



HAL
open science

Navigation en intérieur avec filtrage de Kalman et anti-développement

Roza Cherfi

► **To cite this version:**

Roza Cherfi. Navigation en intérieur avec filtrage de Kalman et anti-développement. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALT098 . tel-04031557

HAL Id: tel-04031557

<https://theses.hal.science/tel-04031557v1>

Submitted on 16 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : EEATS - Electronique, Electrotechnique, Automatique, Traitement du Signal (EEATS)

Spécialité : Signal Image Parole Télécoms

Unité de recherche : Grenoble Images Parole Signal Automatique

Navigation en intérieur avec filtrage de Kalman et anti-développement

Indoor navigation with anti-development and Kalman filtering

Présentée par :

Roza CHERFI

Direction de thèse :

Nicolas LE BIHAN

DIRECTEUR DE RECHERCHE, Université Grenoble Alpes

Directeur de thèse

Christophe PRIEUR

Directeur de Recherche CNRS, Université Grenoble Alpes

Co-directeur de thèse

Rapporteurs :

Farah CHEHADE

MAITRE DE CONFERENCES HDR, Université de technologie Troyes

Guillaume GINOLHAC

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE CHAMBERY

Thèse soutenue publiquement le **13 décembre 2022**, devant le jury composé de :

Nicolas LE BIHAN

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES

Directeur de thèse

Christophe PRIEUR

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES

Co-directeur de thèse

Farah CHEHADE

MAITRE DE CONFERENCES HDR, Université de technologie Troyes

Rapporteuse

Guillaume GINOLHAC

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE CHAMBERY

Rapporteur

Antoine GIRARD

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES

Président

Alain KIBANGOU

MAITRE DE CONFERENCES HDR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Examineur

Invités :

Pierre-Olivier Amblard

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS



Remerciements

C'est avec beaucoup d'émotion que je remercie à travers ces quelques lignes tous ceux qui ont contribué à la réalisation et au succès de cette thèse, de près ou de loin.

Je remercie tout d'abord les membres du jury ; Antoine Girard, Alain Kibangou et Pierre-Olivier Amblard pour s'être déplacés jusqu'à Grenoble afin d'examiner ces travaux. Je remercie également Farah Chehade et Guillaume Ginolhac d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci à vous pour vos différents retours extrêmement constructifs apportés lors de la soutenance et pour le temps que vous y avez accordé.

J'adresse ensuite mes remerciements à mes directeurs de Thèse, Nicolas Le Bihan et Christophe Prieur pour avoir été toujours disponibles et pour m'avoir guidée tout au long de ces 3 années.

Ensuite, j'aimerais exprimer ma gratitude envers les membres de l'entreprise SYSNAV, Mathieu Hillion, Hendrik Meier et Thomas Bonis pour nous avoir fourni le capteur utilisé tout au long de cette thèse et nous avoir aidés et guidés à travers les différentes étapes de mise en marche.

Je remercie également les ingénieurs du GIPSA-Lab, Clémentine Darj pour sa disponibilité et pour m'avoir assistée et aidée lors des expérimentations réalisées au sein du laboratoire mais aussi Sylvain Geranton pour son application et le temps passé à l'élaboration du capteur GIPSA.

Je remercie bien évidemment mes anciens collègues (désormais amis) du GIPSA-Lab qui ont pu rendre le temps passé au laboratoire toujours plaisant. Un merci particulier pour Malik, qui est resté le meilleur co-bureau même après son départ, pour Yigit, Clémentine, Cosme, Cyprien, Pierre, Imane, Jeanne, Iris, Arthur, Victor, Léo, Charles, Cyril, Alexandre(s), Sylvain, Fatih, Daoud et bien d'autres.

Enfin, je finis par remercier ma famille pour m'avoir accompagnée tout au long de mes études, mes amis et bien sûr Quentin et Sury pour m'avoir soutenue et aidée pendant ces 3 années.

Résumé

Cette thèse porte sur l'exploitation des mesures d'un tachymètre magnéto-inertielles (TMI) pour la navigation en intérieur. Il s'agit donc de prélever et traiter des données issues de capteurs bas coûts pour le calcul d'un observateur adéquat permettant d'estimer l'attitude et la position de l'individu porteur du TMI. Cette méthode présente l'avantage de ne requérir aucune pré-installation d'équipements et d'infrastructures dans les bâtiments. L'idée est donc de s'appuyer sur le modèle dynamique représentant le TMI et d'utiliser une combinaison de différents pré-filtres (dont l'anti-développement) et d'un filtre de Kalman étendu qui permettrait d'avoir un algorithme d'estimation à un moindre coût, favorisant un traitement des données en continu, sur des fenêtres glissantes et proposant un algorithme plus performant et en temps réel. Des expérimentations portant sur les différentes représentations de l'attitude du modèle dynamique du TMI ont été réalisées en premier lieu, donnant la possibilité de conclure sur les avantages et inconvénients de chaque représentation. Par la suite, une méthodologie a été suivie pour sélectionner la meilleure combinaison de filtres amont-aval à travers diverses simulations, ce qui a permis d'améliorer le filtre de Kalman étendu classique. En plus d'une telle estimation de mouvement, il serait possible de proposer une qualité d'estimation en fournissant un gabarit contenant la valeur réelle de l'attitude et de la position, fournissant une réalité terrain, ce qui permet de vérifier les performances de la combinaison filtres amont-aval choisie en comparaison avec les données de référence. La thèse se consacre donc à la synthèse de nouveaux observateurs, mais aussi à leur implémentation et à leur validation sur des données de référence. Les principaux résultats suggèrent un impact perceptible du pré-filtrage sur le gain en performance de la méthode par rapport à l'état de l'art.

Mots-clés

Synthèse de filtre - Navigation - Capteur IMU

Table des matières

Table des sigles et acronymes	ix
Introduction	1
1 Estimation d'attitude et de position	5
1 Estimation d'attitude	5
1.1 Les représentations de l'attitude	6
1.2 Le groupe spécial orthogonal $SO(3)$	10
1.3 Notions mathématiques associées	12
1.4 FKE pour un système dynamique d'attitude	14
1.5 Simulations et résultats	19
2 Estimation de position et d'attitude	23
2.1 Système dynamique complet	24
2.2 Conclusions	27
2 Techniques de filtrages sur $SO(3)$ et optimisations	29
1 Filtres sur $SO(3)$	30
1.1 Anti-développement et régularisation de Tikhonov	30
1.2 Filtres à moyenne mobile	35
2 Optimisation des filtres	36
2.1 Fenêtres glissantes	37
2.2 Automatisation du calcul des matrices de covariances Q et R du FKE	40
3 Simulations et résultats	43
3.1 Comparaison des performances de l'AD-FKE et FKE	44

3.2	Comparaison des performances de l'AD-FKE et du FMM-FKE . . .	51
3.3	Conclusion	53
3	Implémentation des filtres sur les données réelles	55
1	Protocole d'expérimentation	55
1.1	Description de l'environnement et du matériel d'étude	56
1.2	Description des expériences réalisées	62
2	Résultats des filtres appliqués sur les données réelles	64
2.1	Premiers résultats sur les données réelles	64
2.2	Résultats associés à la trajectoire rectangulaire	68
2.3	Résultats associés à la trajectoire dessinée	69
2.4	Résultats divers	70
3	Conclusion	74
	Conclusion générale et perspectives	75
	Bibliographie	79
A	Filtre de Kalman	83
1	Filtre de Kalman discret	83

Table des figures

1.1	Rotation d'un référentiel fixe (noir) selon la convention ZYX	6
1.2	Séquences de rotations réalisées dans le temps	7
1.3	Schéma représentant le groupe spécial orthogonal (en noir) et l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ (en rouge) qui lui est associé.	12
1.4	Schéma représentant le repère inertiel (en noir) et le repère corps (en rouge).	15
1.5	Trajectoires de référence (en bleu) et bruitée (en rouge) pour une des 3 composantes de la vitesse angulaire $\omega(k)$	20
1.6	Distance géodésique entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour (a) le FKE appliqué sur R, (b) le FKE sur quaternions pour différentes conditions initiales α_i	21
1.7	Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour (a) le FKE appliqué sur R, (b) le FKE sur quaternions pour différents écarts types σ	22
2.1	Schéma positionnement filtres amont-aval par rapport au système dynamique	30
2.2	Principe anti-développement	31
2.3	Schéma représentant le passage de $SO(3)$ à l'espace euclidien \mathbb{R}^3 où le relèvement est représenté comme étant réalisé à l'identité \mathbb{I}	32
2.4	Schéma représentant le couplage AD-FKE appliqué sur le système dynamique	34
2.5	Organigramme de l'algorithme des fenêtres glissantes	37
2.6	Partitionnement d'une trajectoire en plusieurs fenêtres	38
2.7	Trajectoire de référence (en bleu) et bruitée(en rouge) (avec $\sigma = 0.2$ rad/s) pour une des 3 composantes de la vitesse angulaire en entrée	44
2.8	Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l'anti-développement appliqué sur R (en bleu) pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	45

2.9	Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l'anti-développement appliqué sur R (en bleu) pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	46
2.10	Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l'anti-développement appliqué sur q (en bleu) pour, de haut en bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	47
2.11	Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	48
2.12	Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R couplé à l'anti-développement pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	49
2.13	Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q couplé à l'anti-développement pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$	50
3.1	Plateforme BioMeca	56
3.2	Matériel pour l'étape de calibration	57
3.3	Vue latérale de la zone calibrée sur le logiciel Qualisys	58
3.4	Vue de dessus de la zone calibrée sur le logiciel Qualisys	58
3.5	Module capteur	59
3.6	Module fusion	59
3.7	TMI porté par un sujet	60
3.8	Schéma 3D marqueurs capteur	61
3.9	Exemple de trajectoire réalisée par un individu porteur du capteur	61
3.10	Trajectoire rectangulaire Qualisys	63
3.11	Trajectoire dessinée sur le sol de la plateforme BioMeca	63

3.12	Trajectoire Qualisys	64
3.13	Trajectoire rectangulaire de référence (en rouge), reconstruite avec le filtre du TMI (en noir) et reconstruite après application du FKE-AD (en bleu) réalisée par le sujet A	65
3.14	Tracés des angles d'Euler de la référence (en noir), du boitier SYSNAV (en rouge) et du FKE-AD (en bleu)	66
3.15	Les 3 composantes de la vitesse de déplacement de référence (en rouge), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et reconstruites par le FKE-AD (en bleu)	67
3.16	Trajectoires reconstruites avec FKE-AD (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) effectuées par les 4 sujets	68
3.17	Trajectoires reconstruites après FKE-AD (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) effectuées par les 4 sujets	69
3.18	Trajectoire reconstruite (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) réalisée par le sujet D	70
3.19	Trajectoire reconstruite (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) réalisée par le sujet A à un pas de course	71
3.20	Trajectoire reconstruite sans filtrage (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en rouge)	73

Liste des tableaux

1.1	Comparaison des différentes valeurs de la distance géodésique moyenne et de la variance calculée au pic de divergence pour un FKE appliqué sur R et un FKE appliqué sur q.	23
2.1	Performances de l'AD-FKE pour différentes tailles de fenêtres	39
2.2	Performances associées au FKE (avec et sans pré-filtrages) couplé à la dynamique de l'attitude.	51
2.3	Performances associées au FKE (avec et sans pré-filtrage) couplé au système dynamique complet (eq. (1.17)).	52
3.1	Comparaison de l'écart-type moyen, de la distance et de l'erreur de la vitesse du FKE-AD et du filtre du TMI.	72

Table des sigles et acronymes

AD	<i>Anti-développement</i>
Bi-LSTM	<i>Bidirectional Long-Short Term Memory</i>
FKE	<i>Filtre de Kalman étendu</i>
FKE-AD	<i>Filtre de Kalman étendu combiné à un anti-développement</i>
FKE-MM	<i>Filtre de Kalman étendu combiné à une moyenne mobile</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite Systems</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
MM	<i>Moyenne Mobile</i>
QTM	<i>Qualisys Track Manager</i>
SPI	<i>Serial Peripheral Interface</i>
TMI	<i>Tachymètre magnéto-inertiel</i>

Introduction

La capacité de localiser et suivre un objet en mouvement ou de se localiser soi-même afin de pouvoir s’orienter dans un espace inconnu et dénué de repères représentait une prouesse technologique il y a quelques décennies. On peut considérer aujourd’hui qu’il existe de nombreuses techniques de localisation et que ce procédé est devenu une normalité pour l’Homme qui l’utilise au quotidien dès que le besoin se ressent.

L’objectif étant évidemment de surpasser l’existant et donc toujours aller plus loin dans l’amélioration des méthodes employées, nous nous penchons dans ces travaux sur les différents moyens de localisation existants.

Vers l’estimation de position en intérieur

Quand on parle de localisation, l’outil communément utilisé de nos jours est le GPS (Global Positioning System). Pour la navigation extérieure, le GPS offre une précision satisfaisante et suffisante, de l’ordre du mètre nativement [Moore, 1994]. En appliquant une méthode de correction différentielle qui se base sur deux récepteurs GNSS (l’un fixe servant de référence et l’autre mobile), cette précision peut passer à un ordre de grandeur de quelques décimètres [Mosavi et al., 2004].

Lorsque l’on cherche à obtenir une estimation plus fine, par exemple pour estimer la position exacte d’un objet ou d’une personne dans un bâtiment, ces ordres de grandeur représentent une incertitude trop importante et il est nécessaire d’envisager d’autres solutions techniques. Si l’on ajoute à cela la hausse des perturbations des signaux satellites en intérieur causées par des interférences, des réflexions ou blocages du signal sur les murs et les bâtiments mais aussi des tempêtes solaires majeures [MacGougan, 2003], cela rend l’utilisation du GPS obsolète dans le cadre de la localisation en intérieur.

Pour parvenir à une localisation en intérieur fiable, plusieurs recherches se concentrant sur des moyens de localisation alternatifs ont été réalisées. Parmi les solutions proposées dans la littérature, on peut en trouver certaines qui se basent sur des infrastructures électroniques pré-installées dans l’environnement d’étude. On peut notamment les décliner en plusieurs catégories suivant les technologies et méthodes employées. Certaines se basent sur des réseaux locaux sans fil (WLAN) [Koski et al., 2010], comme des balises Bluetooth [Fischer et al., 2004] ou des bornes WIFI [Han et al., 2019], d’autres reposent sur

l'identification par radiofréquence [Filonenko et al., 2010] et alternativement sur des techniques basées sur la vidéo [Aparicio-Esteve et al., 2019], [Kim et al., 2019].

Cependant, l'implémentation de ces méthodes nécessite la présence d'un de ces dispositifs à l'intérieur des bâtiments, ce qui n'est pas possible d'assurer en environnement inconnu. L'objectif de notre recherche est de palier cette limite en permettant une localisation en intérieur précise à l'aide d'un capteur portatif indépendant. Ceci permettrait de continuer à utiliser ce moyen de localisation dans toutes sortes d'environnements, comme par exemple lors d'interventions d'équipes de sauvetage dans des milieux sinistrés (incendies, catastrophes naturelles,...) et garantirait le suivi des agents tout au long de leur mission. Nous retrouvons ainsi dans la littérature plusieurs sources qui utilisent des centrales inertielles et des filtres de Kalman pour faire de l'estimation de position dans des milieux dépourvus de structures pré-installées [Hellmers et al., 2013], [Feng et al., 2020]. Partant de là, l'entreprise SYSNAV a conçu un capteur assurant la localisation dans des milieux dépourvus de structures pré-installées, permettant ainsi de garantir son utilisation en intérieur.

Etat de l'art

De premiers travaux ont permis la modélisation d'un tachymètre magnéto-inertiel (TMI) conçu par SYSNAV et l'estimation de la position fournie par le capteur avec un filtre de Kalman étendu (FKE) [Chesneau, 2018], en négligeant toute infrastructure déjà présente sur le site et sans cartographier le champ magnétique environnant au préalable. Ce modèle a ensuite été complété dans [Zmitri, 2021] par l'ajout de la dynamique du gradient du champ magnétique comme état du système dynamique proposé dans [Chesneau, 2018], afin d'exploiter au mieux les variations de ce champ et ainsi réduire les incertitudes et le bruit. Ce nouveau modèle est filtré grâce à une combinaison d'un FKE et d'un réseau de neurones LSTM (Long short-term memory) bidirectionnel [Hochreiter and Schmidhuber, 1997] qui permet de générer des matrices de covariances dynamiques et des matrices de covariance de mesure du filtre de Kalman adaptées à la trajectoire à filtrer. Cependant, le temps de calcul inhérent à l'implémentation d'un réseau de neurones et la nécessité de collecter beaucoup d'échantillons pour son efficacité rendent son utilisation limitée dans des applications où il est coûteux d'acquérir de grandes bases de données.

D'autres études se sont concentrées sur l'utilisation d'une étape de pré-filtrage dans le but d'améliorer l'estimation de position [Ko et al., 2008].

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux réalisés dans [Chesneau, 2018] en proposant d'utiliser une combinaison de différents pré-filtres (dont l'anti-développement (AD) [Said, 2009]) et d'un filtre de Kalman étendu de façon à garantir des performances similaires à celles du filtre implémenté sur le TMI ou celles proposées dans [Zmitri, 2021]

à un moindre coût et sans recourir à la collecte d'importants volumes de données. Cet algorithme a l'avantage supplémentaire de traiter les données en continu, sur des fenêtres glissantes, permettant un traitement performant et en temps réel.

Structure du manuscrit

Ce manuscrit est composé de trois chapitres. Le chapitre 1 introduit les notions mathématiques nécessaires à la compréhension du document ainsi que les modèles dynamiques associés au tachymètre magnéto-inertiel et les filtres utilisés pour l'estimation de position. Une section de simulations et résultats y décrit le protocole de simulation choisi et permet de tirer une première conclusion sur le modèle dynamique à utiliser.

Le chapitre 2 se consacre à la description des différents pré-filtres utilisés. Les performances de chacun de ces pré-filtres sont évidemment comparées à travers des simulations. Des méthodes d'optimisation du filtre de Kalman étendu combiné aux pré-filtres ont été pensées et testées dans la seconde section de ce chapitre.

Le dernier chapitre évalue la combinaison pré-filtre+filtre appliquée à des données réelles issues du tachymètre magnéto-inertiel conçu par SYSNAV à travers des expériences réalisées dans un environnement contrôlé. Le protocole de ces expérimentations et l'environnement de réalisation des tests est également défini.

Estimation d'attitude et de position

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles dynamiques associés au dispositif d'estimation de position et d'attitude, les filtres utilisés pour l'estimation de position d'un individu porteur du dispositif ainsi que les notions mathématiques nécessaires aux traitements réalisés à travers ces filtrages.

Sommaire

1	Estimation d'attitude	5
1.1	Les représentations de l'attitude	6
1.2	Le groupe spécial orthogonal $SO(3)$	10
1.3	Notions mathématiques associées	12
1.4	FKE pour un système dynamique d'attitude	14
1.5	Simulations et résultats	19
2	Estimation de position et d'attitude	23
2.1	Système dynamique complet	24
2.2	Conclusions	27

1 Estimation d'attitude

Nous suivons la trajectoire réalisée par un individu porteur d'un dispositif composé d'un gyromètre, d'un accéléromètre et de cinq magnétomètres par l'intermédiaire des observations issues d'un tachymètre magnéto-inertiel (TMI). Ainsi, nous écrivons le modèle d'espace d'état non linéaire représentant la dynamique des capteurs utilisés.

Nous nous concentrons dans cette section sur la partie d'estimation d'attitude. Nous détaillons et définissons les différentes formes de représentations utilisées dans cette thèse ainsi que les notions mathématiques associées à ces représentations d'attitude. Les notions mathématiques introduites nous permettent de mieux expliquer l'utilisation de ces représentations d'attitude dans le système dynamique du TMI, le filtrage de ce système dynamique et les passages entre les différentes représentations d'attitude.

1.1 Les représentations de l'attitude

Avant d'introduire les différentes représentations de rotations (ou d'attitude) utilisées, nous commençons d'abord par définir l'intervalle d'existence des angles de rotation. Dans la plupart des cas, si on considère que λ représente l'angle de rotation par rapport à un axe donné, cet intervalle est défini entre 0 et 2π , tel que $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Ce choix d'intervalle est généralement satisfaisant, étant donné qu'il comporte la totalité des rotations possibles ; en comptant l'angle zéro qui permet d'avoir le point d'origine de l'axe défini. Cependant, pour notre cas d'étude ce choix devient inadapté du fait de l'absence des valeurs négatives que peuvent prendre ces angles. Nous devons donc définir un intervalle qui englobe la totalité des variations possibles (qu'elles soient positives ou négatives). Nous choisissons un intervalle d'une longueur de 2π centré sur zéro qui représente le point d'origine. Nous pouvons alors définir les représentations de rotations utilisées, sachant que l'intervalle d'existence des angles de rotations est $]-\pi, \pi]$.

Les angles d'Euler Ces angles permettent d'exprimer l'orientation d'un corps rigide par rapport à un repère à trois dimensions de référence (trièdre cartésien) [Altmann, 2005]. Chacun des trois angles, notés ϕ , θ et ψ , représente un des trois paramètres d'une rotation particulière. L'angle ϕ permet d'exprimer la rotation de cet angle autour de l'axe X d'un repère fixe défini. Cette rotation est communément appelée le roulis. L'angle θ , lui représente la rotation autour de l'axe Y de ce repère, appelée le tangage. Enfin, le lacet est la rotation de l'angle ψ autour de l'axe Z .

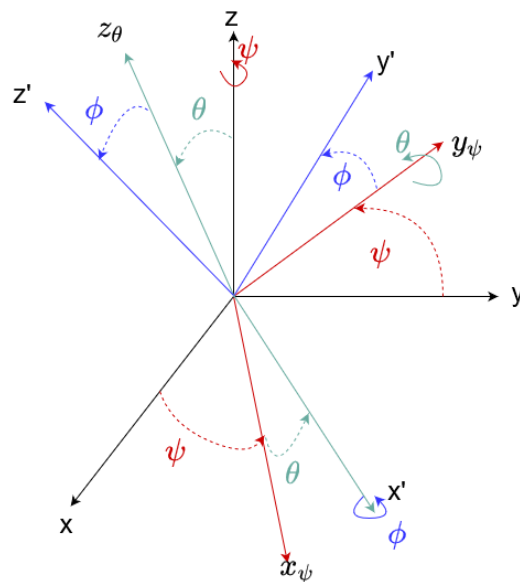


FIGURE 1.1 – Rotation d'un référentiel fixe (noir) selon la convention ZYX

Il existe douze combinaisons possibles pour représenter une rotation avec les angles d'Euler [Markley and Crassidis, 2014] et chaque rotation est représentée par une combinaison non unique d'angles. Dans ce document nous choisissons une seule et unique convention : ZYX , qui impose la rotation d'abord autour de l'axe Z , puis l'axe Y et enfin l'axe X . La figure 1.1 résume ces rotations.

Nous utilisons, par la suite, la convention ZYX pour exprimer la rotation d'un objet rigide à l'aide de matrices de rotations et des paramètres ϕ , θ et ψ qui permettent de représenter l'attitude de l'objet.

Les matrices de rotation Les matrices de rotation sont une façon de représenter une rotation. Chaque matrice est définie dans $SO(3)$ et prend en paramètre un angle d'Euler évoluant dans \mathbb{R} et le traduit en un changement d'orientation du repère inertiel [Shuster and Markley, 2003].

Les matrices de rotations permettent d'exprimer les différentes attitudes qu'un objet peut avoir dans le temps (figure 1.2).

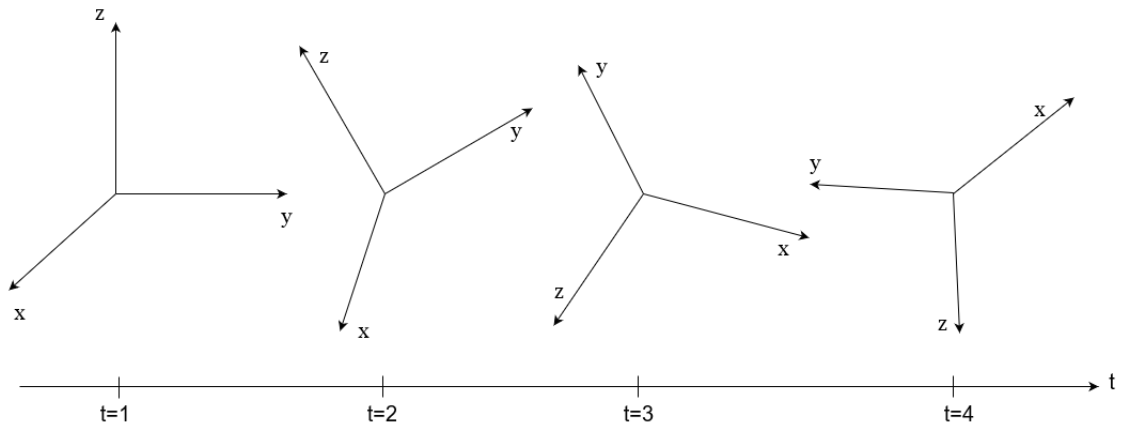


FIGURE 1.2 – Séquences de rotations réalisées dans le temps

On note $R_X(\lambda)$ la rotation effectuée autour de l'axe X d'un angle λ , $R_Y(\lambda)$ la rotation effectuée autour de l'axe Y d'un angle λ et $R_Z(\lambda)$ la rotation effectuée autour de l'axe Z d'un angle λ , telles que

$$R_X(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}, R_Y(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix}, R_Z(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En suivant la convention définie, si on considère que cet objet a subi une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe X , θ autour de l'axe Y et ψ autour de l'axe Z , la matrice de rotation $R_{ZYX}(\psi, \theta, \phi)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} R_{ZYX}(\psi, \theta, \phi) &= R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\phi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\psi \sin\phi \sin\theta - \cos\phi \sin\psi & \cos\phi \cos\psi \sin\theta + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme il a été possible de déterminer les matrices de rotation grâce aux angles d'Euler qui représentent les paramètres de ces matrices, il est également possible de déterminer ces angles en résolvant le système d'équations donné par la matrice de rotation, tel que

$$\begin{cases} \phi &= \arctan(R_{32}/R_{33}) \\ \theta &= -\arctan\left(\frac{R_{31}}{\sqrt{1-R_{31}^2}}\right) \\ \psi &= \arctan(R_{21}/R_{11}) \end{cases}$$

Cette conversion peut se calculer que si

$$\begin{cases} R_{33} \neq 0 \\ R_{11} \neq 0 \\ R_{31} \neq \pm 1 \end{cases}$$

Dans le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées, nous avons

$$\begin{cases} R_{33} = R_{32} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \\ R_{11} = R_{21} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{\pi}{2} \\ R_{31} = \pm 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Nous passons à la seconde représentation de rotation utilisée dans ce manuscrit, les quaternions.

Les quaternions représentent une seconde forme de représentation de l'attitude d'un corps. Le quaternion appartient à la classe des nombres hypercomplexes de rang 4 [Kantor

and Solodovnikov, 1989] qui est une composition de nombres réels et de nombres complexes qui respecte les lois d'associativité et la distributivité pour les opérations d'addition et de multiplication mais pas la loi de commutativité pour les opérations de multiplications [Kuipers, 1999].

Pour être plus précis, le quaternion se compose d'une partie réelle et de trois parties imaginaires. Les quaternions s'expriment sous leur forme cartésienne comme :

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

tel que $q \in \mathbb{H}$ est un quaternion, q_0, q_1, q_2 et q_3 sont des nombres réels et \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} forment la base orthonormale standard de \mathbb{R}^3 satisfaisant la formule quaternionique $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. Les quaternions utilisés dans ces travaux sont des quaternions unitaires, c'est-à-dire que la norme du quaternion q vaut 1, tel que $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$. Cette unité nous permet d'être sûr que le quaternion représente bel et bien une rotation. En effet, cette condition assure que le quaternion appartient à la sphère S^3 de dimension 4, tel que $S^3 = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 : q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$. Ces quaternions sont souvent représentés par un vecteur tel que $q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$.

Les quaternions peuvent être convertis en matrice de rotation $R(q)$, qui prend en paramètre le vecteur quaternionique q , à travers la transformation suivante

$$R(q) = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Inversement, il est possible de passer d'une matrice de rotation à un quaternion en calculant la trace (Tr) de la matrice $R(q)$ tel que

$$\begin{aligned} Tr(R(q)) &= 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 + 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 + 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \\ &= 6q_0^2 + \underbrace{2q_1^2 + 2q_2^2 + 2q_3^2}_{2(1-q_0^2)} - 3 \end{aligned}$$

$$Tr(R(q)) = 4q_0^2 - 1 \quad (1.2)$$

Par conséquent, nous pouvons avoir la valeur de la partie réelle du quaternion qui est donc

$$q_0 = \sqrt{\frac{Tr(R(q)) + 1}{4}} \quad (1.3)$$

Puis nous calculons les valeurs de q_1, q_2 et q_3 en résolvant des équations des membres de

la matrice $R(q)$ ce qui nous donne

$$q_1 = \frac{R_{23} - R_{32}}{4\sqrt{\frac{\text{Tr}(R(q))+1}{4}}} \quad (1.4)$$

$$q_2 = \frac{R_{12} - R_{21}}{4\sqrt{\frac{\text{Tr}(R(q))+1}{4}}} \quad (1.5)$$

$$q_3 = \frac{R_{31} - R_{13}}{4\sqrt{\frac{\text{Tr}(R(q))+1}{4}}} \quad (1.6)$$

L'utilisation des représentations d'attitude avec des matrices de rotation et des quaternions nous permet de remédier au problème posé par les angles d'Euler. En effet, en exprimant une rotation avec les angles d'Euler nous devons faire face à des problèmes de singularités qui surviennent lorsque les rotations autour du premier et troisième axes de rotation (Z et X) qui expriment le lacet et le roulis se retrouvent confondus à cause de la valeur que prend le deuxième angle (θ) qui exprime le tangage. Par exemple, quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, les angles ϕ et ψ expriment le même mouvement induisant la perte d'un degré de liberté au système d'attitude. Ce problème s'appelle le Blocage de Cardan [Diebel, 2006].

