



HAL
open science

Contributions expérimentales et théoriques à la fatigue multiaxiale des élastomères : Vers un critère cinématique

Etienne Le Mire

► To cite this version:

Etienne Le Mire. Contributions expérimentales et théoriques à la fatigue multiaxiale des élastomères : Vers un critère cinématique. Génie mécanique [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2022. Français. NNT : 2022ECDN0021 . tel-04019978

HAL Id: tel-04019978

<https://theses.hal.science/tel-04019978>

Submitted on 8 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : *Génie Mécanique*

Par

Etienne LE MIRE

Contributions expérimentales et théoriques à la fatigue multiaxiale des élastomères - Vers un critère cinématique

Thèse présentée et soutenue à École Centrale de Nantes, le 2 juin 2022

Unité de recherche : UMR 6183, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)

Rapporteurs avant soutenance :

Alexander LION Professeur, Universität der Bundeswehr Munchen, Neubiberg
Grégory CHAGNON Professeur des universités, Université Grenoble Alpes

Composition du Jury :

Président :	Stéphane MÉO	Professeur des universités, Université de Tours
Examineurs :	Ida RAOULT	Ingénieure de recherche, Safran, Etablissement Paris Saclay, Magny les Hameaux
	Nicolas SAINTIER	Professeur des universités, Arts et Métiers ParisTech Centre de Bordeaux-Talence
	Nathan SELLES	Ingénieur de recherche, LRCCP Vitry-sur-Seine
Dir. de thèse :	Erwan VERRON	Professeur des universités, Ecole Centrale de Nantes
Co-dir. de thèse :	Bertrand HUNEAU	Maître de conférences HDR, Ecole Centrale de Nantes

Remerciements

Des remerciements ont été faits le jour de la soutenance, et qui ont été un moment fort pour moi. Puisque je ne pourrai pas retranscrire la vivace émotion qui en naquit au travers d'une suite de pixels bien ordonnés, je vais donc les résumer comme suit :

Merci à tou · te · s ceux qui m'ont aidé et soutenu.

Table des matières

I	Essais de fatigue multiaxiaux en traction-torsion	3
1	État de l’art sur le phénomène de fatigue	7
1.1	Introduction	8
1.2	Histoire de la fatigue et généralités	8
1.3	Mécanismes d’endommagement en fatigue : amorçage et propagation de fissures	11
1.3.1	La propagation de fissures	12
1.3.2	L’amorçage des fissures	12
1.4	La fatigue des élastomères	16
1.4.1	Propagation de fissures	17
1.4.2	Amorçage de fissures	20
1.5	La multiaxialité dans la fatigue	21
1.6	Conclusion	23
2	Matériau et méthodes	25
2.1	Introduction	26
2.2	Matériau d’étude	26
2.3	Machine d’essais et éprouvette	27
2.3.1	Machine de traction-torsion - Instron E10000	27
2.3.2	Éprouvette de fatigue	28
2.4	Cinématique de la traction-torsion de l’éprouvette cylindrique	30
2.4.1	Équations de la cinématique de la traction-torsion d’un cylindre parfait	30
2.4.2	La multiaxialité en grandes déformations	32
2.5	Conclusion	33
3	Résultats	35
3.1	Introduction	36
3.2	Nouvelle méthode de construction d’essais de fatigue multiaxiaux	36
3.2.1	Motivation	36
3.2.2	Vers un contrôle de la multiaxialité des essais de fatigue	37
3.2.3	Extension aux essais déphasés	40
3.2.4	Applications aux conditions d’essai	40
3.3	Campagne d’essais	42
3.3.1	Durées de vie	42
3.3.2	Répartition des amorçages	44
3.3.3	Angles d’amorçage	45
3.3.4	Nature des défauts responsables des amorçages	48
3.3.5	Estimation de la taille de défauts responsables de l’amorçage	50
3.4	Conclusions	52

II	Vers un nouveau critère cinématique de fatigue multiaxiale	53
4	État de l'art des critères de fatigue existants	59
4.1	Introduction	60
4.2	Les critères en déformation et extension	60
4.2.1	L'extension maximale	60
4.2.2	Les critères à base de déformations	60
4.3	Les critères en contrainte	61
4.3.1	Contrainte de Cauchy	61
4.3.2	La contrainte effective	62
4.4	Les critères énergétiques	62
4.4.1	La densité d'énergie de déformation	62
4.4.2	La densité d'énergie de fissuration	62
4.5	Les critères par modélisation de l'endommagement	63
4.5.1	L'approche par contrainte équivalente	63
4.5.2	L'approche par couplage de mécanique de l'endommagement et de la méthode de Éléments Finis spatiotemporels non linéaire	63
4.5.3	L'approche par un modèle d'endommagement non local avec prise en compte du gradient d'endommagement	64
4.6	Les critères par approches moins conventionnelles	66
4.6.1	L'approche heuristique à la Dang Van	66
4.6.2	Contrainte d'Eshelby - mécanique configurationnelle	67
4.6.3	L'approche multiparamètre	68
4.7	Conclusion	68
5	Une analyse originale de la cinématique en grandes déformations	71
5.1	Introduction	72
5.2	Décomposition d'un tenseur symétrique réel sur une base tensorielle	72
5.2.1	Une décomposition récente pour les tenseurs symétriques à trace nulle	72
5.2.2	Extension à l'ensemble des tenseurs symétriques	73
5.3	Cas particulier de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre	73
5.3.1	Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} avec l'hypothèse d'incompressibilité	73
5.3.2	Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} sans l'hypothèse d'incompressibilité	75
5.3.3	Interprétation physique de la décomposition additive de \mathbf{h}	75
5.4	Applications	77
5.4.1	Visualisations 3D de chemins de déformation	77
5.4.2	Vers une définition de la moyenne et de l'amplitude de cycles de déformation	77
5.5	Conclusion	79
6	Définition du critère de fatigue purement cinématique	81
6.1	Motivations	82
6.2	Cavitation : vers un équivalent cinématique de la pression hydrostatique	83
6.2.1	Décomposition de \mathbf{h} en parties positive et négative	83
6.2.2	Interprétation physique de la dilatation fictive	86
6.3	Ouverture des défauts : traction uniaxiale sur le plan critique	88
6.3.1	Expression du plan critique	88
6.3.2	Traction-compression sur le plan critique	91
6.4	Vers un critère de fatigue purement cinématique	95
6.4.1	Choix des grandeurs scalaires	95

6.4.2	Première expression du critère	96
6.5	Conclusion	97
III	Applications	99
7	Application du critère de fatigue aux essais de traction-torsion de ce travail	105
7.1	Introduction	106
7.2	Étude paramétrique : valeurs de Φ particulières	106
7.2.1	Méthode	106
7.2.2	Résultats	107
7.2.3	Discussion	108
7.3	Calage de Φ sur différents types d'essai	111
7.3.1	Méthode	111
7.3.2	Résultats et discussion	112
7.4	Conclusion	113
8	Construction et analyse cinématique d'une base de données d'essais de fatigue multiaxiaux publiés	117
8.1	Motivation de l'étude	118
8.2	Méthodes	118
8.2.1	Étapes de l'analyse	119
8.2.2	Modèles EF et essais de fatigue	119
8.3	Résultats et discussion	122
8.3.1	O-ring (Mars, 2001b; Harbour <i>et al.</i> , 2008b)	122
8.3.2	Géométries standards	123
8.4	Conclusion	126
9	Application du critère de fatigue à la base de données	129
9.1	Introduction	130
9.2	Paramètres matériau et méthodes	130
9.3	Résultats et discussion	131
9.3.1	Essais de Mars (2001b) sur O-ring	131
9.3.2	Essais d'Ayoub <i>et al.</i> (2012) sur AE2	133
9.3.3	Essais d'Ayoub <i>et al.</i> (2012) sur AE42	133
9.3.4	Valeurs de Φ et type de chargement	136
9.4	Conclusion	137
	Conclusions et perspectives	139
	Annexes	145
A	Résolution des équations de la traction-torsion en contraintes	145
A.1	Mise en équations	145
A.2	Cas d'un modèle de Mooney-Rivlin	147
A.3	Cas d'un modèle néo-Hookéen	148
B	Modèle Éléments Finis	149
B.1	Chaînage entre Abaqus, Python et UVARM	149
B.2	Calculs aux lieux des sites d'amorçage	150

C	Tableaux de résultats bruts	153
C.1	Durées de vie en fatigue	153
C.2	Caractéristiques des zones d’amorçage	154
D	Calcul des α_i après rotation de la base d’expression du problème	157
D.1	Énoncé et démonstration	157
D.2	Exemple d’application à la traction-torsion d’un cylindre parfait	158
E	Génération d’une base orthonormée aléatoire à partir d’un vecteur	161
E.1	Calcul des vecteurs de la base	161
E.2	Invariance de α_1 par rotation autour du premier vecteur de la base	162
F	Quelques calculs autour des α_i	165
F.1	Relation entre α_1 et la première extension principale λ_1	165
F.2	Applicabilité du calcul de l’intensité de la traction uniaxiale sur le plan critique à \mathbf{h}^+	166
	Bibliographie	173

Introduction générale

$$h = \frac{1}{3}K_1I + K_2\eta$$

Measurement amplitude

Première partie

Essais de fatigue multiaxiaux en
traction-torsion

Résumé de la Partie 1

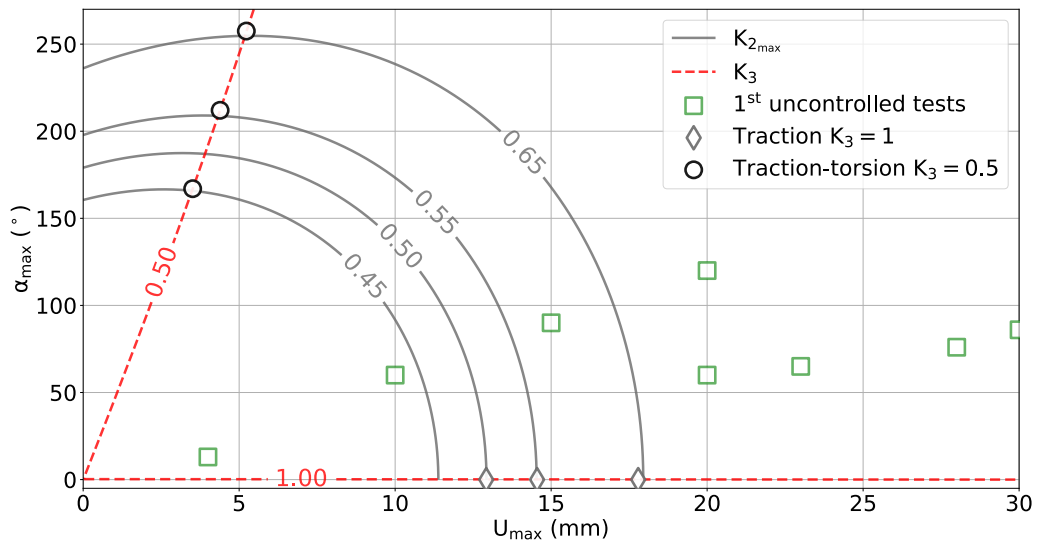
Dans le but de proposer un critère de fatigue multiaxiale, il a été décidé d'appuyer les développements théoriques sur des résultats d'essais de fatigue de traction-torsion. Bien que déjà présents dans la littérature, il a semblé judicieux de proposer des essais propres à cette étude, qui permettraient d'obtenir une expertise sur le phénomène en lui-même, et de se constituer une base de données maîtrisée et spécialement développée pour ces travaux. Dans ce qui suit, nous présentons les trois chapitres qui composent cette première partie.

Dans le Chapitre 1, le phénomène de fatigue est introduit au travers de l'histoire de son étude depuis le début du XIXe siècle. Après une explication sur la distinction entre les phases d'amorçage et de propagation, et leur traitement spécifique, les concepts fondateurs tels que la courbe de Wöhler ou le diagramme de Haigh sont introduits. Cela pose les bases de l'étude de la fatigue des matériaux élastomères, qui a débuté dans les années 1940. Bien que l'étude de leurs propriétés en fatigue s'appuie sur quelques outils développés pour les matériaux métalliques, ces derniers ne peuvent s'appliquer sans adapter au préalable les théories aux spécificités de ces matériaux. En effet, bien qu'encore assez mal connus, les mécanismes d'endommagement gravitent autour de phénomènes clés comme la cavitation ou la décohésion entre inclusion et matrice. De plus, ces matériaux étant très extensibles (ils peuvent être déformés de plusieurs centaines de %), il est nécessaire de placer les études mécaniques dans le cadre des grandes déformations, ce qui implique deux changements majeurs : une rotation des directions principales (de contrainte ou déformation) lors d'un cycle de chargement multiaxial, et la décorrélation de cette rotation avec celle des plans matériels, notamment lorsque les signaux sont déphasés.

Le Chapitre 2 présente les composantes de la partie expérimentale de la thèse. Dans un premier temps, le matériau d'étude (un SBR chargé au noir de carbone) est présenté au travers de quelques-unes de ses propriétés physico-chimiques, et d'essais quasi-statiques de caractérisation mécanique. La machine de traction-torsion est ensuite présentée avec ses caractéristiques et les étapes de mise en place d'une éprouvette, dont la géométrie est décrite juste après. La partie utile cylindrique de l'éprouvette se comportant comme un cylindre, les équations de base de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre parfait sont développées, jusqu'à l'introduction du tenseur de Hencky \mathbf{h} et de certains de ses invariants, qui sont utilisés dans le chapitre suivant.

Enfin, le Chapitre 3 présente dans un premier temps une nouvelle méthode de construction d'essais de fatigue multiaxiaux en-phase, qui sont définis par un chargement composé d'un déplacement vertical d'amplitude U_{\max} et un angle de torsion d'amplitude α_{\max} . Cette méthode est basée sur la décomposition de la déformation en une intensité ($K_{2_{\max}}$) et un mode (K_3). Nous montrons qu'elle n'est valide que pour des essais dont

les chargements sont en-phase : en effet, dès qu'un déphasage est présent, il faut changer de stratégie. Cette méthode, dont la figure ci-dessous résume le principe, est ensuite appliquée pour construire une campagne d'essais de traction-torsion en-phase, dont les résultats permettent de proposer également des conditions de chargement déphasées. Les résultats de tous ces essais sont d'abord analysés succinctement en termes de durées de vie, puis une étude fractographique plus fine est réalisée à l'aide d'un microscope numérique : la répartition géométrique des amorçages, la nature supposée des défauts étant à leur origine et leur taille sont estimées, et les angles d'amorçage sont mesurés. Toutes ces observations permettent de conclure qu'il n'y a pas de changement de mécanisme d'amorçage selon le type de chargement (traction, traction-torsion), le déphasage imposé (chargement en-phase ou déphasé) et selon l'intensité du chargement.



Présentation d'un des résultats majeurs de cette partie : représentation des conditions de chargement des essais de fatigue de traction-torsion en-phase dans l'espace des conditions de chargement (U_{\max} , α_{\max}). Les premiers essais à mode de déformation non contrôlé sont également représentés (carrés verts).

Chapitre 1

État de l'art sur le phénomène de fatigue

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Matériau d'étude	26
2.3	Machine d'essais et éprouvette	27
2.3.1	Machine de traction-torsion - Instron E10000	27
2.3.2	Éprouvette de fatigue	28
2.4	Cinématique de la traction-torsion de l'éprouvette cylindrique	30
2.4.1	Équations de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre parfait	30
2.4.2	La multiaxialité en grandes déformations	32
2.5	Conclusion	33

1.1 Introduction

La fatigue mécanique est un phénomène d'endommagement progressif pouvant mener à la rupture de matériaux, lorsque ceux-ci sont soumis à des chargements répétés dont l'amplitude est inférieure à leur résistance quasi-statique. Plusieurs types de fatigue existent, définis par des chargements de différentes natures : mécanique (déplacement, force), thermique (température), etc., et d'autres phénomènes peuvent venir s'y superposer (fatigue-corrosion, fatigue-fluage, ...). **Dans le cadre de cette thèse, seule la fatigue mécanique est abordée**, c'est-à-dire que tous les effets autres que mécaniques (chimiques, tribologiques, thermiques, ..) ne sont pas pris en compte. Ainsi dans ce qui suit, l'emploi du terme « fatigue » fait toujours référence à la fatigue mécanique, sauf indication contraire.

Nous commençons par introduire en Section 1.2 le concept de fatigue qui a débuté avec l'étude des matériaux métalliques depuis presque deux siècles. Dans ce domaine, beaucoup d'avancées ont été réalisées, tant dans la réalisation d'essais de fatigue que dans les théories modélisant et prédisant le phénomène. Les principaux outils d'étude des deux grandes phases de la fatigue, l'amorçage et la propagation, sont ensuite présentés (Section 1.3). La Section 1.4 introduit le cadre des grandes déformations, spécifique aux matériaux très déformables comme les élastomères, et propose de montrer comment il se distingue de ce qui a été proposé pour les matériaux métalliques. Enfin, la notion de multiaxialité est introduite puis définie de manière claire, et son impact sur le phénomène de fatigue est discuté dans la Section 1.5. Notons que ce chapitre s'appuie notamment sur des principes développés dans Bathias et Bailon (1980); Hénaff et Morel (2005); Bathias et Pineau (2008, 2009).

1.2 Histoire de la fatigue et généralités

Le phénomène de fatigue est connu et étudié depuis quasiment deux siècles. On doit les premiers essais de fatigue à Wilhelm Albert, en 1829, suivi 10 ans plus tard par Jean-Victor Poncelet qui est le premier à avoir employé le terme « fatigue » (qui est aussi le terme anglo-saxon). Cependant, les premiers travaux publiés ayant contribué à un traitement standardisé de la fatigue sont attribués à August Wöhler¹ qui donne son nom à la célèbre courbe de Wöhler (ou courbe S-N pour *Stress - Number of cycles* pour les anglo-saxons), qui est introduite dans ce qui suit. Il est important de noter que la fatigue est longtemps restée un phénomène essentiellement étudié pour les matériaux métalliques. Ainsi, un état de l'art exhaustif, réalisé au travers du prisme de l'historique de l'étude de ce phénomène est proposé par Schijve (2003); il couvre uniquement la fatigue des matériaux métalliques jusqu'au début du XXIe siècle.

Il est coutume d'introduire la notion de fatigue et d'essais de fatigue par le biais des travaux d'A. Wöhler, dont il a été question plus haut. Au milieu du XIXe siècle, le gouvernement prussien demande à A. Wöhler d'étudier le comportement mécanique des essieux utilisés dans le ferroviaire, pour prévenir des ruptures liées à la fatigue. En effet, en 1842 lors d'un voyage en train Meudon - Belleville, un des essieux de la locomotive de tête rompt brutalement, entraînant la collision des wagons arrières. Le bilan de cette catastrophe, reconnue comme la première catastrophe ferroviaire mondiale serait de plus de 50 morts. Aidé par les travaux de Rankine et Fairbairn, Wöhler met en place le premier protocole d'essai de fatigue connu à ce jour (Wöhler, 1870), dont nous résumons le principe sur la Figure 1.1 : une éprouvette en métal (*sample*) de partie utile cylindrique est mise en

1. Plus d'informations sur A. Wöhler : https://web.archive.org/web/20050115033753/http://www.tu-berlin.de/presse/125jahre/festschrift/woehler_e.htm

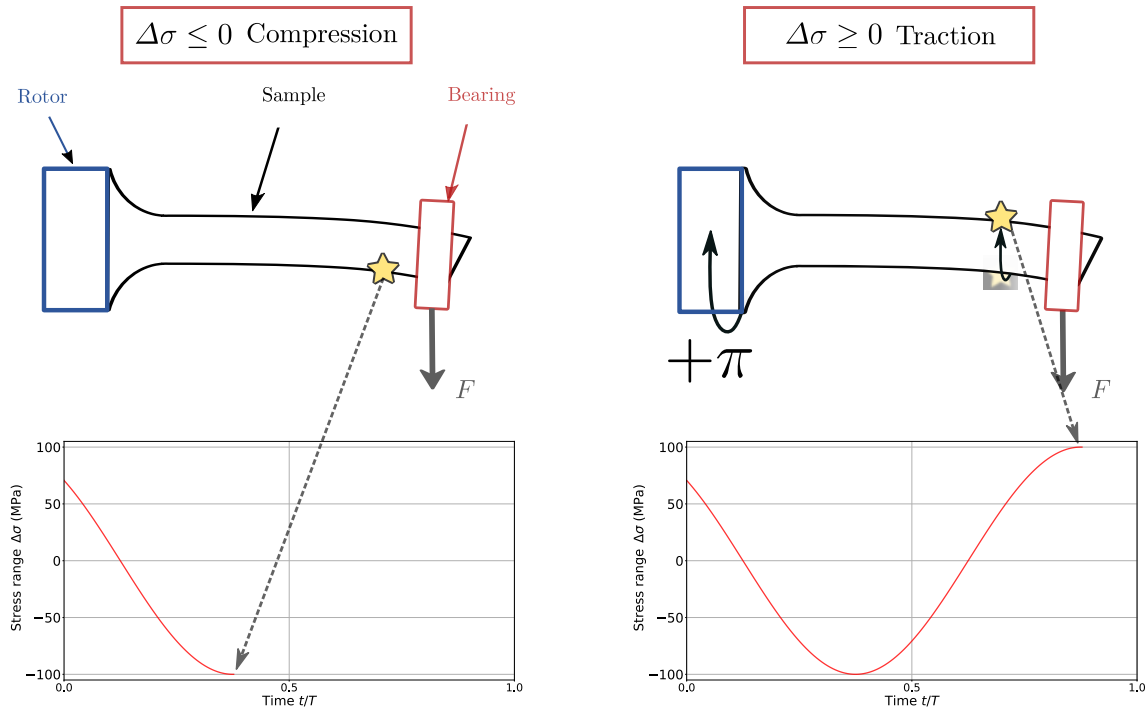


FIGURE 1.1 – Principe des essais de fatigue standardisés développés par A. Wöhler au XIXe siècle. Les déformations sont volontairement exagérées pour visualiser les phénomènes de traction/compression en surface de l'éprouvette.

rotation par un rotor (*rotor*) selon son axe de révolution. L'extrémité opposée au rotor est enfilée dans un roulement (*bearing*), sur lequel on vient suspendre une masse, résultant en un poids \vec{F} transmis à l'éprouvette. Cette dernière est alors soumise à une sollicitation de flexion. Du fait du mouvement de rotation, chaque point matériel en surface de l'éprouvette passe de manière périodique par un maximum de contrainte de traction σ_{\max} , où il est donc en traction, puis par un minimum σ_{\min} où il est en compression. Wöhler observe alors que la durée de vie des éprouvettes ainsi sollicitées ne dépend non pas de la contrainte maximale en surface σ_{\max} , mais de l'écart maximal de contrainte $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ subi par un point matériel de la surface au cours d'un cycle.

En répétant ces essais sur de nombreuses éprouvettes pour plusieurs niveaux de chargement $\Delta\sigma$, il obtient différents nombres de cycles à rupture, qui peuvent être reportés dans un graphe ($N_f - \Delta\sigma$), aussi appelé courbe de Wöhler ou courbe S-N. La Figure 1.2 présente un cas fictif, et permet d'introduire deux phénomènes connus en fatigue :

- Une forte dispersion : à un niveau de chargement donné, les résultats des essais de fatigue peuvent être très dispersés, et ce de plusieurs ordres de grandeur. Ce phénomène est dû à des effets couplés de variabilité de microstructure, de chargement, de variation de température au cours de l'essai, etc.. Plusieurs lois peuvent modéliser la distribution des durées de vie pour un niveau de chargement donné, comme par exemple celle de Weibull (1951) ; la plus largement utilisée reste la loi normale (Schijve, 1993, 2005). Il est classique de représenter uniquement le recalage des données pour une probabilité de survie à 50%, comme modélisé par la courbe en pointillés sur la Figure 1.2.
- Une asymptote aux bas niveaux de chargement : il a été remarqué que lorsqu'une pièce est soumise à un niveau de chargement $\Delta\sigma$ faible, elle peut résister sans rompre durant un très grand nombre de cycles (plusieurs millions ou milliards de cycles). La durée de vie est alors considérée infinie. Le niveau de chargement à

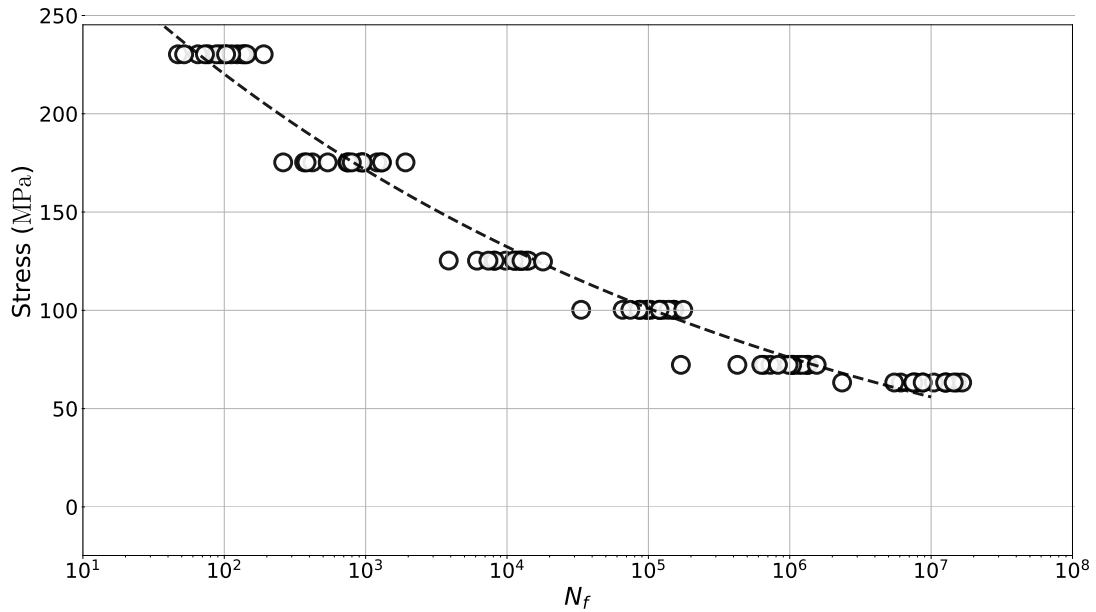


FIGURE 1.2 – Exemple fictif de courbe de Wöhler - chaque cercle correspond à la rupture d'une éprouvette, après N_f cycles sous une sollicitation de $\Delta\sigma$. La courbe en pointillés représente une régression linéaire (en log-log) de type Basquin.

partir duquel les pièces ne rompent pas en fatigue avant N_D cycles est appelé la limite de fatigue à N_D cycles (Hénaff et Morel, 2005).

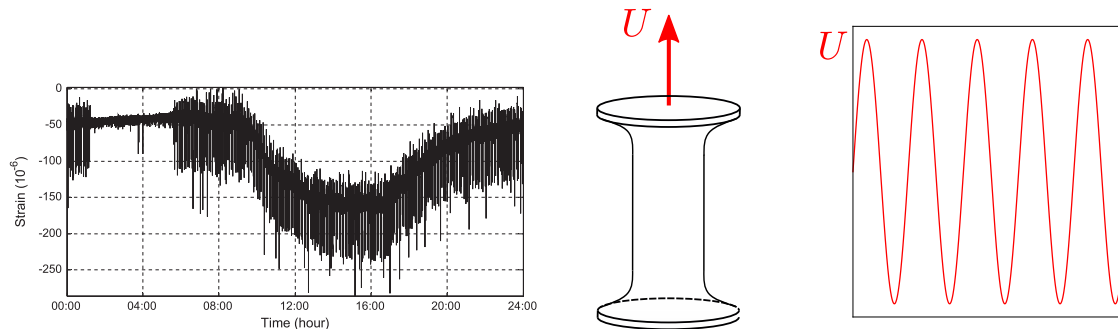
L'approche de Wöhler, qui a été très largement reprise et revisitée depuis, peut être formulée ainsi : relier, dans des conditions de laboratoire contrôlées, le nombre de cycles à rupture N_f d'une éprouvette de géométrie optimisée à une grandeur mécanique macroscopique mesurable facilement e.g. une force ou un déplacement, et que l'on peut traduire en une grandeur locale et intrinsèque de type contrainte, déformation ou énergie. Il suffit ensuite, pour n'importe quelle structure dont la courbe de Wöhler du matériau a été déterminée, de définir la notion de cycle propre à l'usage de la pièce, et de calculer la grandeur d'intérêt. Il existe un grand nombre de définitions d'un cycle selon les applications :

- **En aéronautique**, un cycle peut être égal à un couple atterrissage/décollage pour le mécanisme d'usure d'une aube de turbine, un vol complet pour la carlingue (qui subit une montée en pression interne suivi d'une chute de pression lors de la descente), un mouvement de battements des ailes pour la tenue de la jointure entre le fuselage et les ailes, ...
- **En automobile**, un cycle peut être un tour complet de roue pour le pneu, un enchaînement creux/bosse sur la route pour la partie antivibratoire du moteur, ...
- **En biomécanique**, un cycle du cœur est un battement, un cycle de la rotule peut être définie comme un pas, ...

Par exemple en connaissant la masse d'une voiture, on peut calculer un tenseur de contraintes subi en un point de la surface d'un pneu au cours de la conduite, et estimer le nombre de cycles (et donc le nombre de kilomètres) restant avant la rupture potentielle du pneu.

Il est important de noter que pour des processus physiques aux temps caractéristiques pouvant aller jusqu'à plusieurs années, comme c'est le cas de la fatigue, tous les paramètres externes peuvent varier drastiquement : un pneu de voiture est soumis, au cours de son service, à des températures qui fluctuent selon la période de l'année et la localisation géo-

graphique de fonctionnement, de la friction générée par le contact avec la route, du poids de la voiture, etc. Il est clairement impossible de reproduire toutes ces conditions en laboratoire simultanément. En fait, et pour se placer dans un contexte purement mécanique, ne serait-ce que **vouloir reproduire à strictement l'identique les chargements mécaniques réels que subit une pièce en service est inenvisageable**, car leur complexité est bien souvent trop importante comme le montre la Figure 1.3a. Dans un contexte d'essais en laboratoire, on préférera généralement travailler avec des signaux bien plus simples, comme celui présenté sur la Figure 1.3b. Néanmoins, pour quand même s'assurer que les



(a) Mesure de la déformation longitudinale, par une rosette, d'un pont en acier en conditions météorologiques normales. Le signal n'est pas facilement descriptible à l'aide des caractéristiques usuelles (amplitude, fréquence, ...). Issu de (Ye *et al.*, 2012).

(b) Chargement cyclique simple : déplacement vertical sinusoïdal de caractéristiques (amplitude, fréquence, ...) constantes au cours de l'essai.

FIGURE 1.3 – Exemples de chargements : un signal réel mesuré sur un pont en service et un cas de laboratoire simple.

essais en laboratoire représentent bien le service réel de la pièce, plusieurs techniques dites de « comptage de cycles » ont été développées, comme par exemple le Rainflow Counting (Matsuishi et Endo, 1968; Rychlik, 1987; Anes *et al.*, 2014), et qui permettent la transformation d'un signal complexe (amplitude, fréquence variables comme sur la Figure 1.3a) en blocs de signaux élémentaires (chacun à amplitude et fréquence constantes, comme sur la Figure 1.3b). À ces blocs peuvent ensuite être appliquées des règles de cumul d'endommagement, comme par exemple la règle de Palmgren-Miner (Palmgren, 1924; Miner, 1945; Todinov, 2001; Blason *et al.*, 2016; Suhir *et al.*, 2017). Bien qu'étant une part importante des études de fatigue, les outils de comptage de cycles et de cumul d'endommagement ne sont pas le sujet de ce manuscrit, et ils ne seront pas développés plus en détail.

1.3 Mécanismes d'endommagement en fatigue : amorçage et propagation de fissures

L'endommagement évoqué précédemment n'est pas une notion facile à appréhender. En effet, entre le moment où le matériau est « sain », non sollicité, et le moment où les premières fissures sont visibles à l'œil nu, il y a nécessairement eu des événements successifs au sein de la matière. En fait, la notion d'endommagement est complexe à s'imaginer dans son entièreté car elle se manifeste d'abord aux plus petites échelles de la matière, sur des temps longs. Bien que l'on ait pu s'imaginer ce qui se passait au sein de la matière lors du processus d'endommagement en fatigue, pendant longtemps seules les fissures en surface étaient observables lors des essais de fatigue. L'avènement des techniques d'imagerie a permis d'observer au sein du matériau des changements irréversibles au cours d'essai arrêtés, et d'analyser plus finement les faciès post-mortem. Deux phases ont été

distinguées : la phase d'amorçage des fissures, qui débute avec le matériau intact (tout juste « produit »), et la phase de propagation qui se termine avec la fin de vie de la pièce. La détermination de la transition entre ces deux phases reste un véritable enjeu depuis des décennies.

Deux approches sont usuellement distinguées : la première est l'approche en endurance, où l'on étudie la vie complète en fatigue d'une pièce, de sa « sortie d'usine » jusqu'à un critère de fin de vie (par exemple sa rupture complète). Dans cette approche, on considère que la phase d'amorçage constitue la majeure partie de la durée de vie. La deuxième approche est dite en propagation, et elle porte sur des matériaux comportant au moins une fissure, ayant donc déjà dépassé la phase d'amorçage. Dans ce qui suit, nous commençons par introduire l'approche en propagation avant de détailler l'approche en amorçage, qui sera celle utilisée dans ce travail.

1.3.1 La propagation de fissures

L'approche en fissuration, ou tolérance au dommage, est la plus simple à envisager. Partant d'un matériau fissuré, dont on connaît la taille de fissure initiale a_0 , on veut prédire combien de cycles il reste à la pièce avant de rompre. Cette approche est par exemple utilisée en aéronautique, où la longueur des fissures internes dans certaines zones fortement sollicitées à un instant t va être déterminée par des contrôles non destructifs de type ultrasons ou courant de Foucault. La connaissance de la longueur de fissure combinée à des modèles prédictifs va permettre de savoir combien de cycles (et donc combien de vols) l'avion peut encore effectuer de manière sécurisée. S'appuyant sur les travaux d'Irwin (1957), qui a notamment introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes K pour quantifier l'état de contraintes au voisinage d'une fissure, Paris (1961) a d'abord émis l'hypothèse que la vitesse d'avancée d'une fissure est directement reliée à cette grandeur K . En collaboration avec Erdogan, ils ont par la suite proposé la loi de Paris-Erdogan (équation (1.1)) qui relie la vitesse de propagation d'une fissure au sein d'un matériau à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK (Paris et Erdogan, 1963) :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n, \quad (1.1)$$

où a est la taille de la fissure, C et n des paramètres matériaux, et N le nombre de cycles. Un exemple fictif de courbe de propagation de fissure est présenté Figure 1.4, où l'on peut distinguer trois régimes : le régime de non propagation, où la fissure ne peut pas avancer tant que ΔK n'a pas atteint une valeur seuil propre au matériau ΔK_{th} . Une fois cette valeur atteinte, le deuxième stade est atteint et correspond au stade de propagation lente où la loi de Paris-Erdogan s'applique. Dans ce régime, il est facile de calculer des vitesses de propagation de fissure et ainsi d'estimer des durées de vie restantes. Lorsque K atteint l'autre valeur critique qu'est la ténacité K_{IC} , la fissure se propage brutalement.

1.3.2 L'amorçage des fissures

L'amorçage est la phase la plus complexe à étudier, car les prémices des phénomènes se produisent bien en dessous de l'échelle macroscopique. En considérant que la plus grande partie de la durée de vie consiste en de l'amorçage de microfissures sur des défauts, on va s'intéresser au nombre de cycles N_f auquel peut survivre une pièce lorsqu'elle est soumise à une sollicitation mécanique. Cette approche dite en durée de vie, consiste dans un premier temps à définir des zones de fonctionnement pour une structure donnée en menant une campagne d'essais de fatigue sur des éprouvettes en conditions contrôlées de laboratoire, dont les étapes sont données ci-après :

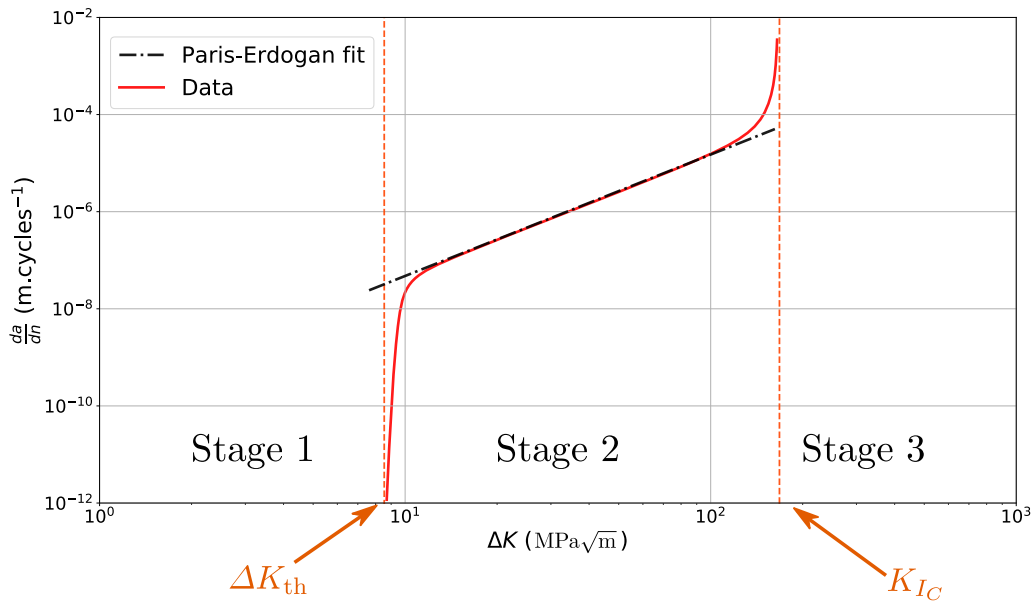


FIGURE 1.4 – Courbe fictive de Paris-Erdogan - représente la vitesse de propagation d'une fissure (en m.cycles^{-1}) en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK . Trois régimes se distinguent : l'absence de propagation (*Stage 1*), le régime de propagation lente de Paris-Erdogan (*Stage 2*) linéaire en log-log, et la propagation catastrophique (*Stage 3*).

1. Différents niveaux de chargement sont choisis et appliqués à des éprouvettes, et mènent à différentes durées de vie.
2. On calcule, pour chaque éprouvette, les quantités d'intérêt. Ainsi, chaque essai est caractérisé par un ensemble de paramètres mécaniques (P_1, P_2, \dots, P_n) et une durée de vie N_f .
3. On reporte les caractéristiques de chaque essai dans un espace adapté, et dans lequel on peut modéliser le comportement en fatigue du matériau par une équation.

La nature des quantités mécanique d'intérêt (P_1, P_2, \dots, P_n) est diverse, et est en partie liée au choix de l'espace de représentation du comportement du matériau. On propose ci-dessous trois exemples d'espaces de représentation, dans lesquels on peut modéliser le comportement en fatigue du matériau à la suite d'une campagne d'essais :

- **Espace (N_f, σ_a) (nombre de cycles à rupture, amplitude chargement).** L'approche de Wöhler présentée précédemment est le premier exemple historique ayant donné lieu à une représentation graphique du lien entre durée de vie et niveau de chargement. La dispersion des résultats ayant été évoquée plus haut, il est nécessaire de préciser que la plupart des courbes S-N présentes dans la littérature sont des courbes dites à 50% de probabilité de survie, c'est-à-dire que ce sont des courbes moyennes qui informent qu'à un niveau de chargement donné, en moyenne un échantillon sur deux va rompre avant le nombre de cycles indiqué par la courbe, et le reste va rompre après. Connaissant cette information, et sous réserve d'avoir un bon estimateur de l'écart-type de la loi de probabilité d'intérêt, on peut alors tracer différents faisceaux S-N, avec différentes probabilités de rupture. La Figure 1.5 illustre cette modélisation avec trois faisceaux : en soumettant un échantillon à un chargement de 70 MPa (droite noire), il y a 95% de chances qu'il résiste au moins 400 cycles, 50% de chances qu'il résiste 6000

cycles et seulement 5% de chances qu'il résiste à 100000 cycles.

En modélisant la courbe par une loi de Basquin (Basquin, 1910) (par exemple $\log(N_f) = A - B \log(\sigma)$, où A et B sont des paramètres matériaux), on peut interpoler les données expérimentales et ainsi avoir une estimation des durées de vie des pièces sous un large éventail de chargement. Un matériau peut avoir plusieurs courbes S-N selon la nature du chargement imposé (traction, torsion, flexion, etc.), et il faut alors une campagne d'essais de fatigue en conditions contrôlées pour chaque type de chargement.

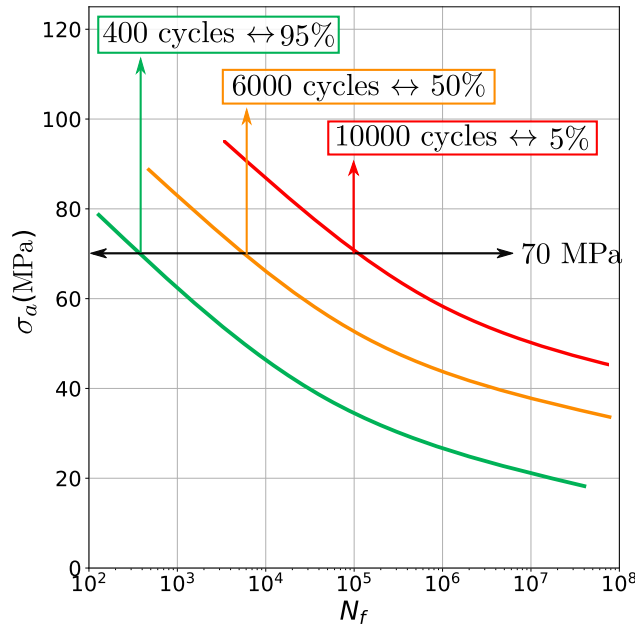
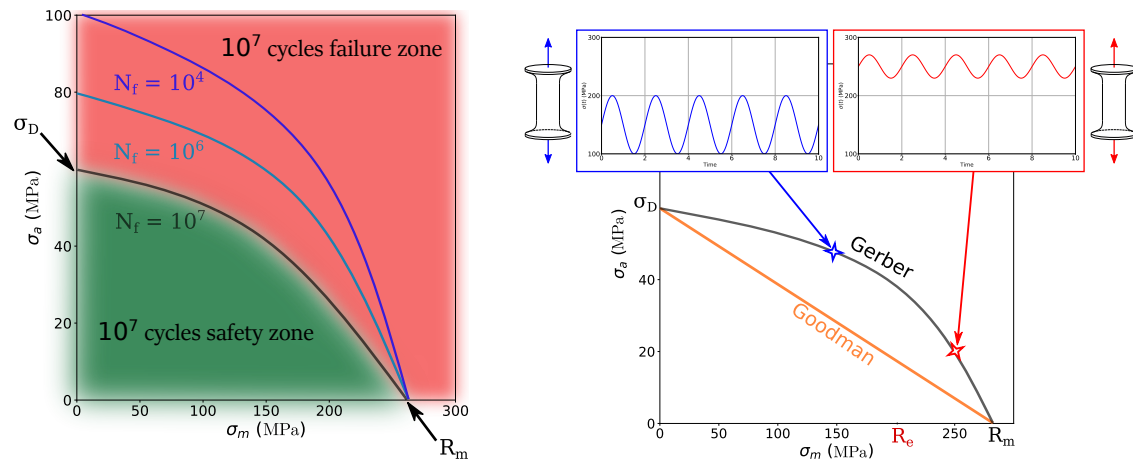


FIGURE 1.5 – Courbes de Wöhler à différents niveaux de probabilité de survie. Une structure soumise à un niveau de contrainte 70 MPa peut atteindre théoriquement toutes les durées de vie existantes, avec une probabilité donnée. Sur cet exemple on peut lire : la structure dépassera les 400 cycles avec une probabilité de 95%, mais ne dépassera les 100000 cycles qu'avec 5% de probabilité.

- **Espace (σ_m, σ_a) (chargement moyen, amplitude de chargement)**. Dans cet espace, dont la représentation est appelée diagramme de Haigh (Figure 1.6), on regarde l'influence de la moyenne du chargement σ_a sur l'amplitude σ_m , pour un nombre de cycles donné. Cette représentation permet de prendre en compte σ_m , qui est une grandeur absente de l'espace de Wöhler. Un niveau de chargement est donc représenté dans cet espace par un point, dont la position par rapport à un faisceau limite détermine la rupture ou non de la pièce pour un nombre de cycles donné. Notons que ce type de diagramme requiert beaucoup d'essais de fatigue à différentes durées de vie et niveaux de chargement visés. Il existe plusieurs modélisations des faisceaux dans cet espace dont les deux qui décrivent le mieux les résultats sont la droite de Goodman, qui relie la résistance mécanique R_m à la limite de fatigue à N_D cycles σ_D , et la parabole de Gerber qui fournit une relation parabolique entre R_m et σ_D (Hénaff et Morel, 2005).
- **Espace (p_H, τ) (pression hydrostatique, cisaillement)**. Cette représentation est similaire au diagramme de Haigh, dans la mesure où les paramètres des axes sont deux grandeurs mécaniques et le diagramme définit une zone de fonctionnement sécurisé et une zone de rupture probable (Dang Van, 1971). Cependant, à la différence du diagramme de Haigh, une sollicitation n'est pas représentée par un point mais par un trajet de chargement, c'est-à-dire un ensemble de points



(a) Le faisceau noir représente l'ensemble des couples (σ_a, σ_m) imposés aux éprouvettes ayant rompu à 10^7 cycles. Cette courbe peut être réalisée pour plusieurs niveaux de durée de vie (e.g. 10^6 et 10^4 pour les courbes bleues). L'amplitude $\sigma_m = 0$ MPa correspond à un essai quasi-statique, et R_m est l'extrémité du faisceau.

(b) Modèles de faisceaux dans le plan de Haigh. La limite de fatigue à N_D cycles σ_D est reliée à R_m via les modèles de Gerber et de Goodman. Les étoiles bleue et rouge représentent des essais ayant la même durée de vie, mais des conditions de chargement différentes. R_e est la limite d'élasticité du matériau.

FIGURE 1.6 – Présentation du diagramme de Haigh.

représentant les états mécaniques successifs par lesquels passe un point matériel au cours d'une sollicitation en fatigue. On propose un exemple sur la Figure 1.7 : une éprouvette est sollicitée en traction uniaxiale avec un déplacement imposé sinusoïdal. Sans rentrer dans les aspects mécaniques, les courbes verte et rouge représentent l'évolution temporelle, au cours d'un cycle de chargement, de la cis-sion τ sur un certain plan matériel de normale \vec{n} en fonction de la pression hydrostatique p_H , en deux points matériels donnés. En comparant la position de ces courbes par rapport à des seuils (droites noir et bleu sur le graphe), il est possible de déterminer si le point matériel considéré peut tenir un nombre N_f de cycles propre à la position de cette droite. Une campagne d'essais de fatigue en conditions contrôlées permet de définir les équations des seuils.

Une fois les différentes zones de sécurité construites et les équations des modèles obtenues, il est possible de les utiliser pour prédire le comportement en fatigue de structures en service. Nous illustrons cette démarche sur la Figure 1.8, en utilisant la méthode des Éléments Finis. Les étapes sont décrites ci-dessous :

1. La structure est modélisée dans un code Éléments Finis, et un chargement est appliqué. Prenons l'exemple d'un chargement simple sinusoïdal, qui peut être le résultat d'une méthode de comptage de cycles, par exemple ;
2. On obtient en sortie les évolutions temporelles, en chaque nœud du maillage, des quantités mécaniques d'intérêt :
 - L'évolution de $\tau(t)$ en fonction de celle de $p_H(t)$ est reportée dans l'espace de Dang Van, et la position de la courbe est comparée aux seuils caractérisés au préalable. Dans ce cas fictif, le nœud étoile de la structure a une durée de vie estimée entre 10^6 et 10^7 cycles.
 - L'amplitude d'une composante de la contrainte (par exemple σ_a , la composante normale des contraintes de Cauchy) est calculée pour tout le cycle de

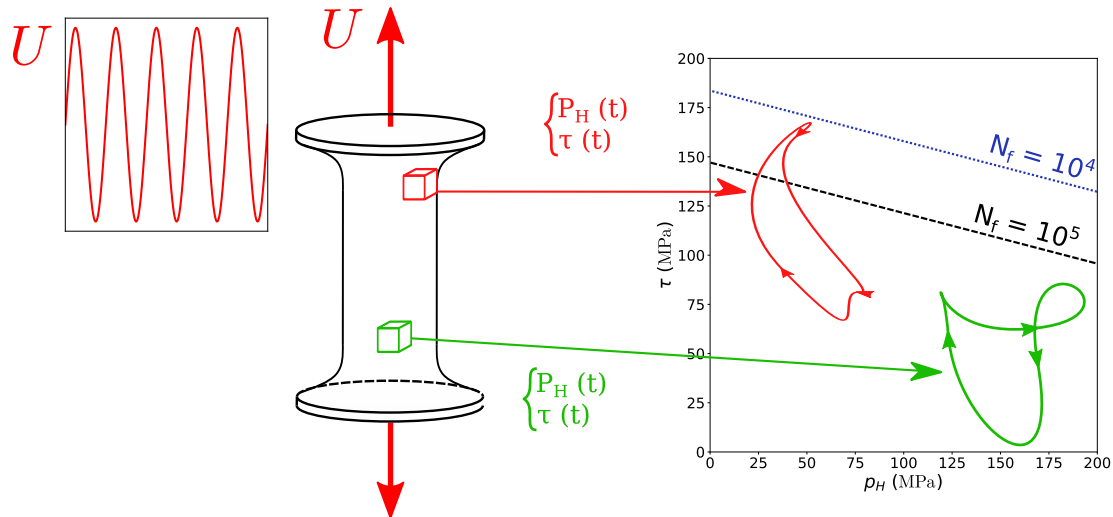


FIGURE 1.7 – Schéma de principe de l'espace de Dang Van. Dans cet espace sont représentés des trajets de chargement subis par un point matériel (à l'échelle de la mécanique des milieux continus). Sur cet exemple, on peut voir que le point matériel vert est toujours sollicité sous les courbes critiques et n'est donc pas considéré problématique. À l'inverse, une partie du chargement du point rouge est dans la zone critique des 10^5 cycles, mais est toujours en dessous du seuil des 10^4 cycles.

chargement, et placée sur la courbe S-N modélisée au préalable. Dans ce cas fictif, le nœud étoile de la structure a une durée de vie à 50% estimée à 10^6 cycles.

- L'amplitude et la moyenne d'une composante de la contrainte (par exemple la composante normale des contraintes de Cauchy) sont calculées pour tout le cycle de chargement, et le couple (σ_m, σ_a) est placé dans l'espace de Haigh, où sa position est comparée aux faisceaux à iso-durée de vie modélisés au préalable. Dans ce cas fictif, le nœud étoile de la Figure 1.8 a une durée de vie estimée inférieure à 10^7 cycles.

C'est sur la base de ces deux approches (amorçage et propagation) que s'est également développée l'étude de la fatigue des élastomères, comme nous allons le voir dans la section qui suit.

1.4 La fatigue des élastomères

La plupart des principes évoqués précédemment s'appliquent, dans les grandes lignes, aux élastomères. En effet, on va voir que, bien que la recherche dans le domaine de la fatigue des matériaux élastomères est moins aboutie que pour les métaux, elle s'en est fortement inspirée. Néanmoins, les spécificités liées aux grandes déformations nécessitent d'aborder le problème de manière différente. La fatigue des élastomères est un sujet de recherche qui a émergé vers la fin de la première moitié du XXe siècle, avec notamment la première étude complète des propriétés en fatigue sous chargements simples d'un caoutchouc naturel par Cadwell *et al.* (1940). Dans ces travaux, plusieurs éprouvettes avec différentes géométries ont été sollicitées en traction uniaxiale pour proposer un diagramme de type Haigh du matériau. Des essais de fatigue en cisaillement ont ensuite été réalisés, et une conclusion majeure est tirée de cette campagne d'essais : les résultats de fatigue en cisaillement peuvent être directement reliés aux résultats en traction uniaxiale. S'enchaînent alors des développements majeurs dans le domaine de la fatigue des élastomères, basés sur les avan-

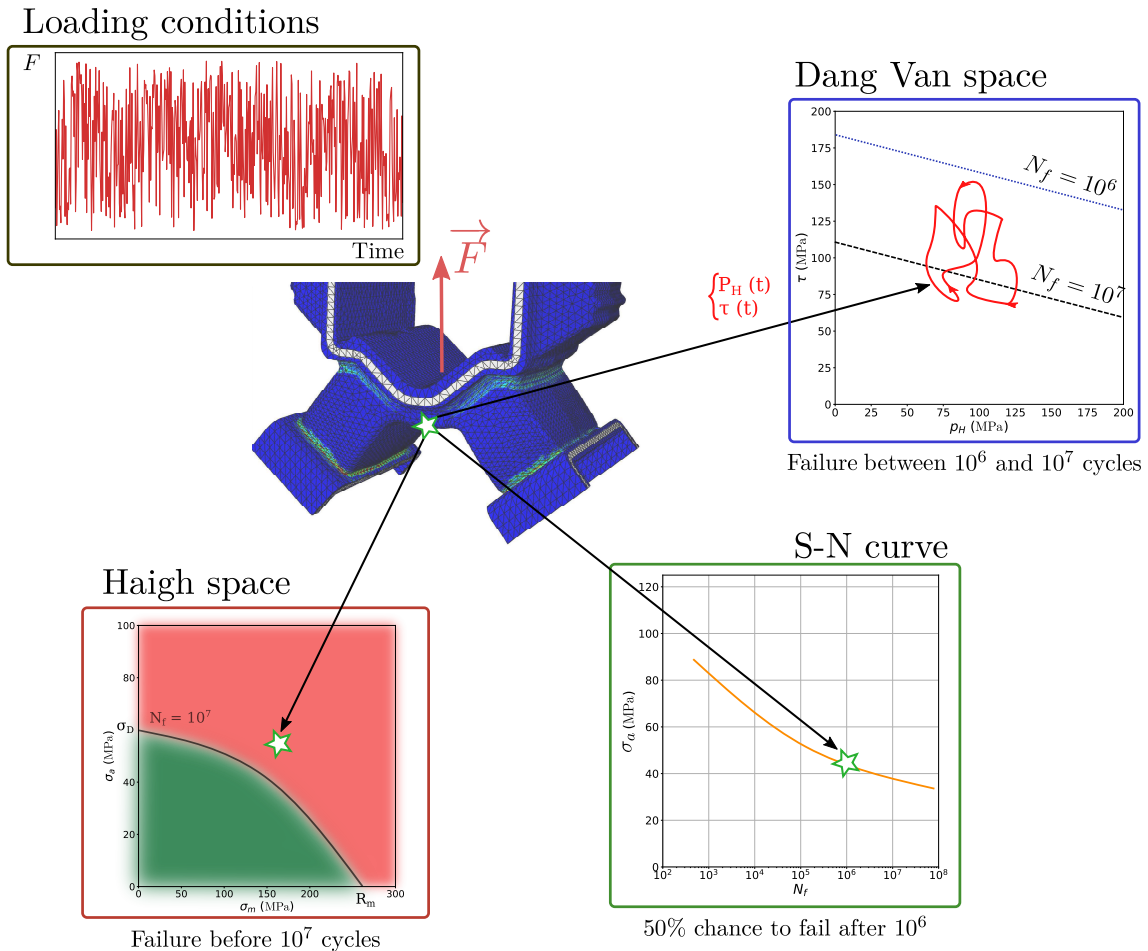


FIGURE 1.8 – Exemple fictif d’application des diagrammes de Dang Van, Haigh et S-N à une structure en service. La réponse mécanique d’un nœud du maillage (étoile) peut être placée dans ces espaces, et ainsi permettre de déterminer sa durée de vie. L’image Éléments Finis est extraite de Lectez (2014).

cées théoriques notables proposées dans le cadre des grandes déformations (*Finite strain*). Rivlin (1949) puis Rivlin et Saunders (1951) rationalisent les équations de la traction-torsion combinées, ainsi que de la flexion en grandes déformations. Quelques années plus tard, Rivlin et Thomas (1953) proposent un critère de déchirement basé sur une énergie qui n’est autre qu’un taux de restitution d’énergie. Il est utilisé par Thomas (1958); Lake et Thomas (1967) pour étudier la propagation de fissures dans une membrane en caoutchouc sous sollicitations répétées : cela marque le début de l’étude de la propagation de fissures de fatigue dans les matériaux élastomères. Concernant la phase d’amorçage des fissures, on peut considérer que l’étude des mécanismes mis en jeu est plus récente, et due à l’avènement des techniques d’imagerie. Les phases de propagation et d’amorçage sont présentées dans ce qui suit ; notons que la modélisation mathématique des phénomènes physiques mis en jeu pendant l’amorçage ne sera pas traitée ici, mais dans le Chapitre 4.

1.4.1 Propagation de fissures

N.B. : cette partie s’appuie principalement sur l’excellent historique proposé par Thomas (1994).

Dans les années 1940, la communauté des chercheurs travaillant sur les élastomères

s'est attelée à essayer de modéliser la croissance des fissures dans ce type de matériaux, mais les résultats des expériences menées sur différentes géométries d'éprouvettes avec différents matériaux ont mis en défaut l'utilisation de la force appliquée à l'éprouvette comme critère de propagation. Cela a conduit les chercheurs à envisager l'idée qu'utiliser une contrainte en pointe de fissure constituerait un critère de propagation idéal. Malheureusement, la complexité induite par le cadre des grandes déformations, et notamment l'absence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure du fait de sa forme émoussée, rendait toute évaluation d'une telle grandeur impossible. On doit alors à Thomas (1958) d'avoir introduit le paramètre T (pour *Tearing energy*), qui correspond au maximum du taux de restitution d'énergie, et qui s'appuie sur l'idée de Griffith (1921) que l'on développe ci-après.

En constatant l'immense écart entre la résistance théorique du verre, supposée très grande du fait du type de liaisons atomiques mises en jeu, et les essais expérimentaux menant à des mesures de résistances bien inférieures, Griffith (1921) fait l'hypothèse que ce résultat est dû à la présence de défauts dans la structure. Il propose alors d'utiliser une approche énergétique dans laquelle il postule que, pour des matériaux fragiles et sous l'hypothèse des petites déformations, il n'y aura croissance d'une fissure que dans le cas où l'énergie élastique restituée est supérieure à l'énergie dépensée pour la création d'une fissure. Il confronte son idée à des expériences de propagation de fissure dans des matériaux entaillés, et obtient de bonnes corrélations entre résultats expérimentaux et théorie. Cette approche énergétique est le candidat parfait pour les élastomères, puisqu'elle permet d'éviter le calcul des contraintes en pointe de fissure, nécessaire pour une approche locale en contrainte. Cependant, il a été observé que, dans le cas des élastomères, l'énergie de déformation élastique se transforme en d'autres formes que seulement une énergie de surface libre, comme c'est le cas sous l'hypothèse de Griffith (1921), rendant alors impossible l'application directe de cette dernière au cas des élastomères. Il a tout de même été remarqué que les modifications des champs mécaniques induites par la présence d'une pointe de fissure étaient très localisées autour de celle-ci, laissant penser que la géométrie globale de la pièce n'a pas d'influence. Pour s'en assurer, différentes géométries d'éprouvettes ont été utilisées pour vérifier qu'il est possible d'obtenir la valeur de la grandeur suivante à l'instant du déchirement (*i.e.* de la propagation) (Thomas, 1958) :

$$T = - \left(\frac{1}{t} \right) \left(\frac{dU}{dc} \right)_l, \quad (1.2)$$

où t est l'épaisseur de la pièce, U est l'énergie de déformation élastique contenue dans la pièce, c est la taille de la fissure et l'indice l signifie que la dérivation est faite à extension appliquée constante (pour que les forces extérieures appliquées ne travaillent pas). Les premiers essais ont mis en lumière qu'à 30% près, la détermination de la valeur T à l'instant de la propagation était identique pour toutes les géométries. Il a donc été montré qu'en utilisant certaines géométries d'éprouvette, on est en mesure d'obtenir une relation directe entre T et U , lorsque la pointe de fissure est dans un état mécanique de cisaillement pur par exemple. Ainsi, Thomas (1958) propose une loi puissance permettant de relier T , le taux de restitution d'énergie, à dc/dn , la vitesse de propagation cyclique de la fissure :

$$\frac{dc}{dn} = BT^\gamma, \quad (1.3)$$

où c est la taille de la fissure, n le nombre de cycles, T est le taux de restitution d'énergie présenté plus haut et B et γ sont des paramètres matériaux. Cette relation est illustrée sur la Figure 1.9, pour un caoutchouc naturel (blanc) et un caoutchouc synthétique SBR (noir) sur différentes géométries d'éprouvettes. Cette figure illustre la robustesse du modèle proposé par l'équation (1.3). Toutes ces études ont également mis en lumière l'existence d'un seuil T_0 , appelé énergie critique de déchirement, en dessous duquel il n'y a pas de

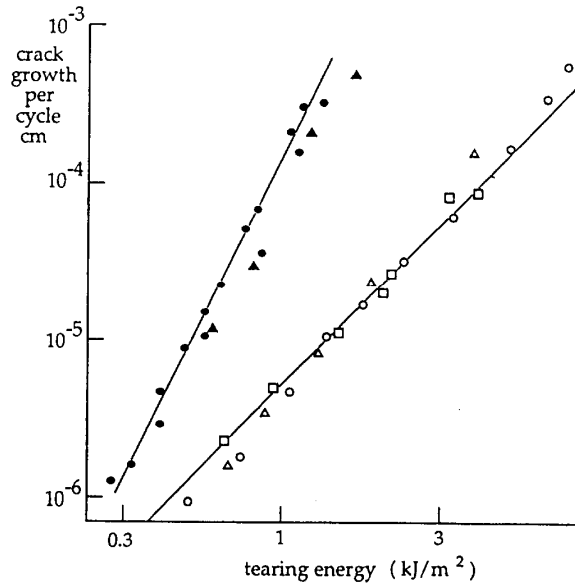


FIGURE 1.9 – Courbes $\left(\frac{dc}{dn} - T\right)$ montrant la validité de l'équation (1.3) sur une gamme de valeurs de T , pour un caoutchouc naturel (blanc) et un caoutchouc synthétique SBR (noir). Extrait de Lake (1995).

propagation de la fissure. Étonnamment, l'expérience montre que sa valeur ne dépend (relativement) pas de la nature de l'élastomère étudié (cristallisant ou non, etc.). Alors, Lake et Thomas (1967) proposent d'expliquer ce résultat par une approche moléculaire qui s'appuie sur l'énergie nécessaire pour rompre une chaîne de monomère qui se situe sur la trajectoire de la fissure comme illustré sur la Figure 1.10, pour ensuite l'étendre à l'énergie nécessaire pour en rompre plusieurs. On retrouve ainsi souvent l'idée que l'endommagement des élastomères est lié à une elongation dans une direction particulière, menant à la rupture des chaînes de monomères, ce qui a donné lieu à plusieurs critères de fatigue qui sont présentés dans le Chapitre 4.

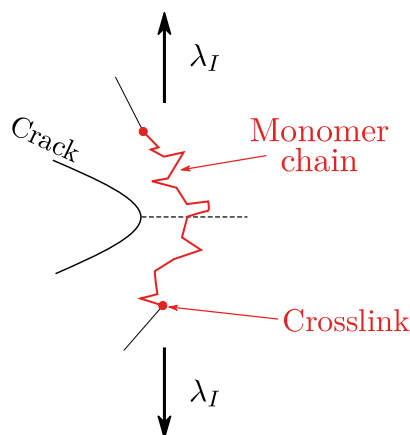


FIGURE 1.10 – Schéma de principe d'une chaîne de monomère se trouvant sur le chemin de la fissure (qui se propage de gauche à droite). Adapté de Lake et Thomas (1967).

