x, u) := g^0(x(T)) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in NPC_d^0([0, T], U) \\ \quad \forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = \bar{\xi}_0 \\ \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x(T)) \geq 0 \\ \quad \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

On note $Adm(\mathcal{B})$ (respectivement $Adm(\mathcal{B}')$) l'ensemble des processus admissibles de (\mathcal{B}) (respectivement de (\mathcal{B}')).

On note $Adm(\mathcal{M})$ (respectivement $Adm(\mathcal{M}')$) l'ensemble des processus admissibles de (\mathcal{M}) (respectivement de (\mathcal{M}')).

Il est clair que $Adm(\mathcal{B}) = Adm(\mathcal{M})$ et $Adm(\mathcal{B}') = Adm(\mathcal{M}')$.

Lemme 5.1.1. Soit $u \in PC^0([0, T], U)$ t.q. $(\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in Sub([0, T])$ et $disc(u) := \{\iota_i : 0 \leq i \leq k+1\}$.

Considérons la fonction $\bar{u} : [0, T] \rightarrow U$ définie par

$$\bar{u}(t) := \begin{cases} u(t), & \text{si } t \in]\iota_i, \iota_{i+1}[, i \in \{0, \dots, k\}, \\ u(\iota_i+), & \text{si } t = \iota_i, i \in \{0, \dots, k\}, \\ u(T-), & \text{si } t = T. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Alors $\bar{u} \in NPC_d^0([0, T], U, (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1})$.

Démonstration. Soit $i \in \{0, \dots, k\}$; notons que

$$\bar{u}|_{] \iota_i, \iota_{i+1}[} = u|_{] \iota_i, \iota_{i+1}[} \in C^0(] \iota_i, \iota_{i+1}[, U). \quad (5.1.2)$$

Si $i \in \{0, \dots, k\}$; on a

$$\lim_{t \rightarrow \iota_i+} \bar{u}(t) = \lim_{t \rightarrow \iota_i+} u(t) = u(\iota_i+) = \bar{u}(\iota_i). \quad (5.1.3)$$

Si $i \in \{1, \dots, k+1\}$; on a

$$\lim_{t \rightarrow \iota_i-} \bar{u}(t) = \lim_{t \rightarrow \iota_i-} u(t) = u(\iota_i-). \quad (5.1.4)$$

De plus, en utilisant l'assertion (5.1.4), on a $\bar{u}(T-) = u(T-) = \bar{u}(T)$.
 Par conséquent, $\bar{u} \in NPC_d^0([0, T], U, (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1})$. □

Lemme 5.1.2. *Pour chaque $(x, u) \in \text{Adm}(\mathcal{B})$, $(x, \bar{u}) \in \text{Adm}(\mathcal{B}')$ et $J(x, u) = J(x, \bar{u})$.
 De plus, si $f^0 = 0$, pour chaque $(x, u) \in \text{Adm}(\mathcal{M})$, on a $(x, \bar{u}) \in \text{Adm}(\mathcal{M}')$ et $J(x, u) = J(x, \bar{u})$.*

Démonstration. Soit $(x, u) \in \text{Adm}(\mathcal{B})$ t.q. $(\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in \text{Sub}([0, T])$ et
 $\text{disc}(u) := \{\iota_i : 0 \leq i \leq k+1\}$.

Puisque, $\forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u)$, $u(t) = \bar{u}(t)$, on a

$$\forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u), f(t, x(t), u(t)) = f(t, x(t), \bar{u}(t)),$$

ce qui implique que, $\forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u)$, $x'(t) = f(t, x(t), \bar{u}(t))$.

Par conséquent, on a

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \dots, k\}, \\ \mathbf{d}x(\iota_i) = x'(\iota_i+) = \lim_{t \rightarrow \iota_i+} f(t, x(t), \bar{u}(t)) = f(\iota_i, x(\iota_i), \bar{u}(\iota_i)) \end{cases}$$

et

$$\mathbf{d}x(T) = x'(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} f(t, x(t), \bar{u}(t)) = f(T, x(T), \bar{u}(T)).$$

Par conséquent, on obtient

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), \bar{u}(t)).$$

Ceci implique que $(x, \bar{u}) \in \text{Adm}(\mathcal{B}')$. De plus, puisque, $\forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u)$, $u(t) = \bar{u}(t)$, on a aussi

$$\forall t \in [0, T] \setminus \text{disc}(u), f^0(t, x(t), u(t)) = f^0(t, x(t), \bar{u}(t)).$$

Puisque $\text{disc}(u)$ est un ensemble fini, en utilisant la remarque b), p.198 de [35], on a

$$\int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt = \int_0^T f^0(t, x(t), \bar{u}(t)) dt.$$

Ainsi, on a $J(x, \bar{u}) = J(x, u)$.

Si $f_0 = 0$, puisque $\text{Adm}(\mathcal{M}) = \text{Adm}(\mathcal{B})$ et $\text{Adm}(\mathcal{M}') = \text{Adm}(\mathcal{B}')$, en utilisant ce qui précède, pour chaque $(x, u) \in \text{Adm}(\mathcal{M})$, on a $(x, \bar{u}) \in \text{Adm}(\mathcal{M}')$ et $J(x, \bar{u}) = J(x, u)$. □

Ainsi, en utilisant le Lemme 5.1.2, on peut, sans perte de généralité, considérer les problèmes (\mathcal{B}') et (\mathcal{M}') à la place des problèmes (\mathcal{B}) et (\mathcal{M}) .

5.2 Énoncé d'un Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Bolza

Commençons par formuler une liste de conditions parmi lesquelles figurent les hypothèses des différentes parties du théorème du Principe du Maximum de Pontryagin.

On fixe un processus admissible (x_0, u_0) pour les problèmes (\mathcal{B}') et (\mathcal{M}') à partir duquel on considère les conditions suivantes :

Conditions sur les contraintes terminales et la fonction terminale de l'objectif :

(ACON1) Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, m\}$, g^α est Hadamard-différentiable au point $x_0(T)$.

(ACON2) Pour tout $\beta \in \{1, \dots, q\}$, h^β est continue sur un voisinage de $x_0(T)$ et Hadamard-différentiable au point $x_0(T)$.

Conditions sur le champ de vecteurs :

(ACV1) $f \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, E)$, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $D_{G,2}f(t, \xi, \zeta)$ existe, pour tout $(t, \zeta) \in [0, T] \times U$, $D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta)$ existe et $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta)] \in C^0([0, T] \times U, \mathcal{L}(E, E))$.

(ACV2) $\forall K$ compact t.q. $K \subset \Omega \times U$, $\exists M \geq 0$ t.q. $\forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times K$, $\|D_{G,2}f(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \leq M$.

(ACV3) U est une partie d'un espace vectoriel normé réel Y , il existe $\hat{t} \in [0, T]$, $U \in \mathcal{V}_{u_0(\hat{t})}(Y)$, t.q. $D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$ existe et est surjective.

Conditions sur l'intégrande du critère :

(AINT1) $f^0 \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, \mathbb{R})$, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta)$ existe, pour tout $(t, \zeta) \in [0, T] \times U$, $D_{F,2}f^0(t, x_0(t), \zeta)$ existe et $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f^0(t, x_0(t), \zeta)] \in C^0([0, T] \times U, E^*)$.

(AINT2) $\forall K$ compact t.q. $K \subset \Omega \times U$, $\exists M_1 \geq 0$ t.q. $\forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times K$, $\|D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \leq M_1$.

Condition sur le champ de vecteurs et sur les contraintes terminales :

(ALIB) U est une partie d'un espace vectoriel normé réel Y t.q. $U \in \mathcal{V}_{u_0(T)}(Y)$, $D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T))$ existe et $((D_H g^\alpha(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)))_{1 \leq \alpha \leq m}, (D_H h^\beta(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)))_{1 \leq \beta \leq q})$ est une famille libre.

Remarque 5.2.1. *Considérons la condition forte sur le champ de vecteurs :*

(FCV) $f \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, E)$, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $D_{F,2}f(t, \xi, \zeta)$ existe et $D_{F,2}f \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, \mathcal{L}(E, E))$,

et la condition forte sur l'intégrande :

(FINT) $f^0 \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, \mathbb{R})$, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $D_{F,2}f^0(t, \xi, \zeta)$ existe et $D_{F,2}f^0 \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, E^*)$.

Remarquons que (FCV) implique (ACV1) et (ACV2) et (FINT) implique (AINT1) et (AINT2).

Remarque 5.2.2. *Avec (ACV1), on a*

$$\left. \begin{array}{l} \forall u \in NPC_d^0([0, T], U, (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1}) \text{ où } (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in Sub([0, T]), \\ [t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{L}(E, E), (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1}). \end{array} \right\} \quad (5.2.1)$$

En effet, soit $u \in NPC_d^0([0, T], U, (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1})$; puisque $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta)] \in C^0([0, T] \times U, \mathcal{L}(E, E))$ et $u \in NPC_d^0([0, T], U, (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1})$, on a, en utilisant la Proposition 1.2.5,

$[t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{L}(E, E), (\iota_i)_{0 \leq i \leq k+1})$.

Notons que nous utilisons l'hypothèse $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta)] \in C^0([0, T] \times U, \mathcal{L}(E, E))$ pour obtenir l'assertion (5.2.1).

Lorsque (x, u) est un processus admissible pour (\mathcal{B}') ou (\mathcal{M}') , On considère la condition de qualification suivante :

$$(QC, i) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (c_\alpha)_{i \leq \alpha \leq m} \in \mathbb{R}_+^{1-i+m}, (d_\beta)_{1 \leq \beta \leq q} \in \mathbb{R}^q \text{ satisfont} \\ (\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, c_\alpha g^\alpha(x(T)) = 0), \text{ et} \\ \sum_{\alpha=i}^m c_\alpha D_H g^\alpha(x(T)) + \sum_{\beta=1}^q d_\beta D_H h^\beta(x(T)) = 0, \text{ alors} \\ (\forall \alpha \in \{i, \dots, m\}, c_\alpha = 0) \text{ et } (\forall \beta = 1, \dots, q, d_\beta = 0) \end{array} \right.$$

quand $i \in \{0, 1\}$. Signalons que (QC, 0) est due à P. Michel (cf. [31]).

Commençons par définir le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Bolza (\mathcal{B}') .

Définition 5.2.3. Le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Bolza (\mathcal{B}') est la fonction $H_B : [0, T] \times \Omega \times U \times E^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall (t, x, u, p, \lambda) \in [0, T] \times \Omega \times U \times E^* \times \mathbb{R}$,

$$H_B(t, x, u, p, \lambda) := \lambda f^0(t, x, u) + p \cdot f(t, x, u).$$

Dans le théorème suivant, nous énonçons un théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Bolza (\mathcal{B}').

Théorème 5.2.4. *Lorsque (x_0, u_0) est une solution du problème (\mathcal{B}').*

Partie (I) *Sous (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (AINT1) et (AINT2), il existe $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in \mathbb{R}^{1+m+q}$, appelé multiplicateur de Fritz John, et $p \in PC^1([0, T], E^*)$, appelée fonction adjointe, qui vérifient les assertions suivantes :*

- (NN) $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \neq 0$.
- (Si) *Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha \geq 0$.*
- (Sl) *Pour tout $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0$.*
- (TC) $\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) = p(T)$.
- (AE.B) $\mathbf{d}p(t) = -D_{F,2} H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0)$ pour tout $t \in [0, T]$.
- (MP.B) *Pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\zeta \in U$,*
 $H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0) \geq H_B(t, x_0(t), \zeta, p(t), \lambda_0)$.
- (CH.B) $\bar{H}_B := [t \mapsto H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0)] \in C^0([0, T], \mathbb{R})$.

Partie (II) *De plus, sous (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (AINT1) et (AINT2), si on suppose que, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, les dérivées partielles par rapport à la première variable $\partial_1 f^0(t, \xi, \zeta)$ et $\partial_1 f(t, \xi, \zeta)$ existent et $\partial_1 f^0$ et $\partial_1 f$ sont continues sur $[0, T] \times \Omega \times U$, alors $\bar{H}_B \in PC^1([0, T], \mathbb{R})$ et, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{d}\bar{H}_B(t) = \partial_1 H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0)$.*

Partie (III) *Si on suppose que (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (AINT1), (AINT2) et (QC, 1) sont vérifiées pour $(x, u) = (x_0, u_0)$ alors, pour tout $t \in [0, T]$, $(\lambda_0, p(t)) \neq 0$.*

Partie (IV) *Si on suppose que (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (ACV3), (AINT1), (AINT2) et (QC, 1) sont vérifiées pour $(x, u) = (x_0, u_0)$, il existe $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^q \times PC^1([0, T], E^*)$ avec $\lambda'_0 = 1$ qui vérifie les conclusions de la Partie (I).*

Partie (V) *Sous (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (AINT1), (AINT2) et (ALIB), il existe $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^q \times PC^1([0, T], E^*)$ avec $\lambda'_0 = 1$ qui vérifie les conclusions de la Partie (I).*

Si, en plus, on suppose que $D_{G,3} f^0(T, x_0(T), u_0(T))$ existe, le triplet

$((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^q \times PC^1([0, T], E^)$ avec $\lambda'_0 = 1$, qui vérifie les conclusions de la Partie (I), est unique.*

Expliquons nos abréviations : (NN) est une condition de non-nullité, (Si) est une condition de signe, (Sl) est une condition d'exclusion (appelée en anglais "slackness condition"), (TC) est la condition de transversalité (appelée en anglais "transversality condition"), (AE.B) est l'équation adjointe (en anglais "adjoint equation"), (MP.B) est le Principe du Maximum de Pontryagin (en anglais "maximum principle") et (CH.B) est une condition de continuité sur le Hamiltonien de Pontryagin.

Commentaires sur le Théorème 5.2.4 : Les principales contributions du Théorème 5.2.4 sont les suivantes :

- Contrairement à A.D. IOFFE et V.M. TIKHOMIROV (cf. [25] p.133) et V. ALEXEEV, V.M. TIKHOMIROV, et S.V. FOMINE (cf. [1] p.316), E est de dimension infinie.
- Pour la Partie (I), en comparant à V. ALEXEEV, V.M. TIKHOMIROV, et S.V. FOMINE (cf. [1] p. 316), pour les contraintes terminales et la fonction de l'objectif terminal, on remplace l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité par l'hypothèse de Hadamard-différentiabilité en $x_0(T)$.
- Pour la Partie (I), pour le champ de vecteurs et la fonction intégrande, A.D. IOFFE et V.M. TIKHOMIROV (cf. [25] p.133) et V. ALEXEEV, V.M. TIKHOMIROV, et S.V. FOMINE (cf. [1] p. 316) supposent la condition forte sur le champ de vecteurs (FCV) et la condition forte sur

l'intégrande (FINT). Comme souligné dans la Remarque 5.2.1, cette condition est plus forte que nos conditions sur le champ de vecteurs et sur la fonction intégrande. Notons aussi que l'on n'émet pas d'hypothèse de continuité sur la différentielle partielle seconde du champ de vecteurs et de la fonction intégrande.

- (•) Dans la Partie (III), en rajoutant une hypothèse sur le champ de vecteurs et (QC, 1), on parvient à montrer l'existence d'un multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker i.e. un multiplicateur de Fritz John avec $\lambda_0 = 1$.
- (•) Dans la Partie (IV), en rajoutant l'hypothèse (ALIB), on parvient à démontrer l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker et de la fonction adjointe vérifiant la Partie (I) du Théorème 5.2.4.

5.3 Énoncé d'un Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer

Dans cette section, nous allons énoncer un théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour un problème de Mayer. Nous puisons nos hypothèses dans la liste des conditions de la section précédente où évidemment les conditions (AINT1) et (AINT2) n'ont plus lieu d'être pour le problème de Mayer.

Commençons par définir le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Mayer (\mathcal{M}').

Définition 5.3.1. Le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Mayer (\mathcal{M}') est la fonction $H_M : [0, T] \times \Omega \times U \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $(t, x, u, p) \in [0, T] \times \Omega \times U \times E^*$, $H_M(t, x, u, p) := p \cdot f(t, x, u)$.

Dans le théorème suivant, nous énonçons un théorème du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer (\mathcal{M}').

Théorème 5.3.2. Lorsque (x_0, u_0) est une solution du problème (\mathcal{M}').

Partie (I) Sous (ACON1), (ACON2), (ACV1) et (ACV2), il existe

$((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in \mathbb{R}^{1+m+q}$, appelé multiplicateur de Fritz John, et $p \in PC^1([0, T], E^*)$, appelée fonction adjointe, t.q. les assertions suivantes sont vérifiées :

(NN) $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \neq 0$.

(Si) Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha \geq 0$.

(Sl) Pour tout $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0$.

(TC) $\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) = p(T)$.

(AE.M) $\mathbf{d}p(t) = -D_{F,2} H_M(t, x_0(t), u_0(t), p(t))$ pour tout $t \in [0, T]$.

(MP.M) Pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\zeta \in U$,

$$H_M(t, x_0(t), u_0(t), p(t)) \geq H_M(t, x_0(t), \zeta, p(t)).$$

(CH.M) $\bar{H}_M := [t \mapsto H_M(t, x_0(t), u_0(t), p(t))] \in C^0([0, T], \mathbb{R})$.

Partie (II) Sous (ACON1), (ACON2), (ACV1) et (ACV2), si on suppose, en outre que, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, la dérivée partielle par rapport à la première variable $\partial_1 f(t, \xi, \zeta)$ existe et $\partial_1 f$ est continue sur $[0, T] \times \Omega \times U$, alors on a $\bar{H}_M \in PC^1([0, T], \mathbb{R})$ et, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{d}\bar{H}_M(t) = \partial_1 H_M(t, x_0(t), u_0(t), p(t))$.

Partie (III) Si, en plus, des conditions (ACON1), (ACON2), (ACV1) et (ACV2), on suppose que (QC, 0) est vérifiée avec $(x, u) = (x_0, u_0)$, alors $p(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Partie (IV) Si on suppose que (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2), (ACV3) et (QC, 0) sont vérifiées pour $(x, u) = (x_0, u_0)$, il existe $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^q \times PC^1([0, T], E^*)$ avec $\lambda'_0 = 1$ qui vérifie les conclusions de la Partie (I).

Partie (V) Sous (ACON1), (ACON2), (ACV1), (ACV2) et (ALIB), il existe un unique $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m} \times \mathbb{R}^q \times PC^1([0, T], E^*)$ avec $\lambda'_0 = 1$ qui vérifie les conclusions de la Partie (I) est unique.

Commentaire sur le Théorème 5.3.2 : Les principales contributions du Théorème 5.3.2 sont les suivantes :

- (•) Pour la Partie (I), comparé à P. MICHEL (cf. [31]), pour les contraintes terminales et la fonction de l'objectif terminal, on remplace l'hypothèse de continue Fréchet-différentiabilité par l'hypothèse de Hadamard-différentiabilité en $x_0(T)$.
- (•) Pour la Partie (I) P. MICHEL (cf. [31]) suppose la condition forte sur le champ de vecteurs (FCV). Comme souligné dans la Remarque 5.2.1, cette condition est plus forte que nos conditions sur le champ de vecteurs. Notons aussi que l'on n'émet pas d'hypothèse de continuité sur la différentielle partielle seconde du champ de vecteurs.
- (•) Dans la Partie (III), en rajoutant une hypothèse sur le champ de vecteurs et (QC, 0), on parvient à montrer l'existence d'un multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker i.e. un multiplicateur de Fritz John avec $\lambda_0 = 1$.
- (•) Dans la Partie (IV), en rajoutant l'hypothèse (ALIB), on parvient à démontrer l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker et de la fonction adjointe vérifiant la Partie (I) du Théorème 5.3.2.
- (•) En utilisant le théorème de continuité de la solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre, on démontre un théorème (omis dans [31]) de continuité d'une solution PC^1 non prolongeable par rapport à un paramètre nécessaire à l'utilisation de la Règle des Multiplicateurs.

5.4 Preuve du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Mayer

5.4.1 Preuve de la Partie (I)

Pour faciliter la lecture de la preuve, nous proposons un plan composé de 6 étapes. Ces étapes composeront les sous-sous-sections de cette sous-section.

Étape 1 : On commence par introduire l'ensemble des supports d'aiguilles. Un support d'aiguilles est un N -uplet d'élément du produit cartésien de $]0, T[$ et de U défini de telle sorte que ces éléments dans $]0, T[$ sont rangés dans l'ordre croissant (non nécessairement strictement croissant). On fixe un support d'aiguilles pour les étapes 1-5, à partir de ce support d'aiguilles et d'un paramètre $a \in \mathbb{R}_+^N$, on construit N intervalles deux à deux disjoints dépendant de a (où a est le vecteur des largeurs des aiguilles) et du support d'aiguilles. Ensuite, on définit une variation en aiguilles de u_0 . Une variation en aiguilles de u_0 est une fonction u_a , dépendant d'un paramètre a et du support d'aiguilles, où sur chaque i -ème intervalles, on remplace la valeur de u_0 par le second élément du i -ème élément du support d'aiguilles.

Étape 2 : À partir de la variation en aiguille u_a de u_0 , on utilise une équation différentielle linéaire non homogène dépendant du paramètre a (cette équation fut introduite par P. MICHEL). On démontre que sa solution PC^1 non prolongeable z_a est définie sur $[0, T]$. Enfin, on démontre que la fonction z_a dispose d'une propriété proche de la Fréchet-différentiabilité en 0.

Étape 3 : À partir de la variation en aiguille u_a de u_0 , on introduit une équation différentielle ordinaire dépendant aussi du paramètre a .

À l'aide du théorème de continuité d'une solution PC^1 non prolongeable par rapport aux conditions initiales et à un paramètre, on démontre que la solution PC^1 non prolongeable x_a est définie sur

$[0, T]$ et est continue par rapport au paramètre a .

Étape 4 : En utilisant les étapes 2 et 3, la solution PC^1 non prolongeable x_a dispose d'une propriété proche de la Fréchet-différentiabilité en 0. Ensuite, on prouve que la fonction x_a est la restriction d'une fonction Fréchet-différentiable en 0.

Étape 5 : Grâce à x_a , on construit un problème d'optimisation de dimension finie (les inconnues sont les largeurs des aiguilles) avec un nombre fini de contraintes d'inégalité et d'égalité. En démontrant que 0 est solution de ce problème d'optimisation et en utilisant une Règle des Multiplicateurs du chapitre 2, on parvient à construire un multiplicateur de Fritz John et la fonction adjointe dépendant du support d'aiguilles fixé à l'étape 1.

Étape 6 : En utilisant la propriété de l'intersection finie des espaces compacts, on démontre que les multiplicateurs de Fritz John et la fonction adjointe peuvent être rendus indépendants du support d'aiguilles fixé à l'étape 1.

Étape 1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on introduit $S = ((t_i, v_i))_{1 \leq i \leq N}$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $t_i \in [0, T]$, $v_i \in U$ et $0 < t_1 \leq \dots \leq t_N < T$. On dit que S est un support d'aiguilles.

On note $\mathbb{S} = \{S = ((t_i, v_i))_{1 \leq i \leq N} : N \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, N\}, t_i \in [0, T], v_i \in U \text{ et } 0 < t_1 \leq \dots \leq t_N < T\}$.

Dans la suite, on fixe le support d'aiguilles $S \in \mathbb{S}$; tous les résultats dépendront du choix de ce S . Dans l'étape 6, nous démontrerons que les constructions précédentes peuvent être rendues indépendantes du choix de S . Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on définit

$$j_S(i) = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j < i, t_j = t_i\}.$$

À chaque $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}_+^N$ on associe la liste $(b_i)_{1 \leq i \leq N}$ définie par

$$b_i = b_i(S, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } j_S(i) = \emptyset \\ \sum_{j \in j_S(i)} a_j & \text{si } j_S(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

et on note, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$I_i = I_i(S, a) = [t_i + b_i, t_i + b_i + a_i[.$$

Lemme 5.4.1. Notons $\delta(S) = \min\{t_{i+1} - t_i : i \in \{1, \dots, N-1\}, t_i < t_{i+1}\}$.

Supposons que $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^N |a_i| = \sum_{i=1}^N a_i \leq \delta(S)$; alors on a

$$(i) \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \quad \sup I_i \leq \inf I_{i+1}$$

$$(ii) \quad \forall i \neq j, \quad I_i \cap I_j = \emptyset.$$

Démonstration. (i) Soit $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Raisonnons par disjonctions des cas.

Si $t_{i+1} = t_i$ alors

$$\begin{aligned} j_S(i+1) &= \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j < i+1, t_j = t_{i+1}\} \\ &= \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq i, t_j = t_i\} \\ &= \{i\} \cup \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j < i, t_j = t_i\} \\ &= \{i\} \cup j_S(i). \end{aligned}$$

Puisque $\{i\} \cap j_S(i) = \emptyset$, on a

$$b_{i+1} = \sum_{j \in j_S(i+1)} a_j = \sum_{j \in \{i\} \cup j_S(i)} a_j = \sum_{j \in j_S(i)} a_j + a_i = b_i + a_i,$$

d'où $t_i + b_i + a_i = t_i + b_{i+1}$, donc $\sup I_i = \inf I_{i+1}$.