Ainsi, les conversions de ces différentes représentations s'avèrent importantes pour plusieurs raisons. La représentation en angles d'Euler nous permet d'avoir une expression des résultats plus facile à interpréter et à visualiser. La représentation en matrices de rotation, sans utilisation des angles d'Euler comme paramètres, nous permet quant à elle de régler le problème de blocage de Cardan qui peut survenir avec les angles d'Euler et nous permet de garder une représentation du système dynamique d'attitude classique non modifiée, tel que pour une matrice de rotation R , il existe deux quaternions unitaires q pouvant représenter une même rotation. La dernière représentation, les quaternions, nous permet également de régler le problème de singularités mais aussi de bénéficier d'un temps de calcul plus court étant donné que le nombre de paramètres utilisés est moins important que celui des matrices de rotation.

1.2 Le groupe spécial orthogonal $SO(3)$

Le groupe spécial orthogonal $SO(3)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(n)$ à n dimensions qui lui-même est un sous-groupe du groupe linéaire dont la forme quadratique est conservée [Altmann, 2005]. Ce groupe est représenté par des matrices orthogonales carrées de dimension 3×3 et permet de conserver la distance dans un espace euclidien à 3 dimensions lorsque des opérations sont effectuées dans le sous-groupe [Boulangier, 2013].

En considérant une matrice de rotation $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telle que

$$RR^T = \mathbb{I}_{3 \times 3} \quad (1.7)$$

$$\det(R) = 1 \quad (1.8)$$

où $\mathbb{I}_{3 \times 3}$ représente la matrice identité de dimension 3×3 et $\det(R)$ représente le déterminant de la matrice R .

Nous avons pu voir précédemment qu'une matrice de rotation permettait de changer l'orientation d'un repère orthonormé sans modifier sa taille. L'équation (1.7) représente la condition d'orthonormalité et permet ainsi d'assurer que chaque colonne de la matrice de rotation représente la base du nouveau repère orthonormé formé par la rotation.

La seconde équation (1.8) impose un sens à la rotation du repère orthonormé formé, rendant l'orientation de cette rotation positive.

Une des particularités des matrices de rotation est que l'opération d'addition n'est pas réalisable, étant donné que $R \in SO(3)$. En effet, si on en venait à additionner deux matrices de rotations $R_1 \in SO(3)$ et $R_2 \in SO(3)$, le résultat $R_+ = R_1 + R_2$ de cette addition ne serait plus un élément de $SO(3)$ car il ne pourrait plus vérifier les conditions des équations (1.7) et (1.8). Ainsi, pour exprimer $R_x \in SO(3)$ le résultat de deux rotations réalisées successivement par les matrices R_1 et R_2 , nous devons réaliser une multiplication, tel que $R_x = R_1 R_2$. De la même façon, l'équivalent d'une soustraction de R_1 à R_2 est la multiplication de R_2 par l'inverse de R_1 . Par ailleurs, nous pouvons noter une autre propriété de $R \in SO(3)$: $R^{-1} = R^T$ étant donné que $R^T R = RR^T = \mathbb{I}_{3 \times 3}$.

Il existe un espace tangent associé à $SO(3)$ tel que, en considérant $R(t) \in SO(3)$ un élément d'une séquence de rotation à l'instant t et $\dot{R}(t)$ la dérivée de $R(t)$ à l'instant t , la dérivée de l'équation (1.7) à l'instant $t=0$ s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{R}(0)R^T(0) + R(0)\dot{R}^T(0) &= 0 \\ \dot{R}(0)R^T(0) &= -(\dot{R}(0)R^T(0))^T \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que $\dot{R}(0)R^T(0)$ forme une matrice anti-symétrique. Ainsi, l'espace tangent de $SO(3)$, noté $\mathfrak{so}(3)$ est composé de matrices anti-symétriques de dimensions 3×3 qui représentent la dérivée de chaque matrice de rotation $R(t)$ à l'instant t (voir figure 1.3).

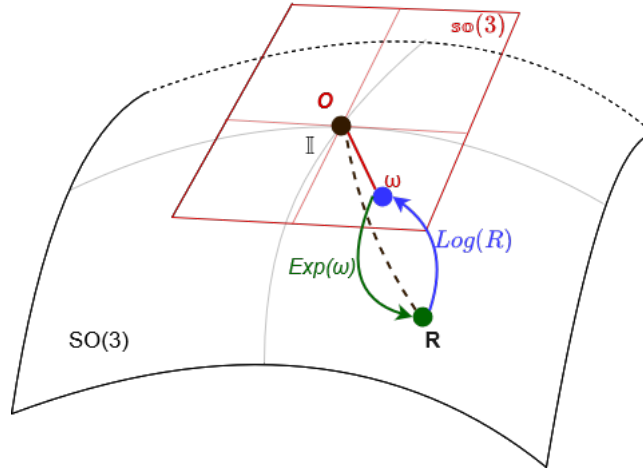


FIGURE 1.3 – Schéma représentant le groupe spécial orthogonal (en noir) et l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ (en rouge) qui lui est associé.

La figure 1.3 représente le lien existant entre le groupe spécial orthogonal et son espace tangent. Ainsi, en considérant une fonction temporelle de matrices de rotation $R(t) \in SO(3)$, la dérivée temporelle de cette fonction est $\dot{R}(t) = \omega \in \mathfrak{so}(3)$ et représente donc la matrice anti-symétrique de vitesse angulaire associée à la rotation R . Les fonctions $\text{Log}(\cdot)$ et $\text{Exp}(\cdot)$ représentées dans le dessin sont définies dans ce qui suit.

1.3 Notions mathématiques associées

Nous présentons dans cette sous-section les outils mathématiques utilisés dans les calculs des filtres du modèle dynamique.

Exponentielle L'exponentielle matricielle $\text{Exp}(\cdot)$ est une opération qui permet de passer de l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ au groupe spécial orthogonal $SO(3)$, telle que, en considérant $R \in SO(3)$ une matrice de rotation et $\omega \in \mathfrak{so}(3)$ une matrice antisymétrique associée à cette rotation [Faraut, 2008];

$$\text{Exp} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$$

$$\omega \mapsto R = \text{Exp}(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \omega^n$$

Logarithme Le logarithme matriciel $\text{Log}(\cdot)$ permet d'inverser l'opération réalisée par l'exponentielle matricielle et donc de passer du groupe de rotation $SO(3)$ à son espace

tangent associé $\mathfrak{so}(3)$. Ce logarithme matriciel se calcule comme suit [Faraut, 2008]

$$\text{Log} : SO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$$

$$R \mapsto \omega = \text{Log}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(R - \mathbb{I})^n}{n}$$

Opérateur chapeau L'opérateur \wedge , appelé opérateur chapeau, est un isomorphisme qui permet de passer de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 à l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ et donc de passer d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, tel que $v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ à la matrice antisymétrique $[v \times] \in \mathfrak{so}(3)$ associée [Prabhu et al., 2020] où

$$\begin{aligned} v^\wedge &= [v \times] \\ &= v_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Opérateur en V L'opérateur \vee est l'opération inverse de l'opérateur chapeau et permet de passer de l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ à l'espace euclidien associé et donc de passer de la matrice antisymétrique $[v \times] \in \mathfrak{so}(3)$ au vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ [Prabhu et al., 2020], telle que cette opération est simplement faite par l'identification des éléments du vecteur v_1, v_2 et v_3

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}^\vee = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$$

Les différents opérateurs cités permettent tous de se "déplacer " de $SO(3)$ à $\mathfrak{so}(3)$ ou même à \mathbb{R}^3 et inversement. Par exemple, si on souhaite passer de $SO(3)$ à \mathbb{R}^3 , en considérant $R \in SO(3)$ une matrice de rotation et $[\omega \times] \in \mathfrak{so}(3)$ la matrice anti-symétrique représentant la vitesse angulaire associée à la rotation, nous pouvons directement écrire le vecteur $\omega \in \mathbb{R}^3$ en combinant le logarithme avec l'opérateur en V

$$\omega = \text{Log}^\vee(R) = [w \times]^\vee$$

Inversement, pour passer directement de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 au groupe spécial orthogonal $SO(3)$, nous avons

$$R = \text{Exp}^\wedge(\omega) = \text{Exp}([\omega \times])$$

Note : Les écritures ω^\wedge et $[\omega \times]$ sont équivalentes et il a été choisi d'utiliser l'écriture $[\omega \times]$ dans ce manuscrit pour faciliter la lecture.

Distance géodésique C'est une distance qui nous permet de calculer l'écart entre deux rotations [Huynh, 2009]. Cette distance sera utilisée pour pouvoir quantifier l'erreur quadratique moyenne des filtres utilisés en calculant la distance entre l'attitude estimée par le filtre et l'attitude de référence fournie.

- Pour deux matrices de rotations, $R_1 \in SO(3)$ et $R_2 \in SO(3)$ cette distance se calcule comme suit

$$d_R = \|\text{Log}^\vee(R_1 R_2^T)\| \quad (1.9)$$

- Pour deux quaternions, $q_a \in \mathbb{H}$ et $q_b \in \mathbb{H}$, nous avons

$$d_q = \arccos(\|q_a \cdot q_b\|) \quad (1.10)$$

Maintenant que toutes les notations sont introduites, nous pouvons passer à la phase filtrage du système dynamique.

1.4 FKE pour un système dynamique d'attitude

Dans cette partie, nous nous concentrons sur le filtrage de Kalman étendu d'un système dynamique d'attitude uniquement. Comme nous avons pu le voir dans la section précédente, il existe plusieurs façons de représenter l'attitude (qui est la rotation) d'un corps rigide. Nous choisissons d'évaluer deux types de représentations précédemment décrites afin d'en comparer les performances associées.

1.4.1 Ecriture du système dynamique d'attitude

Nous considérons donc deux systèmes dynamiques d'attitude qui se composent d'un seul état ; une matrice de rotation $R(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ pour un des deux systèmes dynamiques et un quaternion $q(t) \in \mathbb{R}^4$ pour l'autre système dynamique.

La commande de ces deux modèles dynamiques est la même, elle représente des mesures récoltées par un gyromètre et constitue la vitesse angulaire $\omega^c(t) \in \mathbb{R}^3$. Ces vitesses angulaires sont perturbées par des bruits $Q_\omega \in \mathbb{R}^3$ et $Q_{\omega_4} \in \mathbb{R}^3$ modélisés avec un bruit blanc

gaussien tel que $Q_\omega \in \mathbb{R}^3$ et $Q_{\omega_4} \in \mathbb{R}^3$ sont de moyennes nulles et de variance $\sigma_{\omega_3}^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$, $\sigma_{\omega_4}^2 \mathbb{I}_{4 \times 4}$.

Les sorties de ces systèmes $y_r(t)$ et $y_q(t)$ (pour, respectivement, le système dynamique modélisé avec une matrice de rotation et le système dynamique représenté par un quaternion) représentent la mesure de l'attitude du modèle dynamique d'attitude, cette mesure est également bruitée par des bruits blancs gaussiens $Q_{v_r} \in \mathbb{R}^3$ et $Q_{v_q} \in \mathbb{R}^3$ (de moyennes nulles et de variance $\sigma_{v_r}^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$, $\sigma_{v_q}^2 \mathbb{I}_{4 \times 4}$).

Expression avec une matrice de rotation Pour l'analyse des performances du Filtre de Kalman Etendu (FKE) calculé sur $SO(3)$, nous définissons le système dynamique d'attitude suivant [Chesneau, 2018]

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = R(t)[(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \times] \\ y_r(t) = R(t)[Q_{v_r}(t) \times] \end{cases} \quad (1.11)$$

tel que $R(t)$ représente les rotations successives faites autour des axes z^n , y^n et x^n dans le référentiel de navigation (voir figure 1.4) et $[(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \times]$ représente la matrice antisymétrique du vecteur $(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \in \mathbb{R}^3$. Chaque état du système peut être représenté dans le référentiel inertiel (ou de navigation) qui est un point fixe à la surface de la terre ou le référentiel corps qui a pour origine le centre de gravité du capteur. La matrice de rotation $R(t)$ représente alors le passage du repère inertiel (x^n , y^n , z^n) au repère corps (x^c , y^c , z^c) à chaque instant t , comme nous avons pu le voir dans la figure 1.2.

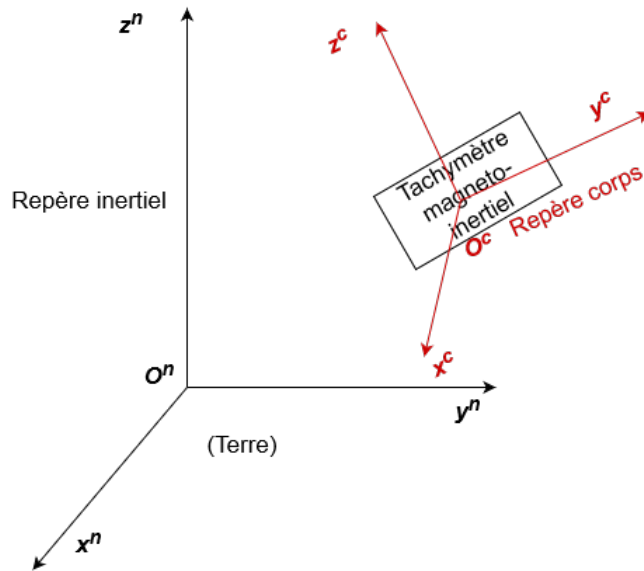


FIGURE 1.4 – Schéma représentant le repère inertiel (en noir) et le repère corps (en rouge).

Les mesures réelles prélevées du capteur étant discrètes, nous discrétisons le modèle continu considéré dans l'équation (1.11).

Il a été établi dans [Hussein et al., 2006] que la représentation dynamique discrète du modèle exprimé avec une matrice de rotation s'écrit comme suit

$$\begin{cases} R_{k+1} = R_k \text{Exp}(\Delta t[\omega_k^c + Q_{\omega_k} \times]) \\ y_{r_k} = R_k \text{Exp}([Q_{v_r k} \times]) \end{cases} \quad (1.12)$$

où Δt représente le pas entre deux instants discrets et ω_k^c est le vecteur des vitesses angulaires $[\omega_1^c(k) \ \omega_2^c(k) \ \omega_3^c(k)]^T$ à l'instant k , avec :

$$[\omega_k^c \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^c(k) & \omega_2^c(k) \\ \omega_3^c(k) & 0 & -\omega_1^c(k) \\ -\omega_2^c(k) & \omega_1^c(k) & 0 \end{bmatrix}$$

Expression avec un quaternion Nous écrivons ici l'équation du modèle dynamique d'attitude avec des quaternions [Chesneau, 2018] tel que,

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2}[(\omega^{c4}(t) + Q_{\omega_4}(t)) \times] q(t) \\ y_q(t) = [Q_{v_q}(t) \times] q(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

où $q(t)$ représente le quaternion correspondant à la rotation $R(t)$ et $[(\omega^{c4}(t) + Q_{\omega_4}(t)) \times]$ représente la matrice antisymétrique du vecteur $(\omega^{c4}(t) + Q_{\omega_4}(t)) \in \mathbb{R}^4$.
tel que ω_k^{c4} est le vecteur de vitesses angulaires $[0 \ \omega_1^c(k) \ \omega_2^c(k) \ \omega_3^c(k)]^T$ avec

$$[\omega_k^{c4} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1^c(k) & -\omega_2^c(k) & -\omega_3^c(k) \\ \omega_1^c(k) & 0 & -\omega_3^c(k) & \omega_2^c(k) \\ \omega_2^c(k) & \omega_3^c(k) & 0 & -\omega_1^c(k) \\ \omega_3^c(k) & -\omega_2^c(k) & \omega_1^c(k) & 0 \end{bmatrix}$$

Encore une fois, les données issues du capteur étant discrètes, nous devons avoir un modèle discret et donc discontinu. La représentation dynamique discrète du modèle décrit dans l'équation (1.13) est la suivante

$$\begin{cases} q_{k+1} = (\mathbb{I}_{4 \times 4} + \frac{\Delta t}{2}[(\omega_k^{c4} + Q_{\omega_4 k}) \times]) q_k \\ y_{qk} = [Q_{v_q k} \times] q_k \end{cases} \quad (1.14)$$

Une fois les systèmes dynamiques d'attitude des deux modèles définis, nous passons à l'estimation d'attitude à l'aide du filtre de Kalman étendu.

1.4.2 Filtre de Kalman Etendu standard

Le choix d'utiliser le filtre de Kalman étendu (FKE) pour ce système dynamique est dû au fait que les systèmes (1.14) et (1.12) sont non linéaires.

Comme pour le filtre classique, l'algorithme est composé de deux phases, la phase de prédiction et la phase de mise à jour.

La seule différence entre l'algorithme du FKE et celui du filtre de Kalman classique (présenté en annexe 1) est que le premier nécessite un calcul supplémentaire où le système, initialement non linéaire, est linéarisé localement à chaque instant. Il est donc nécessaire de calculer les matrices jacobiniennes \mathcal{F}_k et \mathcal{H}_k qui représentent, respectivement, la linéarisation de l'équation dynamique et de l'équation de mesure du système (1.14) à l'instant k .

Autrement, les deux phases de prédiction et de mise à jour restent les mêmes.

Soit le système dynamique représenté par l'équation (1.14), les deux phases du FKE s'écrivent alors

— Prédiction

$$q_{k|k-1} = \underbrace{\left(\frac{\Delta t}{2} \omega_{k-1} + \mathbb{I}_{4 \times 4} \right)}_{f(q_{k-1|k-1})} q_{k-1|k-1}$$

$$P_{k|k-1} = \mathcal{F}_k P_{k-1|k-1} \mathcal{F}_k^T + Q_{\omega_4 k}$$

— Mise à jour

$$K_k = P_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T (\mathcal{H}_k P_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + Q_{v_q k})^{-1}$$

$$z_k = y_{qk} - h(q_{k|k-1})$$

$$q_{k|k} = q_{k|k-1} + K_k z_k$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k \mathcal{H}_k P_{k|k-1}$$

tel que

- $q_{k|k-1}$ représente l'estimation de l'état q ,
- $P_{k|k-1}$ est la prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation,
- ω_{k-1} est la commande du système dynamique,
- $\mathcal{F}_k, \mathcal{H}_k$ sont les jacobiniennes de $f(q_k) = (\mathbb{I}_{4 \times 4} + \frac{\Delta t}{2} [\omega_{qk}^c \times]) q_k$ et $h(q_k) = q_k$,
- $Q_{\omega_4 k}$ est la matrice de covariance du bruit dynamique,
- $Q_{v_q k}$ est la matrice de covariance du bruit de mesure,
- K_k représente le gain de Kalman,
- z_k est l'innovation (ou le calcul de l'erreur entre la mesure du système dynamique y_{qk} et la fonction de mesure $h(\cdot)$ avec comme paramètre l'état estimé $q_{k|k-1}$),
- y_{qk} est la mesure du système dynamique.

Note : En réalité, l'équation dynamique de l'attitude représentée par les quaternions est normalisée. Cette normalisation est effectuée par l'intermédiaire d'une division par la norme de $q_{k-1|k-1}$ permettant la préservation de l'unité des quaternions. Cependant, pour des soucis de simplicité dans l'écriture de ces équations, cette normalisation (bien que faite) n'est pas explicitée lors des différents calculs.

1.4.3 Filtre de Kalman étendu sur $SO(3)$

Nous ne pouvons pas appliquer l'algorithme du FKE défini précédemment étant donné que les matrices de rotation font partie du groupe spécial orthogonal $SO(3)$ et que nous devons respecter la structure du groupe. De ce fait les calculs de l'état estimé dans l'étape de mise à jour du filtre de Kalman étendu ne peut plus se faire de la même façon.

Il est alors nécessaire d'adapter les calculs de l'état estimé dans l'étape de mise à jour du filtre de Kalman étant donné que lors du calcul de la mise à jour de l'état estimé $R_{k|k}$ il n'est plus possible d'additionner $R_{k|k-1}$ à K_k multiplié par l'innovation z_k , sous peine de ne plus être dans $SO(3)$.

G. Bourmaud *et al.* [Bourmaud et al., 2013] a montré qu'il existe une autre façon d'appliquer le FKE sur $SO(3)$. Cet algorithme est similaire à celui d'origine, à l'exception de l'équation de mise à jour de l'état estimé qui n'est plus composée d'additions mais de multiplications.

En considérant le système dynamique discret présenté dans la section précédente (equation (1.12))

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_k \text{Exp}(\Delta t[\omega_k^c + Q_{\omega k} \times]) \\ y_{r_k} &= R_k \text{Exp}([Q_{v_r k} \times]) \end{aligned}$$

Les équations de prédiction et de mise à jour de l'algorithme du FKE discret sur $SO(3)$ s'écrivent comme suit

— **Prédiction**¹

$$\begin{aligned} R_{k|k-1} &= R_{k-1|k-1} \text{Exp}([-\Delta t \omega_{k-1} \times]) \\ P_{k|k-1} &= \mathcal{F}_k P_{k-1|k-1} \mathcal{F}_k^T + \Phi(-\Delta t \omega_{k-1}) Q_{w_r k} \Phi(-\Delta t \omega_{k-1})^T \end{aligned}$$

1. La jacobienne de la dynamique de la matrice de rotation se calcule comme $\mathcal{F}_k = \text{Adj}(\text{Exp}(-\Delta t \omega_{k-1})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. La jacobienne de l'équation de la mesure $\mathcal{H} = \mathbb{I}_{3 \times 3}$. $\Phi(a)$ est la jacobienne à droite de $SO(3)$ [Barfoot and Furgale, 2014].

— Mise à jour

$$\begin{aligned}
K_k &= P_{k|k-1} H_k^T (\mathcal{H}_k P_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + Q_{v_r,k})^{-1} \\
z_{k|k} &= \text{Log}^\vee \left(R_{k|k-1}^{-1} y_k \right) \\
R_{k|k} &= R_{k|k-1} \text{Exp}^\wedge (K_k z_{k|k}) \\
P_{k|k} &= \Phi(-m_{k|k}) (\mathbb{I} - K_k \mathcal{H}_k) P_{k|k-1} \Phi(-m_{k|k})^T
\end{aligned}$$

Les détails de l'algorithme peuvent être trouvés dans [Bourmaud et al., 2013].

1.5 Simulations et résultats

Dans cette section nous décrivons les différentes simulations réalisées qui nous ont permis d'examiner les performances des filtres de Kalman étendus appliqués aux différents systèmes ainsi que leurs résultats.

1.5.1 Protocole

Afin d'évaluer les performances de chacun des filtres, nous avons simulé plusieurs expériences numériques dans lesquelles nous faisons varier les conditions initiales du système à travers un paramètre α (tel que α prend quatre valeurs différentes ; $\alpha = 0.01(\text{rad/s})$, $\alpha = 0.05(\text{rad/s})$, $\alpha = 0.1(\text{rad/s})$ et $\alpha = 0.2(\text{rad/s})$ et $R_0 = \text{Exp} \left(\Delta t \left[(\alpha \ \alpha \ \alpha) \right]^T \times \right)$ et nous faisons également varier le bruit appliqué au système à travers différentes valeurs de l'écart type σ (tel que σ prend également quatre valeurs différentes ; 0.01 , 0.05 , 0.1 et 0.2(rad/s) avec $Q_\omega \underset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

Dans une première série, nous faisons varier les conditions initiales (le paramètre α) pour un écart type fixé à $\sigma = 0.2 \text{ rad/s}$, ce qui équivaut à un bruit d'amplitude de $11^\circ/\text{s}$.

Dans une seconde série, nous faisons varier l'écart type σ et c'est alors le paramètre α qui est fixé à $\alpha = 0 \text{ rad/s}$. Il représente les conditions initiales du système de référence et permet ainsi de maintenir des conditions initiales identiques. Dans ces deux cas, nous évaluons les performances du FKE appliqué à R et le FKE appliqué à q .

Pour analyser les performances des filtres, chaque expérience associée à un couple de paramètres α et σ a été répétée 200 fois. Par exemple, pour un couple de paramètres $\sigma = 0.01$ et $\alpha = 0$, nous générons 200 jeux de données représentant les vitesses angulaires bruitées sur une durée de 10s (avec un $\Delta t = 0.01\text{s}$). Chaque jeu de données de vitesses angulaires représente la commande de chacun des systèmes dynamiques d'attitude présentés précédemment et nous filtrons, à chaque génération, la sortie de ces systèmes. Enfin, nous calculons la distance géodésique entre la rotation filtrée résultante (R_{filtre_k} ou q_{filtre_k}) et la rotation de référence (R_{ref_k} ou q_{ref_k}) qui représente la sortie du système pour une trajectoire non

bruitée.

La figure 1.5 représente une des 3 composantes des vitesses angulaires de référence et bruitée (pour $\sigma = 0.2$ rad/s) qui nous permet de calculer la distance géodésique moyenne des figures 1.6 et 1.7.

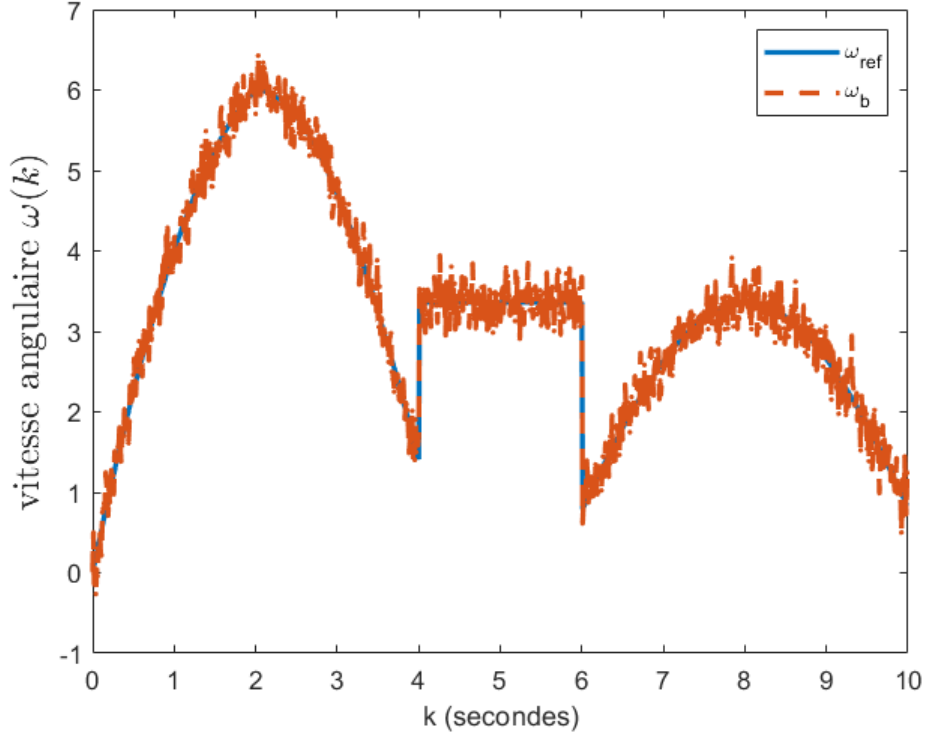


FIGURE 1.5 – Trajectoires de référence (en bleu) et bruitée (en rouge) pour une des 3 composantes de la vitesse angulaire $\omega(k)$

Les figures 1.6 et 1.7 représentent donc la distance géodésique moyenne calculée sur l'ensemble des 200 réalisations. Pour chaque valeur de α , tel que $N = 200$ est le nombre de réalisations de l'expérience, nous avons :

- La distance géodésique moyenne calculée entre R_{filtre_k} (la matrice de rotation filtrée) et R_{ref_k} (la matrice de rotation de référence) où

$$d_{r_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^a q_{N_{i=1}} \|\log^\vee(R_{i_{ref_k}} R_{i_{filtre_k}}^T)\| \quad (1.15)$$

- La distance géodésique moyenne entre q_k (le quaternion filtré) et q_{ref_k} (le quaternion de référence)

$$d_{q_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\text{acos}(\|q_{i_{ref_k}} \cdot q_{i_{filtre_k}}\|)) \quad (1.16)$$

1.5.2 Résultats

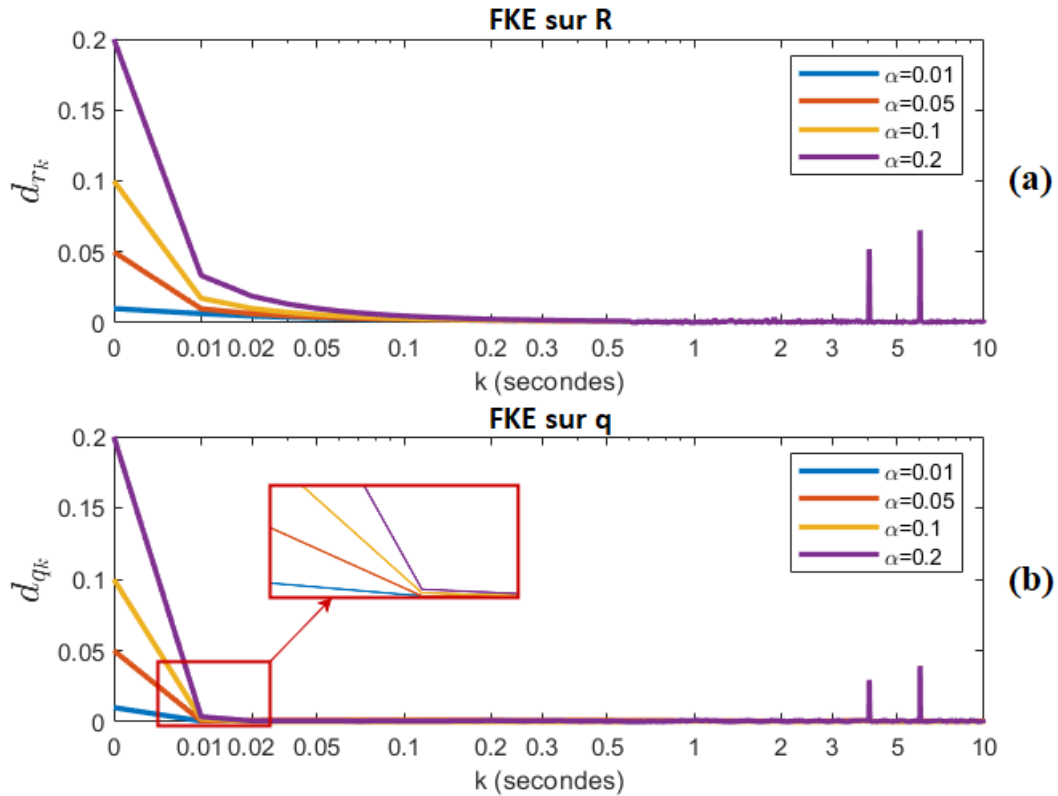


FIGURE 1.6 – Distance géodésique entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour (a) le FKE appliqué sur R , (b) le FKE sur quaternions pour différentes conditions initiales α_i

La sous-figure (a) représente les différents tracés de la distance géodésique moyenne en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique pour le FKE appliqué sur le système dynamique d'attitude exprimé avec une matrice de rotation. La sous-figure (b) représente les différents tracés de la distance géodésique moyenne en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique pour le FKE appliqué sur le système dynamique d'attitude exprimé avec des quaternions. Nous remarquons que les deux distances convergent vers 0 au bout de quelques itérations. Le temps de convergence, varie en fonction des valeurs de α . En effet, plus α est important, plus le temps de convergence l'est aussi. Nous pouvons mieux le remarquer sur la sous-figure (a) qui montre que le FKE sur R met plus de temps à converger que le FKE sur q (sous-figure (b)). Nous remarquons également que les pics de divergence aux instants $k = 4s$ et $k = 6s$ sont moins importants sur la sous-figure (b).