1.4.2 Amorçage de fissures

L'étude de la fatigue des matériaux élastomères a profité de la démocratisation des moyens d'observation microstructurale tels que le MEB (Microscope Électronique à Balayage) : plusieurs travaux présentent une analyse approfondie des mécanismes d'amorçage de fissures en fatigue (Le Cam *et al.*, 2004; Saintier *et al.*, 2006; Le Saux *et al.*, 2011; Huneau *et al.*, 2016). Trois mécanismes principaux sont mis en exergue, et schématisés sur la Figure 1.11 :

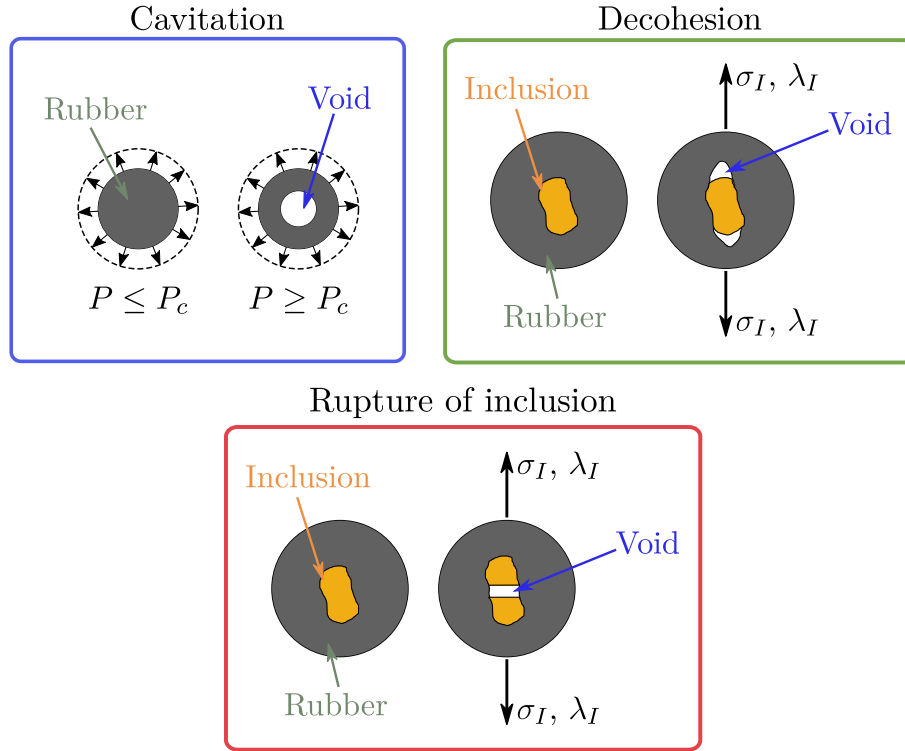


FIGURE 1.11 – Représentation schématique des principaux mécanismes d'endommagement des élastomères recensés dans la littérature.

- **La cavitation** - La cavitation est un phénomène de création puis de croissance spontanée d'un vide au sein du matériau. Au cours de nombreuses études, une première estimation de la pression hydrostatique P_H à laquelle la cavitation apparaît est donnée par $P_H = 5E/6$, où E est le module d'Young du matériau étudié (Gent et Lindley, 1959; Gent et Park, 1984; Cho *et al.*, 1987). Cette relation est démontrée valable pour des matériaux non chargés ou chargés avec de très fines particules, et très vite, de nouveaux modèles sont proposés comme celui de Hou et Abeyaratne (1992). La nature même du phénomène de cavitation, bien qu'encore très débattue au sein de la communauté scientifique (Hou et Abeyaratne, 1992; Poulain *et al.*, 2017; Raayai-Ardakani *et al.*, 2019; Barney *et al.*, 2020), ne fait aucun doute quant au rôle majeur que joue la pression hydrostatique dans son occurrence. Cela a été montré au cours de plusieurs études mettant en lien des essais de fatigue sur élastomères, et des observations de cavités sur les éprouvettes post-mortem (Legorju-Jago et Bathias, 2002; Saintier *et al.*, 2006; Le Cam *et al.*, 2008). On note tout de même que la cavitation ne semble pas avoir été observée sur des SBR chargés au noir de carbone par Le Cam *et al.* (2014), mais une étude récente réalisée à l'aide d'un microtomographe à rayons X a montré que l'activation du phénomène était liée au couplage entre déformation imposée et quantité de noir de carbone dans le matériau (Euchler *et al.*, 2021). Une autre étude pro-

pose un critère cinématique de cavitation, basé sur une définition originale de la déformation volumique (Drass *et al.*, 2018a).

- **La décohésion inclusion-matrice & la rupture d'inclusion** - Le Cam *et al.* (2008) présentent la décohésion comme le phénomène d'endommagement majoritaire en fatigue du caoutchouc naturel chargé au noir de carbone. Cette observation est validée par diverses études successives (Saintier *et al.*, 2006; Huneau *et al.*, 2016). On note surtout que la faible énergie de cohésion de l'interface inclusion-matrice (par exemple les oxydes de zinc ZnO) en fait des zones privilégiées pour la décohésion. Le Saux *et al.* (2011) se questionnent également sur l'existence d'un mécanisme de rupture des inclusions mêmes, lorsque que l'énergie de cohésion entre celles-ci et la matrice est très élevée. Ce phénomène a également été observé par Huneau *et al.* (2016) dans un caoutchouc naturel, mais dans la plupart des cas, aucune propagation induite par des amorçages de ce type n'a été observée.

Enfin, la contribution de chaque phénomène à l'endommagement total, ainsi que leur interaction n'est pas encore résolue complètement. Par exemple, Le Cam *et al.* (2004) proposent de parler de « cavitation induite par la décohésion à l'interface particule-matrice », et Lefèvre *et al.* (2015) se posent des questions sur la nature même de la cavitation : « instabilité anélastique ou phénomène de rupture ? ». On peut alors se dire que la connaissance complète des mécanismes d'endommagement des élastomères reste un problème ouvert, sujet à de futures découvertes.

1.5 La multiaxialité dans la fatigue

Le dernier aspect important de la fatigue telle qu'elle est abordée dans ce travail est la notion de multiaxialité. La multiaxialité fait référence, de manière très générale, à « l'activation » de plusieurs axes simultanément, comme par exemple les axes de chargement, ou les directions principales de contrainte et déformation. Cependant, aucune définition unifiée n'existe, et une myriade de propositions ont déjà vu le jour, dont certaines sont présentées dans la liste suivante (non exhaustive) :

- La notion la plus répandue est celle d'« état de contraintes multiaxiales ». On peut généralement écrire un état de contrainte à l'aide de six composantes (3 diagonales de traction-compression, 3 hors diagonales de cisaillement), et l'activation de plusieurs de ces composantes simultanément permet de définir un état de contraintes multiaxial. La contrainte de Von Mises est un exemple de grandeur multiaxiale utilisée pour prédire la plastification d'un matériau. De manière un peu similaire, Bathias et Pineau (2008) décrivent un état de contraintes multiaxial comme étant caractérisé par plusieurs contraintes principales non nulles simultanément.
- Foecke *et al.* (2007) définissent la multiaxialité des déformations comme le ratio de la 2ème déformation principale sur la première $\rho = \epsilon_{II}/\epsilon_I$: cisaillement pur ($\rho = 0$), traction uniaxiale ($\rho = -0,5$), etc.
- Mars (2001b) définit le ratio de biaxialité $B = \ln(\lambda_{II})/\ln(\lambda_I)$ (λ_{I-II} étant les deux premières extensions principales) : $B = -0,5$ (traction uniaxiale) et $B = 1$ (traction équibiaxiale) par exemple.
- Quaresimin *et al.* (2010) parlent de multiaxialité globale (ou externe) des contraintes due aux conditions de chargement, et de multiaxialité locale (ou interne) des contraintes due à l'anisotropie du matériau.
- On peut aussi évoquer la notion de triaxialité η , qui est le ratio de la pression hydrostatique sur la contrainte de Von Mises, et qui vaut 0 pour du cisaillement pur, 0.33 pour de la traction uniaxiale, etc (Drass *et al.*, 2018b).

Remarque : une notion couramment employée dans le domaine de la fatigue multiaxiale

est celle de proportionnalité ou de non proportionnalité. Dans le cas des métaux, la proportionnalité des contraintes est caractérisée par une évolution en-phase des contraintes principales sans changement du repère principal (Bathias et Pineau, 2009). Dans ce travail, on s'abstiendra d'utiliser ce terme, car il n'est pas aussi bien défini dans le cadre des grandes déformations, qui est celui utilisé pour l'étude de la fatigue des élastomères.

Dans ce travail, deux notions sont distinguées : **la multiaxialité du chargement**, faisant référence aux types de signaux appliqués aux éprouvettes (traction-compression uniaxiale = chargement uniaxial, traction-torsion = chargement multiaxial), et **le mode de déformation** (ou multiaxialité de la déformation locale) qui est défini en un point matériel et dont la valeur rend compte d'un état mécanique particulier (voir Chapitre 3). Cette distinction permet donc d'avoir des cas de chargements multiaxiaux qui n'impliquent pas nécessairement des modes de déformation multiaxiaux.

Dans le cas des élastomères, les premières études de fatigue menées dans les années 1940 traitaient d'essais de traction uniaxiale sur différentes géométries axisymétriques, ainsi que des essais de cisaillement sur des membranes rectangulaires (Cadwell *et al.*, 1940). Il fut cependant rapidement clair que la complexité du phénomène de fatigue ne pouvait être appréhendée seulement par des essais uniaxiaux simples, et c'est donc à la fin des années 1990 que la communauté des mécaniciens manifeste un regain d'intérêt pour le sujet avec notamment le lancement de plusieurs thèses de doctorat sur la fatigue multiaxiale des élastomères (Legorju-Jago, 1998; Mars, 2001b; Saintier, 2001). Le domaine en étant alors à ses prémices, chaque nouvelle étude s'est accompagnée de la définition d'une nouvelle géométrie d'éprouvette dans le but de rendre compte pour le mieux du phénomène de fatigue. Pour des raisons pratiques, toutes les géométries sont axisymétriques pour que les éprouvettes puissent être sollicitées en traction-torsion combinées; on peut citer le O-ring développé par Mars et Fatemi (2004b), ou encore le Diabolo, l'AN5 et l'AN2 utilisés par Saintier *et al.* (2006), etc (une liste exhaustive de ces géométries sera proposée dans le Chapitre 8). Enfin, la multiaxialité du chargement se décompose elle-même en deux catégories : les chargements en-phase, pour lesquels les signaux de chargement (par exemple traction et torsion) ont leur maxima et minima concomitants, et les chargements déphasés pour lesquels les maxima et minima ne sont pas concomitants. L'ajout d'un déphasage augmente encore la complexité du phénomène, car alors les directions principales (de contraintes ou déformations) et les orientations des plans matériels sont pilotées par les pics distincts de traction et de torsion, qui rentrent alors « en concurrence ». La Figure 1.12 illustre les notions de multiaxialité du chargement et de proportionnalité, en montrant leurs effets sur la première direction principale de déformation (PSD pour *Principal Strain Direction* en anglais) de déformation (définie comme le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{b}), et sur l'orientation d'un plan matériel (MP pour *Material Plane* en anglais) initialement orienté à 45° dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de l'éprouvette. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

- Les directions principales n'évoluent pas dans le cas uniaxial, et les plans matériels tournent d'une quantité proportionnelle à l'intensité du chargement, sauf dans certains cas particuliers (durant un essai de traction, un plan matériel perpendiculaire ou parallèle à la direction de chargement ne bouge théoriquement pas).
- Le passage à des chargements multiaxiaux (traction-torsion en-phase) implique une rotation des plans matériels, et des directions principales. On note cependant que leurs évolutions sont corrélées.
- L'ajout d'un déphasage entre les signaux de traction et de torsion décorrèle les rotations des plans matériel et des directions principales, complexifiant encore le phénomène.

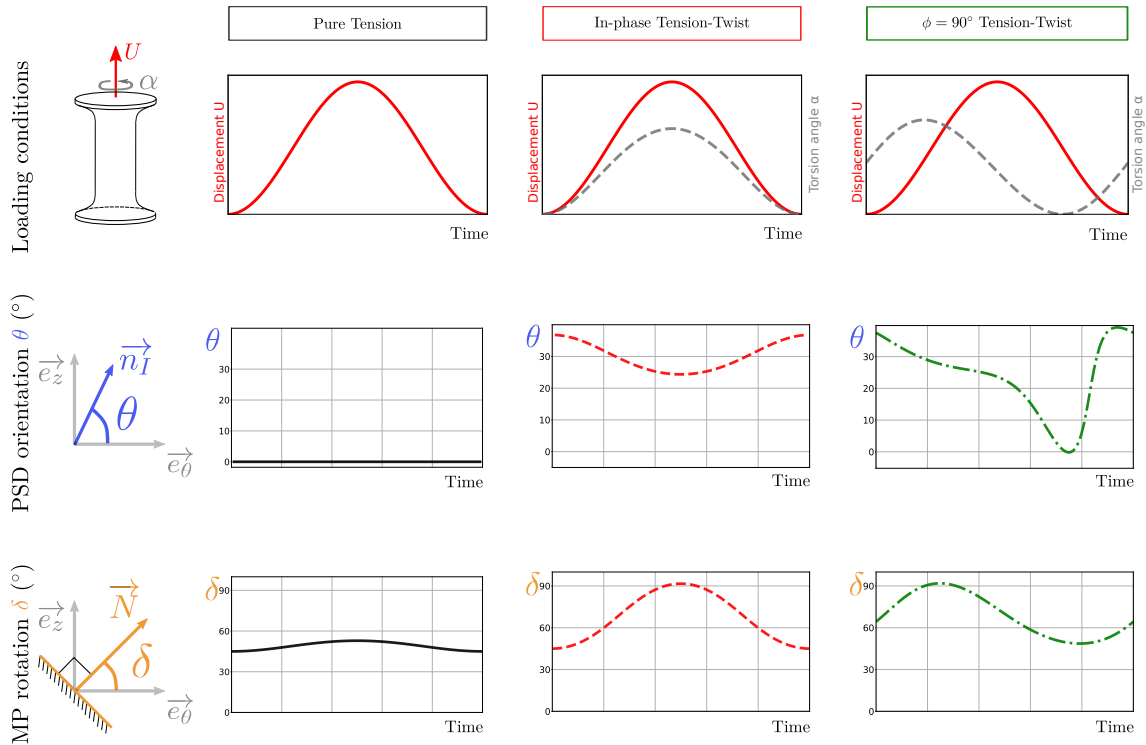


FIGURE 1.12 – Évolutions temporelles, dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de l'orientation θ de la première direction principale de déformation (PSD) \vec{n}_I et de l'orientation δ d'un plan matériel (MP) initialement orienté à 45° , pour trois chargements classiques : traction pure, traction-torsion en-phase et traction-torsion déphasées de $\phi = 90^\circ$. Tout est calculé sur le plan médian de la partie cylindrique de l'éprouvette, sur le rayon extérieur.

1.6 Conclusion

L'étude de la fatigue des élastomères est par certains aspects similaire à celle des matériaux métalliques, pionnière du domaine. La séparation des phases d'amorçage et de propagation, les types d'essais de fatigue réalisés et les représentations des résultats dans des espaces pertinents sont autant d'outils utilisés pour tous les matériaux. Cependant, les élastomères se démarquent par bien des aspects, qui doivent impérativement entrer en considération lors de leur étude : leur microstructure rend encore difficile l'émergence claire des mécanismes mis en jeu lors de leur endommagement en fatigue (cavitation, décohésion inclusion-matrice, etc.). De plus, leur forte extensibilité rend inévitable l'application du cadre théorique des grandes déformations lors de leur analyse mécanique, compliquant ainsi davantage la notion de multiaxialité. Pour ne pas multiplier les difficultés, on choisit de restreindre le cadre d'étude de la fatigue, par rapport à tout ce qui a été vu au-dessus, à l'étude de chargements multiaxiaux d'amplitude et de fréquence constantes, en-phase et déphasés, comme résumé sur la Figure 1.13, et de définir la multiaxialité par deux notions : **la multiaxialité du chargement**, et **le mode de déformation** (ou multiaxialité de la déformation locale).

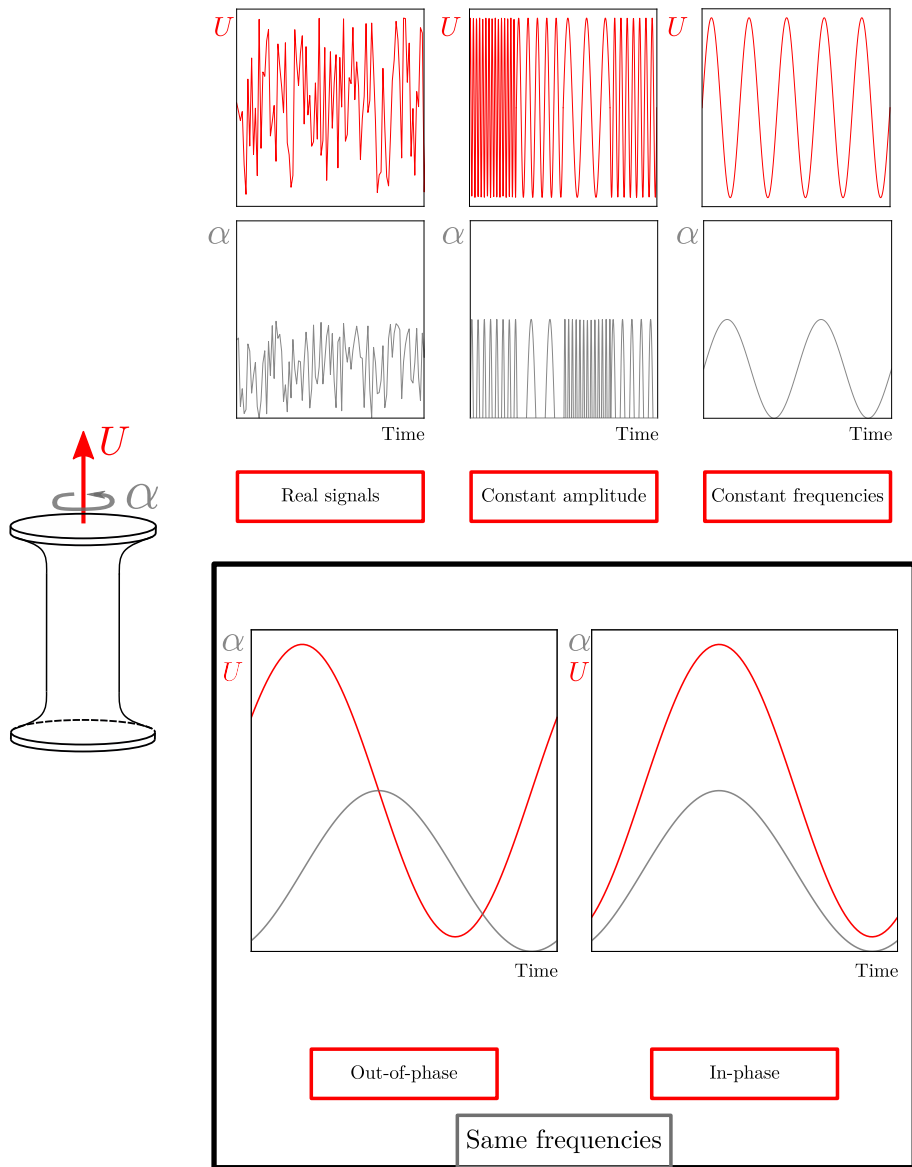


FIGURE 1.13 – Résumé graphique des différentes complexités de la multiaxialité en fatigue. Le cadre noir montre le contexte de la thèse : seule la multiaxialité à amplitude et fréquence constantes est étudiée ici.

Chapitre 2

Matériau et méthodes

Sommaire

3.1	Introduction	36
3.2	Nouvelle méthode de construction d'essais de fatigue multiaxiaux . . .	36
3.2.1	Motivation	36
3.2.2	Vers un contrôle de la multiaxialité des essais de fatigue	37
3.2.3	Extension aux essais déphasés	40
3.2.4	Applications aux conditions d'essai	40
3.3	Campagne d'essais	42
3.3.1	Durées de vie	42
3.3.2	Répartition des amorçages	44
3.3.3	Angles d'amorçage	45
3.3.4	Nature des défauts responsables des amorçages	48
3.3.5	Estimation de la taille de défauts responsables de l'amorçage .	50
3.4	Conclusions	52

2.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les études sur la fatigue des élastomères ont commencé à explorer le comportement des élastomères sous sollicitations multiaxiales il y a seulement deux décennies, avec le lancement de plusieurs campagnes d'essais de traction-torsion sur des éprouvettes axisymétriques, dont la liste exhaustive (à la connaissance de l'auteur) des publications présentant des résultats est la suivante : Mars (2001b); Saintier (2001); Harbour *et al.* (2008b); Ayoub *et al.* (2011, 2012). Avec chacune leur raison d'être conçue et leurs caractéristiques propres, ce ne sont pas moins de six géométries d'éprouvettes différentes qui ont été recensées jusqu'ici, comme par exemple le tore creux "O-ring" de Mars (2001b), ou encore l'éprouvette dite AN2 à très petit rayon de courbure de Saintier (2001). Dans le but de proposer un nouveau critère de fatigue, le choix a été fait de mener une nouvelle campagne d'essais de fatigue en traction-torsion pour deux raisons : dans le but d'avoir un contrôle sur tous les paramètres (*i.e.* choix des conditions de chargement, analyses post mortem, etc.), et parce que ce sont les types d'essais accessibles par les moyens expérimentaux à notre disposition. Dans ce qui suit, les caractéristiques du matériau, ainsi que certaines de ses propriétés mécaniques et physico-chimiques sont présentées succinctement dans la Section 2.2. La machine d'essais de fatigue, ainsi que la géométrie de l'éprouvette utilisée sont présentées dans la Section 2.3.2, et les équations de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre, applicables à l'éprouvette, sont introduites dans la Section 2.4.

2.2 Matériau d'étude

Le matériau utilisé dans ce travail est un caoutchouc synthétique de type SBR (*Styrene Butadiene Rubber* en anglais) produit par le LRCCP, dont la composition est donnée dans le Tableau 2.1. Il s'agit d'une formulation très classique dans l'industrie.

Ingredient	phr (part per hundred rubber)
SBR 1500	100
N550 Carbon black	50
ZnO	5
Stearic acid	2
Sulfur	1,5

TABLEAU 2.1 – Composition du SBR utilisé dans la thèse.

Quelques propriétés matériaux classiques ont été mesurées au LRCCP :

- Sa dureté Shore A a été mesurée et vaut 68.
- Des essais de DSC (*Differential Scanning Calorimetry*) ont permis de mesurer une température de transition vitreuse d'environ -44°C .

Des essais de caractérisation mécanique ont également été menés à faible vitesse de déformation afin d'approcher l'équilibre viscoélastique, et ont consisté en des essais de traction uniaxiale sur bande, des essais de compression uniaxiale sur plot cylindrique, et des essais de compression plane. Les résultats sont présentés en Figure 2.1. L'Annexe A propose des paramètres matériaux pour des lois de comportement de type néo-Hookéen et Mooney-Rivlin, basés sur ces essais. En complément, des essais de compression confinée sur plot cylindrique ont permis de déterminer le module de compressibilité du matériau, qui a été estimé à $K = 2581$ MPa à la pression atmosphérique.

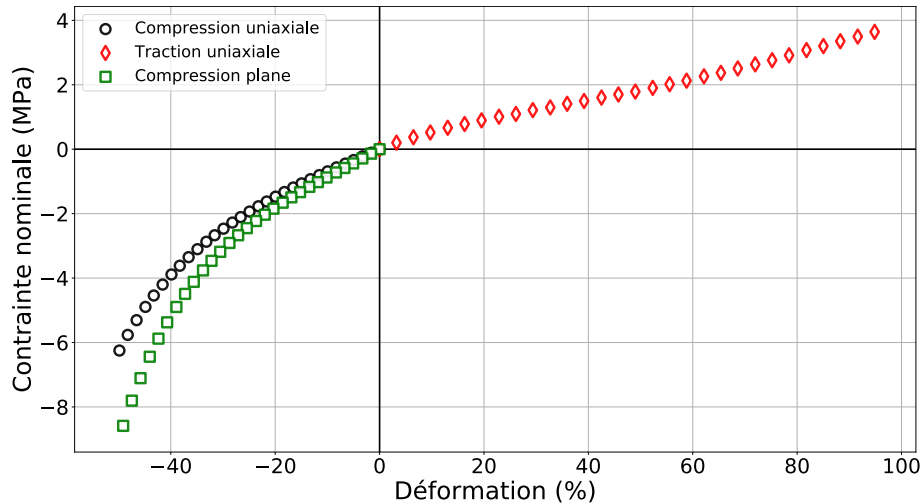


FIGURE 2.1 – Données expérimentales des essais de traction uniaxiale, compression uniaxiale et compression plane en vue du choix d'une loi de comportement.

2.3 Machine d'essais et éprouvette

La machine disponible pour les essais de fatigue est une machine de traction-torsion combinées, pour laquelle a été développée une éprouvette répondant à un cahier des charges spécifique (Lectez, 2014). Dans cette section sont présentées la machine et l'éprouvette de manière plus détaillée.

2.3.1 Machine de traction-torsion - Instron E10000

Les essais de fatigue sont menés au CRED (Centre de Ressources en Essais Dynamiques) du GeM à Nantes, sur une machine de traction-torsion Instron ElectroPuls E10000 (Fig. 2.2), qui peut solliciter simultanément une éprouvette en déplacement vertical U avec une course de 60 mm, et en torsion d'un angle α jusqu'à 16 tours. Les deux signaux sont contrôlés séparément, ce qui permet d'appliquer des chargements multiaxiaux hors-phase en déphasant un signal par rapport à l'autre. La machine est contrôlée par deux logiciels : Instron Console gère l'interaction entre les actionneurs et les capteurs, et permet le contrôle manuel des deux axes (déplacement et torsion), et Instron WaveMatrix permet de créer et démarrer les essais de fatigue. Un double capteur est placé à la base de l'éprouvette, et qui consiste en une cellule de force de capacité de 1 kN mesurant la force verticale et une cellule de couple de capacité de 25 N.m.

La précision sur les déplacements imposés est de l'ordre de 10^{-3} mm pour l'axe linéaire, et de $(10^{-2})^\circ$ pour l'axe de rotation. Les étapes de montage d'une éprouvette sont les suivantes :

1. L'éprouvette est fixée dans la partie basse (capteur) de la machine, puis le zéro en force et en couple est réalisé. Cela néglige le poids propre de l'éprouvette dans la mesure de force, mais cela représente moins de 2 N (éprouvette de ≈ 200 g) sur plusieurs centaines aux intensités maximales de déplacement.
2. La partie mobile haute est descendue, puis fixée à l'éprouvette. Le montage de l'éprouvette s'effectuant en contrôle de déplacement/angle, ces deux valeurs sont gardées constantes par le correcteur de la machine. Ainsi, au fur et à mesure que le mors supérieur est vissé, la partie qui serre l'éprouvette vient à descendre sur cette dernière, la poussant vers le bas. Cela crée une légère compression sur



FIGURE 2.2 – Machine de traction-torsion Instron E10000, avec une éprouvette de fatigue montée.

l'éprouvette, qui est gardée inférieure à 100 N. L'éprouvette est ensuite relâchée par un déplacement vers le haut du mors supérieur jusqu'à serrage de l'éprouvette.

3. On passe la machine en contrôle de force/couple, et l'on applique, directement après serrage du deuxième mors, la consigne $F = 0$ N et $C = 0$ N.m, ce qui ramène l'éprouvette dans sa configuration non déformée.
4. L'éprouvette étant rentrée légèrement en compression, on attend quelques instant qu'elle se détende, toujours à force et couple imposés nuls. Cela provoque un allongement de l'éprouvette de quelques millimètres ($\tilde{1}$ -2 mm).
5. Une fois la valeur de cet allongement résiduel stabilisé, le déplacement et la rotation dits numériques (différents de la valeur absolue liée à la position des deux mors) sont mis à zero.
6. L'essai est lancé avec une courbe enveloppe de 30 s, c'est-à-dire que la consigne est atteinte progressivement.

On introduit les paramètres appelés rapports de charge et définis par :

$$\begin{cases} R_U = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \\ R_\alpha = \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \end{cases} . \quad (2.1)$$

Tous les essais effectués dans ce travail sont à rapport de charge nul en déplacement et en angle ($R_U = 0$ et $R_\alpha = 0$). La Figure 2.3 présente trois exemples de conditions de chargement que peut appliquer la machine à une éprouvette de traction-torsion. Notons que tous les essais seront décrits par trois caractéristiques définies sur la Figure 2.3 : l'amplitude de déplacement imposé U_{\max} , l'amplitude d'angle imposé α_{\max} et le déphasage ϕ entre les deux signaux.

2.3.2 Éprouvette de fatigue

L'éprouvette utilisée est constituée d'une partie en caoutchouc, adhésivée entre deux pieds métalliques cylindriques (voir la Figure 2.4) qui sont fixés au caoutchouc lors de la

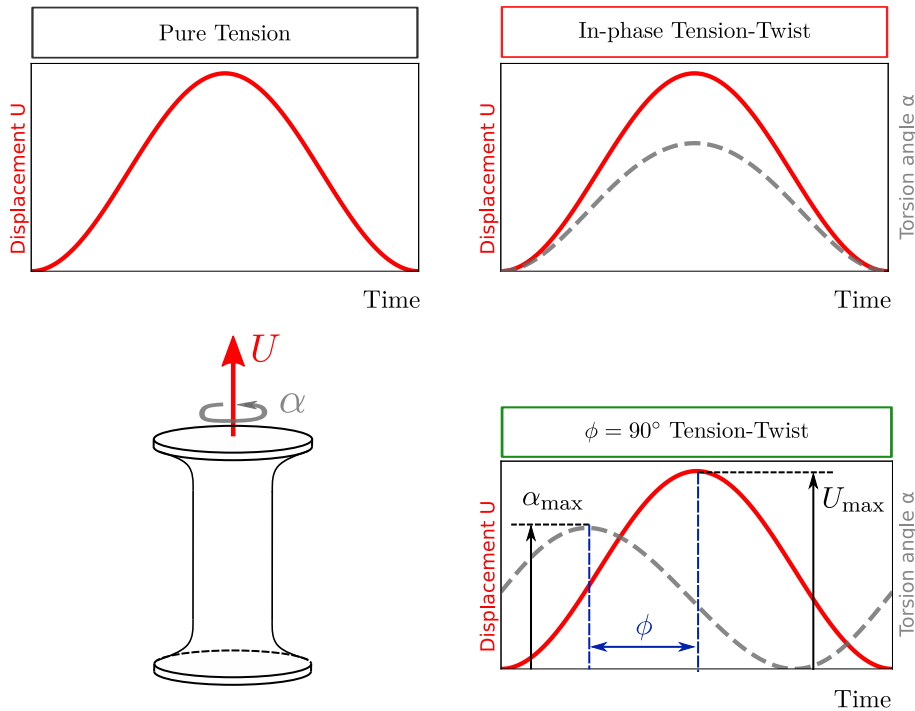


FIGURE 2.3 – Exemples de conditions de chargement (U , α) applicables à la surface supérieure d'une éprouvette. Tous les essais sont effectués à $R_U = 0$ et $R_\alpha = 0$. Les caractéristiques des signaux (U_{\max} , α_{\max} et ϕ) sont illustrées sur la figure en bas à droite.

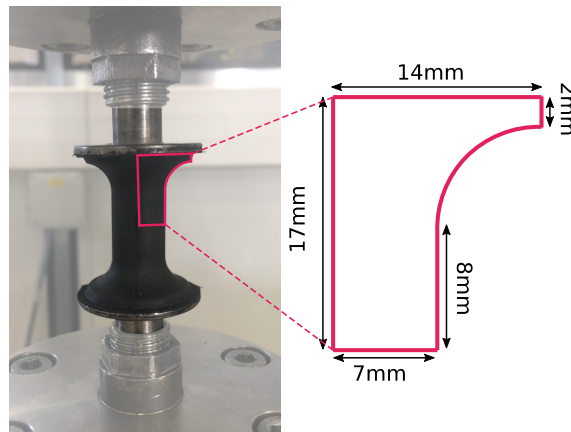


FIGURE 2.4 – Éprouvette montée dans la Instron E10000 (gauche) et ses dimensions (droite).

phase de cuisson de ce dernier et permettent de transmettre les efforts de la machine au matériau élastomère.

Un point important, présenté sur la Figure 2.5, est l'existence de bavures verticales que l'on appelle plans de joint (*Parting lines* en anglais), et qui sont inhérentes au procédé de cuisson. Comme l'illustre la Figure 2.5a, le caoutchouc est cuit dans un moule à deux parties; le jeu entre deux parties une fois collées laisse passer une petite quantité de caoutchouc qui cuit donc avec le reste de l'éprouvette, et se retrouve sous la forme de longues lignes verticales de part et d'autre de celle-ci. La Figure 2.5b montre la présence des plans de joint vus du dessus d'une éprouvette rompue. D'épaisseur variable (au sein d'une même éprouvette), ces défauts géométriques peuvent avoir une largeur de l'ordre du millimètre.

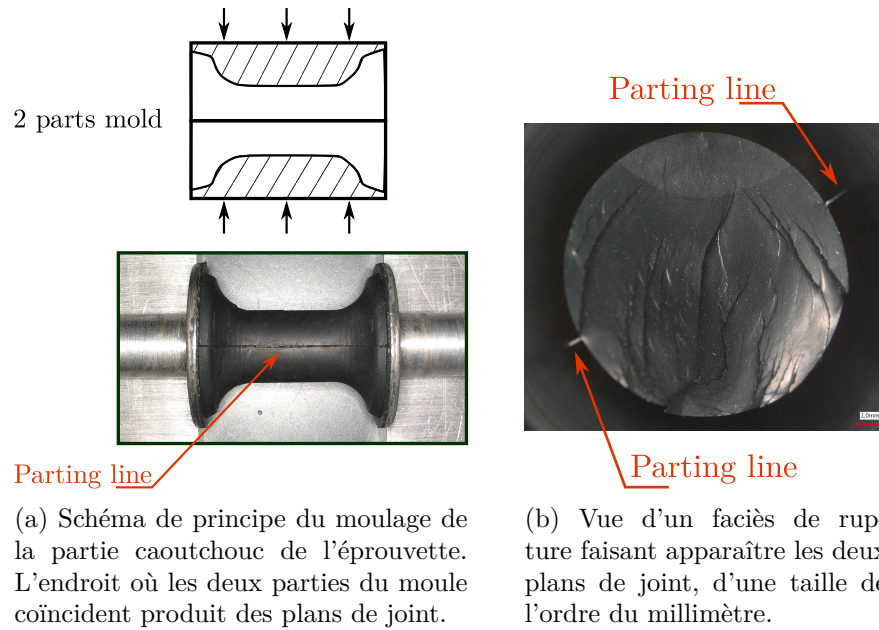


FIGURE 2.5 – Mise en évidence des plans de joint.

La géométrie de l'éprouvette a été calculée lors d'une thèse précédente (Lectez, 2014). Elle permet d'avoir une partie centrale cylindrique, dont le comportement est assimilable à celui d'un cylindre plein, et des congés de raccordement aux pieds de rayon assez grands pour limiter les effets de concentration de contrainte dans cette zone souvent propice à ce type de phénomène. Lectez (2014) a montré que sur une hauteur $H = 4,7$ mm au centre de l'éprouvette, les équations de la mécanique appliquées à un cylindre parfait sont valides. Les relations de passage entre les grandeurs de contrôle de la machine (déplacement imposé U et angle de torsion imposé α), et les quantités usuelles de la mécanique sont développées dans la section suivante.

2.4 Cinématique de la traction-torsion de l'éprouvette cylindrique

Dans ce qui suit, on développe les équations de la cinématique qui régissent le comportement de la partie cylindrique (centrale) de l'éprouvette.

2.4.1 Équations de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre parfait

Les équations de la traction-torsion d'un cylindre parfait sont développées dans ce qui suit ; elles ont déjà beaucoup été étudiées par le passé, *e.g.* par Rivlin (1949); Ogden (1997); Ciarletta et Destradre (2014); Murphy (2015) entre autres. Les notations du problème sont explicitées sur la Figure 2.6, qui représente la partie centrale de l'éprouvette.

On considère un cylindre parfait, de longueur L et de rayon A dans la configuration non déformée (ou de référence), et qui deviennent respectivement l et a dans la configuration déformée. Un déplacement vertical U et un angle de torsion α sont appliqués sur la surface supérieure, et la surface inférieure est encastrée.

Le matériau est supposé homogène, isotrope et incompressible. La configuration non déformée est notée (\mathcal{C}_0) , et la configuration déformée est notée (\mathcal{C}) . La transformation entre ces deux configurations est notée $\vec{\chi}$, et transforme tout point P_0 de (\mathcal{C}_0) en P dans

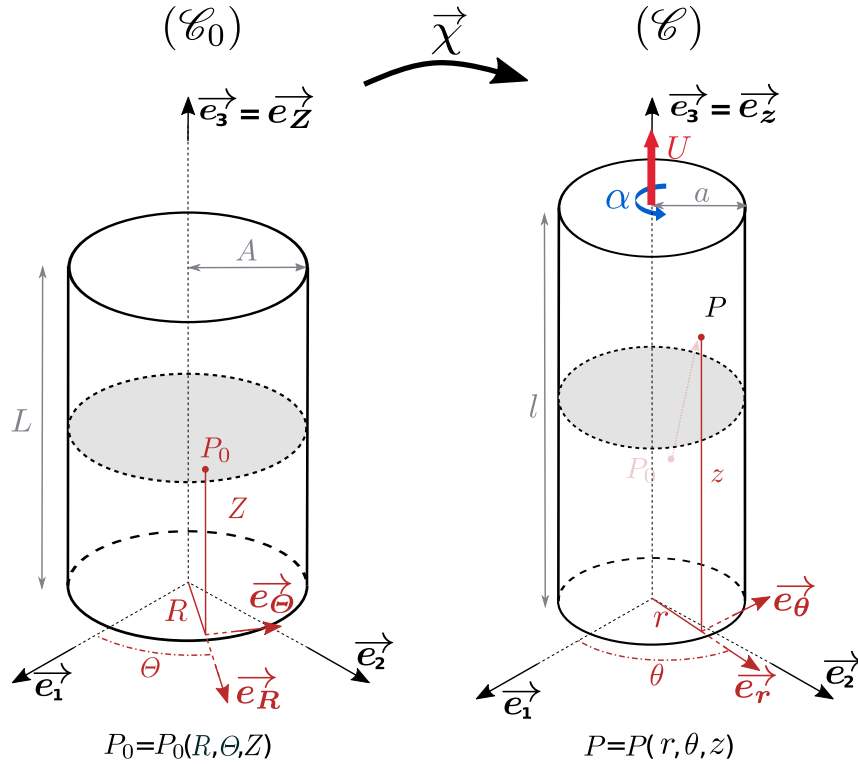


FIGURE 2.6 – Notations de la traction-torsion d'un cylindre parfait.

(\mathcal{C}). Dans ce qui suit, les lettres majuscules (R , Z , etc.) font référence à des quantités définies dans (\mathcal{C}_0), et les lettres minuscules (r , z , etc.) à des quantités définies dans (\mathcal{C}), sauf mention contraire. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est le système de coordonnées cartésiennes, et deux systèmes de coordonnées cylindriques sont utilisés : $(\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_Z)$ dans la configuration de référence et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ dans la configuration déformée.

La relation entre les paramètres géométriques des configurations de référence et déformée est définie par

$$r = R\lambda^{-0.5}, \quad \theta = \Theta + \tau\lambda Z, \quad z = \lambda Z, \quad (2.2)$$

où λ et τ sont respectivement l'extension dans la direction du déplacement vertical, et l'angle par unité de longueur déformée :

$$\lambda = \frac{l}{L} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha}{\lambda L}. \quad (2.3)$$

Remarque : Dans le cas de l'éprouvette étudiée dans la thèse, les relations de passage entre U et λ , et α et τ sont

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \frac{U}{H_D}, & (\text{sans unité}) \\ \tau = \frac{\alpha}{\lambda H_\alpha}, & (\text{rad.mm}^{-1}) \end{cases}, \quad (2.4)$$

où $H_D = 25.6$ mm et $H_\alpha = 30.3$ mm sont deux paramètres géométriques déterminés par Lectez (2014).

Le gradient de la déformation est

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_R + \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta) + R\sqrt{\lambda}\tau \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_Z + \lambda \vec{e}_z \otimes \vec{e}_Z, \quad (2.5)$$

et le tenseur de Cauchy-Green gauche correspondant, $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, est donné par

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\lambda} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \tau^2 r^2 \right) \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + \lambda^2 \tau r (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_z + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_\theta) + \lambda^2 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z. \quad (2.6)$$

Les extensions principales $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ sont définies comme les racines carrées des valeurs propres de \mathbf{b} :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \left(R^2 \tau^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \sqrt{\left(R^2 \tau^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right)^2 - 4\lambda} \right) \right]^{0.5} \\ \lambda_2 = \lambda^{-0.5} \\ \lambda_3 = \left[\frac{1}{2} \left(R^2 \tau^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} - \sqrt{\left(R^2 \tau^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right)^2 - 4\lambda} \right) \right]^{0.5} \end{cases}. \quad (2.7)$$

Le tenseur de Hencky, noté \mathbf{h} , est généralement défini à partir du tenseur d'extension pure gauche (ou spatial) \mathbf{v} , issu de la décomposition polaire de \mathbf{F} , $\mathbf{v} = \mathbf{b}^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathbf{h} = \ln(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}). \quad (2.8)$$

Notons que, bien que ses propriétés aient été peu exploitées dans l'étude de la fatigue des élastomères, le tenseur \mathbf{h} sera beaucoup utilisé dans la suite du manuscrit.

2.4.2 La multiaxialité en grandes déformations

Les développements qui suivent sont basés sur les travaux de Criscione *et al.* (2000), dans lesquels les propriétés de \mathbf{h} ont été étudiées de manière détaillée. L'un des principaux avantages de \mathbf{h} repose dans la définition de certains de ses invariants, usuellement notés $\{K_i\}_{i=1,2,3}$ et définis par

$$\begin{cases} K_1 = \ln(J) = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \\ K_2 = \sqrt{\text{dev}(\mathbf{h}) : \text{dev}(\mathbf{h})} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\ln(\lambda_i) - \frac{K_1}{3} \right)^2} \\ K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{K_2^3} \prod_{i=1}^3 \left(\ln(\lambda_i) - \frac{K_1}{3} \right) \end{cases}, \quad (2.9)$$

où J est le Jacobien de la transformation $\vec{\chi}$, et $\text{dev}(\mathbf{*}) = (\mathbf{*}) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{*}) \mathbf{I}$ est l'opérateur déviatorique. Le sens physique des $\{K_i\}_{i=1,2,3}$ est également proposé par Criscione *et al.* (2000) :

- K_1 représente l'intensité de la dilatation volumétrique, et ne prend en compte aucune distorsion.
- K_2 quantifie l'intensité de la distorsion que subit la matière. Il ne contient aucune mesure de changement de volume, et vaut zéro si et seulement si il n'y a aucune distorsion au point matériel considéré.
- K_3 représente le mode de distorsion. Notons que K_3 n'est pas défini lorsque $K_2 = 0$, ce qui n'est pas gênant puisque, dans ce cas précis, la matière ne subit pas de distorsion, donc y associer un mode de distorsion n'a aucun sens. Le Tableau 2.2 présente des valeurs caractéristiques pour des modes de déformation simples.

K_3	Mode de déformation
-1	Compression uniaxiale ou traction équiuniaxiale
0	Cisaillement
1	Traction uniaxiale ou compression équiuniaxiale

TABLEAU 2.2 – Valeurs caractéristiques de K_3 pour des modes de déformation simples.

Notons qu'un essai de torsion pure sur un cylindre devrait conduire à $K_3 = 0$ sur la surface externe du cylindre. Dans le cas particulier de l'incompressibilité : $K_1 = 0$, et l'équation (2.9) se simplifie comme suit

$$\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \sqrt{(\ln(\lambda_1))^2 + (\ln(\lambda_2))^2 + (\ln(\lambda_3))^2} \\ K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{K_2^3} \ln(\lambda_1) \ln(\lambda_2) \ln(\lambda_3) \end{cases} . \quad (2.10)$$

Remarque : Les contraintes en traction-torsion n'ont pas été présentées dans ce chapitre, mais le calcul du tenseur des contraintes de Cauchy est proposé en Annexe A, ainsi que son expression dans le cas de modèles hyperélastiques néo-Hookéen et de Mooney-Rivlin.

2.5 Conclusion

Certaines propriétés mécaniques et physico-chimiques du SBR utilisé dans ce travail ont été données succinctement, notamment ses réponses mécaniques à des essais monotones de traction uniaxiale, compression uniaxiale et compression plane. L'étude expérimentale des propriétés en fatigue du matériau est réalisée avec une machine de traction-torsion, sur des éprouvettes axysymétriques présentant une partie utile cylindrique sur laquelle les équations de la traction-torsion d'un cylindre parfait s'appliquent. Ces dernières ont été développées, et la multiaxialité dans le cadre des grandes déformations a été abordée par le prisme des invariants du tenseur de Hencky \mathbf{h} , notés K_1, K_2, K_3 . Ces quantités sont utilisées dans le Chapitre 3, pour proposer des indicateurs scalaires décrivant la déformation, et une méthode de construction d'essais de fatigue multiaxiaux.

Chapitre 3

Résultats

Sommaire

4.1	Introduction	60
4.2	Les critères en déformation et extension	60
4.2.1	L'extension maximale	60
4.2.2	Les critères à base de déformations	60
4.3	Les critères en contrainte	61
4.3.1	Contrainte de Cauchy	61
4.3.2	La contrainte effective	62
4.4	Les critères énergétiques	62
4.4.1	La densité d'énergie de déformation	62
4.4.2	La densité d'énergie de fissuration	62
4.5	Les critères par modélisation de l'endommagement	63
4.5.1	L'approche par contrainte équivalente	63
4.5.2	L'approche par couplage de mécanique de l'endommagement et de la méthode de Éléments Finis spatiotemporels non linéaire	63
4.5.3	L'approche par un modèle d'endommagement non local avec prise en compte du gradient d'endommagement	64
4.6	Les critères par approches moins conventionnelles	66
4.6.1	L'approche heuristique à la Dang Van	66
4.6.2	Contrainte d'Eshelby - mécanique configurationnelle	67
4.6.3	L'approche multiparamètre	68
4.7	Conclusion	68

3.1 Introduction

Les caractéristiques de la machine de traction-torsion et de l'éprouvette utilisées pour les essais de fatigue ont été présentées dans le Chapitre 2. En vue de proposer un critère de fatigue, une campagne d'essais de fatigue multiaxiale est à présent construite. Comme on l'a vu dans la Section 1.5 du Chapitre 1, nous avons choisi de distinguer deux types de multiaxialité : la multiaxialité du chargement (conditions de chargement) et le mode de déformation (quantité cinématique en un point matériel). Cette distinction permet de poser la question de la corrélation entre ces deux grandeurs : un essai à conditions de chargement multiaxial, e.g. traction-torsion combinées, induit-il un mode de déformation multiaxial au point matériel d'intérêt ? Ce chapitre propose de répondre à cette question en introduisant une nouvelle méthode de construction d'essais de fatigue, basée sur deux indicateurs cinématiques, que sont l'intensité et le mode de la déformation ; puis en l'appliquant à la construction d'une campagne d'essais de fatigue en traction-torsion (en-phase et hors-phase).

La Section 3.2 présente en premier lieu les raisons qui nous ont poussées à proposer une nouvelle méthode pour construire des essais de fatigue multiaxiaux. Celle-ci se base sur un principe de description de la déformation comme combinaison d'une intensité et d'un mode, et n'est applicable qu'à des essais sans déphasage entre les signaux de chargement. Cette méthode est ensuite appliquée à la construction de deux campagnes d'essais de fatigue en traction-torsion : une en-phase, et une en déphasant les signaux de traction et de torsion. La Section 3.3 présente les résultats de cette campagne. Après quelques observations sur la durée de vie des éprouvettes, ces dernières sont analysées au microscope optique, et plusieurs observations sont faites sur les caractéristiques des amorçages : angle, localisation, nature de l'amorçage et taille estimée du défaut responsable de l'amorçage. Toutes ces observations mettent en lumière certains mécanismes d'endommagement, qui seront utilisés pour la construction d'un critère de fatigue.

3.2 Nouvelle méthode de construction d'essais de fatigue multiaxiaux

Dans cette section, une nouvelle méthodologie de construction d'essais de fatigue est présentée. Étant développée sur la base de résultats d'essais de fatigue en traction-torsion, elle est néanmoins applicable à tous types d'essais de fatigue, de machine ou de géométrie d'éprouvette.

3.2.1 Motivation

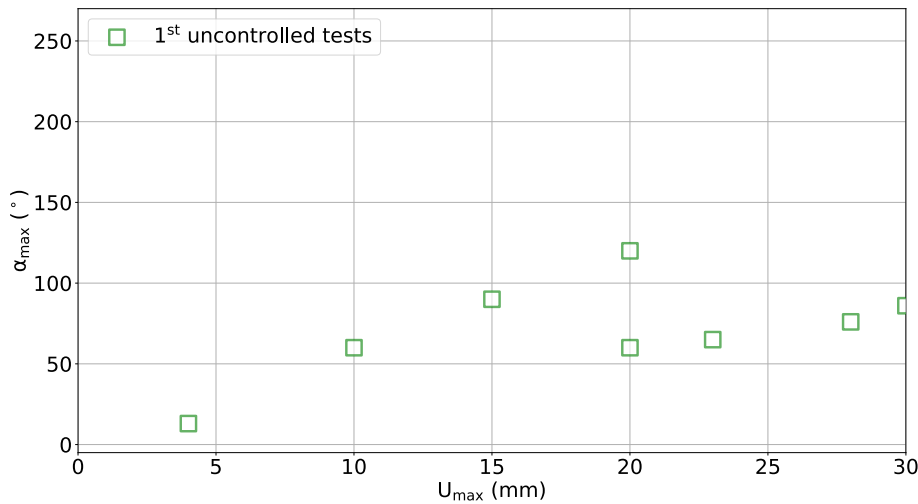
À la réception des premières éprouvettes de traction-torsion (lors de la première année de thèse), une première campagne d'essais de fatigue a été lancée. Sans connaissance du matériau et de ses propriétés en fatigue, plusieurs couples déplacement/torsion imposées ont été choisis « au hasard » (*cf.* Tableau 3.1).

Pour mieux appréhender les différentes conditions de chargement, on remarque que tout essai peut être visualisé dans l'espace des conditions de chargement de la machine (U_{\max}, α_{\max}), pour une valeur de déphasage donnée (ici $\phi = 0^\circ$). Les premiers essais du Tableau 3.1 sont représentés dans cet espace sur la Figure 3.1.

À l'issue de ces tests, les angles d'amorçage des fissures de fatigue ont été mesurés : toutes les éprouvettes présentent un angle d'amorçage perpendiculaire à la direction de traction, comme l'illustre l'exemple de la Figure 3.2. Or, ce résultat est caractéristique d'un essai de traction pure (Saintier *et al.*, 2006; Harbour *et al.*, 2008a). Il semble donc

Test number	U_{\max} (mm)	α_{\max} ($^{\circ}$)	ϕ ($^{\circ}$)
1	20	120	0
2	10	60	0
3	20	60	0
4	15	90	0
5	23	65	0
6	4	13	0
7	28	76	0
8	30	86	0

TABLEAU 3.1 – Premiers essais de fatigue réalisés avant développement de la méthode.


 FIGURE 3.1 – Premiers essais de fatigue réalisés avant développement de la méthode, représentés dans l'espace des conditions de chargement (U_{\max} , α_{\max}).

que, bien que le chargement soit constitué de traction et de torsion combinées, la matière "ne voit pas" la partie torsion du chargement, produisant ces faciès perpendiculaires à la direction de traction.

Ainsi, ces premiers résultats montrent que si le ratio de la traction imposée sur la torsion imposée est trop élevé, le phénomène se retrouve également à l'échelle du milieu continu, au sein même de la zone d'amorçage. Cela soulève la question suivante : comment choisir des conditions de chargement qui assurent un contrôle du ratio traction/torsion ? Autrement dit, **comment définir des conditions de chargement multiaxial (traction-torsion combinées), qui assurent un mode de déformation multiaxial à l'échelle du milieu continu ?** C'est ce que nous allons voir dans ce qui suit.

3.2.2 Vers un contrôle de la multiaxialité des essais de fatigue

3.2.2.1 Descripteurs de l'essai : $K_{2_{\max}}$ et K_3

Pour proposer une méthode de contrôle du mode de déformation, il est nécessaire de d'abord définir un indicateur quantitatif rendant compte de la nature du mode de déformation au sein du matériau, à l'échelle du milieu continu. Dans le Chapitre 2, deux invariants du tenseur de Hencky ont été présentés : K_2 représente l'intensité de la distorsion (il ne prend pas en compte le changement de volume), et K_3 représente le mode de distorsion (on utilisera le raccourci « mode de déformation » dans le cas incompressible), dont la valeur est caractéristique d'un état mécanique élémentaire particulier (traction uniaxiale,



FIGURE 3.2 – Éprouvette de fatigue rompue après un test de traction-torsion de conditions de chargements ($U_{\max} = 28$ mm, $\alpha_{\max} = 76^\circ$). La fissure s’est amorcée (et propagée) perpendiculairement à la direction de traction.

cisaillement, etc.) comme montré dans le Tableau 2.2. De manière naturelle, nous proposons d’utiliser K_3 comme indicateur du mode de déformation de l’essai, et d’utiliser K_2 comme indicateur de l’intensité de la déformation de l’essai, les deux étant calculés en un même point matériel : avec le couple (K_2, K_3) , on définit la totalité de la déformation comme étant la combinaison d’une intensité et d’un mode.

Pour parvenir à proposer des descripteurs de l’essai qui soient scalaires, nous montrons sur la Figure 3.3 les évolutions temporelles de $K_2(t)$ et $K_3(t)$ pour un essai de traction-torsion en-phase, calculés sur le rayon externe, au centre de la partie cylindrique ($Z = L/2$, $R = A$, d’après les notations de la Figure 2.6). On peut y faire deux observations notables :

- K_2 , l’intensité de la déformation, suit exactement l’évolution des conditions de chargement $(U_{\max}, \alpha_{\max})$, et est donc un sinus parfait. **Il semble donc naturel de prendre le maximum du cycle d’intensité, $K_{2\max}$, pour représenter l’intensité globale du cycle.** Sur la Figure 3.3, $K_{2\max} = 0,66$.
- K_3 , le mode de déformation, est quasiment constant au cours du cycle. **On choisit donc la valeur de K_3 à l’instant d’intensité maximale (ici $t_{\max} = T/2$) pour décrire le mode de déformation du cycle.** Sur la Figure 3.3, $K_3 \approx 0,9$ (qui est très proche de la traction uniaxiale à $K_3 = 1$).

Remarque : Un modèle Éléments Finis a également été créé. Ses caractéristiques, ainsi que quelques résultats sont donnés en Annexe B. La Figure B.2a montre notamment que, sur la partie cylindrique de l’éprouvette, K_2 atteint son maximum sur la surface externe du cylindre (en $R = A$).

3.2.2.2 Étapes de la méthode et application aux premiers essais de fatigue

En pratique, la méthode consiste en trois étapes :

1. Définir le mode de déformation souhaité pour l’essai via K_3 : $K_3^{\text{visé}}$;
2. Définir l’intensité de la déformation souhaitée pour l’essai via $K_{2\max}$: $K_{2\max}^{\text{visé}}$;

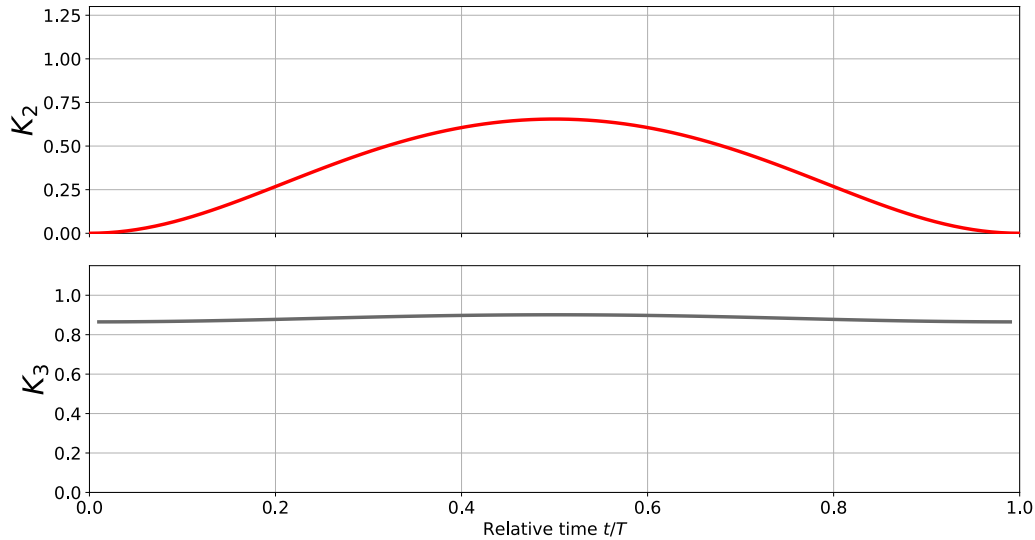


FIGURE 3.3 – Évolutions temporelles des descripteurs de l'essai K_2 (en haut), K_3 (en bas), pour un essai de traction-torsion en-phase de chargement $U_{\max} = 12$ mm, $\alpha_{\max} = 220^\circ$. La cinématique de l'essai peut être décrite par le couple $(K_{2_{\max}} = 0,66, K_3 \approx 0,9)$. Les grandeurs sont calculées sur le plan médian de la partie cylindrique de l'éprouvette, sur le rayon externe.

3. Calculer les couples $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ qui permettent d'atteindre $K_{2_{\max}}^{\text{visé}}$ et $K_3^{\text{visé}}$ simultanément au point matériel considéré.

Les expressions de K_2 et de K_3 n'étant pas linéaires en $(U_{\max}, \alpha_{\max})$, il est complexe d'inverser les relations pour exprimer $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ en fonction de K_2 et K_3 de manière analytique. En pratique, l'espace $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ est discrétisé sur une large gamme de déplacements et d'angles de torsion imposés, puis les couples (K_2, K_3) sont calculés en chaque point de la grille. Il est ainsi aisé de rechercher numériquement tous les couples $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ admissibles répondant aux objectifs fixés. Un exemple d'application de la méthode est illustré dans l'espace des conditions de chargement (*cf.* Figure 3.4). Il peut se lire de deux manières :

- Chaque couple $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ situé sur une ligne pointillée rouge assure un essai à mode de déformation constant (e.g. $K_3 = 0,1$ pour la courbe rouge la plus à gauche). En choisissant un couple sur cette courbe à iso-mode, on peut faire varier l'intensité de la déformation du test qui est alors relative à la distance du point de fonctionnement à l'origine du graphe.
- Chaque couple $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ situé sur une ligne pleine grise assure un essai à intensité de déformation constante (e.g. $K_{2_{\max}} = 0,6$ pour le troisième faisceau partant de l'origine). En choisissant un couple sur cette courbe à iso-intensité, on peut faire varier le mode de déformation du test, qui est alors fonction de la position angulaire du point dans l'espace.

Sur la Figure 3.4 sont aussi reportés les premiers essais de fatigue déjà réalisés. Les deux traits pointillés verts représentent les courbes à iso-mode qui englobent ces essais : tous ces essais présentent un mode de déformation $0,9965 \leq K_3 \leq 0,9999$, ce qui est très proche de 1, la valeur caractéristique d'un essai de traction uniaxiale. Ainsi, l'intuition sur le caractère non multiaxial de ces essais, décrite lors de l'analyse des angles d'amorçage, est confirmée théoriquement. **Malgré la présence d'un angle de torsion imposé et non négligeable a priori, tous ces essais sont en fait caractérisés par un mode de déformation extrêmement proche de la traction uniaxiale ($K_3 = 1$).**

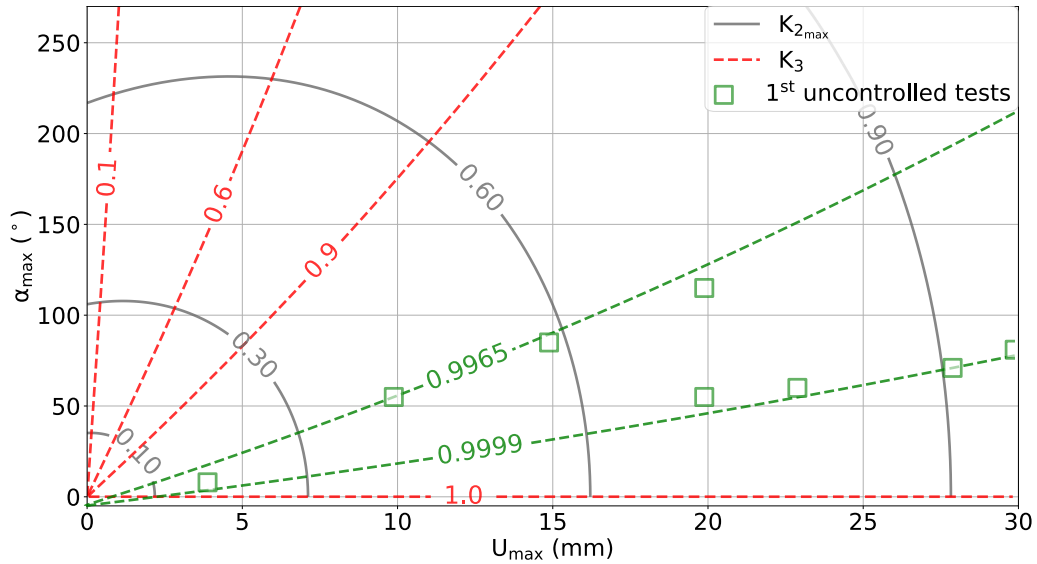


FIGURE 3.4 – Exemples de couples $(U_{\max}, \alpha_{\max})$ menant à des modes de déformation constants (traits pointillés rouges) et à des intensités de déformation constantes (traits pleins gris). Les traits pointillés verts représentent les courbes à iso-mode qui encadrent les premiers essais de fatigue réalisés avant le développement de la méthode.

3.2.3 Extension aux essais déphasés

La définition des descripteurs de l'essai, $K_{2_{\max}}^{\text{visé}}$ et $K_3^{\text{visé}}$, s'est basée sur deux remarques importantes tirées de la Figure 3.3, qui montre la réponse cinématique d'un cycle de traction-torsion en-phase. Cependant, si l'on regarde la réponse cinématique en termes d'intensité K_2 et de mode K_3 , pour un essai avec un déphasage $\phi = 90^\circ$ entre les signaux de déplacement et de torsion imposés (*cf.* Figure 3.5), les développements proposés précédemment pour les essais en-phase sont invalides :

- Bien qu'il existe toujours un maximum d'intensité $K_{2_{\max}}$, il ne permet plus de décrire complètement l'évolution de K_2 , celle-ci ne suivant plus une évolution mathématiquement simple (*e.g.* sinusoïdale).
- Le mode de déformation K_3 n'est quant à lui plus constant au cours du cycle. Il varie entre 0 (lorsque la torsion imposée prédomine sur le déplacement), et 1 (à l'inverse). Il est alors complexe d'extraire de ce cycle une quantité unique décrivant le mode de déformation.

