



HAL
open science

Des événements extrêmes de dissipation aux événements extrêmes de dispersion, une empreinte des singularités : Approche expérimentale

Damien Geneste

► To cite this version:

Damien Geneste. Des événements extrêmes de dissipation aux événements extrêmes de dispersion, une empreinte des singularités : Approche expérimentale. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPASP015 . tel-04046970

HAL Id: tel-04046970

<https://theses.hal.science/tel-04046970>

Submitted on 27 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des évènements extrêmes de dissipation
aux évènements extrêmes de dispersion,
une empreinte de singularités:

Approche expérimentale

*From Dissipation Extreme Events to Dispersion Extreme
Events, a Print of Singularities: Experimental Approach*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°564, Physique en Île-De-France (PIF)

Spécialité de doctorat: Physique

Graduate School : Physique. Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **SPEC (Université Paris-Saclay, CEA, CNRS)**, sous la direction de **François DAVIAUD**, directeur de recherche, la co-direction de **Jean-Philippe LAVAL**, directeur de recherche, le co-encadrement de **Bérengère DUBRULLE**, directrice de recherche

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 02 février 2023, par

Damien GENESTE

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Sébastien Galtier

Professeur, Université Paris-Saclay

Président

Mickaël Bourgoïn

Directeur de recherche CNRS, Ecole normale supérieure de Lyon

Rapporteur & Examineur

Aurore Naso

Directrice de recherche CNRS, Ecole centrale de Lyon

Rapporteur & Examineur

Alain Pumir

Directeur de recherche CNRS, Ecole normale supérieure de Lyon

Examineur

Table des matières

1	Introduction	3
2	Concepts	5
2.1	Point de vue eulérien	6
2.1.1	Equations de Navier-Stokes	6
2.1.2	Existence et unicité des solutions	8
2.1.3	Cas limite: équation d'Euler	9
2.1.4	Nécessité de changer de concepts	10
2.1.5	Bilan d'énergie: une expression de la cascade turbulente	13
2.1.6	Phénomène d'intermittence énergétique	16
2.2	Point de vue lagrangien	17
2.2.1	Dispersion de particules	19
2.2.1.1	Problème à un point	20
2.2.1.2	Problème à deux points	22
2.2.2	Irréversibilité lagrangienne	24
2.2.3	Géométrie des trajectoires	27
2.3	Les limites de la simulation numérique	29
2.3.1	Difficulté de la résolution numérique	29
2.3.2	Simulation numérique, résolution et singularités	31
3	De l'expérience aux données	33
3.1	Ecoulement de von Kármán	33
3.1.1	Historique	33
3.1.2	L'expérience von Kármán	33
3.1.3	Grandeurs adimensionnées	37
3.2	Dispositif expérimental	40
3.2.1	Cuve et contre-cuve	41
3.2.2	Moteurs et transmissions	42
3.2.3	Fluide utilisé	44
3.2.4	Système de refroidissement	45
3.2.5	Turbines et pales	46
3.2.6	Commande en vitesse	47
3.2.7	Mesure de couple et de vitesse	47
3.3	Présentation du système de mesures	48
3.3.1	Disposition de la salle et vue d'ensemble	48

3.3.2	Laser	50
3.3.3	Phase d'acquisition	51
3.3.4	Optique et réglages	52
3.3.5	Particules utilisées comme traceurs	54
3.3.5.1	Qualité d'un traceur	54
3.3.5.2	Diffusion de la lumière par les particules	56
3.3.6	Caméras	57
3.3.7	Techniques expérimentales	58
3.3.7.1	Calibration	59
3.3.7.2	Auto-calibration et fonction de transfert optique	60
3.3.7.3	Pré-traitement	63
3.3.7.4	Reconstruction tomographique	65
3.3.7.5	PIV	67
3.3.7.6	PTV: principes	70
3.3.8	Post-traitement	73
3.3.8.1	Filtrage de trajectoires (TrackFit)	73
3.3.8.2	Interpolation sur grille eulérienne (FlowFit)	76
3.4	Présentation des données expérimentales	79
3.4.1	Cas effectués sur l'expérience GVK	79
3.4.2	Cas effectués sur l'expérience SVK	79
3.4.3	Comparaison de la qualité des traceurs	80
3.4.4	Tests sur les paramètres du logiciel DaVis	81
3.4.4.1	Test 1	81
3.4.4.2	test 2	84
3.4.5	La résolution des différentes techniques expérimentales	87
3.4.5.1	Convergence des statistiques	89
3.4.6	Données numériques: SFEMaNS	90
4	Évènements extrêmes de dissipation	91
4.1	Introduction	91
4.2	Article : Experimental study of subgrid stresses	92
4.2.1	Sur les phénomènes sous-maillages et leurs impacts sur le champ de vitesse.	92
4.2.2	Conclusions et perspectives	118
4.3	Article : A model of interacting Navier-Stokes singularities	119
4.3.1	Introduction	119
4.3.2	Conclusions et perspectives	144
4.4	Conclusion	145
5	Évènements extrêmes de dispersion	147
5.1	Introduction	147
5.2	Irréversibilité lagrangienne : validation expérimentale	147
5.3	Méthodes de calculs courbure et torsion	150
5.4	Etude qualitative de la torsion et de la courbure	151

5.5	Conclusions sur les calculs de torsion et courbure	154
5.6	Application : estimation du temps lagrangien	155
5.7	Article : Riding the most irregular path in turbulence	157
5.7.1	Introduction	157
5.7.2	Conclusions	166
5.7.3	Résultats complémentaires à l'article	166
5.7.4	Conclusions de l'étude complémentaire	171
5.8	Conclusions	172
6	Conclusions et perspectives	173
Appendices		
Appendix A	Mesures optiques	179
A.1	Intensité moyenne	179
A.2	Etape de calibration: compléments	183
A.3	Diffusion de Mie	186
A.4	Auto-calibration et OTF	186
A.5	Puissance laser	190
A.6	Détail de la chaîne de mesure PTV	191
Appendix B	Mesures de couple et vitesse	193
B.1	Couple moyen en fonction de la fréquence d'acquisition	193
Appendix C	Quelques développements théoriques	195
C.1	Conservation de la quantité de masse	195
C.2	Conservation de la quantité de mouvement	196
C.2.1	Cas incompressible d'un fluide Newtonien	197
C.3	Sur le développement de l'équation de la vortacité	198
C.4	Théorème de Kelvin	199
C.5	Inégalités de \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν dans le cas d'un champ de vitesse h -hölderien	201
Appendix D	Etudes sur les calculs de courbure et de torsion	203
D.1	Etude préliminaire sur l'impact du schéma de dérivation et du filtrage sur le calcul de courbure	203
Appendix E	Statistiques des données expérimentales	205
E.1	statistiques des cas expérimentaux	205
Bibliographie		219

*Enfants de notre France,
Ô jeunes compagnons,
Allez pleins de constance,
Portez haut votre nom !*

Pierre Morin, Dit Pierre le Saintonge
Menuisier du Devoir, Paris, 1946

A mon frère, mon étoile,

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mes encadrants de thèse Bérengère Dubrulle, Jean-Philippe Laval et François Daviaud pour le temps que chacun a su me consacrer, les multiples relectures de manuscrit et la motivation qu'ils m'ont redonnée dans les moments de doute et tout au long de ce travail exigeant que représente une thèse.

Je tiens à remercier Mickaël Bourgoïn et Aurore Naso d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Les retours qu'ils m'ont faits et les questions qu'ils m'ont adressées pendant la soutenance ont encore enrichi ma réflexion dans ce travail. Je remercie également mes examinateurs Sébastien Galtier, président du jury, et Alain Pumir pour leurs questions très enrichissantes et les axes d'amélioration qu'ils m'ont donnés.

Je remercie Grégoire de Loubens et Romain Monchaux pour le suivi de ma thèse lors de mes comités de suivi. Merci particulièrement à Romain pour la confiance qu'il m'a témoigné en me permettant de donner des TD et TP à l'ENSTA qui a été une expérience très enrichissante.

Parmi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce manuscrit, je souhaiterais tout d'abord remercier l'ensemble de l'équipe du SPEC pour l'accueil très chaleureux et les nombreuses discussions scientifiques et gastronomiques.

Un grand merci à l'équipe de l'atelier et particulièrement à Vincent Padilla pour tous les conseils, l'aide, les formations, la très grande disponibilité et toutes ses connaissances partagées pour résoudre les problèmes techniques et faire de cette expérience un succès. Un grand merci également à Louis pour son travail et à qui je souhaite plein de succès dans sa formation. Un grand merci enfin à Dominique, Philippe, Pascal et Jean-Claude pour leur accueil chaleureux, leur aide et leurs conseils dans les réparations en tout genre.

Un grand merci au "groupe expérimental (et numérique) de Bérengère Dubrulle", Abhishek Harikrishnan, Amaury Barral, Ben Musci (wishing all the best for the experiment), Guillaume Costa, Lucas Fery, Melvin Creff, Paul Debue (merci encore pour ton aide précieuse), Quentin Pikeroen, Valentina Valori. Je tiens particulièrement à remercier Caroline Nore pour ses nombreuses relectures qui ont permis d'améliorer nettement la qualité de la partie numérique. Enfin, je tiens à remercier Adam Cheminet

pour son aide dans les moments difficiles. Et un immense merci pour la patience de mes ex-cobureau (mais néanmoins amis!) Hugues Faller et Antoine Barlet.

Merci à Basile Gallet & Sébastien Aumaitre, pour les discussions et leur aide sur les aspects expérimentaux qui m'ont beaucoup apporté. Un grand merci également aux BG's Christopher Higgins, Benjamin Miquel, Murukesh Muralidhar sans oublier Enzo Francisco, Gabriel Hadjerci, Julie Meunier, pour les discussions, les visites de labo et leurs remarques très constructives durant la révision de ma soutenance. Mention particulière à Vincent Bouillaut, expérimentateur hors pair, avec qui j'ai eu la chance de commencer en stage et avec qui j'ai poursuivi en thèse.

Pour tous les déjeuners partagés et la bonne ambiance Cécile Gasquet-Wiertel (que je remercie également pour le temps passé sur GVK), Caroline Rapsaet (merci également d'avoir été le garant technique du succès de ma soutenance), Sawako Nakamaé, Cindy Rountree (thanks for all your logistic help for the Defence-Day). Pour les discussions enflammées en mathématiques et physique Ivan Dornic. Pour les discussions non moins enflammées sur les voiliers, la gastronomie et l'expérimentation Marco Bonetti.

Merci à tous ceux que j'ai souvent croisé en salle SPHYNX après le repas et pour les discussions autour d'un café, Hervé Bercegol, Michel Beaughon (en souvenir de ce périple à vélo aux Houches), Thiago Fiuza Lima Da Silva, вадим николаев (большое спасибо!), Xiaolong Zhang, Daniel Bonamy, Antoine Montiel (en souvenir des journées de formation à l'atelier), Vincent Labarre, Alizée Dubois, Thuy Nguyen, Laure Chomat, Ewen Froge, Michael Vaz, Michel Mama-Toulou, Patrice Roche, Natalie Royer et François Ladieu pour son aide dans la diminution de l'entropie des processus administratifs (surtout ceux liés à la thèse), Marceau Henot à qui je souhaite bon courage avec la machine à café! Je tiens à remercier particulièrement Nadine pour m'avoir apporté du soleil dans mon bureau les jours pluvieux (et surtout me forcer au rangement!).

Je tiens à remercier également les membres du Laboratoire de Mécanique des Fluides de Lille où j'ai suivi mon master et avec qui j'ai tant appris. Un grand merci à Jean-Marc Foucaut pour son aide précieuse sur la PIV, Christophe Cuvier pour ses talents en optique, encore une fois Jean-Philippe Laval pour son aide en simulation numérique et les nombreuses relectures, Yashar Ostovan et Tarek Chaabo pour leur aide dans les tests préliminaires et traitements des données.

Un grand merci à ceux qui ont participé au succès de l'expérience Pief et Sébastien pour nous avoir fournis quelques m³ d'eau osmosée, merci à Thomas David pour ses conseils très avisés sur d'innombrables sujets, merci à Elodie Fabre-Paul et Roland Tourbot pour leur aide sur les aspects sécurité.

Un immense merci à Claude Lavillonnière pour l'aide en informatique et dans la mise en place des serveurs de données Peach et Rosaline, Frédéric Conego et Mathieu Thevenin pour les leçons d'électronique.

Je tiens à remercier également tous mes collègues du Palais de la Découverte avec qui j'ai passé une excellente année. Un grand merci en particulier à Guillaume Reuiller, Robin Jamet, Laure Cornu, Auréliane Gailliègue et Martin Brossard pour toutes les discussions passionnantes et les conseils de présentation.

De tous mes amis de longue date, je tiens à remercier particulièrement Marie, Lucas et Laure, pour leur soutien inébranlable, toujours à propos et surtout leur bonne humeur

communicative en toutes occasions, un grand merci également à Laura & Rémy, Manon & Nicolas et Morgane. Un immense merci à mes ami.e.s Lucile et Carine pour avoir bravé le RER B et le bus 9 (très) tôt le matin, ainsi qu'à Hugo, Chippi, Cécile, Julie, Anatole, Alex, Cat, Vincent C., Faustino, Salomé et Julia.

Pour leur accueil à mon retour en Corrèze pendant le second confinement, je remercie l'équipe de la Taverne d'Objat pour le soutien moral et logistique, Nicolas Léonat de Voutezac, Taïs, Manou, et tous ceux qui ont fait de ce séjour un moment très convivial malgré la situation, Nico le coutelier pour son apprentissage, M. Lambert, Mr. Spy, Nanny et Yves. Et sans oublier la cheffe, ma cousine Stéphanie qui ne m'a jamais laissé mourir de faim (parce qu'il ne faudrait pas manquer!) merci pour tout. A Jean Audrierie pour toute ces heures de formation en menuiserie, ta patience et ta sagesse et Mireille pour votre soutien et votre bonne humeur.

To all my friends at IMT, Alvaro, Diana (y Léo), Drashti, Aakash, Akshay, Mohan, Federico and Bipin. To my aussies friends, for their support Shaun Stibohar (the southern Ding Dong), for all these fruitfull discussions about Schlieren Shoaib Amjad, for your kindness and all the movies you recommended Lola and David. To my Indian friends Parampreet, Deepa and Maddhi. Un abrazo enorme a todos mis amigos que encontré en Sevilla. Primero, Μαρια (έχουμε μπερδέψει τα μπούτια μας!) y mi compadre Simón por tu apoyo sostenido (ahora desde Chile) y Victor. Muchisimas gracias a Juan y Marie despues de tanto tiempo, un abrazo enorme a Esther y Majo que no olvidé! Pour tous les midis où tu m'as trainé dehors et les bonnes discussions Taha, merci également à Adam et à Manon à qui je pense souvent. Pour les mardis soirs sur les pistes de danse à apprendre le lindy Eden, Eric et pour tes fous rire Pierrette. A tous les membres du fan club d'Antoinette qui m'ont fait découvrir plus qu'une étoile perdue dans le ciel, Hugues (encore!), pour mieux reconnaître les variétés sauvages lorsque j'en croise et pour toutes les balades à pied ou à vélo Jean, merci également à Linus, Lucie T. et Matmat. Je tiens à remercier également la bibliothèque de lettres de l'ENS qui m'a accueilli gracieusement pendant les quelques mois de rédaction ainsi que toutes les personnes que j'y ai rencontrées pour tous les bons moments partagés les midis et les soirs, Arnaud et Matt, Louise pour m'avoir fait découvrir à quel point Hérodote était sympa, Nils pour son sens aigü de la logistique impériale, Lise pour ses connaissances pointues sur la politique spatiale allemande, Marion pour toutes ces soirées du samedi, un grand merci à Juliette, Benoit, Paul, Lucie R. et Nicolas. Merci également à Marie pour son sens de la ponctualité à ses belles soirées, à Emmanuel dit Ramzy et Camille, à Clara et Luca pour leur aide et leurs conseils avisés et Théotime en souvenir de la semaine de randonnée dans l'Aubrac. Je n'oublie pas mes colloqs que je remercie vivement pour la bonne ambiance malgré mes retours épisodiques, pour les soirées qui finissent devant une reconstitution du procès des Fleurs du Mal... voila... et surtout pour avoir assisté à ma soutenance un jeudi matin et leur soutien sans faille dans ce "rapport de stage", Jérémy et Baptiste. Merci également à mes ex-colloc, Caro (dite la moins jeune) pour tes bonnes idées de promenades à 7h du matin pour voir des "piafs", mais surtout pour ta bonne humeur même confinée... et tout le reste! Merci également à Léo & Dani et Alexandre. A Sophie pour ces moments passés à Tours, à Sarah et Théo en souvenir de l'Australie et des randonnées fructueuses. Une pensé

pour Alexandre Marchois La Fidélité Du Devoir De Liberté et tous les autres que je n'ai pas oubliés! Στον αγαπημένο μου φίλο Ηρακλή. Thomas et Diana, Mathieu des Parettes basses et Carole pour m'avoir fait garder mon optimisme. Un immense merci à "l'équipe de choc" pour tous ces bons moments Michel, Gigi, Régine, Dédé, Chantal et Yves. A tous ceux que je n'aurais malencontreusement pas cités ici.

A monsieur Venditti et monsieur Dumortier professeurs de mathématiques au Lycée d'Arsonval, sans qui je n'aurais probablement jamais entendu parler de la prépa et sans qui je ne serais jamais devenu docteur.

A toute ma famille et famille de cœur, Hervé, Liliane, Stéphanie, Sébastien, Amandine, Babet, Eric, Jérémy, Emma, Françoise, Pascal, Thomas et Antonin, Sylvie, Guillaume et Amélie, Magui et Alain, à mes grands parents Janette, Raoul, Ginette et Albert et surtout à ma mère un modèle de force qui n'a jamais cessé de me pousser au meilleur.

Et enfin, à Solène avec qui j'espère continuer longtemps ce bout de chemin commencé à vélo...

PUBLICATIONS ET TRAVAUX EN COURS RELATIFS À CETTE THÈSE

1. D. Geneste et al., Experimental study of subgrid stresses at the Kolmogorov scale in a turbulent von Kármán flow, (en cours, non publié) **section 4.2**
2. H. Faller et al., A model of interacting Navier-Stokes Singularities, [66] (publié) [doi:10.3390/e24070897](https://doi.org/10.3390/e24070897) **section 4.3**
3. D. Geneste et al., Riding the most irregular paths in turbulence, (en cours, non publié) **section 5.7**

When I meet God, I am going to ask him two questions : why relativity ? And why turbulence ? I really believe he will have an answer for the first.

W. Heisenberg

1

Introduction

Des aventures inattendues nous attendent encore. Mais notre but final est toujours une meilleure compréhension de la réalité. Des chaînons sont ajoutés à la chaîne logique qui relie la théorie et l'observation. [...] Plus nos suppositions deviennent simples et fondamentales, plus nos appareils mathématiques de raisonnement deviennent compliqués. Le chemin de la théorie à l'observation devient plus long, plus délicat et plus compliqué. Si paradoxal que cela puisse paraître, nous pouvons dire: la physique moderne est plus simple que celle d'autrefois et paraît, par conséquent, plus difficile et plus compliquée. Plus simple est notre image du monde extérieur, plus elle embrasse de faits et plus elle reflète dans nos esprits l'harmonie de l'univers.

Dans cet extrait, A. Einstein et L. Infeld rappellent que la science physique est une science prédictive: elle essaie de décrire le monde qui nous entoure et d'en prédire ses évènements. Mais elle se base néanmoins sur nos perceptions, nos observations et nos expériences. Ce n'est que par des biais indirects, ces projections de la réalité sur le monde sensible, que les scientifiques peuvent échaffauder une théorie universelle embrassant le monde qui nous entoure pour accéder à cette vérité qui nous échappe.

Cependant, la compréhension de la turbulence nous résiste depuis plus de 200 ans. Il n'est pourtant rien de plus simple que d'observer un écoulement, il l'est beaucoup moins d'en prédire son mouvement. Parmi toutes les questions non-résolues que pose l'étude de la turbulence, celle du mécanisme de transfert énergétique est peut-être la plus complexe. Rappelons que la viscosité du fluide s'oppose à son écoulement, c'est également la cause de la dissipation, c'est-à-dire la transformation de l'énergie cinétique en chaleur. Paradoxalement, de nombreuses études expérimentales et numériques montrent que cette dissipation ne diminue pas au fur et à mesure que l'on baisse la viscosité. Par analogie avec les phénomènes critiques, ce phénomène est appelé "anomalie de dissipation". Une ancienne conjecture due à Onsager [126] (et démontrée en 2016 par P. Isett pour l'équation d'Euler [86]) attribue cette anomalie à des transferts in-

tenses d'énergie liés à des singularités mathématiques. D'autre part, une approche physicienne de cette anomalie nous permet de la relier à une brisure spontanée de la symétrie par renversement du temps. Il existe donc un lien entre les transferts d'énergie et l'irréversibilité. Le but de cette thèse est d'étudier et de définir ce lien.

Pour ce faire, nous nous intéressons aux phénomènes extrêmes de dissipation (vu du point de vue eulérien) et aux phénomènes extrêmes d'irréversibilité (vu du point de vue lagrangien). L'approche complémentaire de ces deux points de vue permet d'offrir une vue complète des événements participant à l'anomalie de dissipation. Nous analysons au cours de ce travail les événements extrêmes de quantités eulériennes telles que le flux d'énergie inter-échelle, le taux de dissipation locale et le terme de diffusion à une échelle données, et lagrangiennes comme le coefficient d'irréversibilité, la courbure et la torsion, afin de mettre en lumière les liens qui existent entre ces différentes quantités et d'étudier dans quelle mesure ils peuvent éclairer notre compréhension des écoulements turbulents.

Cette thèse est composée de quatre chapitres, le premier porte sur les définitions des quantités utilisées, Le deuxième chapitre est dédié à la description de l'expérience enfin les deux derniers chapitres énoncent les résultats. Plus précisément:

Le chapitre 2 porte sur l'introduction des différents concepts utilisés dans cette thèse, et discute les limites de l'étude numérique de la turbulence.

Dans le chapitre 3, nous décrivons l'ensemble de la campagne de mesure réalisée sur le nouveau prototype nommé GVK. Après avoir présenté le dispositif expérimental, nous revenons sur les différentes phases de la campagne de mesure pour cette expérience. Nous résumons ensuite les différents cas d'études exploités dans cette thèse.

Le chapitre 4 porte sur l'étude des événements extrêmes du point de vue eulérien. Tout d'abord, nous étudions le bilan d'énergie du champ de vitesse filtré et nous nous intéressons au transfert énergétique inter-échelle. Cette étude expérimentale nous conduit au développement d'un modèle théorique décrivant les fluctuations énergétiques observées dans l'expérience.

Enfin, dans le chapitre 5, nous nous intéressons à l'étude d'événement extrêmes lagrangiens de la turbulence. Avant d'étudier expérimentalement le lien entre le coefficient d'irréversibilité et la géométrie des trajectoires, nous commençons par valider expérimentalement le lien entre coefficient d'irréversibilité lagrangienne et dissipation, avant de revenir sur la qualité des résultats pour les calculs de courbure et de torsion. A cette occasion, nous comparons les méthodes employées pour ces calculs. Nous évoquons également les limites d'anisotropie du volume de reconstruction au travers d'une étude statistique de dispersion de traceurs uniques. Au cours de cette étude entre le coefficient d'irréversibilité et la géométrie des trajectoires, il nous est apparu nécessaire et intéressant d'approfondir l'analyse de l'impact de la zone de reconstruction et de la résolution sur l'estimation du taux de dissipation.

Les conclusions et perspectives sont présentées dans le chapitre 6.

2

Concepts

Nous proposons dans cette partie de faire un état de l'art des concepts qui ont été développés pour l'étude des écoulements turbulents du point de vue eulérien et lagrangien.

Dans un premier temps, nous introduirons les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide newtonien non-compressible, ce sera l'objet de la partie 2.1.1. La partie 2.1.2 sera consacrée à la question de l'existence et de l'unicité des solutions dans ce cas. Nous aborderons ensuite, partie 2.1.3, les limites de ce modèle pour une viscosité nulle en évoquant les équations d'Euler. Nous terminerons ce rapide tour d'horizon en évoquant le problème des singularités, objets mathématiques possibles dans ces modèles. Nous verrons leurs conséquences pratiques sur les concepts mathématiques en partie 2.1.4. Nous aborderons ensuite la notion de cascade turbulente au travers du bilan d'énergie en partie 2.1.5. Enfin, en partie 2.1.6, nous évoquerons de manière succincte la théorie multifractale comme description permettant d'expliquer l'anomalie de dissipation.

Dans un deuxième temps, pour compléter cette vue d'ensemble de la turbulence, nous ferons également un état de l'art des concepts relatifs au point de vue lagrangien. Nous parlerons en partie 2.2.1.1 du problème de dispersion de particules simples puis du problème de dispersion de paires de particules 2.2.1.2. Ce dernier cas nous permettra de mettre en lumière la dissymétrie temporelle des écoulements turbulents. Nous évoquerons à cette occasion un théorème récent liant la dissymétrie temporelle et la dissipation d'énergie 2.2.2 enrichissant la complémentarité de ces deux approches. Nous terminerons cette partie en évoquant la courbure et la torsion que nous allons utiliser pour l'étude des trajectoires.

Enfin, nous terminerons ce premier chapitre en évoquant les problèmes pratiques que posent la notion de singularité dans les simulations numériques 2.3.

2.1 Point de vue eulérien

Pour le point de vue eulérien l'observateur est fixe par rapport au référentiel du laboratoire et regarde l'écoulement autour de lui. Il est possible d'obtenir les équations de comportement du fluide uniquement à partir de la deuxième loi de Newton. Ces équations n'ont, à ce jour, pas été résolues théoriquement du fait de leurs caractères non-linéaires.

2.1.1 Equations de Navier-Stokes

L'écoulement d'un fluide newtonien incompressible est régi par les équations de conservations de la masse et de conservations de la quantité de mouvement (voir l'annexe C pour le développement des équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible). Ce jeu d'équations est nommé Equations de Navier-Stokes Incompressible, nous y ferons référence par le sigle (INSE).

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1a) \\ (2.1b) \end{array}$$

avec ∇ l'opérateur gradient, Δ l'opérateur laplacien, \mathbf{u} le champ de vitesse, p le champ de pression, \mathbf{f} le forçage correspondant aux forces extérieures (gravité, force électrostatique, poussée d'Archimède, ...), ρ la masse volumique et $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité dynamique du fluide.

Le champ de pression p vérifie par ailleurs l'équation de Poisson obtenue en prenant la divergence de l'équation (2.1) :

$$\Delta p = -\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (2.2)$$

Nous utilisons la convention de sommation d'Einstein qui convient de sommer toutes les quantités faisant intervenir un doublement de l'indice.

$$\nabla(\mathbf{u}) = \partial_i u_i, \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = u_i \partial_i u_j, \quad (2.4)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \partial_{ii}^2 u_j. \quad (2.5)$$

Nous introduisons enfin les deux tenseurs symétrique $\underline{\underline{S}}$ et anti-symétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ relatifs à la décomposition du gradient de vitesse et largement utilisés pour définir la topologie des structures cohérentes eulériennes [36, 37, 177]:

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i),$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i).$$

avec

$$\nabla \mathbf{u} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\Omega}}. \quad (2.6)$$

En considérant les quantités adimensionnées,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{2\pi R f}, & p^* &= \frac{p}{\rho(2\pi R f)^2}, \\ \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{R}, & t^* &= 2\pi f t. \end{aligned}$$

nous obtenons la version adimensionnée des équations de Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, & (2.7a) \\ \partial_t \mathbf{u}^* + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^* + \mathbf{f}^*. & (2.7b) \end{cases}$$

Ce jeu d'équations fait intervenir un unique paramètre d'adimensionnement Re correspondant au nombre de Reynolds introduit à l'équation (3.2) et défini ici par $\text{Re} = \frac{2\pi R^2 f}{\nu}$. Ce nombre sans dimension permet de quantifier le caractère turbulent d'un écoulement et traduit l'équilibre entre phénomènes d'inertie et phénomènes visqueux. Un nombre de Reynolds élevé implique que l'écoulement est principalement gouverné par les phénomènes inertiels. A l'inverse, un faible nombre de Reynolds implique une forte atténuation par effets visqueux.

A moins que ce ne soit explicitement spécifié, nous travaillerons uniquement avec des quantités adimensionnées dans la suite de cette thèse. Pour ne pas surcharger les notations, nous ne ferons plus apparaître le signe “*” en indice.

Enfin, nous introduisons le champ de vorticité que nous r eutiliserons par la suite. Ce champ $\boldsymbol{\omega}$ est calcul e à partir du rotationnel du champ de vitesse \mathbf{u} .

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

avec \wedge le produit vectoriel, ∇ l'opérateur gradient et \mathbf{u} le champ de vitesse.

Une équation pour la vorticité est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (2.9)$$

Cette dernière équation peut être réécrite en faisant intervenir le tenseur du taux de déformation $\underline{\underline{S}}$ qui montre que le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ est un terme d'étirement (voir [76]).

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \underline{\underline{S}} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10)$$

On remarque que la pression n'intervient pas dans cette expression.

2.1.2 Existence et unicité des solutions des équations Navier-Stokes incompressibles en dimension n .

La question de l'existence et de l'unicité des solutions des équations Navier-Stokes incompressibles est une question toujours d'actualité dans la communauté des mathématiciens. De nombreuses questions restent toujours ouvertes autour de ces sujets, comme par exemple, la démonstration de l'existence et de l'unicité (ou non) d'une solution globale des équations de Navier-Stokes en dimension trois. Notons enfin que l'institut Clay promet un prix d'un million de dollars au détenteur d'une preuve de l'existence (ou non) d'une solution régulière sous certaines conditions définies sur le site [1, 69]. Par ailleurs, pour un état de l'art sur ces questions, nous pouvons nous référer au livre de P. L. Lions [106] et à l'article plus récent d'I. Gallager [72] qui donnent un bon aperçu des connaissances actuelles sur ces sujets.

Un point qu'il me semble important d'aborder ici est la question d'existence et d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes selon la dimension. Le cas particulier de la dimension deux est intéressant car nous savons depuis J. Leray [104], qu'il existe une unique solution régulière à tout problème de Navier-Stokes au temps long (*i.e.* à tout temps $t \geq 0$) sur $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$, sous réserve que le champ de vitesse initial soit de divergence nulle et suffisamment régulier. La mathématicienne O. Ladyzenskaya [100] a étendu ce résultat au cas d'une surface bornée. Cette simplification du problème est une conséquence de la dimension deux, le champ de vorticité est alors nécessairement orthogonal au plan de l'écoulement. Le terme responsable de l'étirement, $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$, devient nul.

On sait, depuis le travail pionnier de C. W. Oseen [127] et de J. Leray [104] que sous des hypothèses suffisantes de régularité du champ de vitesse initial et du forçage \mathbf{f} , quel que soit le domaine Ω dans lequel évoluent les solutions des équations de Navier-Stokes (borné ou non dans \mathbb{R}^3), qu'il existe un temps nommé temps "d'explosion" $T_0 > 0$, dépendant de la viscosité ν et des conditions initiales, pendant lequel on peut trouver une unique solution \mathbf{u}   (2.7a) et (2.7b) suffisamment régulière [69]. Plusieurs théorèmes d'existence et d'unicité existent dans la littérature [91, 92, 104]. Il est également possible de construire de telles solutions aux temps courts [104]. Cependant, la question toujours ouverte est de savoir si $T_0 < \infty$ ou non. Jusqu'à aujourd'hui, nous savons qu'il existe une unique solution régulière au voisinage de l'instant initial mais rien ne garantit son unicité au temps long. En particulier, aucun théorème mathématique ne permet de valider ou réfuter une possible "explosion de la solution en temps fini" dans $L^2(\mathbb{R}^3)^1$, interrogation soulev e par J. Leray. Cette question justifie également l'existence de singularités qui pourraient naître à partir de solutions régulières aux équations de Navier-Stokes. J. Leray remarque par ailleurs qu'une telle solution vérifierait la condition d'auto-similarité suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{t_b - t}} \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t_b - t}}\right), \quad (2.11)$$

¹ $L^2(\mathbb{R}^3)$ correspond à toutes les fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}^3 , ou de manière plus physique, à un signal d'énergie finie.

avec t_b le temps d'explosion.

2.1.3 Cas limite de l'équation de Navier-Stokes d'un fluide parfait

Le cas d'un fluide parfait (*i.e.* à viscosité nulle) est expérimentalement impossible². Il fournit néanmoins un cadre théorique équivalent à celui d'un écoulement à nombre de Reynolds infini. Dans ce cas particulier, le modèle de Navier-Stokes incompressible tend vers l'équation d'Euler incompressible énoncée par L. Euler [63].

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (2.12a) \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f}. & (2.12b) \end{cases}$$

Ce modèle assure un “rescaling” particulier. On peut se référer au chapitre 2.2 du livre d'U. Frisch [71]. Toute solution de l'équation d'Euler vérifie la loi d'échelle suivante :

$$\forall (\lambda, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} t \mapsto \lambda^{1-h} t, \\ \mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}, \\ \mathbf{u} \mapsto \lambda^h \mathbf{u}, \\ p \mapsto \lambda^{2h} p. \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans le cas d'une viscosité nulle, ce “scaling” fonctionne pour tout $(\lambda, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Dans le cas de Navier-Stokes visqueux, seul $h = -1$ convient.

Dans un premier temps, il faut se poser la question du sens physique de modèle d'Euler. En particulier, la question qui reste toujours mathématiquement débattue est de savoir si une solution des équations Navier-Stokes paramétrées par la viscosité ($\nu > 0$) tend vers une fonction \mathbf{u} solution des équations d'Euler lorsque la viscosité ν tend vers zéro. Dit en des termes plus physiques, le modèle d'Euler est-il un bon modèle limite au cas d'un écoulement à nombre de Reynolds infini?

En deux dimensions, les solutions limites ($\nu \rightarrow 0$) de Navier-Stokes visqueux tendent vers une solution des équations d'Euler. Cette idée est résumée par “ $2D$ Navier - Stokes $\rightarrow 2D$ Euler” dans le livre de P. L. Lions [106].

En dimension trois, la question est beaucoup plus difficile. Tout d'abord, dans le cas “simple” de l'espace entier \mathbb{R}^3 , on peut s'assurer d'une bonne convergence des solutions des équations de Navier-Stokes vers une solution des équations d'Euler (pour $\nu \rightarrow 0$), sous des conditions suffisantes de régularité du champ de vitesse initial. Ce point est développé dans l'article de D. Gérard-Varet [77].

Si le domaine sur lequel évoluent les solutions des équations n'est plus infini (\mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2, 3\}$) mais borné, cette question devient encore plus complexe. Comme l'évoque D. Gérard-Varet [77], le principal point de complication réside dans l'énoncé des conditions aux limites. Quand les équations de Navier-Stokes induisent une condition de non-glissement au bord du domaine à cause des phénomènes visqueux, le modèle

²Hors cas particulier de l'hélium-4 à $T \leq 2.17$ K en phase superfluide dont la viscosité extrêmement faible mais reste strictement positive (sauf pour le cas $T = 0$ K qui reste non réalisé jusqu'à maintenant).

d’Euler, lui, autorise le glissement. Ainsi, la condition de Dirichlet au bord du domaine dans le cas du modèle de Navier-Stokes se traduit par une simple condition de non-pénétration induite par le modèle d’Euler. Ce point est lié au développement de couches limites.

Comme pour les équations de Navier-Stokes, on peut, là encore, se poser la question de l’existence et de l’unicité des solutions. Le cas particulier de la turbulence en déclin, *i.e.* sans forçage, nous permet de fixer les idées et d’appréhender les problèmes.

Dans le cas de la dimension deux tout d’abord, l’annulation du terme d’étirement assure l’existence et l’unicité des solutions, comme l’a prouvé J.-Y. Chemin dans l’article [41] (paragraphe 1.4) en réécrivant le critère BKM [23]. Ce critère nous assure que tant que la norme infinie de la vorticité est intégrable sur l’intervalle $[0, T]$, le champ de vitesse et toutes ses d riv es jusqu’à l’ordre 3 sont réguliers jusqu’à cet instant T^3 .

Dans le cas de la dimension trois maintenant, nous pouvons observer le problème d’un point de vue physique. Rappelons tout d’abord le théorème de Kelvin. Nous savons que dans le cas d’un fluide incompressible⁴   viscosité nulle, la circulation du champ de vitesse le long de toute courbe ferm e \mathcal{C} est conserv e. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on sait également que le flux de vorticité à travers toute surface S s’appuyant sur le contour \mathcal{C} est, lui aussi, conservé.

A cause du terme d’étirement non-identiquement nul dans le cas général, rien ne peut désormais assurer que la norme de la vorticité reste born e. En effet, par conservation du flux de vorticité, un étirement s’accompagne d’un resserrement de la surface et donc d’une augmentation de la vorticité. En particulier, ce point devient problématique dès lors que l’on cherche une solutions réguliere, en particulier \mathcal{C}^2 , aux équations d’Euler. De ce fait, il apparaît possible qu’une solution aux équations d’Euler puisse conduire à une solution non-réguliere, c’est à dire une solution dont la norme ne soit plus born e, en un temps fini.

2.1.4 Nécessité de changer de concepts

L’exemple que nous avons détaillé plus haut sur les équations d’Euler en dimension trois rend possible une solution “explosive” en temps fini. Néanmoins, les équations de Navier-Stokes telles qu’elles sont  nonc es aux équations (2.7a) et (2.1) supposent de considérer des solutions r gulieres, c’est à dire *a minima* \mathcal{C}^2 . Pour pouvoir prendre en compte cette éventualité, il devient nécessaire de faire intervenir une classe de fonctions plus large. L’objectif étant *in fine* de prouver (ou non) qu’une solution trouv e dans cet ensemble soit suffisamment réguliere ou à défaut approch e.

Un espace de fonctions étendu prenant en compte ces possibles “solutions explosives” est initialement développé dans le travail de C. W. Oseen puis repris par J. Leray dans sa thèse [103] et enfin formalis e mathématiquement par L. Schwartz dans les années 1950 [162, 163]⁵, nommé théorie des distributions.

³“En d’autres termes, le maximum de vorticité est le seul paramètre qui assure la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes 3D” [23].

⁴On peut montrer que le cas d’un écoulement barocline suffit voir annexe C section C.4.

⁵Cette nouvelle théorie mathématiques rendant “toute fonction infiniment dérivable” fut pas toujours

Le formalisme faible peut être vu simplement comme une extension de la notion de fonctions dans laquelle tout devient infiniment dérivable. Intuitivement, cette notion mathématique peut passer par une intégration pondérée par une fonction test ϕ suffisamment régulière \mathcal{C}^∞ et à support compact (c'est à dire l'adhérence⁶ de la partie non nulle de la fonction doit être compacte⁷). De plus, il est important de noter que toute fonction régulière peut être confondue avec sa distribution. En effet, sous réserve d'intégrabilité locale de la fonction f définie presque partout, l'intégrale suivante à toujours un sens pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact (voir [2] (Théorème 1.58)).

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx, \quad (2.14)$$

Cet exemple nous permet donc de confondre f et sa fonctionnelle T_f . Le cas d'une distribution s'écrivant à partir d'une moyenne pondérée de fonction, selon l'équation (2.14), s'appelle distribution régulière. Cependant, il n'est pas toujours possible d'exprimer une distribution comme une fonction régulière. L'exemple le plus classique étant la distribution de Dirac vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1, \quad (2.15)$$

Pour compléter cette introduction rapide à la théorie des distributions, il nous reste à évoquer la dérivation de tels objets. Ce point est rendu intuitivement simple dans le cas des distributions régulières. Par intégration par partie et sachant que chaque fonction test est à support compact, on peut toujours écrire :

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx \quad (2.16)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = -T_f(\phi') \quad (2.17)$$

Cet exemple montre que la dérivation n'est plus portée par la fonction f mais sur la fonction test ϕ , qui est par définition infiniment dérivable. On notera D_i^k la $k^{\text{ème}}$ dérivée d'une distribution selon la direction i , pour la différentiel de la dérivée partielle ∂_i^k . Dans tous les cas, nous pouvons écrire la $k^{\text{ème}}$ dérivée dans la direction i d'une distribution par ⁸

$$(D_i^k T)(\phi) = (-1)^k T(D_i^k \phi) \quad (2.18)$$

Si, de plus, on peut trouver une fonction $v_i^{(k)}$ localement intégrable qui vérifie, pour u localement intégrable, l'égalité⁹:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)D_i^k \phi(x)dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} v_i^k \phi(x)dx, \quad (2.19)$$

très bien accueillie dans la communauté scientifique [109]

⁶Le plus petit ensemble fermé contenant cet ensemble

⁷Une partie Ω est dite compacte si de tout recouvrement de Ω on peut extraire un sous recouvrement fini. Ou de manière équivalente, si de toute suite de $\Omega^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente dans Ω .

⁸voir [2] (Théorème 1.60)

⁹voir [2] (Théorème 1.62)

On dit que $D_i^k u = v_i^k$ est la $k^{\text{ème}}$ dérivée dans la direction i au sens faible de la fonction u . Là encore, si u est dérivable k fois, on peut confondre sa dérivée au sens faible avec sa dérivée au sens classique. Il est important de noter que la dérivée au sens faible peut exister sans que sa version classique n'ait de sens.

Cette possibilité de dérivation infinie rend la théorie des distributions très puissante dans les équations différentielles aux dérivées partielles.

Nous pouvons maintenant nous recentrer sur l'étude des équations de Navier-Stokes à l'aune de ces nouveaux concepts. D'une part, toute solution faible - au sens des distributions - des équations de Navier-Stokes vérifie les mêmes équations que le cas fort :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (2.20a) \\ \partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. & (2.20b) \end{cases}$$

Si on cherche une solution régulière aux équations de Navier-Stokes, on peut reformuler le problème en prenant la moyenne par toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact. Ainsi, toute solution régulière \mathbf{u} , au sens des distributions, des équations de Navier-Stokes vérifie par intégrations par partie:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \nabla \phi \, dV = 0, \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \partial_t \phi \, dV \, dt + \int_{\mathbb{R}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \nabla \phi \, dV \, dt &= - \int_{\mathbb{R}} \iiint_{\mathbb{R}^3} p \nabla \phi \, dV \, dt \\ - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\mathbb{R}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \Delta \phi \, dV \, dt + \int_{\mathbb{R}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f} \phi \, dV \, dt. & \quad (2.21b) \end{aligned}$$

Pour finir ce tour d'horizon, il nous faut introduire le produit de convolution, pour deux fonctions intégrables, on peut écrire (voir par exemple [144] p.170):

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad (2.22)$$

Cette convolution permet en particulier de transformer une fonction faiblement régulière en une fonction \mathcal{C}^∞ : il suffit de convoluer par une fonction \mathcal{C}^∞ . Ce point est à la base des calculs que nous effectuerons pour développer l'équation de l'énergie. De plus, en prenant une fonction suffisamment régulière ϕ et par contraction/dilatation, on peut filtrer en échelle. En diminuant l'échelle de filtrage, on peut tendre continuellement vers un point anguleux ou une discontinuité de la fonction initiale. Posons ϕ une fonction \mathcal{C}^∞ dont l'intégrale sur son domaine vaut 1. On peut construire la fonction ϕ_ℓ par contraction/dilatation de la fonction mère ϕ .

$$\phi_\ell \equiv \frac{1}{\ell^d} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell}\right), \quad (2.23)$$

avec d la dimension de l'espace¹⁰. On peut donc, sous réserve d'intégrabilité, convoluer la fonction par la famille de fonctions nouvellement créées. On note f^ℓ la valeur filtrée

¹⁰La jacobienne de la fonction $\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{\ell}$ fait apparaître un coefficient ℓ^d avec d la dimension de l'espace.

- ou régularisée - de la fonction f et on écrit¹¹:

$$f^\ell = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\ell(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.24)$$

2.1.5 Bilan d'énergie: une expression de la cascade turbulente

Dans le cadre du formalisme fort, c'est à dire si le champ de vitesse est régulier, on peut déduire le bilan d'énergie à partir des équations de Navier-Stokes. Nous nous plaçons toujours dans le cas incompressible. On peut développer le bilan d'énergie, en reprenant l'équation (2.7b) et en multipliant scalairement par \mathbf{u} , on déduit l'équation locale de l'énergie cinétique¹² E :

$$\partial_t E + u_j \partial_j \phi + \epsilon - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{jj}^2 E = u_j f_j, \quad (2.25)$$

avec $E = \frac{1}{2} u_i u_i$, le terme $\phi = E + p$ et le terme positif $\epsilon = \frac{1}{\text{Re}} (\partial_j u_i) \cdot (\partial_j u_i)$, appelée dissipation locale.

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\partial_t E + \partial_j J_j + \epsilon = u_j f_j, \quad (2.26)$$

avec $J_j = u_j E + u_j p - \partial_j E$.

Cette forme est intéressante car en intégrant sur le volume et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, dans l'hypothèse d'un état stationnaire ($\partial_t E = 0$), on trouve que :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \epsilon dV = \int_{\Omega} u_j f_j dV, \quad (2.27)$$

Par ailleurs, au bord du domaine à cause de la condition de non glissement, et sous réserve que l'ensemble du domaine ne bouge pas (se référer à l'étude de [141]), l'intégrale de \mathbf{J} sur $\partial\Omega$ est nulle. Sous ces hypothèses et dans un état stationnaire, il s'opère donc un équilibre entre le terme de production et le terme de dissipation.

$$\int_{\Omega} \epsilon dV = \int_{\Omega} u_j f_j dV. \quad (2.28)$$

Que l'on peut également réécrire de la manière suivante,

$$P_{\text{inj}} = P_{\text{diss}} \equiv \langle \epsilon \rangle, \quad (2.29)$$

Dans le cadre de la théorie de Kolmogorov et de la cascade turbulente telle que l'imagine L. F. Richardson au travers de son célèbre poème ([142] p.66), nous avons la figure du spectre d'énergie (Figure 2.1) faisant apparaître les différentes zones (injection, inertielle et dissipative).

¹¹C'est en ce sens que cette décomposition en échelle se rapproche de la transformation en ondelettes initialement introduite dans le domaine de la sismique par J. Morlet [118] puis largement utilisée en turbulence [67].

¹²On utilise l'identité $u_i \partial_{jj} u_i = -(\partial_j u_i) \cdot (\partial_j u_i) + \partial_{jj} \frac{1}{2} u_i u_i$

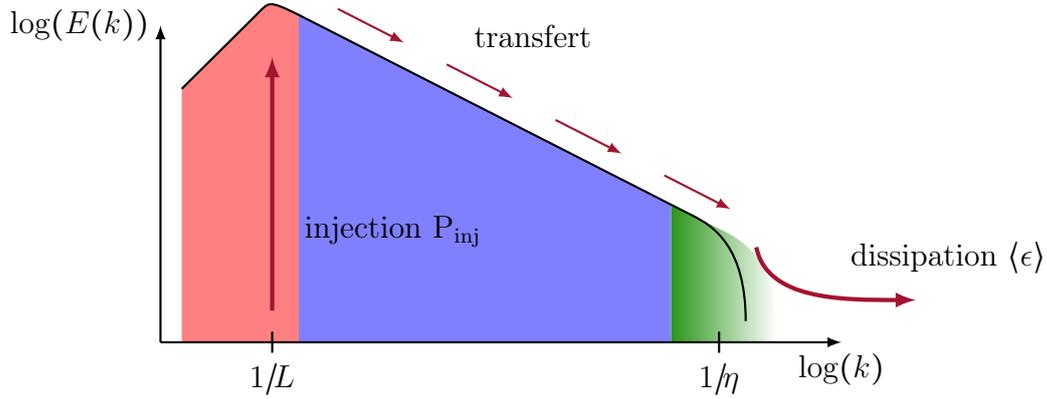


Figure 2.1 – Spectre d’énergie illustrant le principe de la cascade de Richardson. On distingue trois zones différentes, la première en rouge correspond à la zone étendue des échelles d’injection, en bleu zone inertielle dans lequel le transfert d’énergie s’effectue sans perte, les effets visqueux y sont négligeables, et la dernière zone, en vert, correspond à la zone dissipative autour de l’échelle de Kolmogorov η . Il s’agit des échelles pour lesquelles le terme de dissipation d’énergie est dominant.

Dans le formalisme faible, en l’absence de conditions sur la régularité de la fonction, nous pouvons réécrire l’équation de conservation de l’énergie au sens faible, suivant la même idée que celle développée par J. Leray dans [103]. On trouve alors l’inégalité suivante, un développement complet est énoncé dans le livre de P. L. Lions [106]. Soit \mathbf{u} une solution faible de l’équation de Navier-Stokes dont on sait depuis J. Leray [103, 104] qu’elle admet au moins une solution au sens faible :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left\{ \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + p \right\} \right) - \nu \Delta \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}, \quad (2.30)$$

Cette inégalité ouvre la voie à une nouvelle hypothèse dans laquelle l’équilibre énergétique serait rompu et une nouvelle quantité $D(\mathbf{u})$ devrait être ajoutée pour maintenir l’équilibre de ce bilan. On pose,

$$D(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - \partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left\{ \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - p \right\} \right) + \nu \Delta \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - \nu |\nabla \mathbf{u}|^2, \quad (2.31)$$

Cette nouvelle quantité, d’un point de vue purement physique, peut-être vue comme un flux d’énergie qui devrait s’annuler à une certaine échelle dite de régularisation pour un champ de vitesse totalement régulier¹³. Intuitivement, l’irrégularité du champ de vitesse doit créer un flux positif, c’est à dire un terme dissipatif¹⁴. La question est finalement de savoir si cette quantité $D(\mathbf{u})$ est strictement positive ou nulle comme dans le cas d’une distribution régulière?

¹³ *a minima* C^2 .

¹⁴ Il n’y a pas de création d’énergie *ex nihilo*.

A ce jour, cette question reste ouverte. Néanmoins, cette inégalité a conduit J. Duchon et R. Robert [59] à réécrire le bilan d'énergie au sens faible, indépendamment pour le modèle de Navier-Stokes ou d'Euler, sous la forme :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + p \right) \right) + D(\mathbf{u}) = 0, \quad (2.32)$$

Si \mathbf{u}^ν est un ensemble de solutions paramétrées par la viscosité ν , on a

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} D(\mathbf{u}^\nu) = D(\mathbf{u}) \geq 0, \quad (2.33)$$

Comme le font remarquer J. Duchon et R. Robert [59], une telle construction conduit nécessairement à une perte locale d'énergie. En d'autres termes, le manque de régularité du champ de vitesse ne peut, au mieux, que dégrader davantage l'énergie et ne peut pas en créer, ce qui semble raisonnable d'un point de vue physique. De plus, il est à noter que cette dissipation dans le cas limite du modèle d'Euler, ne peut pas dépendre de la viscosité. Elle est donc uniquement une conséquence de manque de régularité du champ de vitesse. La question est finalement de savoir s'il existe une solution faible aux équations d'Euler vérifiant $D(\mathbf{u}) \neq 0$ [59].

En pratique, à nombre de Reynolds fini, on peut dissocier le terme de dissipation locale dans le cadre du formalisme faible en deux contributions: une première dépendant de la viscosité que J. Duchon et R. Robert nomment \mathcal{D}_ℓ^ν et une deuxième dépendant de la régularité du champ qu'ils appellent \mathcal{D}_ℓ^I .

Nous utiliserons les quantités comme introduites dans l'article de B. Dubrulle et al. [58] en suivant le développement de l'équation de l'énergie proposé par J. Duchon et R. Robert [59].

Le champ de vitesse u_i filtré à l'échelle ℓ , noté u_i^ℓ correspond à :

$$\mathbf{u}^\ell(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_\ell(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (2.34)$$

avec $\phi_\ell(\mathbf{r})$ définie à partir d'une fonction mère $\phi(\mathbf{r}) \equiv C \exp(-\mathbf{r}/2a)$ par $\phi_\ell(\mathbf{r}) = \ell^{-3} \phi(\mathbf{r}/\ell)$.

Notons E_ℓ l'énergie correspondant à l'échelle ℓ qui s'exprime :

$$E_\ell = \frac{1}{2} \mathbf{u}^\ell \mathbf{u}, \quad (2.35)$$

Le bilan d'énergie de cette quantité suit l'équation suivante :

$$\partial_t E^\ell + \partial_j J_j^\ell = -\mathcal{D}_\ell^I - \mathcal{D}_\ell^\nu, \quad (2.36)$$

avec

$$J_i^\ell = u_i E^\ell + \frac{1}{2} (p^\ell u_i + p u_i^\ell) + \frac{1}{4} ([u_i u_j u_j]^\ell - u_i [u_j u_j]^\ell) - \frac{1}{\text{Re}} \partial_i (u_i^\ell \partial_j u_i - u_i \partial_j u_i^\ell), \quad (2.37a)$$

$$\mathcal{D}_\ell^I = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta_\xi \mathbf{u} (\delta_\xi \mathbf{u})^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.37b)$$

$$\mathcal{D}_\ell^\nu = \frac{1}{2\text{Re}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) (\delta_\xi \mathbf{u})^2 d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.37c)$$

La fonction ϕ_ℓ est un filtre à l'échelle ℓ , $\delta_\xi \mathbf{u}$ correspond à l'incrément de vitesse entre les points \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$. Le terme \mathcal{D}_ℓ^I est un terme de flux qui correspond au transfert d'énergie inter-échelle. Il traduit le transfert de l'énergie depuis les échelles d'injections, aux grandes échelles, vers les échelles dissipatives, au voisinage de l'échelle de Kolmogorov. En ceci, la turbulence apparaît comme un système thermodynamique hors-équilibre. Enfin, \mathcal{D}_ℓ^ν est le terme de dissipation local d'énergie.

Le coefficient d'irréversibilité eulérien est défini par la somme des contributions \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν par :

$$\mathcal{I}_\mathcal{E}^\ell(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}_\ell^I + \mathcal{D}_\ell^\nu, \quad (2.38)$$

Dans le cas limite du nombre de Reynolds infini, le coefficient de dissipation local est obtenu à résolution infinie, en faisant tendre vers zéro le rayon de la boule sur laquelle est effectuée l'estimation de \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν .

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{I}_\mathcal{E}^\ell(\mathbf{x}, t). \quad (2.39)$$

2.1.6 Phénomène d'intermittence énergétique

D'après la théorie de Kolmogorov développée en 1941 [96] les phénomènes physiques liés à la turbulence dépendent uniquement des paramètres $\langle \epsilon \rangle$, ν et l'échelle r . Dans son article fondateur, Kolmogorov ajoute que dans la zone inertielle, c'est-à-dire pour des échelles à la fois suffisamment petites par rapport à l'échelle inertielle et suffisamment grande par rapport à l'échelle de Kolmogorov η , le comportement du transfert devient indépendant de la viscosité.

L'une des quantités les plus étudiée est la fonction de structure d'ordre p , définie de la manière suivante :

$$S_p(\mathbf{r}) = \langle (\delta_r u^\parallel)^p \rangle, \quad (2.40)$$

avec $u^\parallel = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ et $r = \|\mathbf{r}\|$. L'incrément δ_r entre \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ est défini par $\delta_r u^\parallel = u^\parallel(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u^\parallel(\mathbf{x})$.

Dans son article de 1941, Kolmogorov obtient le comportement de la fonction de structure d'ordre p par analyse dimensionnelle,

$$S_p(\mathbf{r}) \propto \langle \epsilon \rangle r^{p/3}, \quad (2.41)$$

D'un point de vue plus théorique, on peut relier la fonction de structure d'ordre trois et la fonction de structure d'ordre deux dans le cas homogène et isotrope [15, 176].

$$3\partial_t S_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^4} \partial_r \left(r^4 \left(\frac{6}{\text{Re}} \partial_r S_2(\mathbf{r}) - S_3(\mathbf{r}) \right) \right) - 4\langle \epsilon \rangle. \quad (2.42)$$

Cette équation peut être rapprochée de l'équation de l'énergie et de la cascade turbulente. Le terme responsable du flux d'énergie est contenu dans le terme S_3 et le spectre d'énergie correspond à la transformée de Fourier de S_2 . Néanmoins, à cause des problèmes de fermeture inhérents à la turbulence, l'équation (2.42) reste difficilement exploitable et ne permet pas d'en déduire le spectre en énergie.

D'autre part, l'équation (2.42), dans le cas d'un nombre de Reynolds infini, et sous l'hypothèse de stationnarité des statistiques, permet de déduire la relation simple :

$$S_3(\mathbf{r}) = -\frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle r, \quad (2.43)$$

Cette loi est une des rares lois obtenues analytiquement pour les écoulements turbulents est vérifiée la relation (2.41). En passant en espace de Fourier, cette dernière correspond au spectre en loi de puissance suivant une loi $k^{-5/3}$. Néanmoins, de nombreuses expériences [7, 24, 54, 90] et simulations numériques [44, 178] (voir également [58] pour une étude bibliographique) montrent que la fonction de structure d'ordre p suit en réalité une loi de puissance dont l'exposant est inférieur à $p/3$. Dans la nouvelle version de sa théorie en 1963, A. N. Komogorov et A. M. Oboukhov [124] ont introduit un écart à cette loi d'auto-similarité par un exposant de correction

$$S_p(\mathbf{r}) \propto \langle\epsilon\rangle r^{\zeta_p}, \quad (2.44)$$

avec $\zeta_p = p/3 + \tau_p$, τ_p le coefficient d'intermittence et $\zeta_3 = 1$.

Comme rappelé dans l'article de S. Stefano et Ch. Meneveau [39], cet écart à la loi originelle de Kolmogorov est associé à l'inhomogénéité spatiale du taux de dissipation local ϵ . La répartition spatiale de cette quantité locale fait apparaître des zones très localisées (en temps et en espace) de forte intensité qui correspondent à des événements rares [71] - ce phénomène correspond à l'intermittence énergétique. Cependant, comme rappelé dans le chapitre 8 de [71] (p. 129), plusieurs raisons peuvent expliquer cet écart à la loi de Kolmogorov K41 dans la zone inertielle. La zone étudiée n'est pas uniquement la zone inertielle, une perte d'homogénéité et/ou d'anisotropie, violation de l'hypothèse de finitude de la dissipation d'énergie lorsque $\nu \rightarrow 0$, mauvaise estimation du taux de dissipation moyenne $\langle\epsilon\rangle$ et mauvaise qualité des données.

Une des approches pour comprendre l'intermittence est basée sur le modèle multifractal [129], [114] voir également la discussion [71] (partie 8.5.3) donnant une loi d'invariance d'échelle locale.

2.2 Point de vue lagrangien

Le point de vue lagrangien est généralement adopté pour décrire les phénomènes de transports tels que pour les polluants, la sédimentation, ou encore dans des problèmes liés à la combustion... Selon ce point de vue, l'observateur n'est plus fixe par rapport au référentiel du laboratoire - comme dans le cas eulérien - mais suit l'écoulement comme s'il était attaché à une particule fluide¹⁵. Bien que cette approche semble *a priori* plus intuitive, en pratique elle soulève de nombreux problèmes tant par l'aspect expérimental et numérique que du point de vue théorique. Expérimentalement, l'étude lagrangienne nécessite de pouvoir suivre en temps réel un grand nombre de traceurs

¹⁵La particule fluide est un objet théorique suffisamment petit pour pouvoir le confondre avec son centre de masse et suffisamment grand pour pouvoir assurer l'hypothèse du milieu continu.

sur des temps longs tout en assurant à la fois une bonne précision spatiale et temporelle. Ces deux derniers points impliquent d'être très méticuleux dans la prise de mesure. L'étude expérimentale lagrangienne à haute concentration de traceurs nécessite à la fois des outils de pointes (laser et caméras rapides), une grande capacité de stockage et des algorithmes de reconstruction performants et optimisés. Les études expérimentales lagrangiennes ont été développées très tôt mais les récentes révolutions dans la rapidité d'acquisition des caméras capables d'accéder à une bonne résolution temporelle des trajectoires expliquent en parti leurs récents regain d'intérêt. Enfin, sur l'aspect théorique, le caractère très erratique des trajectoires lagrangiennes pose des difficultés conceptuelles, comme par exemple dans la définition du champ de vitesse, comme l'adresse L.F. Richardson [143] lorsqu'il questionne "Does the wind possess a Velocity?".

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le point de vue lagrangien s'attache à suivre une particule fluide. En pratique, on suit l'évolution au cours du temps de "traceurs passifs" - par exemple du fluide coloré, des traceurs radioactifs, de la fumée, des gouttelettes de liquide ou même des ballons - qui vont différencier les particules fluides et les suivre. Les différents critères pour définir un bon traceur seront développés dans la suite. Dans notre expérience, nous suivons des particules de polystyrène de petites tailles ($10\ \mu\text{m}$ et $5\ \mu\text{m}$) qui seront les traceurs de notre étude lagrangienne. En outre, la vision de la turbulence lagrangienne offre une nouvelle grille de lecture des phénomènes physiques. Cette étude est relativement récente compte tenu des problèmes pratiques que pose ce genre d'expérience. Les équations des écoulements turbulents dans le cadre du point de vue lagrangien ne seront pas développées, nous renvoyons le lecteur intéressé au chapitre 5 du livre de A. S. Monin et A. M. Yaglom [116].

Dans cette partie, nous traiterons de la turbulence du point de vue lagrangien et nous ferons le lien avec les singularités ou quasi-singularités développées précédemment dans le formalisme eulérien. Nous ferons dans un premier temps un état de l'art de l'étude expérimentale de la turbulence du point de vue lagrangien. Nous évoquerons en particulier la diffusion de particules simples et la diffusion de paires de particules. Nous développerons ensuite une étude statistique sur la dispersion de particules simples qui nous a permis d'évaluer le temps de décorrélation lagrangien sur l'ensemble de nos données. Cette partie nous permettra d'illustrer le problème expérimental lié à l'anisotropie du volume de reconstruction. Dans une deuxième partie, nous aborderons la notion de dissymétrie temporelle en turbulence lagrangienne dans le cas de l'étude de dispersion de paires de particules. A cette occasion, nous développerons le concept d'irréversibilité et nous évoquerons le lien avec la dissipation. Nous exposerons les principaux résultats de la validation expérimentale que nous avons conduite sur le lien entre coefficient d'irréversibilité et dissipation, lien qui a été développé récemment uniquement en théorie. Dans un troisième partie, nous développerons les aspects géométriques avec la torsion et la courbure des trajectoires lagrangiennes. En particulier, nous verrons dans quelle mesure ces quantités sont intéressantes pour l'étude et la compréhension de la turbulence. A cette occasion, nous développerons les techniques de calculs employés et nous énoncerons quelques résultats. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous introduirons l'article intitulé "Riding the most irregular paths in

turbulence”. Nous développerons également quelques résultats complémentaires à ce travail pour faire le lien entre trajectoires lagrangiennes et dissipation locale.

2.2.1 Dispersion de particules et de paires de particules.

Historiquement, l’étude théorique et expérimentale du point de vue lagrangien en mécanique des fluides débute avec le travail de G. I. Taylor en 1922 [171] dans lequel il étudie statistiquement le transport de particules uniques dans un écoulement turbulent. Il apparaît rapidement que cette étude est trop restrictive. En particulier, elle ne prend pas en compte l’aspect des corrélations spatiales du problème¹⁶, l’étude statistique de N particules étudiées séparément donne accès à une diffusion moyenne mais ne permet pas d’accéder aux fluctuations. C’est pour obtenir une vision plus fine de la réalité physique que dès 1926, L. F. Richardson publie une étude statistique traitant de la séparation de paires de particules dans un écoulement turbulent. A partir de 1949, G. K. Batchelor [16, 20] répond mathématiquement aux intuitions de G. I. Taylor et L. F. Richardson et développe l’étude théorique de la turbulence statistique. En particulier, il pose les bases de l’étude stochastique de la turbulence qui sera par la suite reprise et complétée par A. N. Kolmogorov et A. M. Oboukhov. Les processus stochastiques, en particulier Markovien [94, 95, 167], trouvent alors une place dans l’étude de la turbulence.

Le point de vue lagrangien correspond à la connaissance de la position attachée à une particule fluide au cours du temps. On pose \mathbf{x}_0 sa position à l’instant initial $t = t_0$ et on note $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0)$ la position à l’instant t de la particule en position \mathbf{x}_0 à l’instant t_0 .

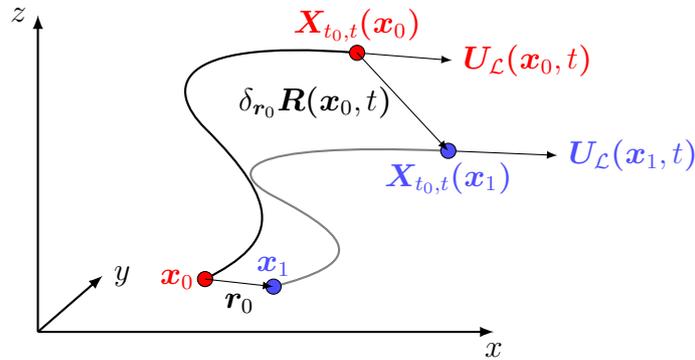


Figure 2.2 – Deux particules lagrangiennes \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_1 initialement séparées d’un vecteur \mathbf{r}_0 . A l’instant t , la particule 0 (resp. 1) est à la position $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0)$ (resp. $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_1)$) avec une vitesse lagrangienne $\mathbf{U}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_0, t)$ (resp. $\mathbf{U}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_1, t)$). A l’instant t , les deux particules sont séparées d’un vecteur $\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(\mathbf{x}_0, t)$.

On définit la vitesse lagrangienne $\mathbf{U}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0, t))$ par la vitesse instantanée de la particule fluide à la position $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0, t)$ à l’instant t . Cette vitesse est

¹⁶“In atmosphere spreading dot will not serve as an element from which general distributions can be built up.” [143]

estimée en pratique par dérivation temporelle des positions des particules le long des trajectoires. La vitesse eulérienne $\mathbf{U}_\mathcal{E}$ et la vitesse lagrangienne $\mathbf{U}_\mathcal{L}$ coïncident systématiquement au même point matériel de la particule fluide à l'instant t . Ce qui fournit un premier lien entre point de vue eulérien et point de vue lagrangien.

$$\mathbf{U}_\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0), t) = \mathbf{U}_\mathcal{E}(\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0), t) \quad (2.45)$$

Un deuxième lien est obtenu avec la relation permettant de déduire la position lagrangienne à partir du champ de vitesse eulérien par intégration.

$$\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}_\mathcal{E}(\mathbf{X}_{t_0, t'}(\mathbf{x}_0), t') dt', \quad (2.46)$$

Dans cette deuxième relation, il faut noter que l'intégration du champ de vitesse eulérien est faite sur des positions qui évoluent au cours du temps. Cette intégration est difficile à réaliser en pratique.

Comme on le voit, le point de vue lagrangien et le point de vue eulérien sont deux facettes de la même réalité physique, néanmoins, cette différence donne deux visions complémentaires pour l'étude des phénomènes turbulents.

2.2.1.1 Problème à un point

Le problème à un point correspond à l'étude menée initialement par G. I. Taylor. Dans l'hypothèse de turbulence stationnaire homogène et isotrope, la séparation par rapport au point d'origine est entièrement déterminée par la fonction de corrélation lagrangienne des vitesses $R_{11}^L(\tau)$. La fonction de corrélation de vitesse lagrangienne définie pour tout i, j par :

$$R_{ij}^L(\tau; t, \mathbf{x}_0) \equiv \frac{\langle u_i(\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0), t) u_j(\mathbf{X}_{t_0, t+\tau}(\mathbf{x}_0), t + \tau) \rangle}{\langle u_i(\mathbf{x}_0) u_j(\mathbf{x}_0) \rangle} \quad (2.47)$$

Dans l'hypothèse stationnaire homogène et isotrope [172], $R_{ij}^L(\tau; t, \mathbf{x}_0) = R_{ij}^L(\tau)$.

En suivant cette hypothèse, on peut déterminer l'écartement par rapport au point source par intégration (voir [171] Eq. (12) et (18)):

$$\langle (\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)^2 \rangle = 2\sigma_u^2 \int_0^t \int_0^{\tau'} R_{11}^L(\tau) d\tau d\tau', \quad (2.48)$$

avec σ_u l'écart-type de la vitesse et R_{ij} la fonction de corrélation de vitesse lagrangienne définie par la formule (2.47).

Cette formule donne la loi comportementale de dispersion des particules émanant d'un point source. Ce cas s'applique par exemple à l'étude de transports de polluants ou de fumées sortant d'une cheminée. Dans ses travaux de 1922, G. I. Taylor estime que cette corrélation suit une loi exponentielle [171], (voir également [29, 152]).

$$\langle (\mathbf{X}_{t_0, t}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)^2 \rangle = 2\sigma_u^2 T_L (t + T_L (e^{-t/T_L} - 1)), \quad (2.49)$$

avec T_L le temps de corrélation lagrangien.

La relation (2.49) donne deux comportements distincts. Le premier pour les temps courts: un développement limité assure que l'écartement quadratique moyen suit la relation

$$\langle (\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)^2 \rangle \sim \sigma_u^2 t^2.$$

L'écartement moyen - égal à la racine de l'écart quadratique moyen - est donc ballistique, c'est-à-dire linéaire en fonction du temps. Le second pour des temps longs, on obtient :

$$\langle (\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0)^2 \rangle \sim 2\sigma_u^2 T_L t.$$

L'écartement se rapproche d'un mouvement brownien dont le déplacement par rapport à l'origine est proportionnel à \sqrt{t} , faisant également apparaître un coefficient de diffusion $D = \sqrt{2\sigma_u^2 T_L}$.

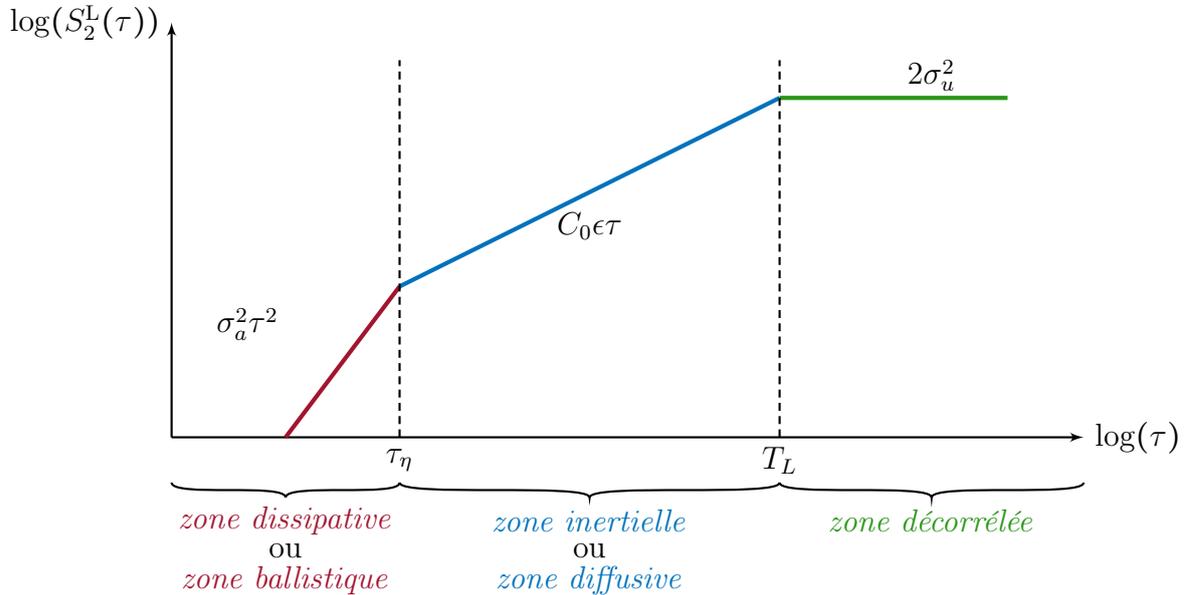


Figure 2.3 – Fonction de structure lagrangienne d'ordre deux avec $S_2^L(\tau) = \langle u_1(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0), t) u_1(\mathbf{X}_{t_0,t+\tau}(\mathbf{x}_0), t + \tau) \rangle$. On distingue les trois zones précédemment évoquées: la zone ballistique pour les temps courts, la zone inertielle pour les temps intermédiaires et la zone décorrélée avec σ_a^2 la variance de l'accélération, C_0 la constante de Kolmogorov correspondant au pré-facteur de loi d'échelle de la fonction de structure lagrangienne d'ordre 2, σ_u^2 variance de la vitesse, τ_η temps de Kolmogorov et T_L temps lagrangien.

2.2.1.2 Problème à deux points

Dans l'étude de la dispersion de paires de particules, on sélectionne deux particules fluides matérialisées en pratique par deux traceurs pour lesquels on suit l'histoire de l'écartement au cours du temps. En considérant deux particules $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_1)$ et $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_2)$, avec de plus \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 séparés à l'instant initial $t = t_0$ d'un vecteur \mathbf{r}_0 . Le champ de vitesse eulérien associé à la position de chaque particule au cours du temps est noté $\mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_1), t)$ pour la particule 1 (resp. $\mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_2), t)$ pour la particule 2) et l'accélération $\mathbf{a}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_1), t)$ pour la particule 1 (resp. $\mathbf{a}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_2), t)$ pour la particule 2).

On peut construire la position relative de la deuxième particule par rapport à la première :

$$\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_0) - \mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}), \quad (2.50)$$

En particulier, par définition $\mathbf{r}_0 \equiv \delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(\mathbf{x}, t_0)$ est la séparation vectorielle initiale de distance r_0 et la distance $\delta_{\mathbf{r}_0} R(t) \equiv \|\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(t)\|$ correspond à la distance entre les deux particules au cours du temps.

Intuitivement, la séparation initiale devrait jouer un rôle sur le comportement de la dispersion au cours du temps. Par exemple, deux particules initialement très proches seront soumises localement et pendant des temps très courts à un champ de vitesse très corrélé et les deux particules devraient donc se suivre. A l'inverse, si initialement les deux particules sont très éloignées, elles seront soumises à deux champs de vitesses partiellement voire totalement décorrélés avec un comportement plus aléatoire ressemblant à celui d'un mouvement brownien.

Dans le cas où r_0 est petit et pour des temps très courts, sous réserve que le champ de vitesse eulérien soit développable en série de Taylor à l'ordre 1, on obtient une séparation linéaire aux temps courts. Ce comportement n'est valable que pour les temps courts puisque le caractère chaotique des équations de Navier-Stokes devrait ensuite éloigner rapidement les deux particules l'une de l'autre.

Comme rappelé dans l'étude bibliographique de J. Salazar et R. Collins [152], l'étude de la dispersion de paires de particules distingue trois zones spatiales selon leur distance de séparation à l'instant t : une zone dissipative dans laquelle $\delta_{\mathbf{r}_0} R(t) \ll \eta$ avec η l'échelle de Kolmogorov, une zone inertielle dans laquelle $\eta \ll \delta_{\mathbf{r}_0} R(t) \ll L$ avec L une longueur caractéristique des grandes échelles et une zone diffusive $\delta_{\mathbf{r}_0} R(t) \gg L$. Remarquons que nous faisons apparaître la distance entre paires de particules au cours du temps, chaque paire peut évidemment explorer différentes zones d'après cette définition ce qui rend extrêmement complexe l'étude générale.

Dans la zone dissipative, le caractère chaotique de la turbulence provoque un éloignement exponentiellement rapide des deux particules initialement proches ($r_0 \ll \eta$), d'après les travaux de G. K. Batchelor [21] (voir également l'étude bibliographique de B. Sawford [154] et A. S. Monin & A. M. Yaglom [117] section 24.5). La loi de séparation de la paire de particules dans cette zone s'écrit alors :

$$\langle \|\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0\|^2 \rangle \approx r_0^2 \exp(\zeta t), \quad t \ll t_\eta \quad \text{et} \quad r_0 \ll \eta, \quad (2.51)$$

avec $\zeta \propto \tau_\eta^{-1}$. Cette relation a été affinée par la suite [147]. On remarque de plus que

cette loi de séparation conserve le “souvenir” de l’écartement initial par le terme r_0 . D’après l’équation (2.51), l’écart quadratique moyen atteint l’échelle de Kolmogorov η en un temps τ_{exp} donné par la relation $\tau_{\text{exp}} \approx \tau_\eta \ln(r_0/\eta)$, avec τ_η le temps de Kolmogorov, η l’échelle de Kolmogorov et r_0 la séparation initiale des deux particules (voir [154]).