Si $t_{i+1} > t_i$, on a alors

$$\forall j \in \{1, \dots, i\}, t_j \leq t_i < t_{i+1}.$$

On a

$$\{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j < i + 1, t_j = t_{i+1}\} = \emptyset,$$

d'où $b_{i+1} = 0$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} b_i + a_i &= \sum_{j \in j_S(i)} a_j + a_i \\ &\leq \sum_{j=1}^i a_j + a_i \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_j \\ &\leq \delta(S) \leq t_{i+1} - t_i. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$t_i + b_i + a_i \leq t_{i+1} + b_{i+1},$$

d'où

$$\sup I_i \leq \inf I_{i+1}.$$

(ii) Soit $i \neq j$.

Montrons maintenant que $I_i \cap I_j = \emptyset$.

Supposons, sans perte de généralité, que $i < j$.

D'après ce qui précède, on a

$$\sup I_i \leq \inf I_{i+1} \leq \sup I_{i+1} \dots \leq \sup I_{j-1} \leq \inf I_j.$$

Et puisque $I_i = [t_i + b_i, t_i + b_i + a_i[$ et $I_j = [t_j + b_j, t_j + b_j + a_j[$, on a $I_i \cap I_j = \emptyset$. \square

Puisque $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U)$, il existe une famille finie $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq r+1} \in Sub([0, T])$ t.q. $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq r+1})$.

Pour chaque $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$, en utilisant le Lemme 5.4.1, on peut définir la fonction $u_a : [0, T] \rightarrow U$ en posant

$$u_a(t) := \begin{cases} u_0(t) & \text{si } t \in [0, T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i \\ v_i & \text{si } t \in I_i (i \in \{1, \dots, N\}). \end{cases}$$

La fonction u_a est appelé une **variation en aiguilles** de u_0 . Notons que la variation en aiguille de u_0 a été introduite pour la première fois par Boltyanskii, cf. [33] p.80.

Lemme 5.4.2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$, il existe une subdivision $(\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k^a+1} = (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1}$ de $[0, T]$ telle que $\{\tau_i : i \in \{0, \dots, k+1\}\} = \{\alpha_i : 0 \leq i \leq r+1\} \cup \{t_i + b_i : 1 \leq i \leq N\} \cup \{t_i + b_i + a_i : 1 \leq i \leq N\}$ et telle que l'application $u_a = u(\cdot, a) \in NPC_d^0([0, T], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1})$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$.

Posons $A := \{\alpha_i : 0 \leq i \leq r+1\} \cup \{t_i + b_i : 1 \leq i \leq N\} \cup \{t_i + b_i + a_i : 1 \leq i \leq N\}$.

Puisque A est un ensemble fini non vide, il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\text{card}(A) = k+1$.

Posons $\tau_0 = 0$ et, $\forall i \in \{1, \dots, k+1\}$, $\tau_i = \min A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$.

Puisque pour chaque $i \in \{1, \dots, k+1\}$, on a $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$ strictement inclus dans $[0, T]$, on a $\tau_0 < \tau_i$. De plus, pour chaque $(i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k+1\}$ t.q. $i < j$, on a $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{j-1}\}$ inclus strictement dans $A \setminus \{\tau_0, \dots, \tau_{i-1}\}$ donc $\tau_i < \tau_j$.

Par conséquent, $(\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1} \in Sub([0, T])$ t.q. $\{\tau_i : 0 \leq i \leq k+1\} = A$. Montrons que $u_a \in NPC_d^0([0, T], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1})$.

— Soit $i \in \{0, \dots, k\}$; montrons que u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

En effet, soit $\tau_i = \alpha_j$ avec $j \in \{0, \dots, r+1\}$.

Si $\tau_{i+1} = \alpha_{j+1}$, $u_a = u_0$ sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, on a u_a continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Si $\tau_{i+1} = t_l + b_l$ avec $l \in \{1, \dots, N\}$, $u_a = u_0$ sur $[\alpha_j, t_l + b_l[$, donc u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Si $\tau_{i+1} = t_j + b_j + a_j$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$, puisque $[\tau_i, \tau_{i+1}[\subset I_j$ et u_a est une fonction constante sur I_j , u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Soit $\tau_i = t_j + b_j$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$.

Si $\tau_{i+1} = \alpha_l$ avec $l \in \{0, \dots, r+1\}$, puisque $[\tau_i, \tau_{i+1}[\subset I_j$ et u_a est une fonction constante sur I_j , u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Si $\tau_{i+1} = t_j + b_j + a_j$, u_a étant une fonction constante sur I_j , on obtient que u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Soit $\tau_i = t_j + b_j + a_j$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$.

Si $\tau_{i+1} = \alpha_l$ avec $l \in \{0, \dots, r+1\}$ alors $u_a = u_0$ sur $[t_j + b_j + a_j, \alpha_l[$. Donc u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Si $\tau_{i+1} = t_{j+1} + b_{j+1}$, on a $u_a = u_0$ sur $[t_j + b_j + a_j, t_{j+1} + b_{j+1}[$, donc $u_a = u_0$ est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

Donc u_a est continue sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[$.

— Soit $i \in \{1, \dots, k\}$; si $\tau_i = \alpha_l$ avec $l \in \{0, \dots, r+1\}$, $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_a(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_0(t) = u_0(\tau_i -)$ existe

dans U .

Si $\tau_i = t_j + b_j$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$, $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_a(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_0(t) = u_0(\tau_i -)$ existe dans U .

Si $\tau_i = t_j + b_j + a_j$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$, $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_a(t) = v_j$ existe dans U .

Donc $\lim_{\substack{t \rightarrow \tau_i \\ t < \tau_i}} u_a(t) = u_a(\tau_i -)$ existe dans U .

— De plus, $\lim_{\substack{t \rightarrow T \\ t < T}} u_a(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow T \\ t < T}} u_0(t) = u_0(T) = u_a(T)$.

Donc $u_a \in NPC_d^0([0, T], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1})$. □

Lemme 5.4.3. *Pour chaque $i \in \{0, \dots, r\}$, considérons la fonction $u_0^i : [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \rightarrow U$, définie par,*

$$u_0^i(t) := \begin{cases} u_0(t), & \text{si } t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[, \\ u_0(\alpha_{i+1} -), & \text{si } t = \alpha_{i+1}. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Alors $\mathcal{M} := (\bigcup_{0 \leq i \leq r} u_0^i([\alpha_i, \alpha_{i+1}])) \cup \{v_i : 1 \leq i \leq N\}$ est un ensemble compact de U .

Démonstration. Soit $i \in \{0, \dots, r\}$.

Puisque $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq r+1})$, on a $u_0^i|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}[} \in C^0([\alpha_i, \alpha_{i+1}[, U)$.

De plus, puisque

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_{i+1} \\ t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[}} u_0^i(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow \alpha_{i+1} \\ t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}[}} u_0(t) = u_0(\alpha_{i+1} -) = u_0^i(\alpha_{i+1}),$$

on a $u_0^i \in C^0([\alpha_i, \alpha_{i+1}], U)$.

Ainsi, puisque $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ est un compact de \mathbb{R} , $u_0^i([\alpha_i, \alpha_{i+1}])$ est un compact.

Par conséquent, puisque $\{v_i : 1 \leq i \leq N\}$ est un compact comme ensemble fini,

$\mathcal{M} := (\bigcup_{0 \leq i \leq r} u_0^i([\alpha_i, \alpha_{i+1}])) \cup \{v_i : 1 \leq i \leq N\}$ est un compact comme réunion finie de compacts. □

Lemme 5.4.4. *Pour chaque $x \in C^0([0, T], \Omega)$, considérons la fonction $\Delta^x : [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N) \rightarrow E$ définie par, pour tout $(t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N)$,*

$$\Delta^x(t, a) := f(t, x(t), u_a(t)) - f(t, x(t), u_0(t)).$$

Alors Δ^x est bornée sur $[0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N)$.

Démonstration. Puisque $x \in C^0([0, T], \Omega)$, on a $[t \mapsto (t, x(t))] \in C^0([0, T], [0, T] \times \Omega)$.

Par conséquent, puisque $[0, T]$ est compact, $\Gamma := \{(t, x(t)) : t \in [0, T]\}$ est compact.

Ainsi, en utilisant le Lemme 5.4.3 et le théorème 4^o, p.69 de [35], $\Gamma \times \mathcal{M}$ est compact dans $[0, T] \times \Omega \times U$. Ainsi, en utilisant (ACV1), on a

$$c := \sup_{(t, \xi, \zeta) \in \Gamma \times \mathcal{M}} \|f(t, \xi, \zeta)\| < +\infty. \quad (5.4.2)$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$ et $t \in [0, T]$; montrons que

$$\|\Delta^x(t, a)\| \leq 2c.$$

Raisonnons par disjonction des cas.

Si $t \in I_i$ avec $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta^x(t, a)\| &= \|f(t, x(t), v_i) - f(t, x(t), u_0(t))\| \\ &\leq \|f(t, x(t), v_i)\| + \|f(t, x(t), u_0(t))\|. \end{aligned}$$

Puisque $(t, x(t), v_i) \in \Gamma \times \mathcal{M}$ et $(t, x(t), u_0(t)) \in \Gamma \times \mathcal{M}$, on a

$$\|\Delta^x(t, a)\| \leq 2c.$$

Si $t \in [0, T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i$, $\|\Delta^x(t, a)\| = 0 \leq 2c$.

Par conséquent, on obtient

$$\forall (t, a) \in [0, T] \times (\mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))), \|\Delta^x(t, a)\| \leq 2c.$$

□

On considère l'équation différentielle linéaire homogène suivante

$$\mathbf{d}y(t) = D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot y(t). \quad (5.4.3)$$

Avec (ACV1), en utilisant le Théorème 3.2.7, la résolvante de (5.4.3), $R(\cdot, \cdot)$ est bien définie sur $[0, T] \times [0, T]$.

Étape 2

Considérons l'équation différentielle linéaire suivante, pour chaque $a \in \overline{B}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}z_a(t) &= D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot z_a(t) + f(t, x_0(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t)) \\ z(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

Lemme 5.4.5. *Pour chaque $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$, la solution PC^1 non prolongeable $z_a = z(\cdot, a)$ de (5.4.4) est définie sur $[0, T]$ tout entier.*

5.4. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE MAYER

Démonstration. Soit $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$.

Puisque $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U, (\alpha_j)_{0 \leq j \leq r+1})$, on a, en utilisant (ACV1),

$$[t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{L}(E, E), (\alpha_j)_{0 \leq j \leq r+1}).$$

De plus, puisque $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U, (\alpha_j)_{0 \leq j \leq r+1})$ et $u_a \in NPC_d^0([0, T], U, (\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k+1})$ et avec (ACV1), on a, en utilisant la Proposition 1.2.4 et la Proposition 1.2.2,

$$[t \mapsto f(t, x_0(t), u_0(t))] \in NPC_d^0([0, T], E, (\alpha_j)_{0 \leq j \leq r+1})$$

et

$$[t \mapsto f(t, x_0(t), u_a(t))] \in NPC_d^0([0, T], E, (\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k+1}).$$

Par conséquent, puisque $\{\alpha_j : 0 \leq j \leq r+1\} \subset \{\tau_i^a : 0 \leq i \leq k+1\}$, on a

$$[t \mapsto f(t, x_0(t), u_0(t))] \in NPC_d^0([0, T], E, (\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k+1})$$

et

$$[t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{L}(E, E), (\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k+1}). \quad (5.4.5)$$

Ainsi, en utilisant la Proposition 1.1.7, on a

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{x_0}(\cdot, a) &:= [t \mapsto f(t, x_0(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t))] \\ &\in NPC_d^0([0, T], E, (\tau_i^a)_{0 \leq i \leq k+1}). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

En utilisant (5.4.5) et (5.4.6) et le Théorème 3.2.5, on obtient que $z_a = z(\cdot, a)$ est définie sur $[0, T]$ tout entier. \square

Lemme 5.4.6. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ un espace vectoriel normé réel.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit B_0 un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^d . Soit $\Phi : B_0 \cap \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathcal{A}$. On suppose qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{A})$, et pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, qu'il existe une fonction $\phi_i : B_0 \cap \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathcal{A}$ vérifiant $\lim_{\xi \rightarrow 0} \phi_i(\xi) = 0$, telles que, pour tout $\xi \in B_0 \cap \mathbb{R}_+^d$

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + L \cdot \xi + \sum_{i=1}^d \xi_i \phi_i(\xi).$$

Alors, il existe $\varrho : B_0 \cap \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathcal{A}$ vérifiant $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varrho(\xi) = 0$, telles que, pour tout $\xi \in B_0 \cap \mathbb{R}_+^d$

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + L \cdot \xi + \|\xi\|_1 \varrho(\xi).$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varrho : B_0 \cap \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathcal{A}$ en posant

$$\varrho(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = 0, \\ \frac{1}{\|\xi\|_1} \sum_{i=1}^d \xi_i \phi_i(\xi) & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Pour chaque $\xi \neq 0$, on a les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \|\varrho(\xi)\|_{\mathcal{A}} &= \left\| \frac{1}{\|\xi\|_1} \sum_{i=1}^d \xi_i \phi_i(\xi) \right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \frac{1}{\|\xi\|_1} \left\| \sum_{i=1}^d \xi_i \phi_i(\xi) \right\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \frac{1}{\|\xi\|_1} \sum_{i=1}^d \|\xi_i \phi_i(\xi)\|_{\mathcal{A}} \\ &= \frac{1}{\|\xi\|_1} \sum_{i=1}^d |\xi_i| \|\phi_i(\xi)\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \frac{1}{\|\xi\|_1} \sum_{i=1}^d \|\xi\|_1 \|\phi_i(\xi)\|_{\mathcal{A}} \\ &= \sum_{i=1}^d \|\phi_i(\xi)\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Sachant que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \phi_i(\xi) = 0$, on obtient que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{i=1}^d \|\phi_i(\xi)\|_{\mathcal{A}} = 0.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi \neq 0}} \varrho(\xi) = 0$. Ainsi, puisque $\varrho(0) = 0$, on obtient que $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varrho(\xi) = 0$. De plus, on a, pour tout $\xi \in B_0 \cap \mathbb{R}_+^d$,

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + L \cdot \xi + \|\xi\|_1 \varrho(\xi).$$

□

Lemme 5.4.7. *Considérons la fonction linéaire continue $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow E$, définie par, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, $\mathfrak{L} \cdot a := \sum_{i=1}^N a_i R(T, t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))]$. Alors il existe $\varrho_1 : \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N \rightarrow E$ vérifiant $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho_1(a) = 0$, telle que, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$*

$$z(T, a) = z(T, 0) + \mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \varrho_1(a).$$

Démonstration. Pour tout $(t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N)$,

$$\Delta^{x_0}(t, a) := \Delta(t, a) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T] \setminus \cup_{1 \leq i \leq N} I_i \\ f(t, x_0(t), v_i) - f(t, x_0(t), u_0(t)) & \text{si } t \in I_i, i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

Fixons $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$.

Avec (5.4.5) et (5.4.6), en utilisant le Théorème 3.2.10, on a

$$\forall t \in [0, T], z(t, a) = R(t, 0) \cdot 0 + \int_0^t R(t, s) \cdot \Delta(s, a) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} z(T, a) &= \int_0^T R(T, s) \cdot \Delta(s, a) ds \\ &= \int_{[0, T] \setminus \cup_{1 \leq i \leq N} I_i} R(T, s) \cdot \Delta(s, a) ds + \int_{\cup_{1 \leq i \leq N} I_i} R(T, s) \cdot \Delta(s, a) ds \\ &= \int_{\cup_{1 \leq i \leq N} I_i} R(T, s) \cdot \Delta(s, a) ds. \end{aligned}$$

Puisque les I_i sont deux à deux disjoints, on a

$$z(T, a) = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} R(T, s) \cdot [f(s, x_0(s), v_i) - f(s, x_0(s), u_0(s))] ds.$$

De plus, puisque $u(\cdot, 0) = u_0$, on a $\Delta(\cdot, 0) = 0$.

Par conséquent, la fonction nulle est solution PC^1 du problème (5.4.4) sur $[0, T]$, donc $z(\cdot, 0) = 0$.

Ainsi on a $z(T, 0) = 0$.

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} & z(T, a) - z(T, 0) - \mathfrak{L} \cdot a \\ &= z(T, a) - z(T, 0) - \sum_{i=1}^N a_i R(T, t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))] \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i} R(T, s) \cdot \Delta(s, a) ds - \sum_{i=1}^N \int_{I_i} R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i) ds \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} [R(T, s) \cdot \Delta(s, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)] ds \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(a), \end{aligned}$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\phi_i(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \\ \frac{1}{a_i} \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} [R(T, s) \cdot \Delta(s, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)] ds & \text{si } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$ t.q. $a_i \neq 0$.

Puisque $[s \mapsto R(T, s) \cdot \Delta(s, a)]$ est Riemann-intégrable sur $[0, T]$, on a

$[s \mapsto R(T, s) \cdot \Delta(s, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)]$ est Riemann-intégrable sur $[0, T]$.

Ainsi, en utilisant le théorème I, p.230 de [35], on obtient que

$\psi_i^1(\cdot, a) := [s \mapsto R(T, t_i + b_i + s) \cdot \Delta(t_i + b_i + s, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)]$ est Riemann-intégrable sur $[0, a_i]$ et

$$\phi_i(a) = \frac{1}{a_i} \int_0^{a_i} (R(T, t_i + b_i + s) \cdot \Delta(t_i + b_i + s, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)) ds.$$

Puisque $\psi_i^1(\cdot, a)$ est Riemann-intégrable sur $[0, a_i]$ et $a_i > 0$, en utilisant le théorème II, p.231 de [35], on obtient que la fonction $\psi_i(\cdot, a) = [s \mapsto \psi_i^1(a_i s, a)]$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et

$$\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N \text{ t.q. } a_i \neq 0, \text{ et}$$

$$\phi_i(a) = \int_0^1 \psi_i(s, a) ds = \int_0^1 (R(T, t_i + b_i + sa_i) \cdot \Delta(t_i + b_i + sa_i, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)) ds.$$

Puisque $\psi_i(\cdot, a)$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$, on a $\|\psi_i(\cdot, a)\| : [s \mapsto \|\psi_i(s, a)\|]$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

En utilisant le théorème de Lebesgue 5.3.5 de [8], on a

$\|\psi_i(\cdot, a)\| \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathfrak{I}_1; \mathbb{R})$ et

$$\int_0^1 \|\psi_i(\cdot, a)\|(s) ds = \int_{[0,1]} \|\psi_i(\cdot, a)\|(s) d\mathfrak{I}_1(s).$$

Soit $s \in [0, 1]$; puisque x_0 est continue au point t_i et u_0 est continue à droite de t_i , on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_0(t_i + b_i + sa_i) = x_0(t_i) \text{ et } \lim_{a \rightarrow 0} u_0(t_i + b_i + sa_i) = u_0(t_i).$$

Par conséquent, en utilisant (ACV1), on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Delta(t_i + b_i + sa_i, a) = \Delta(t_i).$$

Par ailleurs, en utilisant le Théorème 3.2.9 (iii), on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} R(T, t_i + b_i + sa_i) = R(T, t_i).$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{a \rightarrow 0} R(T, t_i + b_i + sa_i) \cdot \Delta(t_i + b_i + sa_i, a) = R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i).$$

Donc, finalement, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\psi_i(s, a)\| = 0.$$

En utilisant le Lemme 5.4.4, on a

$$\exists C_1 > 0, \forall (t, a) \in [0, T] \times (\mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))), \|\Delta(t, a)\| \leq C_1. \quad (5.4.7)$$

De plus, puisque $[0, T]$ est un compact, avec le Théorème 3.2.9 (iii), on a

$$\exists C_2 > 0, \forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T], \|R(t, s)\|_{\mathcal{L}} \leq C_2. \quad (5.4.8)$$

Soit $s \in [0, 1]$ et $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$ t.q. $a_i \neq 0$; notons que

$$\begin{aligned} \|\psi_i(s, a)\| &= \|R(T, t_i + b_i + sa_i) \cdot \Delta(t_i + b_i + sa_i, a) - R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)\| \\ &\leq \|R(T, t_i + b_i + sa_i) \cdot \Delta(t_i + b_i + sa_i, a)\| + \|R(T, t_i) \cdot \Delta(t_i)\| \\ &\leq \|R(T, t_i + b_i + sa_i)\|_{\mathcal{L}} \|\Delta(t_i + b_i + sa_i, a)\| + \|R(T, t_i)\|_{\mathcal{L}} \|\Delta(t_i)\| \\ &\leq 2C_2 C_1. \end{aligned}$$

Puisque $[s \mapsto 2C_2 C_1] \in \mathcal{L}^1([0, 1], \overline{B}([0, 1]), \mathfrak{t}_1; \mathbb{R})$, en utilisant le théorème 6.3.3, p. 105 de [38], on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \|\psi_i(s, a)\| d\mathfrak{t}_1(s) = 0.$$

Puisque, pour chaque $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$, on a

$$\|\phi_i(a)\| \leq \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \|\psi_i(s, a)\| d\mathfrak{t}_1(s),$$

et, en utilisant le théorème de comparaison des limites, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \phi_i(a) = 0.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 5.4.6, il existe $\varrho_1 : \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N \rightarrow E$ vérifiant $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho_1(a) = 0$, telle que, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$z(T, a) = z(T, 0) + \mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \varrho_1(a).$$

Donc la preuve est complète. \square

Lemme 5.4.8. *Pour chaque $x \in C^0([0, T], \Omega)$ il existe $k_1^x \in \mathbb{R}_+$ t.q. pour tout $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$,*

$$\int_0^T \|f(t, x(t), u_a(t)) - f(t, x(t), u_0(t))\| dt \leq k_1^x \|a\|_1.$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 5.4.4, on a

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}_+, \forall (t, a) \in [0, T] \times (\mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))), \|\Delta^x(t, a)\| \leq C_1.$$

Posons $k_1^x = C_1$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$; notons que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|f(t, x(t), u_a(t)) - f(t, x(t), u_0(t))\| dt \\ &= \int_0^T \|\Delta^x(t, a)\| dt \\ &= \int_{[0, T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i} \|\Delta^x(t, a)\| dt + \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \|\Delta^x(t, a)\| dt \\ &= \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \|\Delta^x(t, a)\| dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \|\Delta^x(t, a)\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} C_1 dt \\ &= \sum_{i=1}^N a_i C_1 = C_1 \|a\|_1. \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme. \square

Étape 3

Lemme 5.4.9. *Pour chaque $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$, considérons le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{C}_a) := \begin{cases} \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), u(t, a)) \\ x(0) = \overline{\xi}_0. \end{cases}$$

Alors, il existe $k_2 \in \mathbb{R}_+$, il existe $\rho > 0$ t.q. $\rho \leq \delta(S)$ tels que

- (i) $\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, la solution PC^1 non prolongeable du problème de Cauchy (\mathcal{C}_a) , notée $x(\cdot, a) = x_a$, est définie sur $[0, T]$.
- (ii) $[a \mapsto x(\cdot, a)] \in C^0(\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N, C^0([0, T], \Omega))$.
- (iii) $\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N, \forall t \in [0, T], \|x(t, a) - x_0(t)\| \leq k_2 \|a\|$.

Démonstration. Considérons la fonction $\tilde{f} : [0, T] \times \Omega \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N) \rightarrow E$ définie par

$$\forall (t, \xi, a) \in [0, T] \times \Omega \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N), \tilde{f}(t, \xi, a) = f(t, \xi, u_a(t)).$$

Pour démontrer (i), (ii) et (iii), il suffit de montrer que \tilde{f} vérifie les hypothèses (P1), (P2), (P3) et (P4) du Théorème 3.3.7.

Avec (ACV1), sachant que $(\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N, u_a([0, T]) \subset U)$, on a

$$\forall (t, \xi, a) \in [0, T] \times \Omega \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N), D_{G,2}\tilde{f}(t, \xi, a) = D_{G,2}f(t, \xi, u_a(t)). \quad (5.4.9)$$

Par conséquent, (P2) est vérifiée.

Soit $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$; avec (ACV1), en utilisant le Lemme 5.4.2, on obtient que $\tilde{f}(\cdot, \cdot, a)$ vérifie (H1) avec $disc1(\tilde{f}(\cdot, \cdot, a)) = \{\tau_i^a : 0 \leq i \leq k^a + 1\}$.

Par conséquent, (P1) est vérifiée.

Soit $K \subset \Omega$ un compact.

L'ensemble \mathcal{M} du Lemme 5.4.3 est un compact t.q. $\mathcal{M} \subset U$.