Il convient de préciser que la méthode proposée plus haut ne s'applique donc pas directement à la construction d'une campagne d'essais de fatigue de traction-torsion déphasées. En effet, nous venons de voir que K_3 , le mode de déformation, n'est pas constant lorsqu'un déphasage est présent entre les signaux de chargement : on ne peut pas le ramener à une valeur unique qui décrirait le cycle de manière immédiate. Nous allons donc adopter une stratégie différente, que nous développons dans ce qui suit.

3.2.4 Applications aux conditions d'essai

3.2.4.1 Essais en-phase

Dans ce travail, le nombre d'essais de fatigue a volontairement été limité. Il a alors fallu choisir un nombre restreint de conditions de chargement pour respecter ce cahier des charges. En vue de valider la méthode, il a été décidé de viser deux modes de déformation, et trois intensités pour chaque mode. Les valeurs numériques correspondantes

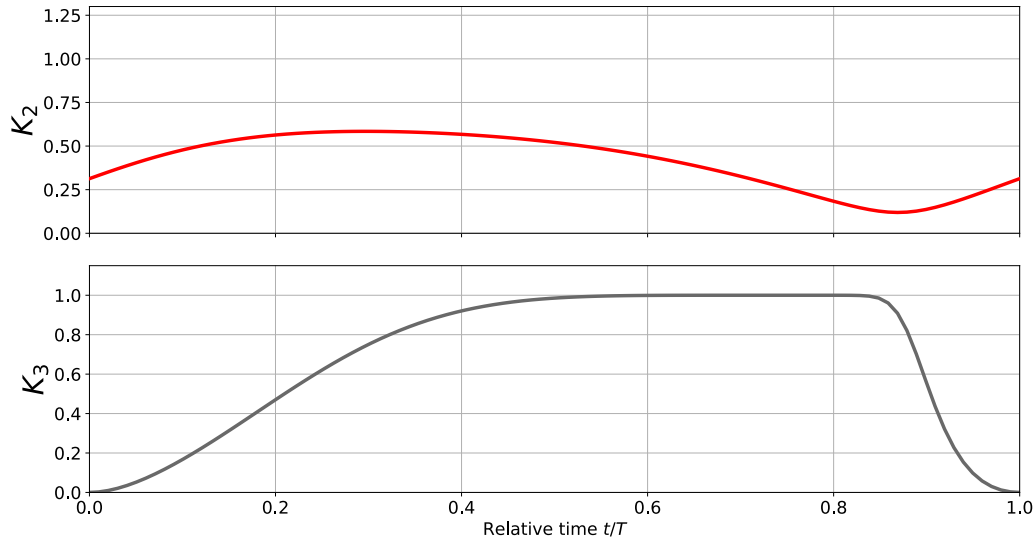


FIGURE 3.5 – Évolutions temporelles des descripteurs de l'essai K_2 (en haut), K_3 (en bas), pour un essai de traction-torsion de chargement $U_{\max} = 12$ mm, $\alpha_{\max} = 220^\circ$, avec un déphasage $\phi = 90^\circ$.

sont reportées dans le Tableau 3.2. Il est à noter que les valeurs numériques des intensités $K_{2\max}^{\text{visé}}$ ont été choisies aussi proches que possible pour les deux modes de déformation : elles correspondent à un compromis entre durée de vie contrôlée (inférieure à 10^6 cycles), limitation de l'auto-échauffement et disponibilité de la machine d'essais. Les conditions de chargement correspondantes sont données dans le Tableau C.1 fourni en Annexe C, et correspondent aux numéros d'éprouvette 1 à 30 inclus.

$K_3^{\text{visé}}$	$K_{2\max}^{\text{visé}}$
0,5	0,45
	0,56
	0,66
1	0,5
	0,55
	0,64

TABLEAU 3.2 – Choix des modes ($K_3^{\text{visé}}$) et intensités de déformation ($K_{2\max}^{\text{visé}}$) pour la campagne d'essai de fatigue de traction-torsion en-phase.

Les essais sont représentés sur la Figure 3.6, dans l'espace des conditions de chargement. Les conditions de chargements choisies assurent que les essais se situent tous sur une courbe à iso-mode de déformation, et sont répartis sur des courbes à iso-intensité de déformation.

3.2.4.2 Essais hors-phase

Pour construire la campagne d'essais déphasés, l'objectif a été de proposer deux lots d'essais à deux déphasages différents, pour un nombre d'éprouvettes similaire à la campagne d'essais en-phase. À la connaissance de l'auteur, les seuls essais de fatigue en traction-torsion déphasés publiés jusqu'à ce jour sont ceux menés par Mars (2001b), qui a choisi de ne retenir que deux déphasages types : la quadrature de phase ($\phi = 90^\circ$) et l'opposition de phase ($\phi = 180^\circ$). Notre choix s'est donc également porté sur ces valeurs de déphasage en visant pour chacune des deux des durées de vie courtes ($\approx 10^2 - 10^3$ cycles), moyennes ($\approx 10^4 - 10^5$ cycles) et longues ($\approx 10^5 - 10^6$ cycles). Les résultats de

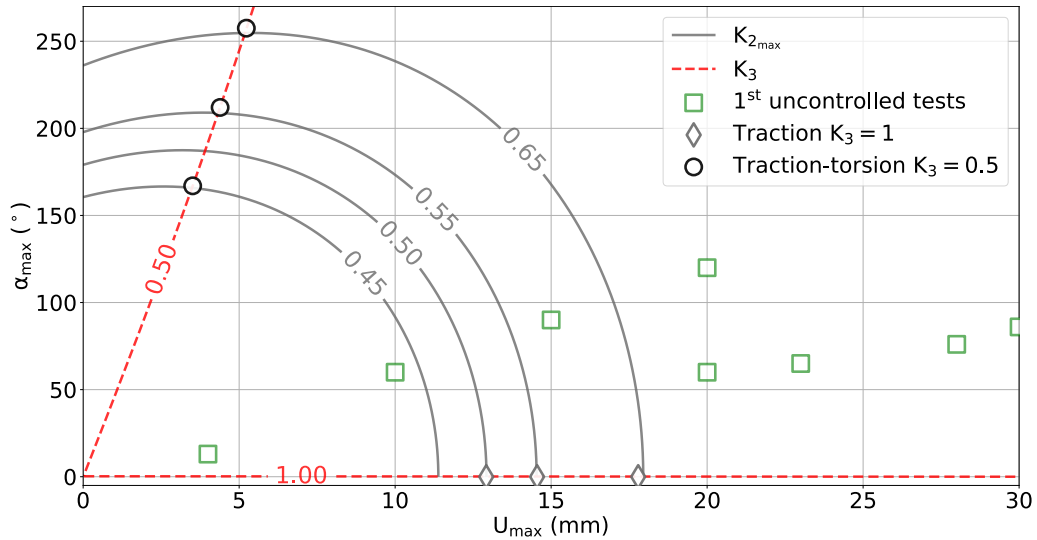


FIGURE 3.6 – Représentation des conditions de chargement des essais de fatigue de traction-torsion en-phase dans l'espace des conditions de chargement (U_{\max} , α_{\max}). Les premiers essais à mode de déformation non contrôlé sont également représentés (carrés verts).

la campagne d'essais en-phase nous ayant permis de mieux connaître le comportement en fatigue de notre matériau, les conditions de chargement ont pu être déterminées de manière à remplir les objectifs de durée de vie fixés. Les conditions de chargement sont données dans le Tableau C.1 fourni en Annexe C, et correspondent aux numéros d'éprouvettes 1A à 27A inclus. Il faut noter que ces conditions de chargement ne sont pas représentables dans le même plan que celui de la Figure 3.6 car cette figure représente le plan (U_{\max} , α_{\max}) pour la valeur de déphasage $\phi = 0^\circ$ uniquement. Il serait toutefois possible de placer les essais avec déphasage sur deux figures distinctes (une pour chaque valeur de déphasage), et d'y tracer les courbes à iso-intensité de déformation ($K_{2\max}$). Par contre, les courbes à iso-mode de déformation (K_3) n'auraient aucun sens puisque K_3 n'est pas constant lorsqu'il y a un déphasage.

3.3 Campagne d'essais

Les résultats de la campagne d'essais sont présentés en détails dans le Tableau C.1 de l'Annexe C, et sont représentés dans un espace type Wöhler ($K_{2\max} - N_f$) sur la Figure 3.7, où N_f représente le nombre de cycles jusqu'à rupture complète de l'éprouvette. Notons que certains essais ont été interrompus avant rupture : soit parce qu'ils ont atteint la limite de 10^6 cycles fixée pour des raisons de temps d'utilisation de la machine, soit pour des problèmes ponctuels tels qu'un crash du logiciel de contrôle de l'essai.

3.3.1 Durées de vie

Nous proposons également une régression des données selon un modèle de Basquin, qui lie l'abscisse N_f et l'ordonnée $K_{2\max}$ par la relation

$$N_f (K_{2\max})^m = C, \quad (3.1)$$

où m et C sont deux paramètres dépendant du matériau étudié. Dans un espace log-log, l'Équation (3.1) revient à un modèle linéaire

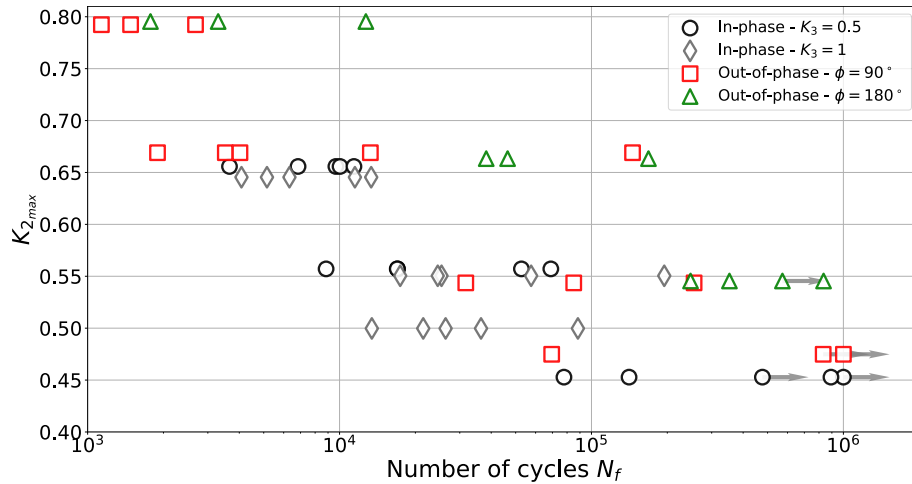


FIGURE 3.7 – Courbe $K_{2_{\max}} - N_f$ des essais de fatigue de traction-torsion en-phase et hors-phase. Les flèches grises représentent les essais ayant été interrompus avant rupture.

$$\ln(N_f) = \ln(C) - m \ln(K_{2_{\max}}). \quad (3.2)$$

La Figure 3.8 présente les régressions linéaires de type Basquin des données de la Figure 3.7.

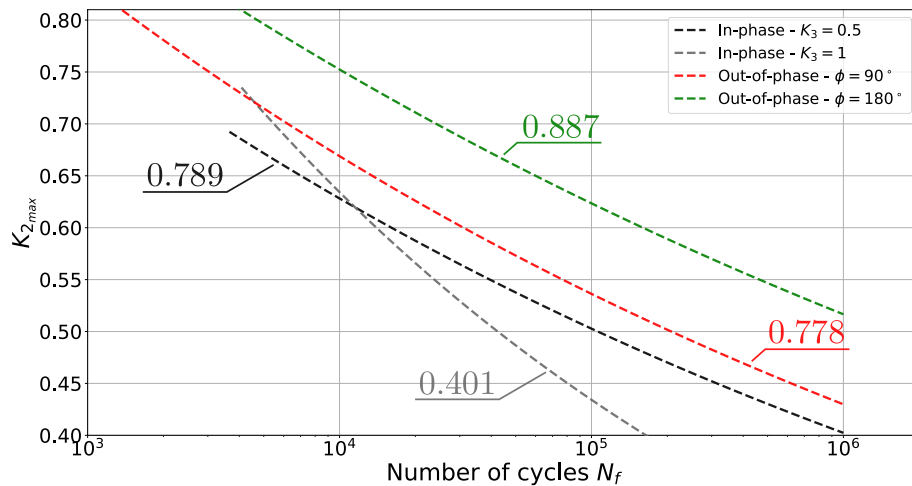


FIGURE 3.8 – Régression de type Basquin des données $K_{2_{\max}} - N_f$ des essais de fatigue de traction-torsion en phase et hors-phase. Les chiffres associés aux courbes correspondent aux coefficients de régression R^2 du modèle de Basquin.

Les deux figures précédentes mettent en lumière trois choses :

- Les résultats des essais de traction uniaxiale ($K_3 = 1$) sont anormaux. En effet, la Figure 3.7 montre que les essais à basse intensité de déformation ($K_{2_{\max}} = 0,50$) ont des durées de vie moins importantes que les essais à intensité de déformation intermédiaire ($K_{2_{\max}} = 0,55$). Cela se traduit sur la Figure 3.8 par un coefficient de régression très faible ($R^2 = 0,401$) ;
- De manière générale, la dispersion est très forte sur ce type de matériau à un niveau de chargement donné (Figure 3.7), et cela est illustré par les très faibles valeurs de coefficients de corrélation R^2 du calage de la loi de Basquin (Figure 3.8) ;

- L'intensité maximale au cours du cycle $K_{2_{\max}}$ ne peut pas être utilisée comme critère de fatigue telle quelle, car elle n'unifie pas les résultats (les courbes de régression linéaire ne sont pas superposées sur la Figure 3.8). Néanmoins, cette représentation est conservée jusqu'à ce qu'un nouveau critère soit proposé.

3.3.2 Répartition des amorçages

Les résultats de l'étude fractographique sont recensés dans le Tableau C.2 de l'Annexe C. Les sites d'amorçage ont été identifiés à l'œil nu, puis leur position exacte a été mesurée au microscope optique Keyence VHX-7000 (des exemples de faciès sont montrés sur la Figure 3.9). Notons que le faciès montré sur la Figure 3.9a est plat (angle d'amorçage quasi nul), tandis que les faciès des Figures 3.9b à 3.9d ne sont pas plans. Le focus ayant été fait sur la zone d'amorçage, le reste du faciès n'est pas dans le plan focal de l'appareil, et est donc légèrement flou.

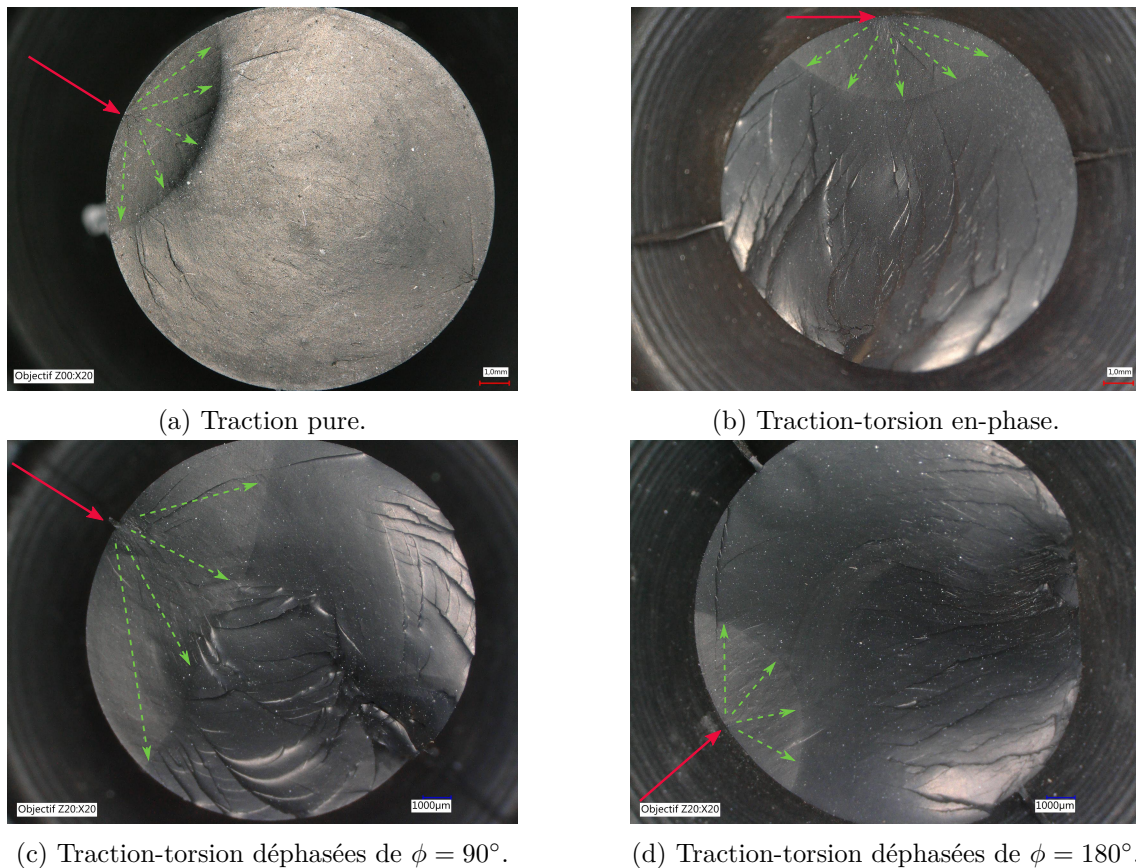


FIGURE 3.9 – Photographies prises au microscope optique de quatre faciès de rupture. Les flèches pleines indiquent le lieu d'amorçage, et les flèches pointillées pointent la direction de propagation à partir lieu d'amorçage jusqu'au début de la zone de rupture catastrophique.

Les résultats sont représentés sur la Figure 3.10 en vue isométrique, et projetés sur 2 plans (parallèle et perpendiculaire à l'axe de révolution). Les mesures faites sont :

- la distance du site d'amorçage à l'axe de révolution de l'éprouvette.
- la position verticale du site d'amorçage. Les champs de déformation étant symétriques par rapport au plan médian horizontal de l'éprouvette, la notion de haut ou bas de cette dernière n'a pas de pertinence. Ainsi, toutes les mesures sont représentées arbitrairement sur la partie basse de l'éprouvette.

On peut également noter que seules deux éprouvettes rompues présentent deux sites

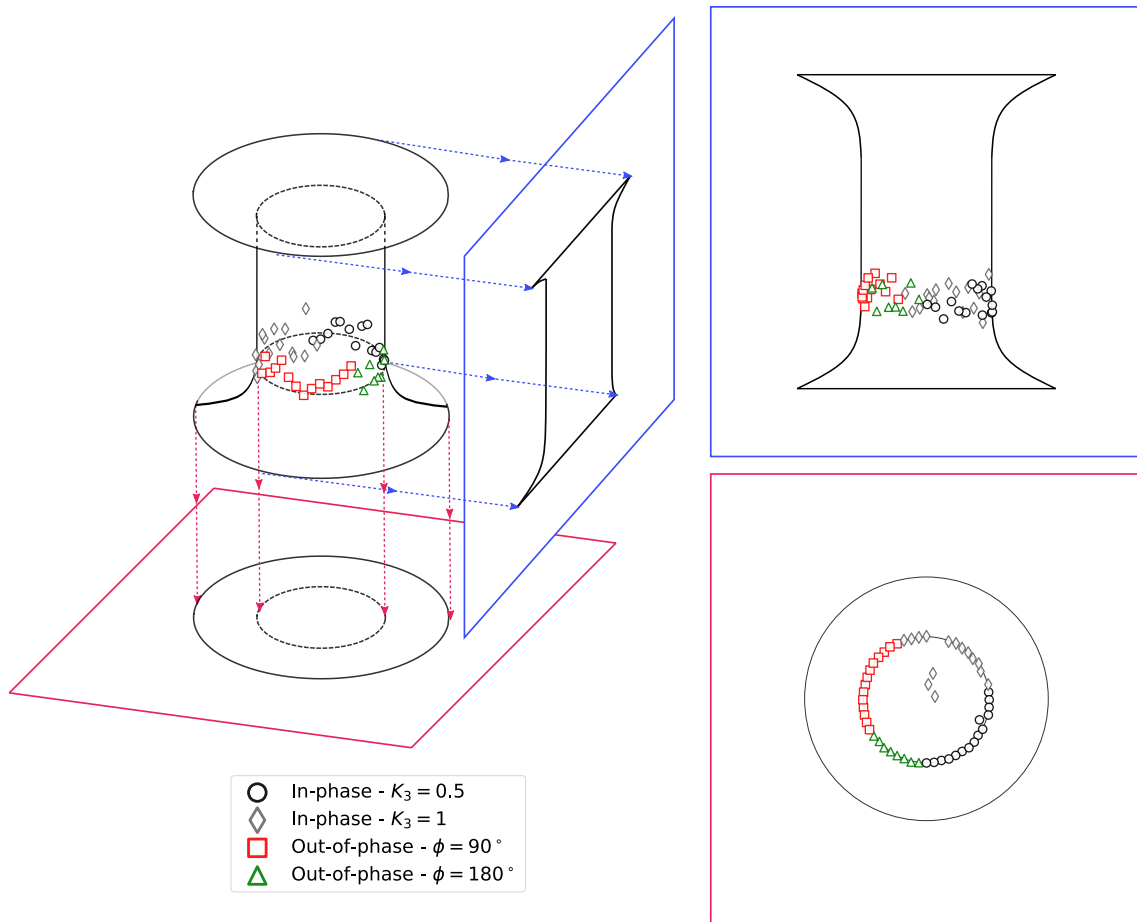


FIGURE 3.10 – Répartition des amorçages de fissure de fatigue en vue isométrique et sur les plans horizontal et vertical. Les amorçages sont représentés à intervalle régulier sur la circonférence de l'éprouvette pour une meilleure visibilité.

d'amorçage distincts sur le faciès de rupture. Cependant, la taille de la zone de propagation de la fissure menant à la rupture catastrophique (fissure principale) est bien supérieure à celle de la fissure secondaire, et ces zones ne se touchent pas : il n'y a pas d'interférence de fissure pendant les phases d'amorçage et de propagation. Ainsi, **cette observation indique que la phase prédominante de la vie en fatigue du matériau est la phase d'amorçage, comme c'est souvent le cas pour les SBR** (Mars, 2007).

3.3.3 Angles d'amorçage

Comme on le voit sur la Figure 3.10, la majorité des amorçages est située sur la surface extérieure de la partie cylindrique de l'éprouvette. Ainsi, la mesure de l'angle est aisée à l'aide du microscope optique, comme montré sur la Figure 3.11.

Les résultats sont présentés sur la Figure 3.12, dans un plan $(\omega, K_{2_{\max}})$. Notons que pour plusieurs éprouvettes, deux mesures ont été retenues, correspondant à un angle minimum et un angle maximum mesuré : c'est l'amplitude de mesure, qui est majorée par notre capacité à mesurer correctement l'angle. Pour plus de lisibilité, tous les résultats des éprouvettes fatiguées à même niveau de chargement (par exemple les éprouvettes {1, 2, 3, 28, 29} du Tableau C.1) sont regroupés dans une même barre d'erreur sur la Figure 3.12, comme illustré sur la partie supérieure de cette dernière. Il s'agit dans ce cas de la dispersion des résultats : à même niveau de chargement, des éprouvettes peuvent mener à des angles d'amorçage différents. **Pour résumer le principe de lecture de**

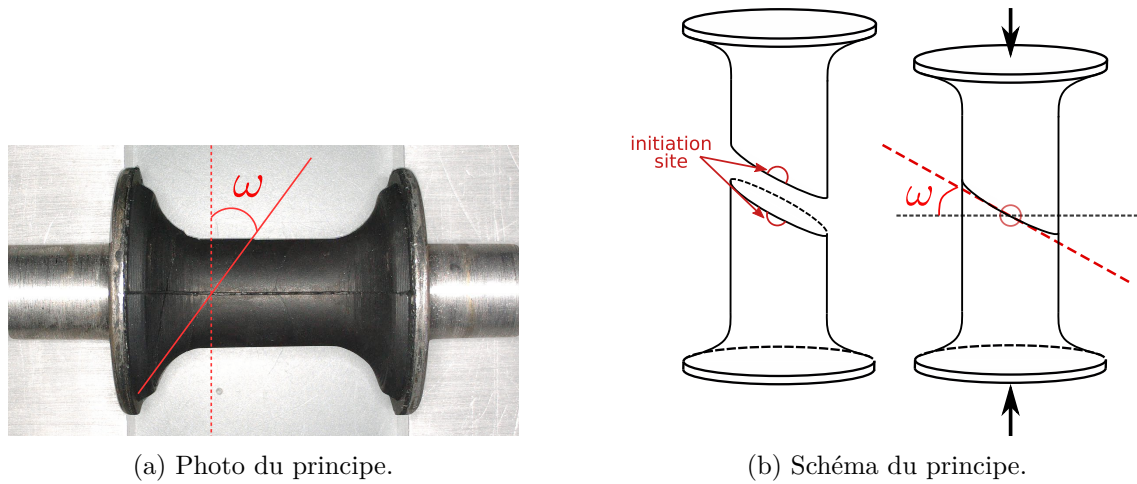


FIGURE 3.11 – Principe de mesure des angles d’amorçage sur les éprouvettes rompues. Une légère compression est appliquée pour maintenir les deux parties rompues en coïncidence.

la Figure 3.12, les barres d’erreur représentent la dispersion des résultats, combinée à l’amplitude de mesure pour chaque éprouvette.

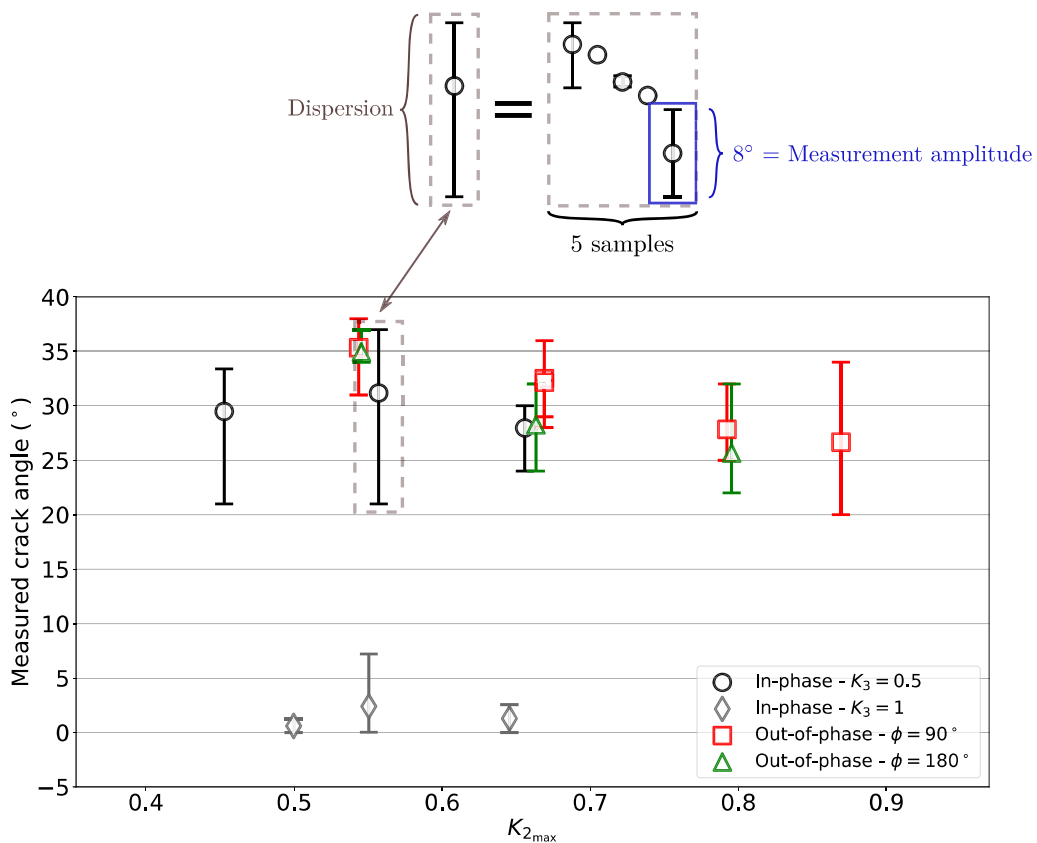


FIGURE 3.12 – Angles d’amorçage ω en fonction de $K_{2,max}$ pour tous les essais de fatigue de la campagne. Comme l’illustre le détail du cadre pointillé, chaque point est la moyenne des mesures pour les éprouvettes à mêmes conditions de chargement, et les barres d’erreur totales sont les extrêmes des barres d’erreur pour ces mesures. La mesure entourée d’un rectangle à 8° d’erreur correspond à l’éprouvette présentée sur la Figure 3.13.

Quatre points importants ressortent de la Figure 3.12 et des données du Tableau C.2 de l’Annexe C :

- L'amplitude de mesure est faible mais non négligeable (elle est en moyenne de $2,3^\circ$ sur l'ensemble des mesures). La Figure 3.13 illustre l'estimation de cette erreur pour un cas extrême, celui du point encadré d'un rectangle bleu sur la Figure 3.12 (d'erreur d'amplitude 8°) : on y voit l'aspect du plan de joint supposé responsable de l'amorçage où la mesure s'effectue. De part et d'autre du plan de joint, la fissure semble avoir un angle différent, ce qui rend impossible l'estimation précise de l'angle. Nous mesurons alors un angle de chaque côté, et ces deux mesures extrêmes sont les limites basse et haute de l'amplitude de mesure. Ce phénomène est dû non seulement à la nature non plane de la mesure (on mesure sur un cylindre), mais également à l'aspect de certains sites d'amorçage. Nous avons relevé neuf éprouvettes rompues pour lesquelles l'amplitude de mesure est comprise entre 5° et 9° ; les défauts responsables de ces amplitudes sont des plans de joints dans quatre cas et des inclusions visibles dans les cinq autres cas. Ainsi, aucune conclusion ne peut être tirée quant à l'existence d'un lien entre type de défaut supposé et grande amplitude de mesure. Notons que les erreurs de mesure sont du même ordre de grandeur que Saintier *et al.* (2006), qui ont réalisé leurs mesures au MEB.

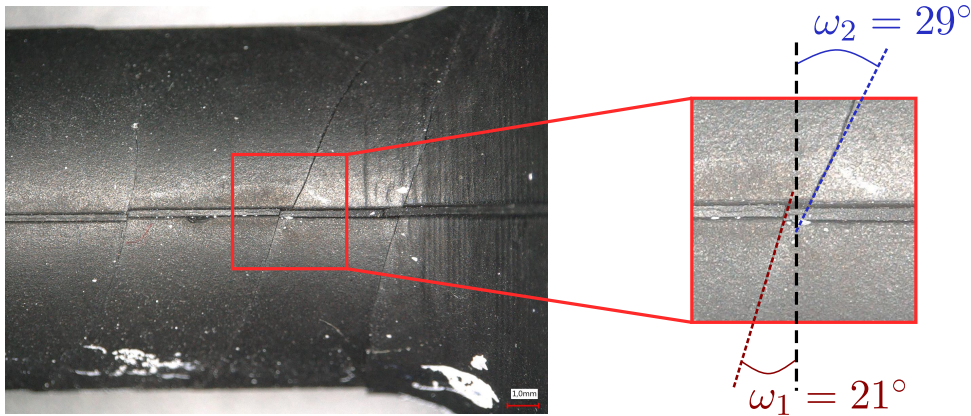


FIGURE 3.13 – Photo de l'angle d'amorçage correspondant à l'essai encadré d'un rectangle pointillé sur la Figure 3.12. Le cadre rouge montre un zoom du site d'amorçage, et la méthode d'estimation de l'amplitude de mesure de l'angle d'amorçage.

- **Les essais de traction pure donnent lieu à des angles d'amorçage très faibles** ($\omega \leq 4^\circ$). En fait, ils devraient théoriquement être nuls, cependant les erreurs de mesure, couplées aux légères déviations qui peuvent apparaître suivant la nature du défaut responsable de l'amorçage (une particule de grande taille, un plan de joint de géométrie hétérogène, etc.) conduisent à considérer des angles non nuls.
- Les angles d'amorçage des essais comprenant de la torsion sont tous situés autour de 30° , et **l'ajout d'un déphasage ne semble pas avoir d'influence**. Cette observation n'est pas en accord avec les résultats de Mars (2002) qui, pour des essais de traction-torsion observe des plans d'amorçage orientés de 21° et 23° pour des déphasages de 0° et 90° respectivement, et des angles de -50° pour un déphasage de $\phi = 180^\circ$ (selon la même convention que dans ce travail).
- **L'intensité de déformation $K_{2_{\max}}$ semble n'avoir qu'une très légère influence sur l'orientation de l'angle d'amorçage pour les quatre types d'essais**, mais ce propos est à nuancer au regard de la présence des barres d'erreur. Les résultats de Saintier *et al.* (2006) montrent cependant une légère influence de l'intensité de chargement sur l'angle d'amorçage pour des essais de fatigue de torsion.

Les observations concernant les essais en-phase (ronds noirs et losanges gris sur la Figure 3.12) permettent de valider la méthode de construction d'essais de fatigue à partir de critères objectifs, car on vient de remarquer qu'à mode de déformation K_3 constant, les angles sont quasiment identiques et ce, peu importe l'intensité de chargement $K_{2_{\max}}$.

3.3.4 Nature des défauts responsables des amorçages

Bien que difficile à estimer, un des aspects clés de la fatigue des élastomères est la détermination de la nature des défauts qui sont supposés être à l'origine de l'amorçage des fissures de fatigue. Les observations ont principalement été menées au microscope optique dont le pouvoir de résolution est bien inférieur à celui d'un MEB, et avec lequel aucune analyse chimique n'est possible. Cependant, **l'objectif fixé ici reste modeste : il s'agit de voir si, selon les types d'essai (traction, traction-torsion en-phase ou hors-phase) et les intensités de déformation, les mécanismes d'amorçage qui en résultent diffèrent. Si c'est le cas, il faudra prendre en compte cette information dans la construction du critère, ce qui complexifie la tâche.**

Pour ce faire, nous choisissons de classer les sites d'amorçage en trois catégories représentées sur la Figure 3.14 : plan de joint, inclusion visible et cause de l'amorçage non déterminée. Les distinctions au microscope optique sont faites selon l'aspect observé :

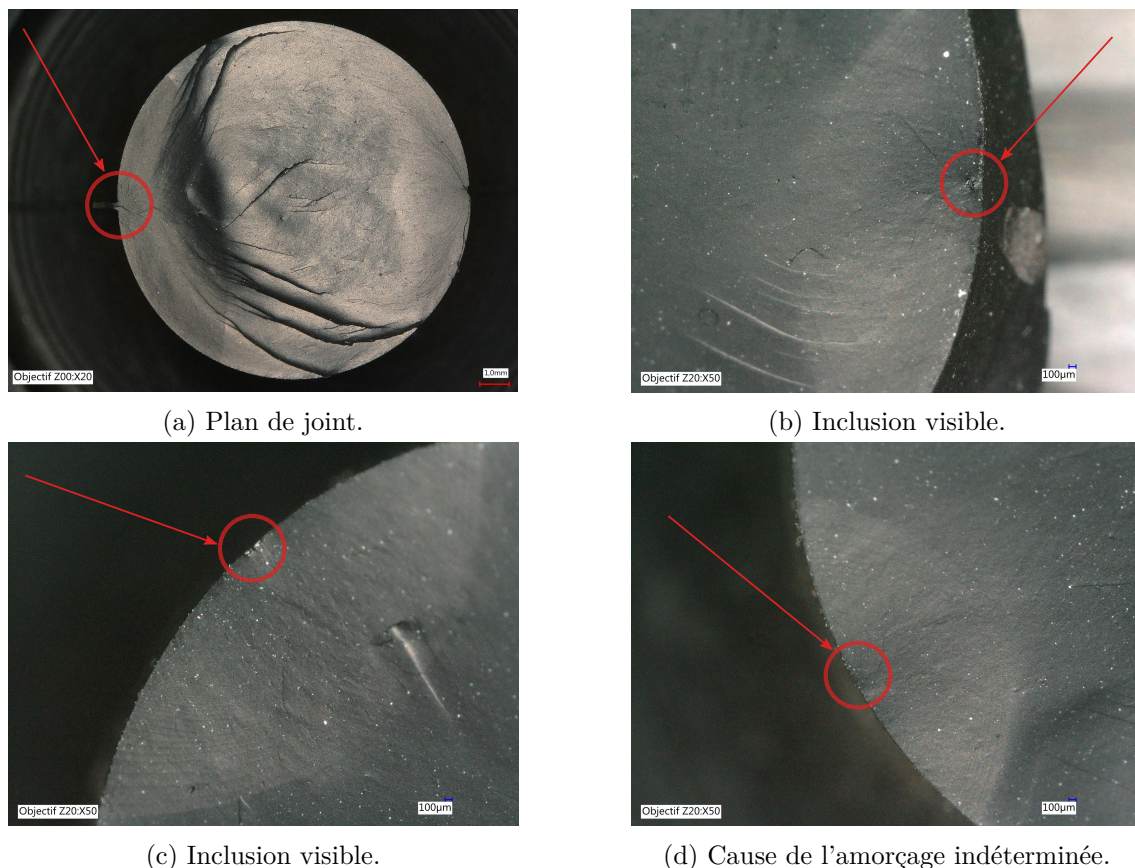
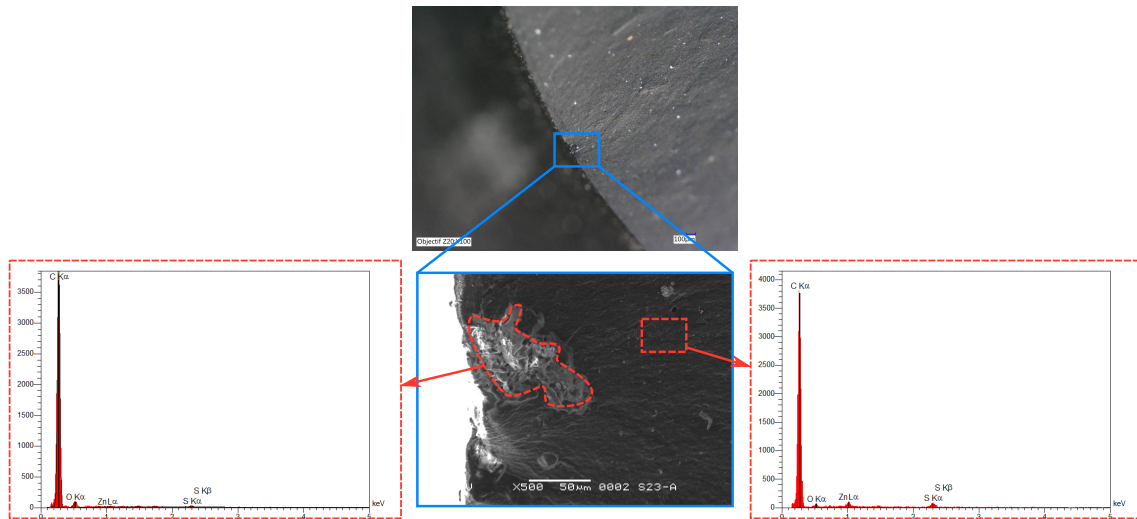


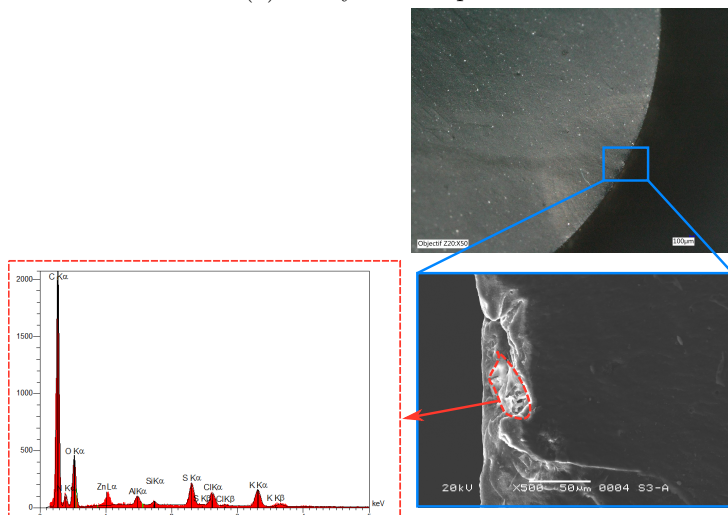
FIGURE 3.14 – Photographies prises au microscope optique des trois types de site d'amorçage recensés lors de l'étude fractographique.

- Les plans de joint sont une excroissance géométrique très visible sur la surface du rayon externe du cylindre (*cf.* Figures 3.14a et 2.5) ;
- La catégorie « inclusions visibles » correspond à des amorçages n'étant sur aucun plan de joint, et sur lesquels la présence d'une inclusion apparaît distinctement.

Cette dernière peut être visible, ou avoir laissé un orifice après s'être détachée de la matrice. Des analyses au MEB et à l'EDX (*Energy Dispersive X-ray spectroscopy* en anglais) ont été réalisées sur certaines de ces inclusions, et sont présentées dans la Figure 3.15. Les images en électrons secondaires montrent une différence



(a) Analyse chimique de la matrice et de l'inclusion n°1 .



(b) Analyse chimique de l'inclusion visible n°2.

FIGURE 3.15 – Étude chimique de la matrice et de deux inclusions visibles avec pour chaque figure la lecture suivante - haut : une photographie au microscope optique du site d'amorçage - encadré bleu plein : une image en électrons secondaires de la zone d'amorçage - encadré pointillé rouge : analyse chimique à l'EDX de la zone en pointillés rouges sur le cliché MEB.

topologique claire entre les inclusions supposées à l'origine de l'amorçage et la matrice. Pour l'une d'entre elles (Figure 3.15a), l'analyse chimique montre une forte teneur en carbone et des teneurs en zinc et en soufre bien plus faibles que pour la matrice. Dans le cas de la deuxième inclusion (Figure 3.15b), l'analyse chimique montre, en plus du pic de carbone, la présence d'oxygène et de plusieurs autres éléments. Dans les deux cas, on peut supposer que ces inclusions sont issues de la formulation ou du procédé. Concernant la formulation, certains ingrédients de nature organique (par exemple acide stéarique, antioxydant, ...) ou minérale (type oxyde) sont susceptibles de se retrouver sous la forme d'inclusions dans la

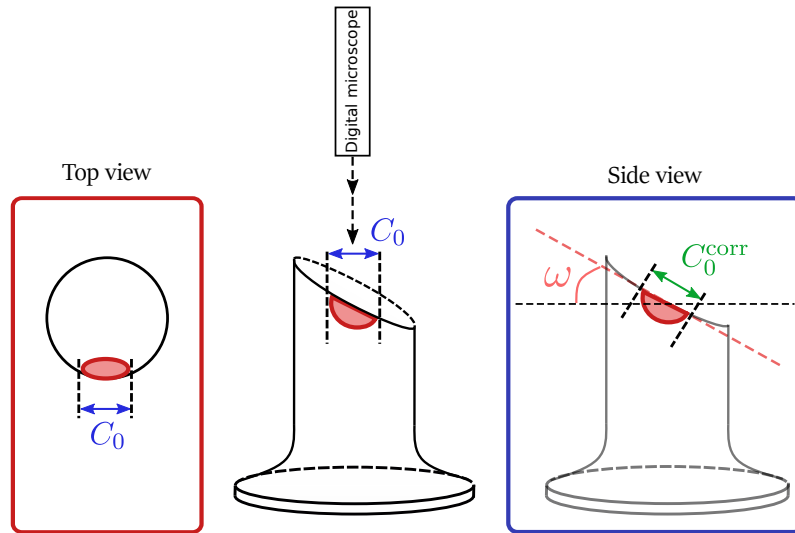
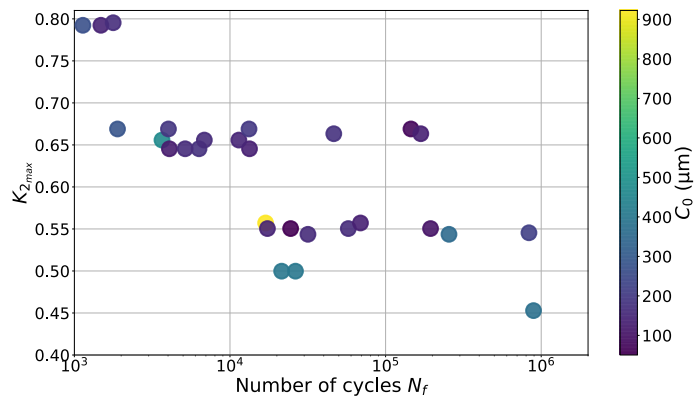
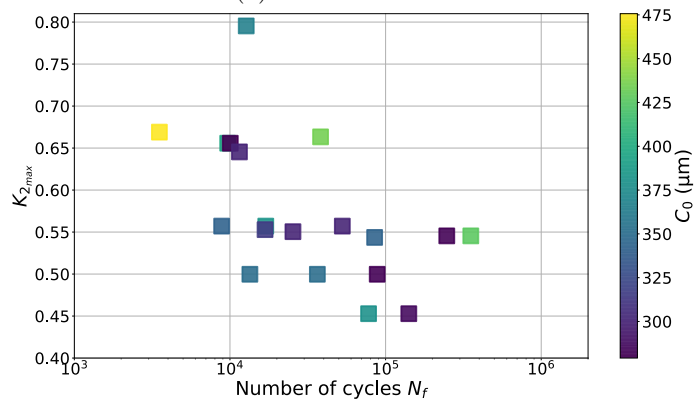


FIGURE 3.17 – Schéma de la mesure de la taille de défaut responsable de l’amorçage - à gauche : vue du dessus du faciès, C_0 est mesuré tangent à la direction de propagation (ici vers le centre de l’éprouvette) - à droite : correction appliquée à la valeur mesurée de la taille de défaut en fonction de l’angle d’amorçage associé.



(a) Inclusion visible.



(b) Plan de joint.

FIGURE 3.18 – Courbes $K_{2,max} - N_f$ par type de défaut détecté supposé ayant mené à rupture : inclusion visible et plan de joint. Les données sont colorées en fonction de la taille mesurée du défaut concerné.

en effet, Balutch *et al.* (2018) ont récemment montré, via une analyse systématique de l’amorçage en fatigue d’éprouvettes en EPDM, que la géométrie des plans de joint est un facteur critique, plus que leur simple taille. De fait, le paramètre de taille tel que choisi dans le présent travail peut s’avérer insuffisant pour expliquer complètement la relation entre l’amorçage sur plan de joint et la durée de vie. Ainsi, **bien qu’elles pourraient être affinées, ces mesures illustrent la tendance déjà connue qui est que la taille de défauts menant à l’amorçage influe sur la durée de vie en fatigue, et ainsi crée de la dispersion dans les résultats en durée de vie** (Mars et Fatemi, 2004a).

3.4 Conclusions

Dans cette partie, nous avons montré qu’il est complexe d’assurer la multiaxialité d’essais de fatigue de traction-torsion sans s’appuyer sur des indicateurs objectifs permettant de piloter un ou des paramètres de l’essai. En exploitant les propriétés mathématiques du tenseur de Hencky, développées dans la Section 2, nous avons proposé une méthode de construction d’essais de fatigue de traction-torsion en-phase basée sur deux paramètres cinématiques qui décrivent complètement la cinématique de l’essai : l’intensité $K_{2_{\max}}$ et le mode de la déformation K_3 ; en choisissant leurs valeurs au préalable, nous calculons aisément les conditions de chargement à appliquer pour mener la campagne. Les mesures d’angle d’amorçage sont bien corrélées aux modes de déformation imposés pour chaque essai, ce qui valide la méthode de construction proposée. Une fois les propriétés en fatigue du matériau connues, une campagne d’essais de fatigue de traction-torsion déphasées a été menée en complément. Les éprouvettes rompues ont toutes été analysées au microscope optique, et plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- L’intensité de chargement, ainsi que le déphasage ne semblent pas avoir d’influence sur la valeur de l’angle d’amorçage. L’introduction d’une multiaxialité (au travers du choix d’un mode de déformation $K_3^{\text{visé}}$) influe par contre sur cet angle ;
- Les sites d’amorçage ont été séparés en trois catégories (inclusion visible, plan de joint ou indéterminé), mais aucune tendance n’a été remarquée quant à leur répartition. Autrement dit, l’amorçage préférentiellement sur l’un ou l’autre des types de défaut ne semble affecté ni par les types d’essais (en-phase ou déphasés), ni par les niveaux de chargements ;
- Les mesures de la taille des défauts étant supposés mener à l’amorçage permettent de mettre en lumière une tendance connue : plus les défauts sont gros, plus la durée de vie associée est courte. Ce propos est à nuancer dans le cas des amorçages sur plans de joint. Une analyse plus approfondie, avec des moyens expérimentaux plus puissants et d’autres critères géométriques, pourrait permettre d’affiner nos conclusions.

La méthode de construction d’essais de traction-torsion, ainsi que les résultats des essais en-phase ont fait l’œuvre d’une publication dans le *Journal of Rubber Research* (Le Mire *et al.*, 2021).

Deuxième partie

Vers un nouveau critère cinématique de fatigue multiaxiale

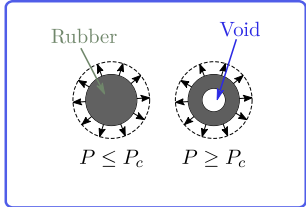
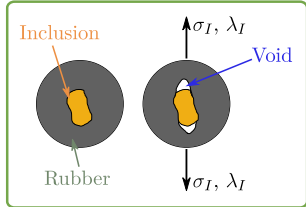
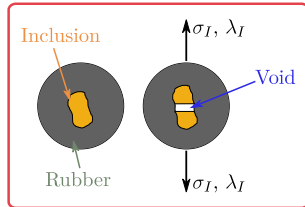
Résumé de la Partie 2

Les pré-requis sur la fatigue ainsi que les résultats des essais de fatigue de traction-torsion combinées ayant été présentés dans la Partie I, il convient maintenant de mettre en place les outils nécessaires à la construction d'un nouveau critère de fatigue, puis de proposer une première expression pour celui-ci. Trois chapitres, résumés ci-dessous, composent la deuxième partie de ce travail.

Le Chapitre 4 propose un état de l'art exhaustif des différents critères de fatigue multiaxiale existants. En les classant par nature (basés sur une déformation, une contrainte, etc.), ce sont environ une vingtaine de grandeurs qui sont décrites, avec, dans la mesure du possible, une analyse de leurs forces et faiblesses. En mettant de côté les critères les moins robustes physiquement (ou dont la motivation physique n'apparaît pas dans les publications), nous mettons en lumière plusieurs points importants, que l'on énonce ci-après. Les critères établis en contrainte se montrent performants, mais sont sujets aux erreurs liées au choix d'une loi de comportement et à la détermination de ses paramètres matériau. Les critères en déformation sont attrayants, car sur les élastomères, la déformation est facilement mesurable. Cependant, les tenseurs de déformation classiquement utilisés pour construire des critères de fatigue sous l'hypothèse d'incompressibilité ne contiennent pas d'information sur la pression hydrostatique, grandeur pourtant fortement liée au phénomène de cavitation. Enfin, très peu d'essais de fatigue multiaxiaux déphasés ont été réalisés, et ils n'ont quasiment jamais été utilisés pour valider les critères existants. À la lecture de cet état de l'art, nous choisissons de proposer un critère de fatigue en déformation, en gardant toutes les remarques précédentes à l'esprit.

Dans le Chapitre 5, plusieurs outils avancés d'analyse de la déformation sont développés, au travers de l'étude détaillée du tenseur des déformations de Hencky \mathbf{h} . Ses propriétés mathématiques nous permettent de le projeter sur une base de tenseurs bien choisis notés $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}$, qui sont au nombre de cinq pour les tenseurs à trace nulle. Nous montrons qu'une telle projection est applicable dans le cas compressible (tenseurs sans condition sur la trace) comme dans le cas incompressible (tenseurs à trace nulle), le premier étant géré en décomposant \mathbf{h} en une partie sphérique et une partie déviatorique. Dans le cas de la traction-torsion d'un cylindre parfait, la partie déviatorique de \mathbf{h} , notée \mathbf{h}^{dev} , peut être décomposée sur la base des $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}$ composée alors de seulement trois éléments $\{\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{Y}^{(3)}\}$. Nous montrons que ces trois tenseurs ont une signification physique très claire : $\mathbf{Y}^{(1)}$ représente une traction uniaxiale, $\mathbf{Y}^{(2)}$ une traction plane et $\mathbf{Y}^{(3)}$ un cisaillement hors-plan. De plus, nous proposons de visualiser dans un espace 3D l'évolution du tenseur $\mathbf{h}(t)$, résultant d'un chargement de traction-torsion. Cette étape nous permet finalement de proposer une nouvelle définition de la moyenne et de l'amplitude du cycle d'un tenseur, en s'appuyant sur l'idée des Plus Petites Sphères Circonscrites, déjà employée dans le cadre de la fatigue des matériaux métalliques.

Dans le Chapitre 6 nous utilisons les développements théoriques du Chapitre 5 pour proposer un critère de fatigue cinématique, valide pour tout type de chargement. Dans un premier temps, nous proposons de mettre en lumière une quantité cinématique, pouvant être considérée comme duale de la pression hydrostatique et ce, sous l'hypothèse d'incompressibilité. Pour cela, nous exploitons encore les propriétés mathématiques du tenseur de Hencky \mathbf{h} , et lui appliquons une décomposition en partie positive/négative, pour nous intéresser à sa seule partie positive \mathbf{h}^+ . Ce dernier tenseur est alors caractéristique d'une transformation compressible, et l'application directe de la projection sur la base des $\mathbf{Y}^{(i)}$ fait apparaître une grandeur que l'on note α_0^+ . Pour nous assurer de la pertinence de considérer α_0^+ comme le dual d'une pression hydrostatique, nous comparons son évolution au cours d'un cycle avec celle de la partie positive de la pression hydrostatique, p_H^+ et ce, pour différents types de chargement. Bien qu'imparfaits, les résultats sont très encourageants, et nous confortent dans l'idée que l'endommagement induit par le phénomène de cavitation peut être modélisé par le scalaire α_0^+ . D'autre part, l'endommagement induit par les phénomènes de décohésion ou de rupture d'inclusions est modélisé par une approche consistant à déterminer « le plan critique », qui nous permet alors de modéliser le phénomène d'« ouverture de défaut ». Ce dernier est le plan subissant le plus d'endommagement *i.e.* celui sur lequel s'amorcent les fissures de fatigue. Grâce à nos résultats d'essais de fatigue, nous pouvons le définir directement par sa normale, qui coïncide avec le vecteur propre associé au maximum de la plus grande extension principale au cours du cycle. Nous appliquons ensuite encore une fois les développements théoriques précédents : en exprimant le tenseur de Hencky \mathbf{h} dans une base contenant la normale au plan critique à chaque instant, puis en le projetant sur la base tensorielle des $\mathbf{Y}^{(i)}$, nous supposons qu' $\alpha_1^{(C)}$ est représentatif de la traction-compression uniaxiale qui s'applique sur le plan critique. Nous proposons finalement une première expression d'un critère de fatigue noté Γ , et qui peut être vu comme une loi des mélanges de quantités dérivant de $\alpha_1^{(C)}$ et α_0^+ . Ces deux grandeurs modélisent les mécanismes d'endommagement déjà présentés dans le Chapitre 1, comme résumé dans le tableau ci-dessous.

		Mécanismes		
		Cavitation	Decohesion	Rupture of inclusion
				
Modélisation		Cavitation : $\alpha_0^{+m} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_0^+(t) dt$		
		Traction sur plan critique : $\alpha_1^{(C)m \nearrow} = \frac{1}{T} \sum_k \int_{I_k} \alpha_1^{(C)}(t) dt$		

Correspondance entre les mécanismes d'amorçage en fatigue et les modélisations proposées avec leurs formulations mathématiques.

La première expression du critère retenue est

$$\Gamma = \Phi \left(\frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}} \right) + (1 - \Phi) \left(\frac{\alpha_1^{(C)m/\nearrow}}{\alpha_1^{\text{crit}}} \right),$$

où Φ est un paramètre à déterminer, et α_0^{crit} et α_1^{crit} sont des seuils également à déterminer.

Chapitre 4

État de l'art des critères de fatigue existants

Sommaire

5.1	Introduction	72
5.2	Décomposition d'un tenseur symétrique réel sur une base tensorielle . .	72
5.2.1	Une décomposition récente pour les tenseurs symétriques à trace nulle	72
5.2.2	Extension à l'ensemble des tenseurs symétriques	73
5.3	Cas particulier de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre .	73
5.3.1	Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} avec l'hypothèse d'incompressibilité	73
5.3.2	Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} sans l'hypothèse d'incompressibilité	75
5.3.3	Interprétation physique de la décomposition additive de \mathbf{h} . . .	75
5.4	Applications	77
5.4.1	Visualisations 3D de chemins de déformation	77
5.4.2	Vers une définition de la moyenne et de l'amplitude de cycles de déformation	77
5.5	Conclusion	79

4.1 Introduction

Nous avons vu dans le Chapitre 1 que la fatigue des élastomères a commencé à être étudiée dans les années 1940, notamment par Cadwell *et al.* (1940). Pendant plus d'un demi siècle, ce phénomène a surtout été observé du point de vue du matériau, en étudiant notamment les effets de la formulation (type de charges, quantité de charge, etc.) sur le comportement en fatigue. Durant tout ce temps, l'extension λ appliquée aux différentes éprouvettes a été majoritairement utilisée pour quantifier le phénomène de fatigue, notamment de par la nature purement uniaxiale des chargements. Ce n'est qu'à la fin des années 1990 qu'ont commencé à apparaître les premières études décrivant la mécanique du phénomène, et qui proposent des prédicteurs de la durée de vie des pièces. Depuis, on dénombre un peu plus d'une dizaine de critères de fatigue dans la littérature scientifique. Il existe plusieurs types de critères, chacun basé sur différentes grandeurs de la Mécanique des Milieux Continus. On retrouve souvent des classifications de ces critères en trois grandes familles selon qu'ils soient basés sur une déformation, une contrainte ou une énergie, mais d'autres classifications existent avec chacune leur pertinence. Dans ce chapitre, nous proposons un état de l'art exhaustif (à la connaissance de l'auteur) des différents critères de fatigue pour les élastomères proposés depuis le début de l'étude du phénomène, en les regroupant en cinq familles : les critères basés sur des déformations, des contraintes, une énergie, les critères exploitant la théorie de la mécanique de l'endommagement et enfin ceux qui ont un fondement que l'on peut qualifier de moins orthodoxe. Notons que deux états de l'art ont été réalisés jusqu'ici sur le sujet de la fatigue des élastomères (Mars et Fatemi, 2002; Tee *et al.*, 2018).

4.2 Les critères en déformation et extension

4.2.1 L'extension maximale

Historiquement, les premières études de fatigue sur élastomères montrent qu'il est possible de relier le nombre de cycles à rupture aux valeurs minimale et maximale de l'extension $\lambda = l/l_0$ (ratio de la longueur déformée sur longueur initiale) appliquée à l'éprouvette (Cadwell *et al.*, 1940). Plus tard, cette idée a été reprise et améliorée : en observant que les amorçages sont orientés perpendiculairement à la direction de la plus grande extension principale λ_{\max} au cours du cycle, cette grandeur a naturellement été proposée comme critère de fatigue, mais n'a pas su unifier les résultats des essais multiaxiaux, comme le montrent Ayoub *et al.* (2014).

4.2.2 Les critères à base de déformations

Dans une étude récente, Belkhiria *et al.* (2020) ont analysé la pertinence de plusieurs critères de fatigue uniaxiale, tous basés sur l'extension λ appliquée à l'éprouvette lors d'essais de traction uniaxiale, où $\lambda = l/l_0$ est le ratio de la longueur déformée sur la longueur initiale :

- La déformation logarithmique $\epsilon_{\log} = \ln(\lambda)$;
- La déformation de l'ingénieur $\epsilon_{\text{eng}} = \lambda - 1$;
- La déformation de Green-Lagrange $\epsilon_{\text{G-L}} = \frac{\lambda^2 - 1}{2}$;
- La déformation d'Euler-Almansi $\epsilon_{\text{E-A}} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda^2}$;
- La déformation octaédrale, qui est la partie du tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E}

agissant sur l'un des huit plans octaédraux, et définie par

$$\epsilon_O = \frac{1}{3} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + (E_{22} - E_{33})^2 + (E_{11} - E_{33})^2 + 6(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)}. \quad (4.1)$$

En réalisant des essais de traction sur les géométries AE2 et AE42 (utilisées notamment par Ayoub *et al.* (2011, 2012)), la puissance prédictive de chacune de ces mesures de déformation est étudiée en calculant le coefficient de régression R^2 associé à une régression linéaire de type Basquin ($N_f = \alpha(P)^\gamma$, P étant l'une des mesures de déformation). Il est ainsi montré que toutes les mesures de déformation étudiées prédisent bien les résultats de fatigue ($R^2 > 0,9$), et que les plus performantes sont la déformation octaédrale et celle de Green-Lagrange. Ces observations étant vraies pour les deux géométries, il est conclu que seules les propriétés matériaux ont une influence sur le comportement en fatigue des matériaux élastomères. On notera cependant qu'aucune extension aux essais multiaxiaux déphasés n'a été proposée. De manière générale, il a souvent été fait mention de l'incapacité de la déformation seule à rendre compte des phénomènes d'endommagement en fatigue (Saintier *et al.*, 2006; Brunac *et al.*, 2009). En effet, l'endommagement des élastomères pouvant être lié au phénomène de cavitation (*cf.* Section 1.4 du Chapitre 1), il semble nécessaire de le prendre en compte dans un critère de fatigue. Or, du fait de l'incompressibilité de cette classe de matériaux, les tenseurs de déformation ne dépendent pas de la pression hydrostatique, qui est le paramètre classiquement utilisé pour prédire la cavitation, ce qui rendrait l'utilisation de la déformation insuffisante. On note cependant que ce type de critère reste intéressant, dans la mesure où la déformation est facilement mesurable en grandes déformations, ce qui n'est pas encore le cas de la contrainte (la mesure de la contrainte sans choix préalable de modèle est un sujet de recherche très récent (Dalémat *et al.*, 2019)).

4.3 Les critères en contrainte

4.3.1 Contrainte de Cauchy

Avec le même raisonnement que pour l'extension principale maximale, certains travaux ont proposé d'utiliser le maximum lors d'un cycle de la plus grande contrainte de Cauchy σ_{\max} sur des élastomères qui ne cristallisent pas sous contrainte (André *et al.*, 1999; Abraham *et al.*, 2005), mais les résultats n'étaient pas satisfaisants. Ayoub *et al.* (2014) ont également essayé ce critère sur leurs essais, avec plus de réussite que pour l'extension principale maximale. La contrainte de Cauchy a aussi été exploitée par Saintier *et al.* (2006) : du fait de la coaxialité des tenseurs de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et de Cauchy-Green gauche \mathbf{b} (Holzapfel, 2000), Saintier *et al.* (2006) observent que les amorçages sont également perpendiculaires à la direction de la plus grande contrainte de Cauchy au cours du cycle. Ils proposent alors de définir le plan critique (*i.e.* le plan qui « subit » le plus d'endommagement) comme étant le plan de normale $\vec{v}_I(t_{\max})$, où \vec{v}_I est la direction propre associée à la plus grande contrainte de Cauchy σ_I , et t_{\max} est l'instant où σ_I est maximale. En notant $\vec{n}(t)$ l'évolution de l'orientation de ce plan défini par

$$\vec{n}(t_{\max}) = \vec{v}_I(t_{\max}), \quad (4.2)$$

il est possible de calculer son orientation à chaque instant du cycle en faisant appel au gradient de la transformation $\mathbf{F}(t)$, et à la formule de Nanson (Holzapfel, 2000). On a alors l'expression de $\vec{n}(t)$ au cours du temps

$$\vec{n}(t) = \frac{\mathbf{F}^{-T}(t)\mathbf{F}^T(t_{\max})\vec{n}(t_{\max})}{\|\mathbf{F}^{-T}(t)\mathbf{F}^T(t_{\max})\vec{n}(t_{\max})\|}. \quad (4.3)$$

Finalement, leur idée est de suivre l'historique de la contrainte de Cauchy projetée sur le plan critique, puis de définir le critère de fatigue comme étant le maximum de cette valeur sur le cycle

$$\Phi_{\text{damage}} = \max_{t \in [0, T]} (\sigma_n(t)) = \max_{t \in [0, T]} \left(\vec{n}^T(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}(t) \right). \quad (4.4)$$

Notons que lorsqu'un renforcement sous tension est présent (type cristallisation sous contrainte pour un NR), un terme est ajouté au critère.