Dans la zone inertielle, on distingue deux régimes: un premier aux temps courts, nommé régime de Batchelor ou régime ballistique, dans lequel les particules s’écartent linéairement avec le temps. Un deuxième régime aux temps longs, nommé régime de Richardson ou Richardson-Oboukhov [143], à partir d’un temps de transition, t_B , l’écart quadratique moyen suit une loi en t^3 , souvent nommée régime super-diffusif¹⁷. Le temps t_B est nommé temps de Batchelor. Dimensionnellement, par application du théorème de E. Buckingham [35] d’une part et par application de la première hypothèse de similarité de Kolmogorov [96]¹⁸ d’autre part, le temps de Batchelor est donné par $t_B \propto r_0^{2/3} \epsilon^{-1/3}$. On peut résumer la loi suivie par l’écart-type de la séparation par la relation (voir [29]):

$$\langle \|\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0\|^2 \rangle = \begin{cases} \frac{11}{3} C_2 r_0^{2/3} \epsilon^{2/3} t^2, & t \ll t_B, \\ g_f \epsilon |t|^3, & t < 0, t_B \ll |t| \ll T_L, \\ g_b \epsilon |t|^3, & t > 0, t_B \ll |t| \ll T_L, \\ Dt, & T_L \ll t. \end{cases} \quad (2.52)$$

avec C_2 la constante de Kolmogorov correspondant au préfacteur de la fonction de structure eulérienne d’ordre deux¹⁹ pour l’incrément de vitesse longitudinale avec $C_2 \approx 2.1$ valeur faisant consensus pour diverses expériences (voir une compilation dans [165]), g_f et g_b sont les coefficients de Richardson *forward* ($t < 0$) et *backward* ($t > 0$), et D un coefficient de diffusion.

Par ailleurs, de nombreuses études [89, 152] confirment que le coefficient g est différent pour une séparation antérieure (à temps négatif) avec un coefficient g_f et postérieure (à temps positif) avec un coefficient g_b . Cette dissymétrie apparaît comme une conséquence de l’irréversibilité des équations de Navier-Stokes à viscosité non-nulle, ou de manière équivalente, de la brisure de symétrie temporelle $t \rightarrow -t$ causée par le laplacien dans les équations de Navier-Stokes. Ce dernier point semblant néanmoins persister à viscosité nulle d’après les récentes études sur la stochasticité spontanée [108, 175]. On remarquera également que dans le régime de Richardson-Oboukhov, l’écoulement perd la “mémoire” de l’écartement initial.

Enfin, plusieurs études montrent une différence de comportement entre turbulence 2D et turbulence 3D. En deux dimensions, $g_b < g_f$ (voir [64]) alors que pour le cas

¹⁷En référence aux processus stochastiques pour lesquels un écart quadratique moyen faisant apparaître une loi linéaire est diffusive, sous-diffusive s’il suit une loi en t^α avec $\alpha < 1$ et super-diffusive pour $\alpha > 1$

¹⁸Pour laquelle toutes les grandeurs caractéristiques pour des petites structures ne sont fonctions que de la viscosité ν et du taux de dissipation moyen ϵ

¹⁹La fonction de structure d’ordre deux longitudinale est définie par :

$$S_2^{\parallel}(\mathbf{r}) = \langle \|\delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\|^2 \rangle \quad (2.53)$$

avec $\delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$

de la dimension trois, plusieurs études [25, 32] semblent confirmer que $g_f < g_b$. On retrouve là encore la distinction 2D/3D qui apparaissait pendant la discussion sur l'unicité des solutions des équations d'Euler et de Navier-Stokes. Cette différence se retrouve également dans la phénoménologie de la cascade d'énergie dans laquelle la turbulence 2D provoque une cascade inverse alors qu'en trois dimensions l'énergie se propage par cascade directe. La différence 2D/3D, si elle est confirmée, aura en outre des conséquences importantes dans des domaines faisant intervenir du mélange comme la compréhension des dispersions de polluants ou le mélange au niveau de la combustion.

2.2.2 Dissymétrie temporelle : l'irréversibilité lagrangienne.

Dans cette partie nous développerons la notion de dissymétrie lagrangienne. Ce sujet a déjà été évoqué dans le problème à deux points (voir équation (2.52)). Cependant, cette dissymétrie n'est pas uniquement un effet observable sur le champ lagrangien, elle s'observe également du point de vue eulérien. Tout d'abord, rappelons que l'énergie est injectée aux grandes échelles, cette énergie transite de proche en proche puis est finalement dissipée (sous forme de chaleur) aux petites échelles. Ce transfert d'énergie inter-échelles, nous le savons, est lié au terme de flux, lui même relié au taux de dissipation local ϵ . En trois dimensions, on observe une cascade directe, en moyenne l'énergie est transférée des grandes échelles vers les petites. Par renversement du temps $t \rightarrow -t$, l'énergie invariante par cette symétrie, va suivre encore une cascade directe, ainsi, à viscosité non-nulle *a minima*, la dissipation brise la symétrie temporelle: les écoulements visqueux sont irréversibles.

Pour faire le lien entre dissipation et irréversibilité, nous définissons dans un premier temps vitesse et accélération relatives d'une particule par rapport à une deuxième :

$$\delta_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}), t), \quad (2.54a)$$

$$\delta_{\mathbf{r}}\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), t) - \mathbf{a}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}), t). \quad (2.54b)$$

Dans l'article de Mann et al. [110], sous l'hypothèse de stationnarité statistique²⁰ et d'homogénéité locale²¹ - pour des séparations restant dans la zone inertielle :

$$\langle \delta_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta_{\mathbf{r}}\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \rangle \approx -2\epsilon, \quad (2.55)$$

ou de manière équivalente :

$$\left. \frac{d}{dt} \langle |\delta_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle \right|_{t=t_0} \approx -4\epsilon, \quad (2.56)$$

avec $\langle \cdot \rangle$ une moyenne temporelle, spatiale ou d'ensemble.

²⁰indépendance temporelle des statistiques

²¹indépendance des statistiques selon la position

On peut alors, suivant [128], faire un développement limité de la loi de séparation (dans l'hypothèse d'un champ de vitesse régulier dont l'écart est développable en série de Taylor) :

$$\langle \|\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0\|^2 \rangle = S_2(\mathbf{r}_0)t^2 + \langle \delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \cdot \delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0) \rangle t^3 + \mathcal{O}(t^4), \quad (2.57)$$

avec $S_2(\mathbf{r}) = \langle \delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \cdot \delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \rangle$ la fonction de structure eulérienne d'ordre 2, indépendante de \mathbf{x} sous l'hypothèse d'homogénéité.

Dans cette expression, l'ordre 3 en temps est responsable de la dissymétrie et rend l'écoulement irréversible.

En étudiant plus en détail cette différence de dispersion de paires antérieure-postérieure, J. Jucha et al. [89] montrent un bon accord entre les expériences et les simulations numériques pour $R_\lambda \in [270, 690]$:

$$\frac{\langle \Delta_{\mathbf{r}_0} R(-t)^2 - \Delta_{\mathbf{r}_0} R(t)^2 \rangle}{r_0^2} = -2 \frac{\langle \delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \cdot \delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0) \rangle}{r_0^2} t^3 + \mathcal{O}(t^5), \quad (2.58)$$

avec $\Delta_{\mathbf{r}_0} R(t) \equiv \|\delta_{\mathbf{r}_0} \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0\|$.

Dans la relation précédente, on voit que l'assymétrie temporelle de dispersion antérieure-postérieure est reliée (d'après l'équation (2.55)) au taux de dissipation moyen ϵ , quantité qui reste non-nulle dans la limite de la viscosité nulle (ou du nombre de Reynolds infini) d'après la loi zéro de la turbulence [126]. A partir de ce constat, T. Drivas [57] construit mathématiquement une quantité permettant la quantification de cette assymétrie en s'affranchissant des hypothèses sur la régularité du champ de vitesse.

Selon les définitions (2.50) (voir également 2.2), on peut construire un écartement quadratique moyen par moyenne pondérée par une fonction ϕ^ℓ sur l'espace (ici \mathbb{R}^3).

$$\Delta_\ell^{\pm\tau}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) \|\delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{X}_{t, t \pm \tau}(\mathbf{x}) - \delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{X}_{t, t}(\mathbf{x})\|^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.59)$$

avec ϕ^ℓ obtenue par contraction/dilatation d'une fonction à support compact ϕ unitaire vérifiant $\iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$ soit $\phi^\ell = \ell^{-3} \phi(\mathbf{r}/\ell)$. Dans cette étude, nous utiliserons une fonction de Heaviside :

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.60)$$

Cet écart moyen dans le régime d'Oboukhov-Richardson suit une loi en t^3 . On peut donc construire un coefficient d'irréversibilité $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t)$ par passage à la limite selon τ :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_\ell^{-\tau}(\mathbf{x}, t) - \Delta_\ell^{\tau}(\mathbf{x}, t)}{\tau^3}, \quad (2.61)$$

En pratique, ce coefficient est estimé pour chaque particule à la position \mathbf{x} à l'instant t . Dans un premier temps, on cherche l'ensemble des particules dans la boule $\mathcal{B}_\ell(\mathbf{x})$ de centre \mathbf{x} et de rayon ℓ . On calcule ensuite la moyenne sur toutes les paires possibles dans $\mathcal{B}_\ell(\mathbf{x})$ de la quantité $f(\mathbf{x}; t, \tau_n) = \langle \Delta_\ell^{-\tau_n}(\mathbf{x}, t) - \Delta_\ell^{\tau_n}(\mathbf{x}, t) \rangle$ avec

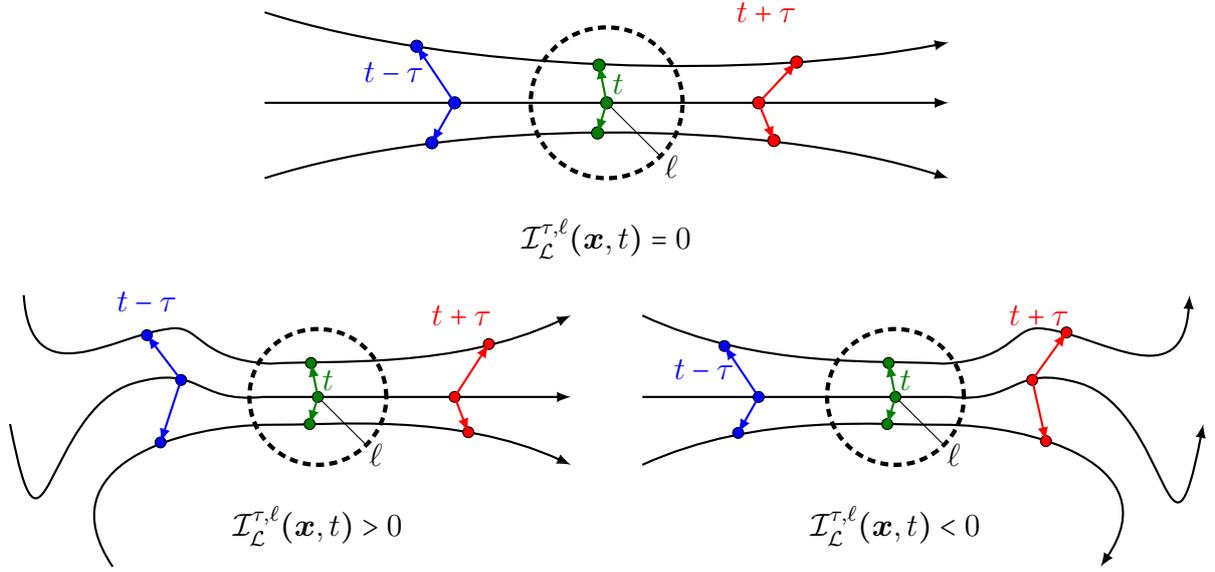


Figure 2.4 – Schéma simplifié illustrant le calcul de l’estimateur d’irréversibilité $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t)$. Nous calculons la valeur moyenne de dispersion antérieur/postérieur $\langle \Delta_{\ell}^{\tau_n} - \Delta_{\ell}^{\tau_n} \rangle$ sur l’ensemble des paires de particules présentes dans une boule de rayon ℓ avec $n \in \{0, \dots, 21\}$.

$\tau_n = n dt$, $n \in \{0, \dots, 10\}$ et dt le temps entre deux instants successifs²². A partir des 11 valeurs obtenues de $f(\mathbf{x}; t, \tau_n)$, on cherche la courbe de meilleure approximation de la forme $y = A(\mathbf{x}, t)\tau^3$. Nous avons représenté en Figure 2.5 un exemple de cette étape. Le coefficient d’irréversibilité lagrangien correspond alors à $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)/4$.

Nous faisons également remarquer que la quantité introduite par T. Drivas est locale, en particulier, il ne s’agit plus d’une valeur moyenne d’ensemble comme pour l’équation (2.58). Il prouve par ailleurs que cette dissymétrie est liée au terme de dissipation introduit par J. Duchon et R. Robert [59] sans hypothèses restrictives sur la régularité du champ de vitesse. Ce résultat est donc également valable dans le cas limite de la viscosité nulle. De plus, ce résultat est valable pour toutes les dimensions - et plus seulement réservé à la dimension trois comme suggéré dans l’article de J. Jucha et al. [89].

D’après le travail de T. Drivas [56, 57], il est mathématiquement possible de relier ce taux d’irréversibilité $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t)$ au taux de dissipation local $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ défini à la partie 2.1.5 équation (2.39). Ainsi, dans la limite infinie du nombre de Reynolds, en faisant d’abord tendre τ vers zéro, avant de prendre la limite en zéro du rayon de la boule sur laquelle est effectuée la moyenne - dans l’hypothèse d’une résolution infinie - on peut écrire :

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\ell, \tau} = \epsilon(\mathbf{x}, t), \quad (2.62)$$

²²Nous utilisons 11 pas de temps suite à une étude confirmant que ce nombre était optimal dans la majorité des cas.

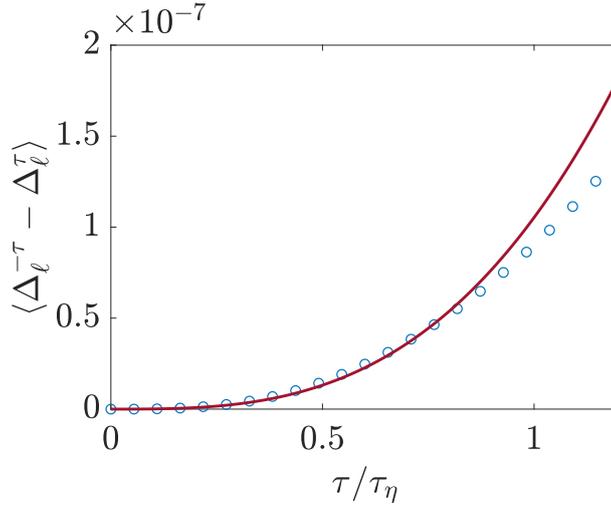


Figure 2.5 – Exemple de l’estimation du coefficient d’irréversibilité $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}(\mathbf{x}, t)$. Nous montrons un exemple particulier et représentatif de $\langle \Delta_\ell^{-\tau_n}(\mathbf{x}, t) - \Delta_\ell^{\tau_n}(\mathbf{x}, t) \rangle$ avec $n \in \{0, \dots, 21\}$ pour une particule dans le cas SVK anti 0.1 Hz (ronds bleus). La courbe rouge correspond à la courbe d’ajustement d’équation $y = A(\mathbf{x}, t)\tau^3$ sur les points $n \in \{0, \dots, 10\}$. Le nombre de points utilisé pour notre estimation est décrit dans [43]. Le coefficient d’irréversibilité lagrangien vaut alors $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)/4$.

2.2.3 Caractéristiques géométriques des trajectoires: torsion et courbure

Nous serons amenés à étudier les aspects géométriques des trajectoires. En particulier, les zones tourbillonnaires semblent révéler un intérêt particulier pour l’étude de la turbulence. L’examen de la torsion et de la courbure apportent une nouvelle analyse pour comprendre ces zones tourbillonnaires [33, 186]. Nous allons nous intéresser au calcul du rayon de courbure et de la torsion d’une trajectoire.

On peut définir les vecteurs \mathbf{T} , \mathbf{N} et \mathbf{B} , représentés sur la Figure 2.6, constituant un repère local de la trajectoire suivie par une particule. Ce repère, appelé repère de Frenet, est déterminé d’un point de vue purement cinématique. Il est défini à partir de l’abscisse curviligne d’élément infinitésimal $ds = \|\mathbf{d}\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0)\|$ où $\mathbf{d}\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0)$ est le vecteur déplacement infinitésimal de la particule. Dans ce repère, le vecteur vitesse, noté pour simplifier $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}), t)$, est proportionnel à \mathbf{T} .

$$\mathbf{u} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}, \quad (2.63)$$

On construit la base du repère de Frenet en considérant les vecteurs unitaires \mathbf{N} (normal) et \mathbf{B} (complétant la base orthonormée directe) à l’aide des deux relations :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}. \quad (2.64)$$

Le coefficient de proportionnalité κ est par définition positif. Il correspond à la courbure, ou l’inverse du rayon de courbure R_c .

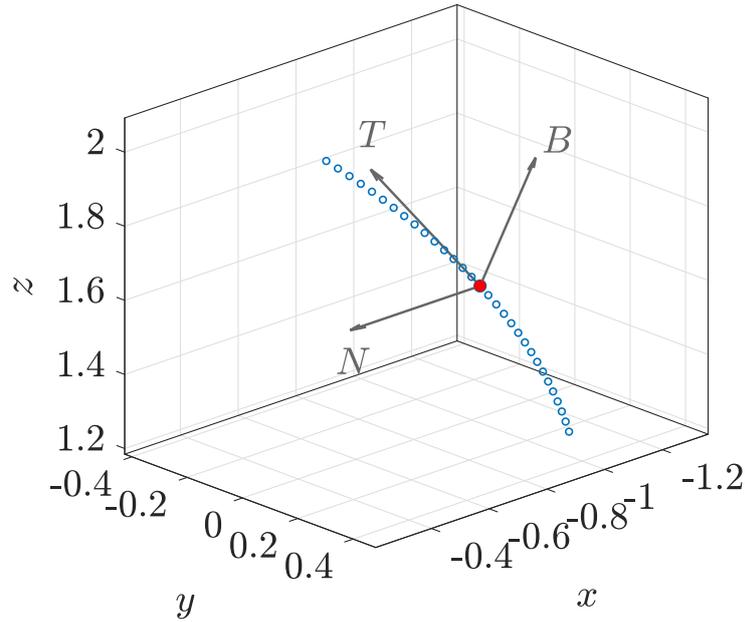


Figure 2.6 – Vecteur du repère de Frenet. Le vecteur \mathbf{T} tangentiel à la trajectoire, le vecteur normal \mathbf{N} et \mathbf{B} sont définis par les relations (2.64).

Par dérivation selon l'abscisse curviligne s du vecteur \mathbf{B} , on peut construire, sur le même principe que l'équation (2.64), la torsion τ .

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}, \quad (2.65)$$

En appliquant les équations (2.64) et (2.65), on trouve directement la valeur de la dérivée de \mathbf{N} par rapport à s ,

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \quad (2.66)$$

Les définitions (2.64) et (2.65) donnent une première estimation de la courbure κ et de la torsion τ d'un point de vue purement géométrique et à laquelle nous ferons référence par méthode 1.

$$\kappa = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{N}, \quad \tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.67)$$

En pratique, pour le calcul de κ_i et τ_i au temps i , nous estimons ds_i au temps i par différence finie décentrée,

$$ds_i = \|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\|, \quad (2.68)$$

On peut alors calculer le vecteur tangent \mathbf{T}_i au temps i par :

$$\mathbf{T}_i = \frac{\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i}{ds_i}, \quad (2.69)$$

Le vecteur normal \mathbf{N}_i au temps i est ensuite obtenue par dérivation de \mathbf{T} ,

$$\kappa_i \mathbf{N}_i = \frac{\mathbf{T}_{i+1} - \mathbf{T}_i}{ds_i}, \quad (2.70)$$

On en déduit κ_i au temps i en calculant la norme de $\kappa_i \mathbf{N}_i$.

Enfin, on calcule le vecteur \mathbf{B}_i au temps t_i par application du produit vectoriel (2.64) puis on dérive :

$$\left. \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right|_i = \frac{\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i}{ds_i}, \quad (2.71)$$

On déduit finalement τ_i au temps i par la formule :

$$\tau_i = \left. \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right|_i \cdot \mathbf{N}_i. \quad (2.72)$$

Il existe également une deuxième méthode d'estimation de ces quantités en utilisant les champs de vitesse et d'accélération lagrangiens. On écrit d'abord l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet par dérivation temporelle, dans le repère \mathcal{R} fixé au laboratoire. Pour simplifier les notations, nous nommons $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}), t)$.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N} = a_t \mathbf{T} + a_n \mathbf{N}. \quad (2.73)$$

avec a_t l'accélération tangentielle, $a_t \equiv \frac{d^2s}{dt^2}$ et a_n l'accélération normale ou centripète, $a_n \equiv \kappa u^2$ où $u \equiv \|\mathbf{u}(\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), t)\|$.

Cette première formule nous permet d'obtenir l'estimation de la courbure. Pour la torsion, il est nécessaire de dériver une seconde fois dans le repère \mathcal{R} l'accélération, notée $\dot{\mathbf{a}}$.

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{d^3u}{dt^3} - \kappa^2 u^3 \right) \mathbf{T} + \left(u\kappa \frac{du}{dt} + \frac{d\kappa u}{dt} \right) \mathbf{N} + \kappa u^3 \tau \mathbf{B}, \quad (2.74)$$

On obtient alors la deuxième estimation de la courbure et de la torsion par la relation suivante (que l'on appellera méthode 2):

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}\|}{u^3}, \quad \tau = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\dot{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{a})|}{\kappa^2 u^6}. \quad (2.75)$$

2.3 Les limites de la simulation numérique

2.3.1 Pourquoi la mécanique des fluides résiste-t-elle encore et toujours à la sagacité des numériciens?

Depuis la découverte des semi-conducteurs en 1947 et leurs miniaturisations, les ordinateurs n'ont eu de cesse de bénéficier d'avancées techniques notables accroissant leurs capacités de calcul. En effet, la loi de Moore (1975) prédit un doublement des vitesses de calculs tous les deux ans, loi qui semble connaître un certain ralentissement

actuellement. Cependant, en s'intéressant aux ordres de grandeur du temps de calcul, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour des cas réels de la vie courante semble encore hors de portée pour de nombreuses années.

Dans un premier exemple, nous pouvons nous intéresser à l'effort nécessaire pour simuler l'aérodynamique d'une voiture dont nous simplifions la géométrie par un cube de longueur 1m. Nous voulons simuler l'écoulement autour de cette voiture qui roule à une allure de 30km/h \approx 8m/s.

Pour bien rendre compte des phénomènes qui ont lieu, on doit résoudre les équations de Navier-Stokes sur un volume suffisamment grand, disons $n = 3$ fois la plus grande échelle. De plus, pour rendre compte de toutes les interactions, il est nécessaire de simuler à une résolution légèrement plus petite que la plus petite échelle possible, prenons une résolution minimale de $\eta/1.5$.

Nous savons que le rapport entre l'échelle la plus grande et l'échelle la plus petite est proportionnel à $Re^{3/4}$. Nous avons donc un nombre de points de maillage dans le volume au minimum égal à $N^3 = (1.5 \cdot n)^3 \times Re^{9/4}$.

En suivant l'article de J. Jiménez [87], on peut estimer le nombre d'opérations par pas de temps avec la formule :

$$Q \approx 10 N^3 \log_2(N), \quad (2.76)$$

où Q est le nombre d'opérations et s'exprime en Flops.s.

Pour la simulation numérique, la condition CFL impose que le facteur de résolution temporelle soit du même ordre de grandeur que le pas spatial, le nombre de pas de temps nécessaire N_t est donc proportionnel à $Re^{3/4}$.

Dans cet exemple, nous réalisons la simulation numérique de l'avancée d'une voiture, modélisée par un cube de côté 1 m à 30km/h pendant un temps d'environ 1 s; le nombre de Reynolds est de 5×10^5 .

On peut estimer le temps de calcul sur un ordinateur idéal (sans prendre en compte le temps des communications, de la limitation en mémoire vive, du temps d'écrire et de lecture, ...), appelé "Temps-CPU" et noté ΔT_{CPU} (en s) :

$$\Delta T_{CPU} = \frac{N_T Q}{S}, \quad (2.77)$$

avec N_T le nombre de pas de temps pour l'ensemble de la simulation, Q le nombre d'opérations défini plus haut et S la vitesse de calcul de l'ordinateur. Le meilleur superordinateur actuel a dépassé le record de 1.1 Exaflops le 30 mai 2022 pour une puissance de 21 MW, **Top500**. Pour ce premier exemple de simulation, nous aurions besoin d'environ 2300 secondes mais l'énergie nécessaire pour réaliser ce calcul est supérieure à 332 jours de consommation électrique moyenne en France (données issues de **EDF** sur la consommation en 2019.). Il faudrait également une centaine de serveurs de 400 To pour stocker les données.

Pour le cas d'un avion, dont l'envergure est de l'ordre de 80 m et la vitesse de l'ordre de 900 km/h, cette même simulation, sur un temps de 320 ms prendrait au mieux 1.6 millions d'années, et nécessiterait une quantité d'énergie équivalente à la production mondiale pendant presque 11 ans (données issues de **EDF** sur la production mondiale

en 2018) et le stockage de données est équivalent à 1 million de fois les capacités de stockage accessibles par **Facebook** actuellement.

Comme nous venons de le voir, une résolution des équations de Navier-Stokes pose énormément de problèmes en termes de temps de calcul mais également en terme de capacités de stockage et d'énergie. Rappelons également que le calcul fait plus haut correspond à une estimation grossière dans le cas idéal. En particulier, cette estimation ne tient compte ni des facteurs limitant tels que l'accès mémoire, temps de lecture/écriture d'une part ni de la nécessité de raffiner le maillage en proche paroi (voir [87] partie 4.1). Dans la réalité, le coût attendu doit être encore plus important.

Dans le même temps, la compréhension de plus en plus fine de la physique et les améliorations à la fois des capacités de calcul, des capacités de stockage et des performances algorithmiques permet d'étudier numériquement les écoulements à des nombres de Reynolds toujours plus grands.

2.3.2 Ce qui rendrait impossible la résolution numérique des équations de Navier-Stokes

La résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes est pour le moment restreinte à des nombres de Reynolds relativement faibles comparativement aux écoulements réels. Ce point, comme nous l'avons vu, ne pourra pas être amélioré avant de nombreuses années. Cependant, il reste un dernier point qui pourrait rendre impossible toute tentative dans ce sens. L'hypothèse d'une singularité conduirait à prendre en considération une résolution infinie. En effet, comme le développe U. Frisch dans son livre [71], suivant le modèle multifractal, on peut considérer une échelle ℓ pour laquelle on observe un équilibre entre la dissipation et le transfert d'énergie inter-échelle.

Il faut alors introduire ici l'exposant de Hölder noté h . On dit qu'une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est h -hölderienne s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^p} \leq C \|\mathbf{r}\|_{\mathbb{R}^n}^h. \quad (2.78)$$

avec $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$) la norme canonique sur \mathbb{R}^p (resp. \mathbb{R}^n).

Puisque l'intégrale de la fonction ϕ^ℓ sur l'espace entier vaut 1 (voir définition (2.23)), on peut écrire la fonction filtrée de \mathbf{f}^ℓ de la fonction \mathbf{f} en fonction de l'incrément de \mathbf{f} entre \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ noté $\delta_\xi \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\mathbf{f}^\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) \delta_\xi \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.79)$$

Dans le cas d'une fonction \mathbf{f} h -hölderienne, en utilisant (2.79) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}^\ell(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^p} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) \delta_\xi \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\boldsymbol{\xi} \right\|_{\mathbb{R}^p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi^\ell(\boldsymbol{\xi})| \|\delta_\xi \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^p} \, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi^\ell(\boldsymbol{\xi})| \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^n}^h \, d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\xi}/\ell$ dont la jacobienne vaut ℓ^n , on obtient finalement que :

$$\|\mathbf{f}^\ell(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^p} \leq C_{\phi,h} \ell^h, \quad (2.80)$$

avec la constante $C_{\phi,h} = C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(\boldsymbol{\chi})| \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbb{R}^n}^h d\boldsymbol{\chi}$ qui a toujours un sens puisque ϕ est à support compact et C est la constante définie dans la condition (2.78). On obtient donc d'après l'inégalité (2.80), tant que $h \geq 0$, la fonction filtrée \mathbf{f}^ℓ tend vers \mathbf{f} si ℓ tend vers zéro.

On peut également développer la même inégalité pour les quantités \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν . Tous calculs faits²³, on obtient :

$$|\mathcal{D}_\ell^I| \leq C_\phi^1 \ell^{3h-1}, \quad (2.81a)$$

$$|\mathcal{D}_\ell^\nu| \leq C_\phi^2 \frac{1}{\text{Re}} \ell^{2h-2}. \quad (2.81b)$$

Suivant l'idée de Kolmogorov pour construire l'échelle η et selon le développement de l'article de B. Dubrulle [58], on peut construire une échelle d'équilibre entre le terme de dissipation \mathcal{D}_ℓ^ν et le terme de transfert de flux d'énergie \mathcal{D}_ℓ^I . On trouve alors :

$$\ell_{\min} \approx \text{Re}^{-\frac{1}{1+h}}, \quad (2.82)$$

On remarque tout d'abord que pour $h = 1/3$, on retrouve l'estimation de Kolmogorov 1941 [96] à savoir :

$$\ell_{\min} \approx \text{Re}^{-3/4}. \quad (2.83)$$

De plus, avec l'équation (2.82), on remarque que s'il existe un champ de vitesse h -Hölderien tel que $h \xrightarrow{h>-1} -1$ alors $\ell_{\min} \rightarrow 0$. La question du minimum de l'exposant de Hölder est toujours une question ouverte. Néanmoins, cette dernière assertion, si elle était vérifiée, rendrait impossible toute résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes. Notons pour finir que $h = -1$ correspond au "scaling" autorisé dans le cas de Navier-Stokes visqueux. Le cas réaliste des équations de Navier-Stokes pourrait donc conduire à une résolution infinie. Ainsi ni la résolution numérique, ni même l'expérience dont les instruments sont à résolution finie ne seraient en capacité d'appréhender cette réalité de manière directe.

On montre que, si une DNS n'est pas suffisamment bien résolue, c'est à dire avec $k_{\max}\eta < 1$ que nous nommerons DNS tronquée, on observe une accumulation de l'énergie à l'échelle minimale (voir par exemple paragraphe 10.1.1 p.394 [105]). Si l'échelle de résolution n'est pas suffisamment fine, cette accumulation va progressivement se répercuter sur les échelles supérieures immédiatement voisines donnant naissance à une cascade inverse et un spectre en k^2 [102] et non-physique qui peut s'accompagner, à terme, d'une explosion de la solution. Dans l'hypothèse de singularité, l'impact de ce type d'objet sur la précision de la solution est toujours une question ouverte.

²³Voir Annexe C section C.5 pour le détail des calculs.

3

De l'expérience aux données

3.1 Ecoulement de von Kármán

3.1.1 Historique

L'écoulement historiquement imaginé et résolu par T. von Kármán en 1921 consistait en un unique disque plat infini en rotation entraînant la partie supérieure du fluide par effets visqueux [99]. L'ajout d'un deuxième disque infini, coaxial au premier, fut proposé par G. K. Batchelor en 1951 [18] puis K. Stewartson en 1953 [166]. Un descriptif plus approfondi de l'histoire de l'expérience von Kármán est accessible dans la thèse de F. Ravelet [138].

Le principe sous-jacent de ce type d'écoulement est relativement simple. Le disque tournant transmet au fluide une quantité de mouvement par diffusion visqueuse, la force centrifuge éjecte le fluide dans la direction radiale. Par le principe de conservation de la masse, et puisque le fluide - en l'occurrence de l'eau - est considéré à cette pression et cette température comme incompressible, une dépression va s'installer au centre du disque amorçant une dynamique de pompage.

3.1.2 L'expérience von Kármán

Dans notre expérience, nous étudions l'écoulement de von Kármán dans un cas beaucoup plus facile à réaliser que celui initialement imaginé par T. von Kármán. Nous prenons des turbines de rayon fini et nous confinons l'écoulement dans une enceinte cylindrique. La Figure 3.2 donne un aperçu du montage. L'écoulement de von Kármán a très largement été étudié ces dernières années et a acquis le nom évocateur de *French Washing Machine*. Ce dispositif a d'abord été utilisé au laboratoire de physique de l'ENS [55] avant d'être développé par l'équipe de l'ENS de Lyon [68]. Elle a en-

suite été très largement étudiée dans les thèses de L. Marié [111], F. Ravelet [138], R. Monchaux [115], B. Saint-Michel [150] et plus récemment par P. Debue [53].

Les expériences von Kármán ont été utilisées dans de nombreuses expériences avec différents fluides, par exemple en eau [68], en eau-glycérol dans différentes proportions [153], en gallium [125] et en sodium [30] pour étudier l'effet dynamo, en hélium liquide et superfluide [190] pour le cas des très forts nombre de Reynolds dans l'expérience SHREK de Grenoble et avec des pales de différentes géométries. Dans notre cas, nous travaillons avec des pales courbées introduites dans la thèse de R. Monchaux [115] et que nous décrirons au paragraphe 3.2.5. Cette courbure confère à l'écoulement un comportement différent selon le sens de rotation des turbines étudié dans la thèse de L. Marié [111].

Nous noterons ainsi le sens **anti** (ou -), le sens dans lequel les pales poussent le fluide avec la partie concave et le sens **contra** (ou +), le sens dans lequel le fluide est poussé par la partie convexe des pales comme décrit en Figure 3.1.

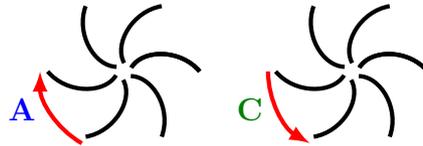


Figure 3.1 – (à gauche) sens de rotation **anti**, (à droite) sens de rotation **contra**.

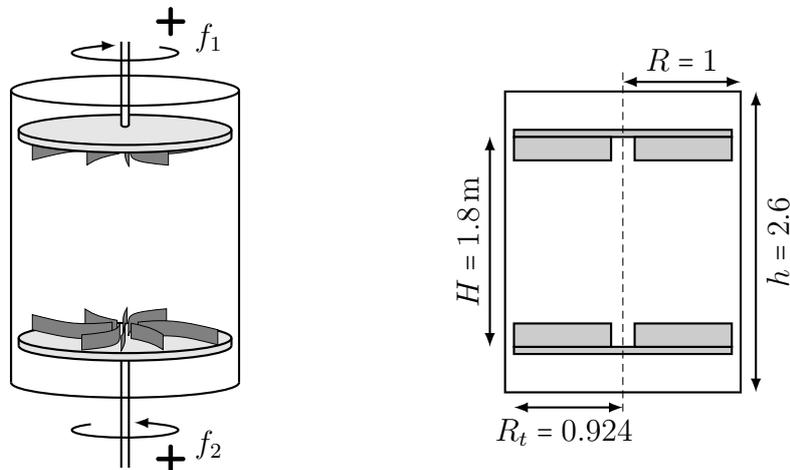


Figure 3.2 – Géométrie de von Kármán. Visualisation schématisée en perspective de la cuve avec le sens de rotation positif (contra) des turbines (à gauche). Schéma simplifié des dimensions, normalisées par le rayon de la cuve (à droite). Nous étudierons dans cette thèse deux rayons de cuve différents $R = 0.5\text{m}$ et $R = 0.1\text{m}$.

Comme rappelé dans la thèse de L. Marié [111], le type d'écoulement, à rapport d'aspect fixé, dépend des fréquences f_1 et f_2 (respectivement la fréquence turbine haute et basse, voir Figure 3.2.)

A faible nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire. En augmentant progressivement le nombre de Reynolds, il s'opère une transition laminaire/turbulente qui suit une déstabilisation du plan de cisaillement. Ce processus naît d'une croissance d'instabilité de type Kelvin-Helmoltz faisant augmenter l'énergie de la composante azimutale. Cette instabilité est largement étudiée dans la thèse de F. Ravelet [138]. Nous limiterons notre étude au cas de la turbulence pleinement développée pour $Re \geq 6300$.

Comme mentionné précédemment, les pales ont un rayon de courbure qui donnent deux comportements d'écoulements radicalement différents. Arrêtons nous un instant sur le cas **anti** qui offre un comportement particulier. L'étude réalisée dans la thèse de F. Ravelet [115, 140] permet de dégager une valeur de Reynolds critique Re_c à partir duquel on observe le phénomène de bifurcation. Nous ferons référence à un écoulement anti-bifurqué par \mathbf{A}_b , un écoulement anti-symétrique par \mathbf{A}_s et à un écoulement contra par \mathbf{C} .

Cet état bifurqué naît d'une déstabilisation de l'écoulement symétrique. Initialement dans la configuration faisant état de deux cellules de recirculation, comme sur la Figure 3.4, l'écoulement est symétrique, il est dans un état métastable. Les fluctuations du champ de vitesse turbulent vont faire osciller ce plan de cisaillement et éventuellement dépasser l'énergie d'activation. Le plan de cisaillement est alors projeté soit sur les pales de la turbine haute - on dira que l'écoulement est bifurqué bas - soit sur les pales de la turbine basse - on dira alors que l'écoulement est bifurqué haut. Notons enfin que cet état de multistabilité, développé dans [139], peut apparaître spontanément ou par suite d'une déstabilisation initiale de l'écoulement. Cet état bifurqué apparaît uniquement pour le cas anti et pour un temps suffisamment long.

En pratique pour initier plus rapidement la bifurcation, on préférera briser au départ la symétrie dans la fréquence de rotation. Cette brisure de symétrie a tendance à modifier la position d'équilibre initiale du plan de cisaillement en le rapprochant de la pale la plus lente. L'écart à combler pour accéder à l'état plus stable est donc diminué d'autant.

Il est également important de noter que cet état bifurqué est un état bloquant. L'écoulement reste piégé dans l'état bifurqué même après retour à $f_1 = f_2$.

L'expérience dans son ensemble a été conçue pour être axisymétrique (sauf pour les pales des turbines) et respecter une symétrie par renversement (d'angle π) autour de n'importe quel axe passant par le centre O contenu dans le plan médian ou l'axe vertical. En accord avec la thèse de L. Marié [111] (chapitre 11), cette symétrie est appelée une \mathcal{R}_π -symétrie voir Figure 3.3.

Dans notre expérience, bien que les causes soient totalement symétriques par \mathcal{R}_π -symétrie, on observe des brisures de symétries tant par les phénomènes de bifurcations que dans l'écoulement instantané, comme rappelé dans la thèse de L. Marié [111] (Fig. 5.4). Celles-ci ne sont pas limitées à des nombres de Reynolds élevés, comme on pourrait s'y attendre avec le caractère chaotique des écoulements turbulents. Elles peuvent également apparaître pour de faibles valeurs de Reynolds comme cela a pu être montré dans [111, 140] et [120]. Cependant, les symétries sont restaurées par l'étude statistique et ce malgré la bifurcation. Ainsi, d'une part, l'écoulement moyen suit la \mathcal{R}_π -symétrie et, d'autres parts, le sens de bifurcation (bifurcation haut ou bas) suit une loi de Bernoulli

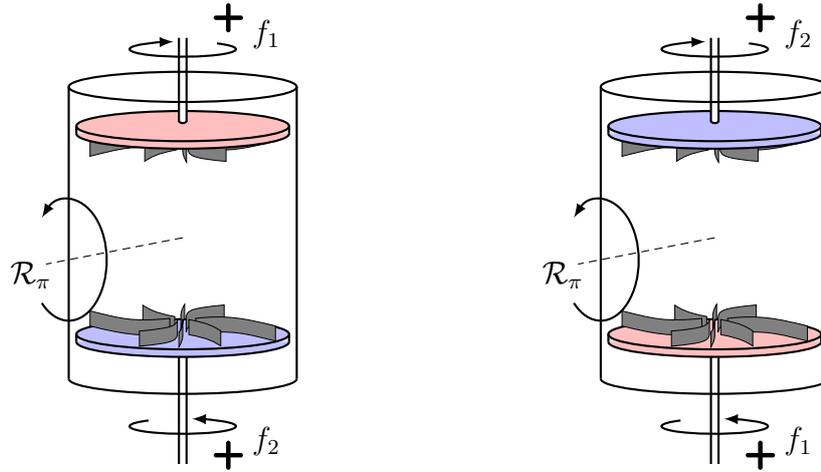


Figure 3.3 – La \mathcal{R}_π -symétrie de l'expérience von Kármán est valable si $f_1 = f_2$.

de paramètre $1/2$. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'étude réalisée dans la thèse de F. Ravelet [138].

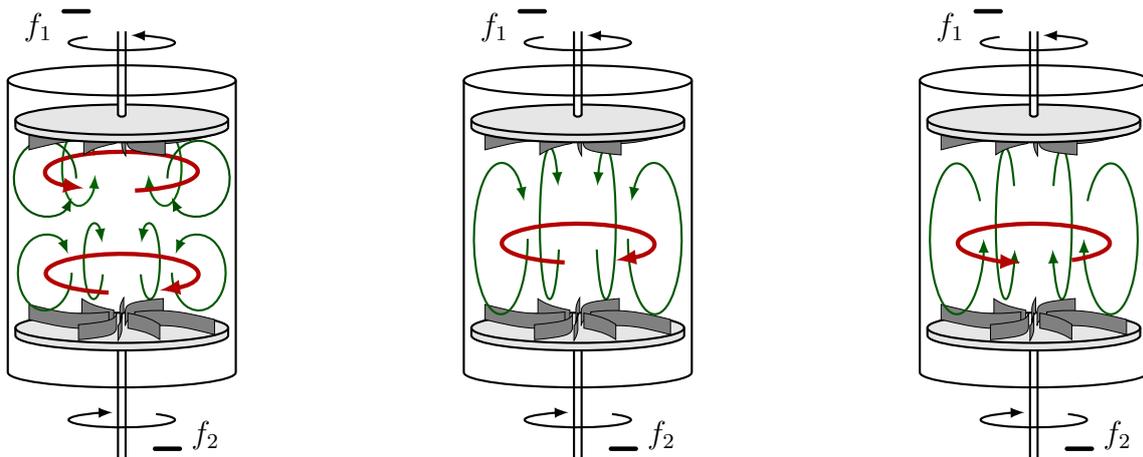


Figure 3.4 – Écoulement non-bifurqué (à gauche). Il s'agit d'un écoulement symétrique composé de deux cellules de recirculation (matérialisées par des flèches vertes suivant une surface toroïdale) dont chacune suit l'écoulement poloïdale contraint par la turbine la plus proche. Le plan de cisaillement (non représenté ici) est situé plus proche de la turbine la plus lente. Dans le cas $f_1 = f_2$, contra-rotatif strict, la position d'équilibre de ce plan de cisaillement coïncide avec le plan de symétrie horizontal de l'expérience. Au centre et à droite, état dit bifurqué, une unique cellule de recirculation survit. Le fluide suit le sens de la turbine qui a pris le pas dans la bifurcation. Au centre, il s'agit de la turbine du bas, à droite de la turbine du haut.

Dans toute cette thèse, nous nous plaçons uniquement dans la configuration symétrique anti ou contra. Nous étudions l'écoulement dans la zone centrale - voir figure 3.13 - zone dans laquelle la turbulence est proche d'une turbulence homogène isotrope. En effet, dans le cas symétrique, on observe une zone très fortement turbulente (gradients

de vitesse important du fait du disque de cisaillement) et un point d'arrêt au centre à la jonction des influences des écoulements toroïdaux et des jets centraux.

3.1.3 Grandeurs adimensionnées

Plusieurs adimensionnements sont envisageables pour cet écoulement. Par exemple, dans le travail de thèse de L. Marié [111], il introduit l'écoulement au regard de nombres sans dimensions associés à la fréquence du plan (f_1, f_2) . Dans notre cas, nous suivront ici la définition de R. Monchaux [115] et F. Ravelet [138] en introduisant les quantités suivantes¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{f_1 + f_2}{2}, \\ \theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}. \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{f_1 + f_2}{2}, \\ \theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}. \end{array} \right. \quad (3.1b)$$

Nous adopterons également la définition du nombre de Reynolds communément utilisé dans ce type d'écoulement et que l'on retrouve dans [115].

$$\text{Re} = \frac{2\pi R^2 f}{\nu}, \quad (3.2)$$

avec R le rayon de la cuve (en m), f la fréquence de rotation moyenne des pales (en Hz) définie en 3.1a et ν la viscosité cinématique du fluide (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

Les grandeurs caractéristiques d'adimensionnement sont les suivantes:

$$U = 2\pi R f,$$

$$T = \frac{1}{2\pi f},$$

$$L = R,$$

avec U , T et L respectivement la vitesse, le temps et la longueur d'adimensionnement, R le rayon de la cuve (en m) et f la fréquence de rotation moyenne des turbines définie à l'équation 3.1a (en Hz).

Considérons la puissance délivrée par un unique moteur que nous notons \mathcal{P} . Cette quantité s'exprime dans le système international en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$. En application du théorème de Vachy-Buckingham [35], nous pouvons ré-exprimer \mathcal{P} par les grandeurs (ρ, ν, R) avec ρ la masse volumique du fluide considéré (en $\text{kg} \cdot \text{m}^3$), ν la viscosité cinématique (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) et R le rayon de la cuve (en m).

La puissance d'un moteur peut être considérée comme une fonction des variables (ρ, ν, R, h, U) , avec h la hauteur de l'expérience (en m), et U la vitesse caractéristique (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho \nu^3 R} = g\left(\frac{h}{R}, \text{Re}\right), \quad (3.4)$$

¹Dans ce cas, $f_1 = f_2$ et $\theta = 0$. On se réfère toujours à la Figure 3.2 pour les conventions de sens. En particulier, nous ne travaillerons jamais avec $f_1 + f_2 = 0$.

Ainsi, à rapport d'aspect fixé et géométrie fixée (en particulier sur les pales), \mathcal{P} est une fonction de Re uniquement. En considérant la puissance \mathcal{P} suivant une loi en Re^3 (dans le cas turbulent) et considérant $\mathcal{P} = \mathcal{T}\Omega$, avec Ω la vitesse de rotation des turbines et \mathcal{T} le couple moyen, nous pouvons ré-écrire l'équation (3.4) à l'aune des points précédemment évoqués:

$$\frac{\mathcal{T}}{\rho R^5 (2\pi f)^2} = cste = K_p. \quad (3.5)$$

Par ailleurs, comme rappelé dans la courbe 3.5, pour $Re \rightarrow \infty$, la valeur de K_p tend vers une valeur constante dépendant du type d'écoulement. Nous reportons au tableau 3.1 les valeurs en turbulence pleinement développées pour le cas de rapport d'aspect 1.8 et des pales de type "TM87".

On introduit également le taux de dissipation moyen qui s'exprime selon le gradient de vitesse par:

$$\langle \epsilon \rangle = \nu \langle \partial_i u_j \partial_i u_j \rangle \quad (3.6)$$

Cette quantité moyenne $\langle \epsilon \rangle$ est une puissance par unité de masse (en W/kg).

La puissance injectée par unité de masse dans l'état stationnaire doit compenser la puissance dissipée par chacun des moteurs.

$$\langle \epsilon \rangle = 2 \cdot \frac{\mathcal{P}}{m} = \frac{\mathcal{T}\Omega}{m} = \frac{2 R^2 (2\pi F)^3 K_p}{1.8\pi}, \quad (3.7)$$

avec $m = \rho\pi R^2 H = 1.8\rho\pi R^3$ la masse totale, $\Omega = 2\pi F$ la vitesse angulaire des turbines (en Hz) et \mathcal{T} le couple moyen exprimé éq. (3.5) en N.m. Le facteur 2 traduit le fait que cette expérience comporte 2 moteurs.

Dans la version adimensionnée, le taux de dissipation par unité de masse ϵ^* s'écrit :

$$\epsilon^* = \frac{\langle \epsilon \rangle}{R^2 (2\pi F)^3} = \frac{2K_p}{1.8\pi}. \quad (3.8)$$

	\mathbf{A}_s	\mathbf{A}_b	\mathbf{C}
K_p	0.135	0.56	0.0471
ϵ^*	0.048	0.20	0.017

Table 3.1 – Valeur de K_p et ϵ^* selon le type d'écoulement, \mathbf{A}_s écoulement anti-symétrique, \mathbf{A}_b écoulement anti bifurqué et \mathbf{C} écoulement contra.

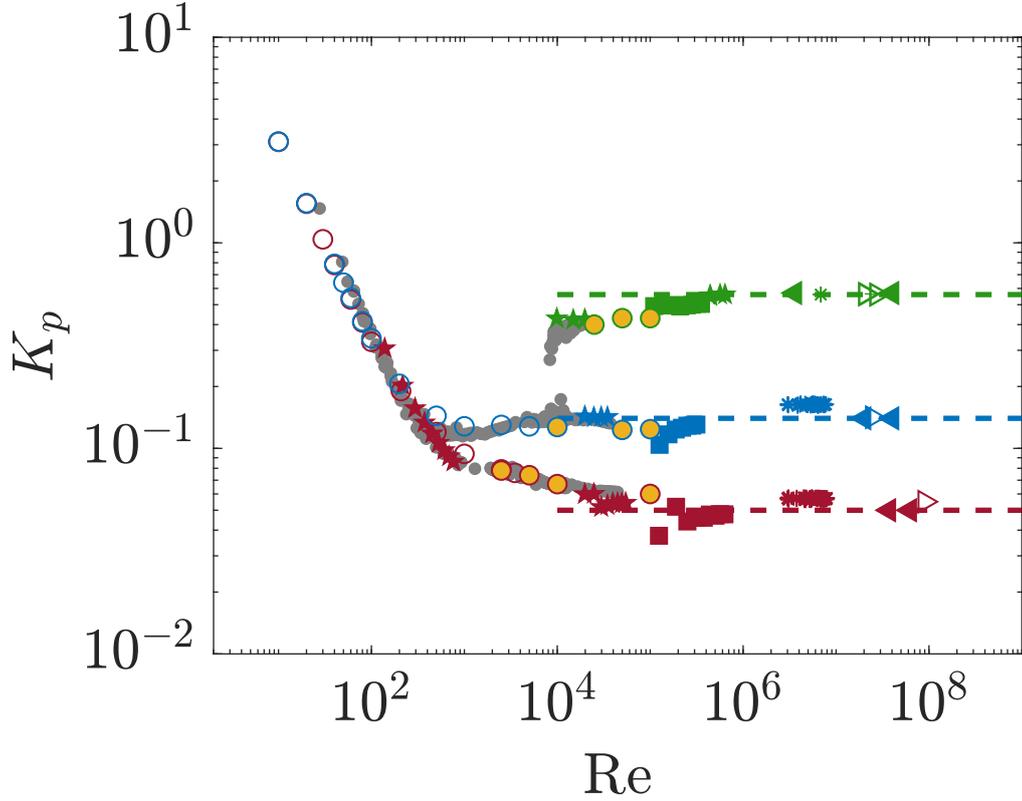


Figure 3.5 – Courbe représentant l’anomalie de dissipation dans l’expérience de von Kármán. En ordonnée la valeur de couple adimensionné K_p en fonction du nombre de Reynolds pour différents écoulements. Les symboles **rouge** correspondent aux cas **contras**, les symboles **bleu** correspondent aux cas **anti-symétriques** et les symboles **vert** correspondent aux cas **anti-bifurqués**. Les lignes pointillées correspondent aux valeurs limites adoptées pour chacun des types d’écoulement (anti-symétrique, anti-bifurqué et contra). Les symboles (\star - \star - \star) correspondent aux données issues de la campagne en sodium dans l’expérience VKS (données non-publiées, avec la permission de M. Faure, N. Bonnefoy, S. Miralles, N. Plihon, J.-F. Pinton, Ph. Odier, G. Verhille, M. Bourgoïn, S. Fauve, F. Petrelis, M. Berhanu, N. Mordant, B. Gallet, S. Aumaitre, F. Daviaud, A. Chiffaudel, R. Monchaux et P. Gutierrez), les symboles (\star - \star - \star) correspondent à l’écoulement d’un mélange eau-glycérol, les symboles (\blacksquare - \blacksquare - \blacksquare) correspondent à un écoulement en eau. Ces deux cas ont été réalisés dans l’expérience VK2 (voir [53]). Les symboles triangulaires sont issues de campagnes en hélium (voir [151]). Les symboles (\blacktriangleleft - \blacktriangleleft - \blacktriangleleft) correspondent aux données issues de campagne en hélium-4 à $T = 2.3\text{K}$ et (\blacktriangleright - \blacktriangleright - \blacktriangleright) correspondent aux données issues de campagnes en hélium-4 à $T = 2\text{K}$ dans l’état superfluide. Les symboles (\circ - \circ - \circ) correspondent aux données de simulations numériques, les symboles vides aux simulations DNS et les symboles pleins (jaune) aux simulations LES (avec la permission de C. Nore). Enfin, les symboles \bullet correspondent aux données VK2 avec des turbines du type TM60 identiques aux TM87 mais comportant 16 pales au lieu de 8 (voir [138] et [140]). Cette figure est adaptée de [58] et [38].

Nous introduisons également des grandeurs caractéristiques adimensionnées liées à l’échelle classiquement considérée comme la plus petite en turbulence - l’échelle de

Kolmogorov.

Les grandeurs adimensionnées seront distinguées par le signe $*$ en exposant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^* = \frac{\eta}{R} = (\epsilon^* \text{Re}^3)^{-1/4}, \\ \tau_\eta^* = 2\pi F \tau_\eta = (\epsilon^* \text{Re})^{-1/2}, \\ v_\eta^* = \frac{v_\eta}{2\pi R F} = \left(\frac{\text{Re}}{\epsilon^*}\right)^{-1/4}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.9a) \\ (3.9b) \\ (3.9c) \end{array}$$

Nous introduisons de plus la longueur caractéristique de Taylor λ (en m) développée dans l'article [172]. Dans le cas de la turbulence homogène isotrope, on peut calculer la vitesse u_{rms} totale par:

$$(u_{\text{rms}}^{\text{tot}})^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (u_i^{\text{rms}})^2 \quad (3.10)$$

En utilisant la vitesse u_{rms} précédemment définie et dans le cas isotrope, l'échelle de Taylor vaut:

$$\lambda = \sqrt{\frac{5\nu u_{\text{rms}}^{\text{tot}}}{\epsilon}} \quad (3.11)$$

En adimensionnant, on obtient:

$$\lambda^* = \lambda/R = \sqrt{\frac{5(u_{\text{rms}}^{\text{tot}*})^2}{\text{Re} \epsilon^*}} \quad (3.12)$$

On peut construire le Reynolds correspondant à cette longueur caractéristique dont la vitesse correspondante est la vitesse u_{rms}^* .

$$R_\lambda = \frac{\lambda u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/\sqrt{3}}{\nu} = \sqrt{\frac{5\text{Re}}{3\epsilon^*}} (u_{\text{rms}}^{\text{tot}})^2 \quad (3.13)$$

La valeur de λ fournit une taille caractéristique de la turbulence. Elle est construite à partir du développement à l'ordre 2 de la fonction d'auto-corrélation de vitesse.

A tort considérée par G. I. Taylor dans [172] comme la plus petite échelle responsable de la dissipation d'énergie, elle fournit néanmoins une information importante sur l'intensité de la turbulence inhérente à l'expérience.

3.2 Dispositif expérimental

Dans cette thèse, nous utilisons deux jeux de données issues de deux expériences différentes. Le premier correspond aux données issues de l'expérience développée pendant la thèse de P. Debue [53] auxquelles nous ferons référence par SVK (Small von Kármán). Le deuxième est issue du nouveau prototype mis en place récemment dans notre laboratoire. Ce dernier a été nommé GVK (Giant von Kármán) car il s'agit actuellement de la plus grande expérience pour ce type d'écoulement réalisée dans notre laboratoire.

Ce dispositif partage la même géométrie que ses prédécesseurs et en particulier le rapport d'aspect; seules les dimensions ont été modifiées. Une photo de l'expérience en situation dans le laboratoire est représenté en Figure 3.6-a, un schéma de coupe est également visible en Figure 3.13. Nous détaillerons les échelles caractéristiques entre les deux expériences au paragraphe 3.4.

La mise en place d'un nouveau prototype a été nécessaire pour pouvoir atteindre des résolutions plus fines que celles auxquelles nous avons accès dans l'expérience précédente nommée SVK. En effet, la thèse de P. Debue a mis en lumière les limites optiques - en particulier à cause des aberrations optiques et des problèmes de reconstruction de trajectoires liés à l'augmentation de la concentration de particules - que nous avons atteintes dans cette expérience. Ainsi, pour améliorer la résolution, nous avons décidé d'augmenter les dimensions de l'expérience. Cet agrandissement a ainsi pour objectif d'augmenter la taille des plus petites structures pour qu'elles puissent être observables sans avoir recours à un zoom. Le facteur d'échelle entre les expériences SVK et GVK est de 5, dans le cas idéal la résolution spatiale attendue sera donc améliorée d'un facteur 5 à nombre de Reynolds équivalent. Dans les faits, cette résolution est limitée par le nombre de particules mises dans l'expérience et reconstruites par l'algorithme. Dans cette première expérience, nous n'avons pas systématiquement atteint ce facteur, nous développerons ce point en partie 3.4.5.

3.2.1 Cuve et contre-cuve

Le dispositif expérimental se compose d'une cuve de rayon 0.490 m et de hauteur $h = 1.26$ m suivant le schéma adimensionnel de la figure 3.2. Les deux turbines sont séparées d'une distance de $H = 0.872$ m. La cuve extérieure est constituée de 16 facettes en aluminium évidées pour mettre en place les hublots. On dénombre 12 hublots séparés d'un angle de 22.5° par rangés étagées sur 5 plans uniformément réparties pour offrir un large nombre de point de vue.

La partie intérieure de la cuve en aluminium est en contact avec l'eau, pour la protéger contre la corrosion et limiter les réflexions du faisceau laser lors des expériences, cette paroi a été peinte en noir (voir Figure 3.6-a). Par ailleurs, suite à une forte réaction de corrosion entre l'aluminium de la cuve et le système de refroidissement en cuivre, la peinture noire a fini par se détacher. Malgré les soins particuliers et plusieurs journées consacrées à la phase de nettoyage, quelques particules de peinture de plusieurs microns ont subsisté, se mélangeant aux traceurs pendant l'expérience. Plusieurs solutions ont été envisagées pour pallier ces problèmes de corrosion systématique. Une première possibilité consiste à apposer sur la surface intérieure un film de plastique noir. Faute de temps, cette solution n'a pas pu être mise en place. Une seconde solution, un temps envisagée, consistait à réaliser une anodisation complète de l'intérieur de la cuve. Cependant, au vu de la difficulté à mettre en œuvre cette solution, il n'est pas envisageable pour le moment de faire une telle opération.

Les soixantes hublots comportent une plaque de verre traitée optiquement pour réduire les reflets. La plaque de verre est insérée dans un bâti en aluminium imperméable, lui même fixé sur la cuve par 8 vis en inox. Le pourtour est constitué d'un joint plat

assurant l'étanchéité de la cuve. Ces derniers peuvent introduire un léger défaut de parallélisme entre la cuve et la surface extérieure du verre. Ce défaut peut, en outre, détériorer la qualité optique de l'ensemble et augmenter l'astigmatisme des particules dans les images. Ce dernier point n'a pas été quantifié. Par ailleurs, à la suite de la réaction chimique entre l'eau, l'aluminium de la cuve, le métal composant le traitement anti-reflet - alors présent sur les deux faces des hublots - a été altéré. Nous avons observé des traces violettes visibles même une fois la cuve remplie en eau. Par crainte de détériorer la qualité optique pendant l'expérience, nous avons préféré changer les hublots initiaux nécessaires à l'expérience par des verres neufs sur lesquels nous avons fait réaliser un traitement anti-reflet uniquement sur la face extérieure.

Des prismes en cristal sans traitements anti-reflet, voir Figure 3.6-b, ont été installés. Initialement pour permettre une visualisation en proche paroi de l'écoulement, nous les avons utilisés comme point d'entrée du rayon laser.

Une cuve cylindrique intérieure - ou contre-cuve - en plexiglass (PMMA) assure la cylindricité de la géométrie. Elle est mise en position par des rails à glissière sur chaque partie de l'ensemble turbine haute et turbine basse et maintenue par des vis en teflons. Une correction de cylindricité est apportée par des verniers - voir Figure 3.6-a. Cependant, le changement local de courbure par application de la pression des verniers sur la contre-cuve déformable peut modifier localement l'indice de réfraction et augmenter les aberrations optiques. Il serait peut-être envisageable de ne pas utiliser les verniers.

Milieu	Indice optique
Eau	1.331
Air	1
PMMA ²	1.491
Verre (BK7) ³	1.5168

Table 3.2 – Indices de réfraction pour les différents milieux de l'expérience.

3.2.2 Moteurs et transmissions

Le fluide est mis en mouvement par deux moteurs électriques de type brushless, indépendants l'un de l'autre et la puissance totale développée par chaque moteur peut atteindre au maximum 3kW. Les moteurs et les turbines sont chacun surmontés d'une roue dentée - ou poulie (voir Figure 3.6-a et 3.12) assurant la transmission entre la partie moteur et les turbines de la partie cuve, Figure 3.7, au moyen d'une courroie dentée. Les poulies côtés turbines peuvent être changées pour modifier le rapport de transmission (1 ou 2) selon la plage de vitesse étudiée, voir Figure 3.7 pour une vue d'ensemble de la transmission entre la partie moteur et la partie cuve.

²voir p. 309 Handbook of Optical materials

³voir p. 242 Handbook of Optical materials

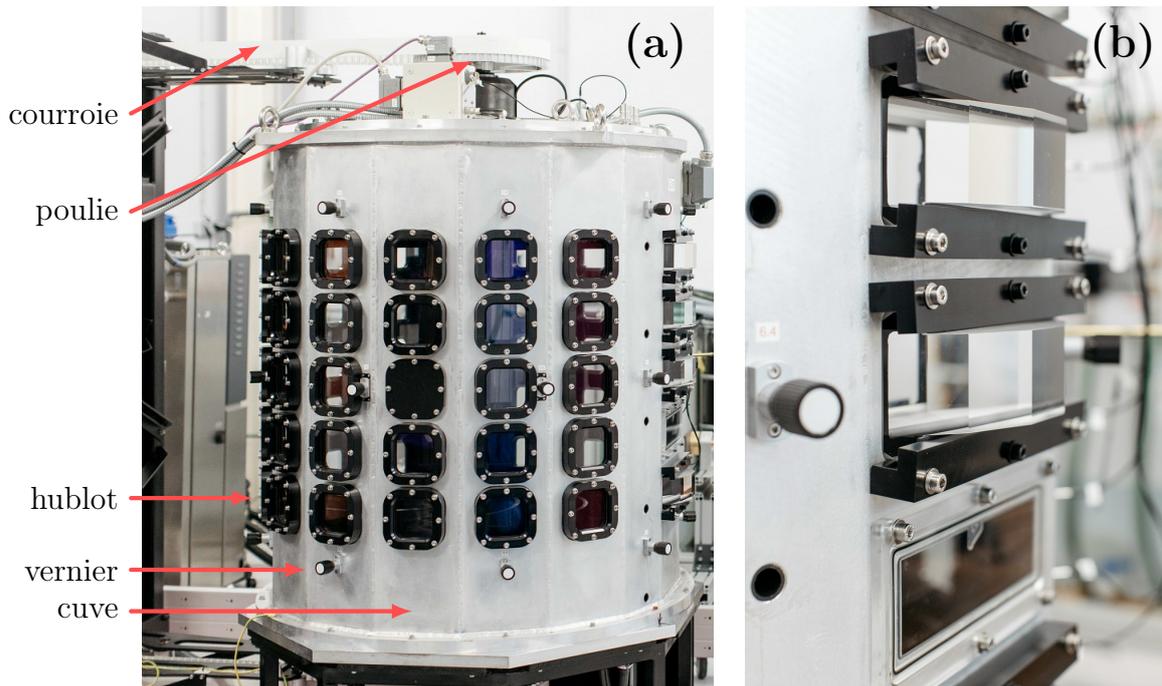


Figure 3.6 – (a) Photo de la cuve GVK, (b) détail des prismes. ©Y.Audic/CEA

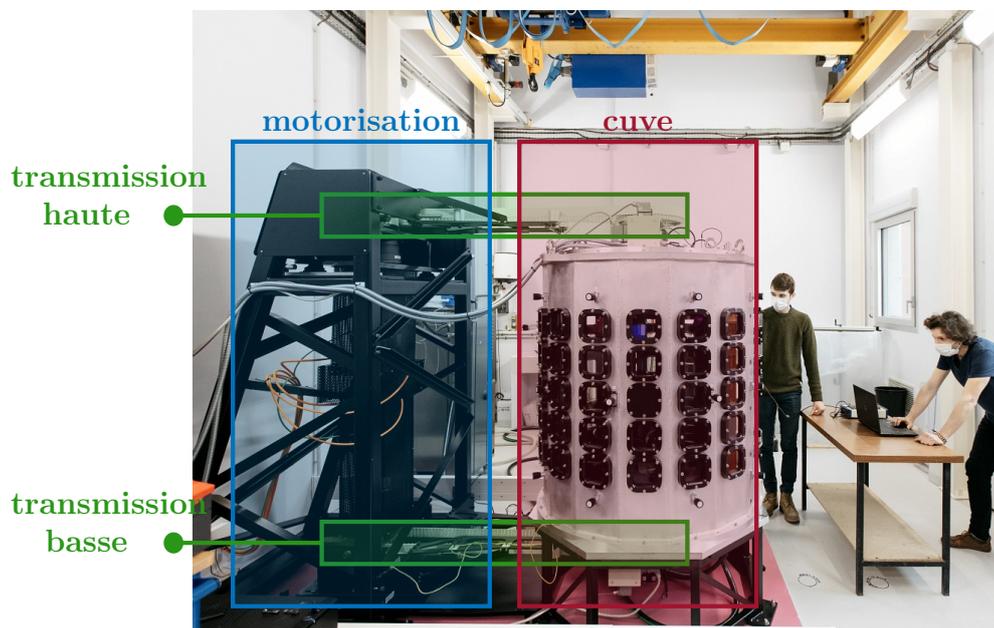


Figure 3.7 – Présentation du dispositif de transmission entre la partie moteur (en bleu) et la partie cuve (en rouge). La transmission haute et basse (en vert) se fait au moyen d'une courroie dentée. La partie moteur et la partie cuve sont dissociées pour limiter la transmission des vibrations.

Le tableau suivant donne dans chaque cas (anti ou contra) les plages accessibles par l'expérience et les valeurs de couple et de vitesses correspondants :

F (Hz)		0.004	0.01	0.025	0.1
Contra	couple turbine (N.m)	1.01×10^{-3}	5.80×10^{-3}	3.62×10^{-2}	5.80×10^{-1}
	couple moteur (N.m)	2.52×10^{-5}	1.45×10^{-4}	9.06×10^{-4}	1.45×10^{-2}
	puissance (W)	5.27×10^{-5}	7.29×10^{-4}	1.14×10^{-2}	7.29×10^{-1}

Table 3.3 – Couples et puissances développées pour le cas contra aux fréquences étudiées (détails des cas d'études dans le tableau 3.7.

F (Hz)		0.004	0.01	0.025	0.1
Anti	couple turbine (N.m)	2.89×10^{-3}	1.67×10^{-2}	1.04×10^{-1}	1.67×10^0
	couple moteur (N.m)	7.23×10^{-5}	4.16×10^{-4}	2.60×10^{-3}	4.16×10^{-2}
	puissance (W)	1.51×10^{-4}	2.09×10^{-3}	3.27×10^{-2}	2.09×10^0

Table 3.4 – Couples et puissances développées pour le cas anti-symétrique aux fréquences étudiées.

Pour éviter les parasites électro-magnétiques, les moteurs sont enfermés dans des cages de Faraday reliées à la masse et les câbles sont blindés par une gaine métallique externe, également reliée à la masse.

3.2.3 Fluide utilisé et précautions d'utilisation

Dans notre expérience, la pollution par les poussières est très problématique. D'une part, lorsqu'elles sont illuminées par le laser, ces poussières peuvent réémettre une part importante de l'énergie laser et endommager les capteurs des caméras. D'autre part, elles sont une source importante d'erreurs de reconstruction. Lors de l'étape de traitement des données, l'algorithme peut par exemple mal interpréter ces particules et reconstruire plusieurs particules plutôt qu'une seule. De plus, même bien reconstruites, ces particules suivent mal l'écoulement à cause des effets inertiels. Dans cette campagne de mesure, nous avons limité au maximum les sources possibles de pollutions par des poussières. Pour cela, nous avons utilisé de l'eau pure obtenue par osmose⁴ pour limiter à la fois les poussières et les effets de corrosions de la cuve. En effet, ce procédé limite le taux de sels dissous dans l'eau. Par cette technique, nous obtenons une eau propre avec une conductivité électrique faible de $\sim 100 \mu\text{S}\cdot\text{cm}^{-1}$. Pour limiter également la pollution éventuellement présente dans les bacs de rétention et qui pourrait être introduite dans la cuve pendant la phase de remplissage, nous avons installé un système supplémentaire de filtrage en amont de la cuve (voir Figure 3.8). Ce système fonctionne

⁴Procédé de filtration par membrane semi-perméable.

dans les deux sens avec deux circuits différents en phase de remplissage et en phase de vidange. Dans le sens de remplissage (en rouge), nous avons utilisé un double filtres: le premier de $10\ \mu\text{m}$ et le second de $5\ \mu\text{m}$. Dans le sens de vidange, nous utilisons là encore un système de double filtres de $10\ \mu\text{m}$ chacun.

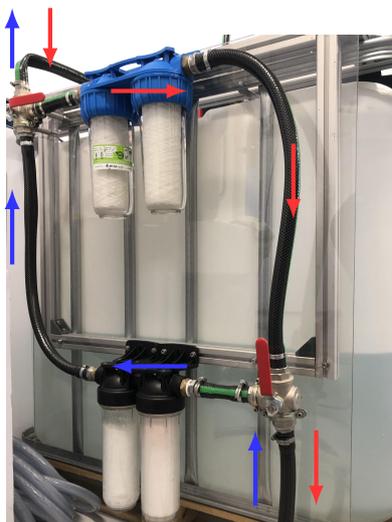


Figure 3.8 – Système de filtration attaché aux cuves de rétention. (En rouge) sens de remplissage de la cuve, (en bleu) sens de vidange.

3.2.4 Système de refroidissement

L'intégralité de l'énergie injectée par les moteurs est transformée en chaleur dans le fluide agité. Pour assurer un contrôle des paramètres de l'expérience (en particulier la viscosité) et permettre un bon taux de reproductibilité, il est primordial de maintenir le fluide à température. En effet, nous avons calculé, à partir des données de viscosité en fonction de la température [93], que la variation de viscosité est de l'ordre de 2.5% pour une variation température de 1°C , par rapport à la viscosité à 20°C .

Pour maintenir le fluide à 20°C , un système de refroidissement est installé sous chaque turbine (voir Figure 3.9). Il est composé d'un serpentin de cuivre rempli d'éthylène glycole connecté à un échangeur thermique de type Hubert[©], en liaison avec la boucle d'eau froide du laboratoire.

Suite à une importante réaction d'oxydo-réduction entre l'aluminium composant la cuve et le cuivre composant le système de refroidissement, une pellicule de peinture plastifiante bleue a été déposée sur le serpentin de cuivre pour assurer une totale étanchéité chimique. Par ailleurs, des rondelles et vis de teflons assurent un écartement et une mise en position des supports du circuit de refroidissement (voir Figure 3.9) pour limiter cette réaction d'oxydo-réduction.



Figure 3.9 – Présentation du système de refroidissement au dessus de la turbine haute. Ce système de refroidissement en cuivre est rempli d'éthylène glycole et connecté au refroidisseur Hubert[©]. ©Y.Audic/CEA.

3.2.5 Turbines et pales

Les pales mettant le fluide en mouvement sont situées en haut et en bas de l'expérience voir Figure 3.9 pour la turbine haute. Elles sont composées de 8 dents usinées dans la masse. Elles présentent un angle de sortie $\alpha = 72^\circ$ comme mentionné Figure 3.10, un rayon de courbure $r = 232.16$ mm et une hauteur $h = 98$ mm. Le support de turbine a un diamètre de $D = 906.5$ mm et pèse 250 kg. Nous utilisons les pales "TM87" dont les caractéristiques sont précisées dans la thèse de F. Ravelet [140] (p. 22).

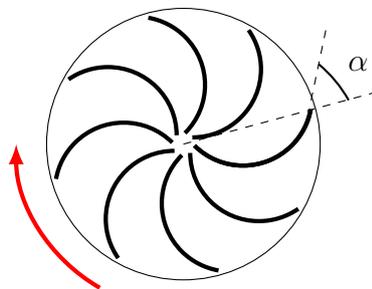


Figure 3.10 – Paramètres turbines angle de sortie $\alpha = 72^\circ$, rayon de turbine $R = 453.25$ mm et rayon de courbure des pales $r = 232.16$ mm et une hauteur $h = 98$ mm

3.2.6 Commande en vitesse

Les moteurs sont commandés en vitesse par un système d’automatisation fourni par l’entreprise Siemens[©]. Nous avons représenté un relevé de la vitesse de rotation des turbines à la Figure 3.11 attestant de la bonne qualité de régulation. Pour le cas présenté (cas C1 run 3), la fréquence de rotation imposée est de 0.004 Hz soit une vitesse en bord de pale de 0.002 m.s⁻¹. Nous relevons sur les capteurs une vitesse angulaire moyenne haut/bas identique de 0.004 Hz avec un écart-type de 2×10^{-4} Hz.

3.2.7 Mesure de couple et de vitesse

Un couple-mètre est installé sur chacun des arbres d’entraînement des turbines. Pour éviter tout contact avec l’eau, le boîtier est installé dans une cavité étanche à l’intérieur de la cuve.

La mesure de couple est possible sur deux gammes de valeurs: la gamme faible de 0 à 100 N.m et la gamme fortes de 0 à 1000 N.m. Cette solution permet d’améliorer la précision pour les faibles valeurs de couples. La mesure de vitesse est enregistrée par un codeur (type SICK) fixé sur chacune des poulies dont l’implantation est présentée en Figure 3.12. Les lectures des capteurs sont réalisées au moyen d’un code *Labview*[©] développé en interne.

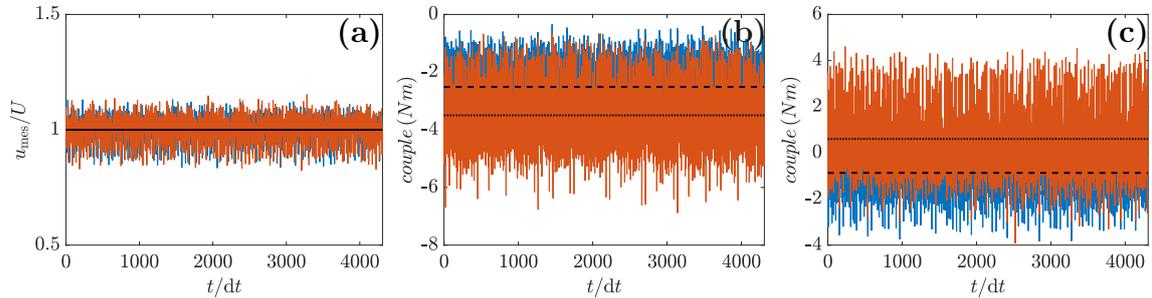


Figure 3.11 – (a) Données de mesure de vitesse bleu (resp. orange) vitesse mesurée $u_{\text{mes}} = 2\pi R f_{\text{mes}}$ turbine haute (resp. basse) adimensionnée par $2\pi R f_c$, (—) correspond à la valeur moyenne adimensionnée par la vitesse de bord de pales. (b) (resp. (c)) Exemple représentatif de mesures de couple turbine haute (resp. basse) réalisées (ici run 3 cas C1), bleu gamme (0 – 100 N.m) orange (0 – 1000 N.m). La droite (----) correspond à la valeur moyenne de la mesure de couple sur le couplemètre haute résolution (0 – 100 N.m) et la droite (.....) celle pour le couplemètre de basse résolution (0 – 1000 N.m).

Nous avons représenté, Figure 3.11, une mesure typique de couple et de vitesse prise pendant la campagne de mesure. Dans cet exemple, nous imposons la vitesse de rotation des turbines qui est fixée ici à $f_c = 0.004$ Hz, nous mesurons une fréquence de rotation de $f_m = 0.004$ Hz avec un écart-type de 2×10^{-4} . La mesure de couple est néanmoins beaucoup plus bruitée, comme nous le voyons sur cet exemple. La gamme de mesure faible présente un écart-type de 1 N.m indépendamment de la turbine (haute ou basse) et la gamme de mesure forte présente une légère différence d’écart-type entre

la turbine haute 1.1 N.m et basse 1.4 N.m. De plus, nous observons systématiquement une différence de valeur de couple entre les gammes faibles et fortes. Ici, nous avons mesuré une différence absolue entre les valeurs moyenne respectivement de 1 N.m pour la turbine haute et 1.4 N.m pour la turbine basse. Notons que des tests préliminaires ont montré une variation des mesures en fonction de la tension de courroies. De plus, les couples parasites ne sont pas constants et peuvent dépendre de la vitesse de rotation. Pour ces raisons, une étape de calibration ainsi qu'un traitement approprié des données de mesures est donc nécessaire avant exploitation. Nous avons affiché en annexe (Figure B.1) les mesures brutes des couples moyens en fonction de la fréquence de rotation moyenne mesurée.