Ces phases de transitions sont liées à des changements soudains de la trajectoire de référence

(représentée dans la figure 1.5.a), ce qui est en concordance avec les pics de divergences relevés.

L'application du FKE sur des quaternions présente donc l'avantage d'une convergence 10 fois plus rapide (voir tableau 1.1) vers la référence en comparaison à l'application du FKE sur matrices de rotations.

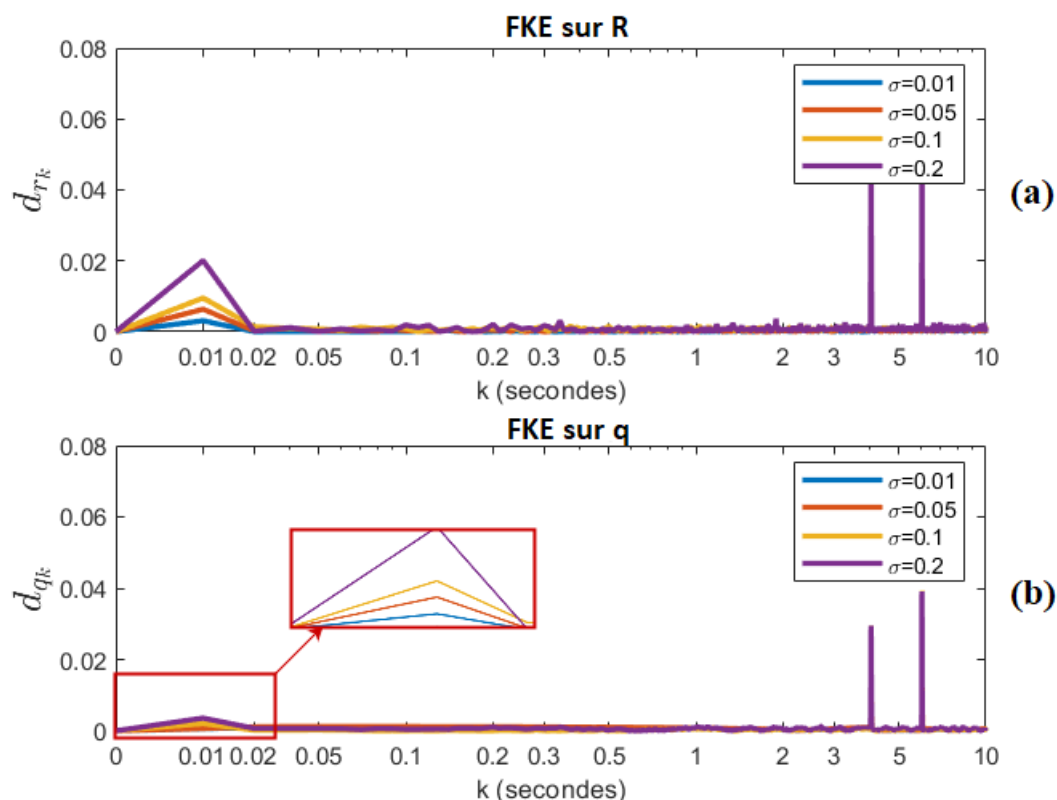


FIGURE 1.7 – Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour (a) le FKE appliqué sur R, (b) le FKE sur quaternions pour différents écarts types σ

La sous-figure (a) représente les différents tracés de la distance géodésique en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique pour le FKE appliqué sur R. Sur cette figure, nous pouvons remarquer que plus le bruit est important (plus l'écart type σ est grand), plus la distance converge lentement et ce même si le système commence toujours à la même condition initiale. Nous pouvons d'ailleurs observer un pic aux premières itérations qui ponctue la transition entre la phase "initialisation" du FKE (où les conditions initiales estimées sont très proches des conditions initiales de référence) et les phases de "prédiction" et de "mise à jour" qui se calculent à partir des mesures bruitées.

Tandis que pour la sous-figure (b), qui représente les différents tracés de la distance géodésique en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique pour le FKE appliqué

sur q , nous remarquons que les pics de divergence aux premières itérations sont moins importants, de même pour les pics présents à $k = 4s$ et $k = 6s$, comme nous avons pu le voir pour la figure 1.6.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les valeurs de l'erreur moyenne et des variances aux différents pics de divergences initiaux

Type de FKE	Valeurs de σ	$\bar{d}_r(rad)$	Variance au pic (rad)
FKE sur R	0.01	0.05116×10^{-3}	0.02506×10^{-3}
	0.05	0.1105×10^{-3}	0.05622×10^{-3}
	0.1	0.1553×10^{-3}	0.07692×10^{-3}
	0.2	0.3454×10^{-3}	0.1731×10^{-3}
FKE sur q	0.01	0.1002×10^{-4}	0.00599×10^{-4}
	0.05	0.1391×10^{-4}	0.06441×10^{-4}
	0.1	0.3756×10^{-4}	0.1612×10^{-4}
	0.2	0.7182×10^{-4}	0.7700×10^{-4}

TABLE 1.1 – Comparaison des différentes valeurs de la distance géodésique moyenne et de la variance calculée au pic de divergence pour un FKE appliqué sur R et un FKE appliqué sur q.

Le tableau 1.1 permet par ailleurs de confirmer ce qui a pu être observé dans les figures 1.7 et 1.6, tel que nous avons calculé la distance géodésique moyenne et la variance aux différents pics de divergence initiaux (entre $k = 0s$ et $k = 0.02 s$). Nous pouvons voir que la distance géodésique moyenne reste toujours inférieure pour le FKE appliqué sur q. En effet, les valeurs sont approximativement 10 fois plus petites que celles du FKE appliqué sur R, et ce quelles que soient les valeurs de σ .

Cette différence peut s'expliquer par le fait que les calculs réalisés lors du couplage du FKE au système dynamique où l'attitude est exprimée par des quaternions sont plus directs étant donné qu'il y a moins de variables à manipuler (4 variables pour le quaternion contre 9 pour les matrices de rotations) ce qui rend le système dynamique exprimé en quaternion moins influencé par les erreurs de calculs.

2 Estimation de position et d'attitude

Le système dynamique se compose de 3 états qui représentent, respectivement, la position $M^c(t)$ (ou dans notre cas, la vitesse $v^c(t)$), le champ magnétique $B^c(t)$ et l'attitude. Nous avons pu voir dans la section 1 que l'attitude peut être représentée par une matrice de rotation $R(t)$ ou par un quaternion $q(t)$. Le système dynamique peut alors s'écrire sous

deux formes équivalentes. L'utilisation de ces deux systèmes dynamiques a pour intérêt de permettre la comparaison directe de leurs résultats après application du FKE afin de déterminer leurs avantages et inconvénients respectifs et ainsi guider l'utilisateur quant au choix de la méthode la plus adaptée à son cas d'utilisation (ainsi on pourrait se demander s'il est réellement nécessaire de convertir la dynamique de l'attitude du quaternion à la matrice de rotation ou inversement, en fonction de la modélisation du système dynamique proposée).

2.1 Système dynamique complet

Dans cette partie, nous considérons une fois de plus deux systèmes dynamiques équivalents, où l'attitude est représentée par une matrice de rotation dans un cas et un quaternion dans l'autre.

Ce système dynamique est dénommé "complet" car il représente la modélisation dynamique du tachymètre magnéto-inertiel utilisé dans ces travaux.

Expression avec une matrice de rotation Ce système se compose de quatre états qui représentent, respectivement, la vitesse du corps $v^c(t) \in \mathbb{R}^3$ (utilisée pour déduire la position $M^c(t) \in \mathbb{R}^3$), le champ magnétique $B^c(t) \in \mathbb{R}^3$, la position du TMI $M^c(t) \in \mathbb{R}^3$ et l'attitude représentée par une matrice de rotation $R(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Les commandes de ce modèle sont les mesures récoltées par le capteur et sont donc la vitesse angulaire, $\omega^c(t) \in \mathbb{R}^3$, l'accélération $\gamma^c(t) \in \mathbb{R}^3$ et le gradient du champ magnétique $\nabla B^c(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. La mesure du système dynamique $y(t)$ représente la sortie. Les mesures sont perturbées d'un bruit de mesure modélisé par des bruits blancs gaussiens $(Q_\omega, Q_\gamma, Q_{\nabla B}, Q_v) \in \mathbb{R}^3$ (de moyennes nulles et de variance $\sigma_\omega^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}, \sigma_\gamma^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$, $\sigma_B^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$ et $\sigma_v^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$) des commandes et de la sortie du système. $[\omega^c \times] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur de vitesse angulaire et $g \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de gravité.

Le modèle présenté dans [Chesneau, 2018] s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} &= R(t)[(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \times] \\ \frac{dv^c(t)}{dt} &= -[(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \times]v^c(t) + \gamma^c(t) + Q_\gamma(t) + R(t)^T g \\ \frac{dB^c(M^c, t)}{dt} &= -[(\omega^c(t) + Q_\omega(t)) \times]B^c(M^c, t) + (\nabla B^c(M^c, t) + Q_{\nabla B}(t))v^c(t) \\ \frac{dM^c(t)}{dt} &= R^T v^c(t) \\ y(t) &= B^c(M^c, t) + Q_v(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Ce système dynamique est généralement peu utilisé du fait de la complexité de l'implémentation du FKE associé, étant donné la structure qu'impose la représentation de l'attitude (voir section 1.4.3).

Expression avec des quaternions Si on choisit de représenter l'attitude du système dynamique par des quaternions et non pas une matrice de rotation, le modèle dynamique proposé par C.I. Chesneau [Chesneau, 2018] s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} &= \frac{1}{2}[(\omega^{c4}(t) + Q_{\omega_4}(t)) \times] q(t) \\ \frac{dv^c(t)}{dt} &= -[(\omega^c(t) + Q_{\omega}(t)) \times] v^c(t) + \gamma^c(t) + Q_{\gamma}(t) + R^T(t)g \\ \frac{dB^c(M^c, t)}{dt} &= -[(\omega^c(t) + Q_{\omega}(t)) \times] B^c(M^c, t) + (\nabla B^c(M^c, t) + Q_{\nabla B}(t)) v^c(t) \\ \frac{dM^c(t)}{dt} &= R^T v^c(t) \\ y(t) &= B^c(M^c, t) + Q_v(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

tel que les quatre états du systèmes sont : la vitesse du corps $v^c(t) \in \mathbb{R}^3$, le champ magnétique $B^c(t) \in \mathbb{R}^3$, la position du TMI $M^c(t) \in \mathbb{R}^3$ et l'attitude représentée par un quaternion $q(t) \in \mathbb{R}^4$. Les commandes de ce modèle sont toujours les mesures récoltées par le tachymètre magnéto-inertiel et sont donc la vitesse angulaire, $\omega^c(t) \in \mathbb{R}^3$, l'accélération $\gamma^c(t) \in \mathbb{R}^3$ et le gradient du champ magnétique $\nabla B^c(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. La mesure du système dynamique $y(t)$ représente la sortie. Les mesures sont perturbées d'un bruit de mesure modélisé par des bruits blancs gaussiens $(Q_{\omega}, Q_{\gamma}, Q_{\nabla B}, Q_v) \in \mathbb{R}^3$ (de moyennes nulles et de variance $\sigma_{\omega}^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}, \sigma_{\gamma}^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$, $\sigma_B^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$ et $\sigma_v^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}$) des commandes et de la sortie du système. $[\omega^{c4} \times] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur de vitesse angulaire $\omega^{c4}(t) = [0 \ \omega_1^c(t) \ \omega_2^c(t) \ \omega_3^c(t)]^T$, Q_{ω_4} est le même bruit blanc gaussien que Q_{ω} tel que sa variance est $[0 \ \sigma_{\omega}^2 \ \sigma_{\omega}^2 \ \sigma_{\omega}^2]^T \mathbb{I}_{3 \times 3}$ et $g \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de gravité.

Une fois les modèles définis, nous passons à l'application des filtres de Kalman étendu associés.

2.1.1 Filtre de Kalman Etendu standard

Le FKE appliqué au système dynamique complet du capteur est semblable à celui appliqué au système dynamique d'attitude exprimé avec des quaternions, dans le sens où ce FKE reste une application standard. Ainsi, nous pouvons réécrire le système dynamique

décrit dans l'équation (1.18) d'une façon globale et discrète tel que

$$x_k = f_d(x_{k-1}, u_k, Q_{u_k}) \quad (1.19)$$

$$y_k = h_d(x_k, Q_{v_k}) \quad (1.20)$$

où $f_d(x_{k-1}, u_k, Q_{u_k})$ et $h_d(x_k, Q_{v_k})$ sont deux fonctions non linéaires qui représentent le changement d'état des variables du système dynamique. Le filtre de Kalman calcule alors l'état estimé $x_{k|k}$ à chaque itération k . Les deux étapes qui constituent l'algorithme du FKE s'écrivent alors

— Prédiction

$$\begin{aligned} x_{k|k-1} &= f_d(x_{k-1|k-1}, u_k) \\ P_{k|k-1} &= \mathcal{F}_{d_k} P_{k-1|k-1} \mathcal{F}_{d_k}^T + Q_{u_k} \end{aligned}$$

— Mise à jour

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1} \mathcal{H}_{d_k}^T (\mathcal{H}_{d_k} P_{k|k-1} \mathcal{H}_{d_k}^T + Q_{v_k})^{-1} \\ z_k &= y_k - h_d(x_{k|k-1}) \\ x_{k|k} &= x_{k|k-1} + K_k z_k \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} + K_k \mathcal{H}_{d_k} P_{k|k-1} \end{aligned}$$

où $x_k = [q_k, v_k, B_k, M_k]^T \in \mathbb{R}^{11}$, $u_k = [\omega_k, \gamma_k, \nabla B_k]^T$

2.1.2 Filtre de Kalman étendu sur $SO(3)$ combiné au FKE standard

On considère à présent que le système dynamique à filtrer est celui où l'attitude est représentée par une matrice de rotation décrite dans l'équation (1.17).

Le filtre de Kalman associé à ce système dynamique est une combinaison du filtre de Kalman étendu sur $SO(3)$ calculé dans la section 1.4.3 et du filtre de Kalman étendu classique calculé dans la sous-section précédente.

Nous devons donc avoir deux calculs de matrices de covariances P et P_R et de l'état estimé R et x au lieu d'une, comme vu précédemment, étant donné que l'état estimé qui représente l'attitude évolue sur $SO(3)$ et les autres états estimés évoluent eux sur \mathbb{R}^n . Les deux phases de l'algorithme de ces deux FKE couplés s'écrivent alors

— Prédiction

$$\begin{aligned} R_{k|k-1} &= R_{k-1|k-1} \text{Exp}([- \Delta t \omega_{k-1} \times]) \\ P_{R_{k|k-1}} &= \mathcal{F}_{R_k} P_{R_{k-1|k-1}} \mathcal{F}_{R_k}^T + \Phi(- \Delta t \omega_{k-1}) Q_{w_r k} \Phi(- \Delta t \omega_{k-1})^T \\ x_{k|k-1} &= f_d(x_{k-1|k-1}, u_k) \\ P_{k|k-1} &= \mathcal{F}_{d_k} P_{k-1|k-1} \mathcal{F}_{d_k}^T + Q_{u_k} \end{aligned}$$

— Mise à jour

$$\begin{aligned}
K_{R_k} &= P_{R_{k|k-1}} H_{R_k}^T \left(\mathcal{H}_{R_k} P_{R_{k|k-1}} \mathcal{H}_{R_k}^T + Q_{v_{Rk}} \right)^{-1} \\
K_k &= P_{k|k-1} \mathcal{H}_{d_k}^T \left(\mathcal{H}_{d_k} P_{k|k-1} \mathcal{H}_{d_k}^T + Q_{v_k} \right)^{-1} \\
m_{k|k} &= K_{R_k} \text{Log}^\vee \left(R_{k|k-1}^{-1} y_{R_k} \right) \\
R_{k|k} &= R_{k|k-1} \text{Exp}^\wedge \left(m_{k|k} \right) \\
x_{k|k} &= x_{k|k-1} + K_k \left(y_k - h_d(x_{k|k-1}) \right) \\
P_{R_{k|k}} &= \Phi(-m_{k|k}) \left(\mathbb{I} - K_{R_k} \mathcal{H}_{R_k} \right) P_{k|k-1} \Phi(-m_{k|k})^T \\
P_{k|k} &= P_{k|k-1} + K_k \mathcal{H}_{d_k} P_{k|k-1}
\end{aligned}$$

où $x_k = [v_k, B_k, M_k]^T$, $u_k = [\omega_k, \gamma_k, \nabla B_k]^T$

2.2 Conclusions

Etant donné que les quaternions permettent d'éviter le problème de blocage de cardan et que le FKE associé au système dynamique d'attitude exprimé en quaternions a déjà été calculé dans d'autres travaux, son implémentation est facilement accessible à travers ces différents travaux et est d'ailleurs communément utilisée, comparé au FKE associé au système dynamique d'attitude exprimé en matrice de rotation [Chesneau, 2018], [Zmitri, 2021].

Nous avons pu voir par ailleurs que l'utilisation de quaternions permet d'avoir un filtre qui converge plus rapidement, même si les performances du filtre couplé au système dynamique de matrices de rotations reste également intéressant (de l'ordre de 0.02 pour la plus grande variance appliquée).

Le second avantage que présente l'utilisation des quaternions est lié au temps de calcul réalisé lors de l'implémentation, étant donné que le système dynamique exprimé en fonction des quaternions possède un état de dimension 4 ($q \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$) alors que le système dynamique exprimé avec les matrices de rotation possède un état de dimension 9 ($R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$). De ce fait, le temps de calcul inhérent à l'application d'un filtre de Kalman est moindre avec les quaternions.

Techniques de filtrages sur $SO(3)$ et optimisations

Nous rappelons que l'un des objectifs de cette thèse est d'implémenter un filtre pour le système dynamique d'estimation de position au moins aussi performant que le filtre déjà implémenté sur le TMI.

Pour ce faire, nous avons décidé d'ajouter un filtre sur $SO(3)$ en amont du filtre de Kalman étendu couplé au système dynamique défini au chapitre 1. Nous avons ainsi choisi et testé trois filtres différents, chacun nous permettant de débruiter la vitesse angulaire. Nous évaluons ensuite les performances de chacun de ces filtres.

Par la suite, nous passons à la partie optimisation des filtres. Dans cette partie, nous traitons nos données sur des fenêtres glissantes pour appliquer le filtrage par blocs, ce qui nous permet de proposer une version temps réel de nos filtres.

La seconde optimisation que nous avons envisagée vise à s'affranchir du réglage préliminaire empirique des matrices de covariances du filtre de Kalman fait habituellement par l'automatisation de ce calcul et ce quel que soit le type de trajectoires réalisées.

Nous détaillons dans la première section de ce chapitre les différents filtres implémentés sur la vitesse angulaire, ce sont donc encore une fois des filtres qui sont implémentés couplés au système dynamique d'attitude. Dans la seconde section, nous décrivons les différentes méthodes d'optimisations pensées et utilisées.

Sommaire

1	Filtres sur $SO(3)$	30
1.1	Anti-développement et régularisation de Tikhonov	30
1.2	Filtres à moyenne mobile	35
2	Optimisation des filtres	36
2.1	Fenêtres glissantes	37
2.2	Automatisation du calcul des matrices de covariances Q et R du FKE	40
3	Simulations et résultats	43
3.1	Comparaison des performances de l'AD-FKE et FKE	44
3.2	Comparaison des performances de l'AD-FKE et du FMM-FKE	51
3.3	Conclusion	53

1 Filtrages sur $SO(3)$

Les filtres " amonts " et " avals " font référence à l'emplacement du filtre par rapport au système dynamique. Les filtres amonts sont donc implémentés avant le système dynamique et traitent les entrées de celui-ci tandis que les filtres avals sont couplés aux sorties du système dynamique (figure 2.1). Nous détaillons dans cette section les différents filtres amonts choisis pour cette étude.

Dans la première sous-section, le filtre que nous décrivons est une combinaison d'un anti-développement et d'une régularisation de Tikhonov. Il s'agit de deux étapes consécutives, la première, l'anti-développement, permet une linéarisation de séries de rotations temporelles sur l'espace tangent à $SO(3)$, puis, lors de la seconde étape, la régularisation permet de lisser le bruit présent après linéarisation.

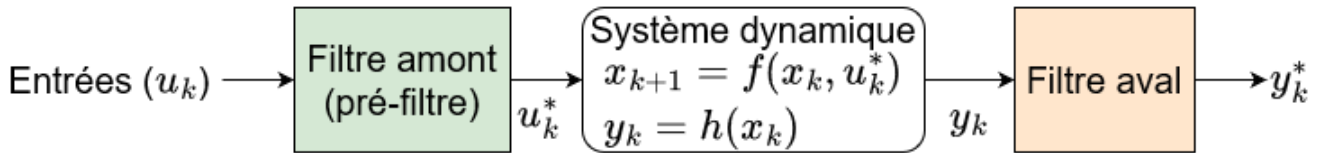


FIGURE 2.1 – Schéma positionnement filtres amont-aval par rapport au système dynamique

1.1 Anti-développement et régularisation de Tikhonov

L'anti-développement (AD) permet d'obtenir le dépliement de la trajectoire effectuée par la sphère sur un espace. Du fait de la complexité de représenter graphiquement l'anti-développement, il est plus simple de le comprendre en faisant l'analogie avec une sphère S^2 évoluant dans \mathbb{R}^3 qui roulerait sur un plan, permettant finalement d'avoir la trajectoire réalisée sur le plan, comme peut le montrer la figure 2.2.

Ainsi, en considérant une trajectoire qui démarre à l'instant $t = 0$ et s'arrête à l'instant $t = N$, nous visualisons à $t = 0$ le point d'origine sur la sphère et son équivalent sur le plan tangent. A $t = k$, donc à un instant k au cours de la trajectoire, tel que $0 < k < N$, nous avons également le dépliement de cette trajectoire de l'instant initial jusqu'au temps k . Enfin, à $t = N$, nous obtenons le déploiement total de cette trajectoire sur l'espace tangent.

Techniquement, l'anti-développement est une linéarisation réalisée sur le plan tangent à l'espace des matrices de rotation où R_k est défini. Cette linéarisation transforme une série

temporelle de rotations non linéaire évoluant sur $SO(3)$ en une série temporelle linéaire évoluant sur l'espace euclidien \mathbb{R}^3 lié à l'espace tangent $\mathfrak{so}(3)$ [Said, 2009] (voir figure 2.3).

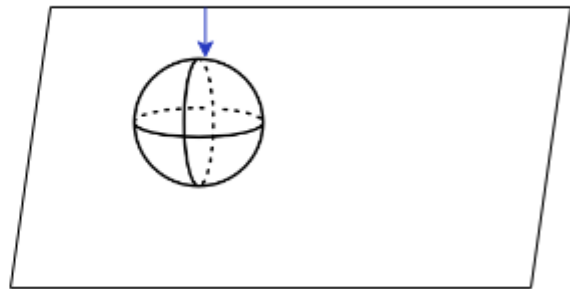
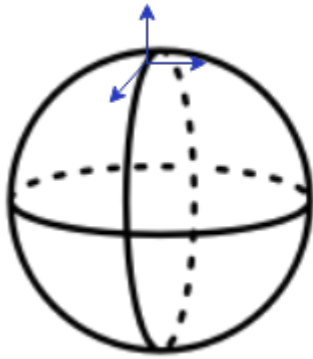
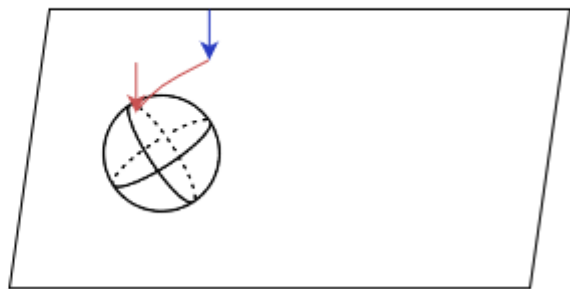
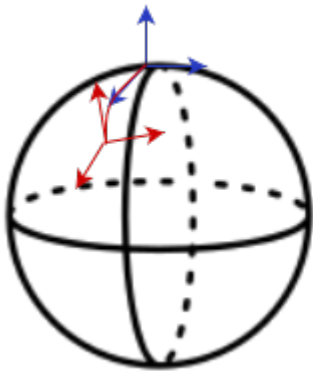
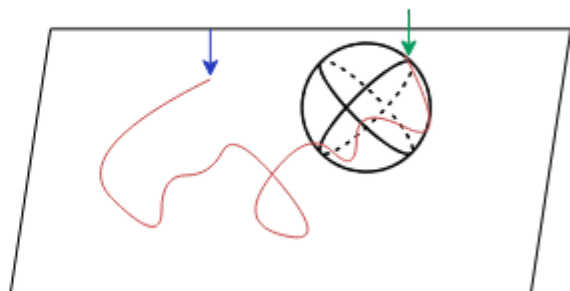
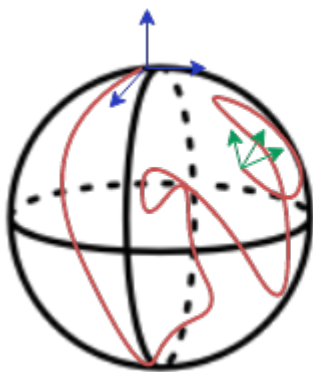
(a) trajectoire à $t = 0$ (b) trajectoire à $t = k$ (c) trajectoire à $t = N$

FIGURE 2.2 – Principe anti-développement

Nous pouvons donc appliquer des filtres et débruiter des trajectoires dans un espace plus naturel ce qui nous permet d'utiliser des filtres "simples" souvent vus dans la littérature [Said, 2009].

En considérant une série temporelle de rotations $R = (R_k; k \in \{1, \dots, N-1\})$ et ω_{r_k} le vecteur de vitesses angulaires mesurées associées à cette série de rotations, tel que $\omega_{b_k} = \omega_{r_k} + Q_{\omega k}$ est la vitesse angulaire mesurée à chaque instant k perturbée par des bruits de mesure $Q_{\omega k}$.

Ainsi, nous cherchons à retrouver les valeurs de références ω_{r_k} équivalentes à la vitesse angulaire non bruitée. Pour ce faire, nous appliquons l'AD à la série temporelle non linéaire de rotation (première équation du système d'équations (1.17)) puis utilisons la régularisation de Tikhonov [Reichel and Ye, 2009] pour filtrer ω_{b_k} afin de s'affranchir des perturbations créées par le bruit de mesure.