4.3.2 La contrainte effective

D'autres critères basés sur les contraintes ont pu voir le jour, comme par exemple la contrainte dite effective proposée récemment par Luo (2021), définie par

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_{f1}^2 + \sigma_{f2}^2 + \sigma_{f3}^2}, \quad (4.5)$$

où les σ_{fi} sont les amplitudes des contraintes principales de Cauchy. En comparant ces amplitudes avec des valeurs caractéristiques, l'auteur propose de ne retenir que la partie endommageante de la contrainte. On notera cependant que, malheureusement, les hypothèses relatives à la description des phénomènes physiques par ce critère ne sont pas détaillées dans la publication qui y fait mention.

4.4 Les critères énergétiques

4.4.1 La densité d'énergie de déformation

La densité d'énergie déformation W a été utilisée pour prédire la durée de vie en fatigue de par son caractère simple et facilement accessible, même pour des chargement complexes (*e.g.* multiaxiaux déphasés). Les conclusions quant à ses performances sont mitigées : Abraham *et al.* (2005) unifient bien leurs résultats sur EPDM et SBR chargés ou non, mais d'autres études sont bien plus pessimistes, notamment sur l'unification de la traction et de la traction-torsion (Ayoub *et al.*, 2014), ou sur l'unification de la traction uniaxiale et équibiaxiale (Roberts et Benzies, 1977). Sa nature de paramètre scalaire lui empêche également de prédire l'orientation des fissures.

4.4.2 La densité d'énergie de fissuration

Ayant montré que ni l'énergie de déformation, ni le maximum de la première extension principale n'unifient les résultats en traction uniaxiale et équibiaxiale, Roberts et Benzies (1977) font l'hypothèse qu'en réalité, seule une portion de l'énergie W participe activement à l'ouverture des fissures au sein des matériaux élastomères. Bien des années plus tard, et en exploitant cette hypothèse, Mars (2001a) développe un nouveau critère appelé densité d'énergie de fissuration (CED en anglais pour *Cracking Energy Density*) et usuellement noté W_C . L'idée de l'auteur est que, dans certains cas simples, la mécanique de la rupture permet de relier le taux de restitution d'énergie T lié à la propagation d'une fissure, à la densité d'énergie de déformation W loin de celle-ci

$$T = 2kWc, \quad (4.6)$$

avec k un paramètre matériau et c la longueur de la fissure considérée. Cependant, cette relation n'est vraie que dans des conditions spécifiques (chargement uniaxial sur éprouvette *Pure shear*), et il a été vu au-dessus que se reposer sur W pour prédire le comportement en fatigue n'est pas recommandé. Ainsi, Mars (2001a) propose le développement de la CED en créant une pseudo énergie directionnelle, définie de manière incrémentale par

$$dW_C = \vec{r}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{d\epsilon}, \quad (4.7)$$

où \vec{r} est la normale au plan matériel considéré, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $\vec{d\epsilon}$ est le vecteur déformation agissant sur ce plan matériel. Cette grandeur est ensuite incrémentée sur tout le cycle, et calculée pour tous les plans de normale $\{\vec{r}_i\}_{i=1,\dots,M}$, où M est le nombre de plans retenus pour la recherche (*i.e.* le nombre de domaines en laquelle est divisée la sphère unité). Le plan critique est alors le plan qui maximise W_C , et donc minimise la durée de vie. Notons qu'une rationalisation de l'extension aux grandes déformations a été proposée par la suite, ainsi qu'une nouvelle formulation mieux adaptée (Zine *et al.*, 2006),

$$dW_c(\theta) = \frac{1}{\vec{R}_\theta^T \mathbf{C}^{-1} \vec{R}_\theta} \vec{R}_\theta^T \mathbf{S} d\mathbf{E} (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \vec{R}_\theta = \frac{\vec{R}_\theta^T \mathbf{S} d\mathbf{E} \mathbf{C}^{-1} \vec{R}_\theta}{\vec{R}_\theta^T \mathbf{C}^{-1} \vec{R}_\theta}, \quad (4.8)$$

où \vec{R}_θ est le vecteur unitaire normal au plan matériel considéré dans la configuration initiale, \mathbf{S} est le tenseur de Piola-Kirchhoff 2, \mathbf{E} est le tenseur de Green-Lagrange et \mathbf{C} est le tenseur de Cauchy-Green droit. Ce critère est à ce jour le seul utilisé dans un logiciel commercial, Endurica¹, dont l'entreprise éponyme a été fondée par William Mars à la suite de ces développements.

4.5 Les critères par modélisation de l'endommagement

4.5.1 L'approche par contrainte équivalente

La mécanique de l'endommagement repose sur le concept de dégradation progressive du matériau (Lemaitre et Chaboche, 1994). Pour en rendre compte dans les équations, le point de départ est souvent l'écriture d'une contrainte dite effective, définie par

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}, \quad (4.9)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte de Cauchy, et D est le paramètre d'endommagement qui vaut 0 lorsque le matériau est sain, et 1 lorsque le matériau est rompu. D'abord appliqué à la fatigue des élastomères dans le cas de chargements uniaxiaux par Wang *et al.* (2002), le concept est ensuite étendu aux chargement multiaxiaux par Ayoub *et al.* (2011), qui proposent également une généralisation de la formulation à un modèle d'Ogden d'ordre n pour matériaux isotropes incompressibles. Le critère de fatigue qui en découle est une contrainte équivalente notée S_{eq} définie par

$$S_{eq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_i^{\alpha_j - 2} + p \lambda_i^{-2} \right) \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_i^{\alpha_j - 1} + p \lambda_i^{-1} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n \mu_j (\alpha_j - 2) \lambda_i^{\alpha_j - 3} + \frac{\partial p}{\partial \lambda_i} \lambda_i^{-2} - 2p \lambda_i^{-3} \right)}, \quad (4.10)$$

où $\{\alpha_j, \mu_j\}_{j=1,\dots,n}$ sont les paramètres matériau de la loi de comportement, p est la pression hydrostatique inconnue issue de l'hypothèse d'incompressibilité, et les $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ sont les extensions principales. Ce critère est, d'après l'étude menée par Ayoub *et al.* (2014), celui qui unifie le mieux les résultats de fatigue sur AE2 et AE42. Cependant ce critère n'a pas été validé sur des essais multiaxiaux déphasés.

4.5.2 L'approche par couplage de mécanique de l'endommagement et de la méthode de Éléments Finis spatiotemporels non linéaire

En s'appuyant sur le concept de mécanique de l'endommagement introduit plus haut, Wada *et al.* (2018) proposent une nouvelle méthode de simulation de l'endommagement

1. <https://endurica.com/>

dans les matériaux élastomères. Celle-ci se base sur l'approche *Direct Numerical Simulation* (DNS), qui consiste à coupler une méthode Éléments Finis avec un découpage du domaine temporel I en sous-domaines $I_n =]t_{n-1}, t_n[$ autorisant les discontinuités entre ces derniers. Cela permet de prendre en compte les évolutions des propriétés matériaux intrinsèques à ces matériaux (*e.g.* effet Mullins, viscoélasticité, fatigue, etc.) dans une simulation numérique. Dans cette méthode, le déplacement est interpolé comme suit

$$\vec{u}^h(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=1}^{n_s} N_i(\mathbf{X}, t) \vec{d}_i, \quad (4.11)$$

où $N(\vec{X}, t)$ est la fonction de forme choisie, d_i est le vecteur déplacement aux nœuds et n_s le nombre de nœuds, et les fonctions de forme sont définies par

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{N}_s, \quad (4.12)$$

avec \mathbf{N}_s et \mathbf{N}_t respectivement les fonctions de forme spatiales et temporelles. Ainsi, les fonctions de forme classiquement utilisées pour la méthode des Éléments Finis sont enrichies d'une dimension temporelle. Ensuite, la notion d'endommagement est introduite en faisant appel à la mécanique de l'endommagement : le potentiel hyperélastique est pris de la forme

$$W = (1 - D) \{W_1(\mathbf{E}) + W_2(\mathbf{E} - \mathbf{E}^\pi)\} + \frac{1}{2} C_x \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.13)$$

où D représente l'endommagement isotrope, et α une grandeur liée aux glissements internes (à la friction au sein de la matière). Toutes deux étant définies comme des variables d'état, leur valeur est mise à jour à chaque itération, selon leur distance par rapport à un seuil. \mathbf{E} et \mathbf{E}^π sont respectivement les tenseurs de Green-Lagrange total et inélastique (*i.e.* $\frac{1}{2}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{I})$), et W_1 et W_2 sont des potentiels hyperélastiques. C_x n'est pas défini dans la publication.

Ce modèle est validé au travers de trois exemples :

- Une plaque soumise à une pression sinusoïdale est simulée, et les résultats via la méthode de découplage spatio-temporel sont en adéquation avec les résultats de la méthode Éléments Finis.
- Des essais de fatigue sur une éprouvette en caoutchouc synthétique renforcé au noir de carbone de type haltère (ou *dogbone*) sont menés. Ils sont ensuite simulés via la présente méthode : la contrainte dans la direction de traction est bien simulée, et les durées de vie sont bien prédites par l'élongation nominale (jusqu'à environ 300 cycles).
- Des essais de fatigue sur bande entaillée sont menés puis simulés par la présente méthode. Les durées de vie à rupture sont bien prédites par le maximum de la contrainte nominale (jusqu'à 1244 cycles). Le domaine des grands nombres de cycles est exploré numériquement, mais aucune expérience ne vient valider les calculs.

Cette méthode, bien que prometteuse, n'a été validée que sur des cas de chargement uniaxiaux et des géométries simples. Une extension à des cas plus complexes est nécessaire pour en valider la pertinence. On notera également que seuls les faibles nombres de cycle ont été étudiés (moins de 1300 cycles), et qu'il est donc impossible en l'état de l'utiliser pour les grands nombres de cycle.

4.5.3 L'approche par un modèle d'endommagement non local avec prise en compte du gradient d'endommagement

Jha *et al.* (2019) proposent de comparer le modèle local proposé par Ayoub *et al.*

(2011) avec leur modèle, celui-ci étant basé sur un endommagement non local. Dans ce cadre, une fissure plongée dans un milieu continu est représentée non pas par une discontinuité (*i.e.* une absence de matière), mais par la présence d'un champ de phase d'endommagement, comme montré sur la Figure 4.1. La fissure « réelle » correspond à $\phi = 1$, et sa présence crée un gradient d'endommagement dans son voisinage ($\phi < 1$). Dans le cas

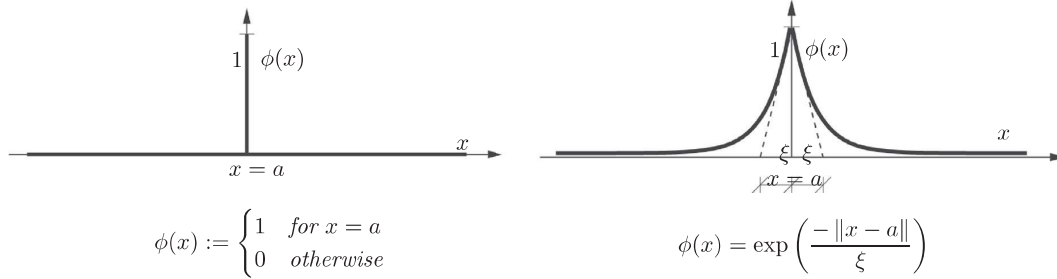


FIGURE 4.1 – Description mathématique d'une fissure selon deux approches : (gauche) fissure discrète, (droite) fissure représentée par un champ de phase, où ξ est un paramètre d'échelle. D'après de Jha *et al.* (2019).

du modèle local, la forme locale de l'énergie libre d'un matériau hyperélastique peut être représentée via l'introduction d'une fonction Ψ de l'endommagement local α par

$$\Psi_{\text{loc}}(\mathbf{F}, \zeta) = \Psi_{\text{vol}}(\det \mathbf{F}) + (1 - \zeta(\alpha))\Psi_{\text{iso}}(\mathbf{F}), \quad (4.14)$$

où Ψ_{iso} et Ψ_{vol} sont respectivement les termes d'énergie déviatorique et sphérique associés au découplage classique sphérique-déviatorique. Dans le modèle non local, une longueur caractéristique est introduite, et permet de s'affranchir de la sensibilité au maillage. Pour cela, une forme non locale de l'énergie libre, optimisée par la prise en compte d'un gradient, est ajoutée au terme d'énergie libre de l'équation (4.14)

$$\Psi_{\text{nloc}}(\phi, \nabla\phi, \alpha; \mathbf{F}) = \Psi_{\text{nloc}}^{\text{grd}}(\nabla\phi; \mathbf{F}) + \Psi_{\text{nloc}}^{\text{plty}}(\phi, \alpha), \quad (4.15)$$

où $\Psi_{\text{nloc}}^{\text{grd}}$ est le terme d'énergie libre non locale dépendante du gradient de ϕ , variable locale d'endommagement, et $\Psi_{\text{nloc}}^{\text{plty}}(\phi, \alpha)$ est un terme de pénalité qui assure l'équivalence entre ϕ et α , la variable d'endommagement non locale. L'expression correspondante du tenseur des contraintes de Cauchy est alors

$$\sigma = \sigma_{\text{vol}} + (1 - \zeta(\alpha))\sigma_{\text{iso}}, \quad (4.16)$$

où la fonction d'endommagement $\zeta(\alpha)$ n'a d'influence que sur la partie déviatorique de la contrainte. Enfin, le taux de restitution d'énergie \mathbb{Y} est naturellement aussi découplé en un terme local et un terme non-local

$$\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_{\text{loc}} + \mathbb{Y}_{\text{nloc}} = -\frac{\partial\Psi_{\text{loc}}}{\partial\zeta(\alpha)} - \frac{\partial\Psi_{\text{nloc}}}{\partial\zeta(\alpha)}, \quad (4.17)$$

où $\zeta(\alpha)$ est encore une fonction de l'endommagement α .

Les auteurs déterminent ensuite les paramètres de leur modèle sur un essai de traction sur une éprouvette en L, avant de le confronter à un essai de fatigue **fictif** de torsion sur diabolo. Lors de cette dernière étude, ils confrontent l'allure de leur courbe (durée de vie, variable de dommage), et en concluent que l'approche non locale est plus physique. Il n'y a cependant aucune confrontation de leur modèle à des résultats d'expériences de fatigue. Notons qu'un autre modèle basé sur une approche par champ de phase a été proposé par Loew *et al.* (2020). Ayant des similarités avec l'approche non locale, il est choisi de ne pas la développer ici.

4.6 Les critères par approches moins conventionnelles

4.6.1 L'approche heuristique à la Dang Van

Remarque : ce critère aurait sa place dans la catégorie des critères en contraintes, mais l'aspect heuristique de sa construction nous a conduit à le présenter plutôt dans les approches moins conventionnelles.

Avant de décrire l'approche proposée par Brunac *et al.* (2009), il semble important de présenter succinctement la théorie sur laquelle elle s'appuie. Pour prédire le comportement en fatigue des matériaux métalliques, un critère, encore très utilisé aujourd'hui, a été développé puis amélioré à partir des années 1970 (Dang Van *et al.*, 1989) : il s'agit du critère de Dang Van. Il se caractérise par trois grandes idées, dont la première est qu'il est avant tout construit comme un critère de non amorçage à l'échelle microscopique (celle des grains) : suivant les valeurs de la pression hydrostatique et de la contrainte de cisaillement microscopique en un point donné, le critère est en mesure de prédire s'il y a risque d'amorçage d'une fissure, ou non (condition suffisante seulement). Dans le cadre de la MMC, lorsque l'on utilise des méthodes éléments finis par exemple, on ne peut normalement pas avoir accès directement à des grandeurs microscopiques, car elles existent à une échelle inférieure à celle du volume élémentaire représentatif considéré. Pour pallier ce problème, la deuxième idée consiste à faire appel à la notion de *shakedown* (traduisible par « ajustement ») : il y a, après un certain nombre de cycles de sollicitation, un ajustement du comportement du matériau à toutes les échelles. Autrement dit, au bout d'un certain nombre de cycles, tous les grains qui devaient plastifier ont plastifié, et alors la matière a un comportement purement élastique à toutes les échelles. Ces deux premières idées constituent la base du raisonnement physique du critère, mais une des quantités mises en jeu dans le calcul, la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$, est une quantité à deux dimensions : un cycle $\vec{\tau}$ sur un plan matériel est un chemin fermé dans un plan. Ainsi, la troisième idée forte consiste en la réduction de ce chemin 2D complexe à une valeur moyenne et une amplitude par une méthode appelée la Plus Petite Sphère Circonscrite au trajet de chargement : en englobant le chemin de la contrainte de cisaillement dans la plus petite sphère possible, Dang Van *et al.* (1984) proposent de définir la moyenne et l'amplitude du chemin comme respectivement la norme du centre de la sphère et son rayon.

C'est en se basant sur cette dernière idée (*cf.* Figure 4.2) que Brunac *et al.* (2009) proposent un critère de fatigue adapté aux élastomères. En suivant une méthode heuristique, ils recherchent le tenseur des contraintes qui, une fois réduit à une norme et une amplitude par la méthode des Sphères Circonscrites, serait le plus adapté à prédire le comportement en fatigue des matériaux élastomères. En se basant sur des résultats d'essais de fatigue, et en se plaçant dans le cadre des grandes déformations, ils concluent que le tenseur le plus adapté est le tenseur \mathbf{T} défini par

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{R}, \quad (4.18)$$

avec \mathbf{R} le tenseur de rotation issu de la décomposition polaire du gradient de la déformation, et $\boldsymbol{\sigma}^+$ la partie positive du tenseur des contraintes de Cauchy, que l'on peut aussi définir par

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \sum_{i=1}^3 \sup(\sigma_i, 0) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i, \quad (4.19)$$

où les σ_i sont les contraintes principales de Cauchy. Ce tenseur est ainsi la partie positive de $\boldsymbol{\sigma}$ ramenée dans la configuration de référence. Ce critère a montré des résultats concluants sur plusieurs essais de fatigue uniaxiaux et multiaxiaux, malheureusement il n'a pas fait l'objet de publications ultérieures.

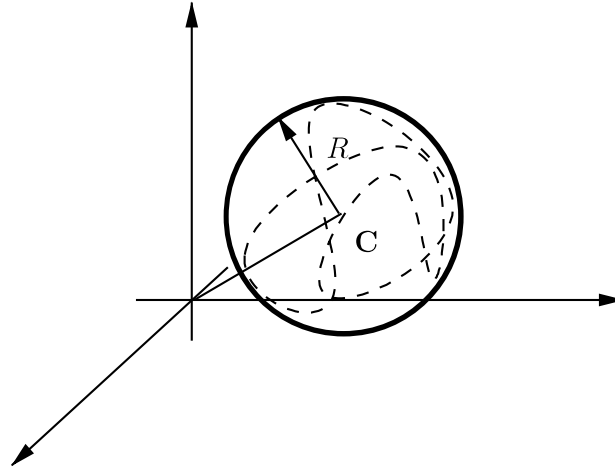


FIGURE 4.2 – Schéma de l'évolution d'une grandeur \mathbf{T} (en pointillés) dans un espace 3D, où la Plus Petite Sphère Circonsrite y est représentée, ainsi que son rayon R et la position de son centre \mathbf{C} . Adapté de Brunac *et al.* (2009).

4.6.2 Contrainte d'Eshelby - mécanique configurationnelle

Le critère de fatigue basé sur la mécanique configurationnelle est proposé par Verron et Andriyana (2008). Partant du constat qu'aucun des critères de fatigue ne prend en compte l'aspect microstructural du phénomène d'endommagement, ils proposent de placer le problème dans le cadre de la mécanique configurationnelle, qui est le pan de la mécanique s'intéressant aux forces qui sont générées par des évolutions de la configuration matérielle (et non spatiale comme c'est le cas pour l'approche classique de la MMC). C'est dans ce cadre qu'est défini le tenseur des contraintes configurationnelles (ou tenseur d'Eshelby), noté Σ

$$\Sigma = W\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{S}, \quad (4.20)$$

où W , \mathbf{I} , \mathbf{C} et \mathbf{S} sont respectivement la densité d'énergie de déformation, le tenseur identité, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2. S'il est évident que, macroscopiquement, la configuration initiale est inchangée au cours du temps, ce n'est pas le cas au niveau microstructural : tous les phénomènes d'endommagement en fatigue du matériau (cavités, décohésion à l'interface matrice/inclusion) sont autant de mouvements à l'échelle de la microstructure. En s'appuyant sur des travaux antérieurs, Verron et Andriyana (2008) montrent alors que dans le cadre des grandes déformations, Σ contient les changements d'énergie dûs aux évolutions de la configuration initiale, et rend donc bien compte de l'évolution de la microstructure. C'est sur ces considérations qu'ils proposent le critère de fatigue suivant, noté Σ^* et défini par

$$\Sigma^* = \left| \min \left[(\Sigma_i)_{i=I,II,III}, 0 \right] \right|, \quad (4.21)$$

où les $(\Sigma_i)_{i=I,II,III}$ sont les valeurs propres du tenseur Σ . Si les trois valeurs propres sont positives, alors $\Sigma^* = 0$, et aucun endommagement n'est prédit. Lorsque la plus petite des valeurs propres $\Sigma^{(-)}$ est négative, alors le critère est positif et une ouverture de défaut, dans la direction orthogonale à la direction propre associée à $\Sigma^{(-)}$, est prédite. Une version incrémentale de ce critère a ensuite été proposée pour étendre son application aux chargements multiaxiaux déphasés. Cependant, ce critère n'a pas réussi à unifier les résultats de traction uniaxiale et de torsion sur SBR menés par Ayoub *et al.* (2014).

4.6.3 L'approche multiparamètre

En partant du constat qu'une multitude de critères de fatigue pour élastomères ont déjà été construits, avec chacun leurs forces et leurs faiblesses, Tobajas *et al.* (2020) proposent de construire un nouveau critère de fatigue à partir de plusieurs paramètres existants. L'idée est de ne pas rejeter les informations considérées *a priori* inutiles : classiquement si le critère retenu porte par exemple sur la plus grande extension principale, les quantités de type contrainte et énergie ne sont alors plus considérées comme contenant de l'information utile à la prédiction du comportement en fatigue, et ces quantités sont mises de côté, à tort. Pour y remédier, les auteurs proposent un nouveau critère appelé FDMP (*Fatigue Damage Multi-Parameter*), relié à la durée de vie en fatigue par une relation type Basquin

$$\text{FDMP} = A \ln(N_f) + B, \quad (4.22)$$

où A et B sont des paramètres matériau, et N_f est le nombre de cycles à rupture. Le paramètre FDMP est défini par les amplitudes, moyennes et valeurs maximales de plusieurs paramètres (une contrainte, une déformation, un critère de fatigue existant, etc.) comme suit

$$\text{FDMP} = \alpha_1 \cdot N_{\text{cycles-var } 1} \cdot \text{var}_{eq,1} + \beta_1 \cdot \text{var}_{\text{max},1} + \alpha_2 \cdot N_{\text{cycles-var } 2} \cdot \text{var}_{eq,2} + \beta_2 \cdot \text{var}_{\text{max},2} + \dots + \alpha_n \cdot N_{\text{cycles-var } n} \cdot \text{var}_{eq,n} + \beta_n \cdot \text{var}_{\text{max},n}, \quad (4.23)$$

où les α_i et β_i sont des poids, $N_{\text{cycles-var } i}$ est le nombre de cycles à rupture lié à la variable i et $\text{var}_{\text{max},i}$ et $\text{var}_{eq,i}$ sont des fonctions du maximum, de l'amplitude et de la moyenne de la variable i . Tous ces paramètres sont déterminés par optimisation, en maximisant le coefficient de régression R^2 de la loi de Basquin de l'équation (4.22).

En confrontant ce critère à plus d'une vingtaine d'autres (dont certains sont des critères pour matériaux métalliques *e.g.* le critère de Fatemi-Socie (Shamsaei *et al.*, 2011)) sur les données expérimentales de Mars (2001a) et de Ayoub *et al.* (2012), les auteurs concluent que leur critère surpasse tous les autres en terme de R^2 . Cette conclusion est évidente puisque ce critère empirique n'est finalement qu'une moyenne pondérée des différents critères existants. Ainsi, il nécessite la détermination d'un grand nombre de paramètres, sans lien avec les phénomènes physiques mis en jeu.

4.7 Conclusion

Plusieurs critères de fatigue pour élastomères ont été rappelés dans cette partie, tous basés sur des raisonnements différents. On retiendra que les critères les plus performants sont aussi ceux qui ont la base physique la plus robuste (*e.g.* maximum de la contrainte principale de Cauchy sur le plan critique, loi de comportement « endommageante », etc.), et qui sont écrits en contrainte plutôt qu'en déformation. En effet, la pression hydrostatique n'apparaissant pas dans la déformation, cette dernière ne peut *a priori* pas rendre compte du phénomène de cavitation, pourtant potentiellement néfaste pour la durée de vie en fatigue des élastomères. Cependant, l'un des inconvénients commun à tous ces critères en contrainte est qu'ils reposent sur le choix préalable d'une loi de comportement parmi un grand nombre de lois disponibles (Zhao *et al.*, 2019; Bien-aimé *et al.*, 2020), et du calage de ses paramètres via des essais de caractérisation. Ainsi, toute erreur liée à cette étape se voit directement transmise au critère de fatigue. Par ailleurs plusieurs approches récentes se sont appuyées sur la mécanique de l'endommagement. Finalement, bien que proposant des modèles riches, aucune de ces études n'a confronté ses résultats à des essais de fatigue multiaxiaux. Plus généralement, seul Mars (2001b) a mené des essais de fatigue multiaxiaux déphasés, et y a confronté son critère. Dans la suite de ce travail, le choix

est fait de proposer un critère de fatigue purement cinématique, en n'omettant pas les remarques précédentes liées à la pression hydrostatique. C'est ce que nous allons voir dans les sections suivantes.

Chapitre 5

Une analyse originale de la cinématique en grandes déformations

Sommaire

6.1	Motivations	82
6.2	Cavitation : vers un équivalent cinématique de la pression hydrostatique	83
6.2.1	Décomposition de \mathbf{h} en parties positive et négative	83
6.2.2	Interprétation physique de la dilatation fictive	86
6.3	Ouverture des défauts : traction uniaxiale sur le plan critique	88
6.3.1	Expression du plan critique	88
6.3.2	Traction-compression sur le plan critique	91
6.4	Vers un critère de fatigue purement cinématique	95
6.4.1	Choix des grandeurs scalaires	95
6.4.2	Première expression du critère	96
6.5	Conclusion	97

5.1 Introduction

L'étude bibliographique de la section précédente a fait ressortir l'idée qu'il existe un plan préférentiel d'amorçage (défini par l'orientation de la plus grande extension principale), et que le comportement en fatigue est régi par une unique ou une combinaison de grandeurs mécaniques à définir. **Dans ce travail, nous faisons l'hypothèse forte qu'une telle information est contenue dans la déformation au sens large.**

Ainsi, nous nous proposons dans un premier temps d'étudier plus en détails le tenseur de Hencky \mathbf{h} , que nous avons déjà exploité dans la Partie I, par le prisme de récentes avancées dans le domaine de la décomposition tensorielle. En définissant une base tensorielle bien choisie, et en utilisant les propriétés mathématiques du tenseur de Hencky, on peut montrer que ce dernier peut s'écrire sous la forme d'un vecteur de cinq composantes de manière générale. Dans le cas particulier de la traction-torsion d'un cylindre, ce vecteur possède uniquement trois composantes, et son évolution peut alors être représentée graphiquement dans un espace 3D. Une interprétation cinématique des tenseurs de la base tensorielle est proposée dans ce cas particulier. Enfin, une définition originale de l'amplitude et de la moyenne du cycle d'un tenseur est également développée dans le cas général 5D.

Remarque : dans ce qui suit, les concepts de tenseur et de leur représentation dans une base au travers d'une matrice sont utilisés simultanément, et de manière précise. Pour prévenir toute erreur, un tenseur est noté en lettres grasses \mathbf{A} , et sa représentation matricielle dans une base \mathcal{B}_i est notée $A_{\mathcal{B}_i}$. Le tenseur identité étant invariant par changement de base, lui et toutes ses matrices associées seront confondues et notées \mathbf{I} .

5.2 Décomposition d'un tenseur symétrique réel sur une base tensorielle

5.2.1 Une décomposition récente pour les tenseurs symétriques à trace nulle

Dans le but de générer une base de données de tenseurs de déformation admissibles (*i.e.* physiquement pertinents), Kunc et Fritzen (2019b,a) ont proposé récemment une méthode pour décomposer tout tenseur de l'espace $E = \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{3 \times 3} | \mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \text{Tr}(\mathbf{A}) = 0\}$ sur une base tensorielle bien choisie. Dans le cas des tenseurs de la MMC (contrainte et déformation), l'espace E est de dimension 5. Nous commençons par définir le produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entre deux éléments de E : soient \mathbf{A} et \mathbf{B} de E , le produit scalaire entre ces deux quantités est

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}), \quad (5.1)$$

auquel on associe usuellement la norme de Frobenius d'un tenseur \mathbf{A} notée $\|\cdot\|$,

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^2)}. \quad (5.2)$$

Nous définissons ensuite une base orthonormée de l'espace E , que nous notons $\mathcal{B}_E = \{\mathbf{Y}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}^{(5)}\}$, comme proposé par Kunc et Fritzen, et tel que chaque élément $\mathbf{Y} \in E$ soit défini par

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (5.3)$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, 5\}, \alpha_i = \mathbf{Y} : \mathbf{Y}^{(i)} \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

5.2.2 Extension à l'ensemble des tenseurs symétriques

Considérons maintenant un tenseur \mathbf{Y} symétrique réel, sans condition sur sa trace. L'espace $F = \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{3 \times 3} | \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\}$ est un espace vectoriel de dimension 6, et on a : $E \subset F$. Tout tenseur $\mathbf{Y} \in F$ peut se décomposer en une partie déviatorique et une partie sphérique comme suit (Holzapfel, 2000)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{\text{dev}} + \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{Y}) \mathbf{I}, \quad (5.5)$$

avec \mathbf{Y}_{dev} qui est à trace nulle, donc est un élément de l'espace E . Ainsi, nous pouvons projeter \mathbf{Y}_{dev} sur la base tensorielle définie précédemment, ce qui donne

$$\mathbf{Y}_{\text{dev}} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)}. \quad (5.6)$$

En combinant les équations (5.5) et (5.6), nous obtenons

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)} + \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{Y}) \mathbf{I}. \quad (5.7)$$

La décomposition de \mathbf{Y}_{dev} étant unique, la décomposition de \mathbf{Y} dans l'équation (5.7) est alors également unique. En notant

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I}, \quad (5.8)$$

nous avons bien défini un tenseur normé

$$\mathbf{Y}^{(0)} : \mathbf{Y}^{(0)} = 1, \quad (5.9)$$

et tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, 5\}, \quad \mathbf{Y}^{(0)} : \mathbf{Y}^{(i)} = 0. \quad (5.10)$$

À l'instar de l'équation (5.4), il vient

$$\alpha_0 = \mathbf{Y} : \mathbf{Y}^{(0)} \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

La famille $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}_{i=0, \dots, 5}$ ainsi composée forme une base orthonormée de l'espace des tenseurs symétriques réels. Cette extension sera utilisée dans le chapitre suivant.

5.3 Cas particulier de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre

Nous proposons désormais d'appliquer les éléments théoriques précédents au tenseur de déformation de Hencky, dont les propriétés mathématiques en font le candidat idéal.

5.3.1 Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} avec l'hypothèse d'incompressibilité

Les équations de la cinématique de la traction-torsion d'un cylindre parfait ont été développées dans la Section 2.4 du Chapitre 2. La définition du tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} (équation (2.8)), combinée aux propriétés mathématiques du logarithme d'un

tenseur, il apparaît que le tenseur \mathbf{h} est symétrique et à trace nulle (du fait de l'hypothèse d'incompressibilité). Ainsi, l'application de l'équation (5.3) à \mathbf{h} est directe

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)}. \quad (5.12)$$

Cette équation peut également être écrite sous forme matricielle, dans la base cylindrique $\mathcal{B}_{\text{cyl}} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}, \quad (5.13)$$

où les matrices $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}$ sont définies par

$$\begin{aligned} Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(1)} &= \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}, & Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}, & Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}, \\ Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(4)} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}, & Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(5)} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

En notant que l'expression du tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{b} (équation (2.6)), exprimé dans la base cylindrique \mathcal{B}_{cyl} , implique que $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ a la forme suivante

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \begin{bmatrix} -(a+b) & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}, \quad (5.15)$$

décomposer $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ sur la base des $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}$ entraîne directement $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$, et donc

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}, \quad (5.16)$$

où les $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}$ sont définis dans l'équation (5.14)_(1,2,3).

Remarque 1 : Nous attirons l'attention du/de la lecteur · ice sur le fait que l'expression des matrices $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(1)}, Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(2)}, Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)}$ est un choix arbitraire. En effet, nous pourrions par exemple tout à fait inverser le 1 et le -1 dans l'expression de $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(2)}$, et la nouvelle famille ainsi formée serait encore une base orthonormée de E .

Remarque 2 : L'expression particulière de $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ comme décrit dans l'équation (5.14) dépend du choix de la base dans laquelle le problème a été exprimé. Ici, la base cylindrique est un choix naturel, du fait de la nature du problème. L'Annexe D propose un développement détaillé sur cette question.

L'équation (5.16) fournit un outil puissant de représentation du tenseur \mathbf{h} : plutôt que de le représenter comme une matrice $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$, il est plus intéressant de l'écrire comme

un vecteur de 3 composantes $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, qui peut être visualisé par un point dans un espace 3D, comme proposé par Chen *et al.* (2012). De plus, il est maintenant possible de visualiser en 3D l'évolution temporelle de $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ comme un chemin dans l'espace 3D, plutôt que par une série de matrices. C'est ce qui est présenté dans la Section 5.4.

5.3.2 Application au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} sans l'hypothèse d'incompressibilité

Dans un cadre plus général, il se peut que la transformation ne soit pas isochore. Notons \mathbf{h}^{comp} le tenseur de Hencky correspondant à une telle transformation ; dans le cas de la traction-torsion d'un cylindre, ce tenseur a pour expression, dans la base cylindrique

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{\text{comp}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & d & c \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}. \quad (5.17)$$

La décomposition (5.16) n'est alors plus valide. Nous pouvons cependant réaliser la décomposition de \mathbf{h}^{comp} en une partie sphérique et une partie déviatorique, comme proposé par l'équation (5.5). Dans le cas de \mathbf{h}^{comp} , nous avons l'expression suivante (Criscione *et al.*, 2000),

$$\mathbf{h}^{\text{comp}} = \mathbf{h}_{\text{dev}}^{\text{comp}} + \frac{K_1}{3} \mathbf{I}, \quad (5.18)$$

où $K_1 = \ln(J)$ est le premier invariant de \mathbf{h}^{comp} défini au Chapitre 2. Exprimé dans la base cylindrique,

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{\text{comp}} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}, \quad (5.19)$$

avec $\alpha_0 = \frac{K_1}{\sqrt{3}}$, et $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$.

5.3.3 Interprétation physique de la décomposition additive de \mathbf{h}

La nouvelle expression de $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ (équation (5.14)) peut être analysée de manière encore plus fine. Ainsi, il est possible d'analyser les $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}$ en termes d'états de déformation que l'on peut qualifier d'« élémentaires » et ce, via trois caractéristiques : type de déformation (traction pure, cisaillement, etc.), intensité et direction. À partir des équations (5.14) et (5.19), nous proposons une description cinématique des trois transformations suivantes :

- $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(1)}$ représente une traction uniaxiale selon l'axe \vec{e}_z , d'intensité $\lambda = \exp\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 2,26$. Pour mieux le voir, nous pouvons écrire $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(1)}$ d'une autre manière, comme suit :

$$Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & \ln\left(\exp\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}; \quad (5.20)$$

- $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(2)}$ est une déformation plane selon l'axe \vec{e}_θ , l'axe \vec{e}_z étant bloqué, d'intensité $\lambda = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2,03$:

$$Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \ln\left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} ; \quad (5.21)$$

- Pour mieux capturer la nature de $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)}$, nous proposons de regarder la valeur de son exponentielle, et d'en étudier la matrice résultante. Nous notons cette dernière $V_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)}$, car elle est assimilable à un tenseur de distorsion pure \mathbf{V} (issu d'une décomposition polaire du gradient de la déformation) dans la base cylindrique :

$$V_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)} = \exp\left(Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)}\right) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.26 & 0.77 \\ 0 & 0.77 & 1.26 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} . \quad (5.22)$$

Maintenant, comme décrit par Thiel *et al.* (2019), $V_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(3)}$ est le cisaillement dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, d'intensité $\alpha = \text{arcsinh}^{-1}(0,77) = 0,71$;

- L'interprétation de $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(0)}$ est triviale : il représente une dilatation volumétrique d'intensité $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$. Il agit dans toutes les directions de l'espace.

Pour illustrer ces descriptions, nous proposons sur la Figure 5.1 une représentation graphique des quatre états de déformation précédents, en 3D et dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

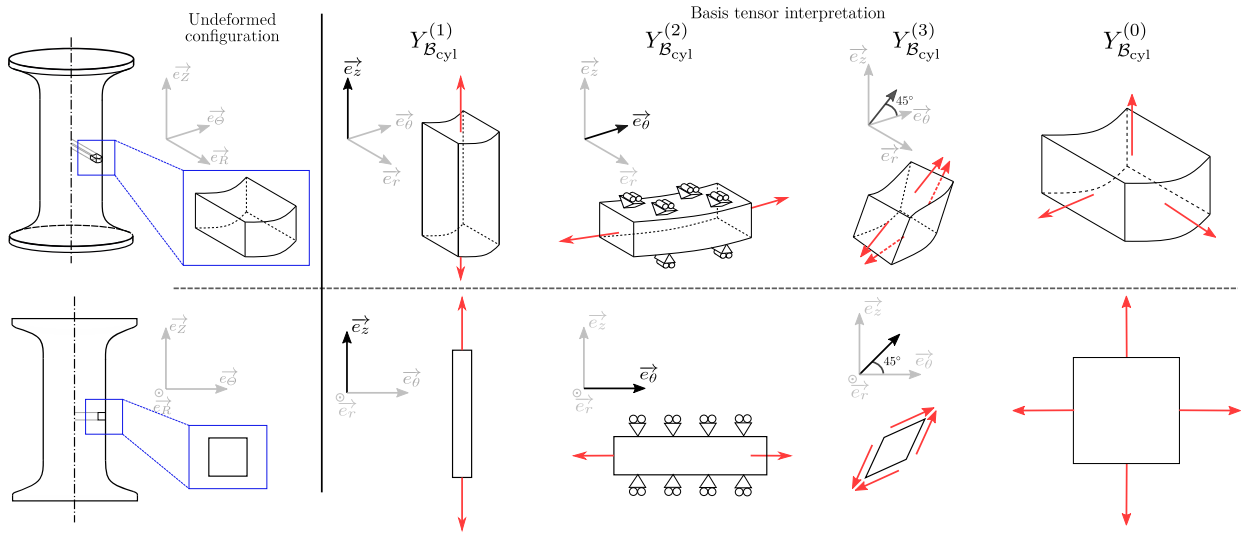


FIGURE 5.1 – Représentations 3D et 2D des tenseurs de la base $(\mathbf{Y}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{Y}^{(3)})$ exprimés dans la base cylindrique.

Remarque 3 : Pour faire suite aux Remarques 1 et 2, la présente analyse cinématique de $(\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{Y}^{(3)})$ est entièrement dépendante et du choix de la base d'expression du problème (ici la base cylindrique), et du choix des expressions des $Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}$. Ce point est aussi discuté dans l'Annexe D. À l'inverse, l'analyse proposée pour $\mathbf{Y}^{(0)}$ est indépendante du choix de la base d'expression du problème.

5.4 Applications

Dans cette section, nous nous proposons d'appliquer directement les développements théoriques précédents au cas d'un cylindre incompressible soumis à un cycle de chargement de traction-torsion combinées. La représentation vectorielle de \mathbf{h} nous permet de le visualiser en 3D, car il n'a que trois composantes dans ce cas spécifique.

5.4.1 Visualisations 3D de chemins de déformation

Appliquons à présent les résultats précédents à la traction-torsion d'un cylindre infiniment long et incompressible. Les conditions de chargement appliquées au cylindre sont décrites sur la Figure 5.2 (voir Section 2.4 du Chapitre 2 pour la signification de λ et τ), et le tenseur de Hencky \mathbf{h} est calculé sur la surface externe du cylindre ($R = 7$ mm pour représenter la surface extérieure de la partie cylindrique de notre éprouvette), à mi-hauteur. Pour s'affranchir de l'hypothèse d'incompressibilité, nous nous intéressons à la partie déviatorique de \mathbf{h} , que nous notons \mathbf{h}^{dev} (qui coïncide avec \mathbf{h} sous l'hypothèse d'incompressibilité). Les résultats des calculs sont les évolutions temporelles de $h_{\mathcal{B}_{\text{cy}1}}^{\text{dev}}(t)$, desquelles sont calculées les évolutions temporelles de $\alpha_i : \{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\}$. Ils sont présentés sur la Figure 5.3.

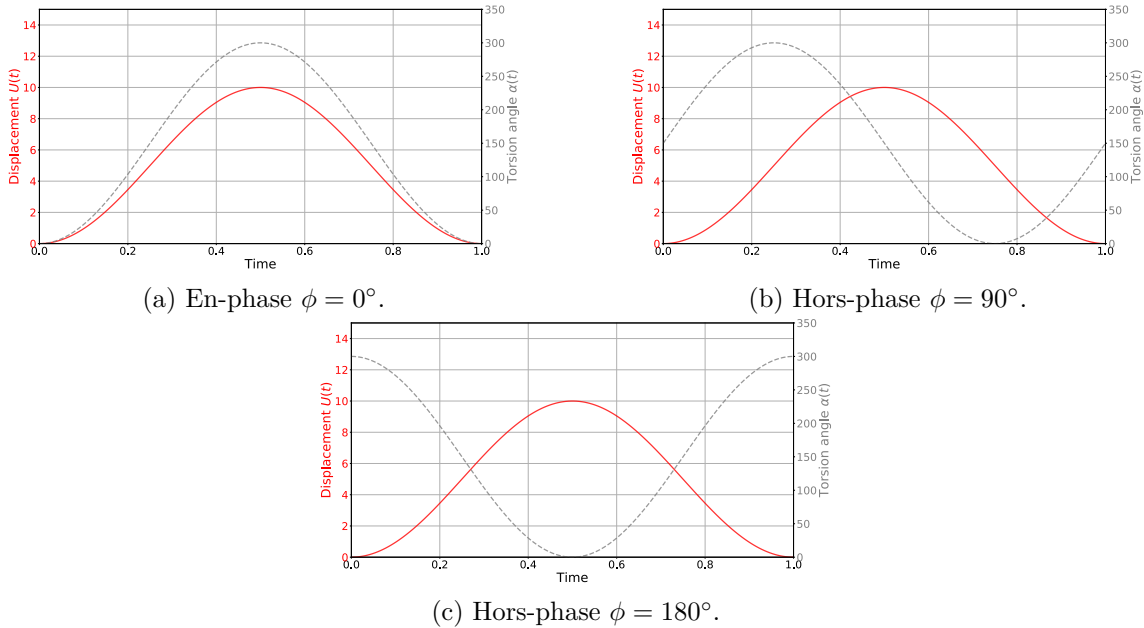


FIGURE 5.2 – Conditions de chargement : déplacement $U(t)$ et angle $\alpha(t)$ avec $U_{\text{max}} = 10$ mm et $\alpha_{\text{max}} = 300^\circ$.

Les conditions de chargement étant cycliques, toutes les réponses le sont également, et correspondent donc à des chemins fermés dans l'espace de la Figure 5.3. Le déphasage entre λ et τ est clairement illustré au travers de la forme des chemins : lors des chargements en-phase ($\phi = 0^\circ$) ou en opposition de phase ($\phi = 180^\circ$), les réponses sont symétriques, ce qui se traduit par une courbe « aller-retour ». Quand un déphasage autre est appliqué (*e.g.* $\phi = 90^\circ$), le chemin n'est plus une courbe « aller-retour », mais une boucle fermée.

5.4.2 Vers une définition de la moyenne et de l'amplitude de cycles de déformation

Un outil important utilisé en fatigue, et présenté dans le Chapitre 1, est le diagramme de Haigh (Haigh, 1917; Gänser *et al.*, 2007) dont une application récente aux élastomères

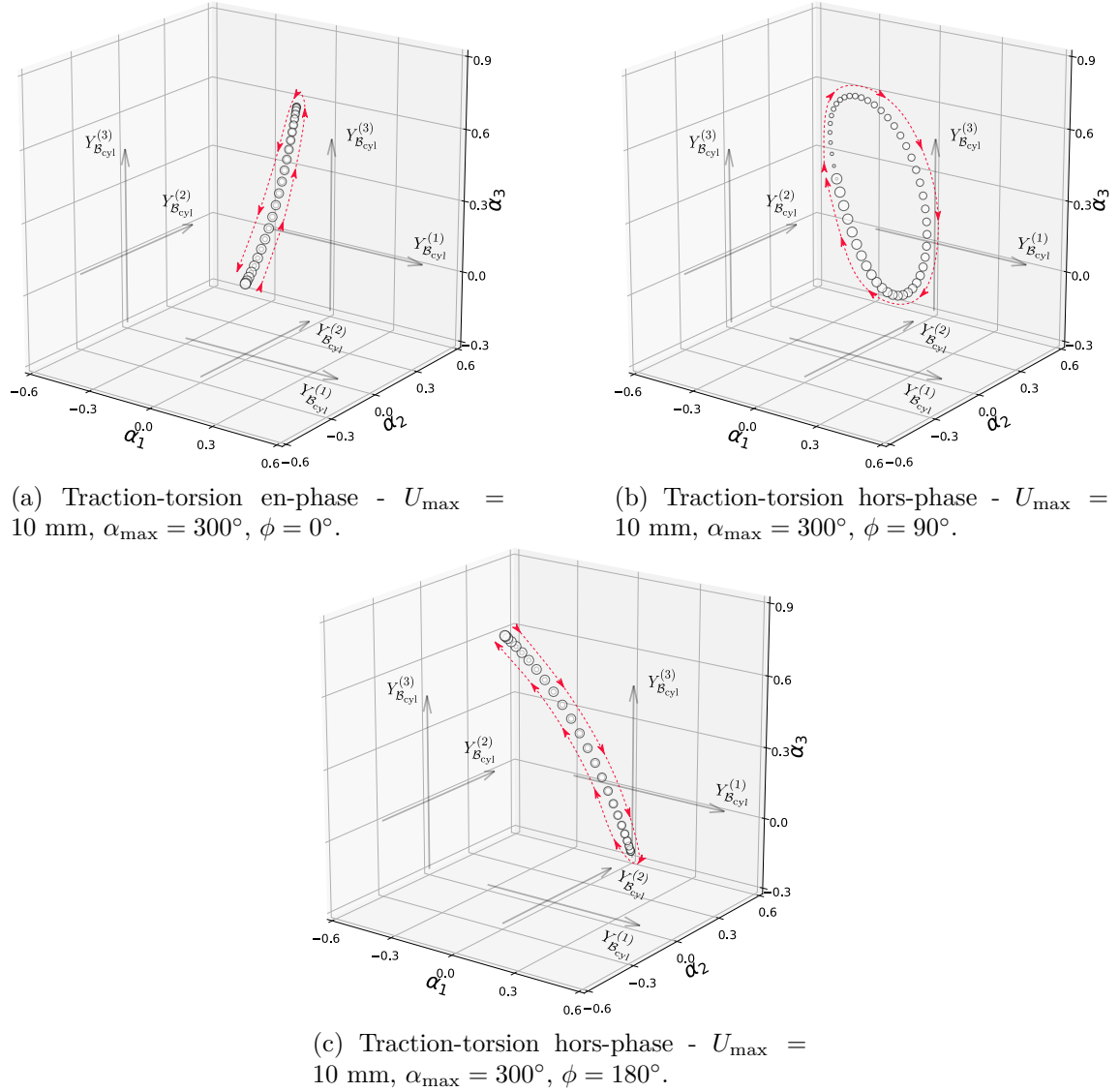


FIGURE 5.3 – Chemins 3D dans l'espace $(Y_{B_{cyl}}^{(1)}, Y_{B_{cyl}}^{(2)}, Y_{B_{cyl}}^{(3)})$ du tenseur de Hencky pour les trois conditions de chargement. Les flèches indiquent le sens de parcours.

a été proposée par Champy *et al.* (2021). Comme illustré par la Figure 5.3, la description d'un tenseur symétrique à trace nulle par un vecteur nous permet de le visualiser comme un chemin fermé dans un espace 3D. Grâce à cela, une définition originale de la moyenne et de l'amplitude d'un chemin de déformation, basée sur les développements de la section précédente, est proposée. Cette nouvelle approche est inspirée de la méthode des Plus Petites Sphères Circonscrites¹ (*Minimum Circumscribed Spheres* ou MCS en anglais), déjà détaillée dans la Section 4.6.1 du chapitre précédent. L'excellent papier de Papadopoulos (1998) décrit en détails les développements relatifs à ces notions.

Considérons encore le chemin de tenseurs de Hencky déviatoriques $\{\mathbf{h}^{\text{dev}}(t)\}_{(0 \leq t \leq T)}$ associé à la traction-torsion cyclique de notre cylindre, où T est la période du cycle considéré. De manière générale, tous ces tenseurs appartiennent à un espace de dimension 5. D'après la Section 5.3.1, nous avons les équivalences suivantes

1. Dans sa formulation originale, le critère de Dang Van repose sur l'idée des MCC (*Minimum Circumscribed Circles*), qu'il applique à un vecteur en deux dimensions. La notion de MCS n'est que la généralisation du problème à toutes les dimensions.

$$\{\mathbf{h}(t)^{\text{dev}}\}_{(0 \leq t \leq T)} \equiv \{\alpha_1(t), \dots, \alpha_5(t)\}_{(0 \leq t \leq T)} = A(t), \quad (5.23)$$

où $A(t)$ est une fonction vectorielle dépendante du temps.

Le problème de la MCS, comme décrit par Papadopoulos (1998), consiste en la résolution d'un problème min-max (*i.e.* à trouver le rayon R et le centre $\mathbf{h}_C^{\text{dev}}$), au sens de la norme de Froebenius rappelée dans l'équation 5.2, défini par

$$\text{solution} = \underset{\mathbf{h}_C^{\text{dev}}}{\text{argmin}} \underbrace{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \mathbf{h}_C^{\text{dev}} - \mathbf{h}^{\text{dev}}(t) \right\| \right\}}_R. \quad (5.24)$$

Nous pouvons adapter cette formulation à nos notations; en combinant les équations (5.23) et (5.24), nous pouvons réécrire le problème min-max en utilisant la fonction $A(t)$ et la distance euclidienne classique de \mathbb{R}^5 : le problème MCS consiste alors à résoudre (*i.e.* à trouver le rayon R et le centre $A^C = \{\alpha_1^C, \dots, \alpha_5^C\}$)

$$\text{solution} = \underset{A^C}{\text{argmin}} \underbrace{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} \left\| A^C - A(t) \right\| \right\}}_R. \quad (5.25)$$

Nous illustrons la résolution du problème MCS pour les cas 3D sur la Figure 5.4 en trouvant les sphères circonscrites aux trois chemins de déformation de la Figure 5.3. Les solutions (centres $\mathbf{h}^{(C)} = \{\alpha_1^{(C)}, \alpha_2^{(C)}, \alpha_3^{(C)}\}$ et rayons R) sont donnés dans le Tableau 5.1.

ϕ	$\alpha_1^{(C)}$	$\alpha_2^{(C)}$	$\alpha_3^{(C)}$	R
0°	0,068	0,077	0,361	0,375
90°	0,053	0,091	0,357	0,414
180°	0,019	0,105	0,348	0,526

TABLEAU 5.1 – Coordonnées du centre et rayon des MCS des chemins de déformation.

La position de $\mathbf{h}^{(C)\text{dev}}$ dépend du choix de la base d'expression du problème (ici la base cylindrique), mais ce n'est pas le cas du rayon. Une discussion autour de cette remarque est proposée dans l'Annexe D. Notons que dans le cas 5D général (si \mathbf{h}^{dev} est représenté par une matrice « pleine », *e.g.* lorsque la base d'expression ne contient aucune direction principale), la MCS existe et est bien définie, mais elle ne peut être visualisée dans un espace 3D.

Remarque 4 : Par construction, les centres des MCS ainsi définis sont des tenseurs de Hencky.

5.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté une théorie récemment développée de décomposition d'un tenseur symétrique à trace nulle sur une base tensorielle bien choisie, et notée $\mathcal{B} = \{\mathbf{Y}^{(i)}\}_{\{i=1, \dots, 5\}}$. Nous avons ensuite exploité les propriétés mathématiques du tenseur de Hencky \mathbf{h} sous l'hypothèse d'incompressibilité pour lui appliquer cette décomposition. Une extension aux tenseurs sans l'hypothèse d'incompressibilité a été proposée via la décomposition classique de \mathbf{h} en une partie sphérique et une partie déviatorique : il suffit d'ajouter un tenseur sphérique $\mathbf{Y}^{(0)}$ à la base \mathcal{B} . Dans le cas général de la traction-torsion

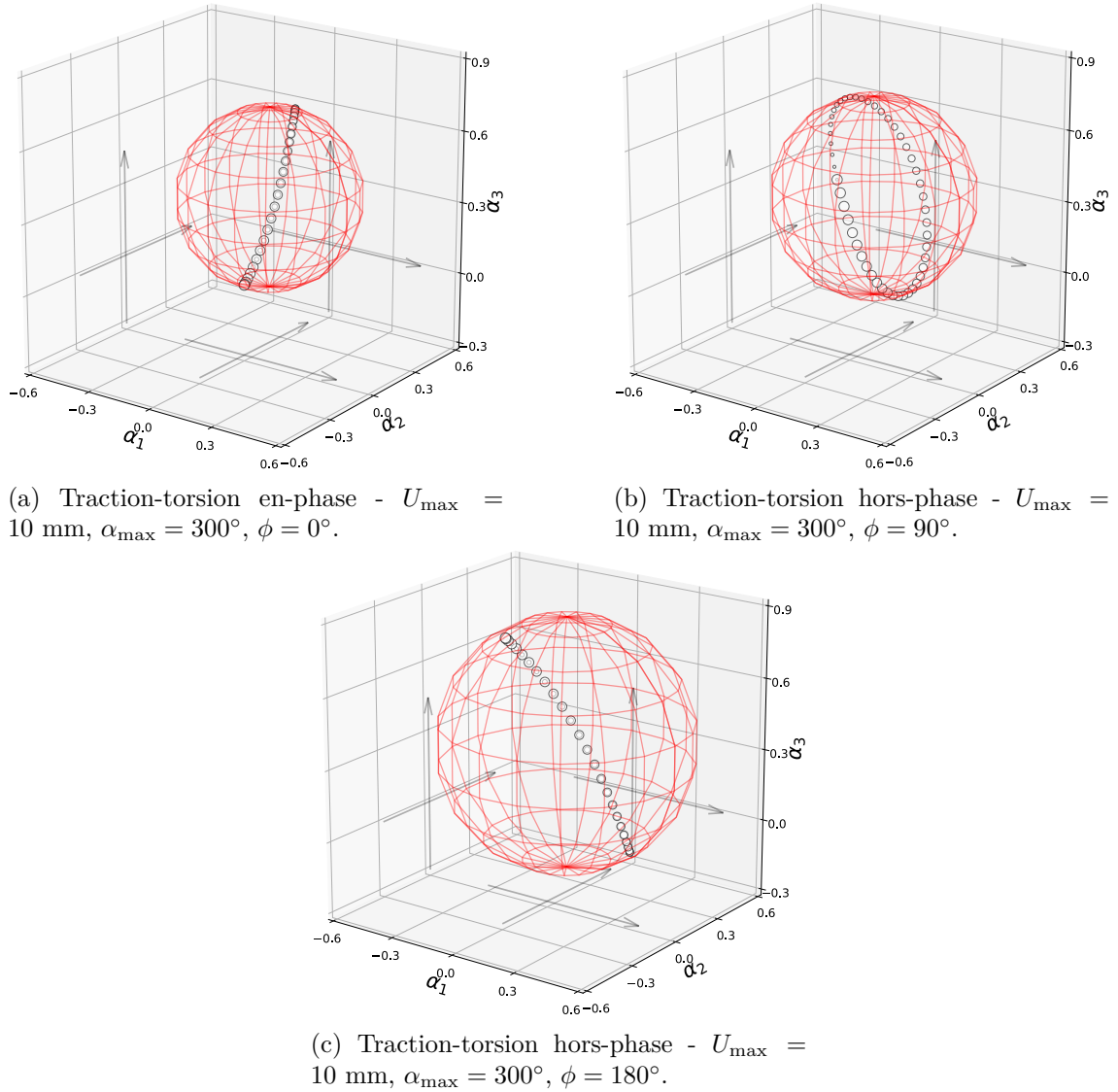


FIGURE 5.4 – Visualisation des MCS pour les trois conditions de chargement précédentes.

d'un cylindre plein, les tenseurs $\mathbf{Y}^{(4)}$ et $\mathbf{Y}^{(5)}$ sont nuls, et une interprétation physique des tenseurs restants comme caractérisant des transformations élémentaires (traction, cisaillement, etc.) a été proposée. Enfin, il est possible de représenter l'évolution de la partie déviatorique du tenseur \mathbf{h} dans un espace 3D, dans le cas de la traction-torsion d'un cylindre. Cela a permis de proposer une définition originale de l'amplitude et de la moyenne d'un tenseur cyclique.

Chapitre 6

Définition du critère de fatigue purement cinématique

Sommaire

7.1	Introduction	106
7.2	Étude paramétrique : valeurs de Φ particulières	106
7.2.1	Méthode	106
7.2.2	Résultats	107
7.2.3	Discussion	108
7.3	Calage de Φ sur différents types d'essai	111
7.3.1	Méthode	111
7.3.2	Résultats et discussion	112
7.4	Conclusion	113

6.1 Motivations

Pour formuler un critère de fatigue, il convient de prendre en considération les différents mécanismes d'endommagement mis en jeu. En effet, comme montré au Chapitre 1, les principaux mécanismes d'amorçage en fatigue des élastomères recensés dans la littérature sont la cavitation, la décohésion à l'interface inclusion/matrice et la rupture des inclusions (cf. Figure 1.11). Nous avons également vu au Chapitre 4 que la cavitation est prise en compte au travers d'une contrainte (via la pression hydrostatique), et que l'endommagement induit par la présence d'inclusion (décohésion, rupture) est modélisé par l'existence d'un plan critique sur lequel se concentre la majorité de l'endommagement. Nous proposons alors, dans le Tableau 6.1, une correspondance entre les mécanismes d'amorçage et les modélisations classiquement utilisées, en rappelant que Le Cam *et al.* (2004) ont fait l'hypothèse de l'existence d'une cavitation induite par une décohésion à l'interface inclusion/matrice.

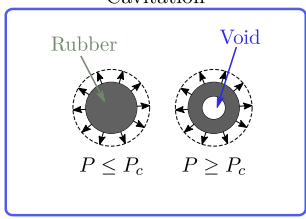
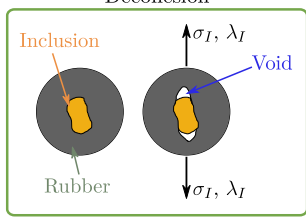
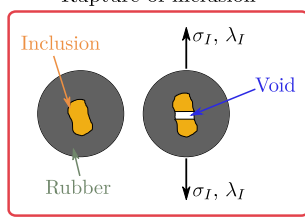
		Mécanismes		
		Cavitation 	Décohésion 	Rupture of inclusion 
Modélisation		Cavitation		
		Traction sur plan critique		

TABLEAU 6.1 – Correspondance entre les mécanismes d'amorçage en fatigue et les modélisations proposées.

D'une part, le phénomène de cavitation relatif à un endommagement sphérique (ou isotrope), semble jouer un rôle important dans la durabilité des pièces en fatigue (Euchler *et al.*, 2021), et est *a priori* piloté par la pression hydrostatique. Cependant, l'incertitude qui plane encore sur son origine (Lefèvre *et al.*, 2015) semble avoir été un frein à sa prise en compte dans la construction des critères de fatigue présentés au chapitre précédent. D'autre part, l'existence d'un plan critique, dont l'orientation est fortement corrélée à celle de l'amorçage dans la plupart des cas, est pris en compte dans plusieurs critères : Mars (2001a) utilise la densité d'énergie de fissuration CED pour déterminer le plan critique (défini comme étant le plan sur lequel se propagent une ou des fissures pré-existantes, et menant à la rupture), Saintier *et al.* (2006) définissent ce plan via la direction associée à la plus grande contrainte principale de Cauchy, etc. Ainsi, il apparaît naturel de proposer un critère de fatigue faisant intervenir ces deux modélisations.

Comme conclu au chapitre précédent, nous avons choisi dans ce travail de proposer un critère de fatigue purement cinématique, car les déformations sont facilement mesurables sur les élastomères, et que le choix d'une loi de comportement et la détermination de ses paramètres matériau induisent nécessairement des erreurs difficilement quantifiables lors de leur utilisation en fatigue. Ces considérations sont partagées par Drass *et al.* (2020)

et Rosendahl (2021) qui proposent une nouvelle approche de la rupture quasi-statique de membranes en silicone (et plus généralement d'élastomères quasi-incompressibles) basée sur une définition, dans l'espace des extensions principales, d'une surface de rupture combinaison d'une partie déviatorique et d'une partie sphérique. Cette dernière leur permet de modéliser le phénomène de cavitation. Malgré cela, il a déjà été fait mention plusieurs fois du rôle majeur qu'a la pression hydrostatique dans le phénomène de cavitation ; or, cette pression ne peut être prise en compte dans aucune des grandeurs cinématiques connues de la MMC. Pour la déterminer, il est nécessaire de calculer les contraintes, et donc d'avoir choisi une loi de comportement...

Dans ce qui suit, nous commençons par utiliser la décomposition tensorielle proposée au Chapitre 5 pour proposer un équivalent cinématique de la pression hydrostatique, au travers de la décomposition du tenseur de Hencky \mathbf{h} en parties positive et négative (Section 6.2). La Section 6.3 présente le choix retenu pour modéliser l'endommagement sur un plan critique. Ce plan est d'abord défini grâce à des observations expérimentales, puis nous proposons de suivre l'évolution de la traction uniaxiale qui s'exerce sur ce plan critique via l'utilisation de α_1 (défini au chapitre précédent) et d'un choix adapté de la base d'expression de $\mathbf{Y}^{(1)}$. Enfin, un nouveau critère de fatigue, basé sur les deux grandeurs précédentes, est proposé dans la Section 6.4. La Section 6.5 clôt ce chapitre avec quelques remarques.