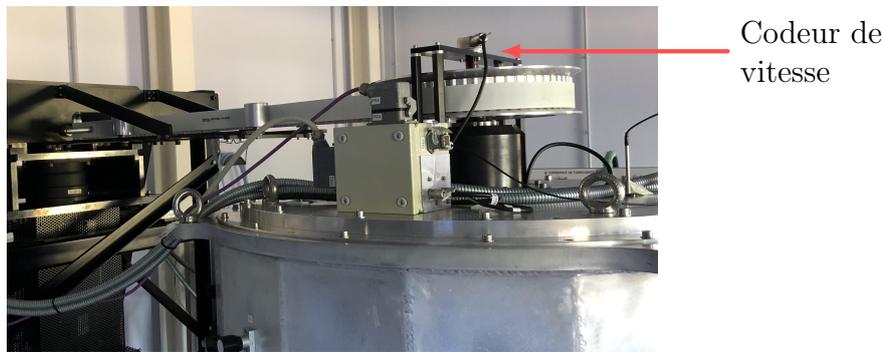


Figure 3.12 – Présentation de l'implantation du codeur de vitesse. La transmission d'information entre le codeur de vitesse et la poulie se fait au moyen d'une couronne crénelée qui limite la transmission des vibrations.

3.3 Présentation du système de mesures

L'expérience que nous avons réalisée est la première mesure de champ de vitesse sur ce prototype. Parmi toutes les techniques de mesures de champ de vitesse possibles, nous avons choisi la Vélocimétrie par Suivi de Particules (PTV) que nous allons décrire dans la suite. Nous avons d'abord lancé une étude sur un prototype simplifié en collaboration avec le LMFL dans le cadre de l'ANR EXPLOIT pour chercher la configuration optimale et améliorer les performances de reconstruction. Dans cette partie, nous allons présenter l'ensemble de la chaîne de mesure réalisée au cours de cette expérience en développant tous les points nécessaires à sa réalisation. Nous développerons dans un premier temps les aspects pratiques puis nous évoquerons la méthode de mesure que nous avons employée.

3.3.1 Disposition de la salle et vue d'ensemble

La salle dans laquelle nous avons réalisé cette expérience a été totalement remise à neuf. En particulier, le dispositif expérimental est fixé sur une chappe de béton spé-

cialement conçue pour limiter la transmission des vibrations causées par les moteurs voir Figure 3.7.

D'autre part, la salle est entièrement climatisée et maintenue à une température de 20°C ceci afin d'assurer une bonne répétabilité de l'expérience - nous développons ce point en 3.2.4.

Nous avons représenté - Figure 3.13 - une coupe médiane de l'expérience GVK avec l'implantation des caméras ainsi qu'une vue de pied de l'expérience dans laquelle la zone de mesure est matérialisée par un rectangle rouge.

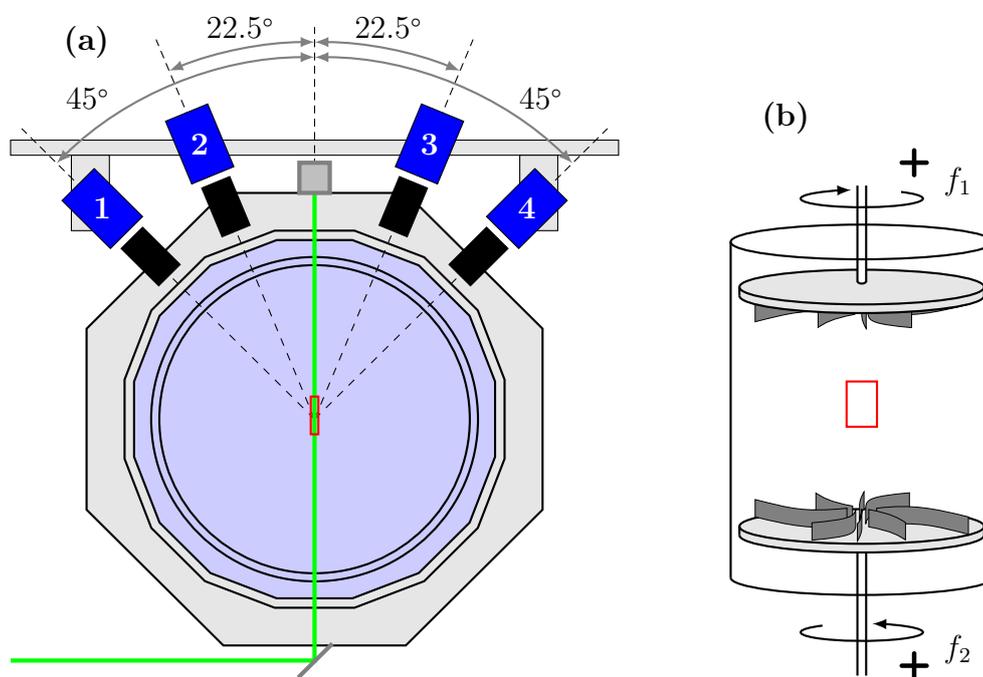


Figure 3.13 – (a) plan de coupe médian de l'expérience GVK avec schéma d'implantation des quatre caméras, (b) schéma de l'expérience GVK en perspective sens **contra** avec la zone d'étude matérialisée par un carré rouge.

3.3.2 Laser

Le laser utilisé est un Nd:YLF⁵ à deux cavités pompées par diodes. Le faisceau laser monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 532\text{ nm}$ a un diamètre de sortie de 8 mm et un M^2 inférieur à 25. Le M^2 mesure la différence de propagation d'un faisceau réel par rapport à un faisceau gaussien⁶. Le beam waist est situé à -900 mm (intérieur) par rapport à la sortie du laser. Chaque cavité délivre une énergie maximum de 25 mJ/pulse . Chaque tir dure exactement 320 ns portant à $18,75\text{ kW}$ la puissance crête. La puissance moyenne P , intégrée sur 1 s , dépend quant à elle de la fréquence de répétition. Nous avons rappelé dans le tableau A.2 les puissances et les intensités mises en jeu dans notre expérience. Notons enfin que la fréquence de répétition se répartie entre 100 Hz et 10 kHz et que la puissance délivrée est stable pour des fréquences inférieures à 1 kHz et commence à diminuer pour des fréquences plus importantes. En particulier, nous pourrions voir, Figure 3.26, plusieurs exemples de l'intensité lumineuse enregistrée par chacune des caméras pour différents runs (chaque run correspond à une prise de mesure de 3226 instants) à la même fréquence de répétition. Ce cas présente une diminution systématique de l'intensité lumineuse au cours du temps. Enfin, nous présentons Figure 3.14, la sortie des deux cavités laser que nous utilisons.

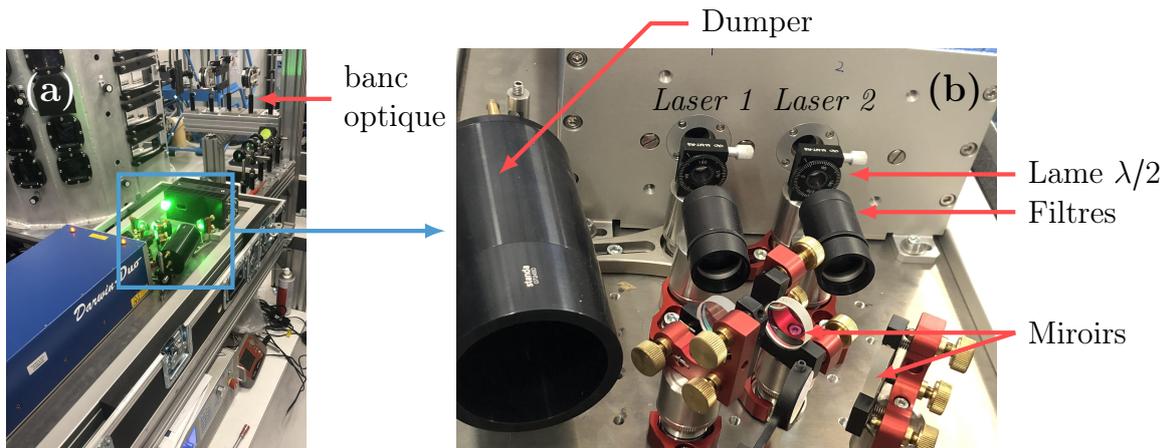


Figure 3.14 – Image de la sortie des cavités du laser. (a) laser en marche en puissance faible pendant la phase d'ajustement des optiques, en arrière plan le banc optique décrit Figure 3.15. (b) détail de la sortie des deux cavités laser.

Pour atteindre une intensité suffisante sans augmenter trop fortement la puissance laser, nous avons préféré synchroniser les fréquences de pulsation des deux cavités.

Pour choisir la fréquence d'acquisition des caméras imposée par la fréquence de pulsation laser, nous utilisons le critère développé pendant la thèse de P. Debue. Nous avons estimé que l'algorithme de reconstruction que nous utilisons est capable de bien reconstruire les trajectoires pour un déplacement maximal de l'ordre de 10 pixels entre deux

⁵Neodym-YLF: laser composé d'un cristal YLF (yttrium-lithium-fluoride).

⁶Si on fait converger un laser idéal avec un angle θ , au waist on obtient un rayon $w_0 = \frac{\lambda}{\pi\theta}$ avec λ la longueur d'onde. Dans le cas réel, le rayon au beam waist est de $w_0^{\text{reel}} = M^2 \frac{\lambda}{\pi\theta}$

instants consécutifs. Nous évaluons ensuite la fréquence d’acquisition (ou fréquence de pulsation laser) à partir de la formule suivante :

$$f_{\text{acq}} = \frac{2 \cdot u_{\text{rms}}^{\text{tot}}}{\|\delta \mathbf{x}\|}, \quad (3.14)$$

pour ce critère, nous considérons un déplacement $\|\delta \mathbf{x}\|$ de 10 pixels et, en première approximation, $u_{\text{rms}}^{\text{tot}}$ constant égal à $u_{\text{rms}}^{\text{tot}} = 0.5$.

La fréquence d’acquisition pour le cas C3 à C8 (décrits au tableau 3.7) a été déterminé selon la règle établie dans la thèse de P. Debye [53]. Pour les cas C1 et C2, cette règle n’a pas pu être suivie car la fréquence calculée est en dessous de la limite minimale de fréquence de pulsation laser de 100 Hz. Cependant, étant donné que la performance de l’algorithme de reconstruction dépend du déplacement moyen des particules, le déplacement pourra être ajusté en ne considérant, par exemple, qu’une image sur deux pour le cas où la fréquence d’acquisition serait trop importante et entraînerait un déplacement trop faible (voir discussion partie 3.4.4.1).

Le chemin optique du laser, schématisé Figure 3.15, reprend la configuration de la campagne sur l’expérience GVK. Il permet d’obtenir une nappe laser de 50 mm de hauteur et 6 mm d’épaisseur au point du beam waist.

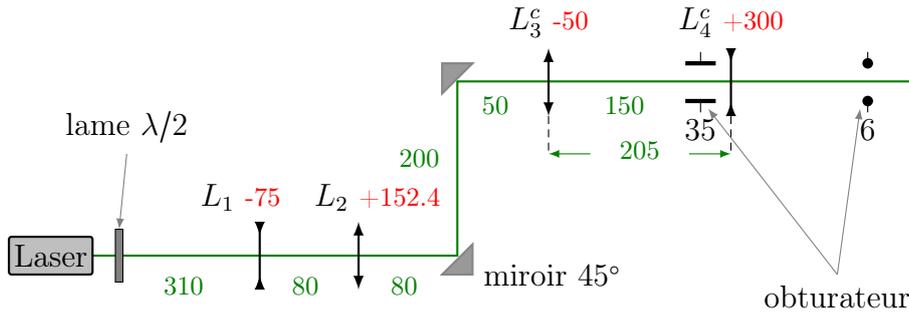


Figure 3.15 – Banc optique mis en place avec le LMFL. Le diamètre de sortie du faisceau vaut 8 mm et le beam waist est situé à -900 mm de la sortie laser. Nous avons différencié en rouge les distances focales (en mm) et en vert les longueurs de séparation (en mm).

Nous faisons entrer le faisceau laser par le prisme - voir paragraphe 3.2.1, cette interface est totalement plane. La course du laser passe par le centre de la contre-cuve afin de dévier au minimum le faisceau à la traversée de la paroi de PMMA. De plus, pour assurer le parallélisme de la nappe laser, nous avons réalisé une auto-collimation par apposition d’un miroir sur le hublot diamétralement opposé au prisme. Un écart acceptable de l’ordre du millimètre a été observé sur un total de 2 mètres (rayon aller-retour) de faisceau. Enfin, la nappe termine sa course dans un récipient noir rempli d’eau permettant d’absorber l’énergie transmise par le laser.

3.3.3 Phase d’acquisition

La communication entre les caméras et le laser se fait au moyen d’un PTU (Programmable Timing Unit) de la marque DaVis[©]. Il permet de synchroniser parfaitement

les 4 caméras avec l'émission laser.

3.3.4 Optique et réglages

La technique que nous utilisons est basée sur l'imagerie de particules illuminées par un laser dans un volume. A partir de ces images de particules, nous reconstruisons les trajectoires au cours du temps. Tout d'abord, nous estimerons la taille d'une particule sur le capteur d'une caméra, nous calculerons ensuite, à partir de ces estimations, la profondeur de champ.

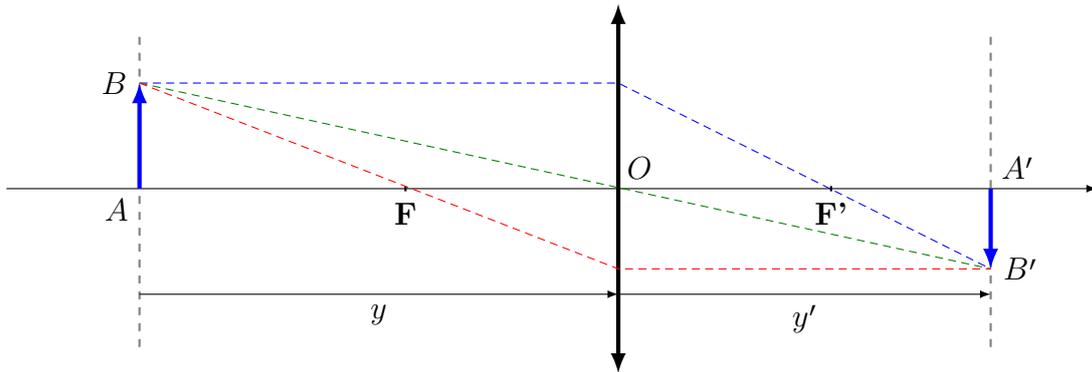


Figure 3.16 – Lentille convergente, visualisation du grandissement

Pour estimer le diamètre de la particule vue sur le capteur nous aurons besoin du grandissement M . Il correspond au rapport entre la taille de l'image et la taille de l'objet. De plus, d'après la Figure 3.16, on peut également estimer le grandissement par les données y et y' .

$$M = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O'}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \quad (3.15)$$

Soit,

$$|M| = \frac{y' - |f'|}{|f'|} = \frac{|f|}{y - |f|} \quad (3.16)$$

avec $f' = \overline{OF'}$ et $f = \overline{OF}$.

La lumière, réémise par les particules sous l'effet de l'excitation laser, est ensuite captée par les caméras. D'une part, la taille de l'image d'une particule sur le capteur doit être suffisamment grande pour pouvoir estimer sa position avec une bonne précision. En effet, si le diamètre de l'image d'une particule est inférieur à la taille d'un pixel, le déplacement mesuré fera apparaître des sauts entiers, cette erreur de reconstruction est connue sous le terme de peak-locking [135]. Pour éviter cet écueil et assurer une précision sous-pixéllique, il est préconisé d'avoir un diamètre d'image de particule de l'ordre de 2 à 4 pixels afin de pouvoir effectuer une interpolation selon un modèle gaussien. Il est alors possible d'estimer le centre des particules à une fraction de pixel près. L'erreur d'estimation du centre de la tache est inférieure à 0.2 pixel pour un

diamètre de particule de 3 pixels [51]. De plus, les images de particules ne doivent pas être trop grandes pour éviter un chevauchement des taches de diffraction ce qui conduirait à des difficultés pour le traitement des images. Avant de régler les optiques, il est possible d'estimer théoriquement le diamètre des particules vues par les caméras. Ce diamètre varie évidemment avec la taille des particules, le grandissement mais également avec le rayon de fermeture du diaphragme. En effet, dans l'hypothèse de diffraction de Fraunhofer à travers une fente circulaire, le profil d'intensité moyen adimensionné $\langle I \rangle / I_0$ en fonction de x/x_0 avec $x_0 = \lambda/D_a$ correspondant au rapport entre la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse et D_a le diamètre du diaphragme et I_0 l'intensité d'entrée est une tache d'Airy qui suit une fonction de Bessel du premier ordre.

En particulier, on sait que la première annulation de cette fonction intervient à $x/x_0 = 1.22$. On peut donc en déduire le diamètre de la tache de diffraction observée sur le capteur, noté d_{diff} - voir [137].

$$d_{\text{diff}} = 2 \cdot 1.22 x_0 f (|M| + 1) = 2.44 f^\# \lambda (|M| + 1). \quad (3.17)$$

où f est la distance focale (en m), x_0 le rapport λ/D_a avec la longueur d'onde λ , D_a le diamètre du diaphragme, $|M|$ le grandissement et $f^\#$ le rapport entre la distance focale et l'ouverture du diaphragme D_a .

Nous trouvons dans [5] une estimation du diamètre d'une particule enregistrée sur un capteur de caméra.

$$d_\tau = \sqrt{(M d_p)^2 + (d_{\text{diff}})^2}. \quad (3.18)$$

En pratique, $M d_p \ll d_{\text{diff}}$ et $d_\tau \approx d_{\text{diff}}$ comme nous l'avons vérifié au tableau 3.5. A partir de la donnée de d_τ , nous pouvons en déduire la valeur de la profondeur de champ. Cette quantité doit être estimée suffisamment finement pour s'assurer de la visualisation correcte du volume d'étude dans la totalité de l'épaisseur.

Dans son livre M. Raffel [137] (Eq. 2.10 p. 51), donne une estimation de la profondeur de champ δ_z . Dans la thèse de P. Debue [53], une modification de cette estimation a été apportée pour tenir compte du changement d'indice optique pour le cas simplifié Figure 3.17-(b).

$$\delta_z = 4.88 (f^\#)^2 \lambda \frac{n_i}{n_e} \frac{(|M| + 1)^2}{M^2}. \quad (3.19)$$

Nous avons repris dans le tableau 3.5 l'ensemble des paramètres optiques utilisés pendant la campagne de mesure sur l'expérience GVK.

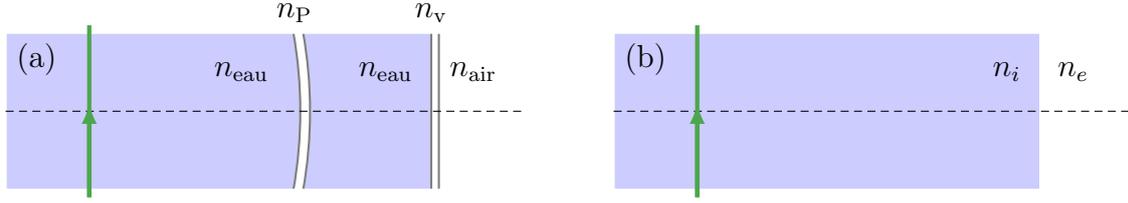


Figure 3.17 – (a) Visualisation des différents milieux traversés optiquement. Le laser est matérialisé par une ligne verte. Les différents dioptries sont matérialisés par des lignes. On note n_{eau} l’indice de réfraction de l’eau, n_{air} celui de l’air, n_P celui du PMMA et n_v celui du verre. Ces indices sont rappelés dans le tableau 3.2. (b) simplification pour le calcul de la profondeur de champ.

particules	$d_p(\mu\text{m})$	5.33	
Optique caméras	$f(\text{mm})$	200	
	M	0.4	
	d (distance caméra-verre)	200	
	$dx_{\text{pix}}(\mu\text{m})$	10	
	$f\#$	Cam 1 & 4	Cam 2 & 3
		11	16
Optique caméras	$d_{\text{diff}}(\text{mm})$	0.02	0.0291
	$d_r(\text{mm})$	0.0201	0.0292
	$\delta_z(\text{mm})$	5.12	10.83

Table 3.5 – Grandeurs optiques de la campagne de mesure. On remarque une valeur différente de $f\#$ pour les caméras 1-4 et 2-3 ceci afin de compenser un astigmatisme plus important présent sur les caméras 2 et 3. On augmente ainsi la tache de diffraction (éq. (3.17)) pour réduire l’astigmatisme. Dans le même temps, on augmente la profondeur de champ (éq. (3.19)) ce qui aura tendance à réduire le rapport signal sur bruit affectant la qualité des images comme nous le verrons Figure 3.23.

3.3.5 Particules utilisées comme traceurs

3.3.5.1 Qualité d’un traceur

Le laser illumine un petit volume à l’intérieur de la cuve remplie d’eau. Nous ajoutons des particules de polystyrène monodisperses, fournies par l’entreprise Spherotech[©]. Le diamètre de ces particules est compris entre 5.0 et 5.9 μm - diamètre moyen de 5.33 μm - de masse volumique 1.05 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Ces particules sont particulièrement intéressantes, d’une part car elles sont beaucoup plus monodisperses que les particules Dantec[©] utilisées dans les précédentes campagnes de mesures. Ce diamètre, très peu variable, permet d’améliorer significativement les capacités de reconstruction de l’algorithme Shake-The-Box et en particulier lors de la phase d’estimation de la tache moyenne pour le calcul de l’OTF - voir para-

graphe 3.3.7.2. Ce point est confirmé par l'étude menée par Chaabo et al. sur un prototype simplifié à Lille. Et d'autre part, le diamètre de ces particules est très faible par rapport à l'échelle de Kolmogorov (voir tableau 3.9), ce qui nous assure que la limitation de résolution ne sera pas imputable aux traceurs.

La qualité de traceur d'une particule est systématiquement représentée par le nombre de Stokes noté St . Le mouvement d'une particule de diamètre d_p et de masse m_p et de vitesse \mathbf{v} , dans un fluide de viscosité dynamique $\mu = \rho\nu$ de vitesse \mathbf{u} , est soumise à une force de Stokes [76, 168] dont la valeur est donnée par:

$$\mathbf{F} = -3\pi d_p \mu (\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.20)$$

dans le cas $\rho_p \gg \rho_f$, avec ρ_p la densité de la particule et ρ_f la densité du fluide (en négligeant la gravité), le mouvement de la particule est gouverné par l'équation simplifiée suivante (on pourra également lire l'article [113] ainsi que [12, 47] pour le développement complet des termes de l'équation)

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3\pi d_p \mu (\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (3.21)$$

avec $m_p = \frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_p$. La solution de cette équation est donnée par $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \rho_p \frac{d_p^2}{18\mu}$. On définit le nombre de Stokes à τ_η comme le rapport entre le temps caractéristique de réponse d'une particule soumise à une force de Stokes et un temps caractéristique de l'écoulement, dans le cas qui nous intéresse ici égal à τ_η . Notons toutefois que dans le cas de particules isodenses, l'équation (3.21) fait apparaître des termes correctifs supplémentaires, en particulier un terme de pression dû à l'accélération de la particule $\rho_f \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ et un terme de pression dû à l'accélération relative $\rho_f \frac{\pi d_p^3}{6} \frac{d\mathbf{v}-\mathbf{u}}{dt}$ (voir section 4.2 de C.-M. Tchen [173]).

$$St = \frac{\text{temps inertiel caractéristique}}{\text{temps caractéristique de l'écoulement}} = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu \tau_\eta}, \quad (3.22)$$

avec ρ_p la masse volumique de la particule (en kg.m^{-3}), d_p le diamètre de la particule (en m), μ la viscosité dynamique du fluide (en $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$) et τ_η le temps de Kolmogorov (en s).

Au vu du nombre de Stokes très faible valant au minimum 3.6×10^{-7} et au maximum 7.6×10^{-5} (voir tableau 3.9), ces particules suivent parfaitement l'écoulement. En comparaison, nous avons un nombre de Stokes pour un Reynolds de 6300 valant 6.7×10^{-5} , nous avons gagné deux ordres de grandeurs à Reynolds équivalent avec ces particules.

Cependant, rappelons que le nombre de Stokes pour le cas de particules isodenses n'est pas nécessairement le nombre le mieux adapté pour rendre compte de la qualité d'un traceur. Dans ce cas particulier, comme évoqué précédemment, certains termes de pression ne sont pas correctement pris en compte. Une meilleure estimation du nombre de Stokes est utilisée dans [169] par la formule :

$$St = \frac{d_p^2}{36\eta^2} \left(1 + 2\frac{\rho_p}{\rho_f}\right), \quad (3.23)$$

De plus, la vitesse de sédimentation des particules est une deuxième quantité traduisant la qualité des particules utilisées. L'étude de la vitesse de sédimentation des particules est simplifiée dans ce contexte. Nous prendrons une particule initialement au repos soumise à la force d'attraction gravitationnelle $\mathbf{f}_g = 1/6\pi d_p^3 \rho_p \mathbf{g}$, la poussée d'Archimède $\mathbf{\Pi}_A = -1/6\pi d_p^3 \rho_f \mathbf{g}$ et la force de Stokes précédemment citée $\mathbf{F} = -3\pi d_p \mu \mathbf{v}$. La particule subit une accélération suivant une loi exponentielle décroissante jusqu'à se stabiliser. La vitesse de stabilisation de la particule est donnée par l'équation:

$$\frac{\pi d_p^3}{6} (\rho_p - \rho_f) g = 3\pi d_p \mu v_g,$$

soit l'équation recherchée:

$$v_g = \frac{d_p^2 (\rho_p - \rho_f) g}{18 \mu}. \quad (3.24)$$

Enfin, il est important de rappeler que notre motivation principale dans l'utilisation de particules aussi petites est liée à la taille caractéristique des événements étudiés. Si on se réfère à l'article de G. A. Voth [180], un diamètre de particule isodense inférieur à 5η est suffisant pour obtenir une bonne estimation de l'accélération. Dans notre cas, nous sommes à deux ordres de grandeur en dessous dans le cas le plus défavorable (voir tableau 3.9). Nous nous assurons ainsi que la limitation ne viendra pas de la taille des particules utilisées en prenant des particules bien plus petites que l'échelle de Kolmogorov.

3.3.5.2 Diffusion de la lumière par les particules

Les techniques de reconstruction employées dans cette thèse nécessitent de capter les images des particules illuminées par un laser. L'onde lumineuse, issue de la source laser, est ainsi réémise par les particules dans toutes les directions. Pour la réémission de l'onde incidente, deux cas sont possibles selon le diamètre de la particule comparativement à la longueur d'onde d'excitation.

Si le diamètre de la particule est notablement inférieur à la longueur d'onde, on parle de diffusion de Rayleigh. La distribution d'intensité émise est relativement isotrope sauf dans la direction perpendiculaire au plan de polarisation de l'onde. Dans le cas contraire, si la particule est bien plus grande que la longueur d'onde, on parle de diffusion de Mie. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers les deux livres [27, 83] pour une étude plus poussée sur la diffusion particulaire.

Dans notre expérience, nous nous trouvons dans le deuxième cas, nous avons donc une diffusion de Mie. Cette diffusion lumineuse se fait dans toutes les directions, elle est, de plus, très anisotrope comme nous pouvons le voir sur la Figure A.5 qui présente la courbe de distribution angulaire d'intensité lumineuse pour $q = 6$ et $q = 59$, avec q le diamètre adimensionné défini par $q = n\pi d_p / \lambda$ où d_p est le diamètre de la particule, λ la longueur d'onde du rayon incident et n l'indice du médium dans lequel évolue les particules - voir [27] p. 100. Pour les particules que nous utilisons $q = 42$. Pour ce type de diffusion de Mie, l'ensemble de la lumière est réémis dans toutes les directions.

Cependant, la direction avant offre une meilleure restitution de la lumière que la direction arrière. Il est donc préférable de disposer les caméras pour qu'elles reçoivent cette diffusion avant.

Il peut être également mentionné que les particules utilisées ici sont relativement grandes (en air, il est souvent utilisé des gouttelettes de $1\mu\text{m}$ [137]). Le rapport entre l'intensité lumineuse émise et l'intensité incidente étant proportionnel à d_p^2 [83] (chap. 10) on peut donc utiliser une énergie plus faible comparativement à une expérience en air. Enfin, ce rapport explique la raison pour laquelle il est indispensable d'éliminer au maximum les poussières dont le grand diamètre pourrait détériorer les capteurs des caméras.

Les particules évoluent dans un pavé illuminé par le laser. L'intensité réémise est ensuite captée par les caméras. Ces images de particules correspondent donc à des projections d'un monde en trois dimensions sur un capteur en deux dimensions. Géométriquement, il est donc possible d'estimer la concentration particulaire uniquement à partir de la visualisation sur l'écran. En considérant que le nombre de particules vue sur l'écran est identique à celui présent dans le volume d'étude⁷, on peut formuler une équation simple rendant compte de la concentration particulaire dans la cuve [3, 157].

$$C_{3D} = C_{2D} \frac{dx_{\text{pix}}^2 |M|^2}{\delta z}. \quad (3.25)$$

avec C_{3D} la concentration particulaire (en particules par m^3), C_{2D} la concentration de particules sur l'écran (en particules par pixel), dx_{pix} la taille d'un pixel (en m), M le grandissement et δz l'épaisseur de la nappe laser (en m). On trouve dans notre cas $C_{3D} = 7.20$ particules par mm^3 .

Nous réutiliserons l'équation (3.25) pour estimer la valeur de la distance moyenne inter-particulaire au paragraphe 3.4.5.

3.3.6 Disposition des caméras et réglages optiques

Des caméras rapides phantom Miro M340 munies de capteurs avec une technologie sCMOS (scientific Complementary Metal-Oxide Semiconductor) de résolution 1600×1600 pixels avec une taille de pixel de $10\mu\text{m}$, sont disposées face à l'émission laser (voir Figure 3.13) de sorte que dans cette configuration, toutes les caméras reçoivent la lumière dans le sens le plus favorable à la diffusion de Mie comme indiqué précédemment.

Pour obtenir une bonne netteté des images de particules nous devons respecter la condition de Scheimpflug. Ce critère, illustré par la Figure 3.18, exige que le plan du capteur de la caméra, le plan central de la lentille de l'optique et le plan de la nappe laser doivent tous être concourants. Pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur vers l'article fondateur de T. Scheimpflug [161] ainsi que [134] pour des points d'améliorations, en particulier, la prise en compte des différents indices optiques traversés par le rayon lumineux.

⁷Ce qui n'est pas strictement vrai. Par exemple, dans le cas où deux particules sont l'une derrière l'autre.

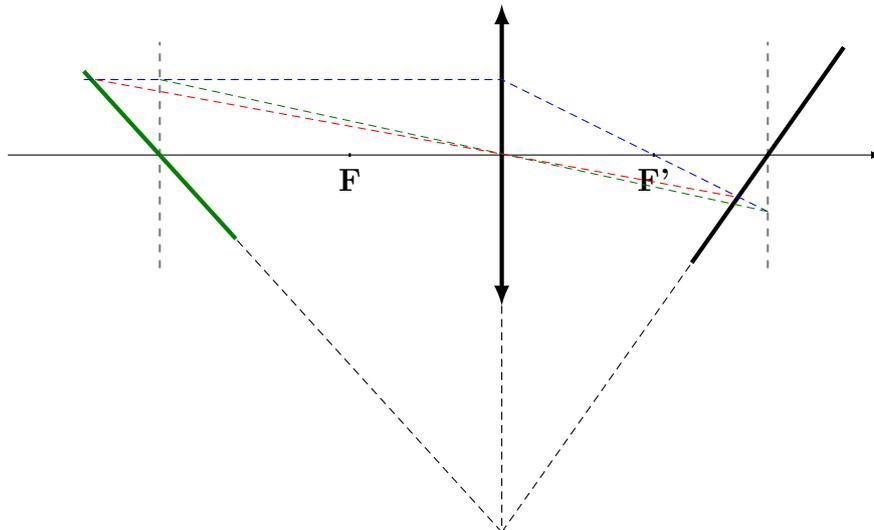
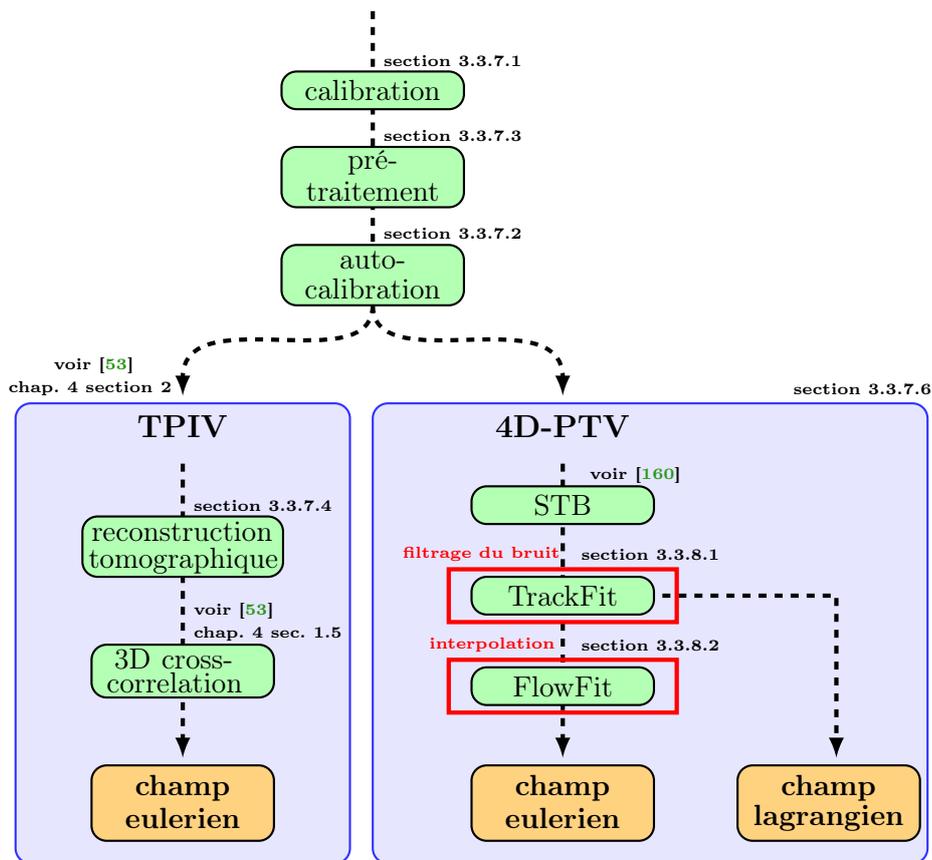


Figure 3.18 – La condition de Scheimpflug oblige le plan image, le plan objet et le plan de la lentille à être concourants. Les rayons issues de la nappe laser dans le plan objet s’alignent dans le plan matérialisé par la ligne en gras noire comme nous pouvons le voir avec les rayons tracés en pointillés.

3.3.7 Présentation des techniques expérimentales

Dans cette partie, nous évoquerons les deux techniques de vélocimétrie utilisées dans cette thèse: la vélocimétrie par image de particules PIV (*Particle Image Velocimetry*) et la vélocimétrie par suivi de particules PTV (*Particle Tracking Velocimetry*). Nous ne rentrerons pas dans les détails de ces deux techniques, nous renvoyons les lecteurs intéressés vers l’ouvrage de référence [137] pour la PIV et l’article décrivant l’algorithme utilisé [159, 160] pour la PTV. Néanmoins, nous développerons l’ensemble des étapes suivies pendant cette campagne de mesure. Dans un premier temps, nous traiterons des points de similitudes des techniques PIV et PTV: la calibration 3.3.7.1 et l’auto-calibration 3.3.7.2, le pré-traitement des images de particules où nous exposerons nos tentatives d’améliorations 3.3.7.3 et la reconstruction tomographique 3.3.7.4. Enfin, une deuxième partie sera consacrée à la description individuelle de chaque technique: la PIV 3.3.7.5 et la PTV 3.3.7.6.



3.3.7.1 Calibration

La phase de calibration est la première étape obligatoire pour une expérience de PIV/PTV. Elle permet d’obtenir à la fois le repère du laboratoire et une première correction des aberrations optiques. Lors de cette étape, nous installons la mire de calibration (Figure 3.20) sur un bras articulé dans les directions (r, θ, z) . Le bras est posé sur la cuve comme nous pouvons le voir Figure A.4.

Une photo de la mire est prise par les 4 caméras installées selon la configuration Figure 3.13. Nous utilisons une plaque de calibration de type “058-S” de LaVision[©] qui est une plaque crénelée selon une double rangée. Il est ainsi possible de réaliser une double calibration selon deux plans différents ceci afin d’améliorer la calibration dans le sens de l’épaisseur de la nappe laser⁸.

La procédure d’identification des marqueurs présents sur la plaque de calibration permet d’obtenir un calibration. Elle offre à la fois la possibilité de définir un repère commun aux 4 caméras et d’obtenir les caractéristiques optiques en vue d’une compensation des aberrations optiques. Une plus grande description est développée en annexe A partie A.2.

⁸D’après la documentation fournies par le logiciel DaVis[©].

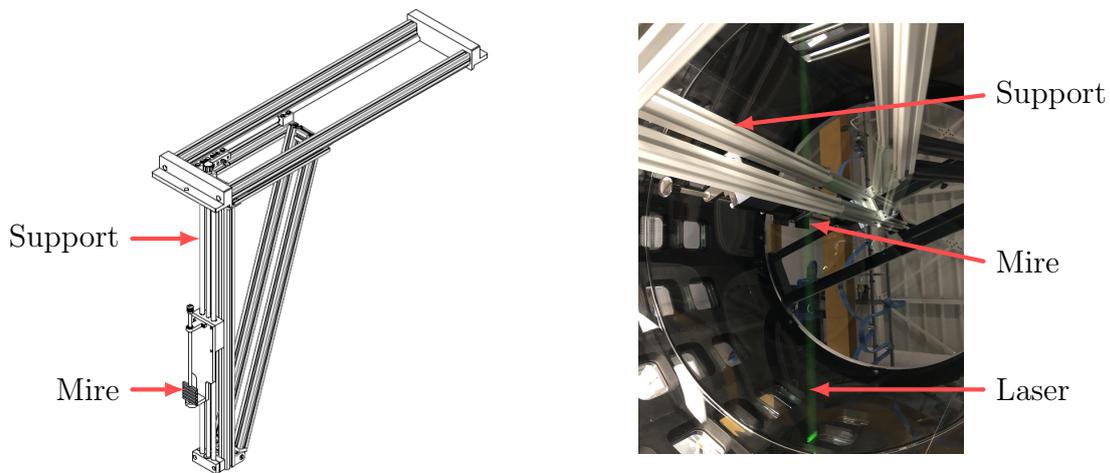


Figure 3.19 – Bras d’installation de la mire de calibration. (A gauche) Plan du support de calibration - détail du plan délivré par l’entreprise GP-Concept. (A droite) Mise en situation de la mire de calibration lors de la campagne de mesure dans l’expérience GVK en juin 2021. Photo prise pendant la phase d’alignement de la mire avec la nappe laser.



Figure 3.20 – Les deux faces de la mire de calibration utilisée, type “058-S”. On remarquera également le triangle et le carré sur chaque face fixant la position de l’origine voir complément d’explications annexe A partie A.2.

3.3.7.2 Auto-calibration et fonction de transfert optique

L’étape d’auto-calibration [158, 181] est devenue une étape obligatoire en PIV/PTV, elle permet d’affiner la calibration et d’en corriger les erreurs dans le volume. En effet, nous l’avons vu, la calibration par plaque est opérée par visualisation d’une mire. Toutefois, des erreurs subsistent et ce quelque soit la technique utilisée, voir 3.3.7.1. Par ailleurs, une calibration dans le volume reste expérimentalement très compliquée. C’est pour cela qu’il est nécessaire de raffiner la calibration par une nouvelle étape afin

d'obtenir une précision suffisamment fine, condition *sine qua non* de la reconstruction par PTV qui nécessite une précision sous-pixélique [181].

Ce raffinement est obtenu par l'auto-calibration, cette étape permet de dresser une cartographie locale de l'erreur de calibration directement à partir des images de particules et réduit les erreurs de calibrations de 1-2 pixels en dessous de 0.1 pixels, d'après [160]. Ce raffinement local se matérialise par un champ de vecteurs appelé champ de vecteurs de disparité dont nous avons décrit plus précisément la construction en annexe A partie A.4. Notons enfin que meilleure est la calibration, plus le champ de vecteur de disparité attendu sera faible. En pratique, on estime la qualité de l'auto-calibration grâce à la moyenne et au maximum de disparité qui correspond à la norme du vecteur correctif de calibration (voir la discussion en annexe partie A.4), quantités fournies par le logiciel. Dans les études préliminaires réalisées au LMFL, une bonne reconstruction nécessite que ces deux valeurs soient respectivement inférieures à 0.02 et 0.2. Dans chaque reconstruction effectuée, nous avons respecté ce critère.

Nous avons représenté, Figure 3.21, les images de taches moyennes de particules obtenues à la suite de l'étape d'auto-calibration. Nous avons représenté les résultats obtenus sur deux caméras: la caméra 1 dans le plan médian et caméra 2 au premier plan. Le premier exemple est le plus favorable en terme de distorsion car il s'agit du plan centrale, qui est donc loin des bords du laser et donc d'un affaiblissement de la puissance laser, le plus focalisé, et la caméra 1 est la moins affectée (avec la caméra 4) par la distorsion. Le deuxième exemple est un cas défavorable en terme de distorsion d'image pour des raisons similaires.

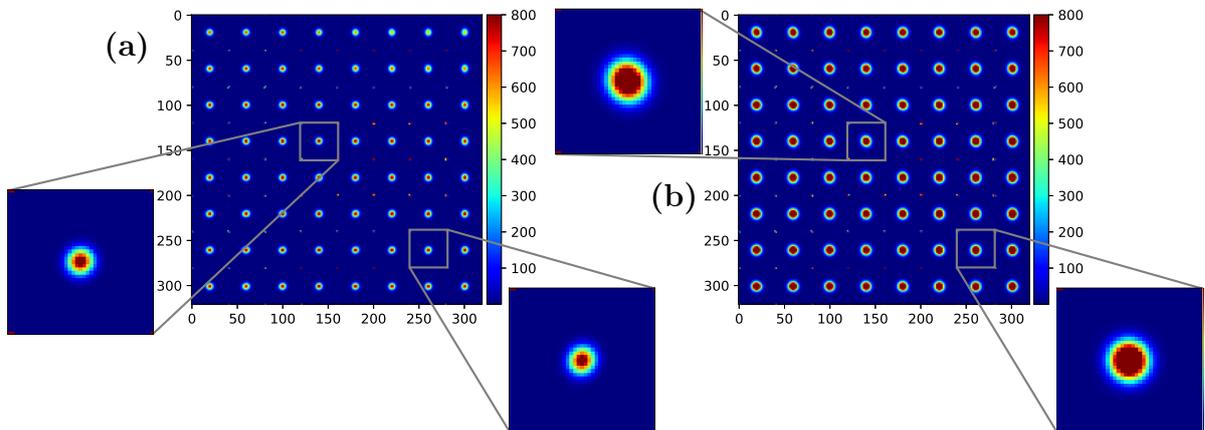


Figure 3.21 – Visualisation de la tache moyenne de particule par sous-volume obtenue à la suite de l'auto-calibration, (a) caméra 1 plan médian (b) caméra 2 premier plan.

A l'issue de cette étape, on peut estimer la forme de la tache moyenne par sous-volume ainsi que ses extensions spatiales⁹. Cette étape permet d'estimer plus précisément le centre de masse des particules pour réduire les bruits de reconstructions [158].

⁹Réalisé par un fit elliptique gaussien: $I_0 \exp(a(x - x_0)^2 + b(y - y_0) + cxy)$

Nous pouvons faire une première remarque sur la forme des particules, plus évasée sur la caméra 2 que sur la caméra 1. Ce point traduit un plus fort niveau de bruit - et donc un plus mauvais rapport signal sur bruit sur la caméra 2 (et 3) que sur les deux autres caméras (1 et 2), voir l'exemple Figure 3.22. De plus, nous pouvons voir une forme légèrement plus allongée sur la caméra 2 que sur la caméra 1. D'après [158], ce point peut traduire un léger astigmatisme.

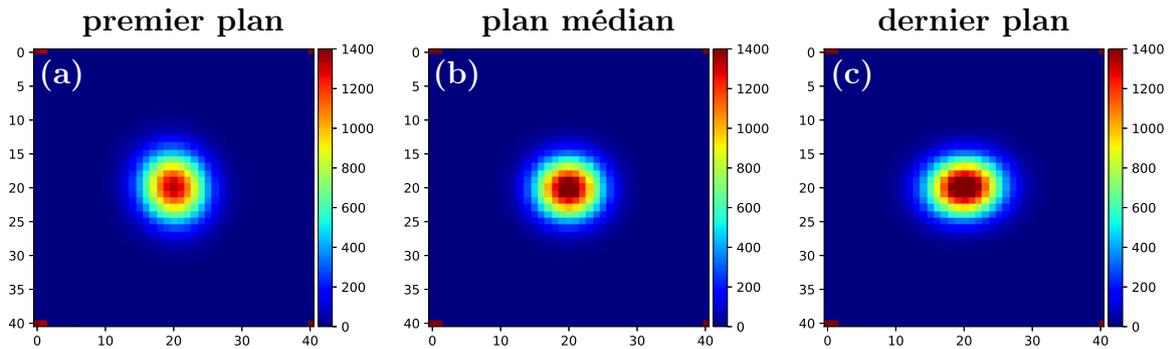


Figure 3.22 – Détail du sous-volume (4ème ligne et 4ème colonne) de l'OTF de la caméra 2 dans trois plans différents ($z = -3\text{mm}$, $z = 0\text{mm}$ et $z = 3\text{mm}$). Cette OTF a été réalisée pour le cas anti 0.004Hz run 1. Le motif elliptique sur le plan 1 (a) est légèrement plus allongé dans la direction verticale et légèrement plus allongé dans la direction horizontale pour le troisième plan (c), ce profil est circulaire au centre (b). Ce point traduit un léger astigmatisme [158].

Les étapes précédemment citées conduisent à la construction de la fonction de transfert optique OTF (*Optical Transfer Function*) nécessaire dans le cadre d'un suivi par PTV [158]. Cette fonction rend compte de toutes les aberrations optiques et permet d'affiner la calibration pour suivre les exigences imposées par cette technique.

3.3.7.3 Pré-traitement

Nous représentons, Figure 3.23, un exemple d'images obtenues lors de la campagne de mesure tiré du cas C1 run 21.

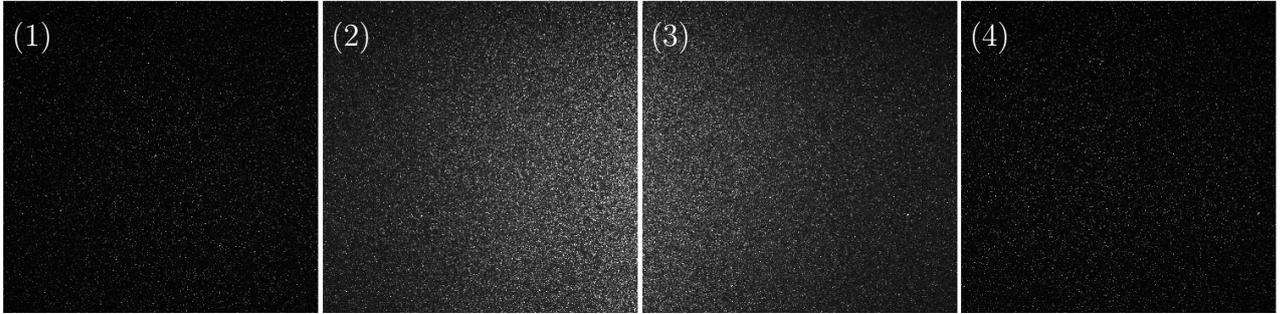


Figure 3.23 – Exemple d'images de particules obtenues pour les 4 caméras. De gauche à droite caméra 1, 2, 3 et 4. Exemple du cas C1 run 21.

Tout d'abord, on observe sur les images 3.23-(1) et 3.23-(4) respectivement des caméras (1) et (4) une intensité lumineuse plus faible et un meilleur contraste que sur les images 3.23-(2) et 3.23-(3). De plus, on peut voir se dessiner, en arrière, plan un gradient d'intensité lumineuse présent uniquement sur (2) et (3). Cette remarque est également quantifiée sur les graphiques de l'intensité moyenne, Figure 3.26 et en annexe Figures A.1, A.2 et A.3. Systématiquement, les caméras (2) et (3) renvoient une intensité moyenne bien supérieure à celles enregistrées par les caméras (1) et (4).

Les interprétations des différences observées dans les images sont multiples. Géométriquement tout d'abord, l'angle de vue des caméras (2) et (3) est plus resserré que sur les caméras (1) et (4) (voir schéma 3.13). La nappe de lumière traversée est donc plus importante du côté droit que du côté gauche pour la caméra (2) et inversement pour la caméra (3) du fait de la perspective. Deuxièmement, la forte anisotropie de la diffusion de Mie dans cette région angulaire $\approx 25^\circ$ - Figure A.5 - peut également dégrader le contraste des particules dans les images des caméras (2) et (3). Enfin, la cuve de PMMA agit comme un double dioptré cylindrique (voir tableau des indices optiques 3.2) modifiant ainsi le passage des rayons partant du volume d'étude jusqu'aux capteurs des caméras. Ce dioptré agit comme une lentille convergente de grande focale. En particulier, la maquette utilisée pendant la campagne d'essai du banc optique par l'équipe du LMFL ne comportait pas de cylindre interne de PMMA. Ce dernier point pourrait en partie expliquer la différence d'intensité observée entre l'étude réalisée à Lille et nos données.

Cette différence d'intensité lumineuse observée entre les 4 caméras est problématique pour le suivi de particules. En effet, d'après les études préliminaires réalisées au LMFL, les performances de l'algorithme de reconstruction PTV sont détériorées dans ce cas. De plus, le bruit de fond visible sur les caméras (2) et (3), réduit le rapport signal-sur-bruit et dégrade le contraste, ce qui peut conduire également à des baisses de performance pour la reconstruction PTV.

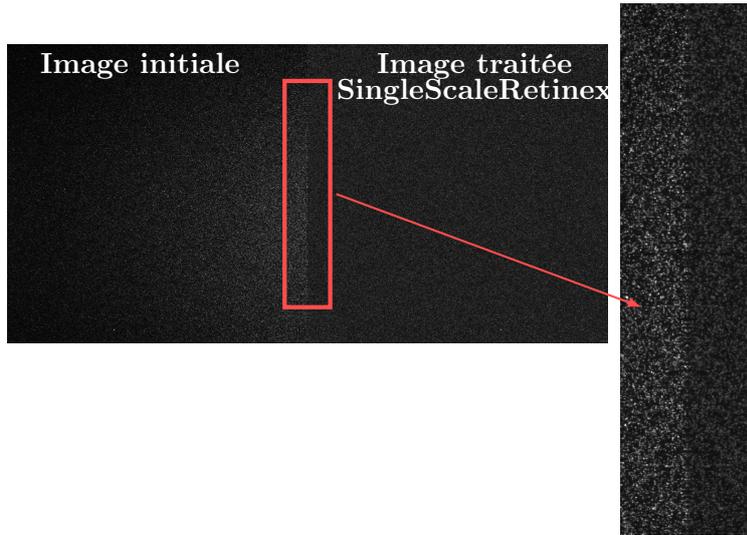


Figure 3.24 – Single Scale Retinex (SSR). Test sur une image de particules (caméra 2).

Un pré-traitement des images pour la PTV est souvent nécessaire. Une première tentative prometteuse a été envisagée, mais non aboutie à cause de problèmes d’automatisation qu’elle engendrait¹⁰. Elle consistait à utiliser un lissage du bruit de fond nommé Single Scale Retinex (SSR), adapté de [88] et largement développé dans [131]. Il s’agit d’un filtre passe bas qui permet d’améliorer le contraste. L’algorithme suit l’équation (3.26).

$$\log(I') = \log(I) - \log(I * C), \quad (3.26)$$

avec C un filtre convolué avec l’image pour flouter l’ensemble, nous utilisons un filtre gaussien, I l’image initiale et I' l’image traitée.

Nous avons finalement utilisé un filtre plus simple qui consiste à retirer le minimum historique de chaque pixel sur les 3225 instants. Cette technique à l’avantage d’être relativement simple et rapide. De plus, elle améliore le contraste des images sans détériorer la forme des particules, comme cela peut être le cas avec d’autres traitements comme la binarisation des images, pour lequel l’intensité est mise à zéro sous un certain seuil et saturée à sa valeur maximale au dessus.

Pour quantifier l’amélioration apportée par ce traitement, nous avons réalisé deux tests: le premier avec pré-traitement dans lequel nous retirons l’intensité minimale historique pixel par pixel et le second sans pré-traitement. Ce test est réalisé sur le cas C1 run 25, nous le détaillerons dans la partie 3.4.4.2. Dans le premier cas, nous reconstruisons en moyenne 62×10^3 particules à chaque instant contre 57×10^3 sans ce pré-traitement. Dans toutes les reconstructions nous utiliserons systématiquement ce pré-traitement.

¹⁰Une mauvaise gestion des paramètres de contrôles faisaient apparaître des flashes blancs (diminution du rapport signal sur bruit) à certains instants

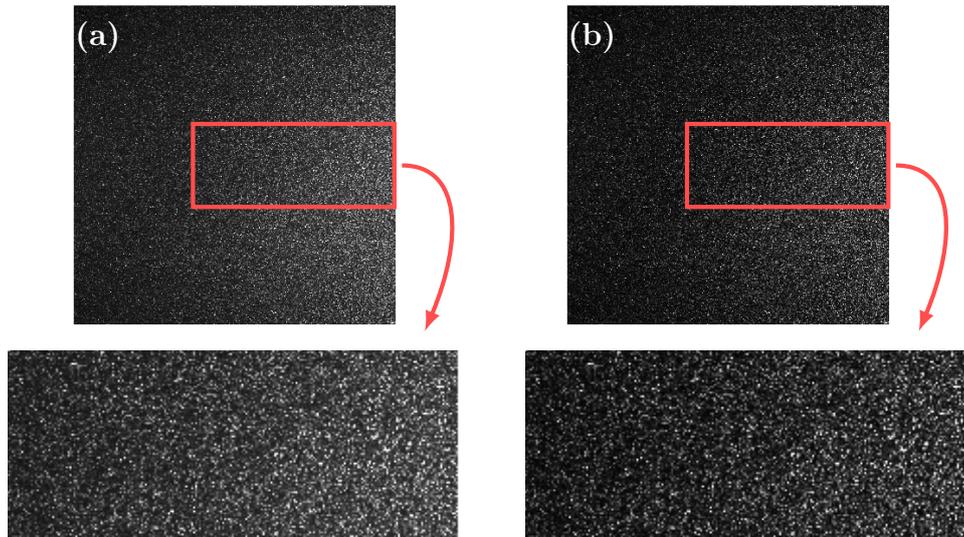


Figure 3.25 – Comparaison d’images sans pré-traitement (a) et avec pré-traitement (b), le pré-traitement utilisé consiste à retrancher de chaque image l’intensité minimale de tous les instants du run. Exemple tiré du cas C1 au 108^{ème} instant run 25. Zoom sur la partie encadrée en rouge.

3.3.7.4 Reconstruction tomographique

Cette étape permet de reconstruire dans le volume l’ensemble des particules vues par les caméras, comme l’exemple de la Figure 3.23. Cette étape consiste à reconstruire les positions des particules dans le volume à partir des données d’images de ces traceurs prises par les caméras. De plus, cette étape doit être rapide, la reconstruction tomographique par lignes épipolaires (dont on trouvera une description en annexe A, partie A.4) n’est pas efficace ici au vue des concentrations de particules que nous utilisons.

Tout d’abord, il faut noter que le problème de reconstruction tomographique est un problème mal-posé au sens d’Hadamard [78]. En d’autres termes, il peut exister plusieurs solutions au même jeu de données¹¹, comme illustré Figure 3.27.

Dans la pratique, la reconstruction tomographique que nous utilisons se base sur des algorithmes issus de la famille ART pour Algebraic Reconstruction Technique (voir [11]). Ces types d’algorithmes se basent sur la technique de ré-projection qui est une version discrétisée de la transformée de Radon [136]. Au fur et à mesure des innovations techniques, l’algorithme ART a donné naissance aux algorithmes SART - pour Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (voir [11] p. 285) - MART - pour Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique - ou encore SMART - pour Simultaneous Multiplicative Reconstruction Technique (voir [10]).

L’algorithme MART est une méthode automatique de reconstruction tomographique itérative qui favorise les intersections des ré-projections, comme nous pouvons le voir sur la Figure 3.28. Mathématiquement, cet algorithme suit la formule (3.28) et développée dans [62]. Pour illustrer cet algorithme, nous avons développé un exemple sous

¹¹Le lecteur intéressé pourra se reporter à A. Rényi [146].

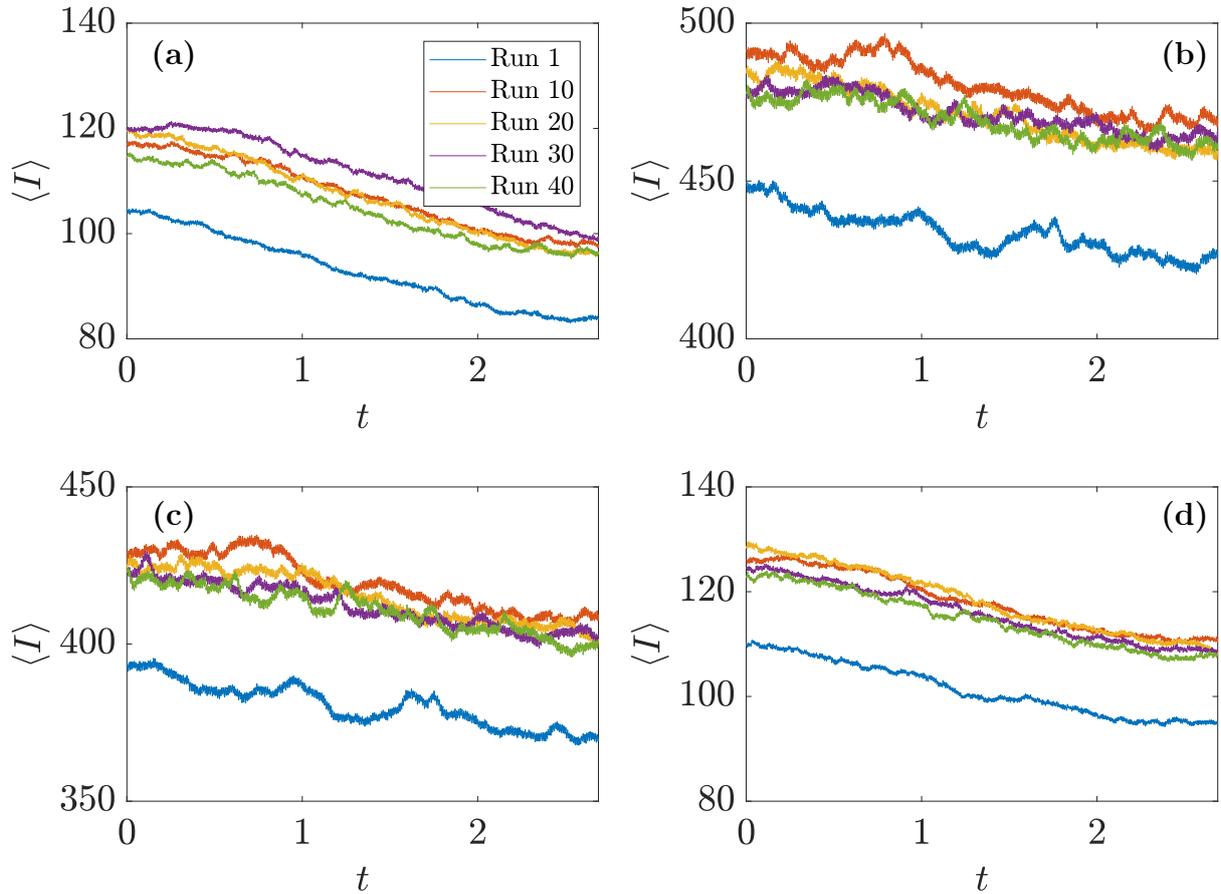


Figure 3.26 – Intensité moyenne enregistrée par chaque caméra au cours des runs 1, 10, 20, 30 et 40 pour le cas anti 0.1Hz en fonction du temps t en (s.). (a) caméra 1, (b) caméra 2, (c) caméra 3 et (d) caméra 4. On remarque que l’intensité du run 1 est systématiquement en dessous des autres runs. Ceci est dû à l’ajout de particules entre le run 4 et le run 5. On pourra également comparer ces résultats aux autres cas anti présentés dans l’annexe A partie A.1.

Matlab[©]. Le résultat est présenté Figure 3.28. Dans cet exemple, on considère l’image initiale Figure 3.28-a, on projette sur 3 caméras fictives qui voient cette image selon trois angles de vue (les directions sont matérialisées par des flèches). On lance l’algorithme MART et on affiche les résultats sur les itérations 1, 5 et 11. Dans nos reconstructions, nous emploierons systématiquement 5 itérations pour la reconstruction

Lors de la phase de reconstruction tomographique, le volume illuminé est discrétisé selon une grille constituée de N_v voxels. Ils seront vus par N_c caméras comportant chacune N_r pixels. On repère par l’indice j le $j^{\text{ème}}$ voxel localisé à la position (x_j, y_j, z_j) qui a une intensité E_j . De manière générale, on nomme $w_{i,j}$ le poids de la contribution du voxel j sur le pixel i . L’indice i correspondant au pixel i de la liste de tous les pixels des caméras utilisées.

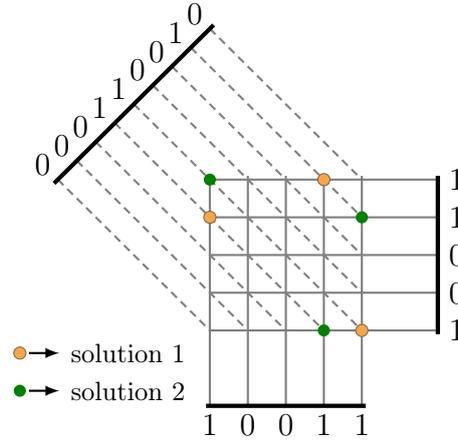


Figure 3.27 – Illustration en 2D du problème des particules fantômes. Nous avons ici trois caméras dont les capteurs sont matérialisés par une ligne noire. Chaque nombre 0 ou 1 inscrit sur les capteurs correspondent aux contributions des particules (en couleur sur la surface en dammier). Nous avons ici deux solutions correspondant à la même suite de valeur 0 ou 1 sur le capteur de la caméra. Ce point illustre le problème de reconstruction de “particules fantômes” pour la tomographie.

L’intensité I_i peut être calculée théoriquement à partir de la formule (3.27).

$$I_i = \sum_{j=1}^{N_v} w_{i,j} E_j. \quad (3.27)$$

La reconstruction tomographique permet de résoudre le problème inverse à l’équation (3.27), c’est-à-dire déduire les données E_j à partir des données I_i . L’algorithme MART est une méthode possible pour résoudre ce problème, il s’énonce par la formule itérative (3.28).

$$\begin{cases} E_j^{k+1} = E_j^k \prod_{i=1}^{N_p} \left(\frac{I_i}{\sum_{j=1}^{N_v} w_{i,j} E_j^k} \right)^{\mu w_{i,j}} \\ E_j^0 \end{cases} \quad (3.28)$$

avec I_i l’intensité relevée sur le pixel i , $w_{i,j}$ la fonction de poids prenant en compte le modèle de projection de la contribution du voxel j sur le pixel i , E_j^k l’intensité du voxel j à l’itération k , μ le coefficient de relaxation et E_j^0 la valeur d’essai [62].

La fonction de poids $w_{i,j}$ traduit le modèle de projection du voxel sur le capteur. Plusieurs modèles avec différentes caractéristiques sont présentes dans la littérature [8, 9, 82] et [85]. Ils permettent en particulier d’améliorer la reconstruction en fonction de la nature des images et du type de reconstruction. Nous pourrions trouver dans la thèse de S. Amjad [6] une description plus précise.

3.3.7.5 PIV

La technique de Vélométrie par Image de Particule (PIV) est une technique qui permet de construire le champ de vitesse à partir d’images de particules. Dans notre étude, nous

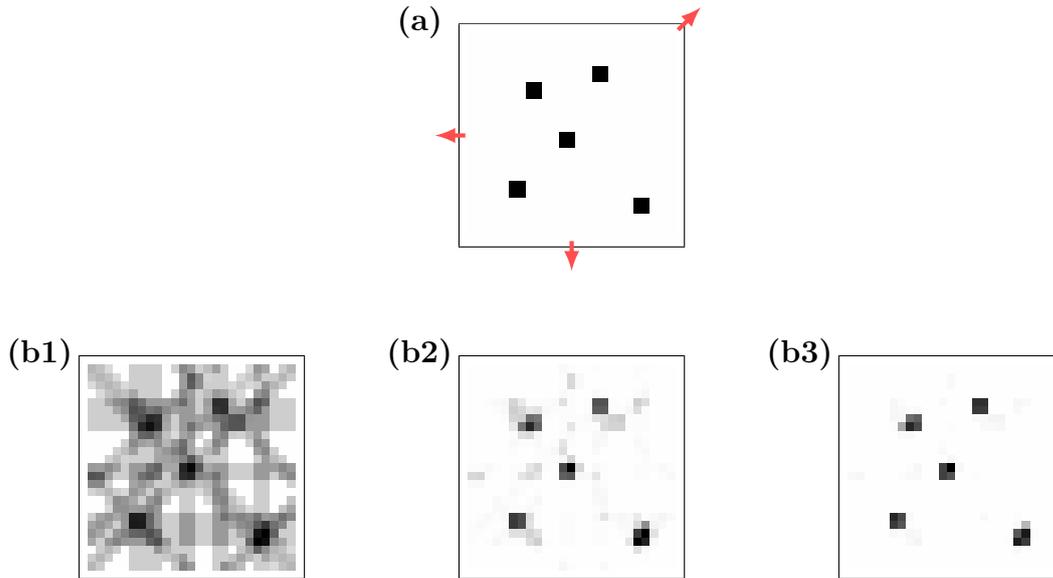


Figure 3.28 – (a) Image initiale, les flèches rouges indiquent les directions des caméras fictives qui enregistrent l'image. (b) résultat de l'algorithme au bout de (b1) 1 itération, (b2) 5 itérations et (b3) 11 itérations.

utilisons un algorithme plus évolué la TPIV (Tomographic Particle Image Velocimetry) qui construit un champ de vitesse dans un volume 3D à partir de la reconstruction tomographique précédemment développée 3.3.7.4. Dans un premier temps, nous allons brièvement développer la technique de PIV. La technique de TPIV suivra exactement la même procédure mais cette fois dans le volume.

La PIV nécessite l'introduction préalable de traceurs dans l'écoulement. Cette technique prend ensuite en photo les images de particules illuminées par une source lumineuse de forte intensité, nous utilisons un laser. L'obturateur mécanique des caméras reste ouvert durant la prise de mesure car le temps d'ouverture/fermeture est trop faible. Les flashes laser vont illuminer en séquence le volume à la fréquence de répétition. D'autre part, pour éviter les flous, l'impulsion lumineuse doit être à la fois brève et intense, deux contraintes parfaitement soutenue par un laser. La technique de PIV nécessite la prise d'une première image suivie d'une deuxième suffisamment proche pour que le mouvement de paquets de particules puissent être assimilé au champ de vitesse local.

Plus pratiquement, on divise le capteur en plusieurs sous-groupes. Avec un pas de temps suffisamment petit et en première approximation, la distance parcourue par les particules entre deux instants successifs est proportionnel au champ de vitesse local. De plus, si la subdivision est suffisamment petite, le groupe de particules à un mouvement d'ensemble. La corrélation entre la subdivision et l'image à l'instant suivant doit théoriquement avoir pour maximum le déplacement du paquet de particules présent dans cette zone entre l'instant t et l'instant qui le suit immédiatement. A minima, ce maximum offre le déplacement le plus probable de ce groupe de particules entre l'instant t et l'instant $t + dt$. De nombreuses erreurs interviennent dans ce calcul, en particulier la

condition de déplacement en groupe n'est pas exact. C'est pour cette raison que les impulsions lasers doivent être suffisamment rapprochées. Une fois obtenu le déplacement sur chaque sous espace, on estime le champ de vitesse par la formule :

$$\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t}. \quad (3.29)$$

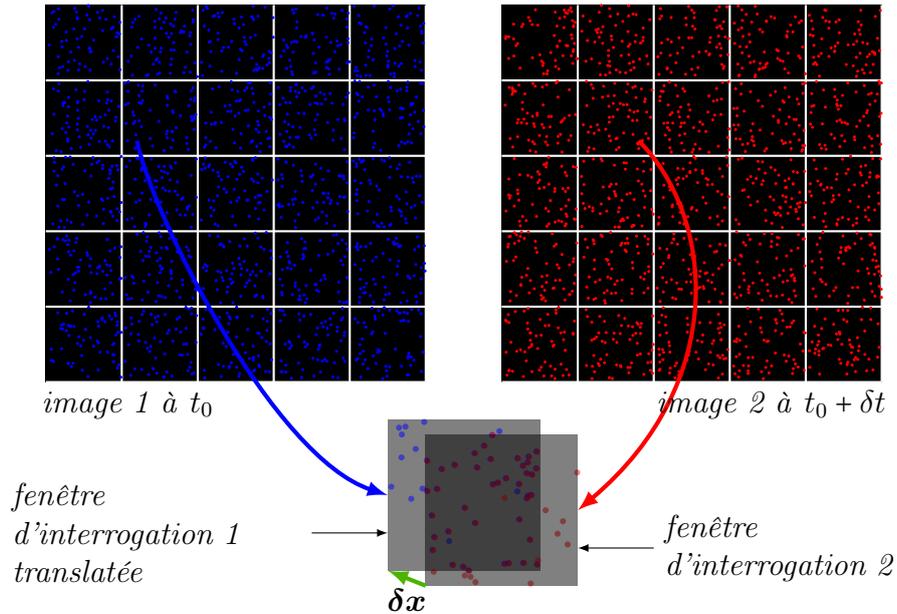


Figure 3.29 – Corrélation d'image, schéma de principe pour la PIV. L'image issue de la fenêtre d'interrogation 1 translaturée et l'image issue de la fenêtre d'interrogation 2 coïncident. Le vecteur de meilleure corrélation $\delta \mathbf{x}$ correspond donc au déplacement du paquet de particules présent initialement dans la zone bleue (fenêtre d'interrogation 1) à la zone rouge (fenêtre d'interrogation 2) pendant un temps δt , avec δt le temps entre deux pulsations laser.

La technique de TPIV est largement développée dans la thèse de P. Debue [53]. Nous avons réalisé quelques tests sur les données de la campagne de mesure du cas C1 par un traitement TPIV que nous avons résumé dans le tableau 3.6.

IW	overlap	Re	η/R	dx/η
96 × 96	75%	6300	0.0039	0.21
48 × 48	75%	6300	0.0039	0.43

Table 3.6 – Fenêtre d'interrogation (IW) utilisé pour la TPIV et résolution correspondante. IW fenêtre d'interrogation en pixel et dx/η correspond au pas spatial de la grille TPIV, η/R l'échelle de Kolmogorov adimensionnée par le rayon de la cuve.

Nous avons considéré ici les champs moyennés sur les 100 premiers pas de temps. Comme illustré sur la Figure 3.30 ligne-a, une fenêtre d'interrogation trop petite (ici

48 × 48) conduit à une image granulaire, typique d’une mauvaise reconstruction dû à un manque de particules pour la convergence de l’auto-corrélation. La reconstruction s’améliore en considérant une fenêtre d’interrogation plus large 96 × 96, Figure 3.30 ligne-b.

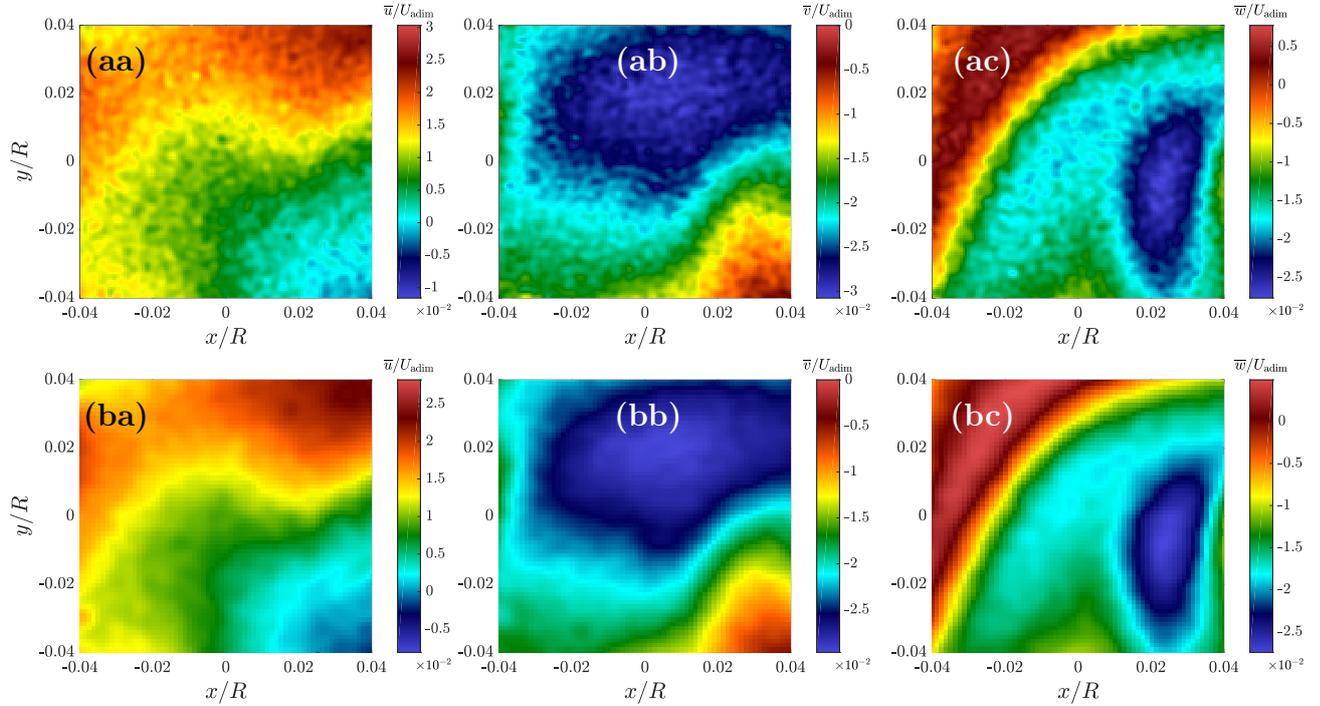


Figure 3.30 – ligne-a vitesse moyenne composante par composante calculée sur les 100 premiers instants pour une reconstruction TPIV avec une fenêtre d’interrogation (48 × 48). ligne-b vitesse moyenne calculée sur les 100 premiers instants pour une reconstruction TPIV avec une fenêtre d’interrogation (96 × 96). Colonne-a composante u , -b v et -c w .

On remarque que les densités de probabilité des vitesses dans chaque direction restent relativement robustes malgré la mauvaise reconstruction TPIV - Figure 3.31 et que la reconstruction avec une fenêtre d’interrogation (48 × 48) fait ressortir davantage de points extrêmes mais n’a qu’un faible impact sur les valeurs les plus probables.

3.3.7.6 Vélocimétrie par suivi de particule: principes

La technique de Vélocimétrie par Suivi de Particules (PTV) *Particle Tracking Velocimetry*, permet de construire le champ de vitesse lagrangien. La construction par PTV donne un grand nombre d’informations sur l’histoire des trajectoires suivies par les particules. On dénombre trois phases: (i) le moment où la particule entre dans le volume d’étude, (ii) le moment où elle y évolue et (iii) le moment où, éventuellement, elle en ressort. Si la particule vient à rentrer de nouveau dans le volume d’étude, elle débutera une nouvelle trajectoire.