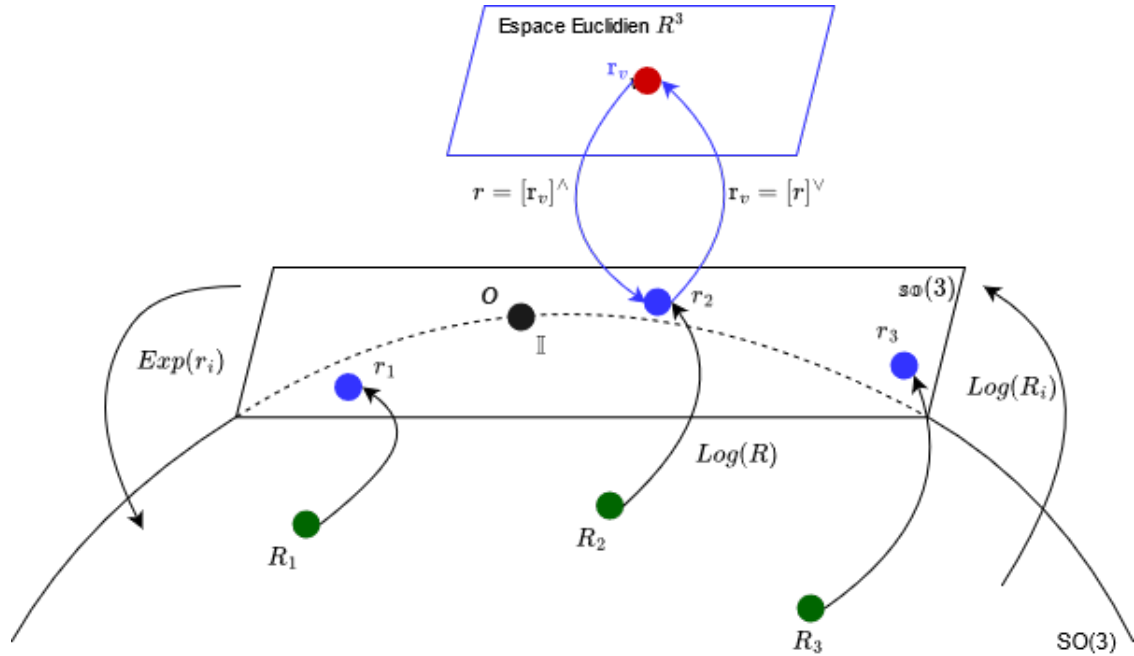


FIGURE 2.3 – Schéma représentant le passage de $SO(3)$ à l'espace euclidien \mathbb{R}^3 où le relèvement est représenté comme étant réalisé à l'identité \mathbb{I}

1.1.1 Principe de l'anti-développement

Soit R une série temporelle de rotations, telle que $R_k \in SO(3)$. La linéarisation de R , tel que $R \rightarrow r$ (où r est une série temporelle de matrices antisymétriques, avec $r_k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) est détaillée dans [Said, 2009]. Néanmoins, nous résumons le principe de cette linéarisation dans cette sous-section.

Pour introduire le principe général, nous considérons (temporairement), une série de rota-

tion notée R , introduite dans [Bourmaud et al., 2013], tel que sa représentation dynamique s'écrit comme suit

$$R_{k+1} = R_k \Omega_{k+1} \quad (2.1)$$

tel que $k \in \{1, \dots, N - 1\}$, où N est le nombre d'échantillons total, et Ω_k est une matrice de rotation associée à la vitesse angulaire ω_k ($\Omega_k = \text{Exp}(\omega_k)$).

De l'équation (2.1), la relation suivante est déduite

$$\omega_{k+1} = \text{Log}(R_k^{-1} R_{k+1})$$

Enfin, la linéarisation représente le cumul (la somme) des incréments des matrices de vitesse angulaire entre l'instant 1 et l'instant k et s'écrit sous la forme suivante

$$r_k = \sum_{i=1}^k \text{Log}(R_{i-1}^{-1} R_i)$$

Nous avons alors l'expression des séries de rotations anti-développées.

1.1.2 Régularisation de Tikhonov

En conditions expérimentales, la vitesse angulaire ω_{b_k} est entachée d'un bruit de mesure qui se répercute sur les matrices de rotation R_k , tel que, en reprenant l'équation de la section 1.1 et l'équation d'état dynamique du système (1.17), nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_{b_k} &= \omega_{r_k} + Q_{\omega_k} \\ R_{k+1} &= R_k \text{Exp}([\omega_{b_k} \times]) \end{aligned}$$

Afin de réduire l'impact que le bruit Q_{ω_k} a sur la vitesse angulaire, nous appliquons la régularisation de Tikhonov qui nous permet de filtrer la vitesse angulaire ω_{b_k} [Reichel and Ye, 2009].

Nous cherchons alors à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\underset{r^* \in \mathbb{R}^{N \times 3}}{\text{argmin}} (\|r^* - r\|_2^2 + \lambda g(r^*)) \quad (2.2)$$

tel que

- $r \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ est la série de rotations anti-développée bruitée,
- $r^* \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ est aussi la série temporelle filtrée (solution du critère d'optimisation),
- $g(r^*)$ est la fonction de régularisation,
- $\|r^* - r\|_2^2$ est le terme d'erreur,
- $\lambda g(r^*)$ est le terme de régularisation,

- $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ est le paramètre de régularisation qui permet d'ajuster la balance entre le terme de régularisation et le terme d'erreur.

La fonction de régularisation choisie pour résoudre le problème s'écrit

$$g(r^*) = \sum_{i=2}^N (r_{i-1}^* - r_i^*)^2$$

Pour résoudre le problème d'estimation, nous calculons la dérivée de l'équation (2.2) par rapport à r^* qui s'écrit

$$\begin{aligned} 2(r - r^*) + \lambda 2Lr^* &= 0 \\ r - r^* + \lambda Lr^* &= 0 \\ (\mathbb{I} + \lambda L)r^* &= r \\ r^* &= (\mathbb{I} + \lambda L)^{-1}r \end{aligned}$$

tel que $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, nous déduisons la vitesse angulaire filtrée telle que

$$\omega_k^* = r_k^* - r_{k-1}^*$$

Ainsi, nous pouvons coupler la régularisation de Tikhonov appliquée sur l'AD en amont du système dynamique d'attitude et le FKE en aval de ce système, comme représenté dans la figure (2.4) en choisissant ω_k^* comme entrée au lieu de ω_{b_k} , son homologue bruité.

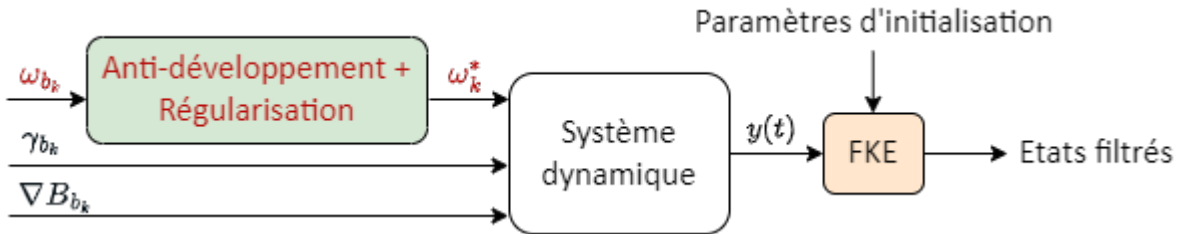


FIGURE 2.4 – Schéma représentant le couplage AD-FKE appliqué sur le système dynamique

1.1.3 Application

En adaptant le principe de l'AD décrit dans la sous section 1.1.1 à la série temporelle d'attitude présentée dans le chapitre 1 (équation (1.12)), nous obtenons l'expression :

$$\omega_{b_k} = \text{Log}(R_k^{-1}R_{k+1}) \frac{1}{\Delta t}$$

où Δt désigne le pas d'échantillonnage.

L'anti-développement de la série temporelle de rotations R_k s'écrit donc

$$r_k = \sum_{i=1}^k \text{Log}(R_{i-1}^{-1}R_i) \frac{1}{\Delta t} \quad (2.3)$$

ce qui équivaut à

$$r_{k+1} = r_k + \underbrace{\text{Log}(R_k^{-1}R_{k+1}) \frac{1}{\Delta t}}_{u'_k} \quad (2.4)$$

Grâce à l'équation (2.3), nous avons pu écrire l'équation (2.4) en mettant simplement en valeur le lien entre r_k et r_{k+1} (ou la récurrence) de l'équation anti-développée. Nous obtenons ainsi l'équation représentant la linéarisation du modèle dynamique de rotation dans l'espace tangent, tel que l'équation (2.4) représente l'équation d'état dynamique de la série temporelle d'attitude dans l'espace tangent et u'_k est la nouvelle entrée considérée de ce système.

1.2 Filtres à moyenne mobile

Afin de pouvoir comparer les performances de l'anti-développement, nous avons également utilisé deux autres filtres qui nous permettent d'avoir une vitesse angulaire filtrée de deux autres façons. Les filtres utilisés sont tous deux des filtres à moyenne mobile. L'un de ces deux filtres est un filtre à moyenne mobile classique, calculé sur les mesures de la vitesse angulaire ω_{b_k} en utilisant une moyenne euclidienne et l'autre est un filtre à moyenne mobile appliqué sur les quaternions représentant les mesures des vitesses angulaires où la moyenne est calculée sur $SO(3)$ avec des distances géodésiques.

Principe

La moyenne mobile [Hansun, 2013] permet de réduire les fluctuations liées au bruit présent dans le signal d'entrée et ainsi de lisser celui-ci sur de courtes fenêtres temporelles.

Application du filtre à moyenne mobile classique

L'application de ce filtre est assez directe. Après avoir collecté les données de la vitesse angulaire mesurée par le gyromètre, ω_{b_k} , la moyenne mobile associée à la trajectoire sur des fenêtres temporelles de taille M , tel que $M > 0$ est calculé.

Une fois la moyenne mobile calculée sur la première fenêtre, un décalage d'un pas unitaire ($p = 1$) est réalisé pour passer au calcul de la prochaine moyenne.

Ainsi, à chaque instant k , nous pouvons estimer la vitesse angulaire filtrée, $\bar{\omega}_{b_k}$, à travers le calcul suivant :

$$\bar{\omega}_{b_k} = \frac{1}{M} \sum_{i=k}^{M-1+k} \omega_{b_i}$$

Ce qui nous permet d'avoir une vitesse angulaire filtrée à chaque instant.

Application du filtre à moyenne mobile sur quaternions

Le filtre à moyenne mobile classique est un filtre intéressant à utiliser, car il offre un signal lissé en sortie, comme le propose également la régularisation de Tikhonov. La différence est que la régularisation de Tikhonov utilisée dans cette étude est appliquée sur le système anti-développé et donc a pour origine l'attitude du système dynamique. En résumé, le filtre à moyenne mobile classique s'applique sur l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et l'AD combiné à la régularisation Tikhonov s'applique lui sur $SO(3)$.

Nous avons ainsi opté pour un troisième filtre qui nous permet de filtrer le signal bruité avec un lissage tout en restant dans $SO(3)$. Donc, nous avons calculé une moyenne mobile avec des quaternions q_k déduits de ω_{b_k} , étant donné que la vitesse angulaire est la dérivée de l'attitude du système [Markley et al., 2007]

$$\bar{q}_k = \operatorname{argmin}_{q \in \mathbb{S}^3} \frac{1}{M} \sum_{i=k}^{M-1+k} |\operatorname{Log}(A(q)^T A(q_i))|$$

où q_k le quaternion à l'instant k , \mathbb{S}^3 est la 3-sphère unité (qui nous permet d'être sûr que les quaternions sont unitaires ; tel que $\mathbb{S}^3 = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 : q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$) et $A(q)$ la matrice de rotation associée à q comme il cela a été fait dans l'équation (1.1).

2 Optimisation des filtres

Après avoir implémenté les différents filtres que nous avons utilisé afin d'estimer au mieux la position et l'attitude de l'individu porteur du capteur, nous passons à une phase d'optimisation qui consiste à l'amélioration de ces filtres.

2.1 Fenêtres glissantes

Le principe repose sur une acquisition des données mesurées par le capteur sur une taille de fenêtre M choisie et d'en filtrer les données récoltées en direct, au lieu d'attendre la fin de l'acquisition complète de la trajectoire.

Le seul inconvénient de l'acquisition et du traitement des données en temps réel est la création d'un léger retard sur la trajectoire estimée en sortie de filtres, étant donné qu'il faut d'abord attendre de remplir la première fenêtre. Cependant, ce retard se quantifie en microsecondes, que l'on juge sans impact sur la perception de l'utilisateur.

2.1.1 Principe

L'utilisation des fenêtres glissantes revient à découper le signal mesuré en plusieurs tranches. L'organigramme représenté en figure 2.5 résume le principe des fenêtres glissantes.

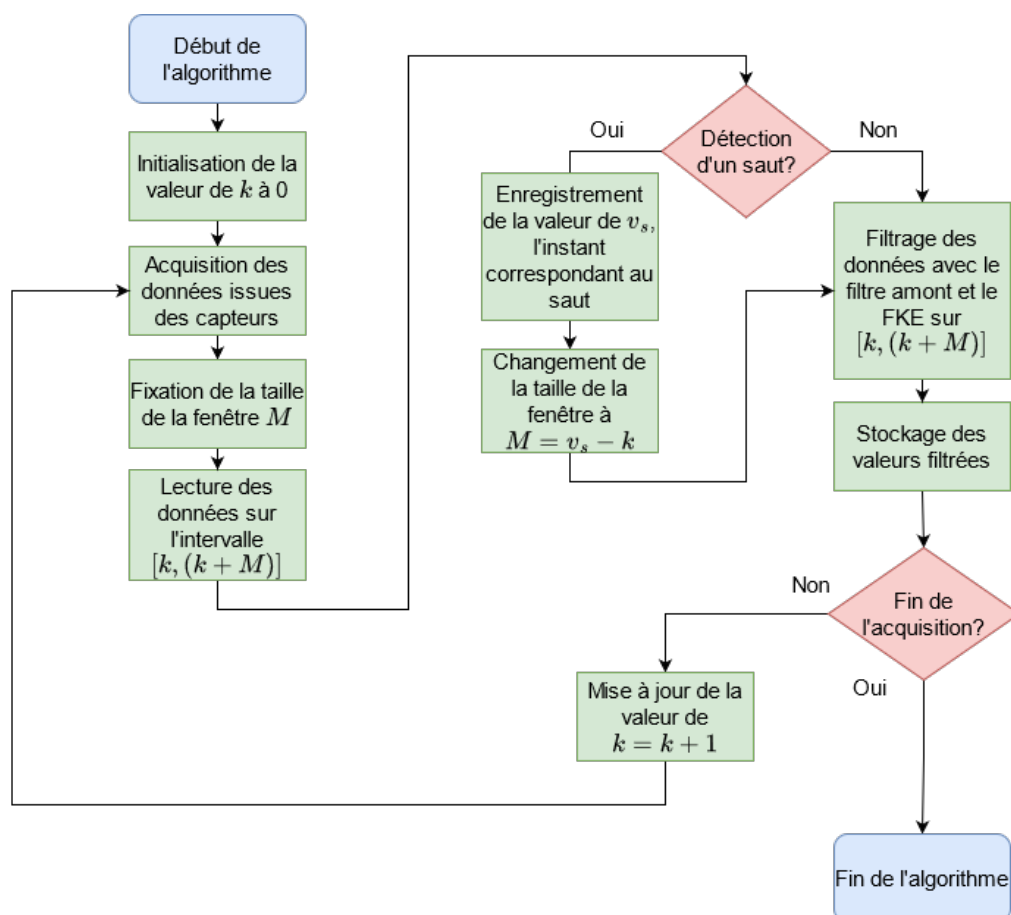


FIGURE 2.5 – Organigramme de l'algorithme des fenêtres glissantes

En d'autres termes, une fois la fenêtre parcourue, nous utilisons les données récoltées pour filtrer la position correspondant à cette durée.

Une fois que tous les états du système sont estimés sur cette fenêtre, nous passons à la fenêtre suivante qui sera décalée d'un pas unitaire.

Nous avons également ajouté une phase de détection de sauts. Si un changement brutal dans les données mesurées est détecté, l'acquisition est interrompue et la taille de la fenêtre se retrouve réduite, au lieu de continuer l'acquisition jusqu'à la taille sélectionnée en premier lieu, celle ci prend la taille correspondante au moment où le saut est détecté et le glissement ne se fait plus de façon unitaire mais avec un pas équivalent à cette nouvelle taille de fenêtre. Un changement brutal peut être traduit par un changement soudain de trajectoire ou par possiblement une perturbation du capteur.

2.1.2 Exemple d'application

La figure 2.6 décrit de façon plus schématique l'application de fenêtres glissantes sur une trajectoire comportant des sauts.

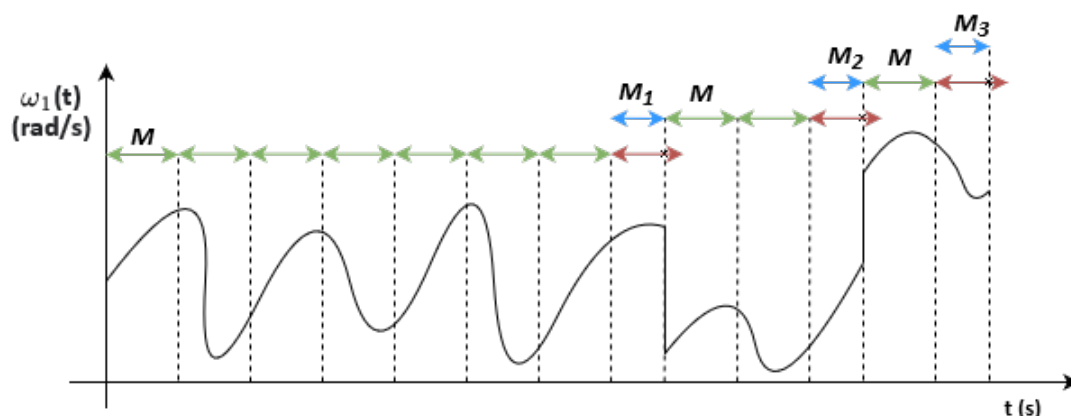


FIGURE 2.6 – Partitionnement d'une trajectoire en plusieurs fenêtres

Sur cette figure, nous avons un exemple d'évolution d'une trajectoire correspondant à une des trois composantes de la vitesse angulaire du gyromètre, $\omega_1(t)$ en fonction du temps t . Les flèches vertes correspondent aux fenêtres de taille initiale sans changement brutal dans la trajectoire, les flèches rouges correspondent aux fenêtres de taille initiale contenant un changement brutal dans la trajectoire et les flèches bleues correspondent aux fenêtres dont la taille a été modifiée après la détection d'un changement brutal dans la trajectoire initiale. Nous avons ainsi un découpage de la trajectoire en plusieurs fenêtres de taille M , tel que le pas de glissement ici représenté est équivalent à la taille de la fenêtre.

Nous pouvons voir que lorsqu'un saut est détecté, la taille de la fenêtre change de M à M_i

(pour $i = \{1, 2, 3\}$). Le premier et le second changement de fenêtre correspondent effectivement à deux changements brusques dans la trajectoire, tandis que le dernier changement de fenêtre (quand $i = 3$) représente simplement une fin d'acquisition.

Un saut est détecté lorsque la différence entre les valeurs de ω_{k-1} et ω_k dépasse un seuil S . Une fois le saut dépassé, la taille de la fenêtre se réinitialise à la taille choisie initialement, et le glissement continue jusqu'à la détection d'un nouveau saut.

2.1.3 Application sur le système dynamique complet

Afin de coupler le filtrage sur fenêtres glissantes au système dynamique du capteur, nous avons effectué des tests où nous avons comparé le temps de simulation nécessaire pour effectuer le filtrage ainsi que la variance associée au pic de divergence (qui représente le pic aux premières itérations du filtre, que l'on a pu voir au chapitre 1) de l'erreur géodésique définie dans l'équation (1.15) d'une même trajectoire pour des tailles de fenêtres différentes.

Variance au pic (rad)	Variance au pic (°)	Temps de simulation (s)	Taille de la fenêtre
0.0003	0.0171	338.5088	100
0.0002	0.0114	301.6221	90
0.0002	0.0114	269,3327	80
0.0004	0.0229	236.2988	70
0.0013	0.0744	205.3086	60
0.0008	0.0458	174.3318	50
0.0015	0.0859	154.2138	40
0.0019	0.109	108.8366	30
0.0021	0.120	74.7603	20
0.0227	1.301	39.9743	10

TABLE 2.1 – Performances de l'AD-FKE pour différentes tailles de fenêtres

Ce tableau résume donc les différentes valeurs de variances et les différents temps de simulations nécessaires au calcul du filtrage d'une trajectoire avec une combinaison d'anti-développement et d'un filtre de Kalman étendu.

Chacune de ces simulations a été répétée 200 fois, pour un bruit identique (ou un paramètre α , correspondant à l'écart type du bruit simulé, fixe) ce qui nous a permis de calculer une erreur géodésique moyenne et de calculer la variance associée à cette erreur.

Pour la suite de nos expériences, nous choisissons une taille de fenêtre $M = 20$. Cette valeur nous donne des temps de simulation relativement courts tout en minimisant la variance associée en contraste avec les autres tailles de fenêtre.

2.2 Automatisation du calcul des matrices de covariances Q et R du FKE

L'un des inconvénients de l'utilisation du filtre de Kalman est le besoin de calcul des matrices de covariances dynamiques et de mesures nécessaires à l'implémentation de l'algorithme.

Ce calcul est généralement fait de façon empirique [Welch and Bishop, 1995], en considérant que les matrices de covariance dynamiques et de mesure sont invariantes dans le temps et en modifiant les valeurs de ces matrices avant chaque simulation où le FKE et le système dynamique sont couplés. Ainsi, après chaque simulation, la sortie du filtre est observée et comparée à la référence non bruitée et si le filtre ne converge pas ou n'a pas de performances satisfaisantes, les valeurs des matrices sont modifiées jusqu'à avoir des résultats satisfaisants.

Le second souci est qu'avec ce réglage de matrices de covariances dynamiques et de mesures, le filtre de Kalman ne peut être utilisé en temps réel. En effet, à moins d'avoir une réelle connaissance du bruit retransmis par les données mesurées du capteur, ce calcul est réalisé après avoir déjà acquis toutes les données de la trajectoire que nous désirons filtrer et en modifiant manuellement les valeurs de ces matrices de covariances pour faire correspondre les résultats de la sortie et les résultats de références disponibles.

Il a été vu également qu'un réseau de neurones Bi-LSTM [Zmitri, 2021] permet de contourner cette phase de calcul à chaque trajectoire mais cela implique l'existence d'une base de données qui contient suffisamment de trajectoires et de matrices de covariances associées. Ces deux solutions restent très peu pratiques lorsqu'il s'agit de faire de l'estimation de position et d'attitude en temps réel ; en effet, la première nécessite la connaissance de la trajectoire complète et la seconde comprend un temps de calcul trop important pour pouvoir faire ce filtrage en direct.

Dans la littérature, des solutions pour régler ces matrices de covariances en se basant sur des techniques de minimisations ont été proposées. Dans [Åkesson et al., 2008], une relation linéaire les covariances et autocovariances est établie, ce qui permet de résoudre le problème d'estimation des covariances comme un problème des moindres carrés. Dans [Matisko and Havlena, 2010], une approche bayésienne et une méthode du maximum de vraisemblance est utilisée pour réaliser cette estimation. Dans le même esprit, [Powell, 2002] utilise la méthode de Nelder-Mead pour réaliser un réglage automatique des matrices de covariances de bruits.

Pour éviter le calcul des matrices de covariances après chaque exécution de l'algorithme et ainsi garder la possibilité de traiter les données en temps réel, nous proposons d'utiliser un algorithme qui nous permet d'estimer automatiquement à chaque exécution ces matrices de covariances.

2.2.1 Principe

Nous désirons calculer la matrice de covariance Q des bruits dynamiques $Q_{\omega_4}(k)$, $Q_\gamma(k)$ et $Q_{\nabla B}(k)$ de l'équation (1.14) afin d'avoir la meilleure estimation possible lors de l'implémentation du filtre de Kalman étendu développé dans la section 2.

2.2.2 Exemple d'application

Nous nous aidons du système dynamique d'attitude et de position (equation (1.18)) présenté dans le premier chapitre pour décrire la méthode utilisée pour le calcul des matrices de covariances.

2.2.3 Application sur le système dynamique complet

Nous traitons dans un premier temps chaque équation d'état séparément, ce qui nous permet de construire la matrice de covariance de bruit dynamique Q , tel que

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

En reprenant la première équation du système (1.18) sous forme discrétisée :

$$q_{k+1} = \left(\mathbb{I}_{4 \times 4} + \frac{\Delta t}{2} [(\omega_k^{c4} + Q_{\omega_4 k}) \times] \right) q_k$$

nous avons

$$\frac{2(q(k+1) - q(k))}{\Delta t q(k)} = [(\omega_k^{c4} + Q_{\omega_4}(k)) \times]$$

En posant

$$M_{Q_1} = \left[\frac{2(q(2)-q(1))}{\Delta t q(1)} \quad \frac{2(q(3)-q(2))}{\Delta t q(2)} \quad \dots \quad \frac{2(q(N)-q(N-1))}{\Delta t q(N-1)} \right]$$

La covariance Q_{11} du bruit Q_{ω_4} peut alors se calculer comme tel

$$Q_{11} = \left((M_{Q_1} - \underbrace{\text{moy}(M_{Q_1})}_{\bar{\omega}})(M_{Q_1} - \text{moy}(M_{Q_1}))^T \right) \frac{1}{N-1} \quad (2.5)$$

tel que $moy(M)$ est la moyenne du vecteur M et $Q_{11} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

En reprenant la seconde équation du système (1.18) sous forme discrétisée

$$v^c(k+1) = (-[\bar{\omega}_3(k) \times]v^c(k) + \gamma^c(k) + Q_\gamma(k) - [Q_{\omega_3}(k) \times]v^c(k)) \Delta t + v^c(k)$$

nous avons

$$\frac{v^c(k+1) - v^c(k)}{\Delta t} + [\bar{\omega}_3(k) \times]v^c(k) = \gamma^c(k) + Q_\gamma(k) - [Q_{\omega_3}(k) \times]v^c(k)$$

de la même façon que calculé précédemment, nous avons

$$M_{Q_2} = \left[\frac{v(2)-v(1)}{\Delta t} [\bar{\omega}_3(1) \times]v^c(1) \quad \frac{v(3)-v(2)}{\Delta t} [\bar{\omega}_3(2) \times]v^c(2) \quad \dots \quad \frac{v(N)-v(N-1)}{\Delta t} [\bar{\omega}_3(N-1) \times]v^c(N-1) \right]$$

Ce qui donne alors

$$Q_{22} = \left((M_{Q_2} - \underbrace{moy(M_{Q_2})}_{\bar{\gamma}})(M_{Q_2} - moy(M_{Q_2}))^T \right) \frac{1}{N-1} \quad (2.6)$$

Après avoir discrétisé la troisième équation du système (1.18), nous avons

$$B^c(k+1) = (-[\bar{\omega}_3(k) \times]B^c(k) + \nabla B^c(k) + Q_{\nabla B}(k) - [Q_{\omega_3}(k) \times]B^c(k)) \Delta t + B^c(k)$$

ce qui nous donne

$$\frac{B^c(k+1) - B^c(k)}{\Delta t} + [\bar{\omega}_3(k) \times]B^c(k) = \nabla B^c(k) + Q_{\nabla B}(k) - [Q_{\omega_3}(k) \times]B^c(k)$$

$$M_{Q_3} = \left[\frac{B(2)-B(1)}{\Delta t} [\bar{\omega}_3(1) \times]B^c(1) \quad \dots \quad \frac{B(N)-B(N-1)}{\Delta t} [\bar{\omega}_3(N-1) \times]B^c(N-1) \right]$$

Et donc

$$Q_{33} = \left((M_{Q_3} - \underbrace{moy(M_{Q_3})}_{\nabla \bar{B}})(M_{Q_3} - moy(M_{Q_3}))^T \right) \frac{1}{N-1} \quad (2.7)$$

Ainsi, la matrice de covariance du bruit dynamique s'écrit

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

tel que

$$Q_{ij} = ((M_{Q_i} - moy(M_{Q_i}))(M_{Q_j} - moy(M_{Q_j}))^T) \frac{1}{N-1} \quad , (i, j) \in [1, 2, 3]$$

3 Simulations et résultats

Nous décrivons dans cette section les résultats des différentes simulations réalisées qui nous ont permis de comparer les combinaisons de pré-filtres et filtres implémentées.

Afin d'évaluer les performances de chacun des filtres, nous avons réalisé une série d'expériences qui nous ont permis d'étudier l'influence du bruit blanc gaussien appliqué au système à travers différentes valeurs d'écart-types σ_ω et σ_γ avec $(Q_\omega \sim \mathcal{N}([0 \ 0 \ 0]^T, \sigma_\omega^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}), Q_\gamma \sim \mathcal{N}([0 \ 0 \ 0]^T, \sigma_\gamma^2 \mathbb{I}_{3 \times 3}))$.