6.2 Cavitation : vers un équivalent cinématique de la pression hydrostatique

Comme précisé au Chapitre 1, l'origine physique du phénomène de cavitation reste assez méconnue (Lefèvre *et al.*, 2015). Sa modélisation mécanique pour les matériaux incompressibles passe quasi systématiquement par l'utilisation de contraintes ou d'énergies, car les déformations ne contiennent *a priori* pas d'information sur la pression hydrostatique, qui est la grandeur mécanique utilisée pour modéliser le phénomène. Pour aborder le problème d'un point de vue cinématique, nous proposons d'utiliser la décomposition tensorielle proposée au chapitre précédent et de l'appliquer au tenseur \mathbf{h}^+ , partie positive de la décomposition positive-négative du tenseur de Hencky \mathbf{h} , faisant ainsi apparaître une dilatation fictive pilotée par α_0^+ dont nous comparons l'évolution avec la partie positive p_H^+ de la pression hydrostatique.

6.2.1 Décomposition de \mathbf{h} en parties positive et négative

Lorsque l'on cherche à modéliser un endommagement, une solution envisageable consiste à extraire d'un tenseur les quantités effectivement endommageantes. Wu et Cervera (2018) proposent par exemple de décomposer le tenseur des contraintes de Cauchy en une partie positive et une partie négative en vue de modéliser l'ouverture et la fermeture des micro-fissures au sein de matériaux quasi-fragiles. On retrouve également cette idée chez Brunac *et al.* (2009), et Verron et Andriyana (2008), comme décrit dans le Chapitre 4. Dans notre travail, nous proposons d'appliquer cette décomposition au tenseur de déformation de Hencky \mathbf{h} :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^+ + \mathbf{h}^-, \quad (6.1)$$

avec \mathbf{h}^+ étant colinéaire à \mathbf{h} (Wu et Cervera, 2018), et donc défini par

$$\mathbf{h}^+ = \sum_{i=1}^3 \sup(\ln(\lambda_i), 0) \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i, \quad (6.2)$$

où les \vec{n}_i sont les directions propres de \mathbf{h} . \mathbf{h}^- est défini dans la même base par

$$\mathbf{h}^- = \sum_{i=1}^3 \inf(\ln(\lambda_i), 0) \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i. \quad (6.3)$$

Remarquons que l'on peut associer à \mathbf{h}^+ un tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{b}^+ :

$$\mathbf{b}^+ = \exp(2\mathbf{h}^+), \quad (6.4)$$

et on a bien

$$\mathbf{b}^+ = \sum_{i=1}^3 \sup(\lambda_i^2, 1) \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i. \quad (6.5)$$

Le résultat suivant est alors vérifié

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ \mathbf{b}^- = \mathbf{b}^- \mathbf{b}^+. \quad (6.6)$$

D'après l'équation (6.2), quatre cas de figure se présentent :

- Le cas trivial à écarter est celui où la transformation est l'identité, et \mathbf{h} est le tenseur nul. Alors $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\ln(\lambda_i) = 0$, le tenseur \mathbf{h}^+ est donc nul.
- $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\ln(\lambda_i) < 0$. Le tenseur \mathbf{h}^+ est encore nul. Notons que ce cas n'est pas envisageable sous l'hypothèse d'incompressibilité ($\text{Tr}(\mathbf{h}) = 0$).
- $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\ln(\lambda_i) > 0$. Le tenseur \mathbf{h}^+ est alors égal au tenseur complet \mathbf{h} . Ce cas n'est pas non plus envisageable sous l'hypothèse d'incompressibilité ($\text{Tr}(\mathbf{h}) = 0$).
- Le cas de notre étude, où la transformation est considérée incompressible, donc au moins une des valeurs propres de \mathbf{h} est positive. Dans ce cas, \mathbf{h}^+ est non nul, et à trace non nulle, et **peut être vu comme représentatif d'une transformation compressible** qui provoque une augmentation de volume. On peut donc lui appliquer la décomposition de l'équation (5.19) comme suit

$$\mathbf{h}^+ = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)} = \frac{K_1^+}{3} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)}, \quad (6.7)$$

ou encore sous forme matricielle, dans la base cylindrique :

$$h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^+ = \sum_{i=0}^3 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)} = \frac{K_1^+}{3} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{(i)}, \quad (6.8)$$

avec $K_1^+ = \sum_{k=1}^3 \sup(\ln(\lambda_k), 0)$. Rappelons que l'on a aussi, comme montré dans le Chapitre 5,

$$\alpha_0^+ = \frac{K_1^+}{\sqrt{3}}. \quad (6.9)$$

Ainsi, K_1^+ et α_0^+ sont interchangeable à loisir. Notons que les mêmes développements peuvent être menés pour la partie négative de \mathbf{h} . En combinant les équations (6.1) et (6.8), on a bien

$$K_1^+ + K_1^- = 0, \quad (6.10)$$

comme montré sur la Figure 6.1.

Les décompositions successives proposées plus haut sont illustrées sur la Figure 6.2 : la transformation totale entre les configurations (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}) est d'abord décomposée en une partie positive et une partie négative (équation (6.1)). La première entre les configurations initiale (\mathcal{C}_0) et actuelle (\mathcal{C}^+) étant une transformation « dilatante » ($dV > 0$), la

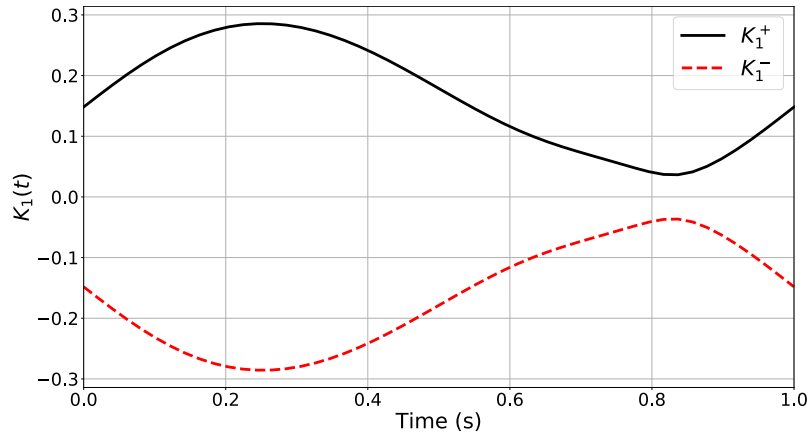


FIGURE 6.1 – Évolutions temporelles de K_1^+ et K_1^- pour un cycle de chargement ($U = 5,27\text{mm}$, $\alpha = 257,5^\circ$, $\phi = 90^\circ$).

seconde entre les configurations (\mathcal{C}^+) et (\mathcal{C}) étant une transformation « contractante » ($dV < 0$). Ces deux transformations peuvent elles-mêmes se décomposer en une partie sphérique et une partie déviatorique (équation (6.7)). Concernant la partie positive \mathbf{h}^+ , la transformation entre les configurations (\mathcal{C}_0) et $(\mathcal{C}_{\text{sph}}^+)$ est purement volumétrique (pas de distorsion), et la seconde entre les configurations $(\mathcal{C}_{\text{sph}}^+)$ et (\mathcal{C}^+) est purement déviatorique (pas de changement de volume). Seule la décomposition sphérique-déviatorique pour \mathbf{h}^+ est montrée sur la figure, mais elle est évidemment aussi applicable à \mathbf{h}^- .

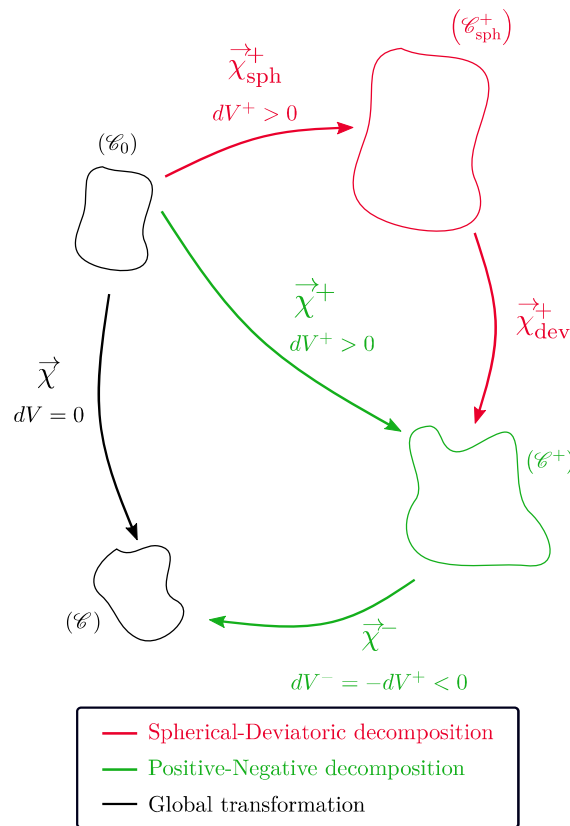


FIGURE 6.2 – Décompositions successives de la transformation complète isochore (en noir) : d’abord en une partie positive et une partie négative (en vert), puis de la partie positive en une partie déviatorique et une partie sphérique (en rouge).

6.2.2 Interprétation physique de la dilatation fictive

L'équation (6.7) permet ainsi de voir la partie positive (resp. négative) de \mathbf{h} comme la combinaison d'une distorsion pure, au travers de $\{\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{Y}^{(3)}\}$, et d'une dilatation pure (resp. contraction pure) via $\mathbf{Y}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I}$. Nous proposons alors l'interprétation suivante :

- Le matériau étant incompressible, il faut considérer ces deux transformations, régies par K_1^+ et K_1^- , comme deux déformations sphériques fictives en équilibre parfait pour assurer le maintien d'un volume constant (équation (6.10)).
- Du point de vue des contraintes, il découle de l'hypothèse d'incompressibilité l'existence d'une pression hydrostatique $p_H = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ (avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy). Cependant, celle-ci est relative au tenseur complet $\boldsymbol{\sigma}$, et il paraît plus pertinent de considérer la pression liée à la partie positive des contraintes. Il nous paraît prudent de faire remarquer que cette pression n'a pas été étudiée dans la littérature, et peut donc être sujette à discussion. Ainsi, on décompose $\boldsymbol{\sigma}$ en une partie positive et une partie négative,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^- \quad (6.11)$$

où les parties positive et négative sont définies de manière identique à \mathbf{h} (équations (6.2)-(6.3)).

On peut alors définir les pressions hydrostatiques associées à ces deux quantités telles que

$$p_H^+ = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^+), \quad p_H^- = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^-). \quad (6.12)$$

On vérifie maintenant que l'addition de ces deux pressions redonne bien la pression totale. Dans la base propre de $\boldsymbol{\sigma}$, on a

$$p_H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i, \quad p_H^+ = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sup(\sigma_i, 0), \quad p_H^- = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \inf(\sigma_i, 0), \quad (6.13)$$

où les σ_i sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\sigma}$. Les équations (6.11)-(6.13) fournissent finalement

$$p_H^+ + p_H^- = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [\sup(\sigma_i, 0) + \inf(\sigma_i, 0)] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i = p_H. \quad (6.14)$$

Nous faisons dès lors l'hypothèse forte que α_0^+ , grandeur relative décrivant l'intensité de la dilatation fictive, est une quantité cinématique permettant de décrire la partie positive de la pression hydrostatique : est-ce vérifiable ? Pour cela, nous étudions les évolutions temporelles de α_0^+ et de p_H^+ pour différents chargements (traction, torsion, traction-torsion en-phase et déphasées) en trois points du plan médian de l'éprouvette ($Z = L/2$) à $R = 0$ mm, $R = 3,5$ mm et $R = 7$ mm. Le tenseur des contraintes de Cauchy est obtenu en utilisant une loi de comportement néo-Hookéenne, dont l'expression est donnée dans l'Annexe A, et de paramètre $C_{10} = 0,724$ MPa. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.3. Notons qu'ici, seules les tendances sont d'intérêt : les valeurs numériques de α_0^+ (traits pleins verts) et p_H^+ (traits pointillés noirs) ne sont pas comparables entre elles (car pas homogènes).

La Figure 6.3 illustre globalement une très bonne concordance entre les évolutions de α_0^+ et de p_H^+ :

- Le chargement de traction uniaxiale (1ère ligne) produit un état de déformation homogène dans la section de l'éprouvette, ainsi les évolutions de α_0^+ et de p_H^+ sont

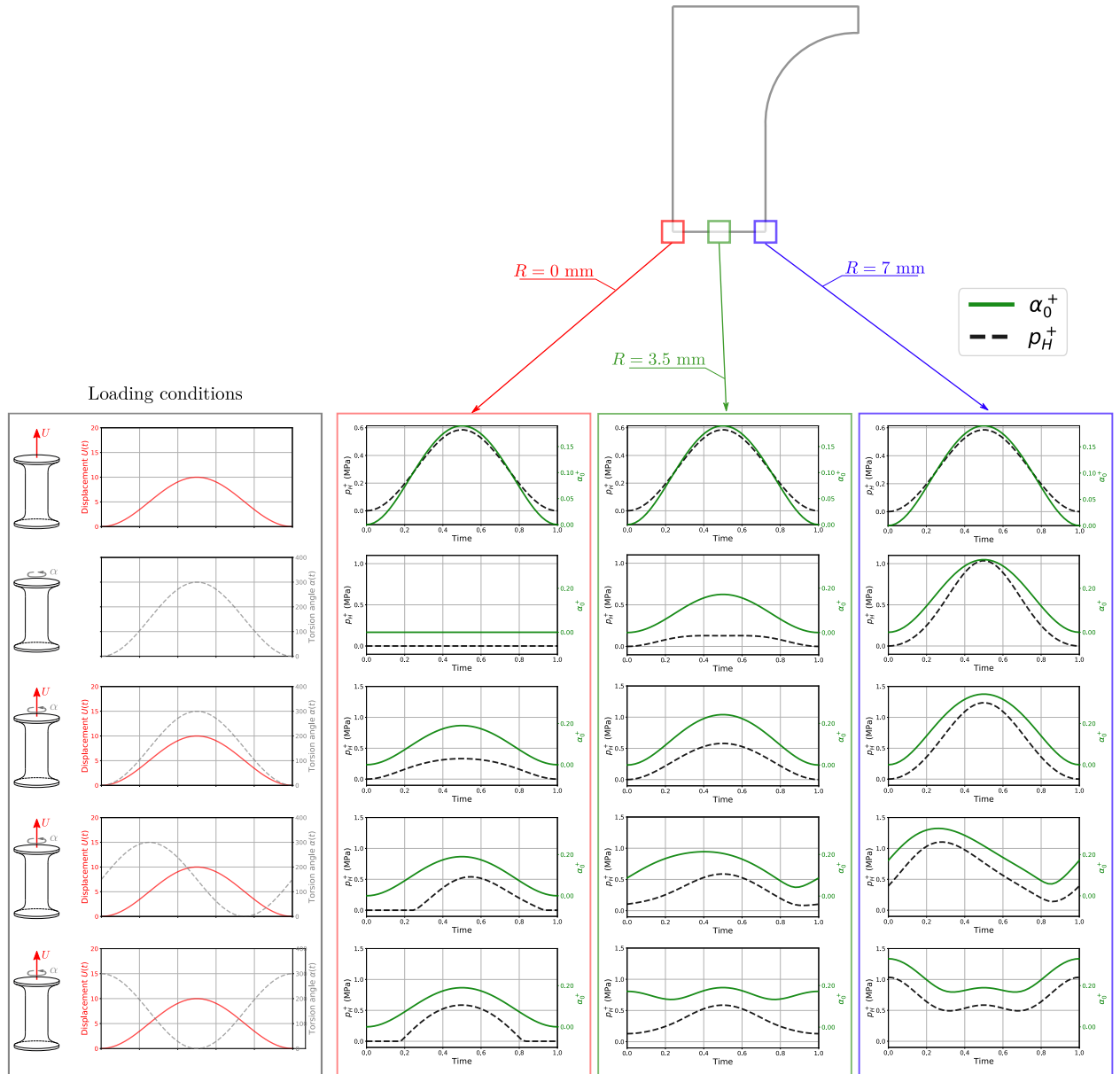


FIGURE 6.3 – Évolutions au cours d’un cycle de α_0^+ et p_H^+ pour différents chargements, en trois points matériels localisés sur le plan médian de la partie cylindrique de l’éprouvette ($Z = L/2$) : $R = \{0 \text{ mm}, 3,5 \text{ mm}, 7 \text{ mm}\}$.

identiques aux trois points matériels. Les grandeurs α_0^+ et p_H^+ évoluent identiquement, avec toutes les deux une forme sinusoïdale.

- Le chargement de torsion (2ème ligne) induit aussi des évolutions quasi-identiques de α_0^+ et de p_H^+ : il n’y a aucune distorsion sur la fibre neutre ($R = 0 \text{ mm}$), et des évolutions (quasi) sinusoïdales pour les deux autres points matériels.
- Le chargement de traction-torsion en-phase (3ème ligne) induit des évolutions identiques de α_0^+ et de p_H^+ , ici aussi sinusoïdales.
- Les chargements de traction-torsion déphasés (4ème et 5ème lignes) induisent des réponses plus complexes :
 - Sur la fibre neutre ($R = 0 \text{ mm}$), la partie positive de la pression hydrostatatique, p_H^+ , est nulle lorsque la torsion est autour de sa valeur maximale, puis suit une évolution quasi-sinusoïdale sur le reste du cycle. L’intensité de la dilatation fictive, α_0^+ , suit quant à elle une évolution sinusoïdale.

- En $R = 3,5$ mm, α_0^+ est maximum aux instants des maxima respectifs du déplacement et de la torsion imposés. La partie positive de la pression quant à elle est maximale à l’instant où sont simultanément maximale la traction et nulle la torsion imposées.
- En $R = 7$ mm, c’est-à-dire sur la surface extérieure de l’éprouvette, les évolutions de α_0^+ et de p_H^+ sont identiques. Les deux grandeurs sont maximales à l’instant du maximum de torsion imposée, et minimale à environ une demi période des instants de maximum, qui semble correspondre à un rapport particulier traction/torsion imposées.

Nous pouvons à ce stade conclure qu’il n’y a pas une corrélation parfaite entre les évolutions de α_0^+ et de p_H^+ , mais que les résultats sont encourageants. Surtout, α_0^+ et p_H^+ évoluent de manière identique en surface de l’éprouvette ($R = 7$ mm), qui est le lieu privilégié des amorçages dans notre cas (*cf.* Chapitre 3). Ainsi, nous postulons que α_0^+ , l’intensité de la dilatation fictive mise en lumière par la décomposition en partie positive/négative de \mathbf{h} , peut être vue comme la déformation décrivant la partie positive de la pression hydrostatique, p_H^+ . **Il apparaît alors naturel d’utiliser α_0^+ pour modéliser l’endommagement induit par le phénomène de cavitation.**

6.3 Ouverture des défauts : traction uniaxiale sur le plan critique

Nous choisissons à présent de modéliser l’endommagement dû à la partie déviatorique de la déformation par une approche par plan critique. Ce dernier est défini en s’appuyant sur l’état de l’art, ainsi que sur une analyse des résultats des essais de fatigue. Ensuite, nous postulons que les fissures de fatigue sont amorcées par une traction uniaxiale sur le plan critique, et nous proposons une méthode pour modéliser le phénomène.

6.3.1 Expression du plan critique

Dans cette section, on propose une définition du plan critique à partir des observations expérimentales des sites d’amorçage. Ce plan est défini de deux manières différentes : dans la configuration non déformée (ou initiale pour des essais en phase), on le note $\vec{N}_c(t)$, et il permet de s’intéresser aux mesures réelles effectuées sur éprouvettes rompues, qui sont « ramenées » dans la configuration non déformée avant observation. Pour les calculs théoriques liés au critère, nous préférons considérer le vecteur $\vec{n}_c(t)$, défini dans la configuration déformée à l’instant t . Nous établissons dans ce qui suit les relations de passage entre ces deux expressions, et les méthodes pour les calculer. Nous noterons $\vec{U}_I(t)$ et $\vec{v}_I(t)$ les vecteurs propres (ou directions propres) associés respectivement aux formulations lagrangienne et eulérienne ; ils correspondent aux vecteurs propres des tenseurs de Cauchy-Green droit \mathbf{C} et Cauchy-Green gauche \mathbf{b} , respectivement.

6.3.1.1 Définition du plan critique

Le plan critique est défini comme étant le plan qui subit le plus d’endommagement lors de la vie d’une pièce ou d’une structure, et sur lequel va apparaître l’amorçage menant à la rupture en fatigue de la pièce considérée (Andriyana *et al.*, 2010). Il est maintenant bien connu qu’il existe une corrélation forte entre l’orientation du plan normal à la direction associée à la plus grande extension principale au cours du cycle, et l’orientation des fissures de fatigue à l’endroit de l’amorçage (Mars, 2002; Mars et Fatemi, 2005, 2006; Zarrin-Ghalami et Fatemi, 2013). De manière similaire, Saintier *et al.* (2006) établissent une corrélation entre les angles d’amorçage des fissures de fatigue et la direction de la plus

grande contrainte principale de Cauchy au cours du cycle (ramenée dans la configuration de référence), ce qui revient au même puisque les couples contrainte-déformation conjugués sont coaxiaux pour des matériaux élastiques isotropes (Holzapfel, 2000). Ayant également mesuré les angles d'amorçage de nos essais de fatigue de traction-torsion (*cf.* Chapitre 3), et étant en mesure de calculer analytiquement les grandeurs cinématiques tout au long d'un cycle de fatigue (*cf.* Chapitre 2), **nous nous proposons d'illustrer le lien entre angle d'amorçage et orientation du plan normal à la direction associée à la plus grande extension principale au cours du cycle.**

Mathématiquement, le calcul de la direction associée à la plus grande extension principale au cours du cycle s'effectue comme suit : lors d'un cycle de fatigue, la plus grande extension principale λ_I évolue au cours du temps, et le vecteur propre qui lui est associé également. Nous pouvons donc suivre au cours du cycle l'évolution du couple $\{\lambda_I(t), \vec{U}_I(t)\}$ (plus grande extension principale - vecteur propre associé en formulation lagrangienne, dans la configuration non déformée où est également mesuré l'angle d'amorçage), issu de la diagonalisation de \mathbf{U} ($= \sqrt{\mathbf{C}}$), le tenseur d'extension pure droit de la décomposition polaire de \mathbf{F} . L'extension principale $\lambda_I(t)$ atteint son maximum au temps t_M comme montré sur la Figure 6.4 :

$$t_M = \arg \max_t \{\lambda_I(t)\}. \quad (6.15)$$

Nous souhaitons alors comparer l'orientation du plan normal à $\vec{U}_I(t_M)$ à l'instant t_M à

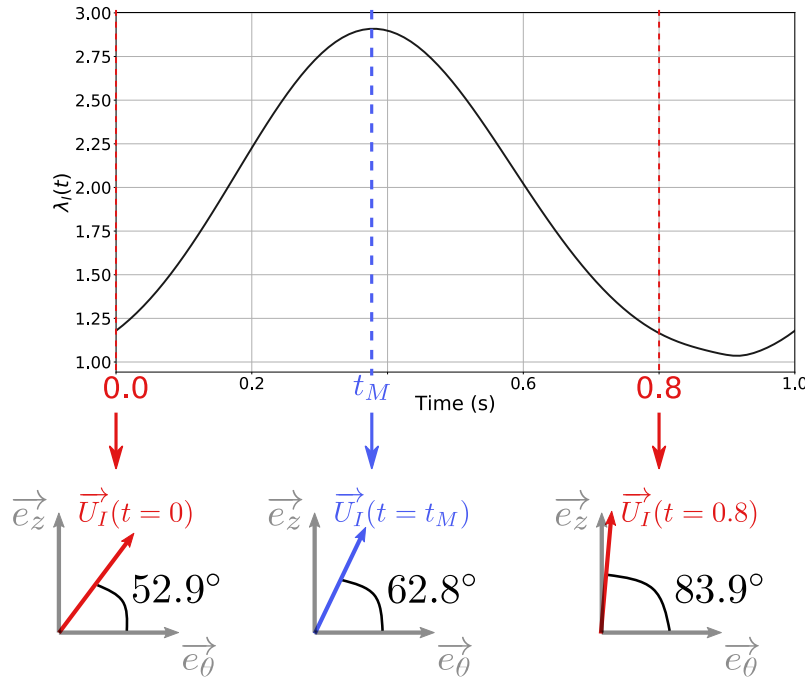


FIGURE 6.4 – Évolution temporelle de $\lambda_I(t)$ au cours d'un cycle de traction-torsion de chargement $\{U_{\max} = 5,27 \text{ mm}, \alpha_{\max} = 257,5^\circ, \phi = 90^\circ\}$. Sous le graphe est représenté, dans le plan $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$, le vecteur propre $\vec{U}_I(t)$ associé à $\lambda_I(t)$ pour trois instants différents du cycle.

l'angle d'amorçage ω . Dans notre cas, tous les angles d'amorçage ont été mesurés dans le plan $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$; ainsi, si γ est l'angle entre $\vec{U}_I(t_M)$ et l'axe horizontal \vec{e}_θ , il suffit de considérer l'angle $\pi/2 - \gamma$ pour le comparer à l'angle d'amorçage ω . Les résultats sont présentés sur la Figure 6.5, sur laquelle sont également rappelées les conventions d'orientation de ω et de γ . Notons que les deux étoiles bleues présentes sur le graphique correspondent à deux essais de fatigue menés hors des campagnes déjà décrites dans le Chapitre 3, dans le but

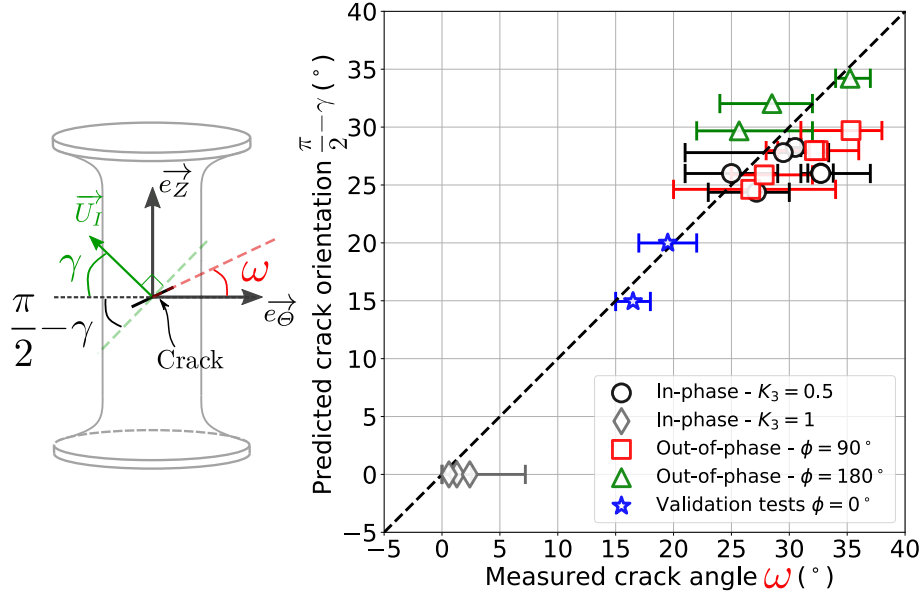


FIGURE 6.5 – Comparaison entre les angles d’amorçage ω mesurés au microscope optique, et l’angle $\pi/2 - \gamma$ prédit par l’orientation du plan normal à la direction propre associée à la plus grande extension principale. Les conventions d’angle sont rappelées sur la vue schématique de l’éprouvette. Les étoiles bleues correspondent aux essais de fatigue de validation, à angle d’amorçage visé.

d’explorer d’autres valeurs d’angle d’amorçage. Ils correspondent aux numéros 1B* et 2B* des tableaux de l’Annexe C. Leurs conditions de chargement ont été calculées en fonction des angles d’amorçage souhaités (*i.e.* 15° et 20°). Sur la Figure 6.5 sont représentées en abscisse les gammes (moyenne et barre d’erreur) d’angle d’amorçage ω regroupées par niveau de chargement (*i.e.* le même choix que sur la Figure 3.12 du Chapitre 3), et en ordonnée les angles $\pi/2 - \gamma$ prédits par le calcul. La figure illustre une bonne corrélation entre ω et $\pi/2 - \gamma$: les moyennes pour chaque niveau de chargement sont proches de l’identité, et toutes les barres d’erreur intersectent l’identité, ce qui confirme bien les observations de la littérature. On note de plus que l’ajout d’un déphasage ne semble pas avoir d’influence sur la validité du résultat.

Nous choisissons alors de définir le plan critique comme étant le plan de normale $\vec{U}_I(t_M)$, la direction associée au maximum de la plus grande extension principale au cours du cycle. Il sera dans la suite caractérisé par sa normale notée \vec{N} (resp. \vec{n}) dans la configuration non déformée (resp. déformée), et définie par

$$\begin{cases} \vec{N}_c(t_M) = \vec{U}_I(t_M) & \text{dans la configuration non déformée} \\ \vec{n}_c(t_M) = \vec{v}_I(t_M) & \text{dans la configuration déformée,} \end{cases} \quad (6.16)$$

où $\vec{v}_I(t_M)$ est la direction associée à la plus grande extension principale dans la configuration déformée à l’instant t_M .

6.3.1.2 Calcul du plan critique au cours du cycle

On connaît l’orientation du plan critique à l’instant t_M , défini par son vecteur normal $\vec{n}_c(t_M)$ dans la configuration déformée (*cf.* équation (6.16)). Pour obtenir son orientation à tout instant du cycle, nous utilisons la formule de Nanson (Holzapfel, 2000)

$$ds \vec{n} = J dS \mathbf{F}^{-T} \vec{N}, \quad (6.17)$$

où dS et ds sont respectivement les surfaces infinitésimales dans les configurations non déformée et déformée, J est le Jacobien de la transformation ($J = 1$ dans notre cas d'incompressibilité). \vec{N} et \vec{n} sont respectivement les vecteurs normaux aux surfaces dS et ds dans les configurations non déformée et déformée. \mathbf{F} est le gradient de la transformation. En utilisant une version modifiée de l'équation (6.17), on peut alors exprimer le vecteur $\vec{n}_c(t)$ à chaque instant t du cycle :

1. En notant t_0 l'instant correspondant à la configuration non déformée, on peut « renvoyer » le vecteur $\vec{n}_c(t_M)$ dans la configuration non déformée par

$$\vec{N}_c(t_0) = \frac{\mathbf{F}^T(t_M) \vec{n}_c(t_M)}{\|\mathbf{F}^T(t_M) \vec{n}_c(t_M)\|}; \quad (6.18)$$

2. Partant de la configuration non déformée, on peut maintenant « visiter » toutes les configurations à tout instant t_i du cycle par

$$\vec{n}_c(t_i) = \frac{\mathbf{F}^{-T}(t_i) \vec{N}_c(t_0)}{\|\mathbf{F}^{-T}(t_i) \vec{N}_c(t_0)\|} = \frac{\mathbf{F}^{-T}(t_i) \mathbf{F}^T(t_M) \vec{n}_c(t_M)}{\|\mathbf{F}^{-T}(t_i) \mathbf{F}^T(t_M) \vec{n}_c(t_M)\|}. \quad (6.19)$$

Les équations (6.18) et (6.19) démontrent l'équation (4.3) déjà présentée au Chapitre 4. L'opérateur norme $\|\cdot\|$ est utilisé pour garder des vecteurs unitaires à tout instant. Notons que l'équation (6.19) est valide pour tout type de chargement, avec ou sans déphasage.

6.3.2 Traction-compression sur le plan critique

Dans cette section, nous proposons une modélisation de l'endommagement qui se cumule sur le plan critique : en exprimant le tenseur de Hencky \mathbf{h} dans une base contenant le vecteur normal au plan critique \vec{n}_c , nous suivons l'évolution de $\alpha_1(t)$ issue de la décomposition tensorielle de \mathbf{h} sur la base des $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}$. Ce paramètre étant l'intensité de la traction uniaxiale que représente $\mathbf{Y}^{(1)}$, nous postulons qu'il permet de capturer les déformations agissant uniquement selon le vecteur normal au plan critique. En assimilant le plan critique à une « petite fissure », α_1 permet de décrire l'ouverture et la fermeture de celle-ci au cours d'un cycle de fatigue.

6.3.2.1 Définition de la grandeur suivie

Nous avons vu au chapitre précédent que le tenseur de Hencky \mathbf{h} pouvait se décomposer sur une base tensorielle, comme présenté dans l'équation (5.3), rappelée ci-dessous

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \mathbf{Y}^{(i)},$$

où les $\mathbf{Y}^{(i)}$ représentent chacun une déformation élémentaire (traction, cisaillement, etc.) comme illustré sur la Figure 5.1. Plus particulièrement, si nous exprimons $\mathbf{Y}^{(1)}$ dans une base quelconque $\mathcal{B}_A = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$:

$$Y_{\mathcal{B}_A}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_A}, \quad (6.20)$$

nous avons vu que ce tenseur caractérise une traction uniaxiale dans la direction du premier vecteur de la base \mathcal{B}_A , ici \vec{e}_x . Ainsi, à un instant t du cycle, la partie $\alpha_1 Y_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}}^{(1)}$

décrit comment, au sein de la déformation complète exprimée au travers de \mathbf{h} , la partie purement traction-compression uniaxiale selon \vec{e}_x se comporte, et α_1 décrit l'intensité de cette traction-compression. Nous nous proposons alors de suivre l'évolution de α_1 sur le plan critique tout au long du cycle. Pour s'assurer de toujours bien considérer la traction-compression uniaxiale qui s'applique sur le plan critique, nous choisissons d'exprimer, à chaque instant t du cycle, le tenseur de Hencky $\mathbf{h}(t)$ dans une base spéciale que l'on choisit de la manière suivante : le premier vecteur de cette base est le vecteur normal au plan critique à l'instant t , $\vec{n}_c(t)$, puis nous complétons la famille avec deux vecteurs \vec{b} et \vec{c} de telle sorte que $\mathcal{B}_1(t) = \{\vec{n}_c(t), \vec{b}, \vec{c}\}$ soit une base orthonormée. En exprimant \mathbf{h} dans $\mathcal{B}_1(t)$, nous capturons bien la composante de traction-compression uniaxiale qui agit selon la normale au plan critique à l'instant t

$$h_{\mathcal{B}_1(t)} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_1(t)}^{(1)}, \quad (6.21)$$

avec

$$Y_{\mathcal{B}_1(t)}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\{\vec{n}_c(t), \vec{b}, \vec{c}\}}. \quad (6.22)$$

Remarque : rigoureusement, les vecteurs \vec{b} et \vec{c} dépendent du temps. Leur orientation ne nous intéresse pas.

Pour finir, $\alpha_1^{(C)}$ est défini par

$$\alpha_1^{(C)} = h_{\mathcal{B}_1(t)} : Y_{\mathcal{B}_1(t)}^{(1)}. \quad (6.23)$$

6.3.2.2 Calcul de $\alpha_1^{(C)}(t)$

Pour construire l'histoire de $\alpha_1^{(C)}(t)$ au cours du cycle de fatigue, nous explicitons les étapes de calcul ci-après. Partant de l'histoire au cours du cycle du gradient de la transformation $F_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}(t)$ (exprimés dans la base cylindrique), le gradient de la transformation, nous pouvons calculer tous les tenseurs d'intérêt ($b_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$, $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$). Nous suivons alors les étapes suivantes (décrites schématiquement sur la Figure 6.6) :

1. Nous calculons et stockons l'histoire des tenseurs de Cauchy-Green gauche $b_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$, et de Hencky $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \frac{1}{2} \ln(b_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}})$,
2. L'équation (6.16) fournit l'orientation du plan critique à l'instant t_M ,
3. L'équation (6.19) fournit l'historique de l'orientation de la normale au plan critique $\vec{n}_c(t)$,
4. L'historique $\alpha_1^{(C)}(t)$ au cours du cycle est obtenu en calculant, à chaque pas de temps t_i ,
 - (a) L'orientation du plan critique est donnée par son vecteur normal $\vec{n}_c(t_i)$, qui est complété par deux vecteurs choisis au hasard mais avec certaines propriétés : le premier vecteur \vec{b} est calculé en fonction de l'expression de $\vec{n}_c(t_i)$ (les équations sont données en Annexe E). À la famille $\{\vec{n}_c(t_i), \vec{b}\}$ est ensuite ajouté le produit vectoriel $\vec{c} = \vec{n}_c(t_i) \wedge \vec{b}$. Ainsi construite, la famille $\mathcal{B}_1 = \{\vec{n}_c(t_i), \vec{b}, \vec{c}\}$ forme une base de l'espace, normalisée pour former une base orthonormée ;

- (b) La matrice de passage de la base initiale (dans notre cas c'est la base cylindrique) vers la nouvelle base \mathcal{B}_1 , constituée des vecteurs de \mathcal{B}_1 en colonnes,

$$R_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} = \left[\vec{n}_c(t_i), \vec{b}, \vec{c} \right]_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}; \quad (6.24)$$

- (c) \mathbf{h} exprimé dans la base \mathcal{B}_1 en tournant $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ avec la matrice de rotation $R_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$

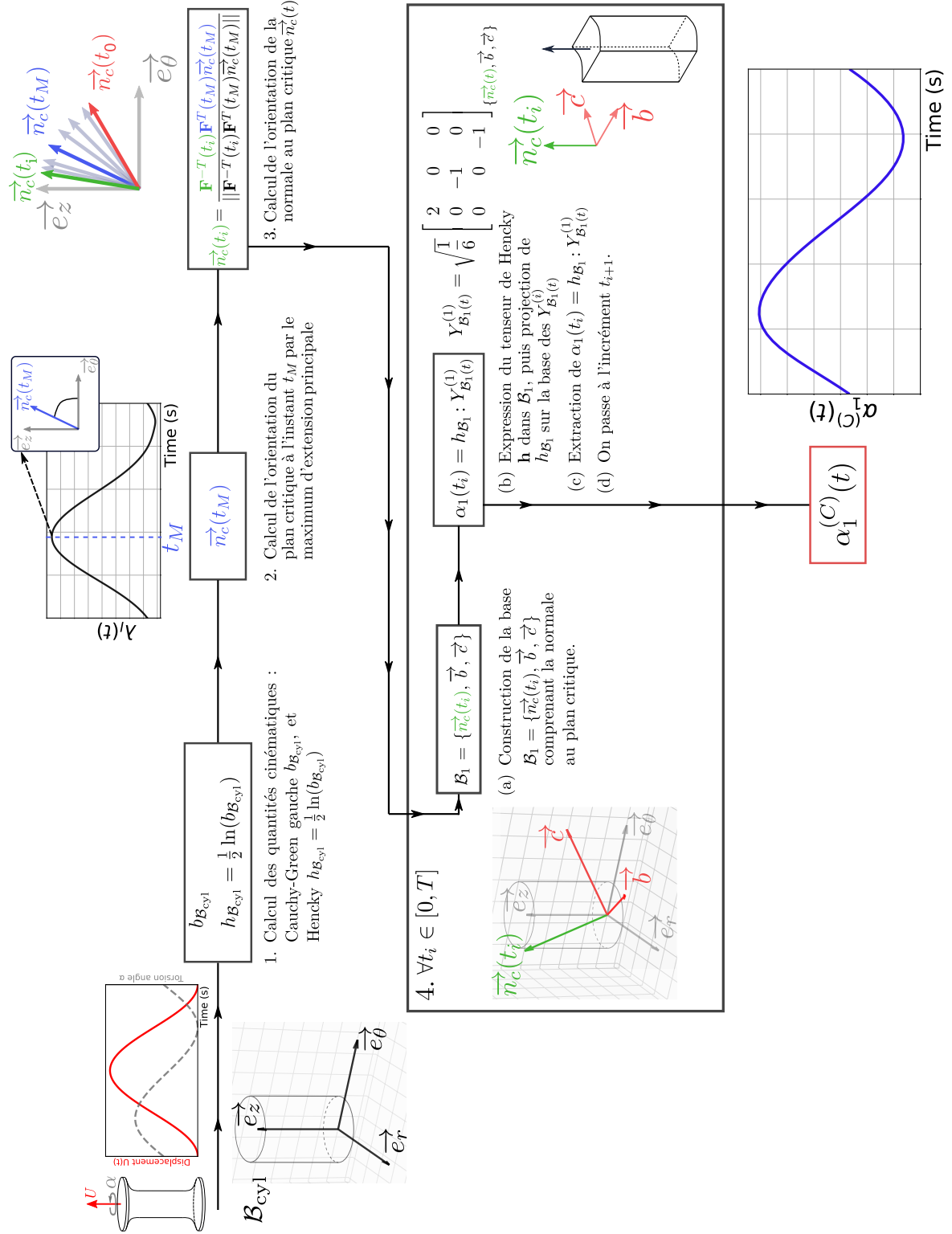
$$h_{\mathcal{B}_1} = R_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}^{-1} h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} R_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}; \quad (6.25)$$

- (d) La projection de $h_{\mathcal{B}_1}$ sur la base tensorielle choisie (équation 5.3);

- (e) $\alpha_1(t_i) = h_{\mathcal{B}_1} : Y_{\mathcal{B}_1(t)}^{(1)}$ est calculé et stocké dans le vecteur $\alpha_1^{(C)}(t)$;

Puis, nous passons à l'incrément t_{i+1} .

La Figure 6.7 montre l'évolution de $\alpha_1^{(C)}(t)$ pour un essai de traction-torsion de conditions de chargement $U_{\text{max}} = 5,27$ mm, $\alpha_{\text{max}} = 257,5^\circ$ et trois phases différentes.


 FIGURE 6.6 – Résumé graphique du principe de calcul de $\alpha_1^{(C)}(t)$.

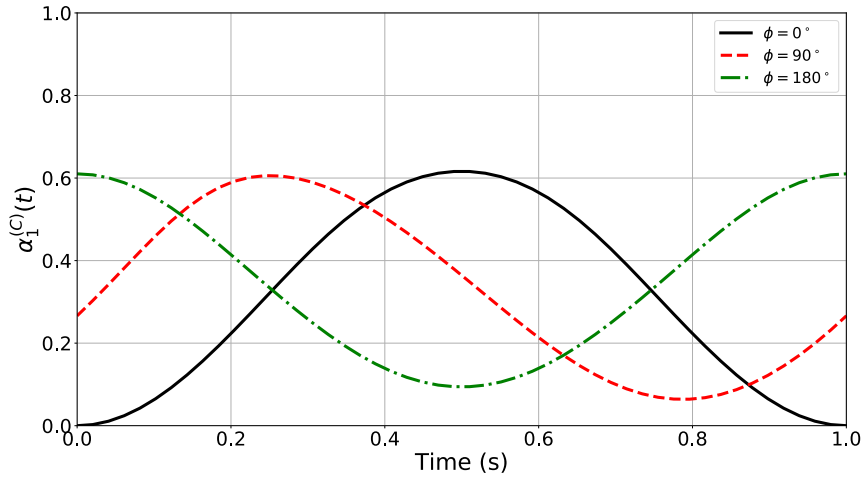


FIGURE 6.7 – Évolution de $\alpha_1^{(C)}(t)$ pour un essai de traction-torsion à $U_{\max} = 5,27$ mm, $\alpha_{\max} = 257,5^\circ$ et trois phases différentes.

Remarque : comme développé dans l'Annexe F, le calcul de $\alpha_1^{(C)}$ via \mathbf{h} pourrait être substitué par le calcul de $\alpha_1^{(C)+}$ issu de \mathbf{h}^+ dans le cas de la traction-torsion d'un cylindre. Nous préférons cependant garder une expression généralisable à tous les cas de figure, et donc travailler avec $\alpha_1^{(C)}$.

6.4 Vers un critère de fatigue purement cinématique

Nous avons désormais à disposition deux quantités qui modélisent les phénomènes mis en jeu lors de l'endommagement en fatigue des matériaux élastomères (*cf.* Tableau 6.1) :

- $\alpha_0^+(t)$ est l'intensité de la dilatation fictive qui émerge de la décomposition du tenseur de Hencky \mathbf{h} en parties positive et négative ;
- $\alpha_1^{(C)}(t)$ est l'intensité de la traction uniaxiale qui s'exerce sur le plan critique défini via le maximum de la plus grande extension principale.

Il nous faut donc les exploiter au mieux pour pouvoir proposer un critère de fatigue. Pour que ce dernier soit représentable dans un espace de type Wöhler, il est préférable que ce soit un scalaire. Nous proposons ci-après une première expression d'un critère de fatigue sous la forme d'une déformation équivalente faisant intervenir des fonctions de $\alpha_0^+(t)$ et $\alpha_1^{(C)}(t)$, et d'autres paramètres si nécessaire.

6.4.1 Choix des grandeurs scalaires

Une multitude de choix s'offre à nous pour extraire des grandeurs scalaires des évolutions temporelles de α_0^+ et $\alpha_1^{(C)}$: moyenne, maximum, amplitude, intégrale sur un intervalle spécifique, etc.

- D'une part, $\alpha_0^+(t)$ est un invariant de \mathbf{h} , car son expression ne dépend pas de la base d'expression choisie. Ainsi, prendre le maximum ou la moyenne ne semble pas avoir d'influence sur la physique de la modélisation ; nous choisissons alors de prendre sa moyenne sur le cycle considéré, qui est définie par

$$\alpha_0^{+m} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_0^+(t) dt, \quad (6.26)$$

où T est la période.

- $\alpha_1^{(C)}(t)$ représente une intensité de traction dans une direction particulière, celle de la normale au plan critique. En prenant uniquement le maximum sur le cycle, cela revient à considérer uniquement le maximum de la plus grande extension principale λ_I car ces deux grandeurs sont linéairement dépendantes dans la base propre (cf. Section F.1 de l'Annexe F). Nous proposons plutôt de considérer les intervalles de temps où $\alpha_1^{(C)}(t)$ est croissant, car ce sont les instants où l'intensité de la traction augmente jusqu'à l'ouverture maximale de la « petite fissure », i.e. à l'instant du maximum de $\alpha_1^{(C)}(t)$. On peut alors par exemple considérer la moyenne de $\alpha_1^{(C)}(t)$ sur ces intervalles comme suit

$$\alpha_1^{(C)m\nearrow} = \frac{1}{T} \sum_k \int_{I_k} \alpha_1^{(C)}(t) dt, \quad (6.27)$$

où I_k est défini tel que $\forall t \in I_k, \dot{\alpha}_1^{(C)}(t) \geq 0$, et T est la période du cycle.

Le Tableau 6.2 résume les correspondances entre modélisation et mécanismes physiques mis en jeu.

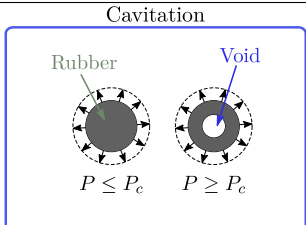
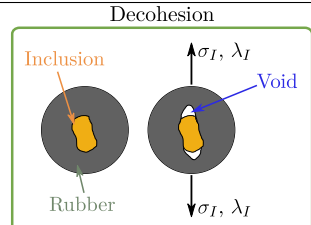
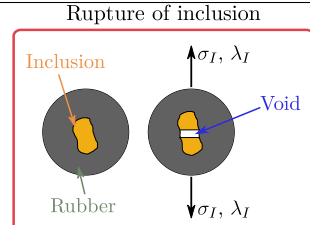
		Mécanismes		
		Cavitation	Decohesion	Rupture of inclusion
				
Modélisation		Cavitation :		
		$\alpha_0^{+m} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_0^+(t) dt$		
		Traction sur plan critique :		
		$\alpha_1^{(C)m\nearrow} = \frac{1}{T} \sum_k \int_{I_k} \alpha_1^{(C)}(t) dt$		

TABLEAU 6.2 – Correspondance entre les mécanismes d'amorçage en fatigue et les modélisations proposées avec leurs formulations mathématiques.

Dans ce qui suit, une expression du critère de fatigue faisant intervenir $\alpha_1^{(C)m\nearrow}$ et α_0^{+m} est proposée.

6.4.2 Première expression du critère

Il nous faut maintenant proposer une expression pour le critère de fatigue. Les outils à notre disposition ayant été développés précédemment, ils sont utilisés ici pour proposer une formulation générale du critère, que l'on choisit de noter Γ :

$$\Gamma = f \left(\alpha_0^{+m}, \alpha_1^{(C)m\nearrow} \right). \quad (6.28)$$

L'idée est donc de choisir la fonction f pour permettre une bonne représentativité des deux modes d'endommagement mis en jeu. Drass *et al.* (2020) et Rosendahl (2021) utilisent le concept de FMC (*Failure Mode Concept*), qui consiste à considérer séparément chaque mode d'endommagement, puis à les faire interagir par l'intermédiaire d'un paramètre

ajustable en vue obtenir une surface de rupture qui soit une combinaison des surfaces de rupture liées aux deux phénomènes, avec une intersection plus ou moins douce. Dans notre cas, un tel critère ressemblerait à

$$\Gamma^{\text{FMC}} = \left[\left(\frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}} \right)^p + \left(\frac{\alpha_1^{(C)m/\lambda}}{\alpha_1^{\text{crit}}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = 1, \quad (6.29)$$

où α_0^{crit} et α_1^{crit} sont des seuils relatifs à chaque mode d'endommagement, et $p \geq 1$ est un paramètre traduisant le degré d'interaction entre les deux modes : $p = 1$ induit une forme linéaire pour Γ et $p \rightarrow \infty$ n'induit aucune interaction entre les deux. Cependant, ce concept n'a pas encore été, à la connaissance de l'auteur, utilisé dans le cadre d'études de fatigue pour élastomères. De plus, la détermination du paramètre d'interaction p optimal demanderait un travail supplémentaire et sortirait du cadre de la thèse.

La proposition faite dans ce travail se veut simple, en combinant linéairement $\alpha_1^{(C)m/\lambda}$ et α_0^{+m} comme suit

$$\Gamma(\Phi) = \Phi \left(\frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}} \right) + (1 - \Phi) \left(\frac{\alpha_1^{(C)m/\lambda}}{\alpha_1^{\text{crit}}} \right), \quad (6.30)$$

où Φ est un paramètre à déterminer et α_0^{crit} et α_1^{crit} sont des seuils à définir. En première approximation et pour le reste de ce travail, nous choisissons de définir α_0^{crit} et α_1^{crit} comme les valeurs de α_0^+ et de α_1 au moment de la rupture pour un essai de traction uniaxiale monotone sur des éprouvettes haltères de 2 mm d'épaisseur. Pour une extension à rupture $\lambda = 3,59$ (moyenne sur dix essais à faible vitesse de déformation), nous obtenons

$$\alpha_0^{\text{crit}} = 0,738 \quad \text{et} \quad \alpha_1^{\text{crit}} = 1,57. \quad (6.31)$$

Idéalement, Φ pourrait être défini par une connaissance *a priori* des parts respectives des mécanismes de cavitation et d'endommagement sur le plan critique. En pratique, nous proposons de déterminer sa valeur expérimentalement ; pour cela, il suffit par exemple de caler un modèle de type Basquin à un jeu de données d'essais de fatigue :

$$N_f (\Gamma(\Phi))^n = C, \quad (6.32)$$

où n et C sont des paramètres matériau, qui dépendent de la valeur de Φ .

6.5 Conclusion

Dans cette section, un nouveau critère de fatigue entièrement cinématique a été proposé. Il est basé sur l'utilisation des développements théoriques autour du tenseur de Hencky \mathbf{h} proposés au chapitre précédent, qui ont été reliés aux mécanismes d'endommagement en fatigue des élastomères recensés dans la littérature. Via la décomposition de \mathbf{h} en une partie positive \mathbf{h}^+ et une partie négative \mathbf{h}^- , nous avons montré que \mathbf{h}^+ présente une déformation compressible fictive. Cela a permis de projeter \mathbf{h}^+ sur la base tensorielle des $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}_{\{i=0, \dots, 5\}}$, et de proposer une interprétation physique de α_0^+ : après avoir comparé son évolution à une pression hydrostatique (issue du tenseur des contraintes de Cauchy), nous supposons que α_0^+ est la grandeur cinématique duale d'une partie de la pression hydrostatique, qui permet donc de rendre compte du phénomène de cavitation. D'un autre côté, l'endommagement induit par les mécanismes de décohésion, de rupture des inclusions et de croissance des micro-défauts est modélisé par une approche par plan critique, celui-ci étant défini par la direction associée à la plus grande extension principale

au cours du cycle. En définissant à chaque instant la grandeur $\alpha_1^{(C)}$, issue de la projection de \mathbf{h} sur la base tensorielle $\{\mathbf{Y}^{(i)}\}_{i=1, \dots, 5}$, nous faisons l'hypothèse que nous extrayons de la déformation la composante qui agit uniquement comme une traction sur le plan critique. Ces deux grandeurs, $\alpha_1^{(C)}$ et α_0^+ , ont ensuite été combinées pour proposer le critère $\Gamma(\Phi)$. En conclusion, bien qu'encore balbutiante, l'exploitation des propriétés mathématiques de la déformation logarithmique au travers de \mathbf{h} semble très prometteuse pour la prise en compte de la multiaxialité dans l'étude de la fatigue des élastomères.

Troisième partie

Applications

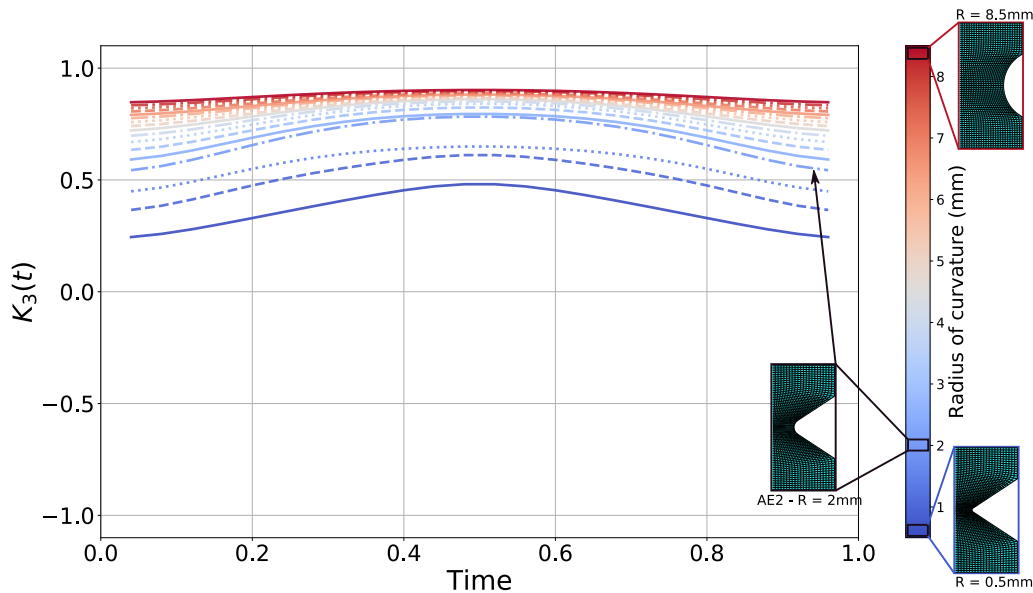
Résumé de la Partie 3

Dans cette troisième et dernière partie, les développements présentés dans les Parties I et II sont appliqués à plusieurs jeux de données. Dans un premier temps, le critère de fatigue précédemment introduit est appliqué aux essais de fatigue de traction-torsion réalisés dans ce travail. Ensuite, une base de données, composée de résultats d'essais de fatigue de traction-torsion publiés, est constituée et analysée d'un point de vue cinématique. Enfin, le critère de fatigue est appliqué à l'ensemble des essais de cette base de données. Trois chapitres, résumés ci-dessous, composent la troisième partie de ce travail.

Le Chapitre 7 ouvre la troisième et dernière partie de ce travail avec l'application du critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ aux résultats d'essais de fatigue présentés dans la Partie I. Pour étudier l'influence du paramètre Φ sur la capacité prédictive du critère, deux méthodes sont proposées. La première est une étude paramétrique dans laquelle trois valeurs particulières de Φ sont choisies : $\Phi = 0$ correspond à un critère modélisant un endommagement amorcé par un phénomène de type traction sur plan critique, $\Phi = 1$ à un critère modélisant un endommagement amorcé par un phénomène de type cavitation, et $\Phi = 0,5$ qui est un équilibre entre les deux modélisations. Pour chacune de ces valeurs, un modèle de Basquin est identifié sur chacun des quatre types d'essai (traction uniaxiale à $K_3 = 1$, traction-torsion en-phase à $K_3 = 0,5$, etc.), et le modèle dont la courbe de régression est la plus proche de la courbe moyenne théorique est choisi comme modèle prédictif. Ce dernier est utilisé pour prédire les durées de vie en fatigue des trois autres types de chargement. Pour les trois valeurs de Φ retenues, il ressort que ce sont les essais de traction-torsion qui prédisent le mieux tous les autres types d'essai. Cette observation est appuyée par la démonstration d'un résultat important : un modèle prédictif identifié sur des essais de traction uniaxiale n'est pas sensible à la valeur du paramètre Φ . L'étude paramétrique ne permet pas de conclure quant à la pertinence de l'une ou l'autre des valeurs de Φ choisies, et une deuxième méthode est donc proposée. Elle consiste à déterminer Φ qui maximise le coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin, calé sur un certain type d'essais. Comme démontré théoriquement précédemment, la valeur de Φ n'influe pas sur la qualité du modèle dans le cas de la traction uniaxiale. Cependant, ce résultat est identique pour les trois autres chargements comportant de la torsion, ce qui n'est pas expliqué. Cette deuxième méthode ne semble donc pas adaptée aux essais réalisés dans ce travail, et il est alors proposé de la tester sur une base de données plus grande.

Le Chapitre 8 présente dans un premier temps la constitution d'une base de données étendue de plus de 350 résultats de fatigue sur élastomères. Elle est composée des réponses cinématiques (cycles du tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}(t)$), calculées pour tous les essais appliqués à chaque éprouvette, via un logiciel Éléments Finis. Tous les paramètres numériques intervenant dans la résolution numérique (loi de comportement et paramètres matériau, maillage, chargement, etc.) sont présentés en détail. Ensuite, une analyse cinématique de ces résultats, basée sur deux invariants du tenseur de Hencky \mathbf{h} , est

menée. En utilisant les principes de la méthode de construction de nos essais de fatigue (*cf.* Chapitre 3), à savoir la décomposition de la déformation en un mode (au travers de K_3) et une intensité (au travers de K_2) une lecture purement cinématique du comportement des éprouvettes soumises à des chargements divers (traction, torsion, traction-torsion, etc.) est proposée. Il en ressort que le mode de déformation (ou multiaxialité locale) est le paramètre le plus complexe à contrôler, car il n'est pas toujours cohérent avec la nature du chargement imposé. Ainsi, l'éprouvette torique appelée O-Ring peine à garder un mode de déformation constant au cours de l'essai, et ne permet pas, lorsque soumise à un chargement de traction uniaxiale, d'induire un mode de déformation de traction uniaxiale caractérisé par $K_3 = 1$. Concernant les éprouvettes cylindriques pleines, leur mode de déformation est plus facilement contrôlable, sous réserve que le rayon de courbure de l'éprouvette ne soit pas trop petit (comme c'est le cas pour l'AE2, de rayon de courbure égal à 2 mm). Ce résultat est confirmé en modélisant avec Abaqus, à partir de la géométrie de base de l'AE2, plusieurs éprouvettes avec des rayons de courbures compris entre 0,5 mm et 8,5 mm, auxquelles sont appliquées un cycle de traction. Le résultat (*cf.* la figure ci-dessous) montre que le rayon de courbure a une forte influence sur les mode de déformation



Évolutions temporelles de K_3 pour des géométries d'éprouvettes basées sur l'AE2, avec différents rayons de courbure. Le chargement imposé est une traction uniaxiale d'amplitude 9 mm. Les données sont prises sur la surface extérieure de la section minimale de l'éprouvette.

accessibles. Il est recommandé d'utiliser le O-Ring pour des essais de validation et de suivi de fissuration, et d'utiliser les autres types d'éprouvettes pour des essais de caractérisation.

Le Chapitre 9 clôt ce travail de thèse, avec l'application du critère $\Gamma(\Phi)$ à la base de données constituée dans le chapitre précédent. La méthode utilisée pour déterminer le paramètre Φ , ainsi que le type d'essais à choisir en référence pour identifier le modèle prédictif est similaire à la deuxième méthode utilisée dans le Chapitre 7 : pour chaque géométrie d'éprouvette, et pour chaque type de chargement, la courbe d'évolution de R^2 (R^2 est le coefficient de régression de la loi de Basquin utilisée pour modéliser les essais courants) en fonction de Φ est présentée. Cette courbe fait apparaître une valeur optimale Φ_{opt} correspondant à R^2 maximal. Ensuite et pour chaque type d'essai pris en référence, le modèle de Basquin associé à Φ_{opt} est utilisé pour prédire les durées de vie des autres types de chargement. Une erreur entre la prédiction et la durée de vie réelle est calculée

pour chaque type d'essai pris en référence. Les essais dont la valeur moyenne de l'erreur en valeur absolue est la plus faible sont choisis comme les essais de référence finaux. La courbe $(\Gamma(\Phi_{\text{opt}}), N_f)$ associée est tracée, ainsi que les prédictions des durées de vie dans l'espace $(N_f^{\text{exp}}, N_f^{\text{pred}})$. Un premier résultat important est mis en lumière par cette étude : quand ils sont disponibles, les essais de traction-torsion en-phase sont toujours ceux qui prédisent le mieux tous les autres types d'essai. D'autres résultats sont également à noter : dans la plupart des cas, la méthode de détermination de Φ_{opt} par maximisation de R^2 fonctionne, ce qui n'était pas le cas pour les essais réalisés dans ce travail (*cf.* Chapitre 7). On peut également noter la difficulté de prédire les essais non relaxés (*i.e.* avec un rapport de charge positif), ainsi que les essais de traction-compression. Néanmoins, les résultats sont encourageants, et ouvrent la voie à des améliorations possibles du critère cinématique $\Gamma(\Phi)$.

Chapitre 7

Application du critère de fatigue aux essais de traction-torsion de ce travail

Sommaire

8.1	Motivation de l'étude	118
8.2	Méthodes	118
8.2.1	Étapes de l'analyse	119
8.2.2	Modèles EF et essais de fatigue	119
8.3	Résultats et discussion	122
8.3.1	O-ring (Mars, 2001b; Harbour <i>et al.</i> , 2008b)	122
8.3.2	Géométries standards	123
8.4	Conclusion	126

7.1 Introduction

Lorsqu'un critère de fatigue (qui est une grandeur prédictive) est défini, il est naturel d'étudier sa capacité à effectivement prédire des durées de vie en fatigue sous différents chargements, en proposant par exemple une méthode pour identifier les éventuels paramètres matériau, puis en confrontant le critère à des essais complexes. Ainsi, Ayoub *et al.* (2014) appliquent leur critère à deux séries d'essais de traction-torsion, l'une réalisée par eux-mêmes sur des éprouvettes cylindriques appelées AE2 et AE42, l'autre menée par Mars (2001b) sur une éprouvette torique appelée O-ring ; Brunac *et al.* (2009) confrontent leur grandeur prédictive aux mêmes essais réalisés par Mars (2001b), ainsi qu'à ceux de Saintier *et al.* (2006) menés sur des éprouvettes cylindriques appelées Diabolo, AN2 ou encore AN5, etc. Pour tester la capacité prédictive du critère $\Gamma(\Phi)$ proposé dans ce travail, il est d'abord nécessaire de déterminer la valeur du paramètre Φ qui représente la proportion entre les deux modélisations des mécanismes d'endommagement : la cavitation, au travers de α_0^+ , et la traction sur le plan critique au travers de $\alpha_1^{(C)}$. Pour ce faire, deux méthodes sont proposées : une étude paramétrique et une optimisation du paramètre Φ .