L’utilisation poussée de cette technique est relativement récente malgré son net avantage face à une résolution PIV. La technologie des capteurs CMOS et les capacités

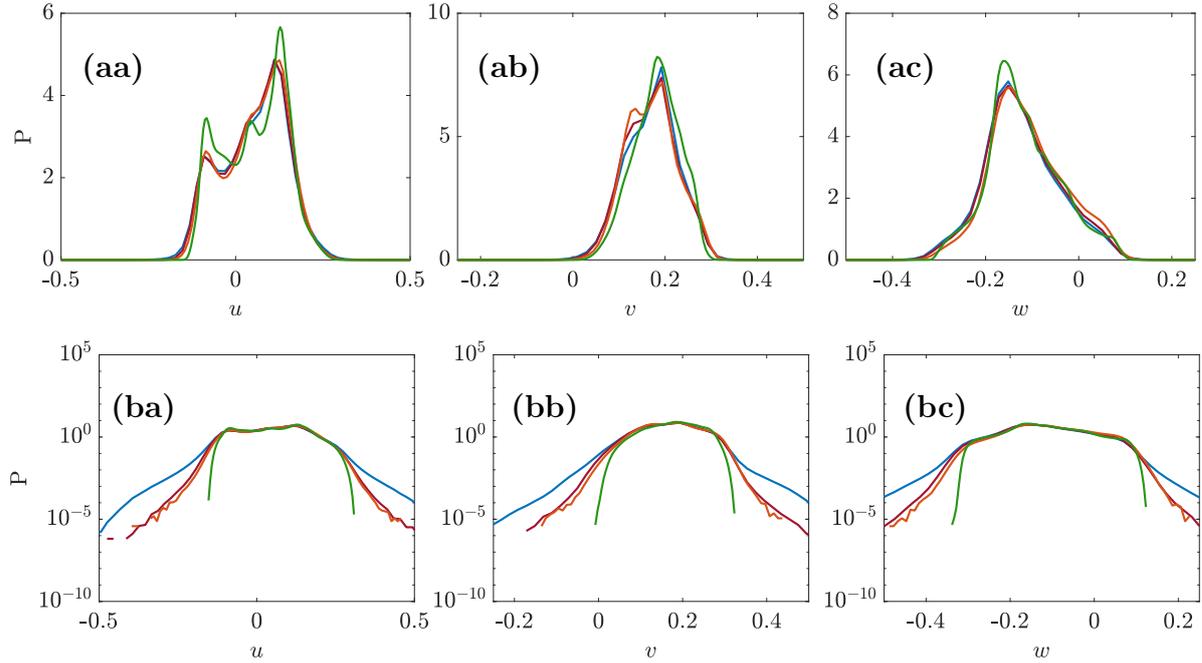


Figure 3.31 – Densité de probabilité pour chaque composante, ligne-a en échelle linéaire, ligne-b en échelle logarithmique. Les courbes bleues, rouges et oranges correspondent aux données issues de l’algorithme Shake-The-Box, nous avons considéré respectivement toutes les trajectoires (courbe bleue), les trajectoires supérieures à 25 pas de temps (courbe rouge) et les trajectoires supérieures à 50 pas de temps (courbe orange). La courbe verte correspond à la densité de probabilité pour la résolution par TPIV avec une fenêtre d’interrogation de 96×96 sur laquelle nous avons retiré les premiers et derniers plans.

de stockages expliquent en partie l’essor récent de la PTV. Avec une meilleure qualité de prise de mesure, plus rapide et plus longue, la reconstruction lagrangienne a su gagner en qualité. Les innovations algorithmiques de ces dernières années, couplées à l’augmentation des capacités de calculs ont favorisé le développement de cette méthode.

Rappelons tout d’abord qu’un suivi de particules est relativement simple dès lors que la concentration en particules est suffisamment faible et que le nombre de caméra est suffisant. La première difficulté de cette méthode a été de maintenir une bonne qualité de reconstruction malgré l’augmentation du nombre de particules. Pour les besoins de détections de phénomènes de plus en plus proche de l’échelle de dissipation, il est nécessaire d’augmenter la concentration sans réduire la qualité de reconstruction. Les particules fantômes et les erreurs de reconstruction des trajectoires participent aux erreurs de mesure dans une proportion qu’il est difficile d’évaluer. L’algorithme de reconstruction que nous employons se base sur la technique récemment développée Shake-The-Box [158, 160], qui a été optimisée pour réduire les erreurs d’estimations de trajectoires. Nous allons maintenant résumer les étapes de cet algorithme itératif.

La première étape consiste à estimer une première position des particules par la méthode de reconstruction itérative de particule IPR *Iterative Particle Reconstruction* développée dans [182]. Cette méthode ressemble à la méthode MART développée

précédemment, à la différence que l'intensité lumineuse est également une donnée du problème, au même titre que la position de la particule fictive. On cherchera alors plutôt à minimiser itérativement le résidu entre image original et projection de la particule fictive de paramètre (X_p, Y_p, Z_p, I_p) .

Une première estimation de la position des particules est faite sur les 4 premiers instants (dans notre cas). Cette étape est la plus critique de la reconstruction car elle peut faire apparaître des particules fantômes. Les positions des 4 particules sont jointes pour former le début d'une trajectoire.

Une fois la trajectoire connue sur ses 4 premiers instants, il est possible d'estimer la position de la particule aux instants suivants. Pour cela, l'algorithme utilise un filtre de Wiener (d'après [160])¹².

Une étape de minimisation du résidu "shaking" permet de trouver la position de la particule à l'instant suivant. Une fois la trajectoire complétée à l'instant 5 (et suivant), l'image de cette particule est effacée des images originales pour créer des images résiduelles sur lesquelles le processus sera réitéré pour les autres trajectoires.

On cherche ensuite les particules nouvellement entrées dans le volume d'étude correspondant au début de nouvelles trajectoires. Les étapes sont reconduites sur ces nouvelles particules. A chaque particule trouvée, on recalcule le résidu en l'éliminant des images. On réitère les opérations à partir de l'image résiduelle qui servira à l'étape suivante, comme expliqué dans le schéma 3.32.

En pratique, nous avons résumé en annexe A dans un schéma Figure A.10, les différentes étapes pour obtenir les données STB. En particulier, pour les études de reconstructions PTV, nous avons initialement une unique auto-calibration pour l'ensemble des runs de chaque cas. Nous avons cependant remarqué, *a posteriori*, qu'il était nécessaire de réaliser au minimum une auto-calibration tous les 5 runs. Enfin, pour nous assurer de la qualité des reconstructions STB, nous avons réalisé une auto-calibration pour chacun des runs du cas C1.

Pour estimer la qualité d'une reconstruction par PTV, on peut s'intéresser à l'histogramme des longueurs reconstruites des trajectoires. Celles-ci peuvent être plus ou moins longues pour diverses raisons. Soit deux particules se font face, l'une cachant la seconde, soit elle sort du volume illuminé, soit, enfin, il s'agit d'une particule fantôme. Les trajectoires de longueurs inférieures à 10 pas de temps seront difficilement exploitables et peuvent également contenir des erreurs. Nous cherchons souvent à obtenir des trajectoires les plus longues possibles pour pouvoir faire nos calculs (ce point sera abordé dans le calcul de l'irréversibilité lagrangienne). Dans le cas expérimental, si le volume d'étude est petit et la vitesse moyenne importante, le temps de persistance des particules dans le volume illuminé par le laser (et reconstruites par l'algorithme) sera réduit: des trajectoires longues ne sont donc pas toujours possibles. De plus, les trajectoires longues peuvent également contenir des trajectoires fantômes. A l'image des particules fantômes que nous avons déjà mentionné, ces trajectoires fantômes sont de mauvaises

¹²Estimateur de processus aléatoires développé par N. Wiener dans son papier de 1949 [183]. Initialement utilisé pour estimer la position d'impacts de missiles ballistiques soumis aux bruits (aléas météorologiques, ...). Dans notre cas, ce procédé est utilisé pour estimer la position des particules soumises à un processus aléatoire (turbulence).

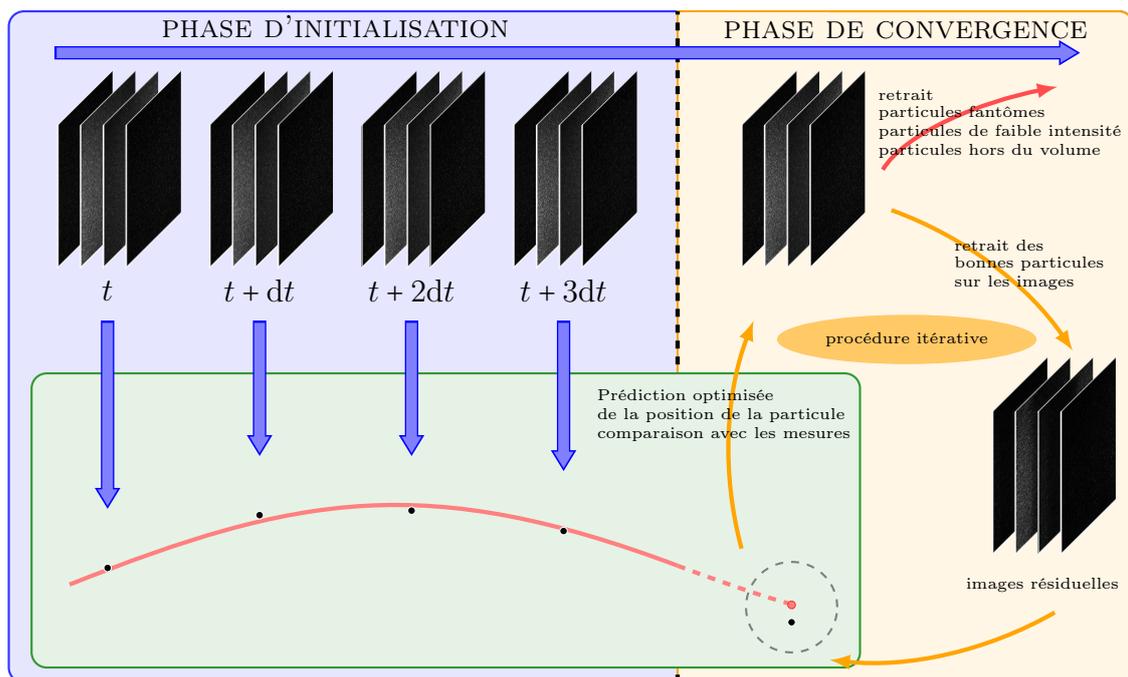


Figure 3.32 – Description de l'algorithme STB.

reconstructions par l'algorithme. Elles peuvent naître, par exemple, du raccordement de deux trajectoires indépendantes.

Pour quantifier la qualité des reconstructions, nous disposons de deux critères. D'une part, l'histogramme des longueurs de trajectoires, exemple Figure 3.33 pour les run 20, 30 et 40 du cas anti 0.004 Hz. Il présente un pic pour les petites trajectoires (voir insert de la Figure 3.33), ce pic est une conséquence des erreurs de reconstructions comme expliqué dans [160] (section 4.1). D'autre part nous pouvons nous appuyer sur le spectre des positions, qui permet d'estimer le niveau de bruit et la fréquence à laquelle il apparaît. Nous utiliserons ces deux critères pour quantifier la qualité des reconstructions lors de nos tests.

3.3.8 Post-traitement

Les données sorties de l'algorithme Shake-The-Box (STB) sont très bruitées car nous utilisons le minimum de filtres implémentés dans cet algorithme. Une étape préalable de post-traitement est donc nécessaire avant l'exploitation des données.

3.3.8.1 Filtrage des trajectoires : algorithme TrackFit

Parmi les différents méthode de débruitage de signaux expérimentaux, nous avons choisi d'utiliser la méthode de post-traitement TrackFit présentée dans [73]. Nous avons optimisé cet algorithme en interne. Nous trouverons une étude très détaillée sur l'amélioration des qualités de reconstruction dans l'article de Cheminet et al. [42].

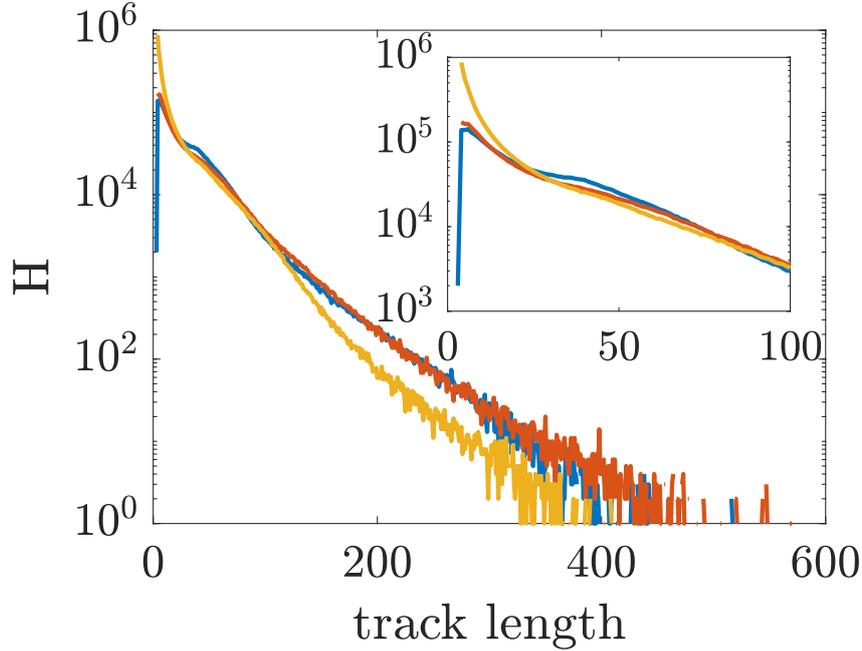


Figure 3.33 – Histogramme de longueur de trajectoires. Un exemple sur les runs 20 (orange), 30 (bleu) et 40 (jaune) pour le cas C1, la longueur moyenne des trajectoires est respectivement de $31.1 dt$, $30.5 dt$ et $19.4 dt$, avec dt le pas de temps entre deux instants successifs de reconstruction. Ici $dt = 0.02$ s. En insert, nous avons représenté le zoom de la courbe principale entre 0 et 100 pas de temps.

Une interpolation polynomiale sur une base de fonctions particulières, nommées B-Splines [50], est réalisée directement sur les trajectoires obtenues par l’algorithme STB. Ces fonctions polynomiales par morceaux à support compact sont définies sur une suite non-décroissante de nœuds (notés α) par la formule de récurrence (3.31), [52]. La Figure 3.34 présente le détail de calcul pour b_1 et b_2 .

$$b_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i \leq t \leq \alpha_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$b_{i,n} = \omega_{i,n} b_{i,n-1} + (1 - \omega_{i+1,n}) b_{i+1,n-1}, \quad (3.31)$$

avec

$$\omega_{i,n} = \frac{t - \alpha_i}{\alpha_{i+n} - \alpha_i}. \quad (3.32)$$

La suite $(b_{i,m})_{i,m \in \{0, \dots, n\}}$ forme une base d’interpolation sur l’espace vectoriel des fonctions polynomiales par morceaux de degrés inférieurs à n . La partition de l’unité est l’unique contrainte appliquée à ces fonctions.

$$\sum_j b_{j,n} = \mathbb{1}_{[\alpha_0, \alpha_{n+1}]}, \quad (3.33)$$

Par ailleurs, dans toute la suite, on considère systématiquement $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$, ce qui est une simplification offerte par l’expérience car deux particules ne peuvent pas être au même endroit au même moment.

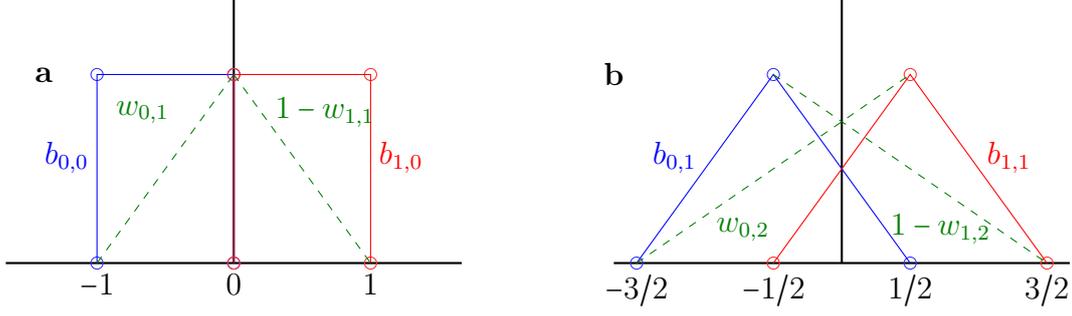


Figure 3.34 – (a) détail de calcul de la B-Spline b_1 , (b) détail de calcul de la B-spline b_2 .

Pour nos applications, nous utilisons la B-Spline centrée d'ordre $n = 3$ avec des nœuds uniformément espacés (autrement appelées courbes de Bernstein-Bézier [52]). Dans ce cas particulier, cette B-Spline est définie par l'équation (3.34).

$$b_3(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |t|^2 + \frac{1}{2}|t|^3 & \text{si } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |t|)^3 & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.34)$$

On interpole le nuage de points (ceux correspondant aux positions prises par les particules dans le volume entre les indices $i = 1$ et $i = n$) par la formule (3.35).

$$\vec{\phi}^{(n)}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \vec{c}_i b_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \vec{c}_i b_n(t - i). \quad (3.35)$$

Dans cette configuration, les nœuds correspondent aux temps de l'acquisition. Ils sont donc uniformément espacés. Nous nous trouvons dans le cas particulier simplifié des courbes de Bernstein-Bézier.

Plusieurs possibilités existent pour définir les coefficients \vec{c}_i . Une interpolation stricte conduirait à fixer $\vec{c}_i = \vec{f}_i$ avec \vec{f}_i valeur de la position à l'instant d'indice i . Cependant, pour améliorer l'interpolation, nous introduisons un coefficient de lissage qui agit comme un ressort de raideur définie, identique pour chacun des points d'interpolation. On cherche alors à minimiser la fonctionnelle $F(c)$ définie à l'équation (3.36) par une méthode quelconque (nous employons la méthode des moindres carrés).

$$F(c) = \sum_{i=1}^n \|\vec{\phi}(i) - \vec{f}_i\|^2 + |\lambda| \sum_{i=1}^{n-1} \|\Delta^p \vec{\phi}(i)\|^2. \quad (3.36)$$

Avec $\vec{\phi}(i)$ l'évaluation au temps d'indice i de la fonction B-Spline d'interpolation, \vec{f}_i la donnée de position à l'instant d'indice i , λ le coefficient de lissage, enfin $\Delta^p \vec{\phi}(i)$ correspond à la p^{eme} dérivée de la B-Spline qui peut être exprimée en fonction de ses coefficients [61], p est donc l'ordre de pénalisation.

On peut rapprocher la valeur de λ avec une échelle de filtrage. Nous cherchons d'abord à connaître le coefficient de lissage le plus faible possible assurant un débruitage suffisant des trajectoires sans toutefois altérer les données. Cette valeur est définie par une première méthode portant sur l'estimation de l'échelle à laquelle le bruit intervient. A partir du spectre temporel moyen des positions, on peut définir une valeur de coupure λ_c , longueur d'onde à partir de laquelle le spectre devient plat - caractéristique d'un bruit blanc. Un exemple de spectre de position est visible à la figure 3.42. Une deuxième méthode par \mathcal{L} -curve permet de donner une autre valeur de longueur d'onde de coupure. Cette dernière méthode correspond au graphique en log-log de la solution régularisée par rapport à la norme du résidu [79].

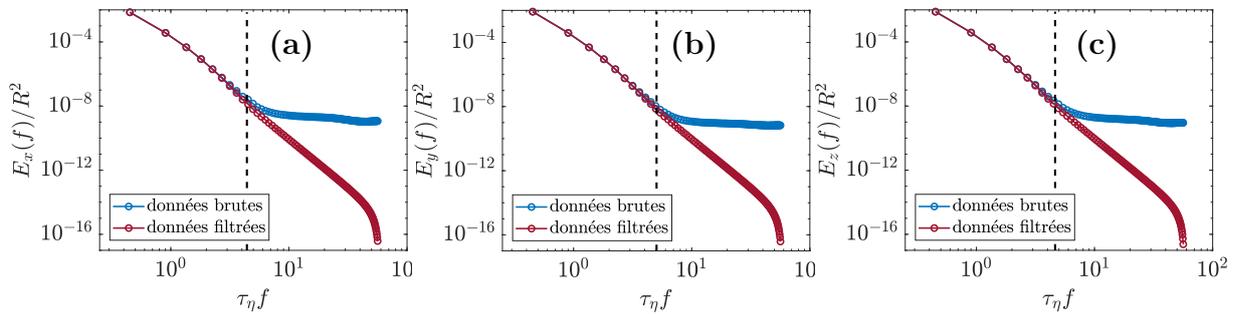


Figure 3.35 – Comparaison des spectres en position entre les données brutes issues de l'algorithme STB et les trajectoires filtrées par l'algorithme TrakFit cet exemple est issu des données du run 1 pour le cas C1. Nous avons représenté chaque composante respectivement (a) composante x , (b) composante y , (c) composante z pour chaque exemple développé précédemment. La ligne pointillée correspond à la fréquence de coupure du filtre utilisé.

3.3.8.2 Interpolation sur une grille eulérienne: algorithme FlowFit

Il est possible d'obtenir le champ de vitesse eulérien à partir des données lagrangiennes. Cette interpolation utilise le champ de vitesse lagrangien qui correspond à la vitesse de chaque particule à la position $\mathbf{X}_{t_0,t}(\mathbf{x}_0)$, et nous donne le champ de vitesse interpolé sur une grille eulérienne $\mathbf{u}_{\text{interp}}(\xi_{i,j,k}, t)$ avec $\xi_{i,j,k}$ les points de la grille de taille $N_x \times N_y \times N_z$ et $i \in \{1, \dots, N_x\}$, $j \in \{1, \dots, N_y\}$, $k \in \{1, \dots, N_z\}$. Ce post-traitement se nomme FlowFit en référence à l'article [73].

Sur le même principe que le filtre de trajectoires TrackFit, nous pouvons utiliser l'interpolation par B-Spline pour reconstruire le champ de vitesse eulérien. A la différence, cette fois, que l'on définit les B-Spline sur un espace à trois dimensions par la formule (3.37).

$$B_3(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^3 b_3(x_i), \quad (3.37)$$

avec

$$b_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{1}{2}|x|^3 & \text{si } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Le champ interpolé \mathbf{u}_{int} est une combinaison linéaire de ces fonctions, on peut alors écrire :

$$\mathbf{u}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} c_{i,j,k} B_3(\mathbf{x} - \xi_{i,j,k}), \quad (3.39)$$

Les paramètres $c_{i,j,k}$ sont ensuite déterminés par minimisation d'une fonctionnelle avec les paramètres de lissage (fixés) λ_{HF} et λ_{m} .

$$F_{\text{F}}(\mathbf{c}) = F_{\text{D}}(\mathbf{c}) + \lambda_{\text{HF}}^2 F_{\text{HF}}(\mathbf{c}) + \lambda_{\text{m}}^2 F_{\text{m}}(\mathbf{c}), \quad (3.40)$$

avec

$$F_{\text{D}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{U}(\mathbf{X}_i) - \sum_{j,k,l} c_{j,k,l} B_3(\mathbf{X}_i - \xi_{j,k,l}) \right\|^2,$$

$$F_{\text{HF}}(\mathbf{c}) = \sum_{i,j,k} \left\| \overline{c_{i,j,k}} \right\|^2,$$

les coefficients $\overline{c_{i,j,k}}$ sont obtenus par la formule

$$\overline{c_{i,j,k}} = \frac{1}{3} \left(3c_{i,j,k} - \sum_{l=-1}^1 \omega_{l+2} (c_{i+l,j,k} + c_{i,j+l,k} + c_{i,j,k+l}) \right),$$

où $\omega = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$ la fonctionnelle $F_{\text{m}}(\mathbf{c})$ permet de rajouter une contrainte supplémentaire en prenant en compte le modèle. Pour ces données, nous avons toutefois fixé $\lambda_{\text{m}} = 0$ (pas de régularisation par un modèle).

Les paramètres de lissage λ_{HF} (et cas échéant λ_{m}) sont déterminés en amont par les mêmes méthodes que pour le filtrage TrackFit.

L'intérêt supplémentaire de la projection des données sur la base de B-Splines réside dans l'extrême simplicité de dérivation de ce type de polynômes. Les coefficients $(c_i)_i$ suffisent pour décrire de manière continue n'importe quelle dérivée des positions des particules. Nous avons représenté Figure 3.36 un comparatif des deux techniques de reconstruction, la première par TPV et la seconde utilisant les projections sur des grilles eulériennes à partir des trajectoires filtrées par l'algorithme TrackFit.

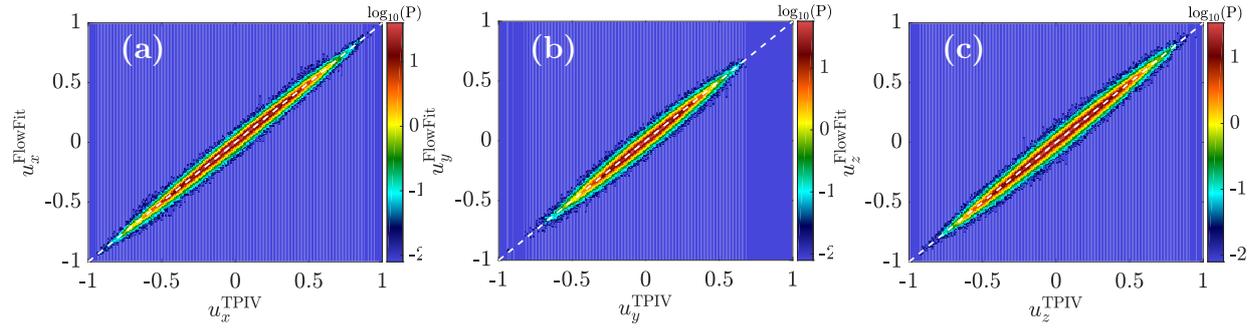


Figure 3.36 – Densité de probabilité jointe sur les données issues de la campagne de l’expérience SVK, les statistiques sont calculées sur l’ensemble des 40 runs tous les 500 pas de temps. Nous comparons ici les deux techniques eulériennes, d’une part la TPIV avec une fenêtre d’interrogation de 80×80 et un overlap de 75% et d’autre part les interpolations sur une grille eulérienne par l’algorithme FlowFit à partir des trajectoires filtrées par l’algorithme TrackFit. Les données de projections eulériennes (FlowFit) sont réalisées sur une grille plus fine que celle des données issues de la TPIV. Nous avons sélectionné les points de grille FlowFit les plus proches de la grille TPIV, ces deux grilles sont distantes de $0.2\delta x$ avec δx le pas spatial TPIV.

3.4 Présentation des données expérimentales

3.4.1 Cas effectués sur l'expérience GVK

Dans l'ensemble de cette étude, nous avons commandé en vitesse les turbines en symétrique avec $f_1 = f_2$ (soit $\theta = 0$). Pendant la campagne de mesure sur l'expérience GVK, nous avons fait un total de 8 cas. Chaque cas correspond à la donnée d'un sens de rotation (**anti** ou **contra**) et d'une fréquence de rotation. Nous rappelons dans le tableau 3.7 l'ensemble des cas étudiés ainsi que la valeur correspondante du Re (défini équation 3.2). Dans cette étude, nous considérons $K_p = 0.135$ correspondant à une valeur de $\epsilon^* = 0.048$ pour le sens anti et $K_p = 0.0471$ correspondant à une valeur de $\epsilon^* = 0.017$ pour le sens contra.

CAS	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
sens	anti	contra	anti	contra	anti	contra	anti	contra
f (Hz)	0.004		0.01		0.025		0.1	
f_{acq} (Hz)	50	100	150		400		1200	
Re	6.3×10^3		1.6×10^4		3.9×10^4		1.6×10^5	
R_λ	86	–	–	–	277	–	614	–
ϵ^*	0.048	0.017	0.048	0.017	0.048	0.017	0.20	0.017
η (mm)	1.51	1.96	0.76	0.99	0.38	0.50	0.095	0.18
λ (mm)	27.7	–	–	–	12.5	–	3.25	–
τ_η (s)	3.85	2.29	0.97	0.58	0.25	0.15	0.009	0.02

Table 3.7 – Cas effectués pendant la campagne de mesure sur l'expérience GVK. Nous avons coloré en vert les cas totalement traités et en rouge les cas non traités. Nous donnons ici le sens de rotation des turbines (anti ou contra), la fréquence de rotation des turbines et le nombre de Reynolds correspondant. La fréquence d'acquisition correspond à celle du traitement. Pour le cas C1, nous avons pris une image sur deux. Le nombre R_λ basé sur l'échelle de Taylor est obtenue à partir de l'estimation de la vitesse $u_{\text{rms}}^{\text{tot}}$ calculée sur les trajectoires filtrées (voir (3.13)). Le taux de dissipation moyen adimensionné ϵ^* est estimé à partir des expériences présentées Figure 3.5 et l'échelle de Kolmogorov η et le temps de Kolmogorov τ_η sont obtenus respectivement par les formules (3.9a) et (3.9b).

3.4.2 Cas effectués sur l'expérience SVK

Nous rappelons dans le tableau 3.8 les cas réalisés dans l'expérience SVK et que nous avons utilisé dans cette thèse. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers la thèse de P. Debue [53] pour la description de cette expérience (voir chapitre 5 partie 3).

Cas	T1t	T2t	T3t	T4t
sens	anti			
f (Hz)	2.5	1	0.5	0.1
f_{acq} (Hz)	4000	1600	800	200
Re	1.6×10^5	6.3×10^4	3.1×10^4	6.3×10^3
R_λ	639	404	259	82
ϵ^*	0.048			
η (mm)	0.027	0.054	0.091	0.30
λ (mm)	1.3	2.1	2.9	5.4
τ_η (s)	7.3×10^{-4}	2.9×10^{-3}	8.2×10^{-3}	9.2×10^{-2}

Table 3.8 – Paramètres de la campagne de mesures réalisées dans l’expérience SVK. Seule la campagne T4t a été exploitée dans la thèse de P. Debue.

3.4.3 Comparaison de la qualité des traceurs

Pour l’étude expérimentale, nous avons utilisé des particules de polystyrène (voir paragraphe 3.3.5). Nous reportons dans le tableau 3.9 les caractéristiques des particules utilisées dans cette partie, compte tenu des paramètres de l’expérience. Nous rappelons au tableau 3.10 ces mêmes caractéristiques pour le traceurs utilisés lors de la campagne de mesures avec l’expérience SVK.

Cas	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
diamètre moyen	$5.3\mu\text{m}$							
ρ_p	$1.05\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$							
St ($\times 10^{-6}$)	0.43	0.72	1.7	2.9	6.7	11	54	91
d_p/η	0.004	0.003	0.007	0.005	0.014	0.011	0.039	0.030
v_g (m/s)	-8.2×10^{-7}							

Table 3.9 – Diamètre moyen et masse volumique ρ_p des particules utilisées dans l’expérience GVK. Le nombre de Stokes est calculé à partir de la définition (3.22) au temps de Kolmogorov correspondant, d_p correspond au diamètre moyen des particules, η l’échelle de Kolmogorov et la vitesse de sédimentation v_g est estimée à partir de l’équation (3.24).

Les tableaux 3.9 et 3.10 donnent un comparatif des qualités de traceurs des particules que nous utilisons. On peut remarquer que les particules employées dans l’expérience GVK font gagner deux ordres de grandeurs sur le nombre de Stokes, cette comparaison est faite sur les cas T4t et C1 qui partagent le même nombre de Reynolds. De plus, la vitesse de sédimentation gagne également un ordre de grandeur pour ces nouvelles particules. Nous avons également observé une meilleure conservation des particules au cours de l’expérience comparativement aux campagnes de mesures SVK utilisant les

Cas	T1t	T2t	T3t	T4t
diamètre moyen	10 μ m			
ρ_p	1.1g.m ⁻³			
St ($\times 10^{-4}$)	84	21	7.5	0.67
d_p/η	0.37	0.19	0.11	0.033
v_g (m/s)	-5.7×10^{-6}			

Table 3.10 – Diamètre moyen et masse volumique des particules Dantec[©] utilisées dans l’expérience SVK pour les cas T1t, T2t, T3t et T4t. Comme au tableau 3.9, nous calculons le nombre de Stokes au temps de Kolmogorov de l’expérience, d_p correspond au diamètre moyen des particules, η l’échelle de Kolmogorov et la vitesse de sédimentation v_g .

particules Dantec[©], le nombre de particules par pixel enregistré par les caméras est resté stable sur chacun des cas. Enfin, le diamètre des particules en fonction de η est très petit. Il peut être également envisagé d’augmenter légèrement ce diamètre dans les cas de plus bas nombre de Reynolds pour augmenter la quantité de lumière diffusée, proportionnelle à d_p^2 avec d_p le diamètre de la particule.

3.4.4 Tests sur les paramètres du logiciel DaVis

3.4.4.1 Test 1: impact de la fréquence d’acquisition

Nous avons réalisé un premier test sur le run 20 du cas anti C1 pour comparer l’impact d’une reconstruction avec toutes les images, une image sur deux ou une image sur quatre, respectivement nommés (1 : 1), (1 : 2) et (1 : 4) afin de tester l’impact de la fréquence d’acquisition sur les performances de reconstruction de l’algorithme.

Tous les paramètres de reconstruction sur les cas cités (1 : 1), (1 : 2) et (1 : 4) sont identiques, seul le pas de temps entre deux images consécutives est différent. L’impact de certains paramètres de reconstruction sera étudié dans le deuxième test 3.4.4.2. Lors de la campagne de mesure, nous avons déterminé la fréquence d’acquisition pour vérifier la condition (3.14), correspondant à un déplacement moyen de 10 pixels. Dans le cas du plus bas nombre de Reynolds, la fréquence d’acquisition théorique devait être de 50 Hz soit deux fois moins que la fréquence de répétition possible par le laser. Nous avons donc décidé d’étudier ce critère pour connaître l’impact de la fréquence d’acquisition sur la qualité de la reconstruction.

Nous avons reporté dans le tableau 3.11 les valeurs estimées de déplacements selon le ratio d’images à partir de l’estimation de $u_{\text{rms}} \approx 0.43$ faite lors de la thèse de P. Debue [53]. Le cas (1 : 2) correspond au critère que nous nous étions fixé.

A la lecture du tableau 3.11, le cas C1 (1 : 2) correspond le mieux au critère établi à l’équation (3.14). Le troisième cas (C1 (1 : 4)) donne un déplacement trop important pour permettre une bonne reconstruction.

Tout d’abord, nous avons représenté Figure 3.37 l’histogramme des durées de trajectoires en fonction du temps plutôt que du nombre de pas de temps, ceci afin de

Cas	C1 (1 : 1)	C1 (1 : 2)	C1 (1 : 4)
dx (vox.)	4	8	17

Table 3.11 – Tableau des estimations de déplacement calculés à partir de l'équation (3.14) pour les différents cas d'échantillonnage en temps.

pouvoir comparer les 3 cas ayant un échantillonnage différent. Nous avons également

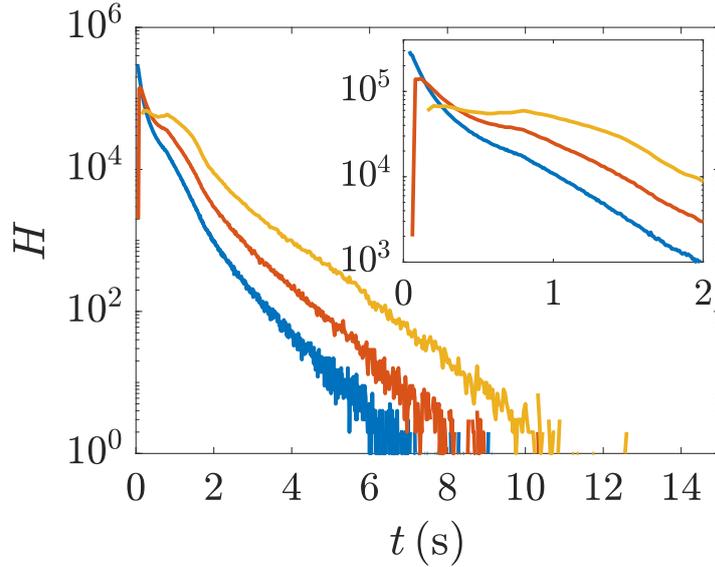


Figure 3.37 – Histogramme des durées de trajectoires (en s). Comparaison des cas (1 : 1) orange, (1 : 2) bleu et (1 : 4) jaune. En insert se trouve la courbe zoomée entre 0 et 2s.

extrait dans le tableau 3.12 le nombre de trajectoires reconstruites et la durée moyenne des trajectoires pour chacun des cas.

Cas	N_{tot}	$\langle \Delta t \rangle$ (s)
(1 : 1)	5 738 073	0.37
(1 : 2)	3 380 894	0.62
(1 : 4)	2 123 055	1.03

Table 3.12 – $\langle \Delta t \rangle$ correspond au temps moyen des trajectoires sur l'ensemble du run (en s). N_{tot} est le nombre de trajectoires reconstruites dans chacun des cas tests.

On remarque que les données du tableau 3.12 sont cohérentes. Le cas (1 : 2) correspond à peu près à deux fois moins de trajectoires reconstruites et le cas (1 : 4) quasiment 3 (et pas 4 comme on pourrait s'y attendre). De plus, la longueur maximale de trajectoires reconstruites dans ces 3 cas augmente en prenant moins d'image.

Il semblerait que la reconstruction STB soit favorisée par un temps d'inter-frame suffisant du point de vue des longueurs de trajectoires sans tenir compte de la qualité

de la reconstruction. Ce point est certainement lié à l'étape d'extrapolation de la position de particules très sensible au rapport signal-sur-bruit. Si l'écartement entre les positions successives des particules n'est pas suffisant, l'estimation peut pâtir du bruit d'estimation de la position du centre.

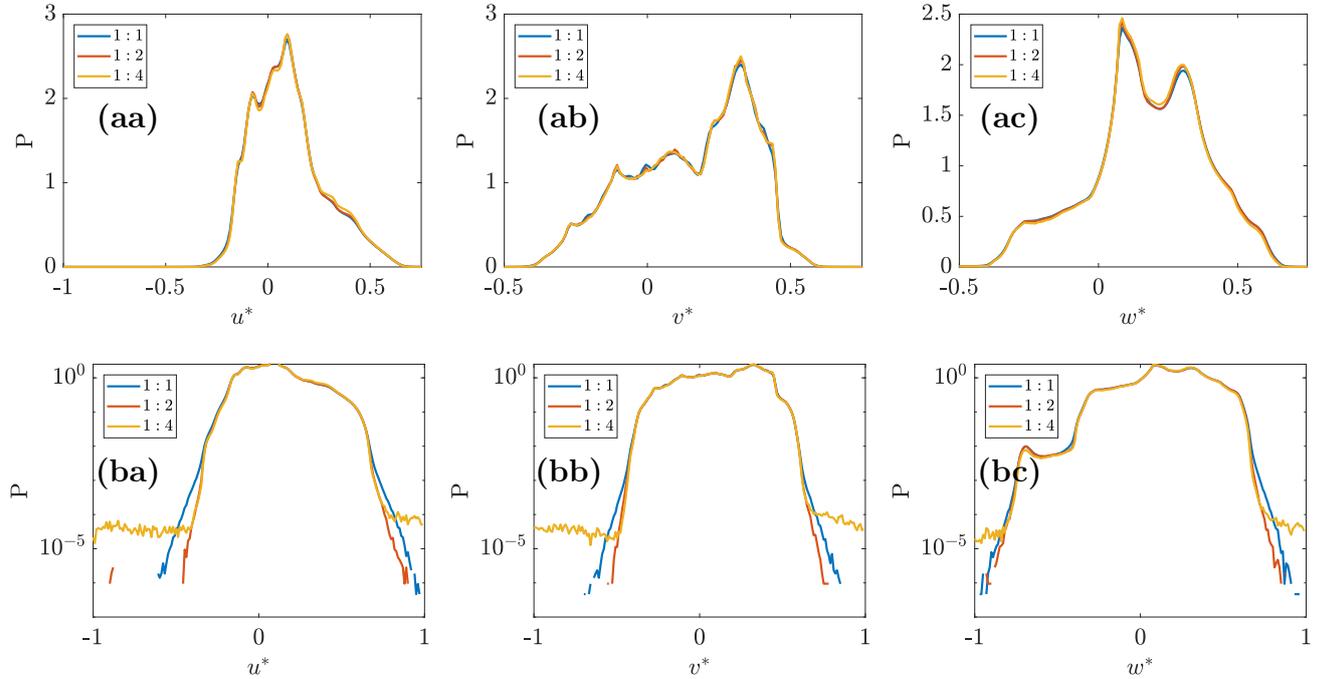


Figure 3.38 – Cas C1 run 20, comparaison des tests 1 : 1 bleu, 1 : 2 orange et 1 : 4 jaune. Ligne-a nous affichons la densité de probabilité de chaque composante, Ligne-b mêmes données affichées en échelle logarithme en ordonnées.

Comme nous pouvons le voir sur les comparaisons des densités de probabilité des différents tests effectués, Figures 3.38-ligne**b**, le test (1 : 4) n'offre pas une reconstruction satisfaisante en raison de l'apparition aux extrémités d'une distribution constante, probablement dû à des erreurs de reconstruction de trajectoires.

Par ailleurs, si on considère que le nombre de trajectoires reconstruites pour le cas test (1 : 4) est de l'ordre de 10^6 , on peut estimer qu'une centaine d'évènements s'écartent du cas (1 : 1). Ces évènements pourraient correspondre aux quelques vecteurs faux visibles dans la vidéo de reconstruction.

Le cas tests (1 : 2) permet de reconstruire des vitesses proches de celles issues du cas (1 : 1) tout en améliorant sensiblement la longueur des trajectoires et sans détériorer le nombre de trajectoires reconstruites.

Nous avons également calculé le spectre moyen de positions par une méthode de Welch. Pour pouvoir comparer ces différents spectres, nous avons considéré des trajectoires de même durée (en secondes) correspondant respectivement à une longueur de 200 pas de temps pour le cas (1 : 1), 100 pas de temps pour le cas (1 : 2) et 50 pour le cas (1 : 4).

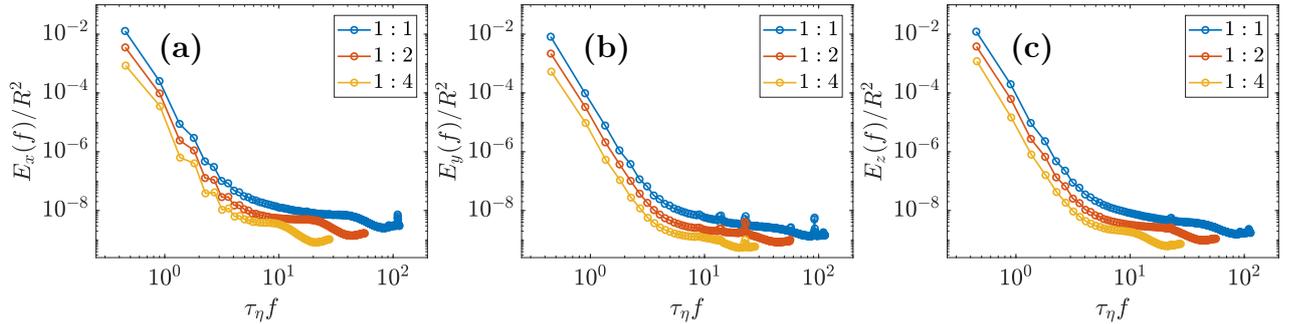


Figure 3.39 – Spectres de positions obtenus à partir des données brutes issues de l’algorithme Shake-The-Box. Nous avons représenté chaque composante respectivement (a) composante x , (b) composante y , (c) composante z pour chaque exemple développé précédemment. Ce graphique nous renseigne sur le niveau de bruit des reconstructions. Comparaison des cas (1 : 1) orange, (1 : 2) bleu et (1 : 4) jaune.

Visiblement, la fréquence de coupure n’est que faiblement affectée par le fait de prendre 1 image sur 2 ou sur 4.

Le cas (1 : 1) correspond à une résolution STB correspondant au plus grand nombre de trajectoires (soit 5 738 073 trajectoires). Dans le même temps, il s’agit des trajectoires les plus courtes avec une moyenne de 0.37s.

Le cas (1 : 2) correspond à une résolution STB correspondant à un nombre de trajectoires intermédiaire (soit 3 380 894 trajectoires). Dans le même temps, les trajectoires reconstruites sont, là aussi, de longueurs intermédiaires avec une moyenne de 0.62s. Ce cas vérifie le critère de reconstruction utilisé pendant la thèse de Paul avec un déplacement estimé de l’ordre de la dizaine de voxel.

Le cas (1 : 4) correspond à la résolution STB la plus médiocre (soit 2 123 055 trajectoires) mais correspondant aux plus longues temporellement avec une moyenne de 1.03s. Ce cas ne vérifie plus le critère (3.14) pour la reconstruction avec un déplacement estimé de l’ordre de 17 voxels soit près de deux fois la valeur préconisée. En outre, au vu de la densité de probabilité Figure 3.38, certaines trajectoires semblent être de mauvaises reconstructions ce qui semble être confirmé visuellement par la vidéo du champ de vitesse lagrangien accessible sur le logiciel.

3.4.4.2 Test 2: impact du seuil d’intensité et du pré-traitement

Afin de choisir au mieux les paramètres utilisés lors de la reconstruction STB du cas C1, nous avons réalisé quatre tests sur le run 25 dans la configuration (1 : 2). Les cas de cette partie seront systématiquement associés aux couleurs définies ci-dessous :

- **cas 1**: seuil d’intensité fixé à 260 avec version DaVis 10.2.0,
- **cas 2**: seuil d’intensité fixé à 210 avec version DaVis 10.2.0,
- **cas 3**: seuil d’intensité fixé à 260 avec version DaVis 10.2.1,
- **cas 4**: seuil d’intensité fixé à 260 sans pré-traitement avec version DaVis 10.2.0.

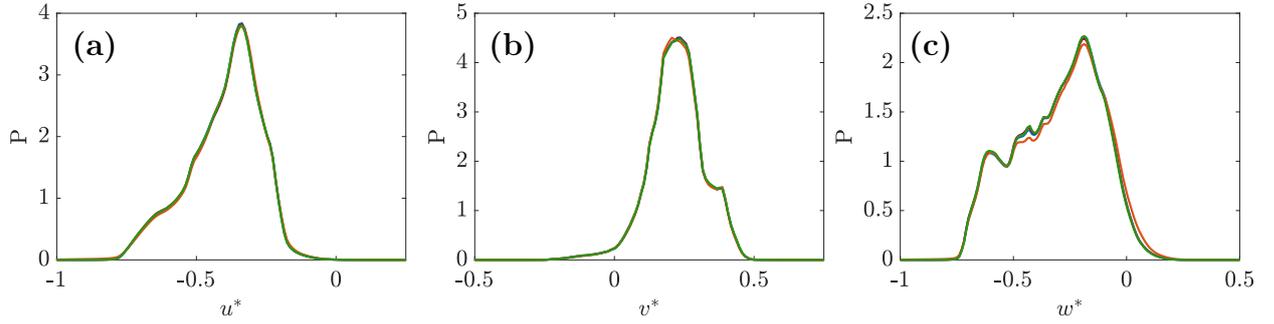


Figure 3.40 – Comparaison des densités de probabilité pour les tests réalisés. (a) composante u , (b) composante v , (c) composante w . Cas 1 bleu, cas 2 rouge, cas 3 orange et cas 4 vert.

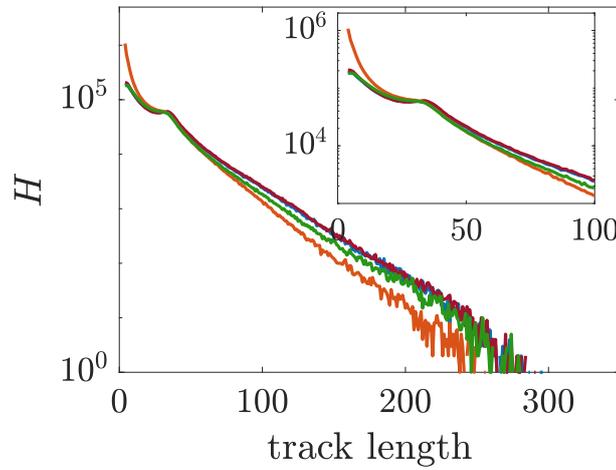


Figure 3.41 – Histogramme des durées de trajectoires sur les quatre cas définis plus haut: cas 1 bleu, cas 2 rouge, cas 3 orange et cas 4 vert. En insert, nous avons affiché le zoom sur la partie $[0, 100]$.

Nous résumons dans le tableau 3.13 les statistiques obtenues sur les quatre tests réalisés à partir des données brutes issues de l’algorithme Shake-The-Box qui applique un filtre d’ordre 3, dont les caractéristiques ne sont pas connues. Nous résumons dans le tableau 3.14 les statistiques de durées de trajectoires qui quantifient les différences de reconstruction de ces quatre cas tests. Dans ce tableau, nous donnons le nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , le nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$ et le nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$.

Cas test	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$
1	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.10	0.19	0.25
2	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.10	0.19	0.25
3	-0.39	0.23	-0.29	0.14	0.11	0.20	0.27
4	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.10	0.19	0.25

Table 3.13 – Statistiques calculées sur les données des 4 cas tests issus d’un même run de l’expérience GVK cas C1 pour validation STB. Toutes les données sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$.

Cas test	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	3848870	63055	1391
2	3960174	66486	1497
3	6254421	28572	317
4	3790941	45266	1041

Table 3.14 – Nombre de trajectoires reconstruites pour les 4 cas tests sur un même run de l’expérience GVK cas C1 pour validation STB.

Pour compléter cette comparaison, nous avons calculé le spectre en position pour chacune des composantes et chacun des cas. Ce spectre en position a été réalisé sur les données de position brutes issues de l’algorithme Shake-The-Box sans filtre. Nous avons calculé le spectre en utilisant un méthode de Welch pour des trajectoires supérieures à 200 pas de temps.

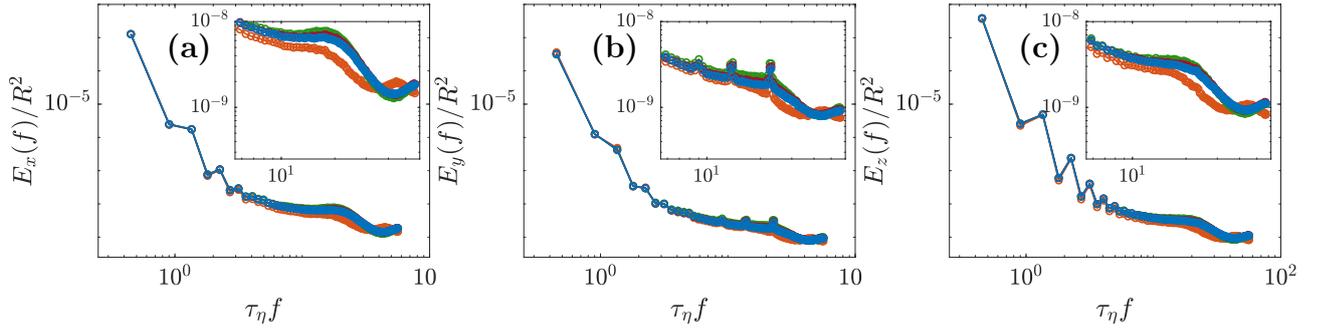


Figure 3.42 – Spectres de positions obtenus à partir des données brutes issues de l’algorithme Shake-The-Box. Nous avons représenté chaque composante respectivement (a) composante x , (b) composante y , (c) composante z pour chacun des 4 cas tests décrits précédemment. En insert, nous avons fait un zoom sur les plus hautes fréquences $\tau_\eta f \geq 5.5$. Ces graphiques nous renseignent sur le niveau de bruit des reconstructions.

D’une part, au vu de la Figure 3.40 et du tableau 3.13, les statistiques de vitesses sont sensiblement équivalentes pour tous les tests effectués. Néanmoins, les tests effectués

montrent que les durées des trajectoires, tableau 3.14, sont très impactées. Ce point est également mis en évidence dans la thèse de T. Chaabo [40].

D'autre part, nous avons vu (partie 3.3.7.3) que le pré-traitement des images joue un rôle prédominant dans la qualité de la reconstruction. Sur ce cas, le pré-traitement des images a permis d'augmenter $N_{\geq 200}$ de 43%.

Enfin, la version de DaVis utilisée (cas 3) donne un nombre de trajectoires reconstruites différent. On remarque une baisse significative de $N_{\geq 200}$ d'un facteur 5. A ce jour, aucune explication n'a été trouvée pour expliquer cette différence.

Enfin, la Figure 3.42 nous renseigne sur les niveaux de bruit de ces quatre reconstructions. On peut trier ces quatre tests en terme de niveau de bruit (voir insert Figure 3.42). Les cas 3 correspondant à la version de DaVis la plus récente correspond au plus faible niveau de bruit. Du fait du nombre plus restreint de trajectoires reconstruites, cette version semble plus restrictive. Le cas 1 correspondant au seuil d'intensité le plus haut correspond au deuxième niveau de bruit le plus bas. Nous avons été plus restrictif dans le choix des traceurs, il semble qu'un seuil d'intensité fixé à 260 soit acceptable pour reconstruire des trajectoires à la fois avec un niveau de bruit bas et suffisamment longues. Le cas sans pré-traitement correspond au niveau de bruit le plus élevé comme attendu. Dans les reconstructions qui seront utilisées pour l'étude de la turbulence, nous effectuerons systématiquement un pré-traitement.

3.4.5 La résolution des différentes techniques expérimentales

La définition de la résolution correspond à la plus petite échelle accessible expérimentalement au vu de l'expérience. Dans le cas d'une expérience de PIV ou de PTV, cette grandeur dépend de manière évidente de la résolution des caméras. Elle est également fonction du pouvoir de résolution optique (pouvoir de séparation) mais également des capacités de reconstruction du champ de vitesse. Cette dernière grandeur dépend de la manière de reconstruire le champ de vitesse. C'est pour cette raison que nous évoquerons deux définitions différentes de la résolution selon la méthode employée : soit TPIV soit PTV.

Dans le premier cas, nous employons la définition déjà utilisée dans la thèse de P. Debue [53]. Cette définition se base sur l'article [70]. Il définit la résolution comme la plus petite longueur d'onde que cette technique permet de reconstruire¹³. On définit la valeur de la fréquence de coupure, k_c , basée sur la taille de la fenêtre d'interrogation employée X .

$$k_c X = 2.8, \quad (3.41)$$

Avec k_c la fréquence de coupure définissant la résolution, on construit la résolution de ce type d'expérience à partir de la plus petite échelle accessible $\lambda_c = 2 \cdot 2\pi/k_c$.

$$\lambda_c^{\text{TPIV}} \approx 2 \cdot 2.24 X. \quad (3.42)$$

¹³Correspondant à une fréquence de coupure d'un filtre de Heaveside à -2dB, dont la fonction de transfert est un sinus cardinal.

Pour le cas PTV, nous définissons la résolution comme le double de la distance inter-particulaire moyenne $\langle r \rangle$. Cette dernière valeur est fonction de la concentration particulaire dans le volume étudié. L'estimation du nombre de particules reconstruites dans l'ensemble du volume et du volume de reconstruction sont fournies par l'algorithme STB. Ceci permet d'estimer $\langle r \rangle$ par la formule¹⁴ (3.43).

$$\langle r \rangle \sim \frac{1}{C_{3D}^{1/d}}. \quad (3.43)$$

avec C_{3D} la concentration en particules dans le volume défini comme le rapport $C_{3D} = N/V$ où N est le nombre de particules et V le volume total de reconstruction, d la dimension de l'espace.

Il est possible d'être plus précis sur l'estimation de la distance moyenne inter-particulaire en considérant [14].

$$\langle r \rangle = \frac{\pi^{2/3} 2^{1/3} 3^{5/6}}{9\Gamma(2/3)} C^{-1/3} \approx 0.554 C^{-1/3}. \quad (3.44)$$

L'estimation C_{3D} est obtenue à partir de la donnée de la ppp selon la formule (3.25).

$$\lambda_c^{\text{PTV}} = 2 \langle r \rangle. \quad (3.45)$$

Nous remarquons dans le tableau 3.15 que la deuxième méthode (PTV) permet, en

Cas	C2	C4	C6	C8
η^*	3×10^{-3}	1.5×10^{-3}	0.77×10^{-3}	0.27×10^{-3}
Re	6 300	15 700	39 300	157 100
$\lambda_c^{\text{TPIV}}/\eta$	1.14	2.26	4.50	18.1
$\lambda_c^{\text{PTV}}/\eta$	0.43	0.75	1.50	6.69

Table 3.15 – Liste des résolutions pour les cas étudiés dans cette thèse. La résolution $\lambda_c^{\text{TPIV}}/\eta$ est estimée à partir d'une fenêtre d'interrogation de 96 pixels selon l'équation (3.42). La résolution $\lambda_c^{\text{PTV}}/\eta$ est estimée à partir de la formule (3.45) compte tenu de (3.44), la concentration moyenne en particules reconstruites est calculée à partir du nombre de particules réellement reconstruites dans le volume sur l'ensemble des runs effectués.

théorie, d'obtenir une résolution plus élevée. Par ailleurs, en pratique nous avons observé que le temps de calcul pour une reconstruction STB est très inférieur à une reconstruction par TPIV. Chaque reconstruction STB dure environ 1 journée contre 3 à 4 semaines pour une reconstruction TPIV sur un seul ordinateur dans chaque cas.

¹⁴Sous l'hypothèse d'homogénéité de la distribution des particules, assurée par le mélange.

3.4.5.1 Convergence des statistiques

Pour s'assurer de la convergence des statistiques suivant la méthode utilisée dans [74], on calcule la valeur de $u_{\text{rms}}^{\text{tot}}$ cumulée en fonction du numéro de run présenté sur la Figure 3.43 **a** et **b** respectivement pour le cas GVK et SVK. De plus, on reporte dans le tableau 3.16 les valeurs des statistiques convergées calculées sur les 3 cas anti 0.1Hz, 0.025Hz et 0.004Hz.

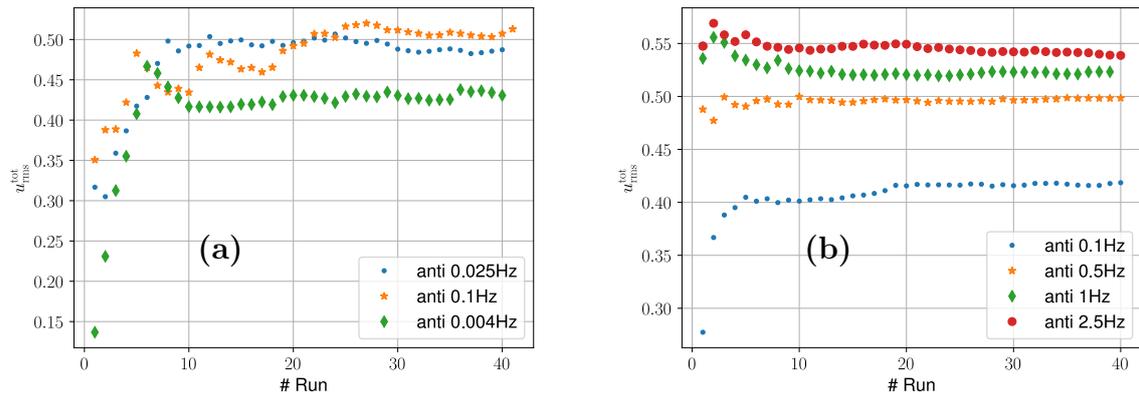


Figure 3.43 – Comparaison de $u_{\text{rms}}^{\text{tot}}$ cumulé en fonction du numéro de run pour différents cas dans les expérience GVK (a) et SVK (b)

Cas	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$
0.004Hz ⁻	0.017	0.048	-0.047	0.23	0.18	0.32	0.43
0.025Hz	-0.016	-0.016	-0.023	0.31	0.19	0.32	0.49
0.1Hz	-0.011	0.021	-0.0054	0.34	0.20	0.33	0.51
0.1Hz ^{**}	-0.011	-0.014	0.013	0.27	0.19	0.26	0.42
0.5Hz ^{**}	0.041	-0.0035	0.0046	0.32	0.21	0.31	0.50
1Hz ^{**}	-0.0068	-0.0036	-0.020	0.33	0.23	0.34	0.52
2.5Hz ^{**}	0.016	-0.018	0.034	0.34	0.23	0.35	0.54
0.1Hz [°]	-0.012	-0.010	0.012	0.26	0.18	0.26	0.41

Table 3.16 – Comparaison des composantes de vitesse moyenne et vitesse rms pour différents cas. Avec la marque ⁻: données convergées de STB (1 : 2) sur 20 run. Avec la marque ^{**}: cas SVK par données STB, avec la marque [°]: données issues de la TPIV pour la campagne de mesure sur l'expérience SVK résolue en temps (cas T4t).

Nous pouvons remarquer que le cas 0.1Hz[°] dont le champ de vitesse est obtenu par TPIV résolue en temps, donnent une valeur de $u_{\text{rms}}^{\text{tot}}$ très proche du cas 0.1Hz^{**} dont le champ de vitesse est obtenu par STB.

3.4.6 Données numériques: SFEMaNS

Dans la partie 4.2, nous comparons les données issues de l'expérience aux données issues des simulations numériques directes calculées à partir du code SFEMaNS (Spectral Finite Element Maxwell and Navier-Stokes) réalisées par H. Faller et C. Nore. Il s'agit d'une résolution numérique d'un écoulement de von Kármán partageant la même géométrie que l'expérience GVK.

Une discrétisation hybride permet d'exploiter la géométrie cylindrique (r, θ, z) de l'expérience. La simulation est faite dans l'espace de Fourier dans la direction azimutale et par une méthode d'éléments finis Hood-Taylor [170] dans le plan (r, z) .

L'écoulement est modélisé par l'équation de Navier-Stokes dont la résolution est conduite en formulation faible. Les pales en mouvement constitue une difficulté pour la résolution. Une méthode de pseudo-pénalisation développée dans [130] est utilisée pour résoudre le problème. Cette technique est validée par de nombreux travaux [38, 121].

La fréquence de rotation adimensionnée est fixée à $f_T = \frac{1}{2\pi}$ et la viscosité est choisie de telle sorte que le nombre de Reynolds soit égal à 6000. La résolution sur ce maillage non-structuré est comprise entre $1.3 \cdot 10^{-3}R$ et $4 \cdot 10^{-3}R$ ce qui correspond en terme de η respectivement de $\frac{\eta}{3}$ à η . Le maillage est très résolu au centre et plus grossier sur les bords du domaine et qui nécessiterait éventuellement une étude plus approfondie de la validité de résolution de la couche limite pour l'examen de cette zone de l'écoulement. Nous utilisons au total 255 modes de Fourier pour la décomposition dans la direction azimutale. Le maillage dans l'espace physique est composé de $3 \cdot 10^8$ points répartis sur 510 plans angulaires. La résolution temporelle adimensionnée à $Re = 6 \cdot 10^3$ est de $dt = 1.5 \cdot 10^{-4}$ et les champs sont sauvegardés tous les 21 pas de temps dt pour permettre une bonne comparaison avec le cas de plus faible nombre de Reynolds observable expérimentalement. Une description plus exhaustive est présentée dans la thèse de H. Faller [65].

4

Évènements extrêmes de dissipation

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une étude du point de vue eulérien. Dans la partie introductive 2.1, nous avons évoqué le taux de dissipation qui correspond au terme puit dans l'équation de Navier-Stokes. Il est certain que cette dissipation n'est pas uniforme dans tous l'écoulement. Cette remarque, faite par L. D. Landau à A. N. Kolmogorov lors de l'annonce de sa première théorie, l'a conduit à repenser sa théorie de la turbulence. Plusieurs expériences d'écoulements turbulents ont mis en lumière que le taux de dissipation variait dans l'espace et pouvait prendre localement des valeurs très fortes. Nous pouvons alors définir des zones plus ou moins dissipatives. Ce dernier point est intimement lié à la notion d'intermittence en turbulence. En particulier, nous pouvons étudier les zones qui correspondent aux valeurs extrêmes du taux de dissipation calculé localement.

Dans une première partie, nous analysons l'impact d'une résolution finie sur les transferts énergétiques et nous étudions leurs manifestations sur le champ de vitesse filtré. Cette étude nous conduira à reconsidérer le modèle de fermeture des équations de Navier-Stokes dans le cas des petites échelles. Cette première étude a mené à la rédaction de l'article "Experimental study of subgrid stresses at the Kolmogorov scale in a turbulent von Kármán flow" (non-soumis) que nous présentons dans le corps de ce chapitre en partie 4.2.

Dans la deuxième partie, nous développons un modèle simple qui rend compte des interactions sous-maillages. Il offre une nouvelle manière d'appréhender la turbulence. Nous présentons ce modèle dans le corps de ce chapitre en partie 4.3 au travers de l'article "A Model of Interacting Navier–Stokes Singularities" (publié).

4.2 Article : Experimental study of subgrid stresses at the Kolmogorov scale in a turbulent von Kármán flow

4.2.1 Sur les phénomènes sous-mailles et leurs impacts sur le champ de vitesse.

Dans la très grande majorité des cas, le coût extrêmement important que représente les simulations numériques directes des équations auxquelles obéissent l'écoulement rend difficile toute tentative dans ce sens. Il est donc nécessaire de développer des modèles, plus ou moins précis, qui permettront de rendre compte de manière plus simple ces interactions complexes.

Cette idée n'est pas nouvelles en mécanique des fluides. En effet, le problème dit de "fermeture" des équations de Navier-Stokes s'est rapidement imposé dès les premières tentatives de résolutions. Ce problème peut être illustré par l'exemple de la décomposition de Reynolds. Considérons un champ de vitesse \mathbf{u} , notons $\langle \mathbf{u} \rangle$ sa moyenne¹.

La décomposition de Reynolds conduit à dissocier le champs de vitesse \mathbf{u} entre sa contribution moyenne $\langle \mathbf{u} \rangle$ et sa contribution fluctuante, notée \mathbf{u}' , par la relation $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$.

En moyennant l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (2.1) dans les équations de Navier-Stokes, on trouve après calculs,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \partial_t \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle = -\nabla \langle p \rangle + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.1a) \\ (4.1b) \end{array}$$

avec $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = -\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$.

On remarque tout d'abord que pour pouvoir résoudre cette équation, il est nécessaire de résoudre également l'équation de transport de la partie fluctuante. On peut montrer alors que nécessairement, les équations des différents moments se développent *ad infinitum*.

De nombreux modèles de fermeture ont été développés et sont disponibles dans la littérature. On peut penser, par exemple, au modèle de la viscosité turbulente introduite par J. Boussinesq dès 1877 [31] (p. 47) dans laquelle le tenseur de Reynolds est

¹Sous l'hypothèse ergodique, on pourra prendre indifféremment la moyenne temporelle, spatiale ou d'ensemble respectivement définie par:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t) dt, \\ \langle \mathbf{u} \rangle_S &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V_r} \iiint_{B_r} \mathbf{u}(t) dt, \\ \langle \mathbf{u} \rangle_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}^i. \end{aligned}$$

avec V_r le volume de la boule B_r centrée en zéro de rayon r .

supposé proportionnel au tenseur des déformations. On peut penser encore au modèle de la longueur de mélange introduite par L. Prandtl dès 1903 [34, 133] qui exploite les idées de la théorie cinétique du gaz et son “libre parcours moyen”. On peut également évoquer d’autres modèles plus complexes, comme celui prenant en compte les équations de transport de l’énergie cinétique turbulente dans le modèle $k - \epsilon$ ou du taux de dissipation dans le modèle $k - \omega$. Tous ces modèles partagent un point commun: modéliser plutôt que de résoudre les événements apparaissant en dessous de l’échelle minimale représentative du phénomène intéressant.

C’est exactement l’objectif des simulations dites Large Eddy Simulation (LES). Nous renvoyons le lecteur intéressé vers le chapitre 12 du livre de M. Lesieur [105] du livre de S. Sagaut [149] pour une introduction de cette méthode de simulation.

Les simulations LES résolvent un champ filtré et modélise les fluctuations qui se manifestent sous l’échelle de résolution. Pour illustrer le principe, introduisons dans un premier temps le filtrage du champ de vitesse sur un maillage grossier Δx par :

$$\bar{u}_i = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_{\Delta x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (4.2)$$

Faisons remarquer que les fonctions filtres utilisées pour la LES doivent avoir des propriétés de commutation avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle, on doit ainsi avoir (voir également [149] pour des exemples de filtres possibles) :

$$\overline{\partial_t \mathbf{u}} = \partial_t \bar{\mathbf{u}}, \quad (4.3a)$$

$$\overline{\partial_i u_j} = \partial_i \bar{u}_j. \quad (4.3b)$$

De manière générale, cet opérateur de filtrage n’est pas idempotent,

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}} \neq \bar{\mathbf{u}}. \quad (4.4)$$

En reprenant les équations de Navier-Stokes (2.1) et en appliquant le filtre $\bar{\bullet}$, on trouve alors :

$$\begin{cases} \nabla \bar{\mathbf{u}} = 0 & (4.5a) \\ \partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}^{\Delta x}, & (4.5b) \end{cases}$$

avec

$$\tau_{ij}^{\Delta x} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (4.6)$$

Que l’on peut réécrire en suivant l’article [46] également en faisant apparaître le champ filtré et la fluctuation sous-maille en notant $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$,

$$\tau_{ij}^{\Delta x} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j - (\overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' u_j'}) - \overline{u_i' u_j'}. \quad (4.7)$$

Cette deuxième façon de traiter le tenseur des contraintes fait intervenir plusieurs contributions: le tenseur de Léonard $\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$, le tenseur croisé $\overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' u_j'}$ et le tenseur équivalent au tenseur de Reynolds $\overline{u_i' u_j'}$.

On voit ainsi apparaître la contribution des fluctuations sous-mailles, c’est-à-dire les fluctuations qui apparaissent en dessous de l’échelle de résolution Δx . La simulation

LES consiste à modéliser ce terme à partir des grandeurs du champ filtré. De manière formelle, on cherche une relation de la forme :

$$\underline{\underline{\tau}}^{\Delta x} = f(\overline{\mathbf{u}}). \quad (4.8)$$

Le tenseur $\underline{\underline{\tau}}^{\Delta x}$, est donc une manifestation “macroscopique” de ces interactions apparaissant en dessous de la maille. Il traduit en outre leurs impacts sur les phénomènes étudiés à des échelles plus grandes. Cette notion est souvent traduite par le terme d’agrainissement (ou *coarse-graining* en anglais).

Dans la théorie classique de la turbulence, souvent associée à L. F. Richardson [17], on observe une cascade d’énergie, idée selon laquelle, en moyenne, les structures de grandes tailles, plus instables, vont spontanément se disloquer et transférer leur énergie cinétique à des structures de taille plus petite. Tant que ces structures sont supérieures à une taille critique, l’échelle de Kolmogorov η , on observe un transfert d’énergie de proche en proche sans perte par effets visqueux. À partir d’une taille critique néanmoins, ces structures sont de plus en plus soumises aux effets visqueux. Elles vont commencer à transférer leur énergie par un nouveau mécanisme, celui de la dissipation thermique.

On peut construire un flux inter-échelle correspondant à cette notion de transfert de proche en proche de la quantité d’énergie. L’énergie est injectée aux grandes échelles. En moyenne cette énergie est transférée vers les échelles plus petites. Il s’agit exactement de la somme des deux termes \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν que nous avons précédemment introduits (2.37b) et (2.37c).

Dans la zone inertielle, plusieurs études [53, 58, 98] ont montré que le terme de flux inter-échelle \mathcal{D}_ℓ^I prévaut sur le terme de dissipation visqueuse \mathcal{D}_ℓ^ν . À l’inverse, dans la zone dissipative et dans l’hypothèse d’un champ de vitesse suffisamment régulier, on trouve que le terme de flux inter-échelle est négligeable devant la contribution visqueuse qui elle tend à saturer sous l’effet de la régularisation par la viscosité [53, 58].

On peut interpréter le transfert énergétique comme une manifestation à grande échelle de phénomènes sous-mailles. Intuitivement, on peut supposer qu’à de forts transferts énergétiques vont correspondre des phénomènes sous-mailles de forte intensité. En ceci, l’étude du transfert énergétique serait un moyen de quantifier et de visualiser de potentielles traces de singularités impactant le champ de vitesse, dans l’hypothèse de localité spatiale des transferts énergétiques qui reste encore une question ouverte.

Dans l’article qui suit, nous nous intéressons à l’équation de la vortacité. Nous avons préféré l’étude du champ de vortacité à celle du champ de vitesse pour éviter une étape d’inversion de l’équation de Poisson qui rajouterait du bruit. En filtrant l’équation de vortacité, nous obtenons une loi de comportement équivalent à celle vérifiée par l’équation de Navier-Stokes filtrée (4.1).

On peut alors construire un terme équivalent au tenseur de Reynolds pour l’équation de la vortacité, la divergence de ce terme sera notée $\delta\omega$ et nous l’appellerons écart au modèle de Navier-Stokes. Il peut également être rapproché d’un terme de transfert énergétique inter-échelle comme nous le développons dans cet article. Nous montrons, de plus, qu’il existe une corrélation entre les phénomènes extrêmes de transferts én-

ergétiques, que l'on nomme phénomènes extrêmes de dissipation et ce terme d'écart au modèle de Navier-Stokes.

Dans cet article, nous nous intéressons à un même champ de vitesse obtenu expérimentalement par deux méthodes de reconstructions différentes. Cette approche permet d'étudier le véritable impact de la résolution sur le terme de transfert énergétique. Cette étude s'accompagne d'une comparaison avec un champ de vitesse obtenu par simulation numérique directe partageant la même géométrie que l'étude expérimentale.

Experimental study of subgrid stresses at the Kolmogorov scale in a turbulent von Kármán flow

D. Geneste ¹†, H. Faller ^{1,2}, T. Chaabo³, A. Cheminet^{1,3}, V. Valori ¹,
 Y. Ostovan³, L. Cappanera⁴, C. Cuvier³, F. Daviaud ¹, J.-M.
 Foucaut³, J.-P. Laval³, C. Nore², V. Padilla¹, C. Wiertel-Gasquet¹
 and B. Dubrulle¹

¹Université Paris-Saclay, CEA, CNRS, SPEC, CEA Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex, France.

²Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique, 91400, Orsay, France

³Univ. Lille, CNRS, ONERA, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, UMR 9014-LMFL-Laboratoire de Mécanique des Fluides de Lille-Kampé de Fériet, F-59000, Lille, France

⁴Department of Mathematics, University of Houston, Houston, TX 77204-3008, USA

(Received xx; revised xx; accepted xx)

Incompressible flows can be described by the Navier-Stokes equations. The general solution of these equations remains an open question and only approximate numerical solution can be found. Furthermore, to capture the whole physics, numerical simulations need to achieve high resolution and to use important computer resources.

In experimental case, chain measurements systematically apply a filter on top of collected data which is difficult to estimate. Similarly, numerical simulation require some discretisation and the numerical scheme can introduce some numerical dissipation which act as a filter on the solution. That is why, it is important to keep in mind that true flow field such as velocity or vorticity obtained by simulation or experiments are in fact filtered. In fluid mechanics, it is well known since O. Reynolds that the filtered quantities do not follow the original Navier-Stokes model but must include Reynolds-stress-like terms. The latter have to be modeled to close the equations.

Throughout this work, we use data from the same experiment with two different reconstruction methods offering two distinct spatial resolutions. We also compare experimental data with direct numerical simulation (DNS) on the same configuration.

From both experimental and numerical data, we study the impact of different explicit or implicit filters applied on our dataset. From visual and statistical studies, we try to understand the impact of filters on physics and their relations with quantities related to energy transfer. In particular, we study the correlation between inter-scale energy flux and the sub-grid stress scale.

Due to finite experimental resolution, a remaining sub-grid term appears to compensate the deviation of the Navier-Stokes equations. This term is related to a non-vanishing energy flux term at these scales and may not be neglected. In DNS, if the resolution is not sufficient, such a sub-grid term can appear with very high amplitude. This term can be modeled, in an oversimplified form, by a turbulent viscosity. This may open new insights in LES-like model taking into account new form of sub-grid terms as a function of scale.

† Email address for correspondence: damien.geneste@cea.fr

Key words: Turbulent flows, turbulence modeling, universality, von Kármán swirling flows.

1. Introduction

The dynamics of incompressible fluids are described by the Navier-Stokes equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

where \mathbf{u} is the velocity, \mathbf{f} is the forcing, p is the pressure, ν is the kinematic viscosity and ρ is the constant density. For statistically stationary forcing and small enough viscosity, the equations develop multi-scale dynamics, resulting from non-linear interactions of structures of different sizes (Frisch 1996; Duvvuri & McKeon 2015; Waleffe 1992). The typical maximal and minimal size of such structures can be read off from the energy spectrum $E(k)$, that exhibits a power-law behavior $E(k) \sim k^{-5/3}$ for a range of wavenumbers $[k_0, k_m]$. One can build the typical size of the large structures as $L \sim 1/k_0$ from the smallest wavenumber k_0 which corresponds to the typical scale of the forcing. The largest wavenumber is characterized by $k_m \eta \sim 1$, where $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ is the Kolmogorov scale, determined by the balance between the energy dissipation due to viscosity, and the mean energy injection rate by the forcing. Beyond k_m , the energy spectrum decays exponentially, numerically studied in Martnez et al. (1997) and confirmed by high-resolution simulation in Ishihara et al. (2005) and Buaria & Sreenivasan (2020). So, structures smaller than η contains a very small fraction of kinetic energy.