De plus, $\forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N, u_a(t) \in \mathcal{M}$.

Par conséquent, puisque $K \times \mathcal{M}$ est un compact t.q. $K \times \mathcal{M} \subset \Omega \times U$, avec (ACV2) et (5.4.9), on a

$$\exists M > 0, \forall (t, \xi, a) \in [0, T] \times K \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N), \|D_{G,2}\tilde{f}(t, \xi, a)\|_{\mathcal{L}} \leq M. \quad (5.4.10)$$

Ceci démontre (P3).

Reste à démontrer (P4).

Soit $x \in C^0([0, T], \Omega)$ et $\hat{a} \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$.

Si $\hat{a} = 0$, en utilisant le Lemme 5.4.8, il existe $k_1^x \in \mathbb{R}_+$ t.q., $\forall a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$,

$$\int_0^T \|f(t, x(t), u_a(t)) - f(t, x(t), u_0(t))\| dt \leq k_1^x \|a\|_1.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^T \|\tilde{f}(t, x(t), a) - \tilde{f}(t, x(t), 0)\| dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^T \|f(t, x(t), u_a(t)) - f(t, x(t), u_0(t))\| dt = 0. \end{aligned}$$

Si $\hat{a} \neq 0$, considérons $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N$ qui converge vers \hat{a} .

Notons que, $\forall a \in \mathbb{R}_+^N \cap \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S))$,

$$f(t, x(t), u_a(t)) = \left. \begin{aligned} & 1_{[0, t_1]}[f(t, x(t), u_0(t)) + \\ & \sum_{i=1}^N 1_{[t_i + b_i(a), t_i + b_i(a) + a_i]}[f(t, x(t), v_i) + \\ & \sum_{i=1}^{N-1} 1_{[t_i + b_i(a) + a_i, t_{i+1} + b_{i+1}(a)]}[f(t, x(t), u_0(t)) \\ & + 1_{[t_N + b_N(a) + a_N, T]}f(t, x(t), u_0(t)). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.11)$$

Par ailleurs, notons que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{[t_i+b_i(a^n), t_i+b_i(a^n)+a_i^n]}(t) &= \mathbf{1}_{[t_i+b_i(\hat{a}), t_i+b_i(\hat{a})+\hat{a}_i]}(t), \mathbf{m}_1\text{-p.p. } t \in [0, T], \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{[t_i+b_i(a^n)+a_i^n, t_{i+1}+b_{i+1}(a^n)]}(t) &= \mathbf{1}_{[t_i+b_i(\hat{a})+\hat{a}_i, t_{i+1}+b_{i+1}(\hat{a})]}(t), \mathbf{m}_1\text{-p.p. } t \in [0, T], \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{[t_N+b_N(a^n)+a_N^n, T]}(t) &= \mathbf{1}_{[t_N+b_N(\hat{a})+\hat{a}_N, T]}(t) \mathbf{m}_1\text{-p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Puisque une réunion finie d'ensembles \mathbf{m}_1 -négligeables est un ensemble \mathbf{m}_1 -négligeable, en utilisant (5.4.11), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\| = 0, \quad \mathbf{m}_1 - p.p. \quad t \in [0, T]. \quad (5.4.12)$$

De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_{a^n} \in NPC_d^0([0, T], U, (\tau_i^{a^n})_{0 \leq i \leq k^{a^n}+1})$, $u_{\hat{a}} \in NPC_d^0([0, T], U, (\tau_i^{\hat{a}})_{0 \leq i \leq k^{\hat{a}}+1})$, alors avec (Acv1), en utilisant la Proposition 1.2.4 et la Proposition 1.2.2, on a

$$[t \mapsto f(t, x(t), u_{a^n}(t))] \in NPC_d^0([0, T], E, (\tau_i^{a^n})_{0 \leq i \leq k^{a^n}+1})$$

et

$$[t \mapsto f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))] \in NPC_d^0([0, T], E, (\tau_i^{\hat{a}})_{0 \leq i \leq k^{\hat{a}}+1}).$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.1.5, on a

$$[t \mapsto f(t, x(t), u_{a^n}(t))] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (E, \mathcal{B}(E)))$$

et

$$[t \mapsto f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (E, \mathcal{B}(E))).$$

Ainsi, on obtient

$$[t \mapsto f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (E, \mathcal{B}(E))). \quad (5.4.13)$$

Puisque $\|\cdot\| \in C^0(E, \mathbb{R})$, on a $\|\cdot\| \in \mathcal{L}^0((E, \mathcal{B}(E)), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})))$.

Par conséquent, en utilisant (5.4.13) et la composition des fonctions mesurables, on a

$$[t \mapsto \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\|] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))). \quad (5.4.14)$$

En utilisant le Lemme 5.4.4, on a

$$\exists C_1 > 0, \forall (t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N), \|\Delta^x(t, a)\| \leq C_1.$$

Soit $t \in [0, T]$ et $n \in \mathbb{N}$; alors on a

$$\begin{aligned} & \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\| \\ &= \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_0(t)) + f(t, x(t), u_0(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\| \\ &\leq \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_0(t))\| + \|f(t, x(t), u_0(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\| \\ &= \|\Delta^x(t, a^n)\| + \|\Delta^x(t, \hat{a})\| \\ &\leq 2C_1. \end{aligned}$$

Puisque la fonction constante égale à $2C_1$ est \mathbf{m}_1 -intégrable sur $[0, T]$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|f(t, x(t), u_{a^n}(t)) - f(t, x(t), u_{\hat{a}}(t))\| dt = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \|\tilde{f}(t, x(t), a^n) - \tilde{f}(t, x(t), \hat{a})\| dt = 0. \quad (5.4.15)$$

Ainsi, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, (P4) est vérifiée. Par conséquent, puisque x_0 est une solution PC^1 du problème de Cauchy (\mathcal{C}_0) sur $[0, T]$, en utilisant le Théorème 3.3.7, on a : $\exists \rho \in]0, \delta(S)[$ t.q. $\forall a \in \overline{B}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, la solution PC^1 non prolongeable $x(\cdot, a) = x_a$ du problème de Cauchy (\mathcal{C}_a) est définie sur $[0, T]$ tout entier.

Ceci démontre (i).

Ensuite, $[a \mapsto x(\cdot, a)]$ est continue sur $\overline{B}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$ dans $C^0([0, T], \Omega)$ ce qui démontre (ii).

De plus, en utilisant le Lemme 3.3.8, on a

$$\left. \begin{aligned} &\exists L > 0, \exists r > 0 \text{ t.q. } \forall t \in [0, T], \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{B}(x_0(t), r) \subset \Omega, \\ &\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N, \|f(t, \xi_1, u_a(t)) - f(t, \xi_2, u_a(t))\| \leq L \|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.16)$$

Par ailleurs, pour chaque $a \in \overline{B}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, on a

$$\|x(\cdot, a) - x_0\|_\infty \leq \exp(LT) \int_0^T \|\tilde{f}(s, x_0(s), a) - \tilde{f}(s, x_0(s), 0)\| ds.$$

En utilisant le Lemme 5.4.8, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|\tilde{f}(s, x_0(s), a) - \tilde{f}(s, x_0(s), 0)\| ds \\ &= \int_0^T \|f(s, x_0(s), u_a(s)) - f(s, x_0(s), u_0(s))\| ds \leq k_1^{x_0} \|a\|_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $k_2 := k_1^{x_0} \exp(LT)$, on a

$$\|x(\cdot, a) - x_0\|_\infty \leq k_2 \|a\|_1.$$

□

Étape 4

Théorème 5.4.10. *Il existe $\varrho : \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N \rightarrow E$ vérifiant $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho(a) = 0$, telle que, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,*

$$x(T, a) = x(T, 0) + \mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \varrho(a),$$

où \mathfrak{L} est la fonction linéaire continue définie dans le Lemme 5.4.7.

Démonstration. Posons : $\forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$y_a(t) = (x_a(t) - z_a(t)) - (x_0(t) - z_0(t)).$$

Puisque, $\forall t \in [0, T], z_0(t) = 0$, on a : $\forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$y_a(t) = x_a(t) - z_a(t) - x_0(t).$$

Posons : $\forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$\gamma_a(t) := \mathbf{d}y_a(t) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot y_a(t).$$

Si $t \in [0, T]$ et si $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, on a

$$\begin{aligned}
 \gamma_a(t) &= \mathbf{d}[x_a - z_a - x_0](t) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot (x_a(t) - z_a(t) - x_0(t)) \\
 &= \mathbf{d}x_a(t) - \mathbf{d}z_a(t) - \mathbf{d}x_0(t) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot (x_a(t) - z_a(t) - x_0(t)) \\
 &= f(t, x_a(t), u_a(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot z_a(t) - f(t, x_0(t), u_a(t)) \\
 &\quad + f(t, x_0(t), u_0(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t)) + D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot z_a(t) \\
 &\quad - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t)) \\
 &= f(t, x_a(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_a(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t)) \\
 &= f(t, x_a(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_a(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t)) \\
 &\quad + D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t)).
 \end{aligned}$$

Considérons la fonction $\theta : \Omega \times [0, T] \times U \rightarrow E$ définie par

$$\theta(\xi, t, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = x_0(t) \\ \frac{1}{\|\xi - x_0(t)\|} (f(t, \xi, \zeta) - f(t, x_0(t), \zeta)) \\ -D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta) \cdot (\xi - x_0(t)) & \text{si } \xi \neq x_0(t). \end{cases}$$

Pour chaque $(t, \zeta) \in [0, T] \times U$, la fonction $f(t, \cdot, \zeta)$ étant Fréchet-différentiable au point $x_0(t)$, on a

$$\forall (t, \zeta) \in [0, T] \times U, \lim_{\xi \rightarrow 0} \theta(\xi, t, \zeta) = 0. \quad (5.4.17)$$

Posons : $\forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$\varepsilon_1(t, a) = \theta(x_a(t), t, u_a(t)) \text{ et } \varepsilon_2(t, a) = D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)).$$

Par conséquent, remarquons que

$$\left. \begin{aligned} \forall (t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N), \\ \gamma_a(t) = \|x_a(t) - x_0(t)\| \varepsilon_1(t, a) + \varepsilon_2(t, a) \cdot (x_a(t) - x_0(t)). \end{aligned} \right\}$$

Ainsi,

$$\left. \begin{aligned} \forall (t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N), \\ \|\gamma_a(t)\| \leq \|x_a(t) - x_0(t)\| \|\varepsilon_1(t, a)\| + \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} \|x_a(t) - x_0(t)\|. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.18)$$

Soit $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$; puisque $[t \mapsto x_a(t) - x_0(t)] \in C^0([0, T], \Omega)$, on a

$$[t \mapsto x_a(t) - x_0(t)] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (E, \mathcal{B}(E))). \quad (5.4.19)$$

Par conséquent, on obtient

$$1_{\{x_a \neq x_0\}} \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))).$$

De plus, puisque $\|\cdot\| \in C^0(E, \mathbb{R})$, on a

$$[t \mapsto \|x_a(t) - x_0(t)\|] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))). \quad (5.4.20)$$

Puisque $u_0 \in NPC_d^0([0, T], U; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq r+1})$, $u_a \in NPC_d^0([0, T], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1})$, $x_a \in C^0([0, T], \Omega)$, $x_0 \in C^0([0, T], \Omega)$ et avec (ACV1), en utilisant les Propositions 1.2.2 et 1.2.4, on a

$$[t \mapsto f(t, x_a(t), u_a(t))] \in NPC_d^0([0, T], E; (\alpha_i)_{0 \leq i \leq r+1})$$

et

$$[t \mapsto f(t, x_0(t), u_a(t))] \in NPC_d^0([0, T], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1}).$$

5.4. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE
MAYER

De plus, avec (ACV1), on a

$$[t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{L}(E, E); (\tau_i)_{0 \leq i \leq k+1}). \quad (5.4.21)$$

Par conséquent, puisque la fonction $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(E, E) \times E \rightarrow E$, définie par $\mathcal{Q}(l, \xi) = l \cdot \xi$, est continue sur $\mathcal{L}(E, E) \times E$ et en utilisant les propriétés des fonctions mesurables, on a

$$[t \mapsto D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t))] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (E, \mathcal{B}(E))).$$

En utilisant la Proposition 1.1.5 et les propriétés des fonctions mesurables, on a

$$\left. \begin{aligned} \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N \\ \|\varepsilon_1(\cdot, a)\| := [t \mapsto \|\varepsilon_1(t, a)\|] \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{R}_+)). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.22)$$

En utilisant (5.4.16), on a

$$\left. \begin{aligned} \exists L > 0, \exists r > 0 \text{ t.q. } \forall t \in [0, T], \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{B}(x_0(t), r) \subset \Omega, \\ \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N, \|f(t, \xi_1, u_a(t)) - f(t, \xi_2, u_a(t))\| \leq L\|\xi_1 - \xi_2\| \end{aligned} \right\} \quad (5.4.23)$$

et puisque $x_0([0, T]) \subset \Omega$ est un compact, on a, en utilisant (5.4.10),

$$\exists M > 0, \forall t \in [0, T], \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \delta(S)) \cap \mathbb{R}_+^N, \|D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t))\|_{\mathcal{L}} \leq M. \quad (5.4.24)$$

Posons $r_1 := \min\{\frac{r}{k_2}, \rho\} > 0$.

Soit $t \in [0, T]$ et $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, r_1) \cap \mathbb{R}_+^N$; en utilisant l'assertion (iii) du Lemme 5.4.9, on a

$$\|x_a(t) - x_0(t)\| \leq k_2\|a\|_1 \leq k_2\frac{r}{k_2} = r.$$

Par conséquent, en utilisant l'assertion (5.4.23), on a

$$\|f(t, x_a(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_a(t))\| \leq L\|x_a(t) - x_0(t)\|.$$

D'où, si $x_a(t) \neq x_0(t)$, on a

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1(t, a)\| &= \left\| \frac{1}{\|x_a(t) - x_0(t)\|} (f(t, x_a(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t)) \right. \\ &\quad \left. - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t))) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|x_a(t) - x_0(t)\|} \|f(t, x_a(t), u_a(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t))\| \\ &\quad + \frac{1}{\|x_a(t) - x_0(t)\|} \|D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) \cdot (x_a(t) - x_0(t))\| \\ &\leq \frac{1}{\|x_a(t) - x_0(t)\|} L\|x_a(t) - x_0(t)\| + \frac{\|x_a(t) - x_0(t)\|}{\|x_a(t) - x_0(t)\|} \|D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t))\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq L + M. \end{aligned}$$

De plus, si $x_a(t) = x_0(t)$, on a

$$\|\varepsilon_1(t, a)\| \leq L + M.$$

Par conséquent, on a

$$\forall (t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, r_1) \cap \mathbb{R}_+^N), \|\varepsilon_1(t, a)\| \leq L + M. \quad (5.4.25)$$

Si $(t, a) \in [0, T] \times (\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, r_1) \cap \mathbb{R}_+^N)$, alors on a

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1(t, a)\| &= \|\theta(x_a(t), t, u_a(t))\| \\ &= \|\mathbf{1}_{[0, t_1]}[\theta(x_a(t), t, u_0(t)) + \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{[t_i + b_i(a), t_i + b_i(a) + a_i]}[\theta(x_a(t), t, v_i) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{[t_i + b_i(a) + a_i, t_{i+1} + b_{i+1}(a)]}[\theta(x_a(t), t, u_0(t)) + \mathbf{1}_{[t_N + b_N(a) + a_N, T]} \theta(x_a(t), t, u_0(t))]\| \\ &\leq \|\theta(x_a(t), t, u_0(t))\| + \sum_{i=1}^N \|\theta(x_a(t), t, v_i)\| + \sum_{i=1}^{N-1} \|\theta(x_a(t), t, u_0(t))\| + \\ &\quad \|\theta(x_a(t), t, u_0(t))\| \\ &= (N + 1)\|\theta(x_a(t), t, u_0(t))\| + \sum_{i=1}^N \|\theta(x_a(t), t, v_i)\|. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{a \rightarrow 0} x_a(t) = x_0(t)$, en utilisant (5.4.17) et le théorème de composition des limites (p.39 de [35]), on obtient

$$\lim_{a \rightarrow 0} \theta(x_a(t), t, u_0(t)) = 0 \text{ et, } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \lim_{a \rightarrow 0} \theta(x_a(t), t, v_i) = 0.$$

Ceci implique que

$$\lim_{a \rightarrow 0} [(N+1) \|\theta(x_a(t), t, u_0(t))\| + \sum_{i=1}^N \|\theta(x_a(t), t, v_i)\|] = 0.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\varepsilon_1(t, a)\| = 0. \quad (5.4.26)$$

Ainsi, en utilisant les assertions (5.4.22), (5.4.25) et (5.4.26) et le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{[0, T]} \|\varepsilon_1(t, a)\| d\mathbf{m}_1(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| dt = 0. \quad (5.4.27)$$

Si $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt &= \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt + \int_{[0, T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i} \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt \\ &= \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \|D_{F,2}f(t, x_0(t), u_a(t)) - D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t))\|_{\mathcal{L}} dt \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} 2M dt \\ &= 2M \|a\|_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt = 0. \quad (5.4.28)$$

Par construction, pour chaque $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, y_a est solution PC^1 de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$\begin{cases} \mathbf{d}y(t) = \gamma_a(t) + D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)) \cdot y(t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 3.2.10, on a

$$y_a(T) = \int_0^T R(T, t) \cdot \gamma_a(t) dt.$$

Puisque $R(\cdot, \cdot)$ est continue sur le compact $[0, T] \times [0, T]$, on a

$$\exists C_3 > 0, \forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T], \|R(t, s)\|_{\mathcal{L}} \leq C_3.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \|x_a(T) - z_a(T) - (x_0(T) - z_0(T))\| &= \|y_a(T)\| = \left\| \int_0^T R(T, t) \cdot \gamma_a(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^T \|R(T, t) \cdot \gamma_a(t)\| dt \\ &\leq \int_0^T \|R(T, t)\|_{\mathcal{L}} \|\gamma_a(t)\| dt \\ &\leq \int_0^T C_3 \|\gamma_a(t)\| dt \\ &\leq C_3 \int_0^T (\|\varepsilon_1(t, a)\| \|x_a(t) - x_0(t)\| + \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} \|x_a(t) - x_0(t)\|) dt \text{ d'après (5.4.18)} \\ &\leq C_3 \int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| k_2 \|a\|_1 dt + C_3 \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} k_2 \|a\|_1 dt \\ &= (C_3 k_2 (\int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| dt + \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\|_{\mathcal{L}} dt)) \|a\|_1. \end{aligned}$$

5.4. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE MAYER

$$\left. \begin{aligned} \forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N, \\ \|x_a(T) - z_a(T) - (x_0(T) - z_0(T))\| \\ \leq (C_3 k_2 (\int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| dt + \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\| dt)) \|a\|_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.29)$$

Considérons la fonction $\varrho : \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N \rightarrow E$, définie par, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$,

$$\varrho(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{\|a\|_1} [x_a(T) - x_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a] & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Par construction de la fonction ϱ , on a

$$\forall a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N, \quad x_a(T) - x_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a = \|a\|_1 \varrho(a).$$

Reste à montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho(a) = 0$. Pour chaque $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$ t.q. $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|\varrho(a)\| &= \left\| \frac{1}{\|a\|_1} [x_a(T) - x_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a] \right\| \\ &= \frac{1}{\|a\|_1} \|x_a(T) - x_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a\| \\ &= \frac{1}{\|a\|_1} \|(x_a(T) - x_0(T)) + (z_a(T) - z_0(T)) - (z_a(T) - z_0(T)) - \mathfrak{L} \cdot a\| \\ &= \frac{1}{\|a\|_1} \|(x_a(T) - z_a(T)) - (x_0(T) - z_0(T)) + z_a(T) - z_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a\| \\ &\leq \frac{1}{\|a\|_1} (\|(x_a(T) - z_a(T)) - (x_0(T) - z_0(T))\| + \|z_a(T) - z_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a\|) \\ &\leq C_3 k_2 (\int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| dt + \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\| dt) + \varrho_1(a) \text{ grâce à (5.4.29)} \\ &\text{et au Lemme 5.4.7.} \end{aligned}$$

En utilisant les assertions (5.4.27) et (5.4.28) et le Lemme 5.4.7, on a

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a \neq 0}} C_3 k_2 (\int_0^T \|\varepsilon_1(t, a)\| dt + \int_0^T \|\varepsilon_2(t, a)\| dt) + \varrho_1(a) = 0.$$

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a \neq 0}} \varrho(a) = 0$.

De plus, puisque $\varrho(0) = 0$, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho(a) = 0$.

Ainsi, la preuve est complète. \square

Proposition 5.4.11. *Il existe $\rho_1 \in]0, \rho]$ et une fonction $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^N \rightarrow E$ t.q.*

$\tilde{\varphi}|_{\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1)} \in C^0(\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1), \Omega)$, Fréchet-différentiable au point $a = 0$, et qui satisfait, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, $\tilde{\varphi}(a) = x_a(T)$, et $D_F \tilde{\varphi}(0) = \mathfrak{L}$.

Démonstration. En utilisant le Théorème 5.4.10, il existe $\varrho : \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N \rightarrow E$ telle que $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho(a) = 0$, et telle que, pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$, on a

$$x_a(T) = x_0(T) + \mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \varrho(a).$$

Puisque les normes sur \mathbb{R}^N sont équivalentes, $\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$ est un fermé de $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$.

On note $Proj_m$ le projecteur de meilleure approximation de \mathbb{R}^N sur le convexe fermé $\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$ défini dans le théorème 1, p.29 de [3].

Remarquons que la fonction ϱ est définie pour tout $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$ et vérifie

$$\varrho(a) = \begin{cases} \frac{1}{\|a\|_1} (x_a(T) - x_0(T) - \mathfrak{L} \cdot a), & \text{si } a \neq 0, \\ 0, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

En utilisant l'assertion (ii) du Lemme 5.4.9 et $\mathfrak{L} \in C^0(\mathbb{R}^N, E)$, on obtient que ϱ est continue sur $(\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N) \setminus \{0\}$.

De plus, puisque $\lim_{a \rightarrow 0} \varrho(a) = 0$, on obtient que ϱ est continue sur $\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^N$.

On pose $\bar{\varrho} := \varrho \circ Proj_m$.

Puisque $Proj_m$ est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R}^N , on a $\bar{\varrho} \in C^0(\mathbb{R}^N, E)$.

Considérons la fonction $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^N \rightarrow E$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}^N, \tilde{\varphi}(a) := x_0(T) + \mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \bar{\varrho}(a).$$

Puisque \mathfrak{L} et $\bar{\varrho}$ sont continues sur \mathbb{R}^N , on obtient que $\tilde{\varphi}$ est continue sur \mathbb{R}^N .

De plus, puisque $\lim_{a \rightarrow 0} \bar{\varrho}(a) = \varrho(0) = 0$, on obtient que $\tilde{\varphi}$ est Fréchet-différentiable au point 0, et $D_F \tilde{\varphi}(0) = \mathfrak{L}$.

Enfin, puisque $x_0(T) \in \Omega$, Ω est un ouvert et $\lim_{a \rightarrow 0} (\mathfrak{L} \cdot a + \|a\|_1 \bar{\varrho}(a)) = 0$, il existe $\rho_1 \in]0, \rho]$ t.q. $\tilde{\varphi}(\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1)) \subset \Omega$. \square

Étape 5

Lemme 5.4.12. *0 est solution du problème*

$$(\mathcal{F}_S) := \begin{cases} \text{Maximiser} & g^0(x_a(T)) \\ \text{lorsque} & a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1) \cap \mathbb{R}_+^N \\ & \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x_a(T)) \geq 0 \\ & \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x_a(T)) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Puisque (x_0, u_0) est solution du problème (\mathcal{M}') , on a

$$\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x_0(T)) \geq 0 \text{ et } \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x_0(T)) = 0.$$

De plus, puisque $0 \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1) \cap \mathbb{R}_+^N$, 0 est admissible pour le problème (\mathcal{F}_S) .

Soit $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1) \cap \mathbb{R}_+^N$ t.q. a est admissible pour le problème (\mathcal{F}_S) .

Puisque a est admissible pour le problème (\mathcal{F}_S) , on a $a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1) \cap \mathbb{R}_+^N$ et

$$\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(x_a(T)) \geq 0 \text{ et } \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(x_a(T)) = 0.$$

De plus, puisque $(x_a, u_a) \in PC^1([0, T], \Omega) \times NPC_d^0([0, T], U)$, $x_a(0) = \bar{\xi}_0$ et, $\forall t \in [0, T]$, $\mathbf{d}x_a(t) = f(t, x_a(t), u_a(t))$, on obtient que (x_a, u_a) est admissible pour le problème (\mathcal{M}') .