Ce chapitre s'articule autour de ces deux méthodes. Concernant la première (Section 7.2), trois valeurs particulières de Φ sont étudiées : $\Phi = 0$ correspond à un critère modélisant l'endommagement dû à la traction sur plan critique, $\Phi = 1$ à un critère modélisant l'endommagement dû à la cavitation, et $\Phi = 0,5$ qui est un équilibre entre les deux modélisations. Pour chacune de ces trois valeurs, les paramètres d'une régression de type Basquin sont calés sur les résultats d'un des quatre types de chargement, puis le modèle de régression est utilisé pour prédire les durées de vie des autres types de chargement.

La deuxième méthode (Section 7.3) consiste à déterminer la valeur du paramètre Φ par une maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sur un jeu de données de référence. En choisissant tour à tour les quatre types d'essais (traction uniaxiale à $K_3 = 1$, traction-torsion en-phase à $K_3 = 0,5$, traction-torsion déphasées de $\phi = 90^\circ$ et traction-torsion déphasées de $\phi = 180^\circ$) comme jeu de données de référence, puis en déterminant à chaque fois la valeur optimale de Φ qui maximise R^2 , la capacité prédictive du critère est analysée puis commentée.

Remarque : Dans ce chapitre, toutes les grandeurs sont dérivées analytiquement et calculées numériquement à l'aide de scripts Python. Tous les calculs sont effectués au même point d'intérêt que celui défini au Chapitre 3 : sur la surface extérieure ($R = A$) du plan médian de l'éprouvette ($Z = L/2$).

7.2 Étude paramétrique : valeurs de Φ particulières

Dans cette section, nous étudions la capacité prédictive du critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ pour trois valeurs de Φ : $\Phi = 0$ (endommagement modélisé uniquement par de la traction sur le plan critique), $\Phi = 1$ (endommagement modélisé uniquement par de la cavitation) et $\Phi = 0,5$ (endommagement modélisé par un mélange des deux en proportions égales).

7.2.1 Méthode

Pour chaque valeur de Φ , nous proposons d'analyser les résultats au travers de trois graphes :

1. Une représentation classique de type Wöhler dans l'espace $(N_f, \Gamma(\Phi))$, où chaque résultat d'essai est représenté par un point (à l'instar de la Figure 3.7). Idéalement, un bon critère « rassemble » les points des différents types de chargement, *i.e.* pour

un même nombre de cycles à rupture N_f considéré, les résultats sont tous au même niveau de critère $\Gamma(\Phi)$;

2. Une représentation, dans le même espace $(N_f, \Gamma(\Phi))$, des courbes de régression d'un modèle de Basquin (cf. équation (6.32)) pour chaque type de chargement (quatre courbes au total, à l'instar de la Figure 3.8). Un critère performant devrait unifier les courbes, c'est-à-dire que les courbes de régression devraient être proches les unes des autres (théoriquement superposées sur une courbe maîtresse pour un critère parfait) ;
3. Enfin, la disposition des courbes de régression précédentes entre elles est analysée. Les essais dont la courbe est la plus « centrale », *i.e.* celle qui, dans le faisceau des quatre courbes, est la plus proche de la courbe moyenne, sont alors désignés comme essais de référence. La courbe de régression qui les représente au mieux est alors utilisée pour prédire le reste des essais via l'équation suivante

$$N_f^{\text{pred}} = C(\Phi) \left(\Phi \left(\frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}} \right) + (1 - \Phi) \left(\frac{\alpha_1^{(C)m/\nearrow}}{\alpha_1^{\text{crit}}} \right) \right)^{-n(\Phi)}. \quad (7.1)$$

Les résultats sont présentés dans un espace $(N_f^{\text{exp}}, N_f^{\text{pred}})$. Un bon critère devrait au maximum aligner les prédictions sur l'identité (graphiquement la bissectrice d'équation $N_f^{\text{exp}} = N_f^{\text{pred}}$).

7.2.2 Résultats

Les résultats pour les trois valeurs de Φ sont présentés ci-dessous, à chaque fois sous la forme des trois précédents.

7.2.2.1 $\Phi = 0$: endommagement entièrement dû à la traction sur le plan critique

Dans ce cas, le critère devient

$$\Gamma(\Phi = 0) = \frac{\alpha_1^{(C)m/\nearrow}}{\alpha_1^{\text{crit}}}. \quad (7.2)$$

Les résultats sont présentés sur la Figure 7.1. Les données sont relativement rassemblées sur la courbe de Wöhler, et les courbes des régressions de Basquin sont parallèles (sauf pour les essais de traction uniaxiale à $K_3 = 1$), bien qu'un peu espacées. La courbe la plus centrale correspond aux essais de traction-torsion en-phase à $K_3 = 0,5$, et sa modélisation permet de prédire correctement les trois autres types d'essais.

7.2.2.2 $\Phi = 1$: endommagement entièrement dû à la cavitation

Dans ce cas, le critère devient

$$\Gamma(\Phi = 1) = \frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}}. \quad (7.3)$$

Les résultats sont présentés sur la Figure 7.2. La courbe de Wöhler illustre des résultats globalement rassemblés pour tous les types d'essai, bien que les résultats des essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 180^\circ$ se trouvent plus éloignés. Les courbes des régressions de Basquin sont relativement parallèles et proches sauf pour les essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 180^\circ$. La courbe la plus centrale correspond aux essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 90^\circ$, et sa modélisation permet de prédire correctement les trois autres types d'essais, en sous-estimant toutefois de près d'une décade les durées de vie en fatigue des essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 180^\circ$.

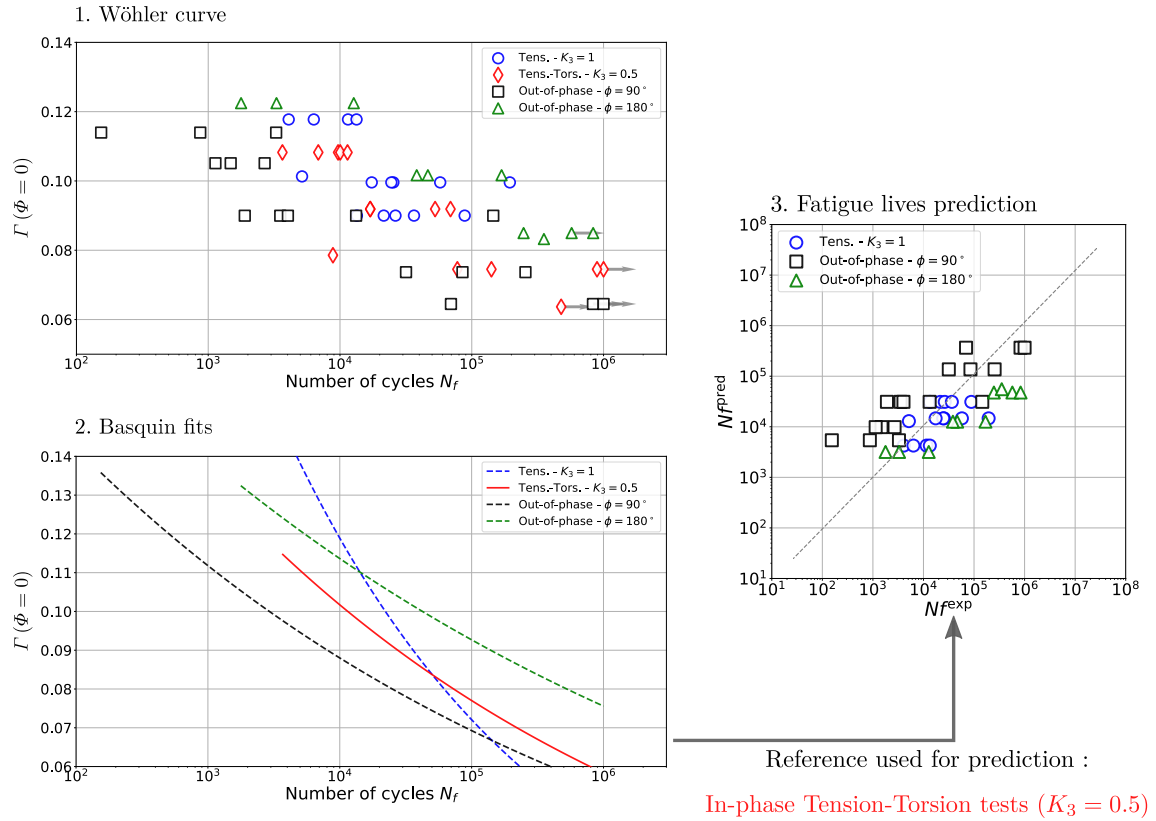


FIGURE 7.1 – Analyse des capacités prédictives du critère pour $\Phi = 0$. Dans ce cas, la référence utilisée pour la prédiction (3.) est la courbe de régression des essais de traction-torsion en-phase ($K_3 = 0,5$).

7.2.2.3 $\Phi = 0,5$: endommagement dû aux deux phénomènes dans une même proportion

Dans ce cas, le critère devient

$$\Gamma(\Phi = 0,5) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_0^{+m}}{\alpha_0^{\text{crit}}} \right) + \left(\frac{\alpha_1^{(C)m \nearrow}}{\alpha_1^{\text{crit}}} \right) \right). \quad (7.4)$$

Les résultats sont présentés sur la Figure 7.3. Nous remarquons que les résultats de la Figure 7.3 ressemblent beaucoup à ceux de la Figure 7.2, pour le cas $\Phi = 1$, mais avec des valeurs de Γ supérieures. Les mêmes remarques que pour le cas précédent sont donc valables ici aussi.

7.2.3 Discussion

Globalement, les trois valeurs de Φ permettent une prédiction correcte des durées de vie en fatigue de plusieurs types d'essai, avec une erreur de prédiction de moins d'une décade pour la plupart des essais. Notons que **les essais de référence, i.e. ceux utilisés pour la prédiction de la durée de vie des autres, sont, dans les trois cas étudiés, des essais multiaxiaux de traction-torsion** (en-phase et déphasées de $\phi = 90^\circ$).

Cela semble logique car, comme nous l'avons fait remarquer dans la Section 3.3 du Chapitre 3, le comportement des essais de traction uniaxiale à $K_3 = 1$ est anormal dans notre cas : les faibles niveaux de chargement mènent à des durées de vie plus importantes que les niveaux de chargement intermédiaires, ce qui n'est pas attendu. Ce résultat explique

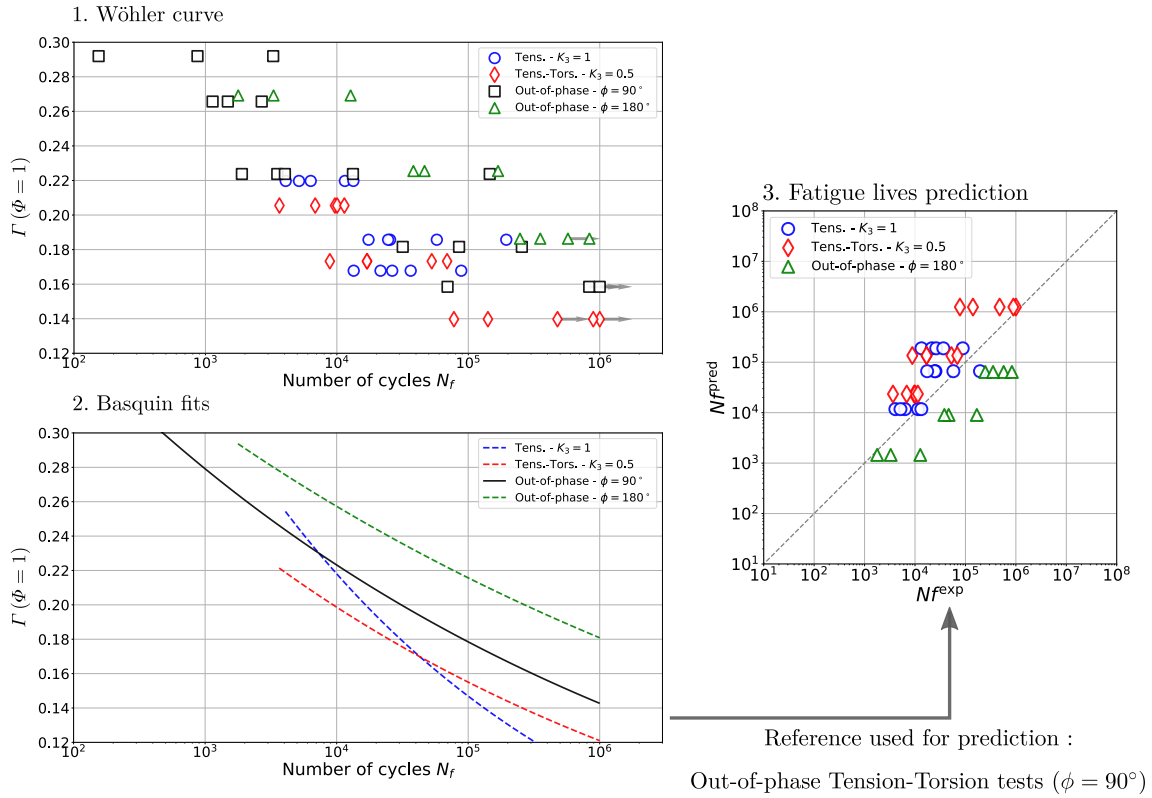


FIGURE 7.2 – Analyse des capacités prédictives du critère pour $\Phi = 1$. Dans ce cas, la référence utilisée pour la prédiction (3.) est la courbe de régression des essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 90^\circ$.

le fait que les courbes de régression pour les essais de traction uniaxiale ($K_3 = 1$) ont, pour chaque valeur de Φ , une pente beaucoup plus abrupte que les autres types d'essai : cela empêche le modèle prédictif identifié sur les essais de traction uniaxiale de prédire correctement les résultats des autres types d'essai. En examinant à nouveau les courbes de régression à la lecture de cette remarque, on peut penser que, si la courbe modélisant les résultats de traction uniaxiale à $K_3 = 1$ avait une pente comparable aux autres, elle pourrait être dans les trois cas la droite de référence, rendant ainsi l'exploitation du critère $\Gamma(\Phi)$ bien plus facile d'un point de vue expérimental.

Mais, concernant l'utilisation d'essais de traction uniaxiale comme référence pour la prédiction des durées de vie en fatigue, **une remarque importante doit être faite : les essais de traction uniaxiale ne peuvent pas être utilisés pour prédire des durées de vie d'essais de fatigue sous chargement complexe dans le cas de ce critère.** Qu'est-ce qui nous permet d'affirmer ce résultat ? C'est ce que nous proposons de démontrer maintenant. Pour ce faire, considérons le gradient de la transformation associé à une traction uniaxiale d'extension appliquée λ selon \vec{e}_1 , et que l'on exprime dans la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

$$F_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-0,5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-0,5} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (7.5)$$

Le tenseur de Hencky \mathbf{h} correspondant et sa partie positive \mathbf{h}^+ , s'expriment tous deux

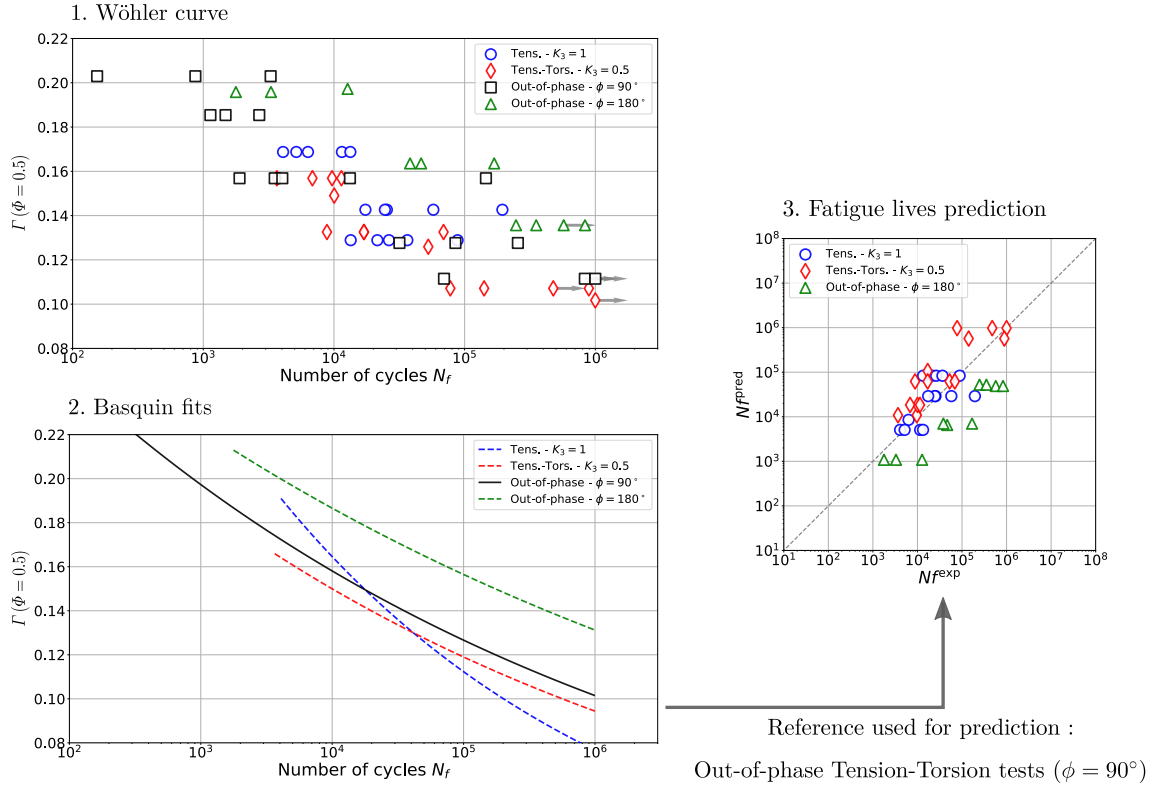


FIGURE 7.3 – Analyse des capacités prédictives du critère pour $\Phi = 0,5$. Dans ce cas, la référence utilisée pour la prédiction (3.) est la courbe de régression des essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 90^\circ$.

dans la base \mathcal{B}_1

$$h_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \ln(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \ln(\lambda) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}, \quad h_{\mathcal{B}_1}^+ = \begin{bmatrix} \ln(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (7.6)$$

Les expressions de α_1 et α_0^+ sont alors, d'après les équations (5.4), (5.11),

$$\alpha_1 = \mathbf{h} : \mathbf{Y}^{(1)} \quad \text{et} \quad \alpha_0^+ = \mathbf{h}^+ : \mathbf{Y}^{(0)}, \quad (7.7)$$

avec, dans la base \mathcal{B}_1 ,

$$Y_{\mathcal{B}_1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} \quad \text{et} \quad Y_{\mathcal{B}_1}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (7.8)$$

Il vient alors

$$\alpha_1 = \frac{3 \ln(\lambda)}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad \alpha_0^+ = \frac{\ln(\lambda)}{\sqrt{3}}, \quad (7.9)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (7.10)$$

Il est alors possible de réécrire l'expression du critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ dans le cas de la traction uniaxiale d'intensité λ , en substituant dans son expression (équation (6.30)) les équations (7.9) et (7.10), ce qui donne

$$\Gamma(\Phi) = f(\ln(\lambda)) \cdot g(\alpha_1^{\text{crit}}, \alpha_0^{\text{crit}}, \Phi), \quad (7.11)$$

où f est une fonction de $\ln(\lambda)$ et g est une fonction de α_1^{crit} , α_0^{crit} et Φ . Ainsi si les résultats d'essais de fatigue de traction uniaxiale sont représentés par exemple dans un espace de Wöhler ($\Gamma(\Phi)$, N_f), changer la valeur du paramètre Φ translatera tous les points d'une même valeur, sans changer leur position relative. **Autrement dit, le paramètre Φ ne peut pas être uniquement déterminé à partir d'essais de traction uniaxiale, car dans ce cas, la capacité prédictive du critère Γ n'est pas sensible à la valeur de Φ .** Il semble donc que le passage par des essais de fatigue multiaxiaux est nécessaire pour être en mesure de prédire correctement des chargements complexes.

Il est important de remarquer que cette conclusion est également valable concernant la détermination des paramètres seuil α_0^{crit} et α_1^{crit} . En effet, étant déterminés dans ce travail par l'extension à rupture lors d'un essai de traction uniaxiale (*cf.* Section 6.4.2), ils sont alors également proportionnels, et ne représentent donc *a priori* pas la multiaxialité de la déformation. Il serait intéressant d'explorer d'autres définitions de ces seuils ; on peut particulièrement s'interroger sur la définition de α_0^{crit} , qui est la grandeur modélisant le phénomène de cavitation. En effet, déterminer cette grandeur sur un essai conduisant à une rupture (et donc un endommagement) par cavitation, *e.g.* un essai sur éprouvette « pan-cake » (Legorju-Jago et Bathias, 2002; Euchler *et al.*, 2021), peut sembler plus pertinent pour déterminer.

7.3 Calage de Φ sur différents types d'essai

Pour tester davantage le critère, nous proposons maintenant de déterminer la valeur du paramètre Φ par optimisation et ce, en prenant tour à tour chacun des quatre types de chargement comme référence (traction uniaxiale, traction-torsion en-phase, etc.) pour identifier une loi de type Basquin, qui permet ensuite de prédire les durées de vie des autres types d'essai.

7.3.1 Méthode

Ci-dessous sont décrites les étapes de recherche du paramètre Φ optimal :

1. Nous considérons les résultats de tous nos essais réalisés avec un même type de chargement (présentés dans le Chapitre 3), par exemple tous les essais de traction uniaxiale ;
2. La valeur optimale de Φ (notée Φ_{opt}) est recherchée comme suit : un échantillonnage de Φ est réalisé entre les valeurs $\Phi = 0$ et $\Phi = 1$, et pour chaque valeur de Φ considérée, les données de référence (par exemple les résultats en traction uniaxiale) sont modélisées par la loi de Basquin présentée dans l'équation (6.32), et un coefficient de régression R^2 y est associé. La valeur de Φ correspondant au plus grand R^2 est définie comme la valeur optimale Φ_{opt} , et le modèle de Basquin associé est retenu comme modèle prédictif. Cette étape est présentée sous la forme d'un graphe dans l'espace (Φ, R^2) , sur lequel la valeur optimale de Φ (correspondant au maximum de la courbe), est représentée par une droite verticale en pointillés ;
3. La valeur du critère $\Gamma(\Phi_{\text{opt}})$ est ensuite calculée pour tous les essais, qui sont représentés dans un espace de Wöhler ($N_f, \Gamma(\Phi_{\text{opt}})$). La courbe de régression associée aux essais de référence est également représentée en pointillés ;
4. L'équation (7.1) permet de calculer les durées de vie en fatigue prédites pour les autres types de chargement, et elles sont comparées aux durées de vie expérimentales, en reportant les données dans un graphe $(N_f^{\text{exp}}, N_f^{\text{pred}})$. Plus les

données sont proches de l'identité (graphiquement de la bissectrice d'équation $N_f^{\text{exp}} = N_f^{\text{pred}}$), plus les prédictions sont correctes.

Dans ce qui suit, nous appliquons cette démarche aux différents types d'essai dans l'ordre : traction uniaxiale ($K_3 = 1$), traction-torsion en-phase ($K_3 = 0,5$), traction-torsion en quadrature de phase ($\phi = 90^\circ$) et traction-torsion en opposition de phase ($\phi = 180^\circ$).

7.3.2 Résultats et discussion

Les résultats de la recherche du Φ_{opt} par optimisation de la régression de Basquin sont présentés dans les Figures 7.4 à 7.7, chacune étant composée des trois graphes définis dans la méthode.

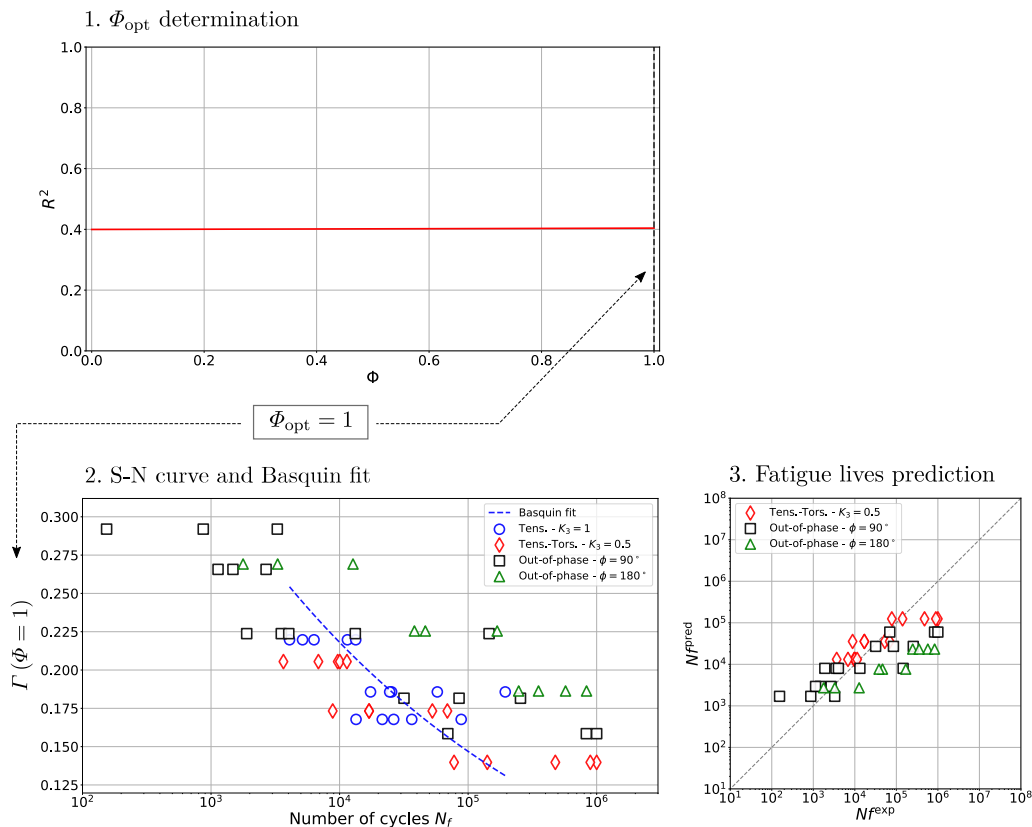


FIGURE 7.4 – Recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sur les essais de traction uniaxiale ($K_3 = 1$). Dans ce cas, $\Phi_{\text{opt}} = 1$.

Plusieurs observations communes peuvent être faites sur les Figures 7.4 à 7.7 :

- La qualité du modèle, décrite via son coefficient de régression R^2 (graphe du haut dans chaque figure) n'est pas influencée par la valeur de Φ . La valeur optimale déterminée numériquement n'est liée qu'à de très faibles variations de la valeur de R^2 . Ainsi, dans tous les cas, la valeur Φ_{opt} qui résulte de la méthode n'est que le résultat d'une maximisation d'un ensemble de valeurs de R^2 dont la différence entre le minimum et le maximum est de l'ordre de 10^{-3} , ce qui est très faible ;
- Les points sont assez dispersés autour la courbe de régression sur les graphes de Wöhler de chaque figure ;
- Sur chaque figure, le graphe en bas à droite met en lumière des erreurs de prédiction allant jusqu'à plus de deux décades. Les prédictions les moins précises sont celles basées sur les essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 180^\circ$.

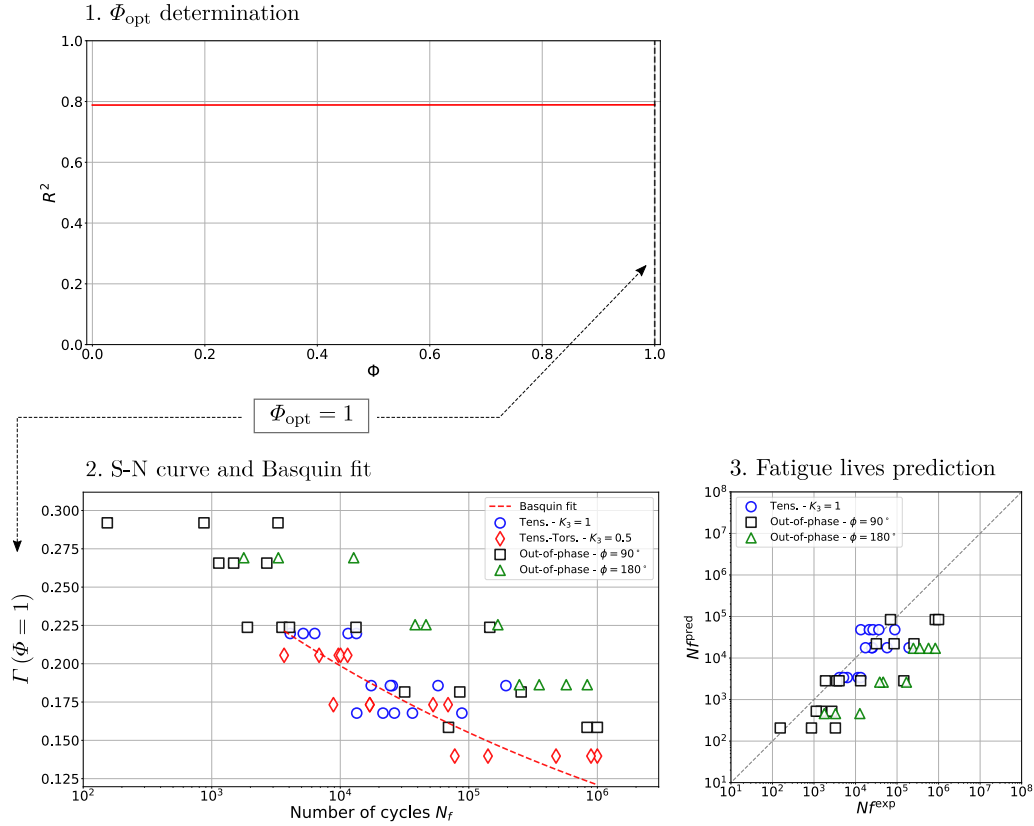


FIGURE 7.5 – Recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sur les essais de traction-torsion en-phase ($K_3 = 0,5$). Dans ce cas, $\Phi_{opt} = 1$.

Nous pouvons conclure que la méthode de recherche de Φ_{opt} proposée ici n'est pas adaptée à nos essais. En effet, aucune influence de Φ n'a pu être observée sur la qualité des modélisations de Basquin et ce, indépendamment du type d'essais pris en référence. Concernant l'incapacité de déterminer Φ_{opt} sur les essais de traction uniaxiale ($K_3 = 1$), ce résultat était attendu d'après la démonstration faite à la section précédente. En revanche, le fait qu'aucun des essais contenant de la torsion ne permette d'obtenir une valeur de Φ particulière est inattendu. Il va donc être intéressant de tester cette méthode sur d'autres types d'essai.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ a été appliqué à la prédiction des essais présentés dans ce travail (Partie I), de deux manières différentes. La première, qui est une étude paramétrique de la valeur de Γ , a étudié la capacité prédictive du critère pour trois valeurs de Φ : 0, 0,5 et 1. Aucune différence majeure n'a été constatée dans la capacité à prédire les durées de vie en fatigue selon la valeur de Φ , mais l'importance de caler le modèle prédictif (ici de type Basquin) sur des essais contenant de la torsion a été soulignée. Alors, une deuxième méthode de détermination de Φ a été proposée. Elle consiste à choisir la valeur de Φ pour laquelle le coefficient de régression R^2 d'une régression de type Basquin est maximal. Les résultats ne permettent pas de conclure quant à la validité de la méthode appliquée aux essais de fatigue réalisés dans ce travail.

Ainsi, il est proposé dans la suite de confronter le critère à une plus grande base de données d'essais de fatigue publiés dans la littérature.

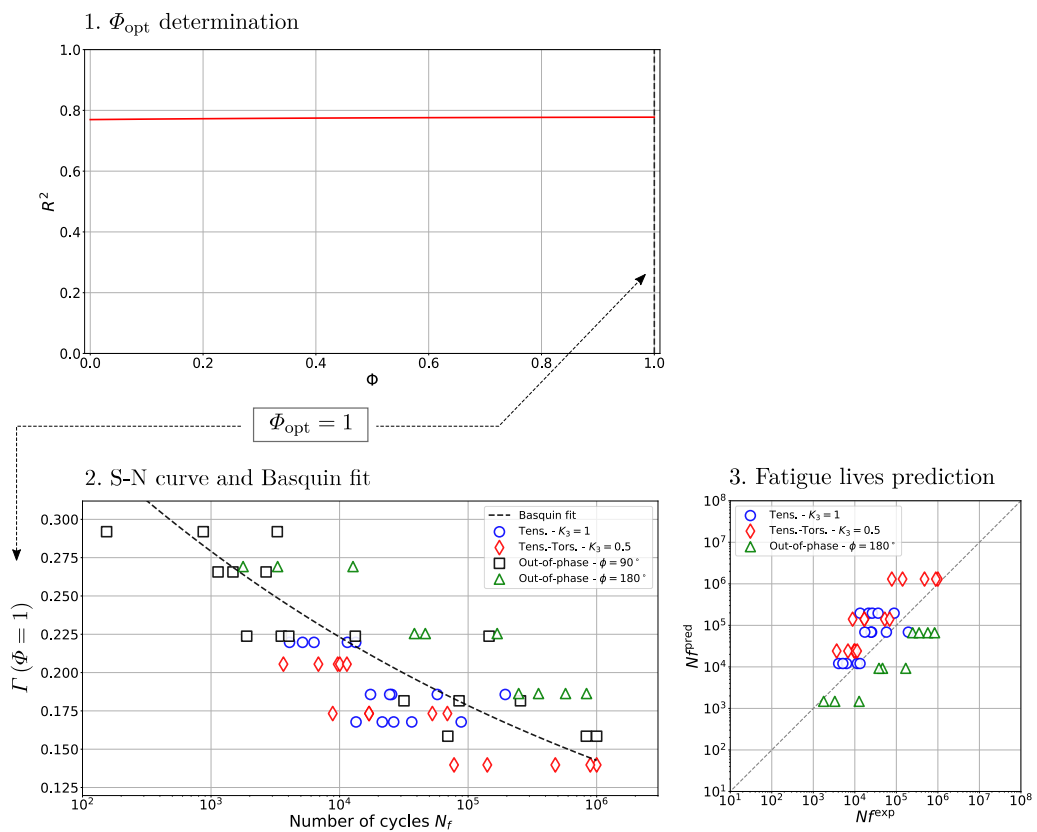


FIGURE 7.6 – Recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sur les essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 90^\circ$. Dans ce cas, $\Phi_{\text{opt}} = 1$.

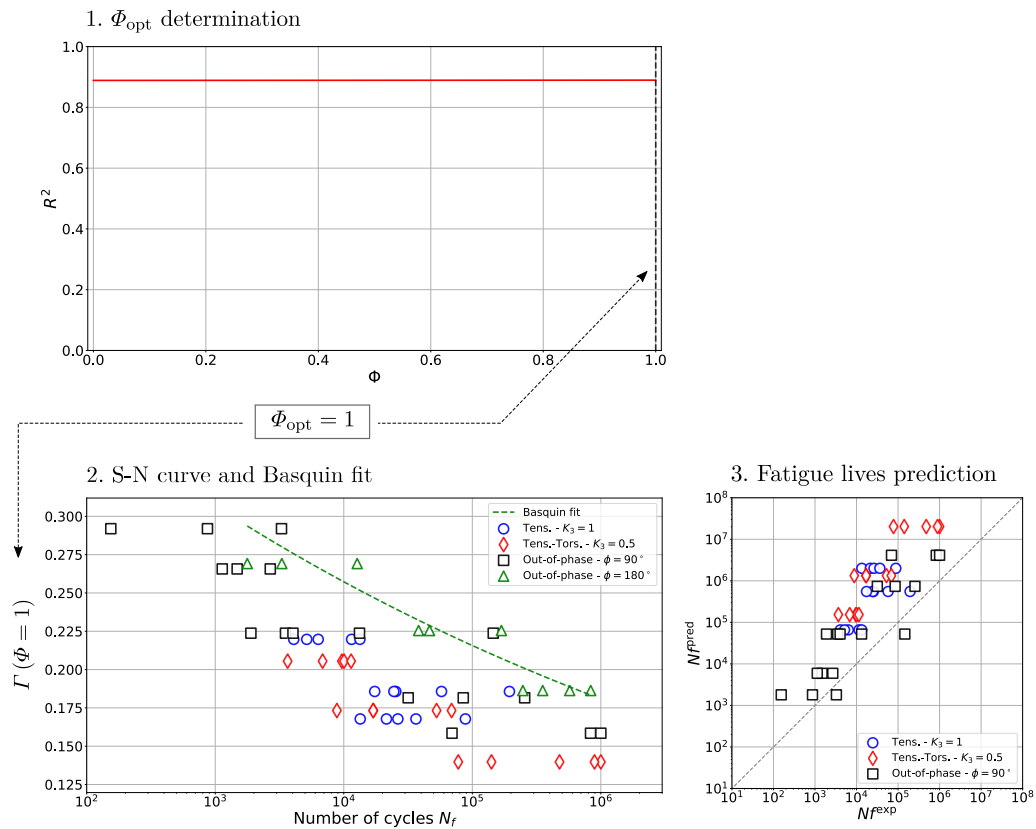


FIGURE 7.7 – Recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sur les essais de traction-torsion déphasés de $\phi = 180^\circ$. Dans ce cas, $\Phi_{opt} = 1$.

Chapitre 8

Construction et analyse cinématique d'une base de données d'essais de fatigue multiaxiaux publiés

Sommaire

9.1	Introduction	130
9.2	Paramètres matériau et méthodes	130
9.3	Résultats et discussion	131
9.3.1	Essais de Mars (2001b) sur O-ring	131
9.3.2	Essais d'Ayoub <i>et al.</i> (2012) sur AE2	133
9.3.3	Essais d'Ayoub <i>et al.</i> (2012) sur AE42	133
9.3.4	Valeurs de Φ et type de chargement	136
9.4	Conclusion	137

8.1 Motivation de l'étude

Le chapitre précédent s'est concentré sur l'application du critère $\Gamma(\Phi_{\text{opt}})$ aux essais de fatigue de traction-torsion réalisés dans ce travail, et l'une des perspectives proposées est d'étendre le nombre de cas d'application du critère à d'autres types de chargement. Comme il en a été fait mention plusieurs fois au cours de ce travail, plusieurs auteurs ont réalisé et publié des essais de fatigue multiaxiaux sur des élastomères. Nous proposons donc ici de recenser ces résultats pour créer une base de données contenant un grand nombre de résultats de fatigue différents (par la géométrie utilisée, le matériau d'étude ou encore le chargement appliqué), et à laquelle le critère pourrait être appliqué. Ce chapitre décrit donc la constitution de cette base de données, et en propose une analyse cinématique par le prisme des développements présentés dans la Partie I.

Comme introduit dans la Section 1.5 du Chapitre 1, plusieurs géométries d'éprouvette destinée à réaliser des essais de fatigue en traction-torsion ont vu le jour, chacune avec ses caractéristiques propres. Cependant, aucun consensus n'a été atteint concernant une géométrie optimale, si tant est qu'elle existe. Nous nous proposons dans ce chapitre d'exploiter les développements proposés dans le Chapitre 3 qui nous ont permis de développer la méthode de construction d'essais de fatigue multiaxiaux sur la base de la décomposition de la déformation en une intensité et un mode, au travers des invariants du tenseur de Hencky K_2 et K_3 , respectivement. En modélisant plusieurs géométries d'éprouvette de traction-torsion, ainsi que les conditions de chargement qui leur ont été imposées, nous appliquons les principes utilisés afin de développer la méthode de construction d'essais de fatigue (*cf.* Chapitre 3) à chaque géométrie. Les résultats de ce calcul sont les évolutions temporelles de K_2 et K_3 , dont l'analyse permet de faire des observations sur le comportement cinématique des éprouvettes en question durant un cycle de chargement. Nous proposons ainsi une nouvelle lecture de ces essais, à la lumière des principes utilisés pour développer notre méthode de construction d'essais de fatigue (*cf.* Chapitre 3). La discussion s'articule autour du lien entre conditions de chargement, mode de déformation et géométrie d'éprouvette.

La Section 8.2 décrit en détails la construction de la base de données, ainsi que la méthode suivie pour analyser la cinématique de certains essais de cette dernière. Les résultats sont présentés dans la Section 8.3, sous la forme d'évolutions temporelles au cours d'un cycle, des grandeurs $K_2(t)$ et $K_3(t)$. Une analyse plus fine de la géométrie dite AE2 à très petit rayon de courbure (2 mm) est proposée. La Section 8.4 conclut ce chapitre avec des recommandations d'utilisation des différentes géométries, basées sur les résultats de l'analyse cinématique de ces dernières.

8.2 Méthodes

Dans ce chapitre, plus de 350 essais de fatigue multiaxiale reportés dans la littérature sont simulés par la méthode des Éléments Finis (MEF) via Abaqus CAE 2018. Nous donnons ci-dessous la liste des publications utilisées (pour chaque élément de la liste, la première référence renvoie au type d'essais exécutés et la deuxième à la géométrie de l'éprouvette utilisée) :

- Mars (2001b) a proposé des essais de traction-torsion en-phase et hors-phase sur un large cylindre creux appelé « O-ring » (Mars et Fatemi, 2004b) ;
- Harbour *et al.* (2008b) ont proposé des essais de traction-torsion en phase sur l'éprouvette O-ring (Mars et Fatemi, 2004b), en ajoutant pour certains une traction ou compression statique ;

- Ayoub *et al.* (2011) ont proposé des essais de traction-torsion en-phase sur des éprouvettes axisymétriques de rayon de courbure central 42 mm appelées AE42 (Ayoub *et al.*, 2012);
- Ayoub *et al.* (2012) ont proposé des essais de traction-torsion en-phase sur des éprouvettes axisymétriques de rayon de courbure central 2 mm appelées AE2 (Ayoub *et al.*, 2012);
- Saintier (2001) a proposé des essais de torsion sur des éprouvettes axisymétriques de rayon de courbure interne 1,75 mm appelées AN2 (Saintier *et al.*, 2006);
- Saintier (2001) a proposé des essais de torsion et de traction-compression sur des éprouvettes avec une partie centrale cylindrique appelées Diabolo (Saintier *et al.*, 2006).

Les types d'essai et les géométries de cette liste sont décrites ci-après.

8.2.1 Étapes de l'analyse

Pour simuler un si grand nombre d'essais sous Abaqus, un script Python a été écrit pour chaque géométrie. Celui-ci suit globalement les étapes décrites ci-dessous (qui sont similaires à celles présentées dans la Section B.1 de l'Annexe B) :

1. Une géométrie est créée, un modèle hyperélastique lui est assigné et un maillage est généré;
2. Une boucle vient lire dans un fichier texte la première condition de chargement à appliquer :
 - (a) Le chargement est appliqué à la surface supérieure de l'échantillon, la surface inférieure est encastrée;
 - (b) Le calcul est lancé;
 - (c) Le tenseur de Hencky est calculé au nœud d'intérêt (*cf.* Tableau 8.1), puis écrit dans un fichier texte et ce, pour chaque incrément du calcul;
 - (d) Le fichier de sortie est fermé, et la condition de chargement suivante est lue;
3. Un script Python lit les fichiers de sortie, et calcule les évolutions temporelles au cours du cycle de $K_2(t)$ et $K_3(t)$, au nœud d'intérêt.

Dans ce qui suit, les étapes sont décrites plus en détails.

8.2.2 Modèles EF et essais de fatigue

Pour cette étude, Abaqus CAE 2018 a été utilisé. Le Tableau 8.1 résume les principaux paramètres renseignés dans Abaqus, avec pour chaque colonne :

- **Géométrie** : une image de la géométrie de l'éprouvette. Toutes les simulations exploitent l'axisymétrie de chaque couple éprouvette-conditions de chargement ;
- **Maillage** : une image du maillage utilisé. Des éléments quadrangulaires CGAX4H (autorisant la torsion hors-plan dans une simulation axisymétrique) sont utilisés. Les nombres d'éléments utilisés pour chaque simulation sont les suivants : 1621 (O-Ring), 1540 (AE2 and AN2), 1295 (AE42) et 3429 (Diabolo). L'incompressibilité est assurée par le type d'éléments utilisé. **Il est important de préciser que tous les calculs réalisés en post-traitement sont effectués au nœud pointé d'une flèche sur le maillage pour chaque éprouvette. Ce n'est *a priori* pas l'endroit exact où s'est produit l'amorçage menant à la rupture**, mais faute d'information suffisante, un choix a dû être fait. Celui-ci s'est naturellement porté vers le nœud situé sur le rayon extérieur de l'éprouvette, sur son plan médian et qui, dans le cas des éprouvettes à rayon de courbure fini (AE2, AN2, AE42), est l'endroit où sont censées s'amorcer les fissures.

- **Matériau** : le type de caoutchouc utilisé (NR pour *Natural Rubber* ou SBR pour *Styrene Butadiene Rubber*);
- **Modèle** : le type de loi de comportement retenu, ainsi que les paramètres matériaux intervenant dans le modèle. Pour chaque type d'éprouvette utilisé dans les études mentionnées dans le Tableau 8.1, les auteurs proposent un modèle hyperélastique et des paramètres matériaux que nous avons naturellement utilisés pour les simulations correspondantes;
- **Essais** : un résumé sous forme compact des types d'essais menés. Les conditions de chargement sont définies par des rapports de charge R , dont les significations ont été données dans l'équation (2.1) (*cf.* Chapitre 2). Ainsi, un essai de traction-compression (resp. torsion alternée) est défini par $-1 < R_U < 0$ (resp. $-1 < R_\alpha < 0$), un essai de traction dit relaxant (resp. de torsion relaxante) par $R_U = 0$ (resp. $R_\alpha = 0$), et un essai de traction non relaxant (resp. de torsion non relaxante) par $0 < R_U < 1$ (resp. $0 < R_\alpha < 1$);
- **Refs.** : les publications dans lesquelles se trouvent la géométrie et le détail du modèle hyperélastique, ainsi que les types d'essais de fatigue.

Remarque 1 : Nous attirons l'attention du/de la lecteur · ice sur le modèle de Mooney-Rivlin utilisé pour modéliser le comportement du NR de Saintier *et al.* (2006). Dans cette publication, les auteurs utilisent un modèle avec cinq paramètres, dont nous avons décidé de ne retenir que les deux premiers dans un souci de simplicité. Ce choix s'appuie sur la volonté ici de ne s'intéresser qu'aux déformations en sortie de calcul. De plus, des essais ont permis d'assurer que cette réduction du nombre de paramètres n'influe pas sur la réponse cinématique.

Remarque 2 : D'autres essais ont été réalisés par Saintier (2001), qui consistent en de la traction-compression sur AN2 et Diabolo, et sur une géométrie AN5 non étudiée ici. La raison principale pour ce choix est qu'il est difficile de simuler de la compression en grandes déformations par la MEF, à cause d'une trop grande distorsion des éléments. Notons néanmoins que ce choix n'a pas d'influence sur les conclusions des analyses proposées dans la suite du chapitre.

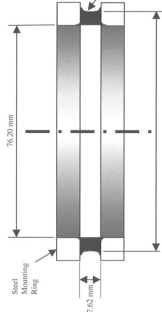
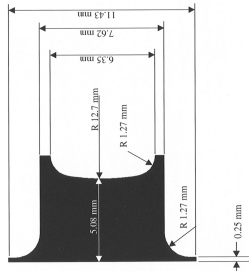
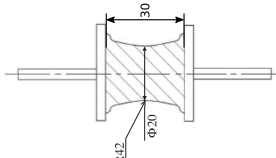
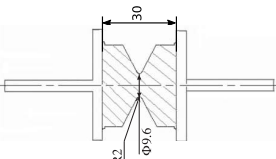
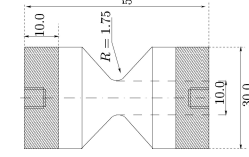
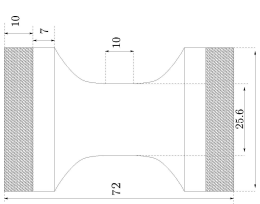
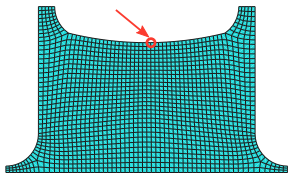
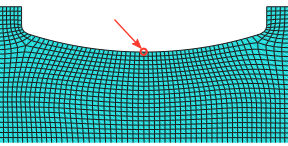
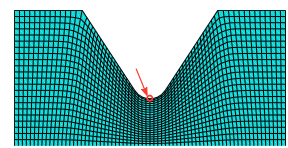
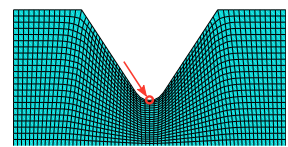
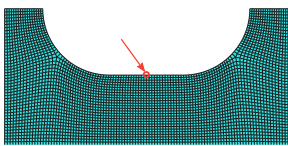
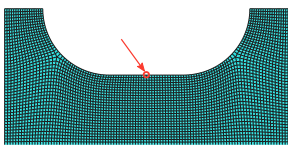
Éprouvette	O-ring		AE42	AE2	AN2	Diabolo
Géométrie						
Maillage & nœud d'intérêt						
Matériau	NR + CB	NR + CB	SBR + CB	SBR + CB	NR + CB	NR + CB
Modèle	Neo-Hookean $G = 2.1 \text{ MPa}$	Neo-Hookean $G = 2.75 \text{ MPa}$	2 nd order Ogden $\mu_1 = 5.25 \text{ MPa}$, $\alpha_1 = 0.124$ $\mu_2 = 0.015 \text{ MPa}$, $\alpha_2 = 4.06$	Neo-Hookean $G = 2.5 \text{ MPa}$	Mooney-Rivlin $C_{10} = 0.248 \text{ MPa}$, $C_{01} = 0.105 \text{ MPa}$	
Essais	Tor. ($R_\theta = 0$, $R_\theta = -1$) Ten.-tor. in phase Ten.-tor. out-of-phase	Ten. ($R_U = 0$) Tor. ($R_\theta = 0$, $R_\theta = -1$) Tor. ($R_\theta = -1$) + pre-Ten. Tor. ($R_\theta = -1$) + pre-Comp.	Ten. ($R_U = 0$, $R_U > 0$) Tor. ($R_\theta = 0$, $R_\theta > 0$) Ten.-tor. in phase	Ten. ($R_U = 0$, $R_U > 0$) Tor. ($R_\theta = 0$, $R_\theta > 0$) Ten.-tor. in phase	Tor. ($R_\theta = 0$)	Tor. ($R_\theta = 0$, $R_\theta = -1$) Ten. ($R_U = 0$, $R_U > 0$) Ten.-Comp. ($R_U < 0$)
Refs.	(G) Mars et Fatemi (2004b) (F) Mars (2001b)	(G) Harbour <i>et al.</i> (2008b) (G) Harbour (2006) (F) Harbour <i>et al.</i> (2008b)	(G+F) Ayoub <i>et al.</i> (2012) (G) Le Cam <i>et al.</i> (2013) (F) Ayoub <i>et al.</i> (2011)	(G) Saintier <i>et al.</i> (2006) (F) Saintier (2001)		

TABLEAU 8.1 – Paramètres du modèle EF des éprouvettes étudiées. Les flèches rouges sur les maillages indiquent les nœuds où sont calculées les sorties. Tous les matériaux sont des caoutchoucs vulcanisés, chargés au noir de carbone. Les codes de la ligne « Matériau » signifient : (NR, *Natural Rubber*), (SBR, *Styrene Butadiene Rubber*), (CB, *Carbon Black*). Les nombres entre parenthèses de la ligne « Refs. » indiquent si la référence renvoie à la géométrie (G) ou aux essais de fatigue (F). Les codes pour la ligne « Essais » sont : (Ten., Tension), (Tor., Torsion), (Comp., Compression).

8.3 Résultats et discussion

Par souci de clarté et de concision, nous ne montrons pas les résultats de toutes les simulations réalisées. Pour chaque éprouvette, au moins une courbe pour chaque type d'essai est présentée ; ainsi, tous les cas de figure sont représentés. Deux groupes d'éprouvettes sont retenus dans ce qui suit : le premier ne contient que l'éprouvette O-ring, et le deuxième les autres éprouvettes cylindriques pleines (AE2, Diabolo, ...).

8.3.1 O-ring (Mars, 2001b; Harbour *et al.*, 2008b)

La Figure 8.1 illustre les évolutions temporelles de K_2 et de K_3 au noeud d'intérêt et pour les quatre types d'essai menés sur le O-ring par Mars (2001b) : traction, torsion, traction-torsion en-phase et traction-torsion hors-phase. Plusieurs commentaires peuvent

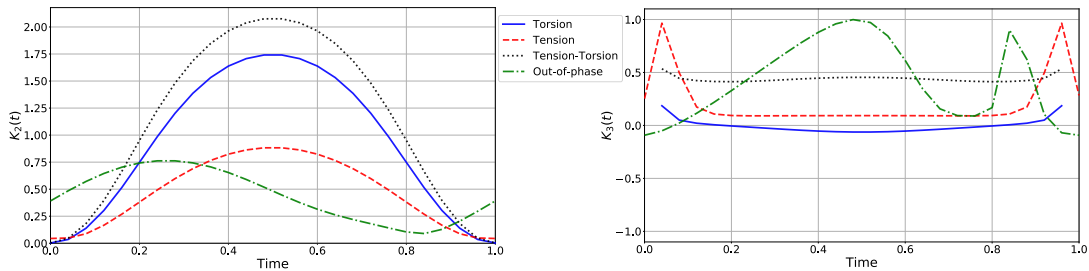


FIGURE 8.1 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour quatre essais de fatigue réalisés par Mars (2001b).

être faits :

- Les « pics » observés sur les évolutions de K_3 (Figure 8.1 droite) pour les essais de traction et de torsion sont dûs à la définition mathématique de K_3 (*cf.* équation (2.10)), dans laquelle il y a une division par K_2^3 . Au début et à la fin des cycles, l'intensité de la déformation est faible, ce qui crée ces artefacts dans K_3 . On retrouve également ce phénomène pour l'essai de traction-torsion hors-phase, aux environs de $t \approx 0,85$. Notons qu'un échantillonnage plus fin lors des simulations Éléments Finis pourrait potentiellement affiner ces pics, cependant il n'a pas été augmenté pour garder un temps de calcul raisonnable.
- Les essais de torsion et de traction-torsion en-phase peuvent être considérés cinématiquement cohérents car leur mode de déformation K_3 reste quasi-constant, et correspond au type d'essai mené ($K_3 \approx 0$ pour l'essai de torsion et $0 \leq K_3 \leq 1$ pour l'essai de traction-torsion).
- L'essai de traction est également caractérisé par un mode de déformation K_3 quasi-constant, mais sa valeur ($K_3 \approx 0$) est plus proche d'un état de cisaillement que d'un état de traction uniaxiale.
- L'essai de traction-torsion hors-phase induit évidemment un mode de déformation non constant, et une intensité de la déformation ne passant pas par zéro (l'éprouvette ne passe jamais par la configuration non déformée).

La Figure 8.2 illustre l'évolution temporelle de K_2 et K_3 au noeud d'intérêt, pour cinq essais de fatigue réalisés sur une éprouvette O-ring en NR (Harbour *et al.*, 2008b) : traction relaxante, ($R_U = 0$) torsion relaxante ($R_\alpha = 0$), torsion alternée ($R_\alpha < 0$), torsion alternée ($R_\alpha < 0$) avec une traction statique et torsion alternée ($R_\alpha < 0$) avec une compression statique. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

- Les évolutions de l'intensité de la déformation K_2 (Figure 8.2 gauche) sont attendues, *i.e.* K_2 atteint deux fois sa valeur maximale pour les essais alternés, et ne passe jamais par zéro lorsqu'une déformation statique est ajoutée.

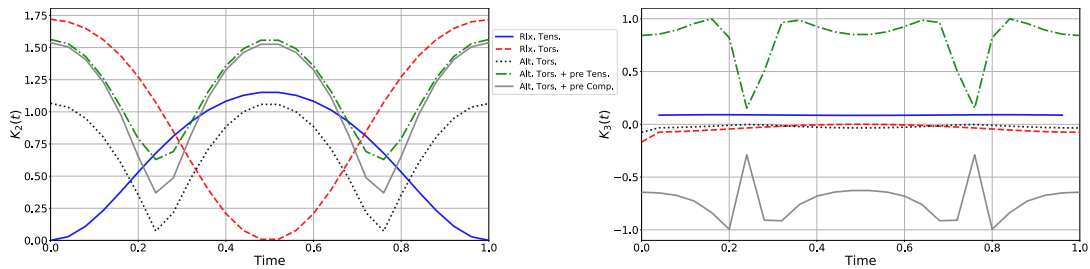


FIGURE 8.2 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour cinq types d'essais de fatigue réalisés sur un O-ring en NR par Harbour *et al.* (2008b).

- Les évolutions de K_3 (Figure 8.2 droite) peuvent être commentées plus en détails :
 - **Essais de torsion relaxante et alternée** : on y voit un mode de déformation quasi constant $K_3 \approx 0$ durant tout le cycle, ce qui est attendu pour ce type d'essai.
 - **Torsion alternée avec addition de traction ou compression quasi-statiques** : l'analyse est un peu plus complexe. D'un côté, il est attendu que l'ajout d'une traction statique (resp. compression statique) décale K_3 vers les valeurs positives (resp. négatives). Pourtant, lorsque le signal de torsion devient nul (à $t \approx 0,25$ et $t \approx 0,75$), la valeur de K_3 « devrait » coïncider avec celle de la déformation statique imposée, *i.e.* $K_3 = 1$ pour la traction statique et $K_3 = -1$ pour la contrainte statique. Or, ce n'est pas le cas, et on a plutôt $K_3 \approx 0$ ici.
 - **Traction relaxante** : les mêmes observations que pour les essais de traction de Mars (2001b) peuvent être faites (*cf.* Figure 8.1), *i.e.* la valeur quasi constante $K_3 \approx 0$ correspond à un état mécanique de torsion, alors qu'il s'agit d'un chargement en traction.

Les observations faites ci-dessus démontrent qu'il est difficile de contrôler le niveau de multiaxialité du O-ring, et notamment de faire correspondre le type de chargement avec le mode de multiaxialité du point matériel considéré. Ainsi, notre recommandation concernant cette géométrie d'éprouvette serait de ne pas l'utiliser pour caractériser le comportement en fatigue d'un matériau (*e.g.* pour créer une courbe S-N), ou pour mener une campagne d'essais monotones en vue de choisir un modèle hyperélastique, car ces types d'expériences requièrent un bon contrôle du mode de déformation. **Cependant, soulignons que l'utilité de cette géométrie n'est pas remise en cause par ces observations**, puisque l'un de ses objectifs principaux est de concentrer les amorçages en fatigue dans son plan médian, sur le diamètre extérieur (Mars et Fatemi, 2004b) pour permettre une mesure précise des tailles de fissures. Notre recommandation pour le O-ring serait de l'utiliser comme éprouvette de validation *a posteriori*.

8.3.2 Géométries standards

Dans cette partie, nous nous intéressons aux autres géométries d'éprouvettes (AE2, AN2, Diabolo, AE42), pour lesquelles le même travail d'analyse que pour l'éprouvette O-ring est réalisé.

8.3.2.1 AE42 (Ayoub *et al.*, 2012)

La Figure 8.3, illustre l'évolution temporelle de K_2 et K_3 au nœud d'intérêt, pour trois types d'essai de fatigue sur AE42 réalisés par Ayoub *et al.* (2012) : torsion relaxante, traction relaxante et traction-torsion en-phase. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

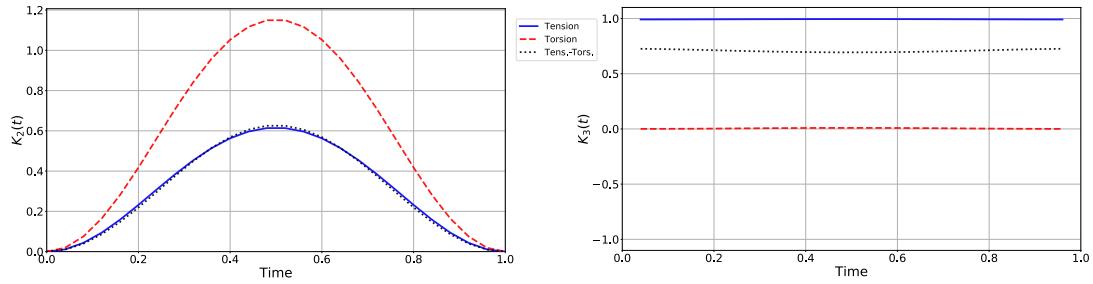


FIGURE 8.3 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour trois types d'essais réalisés sur AE42.

- Les essais de traction et de traction-torsion en-phase ont quasiment la même évolution de K_2 au cours du cycle.
- Tous les essais induisent une réponse quasi constante de K_3 tout au long du cycle de chargement.
- Les valeurs de K_3 coïncident avec le type de chargement : $K_3 = 1$ pour l'essai de traction, $K_3 = 0$ pour l'essai de torsion et $K_3(t) \approx 0,75$ pour l'essai de traction-torsion en-phase.

8.3.2.2 AE2 (Ayoub *et al.*, 2012)

La Figure 8.4 illustre l'évolution temporelle de K_2 et K_3 au nœud d'intérêt, pour cinq types d'essai de fatigue réalisés sur l'AE2 par Ayoub *et al.* (2012) : traction relaxante, torsion relaxante, traction-torsion en-phase, traction non relaxante ($R_U > 0$) et torsion non relaxante ($R_\alpha > 0$). Plusieurs commentaires peuvent être faits :

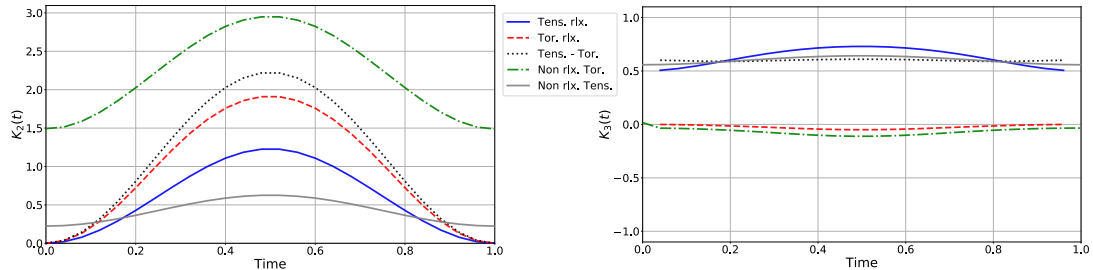


FIGURE 8.4 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour cinq types d'essais réalisés sur AE2.

- Tous les types de chargement induisent des évolutions « lisses » de K_2 et de K_3 .
- Les essais de torsion (relaxante ou non) conduisent à $K_3 \approx 0$ tout au long du cycle, ce qui est cohérent avec le chargement.
- Les essais de traction (relaxante ou non) induisent $K_3(t) \in [0,5; 0,75]$, ce qui peut être considéré « loin » de la valeur $K_3 = 1$ qui caractérise un état mécanique de traction uniaxiale.
- Les essais de traction-torsion en-phase induisent la réponse la plus stable (moins variable) de K_3 : $K_3 \approx 0,5$.

8.3.2.3 AN2 (Saintier *et al.*, 2006)

La Figure 8.5, illustre l'évolution temporelle de K_2 et K_3 au nœud d'intérêt, pour un essai de torsion non relaxante réalisé sur AN2 réalisé par Saintier *et al.* (2006). K_2 ne passe pas par zéro, ce qui est attendu pour un essai non relaxant, et $K_3 \approx 0$, ce qui est également attendu pour un essai de torsion.