From the past 30 years up to now, the increase of computing power has allowed simulations to reach higher Reynolds numbers and smaller structures. To limit the computational burden, many direct numerical simulations (DNS) of the Navier-Stokes equations therefore truncate the resolution at $k_{max} \eta \sim \pi/2$, or discretize the space at a resolution $\Delta x \sim 2\eta$, without further cares (Remmler & Hickel 2013; Wang et al. 1996; Gotoh et al. 2002; Ishihara et al. 2007, 2020). Such DNS can perfectly catch second-order quantities as power-spectrum (Ishihara et al. 2005) but cannot capture all the fluctuations and misestimate higher-order statistics (higher than 4) (Donzis et al. 2008).

Recent high resolution numerical simulations with $k_{max} \eta \in [3, 11]$ (Yeung et al. 2012) have confirmed that simulation with $k_{max} \eta \sim 1.4 - 1.5$ induces spurious events, impeding the development of extreme velocity gradients, that are generated at scales below η . Such velocity gradients correspond to very high peaks of kinetic energy dissipation, that play an important role in the intermittency (Yakhot & Sreenivasan 2005; Schumacher et al. 2005) leading to a refinement of the “standard” resolution by a factor of $R_\lambda^{-1/4}$ as explained in Dubrulle (2019), where R_λ is the Reynolds based on the Taylor micro scale following eq. (1.3).

$$R_\lambda = \frac{\lambda u_{rms}}{\nu}, \quad (1.3)$$

with λ being the Taylor micro-scale and u_{rms} the velocity root-mean square velocity.

Whether these large velocity gradients correspond to footprints of underlying Navier-Stokes dissipative singularities or quasi-singularities living beyond the Kolmogorov scale (Dubrulle 2019) is still debatable. In any case, truncating Navier-Stokes equations at the Kolmogorov scale is dangerous without adding supplementary terms to model the impact of velocity gradients developed beyond the Kolmogorov scale.

Until now, most effort was concentrated on modeling such terms in the inertial range, where the energy spectrum is self-similar. Such a model is not a novelty in fluid mechanics. Already in 1877, Boussinesq first introduced a closure term for velocity fluctuation (Boussinesq 1877) with a turbulent viscosity. We know for decades now, that the so-called subgrid tensors are supplementary contributions in the filtered Navier-Stokes equations due to their non-linearities. It is still being discussed whether this term vanishes at very small scales, assumption done in direct numerical simulations (DNS) for example.

To our knowledge, there has been so far no study of the properties of the subgrid tensor near the Kolmogorov scale, especially from the experimental side. In the latter case, the study is very challenging, as it requires time and space resolved 3D measurements of the velocity field at the Kolmogorov scale. At this resolution, the treatment of the noise becomes an issue, as the latter could provide a significant contribution to the subgrid tensor.

In the present paper, we will therefore use our unique von Kármán experimental facility that allows measurements at the Kolmogorov scale to study the physical and statistical properties of the most intense subgrid tensors, that are more prone to have a good signal-to-noise ratio. Moreover, we will compare our measurements to results from DNS of our numerical set-up, to validate our findings and deal with the noise issue.

The paper is organized as follows. Section 2 presents the experimental device and the numerical setting. Some theoretical developments are performed to highlight and interpret the results. Section 3 provides a discussion of the present results dealing with the turbulence modeling in its vicinity of the Kolmogorov scale.

2. Description of the experimental and numerical data sets

2.1. Experimental data set

2.1.1. Experimental set-up

The experimental set-up is based on a von Kármán flow geometry, schematized in Figure 1. We have used it in many previous studies (Ravelet *et al.* 2004, 2008; Saw *et al.* 2016, 2018; Debue *et al.* 2018), and we only recall here the informations necessary to the present paper. It is made of a cylinder tank of radius $R = 0.1$ m, filled with pure water maintained at controlled temperature 20°C with a cooling system. The fluid is mechanically stirred by two counter rotating impellers distant from each other by $H = 1.8 R$, each impeller rotates at a controlled frequency, f_1 for the upper impeller and f_2 for the lower one. We focus on the particular case when $f = f_1 = f_2$. The impellers are driven by two independent motors, fitted with curved blades. Each blade has the same height and same curvature. The blades generate two different flows depending on the rotation sense. Experimentally, we focus on the negative rotation sense when the blades from each impeller push the flow with the concave part see Figure 1a. The numerical computation is performed in the same configuration.

To make the Kolmogorov scale accessible to our optical system, we perform this study at the lowest possible frequency $f = 0.1$ Hz in the negative rotation sense. This flow generates a turbulent flow where the non-dimensionalized dissipation rate $\epsilon^* = \epsilon/R^2 (2\pi f)^3 = 0.045$ defined by the energy injected per unit volume ϵ , under steady

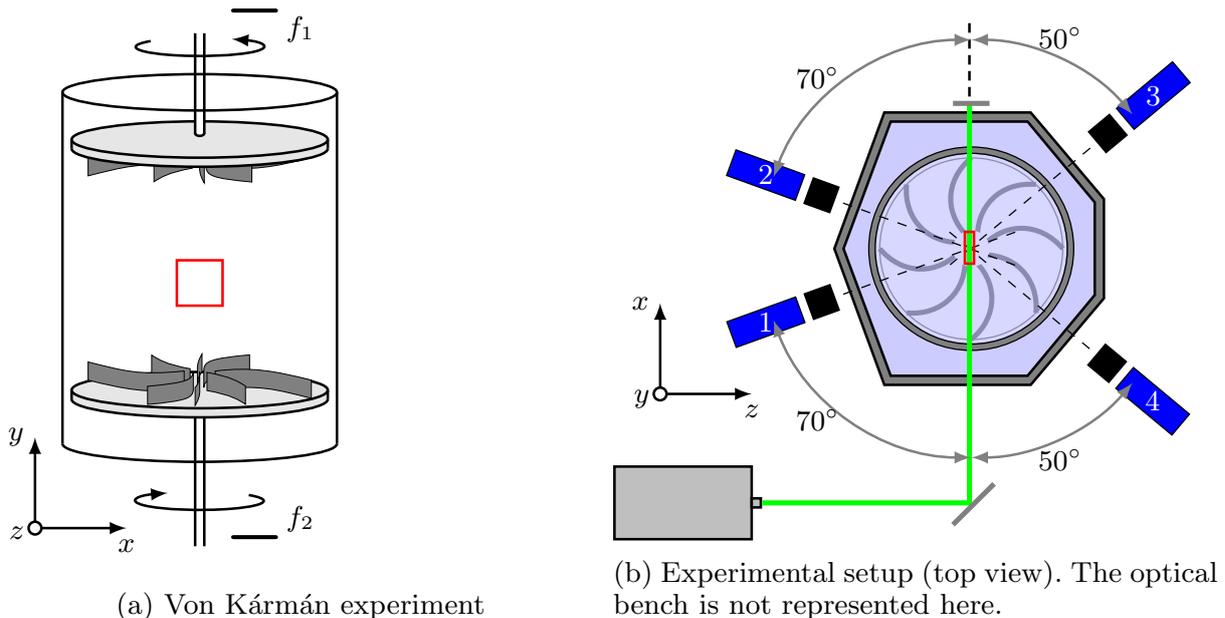


Figure 1: (a) Sketch of the experimental set-up. The frequencies f_1 and f_2 in positive sense, can be adjusted independently. For symmetric flow we keep $f_1 = f_2$. (b) Sketch of the experiment acquisition set-up. 4 high speed Phantom Miro M340 cameras are set on a plane surrounding the middle of the experiment (materialized by a red rectangle in both Figures (a) and (b) and oriented thanks to Sheimpfung (not represented here) to face the volume area. Particles of average diameter $10 \mu\text{m}$ are illuminated by a laser in a small volume, thanks to a dedicated optical bench (not represented here).

state assumption, non-dimensionalized by the rotation frequency f and the tank radius R and the Reynolds number is $\text{Re} = 2\pi R^2 f / \nu = 6300$. The corresponding Kolmogorov scale is then $\eta = 0.3 \text{ mm}$. The resolution is constant in the 3 directions ($dx = dy = dz$). The shape of the filter applied on the data correspond to the scale of the study.

2.1.2. Data acquisition and treatment

In order to measure the flow field, we seed the fluid with glass hollow spheres of average diameter of $10 \mu\text{m}$ and a small volume of $4.1 \times 4.8 \times 0.6 \text{ cm}$ is lighted up with a pulsating high power laser (nd:YLF) at a frequency of 200 Hz and 2.5 mJ/pulse to illuminate the particles. The laser is first expanded and set parallel at 17 mm diameter with a pair of diverging-converging spherical lenses. Then the beam is enlarged in the vertical direction with a diverging cylindrical lens. The laser beam is cutted by a slit to keep only half of the height. Finally the laser sheet is set nearly parallel with a converging cylindrical lens. Before entering the experiment, it is cut at 6 mm , giving a nearly uniform volume illumination in its thickness and height.

First, our particles have a very low Stokes number $\sim 6.5 \cdot 10^{-5}$, which guarantee their ability to follow the smallest fluctuations of the flow. The small diameter of the particles corresponding to 0.03η is not a limitation **to track the smallest scale**.

Images are recorded with 4 high speed Phantom Miro M340 cameras with chip resolution reduced to $1600 \times 1600 \text{ px}$ and a pixel size of $10 \mu\text{m}$. Camera 3 was set at 70° from laser sheet (forward scattering), 4 at -70° , 1 at -40° and 2 at 40° respectively. To get the same scattering light on each camera, the light sheet exiting the experiment was sent back inside the facility with a planar mirror, slightly inclined up to avoid sending

it back inside the laser. The cameras were equipped with macro Nikon 105 mm lens set at $f^\# = 11$. The magnification used was 0.4 (see figure 1b).

We perform two flow reconstructions from the same experiment, the second reconstruction appearing to be better resolved than the initial one. They allow to study directly the impact of the resolution on the energy transfer and the remaining subgrid tensor.

i) a 3D reconstruction method based on Tomographic Particle Image Velocimetry (TPIV) (Raffel 2007; Scarano 2013), developed by DaVis software from LaVision. Using a tomographic reconstruction with MART algorithm (Atkinson & Soria 2009) where we use 4 iterations, we perform a 3D-PIV analysis with an interrogation window of $80 \text{ px} \times 80 \text{ px}$ and 75% of overlap. The reconstruction is performed on a smaller volume $4.1 \times 3.8 \times 0.42$ due to low illumination on the edge of the laser sheet. It then corresponds to a resolution of $dx/\eta = 15$, following Foucaut *et al.* (2004). For more details about the TPIV reconstruction method and parameters used here, see Debue (2019).

ii) a 3D reconstruction method based on Particule Tracking Velocimetry (PTV) with the algorithm Shake-The-Box (STB) from LaVision (Schanz *et al.* 2016). This method provides a Lagrangian description of the flow in the measurement volume, *i.e.* the particles are followed on several time steps, thus providing tracks.

To reduce noise on the trajectories reconstructed by this method, we use an optimized algorithm named TrackFit. It is based on 3rd order B-Splines developed in the first part of the article (Gesemann 2015). Explanation of this article and gain of quality achieved by this algorithm are available in Cheminet *et al.* (2021). To obtain similar description of the flow as with TPIV, we interpolate the Lagrangian field on a Eulerian regular grid through a 3rd order B-spline with the algorithm FlowFit developed by Gesemann (2015) in the second part of his article. The dataset obtained with this method is mentioned hereafter as F-PTV. This latter reconstruction theoretically reaches finer resolution defined on the mean distance of detected particles to the nearest neighbour by $dx^{F-PTV} = 2\langle r \rangle$. With the STB algorithm, we are able to reconstruct up to 50 000 particles at every time step.

In both cases, we obtain a Eulerian field in 4 dimensions (3 dimensions in space and one dimension in time) as measurements are time resolved. The interframe time corresponds to $0.05 \tau_k$ (where $\tau_k = (\nu\epsilon)^{1/2}$ is the Kolmogorov time scale corresponding to 0.092 s).

Both velocity field reconstruction methods are performed from the same set of images but lead to different resolutions, the F-PTV being more resolved by a factor of 4.2 (from 15η to 3.6η). The resolution of F-PTV is taken equal to the mean distance to the nearest neighbour while the resolution of TPIV is coarser related to the interrogation window size.

Furthermore, the two different reconstruction algorithms result in a different intrinsic filtering of the velocity field, which we cannot control and define accurately. To be able to interpret our results, we therefore further use data from direct numerical simulations, for every experimental case, thereby evaluating the impact of noise and experimental filtering.

2.2. Numerical data set

2.2.1. Numerical Code

To perform a comparison with our experimental results, we use DNS in the same geometry. The computations are performed using the Spectral/Finite Elements for Maxwell and Navier Stokes (SFEMaNS) code. This code uses cylindrical coordinates (r, θ, z) with a hybrid spatial discretization: spectral in angles and finite elements in a (r, z) plane. In a nutshell the approximation in space is done by using a Fourier decomposition in the

Case	f_t	Grid size (r, θ, z)	Re	R_λ	ϵ^*	η^*	$dx^* = dy^* = dz^*$
DNS	$\frac{1}{2\pi}$	$400 \times 800 \times 509$	6×10^3	72	0.045	0.037	0.01-0.04

Table 1: DNS parameters: f_t rotation frequency; Re global Reynolds number; R_λ Taylor Reynolds number; ϵ^* non-dimensionalized dissipation rate; η^* Kolmogorov scale non-dimensionalized by the tank radius; and dx^*, dy^*, dz^* non-dimensionalized spatial resolution. The computation is performed in the same configuration as the experiment, with the blades of each impeller that push the flow with the concave part (as shown in Figure 1)

azimuthal direction and the continuous Hood-Taylor Lagrange finite element for (r, z) dependencies.

The code solves the Navier-Stokes equations in a weak formulation, and models the propellers using a pseudo-penalty method proposed by Pasquetti et al. (2008). The code has been validated in many previous papers (Nore et al. 2018; Cappanera et al. 2021).

The non-dimensional rotation frequency is set to $\frac{1}{2\pi}$ and the viscosity is chosen so that the global Reynolds number is 6×10^3 . We use 255 complex modes for the Fourier decomposition in θ , and the (r, z) resolution is between $1.3 \times 10^{-3}R$ and $4 \times 10^{-3}R$ corresponding to $\frac{\eta}{3}$ and η respectively. The mesh is better resolved in the center of the tank, where the experimental measurements are performed. The three dimensional mesh in physical space is composed by 3×10^8 Gauss points on 510 angular planes. The time step at $\text{Re} = 6 \times 10^3$ is 1.5×10^{-4} .

As well as the experimental dataset, the numerical one is time resolved, at the very same non dimensional time resolution of $\Delta t = 21dt = \frac{1}{f_t 2 \times 10^3}$.

In order to compare with experimental datasets, we have interpolated the data in the region $(x, y, z) \in [-0.1, 0.1]^3$ on a cube of size 119^3 with a basic interpolation tool, averaging all the nodes from the numerical grid that fit into the cartesian cells. The resolution 119^3 corresponds to the maximum resolution with at least one numerical grid point on each cartesian grid cell.

2.2.2. Data acquisition

Computation of velocity and vorticity fields is performed at every time step $dt = 1.5 \times 10^{-4}$. Snapshots are recorded at every 21 (t_i) time steps and the previous time step ($t_i - dt$).

The time derivative is estimated by a decentered scheme following the definition:

$$\partial_t \omega_j \sim \frac{\omega_j^{t_i} - \omega_j^{t_i - dt}}{dt}. \quad (2.2.1)$$

3. Study of the subgrid tensor at Kolmogorov scale

Experimentally, we have only a direct access to the velocity field, while the pressure would have to be reconstructed via the relation $\Delta p = -\partial_i(u_j \partial_j u_i)$. To avoid difficulties of interpretation linked to the inversion of a Laplace equation, we therefore decided to work with the vorticity field instead. Even if vorticity is highly sensitive to experimental noise, we implemented an in house code discussed in subsection 3.2 to reduce noise effects.

3.1. Subgrid tensor based on vorticity equation

We first recast the Navier-Stokes equations into an equation for the vorticity by taking the curl of Eq. (1.2) and non-dimensionalize the equation.

$$\partial_t \omega_i + \partial_j (u_j \omega_i) = \partial_j (\omega_j u_i) + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \omega_i. \quad (3.1.1)$$

We now consider a filter that commutes with both time and spatial derivatives:

$$\overline{\partial_t u_i} = \partial_t \overline{u_i} \quad (3.1.2)$$

$$\overline{\partial_j u_i} = \partial_j \overline{u_i}. \quad (3.1.3)$$

After applying such filter to the vorticity equation (3.1.1), we obtain:

$$\partial_t \overline{\omega_i} + \partial_j \overline{u_j \omega_i} = \partial_j \overline{\omega_j u_i} + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \overline{\omega_i}. \quad (3.1.4)$$

We now introduce the vorticity subgrid tensor r_{ji} as:

$$\overline{u_j \omega_i} = \overline{u_j} \overline{\omega_i} + [\overline{u_j \omega_i} - \overline{u_j} \overline{\omega_i}] \equiv \overline{u_j} \overline{\omega_i} + r_{ji}. \quad (3.1.5)$$

Note that such tensor is not symmetrical.

We finally get:

$$\partial_t \overline{\omega_i} + \partial_j \overline{u_j} \overline{\omega_i} - \partial_j \overline{\omega_j} \overline{u_i} - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \overline{\omega_i} = \partial_j (r_{ij} - r_{ji}) \equiv \delta \omega_i, \quad (3.1.6)$$

where $\delta \omega_i$ represents the i^{th} component of the “deviation” with respect to Navier-Stokes equations for filtered quantities. In the sequel, we use both components and the rescaled norm of the deviation field $\delta \omega \equiv \|\delta \boldsymbol{\omega}\|/\text{Re} = \sqrt{\delta \omega_i \delta \omega_i}/\text{Re}$ as diagnostics.

3.2. Experimental implementation: Noise, filters, weak derivative

Considering the vorticity instead of the velocity has a major impact on the noise, since it implies taking derivatives of noisy quantities, which is also likely to decrease the signal to noise ratio. Hence it is crucial to be careful while computing the vorticity field. We decide to add, on top of the experimental filtering imposed by the acquisition process or interpolation algorithm, a gaussian filter with width slightly above resolution of the experiment. The spatial derivatives are then performed as the convolution between the derivative of a gaussian function and the velocity field, similarly as it is done in the weak formulation. For the time derivatives in Eq. (3.1.6), we perform a pre-filter defined by a moving average over 18 snapshots on the vorticity field before evaluating the derivatives using a second order central finite difference scheme. This pre-filter appears to reduce the noise drastically.

We do not have noise issue for the numerical data, that are taken on an unstructured grid. However the interpolation from an unstructured grid to a regular grid necessarily implies a filtering with unknown transfer function. In order to perform meaningful tests about noise and filtering issues, we therefore decide to perform two types of analysis on the numerical dataset:

i) we compute the vorticity on the unstructured grid, interpolate it on the same regular grid than experimental data, and then compute $\delta \omega_i$ using centered differences for both time and space derivatives. We refer to this case as “I-DNS” as it corresponds to a case where the only filtering comes from the interpolation and the finite difference scheme ;

ii) we interpolate the velocity on the same regular grid as the one of experimental data, and then compute $\delta \omega_i$ using the same procedure as for experimental data, i.e.

Case	TPIV	F-PTV	G-DNS	I-DNS
ℓ/η	15	3.8	{0.7, 1.9, 3, 3.7}	0.54

Table 2: Filtering scales ℓ for each dataset non dimensionalized by the corresponding Kolmogorov scale η .

convolution with the derivative of a gaussian filter for space derivative. We refer to this case as “G-DNS”.

All the corresponding scales studied in this article are summarized in table 2.

3.3. Structure and dynamics of regions with large $\delta\omega$ “deviation with respect to Navier-Stokes equations”.

Figure 2b (resp. Figure 2d) shows the norm of $\delta\omega_i$ for the TPIV data (resp. F-PTV data) in the plane including the rotation axis. In both cases, one observes isolated coherent patches, where $\|\delta\omega\|$ takes very large values. The location of the patches is globally the same for the two cases, the F-PTV displaying finer details as it corresponds to data with higher resolution. Moreover, the patches are coherent in time over more than ten experimental snapshots, *i.e.* $10\delta t = 0.55\tau_\eta$ for experimental dataset, as can be seen from the movie provided in supplementary material. The patches shape coherent structures and their dynamics ensure that they are not random noise. In most cases, the movement is following the local large scale velocity field, but we have observed events when the patches move differently from the local flow, showing that there are underlying complex nonlinear dynamics.

Finally, a last indication that the zones of large $\delta\omega$ are not due to experimental noise comes from our analysis of the DNS data. Figure 3b (resp. Figure 3d) shows the norm of $\delta\omega_i$ for the I-DNS data (resp. G-DNS data). One can see similar coherent structures to those observed in the experiment case, with comparable sizes.

3.4. Statistical study of zones of large “deviation with respect to Navier-Stokes equations”

In order to avoid any side effect problems, we decide to crop the volume of investigation. Then for the statistics, we consider physical quantities belonging to the subvolume where we remove respectively 10 pixels for F-PTV, 5 pixels for TPIV and 5 pixels for DNS dataset.

For TPIV and F-PTV, in order to ensure a good statistical decorrelation, we consider the quantities of interest at every 200 snapshots, which corresponds to $\delta t = 11\tau_k$, where τ_k is the characteristic time related to the Kolmogorov scale.

For the DNS, we study different filtering scales in order to quantify the impact of the filter on the subgrid scale tensor. In experiment, as we already mentioned, the measurement chain applies its own filter. Hence, the reconstruction methods affect the resolution. By comparing the two reconstruction methods (TPIV *vs.* F-PTV), one can study the contribution of the resolution on physical quantities in a better way than by modifying the filter shape ℓ . The latter is mathematically constrained on one side by the edge of the domain (the major contribution of the gaussian function has to be inside the volume) and on the other side by the experimental resolution (it is useless to filter under the experimental resolution).

In Figure 4b, we compute the Probability Density Function (PDF) for x -component

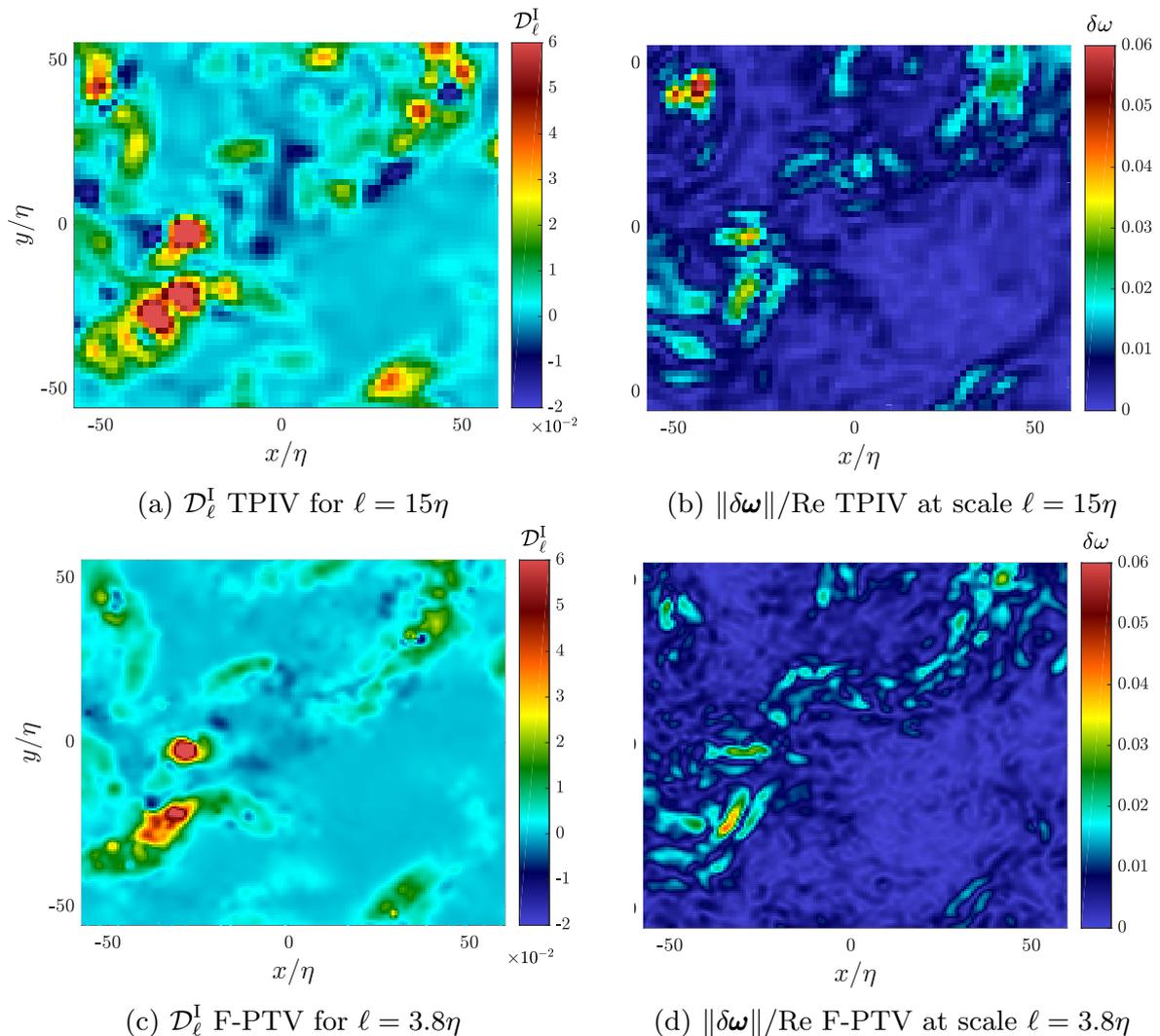


Figure 2: (left) \mathcal{D}_ℓ^I and (right) $\|\delta\omega\|/\text{Re}$ from experimental dataset, computed on a plane containing the axis of the cylinder.

of $\delta\omega$ that is normalized by its standard deviation and centered on its mean value (standardization). As a comparison, we show in Figure 4a the same PDF without normalization. Figures 9 and 10 in appendice show the PDF for the 3 components of $\delta\omega$ and all cases, with and without standardization.

As we can notice, in Figure 4b, all the normalized PDF for filtered quantities follow the same universal curve. Nevertheless, for the I-DNS case, the curve does not follow perfectly this universality as seen in the insert of Figure 4b (and again in the insert Figure 9) showing a small tip in values near zero. This field is resolved beyond Kolmogorov scale and may confirm the idea that some underlying events occur with a different physical behaviour.

3.5. Correlations with physical quantities

3.5.1. Comparison with large velocity gradients

If the areas of large $\delta\omega$ are not related to noise, they must be the signature of a physical process occurring within the flow near the Kolmogorov scale. A first remark is that the notion of ‘‘Kolmogorov’’ scale is ambiguous due to intermittency widely questioned in Nelkin (1974); Paladin & Vulpiani (1987) and experimentally debated in Dubrulle (2019). Indeed, the Kolmogorov scale is based on the energy transfer rate ϵ that is not

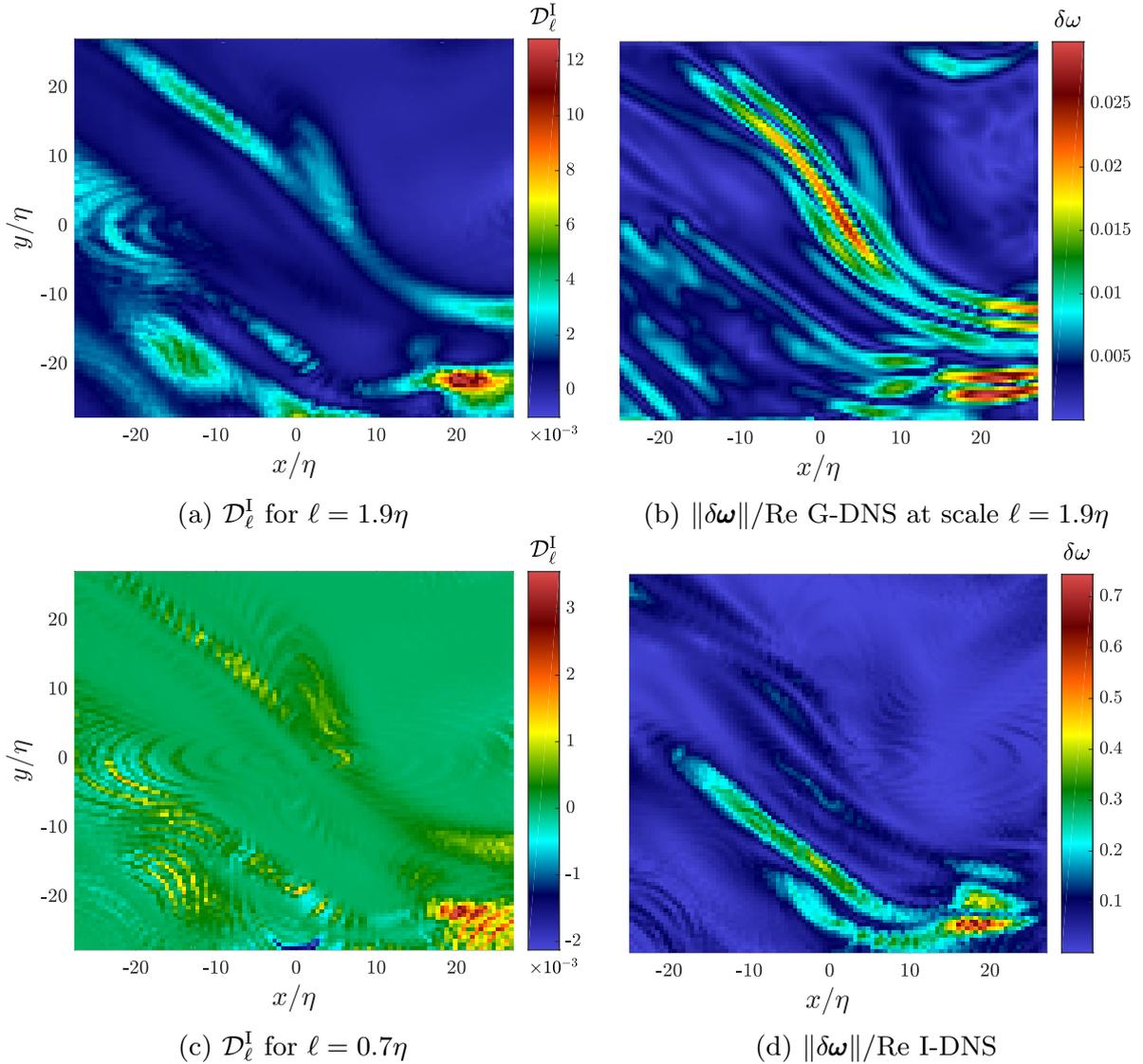


Figure 3: (left) \mathcal{D}_ℓ^I and (right) $\|\delta\omega\|/\text{Re}$ from numerical dataset, computed on a plane containing the axis of the cylinder.

homogenous in space and time, but rather displays large deviations and intermittent bursts as taken into account by Kolmogorov in his refined theory (Kolmogorov 1962). As a result, the corresponding local dissipative scale becomes much smaller than the Kolmogorov scale computed with the mean dissipation in areas where the energy dissipations, hence the velocity gradients, are larger. In those locations and if the resolution is not high enough, the velocity field observed is under-resolved, highlighting coarse grained properties and deviation to the Navier-Stokes model.

3.5.2. Comparison with energy transfer \mathcal{D}_ℓ^I at scale ℓ

Another physical interpretation comes from the local scale-to-scale energy budget derived from the Navier-Stokes equations by Dubrulle (2019) based on the work of Duchon & Robert (2000).

Let us consider the filtered version of any field u_i by:

$$\mathbf{u}^\ell(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{r} \phi_\ell(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t), \quad (3.5.1)$$

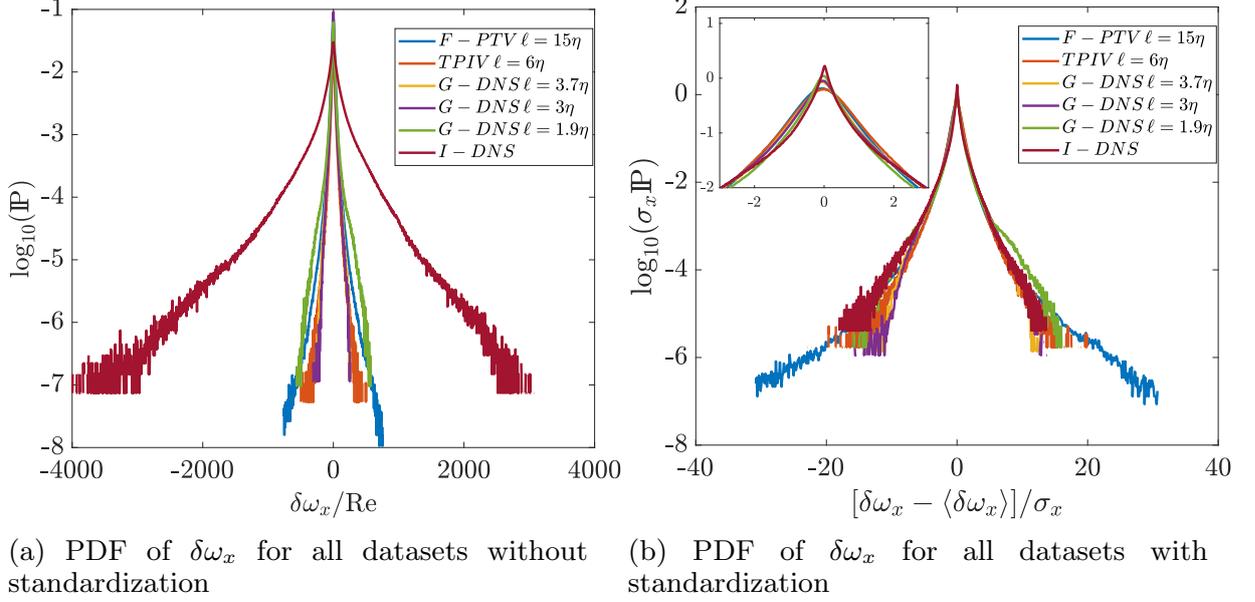


Figure 4: PDF of the $\delta\omega_x$ component, G-DNS refers to numerical datas where derivatives of the velocity field are obtained in a filtered form, TPIV and F-PTV refers to experimental datas. The quantity $\delta\omega_z$ obtained with G-DNS, F-PTV and TPIV are computed in a similar manner. The numerical case I-DNS corresponds to $\delta\boldsymbol{\omega}$ field obtained with finite difference from velocity field interpolated from DNS unstructured grid to a structured grid with spatial step η . Both F-PTV and TPIV experimental datas are obtained with two different reconstruction technics from the same experimental raw datas, F-PTV being more resolved than TPIV. (left) No standardization is performed. (right) All the PDF are centered and reduced.

where $\phi_\ell(\mathbf{r})$ is defined with its mother-function $\phi(\mathbf{r}) \equiv C \exp(-\mathbf{r}/2a)$ by $\phi_\ell(\mathbf{r}) = \ell^{-3}\phi(\mathbf{r}/\ell)$.

The budget equation for the energy $E^\ell \equiv u_i u_i^\ell / 2$ reads:

$$\partial_t E^\ell + \partial_j J_j = -\mathcal{D}_\ell^I - \mathcal{D}_\ell^\nu, \quad (3.5.2)$$

with

$$J_i = u_i E^\ell + \frac{1}{2}(p^\ell u_i + p u_i^\ell) + \frac{1}{4}([u_i u_j u_j]^\ell - u_i [u_j u_j]^\ell) - \nu \partial_i (u_i^\ell \partial_j u_i - u_i \partial_j u_i^\ell), \quad (3.5.3)$$

$$\mathcal{D}_\ell^I = \frac{1}{4} \int d\xi \nabla \phi^\ell(\xi) \cdot \delta_\xi \mathbf{u} (\delta_\xi \mathbf{u})^2, \quad (3.5.4)$$

$$\mathcal{D}_\ell^\nu = \frac{\nu}{2} \int d\xi \nabla^2 \phi^\ell(\xi) (\delta_\xi \mathbf{u})^2, \quad (3.5.5)$$

where ϕ_ℓ is a suitable filter at scale ℓ and $\delta_\xi \mathbf{u}$ is the velocity increment computed over a given distance ξ . Note that we have corrected a typo in the expression of J_i with respect to the original equations of Dubrulle (2019), signaled to us by David Dumont. In this energy budget, \mathcal{D}_ℓ^I is a local energy transfer term, while \mathcal{D}_ℓ^ν is a local dissipation term due to viscosity. As discussed in Dubrulle (2019), the local energy transfer \mathcal{D}_ℓ^I supersedes the dissipation term \mathcal{D}_ℓ^ν as long as the scale is above the local dissipative scale, and becomes negligible below. This suggests that deviations from the Navier-Stokes equations *i.e.* to the coarse-grained model, should be correlated to local energy transfers *i.e.* $\|\delta\boldsymbol{\omega}\|$ should be correlated with \mathcal{D}_ℓ^I . This looks indeed the case for the largest events both for

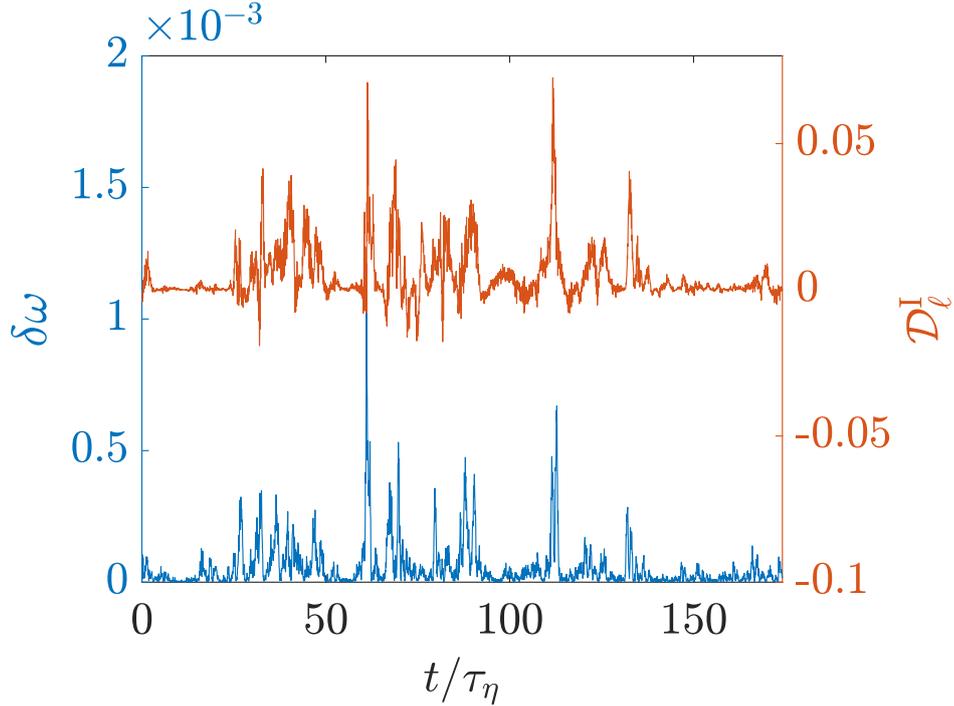


Figure 5: Time series of the value of the considered quantity left axis (blue curve) $\delta\omega/\text{Re}$, right axis (orange curve) \mathcal{D}_ℓ^I . Time series of quantities for TPIV reconstruction at central location of the volume.

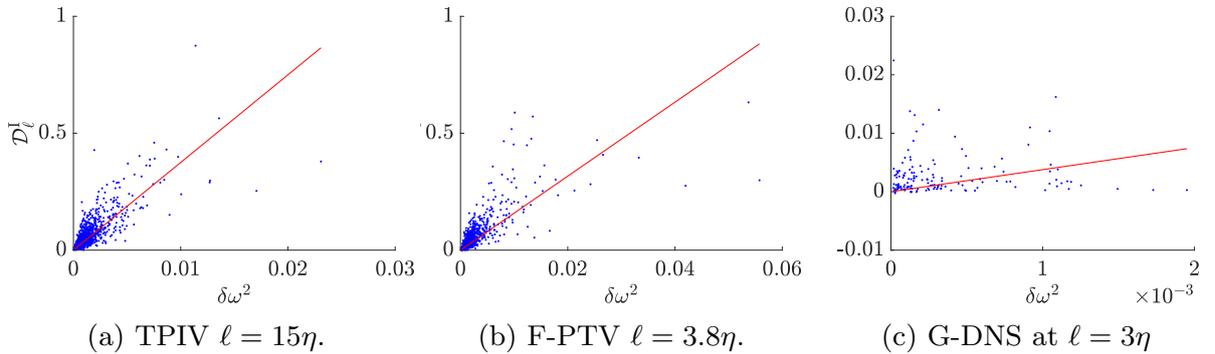


Figure 6: Scatter plot of the maximum of $\delta\omega^2$ every time step and the corresponding local maximum of \mathcal{D}_ℓ^I in the vicinity. The line corresponds to a linear fit $y = a \cdot x$ of this set of points with coefficient $a = 15.8$ for TPIV, $a = 37.5$ for F-PTV and $a = 3.8$ for G-DNS at resolution $\ell = 3\eta$.

instantaneous flows, as can be seen in Figure 2a (with respect to 2b) and 2c (with respect to 2d), and for the dynamics, as can be seen in the supplementary movie. This might be due to the fact that F-PTV data, although better spatially resolved, are subject to more experimental temporal filtering than TPIV data, due to the preliminary Lagrangian filtering.

Focusing now on the TPIV data, we observe that the correlation between $\|\delta\omega\|$ and \mathcal{D}_ℓ^I only holds for the largest events, with a small spatial shift. There is however a strong temporal correlation between largest values of those two quantities, as can be seen in Figure 5, where the time series of the maximum of the quantities over the mid-plane is plotted.

One observes intermittent burst of $\delta\omega$, corresponding to bursts of \mathcal{D}_ℓ^I . The correlation

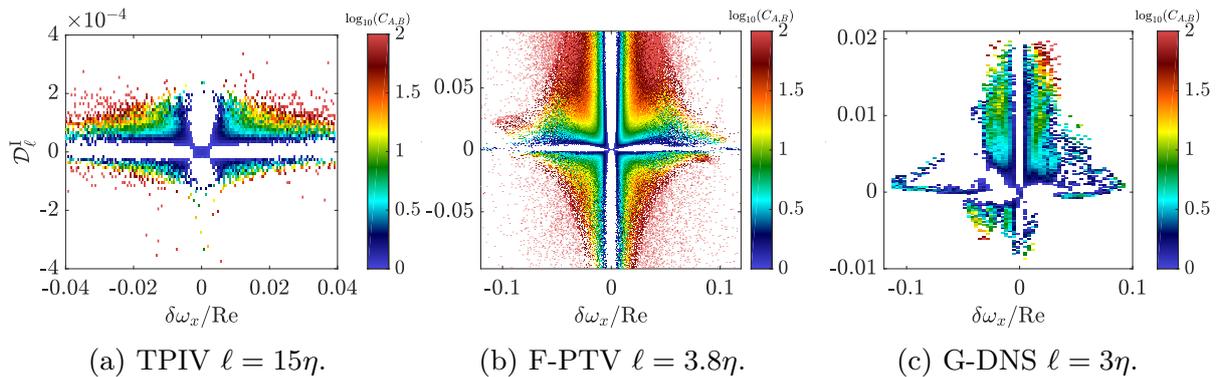


Figure 7: Correlation term $C_{\delta\omega_x, \mathcal{D}_\ell^I}$ between x component of $\delta\boldsymbol{\omega}$ and \mathcal{D}_ℓ^I both at the same filtration scale ℓ . The color scale shows the log value and only the positive part of it for each dataset, the full correlation map with positive and negative part and for each component is available in the Supplementary Material section.

can be further evidenced by comparing the instantaneous maximum of $\delta\omega$, as a function of the value of \mathcal{D}_ℓ^I at the corresponding location. Due to the observed spatial shift, we consider the maximum value of \mathcal{D}_ℓ^I in the vicinity of the location of $\|\delta\boldsymbol{\omega}\|$ shown in Figure 6. One can see a clear correlation between the two quantities for both reconstruction methods. We perform the same computation on our numerical data but, as the number of available data is quite low, the correlation is not able to reveal a net link between $\delta\omega$ and \mathcal{D}_ℓ^I . Therefore, large events of $\delta\omega$ and large events of \mathcal{D}_ℓ^I are correlated. However, lower values of $\delta\omega$ and \mathcal{D}_ℓ^I are more likely to happen and may blur important information. That is why, we focus on the correlation between large events of these two quantities and define the correlation coefficient introduced in Eq. (3.5.6) between $\delta\omega_i$ and \mathcal{D}_ℓ^I :

$$C_{\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I} = \frac{p(\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I)}{p(\delta\omega_i)p(\mathcal{D}_\ell^I)}, \quad (3.5.6)$$

where $p(\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I)$ is the joint probability density function of the i^{th} component of $\delta\boldsymbol{\omega}$ and \mathcal{D}_ℓ^I , $p(\delta\omega_i)$ and $p(\mathcal{D}_\ell^I)$ the probability density function respectively of the i^{th} component of $\delta\boldsymbol{\omega}$ and \mathcal{D}_ℓ^I .

If the two quantities are completely decorrelated, $C_{\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I}$ is equal to 1. Therefore deviations from unity reveal correlation. We plot the quantity $\log_{10}(C_{\delta\omega_x, \mathcal{D}_\ell^I})$ for TPIV (Figure 7a), F-PTV (Figure 7b) and G-DNS (Figure 7c).

We provide in supplementary material the same figure for all individual components. Small values of $\delta\omega_i$ and \mathcal{D}_ℓ^I appear uncorrelated in both experimental cases. This is not unexpected, as these values are likely to be polluted by experimental noise. On the other hand, large values are clearly correlated in all cases, thereby confirming the previous analysis.

4. Discussion

We have studied for the first time in an experimental flow the subgrid tensor at the Kolmogorov scale derived from the Navier-Stokes equations of filtered data. We have seen that even at such small scales, these subgrid stress terms can take very large values. We have moreover shown that these large values are correlated with a remaining inter-scale energy transfer \mathcal{D}_ℓ^I that has not yet reached the dissipative scale and thus, which is not regularized by viscosity. While our observation is not surprising for anyone aware

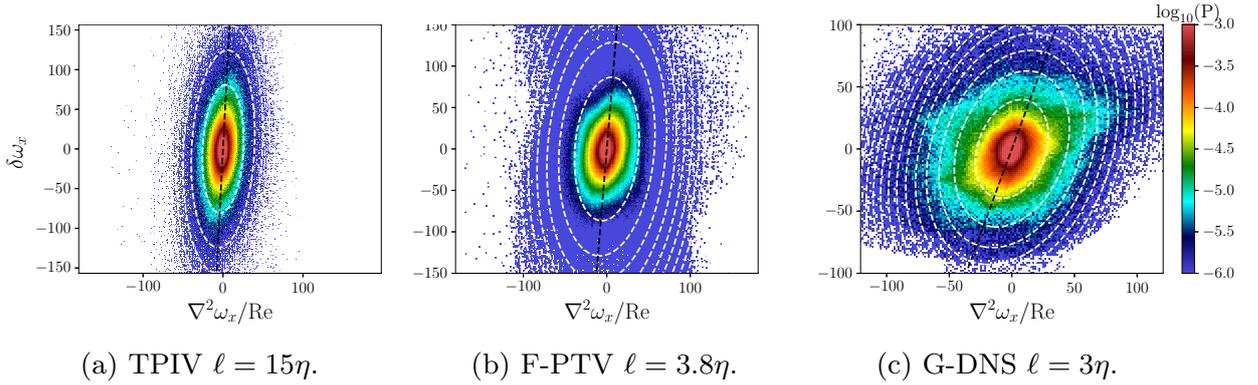


Figure 8: Joint PDF between $\nabla^2\omega_x/\text{Re}$ and $\delta\omega_x$ for each dataset. White dashed curves are the contour plots of the best gaussian fit defined at Eq. (4.2) at level sets linearly distributed. Black lines are the lines corresponding to the best correlation with slope α_i^T reported in table 3, defined as the major axis of the ellipse used in the fit. All these plots share the same colorbar, all joint PDF for each component are available in the appendix section.

of intermittency, it sets the problem of dealing with such events, in case one would like to spare the computational burden linked with global or local mesh refinements. If these events indeed correspond to velocity gradients that are not yet regularized by viscosity, and if the Reynolds number is large enough, we may consider that there is a kind of decorrelation between the Kolmogorov scale computed from the mean dissipation and the actual dissipative scales. In that case, it is meaningful to add new terms in the Navier-Stokes equations that take into account the rise of local dissipation associated to such events. In our case, where the flow is anisotropic, we could have for example a situation where each component of $\delta\omega$ is proportional to the viscous term $\nabla^2\omega$, as it is done in the turbulent viscosity model:

$$\delta\omega_i = \alpha_i^T \frac{\nabla^2\omega_i}{\text{Re}}. \quad (4.1)$$

This is of course an oversimplified assumption, as theoretically, the eddy viscosity is a fourth-order tensor (Dubrulle & Frisch 1991). Even with these simplifications, we can observe that there is actually a component by component correlation between $\delta\omega_i$ and $\nabla^2\omega_i$, as observed on joint PDFs, see Figure 8 and also Figure 14. In order to focus on extreme events, it appears more likely to use an elliptical fit as developed in Eq. (4.2).

The fit is given as a Gaussian shape of elliptical function governed by three parameters a , b and c and the amplitude by the coefficient p . All the computed coefficients a , b , c and p resulting from the optimization process are available in table 5. We also computed the fit error as the \mathbb{L}^2 norm of the difference between the joint PDF and its fit, normalized by the maximum value of the joint PDF and referred to this table as the parameters e_i^{fit} :

$$W(x, y) = p \times \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 - bxy - \frac{c}{2}y^2\right) \quad (4.2)$$

This formula is well suited to describe all possible shapes.

From the joint PDFs, we can estimate the values of the best correlation α_i^T by the major axis of the ellipse used in Eq. (4.2). The corresponding values are reported in table 3.

Adding a global, turbulent viscosity to the data is however not a satisfying solution, as it does not take into account the localized in space and time character of the

Case	TPIV	F-PTV	G-DNS
α_1^T	19.1	12.1	2.7
α_2^T	17.3	14.2	2.6
α_3^T	11.3	7.7	2.7

Table 3: Slopes for TPIV ($\ell = 15\eta$), F-PTV ($\ell = 3.8\eta$) and G-DNS ($\ell = 3\eta$).

deviations from the Navier-Stokes equations. In that respect, a better solution could be to use another LES-like technique, called entropy viscosity (Guermond & Pasquetti 2011; Guermond *et al.* 2011, 2006). This method is rooted on the notion of so-called suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, which is strongly connected with the local energy balance written in Eq. (3.5.2). It consists in the addition of a local viscosity proportional to the residual of the local kinetic energy balance. This artificial viscosity is added to the Navier-Stokes equations under a flux like shape $\nabla \cdot (\nu_E \nabla \mathbf{u})$, resulting in a nonlinear diffusion proportional to the local energy imbalance. Given the correlation we observed between $\delta \boldsymbol{\omega}$ and \mathcal{D}_ℓ^I , this solution indeed looks like physically consistent and has the advantage of being deprived of adjustable parameters. We have recently tested it in simulations of a von Kármán flow at Reynolds numbers $2500 \leq Re \leq 10^5$ and obtained excellent agreement with experimental results (Cappanera *et al.* 2021). Its generalization to other geometries should not be a big issue.

In summary, we have found that even at Kolmogorov scale, there is a non-negligible viscous stress in the vorticity equation. This means that even at resolution $k_{\max} \eta = 1.5$, one needs to add a subgrid model to capture the right physics. For this, viscosity entropy method seems the more appropriate.

Acknowledgement. This work has been funded by the ANR, project EXPLOIT, grant agreement no. ANR-16-CE06-0006-01, and project ECOUTURB grant agreement no. ANR-16-CE30-0016. This work has also been founded by the Funding agency LabEx PALM Investissement d’Avenir under the grant number ANR-10-LABX-0039-PALM. Access to the HPC resources were provided by IDRIS (institut du développement et des ressources en informatique scientifique) under the allocation 2021-0254 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif). The LMFL authors acknowledge the CNRS Research Federation on Ground Transports and Mobility, in articulation with the Elsat2020 project supported by the European Community, the French Ministry of Higher Education and Research, the Hauts de France Regional Council for the PIV equipments used in the experiments.

Declaration of Interests. The authors report no conflict of interest.

REFERENCES

- ATKINSON, CALLUM & SORIA, JULIO 2009 An efficient simultaneous reconstruction technique for tomographic particle image velocimetry. *Exp Fluids* **47** (4-5), 553–568.
- BOUSSINESQ, JOSEPH 1877 *Essai sur la thorie des eaux courantes*. Paris: Imprimerie nationale.
- BUARIA, DHAWAL & SREENIVASAN, KATEPALI R. 2020 Dissipation range of the energy spectrum in high Reynolds number turbulence. *Phys. Rev. Fluids* **5** (9), 092601.
- CAPPANERA, L, DEBUE, P, FALLER, H, KUZZAY, D, SAW, EW, NORE, C, GUERMOND, J-L, DAVIAUD, F, WIERTEL-GASQUET, C & DUBRULLE, B 2021 Turbulence in realistic geometries with moving boundaries: when simulations meet experiments. *Computers & Fluids* **214**, 104750.

- CHEMINET, ADAM, OSTOVAN, YASAR, VALORI, VALENTINA, CUVIER, CHRISTOPHE, DAVIAUD, FANOIS, DEBUE, PAUL, DUBRULLE, BRENGRE, FOUCAUT, JEAN-MARC & LAVAL, JEAN-PHILIPPE 2021 Optimization of regularized b-spline smoothing for turbulent lagrangian trajectories. *Experimental Thermal and Fluid Science* **127**, 110376.
- DEBUE, PAUL 2019 Experimental approach to the problem of the Navier-Stokes singularities. Theses, Université Paris Saclay (COmUE).
- DEBUE, P., SHUKLA, V., KUZZAY, D., FARANDA, D., SAW, E.-W., DAVIAUD, F. & DUBRULLE, B. 2018 Dissipation, intermittency, and singularities in incompressible turbulent flows. *Phys. Rev. E* **97**, 053101.
- DONZIS, D. A., YEUNG, P. K. & SREENIVASAN, K. R. 2008 Dissipation and enstrophy in isotropic turbulence: Resolution effects and scaling in direct numerical simulations. *Physics of Fluids* **20** (4), 045108.
- DUBRULLE, B. 2019 Beyond Kolmogorov cascades. *Journal of Fluid Mechanics* **867**, P1.
- DUBRULLE, BÉRENGERE & FRISCH, URIEL 1991 Eddy viscosity of parity-invariant flow. *Physical Review A* **43** (10), 5355.
- DUCHON, JEAN & ROBERT, RAOUL 2000 Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible euler and navier-stokes equations. *Nonlinearity* **13** (1), 249–255.
- DUVVURI, SUBRAHMANYAM & MCKEON, BEVERLEY J. 2015 Triadic scale interactions in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **767**, R4.
- FOUCAUT, J M, CARLIER, J & STANISLAS, M 2004 PIV optimization for the study of turbulent flow using spectral analysis. *Meas. Sci. Technol.* **15** (6), 1046–1058.
- FRISCH, U. 1996 . In Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press.
- GESEMANN, SEBASTIAN 2015 From Particle Tracks to Velocity and Acceleration Fields Using B-Splines and Penalties. *arXiv:1510.09034 [physics]* ArXiv: 1510.09034.
- GOTOH, TOSHIYUKI, FUKAYAMA, DAIGEN & NAKANO, TOHRU 2002 Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation. *Physics of Fluids* **14** (3), 1065–1081.
- GUERMOND, J.-L., MARRA, A. & QUARTAPELLE, L. 2006 Subgrid stabilized projection method for 2D unsteady flows at high Reynolds numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195** (44), 5857–5876.
- GUERMOND, JEAN-LUC & PASQUETTI, RICHARD 2011 Entropy viscosity method for high-order approximations of conservation laws. In Spectral and high order methods for partial differential equations, pp. 411–418. Springer.
- GUERMOND, JEAN-LUC, PASQUETTI, RICHARD & POPOV, BOJAN 2011 From suitable weak solutions to entropy viscosity. In Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations II, pp. 373–390. Springer.
- ISHIHARA, TAKASHI, KANEDA, YUKIO, MORISHITA, KOJI, YOKOKAWA, MITSUO & UNO, ATSUYA 2020 Second-order velocity structure functions in direct numerical simulations of turbulence with $\{R\}_{\lambda}$ up to 2250. *Phys. Rev. Fluids* **5** (10), 104608.
- ISHIHARA, TAKASHI, KANEDA, YUKIO, YOKOKAWA, MITSUO, ITAKURA, KEN'ICHI & UNO, ATSUYA 2005 Energy Spectrum in the Near Dissipation Range of High Resolution Direct Numerical Simulation of Turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan* **74** (5), 1464–1471.
- ISHIHARA, T., KANEDA, Y., YOKOKAWA, M., ITAKURA, K. & UNO, A. 2007 Small-scale statistics in high-resolution direct numerical simulation of turbulence: Reynolds number dependence of one-point velocity gradient statistics. *Journal of Fluid Mechanics* **592**, 335–366.
- KOLMOGOROV, A. N. 1962 A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* **13** (1), 8285.
- MARI, LOUIS 2003 Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un coulement tourbillonnaire turbulent: Influence de la Rotation. PhD thesis, Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris.
- MARTNEZ, D. O., CHEN, S., DOOLEN, G. D., KRAICHNAN, R. H., WANG, L.-P. & ZHOU, Y. 1997 Energy spectrum in the dissipation range of fluid turbulence. *Journal of Plasma Physics* **57** (1), 195–201.

- NELKIN, MARK 1974 Turbulence, critical fluctuations, and intermittency. *Physical Review A* **9** (1), 388.
- NORE, C., CASTANON QUIROZ, D., CAPPANERA, L. & GUERMOND, J.-L. 2018 Numerical simulation of the von Kármán sodium dynamo experiment. *Journal of Fluid Mechanics* **854**, 164195.
- PALADIN, GIOVANNI & VULPIANI, ANGELO 1987 Anomalous scaling laws in multifractal objects. *Physics Reports* **156** (4), 147–225.
- PASQUETTI, R., BWEMBA, R. & COUSIN, L. 2008 A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows. *Appl. Numer. Math.* **58** (7), 946–954.
- RAFFEL, MARKUS, ed. 2007 *Particle image velocimetry: a practical guide*, 2nd edn. Heidelberg ; New York: Springer.
- RAVELET, F., CHIFFAUDEL, A. & DAVIAUD, F. 2008 Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Kármán closed flow. *J. Fluid Mech.* **601**, 339–364.
- RAVELET, FLORENT, MARI, LOUIS, CHIFFAUDEL, ARNAUD & DAVIAUD, FRANOIS 2004 Multistability and Memory Effect in a Highly Turbulent Flow: Experimental Evidence for a Global Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.* **93** (16), 164501.
- REMMLER, SEBASTIAN & HICKEL, STEFAN 2013 Spectral structure of stratified turbulence: direct numerical simulations and predictions by large eddy simulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **27** (3-4), 319–336.
- SAW, E.-W., DEBUE, P., KUZZAY, D., DAVIAUD, F. & DUBRULLE, B. 2018 On the universality of anomalous scaling exponents of structure functions in turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **837**, 657–669.
- SAW, E.-W., KUZZAY, D., FARANDA, D., GUITTONNEAU, A., DAVIAUD, F., WIERTEL-GASQUET, C., PADILLA, V. & DUBRULLE, B. 2016 Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow. *Nature Communications* **7** (12466).
- SCARANO, F 2013 Tomographic PIV: principles and practice. *Meas. Sci. Technol.* **24** (1), 012001.
- SCHANZ, DANIEL, GESEMANN, SEBASTIAN & SCHRDER, ANDREAS 2016 Shake-The-Box: Lagrangian particle tracking at high particle image densities. *Exp Fluids* **57** (5), 70.
- SCHUMACHER, J., SREENIVASAN, K. R. & YEUNG, P. K. 2005 Very fine structures in scalar mixing. *J. Fluid Mech.* **531**, 113–122.
- WALEFFE, FABIAN 1992 The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **4** (2), 350–363.
- WANG, LIAN-PING, CHEN, SHIYI, BRASSEUR, JAMES G. & WYNGAARD, JOHN C. 1996 Examination of hypotheses in the Kolmogorov refined turbulence theory through high-resolution simulations. Part 1. Velocity field. *J. Fluid Mech.* **309**, 113–156.
- YAKHOT, VICTOR & SREENIVASAN, KATEPALLI R. 2005 Anomalous Scaling of Structure Functions and Dynamic Constraints on Turbulence Simulations. *Journal of Statistical Physics* **121** (5-6), 823–841.
- YEUNG, P. K., DONZIS, D. A. & SREENIVASAN, K. R. 2012 Dissipation, enstrophy and pressure statistics in turbulence simulations at high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **700**, 5–15.

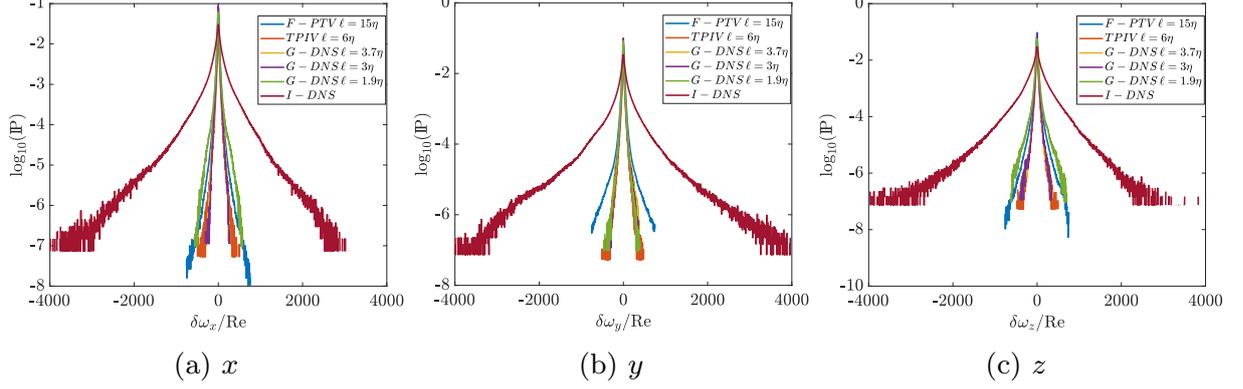


Figure 9: PDF of the $\delta\omega$ term for all components, G-DNS refers to numerical datas where derivatives of the velocity field are obtained in a filtered form, TPIV and F-PTV refers to experimental datas. The quantity $\delta\omega_z$ obtained with G-DNS, F-PTV and TPIV are computed in a similar manner. The numerical case I-DNS corresponds to $\delta\omega$ field obtained with finite difference from velocity field interpolated from DNS unstructured grid to a structured grid with spatial step η . Both F-PTV and TPIV experimental datas are obtained with two different reconstruction technics from the same experimental raw datas, F-PTV being more resolved than TPIV. No standardization is performed.

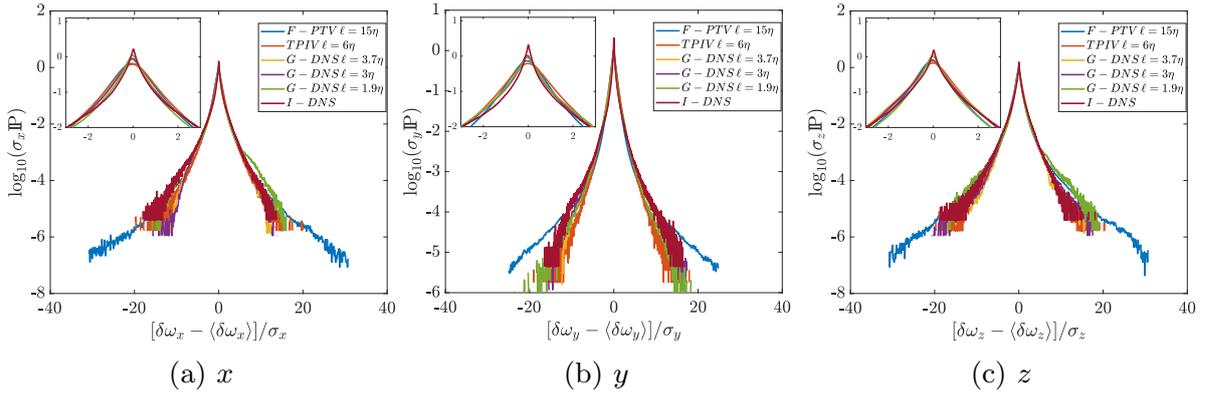


Figure 10: PDF of the $\delta\omega$ term for all components, G-DNS refers to numerical datas where derivatives of the velocity field are obtained in a filtered form, TPIV and F-PTV refers to experimental datas. The quantity $\delta\omega_z$ obtained with G-DNS, F-PTV and TPIV are computed in a similar manner. The numerical case I-DNS corresponds to $\delta\omega$ field obtained with finite difference from velocity field interpolated from DNS unstructured grid to a structured grid with spatial step η . Both F-PTV and TPIV experimental datas are obtained with two different reconstruction technics from the same experimental raw datas, F-PTV being more resolved than TPIV. All the PDF are centered with the mean value and reduced by the standard deviation.

Appendix

We performed the correlation coefficient as introduced in section 3.5.2.

We perform the statistics of $\delta\omega_i$ data reported in table 4.

For mean quantities, in absolute value, one can see that direction x and z present similar order for all the experiments. That is to say, components x and z similar and higher value for y component (corresponding to the height).

This is not surprising as there are more fluctuations in the y direction than in the direction of the mid-plane.

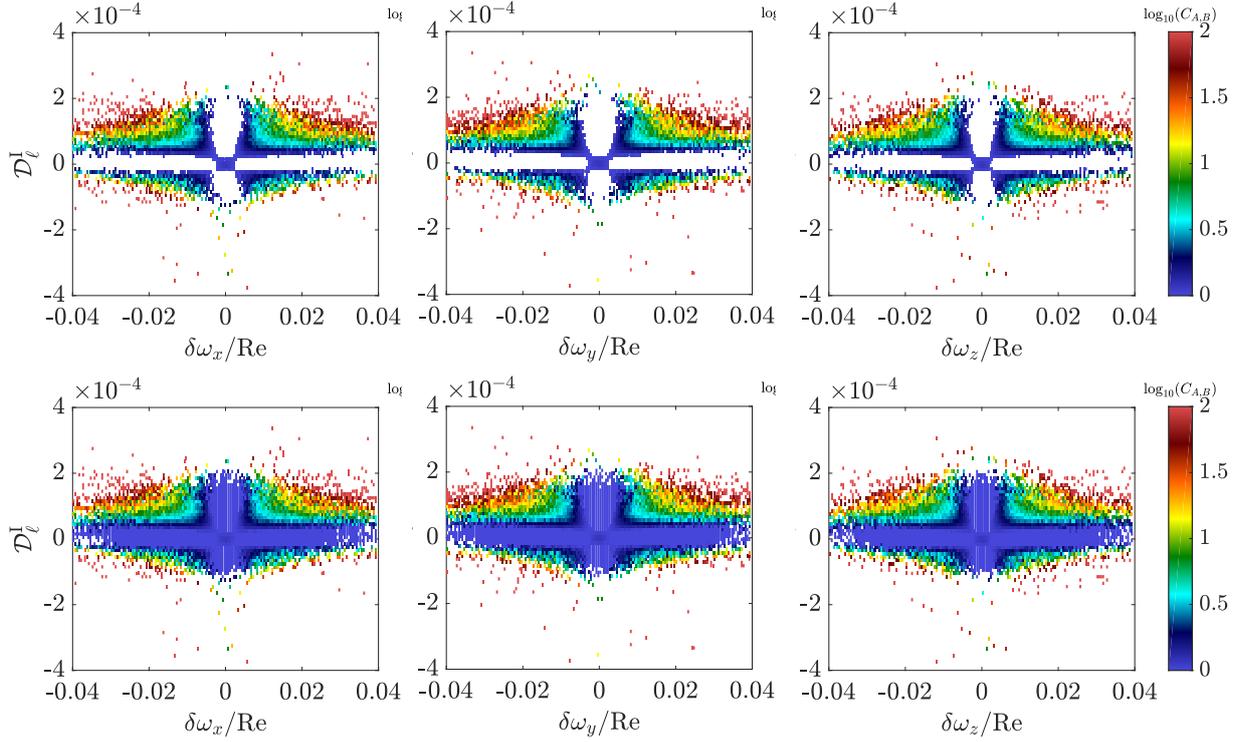


Figure 11: (*Up*) Coefficient of correlation for each component for the TPIV case. Coefficient of correlation for each component for the TPIV case. (*Down*) The part of $C_{\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I}$ below 1 is added.

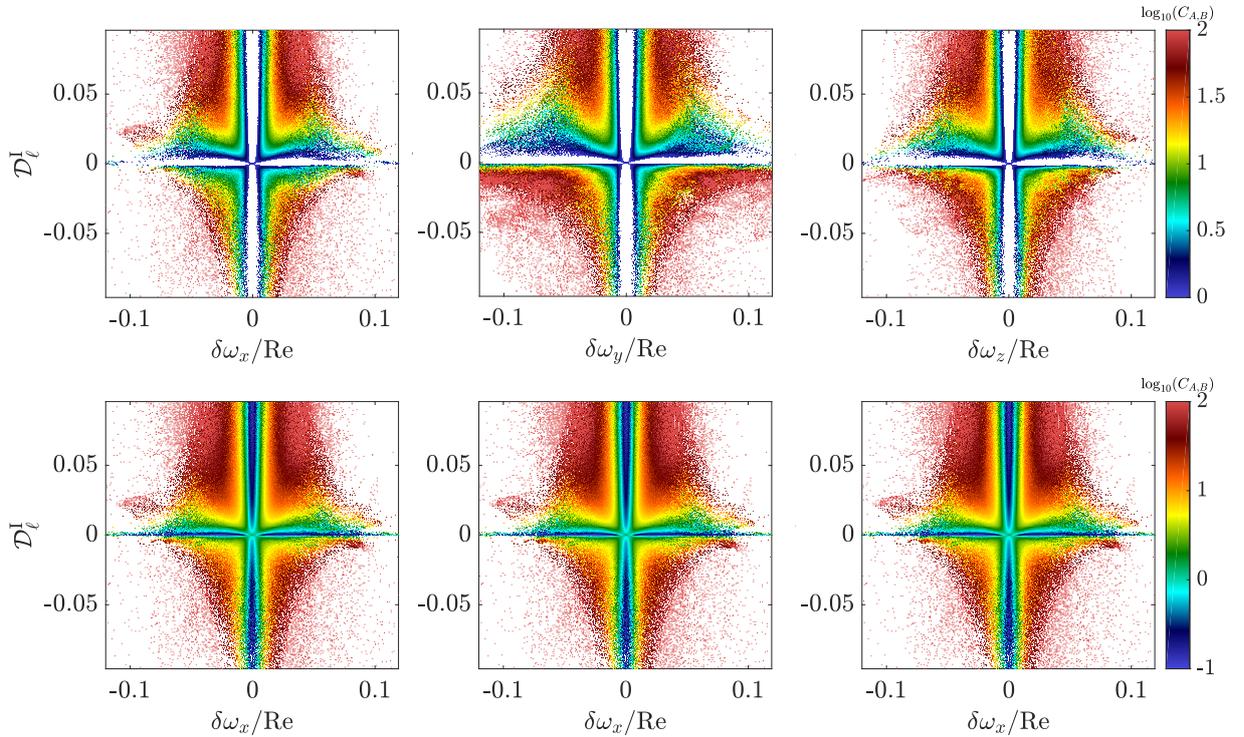


Figure 12: (*Up*) Coefficient of correlation for each component for the F-PTV case. Coefficient of correlation for each component for the F-PTV case. (*Down*) The part of $C_{\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^I}$ below 1 is added.

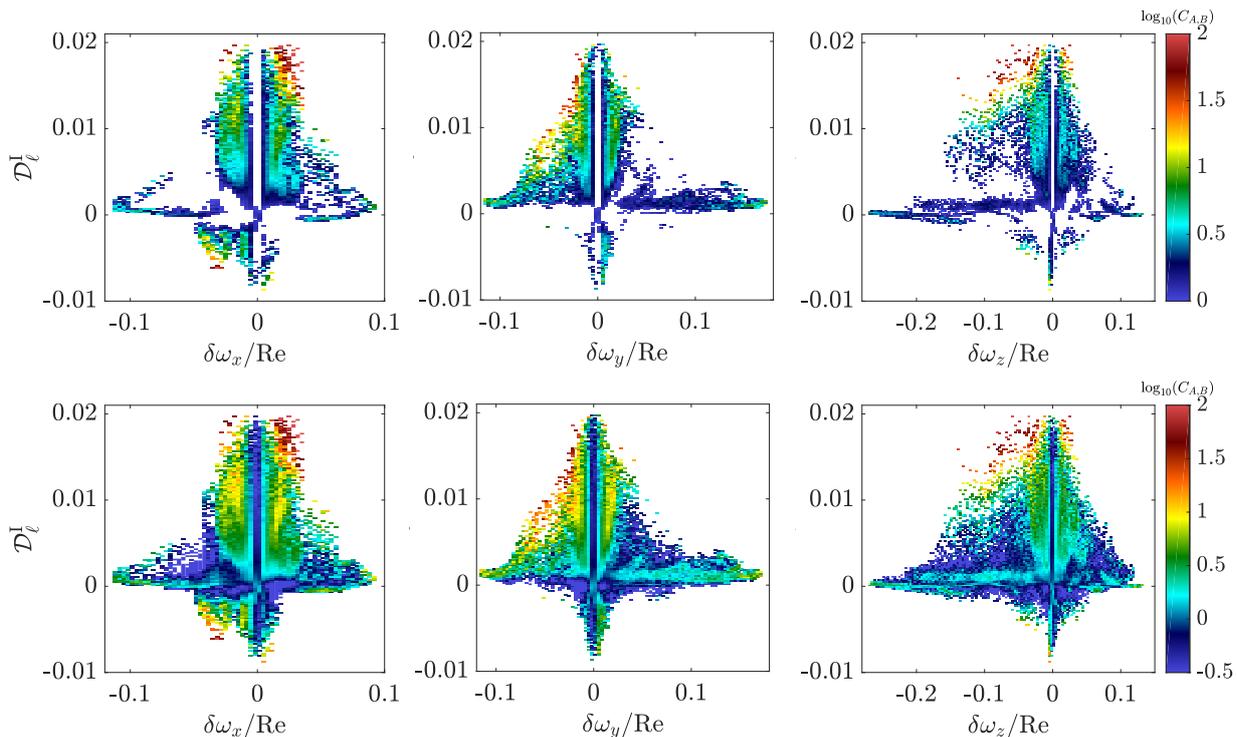


Figure 13: (*Up*) Coefficient of correlation for each component G-DNS at resolution $\ell = 3\eta$. (*Down*) Coefficient of correlation for each component G-DNS at resolution $\ell = 3\eta$. The part of $C_{\delta\omega_i, \mathcal{D}_\ell^i}$ below 1 is added.

	F-PTV TPIV		G-DNS		I-DNS	
ℓ/η	3.8	6	3.7	3	1.9	0.54
\bar{m}_x	0.04	-0.02	-0.2	-0.3	-0.5	-5
\bar{m}_y	-0.1	-0.2	-0.01	-0.03	-0.06	-4
\bar{m}_z	0.02	-0.01	-0.2	-0.3	-0.6	-7
σ_x	24	25	22	20	36	222
σ_y	30	27	24	21	22	242
σ_z	25	24	21	20	37	212

Table 4: Statistics of $\delta\omega$ for each component. \bar{m}_i and σ_i are respectively the spatial mean value and the standard deviation computed on the truncated volume for uncorrelated snapshots through all the runs.

Similarly, the standard deviation is systematically higher for y components than for the 2 others. This fact highlights the same conclusions as previously made.

The von Kármán experiment is not totally isotropic as mentioned in Mari (2003). But it is noticeable that between experiment and simulation, these statistics are of the same order (in absolute value).