Dans ces expériences, les conditions initiales sont identiques à celles du système de référence.

Ainsi, nous évaluons les performances du FKE pré-filtré dans trois configurations différentes : FKE pré-filtré avec l'anti-développement combiné à la régularisation de Tikhonov (FKE-AD), FKE pré-filtré avec un filtre à moyenne mobile appliqué à ω_{b_k} (FKE- $\bar{\omega}$) et un FKE pré-filtré avec un filtre à moyenne mobile appliqué aux quaternions correspondants à la vitesse angulaire d'entrée ω_{b_k} (FKE- \bar{q}). Ces pré-filtrages sont tous calculés sur des fenêtres glissantes de taille $M = 20$ avec un pas unitaire. Nous comparons les résultats obtenus à partir de ces pré-filtrages avec ceux du FKE non pré-filtré.

Nous comparons alors les valeurs maximales du pic de divergence de l'erreur moyenne caractérisée par la distance géodésique, la valeur de l'écart-type associé à ce pic et enfin le temps de convergence T_c calculé à 95% de la valeur finale du filtre.

Nous analysons les erreurs au niveau du pic de divergence car il représente le pic présent aux premiers instants de l'évaluation de l'erreur estimée. Nous avons pu voir dans la figure 1.7 que lorsque les conditions initiales du filtre sont proches des conditions initiales de la référence non bruitée, la trajectoire estimée diverge d'abord aux premières itérations avant de finir par converger.

Ces premières comparaisons sont uniquement appliquées sur l'attitude du système dynamique, et non sur le système complet (tableau 2.2).

Par la suite, nous comparons uniquement les performances du FKE couplé à l'AD aux performances du FKE non pré-filtré, tous deux appliqués sur le système dynamique complet (équation (1.17)) (tableau 2.3).

Pour analyser les performances des pré-filtres, chaque expérience associée à un paramètre σ a été répétée plusieurs fois, générant 200 réalisations de vitesses angulaires et d'accélération bruitées par un bruit blanc gaussien d'écart-type σ . Par exemple, pour un paramètre $\sigma = 0.01$, nous générons 200 fois des vitesses angulaires et des accélérations bruitées sur une durée de 10s (avec un $\Delta t = 0.01s$).

Ces vitesses angulaires et accélérations représentent la commande du système dynamique. Nous filtrons, à chaque réalisation, la sortie de ces systèmes et calculons la distance géodésique entre la rotation filtrée résultante (R_{f_k}) et la rotation de référence (R_{ref_k}) qui représente la sortie du système pour une trajectoire non bruitée (dite de référence) à l'instant k ainsi que l'erreur quadratique moyenne entre la vitesse filtrée (v_{f_k}) et la vitesse de

référence (v_{ref_k}) à l'instant k . La moyenne empirique de la distance géodésique se calcule comme suit

$$d_{g_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\text{Log}(R_{i_{ref_k}}^T R_{i_{f_k}})|$$

3.1 Comparaison des performances de l'AD-FKE et FKE

La figure 2.7 représente une des 3 composantes des vitesses angulaires de référence et bruitée (pour $\sigma = 0.2$).

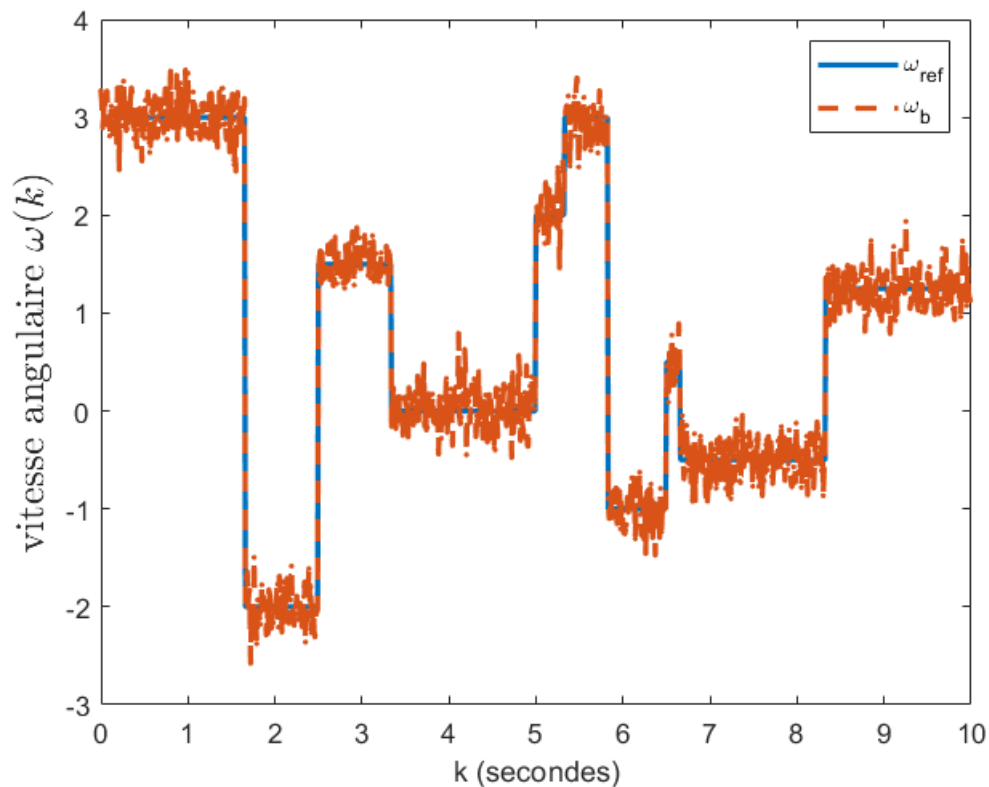


FIGURE 2.7 – Trajectoire de référence (en bleu) et bruitée (en rouge) (avec $\sigma = 0.2$ rad/s) pour une des 3 composantes de la vitesse angulaire en entrée

Les figures 2.8, 2.9 et 2.10 représentent la distance géodésique moyenne calculée sur l'ensemble des 200 réalisations pour chaque bruit σ .

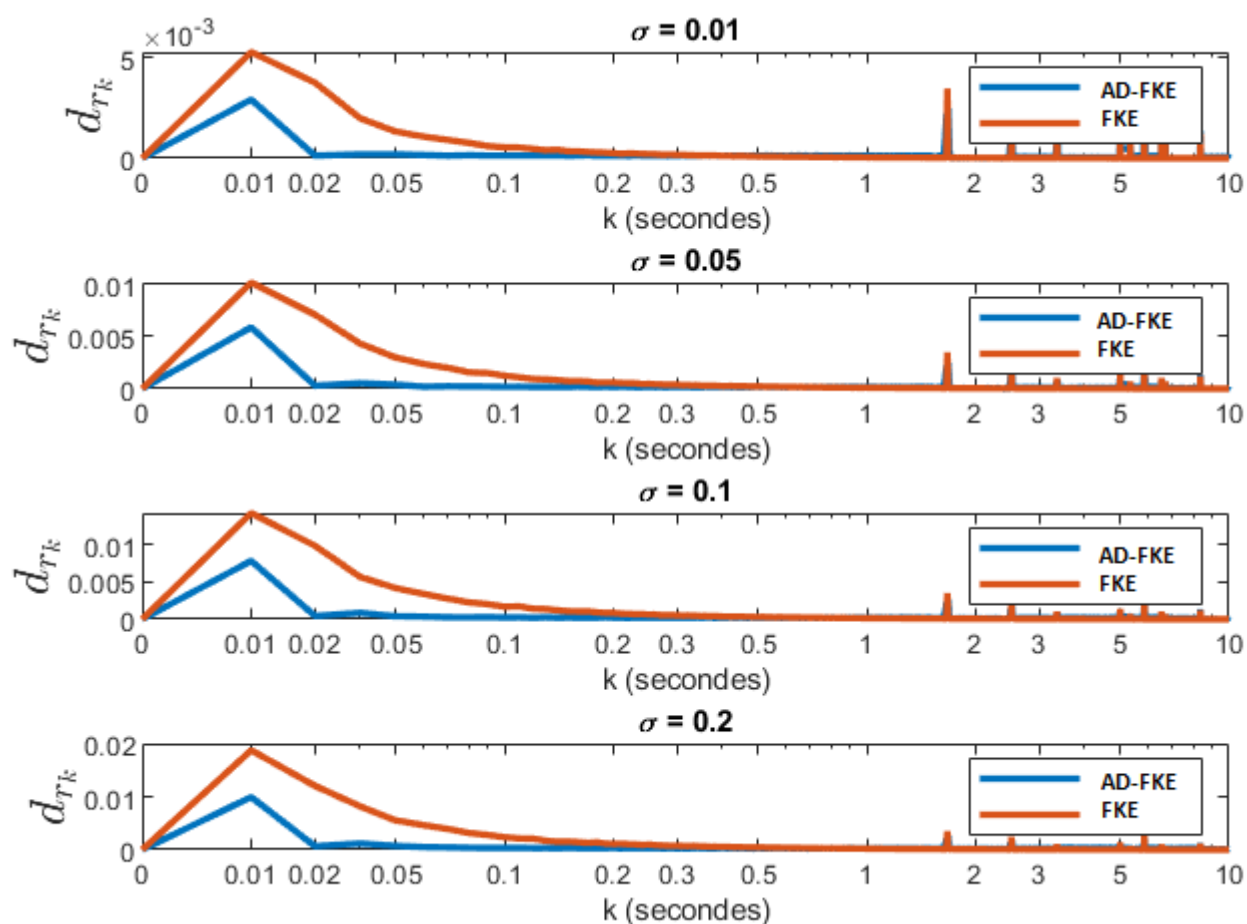


FIGURE 2.8 – Distance géodésique moyenne entre l’attitude de référence et l’attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l’anti-développement appliqué sur R (en bleu) pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

Les sous-figures représentent les tracés de cette distance pour le FKE appliqué sur R , en rouge, et le FKE couplé à l’anti-développement appliqué sur R , en bleu en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique.

Nous pouvons remarquer que malgré les différentes valeurs d’écart-types utilisées pour bruiteur l’entrée du système, le FKE couplé à l’AD converge toujours plus rapidement vers le signal de référence et le pic de divergence est moins important aux premières itérations. Nous pouvons également voir que le FKE couplé à l’AD comprend des pics de divergence moins importants que le filtre de Kalman étendu appliqué sur R . Ces pics de divergence correspondent aux instants de coupures présents sur la trajectoire de référence.

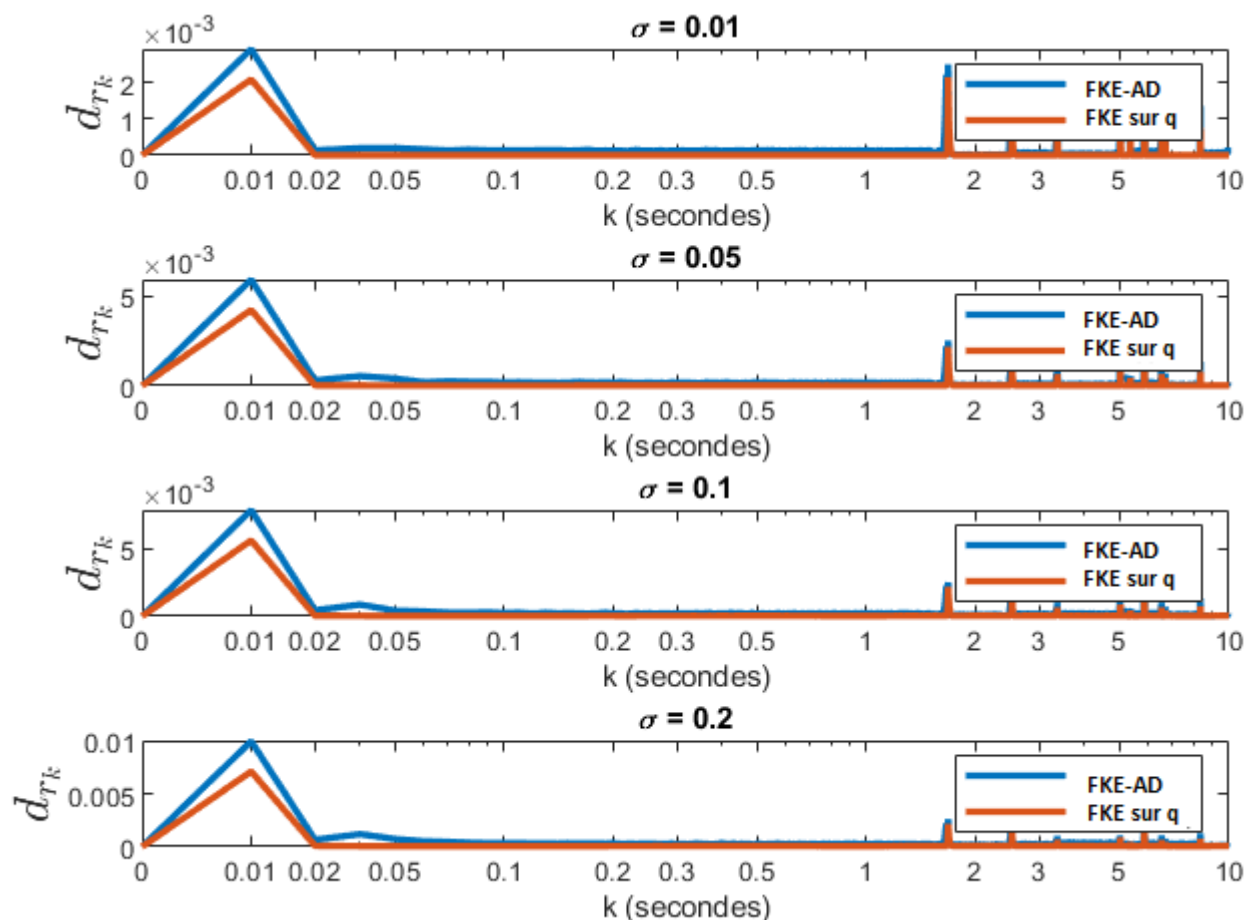


FIGURE 2.9 – Distance géodésique moyenne entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l'anti-développement appliqué sur R (en bleu) pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

Les sous-figures représentent les tracés de cette distance pour le FKE appliqué sur q , en rouge, et le FKE couplé à l'anti-développement appliqué sur R , en bleu en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique.

Sur la figure 2.9, nous pouvons remarquer une fois de plus que malgré les différentes valeurs d'écart-types utilisées pour bruiteur l'entrée du système, le FKE couplé à l'AD converge moins rapidement vers le signal de référence que l'FKE appliqué sur q et le pic de divergence est plus important aux premières itérations.

Nous pouvons également voir que le FKE couplé à l'AD comprend des pics de divergence plus importants que le filtre de Kalman étendu appliqué sur R . Ces pics de divergence correspondent aux instants de coupures présents sur la trajectoire de référence.

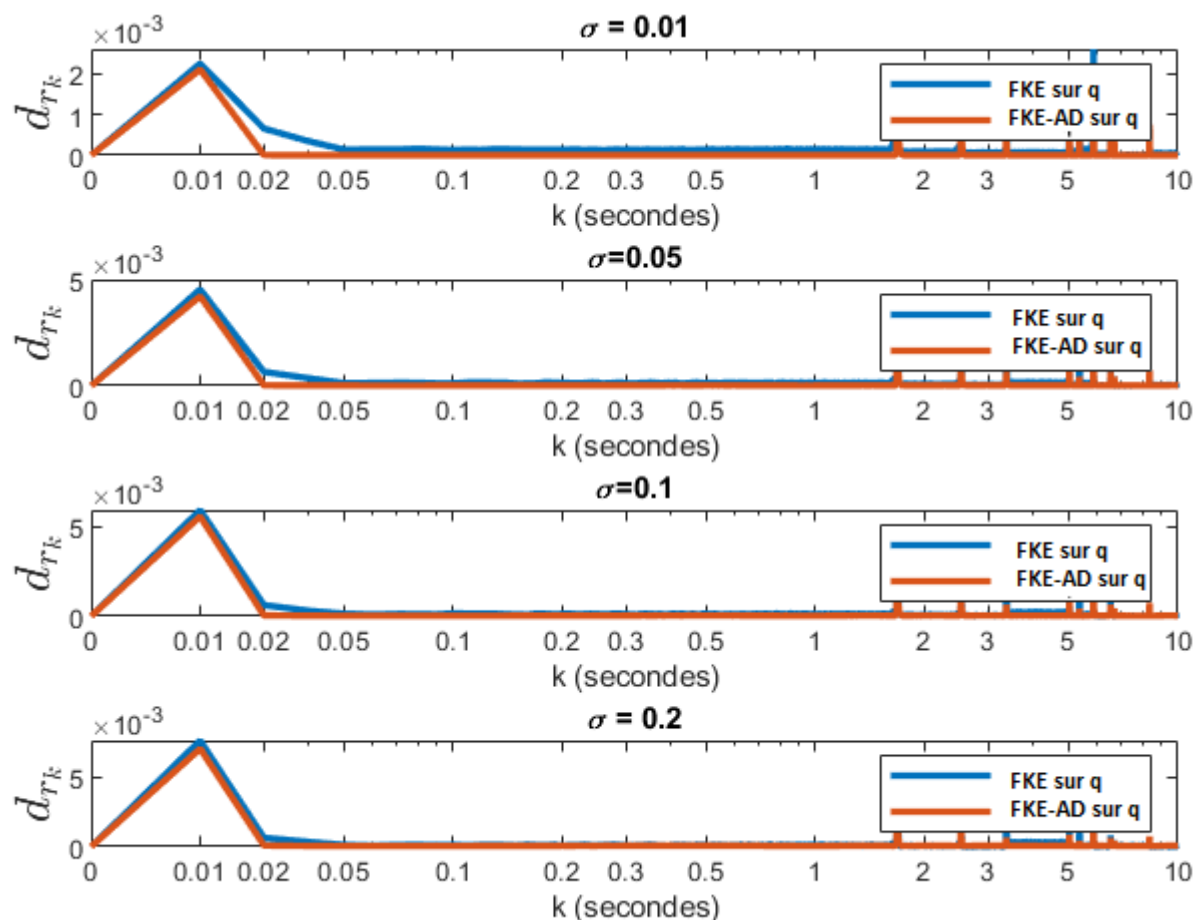


FIGURE 2.10 – Distance géodésique moyenne entre l’attitude de référence et l’attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q (en rouge) et le FKE pré-filtré avec l’anti-développement appliqué sur q (en bleu) pour, de haut en bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

Les sous-figures représentent les tracés de cette distance pour le FKE appliqué sur q , en rouge, et le FKE couplé à l’anti-développement appliqué sur q , en bleu en fonction du temps représenté sur une échelle logarithmique.

Sur la figure 2.9, nous pouvons remarquer que malgré les différentes valeurs d’écart-types utilisées pour bruiteur l’entrée du système, le FKE couplé à l’AD converge plus rapidement vers le signal de référence que l’FKE appliqué sur q et le pic de divergence est moins important aux premières itérations.

Nous pouvons également voir que le FKE couplé à l’AD comprend des pics de divergence moins importants que le filtre de Kalman étendu appliqué sur R . Ces pics de divergence correspondent aux instants de coupures présents sur la trajectoire de référence.

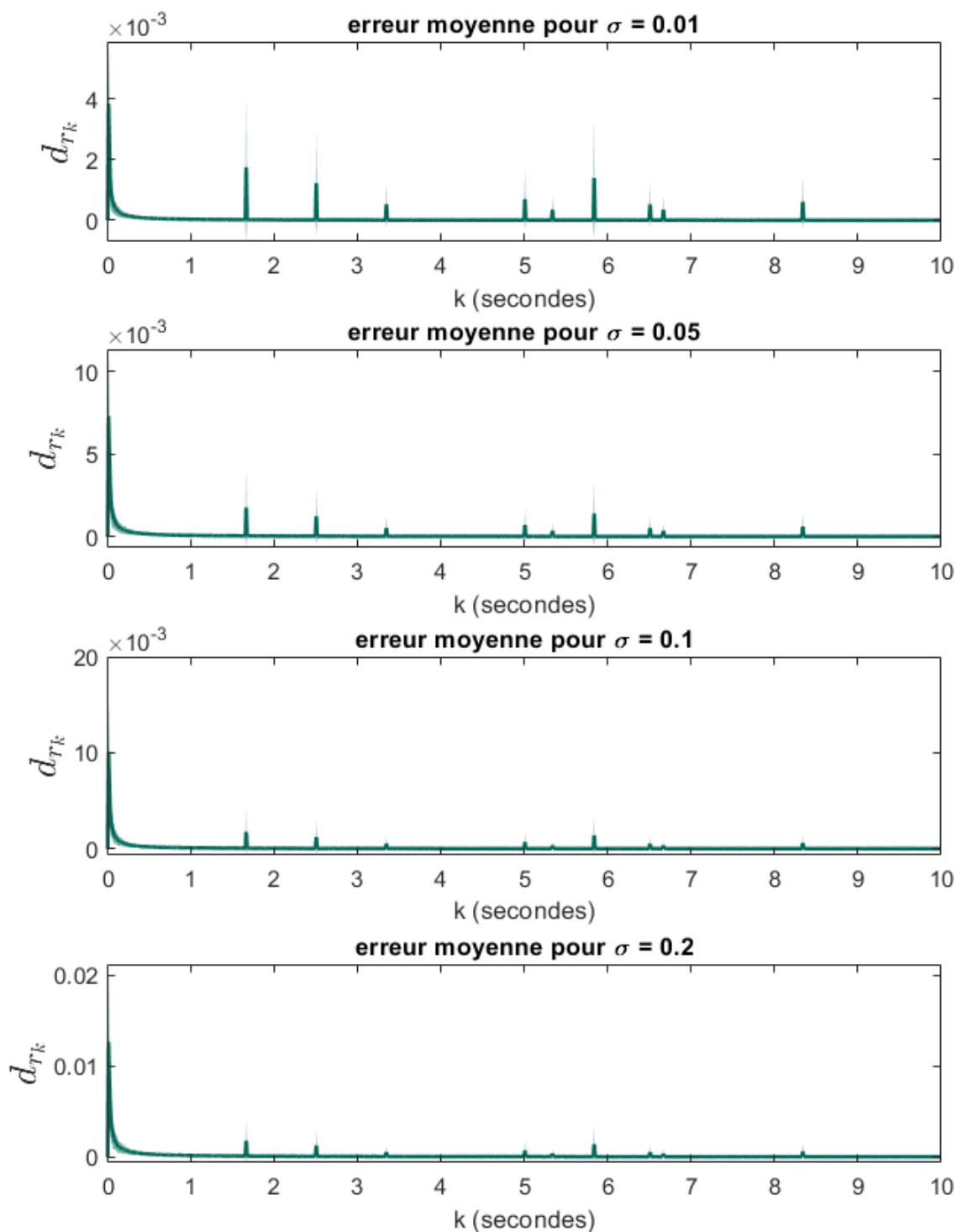


FIGURE 2.11 – Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

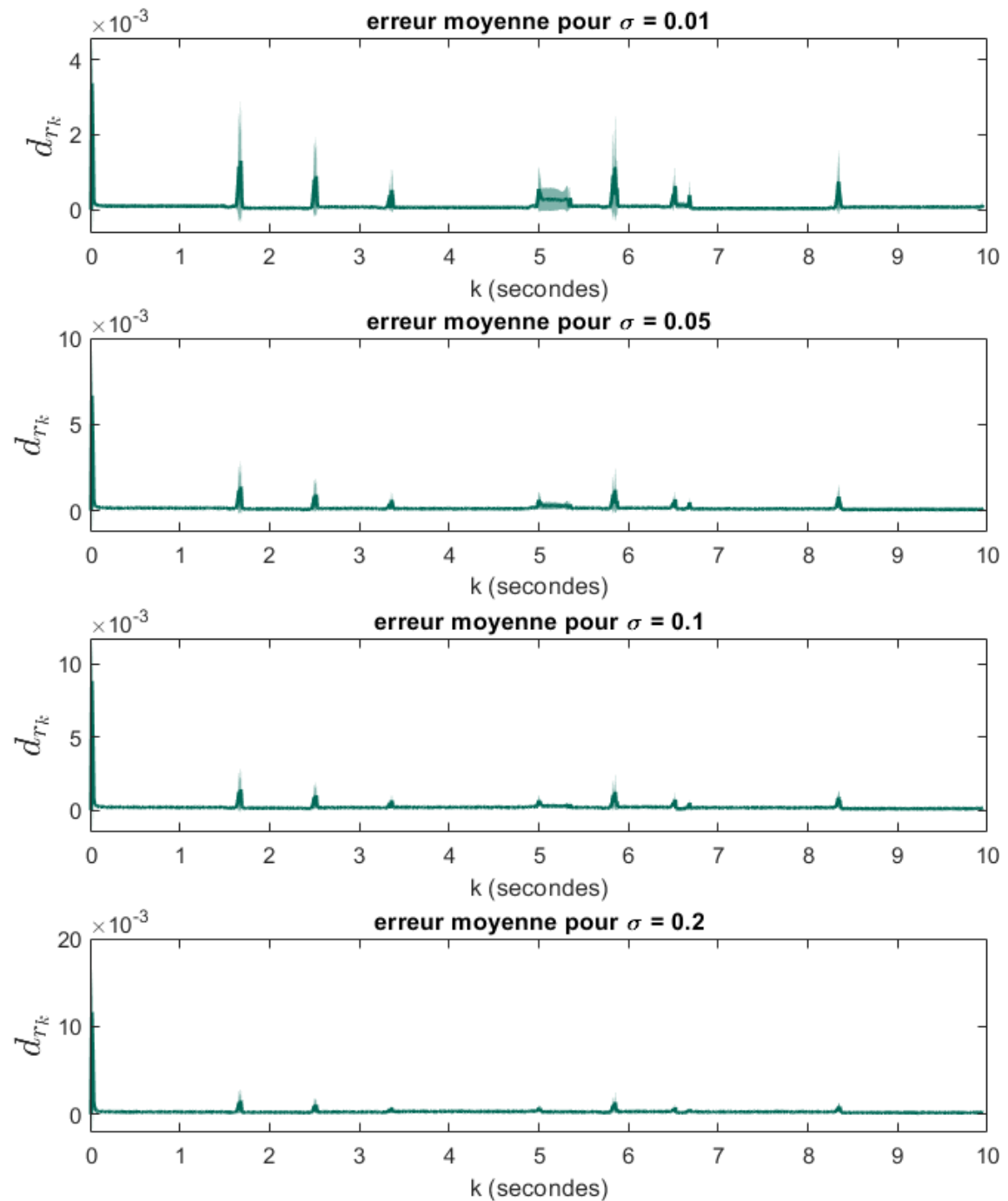


FIGURE 2.12 – Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur R couplé à l'anti-développement pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

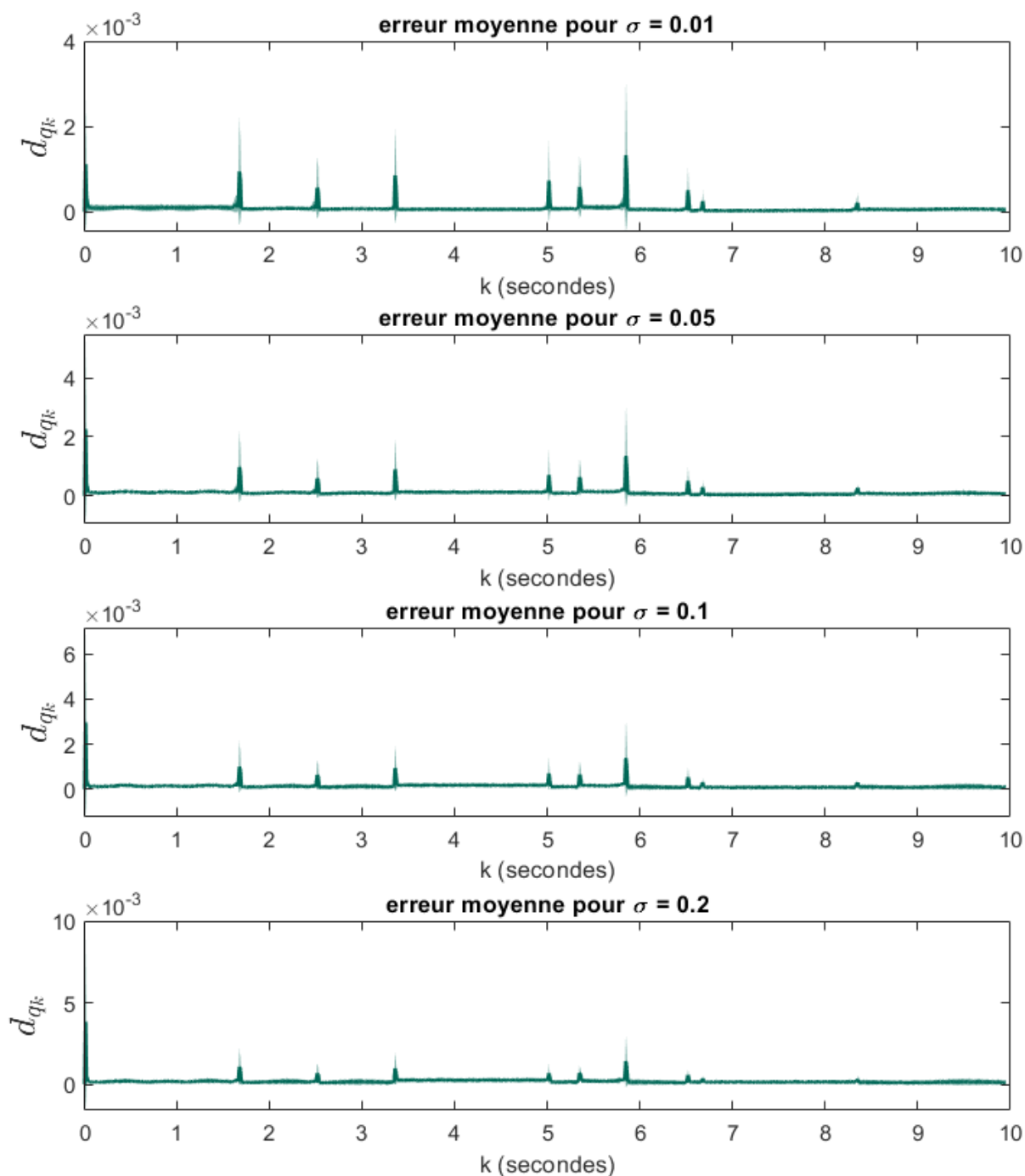


FIGURE 2.13 – Distance géodésique moyenne et de l'écart-type associé entre l'attitude de référence et l'attitude filtrée pour le FKE appliqué sur q couplé à l'anti-développement pour, du haut vers le bas, (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.05$, (c) $\sigma = 0.1$ et (d) $\sigma = 0.2$

Les figures 2.11, 2.12 et 2.13 représentent la distance géodésique moyenne, entre l'attitude filtrée et l'attitude de référence et l'écart-type associé, en fonction du temps. Chaque

figure représente les résultats d'une estimation basée sur un FKE couplé à l'AD pour différentes façons de représenter l'attitude. Nous pouvons voir une fois de plus les différents pics de divergence qui correspondent aux sauts dans la trajectoire de référence.