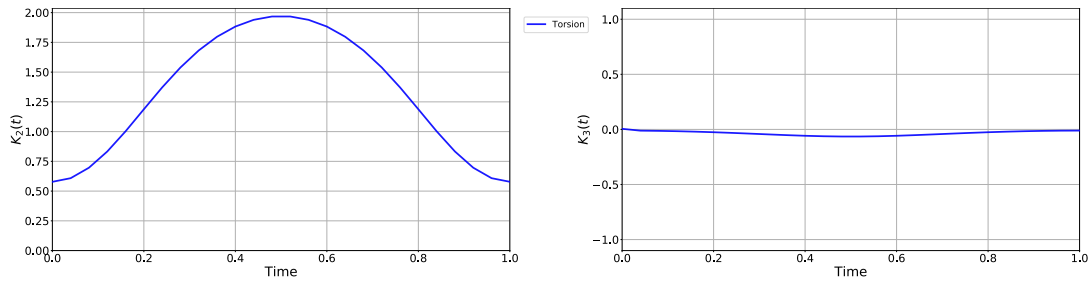


FIGURE 8.5 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour un essai de torsion non relaxante réalisé sur AN2.

8.3.2.4 Diabolo (Saintier *et al.*, 2006)

La Figure 8.6, illustre l'évolution temporelle de K_2 et K_3 au nœud d'intérêt, pour deux types d'essai de fatigue réalisés sur Diabolo par Saintier *et al.* (2006) : traction-compression et torsion alternée. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

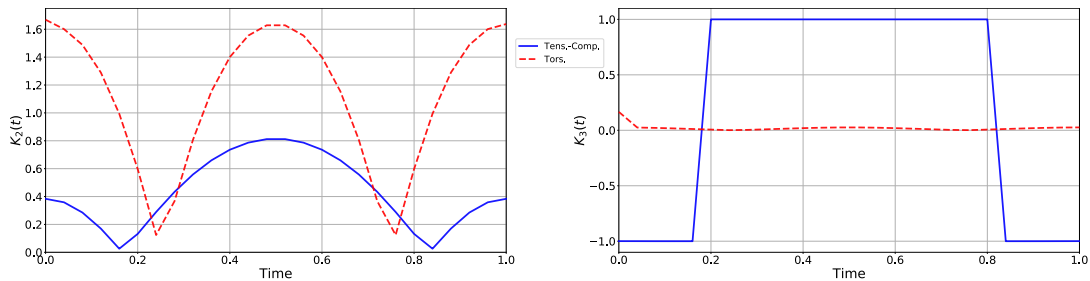


FIGURE 8.6 – Évolutions temporelles de K_2 et K_3 pour deux essais de fatigue réalisés sur Diabolo.

- L'évolution de K_2 (Figure 8.6 gauche) est cohérente :
 - **Torsion alternée** : K_2 atteint deux fois sa valeur maximale, comme attendu pour un essai alterné, et passe théoriquement par 0 lorsque l'éprouvette passe par la configuration non déformée. Ici, $K_2 \approx 0$ du fait de l'échantillonnage retenu pour la simulation Éléments Finis.
 - **Traction-compression** : comme pour le chargement de torsion, K_2 atteint une fois un maximum local pour le maximum de traction, puis passe par 0 à la transition entre traction et compression, pour finalement entrer en phase de compression et atteindre un deuxième maximum local lors du maximum de compression.
- Les évolutions de K_3 (Figure 8.6 droite) coïncident avec le chargement imposé : $K_3 \approx 0$ pour l'essai de torsion alternée, et alterne entre -1 et 1 pour le chargement de traction-compression, le premier lors de la phase de compression et le second lors de la phase de traction.

8.3.2.5 Rayon de courbure des géométries standards

Comme observé sur la Figure 8.4 pour l'AE2, il semble qu'il soit impossible d'atteindre la valeur de $K_3 = 1$, pourtant caractéristique d'un état mécanique de traction uniaxiale, avec un chargement de traction. Notre première intuition est que cela est dû au très faible rayon de courbure, qui crée de fait un très faible volume de matière fortement déformée. Pour étudier plus en détails l'influence du rayon de courbure de l'AE2 sur le mode de déformation K_3 lors d'un essai de traction, nous avons modélisé plusieurs éprouvettes dans Abaqus, avec différents rayons de courbure dans l'intervalle $[0,5 \text{ mm}; 8,5 \text{ mm}]$.

Un cycle de traction uniaxiale relaxante a ensuite été simulé sur toutes ces géométries, d'amplitude 9 mm (qui est la valeur maximale de déplacement proposée par Ayoub *et al.* (2012)), et les évolutions temporelles de K_3 ont été calculées tout au long du cycle. Celles-ci sont représentées sur la Figure 8.7. On remarque que l'éprouvette avec le plus petit

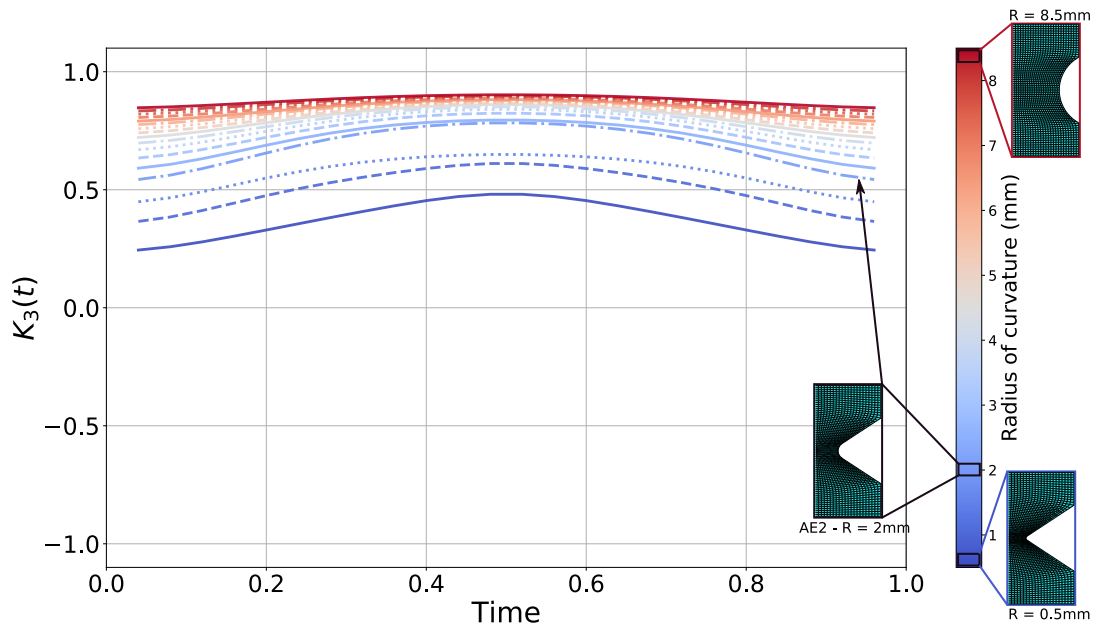


FIGURE 8.7 – Évolutions temporelles de K_3 pour des géométries d'éprouvettes basées sur l'AE2, avec différents rayons de courbure. Le chargement imposé est une traction uniaxiale d'amplitude 9 mm.

rayon de courbure ($R = 0,5$ mm) ne peut induire un mode de déformation supérieur à $K_3 = 0,5$, tandis que celle avec le plus grand rayon de courbure $R = 8,5$ mm) induit un mode de déformation qui ne va pas au-delà de $K_3 \approx 0,9$ à l'instant du maximum de déplacement imposé ($t = 0,5$). Cette figure illustre bien qu'il semble compliqué d'induire un état mécanique de traction en appliquant un chargement de traction à l'AE2. En fait, cela avait déjà été énoncé par Le Cam *et al.* (2013) : la géométrie AE2 a été pensée à l'origine pour des essais de torsion et de traction-torsion seulement.

8.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la construction d'une vaste base de données d'essais de fatigue de traction-torsion sur différentes géométries d'éprouvettes a été présentée. Une analyse cinématique en a été proposée, au travers de deux invariants du tenseur de Hencky : K_2 qui représente l'intensité de la déformation et K_3 , qui peut être vu comme le mode de la déformation. Cette analyse purement cinématique de la base de données a mis en lumière la difficulté de contrôler le mode de déformation, et les liens entre type de chargement, mode de déformation et géométrie d'éprouvette. Bien qu'il faille insister sur le fait qu'une extension de cette étude aux contraintes (par l'intermédiaire de la triaxialité η par exemple) permettrait d'étayer encore nos observations et remarques, le travail présenté dans ce chapitre peut se montrer utile pour envisager de futures améliorations dans le domaine de la fatigue des élastomères. Nous proposons ci-dessous les principales recommandations issues de cette étude :

- Du fait de sa géométrie particulière, l'éprouvette O-ring a une réponse cinématique (en termes d'intensité et de mode de déformation) complexe à appréhender. Néan-

moins, son utilité a déjà été prouvée, notamment lors de la mesure de longueurs de fissures de fatigue durant des essais interrompus. Ainsi, notre recommandation est d'utiliser cette éprouvette pour les étapes de validation de théories, plutôt que pour caractériser des matériaux (que ce soit en fatigue ou en quasi-statique).

- Les géométries standards (AE2, AE42, Diabolo et AN2) devraient être considérées en priorité pour les essais de caractérisation, avec les considérations suivantes en tête :
 - Les géométries standards induisent, pour tous les essais de traction-torsion en-phase sans pré-charge statique, un mode de déformation K_3 quasi-constant. Cette remarque n'est évidemment pas valable pour les essais hors-phase ou alternés.
 - Habituellement, les géométries à faible rayon de courbure (telles que l'AE2) sont utilisées car elles présentent une zone préférentielle d'amorçage de fissures, qui est aussi une zone de forte triaxialité. Cependant, une attention particulière doit être apportée aux essais de traction uniaxiale sur les géométries à faible rayon de courbure, car elles sont incapables d'induire des états mécaniques de traction uniaxiale ($K_3 = 1$).

Notons que les remarques faites sur les géométries standards sont également valables pour l'éprouvette cylindrique utilisée dans la présente thèse. Dans le prochain et dernier chapitre, le critère de fatigue $\Gamma(\Phi_{\text{opt}})$ proposé dans ce travail est confronté à l'ensemble des essais composant la base de données.

Chapitre 9

Application du critère de fatigue à la base de données

9.1 Introduction

Dans la Partie II, plusieurs outils théoriques autour du tenseur de Hencky \mathbf{h} ont été développés. Ceux-ci ont permis de proposer une première expression d'un critère de fatigue noté $\Gamma(\Phi)$, dont les capacités prédictives ont déjà été éprouvées sur les résultats d'essais de fatigue de traction-torsion multiaxiale menés dans ce travail (*cf.* Chapitre 7). Pour continuer de tester le critère, il convient de le confronter à d'autres essais de fatigue réalisés dans des conditions différentes : différents matériaux, différentes géométries d'éprouvette et différents chargements. Dans le chapitre précédent, les données disponibles dans la littérature sur la fatigue multiaxiale des élastomères ont été analysées pour créer une base de données de résultats d'essais de fatigue de traction-torsion. Elle est constituée des historiques des réponses cinématiques (gradient de la transformation) à plus de 350 conditions de chargement cyclique sur cinq géométries d'éprouvette, calculés à l'aide de simulations Éléments Finis, ainsi que des durées de vie correspondantes. Dès lors, les développements du Chapitre 6 peuvent être directement appliqués à cette base de données.

Dans ce chapitre, nous décrivons dans un premier temps la méthode utilisée pour appliquer le critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ à plusieurs essais de la base de données, et notamment pour déterminer les valeurs du paramètre Φ intervenant dans celui-ci (Section 9.2). La Section 9.3 présente les résultats et en propose une analyse critique. La Section 9.4 conclut le chapitre.

9.2 Paramètres matériau et méthodes

Parmi tous les couples géométrie-charge de la base de données (*cf.* Tableau 8.1), seuls trois comportent des essais de traction, torsion et traction-torsion. Il s'agit des essais de Mars (2001b) sur O-ring, d'Ayoub *et al.* (2012) sur AE2 et d'Ayoub *et al.* (2012) sur AE42. **Le choix est donc fait dans ce chapitre de n'appliquer le critère qu'à ces essais, dans un souci de concision et de lisibilité.** Les résultats des simulations Éléments Finis décrites dans la Section 8.2 du Chapitre 8, qui consistent en l'historique du gradient de la transformation $\mathbf{F}(t)$ au point matériel d'intérêt (*cf.* Tableau 8.1) pour chaque essai considéré, sont exploités. Pour chaque simulation, les calculs décrits au Chapitre 6 sont appliqués pour obtenir la valeur du critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ donnée par l'équation (6.30). Cette dernière équation fait intervenir deux paramètres matériau seuils, α_0^{crit} et α_1^{crit} , qui ont été définis en première approche comme les valeurs de α_0^+ et $\alpha_1^{(C)}$ au moment de la rupture, pour un essai monotone de traction uniaxiale. Ce type de donnée n'ayant pas toujours été fourni dans les publications étudiées, la définition des valeurs seuil α_0^{crit} et α_1^{crit} est adaptée à chaque cas, comme suit :

- Mars (2001b) a mené des essais monotones de traction uniaxiale jusqu'à rupture, avec une extension à rupture $\lambda_{\text{rupt}} = 2,96$. Cela donne comme valeurs seuils $\alpha_0^{\text{crit}} = 0,627$ et $\alpha_1^{\text{crit}} = 1,33$;
- Ayoub *et al.* (2011) ont aussi réalisé des essais monotones de traction uniaxiale sans mention des propriétés à rupture. Nous choisissons alors de considérer l'extension maximale appliquée $\lambda_{\text{max}} = 2,3$. Les valeurs seuils valent donc $\alpha_0^{\text{crit}} = 0,481$ et $\alpha_1^{\text{crit}} = 1,02$.

Comme vu au Chapitre 6, il est nécessaire de déterminer une valeur pour le paramètre Φ intervenant dans le critère $\Gamma(\Phi)$. Pour ce faire, une étude similaire à celle menée pour nos essais dans la Section 7.3 est réalisée. Les étapes sont décrites ci-après :

1. Pour chaque type d'essai considéré (traction, torsion, traction-torsion, etc.), la valeur optimale de Φ (notée Φ_{opt}) est recherchée comme suit : un échantillonnage de Φ est réalisé entre les valeurs $\Phi = 0$ et $\Phi = 1$; pour chaque valeur de Φ , les

résultats des essais de référence sont modélisés par la loi de Basquin (choix arbitraire de modélisation de la relation $\Gamma(\Phi) - N_f$) présentée dans l'équation (6.32), et un coefficient de régression R^2 est calculé. La valeur de Φ correspondant au plus grand R^2 est définie comme la valeur optimale Φ_{opt} . Pour chaque type d'essai pris en référence, cette étape est présentée sous la forme d'un graphe dans l'espace (Φ, R^2) , sur lequel la valeur optimale de Φ (correspondant au maximum de la courbe), est représenté par une droite verticale en pointillés ;

2. Pour chaque type d'essai pris en référence, l'équation (7.1) permet de calculer les durées de vie en fatigue prédites pour les types de chargement n'ayant pas servis de référence. Une analyse de l'erreur de prédiction en deux temps est proposée :

(a) Pour chaque couple « essais de référence/essais prédits », une erreur au sens des moindres carrés entre les durées de vie prédite et expérimentale est définie par

$$d = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{(N_{f_i}^{\text{exp}} - N_{f_i}^{\text{pred}})^2}{N_{f_i}^{\text{exp}2}} ; \quad (9.1)$$

où M est le nombre d'essais prédits. Cela permet de mettre en lumière la capacité d'un modèle prédictif basé un type d'essai (*e.g.* traction uniaxiale) à prédire un autre type de chargement (*e.g.* torsion, traction-torsion, etc.) ;

(b) Ensuite, on définit l'erreur de prédiction moyenne par essai de référence, qui est la moyenne des erreurs de prédiction pour prédire chaque autre type de chargement pris un à un. Cette valeur permet de comparer les capacités prédictives moyennes de chaque modèle, sans considération de type de chargement prédit ;

3. Finalement, un type d'essai est choisi en référence en se basant sur les résultats des erreurs, et une courbe de Wöhler est tracée avec le Φ_{opt} correspondant. La courbe de régression de type Basquin est également tracée sur ce graphe. De plus, les durées de vie prédites pour ce type de chargement pris en référence sont tracées en fonction des durées de vie réelles dans un graphe $(N_f^{\text{exp}}, N_f^{\text{pred}})$.

9.3 Résultats et discussion

Dans cette section, le critère de fatigue $\Gamma(\Phi)$ est appliqué à une partie des essais de la littérature présentés dans le Chapitre 8, selon la méthode proposée ci-dessus. Les résultats sont analysés en termes d'erreur de prédiction, mais aussi en étudiant le lien potentiel entre la valeur de Φ déterminée par la méthode et le type de chargement.

Remarque : Notons que le classement des types de chargement utilisé dans ce chapitre est identique au classement proposé par chacun des auteurs dont les essais sont utilisés ici. Par exemple, Mars (2001b) classe sous la même dénomination « *Torsion* » des essais de torsion relaxante, de torsion non relaxante, de torsion alternée, etc.

9.3.1 Essais de Mars (2001b) sur O-ring

Les résultats de la recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin sont présentés sur la Figure 9.1. Comme déjà démontré dans le Chapitre 7, la capacité prédictive du critère est insensible à la valeur de Φ pour les essais de traction (*cf.* Figure 9.1b). En revanche, contrairement à ce qui a été observé pour nos données, la méthode de maximisation de R^2 est sensible à la valeur de Φ pour les autres types d'essai. Le Tableau 9.1 fournit les résultats en termes d'erreur de prédiction,

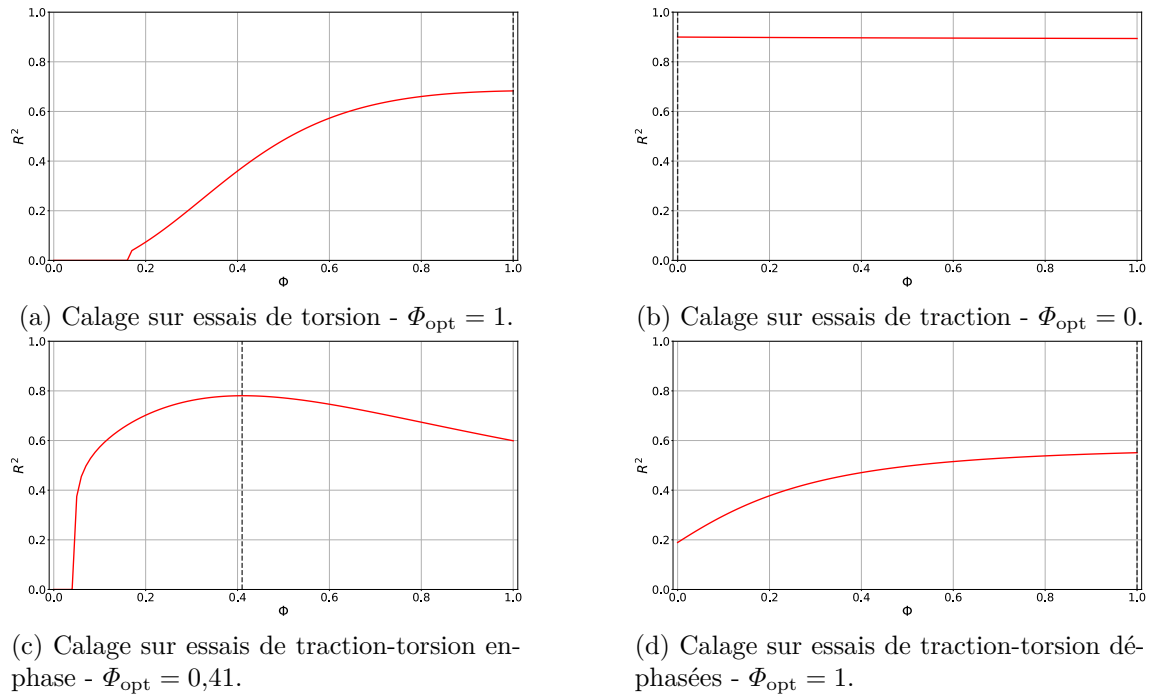


FIGURE 9.1 – Évolution du coefficient de régression R^2 du modèle de Basquin en fonction de la valeur de Φ , pour fonction de différents chargements. Données de Mars (2001b) sur O-ring.

		Essais de référence			
		Torsion	Traction	Traction-torsion en-phase	Traction-torsion déphasées
Essais prédits	Φ_{opt}	1	0	0,41	1
	Torsion	3,3	Non Pred.	49	2,7
	Traction	29	0,6	0,45	9,3
	Traction-torsion en-phase	52	Non Pred.	2,5	25
	Traction-torsion déphasées	92	9487	123	63,8
	Moyenne	44,3	-	43,7	25,2

TABLEAU 9.1 – Erreurs de prédiction pour chacun des types de chargement pris comme référence du modèle prédictif. Données de Mars (2001b) sur O-ring.

pour chaque type d'essai pris en référence. L'absence de résultats concernant les essais de traction indique que, lorsqu'ils sont utilisés pour prédire les durées de vie des autres types de chargement, le modèle n'est pas en mesure de fournir une prédiction pour chaque essai (il y a une division par zéro dans l'équation (7.1)). Les erreurs de prédiction les plus faibles (en rouge dans le tableau) sont réparties entre les modèles prédictifs basés sur la traction-torsion en-phase et sur la traction-torsion déphasées. On note que l'erreur de prédiction moyenne la plus faible est relative aux essais de traction-torsion déphasées pris en référence. Ils sont donc retenus comme essais de référence dans la Figure 9.2, avec $\Phi_{\text{opt}} = 1$. La Figure 9.2a montre un bon regroupement des essais de traction et de certains

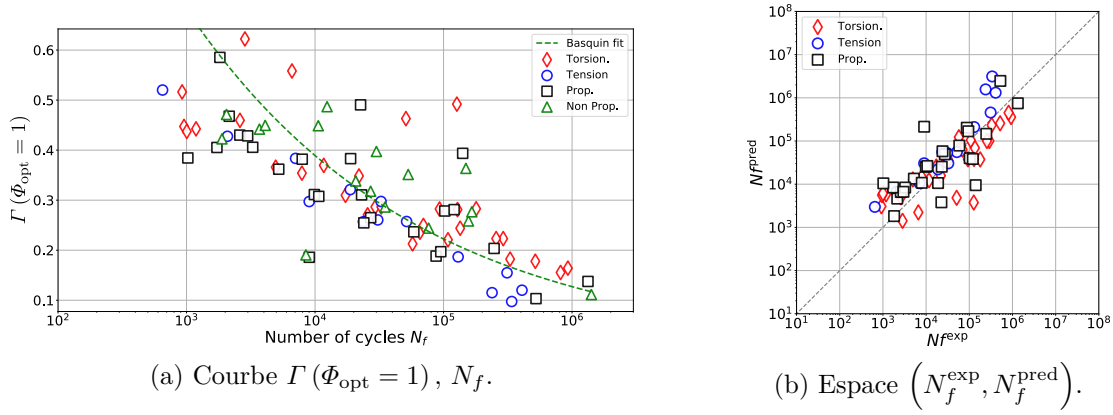


FIGURE 9.2 – Résultat des prédictions de durée de vie pour un modèle de Basquin identifié sur les essais de traction-torsion déphasés. Données de Mars (2001b) sur O-ring.

essais de traction-torsion en-phase et de torsion. Notons cependant la forte dispersion des résultats des essais de torsion : une partie est évidemment expérimentale, et l’autre tient au fait que, comme remarqué dans le préambule de cette section, la dénomination « Torsion » regroupe des essais relaxés, non relaxés, alternés et non alternés. Ainsi, en reclassant ces essais plus finement, une tendance pourrait peut-être être mise en lumière, mais cela sort du cadre choisi pour cette étude. La Figure 9.2b montre une bonne prédiction des durées de vie pour les trois types de chargement, avec quelques points mal prédits.

9.3.2 Essais d’Ayoub *et al.* (2012) sur AE2

Les résultats de la recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d’un modèle de Basquin sont présentés sur la Figure 9.3. Encore une fois, la capacité prédictive du critère est insensible à la valeur de Φ pour les essais de traction relaxée et non relaxée (*cf.* Figures 9.3a et 9.3e). Le Tableau 9.2 fournit les résultats en termes d’erreur de prédiction par type de chargement pris en référence. Il montre que ce sont les essais de traction relaxée qui, en moyenne, prédisent le mieux les autres types d’essai (erreur moyenne de 0,56 en rouge dans le tableau). Cependant, le modèle basé sur les essais de traction-torsion en-phase prédit mieux plus de types d’essais différents que le modèle basé sur les essais de traction relaxée, avec des erreurs de prédiction de 0,1 pour la torsion relaxée, 0,71 pour la torsion non relaxée et 0,67 pour la traction non relaxée (en rouge dans le tableau). Les essais de traction relaxée sont les moins bien prédits par les essais de traction-torsion en-phase, mais la valeur de l’erreur ($d = 4,3$) est très faible devant les erreurs de prédictions avec pour référence les essais non relaxés (erreurs allant jusqu’à plus de 4700). Ainsi, le choix est fait de retenir les essais de traction-torsion en-phase comme référence finale, avec $\Phi_{\text{opt}} = 0$, et les résultats sont présentés sur la Figure 9.4. La Figure 9.4a montre que les essais de traction relaxée, de torsion relaxée et de traction-torsion sont bien alignés, mais que les essais non relaxés (traction et torsion) ne le sont pas. Cette observation est confirmée par la Figure 9.4b, qui montre que les essais à durée de vie courte ou intermédiaire ($< 10^5$ cycles) sont mal prédits.

9.3.3 Essais d’Ayoub *et al.* (2012) sur AE42

Les résultats de la recherche de Φ_{opt} par maximisation du coefficient de régression R^2 d’un modèle de Basquin sont présentés sur la Figure 9.5. Elle montre cette fois-ci que la capacité prédictive du critère est insensible à la valeur de Φ pour tous les essais considérés. Le Tableau 9.3 fournit les résultats en terme d’erreurs de prédiction par type de chargement. Les résultats sont moins tranchés ici que dans les deux cas précédents :

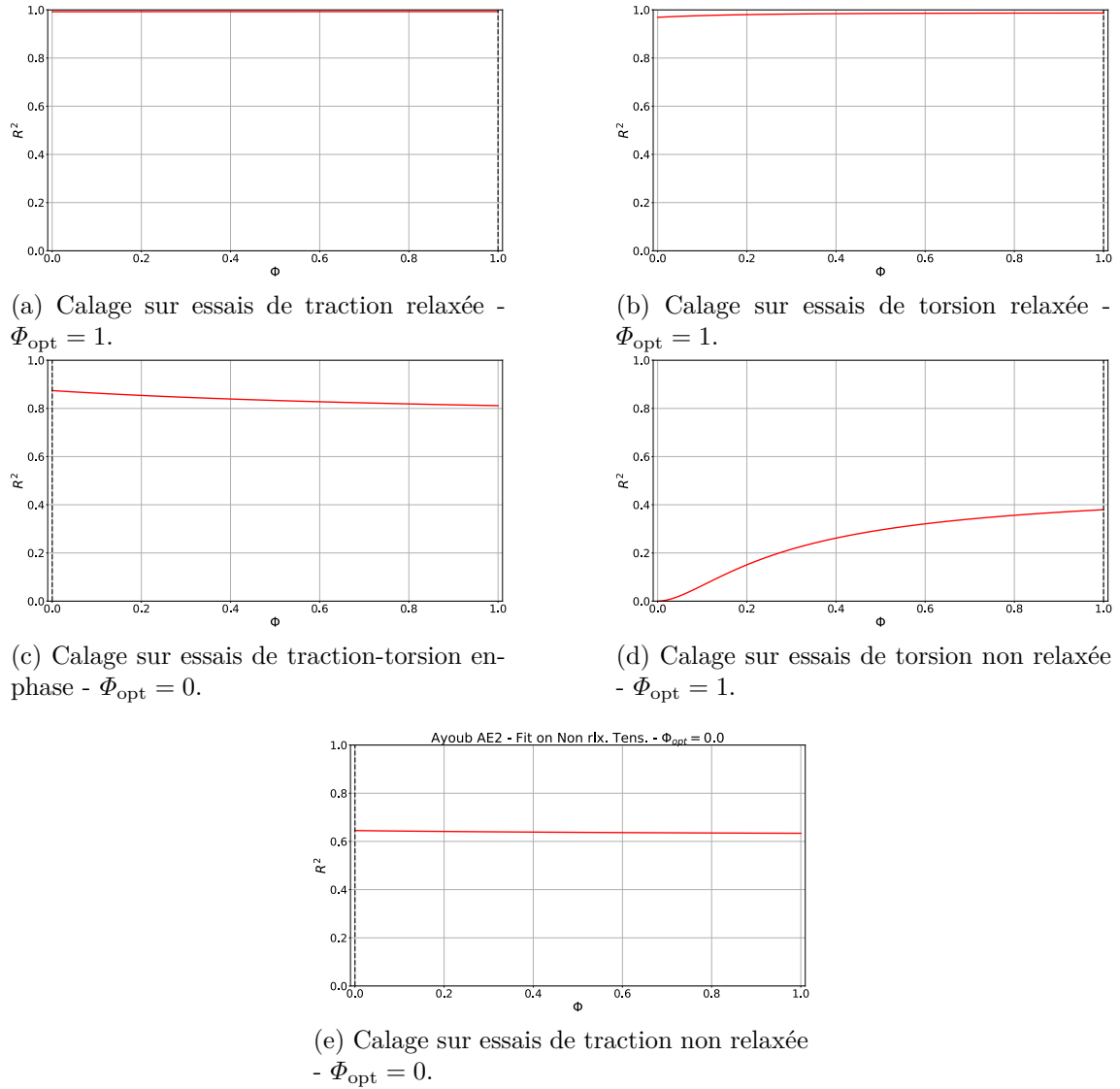


FIGURE 9.3 – Évolution du coefficient de régression R^2 du modèle de Basquin en fonction de la valeur de Φ , pour fonction de différents chargements. Données d’Ayoub *et al.* (2012) sur AE2.

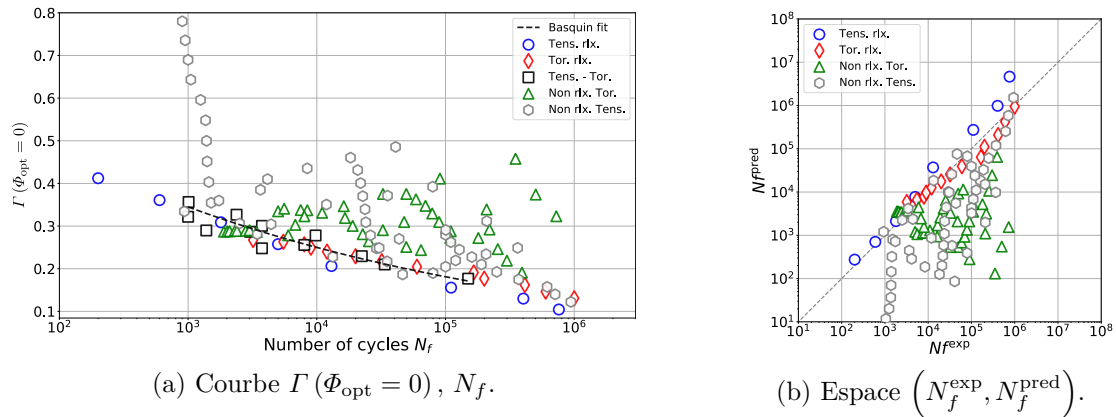


FIGURE 9.4 – Résultat des prédictions de durée de vie pour un modèle de Basquin identifié sur les essais de traction-torsion en-phase. Données de Ayoub *et al.* (2012) sur AE2.

		Essais de référence				
		Traction relaxée	Torsion relaxée	Traction-torsion en-phase	Torsion non relaxée	Traction non relaxée
Essais prédits	Φ_{opt}	1	1	0	1	0
	Traction relaxée	0,06	21,8	4,3	4768	227
	Torsion relaxée	0,6	0,04	0,1	67	19
	Traction-torsion en-phase	0,34	8,7	0,5	1469	100
	Torsion non relaxée	1	0,9	0,71	5,1	25
	Traction non relaxée	0,8	1,3	0,67	224	11,3
	Moyenne	0,56	6,54	1,26	1306	76,5

TABLEAU 9.2 – Erreurs de prédiction pour chacun des types de chargement pris comme référence du modèle prédictif. Données de Ayoub *et al.* (2012) sur AE2.

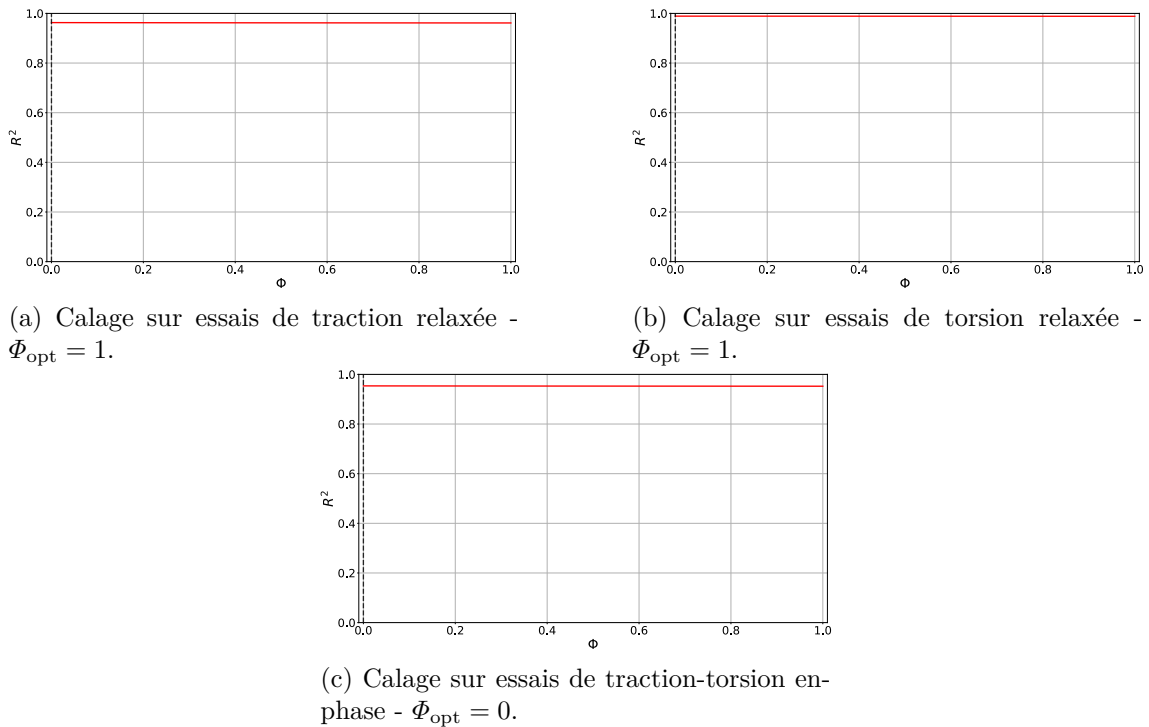


FIGURE 9.5 – Évolution du coefficient de régression R^2 du modèle de Basquin en fonction de la valeur de Φ , pour fonction de différents chargements. Données d’Ayoub *et al.* (2012) sur AE42.

les modèles basés sur les essais de traction relaxée et de traction-torsion en-phase ont des erreurs du même ordre de grandeur pour la prédiction des autres types de chargement (en rouge dans le tableau). En moyenne, et bien que la différence soit très faible, ce sont les

		Essais de référence		
		Traction relaxée	Torsion relaxée	Traction-torsion en-phase
Essais prédits	Φ_{opt}	0	0	0
	Traction relaxée	0,27	158	0,26
	Torsion relaxée	0,76	0,01	0,77
	Traction-torsion en-phase	0,33	58	0,23
	Moyenne	0,45	72,3	0,42

TABLEAU 9.3 – Erreurs de prédiction pour chacun des types de chargement pris comme référence du modèle prédictif. Données de Ayoub *et al.* (2012) sur AE42.

essais de traction-torsion en-phase qui ont l'erreur de prédiction la plus faible. Ils sont donc pris en référence avec $\Phi_{\text{opt}} = 0$, et les résultats précédents sont présentés sur la Figure 9.6. La Figure 9.6a illustre ce qui vient d'être dit sur les résultats du Tableau 9.3 : les essais

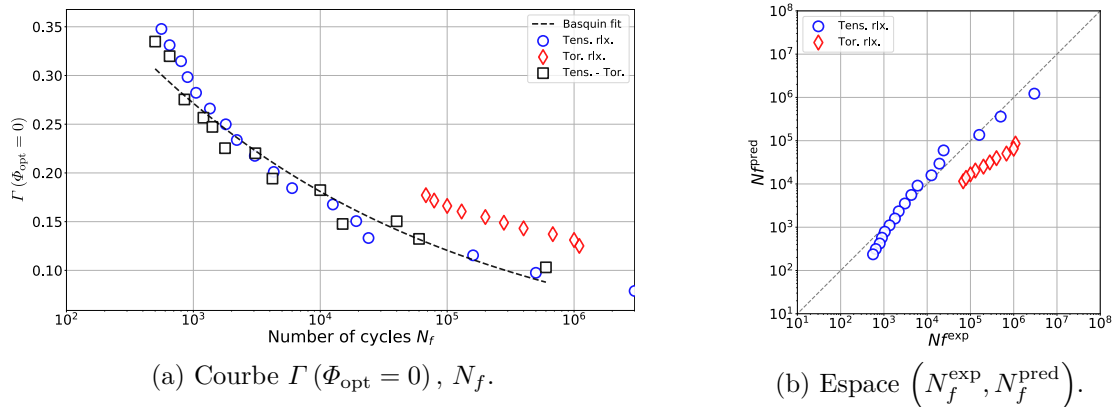


FIGURE 9.6 – Résultat des prédictions de durée de vie pour un modèle de Basquin identifié sur les essais de traction-torsion en-phase. Données de Ayoub *et al.* (2012) sur AE42.

de traction relaxée et de traction-torsion sont quasiment parfaitement alignés. Les essais de torsion relaxée ne sont pas alignés avec le reste des essais. La Figure 9.6b confirme ces observations : les essais de traction relaxée sont très bien prédits pour toutes les durées de vie, mais les essais de torsion sont prédits avec environ une décade d'erreur.

9.3.4 Valeurs de Φ et type de chargement

Différentes valeurs de Φ_{opt} ont été déterminées pour plusieurs types de chargement, et il convient de se demander si un lien peut être établi entre elles. Le Tableau 9.4 récapitule donc ces informations pour les trois géométries d'éprouvettes étudiées dans ce chapitre, ainsi que pour les essais réalisés dans ce travail, dont les résultats ont été présentés dans le Chapitre 7. Les résultats peuvent être commentés par type de chargement :

- Pour toutes les éprouvettes étudiées, et comme démontré dans le Chapitre 7, aucune valeur de Φ ne peut être déterminée avec la présente méthode en prenant les essais de traction (relaxée ou non) comme référence ;

		Chargement					
		Traction		Torsion		Traction-torsion	
		Relaxée	Non relaxée	Relaxée	Non relaxée	En-phase	Déphasées
Géométrie	AE2 (Ayoub <i>et al.</i> , 2012)	[0, 1]		[0, 1]	1	0	-
	AE42 (Ayoub <i>et al.</i> , 2012)	[0, 1]	-	[0, 1]	-	[0, 1]	-
	O-ring (Mars, 2001b)	[0, 1]		1		0,41	1
	Nos essais	[0, 1]	-	[0, 1]	-	[0, 1]	

TABLEAU 9.4 – Valeurs de Φ_{opt} déterminées par la méthode de maximisation du R^2 en fonction du type d'éprouvette et du type de chargement. Les intervalles $[0, 1]$ indiquent qu'aucune valeur de Φ n'est mise en avant par la méthode.

- Concernant les essais de torsion, les géométries AE2 et O-ring font ressortir la valeur $\Phi_{\text{opt}} = 1$, mais les géométries types AE42 et celle utilisée dans ce travail (type cylindre plein) ne permettent pas de déterminer de valeur de Φ ;
- Là encore, seuls les essais sur les géométries AE2 et O-ring permettent de déterminer une valeur de Φ_{opt} (0 et 0,41 respectivement). Les essais sur les géométries type cylindre plein (l'AE42 et l'éprouvette utilisée dans ce travail) ne mettent pas de valeur particulière en avant ;
- Enfin, le même commentaire s'applique pour les essais de traction-torsion déphasés : les essais sur l'éprouvette utilisée dans ce travail ne permettent pas d'obtenir de valeur pour Φ_{opt} , mais la géométrie O-ring fait ressortir la valeur $\Phi_{\text{opt}} = 1$. Pour les essais hors-phase, la valeur de Φ pourrait sûrement s'expliquer par le ratio traction sur torsion (au travers par exemple du mode de déformation K_3), mais c'est hors du cadre de l'étude.

Ainsi, il semblerait que la méthode de détermination de Φ_{opt} par la méthode de maximisation du coefficient de régression R^2 associé à un modèle de Basquin ne fonctionne que sur certains types d'éprouvette, et pour certains chargements. Il serait intéressant de chercher si un lien existe entre le mode de déformation (K_3) et une valeur de Φ particulière qui permette une bonne prédiction des durées de vie à rupture.

9.4 Conclusion

Une première étude sur quelques essais de la littérature a été proposée dans ce chapitre : le critère $\Gamma(\Phi)$ a été appliqué à une partie des essais de la base de données constituée au chapitre précédent, en proposant une méthode simple pour déterminer le paramètre Φ . Celle-ci repose sur la maximisation du coefficient de régression R^2 d'un modèle de Basquin, sur un type de résultats donnés (essais de traction, de torsion, etc.). Les résultats ont été analysés en termes d'erreur de prédiction, et il a été remarqué que, de manière générale, ce sont les essais de traction-torsion qui prédisent le mieux le plus de types de chargement différents. Une analyse des valeurs de Φ_{opt} en fonction des géométries d'éprouvette et des types de chargement a mis en exergue l'influence de ces deux paramètres sur la capacité de la méthode à déterminer une valeur de Φ : les géométries AE2 et O-ring sont sensibles

à la méthode, mais pas les géométries de type cylindre plein (AE42 et la géométrie utilisée dans cette étude).

Conclusions et perspectives

La présente thèse apporte des éléments de solution au problème industriel de la prédiction de la durée de vie en fatigue de pièces en élastomère, pour laquelle il n'existe à ce jour qu'un seul logiciel commercial dédié. Les différentes solutions théoriques existantes les plus performantes sont pour la plupart d'entre elles basées entièrement sur les contraintes et impliquent donc la nécessité de choisir une loi de comportement parmi une liste très grande et d'en déterminer les paramètres (Zhao *et al.*, 2019; Bien-aimé *et al.*, 2020). Ces deux étapes sont la source d'erreurs parfois non négligeables, surtout pour de faibles déformations imposées (Ogden *et al.*, 2004), comme cela peut être le cas lors de l'endommagement en fatigue. Dans le présent travail, le pari a été fait que la déformation seule peut apporter une solution viable au problème de la prédiction de la durée de vie en fatigue des élastomères. Ce choix est motivé par le fait que, pour la grande majorité des essais sur élastomères, les chargements imposés sont des déplacements (ou déformations), et que les déformations sont directement et facilement mesurables sur ces matériaux. Cette thèse propose une vision originale de la cinématique en grandes déformations centrée sur l'étude de la déformation logarithmique et qui s'appuie sur de récentes avancées dans ce domaine, ainsi que des essais conçus avec une nouvelle méthodologie, et une première expression d'un critère de fatigue.

Dans un premier temps, la Partie I a proposé une mise en contexte, et un état de l'art sur le phénomène de fatigue (Chapitre 1), puis une présentation des outils expérimentaux et des quantités théoriques de la Mécanique des Milieux Continus d'intérêt utilisés dans ce travail (Chapitre 2). Ces concepts ont ensuite été utilisés pour proposer une nouvelle méthode de conception d'essais de fatigue sous chargement multiaxial, qui s'appuie sur la décomposition du tenseur des déformations de Hencky \mathbf{h} en un mode et une intensité au travers de deux de ses invariants, notés respectivement K_2 et K_3 . En choisissant indépendamment les valeurs de K_2 et de K_3 , il est alors possible de réaliser des essais à mode de déformation constant et intensité variable, ou inversement. Cette méthode a été appliquée pour réaliser une campagne d'essais de fatigue de traction-torsion. Enfin, les résultats de cette campagne d'essais de fatigue ont été analysés en termes de durée de vie, dispersion, nature de l'amorçage, etc. (Chapitre 3).

Dans la Partie II ont été proposés les développements permettant d'aboutir à la formulation d'un critère de fatigue original. Après un état de l'art des critères existants (Chapitre 4), le choix de s'orienter vers un critère de fatigue purement cinématique a été fait, en n'omettant pas de prendre en compte l'influence de la pression hydrostatique due à l'hypothèse d'incompressibilité. Ainsi, des outils d'analyse de la déformation en grandes déformations ont été développés en se basant sur le tenseur des déformations de Hencky \mathbf{h} (Chapitre 5) : ses propriétés mathématiques permettent une décomposition de la déformation en « somme » de transformations élémentaires, dont la signification physique est claire. Ces outils ont été exploités pour proposer une première expression d'un critère de fatigue cinématique pour élastomères sous chargement multiaxial complexe (Chapitre 6). Ce critère, formulé sur la base de deux modélisations des mécanismes d'endommagement

en fatigue recensés dans la littérature, comporte deux contributions : la cavitation et la traction sur un plan critique.

Dans la Partie III, les développements des deux parties précédentes ont été appliqués à plusieurs jeux de données. D'abord, le critère a été appliqué aux essais réalisés dans ce travail (Chapitre 7), et il a été montré que, dans le cas de ce critère, les essais de traction uniaxiale ne doivent pas être utilisés comme référence pour prédire des essais sous chargement plus complexe. Ensuite, une base de données a été constituée (Chapitre 8) : elle est composée des réponses cinématiques de plus de 350 essais de fatigue de traction-torsion dont les conditions expérimentales et les résultats ont été publiés. Pour finir, le critère de fatigue a été appliqué à cette base de données (Chapitre 9) : bien que des disparités dans les prédictions aient été constatées selon le jeu de données analysé, les résultats se révèlent encourageants.

Plusieurs contributions de ce travail peuvent être mises en lumière :

- Une méthode de construction d'essais de fatigue sous chargement multiaxial sans déphasage a été développée. Elle est basée sur une décomposition de la déformation en un mode de déformation et une intensité de déformation. Cette méthode a permis de construire une campagne d'essais de traction-torsion en-phase et déphasées, qui vient alimenter la base de données déjà existante disponible dans la littérature ;
- De nouveaux outils théoriques exploitant les propriétés de la déformation logarithmique (au travers du tenseur des déformations de Hencky \mathbf{h}) ont été développés : en décomposant \mathbf{h} sur une base tensorielle bien choisie, toute transformation peut être interprétée comme une « somme » de transformations élémentaires (traction uniaxiale, cisaillement dans le plan, etc.). Cela a notamment permis de proposer une définition originale de la moyenne et de l'amplitude d'un cycle de déformation multiaxiale, en exploitant le concept de Plus Petite Sphère Circonscrite au chemin de la déformation ;
- Une première expression d'un critère de fatigue purement cinématique basé sur le tenseur des déformations de Hencky a été proposée : les mécanismes mis en jeu lors de l'endommagement en fatigue des élastomères sont modélisés par de la cavitation et de la traction sur plan critique. La proportion entre ces deux modélisations est prise en compte par l'intermédiaire d'un paramètre $\bar{\Phi}$ dans la première expression du critère, ;
- Une base de données d'essais de fatigue multiaxiaux sur élastomères a été construite : elle est composée des réponses cinématiques (*i.e.* de l'histoire sur le cycle du gradient de la transformation \mathbf{F}) de simulations Éléments Finis de plus de 350 essais de fatigue de traction-torsion publiés, ainsi que des durées de vie correspondantes. Cette base de données permet d'appliquer à l'ensemble des essais la composant des développements théoriques de manière aisée, par simple lecture de fichiers texte. Elle sera mise à disposition de la communauté scientifique.

Ces résultats ouvrent la voie à plusieurs perspectives concernant le critère dont une première expression a été proposée dans ce travail :

- Intégrer, dans les futurs travaux sur la fatigue des élastomères, une étape d'observation claire et systématique des mécanismes d'amorçage (avec des outils tels que le MEB et l'EDX par exemple), conduirait à une meilleure compréhension du lien entre les mécanismes et les modélisations mécaniques proposées ;
- Relier le mode de déformation (dans ce travail défini par K_3 , un invariant du tenseur de Hencky \mathbf{h}) aux mécanismes d'amorçage observés, permettrait sûrement de tirer des conclusions intéressantes. Cela pourrait se faire par exemple au travers

de la définition de nouvelles géométries d'éprouvette permettant d'induire des amorçages préférentiellement selon un type de mécanisme, par l'application de chargements en-phase qui ne soient pas de la traction-torsion ou encore par une étude approfondie des chargements déphasés ;

- Enfin, un travail sur les outils théoriques proposés serait bienvenu, car ils peuvent encore être développés et améliorés.

Annexes

Annexe A

Résolution des équations de la traction-torsion en contraintes

A.1 Mise en équations

Pour un matériau hyperélastique, il existe un potentiel W dont dérivent les contraintes, et qui est une fonction du gradient de la transformation \mathbf{F} . Pour un matériau isotrope, on montre que la dépendance de ce potentiel W aux tenseurs des dilatations \mathbf{C} et \mathbf{b} se fait aux travers de leurs invariants $\{I_i\}_{i=1,2,3}$. Pour un matériau incompressible, $I_3 = 1$ donc seules I_1 et I_2 sont des variables indépendantes, et on a $W = W(I_1, I_2)$. On peut alors exprimer le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction des dérivées de W

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{b} - 2W_2\mathbf{b}^{-1}, \quad (\text{A.1})$$

où p est appelée pression hydrostatique, et correspond au multiplicateur de Lagrange relatif à la contrainte d'incompressibilité, et où les $\{W_i\}_{i=1,2}$ sont les dérivées de W par rapport aux invariants $\{I_i\}_{i=1,2}$. En utilisant l'expression de \mathbf{b} donnée par l'équation (2.6) et la définition du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, équation (A.1), les composantes de ce dernier peuvent être exprimées dans la base cylindrique comme suit

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2W_1\lambda^{-1} - 2W_2\lambda - p \\ \sigma_{\theta\theta} = 2W_1(R^2\lambda\tau^2 + \lambda^{-1}) - 2W_2\lambda - p \\ \sigma_{zz} = 2W_1\lambda^2 - 2W_2(R^2\tau^2 + \lambda^{-2}) - p \\ \sigma_{\theta z} = 2RW_1\lambda^{1,5}\tau + 2RW_2\lambda^{0,5}\tau \\ \sigma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_{rz} = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

comme introduit dans l'équation (A.1). Pour déterminer l'inconnue p , on utilise l'équation d'équilibre

$$\overrightarrow{\text{div}}\boldsymbol{\sigma} + \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0} \quad (\text{A.3})$$

où \overrightarrow{f} représente les forces volumiques, qui sont considérées nulles dans le cas présent. En projetant l'équation (A.3) sur l'axe radial \overrightarrow{e}_r (le long du rayon), on obtient donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}(u)}{\partial u} + \frac{1}{u} (\sigma_{rr}(u) - \sigma_{\theta\theta}(u)) = 0, & 0 < u < a, \\ \sigma_{rr}(u = a) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.4a})$$

$$\quad (\text{A.4b})$$

L'équation (A.4a) peut être intégrée entre le rayon courant $u = r$ et le rayon extérieur $u = a$, et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_r^a \frac{\partial \sigma_{rr}(u)}{\partial u} du + \int_r^a -2W_1(u)\lambda^2\tau^2 u du \\ &= \underbrace{\sigma_{rr}(a)}_{=0} - \sigma_{rr}(r) - 2\lambda^2\tau^2 \int_r^a W_1(u)u du \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En réutilisant l'expression de σ_{rr} de l'équation (A.2), la pression p s'exprime en fonction du rayon r dans la configuration déformée

$$p(r) = 2\lambda^2\tau^2 \int_r^a W_1(u)u du + 2W_1(r)\lambda^{-1} - 2W_2(r)\lambda. \quad (\text{A.6})$$

Pour rester cohérent avec ce qui précède, on exprime p dans la configuration de référence, c'est-à-dire en fonction du rayon non déformé R . Cela se réalise par le changement de variable $u = v\lambda^{-0,5}$ sous le signe intégrale de l'équation (A.6), et l'on obtient :

$$p(R) = 2\lambda\tau^2 \int_R^A W_1(v)v dv + 2W_1(R)\lambda^{-1} - 2W_2(R)\lambda. \quad (\text{A.7})$$

Dès lors, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ (équation (A.2)) devient

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -2\lambda\tau^2 \int_R^A W_1(v)v dv, & (\text{A.8a}) \\ \sigma_{\theta\theta} = 2W_1R^2\lambda\tau^2 - 2\lambda\tau^2 \int_R^A W_1(v)v dv, & (\text{A.8b}) \\ \sigma_{zz} = 2W_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2W_2(\lambda - \lambda^{-2} - R^2\tau^2) - 2\lambda\tau^2 \int_R^A W_1(v)v dv, & (\text{A.8c}) \\ \sigma_{\theta z} = 2RW_1\lambda^{1,5}\tau + 2RW_2\lambda^{0,5}\tau. & (\text{A.8d}) \end{cases}$$

Lors des essais de traction-torsion, un double capteur est placé sous la surface inférieure $S_{inf}\vec{e}_z$ (de normale \vec{e}_z) et mesure la force verticale \vec{e}_z et le couple $M\vec{e}_z$ selon l'axe vertical. Leurs expressions respectives sont

$$F = \int_{S_{inf}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_z dS\vec{e}_z = \int_{S_{inf}} \sigma_{zz} dS, \quad (\text{A.9a})$$

$$M = \int_{S_{inf}} r\vec{e}_r \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_\theta) dS\vec{e}_z = \int_{S_{inf}} r\sigma_{\theta z} dS. \quad (\text{A.9b})$$

En utilisant l'expression de σ_{zz} (équation (A.8c)) dans le calcul de F , la symétrie de révolution de la surface S_{inf} , et le changement de variable $dS = r dr d\theta = \lambda^{-1} R dR d\Theta$, il vient

$$F = 2\pi \int_0^a r \sigma_{zz} dr = 2\pi \lambda^{-1} \int_0^A R \sigma_{zz} dR, \quad (\text{A.10})$$

$$F = 4\pi (\lambda - \lambda^{-2}) \int_0^A R W_1(R) dR + 4\pi (1 - \lambda^{-3}) \int_0^A R W_2(R) dR \\ - 4\pi \tau^2 \lambda^{-1} \int_0^A R^3 W_2(R) dR - 4\pi \tau^2 \underbrace{\int_0^A R \left[\int_R^A W_1(v) v dv \right] dR}_{\Omega}. \quad (\text{A.11})$$

L'intégrale $\Omega = \int_0^A R \left[\int_R^A W_1(v) v dv \right] dR$ peut être calculée par une intégration par parties. En notant Γ la primitive de la fonction ($v \mapsto W_1(v)v$) qui s'annule en A , on peut écrire

$$\Omega = \underbrace{\left[\frac{R^2}{2} W_1(R) \Gamma(R) \right]_{R=0}^{R=A}}_{=0} - \int_{R=0}^{R=A} \frac{R^2}{2} R W_1(R) dR = - \int_{R=0}^{R=A} \frac{R^2}{2} R W_1(R) dR, \quad (\text{A.12})$$

L'expression de F peut alors être factorisée comme suit

$$F = 4\pi (\lambda - \lambda^{-2}) \int_0^A R \left[W_1(R) + \lambda^{-1} W_2(R) \right] dR \\ - 2\pi \tau^2 \int_0^A R^3 \left[W_1(R) + 2\lambda^{-1} W_2(R) \right] dR. \quad (\text{A.13})$$

Ainsi, le couple M est donné par

$$M = 2\pi \int_{r=0}^{r=a} r \sigma_{\theta z} dr = 2\pi \lambda^{-1,5} \int_{R=0}^{R=A} R \sigma_{\theta z} R dR \\ M = 2\pi \lambda^{-1,5} \int_0^A R^2 \left[2R W_1 \lambda^{1,5} \tau + 2R W_2 \lambda^{0,5} \tau \right] dR = 4\pi \tau \lambda^{-1} \int_0^A R^3 [\lambda W_1 + W_2] dR. \quad (\text{A.14})$$

A.2 Cas d'un modèle de Mooney-Rivlin

Dans le cas du modèle de Mooney-Rivlin, le potentiel W a la forme suivante

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3), \quad (\text{A.15})$$

Les dérivées de W par rapport aux invariants sont constantes et leurs valeurs sont

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10}, \quad W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01}. \quad (\text{A.16})$$

Les expressions du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, et celles de la force F et du couple M données dans les équations (A.14), (A.13) et les équations (A.8a)-(A.8d), peuvent être simplifiées. On a alors pour $\boldsymbol{\sigma}$ l'expression suivante

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\lambda\tau^2 (A^2 - R^2) C_{10}, & \text{(A.17a)} \\ \sigma_{\theta\theta} = C_{10}\lambda\tau^2 (3R^2 - A^2), & \text{(A.17b)} \\ \sigma_{zz} = C_{10} [2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - \lambda\tau^2 (A^2 - R^2)] + 2C_{01} (\lambda - \lambda^{-2} - R^2\tau^2), & \text{(A.17c)} \\ \sigma_{\theta z} = 2R\tau\lambda^{0,5} (C_{10}\lambda + C_{01}). & \text{(A.17d)} \end{cases}$$

Puis,

$$F = 2\pi A^2 (\lambda - \lambda^{-2}) (C_{10} + \lambda^{-1}C_{01}) - \frac{\pi}{2} A^4 \tau^2 (C_{10} + 2\lambda^{-1}C_{01}). \quad \text{(A.18)}$$

Et finalement

$$M = \pi A^4 \tau \lambda^{-1} (\lambda C_{10} + C_{01}). \quad \text{(A.19)}$$

A.3 Cas d'un modèle néo-Hookéen

Le modèle néo-Hookéen est un cas particulier du modèle de Mooney-Rivlin, où l'on s'affranchit de la dépendance en I_2 dans l'expression du potentiel W

$$W = C_{10} (I_1 - 3). \quad \text{(A.20)}$$

Les expressions de $\boldsymbol{\sigma}$, F et M sont alors directement déterminées en considérant $C_{01} = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -C_{10}\lambda\tau^2 (A^2 - R^2), & \text{(A.21a)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = C_{10}\lambda\tau^2 (3R^2 - A^2), & \text{(A.21b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = C_{10} [2(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - \lambda\tau^2 (A^2 - R^2)], & \text{(A.21c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta z} = 2C_{10}R\tau\lambda^{1,5}. & \text{(A.21d)} \end{cases}$$

D'où,

$$F = C_{10}2\pi A^2 (\lambda - \lambda^{-2}) - C_{10}\frac{\pi}{2} A^4 \tau^2, \quad \text{(A.22)}$$

et

$$M = C_{10}\pi A^4 \tau. \quad \text{(A.23)}$$

Annexe B

Modèle Éléments Finis

Nous présentons dans cette partie les caractéristiques du modèle Éléments Finis (EF) simulé avec Abaqus CAE 2018 (géométrie, chargements, maillage), quelques résultats et le chaînage entre Abaqus, Python et des sous-routines UARM.

B.1 Chaînage entre Abaqus, Python et UARM

Abaqus est piloté par un script Python, qui contient toutes les étapes de modélisation du problème EF :

1. La géométrie de la pièce est générée. En exploitant l'axisymétrie du problème, seule une tranche de l'éprouvette est modélisée. Notons que les plans de joint (*cf.* Chapitre 2) ne sont pas modélisés ;
2. Un modèle hyperélastique est créé et assigné à la géométrie existante ;
3. Les étapes de résolution sont créées, et sont au nombre de trois :
 - (a) Une première étape d'initiation nécessaire au lancement du calcul ;
 - (b) Une étape de rampe permet de faire coïncider la configuration de l'éprouvette avec celle de l'instant initial du cycle de fatigue. Cette étape est nécessaire lors de l'ajout d'un déphasage entre les signaux de traction et de torsion, car alors l'éprouvette ne commence pas le cycle de fatigue dans la configuration non déformée ; les non-linéarités géométriques sont prises en compte avec l'activation de l'option NLGEOM ;
 - (c) La dernière étape de résolution est le cycle de fatigue, qui consiste en un chargement combiné (ou non) de traction et de torsion. Les non-linéarités géométriques sont prises en compte avec l'activation de l'option NLGEOM ;
4. Les conditions de chargement sont appliquées à la partie supérieure de l'éprouvette, et le bas de l'éprouvette est encastré comme présenté sur la Figure B.1a ;
5. Le maillage est créé. Il est constitué d'éléments quadrangulaires de formulation hybride CGAX4H au nombre de 3716, qui permettent d'effectuer de la torsion hors-plan dans une simulation axisymétrique, comme présenté sur la Figure B.1b ;
6. Un calcul est créé ; il utilise une sous-routine UARM dont l'intérêt est de pouvoir définir des grandeurs de sortie non proposées par défaut dans Abaqus. Ces grandeurs sont calculées pour chaque incrément et en chaque nœud du maillage. Avec cette sous-routine, on peut par exemple afficher la cartographie des invariants du tenseur de Hencky $\{K_i\}_{i=2,3}$ définis au Chapitre 2, comme le montre la Figure B.2.

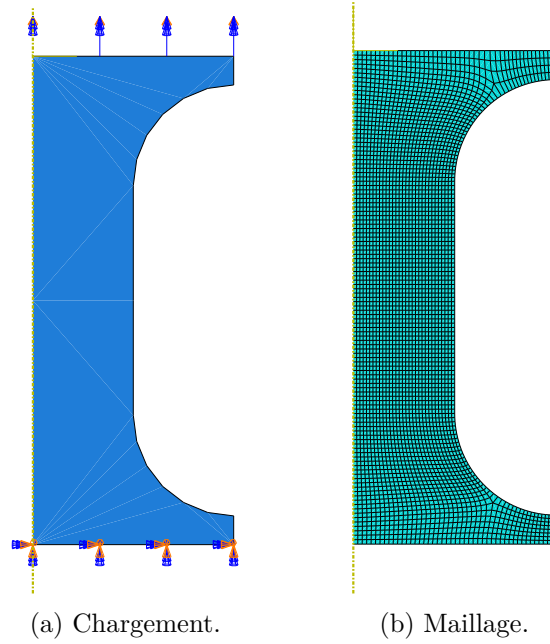


FIGURE B.1 – Conditions de chargement et maillage du modèle de l'éprouvette sous Abaqus.

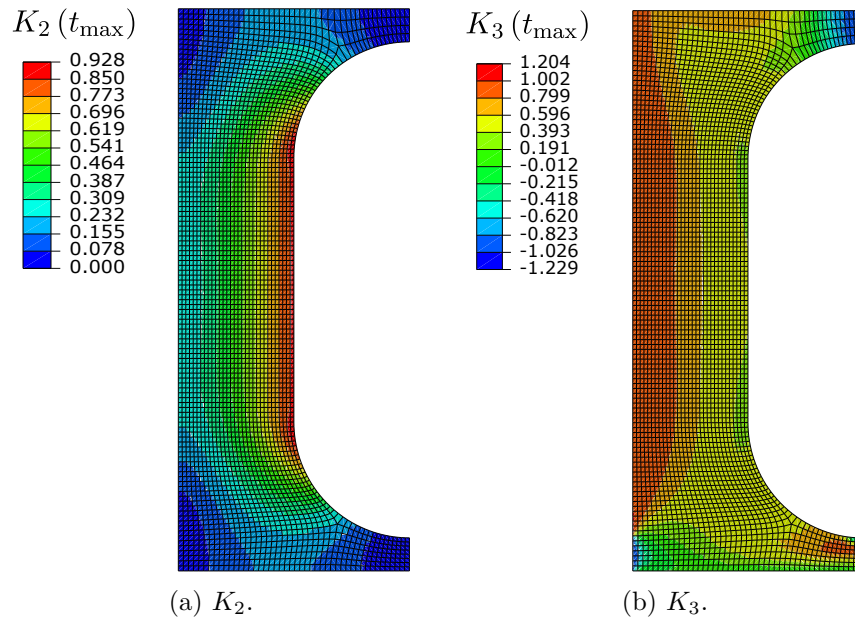


FIGURE B.2 – Cartographies de K_2 et K_3 à l'instant de maximum de traction et de torsion, pour un essai à $U = 5,23$ mm, $\alpha = 257,5^\circ$, $\phi = 0^\circ$.