Ainsi, (x_0, u_0) étant une solution du problème (\mathcal{M}') , on a

$$g^0(x_0(T)) \geq g^0(x_a(T)).$$

\square

En utilisant le Lemme 5.4.12, la fonction $\tilde{\varphi}$ de la Proposition 5.4.11 et $(b_i^*)_{1 \leq i \leq N}$, la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^N , 0 est aussi solution du problème suivant,

$$(\mathcal{F}_S^1) := \begin{cases} \text{Maximiser} & g^0(\tilde{\varphi}(a)) \\ \text{lorsque} & a \in \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1) \\ & \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, g^\alpha(\tilde{\varphi}(a)) \geq 0 \\ & \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta(\tilde{\varphi}(a)) = 0 \\ & \forall i \in \{1, \dots, N\}, b_i^* \cdot a \geq 0. \end{cases}$$

Lemme 5.4.13. *Il existe $(\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m} \in \mathbb{R}^{1+m}$ et $(\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q} \in \mathbb{R}^q$ qui satisfont aux assertions suivantes.*

5.4. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE MAYER

- (a) $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \neq 0$.
- (b) $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \lambda_\alpha \geq 0$.
- (c) $\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0$.
- (d) $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p(t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))] \leq 0$, où, pour tout $t \in [0, T]$,
 $p(t) := (\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T))) \circ R(T, t)$.

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$.

Puisque $b_i^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on a $b_i^* \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Donc b_i^* est Hadamard-différentiable au point 0 et

$$D_H b_i^*(0) = b_i^*.$$

En utilisant (ACON1), (ACON2), la Proposition 5.4.11 et le Lemme 2.1.9, on a

$$\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, D_H(g^\alpha \circ \tilde{\varphi})(0) = D_H g^\alpha(\tilde{\varphi}(0)) \circ D_H \tilde{\varphi}(0) \quad (5.4.30)$$

et

$$\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, D_H(h^\beta \circ \tilde{\varphi})(0) = D_H h^\beta(\tilde{\varphi}(0)) \circ D_H \tilde{\varphi}(0). \quad (5.4.31)$$

Soit $\beta \in \{1, \dots, q\}$; en utilisant (ACON2), h^β est une fonction continue sur un voisinage V^β de $x_0(T)$. De plus, puisque $\tilde{\varphi} \in C^0(B_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_1), \Omega)$, il existe $\rho_2^\beta > 0$ t.q.

$$\tilde{\varphi}|_{B_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_2^\beta)} \in C^0(B_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_2^\beta), V^\beta).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta \circ \tilde{\varphi}|_{B_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_2^\beta)} \in C^0(B_{\|\cdot\|_1}(0, \rho_2^\beta), \mathbb{R}).$$

Ainsi, les hypothèses du Théorème 2.4.1 sont vérifiées pour le problème (\mathcal{F}_S^1) et on obtient l'existence de $(\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m} \in \mathbb{R}^{1+m}$, $(\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q} \in \mathbb{R}^q$, et $(\nu_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ t.q. les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, (\nu_i)_{1 \leq i \leq N}) \neq 0$.
- (ii) $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \lambda_\alpha \geq 0$.
- (iii) $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \nu_i \geq 0$.
- (iv) $\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0$.
- (v) $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \nu_i b_i^* \cdot 0 = 0$.
- (vi) $\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(\tilde{\varphi}(0)) \circ D_H \tilde{\varphi}(0) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(\tilde{\varphi}(0)) \circ D_H \tilde{\varphi}(0) + \sum_{i=1}^N \nu_i b_i^* = 0$.

Pour montrer (a), raisonnons par l'absurde, supposons que $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) = 0$. En utilisant (vi), on a $\sum_{i=1}^N \nu_i b_i^* = 0$; et puisque $(b_i^*)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille libre, on a

$$(\nu_i)_{1 \leq i \leq N} = 0,$$

ce qui contredit (i); ainsi (a) est vérifiée.

De plus, les assertions (ii) et (iv) sont équivalentes respectivement aux assertions (b) et (c).

Reste à démontrer (d). En utilisant (vi), on a

$$\left. \begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{R}^N, \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) D_H \tilde{\varphi}(0) \cdot a + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) D_H \tilde{\varphi}(0) \cdot a \\ &+ \sum_{i=1}^N \nu_i a_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.32)$$

Pour chaque $a \in \mathbb{R}_+^N$, grâce à (iii), on a, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, $\nu_i a_i \geq 0$. Par conséquent, en utilisant (5.4.32), on a, pour chaque $a \in \mathbb{R}_+^N$,

$$\sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) D_H \tilde{\varphi}(0) \cdot a + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D h^\beta(x_0(T)) D_H \tilde{\varphi}(0) \cdot a \leq 0. \quad (5.4.33)$$

Puisque $D_H \tilde{\varphi}(0) := [a \mapsto \sum_{i=1}^N a_i R(T, t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))]]$, la relation (5.4.33) est équivalente à

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^N, \quad \sum_{i=1}^N a_i p(t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))] \leq 0,$$

ce qui démontre (d). \square

Étape 6

Dans le lemme suivant, on rappelle la propriété de l'intersection finie des espaces compacts.

Lemme 5.4.14. (Propriété de l'intersection finie des espaces compacts). *Soit \mathcal{X} un espace vectoriel normé réel et $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) \mathcal{K} est un compact de \mathcal{X} .
- (ii) Pour chaque $(H_i)_{i \in \mathcal{I}}$ famille fermée de \mathcal{X} ,

$$[\text{Pour chaque famille fini } \mathfrak{J} \text{ de } \mathcal{I}, \bigcap_{j \in \mathfrak{J}} H_j \cap \mathcal{K} \neq \emptyset] \Rightarrow [\bigcap_{i \in \mathcal{I}} H_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset].$$

Démonstration. On peut trouver une démonstration de ce lemme p. 31 de [28]. \square

Puisque l'ensemble des $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in \mathbb{R}^{1+m+q}$ qui vérifient les assertions (a), (b), (c) et (d) du Lemme 5.4.13 est un cône, en normalisant $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q})$ du Lemme 5.4.13, on peut prendre

$$(e) \quad \sum_{\alpha=0}^m |\lambda_\alpha| + \sum_{\beta=1}^q |\mu_\beta| = 1.$$

Pour chaque $S \in \mathbb{S}$, on considère

$$\left. \begin{aligned} K(S) := \{ & ((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in \mathbb{R}^{1+m+q} : \forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \bar{\lambda}_\alpha \geq 0, \\ & \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \bar{\lambda}_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ & p_{((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q})}(t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))] \leq 0, \\ & \sum_{\alpha=0}^m |\bar{\lambda}_\alpha| + \sum_{\beta=1}^q |\bar{\mu}_\beta| = 1 \}. \end{aligned} \right\}$$

En utilisant le Lemme 5.4.13 et (e), on a : $\forall S \in \mathbb{S}, K(S) \neq \emptyset$.

Considérons les fonctions suivantes

$$\bar{\Lambda}_1 : \mathbb{R}^{1+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^{1+m}, \quad \bar{\Lambda}_1((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) := (\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}$$

$$\bar{\Lambda}_2 : \mathbb{R}^{1+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \bar{\Lambda}_2((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) := (\bar{\lambda}_\alpha g^\alpha(x_0(T)))_{1 \leq \alpha \leq m}$$

et $\bar{\Lambda}_3 : \mathbb{R}^{1+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$\left. \bar{\Lambda}_3((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) := \left(\left(\sum_{\alpha=0}^m \bar{\lambda}_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \bar{\mu}_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) \right) \cdot R(T, t_i) \cdot [f(t_i, x_0(t_i), v_i) - f(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i))] \right)_{1 \leq i \leq N} \right\}$$

5.4. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE MAYER

Puisque les fonctions $\overline{\Lambda}_1$, $\overline{\Lambda}_2$ et $\overline{\Lambda}_3$ sont linéaires et $\dim(\mathbb{R}^{1+m+q}) < +\infty$, on a $\overline{\Lambda}_1 \in C^0(\mathbb{R}^{1+m+q}, \mathbb{R}^{1+m})$, $\overline{\Lambda}_2 \in C^0(\mathbb{R}^{1+m+q}, \mathbb{R}^m)$ et $\overline{\Lambda}_3 \in C^0(\mathbb{R}^{1+m+q}, \mathbb{R}^N)$.

Par conséquent,

$$K(S) = \overline{\Lambda}_1^{-1}(\mathbb{R}_+^{1+m}) \cap \overline{\Lambda}_2^{-1}(0_{\mathbb{R}^m}) \cap \overline{\Lambda}_3^{-1}(\mathbb{R}_-^N) \cap S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$$

est un fermé de \mathbb{R}^{1+m+q} .

Soit $(S^\ell)_{1 \leq \ell \leq n} = ((t_i^\ell, v_i^\ell)_{1 \leq i \leq N^\ell})_{1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{S}^n$. Posons $\bar{N} := \sum_{\ell=1}^n N^\ell$ et $\bar{S} := (\tilde{t}_i, \tilde{v}_i)_{1 \leq i \leq \bar{N}}$ où pour chaque $i \in \{1, \dots, \bar{N}\}$ et $\ell \in \{1, \dots, n\}$, les \tilde{t}_i sont les t_i^ℓ réordonnés par ordre croissant, si $\tilde{t}_i = t_i^\ell$, on a $\tilde{v}_i = v_i^\ell$.

Par conséquent, on a $\bar{S} \in \mathbb{S}$.

Soit $\ell \in \{1, \dots, n\}$, et soit $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in K(\bar{S})$ i.e.

$$\left. \begin{aligned} \forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \bar{\lambda}_\alpha &\geq 0, \\ \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \bar{\lambda}_\alpha g^\alpha(x_0(T)) &= 0, \forall i \in \{1, \dots, \bar{N}\}, \\ p_{((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q})}(\tilde{t}_i) \cdot [f(\tilde{t}_i, x_0(\tilde{t}_i), \tilde{v}_i) - f(\tilde{t}_i, x_0(\tilde{t}_i), u_0(\tilde{t}_i))] &\leq 0, \\ \sum_{\alpha=0}^m |\bar{\lambda}_\alpha| + \sum_{\beta=1}^q |\bar{\mu}_\beta| &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Soit $i \in \{1, \dots, N^\ell\}$; il existe $j \in \{1, \dots, \bar{N}\}$, tel que $t_i^\ell = \tilde{t}_j$ et $v_i^\ell = \tilde{v}_j$, on a donc

$$p_{((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q})}(t_i^\ell) \cdot [f(t_i^\ell, x_0(t_i^\ell), v_i^\ell) - f(t_i^\ell, x_0(t_i^\ell), u_0(t_i^\ell))] \leq 0.$$

Par conséquent, $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in K(S_\ell)$. Ainsi, $\forall \ell \in \{1, \dots, n\}$, $K(\bar{S}) \subset K(S_\ell)$ i.e.

$$K(\bar{S}) \subset \bigcap_{\ell=1}^n K(S_\ell).$$

Puisque $K(\bar{S}) \neq \emptyset$, on a $\bigcap_{\ell=1}^n K(S_\ell) \neq \emptyset$.

Par conséquent, chaque liste finie $(S^\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ d'éléments de \mathbb{S} , on a $\bigcap_{\ell=1}^n K(S_\ell) \neq \emptyset$.

De plus, puisque $S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ est un compact de \mathbb{R}^{1+m+q} , on a, pour chaque $S \in \mathbb{S}$, $K(S)$ est un fermé du compact $S_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$. Ainsi, en utilisant la propriété de l'intersection finie des espaces compacts, on a

$$\bigcap_{S \in \mathbb{S}} K(S) \neq \emptyset.$$

Fixons un élément $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \in \bigcap_{S \in \mathbb{S}} K(S)$, et considérons p , définie dans l'assertion (d) du Lemme 5.4.13 pour $((\lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q})$. Puisque

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^m |\lambda_\alpha| + \sum_{\beta=1}^q |\mu_\beta| &= 1 \\ \forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \lambda_\alpha &\geq 0, \\ \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

on a démontré (NN), (Si) et (Sl).

Soit $t \in]0, T[$ et $v \in U$; puisque $(t, v) \in \mathbb{S}$, on a $p(t) \cdot [f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), u_0(t))] \leq 0$.

Par conséquent, on obtient

$$\forall (t, v) \in]0, T[\times U, p(t) \cdot [f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), u_0(t))] \leq 0. \quad (5.4.34)$$

Soit $v \in U$; puisque u_0 est continue au point 0 et au point T , on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0, T[}} p(t) \cdot [f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), u_0(t))] = p(0) \cdot [f(0, x_0(0), v) - f(0, x_0(0), u_0(0))]$$

et

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T \\ t \in]0, T[}} p(t) \cdot [f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), u_0(t))] = p(T) \cdot [f(T, x_0(T), v) - f(T, x_0(T), u_0(T))].$$

En utilisant l'assertion (5.4.34), on a donc

$$p(0) \cdot [f(0, x_0(0), v) - f(0, x_0(0), u_0(0))] \leq 0$$

et

$$p(T) \cdot [f(T, x_0(T), v) - f(T, x_0(T), u_0(T))] \leq 0.$$

Ainsi, on a prouvé que

$$\forall (t, v) \in [0, T] \times U, p(t) \cdot [f(t, x_0(t), v) - f(t, x_0(t), u_0(t))] \leq 0.$$

Donc, (MP.M) a été démontrée.

Montrons, maintenant, que p est solution PC^1 de l'équation adjointe.

Posons $\mathcal{W} = \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) \in E^*$ et considérons la fonction $\mathcal{T} : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow E^*$ définie par $\mathcal{T}(\ell) = \mathcal{W} \circ \ell$.

Puisque $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, E), E^*)$, on a $\mathcal{T} \in C^1(\mathcal{L}(E, E), E^*)$.

Puisque $R(T, \cdot) \in PC^1([0, T], \mathcal{L}(E, E), disc(u_0))$ et

$$p = \mathcal{T} \circ R(T, \cdot),$$

en utilisant le Lemme 1.3.13, on a $p \in PC^1([0, T], E^*, disc(u_0))$ et, $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}p(t) &= D_F \mathcal{T}(R(T, t)) \cdot \mathbf{d}R(T, \cdot)(t) \\ &= \mathcal{T}(\mathbf{d}_2 R(T, t)) \\ &= \mathcal{W} \circ -R(T, t) \circ D_{F,2} f(t, x_0(t), u_0(t)) \\ &= -\mathcal{W} \circ R(T, t) \circ D_{F,2} f(t, x_0(t), u_0(t)) \\ &= -p(t) \circ D_{F,2} f(t, x_0(t), u_0(t)). \end{aligned}$$

Par conséquent, (AE.M) est vérifiée.

Puisque $R(T, T) = Id_E$, on a

$$p(T) = \mathcal{W} \circ R(T, T) = \mathcal{W} \circ Id_E = \mathcal{W};$$

ce qui démontre (TC).

Lemme 5.4.15. Soit $\phi \in C^0([0, T] \times U, \mathbb{R})$ et $u \in NPC_d^0([0, T], U)$ t.q. $\phi(t, u(t)) = \max_{\zeta \in U} \phi(t, \zeta)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Alors $\bar{\phi} := [t \mapsto \phi(t, u(t))] \in C^0([0, T], \mathbb{R})$.

Démonstration. Puisque u est continue à droite sur $[0, T[$ et ϕ est continue, $\bar{\phi}$ est continue à droite sur $[0, T[$.

Puisque u est continue en T et ϕ est continue en T , $\bar{\phi}$ est continue au point T . Reste à montrer que $\bar{\phi}$ est continue à gauche sur $]0, T[$.

Soit $t \in]0, T[$; pour chaque $h \in]-t, 0[$, on a $\phi(t, u(t+h)) \leq \phi(t, u(t))$ et $\phi(t+h, u(t)) \leq \phi(t+h, u(t+h))$.

Par conséquent, on a $\phi(t, u(t-)) \leq \phi(t, u(t))$ et $\phi(t, u(t)) \leq \phi(t, u(t-))$,

donc, on a $\phi(t, u(t-)) = \phi(t, u(t))$, i.e. $\bar{\phi}(t-) = \bar{\phi}(t)$. \square

En posant $\phi(t, \zeta) := H_M(t, x_0(t), \zeta, p(t))$ et en utilisant (MP.M) et le Lemme 5.4.15, on a

$$\bar{\phi} = \bar{H}_M \in C^0([0, T], \mathbb{R}),$$

ce qui démontre (CH.M).

Ainsi, on a démontré la Partie (I) du Théoreme 5.3.2 du problème de Mayer.

5.4.2 Preuve de la Partie (II)

Lemme 5.4.16. Soit $\phi \in C^0([0, T] \times U, \mathbb{R})$ t.q. pour tout $(t, \zeta) \in [0, T] \times U$, la dérivée partielle par rapport à la première variable $\partial_1 \phi(t, \zeta)$ existe, et $\partial_1 \phi$ est continue sur $[0, T] \times U$.

Soit $u \in NPC_d^0([0, T], U)$ t.q. $\bar{\phi}(t) := \phi(t, u(t)) = \max_{\zeta \in U} \phi(t, \zeta)$.

Alors, $\bar{\phi} \in PC^1([0, T], \mathbb{R}, disc(u))$ et $\forall t \in [0, T]$, $\mathbf{d}\bar{\phi}(t) = \partial_1 \phi(t, u(t))$.

Démonstration. En utilisant le Lemme 5.4.15, on a

$$\bar{\phi} \in C^0([0, T], \mathbb{R}). \quad (5.4.35)$$

Puisque $u \in NPC_d^0([0, T], U)$, il existe $(\iota_i)_{0 \leq i \leq l+1} \in Sub([0, T])$ t.q. $disc(u) = \{\iota_i : 0 \leq i \leq l+1\}$.
Soit $t \in [0, T] \setminus \{\iota_i : 0 \leq i \leq l+1\}$.

Pour chaque $h > 0$ suffisamment petit, posons $\bar{\Delta}(h) := \bar{\phi}(t+h) - \bar{\phi}(t)$.

Puisque

$$\phi(t+h, u(t)) - \phi(t, u(t)) \leq \phi(t+h, u(t+h)) - \phi(t, u(t)) = \bar{\Delta}(h)$$

et

$$\phi(t+h, u(t+h)) - \phi(t, u(t+h)) \geq \phi(t+h, u(t+h)) - \phi(t, u(t)) = \bar{\Delta}(h),$$

en utilisant le théorème des accroissements finis (p.124 de [35]), il existe θ_1^h et θ_2^h dans $]0, 1[$ t.q.

$$\partial_1 \phi(t + \theta_1^h h, u(t)) h \leq \bar{\Delta}(h) \leq \partial_1 \phi(t + \theta_2^h h, u(t+h)) h$$

ce qui implique

$$\partial_1 \phi(t + \theta_1^h h, u(t)) \leq \frac{1}{h} \bar{\Delta}(h) \leq \partial_1 \phi(t + \theta_2^h h, u(t+h)).$$

Par conséquent en utilisant la continuité de $\partial_1 \phi$ et la continuité de u au point t , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\Delta}(h)}{h} = \partial_1 \phi(t, u(t)).$$

Ainsi, $\bar{\phi}'_d(t)$ existe et $\bar{\phi}'_d(t) = \partial_1 \phi(t, u(t))$.

En effectuant le même raisonnement, $\bar{\phi}'_g(t)$ existe et $\bar{\phi}'_g(t) = \partial_1 \phi(t, u(t))$.

Par conséquent, en utilisant le théorème p.107 de [35], on a l'existence de $\bar{\phi}'(t)$ et

$$\forall t \in [0, T] \setminus \{\iota_i : 0 \leq i \leq l+1\}, \bar{\phi}'(t) = \bar{\phi}'_d(t) = \bar{\phi}'_g(t) = \partial_1 \phi(t, u(t)). \quad (5.4.36)$$

Soit $i \in \{0, \dots, l\}$; on a

$$\lim_{t \rightarrow \iota_i^+} \bar{\phi}'(t) = \lim_{t \rightarrow \iota_i^+} \partial_1 \phi(t, u(t)) = \partial_1 \phi(\lim_{t \rightarrow \iota_i^+} (t, u(t))) = \partial_1 \phi(t, u(t)), \quad (5.4.37)$$

et, pour chaque $i \in \{1, \dots, l+1\}$,

$$\lim_{t \rightarrow \iota_i^-} \bar{\phi}'(t) = \lim_{t \rightarrow \iota_i^-} \partial_1 \phi(t, u(t)) = \partial_1 \phi(\lim_{t \rightarrow \iota_i^-} (t, u(t))) = \partial_1 \phi(t, u(t-)). \quad (5.4.38)$$

De plus, puisque $u(T-) = u(T)$, avec (5.4.38), on a

$$\bar{\phi}'(T-) = \partial_1 \phi(T, u(T)). \quad (5.4.39)$$

Ainsi, en utilisant les assertions (5.4.35), (5.4.36), (5.4.37) et (5.4.38), on a

$$\bar{\phi} \in PC^1([0, T], \mathbb{R}, disc(u)).$$

De plus, en utilisant les assertions (5.4.36), (5.4.37) et (5.4.39), on a

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{d}\bar{\phi}(t) = \partial_1 \phi(t, u(t)).$$

□

Afin de démontrer la Partie (II), on applique le Lemme 5.4.16 en posant pour chaque $(t, \zeta) \in [0, T] \times U$, $\phi(t, \zeta) := H_M(t, x_0(t), \zeta, p(t))$.

On a alors $\bar{\phi} = \bar{H}_M \in PC^1([0, T], \mathbb{R}, \text{disc}(u_0))$ et

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{d}\bar{H}_M(t) = \partial_1 H_M(t, x_0(t), u_0(t), p(t)).$$

Ceci démontre la Partie (II).

5.4.3 Preuve de la Partie (III)

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [0, T]$ t.q. $p(t_0) = 0_{E^*}$.

Puisque la fonction constante $\tilde{0} : [0, T] \rightarrow E^*$, définie par $\tilde{0}(t) = 0_{E^*}$, est solution PC^1 de (AE.M) et $\tilde{0}(t_0) = 0_{E^*}$, on a, en utilisant le Théorème 3.1.14,

$$\forall t \in [0, T], p(t) = 0_{E^*}.$$

Par conséquent, $p(T) = 0$. Ainsi, en utilisant (TC), (Si), (S ℓ) et (QC, 0), on a $(\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \lambda_\alpha = 0)$ et $(\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \mu_\beta = 0)$.

Ceci contredit (NN); ainsi on a démontré la Partie (III).

5.4.4 Preuve de la Partie (IV)

Montrons d'abord que $\lambda_0 \neq 0$. Pour montrer cela, raisonnons par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$.

Puisque $D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$ existe, $D_{G,3}H_M(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), p(\hat{t}))$ existe et

$$D_{G,3}H_M(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), p(\hat{t})) = p(\hat{t}) \circ D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t})).$$

Par conséquent, en utilisant (MP.M) et le corollaire 2 p.230 de [1], on a

$$p(\hat{t}) \circ D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t})) = 0.$$

Puisque $D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$ est surjective, on a

$$p(\hat{t}) = 0.$$

Ceci contredit la Partie (III); donc $\lambda_0 \neq 0$.

Posons $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \lambda'_\alpha := \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0}, \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \mu'_\beta := \frac{\mu_\beta}{\lambda_0}$ et $p' := \frac{1}{\lambda_0}p$.

Puisque l'ensemble des $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifiant (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.M), (MP.M) et (CH.M) est un cône, on a $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p')$ vérifie (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.M), (MP.M) et (CH.M) avec $\lambda'_0 = 1$.

5.4.5 Preuve de la Partie (V)

Nous allons d'abord montrer que $\lambda_0 \neq 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde; supposons que $\lambda_0 = 0$.

Puisque $D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T))$ existe, on a $D_{G,3}H_M(T, x_0(T), u_0(T), p(T))$ existe et

$$D_{G,3}H_M(T, x_0(T), u_0(T), p(T)) = p(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)).$$

Par conséquent, en utilisant (MP.M) et le corollaire 2 p.230 de [1], on a

$$p(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \tag{5.4.40}$$

C'est pourquoi, grâce à (TC), on obtient

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} D_H g^{\alpha}(x_0(T)) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) \\ & + \sum_{\beta=1}^q \mu_{\beta} D_H h^{\beta}(x_0(T)) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, grâce à (ALIB), on a $((\lambda_{\alpha})_{1 \leq \alpha \leq m}, (\mu_{\beta})_{1 \leq \beta \leq q}) = 0$; ce qui contredit (NN).

Posons : $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda'_{\alpha} := \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_0}$, $\forall \beta \in \{1, \dots, q\}$, $\mu'_{\beta} := \frac{\mu_{\beta}}{\lambda_0}$ et, $p' := \frac{1}{\lambda_0} p$.