3.2 Comparaison des performances de l'AD-FKE et du FMM-FKE

Nous analysons les performances des pré-filtres après avoir généré une fois de plus 200 réalisations de commandes bruitées en filtrant à chaque réalisation la sortie du système dynamique d'attitude et de position.

L'erreur est toujours représentée par la distance géodésique entre la rotation filtrée résultante (R_{f_k}) et la rotation de référence (R_{ref_k}) à chaque instant k et pour ce qui est de la vitesse, un simple calcul d'erreur quadratique moyenne est réalisé entre la vitesse filtrée (v_{f_k}) et la vitesse de référence (v_{ref_k}).

Nous évaluons l'amélioration A_m des différents pré-filtres à travers un calcul d'erreur relative de la variable d_g en les confrontant aux valeurs obtenues en absence de pré-filtre, tel que

$$A_m = \frac{\text{valeur de } \bar{d}_g \text{ non pré-filtrée} - \text{valeur de } \bar{d}_g \text{ pré-filtrée}}{\text{valeur de } \bar{d}_g \text{ non pré-filtrée}} \%$$

Les tableaux 2.2 et 2.3 présentent les résultats obtenus.

σ_ω (rad)	Pré-filtre	\bar{d}_g pic(°)	σ pic(°)	A_m (%)	T_c (s)
0.01	Aucun	8.6	2.6		0.08
	AD	0.2213	0.5588	97.43	0.03
	$\bar{\omega}$	0.3724	0.4836	95,67	0.04
	\bar{q}	0.2237	0.5619	97,40	0.03
0.1	Aucun	27.61	4.3863		0.2
	AD	0.7154	1.0022	97.41	0.07
	$\bar{\omega}$	1.008	0.7628	96.35	0.09
	\bar{q}	0.8815	1.0317	96.81	0.08
0.5	Aucun	51.93	5.6859		0.5
	AD	1.481	1.4223	97.15	0.14
	$\bar{\omega}$	2.336	1.2349	95.50	0.16
	\bar{q}	1.679	1.5362	96.77	0.15

TABLE 2.2 – Performances associées au FKE (avec et sans pré-filtrages) couplé à la dynamique de l'attitude.

Le tableau présente les différentes valeurs de la distance géodésique moyenne \bar{d}_g et d'écart-type σ calculées au pic de divergence initial pour différents pré-filtres et un FKE

calculé sur R .

La première colonne (de gauche à droite) du tableau représente les différentes valeurs d'écart-types de bruit simulé, la deuxième colonne représente les différents pré-filtres utilisés, la troisième colonne représente les différentes valeurs de la distance géodésique moyenne \bar{d}_g calculées au pic de divergence initial, la quatrième colonne représente les différentes valeurs d'écart-type σ de la distance géodésique calculés au pic de divergence initial, la cinquième colonne correspond au pourcentage d'amélioration A_m qu'apporte chaque filtre par rapport au filtre de Kalman étendu sans pré-filtrage et la dernière colonne contient le temps de convergence T_c de chaque filtre.

Nous pouvons voir ici que l'erreur calculée au pic de divergence (donc la valeur maximale de divergence de la sortie filtrée par rapport au système de référence) et l'écart type associé ont des valeurs bien plus petites lors de l'utilisation de l'anti-développement par rapport au FKE non pré-filtré ou au FKE pré-filtré avec les filtres à moyennes mobiles.

Bien que les pourcentages d'améliorations fournis par les différents pré-filtres restent assez proches, nous décidons alors de nous aider du temps de convergence du filtre pour émettre un choix définitif sur le pré-filtre à appliquer.

C'est ainsi que nous avons pu confirmer à travers ce tableau que l'anti-développement est le pré-filtre le plus performant vis-à-vis du temps de convergence et du pourcentage d'amélioration.

σ (rad)	Pré-filtrage	\bar{d} pic (°)	σ pic (°)	A_m (%)
$\sigma_\omega = 0.01$	Aucun	\bar{d}_g	0.6382	0.7916
	AD	\bar{d}_g	0.0162	0.126
$\sigma_\gamma = 0.01$	Aucun	\bar{d}_e	0.0619	0.4170
	AD	\bar{d}_e	0.0124	0.0707
$\sigma_\omega = 0.1$	Aucun	\bar{d}_g	2.8385	1.6919
	AD	\bar{d}_g	0.0743	0.2689
$\sigma_\gamma = 0.1$	Aucun	\bar{d}_e	0.1472	0.4909
	AD	\bar{d}_e	0.0596	0.2629
$\sigma_\omega = 0.5$	Aucun	\bar{d}_g	7.5403	2.7369
	AD	\bar{d}_g	0.2159	0.3265
$\sigma_\gamma = 0.5$	Aucun	\bar{d}_e	0.4034	2.0165
	AD	\bar{d}_e	0.175	2.1723

TABLE 2.3 – Performances associées au FKE (avec et sans pré-filtrage) couplé au système dynamique complet (eq. (1.17)).

Le tableau présente les différentes valeurs de la distance géodésique moyenne \bar{d}_g et d'écart-type σ calculée au pic de divergence initial pour différents pré-filtres et un FKE calculé sur R .

La première colonne (de gauche à droite) du tableau représente les différentes valeurs

d'écart-types de bruit simulé, la deuxième colonne représente les différents pré-filtres utilisés, la troisième colonne représente les différentes valeurs de la distance géodésique moyenne \bar{d}_g calculées au pic de divergence initial, la quatrième colonne représente les différentes valeurs d'écart-type σ de la distance géodésique calculés au pic de divergence initial et la cinquième colonne correspond au pourcentage d'amélioration A_m qu'apporte chaque filtre par rapport au filtre de Kalman étendu sans pré-filtrage.

Nous pouvons voir ici que l'erreur calculée au pic de divergence (donc la valeur maximale de divergence de la sortie filtrée par rapport au système de référence) et l'écart type associé ont des valeurs bien plus petites lors de l'utilisation de l'anti-développement par rapport au FKE non pré-filtré, et ce même lorsque le pré-filtrage n'est appliqué que sur les vitesses angulaires et non sur les deux commandes du système.

Même en terme de pourcentage d'amélioration, nous pouvons voir que les résultats du FKE-AD restent bien meilleurs que l'application du FKE seul sur le système dynamique d'attitude et de position.

3.3 Conclusion

Les figures de la section 2.3.1 représentent toutes, la distance géodésique moyenne calculée entre la réponse filtrée et l'entrée de référence idéale non bruitée.

Au vu des résultats obtenus dans les figures (2.8, 2.9 et 2.10) et de leurs interprétations, nous déduisons que les performances du FKE appliqué au système dynamique d'attitude exprimé avec des quaternions sont supérieures pour l'intégralité des configurations étudiées, en comparaison avec celles observées pour les matrices de rotations. En effet, que ce soit au niveau de l'amplitude du bruit ou de l'écart avec les conditions initiales, il est plus intéressant d'utiliser le FKE appliqué sur les quaternions.

En utilisant un anti-développement comme pré-filtrage, nous avons pu voir que l'amélioration apportée par celle-ci est presque équivalente, qu'elle soit avec le filtre de Kalman étendu appliqué sur quaternion ou sur matrice de rotation.

A travers les figures 2.11, 2.12 et 2.13, nous pouvons voir une fois de plus que le FKE appliqué sur q couplé à un anti-développement converge plus rapidement et que la variance associée à ce pic est moins importante.

Pour ce qui est des résultats obtenus reportés dans les tableaux 2.2 et 2.3, nous pouvons conclure que l'étape de pré-filtrage améliore les performances globales du FKE associé et ce quel que soit le type de pré-filtrage employé.

De plus, d'après nos observations, nous pouvons déduire que l'anti-développement est le type de pré-filtrage le plus performant parmi ceux testés. En conséquence, nous nous sommes basés sur ce pré-filtrage pour évaluer les performances du système complet. Néanmoins, bien que l'accélération n'ait pas été pré-filtrée, nous pouvons noter que le pré-filtrage

de la vitesse angulaire résulte en un pic de divergence moins important ainsi qu'un temps de convergence plus court.

Les tests sur données simulées nous ont permis de sélectionner le filtrage le plus adapté (AD+FKE) au système dynamique du capteur en termes de gain de performances. C'est donc cette combinaison de pré-filtre + filtre qui est utilisée sur les données réelles dans le prochain chapitre.

Implémentation des filtres sur les données réelles

Dans ce dernier chapitre, nous évaluons l'approche du filtrage AD-FKE choisi appliqué à des données réelles. Ces données sont issues d'un capteur fourni par l'entreprise SYSNAV et sont récoltées lors de séances d'acquisitions dans un environnement contrôlé, selon un protocole défini.

Le but étant donc d'acquérir des données réelles à travers plusieurs expériences réalisées par différents sujets afin de pouvoir mettre à l'épreuve le filtrage FKE-AD choisi et le comparer au filtre du TMI.

Nous commençons par détailler le protocole d'expérimentation en décrivant l'environnement de réalisation des tests ainsi que le matériel utilisé lors de ces expériences dans la section 1. Nous exposons, dans la section 2, les résultats des expériences réalisées dans l'environnement choisi et pour différents sujets de tailles différentes.

Sommaire

1	Protocole d'expérimentation	55
1.1	Description de l'environnement et du matériel d'étude	56
1.2	Description des expériences réalisées	62
2	Résultats des filtres appliqués sur les données réelles	64
2.1	Premiers résultats sur les données réelles	64
2.2	Résultats associés à la trajectoire rectangulaire	68
2.3	Résultats associés à la trajectoire dessinée	69
2.4	Résultats divers	70
3	Conclusion	74

1 Protocole d'expérimentation

Le protocole d'expérimentation a été réalisé sous un environnement composé de caméras de telle sorte à pouvoir acquérir des données réelles de référence correspondant à la

réalité terrain lors du filtrage avec l'AD-FKE des données issues du capteur. Nous allons maintenant décrire cet environnement.

1.1 Description de l'environnement et du matériel d'étude

Ces expériences ont toutes été réalisées sur la plateforme BioMeca (figure 3.1 (a)) du laboratoire GIPSA-Lab [Gipsa-Lab, 2021]. Cette plateforme est équipée de 11 caméras, dont 9 caméras Oqus 6+ (figure 3.1 (b)) d'une résolution de 3072×1984 et 2 autres caméras Arqus A12 (figure 3.1 (c)) dotées d'une résolution de 4096×3072 [Qualisys, 2011].

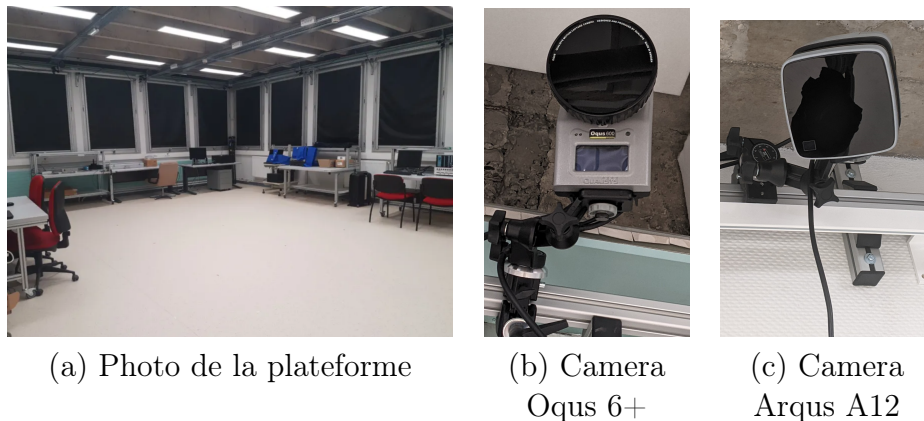


FIGURE 3.1 – Plateforme BioMeca

Matériel lié à la plateforme

Avant chaque série d'acquisition, une étape préliminaire de calibration est réalisée à l'aide des outils fournis par Qualisys. Cette étape est ensuite vérifiée à l'aide du logiciel Qualisys Track Manager afin de valider l'étape de calibration réalisée.

Outils de calibration

Cette étape de calibration requiert l'utilisation de deux outils différents, montrés dans la figure 3.2.

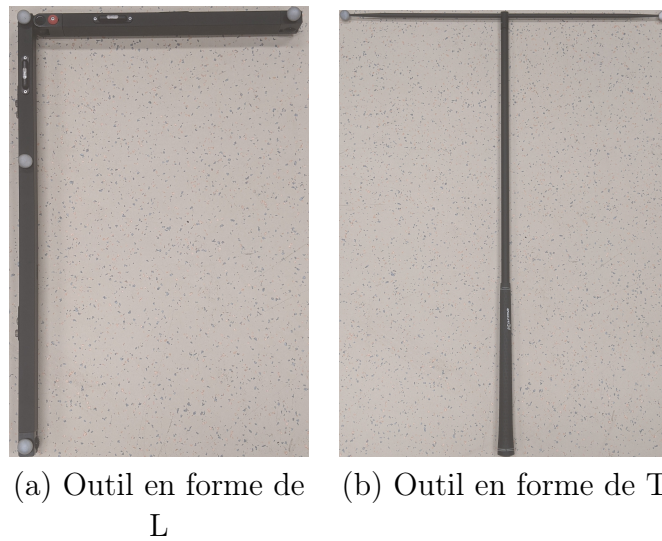


FIGURE 3.2 – Matériel pour l'étape de calibration

- L'outil en forme de "L" (figure 3.2 (a)) permet de positionner et définir un repère trièdre qui représentera le repère inertiel de la zone, cet outil est simplement posé au sol lors de la calibration.
- La baguette de calibration (l'outil en forme de "T") représentée dans la figure 3.2 (b) possède deux marqueurs à ses extrémités supérieures. Cette baguette permet, à travers un balayage de la zone d'acquisition, de s'assurer qu'au moins 2 des 12 caméras soient en mesure d'apercevoir les deux marqueurs de la baguette. L'objectif est qu'un maximum de caméras puissent capter ces marqueurs, ce qui permet de déterminer la qualité d'acquisition pour chaque point de l'espace balayé. Cette calibration donne la certitude que tout mouvement se déroulant dans la zone balayée soit détecté par les caméras.

Zone calibrée

Les figures 3.3 et 3.4 représentent, respectivement, une vue latérale et une vue de dessus de la zone calibrée sur le logiciel Qualisys.

La base de cette zone présente une surface d'environ $16m^2$, quant à sa hauteur, elle est d'environ $1m$, les gestes réalisés lors du balayage de la zone comprenaient, à vue d'oeil, cette hauteur mais étant donné qu'il n'y a pas d'échelle de hauteur dans le logiciel, nous ne pouvons avoir qu'une estimation de la hauteur exacte. Ceci nous donne ainsi un volume d'environ $16m^3$.

La hauteur de la zone balayée n'est pas très importante ici, il suffit d'avoir une hauteur supérieure à 50 cm car le capteur est porté à la cheville.

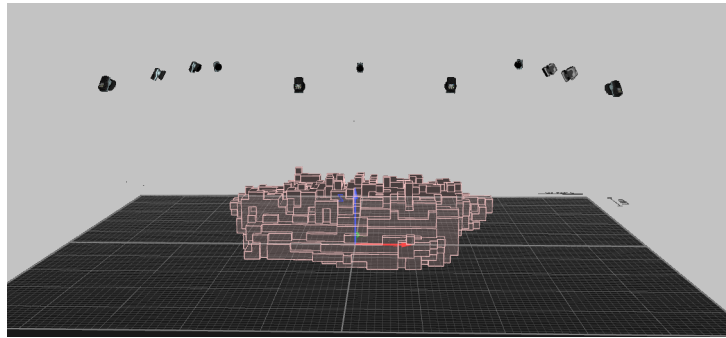


FIGURE 3.3 – Vue latérale de la zone calibrée sur le logiciel Qualisys

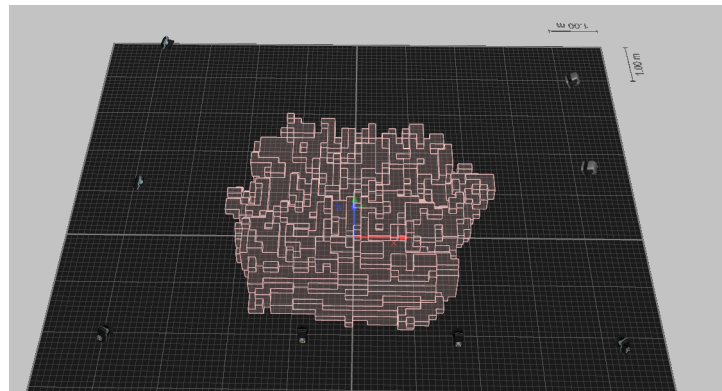


FIGURE 3.4 – Vue de dessus de la zone calibrée sur le logiciel Qualisys

La partie noire quadrillée des figures 3.3 et 3.4 représente le sol de la plateforme. Elle est composée de carrés possédant chacun une surface d'un mètre carré. L'espace gris représente les murs de la salle et nous pouvons d'ailleurs apercevoir les 12 caméras positionnées en hauteur de la salle.

Capteur de position

Le boîtier fourni par SYSNAV est composé d'un gyromètre à 3 axes, d'un accéléromètre à 3 axes et de 5 magnétomètres à 3 axes, l'ensemble de ces capteurs forment ce que l'on appelle le module "capteur" (figure 3.5) du tachymètre magnéto-inertiel (TMI) [Chesneau, 2018].



FIGURE 3.5 – Module capteur

Ce tachymètre magnéto-inertiel est rattaché par l'intermédiaire d'un câble à un module "fusion" (figure 3.6) qui contient le microcontrôleur principal, la batterie, les interfaces SPI et le Bluetooth.

Dans la suite des travaux, nous désignons cet ensemble de modules et capteurs simplement par l'appellation "TMI".



(a) Vue frontale



(b) Vue latérale



(c) Vue du dessus

FIGURE 3.6 – Module fusion

Après une session de tests réalisés avec le capteur, nous utilisons le logiciel "SyslogExtractor" pour extraire les données stockées sur la carte SD contenue dans le module fusion. A chaque utilisation (et donc à chaque mise en marche) du capteur, une nouvelle session est créée sur la carte SD.

Ce fichier contient les données mesurées par le tachymètre magnéto-inertiel mais également les sorties du filtre du TMI. Ces données serviront de point de comparaison avec le FKE-AD associées aux données de références qui proviennent des caméras de la salle BioMeca.

Utilisation du TMI sur la plateforme BioMeca

Préliminairement à chaque série d'acquisition, l'équipement est attaché au sujet d'étude. Le module capteur est fixé au niveau de la cheville et le module fusion au niveau de la ceinture du sujet (figure 3.7).

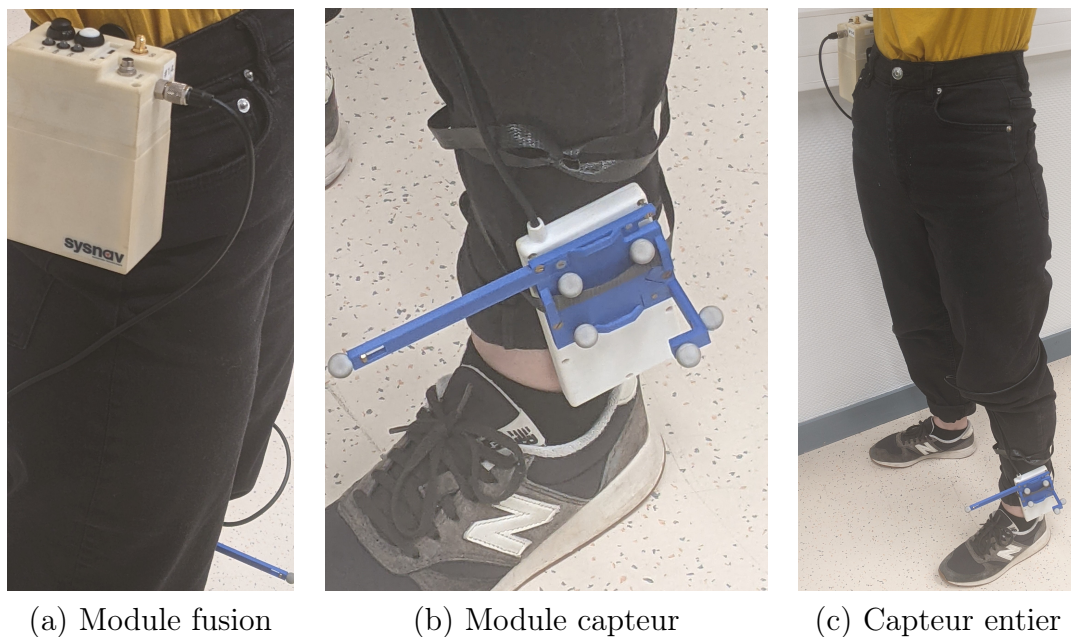


FIGURE 3.7 – TMI porté par un sujet

Nous ajoutons une plaque composée de marqueurs (voir figure 3.8) sur le boîtier du dispositif afin que les caméras de la plateforme puissent enregistrer les déplacements du capteur dans la zone calibrée auparavant.

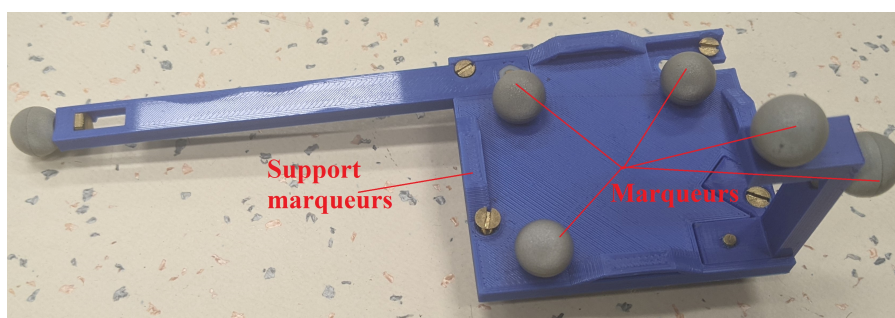


FIGURE 3.8 – Schéma 3D marqueurs capteur

L'individu porteur du capteur effectue alors une trajectoire, un rectangle par exemple (figure 3.9), pendant un temps déterminé.

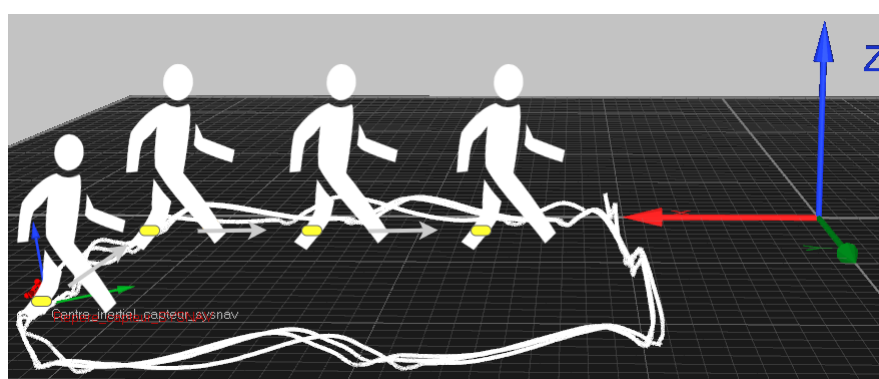


FIGURE 3.9 – Exemple de trajectoire réalisée par un individu porteur du capteur

Pour pouvoir considérer les données caméra comme étant la référence, il est important de lancer l'enregistrement des données caméra en même temps que le module capteur est mis en marche.

Malheureusement, cette initialisation commune ne suffit pas à avoir deux séries de données synchrones. Effectivement, le TMI est échantillonné sur une fréquence $F_{tmi} \simeq 325.52 \text{ Hz}$ tandis que les caméras sont toutes réglées sur une fréquence de $F_{cam} = 326 \text{ Hz}$.

Etant donné que la fréquence des caméras est supérieure à la fréquence du capteur, nous pouvons naturellement déduire que le TMI possède un temps d'échantillonnage plus grand. Nous cherchons alors à retrouver le nombre $n_s \in \mathbb{N}$ (tel que $n_s > 0$) qui représente l'instant où le temps d'échantillonnage $t_{tmi} = \frac{1}{F_{tmi}}$ et $t_{cam} = \frac{1}{F_{cam}}$ sont égaux.

Nous calculons en premier temps δt_{sc} le temps de décalage entre t_{tmi} et t_{cam} , tel que

$$\delta t_{sc} = \frac{1}{F_{tmi}} - \frac{1}{F_{cam}} = \frac{325.52 - 326}{326 * 325.52}$$

$$\delta t_{sc} = 4.515 * 10^{-6}$$

Le but étant de trouver l'itération exacte n_s où $n_s \delta t_{sc} = F_{tmi}$, nous obtenons alors $n_s = 680$. Ainsi, à chaque 680ème itération, nous supprimons une donnée provenant de la caméra, ce qui nous donne un volume de données provenant de Qualisys Track Manager et du TMI toujours identique, comme fait dans [Zmitri, 2021].

Maintenant que nous avons des volumes de données concordants, nous devons également trouver l'instant exact de début d'enregistrement de chacun des jeux de données afin de les coupler mais aussi de pré-traiter les données de référence provenant des caméras en réalisant une interpolation [Maeland, 1988] aux instants où les caméras manquent d'information et ainsi où il faut combler les "trous" dans les données. Ces instants peuvent provenir de l'individu qui, par ses mouvements lors de l'acquisition des données, peut gêner la détection des marqueurs par les caméras et ce, même dans la zone calibrée.

Le démarrage de l'enregistrement est généralement marqué par un mouvement brusque avant de s'engager dans la trajectoire d'étude, ceci est caractéristique de l'élévation brutale du pied portant le TMI. Ce mouvement crée un "pic" dans les données et permet donc de trouver l'instant de mise en mouvement du sujet, ce qui nous permet de pouvoir initialiser les données provenant du capteur et les données provenant des caméras au même instant et ainsi de synchroniser les conditions initiales. Pour pouvoir compléter les données manquantes, nous nous contentons de repérer tous les "NaN" (*Not A Number* (traduction : Pas un chiffre)) contenus dans les données caméra et de faire une simple interpolation entre la dernière donnée connue avant le (ou les) "NaN" et la première enregistrée après le (ou les) "NaN". Bien évidemment, un calcul automatisé ces étapes de recherche de "NaN" et d'interpolations.

1.2 Description des expériences réalisées

Lors de nos acquisitions, nous avons demandé à plusieurs sujets de différentes tailles (1m59, 1m72, 1m80 et 1m83) de réaliser deux trajectoires en marchant de façon instinctive.

- La première trajectoire est un simple rectangle (figure 3.10), les sujets devaient marcher aux bords de la zone calibrée afin d'utiliser le plus de superficie possible.