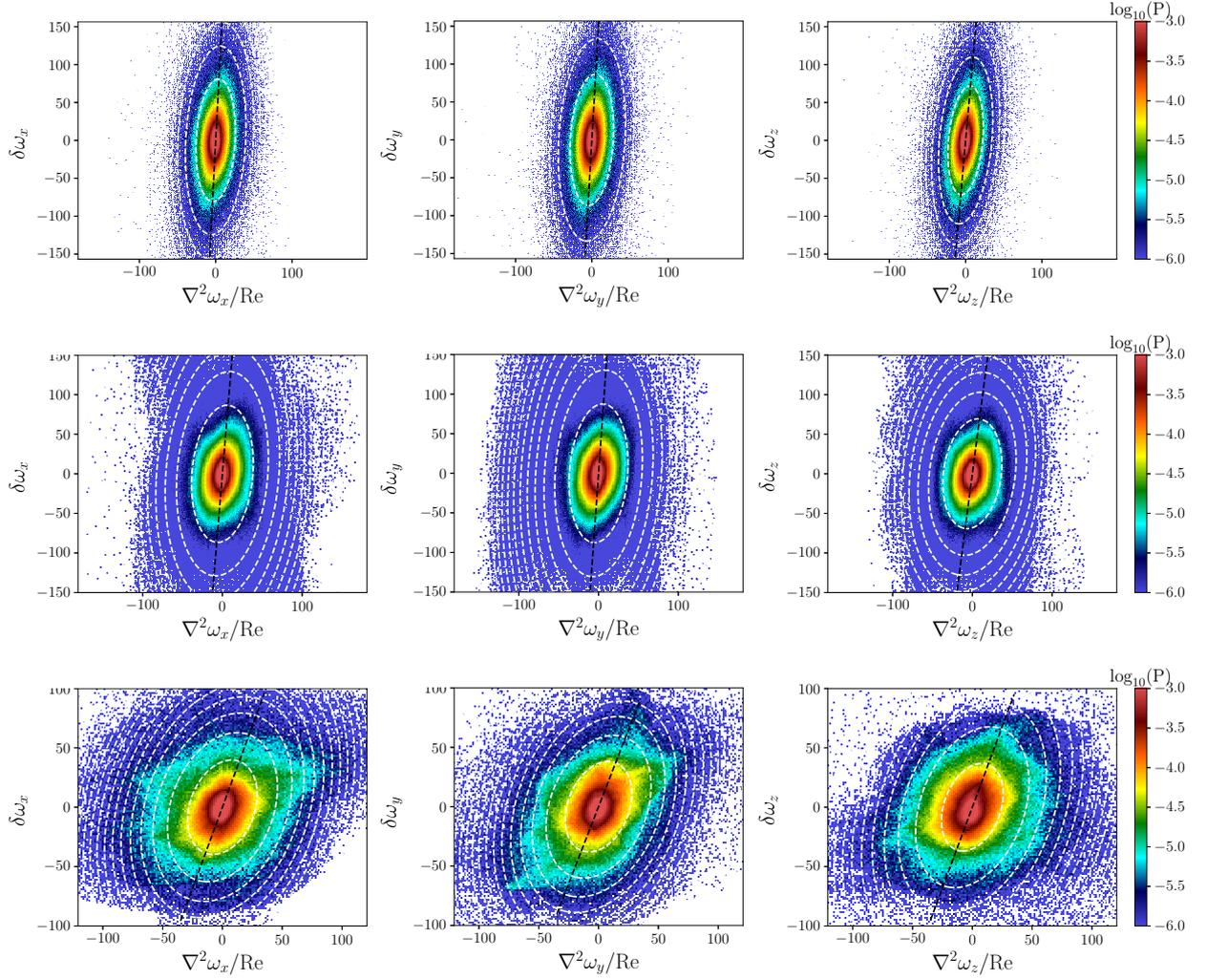


Figure 14: (*Up*) Joint PDF between $\nabla^2\omega_i/\text{Re}$ et $\delta\omega_i$ at scale $\ell = 15\eta$ for TPIV. Black lines are the lines corresponding to the best correlation with slope α_i reported in table 3. All these plots share the same colorbar. (*middle*) Joint PDF between $\nabla^2\omega_i/\text{Re}$ et $\delta\omega_i$ at scale $\ell = 3.8\eta$ for F-PTV. Black lines are the lines corresponding to the best correlation with slope α_i reported in table 3. All these plots share the same colorbar. (*down*) Joint PDF between $\nabla^2\omega_i/\text{Re}$ et $\delta\omega_i$ at scale $\ell = 3\eta$ for G-DNS. Black lines are the lines corresponding to the best correlation with slope α_i reported in table 3. All these plots share the same colorbar.

Case	TPIV	F-PTV	G-DNS
a_x	0.052	0.039	0.031
a_y	0.042	0.042	0.035
a_z	0.068	0.043	0.016
b_x	-0.0024	-0.0026	-0.0061
b_y	-0.0023	-0.0025	-0.0074
b_z	-0.0054	-0.0041	-0.0035
c_x	0.0053	0.0077	0.017
c_y	0.0046	0.0075	0.019
c_z	0.0071	0.0012	0.0079
p_x	0.0020	0.0021	0.0023
p_y	0.0017	0.0022	0.0024
p_z	0.0025	0.0027	0.0013
e_x^{fit}	0.006	0.004	0.006
e_y^{fit}	0.006	0.004	0.007
e_z^{fit}	0.005	0.003	0.008

Table 5: Coefficient of the best fit according to Eq. (4.2) for each case and each component.

4.2.2 Interaction sous-maille: conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons fait l'étude du tenseur de contraintes dans le cas de l'équation de vorticité. En particulier, nous avons étudié l'impact de la résolution sur le flux d'énergie dérivant de cette contrainte. Nous avons également étudié les relations qui existent entre cette quantité et le coefficient de transfert énergétique inter-échelles \mathcal{D}_ℓ^I .

D'une part, nous avons révélé que ces deux quantités semblent s'organiser selon des motifs similaires transportés de manière identique. Nous avons également montré que le mouvement de ces structures n'est pas systématiquement transport  par le champ de vitesse moyen mais semble soumis à des interactions plus complexes que nous n'avons pas étudié. D'autre part, une étude statistique conduite sur des données expérimentales et numériques font état d'une corrélation entre le terme d'écart à Navier-Stokes filtré et le transfert énergétique inter-échelle.

Cette étude nous a finalement conduit à étudier le modèle de corrélation sur la base d'un modèle de viscosité turbulente. Ce dernier point révèle des points intéressants et utiles pour la mise en place d'un modèle plus précis prenant en compte le transfert en fonction de l'échelle de résolution.

Le tenseur de Reynolds est donc soumis à deux contributions, la première résultant de la résolution finie - cette contribution devrait s'annuler dans le cas d'une résolution infinie - et une deuxième résultant de l'irrégularité du champ qui pourrait exister quelle que soit la résolution. De ce point de vue, nous allons développer dans la suite un nouveau modèle simple qui reprend les idées du vorton de Novikov pour étudier d'un point de vue théorique les interactions sous-maille agissant sur ce tenseur de Reynolds.

4.3 Article : A model of interacting Navier-Stokes singularities

4.3.1 Introduction

Comme nous l'avons énoncé dans la première partie, l'étude théorique des équations d'Euler permet d'envisager l'existence de singularités. On sait de plus que ces objets sont très localisés² et échappent totalement à toute résolution finie car ils ne peuvent être simulés numériquement ni visualisés expérimentalement de manière directe. L'existence de ces singularités, permise dans le cadre théorique, et la complexité de leurs descriptions dans le cas des équations d'Euler a ainsi conduit E. A. Novikov [122] à développer de nouveaux outils simples qu'il nomme "vortons". Ce sont des objets subissant une double interaction: avec l'écoulement d'une part et avec les contributions individuelles de chacun de leurs voisins d'autres parts. Ils sont définis par un vecteur $\gamma_\alpha(t)$ donnant l'amplitude et la direction et un vecteur $\mathbf{r}_\alpha(t)$ donnant la position. Initialement, ces objets ont été construits de telle sorte que le champ de vorticité soit une somme de distributions de Dirac et assure la conservation de la circulation. Le champ de vitesse, induit par ces objets, est déduit de la formule de Biot et Savart. Cependant, pour assurer la cohérence de tels objets, en particulier une divergence nulle du champ de vorticité, Novikov propose une version modifiée [123] dont la dynamique, suffisamment universelle, pourrait "imiter" de nombreux phénomènes physiques³ comme il le dit en conclusion de son article.

Néanmoins, Saffman et Meiron [148] réfutent l'idée selon laquelle ils puissent offrir une solution faible (au sens des distributions) aux équations d'Euler. Cette limite restreint leur utilisation théorique. Par ailleurs, ne vérifiant que les équations d'Euler, ils semblent mal adaptés pour répondre aux problèmes que posent les équations de Navier-Stokes.

Dans cet article, nous proposons d'introduire un nouvel objet nommé "pinçon" traduisant, dans le cas de Navier-Stokes, les idées du vorton de Novikov. Ces objets seront représentés, eux aussi, par une position $\mathbf{r}_\alpha(t)$ et une amplitude $\gamma_\alpha(t)$. L'idée du modèle se base sur une séparation du champ de vitesse par filtrage en deux parties distinctes. La première correspondant au champ sous-résolu ou champ filtré et la deuxième modélisant les zones de fortes dissipation. Les fluctuations de ce deuxième champ correspondent aux interactions sous-maille que nous proposons de modéliser avec notre modèle de pinçons. Compte tenu du caractère non-linéaire des équations de Navier-Stokes, le modèle que nous avons développé doit prendre en compte ce couplage. Ces pinçons seront donc soumis à l'influence du champ de vitesse filtré, ils seront transportés et étirés d'une part et soumis à une friction interne d'autre part.

Ce modèle, tel que nous l'avons construit, est dissipatif. Il ne peut donc pas produire

²En réalité de mesure nulle.

³En deux dimensions, ils peuvent s'apparenter aux solitons décrits initialement décrit par J. S. Russell [145], voir également [164], ils décrivent également les tourbillons quantiques observés dans l'Hélium-II [184]

spontanément d'énergie. En ceci, il vérifie la condition de "solutions faibles dissipatives" imposée par J. Duchon et R. Robert [59]. De plus, ces objets sont nécessairement instables. Ainsi, pour assurer leur survie, nous imposons l'énergie au travers d'un terme d'échange lié au tenseur de Reynolds comme le ferait un champ de vitesse filtré. On observe un équilibre entre le champ de vitesse filtré et ces événements sous-maille. Ce modèle offre un cadre théorique suffisamment simple pour l'étude des interactions qui ont lieu en dessous de l'échelle de résolution et leur impact seulement à grandes échelles ou aux échelles résolues. Il permet en pratique d'étudier séparément l'impact de ces deux contributions sur le tenseur de Reynolds et les échanges énergétiques qui en découlent.

Dans cet article, nous avons réalisé une étude numérique sur la dynamique du déclin d'une paire de pinçons dans plusieurs cas de figure en jouant à la fois sur le type et l'amplitude du forçage imposé au tenseur de Reynolds. Nous avons en outre étudié le cas particulier d'un forçage aléatoire qui permet d'imiter un forçage des pinçons par le champ de vitesse grande échelle au travers du tenseur de Reynolds. Enfin, nous avons réalisé une étude plus large d'un couple de pinçons en trois dimensions présentant des orientations et des amplitudes différentes.

A Model of Interacting Navier–Stokes Singularities

Hugues Faller ¹, Lucas Fery ^{1,2,*}, Damien Geneste ¹ and Bérengère Dubrulle ¹

¹ Service de Physique de l’ tat Condensé, CNRS UMR 3680, CEA, Université Paris-Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, France; hugues.faller_recherche@normalesup.org (H.F.); damien.geneste@cea.fr (D.G.); berengere.dubrulle@cea.fr (B.D.)

² Department of Physics, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 69364 Lyon, France

* Correspondence: lucas.fery@lsce.ipsl.fr

Abstract: We introduce a model of interacting singularities of Navier–Stokes equations, named pinçons. They follow non-equilibrium dynamics, obtained by the condition that the velocity field around these singularities obeys locally Navier–Stokes equations. This model can be seen as a generalization of the vorton model of Novikov that was derived for the Euler equations. When immersed in a regular field, the pinçons are further transported and sheared by the regular field, while applying a stress onto the regular field that becomes dominant at a scale that is smaller than the Kolmogorov length. We apply this model to compute the motion of a pair of pinçons. A pinçon dipole is intrinsically repelling and the pinçons generically run away from each other in the early stage of their interaction. At a late time, the dissipation takes over, and the dipole dies over a viscous time scale. In the presence of a stochastic forcing, the dipole tends to orientate itself so that its components are perpendicular to their separation, and it can then follow during a transient time a near out-of-equilibrium state, with forcing balancing dissipation. In the general case where the pinçons have arbitrary intensity and orientation, we observe three generic dynamics in the early stage: one collapse with infinite dissipation, and two expansion modes, the dipolar anti-aligned runaway and an anisotropic aligned runaway. The collapse of a pair of pinçons follows several characteristics of the reconnection between two vortex rings, including the scaling of the distance between the two components, following Leray scaling $\sqrt{t_c - t}$.

Keywords: turbulence; singularity; non-equilibrium dynamics



Citation: Faller, H.; Fery, L.; Geneste, D.; Dubrulle, B. A Model of Interacting Navier–Stokes Singularities. *Entropy* **2022**, *24*, 897. <https://doi.org/10.3390/e24070897>

Academic Editor: Eun-jin Kim

Received: 31 May 2022

Accepted: 23 June 2022

Published: 29 June 2022

Publisher’s Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright:   2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Snapshots of dissipation or enstrophy in turbulent fluids show us that small scales are intermittent, localized and irregular. Mathematical theorems constrain the degree of irregularity of such structures that are genuine singularities of the incompressible Navier–Stokes provided their spatial \mathbb{L}^3 -norm is unbounded (for a review of various regularity criteria, see [1]). On the other hand, dissipation laws of turbulent flows suggest that they may be at most Hölder continuous with $h < 1/3$ [2] and of diverging vorticity in the inviscid limit. This observation has motivated several theoretical construction of turbulent Navier–Stokes small scale structures or weak solutions of Euler equations, using singular or quasi-singular entities based e.g., on atomic like structures [3], Beltrami flows [4], Mikado flows [5], spirals [6,7], vortex filaments [8], or Lagrangian particles [9].

These constructions have fueled a long-standing analytical framework of turbulence, allowing the modeling of proliferating and numerically greedy small scales by a countable (and hopefully numerically reasonable) number of degrees of freedom, provided by characteristics of the basic entities.

A good example of the possibilities offered by such a singular decomposition is provided by the 3D vorton description of Novikov [10]. In this model, the vorticity field is decomposed into N discretized singularities infinitely localized (via a δ function) at points r_α , ($\alpha = 1, \dots, N$), each characterized by a vector γ_α providing the intensity and the axis

of rotation of motions around such singularities. The singularities are not fixed but move under the action of the velocity field and velocity strain induced by the other singularities, so as to respect conservation of circulation. Around the singularity, the velocity field is not of divergence free, so that the vortons are akin to hydrodynamical monopoles interacting at long-range through a potential decaying like $1/r^2$. The model was adapted to enable numerical simulations of interacting vorticity rings or filaments by considering a divergence-free generalization of the vortons [11]. Quite remarkably, the Vorton model results in vortex reconnection, even though no viscosity is introduced in the numerical scheme [12]. Whether the effective viscosity is due to intense vortex stretching [13], or to properties of vortex alignment during reconnection [12], is still debated.

From a mathematical point of view, the vorton model cannot be considered as a fully satisfying description of singularities of Navier–Stokes for two reasons. First, the vortons do not constitute exact weak solutions of the 3D Euler or Navier–Stokes equations [14–16], which somehow makes them less attractive than point vortices that are weak solutions of 2D Euler equations [14]. Second, vortons do not respect the scaling invariance of Navier–Stokes, which imposes that the velocity field should scale like $1/r$. Indeed, through the Biot–Savart law, we see that a Dirac vortex field induces a velocity scaling like $1/r^2$, where r is the distance to singularity.

Motivated by this observation, we introduce in this paper a modification of the vorton model that is built upon weak solutions of Navier–Stokes equations, and which respects scale invariance of the Navier–Stokes equations, and allows simple dynamical description of the evolution of the basic entities, hereafter named pinçons.

After useful generalities (Section 2.1), we introduce the pinçon model (Section 2.2) and describe their properties in Section 2.3. We introduce the non-equilibrium dynamics of pinçons in Sections 2.4 and 2.5. We then solve the equations in Section 3, starting with the special case of a dipole in Sections 3.2 and 3.3, and concluding with the general case in Section 3.4. A discussion follows in Section 4.

2. Pinçon Model

2.1. Generalities and Ideas behind the Pinçon Model

Consider a velocity field \mathbf{U} obeying the Navier–Stokes equations. Then, it is well known that the coarse-grained field $\overline{\mathbf{U}}^\ell$ obeys the Navier–Stokes equations forced by the “turbulent force” due to the Reynolds stress $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{U}}^\ell \overline{\mathbf{U}}^\ell - \overline{\mathbf{U}} \overline{\mathbf{U}})$. Numerical and experimental observations also show that, as $\ell \rightarrow 0$, this turbulent force becomes more and more intermittent, made of isolated patches of finite values, in a sea of zero values. The size of the isolated patches shrinks with decaying ℓ . In our experiment, we have observed that such patches do persist even when ℓ is of the order of the Kolmogorov scale η_K , and have correlated such patches with the existence of nonzero local energy transfers at such location.

This means that numerical simulations of Navier–Stokes must have a resolution much smaller than η_K in order to fully resolve not only velocity gradients [17] but also local energy transfers and dissipation [18]. The numerical price to pay is high, especially at large Reynolds number, and a lot of computing time is wasted in the tracking of increasingly thinner regions of space.

To avoid this, a natural idea is to split the fluid in two component: one, continuous, representing the coarse-grained fluid $\overline{\mathbf{U}}^\ell$, for a scale $\ell = \ell_c$ to be determined later, and one, discrete, representing the isolated patches of unresolved fluid that are fed by the turbulent force, then carry and dissipate the corresponding energy with dynamics to be determined later. In this view, the small scales must therefore be represented by modes that are representative of the small scale behaviour of Navier–Stokes. Given that the aim is to be able to describe the whole range of scales $\ell < \ell_c$, it is natural to consider self-similar solutions of Navier–Stokes, i.e., solutions that are invariant by the (Leray) rescaling $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \lambda^{-1} \mathbf{U}(\mathbf{x}/\lambda, t/\lambda^2)$ for any λ [19]. Moreover, to be able to describe the small scales by modes

dynamics, we consider self-similar solutions that do not explicitly depend on time, so that all the dynamics will be contained in the time variation of the modes' parameters. Corresponding solutions then obey

$$\forall \lambda \neq 0, \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} \mathbf{U}(\mathbf{x}/\lambda), \tag{1}$$

corresponding to homogeneous Navier–Stokes solutions of degree -1 .

As shown by Sverak [20], Theorem 1, the only non-trivial solutions that are smooth in $R \setminus \{0\}$ are axisymmetric, and correspond to Landau solutions, described in Section 2.2, Equation (5). These solutions obey the stationary Navier–Stokes equations everywhere except at the origin. Specifically, we have in some distributional sense:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{2}$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{U} = \nu^2 \delta(\mathbf{x}) \mathbf{F}, \tag{3}$$

where \mathbf{F} is a vector of magnitude F and given orientation \mathbf{e} , providing the axis of symmetry.

Thus, there is not much choice in the building of small scales modes. Here is how they are built, using Landau solutions.

2.2. Definition of Pinçon

We introduce the pinçons as individual entities labeled by α , characterized by their position $\mathbf{x}_\alpha(t)$, and a non-dimensional vector $\gamma_\alpha(t)$, with $\gamma_\alpha = \|\gamma_\alpha\| < 1$ that produce locally an axisymmetric velocity field around their axis of direction γ_α given by $(p_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{x}) \equiv (p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \gamma_\alpha), \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \gamma_\alpha))$ with \mathbf{U} and p given by:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \gamma) = 2\nu \left(\frac{1}{\phi} \left(\gamma - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) + (1 - \gamma^2) \frac{\mathbf{x}}{\phi^2} \right), \tag{4}$$

$$p(\mathbf{x}, \gamma) = -4\rho\nu^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|\phi} + \frac{1 - \gamma^2}{\phi^2} \right). \tag{5}$$

where p_α is the associated pressure, $\phi(\mathbf{x}, \gamma) = \|\mathbf{x}\| - \gamma \cdot \mathbf{x}$ and we define $\phi_\alpha = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \gamma_\alpha)$. A few useful properties of ϕ are put in Appendix A. In particular, the velocity field given by Equation (4) is homogeneous of degree -1 around \mathbf{x}_α , and axisymmetric around the direction of γ_α . Plots of velocity and vorticity around a pinçon are displayed in Figure 1. Close to the singularity, there is a neck pinch of the velocity streamlines, hence their name pinçon. As first shown by Landau [21] (see also [20,22–25]), the velocity fields \mathbf{v}_α are solutions of Equations (2) and (3) with

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F(\gamma_\alpha) \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha}, \\ F(\gamma) &= 4\pi \left[\frac{4}{\gamma} - \frac{2}{\gamma^2} \ln \left(\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right) + \frac{16}{3} \frac{\gamma}{1 - \gamma^2} \right], \\ \gamma_\alpha &= \|\gamma_\alpha\|. \end{aligned} \tag{6}$$

We refer the reader to [25] for a rigorous derivation of such result. The function $F(\gamma)$ is shown in Figure 2a. It starts from 0 at $\gamma = 0$, corresponding to a state of rest ($\mathbf{U} = p = 0$), with a linear behaviour $F(\gamma) = 16\pi\gamma$ near the origin, and diverges at $\gamma = 1$. In the latter case, the velocity field is diverging on a whole semi-axis defined by $\gamma \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|$, such that $\phi = 0$. Hence, γ characterizes the intensity of the velocity field of a pinçon.

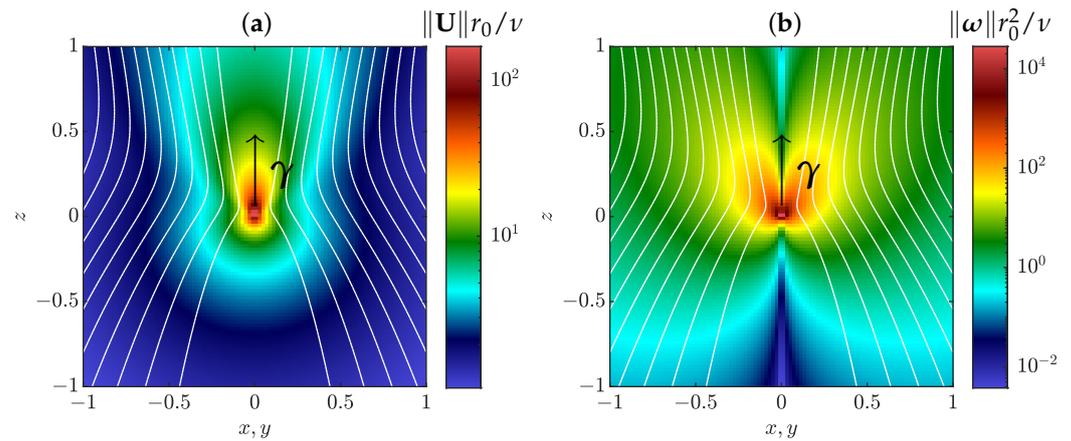


Figure 1. Streamlines (white curves) of velocity field around a pinçon of intensity $\gamma = 0.6$ in a plane that contains the axis of the pinçon $\gamma = \gamma e_z$, which is represented by the black arrow. The field is axisymmetric around that axis. The color represents the norm of rescaled velocity (a) and vorticity (b) fields, where ν is the kinematic viscosity and r_0 some insignificant length scale. The coordinates x, y, z are also nondimensionalized by r_0 . There is no azimuthal component of velocity, while the vorticity is purely azimuthal with respect to the axis γ .

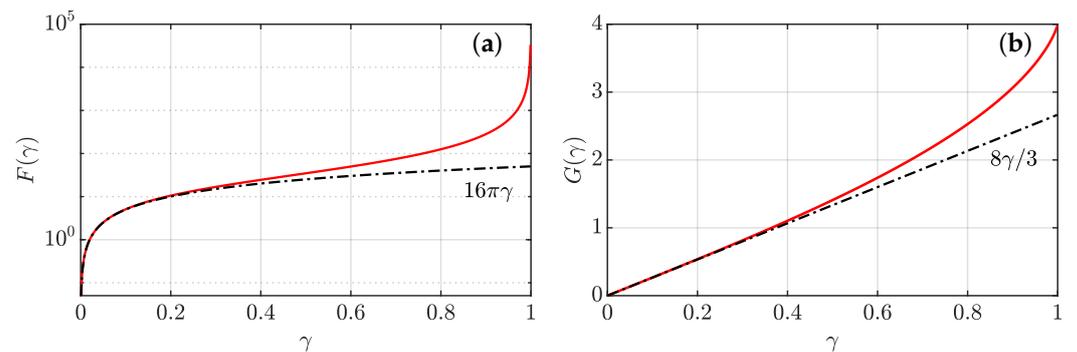


Figure 2. Parameters of a pinçon as a function of its intensity γ . (a) intensity of the force produced by the pinçon at its location. The black dashed line has equation $y = 16\pi\gamma$; (b) generalized momentum of a pinçon. The black dashed line has equation $y = 8\gamma/3$.

2.3. Properties of Pinçons

2.3.1. Scaling under Coarse-Graining

The velocity field and all its derivatives diverge at the location of the pinçon so they are undefined at such point. Its behavior may, however, be studied near the origin by introducing a suitable test function ψ that is spherically symmetric around $x = 0$, positive of unit integral, C^∞ and that decays fast at infinity, considering the regularizations

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}) = \int \psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\ell}\right) \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{y}) \frac{d\mathbf{y}}{\ell^3},$$

where ℓ is a small parameter. In the limit $\ell \rightarrow 0$, the function $\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell}\right)$ is peaked around the origin so that, as long as \mathbf{x} is far from \mathbf{x}_α , we can estimate: $\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$. Consider now the situation where $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$. We have then:

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = \int \psi\left(\frac{\mathbf{x}_\alpha-\mathbf{y}}{\ell}\right) \mathbf{U}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_\alpha, \gamma_\alpha) \frac{d\mathbf{y}}{\ell^3}.$$

Applying finally the change of variable $\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha = \ell \mathbf{z}$, using homogeneity properties of \mathbf{U} and spherical symmetry of ψ , we have :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{1}{\ell} \int \psi(\mathbf{z}) \mathbf{U}(\mathbf{z}, \gamma_\alpha) d\mathbf{z}, \\ &= \frac{C_\psi}{\ell} \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathcal{B}_1} \underset{\ell \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\ell^{-1}), \end{aligned} \tag{7}$$

where $C_\psi = 4\pi \int r\psi(r)dr$ and $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathcal{B}_1}$ is the average over the sphere of radius unity. Via Euler theorem, $\nabla \mathbf{v}_\alpha$ is homogeneous of order -2 . By the same reasoning, we then find that $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) \underset{\ell \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\ell^{-2})$. The same reasoning cannot be applied to $\nabla^2 \mathbf{v}_\alpha$ because the integral $\int \psi(r)dr/r$ does not necessarily converge at the origin. However, the following property holds: $(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha + \frac{\nabla p_\alpha}{\rho} - \nu \Delta \bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell = \frac{\nu^2}{\ell^3} \psi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{\ell}\right) \mathbf{F}$, which is $\mathcal{O}(\ell^{-3})$.

2.3.2. Potential Vector, Vorticity and Helicity

Using vector calculus identities, one can check that the velocity field around a pinçon derives from the vector potential:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}) &= 2\nu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \times \nabla \ln(\phi_\alpha), \\ &= 2\nu \frac{\gamma_\alpha \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)}{\phi_\alpha}, \end{aligned} \tag{8}$$

The vorticity field produced locally around a pinçon can be formally defined by taking the curl of \mathbf{v}_α . The vorticity is parallel to the potential vector and reads:

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha(\mathbf{x}) = 4\nu(1 - \gamma^2) \frac{\gamma_\alpha \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)}{\phi_\alpha^3}, \tag{9}$$

The vorticity field is thus purely azimuthal with respect to the pinçon axis γ , and by axisymmetry, the vorticity lines form rings around the axis. We also notice that the velocity field produced by a pinçon is of zero helicity.

2.3.3. Generalized Momentum and Coarse-Grained Vorticity

We define a generalized momentum $\mathbf{\Pi}_\alpha$ for the pinçon as an average of the velocity field over a sphere of unit radius (see Appendix B for its computation):

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\alpha \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathcal{B}_1} &= \nu G(\gamma_\alpha) \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha}, \\ G(\gamma) &= \frac{2}{\gamma^2} \left[2\gamma - (1 - \gamma^2) \ln\left(\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}\right) \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

By definition, $\mathbf{\Pi}_\alpha$ provides an estimate of the coarse-grained velocity field at the pinçon position, via $\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = C_\psi \mathbf{\Pi}_\alpha / \ell$. Note that $\mathbf{\Pi}_\alpha$ points in the direction of γ_α . For $0 \leq \gamma < 1$, $G(\gamma)$ varies smoothly from 0 to 4, starting from a linear behavior $G(\gamma) = 8\gamma/3$ at the origin and ending with a vertical tangent at $\gamma = 1$ (see Figure 2b). Therefore, the function $G(\gamma)$ is bijective, and there is a one-to-one correspondence between G and γ and $\mathbf{\Pi}$ and γ .

Due to the axisymmetry, we have that $\bar{\boldsymbol{\omega}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = 0$, so that the coarse-grained pinçon is vorticity free near its location.

2.4. Interaction of a Pinçon with a Regular Field

There are several reasons why the notion of a “single” pinçon does not make a physical sense:

- (i) the pinçon is dissipative, and requires a force to maintain it; a surrounding fluid can provide the necessary forcing;

- (ii) the pinçon lives in an infinite universe and does not fulfill the boundary conditions of a realistic system. To be able to use a pinçon in confined systems, we need to add an external velocity field that will take care of the boundary conditions;
- (iii) if we accept that the pinçon describes the very intermittent part of the energy transfer that cannot be resolved, we must also accept the possibility of coexistence and interaction of several pinçons. If we assume that the pinçons are distinct and that they are regular everywhere except at their position, this amounts again to considering the interaction of a pinçon with a regular field.

Given the nonlinear nature of the Navier–Stokes equations, we cannot superpose two solutions of Navier–Stokes equations (a pinçon and a regular field) to get a solution of Navier–Stokes equations. Instead, we will now assume that the pinçon has a dynamics and find such dynamics by imposing that the superposition of the pinçon and of the regular field locally obeys the Navier–Stokes equations. Specifically, we consider a solution of the shape $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t), \gamma_\alpha(t))$ and $\mathbf{F} = F(\gamma(t))\mathbf{e}(\mathbf{t})$, where F is a prescribed function, and $\mathbf{x}_\alpha, \gamma = \gamma\mathbf{e}$, two vectors that parametrize the field \mathbf{v}_α as a function of t . We then introduce $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_\alpha$, where \mathbf{v}_R is a velocity field that is regular at the origin, and we impose that \mathbf{v} is a solution of Navier–Stokes locally around the singularity at \mathbf{x}_α , i.e., that \mathbf{v} is a solution of

$$\partial_t \overline{\mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) + \overline{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{\overline{\nabla p}^\ell(\mathbf{x}_\alpha)}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = 0. \tag{11}$$

Decomposing the velocity field into its regular and irregular part, we see that Equation (11) generates terms of various orders in ℓ that scale according to Table 1. Note that, since \mathbf{v}_R is a regular field, its coarse-grained version scales like $O(1)$, as well as its derivatives.

Furthermore, we introduce the quantity $\tau^\ell = \overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell} - \overline{\mathbf{v}_R}^\ell \overline{\mathbf{v}_R}^\ell$, which is the Reynolds stress contribution due to filtering. This term has a different scaling. Indeed, $\nabla \cdot \tau^\ell = O(\delta v_\ell^2 / \ell)$ [26], where $\delta v_\ell = \mathbf{v}_R(\mathbf{x} + \ell) - \mathbf{v}_R(\mathbf{x})$. Since \mathbf{v}_R is regular, it can be expanded as $\mathbf{v}_R(\mathbf{x} + \ell) - \mathbf{v}_R(\mathbf{x}) = \ell \nabla \mathbf{v}_R$, so that $\nabla \cdot \tau^\ell \sim \ell (\nabla \mathbf{v}_R)^2 = O(\ell)$.

Collecting the different term, we find that the l.h.s. of Equation (11) is the sum of the following orders:

$$\mathcal{O}(\ell) \quad : \quad -\nabla \cdot \tau^\ell \tag{12}$$

$$\mathcal{O}(1) \quad : \quad \partial_t \overline{\mathbf{v}_R}^\ell + \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell} + \frac{\overline{\nabla p_R}^\ell}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_R}^\ell \tag{13}$$

$$\mathcal{O}(1/\ell) \quad : \quad \dot{\gamma} \nabla_\gamma \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell + \overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell \tag{14}$$

$$\mathcal{O}(1/\ell^2) \quad : \quad -\dot{\mathbf{x}}_\alpha \nabla_{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell + \overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell \tag{15}$$

$$\mathcal{O}(1/\ell^3) \quad : \quad \overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell + \frac{\overline{\nabla p_\alpha}^\ell}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \tag{16}$$

Table 1. Order of the various terms appearing in Equation (11) as a function of the filter length ℓ in the limit $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\alpha$.

\mathbf{v}_α	$\dot{\gamma}_\alpha \partial_\gamma(\mathbf{v}_\alpha)$	$\dot{\mathbf{x}}_\alpha \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_\alpha$	$(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R$	$(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha$	$\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell}$
$1/\ell$	$1/\ell$	$1/\ell^2$	$1/\ell$	$1/\ell^2$	1

Cancelling the $\mathcal{O}(1/\ell^2)$ provides a first condition as:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha \nabla_{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell = \overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell. \tag{17}$$

Due to the regularity of \mathbf{v}_R , we can write $\overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell = \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \overline{\nabla \mathbf{v}_\alpha}^\ell$ for small enough ℓ . Condition (17) is then satisfied provided:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha). \tag{18}$$

Physically, this means that the singularity point is advected by the regular field surrounding it. Cancelling the $\mathcal{O}(1/\ell)$ provides a second condition, as:

$$\dot{\gamma} \overline{\nabla_\gamma \mathbf{v}_\alpha}^\ell = -\overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R}^\ell. \tag{19}$$

Due to the regularity of \mathbf{v}_R , we can write $\overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R}^\ell = (\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha)$. We then obtain the equation:

$$\dot{\gamma} \overline{\nabla_\gamma \mathbf{v}_\alpha}^\ell = -(\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_R. \tag{20}$$

Physically, this means that the force axis and its direction are moved around by the shear of the regular field at the location of the singularity.

Cancelling the $\mathcal{O}(1)$ term provides the condition that $\overline{\mathbf{v}_R}^\ell$ is a solution of the Navier–Stokes equation. Indeed, this is the idea behind the two fluid model, to allow for the scales above the coarse-graining to be described by a solution of the Navier–Stokes equation.

We are then left with the smallest order $\mathcal{O}(\ell^2)$ and the highest order term $\mathcal{O}(\ell^{-3})$, which cannot be balanced in general. For the system to have a physical solution, we then impose a “bootstrap condition”, namely that the two terms must be of the same order of magnitude, thereby fixing the coarse-graining scale ℓ_c via $\nu^2/\ell_c^3 \sim \ell_c(\nabla \mathbf{v}_R)^2$. We thus find $\ell_c = (\nu^3/\epsilon_r)^{1/4}$, with $\epsilon_r = \nu(\nabla \mathbf{v}_R)^2$ being the dissipation of the regular field. Therefore, the coarse-graining scale imposed by the bootstrap condition is precisely the Kolmogorov scale $\ell_c = \eta$.

Physically, this condition can be understood as follows: the singularity is dissipative, and to maintain it, one must apply a force. Such force is provided by the regular field, through the term $\nabla \cdot \tau^\ell$, which keeps track of the fraction of the velocity field that is sent to the subgrid scale, and which is taken into account by the pinçon. Conversely, the pinçon applies an extra turbulent stress onto the regular field that extends around it in a ball of radius of the order of the Kolmogorov scale. To keep a precise account of these effects, we thus split the Reynolds stress and the pinçon force into a contribution at \mathbf{x}_α and a contribution around that location, and share the contribution among the pinçon, and the regular field.

Taking into account the fact that $\overline{\mathbf{v}_R}^\eta \approx \mathbf{v}_R$, $\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\eta = C_\psi \mathbf{\Pi}_\alpha / \eta$ and $\dot{\gamma} \overline{\nabla_\gamma \mathbf{v}_\alpha}^\eta \approx C_\psi \mathbf{\Pi}_\alpha / \eta$, the following system of equations to describe the coupling between the pinçon and the regular field is obtained:

for the regular field:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) &+ (\overline{\mathbf{v}_R}^\eta \cdot \nabla) \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) + \frac{\nabla \overline{p}_R^\eta}{\rho}(\mathbf{x}) - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) \\ &= \nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}) - \frac{\nu^2}{\eta^3} \psi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{\eta}\right) \mathbf{F}_\alpha; \end{aligned} \tag{21}$$

for the pinçon:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}_\alpha), \\ \mathbf{\Pi}_\alpha &= -(\mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \nabla) \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{\eta}{C_\psi} \nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}_\alpha) - \frac{\nu^2 \psi(0)}{C_\psi \eta^2} \mathbf{F}_\alpha. \end{aligned} \tag{22}$$

These equations describe a two-fluid approach of turbulence, coupling a coarse-grained field at the Kolmogorov scale, and the pinçon with the Reynolds stress providing the necessary driving force to create pinçons. The latter are entities living below the Kolmogorov scale that are advected and sheared by the coarse-grained fluid, and that exert a forcing on the coarse-grained field which results in a dissipation of energy. To conclude our two-fluid model, we must prescribe the interactions between pinçons, in a way that is compatible with the Navier–Stokes equations.

2.5. Interactions of Pinçons

An ensemble of N pinçons, $\alpha = 1, \dots, N$ produces a velocity field $\mathbf{v}(x, t)$:

$$\mathbf{v}(x, t) = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(x, t). \tag{23}$$

Around a pinçon α , the ensemble of other pinçons produces a regular field $\mathbf{v}_R = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha})$. Motivated by such observation, we define the interactions of the pinçons via the following set of $2N$ differential equations:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t), \tag{24}$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_{\alpha} = -(\mathbf{\Pi}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_{\alpha}}) \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t) \right) - \frac{v^2 \psi(0)}{C_{\psi} \eta^2} \mathbf{F}_{\alpha} + \frac{E_{\alpha}}{C_{\psi}} \chi, \tag{25}$$

where $E_{\alpha} = U_{\alpha}^2$ describes the local energy of the large scale regular field that provides a stochastic forcing χ via the (random) Reynolds stress contribution. In the sequel, we assume that χ is isotropic and shortly correlated over a Kolmogorov time scale, so that $\langle \chi_i(t) \chi_j(t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{ij}$. Note that Equation (25) is a definition that leaves aside many conditions that may have to be satisfied for the model to be an exact representation of the small scales of Navier–Stokes flows. For example, this model is more likely to be valid as the dilute limit is achieved, so that the pinçons are sufficiently apart from each other for them to be considered as point-like particles. In addition, no distinction is made between close and distant interactions, while in the former case, diverging velocities and correlations may impede our possibility to consider that the field generated by the external fields is smooth enough so that the approximation $\overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\alpha}^{\ell}} = \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_{\alpha}) \cdot \overline{\nabla \mathbf{v}_{\alpha}^{\ell}}$ is valid for small enough ℓ . Therefore, even if individually each pinçon is a weak solution of Navier–Stokes equations, the collection of N pinçon is not an exact weak solution of Navier–Stokes equations.

In some sense anyway, the equations of motions of the pinçons correspond to the equations that are imposed by the structure of the Navier–Stokes equations and the requirement that the local velocity field induced by each pinçon should obey such equations. Equations (24) and (25) can therefore be seen as the equivalent of the motion of poles or zeros of partial differential equations that have been computed, starting from Kruskal [27] for the KdV equations (see [28,29] for a review). The motions are furthermore constrained by the condition that they stay with the unit hypersphere such that $\|\gamma_{\alpha}\| < 1$.

The pinçons are characterized by an interaction energy:

$$E = \frac{C_{\psi}}{\eta} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{\Pi}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t). \tag{26}$$

Due to the presence of dissipation and forcing \mathbf{F}_{α} and χ , this interaction energy is not conserved in general. However, there may exist situations where dissipation and forcing balance statistically, so that the system reaches an out-of-equilibrium steady state.

2.6. Weak Pinçon Limit

The equations of motions (24) and (25) take a simple expression, in the “weak pinçon” limit, where the intensity of the pinçons is very small, $\gamma_{\alpha} \ll 1$ for any α . In this case, $\mathbf{\Pi}_{\alpha} = 8\nu\gamma_{\alpha}/3$, and one can develop $\phi_{\alpha\beta}^{-1} = (1 + \gamma_{\beta} \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} / \|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|)$. The equations of motions under such approximations are:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = 2\nu \sum_{\beta \neq \alpha} \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|} + (\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right], \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha = 2\nu \sum_{\beta \neq \alpha} & \left[-(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}_\beta) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} + 3(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^5} \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\gamma}_\alpha \frac{\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} + \boldsymbol{\gamma}_\beta \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha + \frac{3E_\alpha}{8C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}. \end{aligned} \tag{28}$$

These equations of motions are reminiscent of the equations of motions of the vortons (see Equation (A8) in Appendix D), with vectorial products being replaced by a scalar product and additional terms appearing. However, the motion and intensities of the pinçons are driven by forces decaying, respectively, like $1/r$ and $1/r^2$, rather than respectively $1/r^2$ and $1/r^3$ for the vortons. Moreover, the pinçons are subject to a friction proportional to the viscosity.

The interaction energy in this case is:

$$E = \frac{16C_\psi\nu^2}{3\eta} \sum_{\beta \neq \alpha} \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|} + \frac{(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right], \tag{29}$$

which is the classical self interaction energy of pair of singularities [13].

3. Dynamics of a Pair of Pinçons

3.1. Interest of Considering a Pair of Pinçons

Previous experimental [30,31] and numerical investigations [32] about the location of the structures with extreme local energy transfer showed that they are located near interactions (possibly reconnection) of Burgers vortices. Previous and recent high-resolution numerical simulations of reconnection of anti-parallel vorticity filaments [33,34] showed that the process is associated with the formation of a local cusp over each filament that could possibly lead to a singular behaviour [35]. This possibility was confirmed by a detailed study of the interaction of two Burgers vortices conducted by [36–40] using the Biot–Savart approximation. They showed that the interaction indeed leads to a cusp formation on the vortex line, with very large, possibly diverging velocities at the tip of the cusp, with orientation along the bisector of the angle of the cusp. The reconnection was also found to be associated with a depletion of the helicity that eventually reaches zero at the reconnection [36]. In this picture, the associated pinçons created by a coarse-graining at the Kolmogorov scale would then be located at the tip of each cusp, with spins in the direction of the bisector of the cusps (see Figure 3a). This shows the interest of studying more closely the dynamics of a pair of pinçons and see how it compares with known features of the reconnection. This is the aim of the present section. In all the sequel, we renormalize the length by r_0 , the distance between the two pinçons at time $t = 0$ and the time by the associated viscous time $\tau_\nu = r_0^2/\nu$. We first start with the simplest case, where the pair constitutes a dipole.

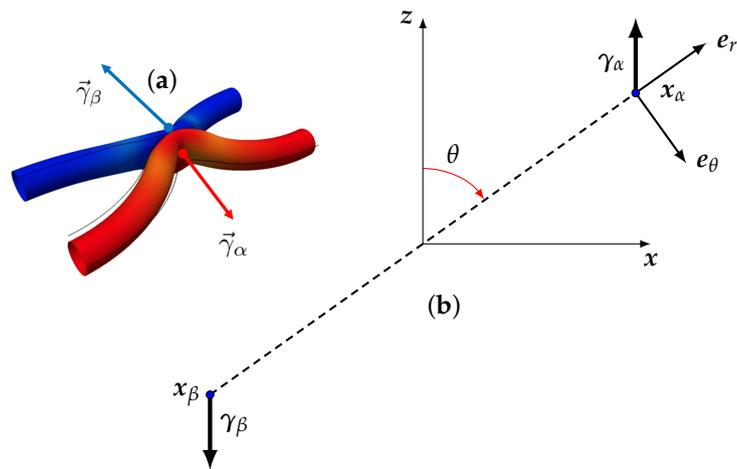


Figure 3. (a) Schematic geometry of pinçons creation at reconnection; (b) geometry of the dipole: two pinçons located at \mathbf{x}_α and \mathbf{x}_β , and such that initially $\gamma_\alpha + \gamma_\beta = 0$. By convention, the angle θ is the angle between γ_α and $\mathbf{r} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$. The (a) is adapted from Figure 3 of [34].

3.2. Dynamics of a Dipole of Pinçons

3.2.1. Equations

Let us consider the dynamics of a dipole, sketched in Figure 3b, made up of two pinçons located at \mathbf{x}_α and \mathbf{x}_β , and such that initially $\gamma_\alpha + \gamma_\beta = 0$ and $\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta = r_0\mathbf{r}$.

We have then $\mathbf{v}_\beta(\mathbf{x}_\alpha) = -\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}_\beta) \equiv \nu\mathbf{v}(\mathbf{r})/r_0$ and $\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\beta = 0$. Using the aforementioned non-dimensionalization, we then get the equation of motion:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \frac{\nu}{r_0}\mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{x}}_\beta &= -\frac{\nu}{r_0}\mathbf{v}, \\ \dot{\Pi}_\alpha &= \Pi_\alpha\nabla_r V - \frac{\nu\psi(0)}{C_\psi}\left(\frac{r_0}{\eta}\right)^2\mathbf{F}_\alpha + \frac{kT_\alpha r_0^2}{C_\psi\nu}\chi, \\ \dot{\Pi}_\beta &= -\Pi_\beta\nabla_r V - \frac{\nu\psi(0)}{C_\psi}\left(\frac{r_0}{\eta}\right)^2\mathbf{F}_\beta + \frac{kT_\beta r_0^2}{C_\psi\nu}\chi. \end{aligned} \tag{30}$$

Therefore, the center of mass of the dipole $\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_\beta$ does not move, while the mean dipole strength $(\Pi_\alpha + \Pi_\beta)/2$ obeys:

$$\dot{\Pi}_\alpha + \dot{\Pi}_\beta = \frac{(E_\alpha + E_\beta)r_0^2}{2C_\psi\nu}\chi. \tag{31}$$

The forcing induces fluctuations proportional to the mean local energy $(E_\alpha + E_\beta)/2$ that destroy the dipole geometry over a viscous time scale. It therefore only makes sense to study the dipole case in the low temperature limit where $(E_\alpha + E_\beta)/2 \rightarrow 0$.

3.2.2. Results at Zero Temperature

Let us first investigate the dynamics in the zero temperature $E_\alpha + E_\beta = 0$. In this case, the dipole remains exactly a dipole at all times, and we have $\Pi_\alpha = -\Pi_\beta \equiv \nu\Pi$, $\mathbf{F}_\alpha = -\mathbf{F}_\beta \equiv \mathbf{F}$ and $\gamma_\alpha = -\gamma_\beta \equiv \gamma$. The dipole dynamics of the quantities characterizing the dipole, namely \mathbf{r} and γ (or equivalently Π), can be obtained by taking the difference of the first two and the last two equations of Equation (30) to obtain:

$$\dot{\mathbf{r}} = 4 \left(-\frac{\gamma + \mathbf{r}/r}{r\phi_*} + (1 - \gamma^2) \frac{\mathbf{r}}{r^2\phi_*^2} \right), \tag{32}$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{2\Pi}{r^3\phi_*^3} A(\gamma, \theta) \mathbf{r} - \frac{\psi(0)}{C_\psi} \left(\frac{r_0}{\eta} \right)^2 \mathbf{F}, \tag{33}$$

where

$$A(\gamma, \theta) = \gamma(1 - 3 \cos^2(\theta) - 3\gamma \cos(\theta) - \gamma \cos^3(\theta) - 2\gamma^2) \tag{34}$$

where $r = \|\mathbf{r}\|$, $\cos(\theta) = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) / (r\gamma)$, $\phi_* = 1 + \gamma \cos(\theta)$ and $\Pi = \|\mathbf{\Pi}\| = G(\gamma)$.

Note that, from these expressions, the evolution of \mathbf{r} and $\mathbf{\Pi}$ occurs in the plane generated by the two vectors \mathbf{r} and $\boldsymbol{\gamma}$. Thus, there remain only three independent quantities to determine the dipole axis and its orientation, namely r , θ and γ . The evolution of the first two quantities can be simply derived by projecting Equation (32) on \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_θ , while the last quantity can be obtained by taking the scalar product of Equation (33) with $\mathbf{\Pi}$ to get an evolution for $\|\mathbf{\Pi}\|^2$, which leads to γ through $\gamma = G^{-1}(\|\mathbf{\Pi}\|)$. One thus obtains after straightforward simplifications:

$$\dot{r} = \frac{4}{r} \left(\frac{1 - \gamma^2}{\phi_*^2} - 1 \right), \tag{35}$$

$$r\dot{\theta} = 4 \frac{\gamma \sin \theta}{r\phi_*}, \tag{36}$$

$$\dot{\Pi}^2 = 4 \frac{\Pi^2}{r^2} A(\gamma, \theta) \cos(\theta) - \frac{2\psi(0)}{C_\psi} \left(\frac{r_0}{\eta} \right)^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \tag{37}$$

We have integrated the equations of motions (35) and (37) for fixed initial radius $r_0 = 1$ and $\gamma_0 = 0.1$ and various initial values of θ_0 and taking $\psi(0) = 1/(2\pi)^{3/2}$ (valid for ψ Gaussian). The resulting evolution is computed in two cases, with and without friction. The first case corresponds to the initial stage of the dynamics, just after the pinçons are created. Indeed, a pinçon is created with an initial force corresponding to the local Reynolds stress $\mathbf{F}_\alpha = \eta^3 / (v^2 \psi(0)) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^\eta(\mathbf{x}_\alpha)$, so that the dissipation is initially suppressed. In that case, we observe in Figure 4a that there are two fixed points of the dynamics for θ : one stable and attractive, corresponding to $\theta = \pi$, and one unstable and repelling, corresponding to $\theta = 0$. As a result, the pinçons are mostly repelling each other, except when they start exactly anti-aligned and facing away each other, in which case they attract and annihilate each other. The resulting dynamics can also be appreciated in the phase space, as shown in Figure 5a.

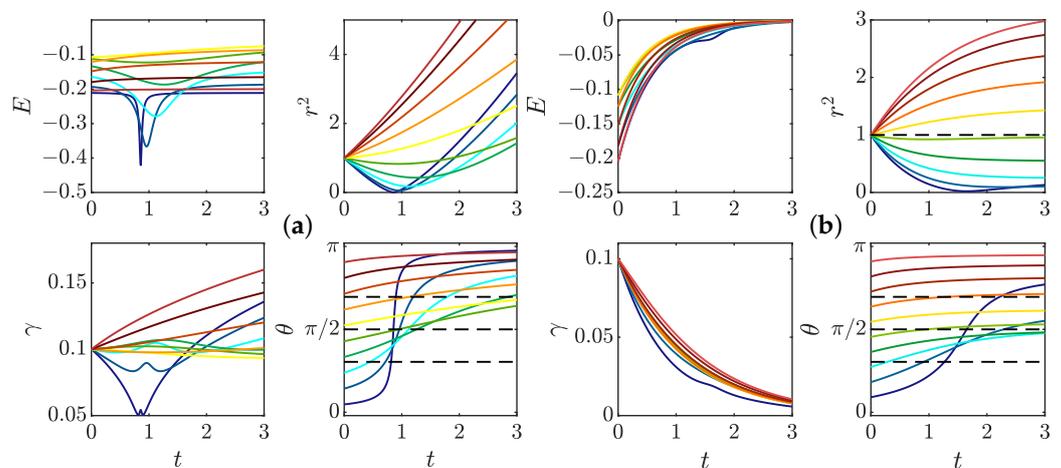


Figure 4. Dynamics of a dipole of pinçon for various initial conditions and (a) without friction, corresponding to the initial stage of the dynamics, just after pinçons creation; (b) with friction coefficient 0.7, corresponding to the late stage dynamics. The radius is initially fixed to $r = 1$, the dipole

intensity is initially set to $\gamma = 0.1$ and the initial dipole orientation is fixed at different values between 0 and π (identified by different colors). The panel represents the time evolution of the different quantities: E : Interaction energy; r^2 : Square of Dipole separation; γ : Dipole intensity; θ : Dipole orientation. Black dashed lines on $\theta(t)$ figure correspond to $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\frac{\pi}{2}$, and $\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

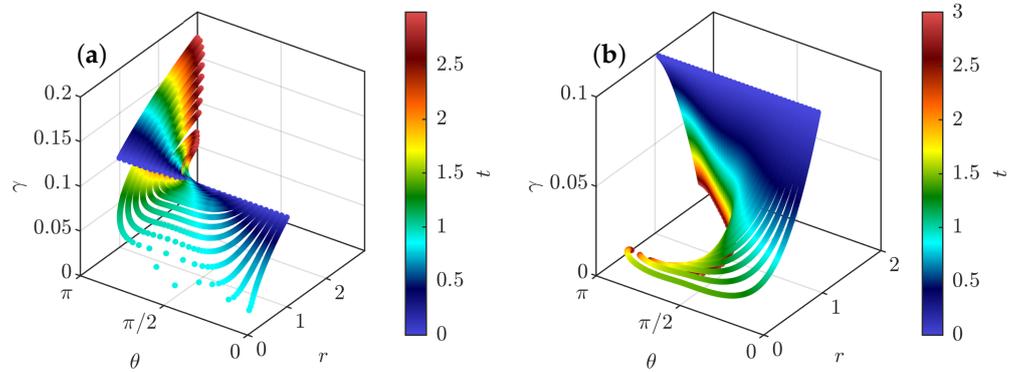


Figure 5. Phase space for a dipole of pinçons color-coded by the time, shown on the color bar. (a) Without friction, corresponding to the initial stage of the dynamics, just after pinçons creation; (b) With friction—coefficient 0.7—corresponding to the late stage dynamics. The radius is initially fixed to $r = 1$, the dipole intensity is initially set to $\gamma = 0.1$ and the initial dipole orientation is fixed at different values between 0 and π .

Interesting scaling laws are observed in the two stages that are reminiscent of what is observed during reconnection events. The pinçons with initial inclination in the interval $[0, \pi/2]$ and different from 0 start moving towards each other, while decreasing their strength and increasing their angle, in absolute value. Once they reach the value $\theta = \pi/2$, they change direction and get away from each other (see Figure 4a). During the collapse stage, the radius of the dipole decreases approximately like $\sqrt{t_c - t}$, which is the Leray scaling [19]. The collapse stage is nearly universal, with weak dependence on the initial angle, while the escape depends more strongly on the initial orientation. Such asymmetry has also been observed in reconnection of quantum vortices [41]. During the separating stage, θ gets closer to π and there is also an approximate power law escape law $r \sim \sqrt{t - t_c}$. The scaling laws are explored further in the general case in Section 3.4.

At a later stage, the initial Reynolds stress has decayed and cannot balance the pinçons dissipation anymore. The extreme case is when the Reynolds stress has decayed to zero, and when the dissipation is the strongest. This case has been studied by running another set of simulations including the friction, starting the dipole at $r_0 = \eta$. It is shown in Figure 4b. We notice that, as expected, the dissipation now induces a constant decline of the dipole intensity that eventually results in the death of the dipole. The resulting phase space is shown in Figure 5b, where a plunging funnel corresponding to dissipation can now clearly be seen. There are now two situations depending on whether the initial angle is less than or bigger than $\pi/2$. In the first case, the dipole contracts and orientates itself towards $\pi/2$ before its death. This situation can be associated with a reconnection event. For initial angles greater than $\pi/2$, the dipole expands while keeping its initial orientation before eventually dying and stopping.

In summary, the natural dynamics of a dipole without stochastic forcing is always dissipative, resulting in the final death of the dipole. Before its death, the dipole can experience either a first contraction stage of its initial angle is less than $\pi/2$, with dynamics resembling reconnection events, or experiences and expansion while it tries to anti-align its two components ($\theta \rightarrow \pi$). The question is now whether the dipole can be maintained for a longer time, and maintain another orientation if we take the stochastic forcing into account. As we showed in the beginning, as soon as we add some stochastic noise, the dipolar

geometry breaks down on a viscous time scale. There is therefore a subtle interplay to be understood between the decay of the dipole, the forcing and the departure from dipolar geometry. There is, however, an interesting observation that allows for tackling the problem in a simple and elegant manner. Indeed, due to the friction, the pinçon intensity decreases with time, and we are likely to enter into the weak pinçon limit after a sufficient long time. The latter is much simpler to code and understand, since it resembles the dynamics of dipolar moments. In the sequel, we therefore investigate the finite but small forcing limit in the weak pinçon approximation.

3.3. Results at Finite Small Temperature

3.3.1. From Pair of Pinçons to Dipole Equations in the Weak Pinçon Limit

In such limit, the dipole dynamics and the evolution of the dipole radius, orientation and strength can be obtained from the evolution of three quantities: $R = r^2$, $C = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}$ and $N = \gamma^2$. To do so, Equations (27) and (28) are first considered for two pinçons γ_α and γ_β , and three quantities are introduced: $\mathbf{r} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$, $\boldsymbol{\Gamma} = (\gamma_\alpha + \gamma_\beta)/2$ and $\boldsymbol{\Pi} = (\gamma_\alpha - \gamma_\beta)/2$. By combination of the equations of motions, one get the three coupled equations:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= -4\nu \left(\frac{\boldsymbol{\Pi}}{r} + \mathbf{r} \frac{\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right), \\ \dot{\boldsymbol{\Pi}} &= 2\nu \left[\left(\boldsymbol{\Pi}^2 - \boldsymbol{\Gamma}^2 \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \left((\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r})^2 \right) \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\Pi} + \frac{3(E_\alpha - E_\beta)}{16C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}, \\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} &= 4\nu \left[\boldsymbol{\Gamma} \frac{(\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r})}{r^3} - \boldsymbol{\Pi} \frac{(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{3(E_\alpha + E_\beta)}{16C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}. \end{aligned} \tag{38}$$

The last equation of Equation (38) shows that $\boldsymbol{\Gamma}$ is forced by $\bar{E} = (E_\alpha + E_\beta)/2$. If we start with a dipole condition $\boldsymbol{\Gamma} = 0$, in the small temperature limit $\bar{E} \ll 1$ and for a time scale that is short with respect to the diffusive time scale $\tau_\nu = r_0^2/\nu$, all the terms proportional to $\boldsymbol{\Gamma}$ in the second equation of Equation (38) can be ignored. Then, the first equation is multiplied by \mathbf{r} and the second equation by $\boldsymbol{\Pi}$ to obtain equations for R and N , and the first equation multiplied by $\boldsymbol{\Pi}$ is summed with the second equation multiplied by \mathbf{r} to get the equation of evolution for C . After non-dimensionalization by r_0 and r_0^2/ν and rearrangement, one then obtains the three coupled equations:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -16 \frac{C}{R^{1/2}}, \\ \dot{C} &= -2 \left[\frac{N}{R^{1/2}} + 5 \frac{C^2}{R^{3/2}} \right] - \rho C + R^{1/2} \mu \zeta, \\ \dot{N} &= 4 \left[N \frac{C}{R^{3/2}} - 3 \frac{C^3}{R^{5/2}} \right] - \rho N + N^{1/2} \mu \zeta, \end{aligned} \tag{39}$$

where ζ is a delta correlated white noise obeying $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t - t')$, and the friction ρ and forcing μ coefficient are given by

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{3r_0^2(E_\alpha - E_\beta)}{16\nu^2 C_\psi}, \\ \rho &= 6\pi\psi(0) \frac{r_0^2}{\eta^2 C_\psi}. \end{aligned} \tag{40}$$

From N , R and C , we then obtain $r = R^{1/2}$, $\gamma = N^{1/2}$ and $\theta = \arccos(C/(r\gamma))$.

To check the validity of the weak pinçon approximation, the comparison between the full dynamics computed from Equation (33), and its weak limit Equation (40) in the zero temperature limit $\mu = 0$ and without ($\rho = 0$) and with friction is shown in Figure 6. We see that the two dynamics coincide very well for most cases, and that the approximation is better on the late stage, when there is friction. Indeed, the friction forces decay of the dipole intensity.

The weak dipole limit actually helps us identifying special angles for the dipole dynamics. Indeed, from the last equation of Equation (40), the first term of the r.h.s cancels whenever $\zeta(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta)) = 0$, corresponding to the three angles in the interval $[0, \pi]$, namely $\theta = \pi/2$, $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$ and $\theta = \pi - \arccos(1/\sqrt{3})$. Those angles are identified by black dotted lines in Figures 4 and 6. When the forcing and dissipation vanish or balance, they correspond to special directions where the dipole intensity can remain stationary. Indeed, the angle $\theta = \pi/2$ partitions the dynamics since the angles $\theta(t)$ increase and the radius decreases if and only if $\theta(t)$ is smaller than $\frac{\pi}{2}$. The two other angles do not seem to play a specific role in the zero temperature limit. However, the situation is different in other situations, at a finite temperature, as shown in the following section.

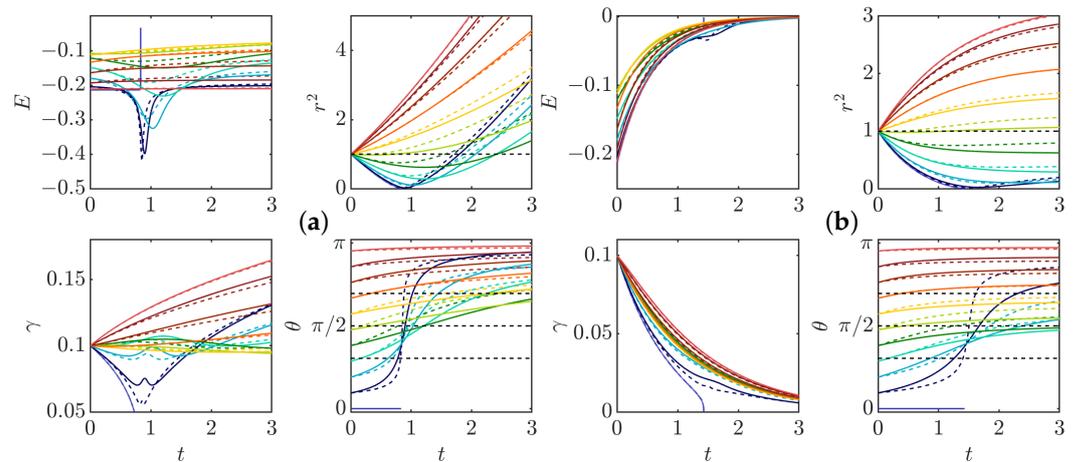


Figure 6. Comparison with the weak limit approximation: solid lines: complete model; dashed line: weak limit; (a) without friction; (b) with friction, coefficient 0.7. The panel represents the time evolution of the different quantities: E : Interaction energy; r^2 : Square of Dipole separation; γ : Dipole intensity; θ : Dipole orientation. Black dashed lines on $\theta(t)$ figure correspond to $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\frac{\pi}{2}$, and $\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

3.3.2. Dynamics at Finite Temperature

Integrating (40) allows for efficiently studying the dynamics of a noisy dipole, provided two criteria are satisfied: (i) $\gamma \leq 0.5$, in order to be in the weak limit and (ii) r is large enough ($r \geq \frac{1}{\sqrt{\rho}}$) so that the two pinçons may still be considered as distinct. Moreover, for numerical reasons, we stop the integration whenever $\gamma \leq 0.01$ or $r \geq \sqrt{\rho}$, in which case we consider that the pinçons are either dying or that the dipole has escaped to infinity. In practice, most of our simulations were stopped because either $\gamma \leq 0.01$ or $\gamma \geq 0.5$. Figure 7 shows the evolution of a dipole satisfying the equations of motion (40) for fixed initial radius $r_0 = 1$ and $\gamma_0 = 0.1$, various initial values of θ_0 and $\rho = 0.12$ and $\mu = 0.009$. Several tendencies emerge, as illustrated in Figure 7. First, the integration time is slightly longer as the noise may remain γ stationary for a certain amount of time. Second, the evolution of $\theta(t)$ is not monotonic anymore and the angle θ tends to get closer to the values cancelling $\zeta(\theta)$, and tend to $\theta = \pi/2$ in most of the cases. As a result, the dipole can be maintained for some time in a non-equilibrium balance, where dissipation exactly balances the stochastic forcing, allowing the dipole intensity to decay less rapidly, and the dipole to live longer. We have checked that, when the noise is too large, then fluctuations are enough to bring the dipole intensity close to the limit $\gamma = 0$ or $\gamma = 1$ in a finite time, resulting in the dipole collapse or death quicker than in the zero temperature limit.

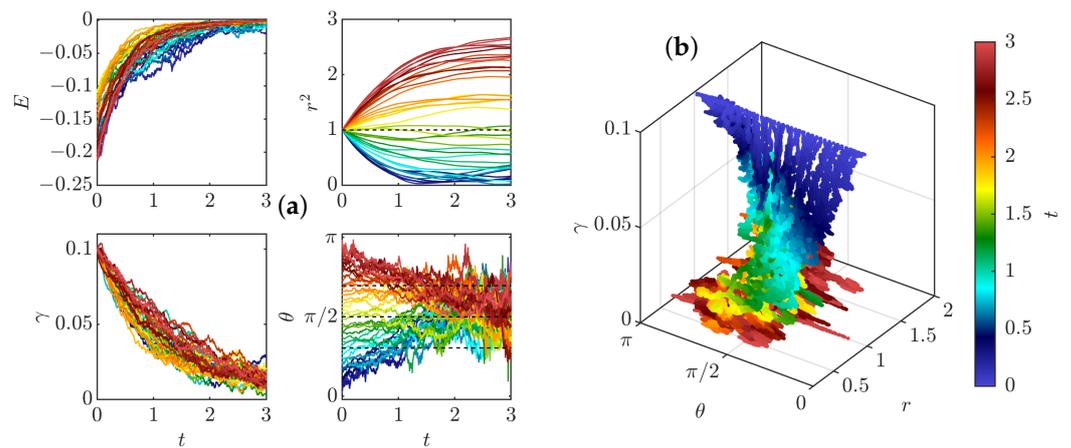


Figure 7. Effect of noise in the weak limit dissipative case for dissipation coefficient 0.7 (a) on the dynamics. The panel represents the time evolution of the different quantities: E : Interaction energy; r^2 Square of Dipole separation; γ : Dipole intensity; θ : Dipole orientation. Black dashed lines on a $\theta(t)$ figure correspond to $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\frac{\pi}{2}$, and $\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$; (b) on the phase-space, color-coded by the time, shown on the color bar. The radius is initially fixed to $r = 1$, the dipole intensity is initially set to $\gamma = 0.1$ and the initial dipole orientation is fixed at different values between 0 and π . The intensity of the noise is $\mu = 0.009$.

3.4. General Dynamics of a Pair of Pinçons

3.4.1. Short Time Dynamics

In the case of dipole, the short time dynamics correspond either to an escape with $\theta \rightarrow \pi$ and $\gamma \rightarrow 1$ or first a contraction (close interaction) and then an escape. Here, we consider the general case of a pair of pinçons to determine whether such observation is robust or not. The relative dynamics are characterized in this case by six independent scalar variables which are the distance r between the pinçons, their intensities γ_α and γ_β , their angles θ_α and θ_β defined by $\cos \theta_\alpha = (\gamma_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) / (r\gamma_\alpha)$ and $\cos \theta_\beta = (\gamma_\beta \cdot \mathbf{r}_{\beta\alpha}) / (r\gamma_\beta)$ and the angle φ defined by $\cos \varphi = (\gamma_\alpha \cdot \gamma_\beta) / (\gamma_\alpha \gamma_\beta)$. The dipole case studied in the previous section corresponds to $\gamma = \gamma_\alpha = \gamma_\beta$, $\theta = \theta_\alpha = \theta_\beta$ and $\varphi = \pi$. We then integrate the dynamics with Equations (24) and (25) without dissipation or noise for different initial conditions of these parameters, except that we always set $r_0 = 1$. Indeed, since the pinçon are created with an initial force corresponding to the local Reynolds stress $\mathbf{F}_\alpha = \eta^3 / (v^2 \psi(0)) \nabla \cdot \tau^{\prime\prime}(\mathbf{x}_\alpha)$, the short time dynamics correspond to the case without dissipation or forcing.

Because there is no dissipation, we expect γ to tend toward 1 as for the dipole, so we implement a stopping condition when there is one pinçon for which $\gamma > 1 - \epsilon$, with epsilon a small parameter taken here to $\epsilon = 10^{-2}$. We have run the dipole dynamics with many different initial conditions, and identified three scenarios:

- (i) repelling dipolar expansion, illustrated in Figure 8a. This case corresponds to the case where the two components run away from each other and gradually become a repelling dipole: their mutual angle φ tends to π , while they become anti-parallel to their separation vector $\theta \rightarrow \pi$ and their intensities become equal to each other and tend to 1. In this case, the role of each pinçon is symmetric.
- (ii) aligned expansion, illustrated in Figure 8b. In this case, one component grows larger than the other one, while both pinçons become aligned with their separation vector and point in the same direction $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0, \varphi = 0$. The component with the lower intensity moves faster and speeds ahead of the other one.
- (iii) explosive collapse, illustrated in Figure 9a. In this case, the two pinçons are attracted to each other, while one of the two pinçons rapidly reaches the asymptotic value $\gamma = 1$, corresponding to an infinite dissipation. In contrast with the expansion situations where the pinçons tend to align or anti-align, the collapse case corresponds to

intermediate values of φ and θ different from π . This case can therefore be considered as the generic reconnection event.

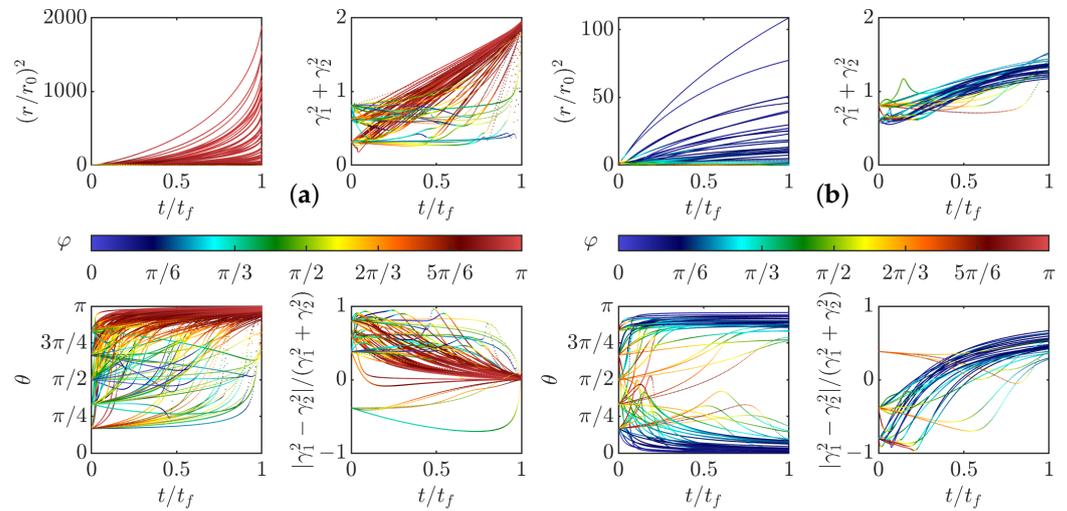


Figure 8. Time evolution of the distance r , the pinçons angles θ_1 , and θ_2 (one line for each), total intensity $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ and anisotropy $(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)/(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$ in the two expansion cases. (a) case of repelling dipolar expansion; (b) case of aligned expansion. The points are colored by the value of the pair mutual angle, φ .

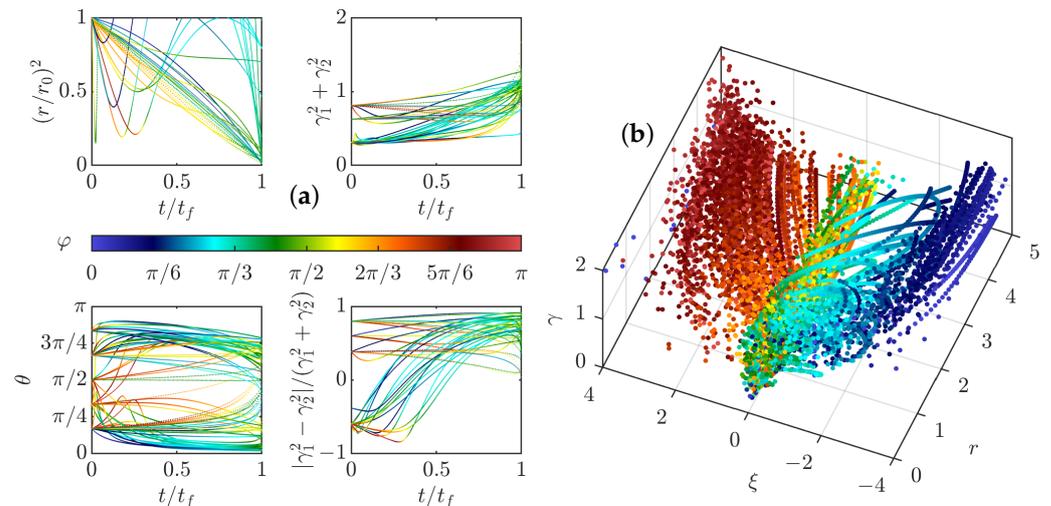


Figure 9. (a) Time evolution of the distance r , the pinçons angles θ_1 , and θ_2 (one line for each), total intensity $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ and anisotropy $(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)/(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$ in the case of explosive collapse. (b) Phase space for a pair of pinçons in the initial stage of the dynamics, just after pinçons creation. The phase space is $r, \gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ and $\xi = \xi(\theta_1)\xi(\theta_2)$. The points are colored by the value of the pair mutual angle φ in all the figures.

Interestingly, the different cases partition in different areas the phase space $r, \gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ and $\xi = \xi(\theta_1)\xi(\theta_2)$, with $\xi(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta))$, as illustrated in Figure 9b. One sees that the collapse mode tends to occur around $\xi = 0$ meaning that at least one of the two pinçons tend to orientate at $\pi/2, \arccos(1/\sqrt{3})$ or $\pi - \arccos(1/\sqrt{3})$ from the separation vector. In contrast, the two expansion modes proceed with $\xi = \pm 2$, corresponding to situations where the pinçons are aligned or anti-aligned with their separation vector. Summarizing, two new cases are found with respect to the dipole dynamics, namely a new mode of expansion, made with two aligned pinçons following each other, and a new mode of collapse following the law $\xi(\theta_1)\xi(\theta_2) = 0$, with one component reaching the asymptotic

value $\gamma = 1$, and corresponding to a generic reconnection event. In the sequel, we study in more details these events.

3.4.2. Scaling Laws of Collapse

During the collapse stage, the radius evolution is fitted with a power law in order to compare the exponent with the Leray scaling $\sqrt{t_c - t}$ [19]. Figure 10a shows the histogram of the values of the exponent obtained by fitting the law $r(t) = \beta_c(t_c - t)^\delta$ for the collapse cases. We observe that most of the values are near 1/2 which correspond to the Leray exponent. Figure 10b shows the time dynamics of rescaled squared radius. The Leray scaling is found to be verified asymptotically as $t/t_c \rightarrow 1$.

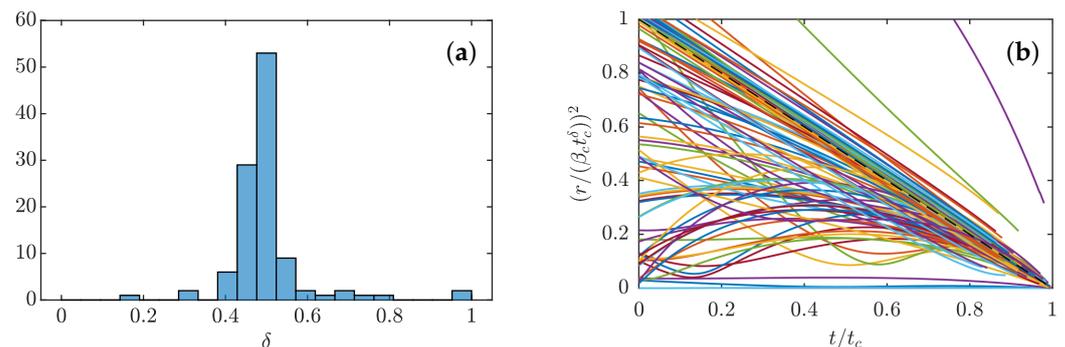


Figure 10. (a) Histogram of the values of the power law exponent δ ; (b) squared distance rescaled by for the explosive collapse cases. The black dashed line corresponds to the Leray scaling with $\delta = 1/2$. We see that, for t/t_c close to 1, most of the curves follow a power law with a power exponent δ close to 1/2.