Puisque l'ensemble des $((\bar{\lambda}_{\alpha})_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_{\beta})_{1 \leq \beta \leq q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifiant (NN), (Si), (Sl), (TC), (AE.M), (MP.M) et (CH.M) est un cône, on a $((\lambda'_{\alpha})_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_{\beta})_{1 \leq \beta \leq q}, p')$ vérifie (NN), (Si), (Sl), (TC), (AE.M), (MP.M) et (CH.M) avec $\lambda'_0 = 1$.

Soit $((\lambda^1_{\alpha})_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu^1_{\beta})_{1 \leq \beta \leq q}, p^1) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ et

$((\lambda^2_{\alpha})_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu^2_{\beta})_{1 \leq \beta \leq q}, p^2) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ tel que les assertions de la Partie (I) sont vérifiées avec $\lambda^1_0 = \lambda^2_0 = 1$.

En utilisant l'assertion (5.4.40), on a

$$\forall i \in \{1, 2\}, p^i(T) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0.$$

Donc on a

$$(p^1(T) - p^2(T)) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0.$$

En utilisant (TC), on a

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^m (\lambda^1_{\alpha} - \lambda^2_{\alpha}) D_H g^{\alpha}(x_0(T)) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) \\ & + \sum_{\beta=1}^q (\mu^1_{\beta} - \mu^2_{\beta}) D_H h^{\beta}(x_0(T)) \circ D_{G,3} f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, en utilisant (ALIB), on a

$$\forall (\alpha, \beta) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, q\}, \lambda^1_{\alpha} = \lambda^2_{\alpha} \text{ et } \mu^1_{\beta} = \mu^2_{\beta}. \quad (5.4.41)$$

Donc, $p^1(T) = p^2(T)$; c'est pourquoi, en utilisant le Théorème 3.1.14 et (AE.M), on a : $p^1 = p^2$.

5.5 Preuve du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de Bolza

Pour la preuve du Théorème 5.2.4, notre stratégie est de transformer le problème de Bolza en un problème de Mayer, de vérifier les hypothèses du Théorème 5.3.2 et de traduire les conclusions du Théorème 5.3.2 pour le problème de Mayer en conclusions pour le problème de Bolza.

Posons $X := (\sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ la nouvelle variable d'état ; posons $F(t, (\sigma, x), u) := (f^0(t, x, u), f(t, x, u))$ le nouveau champ de vecteurs.

Posons $G^0(\sigma, x) := \sigma + g^0(x)$, $G^{\alpha}(\sigma, x) := g^{\alpha}(x)$, lorsque $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, et $H^{\beta}(\sigma, x) := h^{\beta}(x)$, lorsque $\beta \in \{1, \dots, q\}$. On formule le nouveau problème de Mayer :

$$(\mathcal{M}B') \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad J_{MB}(X, u) = G^0(X(T)) \\ \text{lorsque} \quad X \in PC^1([0, T], \mathbb{R} \times \Omega), u \in NPC^0_d([0, T], U) \\ \quad \mathbf{d}X(t) = F(t, X(t), u(t)), X(0) = (0, \xi_0) \\ \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \quad G^{\alpha}(X(T)) \geq 0 \\ \quad \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \quad H^{\beta}(X(T)) = 0. \end{array} \right.$$

5.5.1 Preuve de la Partie (I)

Notons $Adm(\mathcal{MB}')$ l'ensemble des processus admissibles pour le problème (\mathcal{MB}') .

Lemme 5.5.1. *Pour tout $(x, u) \in Adm(\mathcal{B}')$, en posant $(\forall t \in [0, T], \sigma(t) := \int_0^t f^0(s, x(s), u(s))ds)$, $((\sigma, x), u) \in Adm(\mathcal{MB}')$ et $J_{MB}((\sigma, x), u) = J(x, u)$.*

Démonstration. Soit $(x, u) \in Adm(\mathcal{B}')$; puisque $u \in NPC_d^0([0, T], U)$, avec (AINT1) et puisque $x \in PC^1([0, T], \Omega, disc(u))$, en utilisant les Propositions 1.2.4 et 1.2.2, on a $[t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))] \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}, disc(u))$. Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.3.15, on a $\sigma \in PC^1([0, T], \mathbb{R}, disc(u))$ et

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{d}\sigma(t) = f^0(t, x(t), u(t)). \quad (5.5.1)$$

Puisque $x \in PC^1([0, T], \Omega, disc(u))$ et $\sigma \in PC^1([0, T], \mathbb{R}, disc(u))$, et en utilisant le Théorème 1.3.14, on a

$$(\sigma, x) \in PC^1([0, T], \mathbb{R} \times \Omega, disc(u)) \text{ et } \forall t \in [0, T], \mathbf{d}(\sigma, x)(t) = (\mathbf{d}\sigma(t), \mathbf{d}x(t)). \quad (5.5.2)$$

Par conséquent, puisque $(x, u) \in Adm(\mathcal{B}')$, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \\ \mathbf{d}(\sigma, x)(t) = (\mathbf{d}\sigma(t), \mathbf{d}x(t)) = (f^0(t, x(t), u(t)), f(t, x(t), u(t))) = F(t, (\sigma, x)(t), u(t)). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

De plus, on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \quad G^\alpha((\sigma, x)(T)) = g^\alpha(x(T)) \geq 0. \\ \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \quad H^\beta((\sigma, x)(T)) = h^\beta(x(T)) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.4)$$

Puisque $(\sigma, x)(0) = (\sigma(0), x(0)) = (0, \bar{\xi}_0)$, en utilisant les assertions (5.5.1), (5.5.2), (5.5.3), (5.5.4), on a $((\sigma, x), u) \in Adm(\mathcal{MB}')$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} J_{MB}((\sigma, x), u) &= G^0((\sigma, x)(T)) \\ &= \sigma(T) + g^0(x(T)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g^0(x(T)) = J(x, u). \end{aligned}$$

□

Puisque (x_0, u_0) est une solution du problème (\mathcal{B}') , en utilisant le Lemme 5.5.1, on obtient que $((\sigma_0, x_0), u_0)$ est une solution du problème (\mathcal{MB}') , où, pour chaque $t \in [0, T]$, $\sigma_0(t) = \int_0^t f^0(s, x_0(s), u_0(s))ds$.

Lemme 5.5.2. *Les hypothèses du Théorème 5.3.2 pour le problème (\mathcal{MB}') , avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0)$, sont vérifiées.*

Démonstration. Considérons les fonctions linéaires continues $\varpi_1 : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varpi_1(\sigma, \xi) = \sigma$, et $\varpi_2 : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, définie par $\varpi_2(\sigma, \xi) = \xi$.

Soit $\alpha \in \{0, \dots, m\}$. Raisonnons par disjonction des cas; si $\alpha = 0$,

puisque $G^0 = \varpi_1|_{\mathbb{R} \times \Omega} + g^0 \circ \varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}$, on a, en utilisant les propriétés des fonctions Hadamard-différentiables et (ACON1), $D_H G^0((\sigma_0, x_0)(T))$ existe et

$$\left. \begin{aligned} D_H G^0((\sigma_0, x_0)(T)) \\ = D_H \varpi_1((\sigma_0, x_0)(T)) + D_H g^0(\varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}((\sigma_0, x_0)(T))) \circ D_H \varpi_2((\sigma_0, x_0)(T)) \\ = \varpi_1 + D_H g^0(x_0(T)) \circ \varpi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.5)$$

5.5. PREUVE DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN POUR LE PROBLÈME DE BOLZA

Si $\alpha \in \{1, \dots, m\}$; puisque $G^\alpha = g^\alpha \circ \varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}$, on a, en utilisant les propriétés des fonctions Hadamard-différentiables et (ACON1), $D_H G^\alpha((\sigma_0, x_0)(T))$ existe et

$$\left. \begin{aligned} & \forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, D_H G^\alpha((\sigma_0, x_0)(T)) \\ & = D_H g^\alpha(\varpi_2((\sigma_0, x_0)(T))) \circ D_H \varpi_2((\sigma_0, x_0)(T)) \\ & = D_H g^\alpha(x_0(T)) \circ \varpi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.6)$$

Ceci démontre que (ACON1) est vérifiée pour le problème (\mathcal{MB}') avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0)$.

Soit $\beta \in \{1, \dots, q\}$; puisque $H^\beta = h^\beta \circ \varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}$, on a, en utilisant les propriétés des fonctions Hadamard-différentiables et (ACON2), $D_H H^\beta((\sigma_0, x_0)(T))$ existe et

$$\left. \begin{aligned} & \forall \beta \in \{1, \dots, q\}, D_H H^\beta((\sigma_0, x_0)(T)) \\ & = D_H h^\beta(\varpi_2((\sigma_0, x_0)(T))) \circ D_H \varpi_2((\sigma_0, x_0)(T)) \\ & = D_H h^\beta(x_0(T)) \circ \varpi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.7)$$

Soit $\beta \in \{1, \dots, q\}$; puisque h^β est continue sur un voisinage V_0^β de $x_0(T)$, puisque $\varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \Omega$, il existe un voisinage W_0^β de $(\sigma_0(T), x_0(T))$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$ t.q. $\varpi_2|_{W_0^\beta} \in C^0(W_0^\beta, V_0^\beta)$.

Par conséquent, on a

$$\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, h^\beta \circ \varpi_2|_{W_0^\beta} \in C^0(W_0^\beta, \mathbb{R}).$$

Ceci démontre que (ACON2) est vérifiée pour le problème (\mathcal{MB}') avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0)$.

Considérons la fonction continue $\chi : [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U \rightarrow [0, T] \times \Omega \times U$ définie par $\chi(t, \sigma, \xi, \zeta) = (t, \xi, \zeta)$.

Remarquons que $F = (f^0 \circ \chi, f \circ \chi)$.

Avec (AINT1) et (ACV1), on a, en utilisant le théorème de composition des fonctions continues,

$$f^0 \circ \chi \in C^0([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U, \mathbb{R}) \text{ et } f \circ \chi \in C^0([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U, E).$$

Par conséquent, on a

$$F \in C^0([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U, \mathbb{R} \times E). \quad (5.5.8)$$

Soit $(t, \sigma, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U$, soit $\varsigma \in \mathbb{R}$ et $\vartheta \in E$; on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} \frac{1}{s} (F(t, (\sigma, \xi) + s(\varsigma, \vartheta), \zeta) - F(t, (\sigma, \xi), \zeta)) \\ & = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} \frac{1}{s} (F(t, (\sigma + s\varsigma, \xi + s\vartheta), \zeta) - F(t, (\sigma, \xi), \zeta)) \\ & = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} \left(\frac{1}{s} (f^0(t, \xi + s\vartheta, \zeta) - f^0(t, \xi, \zeta)), \frac{1}{s} (f(t, \xi + s\vartheta, \zeta) - f(t, \xi, \zeta)) \right) \\ & = (D_{G,2} f^0(t, \xi, \zeta) \cdot \vartheta, D_{G,2} f(t, \xi, \zeta) \cdot \vartheta) \\ & = ((D_{G,2} f^0(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2)(\varsigma, \vartheta), (D_{G,2} f(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2)(\varsigma, \vartheta)) \\ & = (D_{G,2} f^0(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2, D_{G,2} f(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2) \cdot (\varsigma, \vartheta). \end{aligned}$$

Puisque $D_{G,2} f^0(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R})$ et $D_{G,2} f(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, E)$, on a, pour chaque $(t, \sigma, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U$, $D_{G,2} F(t, (\sigma, \xi), \zeta)$ existe et

$$D_{G,2} F(t, (\sigma, \xi), \zeta) = (D_{G,2} f^0(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2, D_{G,2} f(t, \xi, \zeta) \circ \varpi_2).$$

Soit $t \in [0, T]$ et $\zeta \in U$; puisque $F(t, \cdot, \zeta) = (f^0(t, \cdot, \zeta) \circ \varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega}, f(t, \cdot, \zeta) \circ \varpi_2|_{\mathbb{R} \times \Omega})$, en utilisant les assertions (AINT1), (ACV1) et les propriétés des fonctions Fréchet-différentiables, on a

$$\left. \begin{aligned} & \forall (t, \zeta) \in [0, T] \times U, \\ & D_{F,2} F(t, (\sigma_0, x_0)(t), \zeta) = (D_{F,2} f^0(t, x_0(t), \zeta) \circ \varpi_2, D_{F,2} f(t, x_0(t), \zeta) \circ \varpi_2). \end{aligned} \right\}$$

Considérons les fonctions linéaires continues $\mathcal{Z}_1 : E^* \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R})$, définie par, pour tout $l_1 \in E^*$, $\mathcal{Z}_1(l_1) = l_1 \circ \varpi_2$, et $\mathcal{Z}_2 : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, E)$, définie par, pour tout $l_2 \in \mathcal{L}(E, E)$, $\mathcal{Z}_2(l_2) = l_2 \circ \varpi_2$. Posons, $\forall t \in [0, T], \forall \zeta \in U, \mathfrak{D}^0(t, \zeta) := D_{F,2}f^0(t, x_0(t), \zeta)$ et $\mathfrak{D}(t, \zeta) := D_{F,2}f(t, x_0(t), \zeta)$.

Ainsi, on a

$$\left. \begin{aligned} \forall (t, \zeta) \in [0, T] \times U, \\ D_{F,2}F(t, (\sigma_0, x_0)(t), \zeta) = ((\mathcal{Z}_1 \circ \mathfrak{D}^0)(t, \zeta), (\mathcal{Z}_2 \circ \mathfrak{D})(t, \zeta)). \end{aligned} \right\}$$

En utilisant (AINT1), (ACV1) et le théorème de composition des fonctions continues, on a : $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}F(t, (\sigma_0, x_0)(t), \zeta) \in C^0([0, T] \times U, \mathcal{L}(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R} \times E))$. Ceci démontre que (ACV1) est vérifiée pour le problème $(\mathcal{M}\mathcal{B}')$ avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0)$.

Soit $K \subset \mathbb{R} \times \Omega \times U$ un compact.

Considérons la fonction continue $\tilde{\omega} : \mathbb{R} \times \Omega \times U \rightarrow \Omega \times U$ définie par $\tilde{\omega}(s, \xi, \zeta) = (\xi, \zeta)$.

Puisque K est un compact, on a $\tilde{K} = \tilde{\omega}(K)$ est un compact de $\Omega \times U$.

Par conséquent, en utilisant (ACV2) et (AINT2), on a

$$\left. \begin{aligned} \exists \mathbf{M} > 0, \forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \tilde{K}, \|D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \leq \mathbf{M} \\ \exists \mathbf{M}_1 > 0, \forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \tilde{K}, \|D_{G,2}f(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \leq \mathbf{M}_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.9)$$

Posons $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1$. Soit $(t, (s, \xi), \zeta) \in [0, T] \times K$; on a

$$\begin{aligned} \forall (\varsigma, \vartheta) \in \mathbb{R} \times E, \\ \|D_{G,2}F(t, (s, \xi), \zeta) \cdot (\varsigma, \vartheta)\|_1 &= \|D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta) \cdot \vartheta\| + \|D_{G,2}f(t, \xi, \zeta) \cdot \vartheta\| \\ &\leq \|D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \|\vartheta\| + \|D_{G,2}f(t, \xi, \zeta)\|_{\mathcal{L}} \|\vartheta\| \\ &\leq \mathbf{M}_2 \|\varsigma, \vartheta\|_1 \text{ grâce à (5.5.9).} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\forall (t, (s, \xi), \zeta) \in [0, T] \times K, \|D_{G,2}F(t, (s, \xi), \zeta)\|_{\mathcal{L}} \leq \mathbf{M}_2.$$

Ceci démontre que (ACV2) est vérifiée pour le problème $(\mathcal{M}\mathcal{B}')$ avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0)$. \square

Ainsi, en utilisant la Partie (I) du Théorème 5.3.2 pour le problème $(\mathcal{M}\mathcal{B}')$ avec la solution $((\sigma_0, x_0), u_0) = (X_0, u_0)$, il existe $(\Lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m} \in \mathbb{R}^{1+m}$, $(M_\beta)_{1 \leq \beta \leq q} \in \mathbb{R}^q$ et $P \in PC^1([0, T], (\mathbb{R} \times E)^*)$ t.q. les conclusions du Théorème 5.3.2 soient vérifiées. Donc on a

- (i) $((\Lambda_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (M_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) \neq 0$
- (ii) $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}, \Lambda_\alpha \geq 0$.
- (iii) $\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \Lambda_\alpha G^\alpha(X_0(T)) = 0$.
- (iv) $P(T) = \sum_{\alpha=0}^m \Lambda_\alpha D_H G^\alpha(X_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q M_\beta D_H H^\beta(X_0(T))$.
- (v) $\forall t \in [0, T], \mathbf{d}P(t) = -D_{F,2}H_M(t, X_0(t), u_0(t), P(t))$.
- (vi) $\forall (t, \zeta) \in [0, T] \times U, H_M(t, X_0(t), u_0(t), P(t)) \geq H_M(t, X_0(t), \zeta, P(t))$.
- (vii) $[t \mapsto H_M(t, X_0(t), u_0(t), P(t))] \in PC^1([0, T], \mathbb{R})$.

Lorsque $P \in (\mathbb{R} \times E)^*$, on peut définir $p_0 \in \mathbb{R}$ et $p \in E^*$ en posons $p_0 := P(1, 0)$ et $p \cdot \xi := P(0, \xi)$ pour chaque $\xi \in E$, et donc on a, pour chaque $(r, \xi) \in \mathbb{R} \times E$, $P(r, \xi) = p_0 r + p \cdot \xi$. Le Hamiltonien de Pontryagin du problème $(\mathcal{M}\mathcal{B})$ est

$$H_M(t, (\sigma, x), u, (p_0, p)) := (p_0, p)F(t, (\sigma, x), u) = p_0 f^0(t, x, u) + p \cdot f(t, x, u).$$

On pose, pour chaque $\alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha := \Lambda_\alpha$, et, pour chaque $\beta \in \{1, \dots, q\}$, $\mu_\beta := M_\beta$.

Ainsi, (i) et (ii) impliquent (NN) et (Si) du Théorème 5.2.4.

En utilisant (iii), on a, pour chaque $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_\alpha g^\alpha(x_0(T)) = 0$; ce qui démontre (Sl) du Théorème 5.2.4.

Notons qu'en utilisant (5.5.5), (5.5.6) et (5.5.7), on a $D_{H,1}G^0((\sigma_0, x_0)(T)) = Id_{\mathbb{R}}$,
 $D_{H,1}G^\alpha((\sigma_0, x_0)(T)) = 0$ lorsque $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, $D_{H,1}H^\beta((\sigma_0, x_0)(T)) = 0$ lorsque $\beta \in \{1, \dots, q\}$.
 Notons aussi qu'en utilisant (5.5.5), (5.5.6) et (5.5.7), on a $D_{H,2}G^0((\sigma_0, x_0)(T)) = D_Hg^0(x_0(T))$,
 $D_{H,2}G^\alpha((\sigma_0, x_0)(T)) = D_Hg^\alpha(x_0(T))$ lorsque $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, et
 $D_{H,2}H^\beta((\sigma_0, x_0)(T)) = D_Hh^\beta(x_0(T))$, lorsque $\beta \in \{1, \dots, q\}$.
 Ainsi, grâce à (iv), on en déduit les relations suivantes :

$$p_0(T) = \lambda_0, \quad (5.5.10)$$

$$p(T) = \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha D_Hg^\alpha(x_0(T)) + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_Hh^\beta(x_0(T)). \quad (5.5.11)$$

Ceci démontre (TC) du Théorème 5.2.4.

Grâce à (v), on a, pour chaque $t \in [0, T]$, $\mathbf{d}p_0(t) = 0$, et en utilisant (5.5.10), on obtient la relation suivante

$$\forall t \in [0, T], \quad p_0(t) = \lambda_0. \quad (5.5.12)$$

Grâce à (v), on en déduit que pour chaque $t \in [0, T]$, on a

$\mathbf{d}p(t) = -(\lambda_0 D_{F,2}f^0(t, x_0(t), u_0(t)) + p(t) \circ D_{F,2}f(t, x_0(t), u_0(t)))$; ce qui démontre l'assertion (AE.B) du Théorème 5.2.4.

Grâce à (vi), on a, pour chaque $t \in [0, T]$ et pour chaque $\zeta \in U$,

$$\lambda_0 f^0(t, x_0(t), u_0(t)) + p(t) \cdot f(t, x_0(t), u_0(t)) \geq \lambda_0 f^0(t, x_0(t), \zeta) + p(t) \cdot f(t, x_0(t), \zeta)$$

ce qui démontre (MP.B) du Théorème 5.2.4.

Grâce à (vii), puisque $H_M(t, X_0(t), u_0(t), P(t)) = H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0)$, on a démontré (CH.B). Ceci démontre la Partie (I) du Théorème 5.2.4.

5.5.2 Preuve de la Partie (II)

Puisque, pour chaque $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U$, $\partial_1 f^0(t, \xi, \zeta)$ et $\partial_1 f(t, \xi, \zeta)$ existent, on a, pour chaque $(t, s, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \times U$,

$$\partial_1 F(t, (s, \xi), \zeta) = (\partial_1 f^0(t, \xi, \zeta), \partial_1 f(t, \xi, \zeta)).$$

Par conséquent, en utilisant la continuité de $\partial_1 f^0$ et $\partial_1 f$, on obtient la continuité de $\partial_1 F$.

En utilisant la Partie (II) du Théorème 5.3.2 pour le problème (\mathcal{MB}') , on obtient alors

$$[t \mapsto H_B(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \lambda_0) = H_M(t, X_0(t), u_0(t), P(t))] \in PC^1([0, T], \mathbb{R}),$$

et

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbf{d}\bar{H}_B(t) = \mathbf{d}\bar{H}_M(t) = \lambda_0 \partial_1 f^0(t, x_0(t), u_0(t)) + p(t) \cdot \partial_1 f(t, x_0(t), u_0(t)).$$

Ainsi, la Partie (II) a été prouvée.

5.5.3 Preuve de la Partie (III)

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $t_* \in [0, T]$ t.q. $(\lambda_0, p(t_*)) = (0, 0_{E^*})$.

Puisque $\lambda_0 = 0$, la fonction constante $\tilde{0} : [0, T] \rightarrow E^*$, définie par $\tilde{0}(t) = 0_{E^*}$, est solution PC^1 de (AE.B) et $\tilde{0}(t_*) = 0_{E^*}$. En utilisant le Théorème 3.1.14, on a

$$\forall t \in [0, T], \quad p(t) = 0_{E^*}.$$

Par conséquent on a $p(T) = 0$. Ainsi, en utilisant (TC), (Si), (Sl) et (QC, 1), on a $(\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \lambda_\alpha = 0)$ et $(\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \mu_\beta = 0)$.

Puisque $\lambda_0 = 0$, on a $(\forall \alpha \in \{1, \dots, m\}, \lambda_\alpha = 0)$ et $(\forall \beta \in \{1, \dots, q\}, \mu_\beta = 0)$. Ceci contredit (NN).

5.5.4 Preuve de la Partie (IV)

Montrons d'abord que $\lambda_0 \neq 0$. Pour montrer cela, raisonnons par l'absurde; supposons que $\lambda_0 = 0$.

Puisque $D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$ existe, $D_{G,3}H_B(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), p(\hat{t}), 0)$ existe et

$$D_{G,3}H_B(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), p(\hat{t}), 0) = p(\hat{t}) \circ D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t})).$$

Par conséquent, en utilisant (MP.B) et le corollaire 2, p.230 de [1], on a

$$p(\hat{t}) \circ D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t})) = 0.$$

Puisque $D_{G,3}f(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$ est surjective, on a

$$p(\hat{t}) = 0.$$

Par conséquent, on a $(\lambda_0, p(\hat{t})) = 0$; ce qui contredit la Partie (III); donc $\lambda_0 \neq 0$.

Posons, $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda'_\alpha := \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0} \forall \beta \in \{1, \dots, q\}$, $\mu'_\beta := \frac{\mu_\beta}{\lambda_0}$ et $p' := \frac{1}{\lambda_0}p$.

Puisque l'ensemble des $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifiant (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.B), (MP.B) et (CH.B) est un cône, on obtient que $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifie (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.B), (MP.B) et (CH.B) avec $\lambda'_0 = 1$.

5.5.5 Preuve de la Partie (V)

Nous allons d'abord montrer que $\lambda_0 \neq 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$.

Puisque $D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T))$ existe, $D_{G,3}H_B(T, x_0(T), u_0(T), p(T), 0)$ existe et

$$D_{G,3}H_B(T, x_0(T), u_0(T), p(T), 0) = p(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)).$$

Par conséquent, en utilisant (MP.B) et le corollaire 2, p.230 de [1], on a

$$p(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \quad (5.5.13)$$

C'est pourquoi, grâce à (TC), on obtient

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha D_H g^\alpha(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) \\ & + \sum_{\beta=1}^q \mu_\beta D_H h^\beta(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, grâce à (ALIB), on a $((\lambda_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}) = 0$; ce qui contredit (NN).