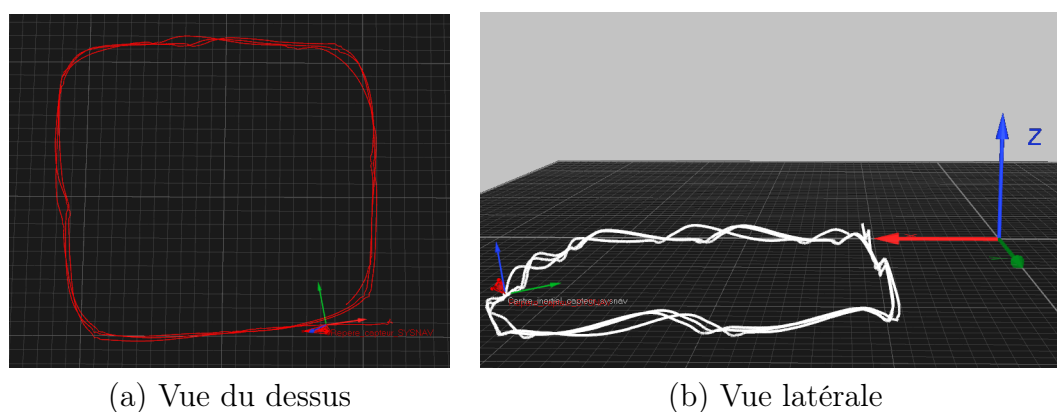


FIGURE 3.10 – Trajectoire rectangulaire Qualisys

- La seconde trajectoire est une trajectoire dessinée aléatoirement au sol, comprenant plusieurs virages brusques, permettant ainsi de tester nos filtres sur des cas de figures complexes. La figure 3.11 représente une photo prise en vue du dessus de la trajectoire à suivre dessinée lors des expériences.



FIGURE 3.11 – Trajectoire dessinée sur le sol de la plateforme BioMeca

La figure 3.12 représente une vue du dessus de cette même trajectoire reconstruite à partir des données issues des caméras via le logiciel QTM réalisée par un des sujets lors d'une session d'expériences.

Nous rappelons qu'avant d'effectuer ces expériences avec d'autres sujets, une série d'acquisitions a été réalisée avec un sujet constant (taille et démarche fixe) à travers lesquelles d'autres trajectoires aléatoires mais également des trajectoires précises (en forme de sablier, de cercle et de triangle) ont pu être testées. Lorsque les résultats obtenus à partir du

filtrage de ces acquisitions se sont montrés satisfaisants, nous sommes passés à des tests plus élaborés, comme la trajectoire représentée dans la figure 3.12.

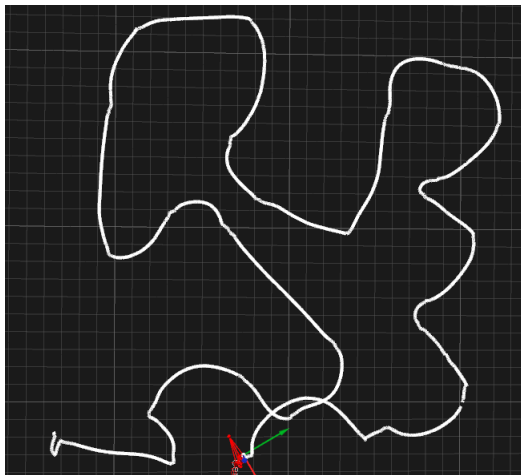


FIGURE 3.12 – Trajectoire Qualisys

2 Résultats des filtres appliqués sur les données réelles

Dans cette section nous exposons les résultats des simulations réalisées avec les données réelles. Nous réalisons une comparaison du filtre de Kalman étendu couplé à l'anti-développement (FKE-AD) aux matrices de covariances dynamique et de mesure mises à jour sur des fenêtres glissantes de taille $M = 20$ (sous-section 2) avec un FKE-AD sans mise à jour des matrices de covariance (sous-section 2). Ces comparaisons sont réalisées à partir des tracés de la trajectoire réalisée reconstruite.

Les sujets mesurant 159 cm, 172 cm, 180 cm et 183 cm seront, respectivement, référés par les lettres "A", "B", "C" et "D". Nous avons donc en totalité généré 8 jeux de données correspondant aux 2 trajectoires réalisées par les 4 individus.

2.1 Premiers résultats sur les données réelles

Tout d'abord, nous comparons, pour le même jeu de données (trajectoire effectuée par le sujet A). Les résultats de la trajectoire reconstruite après application du FKE-AD sur des fenêtres glissantes avec des matrices de covariances dynamique et de mesure mises à jour à chaque itération avec la trajectoire reconstruite après application du FKE-AD seulement. Cette trajectoire est d'une durée approximative de 100 secondes.

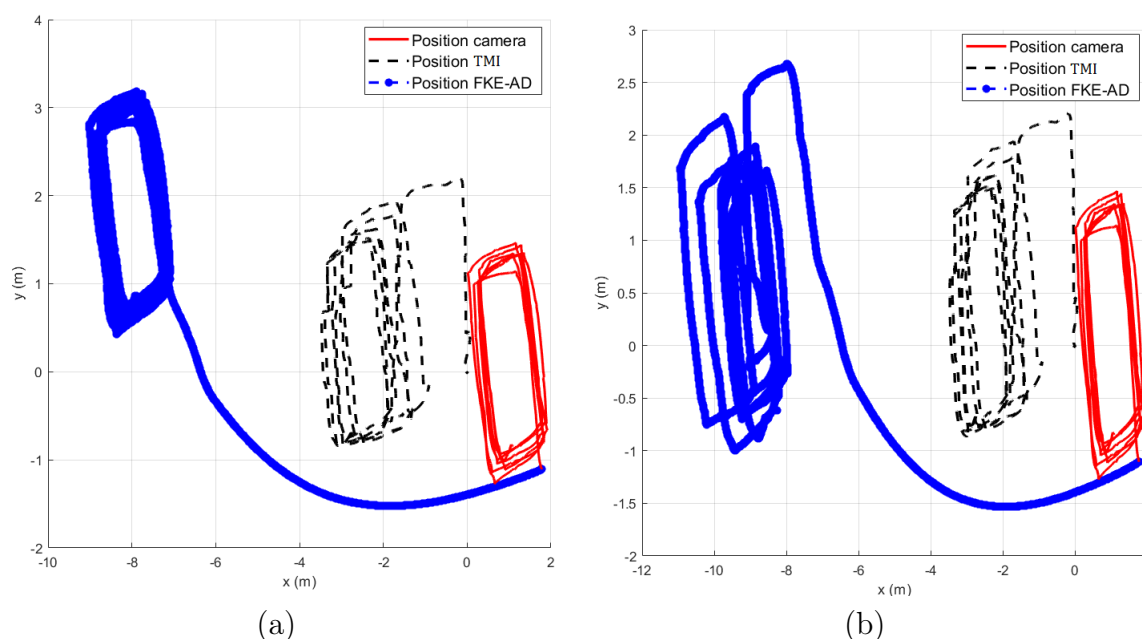


FIGURE 3.13 – Trajectoire rectangulaire de référence (en rouge), reconstruite avec le filtre du TMI (en noir) et reconstruite après application du FKE-AD (en bleu) réalisée par le sujet A

La figure 3.13 (a) représente la trajectoire reconstruite à partir de l'application du FKE-AD optimisée (c'est-à-dire avec des matrices de covariances dynamiques et de mesures mises à jour à chaque itération, comme vu dans la section 2) ainsi que la trajectoire mesurée par les caméras et la trajectoire estimée par le filtre du TMI. La figure 3.13 (b) quant à elle représente la trajectoire reconstruite après l'application du FKE-AD sans optimisation.

Les coordonnées d'initialisation dans les deux cas présentés sont identiques aux coordonnées d'origine de référence fournies par les caméras.

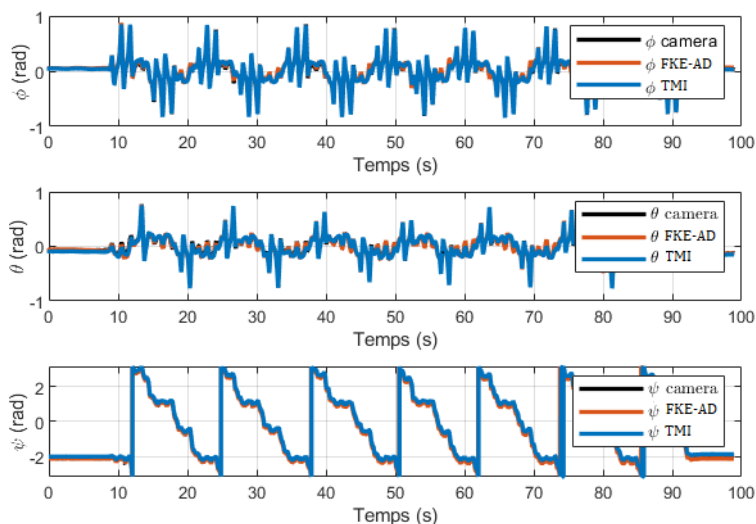
Dans la figure 3.13 (a), la forme de la trajectoire reconstruite en bleu est facilement reconnaissable et semblable à celle de référence, bien qu'un décalage de 9m soit observable.

Dans la figure 3.13 (b), nous pouvons voir que sans mise à jour des matrices de covariances dynamique et de mesure, la trajectoire réalisée conserve une forme rectangulaire, même si elle débute à des conditions initiales éloignées de la trajectoire réalisée. Après un moment de divergence initial, le filtre converge vers la trajectoire réalisée qui est donc rectangulaire mais avec un décalage de 10 mètres par rapport à la trajectoire de référence.

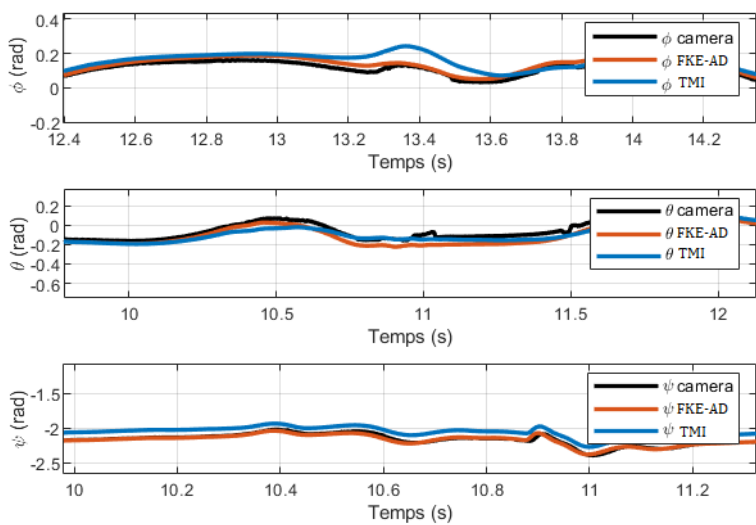
Nous pouvons voir que la trajectoire en noir conserve également la même forme et reconstruit donc de façon satisfaisante le rectangle parcouru par le sujet A. À l'inverse des deux trajectoires rouge et bleue, nous n'avons aucune information sur le choix de coordonnées initiales établi avec le filtre du TMI. Il est donc normal de ne pas avoir le même point initial. Mais nous pouvons retrouver la même divergence constatée aux premières itérations constatée dans la figure 3.13 (b).

Cependant, nous pouvons voir que la forme de la trajectoire de référence est mieux respectée lors de l'application du FKE-AD optimisé, comparée à la trajectoire dessinée en noir.

Avant d'établir une conclusion sur les différents filtres, nous traçons également les angles d'Euler reconstruits par le FKE-AD et le boîtier du TMI ainsi que les angles d'Euler fournis par les caméras pour référence.



(a)



(b)

FIGURE 3.14 – Tracés des angles d'Euler de la référence (en noir), du boîtier SYSNAV (en rouge) et du FKE-AD (en bleu)

La figure 3.14 représente donc les trois angles ϕ , θ et ψ qui sont, respectivement, les rotations autour des axes X , Y et Z du repère inertiel.

Nous pouvons voir dans la figure (a) que sur les 100 secondes de déplacement, les résultats sont pratiquement superposés. La figure (b) représente un zoom sur un échantillon de la trajectoire qui nous permet de voir que tous les angles reconstruits présentent la même tendance que les angles d'Euler de référence.

Nous pouvons conclure qu'en terme d'attitude, les deux filtres nous permettent d'avoir des résultats proches de l'attitude de référence.

En supplément, nous traçons alors les vitesses de translation associées afin d'obtenir plus d'informations sur la divergence constatée dans la figure 3.13 (b).

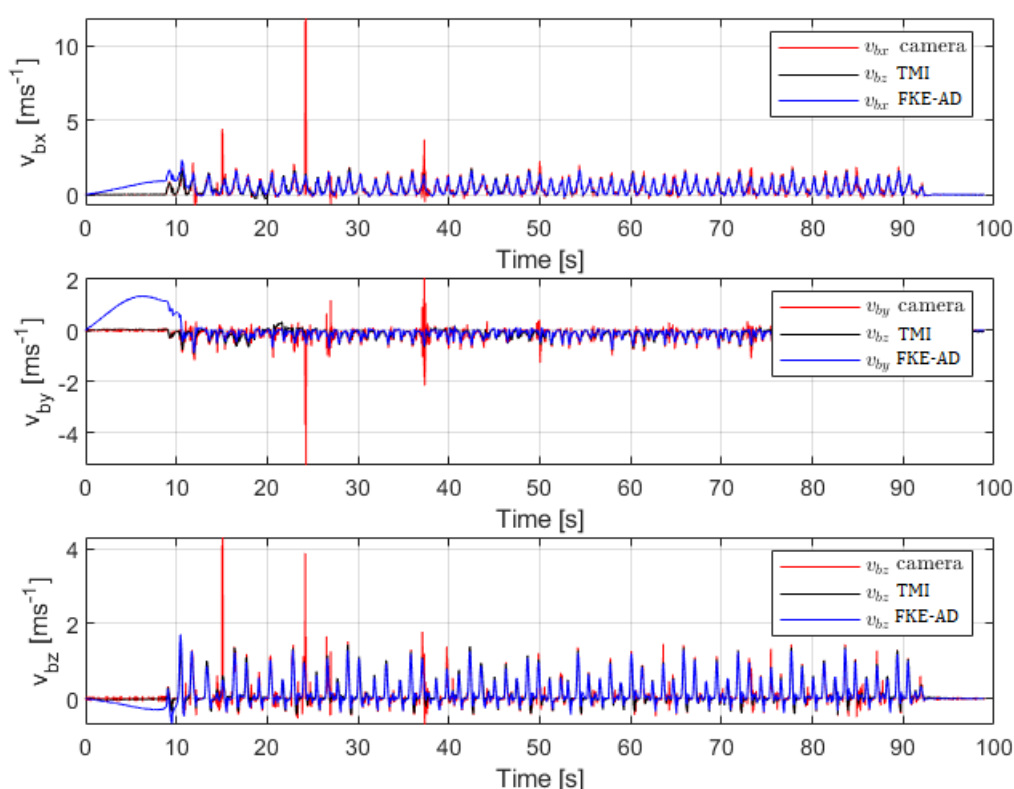


FIGURE 3.15 – Les 3 composantes de la vitesse de déplacement de référence (en rouge), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et reconstruites par le FKE-AD (en bleu)

La figure 3.15 représente les différentes vitesses de déplacement du sujet A au cours de la trajectoire réalisée. Dans cette figure nous pouvons distinguer deux changements dans les tracés. La première observation est une divergence durant les 10 premières secondes de la trajectoire reconstruite par le FKE-AD avec des matrices de covariance dynamique et de mesure fixes (non mises à jour) puis une convergence/stabilisation de la vitesse vers la valeur de référence. La seconde observation porte sur les pics ponctuels de la vitesse de déplacement de référence, ces pics sont de légères erreurs de calculs dues au fait que cette vitesse de déplacement ne fait pas partie des données transmises par Qualisys Track Manager mais a été reconstruite à partir des données de positions et de matrices de rotations

disponibles et représentent donc des erreurs des caméras.

Des figures présentées, nous pouvons conclure que l'utilisation d'un calcul de matrices de covariances dynamique et de mesure permet au FKE-AD d'améliorer la reconstruction de la trajectoire, de raccourcir le temps de convergence initial et même, d'une certaine façon, d'obtenir des résultats plus proches de la référence que les résultats reconstruits par le filtre du TMI, même si le biais des trajectoires filtrées par le boîtier est moins important.

Dans la suite des résultats présentés, nous nous concentrons alors uniquement sur l'utilisation du FKE-AD optimisé.

2.2 Résultats associés à la trajectoire rectangulaire

Nous comparons à présent les trajectoires réalisées par les différents sujets lorsqu'ils devaient suivre une autre trajectoire de forme rectangulaire. Nous avons récupéré les données enregistrées par le tachymètre magnéto-inertiel et par le logiciel Qualisys Track Manager et nous nous sommes servis de ces données pour appliquer le FKE-AD.

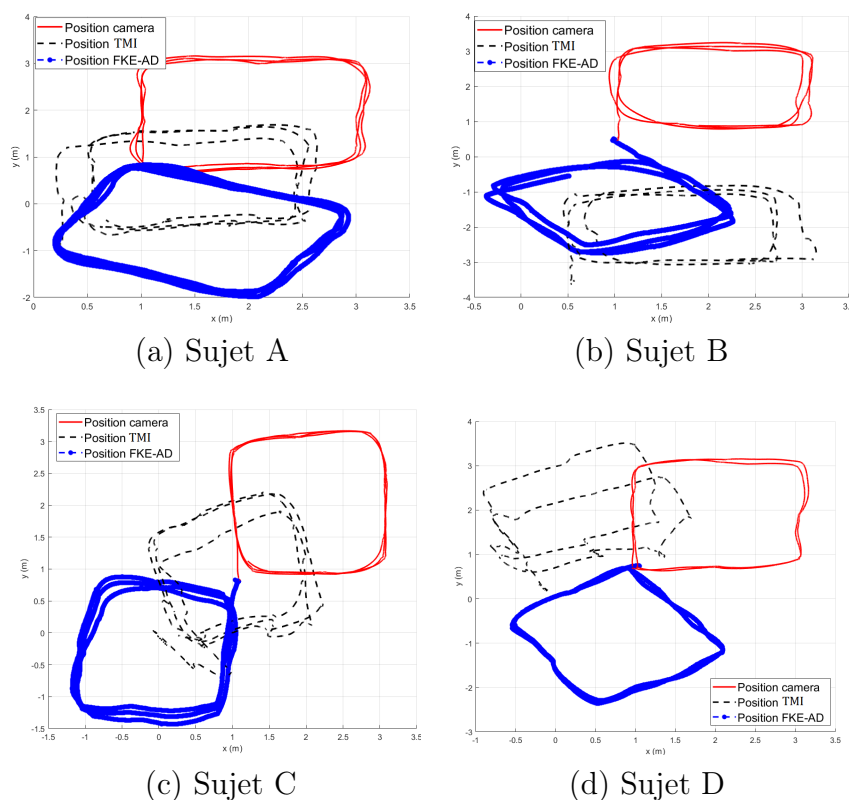


FIGURE 3.16 – Trajectoires reconstruites avec FKE-AD (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) effectuées par les 4 sujets

La figure 3.16 représente les trajectoires reconstruites après application du FKE-AD, les trajectoires reconstruites avec le filtre du TMI ainsi que les trajectoires de référence. Nous pouvons voir sur les sous-figures (a, b, c et d) que les trajectoires reconstruites avec le FKE-AD gardent une forme plus fidèle à la trajectoire de référence, ce qui confirme nos premières conclusions. Nous comparons par la suite (dans la section 2.4) les différentes moyennes et erreurs fournies par chacun de ces filtres.

2.3 Résultats associés à la trajectoire dessinée

Nous présentons les différentes trajectoires réalisées par les différents sujets. La trajectoire à réaliser est la trajectoire dessinée au sol, présentée dans la figure 3.11.

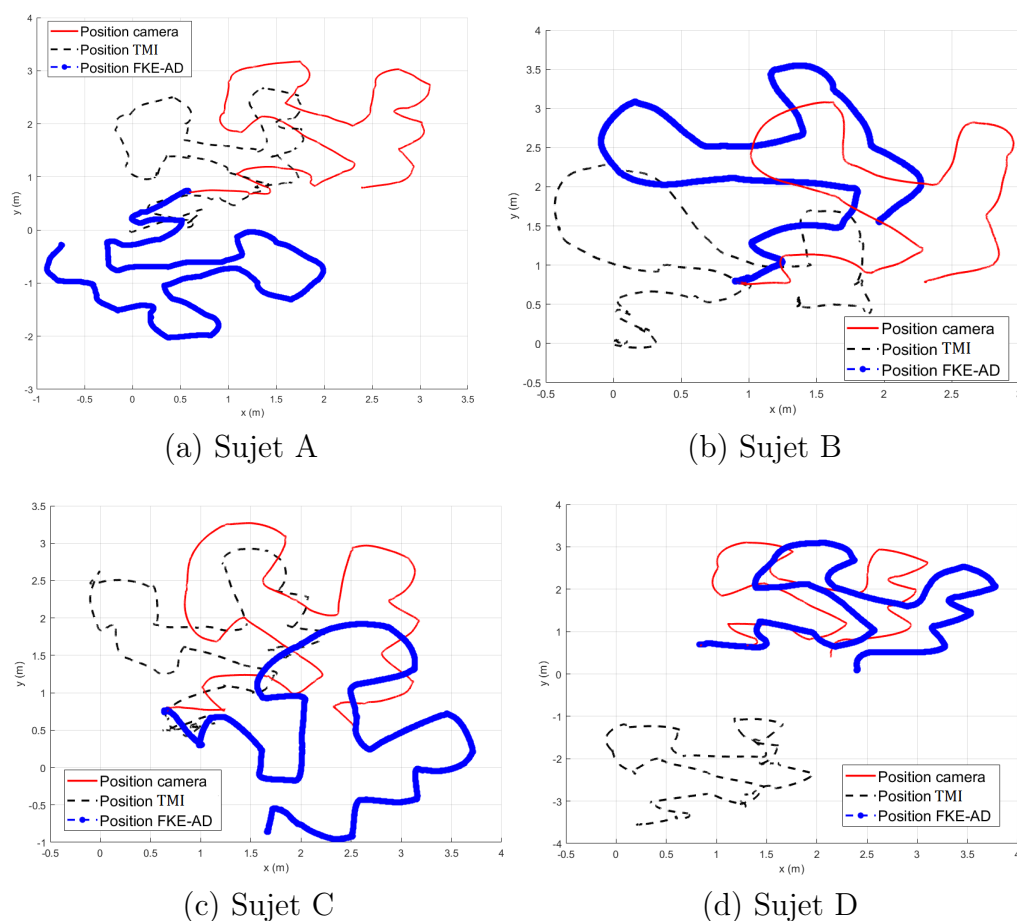


FIGURE 3.17 – Trajectoires reconstruites après FKE-AD (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) effectuées par les 4 sujets

La figure 3.17 représente les différentes trajectoires reconstruites après application du FKE-AD et les trajectoires de références fournies par les caméras et les trajectoires filtrées par le boitier.

Nous pouvons apercevoir sur les différentes sous-figures (a), (b), (c) et (d) qui représentent, respectivement, les pas réalisés par les sujets A, B, C et D que les trajectoires reconstruites par le FKE-AD implémenté ne sont pas toujours orientées dans le même sens que les trajectoires de référence, bien que la forme de référence soit respectée.

Nous pouvons également remarquer que pour certains sujets (B et D), la trajectoire reconstruite est plus proche et mieux orientée que les trajectoires réalisées par les sujets C et A, pour lesquelles la trajectoire reconstruite de la sous-figure (a) est inversée de plus de 180, tandis que les trajectoires reconstruites avec le filtre du TMI sont toujours (hormis pour le sujet (c)) dans le même sens que la trajectoire, même si celles ci sont décalées.

De ces résultats nous pouvons conclure que les changements d'orientations de ces trajectoires sont dus à la présence du biais de gyromètre qui n'a pas été estimé lors de ces travaux. Par ailleurs, les biais de l'accéléromètre sont eux maîtrisés par le filtre car la trajectoire estimée ne diverge pas.

2.4 Résultats divers

Les trajectoires réalisées ont toutes été représentées en 2 dimensions (x et y) étant donné qu'elles étaient toutes réalisées à un niveau constant (au même étage).

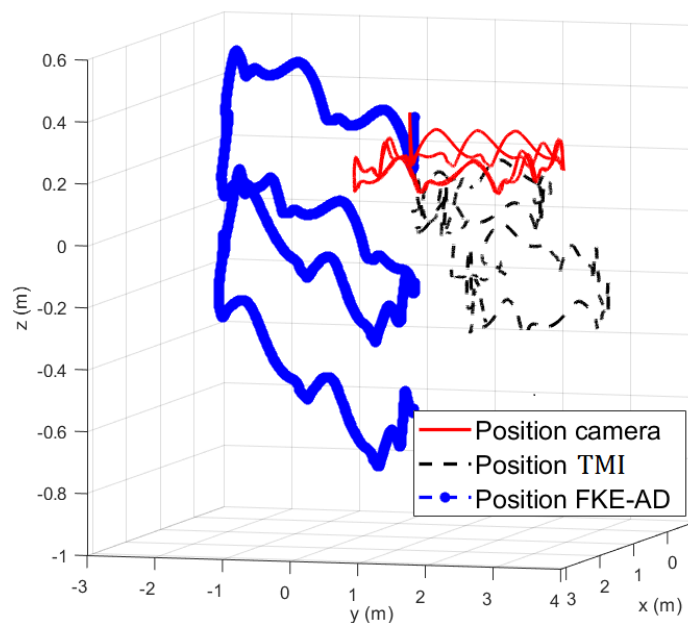


FIGURE 3.18 – Trajectoire reconstruite (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) réalisée par le sujet D

La figure 3.18 représente la trajectoire reconstruite en 3D de la figure 3.16 (d), nous pouvons voir que les deux trajectoires filtrées ont une légère divergence sur l'axe z , ce qui est provoqué par le biais de l'accéléromètre en z .

Dans une autre expérimentation, le sujet A parcourt la trajectoire 2 (3.11) non plus en marchant mais en courant.

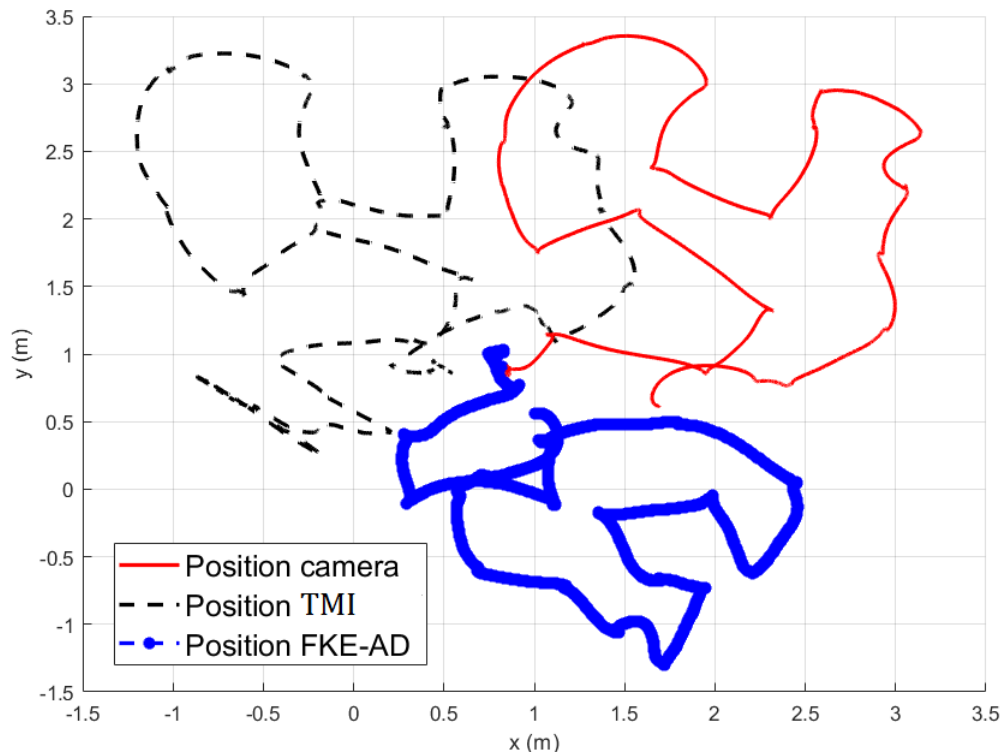


FIGURE 3.19 – Trajectoire reconstruite (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en noir) et de référence (en rouge) réalisée par le sujet A à un pas de course

La figure 3.19 représente le résultat de cette expérience, nous pouvons voir que la trajectoire reconstruite par le FKE-AD ne ressemble pas à la trajectoire de référence captée par les caméras tandis que la trajectoire reconstruite par le filtre du TMI lui correspond. Cependant, la trajectoire reste dans la même superficie, le filtre ne diverge donc pas. Nous concluons ainsi que lorsqu'il faut suivre une trajectoire complexe à un rythme rapide, le filtre a des difficultés à traiter les données fournies, ce qui peut s'expliquer par les changements brutaux de directions plus rapides, ou la différence d'allure et de positionnement des jambes entre la marche et la course.