3.4.3. Full Collapse Dynamics

The full dynamics of reconnection events can be investigated using a patching between the short time behavior, and the large time behavior, allowing e.g., the turbulent stress to decay like $\exp(-t/\tau_{\text{forcing}})$, where τ_{forcing} is a time scale associated with large scales. As shown in Figure 11, for the same initial configuration, when dissipation is high and the forcing characteristic time is short, the pinçons die very fast with no close interaction. On the contrary, if the dissipation is too low with a forcing persistent enough, the dynamics are very similar to the case without dissipation, and the pinçons still collapse in an explosive manner with their intensities tending to 1. Two intermediate cases are found where we have a collapse stage followed by a separation stage without explosion. These typical examples are illustrated in Figure 12a,b. In both cases, we observe first a collapse phase and then a separation phase although the particular dynamics are quite different. In the case of (a) where the dissipation and the forcing characteristic time are rather small, the transition between the two phases happens at a closer distance and has a configuration similar to the dipole with one of the pinçons axis abruptly turning from an angle close to 0 to an angle close to π , then the pinçons die very fast. In the case of (b) with larger dissipation and a more persistent forcing, the dynamics are smoother with hardly any change in the dipole relative orientation, only the axis angles change slowly and the pinçons survive a long time with a stable configuration. During the interaction, the maximum velocity and vorticity near the pair of pinçons, shown in Figure 13, exhibit marked oscillations due to the finite resolution of the grid. Using a moving average, we see, however, that for the cases where the intensities tend to 1, the maximum velocity and vorticity tend to infinity as expected. If we now look at the case of close interaction with a final separation corresponding to Figure 12a, they first decrease during the collapse stage until the time of minimum of r , after which they increase until the angle is close to $\phi = \pi$; then, they finally both decay to zero when separating. This behaviour is reminiscent of what is happening during a reconnection of vortex rings, where the distance between rings decay like $\sqrt{t_c - t}$, with maximum velocity and vorticity growing up and then decaying [35].

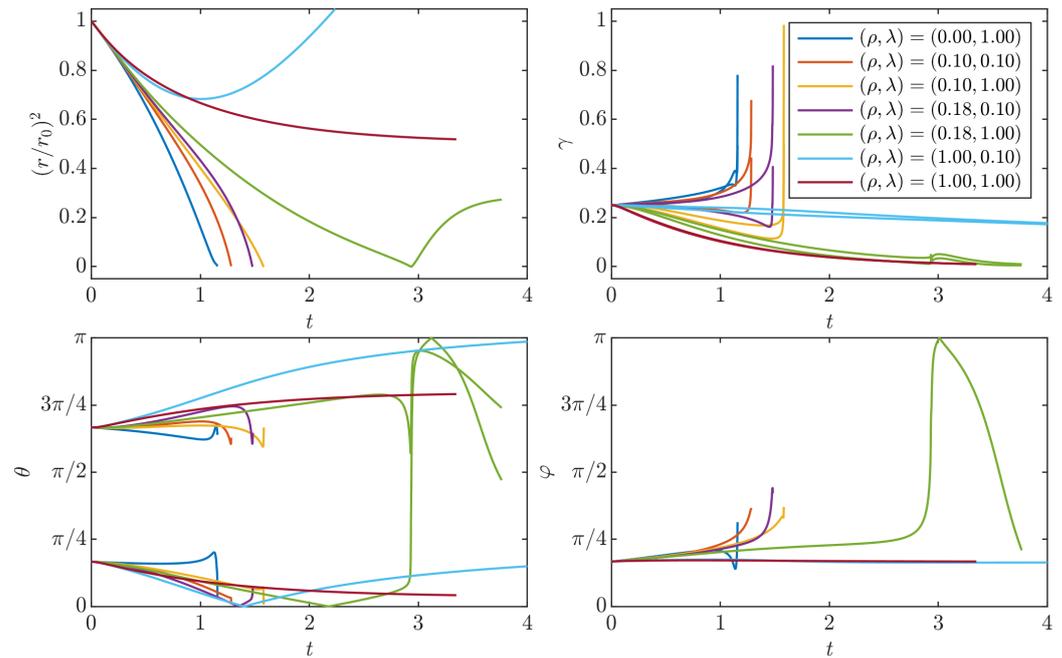


Figure 11. Time evolution of the different variables characterizing the pair of pinçons for seven cases with the same initial configuration but with different forcing characteristic time coefficient $\lambda = \tau_v / \tau_{\text{forcing}} = r_0^2 / (v\tau_{\text{forcing}})$ and dissipation coefficient $\rho = (\psi(0) / C_\psi)(r_0 / \eta)^2$. We see that, on the one hand, when dissipation is high and the forcing time is short, the pinçons die very fast with no close interaction. On the other hand, if the dissipation is low, the dynamics are very similar to the case without dissipation, and the pinçons still collapse in an explosive manner with their intensities tending to 1. Two intermediate cases are found where we have both the collapse dynamics and a separation dynamics without explosion.

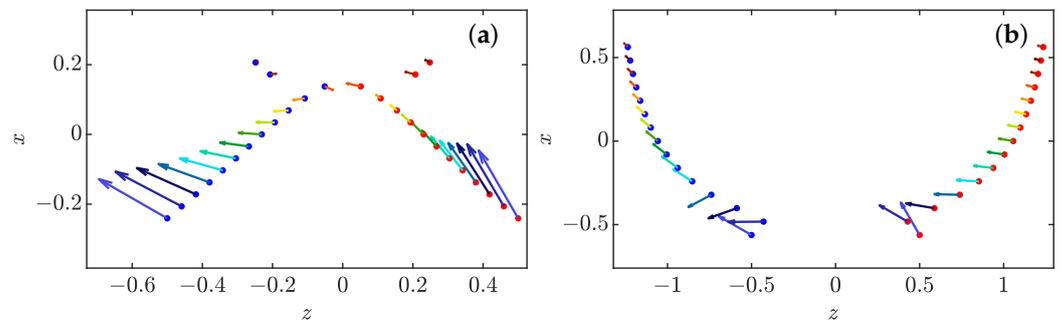


Figure 12. Dynamics of a pair of pinçons as a function of time in the plane defined by γ_1 and $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_z$ for two different forcing characteristic time coefficient (λ) and dissipation coefficient ρ : (a) $(\rho, \lambda) = (0.18, 1.00)$ and (b) $(\rho, \lambda) = (1.00, 0.10)$. The vectors gives the projection of γ_1 and γ_2 in the plane and the color codes the time, from $t = 0$ (dark blue) to $t = t_{\text{final}}$ (dark red), as well as the coordinate of the points on the vertical axis x . In both cases, the two pinçons (blue and red points) move initially towards each other (the distance is read on the horizontal axis z) and then their orientations change and they repel each other. In the case of (a), the transition between the two phases has a configuration similar to the dipole with one of the pinçons axis abruptly turning from an angle close to 0 to an angle close to π , then the pinçons die very fast. In the case of (b), the dynamics are smoother with hardly any change in the dipole relative orientation, only the axis angles change slowly, and the pinçons survive a long time with a stable configuration.

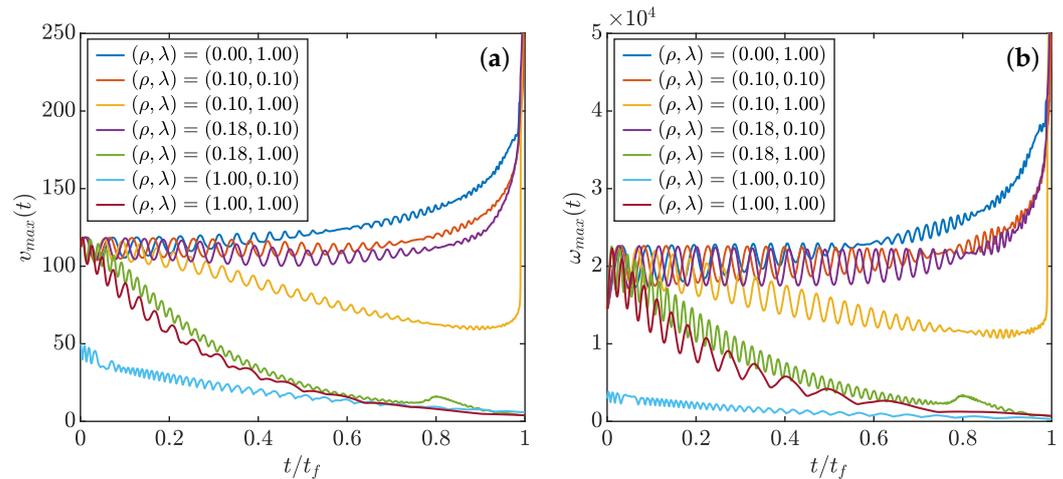


Figure 13. Time evolution of the maximum of rescaled velocity field (a) and vorticity field (b) around a pair of pinçons with same initial configurations and different forcing characteristic time coefficient $\lambda = \tau_v / \tau_{\text{forcing}}$ and dissipation coefficient ρ . The rescaling is the same as in Figure 1, with r_0 the initial separation between the pinçons. The values correspond to a moving average over 15 time steps.

4. Discussion

We have introduced a model of singularities of Navier–Stokes, named pinçon that are discrete particles characterized by their position and “spin”. These particles follow a nontrivial dynamics, obtained by the condition that the coarse-grained velocity field around these singularities obeys locally Navier–Stokes equations. We have shown that this condition can only be satisfied provided the coarse-graining scale is of the order of the Kolmogorov scale. When immersed in a regular field, the pinçons are further transported and sheared by the regular field, experiencing a friction together with an energy injection coming from by Reynolds stress of the regular field. We have used these properties to study the interaction of two pinçons, at the early and late stage of their evolution, and in the presence or absence of a stochastic forcing induced by the possible Reynolds stress.

Quite interestingly, we have identified several modes of interactions at short times that are characterized by the values of the parameter $\zeta(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta))$, where θ is the angle between the spin of the pinçon and the axis of the pair. Specifically, in the absence of noise, we identified two modes of expansion of the pair with $\zeta = \pm 2$, corresponding to situations where the pinçons are aligned or anti-aligned with their separation vectors, and one mode of collapse with $\zeta = 0$. In the presence of noise, we observe an additional transient non-equilibrium steady state expansion mode, with $\zeta = 0$, and the pinçons are perpendicular to the axis of the pair. The quantity $1 - 3\cos^2(\theta)$ actually plays an important role in the theory of liquid crystals, as its average defines the order parameter of the system $s = (1 - 3\cos^2(\theta))/2$, with possible transitions between liquid ($s = 0$) and nematic phase ($s = 1$). The different interaction modes therefore open the way to interesting different collective behaviors when considering a larger number of pinçons. Whether such behaviors are of relevance to the actual physics of turbulence is still an open issue, as the pinçon model ignores on a number of issues that may limit its range of validity: existence of large nonlocal energy transfer at the Kolmogorov scale, dilute approximation for the pinçon, scale separation between the pinçon and the ambient large scale velocity field, to name but a few.

Our study of the interaction of two pinçons, however, already revealed some interesting similarities with reconnection between two vortex rings. Indeed, we observe that the collapse generally obeys the $\sqrt{t_c - t}$ scaling that is observed during reconnection, and is characterized by transient growth of velocity or vorticity like in the reconnection. From another point of view, the pinçons dynamics are also reminiscent of the two-fluid model of superfluid, where the “regular” field, made of phonons, interact with the local topological defects that form the quantized vortices. Indeed, as shown by [41], the interaction of quantized vortices

leads to Leray scaling, with distance between vortices decaying like $\sqrt{t_c - t}$. In a broader sense, the description of the interaction between pinçons and a regular field is parallel to the interaction of localized wave packets interacting with a mean flow, in the WKB-RDT model of [42]. By analogy, one may then wonder whether it would be possible to use the pinçons as a subgrid scale model of turbulence, allowing for describing the interaction of a velocity field filtered at the Kolmogorov length, with a collection of pinçons that encode the very intense energy transfers that are observed when scanning very small scales of turbulence [30]. If the pinçon model proved accurate enough to describe small scale turbulence, it would then enable the use of larger time-steps, as the motion of the small scale motions is governed by Lagrangian motions. Another issue is whether a short range regularization is needed at short distances to make the model applicable to subgrid modelling.

More generally, the pinçon model shares some interesting properties with other discrete models found in fluid mechanics, such as the vorton model of Novikov [10], derived from the 3D Euler equations, or the point-vortex model, derived from the 2D Euler equation: like them, it is a N-body model, describing the motion and “momentum” of entities with long range interactions. At variance with them, however, the pinçon model is not Hamiltonian because pinçons only exist in the presence of viscosity, so that energy is not conserved (and is actually dissipated locally by the singularity). To maintain pinçon, we thus have to introduce a large scale that provides constantly energy to the system (in our case via stochastic forcing). Both vorton model and point-vortex model are contributing to the progress of our understanding of turbulence phenomenology by providing simple toy models to play with: for example, the notion of “negative temperature” introduced by Onsager to explain the inverse cascade of turbulence, after he observed a similar process occurring in a point-vortex model.

We can then think of all these discrete models as “Ising models” of turbulence that can be used to get insight on turbulence properties. Therefore, even if the pinçon model does not accurately describe the behavior of small scale turbulence, it is an out-of-equilibrium statistical model of Navier–Stokes singularities with many interaction modes that bears some similarity with liquid crystal interactions. It may then stimulate new ideas regarding turbulence dynamics and properties and play a similar role than the Ising model in statistical mechanics.

Author Contributions: B.D. coordinated the study and helped draft the manuscript. B.D., D.G., H.F. and L.F. performed and checked the calculations together. H.F. and D.G. studied most of the dipole dynamics. L.F. ran the simulations for general pinçons interaction. All authors gave final approval for publication and agree to be held accountable for the work performed therein. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This work has been funded by the ANR, project EXPLOIT, Grant No. ANR-16-CE06-0006-01.

Data Availability Statement: Codes used in this work are available at [doi:10.5061/dryad.8sf7m0cqz](https://doi.org/10.5061/dryad.8sf7m0cqz) (accessed on 24 June 2022).

Acknowledgments: We thank Ivan Dornic for useful discussions and John Gibbon and Yves Pomeau for useful comments. The constructive remarks of two referees led to substantial enrichment of the model with respect to its original setting.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Appendix A. Useful Properties

We introduce the function: $\phi(\mathbf{x}, \gamma) = \|\mathbf{x}\| - \gamma \cdot \mathbf{x}$. Such function has the properties:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \gamma \tag{A1}$$

$$\phi = \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi \tag{A2}$$

$$\nabla_{\gamma}\phi = -\mathbf{x} \tag{A3}$$

$$\Delta_{\mathbf{x}}(\ln(\phi)) = \frac{1 - \gamma^2}{\phi^2}. \tag{A4}$$

Therefore, \mathbf{v}_{α} can also be written:

$$\mathbf{v}_{\alpha} = -2\nabla(\ln \phi_{\alpha}) + 2\mathbf{x}\Delta \ln(\phi_{\alpha}). \tag{A5}$$

With such expression, it is easy to check that \mathbf{v}_{α} is of zero divergence everywhere except at $x = 0$, where it is undefined.

Appendix B. Computation of the Generalized Momentum

By definition:

$$\mathbf{\Pi}_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_{\mathbf{x}_{\alpha}}} \mathbf{v}_{\alpha} dS, \tag{A6}$$

where $S_{\mathbf{x}_{\alpha}}$ is a sphere of center \mathbf{x}_{α} , and of radius unity, and the integration is performed only over the surface of the sphere. Taking a spherical coordinate system with respect to a vertical axis along γ_{α} , $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha} = (\cos \psi \sin \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \theta)$, it is easy to see that the azimuthal average of $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}$ perpendicular to γ_{α} is zero, and that the only nonzero component is along γ_{α} , and gives $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha} \rangle_{\psi} = (0, 0, \cos \theta)$. Using the fact that $\cos \theta = (1 - \phi_{\alpha})/\gamma$ with $\gamma = \|\gamma_{\alpha}\|$, we thus get the azimuthal average of \mathbf{v}_{α} as

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle_{\psi} &= (0, 0, C); \\ C &= \frac{2\gamma}{\phi} - \frac{2(1 - \phi)}{\gamma\phi} + 2\frac{(1 - \gamma^2)(1 - \phi)}{\gamma\phi^2}, \end{aligned}$$

where we have dropped the subscripts α for simplicity. We may easily compute the integration of the various terms over θ since, after a change of variable $y = \cos \theta$, and we get for any $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\phi^{n+1}} \right\rangle_{\theta} &= \int \frac{\sin \theta}{\phi^{n+1}} d\theta; \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 - \gamma y)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{n\gamma} \left(\frac{1}{(1 - \gamma)^n} - \frac{1}{(1 + \gamma)^n} \right), \end{aligned}$$

with the convention that $1/nx^n = \ln(x)$ when $n = 0$. Summing all the terms, we finally obtain Equation (10).

Appendix C. Velocity Gradient Tensor

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{U} &= \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \\ &= -\frac{2}{\phi}\left[\left(\gamma - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + 2\frac{(1-\gamma^2)}{\phi}\mathbf{x}\right) \otimes \frac{\nabla\phi}{\phi} + \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1-\gamma^2}{\phi}\right)\mathbb{I} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}\right] \\ &= -\frac{2}{\phi^2}\left[-\gamma \otimes \gamma + \frac{(3\gamma\cos(\theta) - \gamma^2(2 + \cos^2(\theta)))}{(1-\gamma\cos(\theta))} \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\gamma \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\gamma\cos(\theta) + 1 - 2\gamma^2)}{(1-\gamma\cos(\theta))} \frac{\mathbf{x} \otimes \gamma}{\|\mathbf{x}\|} - \gamma(\cos(\theta) - \gamma)\mathbb{I}\right]\end{aligned}$$

$$\text{where } \cos(\theta) = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x})/(\gamma\|\mathbf{x}\|)$$

Appendix D. Vorton Dynamics

The dynamics of the vortons are given by [10]:

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \quad (\text{A7})$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \left[\frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \times \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} - 3(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}_\beta)}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^5} \right]. \quad (\text{A8})$$

References

- Gibbon, J.D.; Pal, N.; Gupta, A.; Pandit, R. Regularity criterion for solutions of the three-dimensional Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations and associated computations. *Phys. Rev. E* **2016**, *94*, 063103. [\[CrossRef\]](#) [\[PubMed\]](#)
- Constantin, P.; Weinan, E.; Titi, E.S. Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation. *Commun. Math. Phys.* **1994**, *165*, 207–209. [\[CrossRef\]](#)
- Hicks, W. Researches in vortex motion. Part III. On spiral or gyrostatic vortex aggregates. *Proc. R. Soc. Lond.* **1899**, *62*, 379387.
- Constantin, P.; Majda, A. The Beltrami spectrum for incompressible fluid flows. *Commun. Math. Phys.* **1988**, *115*, 435–456. [\[CrossRef\]](#)
- Buckmaster, T.; De Lellis, C.; Székelyhidi, L.; Vicol, V. Onsager's Conjecture for Admissible Weak Solutions. *Commun. Pure Appl. Math.* **2018**, *72*, 229–274. [\[CrossRef\]](#)
- Lundgren, T.S. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids* **1982**, *25*, 2193–2203. [\[CrossRef\]](#)
- Gilbert, A.D. A cascade interpretation of Lundgren stretched spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids A Fluid Dyn.* **1993**, *5*, 2831–2834. [\[CrossRef\]](#)
- Chorin, A.J. Equilibrium statistics of a vortex filament with applications. *Comm. Math. Phys.* **1991**, *141*, 619–631. [\[CrossRef\]](#)
- Koumoutsakos, P. Multiscale flow simulations using particles. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **2005**, *37*, 457–487. [\[CrossRef\]](#)
- Novikov, E.A. Generalized dynamics of three-dimensional vortex singularities / vortons/. *Zhurnal Eksperimentalnoi Teor. Fiz.* **1983**, *84*, 975–981.
- Aksman, M.J.; Novikov, E.A.; Orszag, S.A. Vorton Method in Three-Dimensional Hydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **1985**, *54*, 2410–2413. [\[CrossRef\]](#) [\[PubMed\]](#)
- Alkemade, A.J.Q.; Nieuwstadt, F.T.M.; van Groesen, E. The vorton method. *Appl. Sci. Res.* **1993**, *51*, 3–7. [\[CrossRef\]](#)
- Pedrizzetti, G. Insight into singular vortex flows. *Fluid Dyn. Res.* **1992**, *10*, 101–115. [\[CrossRef\]](#)
- Saffman, P.G.; Meiron, D.I. Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flow. *Phys. Fluids* **1986**, *29*, 2373–2375. [\[CrossRef\]](#)
- Winckelmans, G.; Leonard, A. Weak solutions of the three-dimensional vorticity equation with vortex singularities. *Phys. Fluids* **1988**, *31*, 1838–1839. [\[CrossRef\]](#)
- Greengard, C.; Thomann, E. Singular vortex systems and weak solutions of the Euler equations. *Phys. Fluids* **1988**, *31*, 2810–2813. [\[CrossRef\]](#)
- Yeung, P.K.; Sreenivasan, K.R.; Pope, S.B. Effects of finite spatial and temporal resolution in direct numerical simulations of incompressible isotropic turbulence. *Phys. Rev. Fluids* **2018**, *3*, 064603. [\[CrossRef\]](#)
- Dubrulle, B. Beyond Kolmogorov cascades. *J. Fluid Mech.* **2019**, *867*, P1. [\[CrossRef\]](#)
- Leray, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.* **1934**, *63*, 193248. [\[CrossRef\]](#)
- Sverák, V. On Landau's solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Sci.* **2011**, *179*, 208. [\[CrossRef\]](#)
- Landau, L.D. A new exact solution of the Navier-Stokes equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **1944**, *44*, 311314.

22. Squire, H. XCI. Some viscous fluid flow problems I: Jet emerging from a hole in a plane wall. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **1952**, *43*, 942–945. [[CrossRef](#)]
23. Batchelor, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2000.
24. Tian, G.; Xin, Z. One-point singular solutions to the Navier–Stokes equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1998**, *11*, 135–145. [[CrossRef](#)]
25. Cannone, M.; Karch, G. Smooth or singular solutions to the Navier–Stokes system? *J. Differ. Equ.* **2004**, *197*, 247–274. [[CrossRef](#)]
26. Eyink, G.L. Turbulence Theory. Course Notes. The Johns Hopkins University. 2007–2008. Available online: <https://www.ams.jhu.edu/~eyink/Turbulence/notes.html> (accessed on 24 June 2022).
27. Kruskal, M.D. The Korteweg–de Vries equation and related evolution equations. In *Nonlinear Wave Motion*; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 1974; pp. 61–83.
28. Calogero, F. Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related solvable many-body problems. *Il Nuovo C. B (1971–1996)* **1978**, *43*, 177–241. [[CrossRef](#)]
29. Calogero, F. Classical many-body problems amenable to exact treatments. In *Lecture Notes in Physics*; Springer: Berlin, Germany, 2001; Volume 66.
30. Saw, E.W.; Kuzzay, D.; Faranda, D.; Guittoneau, A.; Daviaud, F.; Wiertel-Gasquet, C.; Padilla, V.; Dubrulle, B. Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow. *Nat. Comm.* **2016**, *7*, 12466. [[CrossRef](#)]
31. Debue, P.; Valori, V.; Cuvier, C.; Daviaud, F.; Foucaut, J.M.; Laval, J.P.; Wiertel, C.; Padilla, V.; Dubrulle, B. Three-dimensional analysis of precursors to non-viscous dissipation in an experimental turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **2021**, *914*, A9. [[CrossRef](#)]
32. Nguyen, F.; Laval, J.P.; Dubrulle, B. Characterizing most irregular small-scale structures in turbulence using local Hölder exponents. *Phys. Rev. E* **2020**, *102*, 063105. [[CrossRef](#)]
33. Kerr, R.M.; Hussain, F. Simulation of vortex reconnection. *Phys. D Nonlinear Phenom.* **1989**, *37*, 474–484. [[CrossRef](#)]
34. Yao, J.; Hussain, F. A physical model of turbulence cascade via vortex reconnection sequence and avalanche. *J. Fluid Mech.* **2020**, *883*, A51. [[CrossRef](#)]
35. Yao, J.; Hussain, F. On singularity formation via viscous vortex reconnection. *J. Fluid Mech.* **2020**, *888*, R2. [[CrossRef](#)]
36. Kimura, Y.; Moffatt, H.K. A tent model of vortex reconnection under Biot–Savart evolution. *J. Fluid Mech.* **2018**, *834*, R1. [[CrossRef](#)]
37. Moffatt, H.K.; Kimura, Y. Towards a finite-time singularity of the Navier–Stokes equations Part 1. Derivation and analysis of dynamical system. *J. Fluid Mech.* **2019**, *861*, 930–967. [[CrossRef](#)]
38. Moffatt, H.K.; Kimura, Y. Towards a finite-time singularity of the Navier–Stokes equations. Part 2. Vortex reconnection and singularity evasion. *J. Fluid Mech.* **2019**, *870*, R1. [[CrossRef](#)]
39. Moffatt, H.K.; Kimura, Y. Towards a finite-time singularity of the Navier–Stokes equations. Part 2. Vortex reconnection and singularity evasion—CORRIGENDUM. *J. Fluid Mech.* **2020**, *887*, E2. [[CrossRef](#)]
40. Kimura, Y.; Moffatt, H.K. Scaling properties towards vortex reconnection under Biot–Savart evolution. *Fluid Dyn. Res.* **2017**, *50*, 011409. [[CrossRef](#)]
41. Vilhois, A.; Proment, D.; Krstulovic, G. Irreversible Dynamics of Vortex Reconnections in Quantum Fluids. *Phys. Rev. Lett.* **2020**, *125*, 164501. [[CrossRef](#)]
42. Laval, J.P.; Dubrulle, B.; Nazarenko, S. Fast numerical simulations of 2D turbulence using a dynamic model for subfilter motions. *J. Comput. Phys.* **2004**, *196*, 184–207. [[CrossRef](#)]

4.3.2 Conclusions du modèle des pinçons et perspectives

Dans cet article, nous avons introduit un nouveau modèle basé sur les idées du vorton de Novikov [123]. Nous avons néanmoins adapté ce modèle pour l'étude des singularités dans le cadre des équations de Navier-Stokes visqueux. Nous avons réalisé plusieurs type d'interactions de ces objets dans le cas plan puis en trois dimensions. Différentes conditions ont été testée pour étudier la réponse et l'interaction de ces objets.

Dans le cas d'un forçage non-aléatoire, nous observons trois dynamiques typiques: une première correspondant à une annihilation de cette paire de pinçons qui s'accompagne d'une dissipation infinie et deux situations dans lesquelles chacun des pinçons est renvoyé à l'infini, un cas d'alignement des dipôles et un cas d'anti-alignement.

Dans le cas d'un forçage aléatoire de faible amplitude, nous avons montré que la durée de vie du couple de pinçon est allongée, ce qui permet aux pinçons de se trouver dans un état d'équilibre instable au court duquel le forçage aléatoire compense la dissipation interne au modèle. Chacun des pinçons tend à s'orienter perpendiculairement à la ligne qui les joints pour suivre un cercle limite avant de se dissiper par effets visqueux.

Nous avons enfin étudié le cas général dans la limite du temps court de deux pinçons présentant des orientations et des intensités différentes, sans forçage et en l'absence de viscosité dans le modèle. Nous observons trois types de dynamiques dans ce cas général: un premier cas où ces deux pinçons tendent vers une limite dipolaire dans laquelle ils finissent par se repousser progressivement. Un deuxième cas correspond à un alignement dans lequel les deux pinçons s'éloignent infiniment. Un dernier cas, dans lequel les deux pinçons se rencontrent et s'annihilent de manière explosive. Ce dernier cas, plus général que l'étude menée en première partie, se rapproche de la dynamique de reconnexion. Cette étude permet en particulier d'ouvrir un nouveau point de vue pour prendre en compte les interactions inter-échelles et l'intermittence. Ce modèle donne des perspectives intéressantes pour des cas simples d'interactions. En particulier, une étude qu'il reste encore à considérer sont les interactions de N pinçons qui pourraient produire des phénomènes collectifs et ouvrir des perspectives pour étudier dans un nouveau cadre les phénomènes d'intermittence.

Dans le cas d'annihilation des pinçons apparaissant dans certains cas d'alignement bien définis dans cette étude, nous observons une interaction suivant un rescaling de Leray [104] vérifiant $\sqrt{t - t_b}$.

Ce modèle n'a pas vocation à expliquer de manière exacte la turbulence ni même d'offrir une preuve à l'existence ou non de singularités. Néanmoins, il offre une version simple d'interactions de solutions singulières des équations de Navier-Stokes dans le formalisme faible. Il peut ainsi servir de modèle sur le principe du modèle d'Ising pour mettre en lumière des phénomènes physiques particuliers. Dans ce cadre, nous nous sommes intéressés à l'impact de ces interactions sur le tenseur des contraintes, terme qui correspond à un échange énergétique entre les petites et les grandes échelles.

4.4 Conclusion

Dans une première partie, nous avons étudié le terme responsable de l'interaction énergétique entre le champ de vitesse filtré et le champ sous-maille. Nous avons en particulier montré que ce terme était corrélé au flux d'énergie inter-échelles \mathcal{D}_ℓ^I . Dans cette perspective, nous avons étudié la corrélation entre le terme de diffusion de l'équation de vorticité $\Delta\omega$ et le terme d'écart à Navier-Stokes filtré, sur le modèle de la viscosité turbulente.

A la suite de cette étude expérimentale, nous avons développé un modèle mathématique simple décrivant les interactions de plusieurs singularités et leur impact sur le champ de vitesse. Ce modèle permet de formuler une explication théorique simplificatrice qui peuvent être comparées aux données expérimentales.

Dans cette étude, nous avons décrit les interactions de deux pinçons. Malheureusement, cette étude paraît trop simplificatrice pour pouvoir permettre d'étudier théoriquement les champs de vitesse expérimentaux. Une étude d'un grand nombre d'interactions pourrait être intéressante pour développer les idées de ce modèle à l'image de ce qui est fait avec le modèle d'Ising.

5

Évènements extrêmes de dispersion

5.1 Introduction

Dans la partie 2.2.2, nous avons introduit la notion d'irréversibilité lagrangienne. Cette quantité est l'équivalent lagrangien de la dissipation. Dans le cadre du théorème de T. Drivas [57] ces deux quantités partagent la même limite. Nous avons également introduit, dans cette partie, la méthode expérimentale pour estimer l'irréversibilité lagrangienne.

Dans ce chapitre, la partie 5.2 sera consacrée au rappel des principales conclusions de l'article [43] dans lequel nous avons conduit une validation expérimentale des travaux menés par T. Drivas. Dans un deuxième temps, partie 5.3, nous évoquerons les méthodes de calculs que nous avons employées pour l'estimation de la courbure et de la torsion, introduite partie 2.2.3. Nous donnerons les conclusions de cette étude ainsi que quelques résultats complémentaires sur la qualité des résultats. Une étude supplémentaire sur les statistiques à un point mettront en lumière les limites d'anisotropie de notre expérience, partie 5.6. Enfin, dans la dernière partie, nous développerons des résultats sur l'étude topologique de trajectoires les plus irréversibles, partie 5.7.3 dans l'article "Riding the most irreversible paths in turbulence" (non-soumis).

5.2 Validation expérimentale du théorème de Drivas

Même si les points de vue eulérien et lagrangien sont étroitement liés (voir partie 2.2.1), il est souvent difficile d'avoir un outil valable à la fois pour le point de vue eulérien et son équivalent pour le point de vue lagrangien. Dans l'étude menée par T. Drivas [57] néanmoins, il devient expérimentalement possible de construire un tel outil capable de faire ce lien. Le coefficient d'irréversibilité lagrangienne et le coefficient d'irréversibilité

eulérien partagent la même limite dans l'ordre défini dans la formule suivante. La limite correspondant à la dissipation locale. On peut ainsi écrire:

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{D}_\ell^I + \mathcal{D}_\ell^\nu = \lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

Dans l'article de T Drivas, l'ordre des limites importe. Pour le membre de gauche, cet ordre correspond au cas limite d'un nombre de Reynolds infini, d'une limite à résolution idéale et enfin en limite locale. Pour le membre de droite, cet ordre correspond au cas limite d'un nombre de Reynolds infini, en limite instantanée, à résolution idéale et en limite locale.

Rappelons de plus que l'estimation du coefficient d'irréversibilité lagrangien nécessite de reconstruire un nombre suffisamment grand de trajectoires avec une bonne précision à la fois spatiale et temporelle. Cette estimation requiert donc de nombreux traceurs pour pouvoir réaliser une moyenne suffisamment convergée. De plus, l'évaluation de ce coefficient nécessite de considérer des trajectoires suffisamment grandes, un temps de persistance des particules dans le volume d'étude suffisamment grand est préférable. Enfin, l'estimation de la dissipation locale pour des nombres de Reynolds élevés pose là aussi des difficultés étant donné que l'échelle de Kolmogorov décroît avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Dans l'article [43], A. Cheminet et al. vérifient la validité expérimentale du théorème énoncé par T. Drivas [57]. Pour des nombres de Reynolds respectivement $Re = 6.3 \times 10^3$ et $Re = 1.6 \times 10^5$ dans deux expériences différentes partageant le même rapport d'aspect (SVK et GVK), il a été mis en évidence une bonne correspondance entre la donnée de la dissipation locale $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ et le coefficient d'irréversibilité lagrangien $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t)$.

Nous pouvons voir une correspondance de motifs entre la Figure 5.1-**a**, correspondant au champ de taux de dissipation locale obtenu par la formule (2.39) dans le plan médian pour le cas SVK et la Figure 5.1-**b** correspondant à l'interpolation linéaire du coefficient d'irréversibilité $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^{\tau, \ell}(\mathbf{x}, t)$. Les échelles ℓ sont comparables pour le champ de dissipation locale (obtenu par une méthode eulérienne) et pour le champ interpolé de coefficient d'irréversibilité lagrangien (obtenu d'un point de vue lagrangien).

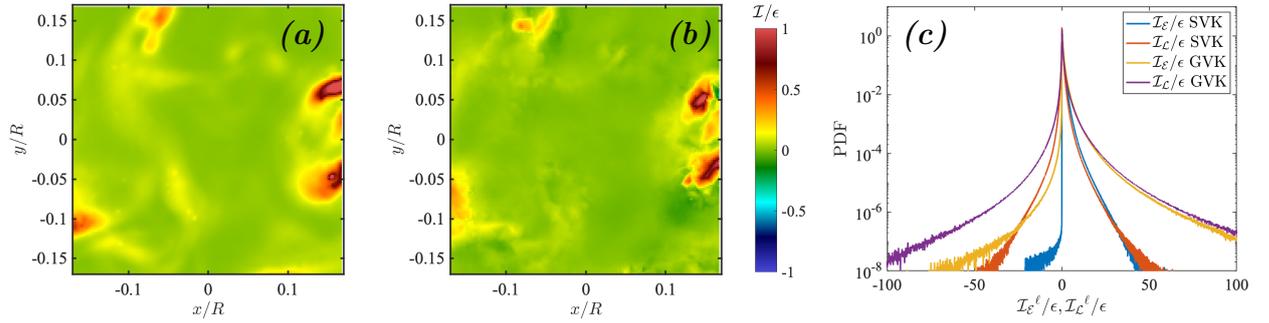


Figure 5.1 – Comparaison entre le coefficient d’irréversibilité eulérienne et le coefficient d’irréversibilité lagrangienne obtenus expérimentalement, adapté de [43]. (a) coefficient d’irréversibilité eulérienne pour le cas T4t dans le plan médian, (b) interpolation linéaire du coefficient d’irréversibilité lagrangienne dans le plan médian, (c) densité de probabilité pour le coefficient d’irréversibilité lagrangienne et du coefficient d’irréversibilité eulérienne pour deux cas, le premier SVK correspondant à un nombre de Reynolds 6.3×10^3 et le second GVK correspondant à un nombre de Reynolds 1.6×10^5 .

Enfin, deux études statistiques sont réalisées. La première Figure 5.1-(c) compare la dissipation locale et le coefficient d’irréversibilité. Nous obtenons pour les valeurs positives une bonne correspondance de la probabilité de ces deux quantités. La seconde Figure 5.2, donne la densité de probabilité jointe entre le maximum de dissipation locale et le maximum de coefficient d’irréversibilité pour les deux jeux de données (SVK et GVK). Ces deux quantités semblent bien corrélées en suivant une courbe $y = x$ tracée en pointillé blanc.

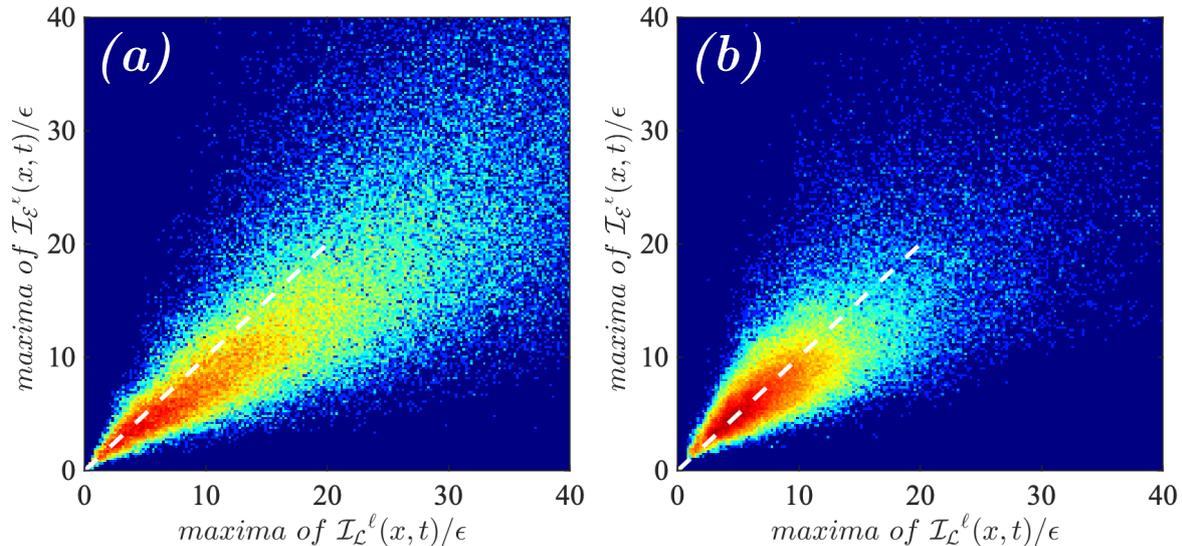


Figure 5.2 – Densité de probabilité jointe entre le maximum de dissipation locale et le maximum du coefficient d’irréversibilité, adapté de [43]. (a) l’étude est réalisée sur le cas T4t (b) l’étude est réalisée sur le cas C8. La ligne pointillée correspond à la première bissectrice.

Dans cette étude, nous avons validé expérimentalement le théorème énoncé par T. Drivas. Elle ouvre en particulier la voie vers une étude pratique et revisitée de la notion d’irréversibilité initiée par L. F. Richardson. En particulier, nous pouvons relier en pratique la notion d’irréversibilité - point de vue lagrangien - et la dissipation locale - point de vue eulérien. D’une part, nous faisons un lien plus étroit entre point de vue eulérien et sa contrepartie lagrangienne. D’autre part, cet article a également été l’occasion d’étudier des zones très dissipatives en lien avec la reconnection de tourbillons. Cette première étude suggère donc un lien possible entre zones de forte irréversibilité et singularités.

5.3 Méthodes de calcul de la torsion et de la courbure

Pour la première méthode d’estimation du couple courbure, torsion, nous calculons dans un premier temps les vecteurs du repère de Frenet associés à chaque particule. Nous calculons ensuite les dérivées vectorielles par différence finie décentrée puis nous estimons la courbure et la torsion par application des formules (2.67).

Pour la deuxième méthode, nous utilisons les données de vitesse et d’accélération issues de l’algorithme de filtrage *TrackFit*. La deuxième estimation de la courbure, équation (2.75) est obtenue par un calcul direct à partir du champ de vitesse et d’accélération lagrangiens. Pour la torsion, nous calculons préalablement la dérivée temporelle de l’accélération avec un schéma temporel centré d’ordre 2 (décentré sur les bords) (5.2) puis nous appliquons la deuxième formule (2.75) pour obtenir l’estimation de la torsion.

Considérons une trajectoire contenant $n + 1$ pas de temps successifs séparés par dt . Soit t_i un temps de la trajectoire $i \in \{0, \dots, n\}$ avec t_0 le début et t_n la fin de la trajectoire

et $t_i = (i - 1)dt + t_0$. La dérivée temporelle de la quantité f est obtenue par le schéma centré suivant :

$$\frac{df}{dt} = \begin{cases} \frac{f(t + dt) - f(t - dt)}{2dt}, & t_0 < t < t_n, \\ \frac{4f(t + dt) - f(t + 2dt) - 3f(t)}{2dt}, & t = t_0, \\ \frac{-4f(t - dt) + f(t - 2dt) + 3f(t)}{2dt}, & t = t_n. \end{cases} \quad (5.2)$$

5.4 Etude qualitative de la torsion et de la courbure

Dans cette partie, nous étudions de manière qualitative les résultats de torsion et de courbure. Pour cela, nous comparons les densités de probabilité de la torsion et de la courbure en les comparant aux lois de puissance théoriques. Pour la courbure, des études numériques [33, 186] et expérimentales [156] montrent que la densité de probabilité suit une loi en $P(\kappa) \propto \kappa^{-5/2}$ pour les grandes valeurs de courbures et une loi linéaire pour les petites valeurs. Pour la valeur absolue de la torsion, plusieurs études numériques [33, 186] montrent que la densité de probabilité est constante pour les valeurs faibles puis décroît selon $P(\tau) \propto \tau^{-3}$ pour les grandes valeurs. Nous avons vérifié ces résultats dans nos jeux de données, dont un exemple est représenté en Figure 5.3. Nous avons conduit une étude statistique pour chaque méthode sur le cas T4t en Figure 5.4 dans laquelle les lois de puissance sont matérialisées par des droites en pointillées. Nous avons également représenté la courbe compensée dans l'insert.

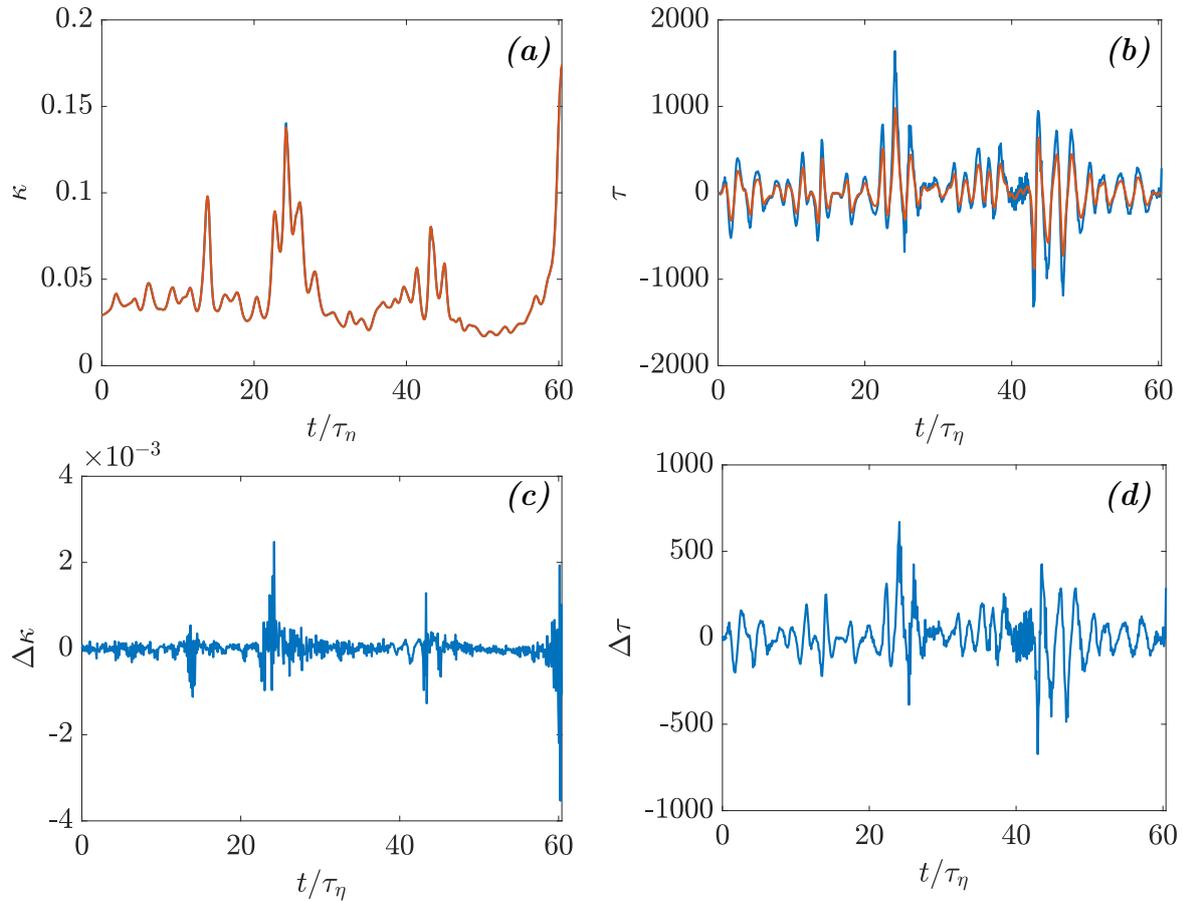


Figure 5.3 – Comparaison des méthodes de calcul entre la torsion et la courbure. Exemple sur la trajectoire la plus longue du run 1, cas C8. (a) Comparaison de l’estimation de la courbure entre la méthode 1 (en bleu) et la méthode 2 (en orange). Les deux courbes sont confondues, l’écart est de l’ordre de 10^{-3} . (b) Comparaison de l’estimation de la torsion entre la méthode 1 (en bleu) et la méthode 2 (en orange). (c et d) Différence entre les deux méthodes de calcul pour chaque quantité.

Dans la Figure 5.3, la différence observée dans les deux estimations de la courbure est très faible (au maximum de 4×10^{-3} pour cet exemple). Pour l’estimation de la torsion, la différence est plus grande. Cette différence peut être due, d’une part, à l’estimation de la dérivée vectorielle par la première méthode car le schéma de dérivation est d’ordre 1 et d’autre part, au filtre appliqué sur l’accélération par l’algorithme *TrackFit*.

Dans la Figure 5.4-a, on remarque que les deux calculs (méthodes 1 et 2) se superposent. La loi compensée fait également ressortir une bonne correspondance dans chaque cas. Cependant, pour la torsion, Figure 5.4-b, on observe des différences pour les fortes valeurs, différences également observées même en ne conservant que les plus longues trajectoires, moins soumises au bruit de reconstruction. Ce dernier point est probablement dû au calcul de la torsion par la méthode 1 dans lequel nous avons utilisé un schéma de dérivation d’ordre 1.

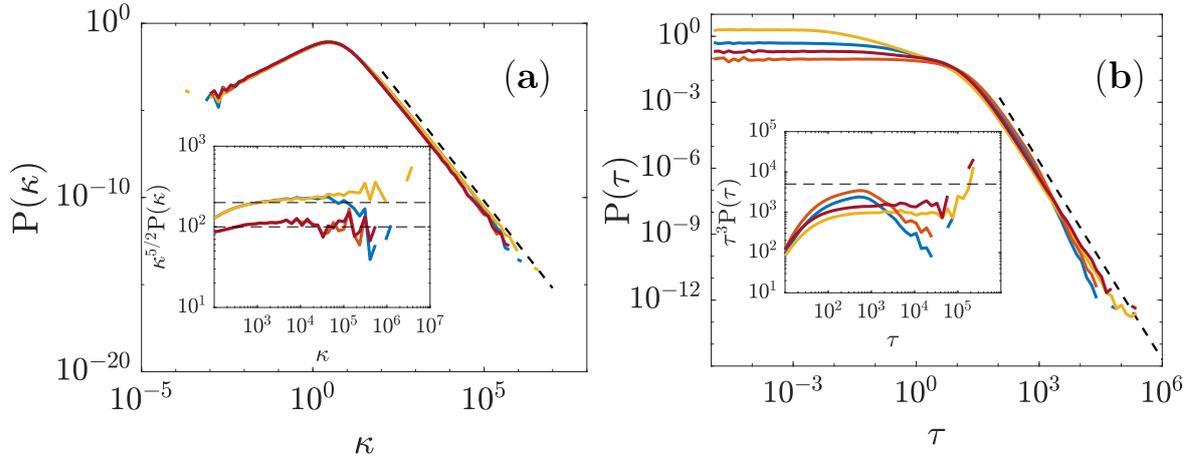


Figure 5.4 – Densité de probabilité pour la courbure (a) et la torsion (b) par les deux méthodes de calculs. Ces quantités sont obtenues à partir des données de trajectoires lagrangiennes filtrées à l’aide de l’algorithme *TrackFit*. Les statistiques sont calculées sur l’ensemble des données du run 1 du cas T4t. Sur chacune des figures principales, nous avons pris quatre jeux de données différents: la courbe bleu (resp. orange) correspond au calcul de torsion et courbure par la première méthode (Eqs. (2.67)) sur toutes les trajectoires (resp. avec les trajectoires supérieures à 50 pas de temps). La courbe jaune (resp. rouge) correspond à la deuxième méthode de calcul (Eqs. (2.75)) en considérant toutes les trajectoires (resp. avec les trajectoires supérieures à 50 pas de temps). La ligne en pointillée correspond respectivement à $\kappa^{-5/2}$ (a) et τ^{-3} (b). Dans les inserts, nous avons tracé les quantités compensées.

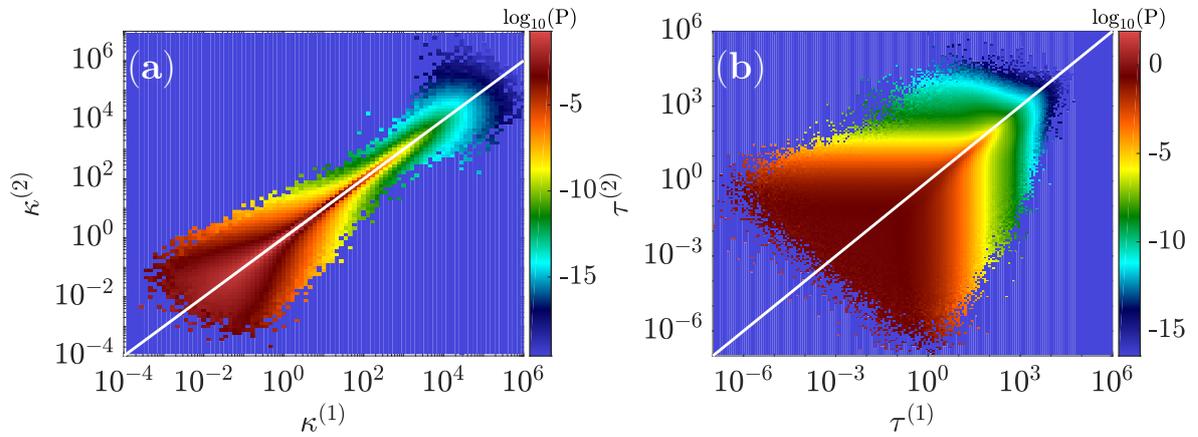


Figure 5.5 – Densité de probabilité jointe entre les deux méthodes de calcul ($\tau^{(1)}$ et $\kappa^{(1)}$ pour la méthode 1 et $\tau^{(2)}$ et $\kappa^{(2)}$ pour la méthode 2) réalisées sur l’ensemble du cas T4t. (a) pour la courbure (b) pour la torsion. Nous avons considéré les trajectoires supérieures à 50 pas de temps sur lesquels nous avons enlevé les extrémités (deux (resp. trois) premiers et deux (resp. trois) derniers instants pour la courbure (resp. torsion)).

En utilisant la méthode 2, nous avons effectué une comparaison entre les différents jeux de données correspondant à des Reynolds différents. Nous avons de plus utilisé la

remise à l'échelle préconisée dans l'article [186]. Toutes les courbes de la Figure 5.6-a suivent la même loi de puissance sauf pour la dernière courbe avec $R_\lambda = 302.5$. Après le calcul du champ de vorticité, nous avons découvert que ce cas correspondait à un écoulement dans l'état bifurqué, ce point a ensuite été confirmé par l'étude menée sur le coefficient d'irréversibilité.

Lors de la prise de mesure, les données de couple étaient trop bruit es pour permettre de différencier l'état symétrique de l'état bifurqué. Par ailleurs, l'écart observé sur la remise à l'échelle de la Figure 5.6-a est donc probablement dû à une mauvaise estimation de η et R_λ . Cependant, il est à noter que les données des six cas présentés ici vérifient les mêmes lois de puissance.

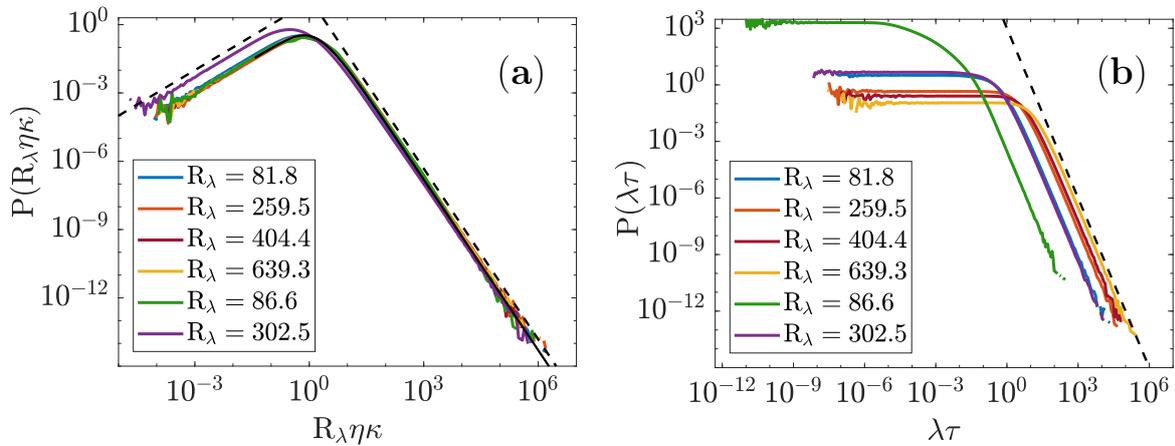


Figure 5.6 – Densité de probabilité de la courbure (a) et de la torsion (b). Les calculs sont effectués à partir de la méthode 2 sur les données de trajectoires lagrangiennes filtrées par l'algorithme *TrackFit* de longueur supérieure à 50 pas de temps et auxquelles nous avons enlevé les extrémités (deux (resp. trois) premiers et deux (resp. trois) derniers instants pour la courbure (resp. torsion)) pour éviter les sources de bruits dues aux effets de bords. Nous avons comparé 5 expériences différentes distingu es par des nombres de Reynolds (basé sur l'échelle de Taylor) R_λ différents. Les 4 premières courbes $R_\lambda \in \{81.8, 259.5, 404.4, 639.3\}$ correspondent aux données issues de l'expérience SVK et les deux dernières $R_\lambda \in \{86.6, 302.5\}$ correspondent aux données de l'expérience GVK. La remise à l'échelle op r e pour (a) correspond à celle pr conis e dans l'article [186], la ligne noire correspond à la formule donn e dans cet article Eq. (2). Les lignes pointill es correspondent respectivement à κ (valeurs faibles) $\kappa^{-5/2}$ (valeurs fortes) (a) et τ^{-3} (b).

5.5 Conclusions sur les calculs de torsion et courbure

Nous observons un comportement différent pour le calcul de la courbure et de la torsion (méthode 1, méthode 2). Une première raison correspond au schéma de dérivation utilisé dans la méthode 1, une deuxième raison provient très certainement de l'impact du filtrage. En annexe D, partie D.1, nous développons une étude préliminaire en comparant les schémas de dérivation, schéma centré et schéma décentré. Nous comparons

également les résultats de courbure à l'aide une densité de probabilité jointe entre les données de trajectoires brutes (non filtrées) et les données de trajectoires filtrées par l'algorithme *TrackFit*. Cette comparaison donne des informations supplémentaires sur l'impact du filtrage. Néanmoins, cette étude reste préliminaire et ne permet pas de quantifier l'impact du filtrage sur le calcul de courbure. L'étude sur la torsion n'a pas été réalisée.

D'un point de vue statistique, les comportements de la courbure et de la torsion, estimés à partir de la méthode 2, sont davantage en accord avec les attentes théoriques de ces quantités. Les deux causes expliquant les différences observées entre les deux méthodes sont dues à la fois au schéma numérique employé et à l'effet du filtrage des données de vitesse et d'accélération. D'autre part, la méthode 2 est plus simple d'utilisation car elle ne nécessite pas de dérivation curviligne. Dans l'article que nous présentons en partie 5.7.1, nous emploierons la méthode 2 pour l'estimation de la courbure et de la torsion.

5.6 Application : estimation du temps de décorrélation lagrangien à partir de statistique à un point.

Dans cette partie, nous étudions la dispersion d'une particule. Cette étude permet d'une part de connaître le temps de décorrélation des données lagrangiennes et d'autre part de mettre en lumière les limites d'isotropie de cette expérience. Notre volume d'étude n'est pas cubique, le volume de reconstruction est limité par l'épaisseur laser de 6 mm, les extensions spatiales sur x et y sont respectivement de 4 cm et 5 cm pour GVK et de 4.1 cm et 3.8 cm pour SVK. En conséquence, l'écart quadratique moyen peut dépasser la dimension minimale (*i.e.* l'épaisseur de la nappe laser).

Nous calculons dans un premier temps le déplacement quadratique moyen par rapport à l'origine. Il est calculé sur l'ensemble des trajectoires de 200 pas de temps, pour les 40 runs expérimentaux. Nous avons ensuite réalisé deux courbes d'ajustement selon la formule (2.49) par une méthode des moindres carrés non-linéaire (sous *Matlab*®). Le premier ajustement est fait sur toute la plage de temps (200 pas de temps) et le second sur une plage de temps restreinte de telle sorte que l'écart quadratique moyen ne dépasse pas la dimension minimale du volume. A partir de ces courbes, nous obtenons ainsi deux estimations des temps de décorrélations lagrangiens, notés respectivement $T_L^{(1)}$ et $T_L^{(2)}$. Nous donnons en Figure 5.7 l'exemple du cas C8 et nous reportons dans le tableau 5.1 l'ensemble des temps T_L obtenus.

Dans le tableau 5.1, nous voyons que le pas de temps entre deux instants successifs dt reste systématiquement de deux ordres de grandeur plus petit que l'estimation du temps de décorrélation lagrangien. Ce point permet d'avoir une première estimation des temps sur lesquels faire les études statistiques que nous allons conduire par la suite.

Les lignes 2 et 3 du tableau 5.1 donnent des valeurs assez éloignées. Ceci est la signature du problème d'anisotropie dans le volume de reconstruction.

Par ailleurs, dans cette étude préliminaire, nous remarquons que les colonnes 4 et 6 ainsi que 1 et 5 du tableau 5.1 donnent des valeurs différentes pour l'estimation du

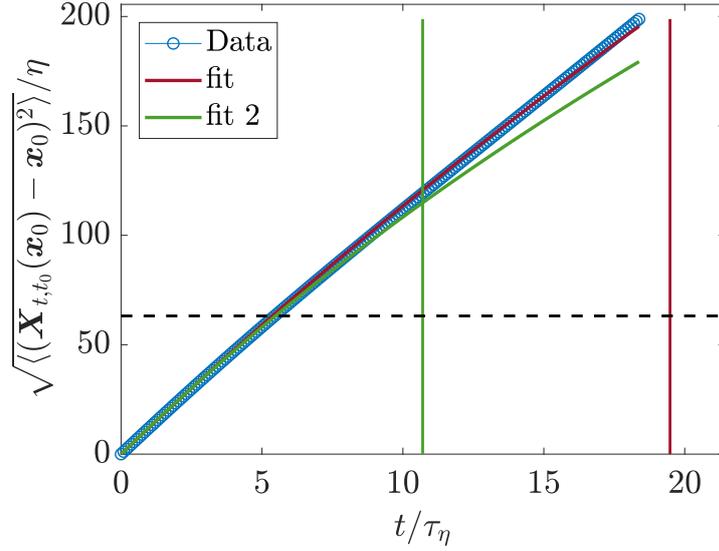


Figure 5.7 – Moyenne quadratique de l'écart à l'origine pour le cas C8. Cette moyenne est réalisée sur l'ensemble des 40 runs de ce cas. En rouge, la courbe d'ajustement d'équation $y = a \cdot (t + T_L \cdot (e^{-t/T_L} - 1))$, en vert la même courbe d'ajustement sur la plage de temps correspondant à une dispersion inférieure à la plus petite dimension du volume. Les droites verticales correspondent à l'estimation de T_L obtenue par chaque courbe d'ajustement. La droite en pointillée noire correspond à la plus petite dimension de volume (ici l'épaisseur de la nappe laser). Nous avons adimensionné les temps par le temps de Kolmogorov τ_η .

Type	SVK				GVK	
Re	6.3×10^3	3.1×10^4	6.3×10^4	1.6×10^5	6.3×10^3	1.6×10^5
dt/τ_η	0.05	0.15	0.22	0.34	0.009	0.09
$T_L^{(1)}/\tau_\eta$	$\{6.0\}^{\pm 0.1}$	$\{12.7\}^{\pm 0.3}$	$\{21.1\}^{\pm 0.7}$	$\{8.3\}^{\pm 0.03}$	$\{3.1\}^{\pm 0.42}$	$\{19.5\}^{\pm 1.5}$
$T_L^{(2)}/\tau_\eta$	$\{5.5\}^{\pm 0.3}$	$\{8.9\}^{\pm 0.5}$	$\{12.5\}^{\pm 0.3}$	$\{9.9\}^{\pm 0.3}$	$\{1.5\}^{\pm 0.27}$	$\{10.7\}^{\pm 1.1}$

Table 5.1 – Temps de décorrélation lagrangien estimés à partir des ajustements de courbes dont on trouvera un exemple en Figure 5.7. Le temps $T_L^{(1)}$ correspond à la courbe d'ajustement obtenue en prenant en compte 200 pas de temps successifs, la deuxième estimation $T_L^{(2)}$ correspond à la valeur obtenue avec la courbe d'ajustement réalisée sur la plage de temps contenant la dispersion moyenne inférieure à la dimension la plus petite (*i.e.* l'épaisseur de la nappe laser). Les valeurs en indice correspondent à l'intervalle de confiance à 95%.

temps de décorrélation lagrangien alors que ces cas partagent pourtant le même nombre de Reynolds respectivement $Re = 6.3 \times 10^3$ et $Re = 1.6 \times 10^5$. En outre, on observe une progression croissante de T_L en fonction du Reynolds pour l'ensemble des cas SVK sauf pour le plus grand nombre de Reynolds. A ce jour, nous ne pouvons pas expliquer la diminution de T_L pour ce Reynolds.

5.7 Article : “Riding the most irregular path in turbulence”

5.7.1 Introduction

De nombreuses tentatives ont été menées ces dernières années pour essayer de trouver des pistes d’explication des écoulements turbulents à partir d’un agencement ordonné de structures [26, 60]. Déjà en 1949, G. K. Batchelor et A. A. Townsend [22] font l’hypothèse, dans leurs conclusions, que la turbulence devrait s’organiser aux échelles dissipatives selon de petits tourbillons localisés et de forte intensité. Même si la notion de structures cohérentes [84] comme explication des phénomènes turbulents est toujours une question ouverte [60], plusieurs études semblent toutefois révéler des liens étroits entre certains types de structures cohérentes et des phénomènes turbulents [4, 28, 75, 179]. En particulier, les structures cohérentes peuvent être utilisées comme outils de détections de certains évènements comme, par exemple, les structures de forte vorticité li  es aux zones de forte dissipation et aux phénomènes d’intermittence [189]. Les structures cohérentes d’isovaleurs de \mathcal{D}_ℓ^I peuvent être employ  es comme critère de détection de singularités ou quasi-singularités [98] ou encore les isovaleurs d’exposant de Hölder et leurs liens avec les reconnections de tourbillons [119].

Le développement récent du coefficient d’irréversibilité lagrangien basé sur la dissymétrie antérieure/postérieure de dispersion de paires de particules par T. Drivas et le lien qui existe dans la limite de la viscosité nulle avec la dissipation fournissent un nouveau critère, lagrangien cette fois, pour l’étude des phénomènes de forte dissipation. Les études expérimentales et numériques semblent confirmer les hypothèses de Batchelor et Townsend. Ces zones sont très localis  es et s’organisent selon des structures tubulaires tourbillonnaires qui interagissent entre elles, donnant naissance à des   v  nements de reconnections en cascade, très dissipatives [188]. Ces phénomènes semblent également avoir un lien avec l’intermittence [58].

Dans une étude précédente [53], P. Debue s’  st intéressé à la caractérisation topologique (streamlines) autour des   v  nements eulériens les plus dissipatifs. Dans l’étude que nous menons, nous considérons l’équivalent lagrangien $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}(\mathbf{x}, t)$ de la variation instantan  e d’énergie cinétique \mathcal{D}_ℓ^I et nous étudions également la nature topologique des trajectoires lagrangiennes des   v  nements les plus irréversibles. Bien que les conséquences de l’intermittence eulérienne sur les trajectoires lagrangiennes restent encore mal connues [152], on peut se demander si les trajectoires les plus irréversibles s’organisent aussi en structures cohérentes tourbillonnaires à l’image des zones les plus dissipatives du point de vue eulérien. Nous nous intéresserons donc dans l’étude pr  sent  e dans l’article “Riding the most irregular paths in turbulence” aux caractéristiques géométriques des trajectoires les plus irréversibles.

Dans la première partie de cet article, nous nous intéressons aux cas T4t et C8 ayant pour nombre de Reynolds respectivement $Re = 6.3 \times 10^3$ et $Re = 1.6 \times 10^5$. Nous avons calculé pour chaque particule d’une part le coefficient d’irréversibilité - selon les méthodes d  velopp  es en 2.2.2 - et d’autre part la courbure et la torsion à partir de la

méthode 2 évoquée en 5.3. Nous avons ensuite mené une étude statistique de la courbure et la torsion en sélectionnant uniquement les trajectoires les plus irréversibles.

Dans la deuxième partie de l'article, conscients de la difficulté inhérente à l'estimation du coefficient d'irréversibilité lagrangienne - nécessitant en particulier un nombre important de traceurs suffisamment bien résolus temporellement et spatialement - nous avons développé un second critère pour la sélection de trajectoires exploitant uniquement les champs de vitesse et d'accélération lagrangiens. Bien que ce critère sélectionne plus de trajectoires et pas uniquement les plus irréversibles, il permet néanmoins de sélectionner simplement des trajectoires révélant un intérêt particulier. Par ailleurs, ce critère peut être utilisé en pratique pour des expériences dans lesquelles le nombre de traceurs est relativement restreint. En particulier, ce deuxième critère pourrait être extrêmement utile dans les études expérimentales des écoulements atmosphériques ou marins. En particulier, il pourrait se révéler important dans la prévision et l'explication de phénomènes atmosphériques majeurs tels que les cyclones, les tornades et les tempêtes.

Riding the most irregular paths in turbulence

D. Geneste^a, T. Chaabo^a, A. Cheminet^a, V. Valori^a, Y. Ostovan^a, Ch. Cuvier^b, F. Daviaud^a, J.-M. Foucaut^b, J.-Ph. Laval^b, V. Padilla^b, C. Wiertel^b, and B. Dubrulle^{a,2}

^aUniversité Paris-Saclay, CEA, CNRS, SPEC, CEA Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex, France.; ^bUniv. Lille, CNRS, ONERA, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, UMR 9014-LMFL-Laboratoire de Mécanique des Fluides de Lille-Kampé de Fériet, F-59000, Lille, France

This manuscript was compiled on October 3, 2022

1 **Our knowledge of the structure and dynamics of the Earth fluid layers**
2 **(ocean and atmosphere) frequently relies on data from embarked**
3 **sensors, that sit on devices moving with the flow (buoys, balloons).**
4 **The properties of the most irregular trajectories is crucial to under-**
5 **stand intermittency of dissipation or mixing, an important param-**
6 **eter of climate models. An increasing effort has therefore be put on**
7 **Lagrangian detection of coherent or irregular structures of the flow,**
8 **based on trajectories of passive tracers advected by the flow. Here,**
9 **we use a Lagrangian indicator recently introduced (1, 2) to select the**
10 **most irregular trajectories in the core of a turbulent flow in water,**
11 **generated by two counter-rotating impellers. The selected trajecto-**
12 **ries are indeed observed to lay near coherent vortices, that interact**
13 **together during reconnection. As a result, most irregular trajecto-**
14 **ries were found to be more curved, and slightly more torse than or-**
15 **inary trajectories, despite to following statistically the same power**
16 **laws than the whole data set (with a shift of most probable value).**
17 **A rather interesting correlation was found in between acceleration**
18 **and velocities along those trajectories, reminiscent of the Leray self-**
19 **similar scaling for blowing-up solution of NSE (3). We use our result**
20 **to build a simpler Lagrangian criterion for characterizing irregular**
21 **trajectories, only based on velocity and acceleration and therefore**
22 **more suitable for characterization of Lagrangian coherent structures**
23 **using sparse geophysical data. [226/240 words]**

Fluid mechanics | Turbulence | Lagrangian | Intermittency

1 **W**hen botanist Robert Brown focused his microscope on
2 pollen particles in still water in 1827, he observed that
3 they experience incessant random motions. To his amazement,
4 corresponding trajectories were continuous, but not differen-
5 tiable (Fig. 1a). Had he made the same observation in a
6 water agitated by a stirrer, he would probably have observed
7 smoother trajectories like the one shown in Fig. 1b (obtained
8 via 10 microns polyamide particles of density 1.05 in a von
9 Kármán stirrer). Hydrated pollen particles have a size of a
10 few microns, and a density close to 1 (4), so that they can
11 be considered to first approximation as Lagrangian particle
12 tracing the flow motion and obeying the stochastic equation
13 (5):

$$\begin{aligned} dX &= u(X, t)dt + \sqrt{2D} dW(t), \\ X(t=0) &= a, \end{aligned} \quad [1]$$

16 where $X(t)$ is the particle position at time t , $u(X, t)$ is the
17 fluid velocity at its location, D is the molecular diffusivity
18 and dW is the 3-dimensional brownian motion (modeled by a
19 Wiener process) with zero average following $\langle W_i(t)W_j(t') \rangle =$
20 $\delta_{ij}\delta(t-t')$. A naïve physical explanation of the difference
21 between Fig. 1a and 1b is that, in still water, $u \sim 0$, so that
22 the pollen only experiences the Brownian forcing, while in
23 stirred water $u \gg \sqrt{D/dt}$, the pollen is mainly advected by
24 the velocity, which is a smoother process than a Brownian
25 stirring.

26 The validity of the last assertion is however not obvious
27 for a mathematician used to deal with possible non-smooth
28 solutions of the Navier-Stokes equations. Indeed, it is known
29 since Leray (6) that solutions of Navier-Stokes may exist only
30 in some distributional sense, resulting in velocity field that are
31 not necessarily regular, nor unique, and that may produce a
32 non-zero dissipation even in the inviscid limit (7). As a result,
33 it is still an open question whether Lagrangian trajectories
34 obeying Eq. 1 with $D = 0$ (no Brownian forcing) and u solution
35 of the Navier-Stokes equations are unique, differentiable or do
36 intersect each other (8).

37 Conversely, one may wonder whether one can use La-
38 grangian trajectories to trace irregularities of the velocity
39 field, the idea being that "wild" behavior in the trajectory
40 correspond to locations where the velocity field experiences
41 "accident", such as diverging gradients or loss of regularity.
42 Such natural idea motivated several experimental or numerical
43 investigations in recent years, many of them failing to establish
44 a convincing simple link. For example, while a clear statistical
45 link was found between the most likely value of vorticity or
46 curvature of trajectories (9, 10), local correlation between in-
47 stantaneous values of such properties were found to be weak,
48 so that one cannot conclude that tightly wounded spiral in the
49 Lagrangian trajectories traces a region of high vorticity. More
50 recently, Xu et al (11) observed flight-crash events occurring
51 over some trajectories, corresponding to location where the
52 kinetic energy changed significantly over a small amount of
53 time. They linked these events to irreversibility properties
54 of the turbulence, but again, they found no direct link with
55 special feature of the velocity field at that location.

Significance Statement

Our knowledge of the structure and dynamics of ocean and atmosphere frequently relies on data from embarked sensors, sitting on devices moving with the flow (buoys, balloons). This justifies the recent increasing effort put on Lagrangian detection of coherent or irregular structures based on trajectories of passive tracers advected by the flow. Motivated by the observation that irregular structures are usually observed near areas of large Eulerian energy dissipation ϵ , we study the properties of trajectories with large values of the Lagrangian analog of ϵ . We observe along such trajectories a rather marked correlation between large accelerations and velocities. This enables us to build a simpler criterion more suitable for characterization of Lagrangian coherent structures using sparse data.

Please provide details of author contributions here.

Please declare any conflict of interest here.

²To whom correspondence should be addressed. E-mail: berengere.dubrullecea.fr

56 Various theoretical reasons may be invoked to understand
57 such failures. First, the location of the most irregular velocity
58 fields are very rare: they cover at most a set of box counting
59 dimension $5/3$ in space-time, which means that Lagrangian
60 trajectories have a very high probability to avoid such points
61 (8). Second, the above investigations focused on Lagrangian
62 single particle properties. As noted by (12), the latter is
63 time-reversible, while most interesting turbulence properties,
64 like energy cascades or dissipation are linked with breaking
65 of the time reversal symmetry. In particular, the famous
66 Onsager conjecture (13–15) states that location of sufficiently
67 rough velocity field could be associated with finite local energy
68 transfers or dissipation, even in the inviscid limit, thereby
69 providing a direct link between spontaneous breaking of the
70 time reversal symmetry and irregularity of the velocity field.
71 In the Eulerian framework, it has indeed been found that area
72 corresponding to extreme values of the local energy transfer
73 always fall in the vicinity of coherent structure of intense
74 vorticity (16, 17) and may be the footprints of singularities or
75 quasi-singularities (18, 19).

76 Following (12), a link between breaking of the time re-
77 versal symmetry and irregularity of the velocity field using
78 Lagrangian trajectories can indeed be found using multiple-
79 particle statistics, and the property that for short time, La-
80 grangian particles in a 3D flow initially disperse faster back-
81 ward in time than forward (20). The difference between La-
82 grangian forward and backward dispersion - a two-particle
83 quantity - can then be used to build a Lagrangian local scalar
84 indicator $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ that matches exactly the Onsager energy defect
85 of weak solutions of Euler equations, or the viscous dissipation
86 anomaly of the Navier-Stokes equations (1).

87 Endowing each trajectory with its Lagrangian indicator
88 $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(X, t)$, we can then define the most irregular (or irreversible)
89 paths as containing at least one value of $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ that exceeds a
90 given large threshold - say many time the standard deviation
91 of this quantity.

92 Imagine now that you are a particle riding one of these
93 paths. Do you feel something special when you reach a point
94 where $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ is high, or, more generally, when you ride such
95 a trajectory? Or, in other words, do such trajectories bear
96 special geometrical or physical properties with respect to the
97 other ones?

98 Answering such questions is the subject of the present paper.
99 In fact, it is more involved that it looks like. Indeed, building
100 the Lagrangian indicator $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ requires the tracking of a large
101 set of particles with a very fine spatial and time resolution in a
102 fully turbulent flow. Simulating a turbulent flow with periodic
103 boundary conditions and track passive tracers seems an easier
104 task. Nonetheless, it is not clear whether such flow contains
105 genuine singularities (21). Therefore, we shall rather focus on
106 experiments. However, tracking many Lagrangian particles
107 at high spatial and temporal resolution in a fully turbulent
108 experiment raises many challenges, including particle selection,
109 imaging issues, noise removal and big data treatment. How
110 we have been able to deal with all these issues is described in
111 (22) and in Section Material and Methods.