Posons, $\forall \alpha \in \{0, \dots, m\}$, $\lambda'_\alpha := \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_0}$ et $\forall \beta \in \{1, \dots, q\}$, $\mu'_\beta := \frac{\mu_\beta}{\lambda_0}$ et $p' := \frac{1}{\lambda_0}p$.

Puisque l'ensemble des $((\bar{\lambda}_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\bar{\mu}_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifiant (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.B), (MP.B) et (CH.B) est un cône, on a $((\lambda'_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu'_\beta)_{1 \leq \beta \leq q}, p') \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ vérifie (NN), (Si), (S ℓ), (TC), (AE.B), (MP.B) et (CH.B) avec $\lambda'_0 = 1$.

Maintenant, supposons que $D_{G,3}f^0(T, x_0(T), u_0(T))$ existe.

Soit $((\lambda_\alpha^1)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta^1)_{1 \leq \beta \leq q}, p^1) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ et

$((\lambda_\alpha^2)_{0 \leq \alpha \leq m}, (\mu_\beta^2)_{1 \leq \beta \leq q}, p^2) \in \mathbb{R}^{1+m+q} \times PC^1([0, T], E^*)$ t.q. les assertions de la Partie (I) sont vérifiées avec $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1$.

Puisque $D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T))$ et $D_{G,3}f^0(T, x_0(T), u_0(T))$ existe, pour chaque $i \in \{1, 2\}$, $D_{G,3}H_B(T, x_0(T), u_0(T), p^i(T), 1)$ existe et

$$\left. \begin{aligned} & D_{G,3}H_B(T, x_0(T), u_0(T), p^i(T), 1) = \\ & p^i(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) + D_{G,3}f^0(T, x_0(T), u_0(T)). \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, en utilisant (MP.B) et le corollaire 2, p.230 de [1], on a

$$\forall i \in \{1, 2\}, p^i(T) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) + D_{G,3}f^0(T, x_0(T), u_0(T)) = 0.$$

Donc, on a

$$(p^1(T) - p^2(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0.$$

En utilisant (TC), on a

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^m (\lambda_\alpha^1 - \lambda_\alpha^2) D_H g^\alpha(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) \\ & + \sum_{\beta=1}^q (\mu_\beta^1 - \mu_\beta^2) D_H h^\beta(x_0(T)) \circ D_{G,3}f(T, x_0(T), u_0(T)) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, en utilisant (ALIB), on a

$$\forall (\alpha, \beta) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, q\}, \lambda_\alpha^1 = \lambda_\alpha^2 \text{ et } \mu_\beta^1 = \mu_\beta^2. \quad (5.5.14)$$

Donc, $p^1(T) = p^2(T)$; c'est pourquoi, en utilisant le Théorème 3.1.14 et (AE.B), on obtient $p^1 = p^2$.

5.6 Théorème de l'enveloppe en Contrôle Optimal

Dans cette section, on énonce un théorème de l'enveloppe dans le cadre du Contrôle Optimal. Un théorème de l'enveloppe consiste à donner des conditions pour obtenir la différentiabilité de la fonction valeur et à donner une expression de sa différentielle. Notons que l'intégrale de Gelfand nous sera très utile pour donner l'expression de la Gâteaux-différentielle et de la Fréchet-différentielle de la fonction valeur.

Commençons par préciser le problème que nous considérons.

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, Ω un ouvert de X . Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace vectoriel normé réel, et U un ouvert de Y .

Soit $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un espace vectoriel normé réel et $\pi_0 \in Z$. On considère les fonctions suivantes $f^0 : [0, T] \times \Omega \times U \times Z \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \Omega \times U \times Z \rightarrow X$, $g_i : \Omega \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $h_j : \Omega \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$. Soit $T \in]0, +\infty[$ et $\xi_0 \in \Omega$.

Pour chaque $\pi \in Y$, on considère le problème de Bolza à paramètre suivant :

$$(\mathcal{B}, \pi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \int_0^T f^0(t, x(t), u(t), \pi) dt + g_0(x(T), \pi) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in NPC_d^0([0, T], U) \\ \quad \forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(t) = f(t, x(t), u(t), \pi), x(0) = \xi_0 \\ \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i(x(T), \pi) \geq 0 \\ \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j(x(T), \pi) = 0. \end{array} \right.$$

Le Hamiltonien de Pontryagin de ce problème de Bolza est $H_\pi : [0, T] \times \Omega \times U \times X^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, défini par, pour tout $(t, x, u, p, \lambda) \in [0, T] \times \Omega \times U \times X^* \times \mathbb{R}$,

$$H_\pi(t, x, u, p, \lambda) := p \cdot f(t, x, u, \pi) + \lambda f^0(t, x, u, \pi).$$

Pour chaque $\pi \in Z$, on note $V(\pi)$ la valeur du problème (\mathcal{B}, π) . On considère les conditions suivantes qui serviront d'hypothèses dans le théorème de l'enveloppe :

Conditions sur la solution

(CSOL1) Il existe un voisinage ouvert P de π_0 dans Z t.q., $\forall \pi \in P$, il existe $(x(\pi), u(\pi))$ solution de (\mathcal{B}, π) .

(CSOL2) Il existe $\delta\pi \in Z$ t.q. $D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)$ et $D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)$ existent.

(CSOL3) Les fonctions $[\pi \mapsto x(\pi)]$ et $[\pi \mapsto u(\pi)]$ sont continues au point π_0 .

(CSOL2-bis) Pour tout $\delta\pi \in Z$, $D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)$ et $D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)$ existent.

(CSOL2-ter) Pour tout $\pi \in P$, pour tout $\delta\pi \in Z$, $D_G^+x(\pi; \delta\pi)$ et $D_G^+u(\pi; \delta\pi)$ existent.

Conditions sur le champ de vecteurs et l'intégrande de l'objectif

(CCI1) $f^0 \in C^0([0, T] \times \Omega \times U \times P, \mathbb{R})$, et, $\forall (t, \xi, \zeta, \pi) \in [0, T] \times \Omega \times U \times P$, $D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta, \pi)$ existe et,

— $\forall \pi \in P$, $\forall K$ compact inclus dans $\Omega \times U$, il existe $M \in]0, +\infty[$ t.q. $\forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times K$, $\|D_{G,2}f^0(t, \xi, \zeta, \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq M$, et,

— $\forall (t, \zeta, \pi) \in [0, T] \times U \times P$, $D_{F,2}f^0(t, x(\pi)(t), \zeta, \pi)$ existe et

— $\forall \pi \in P$, $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f^0(t, x(\pi)(t), \zeta, \pi)] \in C^0([0, T] \times U, (X^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(CCI2) Pour tout $\pi \in P$, $[(t, \xi, \zeta) \mapsto f(t, \xi, \zeta, \pi)] \in C^0([0, T] \times \Omega \times U, X)$, et, $\forall (t, \xi, \zeta, \pi) \in [0, T] \times \Omega \times U \times P$, $D_{G,2}f(t, \xi, \zeta, \pi)$ existe et,

— $\forall \pi \in P$, $\forall K$ compact inclus dans $\Omega \times U$, il existe $M_1 \in]0, +\infty[$ t.q. $\forall (t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times K$, $\|D_{G,2}f(t, \xi, \zeta, \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq M_1$, et,

— $\forall (t, \zeta, \pi) \in [0, T] \times U \times P$, $D_{F,2}f(t, x(\pi)(t), \zeta, \pi)$ existe et

— $\forall \pi \in P$, $[(t, \zeta) \mapsto D_{F,2}f(t, x(\pi)(t), \zeta, \pi)] \in C^0([0, T] \times U, (\mathcal{L}(X, X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(CCI3) Il existe $\kappa \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}_+)$, il existe $\rho > 0$ t.q.,

$\forall t \in [0, T]$, $\forall (\xi_1, \zeta_1, \pi_1), (\xi_2, \zeta_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}((x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0), \rho)$,

$$|f^0(t, \xi_1, \zeta_1, \pi_1) - f^0(t, \xi_2, \zeta_2, \pi_2)| \leq \kappa(t) \|(\xi_1, \zeta_1, \pi_1) - (\xi_2, \zeta_2, \pi_2)\|_1.$$

(CCI4) Pour tout $t \in [0, T]$, $D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)$ et

$D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)$ existent.

(CCI5) Pour tout $\pi \in P$, $D_{H,3}f^0(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)$ et $D_{H,3}f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)$

existent, et la fonction $[\pi \mapsto D_{H,3}f^0(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)] \in C^0(P, (Y^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

(CCI6) Il existe $\underline{c} \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q.

$$\forall t \in [0, T], \|D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)\|_{\mathcal{L}} \leq \underline{c}(t).$$

(CCI7) Pour tout $t \in [0, T]$, $[\pi \mapsto D_{H,(2,4)}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)] \in C^0(P, ((X \times Z)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}))$ et $[\pi \mapsto D_{H,(2,4)}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)] \in C^0(P, (\mathcal{L}(X \times Z, X), \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}))$.

(CCI8) Pour chaque $\pi \in P$, $[t \mapsto D_{H,4}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)]$ appartient à

$\mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (Z^*, \mathcal{B}(Z^*)))$ et $[t \mapsto D_{H,4}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)]$ appartient à $\mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathcal{L}(Z, X), \mathcal{B}(\mathcal{L}(Z, X))))$.

(CCI4-bis) Pour tout $\pi \in P$, pour tout $t \in [0, T]$, $D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)$ et

$D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)$ existent.

(CCI6-bis) Il existe $c \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathfrak{m}_1; \mathbb{R}_+)$ t.q.

$$\forall t \in [0, T], \forall \pi \in P, \|D_{H,(2,4)}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq c(t).$$

Conditions sur les contraintes terminales et la fonction terminale de l'objectif

(CCONT1) $\forall \phi \in \{g_i : 0 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, ϕ est Hadamard-différentiable au point $(x(\pi_0)(T), \pi_0)$ et, $\forall \pi \in P$, $D_{H,1}\phi(x(\pi)(T), \pi)$ existe.

(CCONT2) Pour chaque $\pi \in P$, pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$, $[x \mapsto h_j(x, \pi)]$ est continue sur un voisinage de $x(\pi)(T)$ dans Ω .

(CCONT1-bis) $\forall \phi \in \{g_i : 0 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, $\forall \pi \in P$, ϕ est Hadamard-différentiable au point $(x(\pi)(T), \pi)$ et, $[\pi \mapsto D_H\phi(x(\pi)(T), \pi)] \in C^0(P, ((X \times Z)^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}))$.

Conditions sur les contraintes terminales, la fonction terminale de l'objectif et le champ de vecteurs

(CTC1) $(D_{H,1}g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \circ D_{H,3}f(T, x(\pi_0)(T), u(\pi_0)(T), \pi_0),$

$D_{H,1}h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \circ D_{H,3}f(T, x(\pi_0)(T), u(\pi_0)(T), \pi_0))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ est une famille libre.

(CTC2) Pour tout $\phi \in \{g_i : 0 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$,
 $[\pi \mapsto D_{H,1}\phi(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3}f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)]$ appartient à $C^0(P, (Y^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}))$.

Conditions sur l'espace Y^*

(CESP) Il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{Y^*}$ sur Y^* t.q. $(\cdot|\cdot)_{Y^*}$ appartient à
 $C^0((Y^* \times Y^*, \|\cdot\|_{\mathcal{L},1}), \mathbb{R})$.

Dans le théorème suivant, on énonce le théorème de l'enveloppe pour le problème de Bolza (\mathcal{B}, π) .

Théorème 5.6.1. Partie (I) Sous (CSOL1), (CSOL2), (CCI1), (CCI2), (CCI3), (CCI4), (CCI5), (CCONT1), (CCONT2), (CTC1), (CTC2) et (CESP), $D_G^+V(\pi_0; \delta\pi)$ existe et il existe $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}, p(\pi_0)) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l \times PC^1([0, T], X^*)$ t.q.

$$\begin{aligned} D_G^+V(\pi_0; \delta\pi) &= D_{H,2}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &\quad + \int_{[0,T]} D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad + \int_{[0,T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t), \end{aligned}$$

où $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ et $p(\pi_0)$ sont les uniques respectivement multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker et fonction adjointe du théorème de Pontryagin associés à la solution $(x(\pi_0), u(\pi_0))$ du problème (\mathcal{B}, π_0) .

Partie (II) Sous (CSOL1), (CSOL2-bis), (CCI1), (CCI2), (CCI3), (CCI4), (CCI5), (CCONT1), (CCONT2), (CTC1), (CTC2), (CESP) et (CCI6), V est Gâteaux-différentiable au point π_0 et il existe $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}, p(\pi_0)) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l \times PC^1([0, T], X^*)$ t.q.

$$\begin{aligned} D_GV(\pi_0) &= D_{H,2}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} p(\pi_0)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \, d\mathbf{m}_1(t), \end{aligned}$$

où $((\lambda_i(\pi_0))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi_0))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ et $p(\pi_0)$ sont les uniques respectivement multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker et fonction adjointe du théorème de Pontryagin associés à la solution $(x(\pi_0), u(\pi_0))$ du problème (\mathcal{B}, π_0) .

Partie (III) Sous (CSOL1), (CSOL2-ter), (CSOL3), (CCI1), (CCI2), (CCI3), (CCI4-bis), (CCI5), (CCI6-bis), (CCI7), (CCI8), (CCONT1-bis), (CCONT2), (CTC1), (CTC2), et (CESP), il existe W un voisinage ouvert de π_0 dans P t.q. V est continûment Fréchet-différentiable sur W et t.q., pour tout $\pi \in W$, il existe $((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ et $p(\pi) \in PC^1([0, T], X^*)$ vérifiant

$$\begin{aligned} D_FV(\pi) &= D_{H,2}g_0(x(\pi)(T), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2}g_i(x(\pi)(T), \pi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2}h_j(x(\pi)(T), \pi) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} p(\pi)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) \, d\mathbf{m}_1(t), \end{aligned}$$

$((\lambda_i(\pi))_{1 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^l$ et $p(\pi)$ sont les uniques respectivement multiplicateur de Karush-Kuhn-Tucker et fonction adjointe du théorème de Pontryagin associés à la solution $(x(\pi), u(\pi))$ du problème (\mathcal{B}, π) .

Commentaires sur le Théorème 5.6.1 : les principales contributions du Théorème 5.6.1 sont les suivantes :

- On ne suppose pas de régularité sur les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker. Tout d'abord, dans la Partie (I), on parvient à démontrer que les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker sont continus par rapport à π dans un voisinage de π_0 . En outre, dans la Partie (III), on démontre que la fonction adjointe est continue par rapport à π dans un voisinage de π_0 .
- On utilise une hypothèse d'Hadamard-différentiabilité partielle pour l'intégrande de la fonction de l'objectif et les fonctions constituant les contraintes d'inégalité et d'égalité.
- Pour la solution, on suppose seulement l'existence d'une dérivée directionnelle par rapport au paramètre.

Ce théorème sera démontré dans la section suivante.

5.7 Preuve du théorème de l'enveloppe pour le problème de Bolza à paramètre

Dans cette section, nous démontrons notre théorème de l'enveloppe pour le problème de Bolza (\mathcal{B}, π) .

Pour la preuve de la Partie (I), nous utilisons la Partie (V) de notre théorème de Pontryagin pour un problème de Bolza. Ensuite, on utilise le lemme donnant la Hadamard-différentiabilité d'une fonctionnelle définie à partir d'une intégrale. En utilisant le lemme sur la continuité, par rapport au paramètre, des coordonnées d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel de dimension finie dépendant d'un paramètre, on démontre la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport à π . Enfin, on parvient à démontrer la Partie (I).

Pour la preuve de la Partie (II), en utilisant que la dérivée directionnelle à droite de la solution existe au point π_0 suivant toutes les directions et la Partie (I) de ce théorème, on démontre que la fonction valeur admet une dérivée directionnelle à droite au point π_0 suivant toutes les directions. En outre, en utilisant les propriétés sur l'intégrale de Gelfand, on démontre que la dérivée directionnelle à droite de la fonction valeur au point π_0 est linéaire continue par rapport aux directions. Ainsi V est Gâteaux-différentiable au point π_0 .

Pour la preuve de la Partie (III), en ajoutant des hypothèses, on parvient à appliquer la Partie (II) pour chaque π dans un voisinage de π_0 . Ensuite, en démontrant la continuité de la Gâteaux-différentielle de V par rapport à π sur ce voisinage de π_0 , on démontre que V est continûment Fréchet-différentiable sur ce voisinage.

5.7.1 Preuve de la Partie (I)

Avec (CTC1) et (CTC2), en utilisant le Lemme 2.6.1, il existe Q un voisinage ouvert de π_0 , $Q \subset P$, t.q.

$$\left. \begin{array}{l} \forall \pi \in Q, ((D_{H,1}g_i(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3}f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi))_{1 \leq i \leq k}, \\ (D_{H,1}h_j(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3}f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi))_{1 \leq j \leq l}) \end{array} \right\} \quad (5.7.1)$$

est une famille linéairement indépendante.

Pour chaque $\pi \in Q$, on considère les fonctions $f^{0,\pi} : [0, T] \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $f^{0,\pi}(t, \xi, \zeta) = f^0(t, \xi, \zeta, \pi)$, $f^\pi : [0, T] \times \Omega \times U \rightarrow X$, définie par, pour tout $(t, \xi, \zeta) \in [0, T] \times \Omega \times U$, $f^\pi(t, \xi, \zeta) = f(t, \xi, \zeta, \pi)$ et, pour tout $\phi \in \{g_i : 0 \leq i \leq k\} \cup \{h_j : 1 \leq j \leq l\}$, $\phi^\pi = \phi(\cdot, \pi)$.

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

Notons que, pour chaque $\pi \in Q$, on peut réécrire le problème (\mathcal{B}, π) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad \int_0^T f^{0,\pi}(t, x(t), u(t))dt + g_0^\pi(x(T)) \\ \text{lorsque} \quad x \in PC^1([0, T], \Omega), u \in NPC_d^0([0, T], U) \\ \quad \forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(t) = f^\pi(t, x(t), u(t)), x(0) = \xi_0 \\ \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i^\pi(x(T)) \geq 0 \\ \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}, h_j^\pi(x(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Avec (CSOL1), (CCI1), (CCI2), (CCI5), (CCONT1), (CCONT2) et (5.7.1), pour chaque $\pi \in Q$, en utilisant la Partie (V) du Théorème 5.2.4, il existe un unique $((\lambda_i(\pi))_{0 \leq i \leq k}, (\mu_j(\pi))_{1 \leq j \leq l}, p(\pi)) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^l \times PC^1([0, T], X^*)$ avec $\lambda_0(\pi) = 1$ t.q.

(Si) $_\pi$ Pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $\lambda_i(\pi) \geq 0$.

(S ℓ) $_\pi$ Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i(\pi)g_i^\pi(x(\pi)(T)) = 0$.

(TC) $_\pi$ $\sum_{i=0}^k \lambda_i(\pi)D_H g_i^\pi(x(\pi)(T)) + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi)D_H h_j^\pi(x(\pi)(T)) = p(\pi)(T)$.

(AE) $_\pi$ Pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbf{d}p(\pi)(t) = -D_{F,2}H_\pi(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), p(\pi)(t), 1).$$

(MP) $_\pi$ Pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\zeta \in U$,

$$H_\pi(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), p(\pi)(t), 1) \geq H_\pi(t, x(\pi)(t), \zeta, p(\pi)(t), 1).$$

Par conséquent, on a

(Si) Pour chaque $\pi \in Q$, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $\lambda_i(\pi) \geq 0$.

(S ℓ) Pour chaque $\pi \in Q$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i(\pi)g_i(x(\pi)(T), \pi) = 0$.

(TC) Pour chaque $\pi \in Q$,

$$D_{H,1}g_0(x(\pi)(T), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi)D_{H,1}g_i(x(\pi)(T), \pi) \\ + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi)D_{H,1}h_j(x(\pi)(T), \pi) = p(\pi)(T).$$

(AE) Pour chaque $\pi \in Q$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbf{d}p(\pi)(t) = -p(\pi)(t) \circ D_{F,2}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) - D_{F,2}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi).$$

(MP) Pour chaque $\pi \in Q$, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\zeta \in U$,

$$H_\pi(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), p(\pi)(t), 1) \geq H_\pi(t, x(\pi)(t), \zeta, p(\pi)(t), 1).$$

Avec (CSOL1), on obtient que,

$$\forall \pi \in P, V(\pi) = \int_0^T f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)dt + g_0(x(\pi)(T), \pi).$$

Posons, $\forall \pi \in P, V_1(\pi) := \int_0^T f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)dt$ et $G := \Omega \times U \times P$, un ouvert de $X \times Y \times Z$. Considérons les fonctions : $\tilde{f}^0 : [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $(t, (\xi, \zeta, \pi)) \in [0, T] \times G$, $\tilde{f}^0(t, (\xi, \zeta, \pi)) := f^0(t, \xi, \zeta, \pi)$, $F : NPC_d^0([0, T], G) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $\sigma \in NPC_d^0([0, T], G)$, $F(\sigma) := \int_0^T \tilde{f}^0(t, \sigma(t))dt$ et $z : P \rightarrow NPC_d^0([0, T], G)$, définie par, pour tout $\pi \in P$, pour tout $t \in [0, T]$, $z(\pi)(t) = (x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)$.

Avec (CCI1), on a $\tilde{f}^0 \in C^0([0, T] \times G, \mathbb{R})$.

De plus, grâce à (CCI3), on obtient qu'il existe $\kappa \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$, il existe $\rho > 0$ t.q., pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $(\xi_1, \zeta_1, \pi_1), (\xi_2, \zeta_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho)$, on a

$$|\tilde{f}^0(t, (\xi_1, \zeta_1, \pi_1)) - \tilde{f}^0(t, (\xi_2, \zeta_2, \pi_2))| \leq \kappa(t)\|(\xi_1, \zeta_1, \pi_1) - (\xi_2, \zeta_2, \pi_2)\|_1.$$

En utilisant (CC14), on a, $\forall t \in [0, T]$, $D_{H,2}\tilde{f}^0(t, z(\pi_0)(t))$ existe et

$$D_{H,2}\tilde{f}^0(t, z(\pi_0)(t)) = D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0).$$

Ainsi, les conditions (i)-(iii) du Lemme 4.2.1 étant vérifiées pour la fonctionnelle F avec $z_0 = z(\pi_0)$, en utilisant le Lemme 4.2.1, on obtient que

$$\left. \begin{aligned} \forall v \in NPC_d^0([0, T], X \times Y \times Z), \\ [t \mapsto D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot v(t)] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}), \end{aligned} \right\} \quad (5.7.2)$$

et

$$\begin{aligned} D_H F(z(\pi_0)) \cdot v &= \int_{[0, T]} D_{H,2}\tilde{f}^0(t, z(\pi_0)(t)) \cdot v(t) d\mathbf{m}_1(t) \\ &= \int_{[0, T]} D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot v(t) d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le Lemme 4.2.2, on a

$$[t \mapsto D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)] \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; (X \times Y \times Z)^*) \quad (5.7.3)$$

et

$$\forall t \in [0, T], \|D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)\|_{\mathcal{L}} \leq \kappa(t).$$

Posons, $\forall t \in [0, T]$, $\bar{v}(t) := (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), \delta\pi)$.

Soit $\alpha > 0$ suffisamment petit ; alors on a

$$\begin{aligned} &\|\frac{1}{\alpha}(z(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - z(\pi_0)) - \bar{v}\|_{\infty} \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(\frac{1}{\alpha}(x(\pi_0 + \alpha\delta\pi)(t) - x(\pi_0)(t)) - D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\alpha}(u(\pi_0 + \alpha\delta\pi)(t) - u(\pi_0)(t)) - D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), 0 \right\|_1 \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{1}{\alpha}(x(\pi_0 + \alpha\delta\pi)(t) - x(\pi_0)(t)) - D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) \right\|_X \\ &\quad + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{1}{\alpha}(u(\pi_0 + \alpha\delta\pi)(t) - u(\pi_0)(t)) - D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t) \right\|_Y \\ &\leq \max\{1, T\} \left\| \frac{1}{\alpha}(x(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - x(\pi_0)) - D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) \right\|_{PC^1} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{\alpha}(u(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - u(\pi_0)) - D_G^+u(\pi_0; \delta\pi) \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Avec (CSOL2), on obtient que

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \max\{1, T\} \left\| \frac{1}{\alpha}(x(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - x(\pi_0)) - D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) \right\|_{PC^1} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{\alpha}(u(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - u(\pi_0)) - D_G^+u(\pi_0; \delta\pi) \right\|_{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le théorème de comparaison des limites, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{\alpha}(z(\pi_0 + \alpha\delta\pi) - z(\pi_0)) - \bar{v} \right\|_{\infty} = 0,$$

d'où $D_G^+z(\pi_0; \delta\pi)$ existe et $D_G^+z(\pi_0; \delta\pi) = \bar{v}$.