Par la suite, nous comparons les différentes erreurs moyennes calculées sur chacune des trajectoires représentées dans les figures 3.16 et 3.17 :

	Trajectoire carrée			
Type de tests	Sujet A	Sujet B	Sujet C	Sujet D
Ecart-type FKE-AD (m)	1.5722	0.4591	0.8375	0.4058
Ecart-type TMI (m)	0.1754	0.2191	0.2978	0.2701
RMSE FKE-AD (ms^{-1})	0.0710	0.1444	0.1712	0.1026
RMSE TMI (ms^{-1})	0.1116	0.1094	0.1271	0.1839
MAE FKE-AD (ms^{-1})	0.0371	0.0596	0.0452	0.0464
MAE TMI (ms^{-1})	0.0714	0.0691	0.0524	0.1128
	Trajectoire dessinée			
Type de tests	Sujet A	Sujet B	Sujet C	Sujet D
Ecart-type FKE-AD (m)	1.6435	2.0000	1.8939	1.9450
Ecart-type TMI (m)	0.1570	0.2913	0.2869	0.1284
RMSE FKE-AD (ms^{-1})	0.1027	0.0857	0.0889	0.0720
RMSE TMI (ms^{-1})	0.0848	0.1370	0.1302	0.1666
MAE FKE-AD (ms^{-1})	0.0402	0.0372	0.0394	0.0337
MAE TMI (ms^{-1})	0.0499	0.0961	0.0851	0.1048

TABLE 3.1 – Comparaison de l'écart-type moyen, de la distance et de l'erreur de la vitesse du FKE-AD et du filtre du TMI.

tel que

- l'écart-type moyen est la racine carrée de la variance moyenne calculée sur l'étendue des différentes trajectoires réalisées par chaque sujet,
- l'erreur quadratique moyenne (RMSE) est l'erreur calculée entre la vitesse estimée par le FKE-AD/TMI et la vitesse de référence mesurée par les caméras (tel que $RMSE = \sqrt{(v_{FKE-AD/TMI} - v_{ref})^2}$),
- l'erreur moyenne absolue (MAE) est l'erreur absolue calculée entre la vitesse estimée par le FKE-AD/TMI et la vitesse de référence, tel que $MAE = |v_{FKE-AD/TMI} - v_{ref}|$.

Le tableau 3.1 résume les écart-types moyens calculés pour les différentes trajectoires effectuées par chaque sujet et filtrage employé.

En premier nous observons l'écart-type moyen calculé sur l'erreur de position, nous pouvons voir que cet écart type calculé sur les résultats du filtre du TMI est toujours inférieur (entre 2 à 10 fois plus petit) au FKE-AD. Seulement, lorsque l'on observe l'erreur moyenne quadratique de la vitesse de déplacement (RMSE), nous pouvons voir que le filtre du TMI n'est plus systématiquement inférieur au FKE-AD. Cela dépend en effet du sujet qui porte le TMI. Et si nous nous concentrons à présent sur l'erreur absolue moyenne, nous pouvons voir que le FKE-AD comporte cette fois-ci toujours des valeurs inférieures. Nous pouvons alors déduire que d'un point de vue d'écart-type moyen, le filtre que nous proposons est

moins performant que le filtre implémenté sur le TMI. Nous pouvons expliquer la différence entre les deux écarts-types moyens par le fait que le filtre que nous proposons comprend un pic de divergence aux premières itérations assez important, ce qui rend la variance moyenne calculée plus élevée.

Pour ce qui est du RMSE, le filtre du TMI est plus performant pour 1 sujet sur 4 et la différence entre ces deux moyennes reste tout de même assez basse.

L'erreur moyenne absolue nous permet de confirmer que le filtre que nous proposons nous permet d'avoir de meilleures performances lorsqu'il s'agit du calcul d'erreur de vitesse.

Par ailleurs, nous avons également réalisé une expérience qui nous permet d'avoir une idée de l'influence des biais sur le capteur lorsque celui-ci n'était pas filtré :

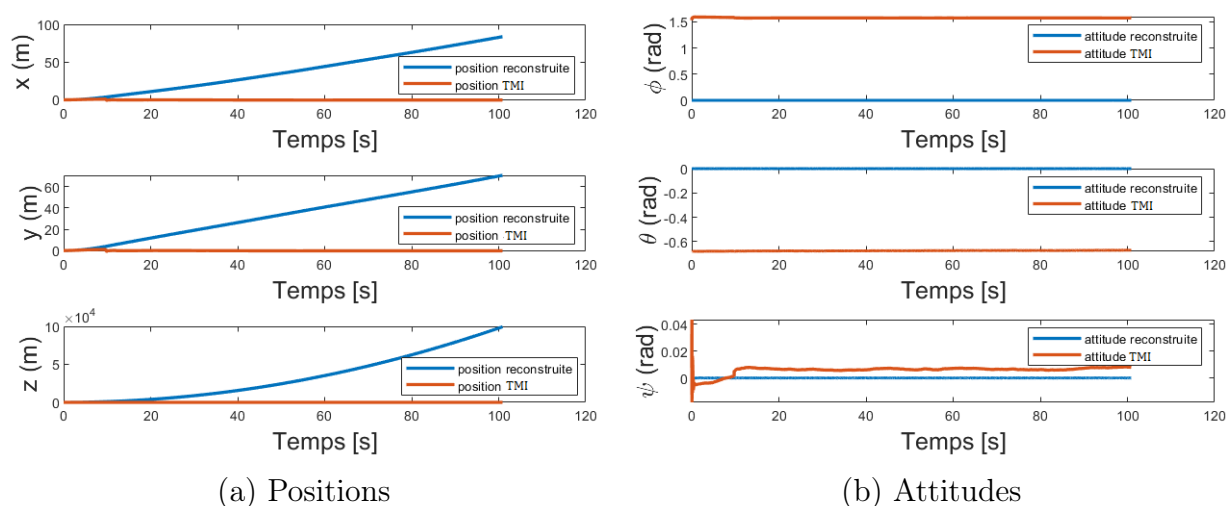


FIGURE 3.20 – Trajectoire reconstruite sans filtrage (en bleu), reconstruites avec le filtre du TMI (en rouge)

La figure représente la position reconstruite du capteur dans les trois coordonnées de l'espace euclidien ainsi que l'attitude qui lui est associée. Lors de cette expérience, nous avons simplement posé le capteur au sol pour qu'il reste stable lors de l'acquisition (pendant 100 secondes). Nous pouvons voir que la trajectoire reconstruite par le filtre du TMI est bel et bien à 0 mètres pour les 3 coordonnées de position tandis que la trajectoire non filtrée diverge au bout de 10 secondes.

Cette dérive permet de confirmer les conclusions établies pour la trajectoire reconstruite après FKE-AD dans la section précédente, tel que le biais de l'accéléromètre est bel et bien atténué sur les 3 coordonnées, tel que la divergence que l'on peut observer au niveau de l'axe z sur la figure 3.18 reste très faible (1 m de dérive contre les 10^5 m observés dans la figure 3.20 (a)).

Pour ce qui est du biais des gyromètres, nous pouvons voir que les valeurs sont constantes pour la rotation reconstruite et la rotation filtrée du TMI. Nous ne pouvons réellement tirer de conclusion sur l'effet qu'a le gyromètre étant donné que le TMI a déjà un pré-filtre sur certaines données mais cela n'invalide par la conclusion tirée dans la section précédente.

3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis à l'épreuve le filtre de Kalman étendu couplé à l'anti-développement à travers différentes expériences ce qui nous a permis d'évaluer les performances de ce filtre dans un environnement réel.

Nous avons pu voir en premier lieu que la mise à jour des matrices de covariances dynamique et de mesure du filtre de Kalman à chaque itération permet d'améliorer la fidélité de la forme de trajectoire reconstruite et de minimiser l'écart de la trajectoire reconstruite et d'être plus proche de la référence, validant ainsi les simulations réalisées dans le chapitre 2.

Par la suite, nous avons vu que même lorsque le capteur était porté par différents sujets de différentes tailles et de démarches différentes, la trajectoire reconstruite fidèle à la trajectoire de référence (les deux trajectoires étaient de formes presque identiques), ce qui n'était pas forcément le cas pour la trajectoire reconstruite avec le filtre du TMI.

Nous avons également pu analyser les erreurs et écarts types fournis par chacun de ces filtres. Bien que l'écart-type du filtre du TMI soit toujours inférieur au FKE-AD, nous avons pu voir que l'erreur quadratique moyenne calculée dépend du sujet porteur du capteur.

Nous avons, par contre, observé que la trajectoire reconstruite n'avait pas toujours la bonne orientation. Cette différence peut s'expliquer par plusieurs hypothèses ; les biais n'étaient pas pris en compte lors de la modélisation du système dynamique et du calcul des matrices de covariances bruitées car nous avons considéré qu'ils étaient négligeables, ce changement d'orientation peut être dû à des biais trop importants. La seconde hypothèse repose sur la technique utilisée pour calculer les matrices de covariances bruitées. Une méthode qui prend davantage en compte la dynamique du système donnerait sûrement de meilleurs résultats. Enfin, la dernière hypothèse est que cette différence est due à un mauvais positionnement du capteur sur la jambe des sujets. En effet, le capteur a pu être placé au mauvais endroit, entraînant un décalage par rapport à la position de référence. La fixation du capteur se faisant de manière filaire, il se peut également que le nœud soit mal serré au niveau de la jambe des sujets ce qui pourrait engendrer un mouvement un changement d'orientation du capteur.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse propose une méthode de filtrage pour l'estimation de position en intérieur qui peut être implémentée en temps réel. Nous avons commencé par analyser les performances de différents filtres de Kalman étendus en couplant un filtre de Kalman étendu à un système dynamique représentant un tachymètre magnéto-inertiel puis nous avons poursuivi par l'ajout de pré-filtres et la recherche de la meilleure combinaison de filtres amont et aval pour notre système.

Résumé des travaux

A travers le premier chapitre, nous avons pu conclure sur les avantages et inconvénients des différentes représentations de l'attitude du modèle dynamique du tachymètre magnéto-inertiel. Des résultats des simulations de ce chapitre et de leurs interprétations, nous déduisons que les performances du FKE appliqué au système dynamique d'attitude exprimé avec des quaternions sont supérieures pour l'intégralité des configurations étudiées, en comparaison avec celles observées pour les matrices de rotations. En effet, que ce soit au niveau de l'amplitude du bruit ou de l'écart avec les conditions initiales, il est plus intéressant d'utiliser le FKE appliqué sur les quaternions.

Ce résultat était attendu étant donné que l'utilisation de quaternions (et le filtrage du système dynamique associé) comporte moins d'étapes de calculs et est donc moins soumis aux erreurs de calculs résiduelles. Seulement, en utilisant un anti-développement comme pré-filtre, nous avons pu voir que la différence entre l'utilisation des deux filtres est minime, voir presque équivalente, ce qui fait que l'utilisation des matrices de rotation n'est pas non plus écartée.

Le second chapitre porte sur la méthodologie suivie pour sélectionner la meilleure combinaison de filtre amont-aval à utiliser à travers diverses simulations. Cette combinaison nous a permis d'améliorer le filtre de Kalman étendu classique et de confirmer que l'anti-développement couplé à une régularisation de Tikhonov était le filtre amont le plus performant parmi les filtres testés lors de cette thèse.

Cette recherche d'amélioration de performances nous a poussé à aller plus loin et donc à utiliser la méthode des fenêtres glissantes vues lors de l'application du filtre à moyenne mobile. Après quelques simulations supplémentaires, nous avons pu sélectionner une taille de fenêtre adaptée à notre système et même ajouter une étape de détection de sauts dans l'algorithme général.

Nous avons aussi automatisé le calcul des matrices de covariances dynamique et de mesure du filtre de Kalman étendu afin de pouvoir proposer une version temps-réel du FKE-AD.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons pu passer à l'étape finale : appliquer notre filtre à des données réelles. Nous avons réalisé différentes expériences avec différents sujets dans un environnement réel avec une possibilité d'acquisition de données de références.

Nous avons pu confirmer que l'automatisation du calcul des matrices de covariances dynamique et de mesure du filtre de Kalman permettait d'avoir une trajectoire plus proche de la trajectoire de référence et sans grande divergence initiale.

Par la suite, nous avons pu voir que le FKE-AD proposé nous permettait de suivre des trajectoires même complexes et permettait d'avoir une forme assez fidèle à la trajectoire de référence, ce qui n'était pas toujours le cas pour le filtre du TMI. Bien que l'écart-type moyen calculé soit toujours inférieur lors de l'utilisation du filtre du TMI, nous avons pu voir que l'erreur quadratique moyenne restait partagée entre les deux filtres.

Ces derniers résultats nous permettent d'avoir donc un filtre qui présente des performances similaires à celles du filtre implémenté sur le TMI.

Aucune comparaison avec les performances du filtre FKE-BiLSTM présenté dans [Zmitri, 2021] n'a pu être réalisée, nous ne pouvons donc conclure sur cette partie citée en introduction.

Perspectives

Au cours de cette thèse, un autre prototype de tachymètre magnéto-inertiel a été développé par les ingénieurs du laboratoire. Ce TMI étant également composé d'un gyromètre, d'un accéléromètre et de 5 magnétomètres.

Ce capteur n'a pas pu être ajouté au chapitre d'expérimentation sur données réelles car le prototype n'était pas encore au point.

Il nous semble donc opportun de proposer de continuer à travailler avec les ingénieurs du laboratoire sur ce capteur afin de pouvoir proposer potentiellement un TMI réalisé à bas coût qui permettrait de réaliser une estimation de position et d'attitude en temps réel, en combinant les données mesurées par le capteur avec le FKE-AD proposé.

Nous proposons également de continuer dans l'optimisation des matrices de covariances de bruits du filtre de Kalman, en utilisant un filtre de Kalman adaptatif [Akhlaghi et al., 2017] ou d'autres techniques d'optimisation [Chen et al., 2018], ce qui pourrait potentiellement améliorer le changement de rotation de la trajectoire finale observée dans le chapitre 3.

Dans cette étude nous n'avons pas pris en compte les différents biais que pouvaient fournir les capteurs du tachymètre magnéto-inertiel, ce qui expliquerait le problème d'orientation de la trajectoire lors de sa reconstruction, le biais du gyromètre nous aurait donné une

trajectoire reconstruite mal orientée et le biais de l'accéléromètre donnerait une trajectoire qui diverge. En perspective, nous pensons qu'une autre façon d'améliorer les filtres proposés est de considérer les biais fournis par les mesures reçues par le TMI comme des états du système dynamique afin de pouvoir les estimer et avoir en résultat une entrée non biaisée [Javed et al., 2020].

Enfin, nous pensons qu'il serait intéressant de pouvoir explorer d'autres techniques de filtres géométriques qui évoluent sur $SO(3)$ [Bonnabel and Barrau, 2015], [Zamani et al., 2011] qui pourraient peut être permettre d'améliorer une fois de plus les résultats présentés.

Bibliographie

- [Åkesson et al., 2008] Åkesson, B., Jørgensen, J., Poulsen, N. K., and Jørgensen, S. (2008). A generalized autocovariance least-squares method for kalman filter tuning. *Journal of Process control*, 18(7-8) :769–779.
- [Akhlaghi et al., 2017] Akhlaghi, S., Zhou, N., and Huang, Z. (2017). Adaptive adjustment of noise covariance in kalman filter for dynamic state estimation. In *2017 IEEE power & energy society general meeting*, pages 1–5. IEEE.
- [Altmann, 2005] Altmann, S. L. (2005). *Rotations, quaternions, and double groups*. Courier Corporation.
- [Aparicio-Esteve et al., 2019] Aparicio-Esteve, E., Hernández, A., Ureña, J., Villadangos, J. M., and Ciudad, F. (2019). Estimation of the polar angle in a 3d infrared indoor positioning system based on a qada receiver. *2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, pages 1–8.
- [Barfoot and Furgale, 2014] Barfoot, T. D. and Furgale, P. T. (2014). Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problems. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3) :679–693.
- [Bonnabel and Barrau, 2015] Bonnabel, S. and Barrau, A. (2015). An intrinsic cramér-rao bound on $so(3)$ for (dynamic) attitude filtering. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2158–2163.
- [Boulanger, 2013] Boulanger, J. (2013). *Adaptive filtering and parametric estimation for random processes on rotation groups and Stiefel manifolds*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- [Bourmaud et al., 2013] Bourmaud, G., Mégret, R., Giremus, A., and Berthoumieu, Y. (2013). Discrete extended kalman filter on lie groups. In *21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2013)*, pages 1–5. IEEE.
- [Chen et al., 2018] Chen, Z., Heckman, C., Julier, S., and Ahmed, N. (2018). Weak in the nees ? : Auto-tuning kalman filters with bayesian optimization. In *2018 21st International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1072–1079. IEEE.
- [Chesneau, 2018] Chesneau, C.-I. (2018). *Navigation à l'estime magnéto-inertielle en champ inhomogène et applications en intérieur*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes (ComUE).
- [Diebel, 2006] Diebel, J. (2006). Representing attitude : Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, 58(15-16) :1–35.
- [Faraut, 2008] Faraut, J. (2008). *Analysis of Lie Groups*. Cambridge University Press Cambridge.

- [Feng et al., 2020] Feng, D., Wang, C., He, C., Zhuang, Y., and *al.* (2020). Kalman-filter-based integration of IMU and UWB for high-accuracy indoor positioning and navigation. *IEEE Internet of Things Journal*, 7(4) :3133–3146.
- [Filonenko et al., 2010] Filonenko, V., Cullen, C., and Carswell, J. (2010). Investigating ultrasonic positioning on mobile phones. In *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation*, pages 1–8.
- [Fischer et al., 2004] Fischer, G., Dietrich, B., and Winkler, F. (2004). Bluetooth indoor localization system. In *Proceedings of the 1st Workshop on Positioning, Navigation and Communication*, pages 147–156.
- [Gipsa-Lab, 2021] Gipsa-Lab (2021). La plateforme d’analyses biomécaniques du laboratoire gipsa-lab. <https://biomecagipsalab.wordpress.com/>. Consulté le : 2022-06-27.
- [Han et al., 2019] Han, K., Yu, S. M., and Kim, S.-L. (2019). Smartphone-based indoor localization using wi-fi fine timing measurement. In *2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, pages 1–5.
- [Hansun, 2013] Hansun, S. (2013). A new approach of moving average method in time series analysis. In *2013 Conference on New Media Studies*, pages 1–4.
- [Hellmers et al., 2013] Hellmers, H., Norrdine, A., Blankenbach, J., and Eichhorn, A. (2013). An imu/magnetometer-based indoor positioning system using kalman filtering. In *Int. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation*, pages 1–9. IEEE.
- [Hochreiter and Schmidhuber, 1997] Hochreiter, S. and Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural computation*, 9(8) :1735–1780.
- [Hussein et al., 2006] Hussein, I. I., Leok, M., Sanyal, A. K., and Bloch, A. M. (2006). A discrete variational integrator for optimal control problems on so (3). In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6636–6641. IEEE.
- [Huynh, 2009] Huynh, D. Q. (2009). Metrics for 3d rotations : Comparison and analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 35(2) :155–164.
- [Javed et al., 2020] Javed, M. A., Tahir, M., and Ali, K. (2020). Cascaded kalman filtering-based attitude and gyro bias estimation with efficient compensation of external accelerations. *IEEE Access*, 8 :50022–50035.
- [Kantor and Solodovnikov, 1989] Kantor, I. L. and Solodovnikov, A. S. (1989). *Hypercomplex Numbers : An Elementary Introduction to Algebras*. Springer.
- [Kim et al., 2019] Kim, C., Bhatt, C., Patel, M., Kimber, D., and Tjahjadi, Y. (2019). Info : Indoor localization using fusion of visual information from static and dynamic cameras. In *2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, pages 1–8.
- [Ko et al., 2008] Ko, S., Choi, S., and Kim, B. (2008). Indoor mobile localization system and stabilization of localization performance using pre-filtering. *Int. Journal of Control, Automation, and Systems*, 6(2) :204–213.

- [Koski et al., 2010] Koski, L., Perälä, T., and Piché, R. (2010). Indoor positioning using wlan coverage area estimates. In *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation*, pages 1–7.
- [Kuipers, 1999] Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and rotation sequences : a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton university press.
- [MacGougan, 2003] MacGougan, G. D. (2003). *High sensitivity GPS performance analysis in degraded signal environments*. Citeseer.
- [Maeland, 1988] Maeland, E. (1988). On the comparison of interpolation methods. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(3) :213–217.
- [Markley et al., 2007] Markley, F. L., Cheng, Y., Crassidis, J. L., and Oshman, Y. (2007). Averaging quaternions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(4) :1193–1197.
- [Markley and Crassidis, 2014] Markley, F. L. and Crassidis, J. L. (2014). Euler angles. In *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, pages 361–364. Springer.
- [Matisko and Havlena, 2010] Matisko, P. and Havlena, V. (2010). Noise covariances estimation for kalman filter tuning. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(10) :31–36.
- [Moore, 1994] Moore, T. (1994). An introduction to the global positioning system and its applications. In *Developments in the Use of Global Positioning Systems*, pages 1/1–1/6.
- [Mosavi et al., 2004] Mosavi, M., Habibi, Z., and Hosseini, F. (2004). Increasing of dgps accuracy using recurrent neural networks. In *Proceedings 7th International Conference on Signal Processing, 2004. Proceedings. ICSP '04. 2004.*, volume 2, pages 1574–1577 vol.2.
- [Powell, 2002] Powell, T. D. (2002). Automated tuning of an extended kalman filter using the downhill simplex algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(5) :901–908.
- [Prabhu et al., 2020] Prabhu, V., Saxena, A., and Sastry, S. S. (2020). Exponentially stable first order control on matrix lie groups. *arXiv preprint arXiv :2004.00239*.
- [Qualisys, 2011] Qualisys (2011). Qualisys track manager, manuel d'utilisateur. https://home.hvl.no/ansatte/gste/ftp/MarinLab_files/Manualer_utstyr/QTM-usermanual.pdf. Consulté le : 2022-06-27.
- [Reichel and Ye, 2009] Reichel, L. and Ye, Q. (2009). Simple square smoothing regularization operators. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 33 :63.
- [Said, 2009] Said, S. (2009). *Estimation et filtrage des processus dans les groupes de Lie matriciels*. PhD thesis, Grenoble INPG.
- [Shuster and Markley, 2003] Shuster, M. D. and Markley, F. L. (2003). Generalization of the euler angles. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 51(2) :123–132.
- [Welch and Bishop, 1995] Welch, G. and Bishop, G. (1995). An introduction to the kalman filter.

- [Zamani et al., 2011] Zamani, M., Trunpf, J., and Mahony, R. (2011). Near-optimal deterministic filtering on the rotation group. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(6) :1411–1414.
- [Zmitri, 2021] Zmitri, M. (2021). *Magnetometer Array-Based Indoor Navigation Under Kalman Filtering*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes (ComUE).

Filtre de Kalman

1 Filtre de Kalman discret

Afin de pouvoir manipuler correctement le filtre de Kalman étendu et surtout pour des raisons de simplicité, nous avons d'abord décidé d'utiliser le filtre de Kalman discret sur un système linéaire simple et le complexifier progressivement.

Initialement, nous avons considéré un système du second ordre comprenant uniquement la position m_x d'un objet et sa vitesse v_x dans un repère à une dimension.

Une fois le filtre discret implémenté et après avoir vérifié par diverses simulations que les valeurs de sortie du filtre correspondaient aux valeurs du signal de référence non bruité, nous avons transformé le système en un système d'ordre 4 représentant ainsi le mouvement d'un objet dans un plan (le système contiendrait les positions m_x et m_y ainsi que leurs vitesses respectives v_x et v_y). Après avoir vérifié la validité du filtre pour un système d'ordre 4, nous sommes passés à un système à 6 états décrivant l'évolution d'un objet dans espace euclidien.

Ainsi, l'équation générale du système linéaire auquel sera appliqué le filtre s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + w(k) \\ y_{mes}(k) = C_d x(k) + v(k) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où

- $x(k) = [m_x(k) \ v_x(k) \ m_y(k) \ v_y(k) \ m_z(k) \ v_z(k)]^T \in \mathbb{R}^6$ est le vecteur d'état du système au moment k ,
- $y_{mes}(k) = [m_x(k) \ m_y(k) \ m_z(k)]^T \in \mathbb{R}^3$ représente le vecteur de mesure au moment k ,
- $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k)]^T \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de commande au moment k ,
- $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q_d)$ et $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R_d)$ représentent, respectivement, le bruit dynamique et le bruit de mesure au moment k ,
- A_d , B_d et C_d sont des matrices constantes qui représentent, respectivement, la matrice dynamique, la matrice de commande et la matrice de mesure du système.

Afin de pouvoir fonctionner, le filtre de Kalman a besoin d'une équation représentant la dynamique estimée du modèle étudié. L'équation de l'état estimé de l'algorithme du filtre

s'écrit comme suit

$$\hat{x}(k+1|k) = A_d \hat{x}(k|k) + B_d u(k). \quad (\text{A.2})$$

L'algorithme du filtre de Kalman [Welch and Bishop, 1995] se déroule en plusieurs étapes :

1. Une étape de prédiction qui calcule l'état suivant du système (au temps $(k+1)$) en fonction de l'état actuel (au temps (k)), c'est pourquoi on adopte l'écriture " $(k+1|k)$ " dans les équations du filtre.
2. Une étape de mise à jour qui utilise les observations de l'état actuel afin de corriger l'état prédit et d'obtenir une estimation plus précise.

Ainsi, nous calculons la covariance de l'estimation

$$P(k+1|k) = A_d P(k|k) A_d^T + Q_d(k) \quad (\text{A.3})$$

Les deux équations précédentes (A.2) et (A.3) représentent la **prédiction** de l'algorithme du filtre de Kalman discret.

Afin d'implémenter correctement le filtre de Kalman, il faut aussi ajouter une phase d'**initialisation** où l'on donne des valeurs initiales à P_0 et \hat{x}_0 qui représentent, respectivement, l'index de confiance que l'on a dans l'initialisation et les conditions initiales estimées du modèle.

Ainsi, plus nous connaissons notre modèle, plus la matrice de covariance P_0 (l'index de confiance) sera petit.

Enfin, on peut passer à la phase **mise à jour** et donc au calcul de

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_f(k+1)(y(k+1) - C_d \hat{x}(k+1|k)) \quad (\text{A.4})$$

$$P(k+1|k+1) = (\mathbb{I}_{6 \times 6} - K_f(k+1)C_d)P(k+1|k) \quad (\text{A.5})$$

avec

$$K_f(k+1) = P(k+1|k)C_d^T(C_d P(k+1|k)C_d^T + R_d(k))^{-1} \quad (\text{A.6})$$

où K_f représente le gain de Kalman.

Nomenclature

Notations L'indice en exposant des variables représente le référentiel dans lequel cette variable est définie. *Par exemple* les indices en exposant a^c et a^n représentent respectivement les référentiels associés au corps et inertiel (aussi appelé de navigation) dans lequel est exprimé a .

$[v \times]$ *matrice antisymétrique du vecteur $v \in \mathbb{R}^N$ où N est la taille du vecteur a*

λ *angle de rotation autour d'un axe donné.*

$\mathbb{I}_{k \times k}$ *matrice identité de taille $(k \times k)$*

∇B^c *gradient du champ magnétique B^c*

ω^c *matrice antisymétrique associée au vecteur de vitesses angulaires*

ω^{c4} *matrice antisymétrique associée au vecteur $\omega^{c4}(t) = [0 \ \omega_1^c(t) \ \omega_2^c(t) \ \omega_3^c(t)]^T$*

$\omega_i^c(t)$ *ième composante de la vitesse de rotation dans le repère corps à l'instant t*

ϕ *angle de rotation autour de l'axe X , également appelé "Roulis"*

ψ *angle de rotation autour de l'axe Z , également appelé "lacet"*

θ *angle de rotation autour de l'axe Y , également appelé "tangage"*

$\{X, Y, Z\}$ *axes d'un repère orthonormé*

B^c *champ magnétique dans le référentiel du corps à la position M^n et au temps t*

d_q *distance géodésique entre deux quaternions*

d_R *distance géodésique entre deux matrices de rotations*

g *vecteur gravité dans le référentiel de navigation*

M *taille fenêtre*

M^c *coordonnées de la position du capteur dans le référentiel du corps*

q *quaternion unitaire*

$q(t)$ *vecteur quaternionique unitaire, représentant l'orientation du corps rigide dans le référentiel de navigation dans lequel la trajectoire est estimée*

q_i *paramètres qui composent un quaternion (avec $i = \{0, 1, 2, 3\}$)*

Q_γ *bruit dynamique blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ_γ^2*

- $Q_{\nabla B}$ bruit dynamique blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\nabla B}^2$
- Q_{ω} bruit dynamique blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ_{ω}^2
- Q_{v_q} bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variances σ_v^2 de mesure du système dynamique d'attitude exprimé en quaternions
- Q_{v_r} bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variances σ_v^2 de mesure du système dynamique d'attitude exprimé en matrice de rotation
- Q_v bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variances σ_v^2 de mesure du système dynamique d'estimation de position et d'attitude
- R matrice de rotation
- $R(t)$ matrice de rotation, représentant l'orientation du corps rigide dans le référentiel de navigation, dans lequel la trajectoire est estimée
- R_{ij} paramètres qui composent une matrice de rotation avec $i = j = \{1, 2, 3\}$
- v vecteur d'entiers pour exemple
- v^c vecteur vitesse de M^c
- x^c axe X du repère corps
- x^n axe X du repère de navigation
- $y(t)$ vecteur de sortie (ou de mesure) du modèle dynamique d'estimation de position et d'attitude
- y^c axe Y du repère corps
- y^n axe Y du repère de navigation
- $y_q(t)$ vecteur de sortie (ou de mesure) du modèle dynamique d'estimation de position exprimé avec des quaternions
- $y_r(t)$ vecteur de sortie (ou de mesure) du modèle dynamique d'estimation de position exprimé avec une matrice de rotation
- z^c axe Z du repère corps
- z^n axe Z du repère de navigation
- γ vecteur accélération dans le référentiel du corps et les mesures de l'accéléromètre (sans biais),