- Le fichier de sortie (.odb) est lu et les quantités d'intérêt (gradient de la déformation \mathbf{F}) relevées aux nœuds choisis sont écrites dans un fichier texte pour être post-traitées par un script Python.

B.2 Calculs aux lieux des sites d'amorçage

Les calculs réalisés dans le corps de ce travail ont été menés analytiquement, en exploitant le fait que la partie centrale de l'éprouvette se comporte comme un cylindre parfait (*cf.* Chapitre 2). Que ce soit pour définir les conditions de chargement (Chapitre 3), ou

pour calculer les grandeurs cinématiques décrivant le phénomène de fatigue (Chapitres 5 et 6), les calculs ont été faits au même point matériel : sur le plan médian de l'éprouvette ($Z = L/2$) et sur sa surface extérieure ($R = A$), les amorçages étant principalement situés sur le bord (cf. Figure 3.10). Cependant, comme nous l'avons vu sur la Figure 3.10, aucun des amorçages n'a eu lieu à la hauteur prévue, mais plutôt sur une hauteur intermédiaire entre le plan médian et le haut du congé de raccordement. Ainsi, dans un souci de représenter au mieux les résultats, nous avons calculé via la méthode des EF les gradients de la déformation \mathbf{F} pour chaque essai de fatigue réalisé, en réalisant le calcul cette fois-ci au nœud du maillage le plus proche de l'endroit de l'amorçage relevé. Cela a été intégré au code Python précédemment décrit par l'intermédiaire de la fonction *findNearestNode*, qui admet en entrée des coordonnées X, Y, Z (dans notre cas les lieux des amorçages recensés dans le Tableau C.2), et qui renvoie le numéro du nœud du maillage le plus proche du point de coordonnées X, Y, Z .

Une fois l'historique du gradient de la déformation \mathbf{F} calculé pour chaque essai de fatigue, il est aisé de calculer le tenseur de Hencky $\mathbf{h} = \log(\mathbf{V})$ (avec $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}}$) et ainsi de lui appliquer tous les développements proposés dans ce manuscrit. La Figure B.3 présente la durée de vie en fonction de l'intensité de la déformation maximale $K_{2_{\max}}$ calculée au nœud le plus proche du site d'amorçage mesuré.

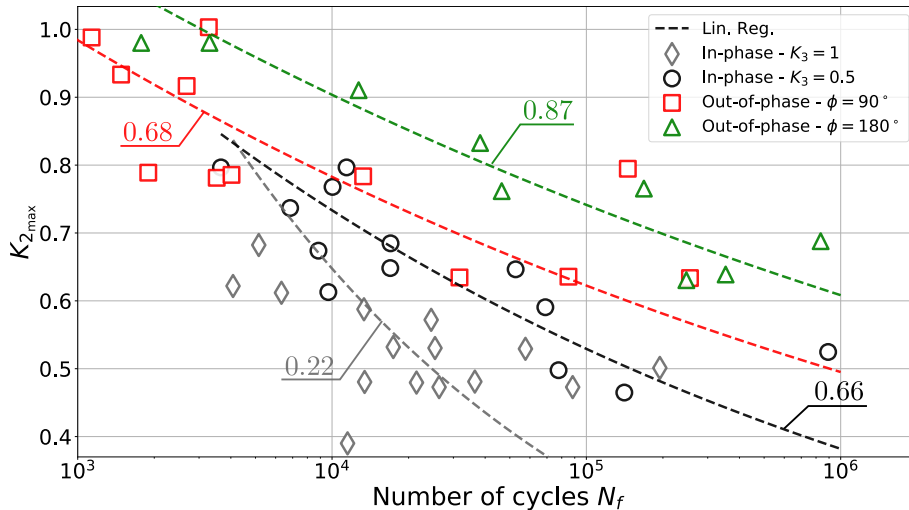


FIGURE B.3 – Courbe $K_{2_{\max}} - N_f$ par la méthode des Éléments Finis. Les $K_{2_{\max}}$ de chaque essai ont été calculés au nœud du maillage EF le plus proche du site réel d'amorçage. Les chiffres associés aux courbes correspondent aux coefficients de régression linéaire R^2 .

Les courbes en pointillés correspondent aux régressions de type Basquin, et les chiffres attachés sont les coefficients de corrélation R^2 . Les coefficients de corrélation sont plus faibles que ceux obtenus pour le calcul analytique de $K_{2_{\max}}$ (cf. Figure 3.8), ce qui indique que $K_{2_{\max}}$ n'est pas un bon critère de fatigue. Notons que dans le cas présent, les essais non rompus ne sont pas pris en compte dans le calcul des paramètres de la régression, et n'apparaissent pas sur la Figure B.3. Sur la Figure B.4, nous avons tracé les évolutions temporelles de K_3 pour les essais de traction-torsion en-phase ($K_3^{\text{visé}} = 0,5$) seulement, K_3 étant calculé pour chacun des essais au nœud du maillage le plus proche du site d'amorçage mesuré.

Sur cette figure, nous voyons que le mode de déformation K_3 , utilisé pour choisir les conditions de chargement, est moins constant au cours des cycles de traction-torsion en-phase que le prédit le calcul analytique (cf. Figure 3.3). De plus, beaucoup d'essais ont en réalité amorcé une fissure de fatigue en un point matériel pour lequel $K_3 \approx 0,4$, bien que le K_3 visé pour tous ces essais est 0,5. Ces deux figures nous confortent dans l'idée que

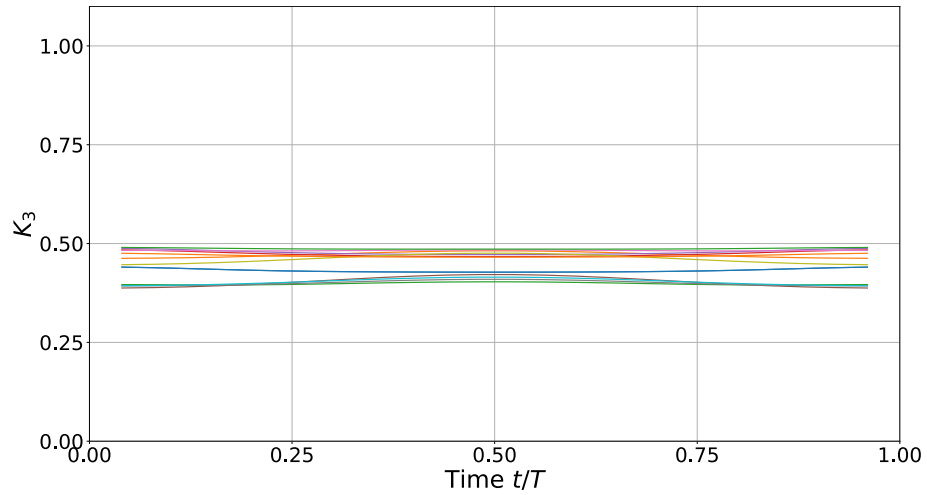


FIGURE B.4 – Évolution temporelle de K_3 pour les essais de traction-torsion en-phase ($K_3^{\text{visé}} = 0,5$) par la méthode des Éléments Finis. Les K_3 de chaque essai ont été calculés au nœud du maillage EF le plus proche du site réel d'amorçage.

pour étudier pleinement le phénomène de fatigue, la constitution d'une base de données avec des paramètres exhaustifs, notamment concernant les lieux d'amorçage, est décisive.

Annexe C

Tableaux de résultats bruts

C.1 Durées de vie en fatigue

TABLEAU C.1 – Conditions de chargement et durées de vie des essais de fatigue.

Test number	$K_3^{\text{visé}}$	$K_{2\text{max}}^{\text{visé}}$	U_{max} (mm)	α_{max} (°)	ϕ (°)	Freq. (Hz)	N_f
1	0,5	0,66	5,23	257,5	0	1	3657
2	0,5	0,66	5,23	257,5	0	0,75	9670
3	0,5	0,66	5,23	257,5	0	0,75	10046
4	0,5	0,56	4,39	212	0	1	16984
5	0,5	0,56	4,39	212	0	1	8843
6	0,5	0,56	4,39	212	0	1	52712
7	1	0,64	17,79	0	0	0,75	4080
8	1	0,64	17,79	0	0	0,75	6326
9	1	0,64	17,79	0	0	0,75	11507
10	0,5	0,45	3,51	167	0	1,25	477000
11	0,5	0,45	3,51	167	0	1,75	1000000
12	1	0,55	14,55	0	0	1	25400
13	1	0,55	14,55	0	0	1	24535
14	1	0,55	14,55	0	0	1	57604
15	1	0,50	12,92	0	0	1,25	88340
16	1	0,50	12,92	0	0	1,25	13431
17	1	0,50	12,92	0	0	1,25	21482
18	1	0,64	17,79	0	0	0,75	13352
19	0,5	0,56	4,39	212	0	1	68971
20	0,5	0,56	4,39	212	0	1	16944
21	0,5	0,45	3,51	167	0	1,75	140994
22	1	0,55	14,55	0	0	1	194490
23	1	0,55	14,55	0	0	1	17408
24	1	0,66	17,79	0	0	0,75	5151
25	1	0,50	12,92	0	0	1,25	26363
26	0,5	0,45	3,51	167	0	1,75	892646
27	1	0,50	12,92	0	0	1,25	36438
28	0,5	0,66	5,23	257,5	0	0,75	11405
29	0,5	0,66	5,23	257,5	0	0,75	6843

Continued on next page

Tableau C.1 – continued from previous page

Test number	$K_3^{\text{visé}}$	$K_{2\text{max}}^{\text{visé}}$	U_{max} (mm)	α_{max} (°)	ϕ (°)	Freq. (Hz)	N_f
30	0,5	0,45	3,51	167	0	1,25	77749
1A			5,23	257,5	90	0,75	145560
2A			6,87	349,9	90	0,75	3277
3A			6,87	349,9	90	0,75	154
4A			6,87	349,9	90	0,75	870
5A			6,24	313,3	90	0,75	2681
6A			5,23	257,5	90	1	3520
7A			6,24	313,3	90	0,5	1481
8A			6,24	313,3	90	0,5	1134
9A			5,23	257,5	90	0,75	1894
10A			5,23	257,5	90	0,75	13253
11A			5,23	257,5	90	0,75	4024
12A			4,24	204	90	1	85037
13A			4,24	204	90	1	31703
14A			4,24	204	90	1	255472
15A			3,69	175,9	90	1,25	69513
16A			3,69	175,9	90	1,25	831309
17A			3,69	175,9	90	1,25	1000000
18A			4,94	241,3	180	0,75	46459
19A			4,94	241,3	180	0,75	168349
20A			4,94	241,3	180	0,75	38216
21A			5,9	293,95	180	0,75	12720
22A			5,9	293,95	180	0,75	3297
23A			5,9	293,95	180	0,75	1776
24A			4,08	196,11	180	1,25	572700
25A			4,08	196,11	180	1,25	834140
26A			4,08	196,11	180	1,25	247312
27A			4,08	196,11	180	1,25	352874
1B*			10,78	164	0	0,75	16807
2B*			8,8	301	0	0,75	1888

* : essais annexes servant à montrer la relation entre l'angle d'amorçage et l'orientation du plan normal à la plus grande extension principale au cours d'un cycle.

C.2 Caractéristiques des zones d'amorçage

TABLEAU C.2 – Angles et localisations des zones d'amorçage.

Test number	Mean initiation angle ω (°)	Lower measure of ω (°)	Upper measure of ω (°)	Distance from center (mm)	Height (mm)
1	31,1	30	31	7	9,7
2					34
3					34
4	26,3	24	26,3	7	9,1

Continued on next page

Tableau C.2 – continued from previous page

Test number	Mean initiation angle $\omega(^{\circ})$	Lower measure of $\omega (^{\circ})$	Upper measure of $\omega (^{\circ})$	Distance from center (mm)	Height (mm)
5	28	28	29	7	6,5
6	30,7			7	10,3
7	30,3			7	8,2
8	35			7	7,8
9	31,2	31,6	33,8	7	14,1
10	21	18,2	24,9	7	13
11	0,2			6,9	16,1
12	3,7			1	12,6
13	1,1			6,9	4,7
14					34
15					34
16	0,5			7	11,6
17	6,6	6,6	7,2	6,9	8
18	0,7			6,9	12,9
19	0,3			7	6,9
20	0,1			7	11,8
21	0,9			6,8	13,8
22	0,3			3	9,8
23	32,1	31	32,1	7	7,1
24	31,1	31,1	37	7	11,1
25	28,8	21	27	6,2	13,6
26					34
27	2,1			1,7	10,6
28	1,8			7	11,1
29	1,1			7	7,8
30	0,8			7	7
31	30,7	30	33,1	7	12,4
32	0,9			7	11,4
33	26,1	23	25	7	9,1
34	21,5	21,3	24	7	7,5
35	32,4	32,4	33,4	7	7,2
1A	36	34	36	7	10
2A	28	22	27	7	15,2
3A1	26	20	29	7	11,9
4A	24	28	34		
5A	27	26	29	7	13,7
6A	28	29	31	7	16,3
7A	29	28	32	7	12,5
8A	26	25	27	7	10,6
9A	28	28	31	7	8,6
10A	29	28	32	7	10,5
11A	37			7	11,8
12A	38	32	38	7	11
13A	35	31	38	7	12,6
14A	37	35	38	7	13,7

Continued on next page

Tableau C.2 – continued from previous page

Test number	Mean initiation angle $\omega(^{\circ})$	Lower measure of $\omega (^{\circ})$	Upper measure of $\omega (^{\circ})$	Distance from center (mm)	Height (mm)
15A				7	15,4
16A					
17A					
18A					
19A	32	28	32		
20A	29	24	29	7	13,2
21A	32	28	32	7	8
22A	24	22	23	7	14
23A	25	23	26	7	9
24A				7	9,1
1B*	17	15	18	7	7,8
2B*	18	17	22	7	16,4

* : essais annexes servant à montrer la relation entre l'angle d'amorçage et l'orientation de la plus grande extension principale au cours d'un cycle.

Annexe D

Calcul des α_i après rotation de la base d'expression du problème

D.1 Énoncé et démonstration

Pour calculer les coefficients α_i de la décomposition d'un tenseur symétrique à trace nulle après rotation, nous appliquons directement la formule de changement de base d'une matrice. Soit $\mathbf{h} \in E$ (E étant défini au Chapitre 5), et \mathcal{B}_I et \mathcal{B}_{II} deux bases de l'espace cartésien dans lesquelles le tenseur \mathbf{h} s'exprime respectivement au travers des matrices $h_{\mathcal{B}_I}$ et $h_{\mathcal{B}_{II}}$. La formule qui relie ces deux matrices est

$$h_{\mathcal{B}_{II}} = P^{-1}h_{\mathcal{B}_I}P = P^{-1} \sum_{i=1}^5 \alpha_i Y_{\mathcal{B}_I}^{(i)} P = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \underbrace{P^{-1}Y_{\mathcal{B}_I}^{(i)}P}_{=A_{\mathcal{B}_{II}}^{(i)}}, \quad (\text{D.1})$$

où P est la matrice de rotation de \mathcal{B}_I à \mathcal{B}_{II} . Ici, $A_{\mathcal{B}_{II}}^{(i)}$ est la matrice représentative, dans la base \mathcal{B}_{II} , d'un nouveau tenseur $\mathbf{A} \in E$, auquel on peut encore appliquer la formule de changement de base. Sa matrice représentative dans la base \mathcal{B}_{II} est

$$A_{\mathcal{B}_{II}}^{(i)} = \sum_{j=1}^5 \beta_j^{(i)} Y_{\mathcal{B}_{II}}^{(j)}. \quad (\text{D.2})$$

En combinant les équations (D.1) et (D.2), on obtient

$$h_{\mathcal{B}_{II}} = \sum_{i=1}^5 \left(\alpha_i \sum_{j=1}^5 \beta_j^{(i)} Y_{\mathcal{B}_{II}}^{(j)} \right) = \alpha_1 \left(\beta_1^{(1)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(1)} + \beta_2^{(1)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(2)} + \dots + \beta_5^{(1)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(5)} \right) \\ + \dots + \alpha_5 \left(\beta_1^{(5)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(1)} + \beta_2^{(5)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(2)} + \dots + \beta_5^{(5)} Y_{\mathcal{B}_I}^{(5)} \right). \quad (\text{D.3})$$

Finalement, en regroupant les $Y_{\mathcal{B}_I}^{(j)}$, on a

$$h_{\mathcal{B}_{II}} = \left(\alpha_1 \beta_1^{(1)} + \alpha_2 \beta_1^{(2)} + \dots + \alpha_5 \beta_1^{(5)} \right) Y_{\mathcal{B}_I}^{(1)} + \dots \\ + \left(\alpha_1 \beta_5^{(1)} + \alpha_2 \beta_5^{(2)} + \dots + \alpha_5 \beta_5^{(5)} \right) Y_{\mathcal{B}_I}^{(5)}. \quad (\text{D.4})$$

L'équation (D.4) fournit l'expression des α_i dans la base tournée, que l'on note α_i^{rot}

$$\begin{cases} h_{\mathcal{B}_{\text{II}}} = \sum_{j=1}^5 \alpha_j^{\text{rot}} Y_{\mathcal{B}_{\text{II}}}^{(j)} \\ \alpha_j^{\text{rot}} = \sum_{k=1}^5 \alpha_k \beta_j^{(k)} \end{cases}, \quad (\text{D.5})$$

où les α_k sont les coefficients de la projection de $h_{\mathcal{B}_{\text{I}}}$, et $\beta_j^{(k)}$ est le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la $k^{\text{ème}}$ matrice $Y_{\mathcal{B}_{\text{II}}}^{(k)}$ dans la nouvelle base \mathcal{B}_{II} .

D.2 Exemple d'application à la traction-torsion d'un cylindre parfait

Illustrons maintenant l'équation (D.5) dans le cas de la traction-torsion d'un cylindre parfait. Comme décrit dans le Chapitre 5, le tenseur de Hencky \mathbf{h} peut être représenté, dans la base cylindrique \mathcal{B}_{cyl} , par une matrice symétrique avec des composantes $\vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r \otimes \vec{e}_z$ nulles. Cela conduit à avoir une projection réduite de \mathbf{h} sur la base des $\mathbf{Y}^{(i)}$, qui consiste alors en seulement trois composantes : $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Dans l'exemple qui suit, la base cylindrique est tournée arbitrairement par trois rotations successives qui assurent que la base finale ne contient aucune direction propre du tenseur \mathbf{h} . Les rotations sont définies ci-après :

1. Une première rotation d'un angle δ_1 ($= 75^\circ$ pour l'illustration) autour de l'axe \vec{e}_z donne une nouvelle base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_z)$. La matrice de rotation entre \mathcal{B}_{cyl} et \mathcal{B}_1 est

$$P_{\mathcal{B}_{\text{cyl}} \rightarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_1) & -\sin(\delta_1) & 0 \\ \sin(\delta_1) & \cos(\delta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}} ; \quad (\text{D.6})$$

2. Une deuxième rotation d'un angle δ_2 ($= 110^\circ$ pour l'illustration) autour de l'axe $\vec{e}_1^{(1)}$ donne une nouvelle base $\mathcal{B}_{\text{II}} = (\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(2)}, \vec{e}_3^{(2)})$. La matrice de rotation entre \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est

$$P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta_2) & -\sin(\delta_2) \\ 0 & \sin(\delta_2) & \cos(\delta_2) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1} ; \quad (\text{D.7})$$

3. Une dernière rotation d'un angle δ_3 ($= 38^\circ$ pour l'illustration) autour de l'axe $\vec{e}_2^{(2)} = \vec{e}_2$ donne une dernière base $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La matrice de rotation entre les bases \mathcal{B}_2 and \mathcal{B}_3 est

$$P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_3) & 0 & -\sin(\delta_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\delta_3) & 0 & \cos(\delta_3) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}. \quad (\text{D.8})$$

En combinant les trois rotations susmentionnées, le tenseur de Hencky est tourné d'une rotation définie par la matrice suivante

$$P_{\mathcal{B}_{\text{cyl}} \rightarrow \mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3} P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_{\text{cyl}} \rightarrow \mathcal{B}_1}. \quad (\text{D.9})$$

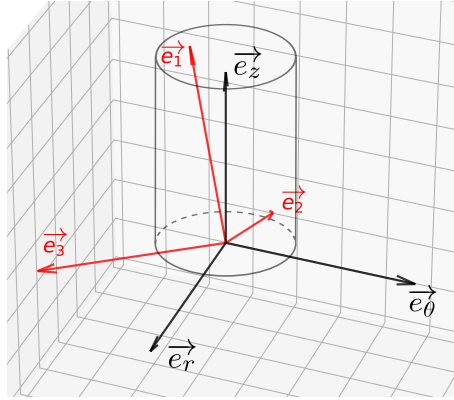


FIGURE D.1 – Représentation des bases cylindrique \mathcal{B}_{cyl} (noir) et finale \mathcal{B}_3 (rouge).

La Figure D.1 illustre les bases cylindrique \mathcal{B}_{cyl} et finale \mathcal{B}_3 .

Dans la base \mathcal{B}_3 , \mathbf{h} est *a priori* représenté par une matrice complète, *i.e.* avec des coefficients non nuls. Nous appliquons au cylindre un chargement de traction-torsion déphasé ($U_{\text{max}} = 10 \text{ mm}$, $\alpha_{\text{max}} = 300^\circ$, $\phi = 180^\circ$), et nous proposons de regarder l'évolution des α_i et α^{rot} , calculés sur la surface extérieure du cylindre (en $R = A$ d'après les notations du Chapitre 2). Les résultats sont présentés sur la Figure D.2.

Enfin, le Tableau D.1 présente quelques résultats liés au calcul des MCS (*Minimum Circumscribed Spheres*), pour les deux cas étudiés dans la base $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ et $h_{\mathcal{B}_3}$, respectivement. La première ligne de résultats « \mathbf{h} » correspond aux calculs sur le tenseur de Hencky exprimé dans la base cylindrique et la deuxième ligne « \mathbf{h}^{rot} » correspond aux calculs sur le tenseur de Hencky dans la nouvelle base $h_{\mathcal{B}_3}$. La dernière ligne « $P^{-1}\mathbf{h}^C P$ » correspond à l'application de l'équation (D.5) au tenseur centre de la MCS de \mathbf{h} (exprimé dans \mathcal{B}_{cyl}), pour l'exprimer dans la base $h_{\mathcal{B}_3}$.

Tensor	Radius	α_1^C	α_2^C	α_3^C	α_4^C	α_5^C
\mathbf{h}	0,526	0,019	0,105	0,348	0	0
\mathbf{h}^{rot}	0,526	0,221	0,061	0,173	-0,223	-0,023
$P^{-1}\mathbf{h}^C P$	-	0,221	0,061	0,173	-0,223	-0,023

TABLEAU D.1 – Properties of the MCS computed for each basis : \mathcal{B}_{cyl} et \mathcal{B}_3 .

Quelques commentaires peuvent être faits :

- Les MCS ont le même rayon : c'est un invariant du tenseur \mathbf{h} .
- Les coordonnées α_i^C des centres des MCS exprimés dans la base cylindrique ou la base finale sont évidemment différentes. Cependant, la dernière ligne montre la validité des de l'équation (D.5), et montre son applicabilité aux tenseurs centre des MCS : $P^{-1}\mathbf{h}^C P = \mathbf{h}^{\text{rot}^C}$.

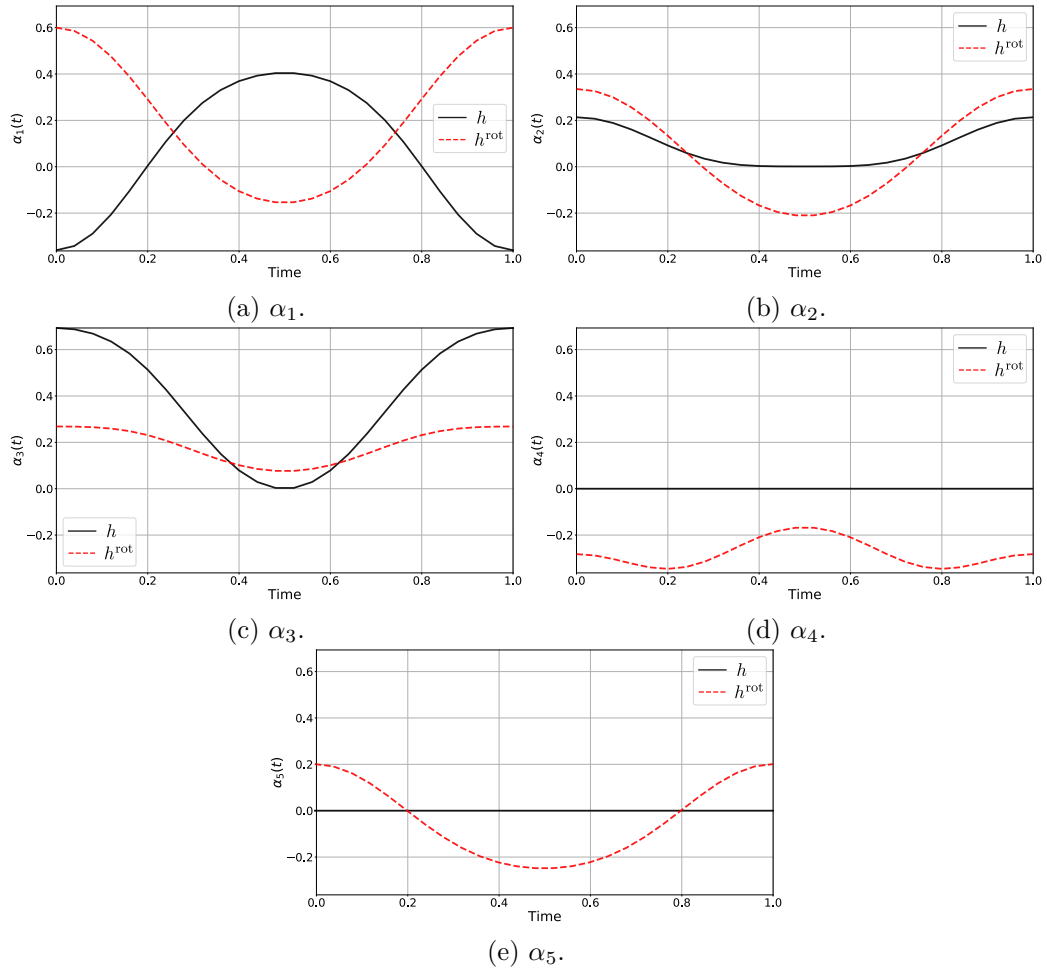


FIGURE D.2 – Évolution des $\{\alpha_i(t)\}_{\{i=1, \dots, 5\}}$ and $\{\alpha_i^{\text{rot}}(t)\}_{\{i=1, \dots, 5\}}$ pour un chargement de traction-torsion déphasées de conditions ($U_{\text{max}} = 10 \text{ mm}$, $\alpha_{\text{max}} = 300^\circ$, $\phi = 180^\circ$). Les lignes pleines et pointillées correspondent alors à deux expressions du même tenseur, dans les bases $h_{\mathcal{B}_{\text{cyl}}}$ et $h_{\mathcal{B}_3}$, respectivement.

Annexe E

Génération d'une base orthonormée aléatoire à partir d'un vecteur

E.1 Calcul des vecteurs de la base

Dans cette partie, on développe les étapes permettant de construire une base orthonormée aléatoire, à partir d'un vecteur connu. Notons $\vec{N} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ le vecteur d'entrée, et \vec{b} et \vec{c} les deux vecteurs à générer tels que $\{\vec{N}, \vec{b}, \vec{c}\}$ soit une base orthonormée.

On commence par chercher le deuxième vecteur $\vec{b} = [i, j, k]^T$ tel que l'on ait, au sens du produit scalaire euclidien usuel,

$$\vec{b} \cdot \vec{N} = 0 \iff i\alpha + j\beta + k\gamma = 0. \quad (\text{E.1})$$

Dès lors, plusieurs cas sont à distinguer selon les valeurs que prennent α , β et γ :

— $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ mènent à $i = 0$ (cf. équation (E.1)). Ainsi on prend i et j aléatoires et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ j \\ k \end{bmatrix}; \quad (\text{E.2})$$

— $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ mènent à $j = 0$ (cf. équation (E.1)). Ainsi on prend i et k aléatoires et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ k \end{bmatrix}; \quad (\text{E.3})$$

— $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$ mènent à $j = 0$ (cf. équation (E.1)). Ainsi on prend j et k aléatoires et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ j \\ k \end{bmatrix}; \quad (\text{E.4})$$

- $\alpha = 0$, β et γ tels que $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = 1$ mènent à i et j pris aléatoirement, et $k = -j \frac{\beta}{\gamma}$ (cf. équation (E.1)) et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ -j \frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix}; \quad (\text{E.5})$$

- $\beta = 0$, α et γ tels que $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} = 1$ mènent à i et j pris aléatoirement, et $k = -j \frac{\alpha}{\gamma}$ (cf. équation (E.1)) et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} i \\ j \\ -j \frac{\alpha}{\gamma} \end{bmatrix}; \quad (\text{E.6})$$

- $\gamma = 0$, α et β tels que $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ mènent à j et k pris aléatoirement, et $i = -j \frac{\beta}{\alpha}$ (cf. équation (E.1)) et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -j \frac{\beta}{\alpha} \\ j \\ k \end{bmatrix}; \quad (\text{E.7})$$

- α , β et γ tels que $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$ mènent à j et k pris aléatoirement, et $i = -j \frac{\beta}{\alpha} - k \frac{\gamma}{\alpha}$ (cf. équation (E.1)) et on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -j \frac{\beta}{\alpha} - k \frac{\gamma}{\alpha} \\ j \\ k \end{bmatrix}. \quad (\text{E.8})$$

Évidemment, ces expressions ne sont pas uniques. On normalise ensuite le vecteur \vec{b} ainsi obtenu, et on complète la famille $\{\vec{N}, \vec{b}\}$ par le vecteur \vec{c} obtenu par le produit vectoriel des deux premiers

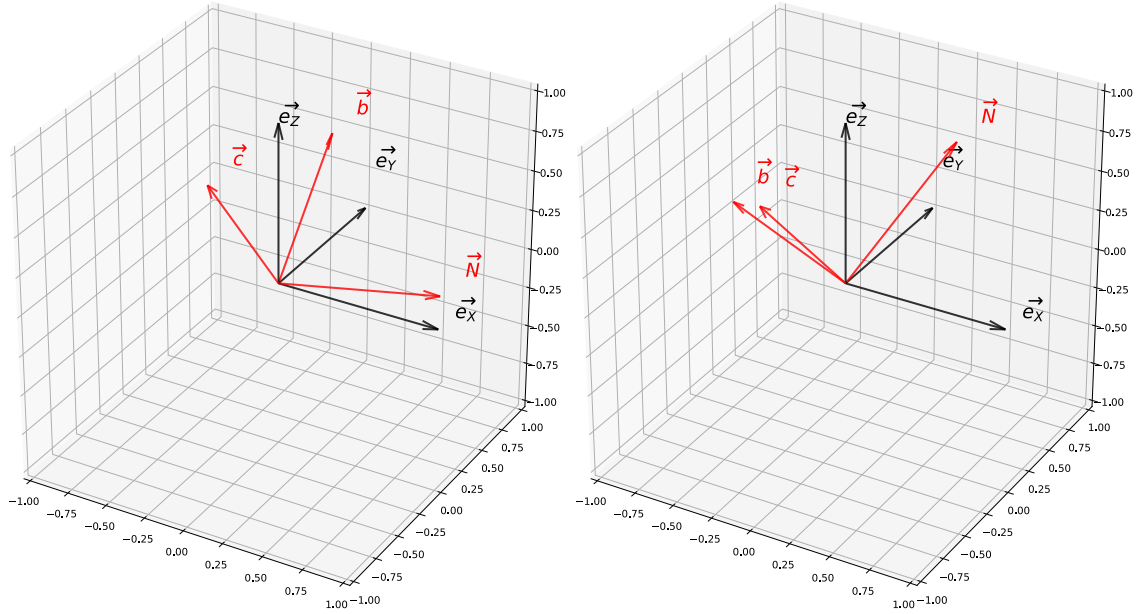
$$\vec{c} = \vec{N} \wedge \vec{b}, \quad (\text{E.9})$$

que l'on normalise également. La famille $\{\vec{N}, \vec{b}, \vec{c}\}$ forme alors une base orthonormée par construction. La Figure E.1 montre deux exemples de bases orthonormées à partir de vecteurs \vec{N} pris aléatoirement.

E.2 Invariance de α_1 par rotation autour du premier vecteur de la base

Le critère de fatigue proposé dans ce travail repose sur la génération d'une base orthonormée (cf. section précédente) à partir d'un vecteur connu. Comme il a été fait le choix de générer les deux autres vecteurs de la base de manière aléatoire, il est primordial de prouver que l'orientation de ces deux vecteurs n'a pas d'influence sur la définition de α_1 . Cela se démontre rapidement comme suit.

Soit $\mathcal{B}_1 = \{\vec{N}, \vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ une bases orthonormée de l'espace. On définit une nouvelle base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{N}, \vec{a}_2, \vec{b}_2\}$ en appliquant une rotation d'un angle θ autour de \vec{N} . La matrice de passage entre les deux bases est



(a) Premier exemple, $\vec{N} = [0,98, 0,05, 0,18]^T$. (b) Second exemple, $\vec{N} = [0,32, 0,69, 0,65]^T$

FIGURE E.1 – Exemples de bases orthonormées générées aléatoirement à partir d'un vecteur \vec{N} connu.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (\text{E.10})$$

L'expression du tenseur de Hencky \mathbf{h} dans la première base est

$$h_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (\text{E.11})$$

On exprime $\alpha_1 = h_{\mathcal{B}_1} : Y_{\mathcal{B}_1}^{(1)}$ en fonction des composantes h_{ij} de $h_{\mathcal{B}_1}$, avec

$$Y_{\mathcal{B}_1}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}. \quad (\text{E.12})$$

On a donc

$$\alpha_1 = h_{\mathcal{B}_1} : Y_{\mathcal{B}_1}^{(1)} = \text{Tr} \left(Y_{\mathcal{B}_1}^{(1)} h_{\mathcal{B}_1}^T \right) = \frac{2h_{11} - h_{22} - h_{33}}{\sqrt{6}}. \quad (\text{E.13})$$

On définit maintenant $h_{\mathcal{B}_2}$, qui est la matrice du tenseur \mathbf{h} exprimé dans la seconde base, par la formule de changement de base

$$h_{\mathcal{B}_2} = R^T h_{\mathcal{B}_1} R, \quad (\text{E.14})$$

et on calcule α'_1 associé à cette nouvelle matrice

$$\alpha'_1 = h_{\mathcal{B}_2} : Y_{\mathcal{B}_2}^{(1)} = \text{Tr} \left(Y_{\mathcal{B}_2}^{(1)} h_{\mathcal{B}_2}^T \right) = \text{Tr} \left(Y_{\mathcal{B}_2}^{(1)} \left(R^T h_{\mathcal{B}_1} R \right)^T \right) = \frac{2h_{11} - h_{22} - h_{33}}{\sqrt{6}} = \alpha_1. \quad (\text{E.15})$$

On retrouve bien le même résultat, ce qui confirme que l'orientation des deux autres vecteurs de la base choisie pour calculer le critère n'a pas d'importance.

Annexe F

Quelques calculs autour des α_i

Dans ce chapitre, divers calculs concernant α_1 sont proposés. La Section F.1 relie α_1 et λ_I , la plus grande extension principale, lorsque le tenseur de Hencky \mathbf{h} est exprimé dans sa base propre. Dans la Section F.2, le calcul de l'intensité de la traction sur le plan critique $\alpha_1^{(C)}$ est réalisé via la partie positive de \mathbf{h} , et nous montrons que les grandeurs $\alpha_1^{(C)}$ et $\alpha_1^{(C)+}$ ne sont pas toujours équivalentes.

F.1 Relation entre α_1 et la première extension principale λ_1

Soit une transformation définie par un gradient de la transformation \mathbf{F} , dont dérive le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{b} . Dans la base propre de \mathbf{b} , celui-ci s'exprime

$$b_{\mathcal{B}_p} = \text{diag} \left(\lambda_I^2, \lambda_{II}^2, \lambda_{III}^2 \right), \quad (\text{F.1})$$

où les $\{\lambda_i\}_{i=I,II,III}$ sont les extensions principales. On peut alors définir le tenseur de Hencky \mathbf{h} dans la base propre

$$h_{\mathcal{B}_p} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{b}) = \text{diag} \left(\ln(\lambda_I), \ln(\lambda_{II}), \ln(\lambda_{III}) \right). \quad (\text{F.2})$$

Si l'on projette \mathbf{h} sur la base matricielle décrite par l'Équation (5.14) et que l'on extrait α_1 , on a, en tenant compte de la relation d'incompressibilité $\lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III} = 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = h_{\mathcal{B}_p} : Y_{\mathcal{B}_p}^{(1)} &= \frac{2 \ln(\lambda_I) - \ln(\lambda_{II}) - \ln(\lambda_{III})}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left(\frac{\lambda_I^2}{\lambda_{II} \lambda_{III}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln(\lambda_I^3) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\lambda_I). \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Ainsi, en se plaçant dans la base propre de \mathbf{b} , on capture λ_1 via α_1 , à un facteur multiplicatif près. Ce n'est *a priori* pas vrai pour une base autre que la base propre.

F.2 Applicabilité du calcul de l'intensité de la traction uniaxiale sur le plan critique à \mathbf{h}^+

Dans le Chapitre 6, nous avons introduit le tenseur \mathbf{h}^+ , partie positive de \mathbf{h} issue de la décomposition de ce dernier en parties positive et négative. Le tenseur \mathbf{h}^+ a été utilisé pour mettre en lumière l'intensité α_0^+ d'une dilatation fictive, mais peut-il également être utilisé pour les calculs de la partie déviatorique de l'endommagement ?

L'endommagement dû à la partie déviatorique a été modélisé par une approche par plan critique, ce dernier étant défini par l'instant du maximum de la plus grande extension principale de \mathbf{h} qui, d'après l'Équation (6.2) est aussi celle de \mathbf{h}^+ (lorsqu'au moins une des valeurs propres de \mathbf{h} est positive, évidemment). De plus, \mathbf{h} et \mathbf{h}^+ ont les mêmes directions propres. Ainsi, cela revient au même de définir le plan critique par l'intermédiaire de \mathbf{h}^+ plutôt que du tenseur complet. En adaptant l'Équation (6.23), on peut alors définir $\alpha_1^{(C)+}$ comme suit

$$\alpha_1^{(C)+} = \mathbf{h}^+ : \mathbf{Y}^{(1)}, \quad (\text{F.4})$$

ce qui donne, après développement du calcul dans la base propre \mathcal{B}_p de \mathbf{h}

$$\alpha_1^{(C)+} = h_{\mathcal{B}_p}^+ : Y_{\mathcal{B}_p}^{(1)} = \frac{2 \ln(\lambda_I)^+ - \ln(\lambda_{II})^+ - \ln(\lambda_{III})^+}{\sqrt{6}}, \quad (\text{F.5})$$

où l'on définit $\ln(\lambda_i)^+ = \sup(\ln(\lambda_i), 0)$. Comme vu précédemment, il y a deux cas de figure simples à traiter : \mathbf{h}^+ est nul si $\forall i, \ln(\lambda_i) \leq 0$, et $\mathbf{h}^+ = \mathbf{h}$ si $\forall i, \ln(\lambda_i) > 0$. Dans ces deux cas, $\alpha_1^{(C)+}$ est nul, et égal à $\alpha_1^{(C)}$, respectivement. Dans le cas général de la traction-torsion d'un cylindre incompressible, \mathbf{h} a des valeurs positives et négatives (le ratio dépendant du chargement). Plus précisément :

$$\alpha_1^{(C)+} = \begin{cases} \frac{2 \ln(\lambda_I) - \ln(\lambda_{II})}{\sqrt{6}} & \text{si } \ln(\lambda_{III}) = 0 \\ \frac{2 \ln(\lambda_I)}{\sqrt{6}} & \text{si } \ln(\lambda_{II}) = \ln(\lambda_{III}) = 0 \end{cases}. \quad (\text{F.6})$$

Ces deux relations sont à comparer avec l'Équation (F.3) : dans le cas où $\ln(\lambda_{II}) = \ln(\lambda_{III}) = 0$, alors $\alpha_1^{(C)}$ et $\alpha_1^{(C)+}$ sont égaux à un facteur multiplicatif près ($\alpha_1^{(C)} = \frac{3}{2} \alpha_1^{(C)+}$), mais *a priori* pas dans le cas où $\ln(\lambda_{III}) = 0$. En fait, ce dernier cas n'apparaît que lorsqu'une compression est appliquée ($U < 0$), ce qui n'est pas notre cas d'étude ici.

Bibliographie

- F. ABRAHAM, T. ALSHUTH et S. JERRAMS : The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Materials & Design*, 26(3):239–245, 2005.
- N. ANDRÉ, G. CAILLETAUD et R. PIQUES : Haigh diagram for fatigue crack initiation prediction of Natural Rubber components. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 52(2):120–123, 1999.
- A. ANDRIYANA, N. SAINTIER et E. VERRON : Configurational mechanics and critical plane approach : concept and application to fatigue failure analysis of rubberlike materials. *International Journal of Fatigue*, 32(10):1627–1638, 2010.
- V. ANES, L. REIS, B. LI et M. de FREITAS : New cycle counting method for multiaxial fatigue. *International Journal of Fatigue*, 67:78–94, 2014.
- G. AYOUB, M. NAÏT-ABDELAZIZ et F. ZAÏRI : Multiaxial fatigue life predictors for rubbers : Application of recent developments to a carbon-filled SBR. *International Journal of Fatigue*, 66:168–176, 2014.
- G. AYOUB, M. NAÏT-ABDELAZIZ, F. ZAÏRI, J.-M. GLOAGUEN et P. CHARRIER : A continuum damage model for the high-cycle fatigue life prediction of styrene-butadiene rubber under multiaxial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2458–2466, 2011.
- G. AYOUB, M. NAÏT-ABDELAZIZ, F. ZAÏRI, J.M. GLOAGUEN et P. CHARRIER : Fatigue life prediction of rubber-like materials under multiaxial loading using a continuum damage mechanics approach : Effects of two-blocks loading and R ratio. *Mechanics of Materials*, 52:87–102, 2012.
- T. BALUTCH, B. HUNEAU, Y. MARCO, P. CHARRIER et C. CHAMPY : Fatigue behaviour of an industrial synthetic rubber. In *MATEC Web of Conferences*, volume 165, page 22004. EDP Sciences, 2018.
- C.W. BARNEY, C.E. DOUGAN, K.R. MCLEOD, A. KAZEMI-MORIDANI, Y. ZHENG, Z. YE, S. TIWARI, I. SACLIGIL, R.A. RIGGLEMAN, S. CAI *et al.* : Cavitation in soft matter. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(17):9157–9165, 2020.
- O.H. BASQUIN : The exponential law of endurance tests. In *Proc Am Soc Test Mater*, volume 10, pages 625–630, 1910.
- C. BATHIAS et J.-P. BAÏLON : *La fatigue des matériaux et des structures*. 1980.
- C. BATHIAS et A. PINEAU : *Fatigue des matériaux et des structures 2 : fissures courtes, mécanismes et approche locale, fatigue*. Hermès-Lavoisier, 2008.
- C. BATHIAS et A. PINEAU : *Fatigue des matériaux et des structures 4 : fatigue multiaxiale*,

- thermique, de contact, défauts, cumul et tolérance aux dommages*. Hermès-Lavoisier, 2009.
- S. BELKHIRIA, A. HAMDI et R. FATHALLAH : Strain-based criterion for uniaxial fatigue life prediction for an SBR rubber : comparative study and development. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L : Journal of Materials : Design and Applications*, 234(7):897–909, 2020.
- L. K. M. BIEN-AIMÉ, B. B. BLAISE et T. BEDA : Characterization of hyperelastic deformation behavior of rubber-like materials. *SN Applied Sciences*, 2(4):1–10, 2020.
- S. BLASON, J. CORREIA, A. DE JESUS, R.A.B. CALCADA et A. FERNÁNDEZ-CANTELI : A probabilistic analysis of Miner’s law for different loading conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 60(1):71–90, 2016.
- J.-B. BRUNAC, O. GÉRARDIN et J.-B. LEBLOND : On the heuristic extension of Haigh’s diagram for the fatigue of elastomers to arbitrary loadings. *International Journal of Fatigue*, 31(5):859–867, 2009.
- S.M. CADWELL, R.A. MERRILL, C.M. SLOMAN et F.L. YOST : Dynamic fatigue life of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 13(2):304–315, 1940.
- C. CHAMPY, V. LE SAUX, Y. MARCO, T. GLANOWSKI, P. CHARRIER et W. HERVOUET : Fatigue of crystallizable rubber : Generation of a Haigh diagram over a wide range of positive load ratios. *International Journal of Fatigue*, 150:106313, 2021.
- M. X. CHEN, Y. W. TAN et B. F. WANG : General invariant representations of the constitutive equations for isotropic nonlinearly elastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49(2):318–327, 2012.
- K. CHO, A.N. GENT et P.S. LAM : Internal fracture in an elastomer containing a rigid inclusion. *Journal of Materials Science*, 22(8):2899–2905, 1987.
- P. CIARLETTA et M. DESTRADE : Torsion instability of soft solid cylinders. *The IMA Journal of Applied Mathematics*, 79(5):804–819, 2014.
- J.C. CRISCIONE, J.D. HUMPHREY, A.S. DOUGLAS et W.C. HUNTER : An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12):2445–2465, 2000.
- M. DALÉMAT, M. CORET, A. LEYGUE et E. VERRON : Measuring stress field without constitutive equation. *Mechanics of Materials*, 136:103087, 2019.
- K. DANG VAN : *Sur la résistance à la fatigue des métaux*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1971.
- K. DANG VAN, B. GRIVEAU et O. MESSAGE : On a new multiaxial fatigue limit criterion-Theory and application. *Mechanical Engineering Publications*, (Biaxial and Multiaxial Fatigue):479–496, 1989.
- K. DANG VAN, A. LE DOUARON et H.P. LIEURADE : Multiaxial Fatigue limit : A new approach. In *Proceedings of the 6th International Conference on Fracture (ICF6)*, pages 1879–1885, 1984.
- M. DRASS, P.L. ROSENDAHL et M.A. KRAUS : Coupled distortional-dilatational failure mode concept for silicone adhesives. *Mechanics of Materials*, 148:103511, 2020.
- M. DRASS, J. SCHNEIDER et S. KOLLING : Novel volumetric Helmholtz free energy function

- accounting for isotropic cavitation at finite strains. *Materials & Design*, 138:71–89, 2018a.
- M. DRASS, G. SCHWIND, J. SCHNEIDER et S. KOLLING : Adhesive connections in glass structures—part I : experiments and analytics on thin structural silicone. *Glass Structures & Engineering*, 3(1):39–54, 2018b.
- E. EUCHLER, R. BERNHARDT, F. WILDE, K. SCHNEIDER, G. HEINRICH, T. TADA, S. WIESSNER et M. STOMMEL : First-Time Investigations on Cavitation in Rubber Parts Subjected to Constrained Tension Using In Situ Synchrotron X-Ray Microtomography (SR μ CT). *Advanced Engineering Materials*, page 2001347, 2021.
- T. FOECKE, M.A. IADICOLA, A. LIN et S.W. BANOVIC : A method for direct measurement of multiaxial stress-strain curves in sheet metal. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 38(2):306–313, 2007.
- H.-P. GÄNSER, A. LEITGEB, K. GLINSNER et W. EICHLSEDER : Computation of a modified Haigh-Goodman diagram for damage tolerant design for infinite fatigue life. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 221(5):619–623, 2007.
- A.N. GENT et P.B. LINDLEY : Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 249(1257):195–205, 1959.
- A.N. GENT et B. PARK : Failure processes in elastomers at or near a rigid spherical inclusion. *Journal of Materials Science*, 19(6):1947–1956, 1984.
- A.A. GRIFFITH : VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582-593):163–198, 1921.
- B.P. HAIGH : Experiments on the fatigue of brasses. *Journal of the Institute of Metals*, 18(2):55–86, 1917.
- R.J. HARBOUR : *Multiaxial deformation and fatigue of rubber under variable amplitude loading*. Thèse de doctorat, The University of Toledo, 2006.
- R.J. HARBOUR, A. FATEMI et W.V. MARS : Fatigue crack orientation in NR and SBR under variable amplitude and multiaxial loading conditions. *Journal of Materials Science*, 43(6):1783–1794, 2008a.
- R.J. HARBOUR, A. FATEMI et W.V. MARS : Fatigue life analysis and predictions for NR and SBR under variable amplitude and multiaxial loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 30(7):1231–1247, 2008b.
- G. HÉNAFF et F. MOREL : *Fatigue des structures : endurance, critères de dimensionnement, propagation des fissures, rupture*. Ellipses., 2005.
- G.A. HOLZAPFEL : *Nonlinear Solid Mechanics II*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- H.-S. HOU et R. ABEYARATNE : Cavitation in elastic and elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(3):571–592, 1992.
- B. HUNEAU, I. MASQUELIER, Y. MARCO, V. LE SAUX, S. NOIZET, C. SCHIEL et P. CHARRIER : Fatigue crack initiation in a carbon black-filled Natural Rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 89(1):126–141, 2016.

- G.R. IRWIN : Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 28(4):361–364, 1957.
- N.K. JHA, U. NACKENHORST, V.S. PAWAR, R. NADELLA et P.J. GURUPRASAD : On the constitutive modelling of fatigue damage in rubber-like materials. *International Journal of Solids and Structures*, 159:77–89, 2019.
- O. KUNC et F. FRITZEN : Correction : Kunc, O. Fritzen, F, 2019. Finite strain homogenization using a reduced basis and efficient sampling. *Mathematical and Computational Applications*, 24, 56. *Mathematical and Computational Applications*, 24(4):95, 2019a.
- O. KUNC et F. FRITZEN : Finite strain homogenization using a reduced basis and efficient sampling. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2):56, 2019b.
- G.J. LAKE : Fatigue and fracture of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 68(3):435–460, 1995.
- G.J. LAKE et A.G. THOMAS : The strength of highly elastic materials. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 300(1460):108–119, 1967.
- J.-B. LE CAM, B. HUNEAU et E. VERRON : Description of fatigue damage in carbon black filled natural rubber. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 31(12):1031–1038, 2008.
- J.-B. LE CAM, B. HUNEAU et E. VERRON : Fatigue damage in carbon black filled natural rubber under uni-and multi-axial loading conditions. *International Journal of Fatigue*, 52:82–94, 2013.
- J.-B. LE CAM, B. HUNEAU et E. VERRON : Failure analysis of carbon black filled styrene butadiene rubber under fatigue loading conditions. *Plastics, Rubber and Composites*, 43(6):187–191, 2014.
- J.-B. LE CAM, B. HUNEAU, E. VERRON et L. GORNET : Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled Natural Rubber. *Macromolecules*, 37(13):5011–5017, 2004.
- E. LE MIRE, E. VERRON, B. HUNEAU et N. SELLES : Multi-axial fatigue experiments for elastomers based on true strain invariants. *Journal of Rubber Research*, pages 1–10, 2021.
- V. LE SAUX, Y. MARCO, S. CALLOCH et P. CHARRIER : Evaluation of the fatigue defect population in an elastomer using X-ray computed micro-tomography. *Polymer Engineering & Science*, 51(7):1253–1263, 2011.
- A.-S. LECTEZ : *Comportement multi-axial de pièces élastomères pré-contraintes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2014.
- V. LEFÈVRE, K. RAVI-CHANDAR et O. LOPEZ-PAMIES : Cavitation in rubber : an elastic instability or a fracture phenomenon ? *International Journal of Fracture*, 192(1):1–23, 2015.
- K. LEGORJU-JAGO : *Influence de la cristallisation sous contrainte sur l'endurance et la propagation des fissures de fatigue dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Châtenay-Malabry, École Centrale de Paris, 1998.
- K. LEGORJU-JAGO et C. BATHIAS : Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers. *International Journal of Fatigue*, 24(2-4):85–92, 2002.

- J. LEMAITRE et J.-L. CHABOCHE : *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press, 1994.
- P. J LOEW, B. PETERS et L.A.A. BEECH : Fatigue phase-field damage modeling of rubber using viscous dissipation : Crack nucleation and propagation. *Mechanics of Materials*, 142:103282, 2020.
- R.K. LUO : Effective stress criterion for rubber multiaxial fatigue under both proportional and non-proportional loadings. *Engineering Failure Analysis*, 121:105172, 2021.
- W.V. MARS : Cracking Energy Density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber Chemistry and Technology*, 75:419–424, 2001a.
- W.V. MARS : *Multiaxial fatigue of rubber*. Thèse de doctorat, The University of Toledo, 2001b.
- W.V. MARS : Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber Chemistry and Technology*, 75(1):1–17, 2002.
- W.V. MARS : Fatigue life prediction for elastomeric structures. *Rubber Chemistry and Technology*, 80(3):481–503, 2007.
- W.V. MARS et A. FATEMI : A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. *International Journal of Fatigue*, 24(9):949–961, 2002.
- W.V. MARS et A. FATEMI : Factors that affect the fatigue life of rubber : a literature survey. *Rubber Chemistry and Technology*, 77(3):391–412, 2004a.
- W.V. MARS et A. FATEMI : A novel specimen for investigating the mechanical behavior of elastomers under multiaxial loading conditions. *Experimental Mechanics*, 44(2):136–146, 2004b.
- W.V. MARS et A. FATEMI : Multiaxial fatigue of rubber : Part I : equivalence criteria and theoretical aspects. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 28(6):515–522, 2005.
- W.V. MARS et A. FATEMI : Nucleation and growth of small fatigue cracks in filled natural rubber under multiaxial loading. *Journal of Materials Science*, 41(22):7324–7332, 2006.
- M. MATSUISHI et T. ENDO : Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers*, 68(2):37–40, 1968.
- M.A. MINER : Cumulative fatigue damage. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3):A159–A164, 1945.
- J.G. MURPHY : The stability of thin, stretched and twisted elastic rods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 68:96–100, 2015.
- R. W. OGDEN, G. SACCOMANDI et I. SGURA : Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 34(6):484–502, 2004.
- R.W. OGDEN : *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York (First published by Ellis Harwood Ltd. in 1984), 1997.
- A. PALMGREN : Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift des Vereines Duetsher Ingenieure*, 68(4):339, 1924.
- I.V. PAPADOPOULOS : Critical plane approaches in high-cycle fatigue : on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 21(3):269–285, 1998.

- P. PARIS : A rational analytic theory of fatigue. *The trend in engineering*, 13:9, 1961.
- P. PARIS et F. ERDOGAN : A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basics Engineering*, 85(4), 1963.
- X. POULAIN, V. LEFEVRE, O. LOPEZ-PAMIES et K. RAVI-CHANDAR : Damage in elastomers : nucleation and growth of cavities, micro-cracks, and macro-cracks. *International Journal of Fracture*, 205(1):1–21, 2017.
- M. QUARESIMIN, L. SUSMEL et R. TALREJA : Fatigue behaviour and life assessment of composite laminates under multiaxial loadings. *International Journal of Fatigue*, 32(1):2–16, 2010.
- S. RAAYAI-ARDAKANI, D.R. EARL et T. COHEN : The intimate relationship between cavitation and fracture. *Soft matter*, 15(25):4999–5005, 2019.
- R.S. RIVLIN : Large elastic deformations of isotropic materials VI. further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.*, 242(845):173–195, 1949.
- R.S. RIVLIN et D.W. SAUNDERS : Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(865):251–288, 1951.
- R.S. RIVLIN et A.G. THOMAS : Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, 10(3):291–318, 1953.
- B.J. ROBERTS et J.B. BENZIES : The relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates. *Proceedings of Rubbercon*, 77(2):1–13, 1977.
- P.L. ROSENDAHL : *From bulk to structural failure : fracture of hyperelastic materials*. Springer, 2021.
- I. RYCHLIK : A new definition of the rainflow cycle counting method. *International Journal of Fatigue*, 9(2):119–121, 1987.
- N. SAINTIER : *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : mécanismes d'endommagement et critère local d'amorçage de fissure*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2001.
- N. SAINTIER, G. CAILLETAUD et R. PIQUES : Crack initiation and propagation under multiaxial fatigue in a Natural Rubber. *International Journal of Fatigue*, 28(1):61–72, 2006.
- J. SCHIJVE : A normal distribution or a Weibull distribution for fatigue lives. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 16(8):851–859, 1993.
- J. SCHIJVE : Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *International Journal of Fatigue*, 25(8):679–702, 2003.
- J. SCHIJVE : Statistical distribution functions and fatigue of structures. *International Journal of Fatigue*, 27(9):1031–1039, 2005.
- N. SHAMSAEI, A. FATEMI et D.F. SOCIE : Multiaxial fatigue evaluation using discriminating strain paths. *International Journal of Fatigue*, 33(4):597–609, 2011.
- E. SUHIR, R. GHAFFARIAN et S. YI : Probabilistic Palmgren-Miner rule, with application to solder materials experiencing elastic deformations. *Journal of Materials Science : Materials in Electronics*, 28(3):2680–2685, 2017.

- Y.L. TEE, M.S. LOO et A. ANDRIYANA : Recent advances on fatigue of rubber after the literature survey by Mars and FFatemi in 2002 and 2004. *International Journal of Fatigue*, 110:115–129, 2018.
- C. THIEL, J. VOSS, R. J. MARTIN et P. NEFF : Shear, pure and simple. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 112:57–72, 2019.
- A.G. THOMAS : Rupture of rubber. V. Cut growth in Natural Rubber vulcanizates. *Journal of Polymer Science*, 31(123):467–480, 1958.
- A.G. THOMAS : The development of fracture mechanics for elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 67(3):50–67, 1994.
- R. TOBAJAS, D. ELDUQUE, E. IBARZ, C. JAVIERRE et L. GRACIA : A new multiparameter model for multiaxial fatigue life prediction of rubber materials. *Polymers*, 12(5):1194, 2020.
- M.T. TODINOV : Necessary and sufficient condition for additivity in the sense of the Palmgren-Miner rule. *Computational Materials Science*, 21(1):101–110, 2001.
- E. VERRON et A. ANDRIYANA : Definition of a new predictor for multiaxial fatigue crack nucleation in rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2):417–443, 2008.
- S. WADA, R. ZHANG, S.R. MANNAVA, V.K. VASUDEVAN et D. QIAN : Simulation-based prediction of cyclic failure in rubbery materials using nonlinear space-time finite element method coupled with continuum damage mechanics. *Finite Elements in analysis and design*, 138:21–30, 2018.
- B. WANG, H. LU et G.-H. KIM : A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, 34(8):475–483, 2002.
- W. WEIBULL : A statistical distribution function of wide applicability. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18(3):293–297, 1951.
- A. WÖHLER : *Über die festigkeitsversuche mit eisen und stahl*. Ernst & Korn, 1870.
- J.-Y. WU et M. CERVERA : A novel positive/negative projection in energy norm for the damage modeling of quasi-brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 139:250–269, 2018.
- X.W. YE, Y.Q. NI, K.Y. WONG et J.M. KO : Statistical analysis of stress spectra for fatigue life assessment of steel bridges with structural health monitoring data. *Engineering Structures*, 45:166–176, 2012.
- . ZARRIN-GHALAMI et A. FATEMI : Multiaxial fatigue and life prediction of elastomeric components. *International Journal of Fatigue*, 55:92–101, 2013.
- Z. ZHAO, X. MU et F. DU : Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 2019.
- A. ZINE, N. BENSEDDIQ, M. NAÏT-ABDELAZIZ, N. A. HOCINE et D. BOUAMI : Prediction of rubber fatigue life under multiaxial loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 29(3):267–278, 2006.

Titre : Contributions expérimentales et théoriques à la fatigue multiaxiale des élastomères - Vers un critère cinématique

Mot clés : Fatigue, multiaxialité, cinématique, élastomères

Résumé : La prédiction de la durée de vie en fatigue des élastomères sous chargements multiaxiaux reste un problème ouvert. Les critères en durée de vie les plus performants sont classiquement exprimés en termes de contrainte, ce qui implique de choisir une loi de comportement et d'en identifier les paramètres et est donc source d'imprécision. La présente thèse propose d'aborder le problème d'un point de vue purement cinématique.

Pour ce faire, plusieurs propriétés mathématiques du tenseur des déformations de Hencky \mathbf{h} sont exploitées. D'un côté, deux de ses invariants (notés K_2 et K_3) permettent de décomposer la déformation en un mode et une intensité, facilitant ainsi son interprétation physique. De l'autre, de récentes avancées dans le domaine de la décomposition tensorielle permettent d'interpréter cette mesure de la déformation comme une « somme » de transformations élémentaires.

Grâce à K_2 et K_3 , une méthode de conception d'essais multiaxiaux de fatigue est développée et appliquée à la réalisation d'une campagne expérimentale de traction-torsion en-phase et déphasées. De plus, la décomposition tensorielle de \mathbf{h} permet de visualiser le cycle de déformation en 3D, et de proposer une nouvelle définition de sa moyenne et de son amplitude.

Enfin, un premier critère de fatigue, basé sur une modélisation purement cinématique des mécanismes d'amorçage couplant cavitation et traction sur plan critique, est proposée. Celui-ci met en jeu notamment un équivalent cinématique de la pression hydrostatique, issu de la décomposition de \mathbf{h} en parties positive et négative.

Finalement, ce critère est appliqué aux essais réalisés dans ce travail, ainsi qu'à une vaste base de données construite lors de la thèse et composée de plus de 350 essais de traction-torsion publiés dans la littérature.

Title: Experimental and theoretical contributions to multiaxial fatigue of elastomers - Towards a kinematic criterion

Keywords: Fatigue, multiaxiality, kinematics, elastomers

Abstract: Fatigue life prediction of elastomers undergoing multiaxial loading conditions is an open problem. The most efficient existing criteria are classically expressed in terms of stress, which necessitates the choice of a hyperelastic model and the determination of its parameters, which are sources of imprecision. The present thesis proposes to tackle the problem through a purely kinematic approach.

In this way, several mathematical properties of the Hencky strain tensor \mathbf{h} are used. On the one hand, two of its invariants (noted K_2 and K_3) allow the decomposition of the strain into a mode and an intensity, easing its physical interpretation. On the other hand, recent works on tensor decomposition lead to a new mechanical interpretation of this strain measure as a "sum" of elementary transformations.

Thanks to K_2 and K_3 , a new method for designing multiaxial fatigue tests is developed and applied to tension-torsion experiments, both in-phase and out-of-phase. Moreover, the decomposition of tensor \mathbf{h} allows the visualization of deformation cycles in 3D, and lead to a new definition of their mean and amplitude.

Finally, a first fatigue criterion is proposed, based on a purely kinematic modelling of crack initiation mechanisms coupling cavitation and extension of a critical plane. It involves a kinematic equivalent of the hydrostatic pressure, derived from the decomposition of \mathbf{h} into positive and negative parts. Ultimately, this criterion is applied to the fatigue tests realized in this work, and also to a large database built during the thesis, consisting of more than 350 tension-torsion tests published in the literature.