Sachant que, pour chaque $\pi \in P$, $V_1(\pi) = (F \circ z)(\pi)$, en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$D_G^+V_1(\pi_0; \delta\pi) = D_H F(z(\pi_0)) \cdot D_G^+z(\pi_0; \delta\pi).$$

Par conséquent, on obtient

$$\left. \begin{aligned} &D_G^+V(\pi_0; \delta\pi) \\ &= \int_{[0, T]} D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), \delta\pi) d\mathbf{m}_1(t) \\ &\quad + D_{H,1g_0}(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(T) + D_{H,2g_0}(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.4)$$

De plus, on a

$$\forall \pi \in P, \forall t \in [0, T], \mathbf{d}x(\pi)(t) = f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi). \quad (5.7.5)$$

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

Pour chaque $t \in [0, T]$, pour chaque espace vectoriel normé réel \mathcal{U} , considérons l'opérateur évaluation $ev_t^{\mathcal{U}} : NPC_d^0([0, T], \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$, défini par, pour chaque $y \in NPC_d^0([0, T], \mathcal{U})$, $ev_t^{\mathcal{U}}(y) = y(t)$.

Puisque, pour chaque $t \in [0, T]$, pour chaque espace vectoriel normé réel \mathcal{U} , $ev_t^{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}((NPC_d^0([0, T], \mathcal{U}), \|\cdot\|_{\infty}), \mathcal{U})$, on a $ev_t^{\mathcal{U}} \in C^1((NPC_d^0([0, T], \mathcal{U}), \|\cdot\|_{\infty}), \mathcal{U})$.

On peut aussi réécrire (5.7.5) sous la forme

$$\forall \pi \in P, \forall t \in [0, T], (ev_t^X \circ \mathbf{d} \circ x)(\pi) = (f(t, \cdot, \cdot, \cdot) \circ ((ev_t^X \circ x)(\cdot), (ev_t^Y \circ u)(\cdot), \cdot))(\pi). \quad (5.7.6)$$

D'où, pour tout $t \in [0, T]$, en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$\begin{aligned} D_G^+(ev_t^X \circ \mathbf{d} \circ x)(\pi_0; \delta\pi) &= D_H(ev_t^X \circ \mathbf{d})(x(\pi_0)) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) \\ &= (ev_t^X \circ \mathbf{d}) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) \\ &= ev_t^X(\mathbf{d}(D_G^+x(\pi_0; \delta\pi))) \\ &= \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t). \end{aligned}$$

Et, en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$\begin{aligned} &D_G^+[f(t, \cdot, \cdot, \cdot) \circ ((ev_t^X \circ x)(\cdot), (ev_t^Y \circ u)(\cdot), \cdot)](\pi_0; \delta\pi) \\ &= D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+(ev_t^X \circ x)(\pi_0; \delta\pi), D_G^+(ev_t^Y \circ u)(\pi_0; \delta\pi), \delta\pi) \\ &= D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_H^+ev_t^X(x(\pi_0; \delta\pi)) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) \\ &\quad , D_H^+ev_t^Y(u(\pi_0; \delta\pi)) \cdot D_G^+u(\pi_0; \delta\pi), \delta\pi) \\ &= D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), \delta\pi), \end{aligned}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} &\forall t \in [0, T], \\ &\mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t) = D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), \delta\pi). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.7)$$

Avec (MP) et (CCI4), on a

$$\left. \begin{aligned} &\forall t \in [0, T], \\ &p(\pi_0)(t) \circ D_{H,3}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) + D_{H,3}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.8)$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, T]$, on obtient que

$$\begin{aligned} &D_{H,(2,3)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t)) \\ &= D_{H,2}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) \\ &\quad + D_{H,3}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t) \\ &= -\mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - \\ &\quad p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,2}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - \\ &\quad p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,3}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t) \text{ grâce à (5.7.8) et (AE)}. \\ &= -\mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,(2,3,4)}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \\ &\quad (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t), \delta\pi) \\ &\quad + p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &= -\mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t) + \\ &\quad p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \text{ grâce à (5.7.7)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left. \begin{aligned} &\forall t \in [0, T], \\ &D_{H,(2,3)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t)) \\ &= -\mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t) + \\ &\quad p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.9)$$

Remarquons que les fonctions $[t \mapsto \mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t)]$ et $[t \mapsto p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t)]$ sont Riemann-intégrables et boréliennes sur $[0, T]$.

De plus, avec (5.7.2), on a

$[t \mapsto D_{H,(2,3)}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot (D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t), D_G^+u(\pi_0; \delta\pi)(t))]$ appartient à $\mathcal{L}^1([0, T], B([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$.

Par conséquent, avec (5.7.9) et les propriétés des fonctions Borel-intégrables sur $[0, T]$, on obtient que

$$[t \mapsto p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi] \in \mathcal{L}^1([0, T], B([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}).$$

Par ailleurs, en utilisant (5.7.2), on a :

$[t \mapsto D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi] \in \mathcal{L}^1([0, T], B([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$. Ainsi, en utilisant (5.7.4) et (5.7.9), on obtient que

$$\left. \begin{aligned} D_G^+V(\pi_0; \delta\pi) = & \\ & \int_{[0, T]} -\mathbf{d}[p(\pi_0)](t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) - p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t) \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + \int_{[0, T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + \int_{[0, T]} D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + D_{H,1}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(T) + D_{H,2}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.10)$$

Considérons la fonctionnelle bilinéaire continue $\mathcal{Q} : X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour tout $(\mathbf{l}, x) \in X^* \times X$, $\mathcal{Q}(\mathbf{l}, x) = \mathbf{l} \cdot x$. Considérons les fonctions $\varphi : [0, T] \rightarrow X^* \times X$ définie par, pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi(t) = (p(\pi_0)(t), D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t))$ et $\psi := \mathcal{Q} \circ \varphi$.

Puisque $\mathcal{Q} \in C^1(X^* \times X, \mathbb{R})$ et $\varphi \in PC^1([0, T], X^* \times X)$, en utilisant le Lemme 1.3.13, on a $\psi \in PC^1([0, T], \mathbb{R})$ et, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\psi(t) &= D_F\mathcal{Q}(\varphi(t)) \cdot \mathbf{d}\varphi(t) \\ &= \mathcal{Q}(\mathbf{d}p(\pi_0)(t), D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t)) + \mathcal{Q}(p(\pi_0)(t), \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t)) \\ &= \mathbf{d}p(\pi_0)(t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) + p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t) \end{aligned}$$

i.e.

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbf{d}\psi(t) = \mathbf{d}p(\pi_0)(t) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(t) + p(\pi_0)(t) \cdot \mathbf{d}[D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)](t). \quad (5.7.11)$$

Puisque $\psi \in PC^1([0, T], \mathbb{R})$, on a, pour tout $t \in [0, T]$, $\psi(T) - \psi(0) = \int_0^T \mathbf{d}\psi(t) dt$.

De plus, pour tout $\pi \in P$, $ev_0^X(x(\pi)) = \xi_0$, d'où, en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$D_H^+ev_0(x(\pi_0)) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) = ev_0^X \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi) = 0$$

i.e

$$D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(0) = 0.$$

Par conséquent, on a

$$-\int_0^T \mathbf{d}\psi(t) dt = -\psi(T) + \psi(0) = -p(\pi_0)(T) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(T).$$

Donc en utilisant (5.7.10) et (5.7.11), on obtient

$$\left. \begin{aligned} D_G^+V(\pi_0; \delta\pi) = & \\ & -p(\pi_0)(T) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(T) \\ & + \int_{[0, T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + \int_{[0, T]} D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + D_{H,1}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+x(\pi_0; \delta\pi)(T) \\ & + D_{H,2}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.12)$$

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

Par conséquent, en utilisant (TC), on obtient

$$\left. \begin{aligned} D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) &= - \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,1} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T) \\ &- \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,1} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T) \\ &+ \int_{[0,T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4} f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \int_{[0,T]} D_{H,4} f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ D_{H,2} g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.13)$$

Par ailleurs, en utilisant (MP) et (CCI5), on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \pi \in Q, \\ p(\pi)(T) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) + D_{H,3} f^0(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, en utilisant (TC), on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \pi \in Q, \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,1} g_i(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) \\ + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,1} h_j(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) \\ = -D_{H,1} g_0(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) \\ - D_{H,3} f^0(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.14)$$

Dans le lemme suivant, on démontre la continuité des multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker par rapport au paramètre π .

Lemme 5.7.1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i \in C^0(Q, \mathbb{R}_+)$, et pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, $\mu_j \in C^0(Q, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Avec (CCI5), (CTC2), (CESP) et (5.7.1), en utilisant le Lemme 2.6.3 avec $\mathbb{E} = Y^*$, $\mathbb{W} = Z$, $W = Q$, et avec

$\forall \pi \in Q$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $e_i(\pi) = D_{H,1} g_i(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$, $e_{k+j}(\pi) = D_{H,1} h_j(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi)$, on obtient que, $\forall \alpha \in \{1, \dots, k+l\}$, \mathbf{x}_α est continue sur $\bigcup_{\pi \in Q} (F_\pi \times \{\pi\})$.

Par conséquent, puisque (5.7.14), on a, pour tout $\pi \in Q$,

$\mathbf{x}(\pi) := -D_{H,1} g_0(x(\pi)(T), \pi) \circ D_{H,3} f(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) - D_{H,3} f^0(T, x(\pi)(T), u(\pi)(T), \pi) \in F_\pi$.

Ainsi en utilisant le théorème de composition des fonctions continues, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \lambda_i &= \mathbf{x}_i \circ (\mathbf{x}, Id_Q) \in C^0(Q, \mathbb{R}), \text{ et} \\ \forall j \in \{1, \dots, l\}, \quad \mu_j &= \mathbf{x}_{k+j} \circ (\mathbf{x}, Id_Q) \in C^0(Q, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$; raisonnons par disjonction des cas; si $\lambda_i(\pi_0) > 0$, en utilisant le Lemme 5.7.1, il existe un voisinage N de π_0 dans Q t.q.

$$\forall \pi \in N, \lambda_i(\pi) > 0.$$

Par conséquent, en utilisant (Sℓ), on obtient que

$$\forall \pi \in N, g_i(x(\pi)(T), \pi) = 0.$$

Avec (CSOL2) et (CCONT1), en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$D_{H,1} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T) + D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi = 0.$$

Ainsi, on a

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.15)$$

De plus, si $\lambda_i(\pi_0) = 0$, alors on a

$$\left. \begin{aligned} & \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.16)$$

Ainsi, en utilisant (5.7.15) et (5.7.16), on a prouvé, par disjonction des cas, que

$$\left. \begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\lambda_i(\pi_0) D_{H,1} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.17)$$

Soit $j \in \{1, \dots, l\}$; remarquons que

$$\forall \pi \in Q, h_j(x(\pi)(T), \pi) = 0.$$

Avec (CSOL2) et (CCONT1), en utilisant le Lemme 2.1.8, on a

$$D_{H,1} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T) + D_{H,2} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi = 0.$$

Par conséquent, on obtient que

$$\left. \begin{aligned} & \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & = -\mu_j(\pi_0) D_{H,1} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)(T). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.18)$$

Avec (5.7.13), (5.7.17) et (5.7.18), on a

$$\begin{aligned} D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) &= D_{H,2} g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ &+ \int_{[0,T]} D_{H,4} f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ &+ \int_{[0,T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4} f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned}$$

Ceci démontre la Partie (I).

5.7.2 Preuve de la Partie (II)

Pour chaque $\delta\pi \in Z$, avec (CSOL2-bis), $D_G^+ x(\pi_0; \delta\pi)$ et $D_G^+ u(\pi_0; \delta\pi)$ existent.

Par conséquent, les conditions (CSOL1), (CSOL2), (CCi1), (CCi2), (CCi3), (CCi4), (CCi5), (CCONT1), (CCONT2), (CTC1), (CTC2) et (CESP) sont vérifiées pour toutes les directions $\delta\pi \in Z$.

Donc, en utilisant la Partie (I) du Théorème 5.6.1, on a

$$\left. \begin{aligned} & \forall \delta\pi \in Z, \\ & D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) = D_{H,2} g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2} g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2} h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \cdot \delta\pi \\ & + \int_{[0,T]} D_{H,4} f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t) \\ & + \int_{[0,T]} p(\pi_0)(t) \cdot D_{H,4} f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) \cdot \delta\pi \, d\mathbf{m}_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.19)$$

En utilisant (5.7.3), on a

$$[t \mapsto D_{H,4} f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)] \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; Z^*). \quad (5.7.20)$$

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

De plus, avec (Cci6), on a

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0, T], \\ & \|p(\pi_0)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)\|_{\mathcal{L}} \\ & \leq \|p(\pi_0)(t)\|_{\mathcal{L}} \|D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)\|_{\mathcal{L}} \leq \|p(\pi_0)\|_{\infty} \mathcal{L}(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque, pour chaque $\delta\pi \in Z$,

$[t \mapsto [p(\pi_0)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)] \cdot \delta\pi] \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$, en utilisant le Lemme 4.1.3, on obtient que

$$[t \mapsto p(\pi_0)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0)] \in \mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; Z^*). \quad (5.7.21)$$

Ainsi, avec (5.7.20) et (5.7.21), on peut reformuler (5.7.19) sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} & \forall \delta\pi \in Z, \\ & D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi) = (D_{H,2}g_0(x(\pi_0)(T), \pi_0) \\ & + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi_0) D_{H,2}g_i(x(\pi_0)(T), \pi_0) \\ & + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi_0) D_{H,2}h_j(x(\pi_0)(T), \pi_0) \\ & + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f^0(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t) \\ & + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} p(\pi_0)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi_0)(t), u(\pi_0)(t), \pi_0) d\mathbf{m}_1(t)) \cdot \delta\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.22)$$

Par conséquent, on a $[\delta\pi \mapsto D_G^+ V(\pi_0; \delta\pi)] \in Z^*$ comme somme finie d'éléments de Z^* . Ainsi V est Gâteaux-différentiable au point π_0 .

Ceci démontre la Partie (II).

5.7.3 Preuve de la Partie (III)

Notons que la fonction $z : P \rightarrow NPC_d^0([0, T], \Omega \times U \times P)$, définie par, pour tout $\pi \in P$, pour tout $t \in [0, T]$, $z(\pi)(t) = (x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)$ est continue au point π_0 .

En effet, pour chaque $\pi \in P$, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} & \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_{\infty} \\ & = \sup_{t \in [0, T]} \|(x(\pi)(t) - x(\pi_0)(t), u(\pi)(t) - u(\pi_0)(t), \pi - \pi_0)\|_1 \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \|x(\pi)(t) - x(\pi_0)(t)\|_X + \sup_{t \in [0, T]} \|u(\pi)(t) - u(\pi_0)(t)\|_Y + \|\pi - \pi_0\|_Z \\ & \leq \max\{1, T\} \|x(\pi) - x(\pi_0)\|_{PC^1} + \|u(\pi) - u(\pi_0)\|_{\infty} + \|\pi - \pi_0\|_Z. \end{aligned}$$

Avec (CSOL3), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \pi_0} \max\{1, T\} \|x(\pi) - x(\pi_0)\|_{PC^1} + \|u(\pi) - u(\pi_0)\|_{\infty} + \|\pi - \pi_0\|_Z = 0.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on obtient que

$$\lim_{\pi \rightarrow \pi_0} \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_{\infty} = 0.$$

D'où, on obtient que

$$\exists \bar{r} > 0 \text{ t.q. } \forall \pi \in B(\pi_0, \bar{r}), \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_{\infty} < \frac{\rho}{2}. \quad (5.7.23)$$

Posons $\alpha := \min\{\bar{r}, \frac{\rho}{2}\}$.

Lemme 5.7.2. $\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \forall t \in [0, T], B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha) \subset B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho)$.

Démonstration. Soit $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$, soit $t \in [0, T]$.

Soit $y \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha)$; on obtient que

$$\begin{aligned} \|y - z(\pi_0)(t)\|_1 &= \|y - z(\pi)(t) + z(\pi)(t) - z(\pi_0)(t)\|_1 \\ &\leq \|y - z(\pi)(t)\|_1 + \|z(\pi)(t) - z(\pi_0)(t)\|_1 \\ &\leq \alpha + \|z(\pi) - z(\pi_0)\|_\infty \\ &< \alpha + \frac{\rho}{2} \text{ grâce à (5.7.23)} \\ &\leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho. \end{aligned}$$

Par conséquent, $y \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho)$; donc

$$B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha) \subset B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi_0)(t), \rho).$$

□

Avec (CCI3), en utilisant le Lemme 5.7.2, on a

$$\left. \begin{aligned} \forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \forall t \in [0, T], \forall (\xi_1, \zeta_1, \pi_1), (\xi_2, \zeta_2, \pi_2) \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha), \\ |f^0(t, \xi_1, \zeta_1, \pi_1) - f^0(t, \xi_2, \zeta_2, \pi_2)| \leq \kappa(t) \|(\xi_1, \zeta_1, \pi_1) - (\xi_2, \zeta_2, \pi_2)\|_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.24)$$

Posons $W := B(\pi_0, \alpha) \cap Q \subset P$.

Soit $\pi \in W$.

Notons que W est un voisinage ouvert de π dans Q et, pour chaque $\bar{\pi} \in W$, $(x(\bar{\pi}), u(\bar{\pi}))$ est solution de $(\mathcal{B}, \bar{\pi})$, par conséquent (CSOL1) est vérifiée pour $\pi_0 = \pi$.

De plus, grâce à (CSOL2-ter), pour chaque $\delta\pi \in Z$, $D_G^+x(\pi; \delta\pi)$ et $D_G^+u(\pi; \delta\pi)$ existent ce qui démontre (CSOL2-bis) avec $\pi_0 = \pi$.

(CCI1) et (CCI2) étant indépendantes de π_0 , (CCI1) et (CCI2) sont vérifiées pour $\pi_0 = \pi$.

Grâce à (5.7.24), la condition (CCI3) est vérifiée avec $\pi_0 = \pi$.

En utilisant (CCI4-bis), (CCI4) est vérifiée avec $\pi_0 = \pi$.

(CCI5) étant indépendante de π_0 , (CCI5) est vérifiée pour $\pi_0 = \pi$.

En utilisant (CCONT1-bis), (CCONT1) est vérifiée avec $\pi_0 = \pi$.

(CCONT2) étant indépendante de π_0 , (CCONT2) est vérifiée pour $\pi_0 = \pi$.

Avec (5.7.1), (CTC1) est vérifié pour $\pi_0 = \pi$.

(CTC2) et (CESP) étant indépendantes de π_0 , (CTC2) et (CESP) sont vérifiées pour $\pi_0 = \pi$.

En utilisant (CCI6-bis), (CCI6) est vérifiée avec $\pi_0 = \pi$.

C'est pourquoi, on peut appliquer la Partie (II) du Théorème 5.6.1 et ainsi on obtient que V est Gâteaux-différentiable pour chaque point $\pi \in W$ et

$$\left. \begin{aligned} \forall \pi \in W, \\ D_G V(\pi) &= D_{H,2}g_0(x(\pi)(T), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2}g_i(x(\pi)(T), \pi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2}h_j(x(\pi)(T), \pi) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) dm_1(t) \\ &\quad + \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} p(\pi)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) dm_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.7.25)$$

Lemme 5.7.3. $\forall \pi \in B(\pi_0, \alpha), \forall t \in [0, T]$,

$$\|D_{H,(2,3,4)}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq \kappa(t).$$

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$, soit $\pi \in B(\pi_0, \alpha)$.

Soit $v \in X \times Y \times Z$; posons $\theta^0 := \frac{\alpha}{\|v\|_1 + 1}$.

Soit $\theta \in]0, \theta^0[$, $z(\pi)(t) + \theta v \in B_{\|\cdot\|_1}(z(\pi)(t), \alpha)$.

En effet,

$$\|z(\pi)(t) + \theta v - z(\pi)(t)\|_1 = \theta \|v\|_1 < \frac{\alpha}{\|v\|_1 + 1} \|v\|_1 \leq \alpha,$$

d'où, en utilisant (5.7.24), on obtient que

$$|f^0(t, z(\pi)(t) + \theta v) - f^0(t, z(\pi)(t))| \leq \kappa(t) \|\theta v\|_1.$$

Ainsi, on obtient que

$$\forall \theta \in]0, \theta^0[, \left| \frac{1}{\theta} (f^0(t, z(\pi)(t) + \theta v) - f^0(t, z(\pi)(t))) \right| \leq \kappa(t) \|v\|_1.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de conservation des inégalités larges par passage à la limite lorsque $\theta \rightarrow 0+$, on a

$$|D_{H,(2,3,4)} f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) \cdot v| \leq \kappa(t) \|v\|_1.$$

Donc on a

$$\|D_{H,(2,3,4)} f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi)\|_{\mathcal{L}} \leq \kappa(t).$$

□

Pour tout $i \in \{2, 4\}$, pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\pi \in W$, on pose

$$L_i(t, \pi) = D_{H,i} f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) \text{ et } L_i^0(t, \pi) = D_{H,i} f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi).$$

Dans le lemme suivant, on démontre la continuité de la fonction adjointe par rapport au paramètre π .

Lemme 5.7.4. $[\pi \mapsto p(\pi)] \in C^0(W, (PC^1([0, T], X^*), \|\cdot\|_\infty))$.

Démonstration. Avec (TC), (CCONT1-bis) et le Lemme 5.7.1, on a

$$[\pi \mapsto p(\pi)(T)] \in C^0(Q, X^*). \tag{5.7.26}$$

Soit $\hat{\pi} \in W$.

Considérons les fonctions $\varphi_1 : [0, T] \times W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $(t, \pi) \in [0, T] \times W$, $\varphi_1(t, \pi) := \|L_2(t, \pi) - L_2(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$, et $\varphi_1^0 : [0, T] \times W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $(t, \pi) \in [0, T] \times W$, $\varphi_1^0(t, \pi) := \|L_2^0(t, \pi) - L_2^0(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$.

Notons que, grâce à (CC11), en utilisant la Proposition 1.2.5 et la Proposition 1.1.10, on a

$$\forall \pi \in W, \varphi_1^0(\cdot, \pi) \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}). \tag{5.7.27}$$

Grâce au Lemme 5.7.3, on a

$$\forall \pi \in W, \forall t \in [0, T], \varphi_1^0(t, \pi) \leq 2\kappa(t). \tag{5.7.28}$$

Par ailleurs, en utilisant (CC17), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \varphi_1^0(t, \pi) = \varphi_1^0(t, \hat{\pi}) = 0. \tag{5.7.29}$$

Ainsi, avec (5.7.27), (5.7.28) et (5.7.29), en utilisant le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), la fonctionnelle $\psi_1^0 : W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $\pi \in W$, $\psi_1^0(\pi) := \int_0^T \varphi_1^0(t, \pi) dt$, est continue au point $\hat{\pi}$ i.e.

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \psi_1^0(\pi) = \psi_1^0(\hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.30)$$

Ensuite, grâce à (CCI2), en utilisant la Proposition 1.2.5 et la Proposition 1.1.10, on a

$$\forall \pi \in W, \varphi_1(\cdot, \pi) \in NPC_d^0([0, T], \mathbb{R}). \quad (5.7.31)$$

Grâce à (CCI6-bis), on a

$$\forall \pi \in W, \forall t \in [0, T], \varphi_1(t, \pi) \leq 2c(t). \quad (5.7.32)$$

Par ailleurs, en utilisant (CCI7), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \varphi_1(t, \pi) = \varphi_1(t, \hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.33)$$

Par conséquent, avec (5.7.31), (5.7.32) et (5.7.33), en utilisant le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), la fonctionnelle $\psi_1 : W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $\pi \in W$, $\psi_1(\pi) := \int_0^T \varphi_1(t, \pi) dt$, est continue au point $\hat{\pi}$ i.e.

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \psi_1(\pi) = \psi_1(\hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.34)$$

Soit $\pi \in W$.

Soit $t \in [0, T]$, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} & \|p(\pi)(t) - p(\hat{\pi})(t)\|_{\mathcal{L}} = \|p(\pi)(T) + \int_t^T [-p(\pi)(s) \circ L_2(s, \pi) - L_2^0(s, \pi)] ds - \\ & (p(\hat{\pi})(T) + \int_t^T [-p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \hat{\pi}) - L_2^0(s, \hat{\pi})] ds)\|_{\mathcal{L}} \\ & = \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T) + \int_t^T [p(\pi)(s) \circ L_2(s, \pi) - p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \hat{\pi})] ds \\ & + \int_t^T [L_2^0(s, \pi) - L_2^0(s, \hat{\pi})] ds\|_{\mathcal{L}} \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \|\int_t^T [p(\pi)(s) \circ L_2(s, \pi) - p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \hat{\pi})] ds\|_{\mathcal{L}} \\ & + \|\int_t^T [L_2^0(s, \pi) - L_2^0(s, \hat{\pi})] ds\|_{\mathcal{L}} \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \int_t^T \|p(\pi)(s) \circ L_2(s, \pi) - p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} ds \\ & + \int_t^T \|L_2^0(s, \pi) - L_2^0(s, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} ds \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \int_t^T \|p(\pi)(s) \circ L_2(s, \pi) - p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \pi) + \\ & p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \pi) - p(\hat{\pi})(s) \circ L_2(s, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} ds + \int_t^T \|L_2^0(s, \pi) - L_2^0(s, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} ds \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \int_t^T \|(p(\pi)(s) - p(\hat{\pi})(s)) \circ L_2(s, \pi)\|_{\mathcal{L}} ds + \\ & \int_t^T \|p(\hat{\pi})(s) \circ (L_2(s, \pi) - L_2(s, \hat{\pi}))\|_{\mathcal{L}} ds + \psi_1^0(\pi) \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \int_t^T \|p(\pi)(s) - p(\hat{\pi})(s)\|_{\mathcal{L}} \|L_2(s, \pi)\|_{\mathcal{L}} ds \\ & + \int_t^T \|p(\hat{\pi})(s)\|_{\mathcal{L}} \|L_2(s, \pi) - L_2(s, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} ds + \psi_1^0(\pi) \\ & \leq \|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \int_{[t, T]} \|p(\pi)(s) - p(\hat{\pi})(s)\|_{\mathcal{L}} c(s) d\mathbf{m}_1(s) + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_1(\pi) \\ & + \psi_1^0(\pi). \end{aligned}$$

Puisque $[s \mapsto \|p(\pi)(s) - p(\hat{\pi})(s)\|_{\mathcal{L}}] \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ et $c \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$, en utilisant le Lemme de Gronwall (Lemme 3.3.10), on a

$$\forall t \in [0, T], \|p(\pi)(t) - p(\hat{\pi})(t)\|_{\mathcal{L}} \leq [\|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_1(\pi) + \psi_1^0(\pi)] \exp(\int_{[t, T]} c(s) d\mathbf{m}_1(s)),$$

d'où

$$\|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} \leq [\|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_1(\pi) + \psi_1^0(\pi)] \exp(\int_{[0, T]} c(s) d\mathbf{m}_1(s)). \quad (5.7.35)$$

5.7. PREUVE DU THÉORÈME DE L'ENVELOPPE POUR LE PROBLÈME DE BOLZA À PARAMÈTRE

De plus, avec (5.7.26), (5.7.30) et (5.7.34), on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} [\|p(\pi)(T) - p(\hat{\pi})(T)\|_{\mathcal{L}} + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_1(\pi) + \psi_1^0(\pi)] \exp(\int_{[0,T]} c(s) d\mathbf{m}_1(s)) = 0.$$

Par conséquent, avec (5.7.35), en utilisant le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} = 0.$$

Ceci démontre que $[\pi \mapsto p(\pi)] \in C^0(W, (PC^1([0, T], X^*), \|\cdot\|_{\infty}))$. □

Ensuite, considérons la fonction $\Psi_2 : W \rightarrow Z^*$, définie par, pour chaque $\pi \in W$,

$$\Psi_2(\pi) := \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} D_{H,4}f^0(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t).$$

Lemme 5.7.5. $\Psi_2 \in C^0(W, Z^*)$.

Démonstration. Soit $\hat{\pi} \in W$.

Considérons la fonction $\varphi_2^0 : [0, T] \times W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $(t, \pi) \in [0, T] \times W$, $\varphi_2^0(t, \pi) := \|L_4^0(t, \pi) - L_4^0(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$.

Avec (CC18), on a

$$\forall \pi \in W, \varphi_2^0(\cdot, \pi) \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T]), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))). \quad (5.7.36)$$

Grâce au Lemme 5.7.3, on a

$$\forall \pi \in W, \forall t \in [0, T], \varphi_2^0(t, \pi) \leq 2\kappa(t). \quad (5.7.37)$$

Par ailleurs, en utilisant (CC17), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \varphi_2^0(t, \pi) = \varphi_2^0(t, \hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.38)$$

Ainsi, avec (5.7.36), (5.7.37) et (5.7.38), en utilisant le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), la fonctionnelle $\psi_2^0 : W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $\pi \in W$, $\psi_2^0(\pi) := \int_{[0,T]} \varphi_2^0(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t)$, est continue au point $\hat{\pi}$ i.e.

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \psi_2^0(\pi) = \psi_2^0(\hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.39)$$

Soit $\pi \in W$, on a

$$\begin{aligned} \|\Psi_2(\pi) - \Psi_2(\hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} &= \left\| \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} L_4^0(t, \pi) - L_4^0(t, \hat{\pi}) d\mathbf{m}_1(t) \right\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \int_{[0,T]} \varphi_2^0(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t) \text{ grâce au Lemme 4.1.3} \\ &= \psi_2^0(\pi). \end{aligned}$$

Avec (5.7.39), en utilisant le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|\Psi_2(\pi) - \Psi_2(\hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Ainsi le Lemme 5.7.5 est prouvé □

Considérons la fonction $\Psi_3 : W \rightarrow Z^*$, définie par, pour chaque $\pi \in W$,

$$\Psi_3(\pi) := \int_{[0,T]}^{\mathfrak{G}} p(\pi)(t) \circ D_{H,4}f(t, x(\pi)(t), u(\pi)(t), \pi) d\mathbf{m}_1(t).$$

Lemme 5.7.6. $\Psi_3 \in C^0(W, Z^*)$.

Démonstration. Soit $\hat{\pi} \in W$.

Considérons la fonction $\varphi_2 : [0, T] \times W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $(t, \pi) \in [0, T] \times W$, $\varphi_2(t, \pi) := \|L_4(t, \pi) - L_4(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}}$.

Avec (CC18), on a

$$\forall \pi \in W, \varphi_2(\cdot, \pi) \in \mathcal{L}^0([0, T], \mathcal{B}([0, T])), (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})). \quad (5.7.40)$$

En utilisant (CC16-bis), on a

$$\forall \pi \in W, \forall t \in [0, T], \varphi_2(t, \pi) \leq 2c(t). \quad (5.7.41)$$

Par ailleurs, en utilisant (CC17), on a

$$\forall t \in [0, T], \lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \varphi_2(t, \pi) = \varphi_2(t, \hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.42)$$

Ainsi, avec (5.7.40), (5.7.41) et (5.7.42), en utilisant le théorème 6.3.3 de [38] (p.105), la fonctionnelle $\psi_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$, définie par, pour chaque $\pi \in W$, $\psi_2(\pi) := \int_{[0, T]} \varphi_2(t, \pi) d\mathbf{m}_1(t)$, est continue au point $\hat{\pi}$ i.e.

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \psi_2(\pi) = \psi_2(\hat{\pi}) = 0. \quad (5.7.43)$$

Soit $\pi \in W$; on a

$$\begin{aligned} & \|p(\pi)(t) \circ L_4(t, \pi) - p(\hat{\pi})(t) \circ L_4(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \\ &= \|p(\pi)(t) \circ L_4(t, \pi) - p(\hat{\pi})(t) \circ L_4(t, \pi) + p(\hat{\pi})(t) \circ L_4(t, \pi) - p(\hat{\pi})(t) \circ L_4(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|(p(\pi)(t) - p(\hat{\pi})(t)) \circ L_4(t, \pi)\|_{\mathcal{L}} + \|p(\hat{\pi})(t) \circ (L_4(t, \pi) - L_4(t, \hat{\pi}))\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|p(\pi)(t) - p(\hat{\pi})(t)\|_{\mathcal{L}} \|L_4(t, \pi)\|_{\mathcal{L}} + \|p(\hat{\pi})(t)\|_{\mathcal{L}} \|L_4(t, \pi) - L_4(t, \hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} c(t) + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \varphi_2(t, \pi). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 4.1.3, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Psi_3(\pi) - \Psi_3(\hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} \\ &= \left\| \int_{[0, T]} p(\pi)(t) \circ L_4(t, \pi) - p(\hat{\pi})(t) \circ L_4(t, \hat{\pi}) d\mathbf{m}_1(t) \right\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \int_{[0, T]} (\|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} c(t) + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \varphi_2(t, \pi)) d\mathbf{m}_1(t) \\ &= \|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} \int_{[0, T]} c(t) d\mathbf{m}_1(t) + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_2(\pi). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 5.7.4 et (5.7.43), on obtient que

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|p(\pi) - p(\hat{\pi})\|_{\infty} \int_{[0, T]} c(t) d\mathbf{m}_1(t) + \|p(\hat{\pi})\|_{\infty} \psi_2(\pi) = 0.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que

$$\lim_{\pi \rightarrow \hat{\pi}} \|\Psi_3(\pi) - \Psi_3(\hat{\pi})\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Ainsi, $\Psi_3 \in C^0(W, Z^*)$, i.e. le Lemme 5.7.6 est prouvé. \square

Avec (5.7.25), remarquons que

$$\left. \begin{aligned} & \forall \pi \in W, \\ & D_G V(\pi) = D_{H,2} g_0(x(\pi)(T), \pi) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(\pi) D_{H,2} g_i(x(\pi)(T), \pi) \\ & \quad + \sum_{j=1}^l \mu_j(\pi) D_{H,2} h_j(x(\pi)(T), \pi) + \Psi_2(\pi) + \Psi_3(\pi). \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, en utilisant (CCONT1-bis) et les Lemmes 5.7.1, 5.7.5 et 5.7.6, on obtient, par somme finie de fonctions continues,

$$D_G V \in C^0(W, Z^*).$$

Ainsi, en utilisant le corollaire 2, p.144 de [1], on obtient que V est Fréchet-différentiable sur W et $D_F V(\pi) = D_G V(\pi)$ pour tout $\pi \in W$, et donc $D_F V \in C^0(W, Z^*)$.

Bibliographie

- [1] V.M. Alexeev, V.M. Tikhomirov, et S.V. Fomine, *Commande optimale*, édition française, MIR, Moscou, 1982.
- [2] C.D. Aliprantis, et K.C. Border, *Infinite dimensional analysis*, third edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] J.-P. Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée : tome 1*, P.U.F, Paris, 1987.
- [4] J.-P. Aubin, *Applied abstract analysis*, A Wiley-interscience, New York, 1977.
- [5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle*, Springer, Paris, 1976.
- [6] K.C. Border, *Classical envelope theory*, Caltech, Division of the Humanities and Social Sciences, 2006, v2015119 :1420.
- [7] J. Blot, *Cours d'analyse dans \mathbb{R}^n* , L2 MIAHS, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2019.
- [8] J. Blot, *Cours d'intégration et probabilité*, L3 MIAHS, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2019.
- [9] J. Blot, *On the multiplier rules*, *Optimization*, volume 65, p. 947-955, 2016.
- [10] J. Blot, et M.I. Koné, *Euler-Lagrange equations for a delay variational problem*, *Nonautonomous Dynamical Systems*, volume 4, p. 52-61, 2017.
- [11] J. Blot, et H. Yilmaz, *A generalization of Michel's result on the Pontryagin Maximum Principle*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, volume 183, p. 792-812, 2019.
- [12] J. Blot, et H. Yilmaz, *Envelope theorems for static optimization and Calculus of Variations*, *arXiv :2108.10571*, 2021.
- [13] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.
- [14] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, édition refondue et corrigée, Hermann Paris, 1977.
- [15] M. Carter, *Foundations of mathematical economics*, M.I.T. Press, Cambridge (Massachusetts), 2001.
- [16] G. Choquet, *Cours de topologie*, 2^e édition, Dunod, Paris, 2000.
- [17] F.H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, New York (NY) : Wiley-Interscience, 1983.
- [18] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyev, R.J. Stern, et P.R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1998.
- [19] J. Dixmier, *Topologie générale*, P.U.F, Paris, 1981.
- [20] J. Dugundji, et A. Granas, *Fixed point theory*, Springer-Verlag New York Inc., New-York, 2003.
- [21] T.M. Flett, *Differential analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1980.
- [22] C. Fourgeaud, et A. Perrot, *Calcul économique et microéconomie approfondie*, Economica, Paris, 1990.
- [23] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

- [24] H. Halkin, Implicit functions and optimization problems without continuous differentiability of the data, *SIAM Journal of Control*, volume 12, p.229-239, 1974.
- [25] A.D. Ioffe, et V.M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, english edition, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1979.
- [26] L.V. Kantorovich, et G.P. Akilov, *Functional analysis*, second edition, Pergamon press, 1982.
- [27] A. Kolmogorov, et S. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, 2ème édition française, MIR, Moscou, 1974.
- [28] S. Lang, *Real and functional analysis*, third edition, Springer-Verlang New York, Inc., 1993.
- [29] O.L. Mangasarian, et S. Fromovitz, The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, volume 17, p. 37-47, 1967.
- [30] P. Michel, *Cours de mathématiques pour économistes*, seconde édition, Economica, Paris, 1989.
- [31] P. Michel, Une démonstration élémentaire du principe du maximum de Pontryaguine, *Bulletin de mathématiques économiques*, N°14, Mars 1977.
- [32] R. Pallu De La Barrière, *Cours d'automatique théorique*, Dunod, Paris, 1966.
- [33] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, et E.F. Mishchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, édition française, MIR, Moscow, 1974.
- [34] B.H. Pourciau, Modern multiplier rules, *American Mathematical Monthly*, 87, p. 433-457, 1980.
- [35] É. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3 : topologie et éléments d'analyse*, seconde édition, Dunod, Paris, 1998.
- [36] L. Schwartz, *Analyse I : Théorie des ensembles et topologie*, Hermann, Paris, 1991.
- [37] L. Schwartz, *Analyse III : Calcul intégral*, Hermann, Paris, 1993.
- [38] L. Schwartz, *Analyse IV : Applications à la théorie de la mesure*, Hermann, Paris, 1993.
- [39] J. Van Tiel, *Convex analysis*, Wiley, Chichester, 1984.
- [40] H. Yilmaz, A generalization of multiplier rules for infinite-dimensional optimization problems, *Optimization*, volume 70(8), p. 1825-1835, 2021.

Liste des principales notations

- $AC([a, b], E)$: l'ensemble des fonctions absolument continues de $[a, b]$ dans E , p. 24.
- $Af([a, b], E)$: l'ensemble des restrictions de fonctions affines à l'intervalle $[a, b]$, p. 46.
- \overline{A} : l'adhérence de A , p. 11.
- $\text{int}(A)$: l'intérieur de A , p. 11.
- $\text{Fr}(A)$: la frontière de A , p. 11.
- $\mathcal{B}(U)$: la tribu de Borel sur U , p. 10.
- $\overline{\mathcal{B}}([a, b])$: la tribu de Lebesgue sur $[a, b]$, p. 11.
- $B(A, E)$: l'ensemble des fonctions bornées de A dans E , p. 10.
- $BC^0(A, E)$: l'ensemble des fonctions bornées et continues de A dans E , p. 10.
- $\mathcal{B}(E \times F, G)$: l'ensemble des fonctions bilinéaires continues de $E \times F$ dans G , p. 11.
- $BV([a, b], \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions à variation bornée de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , p. 38.
- $B_{\|\cdot\|_X}(x, r)$: la boule ouverte de centre x et de rayon r , p. 11.
- $\overline{B}_{\|\cdot\|_X}(x, r)$: la boule fermée de centre x et de rayon r , p. 11.
- $\text{coins}(\varphi)$: cf. Définition 1.4.4, p. 35.
- $C^0(T, U)$: l'ensemble des fonctions continues de T dans U , p. 10.
- $C_d^0(J, E)$: l'ensemble des fonctions $\varphi : J \rightarrow E$ t.q., pour chaque $t \in J$, $t \neq \sup J$, $\varphi(t+) = \varphi(t)$, p. 34.
- $C^1([a, b], E)$: l'ensemble des fonctions dérivables de $[a, b]$ dans E et de dérivée continue de $[a, b]$ dans E , p. 24.
- $C^1([a, b], \mathcal{O})$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^1([a, b], E)$ t.q. $\varphi([a, b]) \subset \mathcal{O}$, p. 24.
- $C^1(A, Y)$: l'ensemble des fonctions continûment Fréchet-différentiables de A dans Y , p. 24.
- $C_c^1(]0, T[, \mathbb{R})$: l'ensemble des $\varphi \in C^1(]0, T[, \mathbb{R})$ dont le support, i.e. l'adhérence de $\{t \in]0, T[: \varphi(t) \neq 0\}$ (noté $\text{supp}(\varphi)$) est compact et inclus dans $]0, T[$, p. 134.
- $C_{\xi_0, \xi_T}^1([a, b], A)$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^1([a, b], A)$ t.q. $\varphi(a) = \xi_0$ et $\varphi(b) = \xi_T$, p. 140.
- \mathbf{d} : l'opérateur dérivée étendue, cf. Proposition 1.3.7, p. 26.
- $D_G^+ f(x; v)$: la dérivée directionnelle à droite (ou Gâteaux-variation) de f au point x suivant la direction v , p. 56.
- $D_G f(x)$: la Gâteaux-différentielle de la fonction f au point x , p. 56.
- $D_{G,k} f(\hat{x})$: la Gâteaux-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable, p. 59.
- $D_H^+ f(x; v)$: la Hadamard-variation de f au point x d'accroissement v , p. 57.
- $D_H f(x)$: la Hadamard-différentielle de la fonction f au point x , p. 57.
- $D_{F,k} f(\hat{x})$: la Fréchet-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable, p. 59.
- $D_F f(x)$: la Fréchet-différentielle de f au point x , p. 57.
- $D_{H,k} f(\hat{x})$: la Hadamard-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport à la k -ième variable, p. 59.
- $D_{H,(k_1, k_2, k_3)} f(\hat{x})$: la Hadamard-différentielle partielle au point \hat{x} par rapport aux variables

- k_1, k_2 et k_3 , p. 59.
- $\dim(E)$: la dimension de E , p. 11.
- $\text{diam}(D)$: le diamètre de D , p. 11.
- $\text{disc}(\varphi)$: cf. Définition 1.4.1, p. 33.
- $\text{disc1}(g)$: cf. Définition 1.2.2, p. 20.
- $d(z, K)$: $\inf_{x \in K} d(z, x)$, p. 112.
- $\mathbf{d}\varphi$: la dérivée étendue de φ , p. 24 ou p. 36.
- E^* : le dual topologique de E , p. 11.
- H_B : le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Bolza, p. 148.
- H_M : le Hamiltonien de Pontryagin du problème de Mayer, p. 150.
- $\text{Im } g$: l'image de g , p. 11.
- $\text{Isom}(E, F)$: l'ensemble des isomorphismes topologiques de E dans F , p. 11.
- $\text{Ker } g$: le noyau de g , p. 11.
- $\mathcal{L}^0([a, b], \mathcal{B}([a, b]), (U, \mathcal{B}(U)))$: l'ensemble des fonctions mesurables de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(U, \mathcal{B}(U))$, p. 10.
- $\mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions Borel-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , p. 11.
- $\mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \mathbf{m}_1; \mathbb{R}_+)$: l'ensemble des fonctions Borel-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+ , p. 11.
- $\mathcal{L}^1([a, b], \overline{\mathcal{B}([a, b])}, \mathbf{l}_1; \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , p. 11.
- $\mathcal{L}(E, F)$: l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F , p. 11.
- \mathbf{l}_1 : la mesure de Lebesgue sur $([a, b], \overline{\mathcal{B}([a, b])})$, p. 11.
- \mathbf{m}_1 : la mesure de Borel sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$, p. 11.
- $\mathcal{L}_{loc}^1(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \mathbf{m}_1; \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions $f :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ t.q., pour chaque intervalle K compact inclus dans $]0, T[$, $f|_K$ est Borel-intégrable sur K par rapport à \mathbf{m}_1 , p. 135.
- $\mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^1([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \mathbf{m}_1; E^*)$: l'ensemble des fonctions Gelfand-intégrable par rapport à \mathbf{m}_1 , p. 125.
- \mathcal{N}^* : l'opérateur adjoint de \mathcal{N} , p. 43.
- $NBV([a, b], \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions à variation bornée normalisées de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , p. 38.
- $NPC_d^0([a, b], U)$: l'ensemble des fonctions continues par morceaux normalisées de $[a, b]$ dans U , p. 10.
- $NPC_d^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in PC^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ t.q. $\varphi(b) = \varphi(b-)$ et $\forall i \in \{0, \dots, p\} \varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i+)$, p. 10.
- $NPC_d^0([a, b], \Omega; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ t.q. $\overline{\varphi([a, b])} \subset \Omega$, p. 10.
- $NPC_d^0(J, E)$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in PC^0(J, E)$ continues à droite sur J et si $\text{sup } J \in J$, $\varphi(\text{sup } J-) = \varphi(\text{sup } J)$, p. 34.
- $NPC_d^0(J, E; A)$: l'ensemble des fonctions φ dans $NPC_d^0(J, E)$ tel que l'ensemble des points de discontinuités de φ est inclus dans l'ensemble A , p. 34.
- $PC^0([a, b], U)$: l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans U , p. 10.
- $PC^0([a, b], U; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$: l'ensemble des fonctions φ dans $PC^0([a, b], U)$ tel que l'ensemble des points de discontinuité de φ est inclus dans l'ensemble $\{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\}$, p. 10.
- $PC^0(J, E)$: l'ensemble des fonctions continues par morceaux de J dans E , p. 34.
- $PC^0(J, E; A)$: l'ensemble des fonctions φ dans $PC^0(J, E)$ tel que l'ensemble des points de discontinuités de φ est inclus dans l'ensemble A , p. 34.
- $PC^1([a, b], E)$: l'ensemble des fonctions C^1 par morceaux de $[a, b]$ dans E , p. 24.

-
- $PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$: l'ensemble des fonctions φ dans $PC^1([a, b], E)$ tel que l'ensemble des points où φ' n'existe pas est inclus dans l'ensemble $\{\tau_0, \dots, \tau_{p+1}\}$, p.24.
 - $PC^1([a, b], O, (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$: l'ensemble des fonctions $\varphi \in PC^1([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$ t.q. $\varphi([a, b]) \subset O$, p. 24.
 - $PCP^0(I \times U, F)$: l'ensemble des fonctions continues par morceaux à paramètre sur $I \times U$ dans F , p. 20.
 - *p.p.* : presque partout, p. 126.
 - $Sub([a, b])$: l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, p. 10.
 - $S_{\|\cdot\|_X}(x, r)$: la sphère de centre x et de rayon r , p. 11.
 - $Vect(A)$: le sous-espace vectoriel engendré par A , p. 11.
 - $V_a^b(f)$: la variation totale de f sur $[a, b]$, p. 38.
 - $V(K, r)$: cf. Lemme 3.3.1, p. 112.
 - $\int_a^b u(t) df(t)$: l'intégrale de Riemann-Stieltjes de la fonction u par rapport à la fonction f sur $[a, b]$, p. 40.
 - $\int_a^b f(t) dt$: l'intégrale de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$, p. 27.
 - $\int_{[a,b]} f(t) dm_1(t)$: l'intégrale de Borel de f sur $[a, b]$, p. 96.
 - $\int_{[a,b]} f(t) d\mathbf{l}_1(t)$: l'intégrale de Lebesgue de f sur $[a, b]$, p. 158.
 - $\int_B^\mathfrak{G} \varphi(t) dm_1(t)$: l'intégrale de Gelfand de φ sur B par rapport à m_1 , p. 125.
 - $\mathcal{V}_v(T)$: l'ensemble des voisinages de v , p. 11.
 - $\varphi(s+)$: $\lim_{t \rightarrow s+} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t > s}} \varphi(t)$, p. 10.
 - $\varphi(s-)$: $\lim_{t \rightarrow s-} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow s \\ t < s}} \varphi(t)$, p. 10.
 - $\varphi'(t)$: la dérivée de φ au point t , p. 11.
 - $\varphi'_d(t)$: la dérivée à droite de φ au point t , p. 11.
 - $\varphi'_g(t)$: la dérivée à gauche de φ au point t , p. 11.
 - $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$: la norme usuelle sur $\mathcal{L}(E, F)$, p. 11.
 - $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$: la norme usuelle sur $\mathcal{B}(E \times F, G)$, p. 11.
 - $\|\cdot\|_{BV}$: la norme sur $BV([a, b], \mathbb{R})$, p. 38.
 - $\|\cdot\|_{E,1}$: cf. Notations 1.1.4, p. 11.
 - $\|\cdot\|_{NBV}$: la norme sur $NBV([a, b], \mathbb{R})$, p. 39.
 - $\|\cdot\|_{NPC^0}$: la norme sur $NPC_d^0([a, b], E; (\tau_i)_{0 \leq i \leq p+1})$, p. 15.
 - $\|\cdot\|_{PC^1}$: la norme sur $PC^1([a, b], E)$, p. 30.
 - $\|\cdot\|_{\infty}$ ou $\|\cdot\|_{A, \infty}$: la norme usuelle sur $B(A, E)$, p. 16.