112 In the present paper, we only deal with the answers and
113 describe our findings regarding the properties of the most irreg-
114 ular paths in the core of a turbulent flow in water, generated
115 by two counter-rotating impellers. Our results point towards
116 interesting properties of such trajectories, but the criterion we

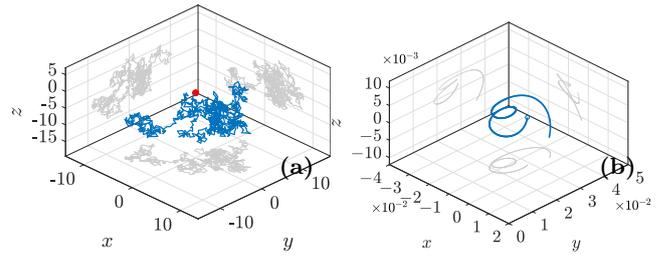


Fig. 1. Typical trajectory of a micron size particle in a liquid: **a)** at rest **b)** stirred by two counter propellers.

117 use is difficult to implement in sparse data like those obtained
118 in geophysics. Therefore, we use one of our observation-namely
119 the rather marked correlation between large accelerations and
120 velocities- to build a simpler criterion more suitable for char-
121 acterization of Lagrangian coherent structures using sparse
122 data.

1. Properties of most irreversible paths

A. Selection criterion and spatio-temporal distribution.

123 In this paper, we use data from two experimental set-
124 ups, hereafter referred to as SVK and GVK. The two set-up
125 correspond to measurements at the same spatial location of the
126 same experiment, but in operating conditions resulting in two
127 different turbulent state, SVK being the least turbulent. They
128 are described in the Method section. Our data set contains
129 on the order of 10^7 trajectories per run on average for both
130 SVK and GVK experiment.

131 For all of them, we compute the mathematical indicator
132 $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ using the formula Eq. (7). This scalar indicator provides a
133 measure of the degree of irreversibility at any given point of the
134 trajectory, which is also correlated to the degree of irregularity
135 of the flow at such location (1, 2). We then say that a trajectory
136 of length $t_m - t_1$, noted $\mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_n(t_1), \dots, \mathbf{x}_n(t_m))$, belongs to
137 an irregular set I, if and only if, at some time, $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ exceeds a
138 given threshold I^* :

$$\mathbf{x}_n \in I \quad \text{iif} \quad \exists t, t_1 < t < t_m, \quad \text{s.t.} \quad |\mathcal{I}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_n(t))| \geq I^*. \quad [2]$$

139 In practice, we define the criterion with respect to the percent-
140 age of trajectories in the irregular set selected by Eq. (2). In
141 the sequel, we thus adjust I^* so that we select only 0.006% of
142 the total number of events in both cases. This number was
143 chosen so that we can still perform meaningful statistics on
144 these irregular trajectories.

145 An example of the application of such criterion in our SVK
146 data set is given in Figure 2-b, where we have plotted all
147 trajectories in our data set obeying such criterion. We see
148 that the corresponding trajectories are organized into coherent
149 structures arising at different times during the experiment.
150 Riding the most irregular trajectories then correspond to navi-
151 gating along these coherent structures. We now examine what
152 can be felt at the level of these irregular trajectories, and how
153 they differ from the other ones.

B. Geometrical properties.

154 The first natural thing to do is to look at genuine geometri-
155 cal properties of trajectories, such as curvature κ and torsion
156 τ , which can be computed using only the local velocity, accel-
157 eration and jerk (time derivative of acceleration). For this, we

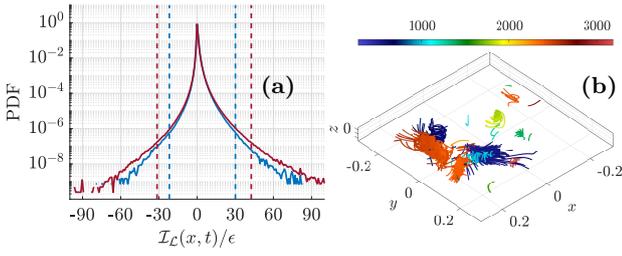


Fig. 2. The most irregular trajectories from Lagrangian trajectories are selected from the statistical distribution of Lagrangian local energy dissipation \mathcal{I}_L normalized by the dissipation rate ϵ shown in **a**. We keep only the trajectories that have at least one of their point larger than $|\mathcal{I}_L| \geq T_0$ such that only 0.0006% of all events are selected (corresponding to vertical line in **a**). The red curves correspond to GVK experiment (more turbulent) and the blue curves correspond to SVK experiment (less turbulent). The spatio-temporal location of such trajectories is shown in **b** for the SVK case. Here, the trajectories are colored by the snapshot number of occurrence during the run (a run includes ≈ 3200 snapshots).

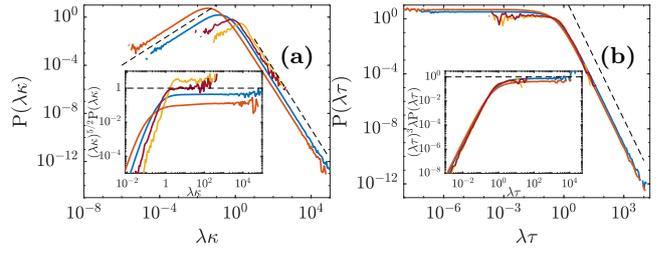


Fig. 3. Geometrical properties of trajectories: **a** Curvature **b** Torsion. The same colors are used in both figures to refer to the same data set. In blue, the whole set of data for SVK case and in yellow, the irregular data set for SVK. In orange, the whole case for GVK case and in red, the irregular data set for GVK. The dashed line represents the power laws mentioned in the text. In the insert is plotted the compensated power law for large values of the corresponding quantity.

162 follow (9) and study the PDF of curvature and torsion, for
 163 the whole data set on the one hand, and for only the irregular
 164 data set on the other hand.

165 For any trajectory, the curvature and torsion can be com-
 166 puted through:

$$167 \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}\|}{u^3}, \quad \tau(t) = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \wedge \dot{\mathbf{a}})|}{\kappa^2 u^6}, \quad [3]$$

168 where \mathbf{u} , \mathbf{a} and $\dot{\mathbf{a}}$ are respectively the particle velocity, accel-
 169 eration and jerk along the trajectory, \wedge is the cross product and
 170 $u = \|\mathbf{u}\|$. To remove the experimental and measurement noise,
 171 we compute velocity and acceleration from time derivative of
 172 the filtered trajectories with an in house code called TrackFit
 173 developed in (23). An explanation of the code and the quality
 174 of data can be found in (22). Further, we remove from our
 175 data set all trajectories smaller than 50, as we have found that
 176 they are too noisy to compute reliably the jerk. We are then
 177 left with an average of 4×10^5 trajectories per run for the case
 178 SVK and to an average of 6×10^5 trajectories per run for the
 179 case GVK.

180 The jerk was computed by a 2nd order central finite dif-
 181 ference scheme from the acceleration. We then remove the
 182 beginning and the end of each tracks to minimize finite size
 183 effects. The resulting PDFs of curvatures and torsions is shown
 184 in Figure 3 for the whole data set.

185 The PDF of curvature exhibits the same power laws as in
 186 the numerical (9, 24) or experimental analysis (10). For low
 187 curvatures, one observe a linear behavior $P(\kappa) \sim \kappa$ while for
 188 large curvature, a power law decay $P(\kappa) \sim \kappa^{-5/2}$. In figure 3-
 189 a, the dashed lines represent this power laws and the insert
 190 contains the compensated quantity at large curvature.

191 Those power laws were shown to be robust, independent of
 192 turbulence and linked to the random gaussian-like nature of
 193 velocity variables in turbulence (10). In contrast, the position
 194 of the PDF's peak is strongly linked to the turbulence and R_λ ,
 195 the Reynolds number based on the Taylor micro-scale λ . As
 196 suggested by Xu et al. (10), the peak's location may be due
 197 to the intermittency of the acceleration and to the velocity
 198 and acceleration correlation in a fully turbulent field.

199 The absolute torsion PDF shows the same behavior as
 200 numerical results based on the trajectories of an ABC flow
 201 (9), namely, a flat slope for low torsion values and a slope of
 202 -3 for higher torsion. In Figure 3-b, power laws in τ^{-3} is

materialized by a dashed line and the compensated version is
 also available in the insert.

The procedure was then repeated keeping only the trajec-
 tories belonging to an irregular structure. The corresponding
 PDF are also shown in Figure 3. We see that the PDF of
 curvature for the irregular structures are more sharply peaked
 around a value of the order of $\tau_c = 1/\lambda$ the Taylor micro-scale.
 It may correspond to a typical inverse radius of the coherent
 structures shown in Figure 2-b (vortex or eddies). This shows
 that the most irregular trajectories are typically more curved
 than ordinary trajectories, albeit with some spread.

In contrast, the PDF of torsion for irregular structures
 behaves roughly like the total distribution, except for the
 flat behavior at small torsions, which is absent. The knee
 between the two regimes at large torsion is slightly shifted
 towards higher torsions, meaning that in general, irregular
 regions are characterized by larger torsions than typical tra-
 jectories. Overall, we can thus say that the most irregular
 trajectories are more curved, and slightly more torse than
 ordinary trajectories.

C. Scaling properties.

Let us now explore possible scaling properties of the most
 irregular trajectories.

Since Leray, we know that self-similar blowing-up solutions
 of the Navier-Stokes equations obey the (Leray) scaling:

$$228 \quad V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{t_b - t}} U\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t_b - t}}\right), \quad [4]$$

229 where t_b is the blow-up time. Differentiating Eq. (4) with
 230 respect to time, we observe that the acceleration $a = \|\mathbf{a}\|$
 231 should scale like $1/(t_b - t)^{3/2}$. This observation led Leberre
 232 and Pomeau (3) to suggest that a signature of very irregular
 233 events could be detected by looking whether the conditional
 234 average $\langle u^3 | a \rangle$ scales linearly with a .

$$235 \quad \langle u^3 | a \rangle = \Gamma a + b, \quad [5]$$

236 where Γ is a typical circulation, following the remarque in
 237 (3). Such behaviour was indeed observed in the Modane data,
 238 where the velocity $u(t)$ was obtained using a hot-wire located
 239 at a center of a large wind tunnel.

240 To see whether this consideration applies for the most
 241 irregular trajectories, we can do the following procedure: first,
 242 perform with our total data set a joint PDF between a and u^3 .

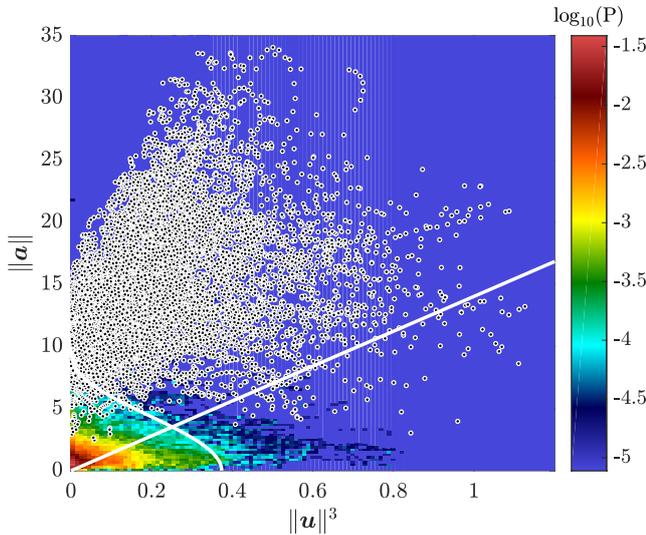


Fig. 4. Joint probabilities between acceleration norm a and cube of velocity norm u^3 for SVK case computed on trajectories longer than 22 time steps. The white dots corresponds to points belonging to irregular trajectories. The white curve represents the line of equation $a(t)^2 + R_\lambda^{1.12} u(t) = T_*$, where $T_* = 100$ for SVK (resp. 242 for GVK). The white line is the line of equation $a = \frac{u^3}{4\Gamma}$ where Γ is the linear coefficient defined in Eq. (5).

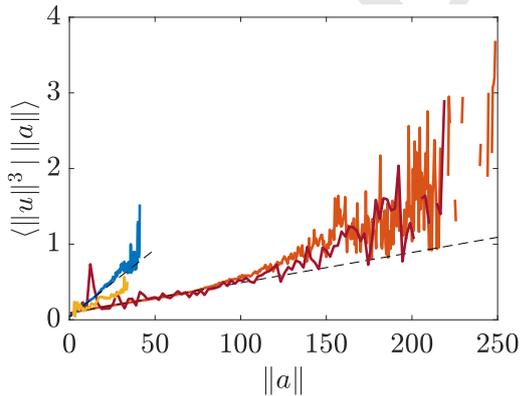


Fig. 5. Conditional average $\langle u^3 | a \rangle$ vs. a . In blue (resp. yellow) the whole (resp. irregular) dataset of case SVK and in orange (resp. red) the whole (resp. irregular) data set of case GVK. The dashed black lines are the linear fit following equation Eq. (5).

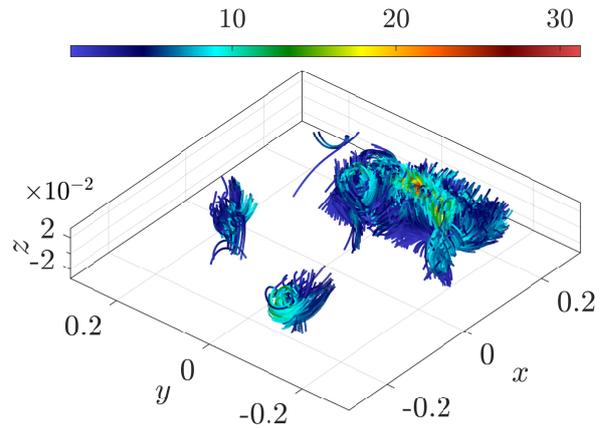


Fig. 6. Example of reconnection event captured by selection of trajectories obtained around the 2450th snapshot in the SVK set-up. The trajectories are coded by acceleration norm, with intensity given by the colorbar.

This is shown in Figure 4. We can also perform the conditional average $\langle u^3 | a \rangle$ from our data.

We performed a linear regression on data and we choose only sufficiently converged ones. The maximum acceleration points considered for the linear regression correspond to average computed on at least 10^4 data. This means $a \approx 16$ for SVK and $a \approx 80$ for GVK. As shown in Figure 5, there is indeed a tendency for this quantity to align with a in both our data set, with a slope depending on the turbulent state.

If we perform the same conditional average with the irregular data set, we observe a similar alignment, with exactly the same slope for the GVK data set. For the SVK data set, the slope of the irregular data set is smaller, meaning that acceleration are comparatively larger for a given velocity. This is compatible with the fact that the trajectories are tightly wound around vortices, increasing the acceleration.

D. Link with vortex reconnection.

Identification of Lagrangian irregular trajectories via criterion 2 allows to track easily the most irregular events in an otherwise very large set of data (one complete case weights 7 billion points!). It is therefore an interesting tool to follow the dynamics of such structures, and to compare them with the dynamics of irregular structures viewed from an Eulerian point of view. This can be done using two complementary representations: on the one hand, we can observe from a Lagrangian point of view the dynamics of the irregular trajectories, coded by their acceleration norm, obtained by plotting 200 consecutive points around a given time t , and advancing the time. This is done in Figure 6, where we see distinctly interaction of two perpendicular coherent structures, with high acceleration located on their symmetry axis. On the other hand, one can plot as a function of time t , the iso-surface of two typical quantities characterizing Eulerian irregular events: the enstrophy Ω and the regularity factor $R_\ell = \mathcal{D}_\ell^I / \mathcal{D}_\ell^V$ defined in Section Material and Methods. We show an example at a given time in Figure 7 in the SVK set-up. In this representation, the two vortices are clearly delineated by regions of high enstrophy, and we see that irregular trajectories tend to roll up around the iso-surface of high enstrophy, while large

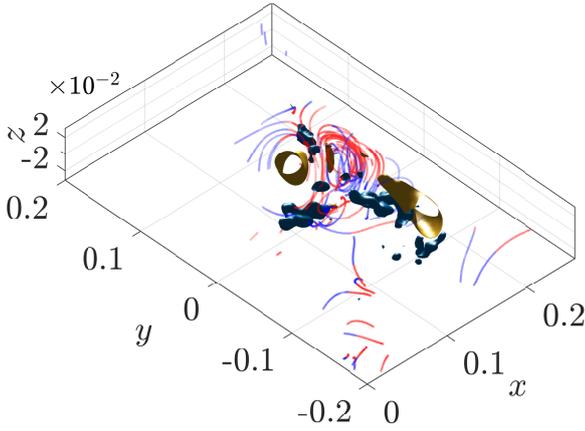


Fig. 7. The same event as in Figure 6, with irregular trajectories plotted with respect to two Eulerian indicators: the regularity indicator, R_ℓ shown in blue at filtered scale $\ell/\eta = 7.2$ and the filtered enstrophy Ω_ℓ at filtered scale $\ell/\eta = 9.6$ in shown in yellow. Here, we have plot only trajectories longer than 200 time steps and coded binarily. In blue the part of the track belonging to the past (before $t/\tau_\eta = 133.7$) and in red the part belonging to the future (after $t/\tau_\eta = 133.7$).

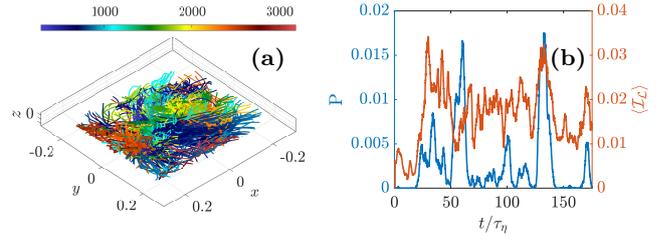


Fig. 8. Properties of trajectories with large acceleration or velocity: **a)** Spatio-temporal distribution, with trajectories colored by time keeping trajectories of at least 150 time steps. Figure **a** has to be compared to Figure 2-**a**. **b)** In blue, time distribution of the spatial mean Lagrangian local energy dissipation $\langle \mathcal{I}_\mathcal{L} \rangle$. In orange, the proportion of particles selected by the criterion (6) with respect to the total number of reconstructed particle per time frame.

or meteorology. Since acceleration and velocity are two quantities that can be easily computed from any trajectories, we may try to build a criterion only with these quantities. Our observation of correlation between acceleration and velocity along irregular trajectories may confirm the simpler criterion.

This is revealed in Figure 4, where we plot as white points the location of the points belonging to irregular trajectories in the (a, u^3) coordinates. One sees that the points all scatter above a diagonal, that has a slope about $\Gamma/4$, where Γ is given by the fits of the conditional average $\langle u^3 | a \rangle$ vs a , Eq. (5). Moreover, they are characterized by large acceleration, excluded a small portion of space around $u = 0, a = 0$. Therefore, we devised the following simpler criterion to detect irregular points: we say that a trajectory \mathbf{x}_n belongs to an irregular set $\tilde{\mathcal{I}}$, if at some time, a combination of its acceleration and its velocity follow the criterion:

$$\mathbf{x}_n(t) \in \tilde{\mathcal{I}} \quad \text{iif} \quad \exists t \quad \left\{ \begin{array}{l} a(t)^2 + R_\lambda^{1.12} u(t) \geq T_*, \\ a(t) \geq \frac{u(t)^3}{4\Gamma}, \\ \langle u^3 | a \rangle = \Gamma a + b; \end{array} \right. \quad [6]$$

where T_* is a threshold ensuring that velocities and accelerations are high enough (in our case $T_* = 100$ for SVK and $T_* = 242$ for GVK).

The corresponding areas in the joint PDF of Figure 4 are shown via white lines. This criterion selects more trajectories (they represent less than 1/60 of the total number of trajectories longer than 22 time steps). Does it nevertheless select statistically the most irregular ones?

In Figure 8, we show the spatio-temporal distribution of such trajectories for SVK. One sees that it looks similar with the spatio-temporal based on the more involved criterion using Lagrangian local dissipation (Figure 2-a). To quantify the similarity, we show in Figure 8-b the time distribution of the ratio of particles selected by the criterion according to the total number of reconstructed particle per time frame, as compared with the spatial mean of the Lagrangian local dissipation.

The highest part of trajectories is not randomly selected, but corresponds to instants where the instantaneous spatially averaged local Lagrangian energy dissipation $\langle \mathcal{I}_\mathcal{L} \rangle$ is large. It can also be checked that the set of trajectories selected by this simpler criterion have the same geometrical and scaling properties than the most irregular trajectories. One can see

value of R_ℓ are found at location where two structures come close to each other. This observation led us to conjecture that the most irregular event are linked with reconnection events (2, 25). Detailed investigations to check this point are underway.

2. Towards a simpler criterion?

Our knowledge of the structure and dynamics of the Earth fluid layers (ocean and atmosphere) frequently relies on data from embarked sensors, that sit on devices moving with the flow (buoys, balloons). In recent years, an increasing effort has therefore be put on Lagrangian detection of coherent or irregular structures of the flow, based on trajectories of passive tracers advected by the flow.

Here, we have used the observation that irregular structures are usually observed near areas of large Eulerian energy dissipation \mathcal{D}_ℓ^I , to select most irregular trajectories using the exact Lagrangian analog $\mathcal{I}_\mathcal{L}$ of \mathcal{D}_ℓ^I built using forward and backward dispersion (1). The selected trajectories were indeed observed to lay near coherent vortices, that interact together during reconnection events. As a result, most irregular trajectories were found to be more curved, and slightly more torse than ordinary trajectories, despite to following statistically the same power laws than the whole data set (with a shift of most probable value). On the other hand, a rather interesting correlation was found in between acceleration and velocity along those trajectories, reminiscent of the Leray self-similar scaling for blowing-up solution of NSE (3).

However, the application of our method to detect most irregular trajectories is not straightforward for geophysical data. Indeed, the computation of $\mathcal{I}_\mathcal{L}$ is rather involved, and requires a high spatial and temporal resolution for Lagrangian trajectories of the order of the Kolmogorov length and time scales, which in most geophysical application is out of reach. It would therefore be interesting to use our findings to build a simpler criterion for detection of most irregular trajectories, which can be used in sparse data, such as those used in oceanography

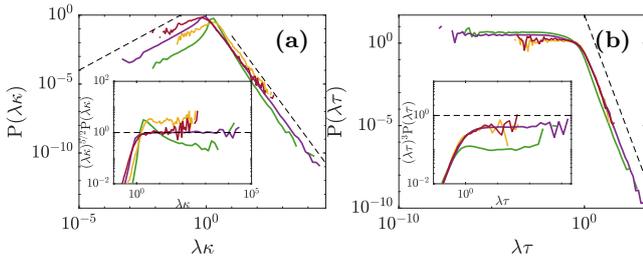


Fig. 9. Comparison of the PDF of curvature (a) and PDF of torsion (b). The yellow and red curves are PDF conditioned to strong values of \mathcal{I}_L also visible in Figure 3 respectively to SVK and GVK datasets. The green and purple curves are PDF conditioned to criterion 6 respectively to SVK and GVK datasets. The insert plots the compensated quantities at large values.

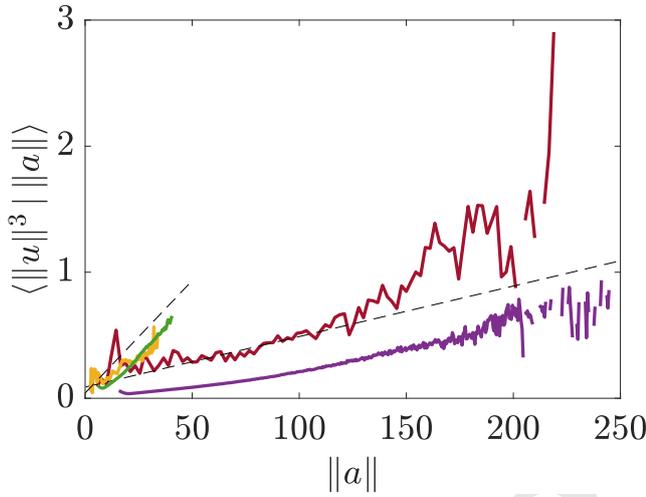


Fig. 10. In yellow (resp. red), conditionnal average $\langle u^3 | a \rangle$ vs a on the most irregular trajectories for SVK (resp. GVK) dataset. In green (resp. purple), the curve of the conditionnal average computed on trajectories selected by criterion 6 for SVK (resp. GVK) dataset. In dashed line, the linear interpolation according Eq. (5). This Figure has to be compared to Figure 5

Figure 9-a and 9-b comparing the PDF of the torsion and curvature for the more irregular path selected by criterion 2 (curve yellow and red) and the PDF for values selected by criterion 6 (curves purple and green). Similarly, one can see Figure 10 comparing conditionnal mean on these two datasets.

One can see that both PDFs for curvature peak at the same value for each case around $\tau_c = 1/\lambda$. Moreover, conditional means behaves also similarly, showing the same linear law. The difference observed maybe due to low statistics in the extrem events selected (yellow and red curves).

Therefore, we were able to devise a criterion that only depends on velocity and acceleration, and that is able to select only the most irregular structure. This remark open new perspective regarding Lagrangian detection of coherent or irregular structures in geophysical flows. This certainly should be checked with real data, as the understanding of the properties of the most irregular trajectories is crucial to understand intermittency of dissipation or mixing, an important parameter of climate models.

Materials and Methods

Experimental set-up and data. We have used a data set acquired by our team in a von Kàrmàn geometry. A comparison is made between two different geometries sharing the same aspect ratio. In the first experiment, the fluid (water) is contained in a cylindrical tank of radius $R = 0.1\text{m}$ mentioned in this work as small von Kàrmàn (SVK) experiment. In the second, the radius of the cylindrical tank is 5 times larger, $R = 0.5\text{m}$ mentioned in this work as giant von Kàrmàn (GVK) experiment. In both experiment, we use water maintained at temperature of 20°C , the viscosity ν is constant equal to $10^{-6}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. The flow is set into motion by two counter-rotating impellers with curved blades at frequency $f = 0.1\text{Hz}$. Both impellers rotates in the opposite direction so that each blade pushes the flow with the concave part. The detailed description of the experimental set-up can be found in (19, 26).

We have devised an experiment that allows for simultaneous measurements of both the Eulerian velocity field, and the Lagrangian trajectories. The measurements are performed in water in a volume located in the middle of the cylinder. For SVK, the spatial extension are $41 \times 48 \times 6\text{mm}^3$ and for GVK $40 \times 50 \times 6\text{mm}^3$. The flow for SVK is at a Reynolds number $\text{Re} = 2\pi R^2 f/\nu = 6300$, resulting in Kolmogorov length scale $\eta = 0.3\text{mm}$ and Kolmogorov time scale $\tau_\eta = 92\text{ms}$ for SVK. The flow for GVK is at a Reynolds number $\text{Re} = 1.6 \times 10^5$, resulting in Kolmogorov length scale $\eta = 0.095\text{mm}$ and Kolmogorov time scale $\tau_\eta = 9\text{ms}$.

The data are obtained by ensemencing the fluid with particles of average diameter of $10\mu\text{m}$ for SVK experiment. For GVK experiment, the particles are twice smaller in diameter with an average diameter of $5\mu\text{m}$ which increase the capability to track events. These particles are lit periodically with a 2.5mJ/pulse Nd:YLF laser at a frequency 200Hz for SVK and 1200Hz for GVK. Pictures of the particles are then recorded through 4 phantom Miro M340 fast cameras with a reduced chip resolution at $1600 \times 1600\text{px}^2$. These pictures are analyzed by a Particle Tracking algorithm Shake-the-Box, from LaVision, that allows to follow instantly $N \approx 10^4$ Lagrangian particles $(x_n(t), y_n(t), z_n(t))$, $n = \{1, \dots, N\}$ with space resolution for SVK of 0.54mm (1.8η) and GVK of 0.53mm (5.6η) and time resolution for SVK of 5ms ($0.06\tau_\eta$) and for GVK of 0.83ms ($0.09\tau_\eta$). From the Lagrangian measurements, we obtained the velocity and the acceleration along the trajectory using a temporal filtering (23) that allows to remove some temporal experimental noise on particle paths.

Data analysis. From the data, we compute the Lagrangian irreversibility indicators from the Lagrangian measurements as follows. We define $X_{t_0,t}(x)$ as the position at time t of the particle that was at location x at time t_0 . We then compute the Lagrangian deviation $\delta_r X_{t_0,t}(x) = X_{t_0,t}(x+r) - X_{t_0,t}(x)$. With this we define the following scale dependent quantities:

$$\Delta_\ell^{\pm\tau}(x, t) = \int d\xi \phi^\ell(\xi) \|\delta_\xi X_{t,t\pm\tau}(x) - \delta_\xi X_{t,t}(x)\|^2, \quad [7]$$

where $\phi(x)$, is a Gaussian of unity norm $\int d\mathbf{r} \phi(\mathbf{r}) = 1$ and $\phi_\ell(\mathbf{r}) = \ell^{-3}\phi(\mathbf{r}/\ell)$.

The Lagrangian irreversibility indicator at scale τ and ℓ and at position x and time t is then given by $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}(x, t) \equiv (\Delta_\ell^{-\tau} - \Delta_\ell^{\tau}) / (4\tau^3)$. From this, we may compute \mathcal{I}_L as the limit when ℓ and τ tend to zero of $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}$. In practice, we have shown in (2) that $\mathcal{I}_L^{\tau,\ell}$ with $\tau = 11\tau_K$ and $\ell = 10\eta$ provides a good approximation of \mathcal{I}_L .

Scale by scale energy budget, link with reconexion. The local scale-to-scale energy budget derived from Navier-Stokes equation by (19) based on the work of (7). This energy budget reads:

$$\partial_t E^\ell(x) + \partial_j J_j = -\mathcal{D}_\ell^I - \mathcal{D}_\ell^V, \quad [8]$$

439 where

$$440 \quad J_i = u_i E^\ell + \frac{1}{2}(p^\ell u_i + p u_i^\ell) + \frac{1}{4}([u_i u_j u_j]^\ell - u_i [u_j u_j]^\ell) \\ 441 \quad - \nu \partial_i (u_i^\ell \partial_j u_i - u_i \partial_j u_i^\ell), \quad [9]$$

$$442 \quad \mathcal{D}_\ell^I = \frac{1}{4} \int d\xi \nabla \phi^\ell(\xi) \cdot \delta_\xi \mathbf{u} (\delta_\xi \mathbf{u})^2, \quad [10]$$

$$443 \quad \mathcal{D}_\ell^\nu = \frac{\nu}{2} \int d\xi \nabla^2 \phi^\ell(\xi) (\delta_\xi \mathbf{u})^2, \quad [11]$$

444 where ϕ_ℓ is a filter at scale ℓ , we used a gaussian-filter, and $\delta_\xi \mathbf{u}$
445 is the velocity increment computed on two points separated by a
446 distance ξ . \mathcal{D}_ℓ^I is a local energy transfer term and \mathcal{D}_ℓ^ν is a local
447 dissipation term due to viscosity. The ratio $R_\ell = \mathcal{D}_\ell^I / \mathcal{D}_\ell^\nu$, also
448 called regularity factor, quantify the balance between both terms.
449 It is larger at location where the intermittency and/or the Eulerian
450 irregularity is high (19).

451 Considering the filtered version:

$$452 \quad \mathbf{u}^\ell(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{r} \phi_\ell(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t), \quad [12]$$

453 where $\phi_\ell(\mathbf{r})$ is defined with its mother-function $\phi(\mathbf{r}) \equiv$
454 $C \exp(-\mathbf{r}/2a)$ by $\phi_\ell(\mathbf{r}) = \ell^{-3} \phi(\mathbf{r}/\ell)$.

455 **ACKNOWLEDGMENTS.** This work received funding from the
456 Ecole Polytechnique, from ANR TILT grant agreement no. ANR-
457 20-CE30-0035, and from ANR BANG grant agreement no. ANR-
458 22-CE30-00xx.

- 459 1. Drivas TD (2018) Turbulent cascade direction and lagrangian time-asymmetry. *Journal of*
460 *Nonlinear Science*.
- 461 2. Cheminet A, et al. (2022) Eulerian vs lagrangian irreversibility in an experimental turbulent
462 swirling flow. *Phys. Rev. Lett.* 129(12):124501.
- 463 3. Pomeau Y, Berre ML (2019) Leray turbulence: what can we learn from acceleration compared
464 to velocity. arXiv:1909.01724 [physics].
- 465 4. Sosnoskie LM, et al. (2009) Pollen grain size, density, and settling velocity for palmer ama-
466 ranth (*amaranthus palmeri*). *Weed Science* 57(4):404–409.
- 467 5. Falkovich G, Gawędzki K, Vergassola M (2001) Particles and fields in fluid turbulence. *Rev.*
468 *Mod. Phys.* 73(4):913–975.
- 469 6. Leray J (1934) Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*
470 63:193248.
- 471 7. Duchon J, Robert R (2000) Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible
472 euler and navier-stokes equations. *Nonlinearity* 13(1):249.
- 473 8. Robinson J, Sadowski W, Sharples N (2013) On the regularity of lagrangian trajectories corre-
474 sponding to suitable weak solutions of the navier–stokes equations. *Procedia IUTAM* 7:161–
475 166. IUTAM Symposium on Topological Fluid Dynamics: Theory and Applications.
- 476 9. Braun U, De Lillo F, Eckhardt B (2006) Geometry of particle paths in turbulent flows. *Journal*
477 *of Turbulence* 7:N62.
- 478 10. Xu H, Ouellette NT, Bodenschatz E (2007) Curvature of lagrangian trajectories in turbulence.
479 *Phys. Rev. Lett.* 98(5):050201.
- 480 11. Xu H, et al. (2014) Flight–crash events in turbulence. 111(21):7558–7563.
- 481 12. Falkovich G, et al. (2012) On lagrangian single-particle statistics. *Physics of Fluids*
482 24(5):055102.
- 483 13. Onsager L (1949) Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento* (1943-1954) 6(2):279–287.
- 484 14. Eyink GL, Sreenivasan KR (2006) Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Rev.*
485 *Mod. Phys.* 78(1):87–135.
- 486 15. Isett P (2018) A proof of onsager's conjecture. *Annals of Mathematics* 188(3):871–963.
- 487 16. Debue P (2019) Theses (Université Paris Saclay (COMUE)).
- 488 17. Leclercq C, Nguyen F, Kerswell RR (2016) Connections between centrifugal, stratorotational,
489 and radiative instabilities in viscous taylor-couette flow. *Phys. Rev. E* 94(4):043103.
- 490 18. Saw EW, et al. (2016) Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation
491 in a turbulent swirling flow. *Nature Comm.* 7:12466.
- 492 19. Dubrulle B (2019) Beyond Kolmogorov cascades. *Journal of Fluid Mechanics* 867:P1.
- 493 20. Jucha J, Xu H, Pumir A, Bodenschatz E (2014) Time-reversal-symmetry breaking in turbu-
494 lence. *Phys. Rev. Lett.* 113(5):054501.
- 495 21. Dubrulle B, Gibbon J (2022) A correspondence between the multifractal model of turbu-
496 lence and the navier–stokes equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*
497 380(2218):20210092.
- 498 22. Cheminet A, et al. (2021) Optimization of regularized b-spline smoothing for turbulent la-
499 grangian trajectories. *Experimental Thermal and Fluid Science* 127:110376.
- 500 23. Gesemann S (2015) From Particle Tracks to Velocity and Acceleration Fields Using B-Splines
501 and Penalties. arXiv:1510.09034 [physics]. arXiv: 1510.09034.
- 502 24. Scagliarini A (2011) Geometric properties of particle trajectories in turbulent flows. *Journal*
503 *of Turbulence* 12:N25.
- 504 25. Nguyen F, Laval JP, Dubrulle B (2020) Characterizing most irregular small-scale structures in
505 turbulence using local hölder exponents. *Physical Review E* 102(6):063105.
- 506 26. Debue P (2019) Thesis (Université Paris-Saclay).

5.7.2 Conclusions “Riding the most irregular path in turbulence”

Dans cet article, nous utilisons l’irréversibilité introduite par T. Drivas et nous nous intéressons à la caractérisation géométrique des trajectoires les plus irréversibles. Nous sélectionnons les trajectoires selon un premier critère correspondant à une forte irréversibilité.

Dans la première partie de cet article, nous avons montré que les trajectoires les plus irréversibles sont également celles de forte courbure. En particulier, cette étude ouvre des pistes de réflexion pour étudier les liens entre les événements de forte irréversibilité et les structures tourbillonnaires, à l’image des structures cohérentes de filaments de vorticité et des phénomènes de forte dissipation.

Dans la deuxième partie de cet article, nous nous sommes intéressés à un critère plus simple qui permettrait de rendre l’étude des  v nements irréversibles possible dans le cas d’une concentration faible de traceurs. Cet aspect est motivé par les études météorologiques d’ v nements violents (orages, tornades, ...) exploitant des données parcellaires. Le critère que nous avons développé utilise uniquement des quantités issues des trajectoires, vitesse et accélération, sans recourir à une concentration  lev e de traceurs. Ce deuxième critère est moins précis car il sélectionne davantage de trajectoires. Nous avons néanmoins vérifié la robustesse de ce deuxième critère en étudiant les statistiques de courbure pour ces  v nements.

Les outils que nous avons utilisés et développés dans cet article permettent une étude comparative entre point de vue eulérien et phénomènes lagrangiens. D’un point de vue plus général, on peut se demander dans quelles mesures les irrégularités du champ de vitesse eulérien et les  v nements irréversibles lagrangiens sont liés.

5.7.3 Résultats complémentaires à l’article

Nous connaissons les inhomog nit s de l’écoulement de von K rm n, nous savons en particulier que le développement des couches limites sur les bords du domaine participent largement à la dissipation globale du système et en particulier dans la zone de cisaillement. Ce fait a déjà été étudié dans les articles [97, 112, 140]. Nous avons également observé ce phénomène dans les simulations numériques [65] décrites chapitre 3. Dans le cas expérimental présenté ici, nous étudions l’écoulement au centre de la cuve qui correspond à un point d’arrêt et donc une zone où l’écoulement est expérimentalement proche des hypothèses d’homog nit  et d’isotropie. Néanmoins, une étude [153] a déjà montré l’impact du volume de reconstruction sur l’estimation de la dissipation montrant les limites de ces hypothèses dans cette zone de l’écoulement. Dans ce complément, nous proposons de reprendre cette étude dans le cas lagrangien pour étudier l’impact conjoint de la résolution et du volume d’étude sur l’estimation de la dissipation.

Dans l’article précédent “Riding the most irregular path in turbulence”, nous nous sommes intéressés à la moyenne conditionnée de u^3 , cube de la norme de la vitesse, par rapport à a , la norme de l’accélération. D’après l’article présenté par M. Le berre et

Y. Pomeau [132], cette quantité suit une loi linéaire en fonction de l'accélération,

$$\langle u^3 | a \rangle \sim \Gamma a + b, \quad (5.3)$$

avec le coefficient directeur Γ dimensionnellement égal à une circulation et b une constante.

Suivant cette idée, nous avons d'abord calculé la moyenne conditionnée $\langle u^3 | a \rangle$ sur l'ensemble de nos données puis nous avons réalisé une interpolation linéaire sur la partie la mieux convergée statistiquement. Pour cela, nous avons considéré la plage d'accélération correspondant au rapport entre le nombre de point considérés dans le bin et le nombre total de données de 5×10^{-4} . Nous avons représenté en Figure 5.8 ce rapport N_a/N_{tot} et nous avons matérialisé la limite de la plage de valeur d'accélération sur laquelle est faite la régression linéaire par une droite verticale.

Table 5.2 – Liste des cas considérés et des symboles utilisés dans cette étude.

Type	SVK				GVK	
Re	6.3×10^3	3.1×10^4	6.3×10^4	1.6×10^5	6.3×10^3	1.6×10^5
Symbole						

Dans une première partie, nous nous intéressons à la valeur du coefficient de régression linéaire sur l'ensemble des données correspondant au tableau 5.2. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'impact du zoom sur l'estimation de la dissipation locale et le lien avec le coefficient de régression linéaire. A cette occasion, nous comparons les deux campagnes SVK et GVK rappelées dans le tableau 5.2 et les données issues de l'article Saw et al. [153] en utilisant les notations de cet article (cas A, B, C et D).

On sait depuis la remarque de L. D. Landau sur la théorie de A. N. Kolmogorov (K41) que la valeur du taux de dissipation n'est pas constante en temps et en espace dans tout l'écoulement mais que des fluctuations existent. Ce dernier point a conduit A. N. Kolmogorov et son étudiant L. D. Oboukhov en 1962 à revoir la théorie pour inclure cette correction. De plus, lorsque la turbulence n'est pas homogène isotrope, ce qui est le cas dans l'expérience de von Kármán, la valeur de la dissipation est différente selon la position. Cette étude a déjà été conduite sur un écoulement de von Kármán dans l'article de Saw et al. [153].

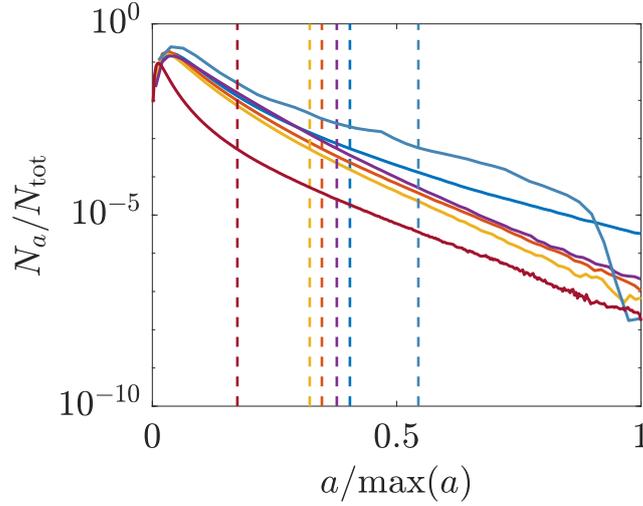


Figure 5.8 – Pourcentage de points considéré pour réaliser la moyenne conditionnée. Le code couleur suit celui adopté dans le tableau 5.2. La droite verticale correspond à la limite maximale de la plage d’accélération considérée pour faire la régression linéaire. Par soucis de lisibilité, nous avons décidé de normaliser l’accélération par la valeur maximale.

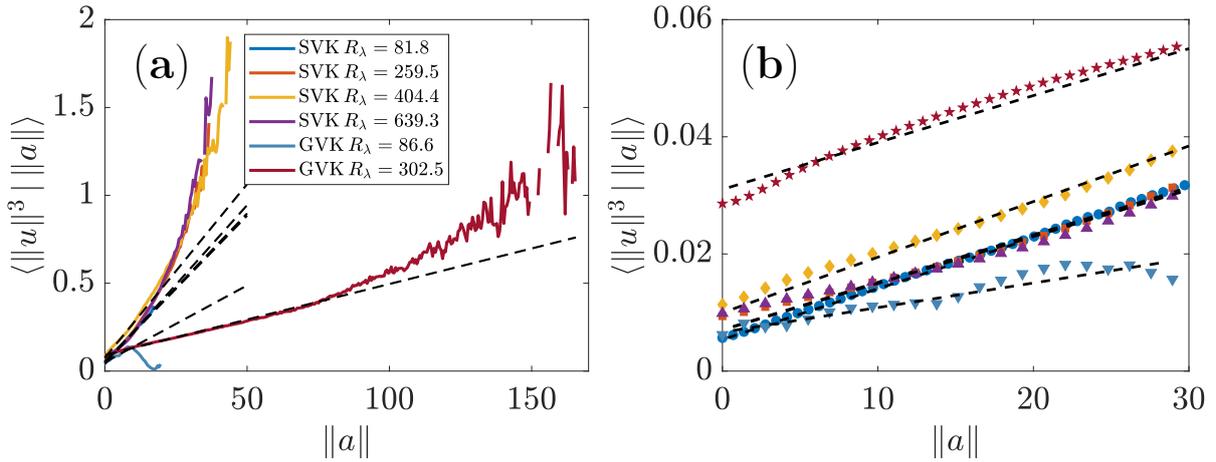


Figure 5.9 – Calcul de la moyenne conditionnée sur l’ensemble des cas d’étude. Nous avons représenté les droites de régression linéaire correspondantes aux plages d’accélération assurant une bonne convergence statistique des moyennes conditionnées. (a) Les courbes en couleur correspondent aux valeurs de moyenne conditionnée $\langle u^3 | a \rangle$ en fonction de a . Nous avons rappelé en légende les différents cas étudiés. La ligne pointillée correspond aux régressions linéaires effectuées sur les plages d’accélération statistiquement convergées. (b) Zoom pour les valeurs d’accélération comprises dans l’intervalle $[0, 30]$, nous avons distingué les différentes courbes en utilisant les symboles du tableau 5.2. Les lignes pointillées correspondent aux régressions linéaires de chaque cas.

On peut alors considérer un taux de dissipation locale, ce dernier peut être estimé à partir de la variance de l’accélération à partir de la formule de Yaglom-Heisenberg. D’après l’équation 21.51 p.369, volume II de Yaglom et Monin [117], la variance de

l'accélération normalisée par le terme $(\text{Re } \epsilon^3)^{1/2}$ tend vers une constante lorsque $\text{Re} \rightarrow \infty$. Cette constante noté a_0 fait référence à la constante de Heisenberg-Yaglom [81, 187].

Cette formule a été affinée par la suite pour le cas d'un Reynolds fini [19, 101, 155, 174]. Nous utilisons la formule issue de l'article [101].

$$a_0 = \frac{\langle a^2 \rangle}{(\text{Re } \epsilon^3)^{1/2}} = 1.9 \frac{\text{R}_\lambda^{0.135}}{1 + \frac{85}{\text{R}_\lambda^{1.135}}}, \quad (5.4)$$

En remarquant que le Reynolds basé sur l'échelle de Taylor (3.13) est relié à la valeur de ϵ , nous pouvons réécrire la constante de Heisenberg-Yaglom en faisant apparaître R_λ .

$$a_0 = \frac{\langle a^2 \rangle}{\left(\frac{5}{3}\right)^{3/2} \text{Re}^2 u_{\text{rms}}^6} \text{R}_\lambda^3 \equiv c \text{R}_\lambda^3, \quad (5.5)$$

avec $c = \frac{\langle a^2 \rangle}{\left(\frac{5}{3}\right)^{3/2} \text{Re}^2 u_{\text{rms}}^6}$.

L'étape de renormalisation consiste à minimiser la fonctionnelle.

$$F_c(x) = \left| 1.9 \frac{x^{0.135}}{1 + \frac{85}{x^{1.135}}} - c x^3 \right|, \quad (5.6)$$

avec c le moment d'ordre 2 de l'accélération renormalisée défini à l'équation (5.5). Notons x_{min} la solution de minimisation.

Nous avons utilisé la fonction *minsearch* implémentée dans le logiciel *Matlab*® utilisant l'optimisation symplectique par méthode de Nelder-Mead. La valeur de ϵ_{loc} est ensuite obtenue en inversant la formule du R_λ .

$$\epsilon_{\text{loc}} \equiv \frac{5\text{Re}}{3x_{\text{min}}^2} u_{\text{rms}}^4. \quad (5.7)$$

Pour faire la renormalisation, nous considérons les trajectoires supérieures à 50 pas de temps (symboles pleins dans la Figure 5.10) afin d'éviter de considérer au maximum des erreurs de reconstructions.

A partir des valeurs obtenues pour la régression linéaire Figure 5.9, les coefficients de droites de regression ne sont pas universels. Nous avons cherché à comprendre cette différence en fonction de l'estimation de la dissipation locale.

En traçant le coefficient directeur Γ en fonction de l'estimation de ϵ_{loc} , voir Figure 5.11, on observe deux zones : la première pour $\epsilon_{\text{loc}}^{1/3} < 0.35$, la valeur de Γ semble constante, la deuxième pour $\epsilon_{\text{loc}}^{1/3} > 0.35$, on observe une décroissance de Γ . Compte tenu du fait que nous avons récemment montré que la valeur correspondant au symbole ★ était dans un état bifurqué, nous n'excluons pas que la valeur du coefficient directeur soit dépendant de l'écoulement, ce que semble montrer cette étude préliminaire.

Sur le dernier point de cette étude, nous représentons le rapport entre l'estimation de ϵ_{loc} et la valeur du taux de dissipation global. Nous savons que la résolution de

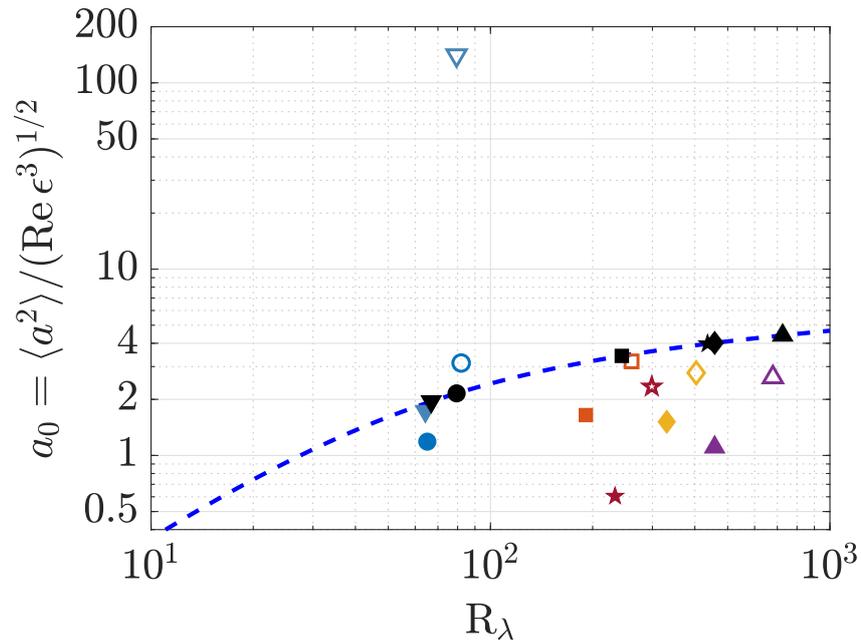


Figure 5.10 – Les symboles vides correspondent aux données calculées sur toutes les trajectoires. Les symboles pleins correspondent aux valeurs calculées sur des trajectoires supérieures à 50 pas de temps. Les symboles en noir correspondent aux estimations renormalisées pour suivre la courbe de Heisenberg-Yaglom (5.4) résultant de la minimisation de la fonctionnelle $F_c(x)$.

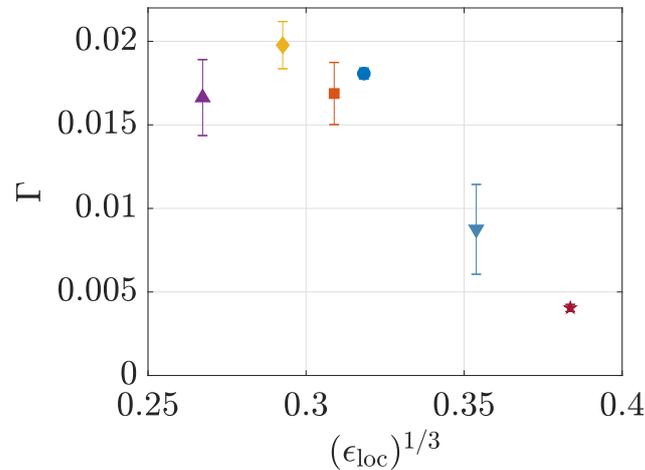


Figure 5.11 – Valeur du coefficient directeur Γ en fonction de l'estimation de ϵ_{loc} . Les barres d'erreur correspondent à l'intervalle de confiance à 95%.

l'expérience peut également faire apparaître un biais d'estimation de ce taux. A la Figure 5.12, nous avons représenté les estimations faites de ϵ_{loc} en fonction de la résolution. Nous avons également intégré à cette étude les données issues de la campagne réalisée dans [153]. On voit que cette valeur semble saturer pour $\langle r \rangle / \eta \rightarrow 0$.

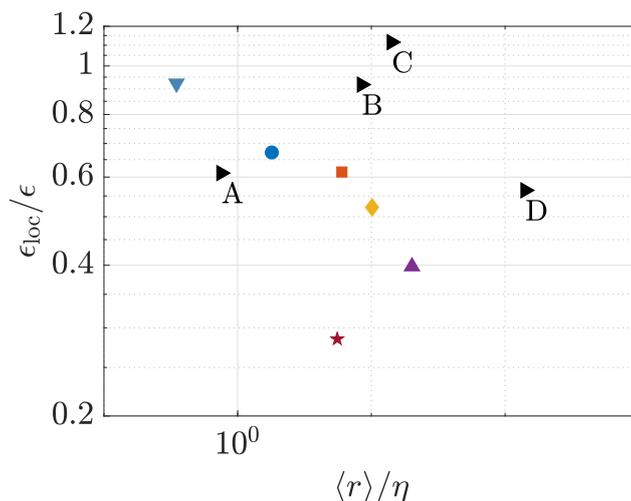


Figure 5.12 – Valeur du rapport entre ϵ_{loc} et la valeur du taux moyen de dissipation global ϵ en fonction de la résolution. Les symboles en couleur correspondent à ceux rappelés dans le tableau 5.2 et les symboles \blacktriangleright correspondent aux données issues de l'article [153] (nous avons rajouté les lettres correspondant aux cas de cette étude). Nous avons représenté ce rapport en fonction de l'estimation de la résolution normalisée par l'échelle de Kolmogorov calculée à partir du taux de dissipation global ϵ .

5.7.4 Conclusions de l'étude complémentaire

Dans cette étude, nous sommes revenus sur une étude antérieure qui étudiait l'impact de la zone de reconstruction sur l'estimation du taux de dissipation. Nous avons complété cette étude en étudiant l'impact de la résolution sur cette estimation. Dans cette étude complémentaire, nous avons comparé les données issues de six campagnes de mesures réalisées dans deux expériences distinctes. Cette comparaison traite également différentes topologies d'écoulement. Enfin, nous avons comparé nos résultats obtenus sur une expérience différente par une méthode de PIV.

Nos conclusions sur une estimation du taux de dissipation à partir de données reconstruite dans un volume plus petit sont comparables aux résultats précédemment énoncés. Nous avons néanmoins observé que la distance inter-particulaire qui, dans notre cas, correspond à la résolution de l'expérience, ajoute un biais supplémentaire à cette estimation.

Nous pensons que l'effet conjoint de l'inhomogénéité de l'écoulement ainsi que la résolution de l'expérience ont des conséquences sur l'estimation de la dissipation. En outre, l'utilisation des estimations de dissipation issues de données locales doivent être au préalable confrontées et validées avant de pouvoir être exploitées.

5.8 Conclusions

Dans ce chapitre portant sur le point de vue lagrangien, nous nous sommes intéressés au coefficient d'irréversibilité lagrangienne dont nous avons étudié expérimentalement la validité. Ce nouvel outil nous permet d'étudier les trajectoires irréversibles.

Au cours de la deuxième partie, nous avons questionné la qualité des estimations de torsion et de courbure par une comparaison de deux méthodes de calcul. Nous avons montré, à l'issue de cette partie, l'intérêt de la deuxième méthode exploitant les données de vitesse et d'accélération.

Dans une troisième partie, nous avons effectué une étude statistique de dispersion à un point. Ceci nous a permis de mettre en lumière les problèmes d'anisotropie du volume de reconstruction sur les trajectoires.

Enfin, dans une dernière partie, nous utilisons les outils développés dans les parties précédentes: le coefficient d'irréversibilité et les données géométriques des trajectoires: torsion et courbure. Ces outils nous ont permis d'étudier l'impact des trajectoires les plus irréversibles sur leurs géométries. Nous avons également décrit un critère plus simple pour sélectionner les trajectoires irréversibles à partir des données lagrangiennes et sans recourir au calcul du taux d'irréversibilité lagrangienne souvent difficile à estimer en pratique. Ce critère nous a conduit à étudier en particulier le coefficient de regression linéaire de la moyenne conditionnée en fonction de l'accélération, lui-même lié au terme de dissipation locale.

Au cours du développement du second critère développé dans l'article, nous nous sommes aperçu d'une variation du coefficient de regression linéaire de la moyenne conditionnée à l'accélération. Nous avons analysé le double impact du volume de reconstruction et de la résolution sur l'estimation du taux de dissipation locale lui-même lié au coefficient de regression.

Ce chapitre questionne les phénomènes d'irréversibilité lagrangienne. Nous savons de plus que cette quantité est liée au taux de dissipation locale. Cette affirmation laisse supposer l'existence d'un lien étroit entre phénomènes de forte dissipation et phénomènes de forte irréversibilité, lien senti mais pas clairement établi à l'heure actuelle. De plus, nous avons montré que les trajectoires les plus irréversibles présentent également de fortes courbures. On peut alors se questionner sur le lien entre phénomènes de reconnexion (présentant de forts taux de dissipation) et phénomènes irréversibles.

6

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse portant sur l'étude expérimentale d'un écoulement turbulent, nous avons cherché à déterminer le lien entre deux phénomènes reliés à l'anomalie de dissipation. D'une part, les phénomènes de transferts d'énergie et de dissipation d'un point de vue eulérien, et, d'autre part, les phénomènes extrêmes d'irréversibilité d'un point de vue lagrangien. Pour ce faire, nous avons eu besoin d'utiliser les tout premiers résultats du dispositif GVK, construit spécialement pour permettre d'acquérir un champ de vitesse lagrangien résolu en temps et en dessous de l'échelle de Kolmogorov.

Qui dit premiers résultats dit réglages et calibrations. Une grande partie de notre travail a été consacré à l'optimisation de paramètres pour obtenir des données lagrangiennes d'une grande précision. Nous avons bénéficié pour cela de l'expertise du LMFL, et de l'étude poussée des paramètres de reconstruction du champ de vitesse, présentée dans la thèse de T. Chaabo. Nous avons également bénéficié du travail précédent d'A. Cheminet [42] pour le post-traitement des données brutes, en utilisant un algorithme de filtrage optimisé par l'équipe (TrackFit). De plus, nous nous sommes également assurés de la reproductibilité de nos résultats en comparant nos outils sur plusieurs jeux de données issues de diverses campagnes de mesures dans deux expériences totalement indépendantes. Enfin, en complément de l'expérience, nous avons utilisé les données issues de simulations numériques directes réalisées sur une géométrie identique à l'expérience et analysées dans le premier article présenté.

Une fois ces données validées, nous avons pu nous consacrer à leur exploitation. Nous avons tout d'abord privilégié le point de vue eulérien, afin d'étudier l'impact de différentes résolutions du champ de vitesse sur les transferts énergétiques. Ces quantités ont été étudiées théoriquement et numériquement, car elles sont à la base de la théorie de Kolmogorov et des concepts de viscosité turbulente. Cette étude est certainement l'une des premières à avoir étudié ces quantités au voisinage de l'échelle dissipative, pour laquelle les connaissances théoriques sont faibles. Bien qu'en théorie l'échelle de

Kolmogorov corresponde à l'échelle minimale de dissipation, nous y avons toutefois observé l'existence d'un flux d'énergie résiduel non-nul de forte intensité, qui pourrait participer aux phénomènes d'intermittence observés dans les écoulements turbulents et valider la notion de "viscosité turbulente" fréquemment utilisée dans les modèles de turbulence. De fait, nous avons prouvé et quantifié l'existence d'une corrélation entre le tenseur des contraintes et le terme de diffusion de vorticité. Toutes ces observations sont confirmées par une analyse de données issues d'une simulation numérique directe.

Parmi les perspectives évoquées dans cette partie, mentionnons celle liée à l'existence d'une organisation spatio-temporelle des flux d'énergie, en des structures de tailles plus ou moins grandes selon la résolution du champ de vitesse. De plus, un suivi temporel de ces quantités laisse supposer une interaction complexe avec le champ de vitesse qui mériterait une étude plus approfondie. Dans une première tentative pour expliquer ces interactions, nous avons participé à l'élaboration d'un modèle descriptif d'interactions d'objets singuliers nommés *pinçons* et vérifiant au sens des distributions les équations de Navier-Stokes. Dans une certaine mesure, ces *pinçons* sont la contrepartie à l'échelle nulle des flux énergétiques à l'échelle de Kolmogorov que nous avons observés. Il resterait à vérifier que leur dynamique décrit bien celle des transferts d'énergie observés. Un examen plus approfondi et un développement plus poussé de ce modèle permettrait certainement de mieux comprendre les phénomènes d'intermittence participant à l'anomalie de dissipation. En particulier, l'analyse de l'interaction d'un grand nombre de *pinçons* et la confrontation de ces résultats avec les données expérimentales pourraient se révéler intéressantes.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes concentrés sur les événements extrêmes liés à l'irréversibilité, abordés de manière lagrangienne. Après une validation des outils utilisés, nous nous sommes intéressés à l'étude géométrique des trajectoires les plus irréversibles. Cette étude a notamment révélé que ces trajectoires présentaient également une forte courbure. Cela laisse penser que les événements les plus irréversibles pourraient avoir des liens avec les structures tourbillonnaires et les événements de reconnexion. Enfin, cette approche nous donne un nouveau moyen d'étudier les événements irréversibles à partir de l'analyse de la géométrie des trajectoires. Nous avons également développé un critère plus simple permettant de sélectionner les trajectoires les plus irréversibles à partir de données lagrangiennes parcellaires, ce qui serait d'un grand intérêt pour les études météorologiques. Suite à cette étude, nous nous sommes aperçus d'une variation du coefficient de régression linéaire de la moyenne conditionnée de la vitesse au cube par rapport à l'accélération. Ceci nous a conduit à compléter nos résultats d'estimation de la dissipation locale en comparant les données issues de six campagnes de mesures différentes réalisées sur deux expériences distinctes. Nous avons conclu à un effet conjoint de la résolution et de la taille du volume de reconstruction, le premier, correspondant à un biais expérimental, le second, traduisant l'inhomogénéité de notre expérience.

Les perspectives ouvertes par cette étude sont de deux ordres. D'une part, il faudrait clarifier l'impact du filtre employé sur les trajectoires pour l'estimation du calcul de la torsion à partir de données expérimentales. Il faudrait également mener une étude

plus approfondie sur l'estimation du coefficient d'irréversibilité à partir des trajectoires, notamment sur le nombre de pas de temps optimal nécessaire pour son estimation en vue d'améliorer la robustesse de l'algorithme.

D'autre part, l'un des intérêts de cette thèse réside dans le fait qu'elle constitue la première étude expérimentale menée sur l'expérience GVK. De nombreuses questions restent encore en suspens et nécessiteraient une attention particulière pour aborder les prochaines campagnes dans les meilleures conditions possibles.

Le premier aspect concerne la mesure de couple. Nous avons observé que le bruit de mesure, trop important, rendait difficile l'exploitation des données. Ce bruit est dû à l'effet conjoint des couples parasites (comme nous avons pu le constater par des mesures récentes) et de possibles effets électromagnétiques (malgré l'utilisation de cages de Faraday) dont nous n'avons pu quantifier l'amplitude.

Le deuxième aspect concerne la géométrie du volume de reconstruction. En particulier, une résolution expérimentale du champ de vitesse dans un volume plus large est nécessaire pour limiter les biais d'anisotropie. Cette expérience reste évidemment extrêmement difficile à réaliser et nécessite une épaisseur laser plus large tout en maintenant une intensité constante.

Parallèlement, une meilleure compréhension des paramètres du logiciel Shake-The-Box permettrait d'améliorer l'optimisation et la qualité des futures reconstructions, et ouvrirait la voie à une amélioration de la résolution de nos mesures par une augmentation de la concentration des particules. Le dernier aspect expérimental porte sur une analyse de l'impact des petites trajectoires à la fois sur la qualité des mesures et également sur l'interpolation eulérienne obtenue par l'algorithme FlowFit. En effet, une amélioration semble nécessaire pour tenter (i) de filtrer plus efficacement les petites trajectoires, (ii) de connaître l'impact des petites trajectoires sur l'interpolation eulérienne et (iii) de raccorder les trajectoires le cas échéant. Ce dernier point est toutefois en cours d'étude avec les récentes améliorations de l'algorithme Shake-The-Box. Une étude est également en cours pour améliorer l'algorithme d'interpolation eulérienne dans la thèse d'A. Barlet. Cette étude permettra de mieux gérer l'inhomogénéité locale de la concentration particulaire et le traitement des petites trajectoires qui sont ses deux points faibles.

Nous savons depuis longtemps que les événements les plus dissipatifs s'organisent en structures tubulaires. Leurs liens avec les isovaleurs de forte vorticité est aujourd'hui clairement établi. Dans le même temps, nous savons quantifier localement le taux d'irréversibilité et dans quelle mesure il est lié au taux de dissipation à l'échelle de Kolmogorov. Néanmoins, un lien reste à trouver pour comprendre l'impact de l'irrégularité du champ de vitesse eulérien sur les trajectoires lagrangiennes. Cette thèse ne constitue donc qu'une ébauche dans l'approche de ces phénomènes, dont l'étude doit encore être approfondie afin d'établir plus clairement les liens partagés entre ces deux types de phénomènes.

Appendices



Mesures optiques

A.1 Intensité moyenne

Nous revenons sur l'intensité moyenne des images de particules pour les 5 runs de chacun des 4 cas étudiés dans l'expérience GVK (voir également le dernier cas Figure 3.26). Nous remarquons dans ces trois cas expérimentaux que les intensités moyennes enregistrées par chaque caméra varie faiblement au cours du temps. Nous pourrions en particulier comparer avec la Figure 3.26 pour le cas d'intensité laser la plus élevée laissant apparaître un affaiblissement d'intensité au cours du temps.

Par ailleurs, comme relevé dans les images de particules (Figure 3.23), nous remarquons que les intensités moyennes enregistrées par les caméras 2 et 3 sont systématiquement plus grande. Le rapport signal-sur-bruit est plus faible sur ces deux caméras.

De plus, nous remarquons sur le run 1 caméra 1 du cas anti 0.004 Hz une intensité moyenne sinusoïdale. Ce point semble être une conséquence d'une particules (ou d'un amas de particules) d'un diamètre important illuminé par le laser et passant plusieurs fois au travers du volume de reconstruction.

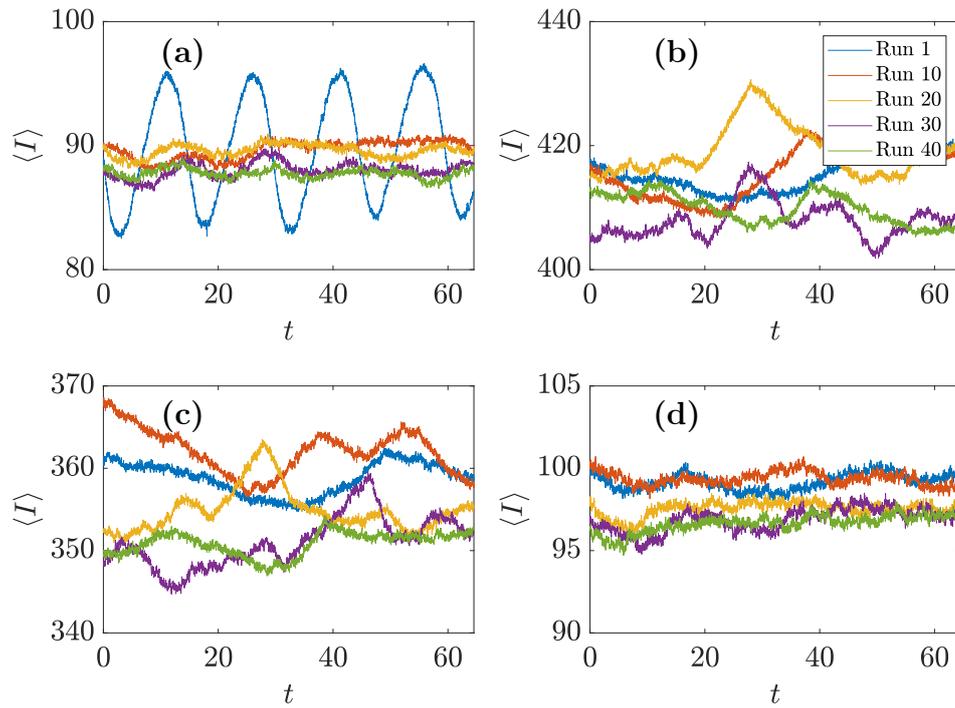


Figure A.1 – Intensité moyenne des images sur les run 1, 10, 20, 30 et 40 pour le cas anti 0.004Hz. (a) correspond à la caméra 1, (b) caméra 2, (c) caméra 3, (d) caméra 4.

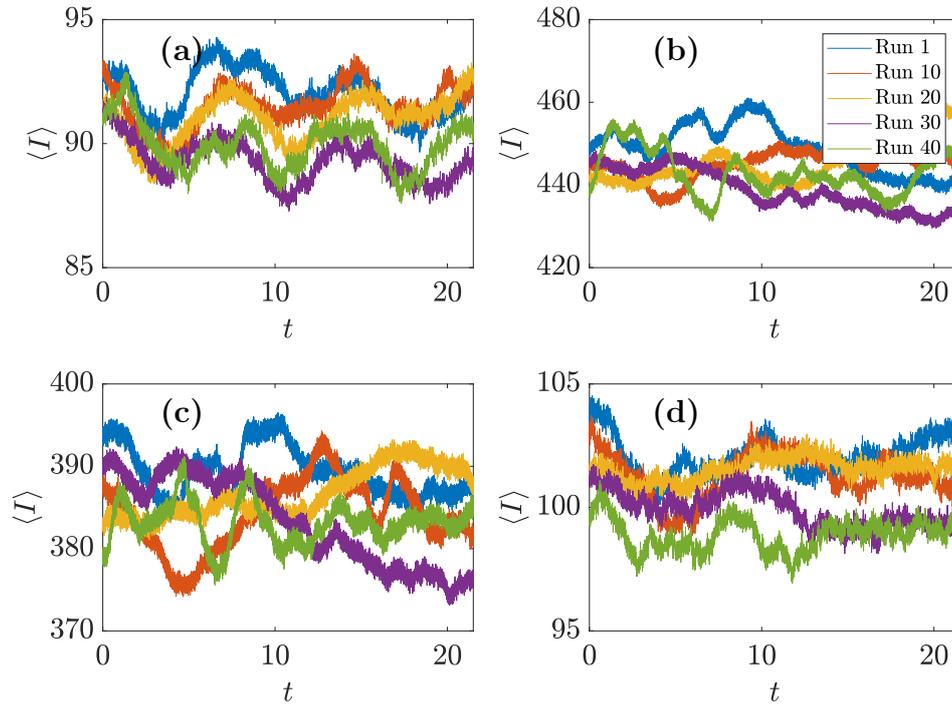


Figure A.2 – Intensité moyenne des images sur les run 1, 10, 20, 30 et 40 pour le cas anti 0.01Hz. (a) correspond à la caméra 1, (b) caméra 2, (c) caméra 3, (d) caméra 4.

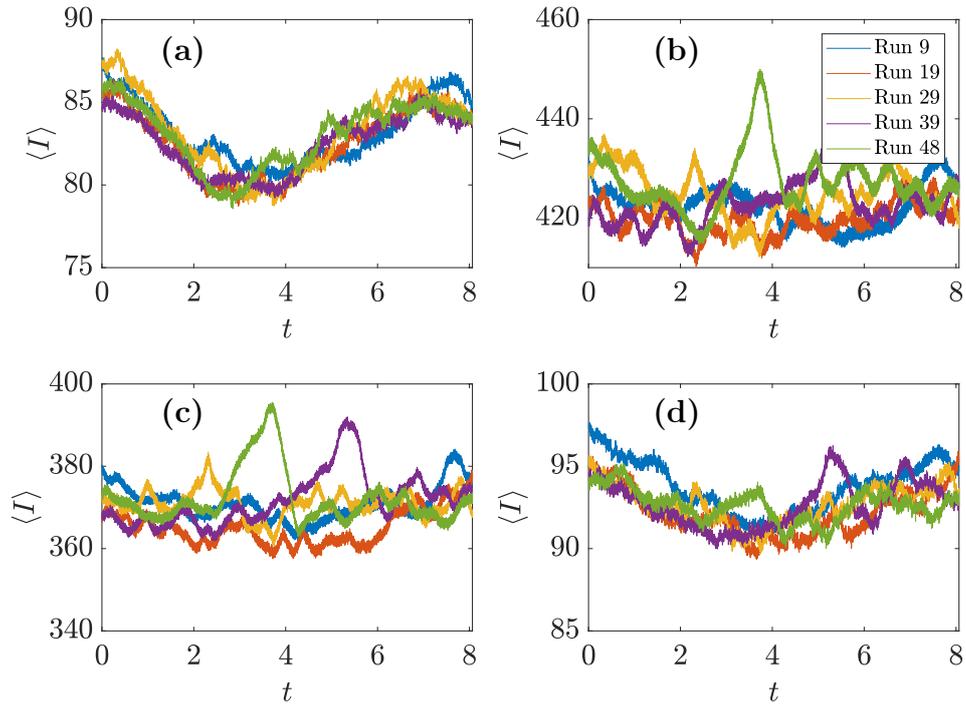


Figure A.3 – Intensité moyenne des images sur les run 9, 19, 29, 39 et 48 pour le cas anti 0.025Hz. (a) correspond à la caméra 1, (b) caméra 2, (c) caméra 3, (d) caméra 4.

A.2 Etape de calibration: compléments

Le centre de la mire fournit l'origine du repère du laboratoire - repère commun aux 4 caméras. Il est matérialisé, sur la figure 3.20, par un point blanc situé juste en dessous du carré blanc. Une fois l'origine de la mire identifiée, on définit l'axe des x croissants dans la direction origine-triangle blanc. De même, l'axe des y croissants suit la direction origine-carré blanc. L'opération de calibration est faite pour chacune des 4 caméras.

Suivant les préconisations fournies par le logiciel DaVis[©], nous avons fait une première calibration en modèle pinhole¹. Cette étape préliminaire permet d'accéder à une estimation des paramètres extrinsèques et intrinsèques des caméras, à savoir, la distorsion radiale κ_1 (en m^{-2}) et κ_4 (en m^{-4}), les coefficients de distorsion tangentiel P_1 et P_2 ne sont pas accessibles, le point principal (c_x, c_y) correspondant au point invariant de distorsion radiale, la focal f et le coefficient de correction du rapport d'aspect α sur chacune des caméras [80].

¹On considère que l'ensemble des rayons émis par l'image suivent une ligne droite.

	Caméra 1	Caméra 2	Caméra 3	Caméra 4
Focale (mm)	177.48	138.03	253.83	273.19
(c_x, c_y) (px)	-3091.9; 1085.7	-8103.8; 822.1	-15134.2; 828.3	-6085.8; 465.3
κ_1	0.0558	0.0333	-0.036	-0.00724
κ_2	-0.261	-0.0314	0.0334	0.0109
fit error (px)	0.595	0.921	0.331	0.273

Table A.1 – Données DaVis (version 10.2.0) avec la calibration pinhole pour comparaison avec les paramètres de calibration utilisés (Figure A.4)

En particulier, nous obtenons des distorsions faibles et une distance focale f cohérente avec la valeur de focale de la lentille utilisée ($f = 200$ mm). Compte tenu du passage à travers de multiples dioptries plans et non plans, la focale globale est forcément différente de celle mentionnée par le constructeur.

Nous avons néanmoins opté pour une calibration cubique qui minimise davantage l'erreur de régression. Nous avons également retranscrit les paramètres de sortie Figure A.4.

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.00$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.00$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.2389 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: 2.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 882.3248 + 216.4892 s + 13.8248 s^2 + -0.2541 s^3 + 2.8571 t + -0.5070 t^2 + 0.0188 t^3 + 0.0539 st + -0.1503 s^2 t + -0.0316 t^2 s$ $dy = 48.2806 + -6.0260 s + 0.1573 s^2 + -0.1358 s^3 + 2.3642 t + 0.2077 t^2 + -0.1934 t^3 + 18.7291 st + -0.4182 s^2 t + -0.1158 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.00$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.00$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.2717 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: 2.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 861.4780 + 428.6817 s + 11.8462 s^2 + -0.3393 s^3 + -3.1307 t + -0.5018 t^2 + -0.0153 t^3 + 0.1095 st + -0.0423 s^2 t + 0.2045 t^2 s$ $dy = 22.5165 + -6.2096 s + 0.1761 s^2 + -0.0860 s^3 + 6.1518 t + -0.0620 t^2 + 0.2377 t^3 + 25.0706 st + -0.8204 s^2 t + 0.0029 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.00$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.00$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.1914 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: -1.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 905.2852 + 1156.4675 s + -11.0283 s^2 + 0.4076 s^3 + 3.4202 t + 0.1761 t^2 + 0.0515 t^3 + -0.3256 st + 0.1264 s^2 t + -0.0877 t^2 s$ $dy = 28.7494 + -3.4809 s + 0.1279 s^2 + -0.0152 s^3 + 18.9889 t + 0.0941 t^2 + -0.0573 t^3 + 23.8900 st + -0.7235 s^2 t + -0.0792 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_185639 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.00$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.00$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.1564 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: -1.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 884.0112 + 1375.2708 s + 14.1240 s^2 + 0.4407 s^3 + -1.6191 t + 0.0897 t^2 + 0.0068 t^3 + 0.2629 st + -0.0668 s^2 t + 0.1651 t^2 s$ $dy = 35.4719 + -4.8169 s + 0.0403 s^2 + 0.0070 s^3 + 14.0610 t + -0.6113 t^2 + -0.1458 t^3 + 19.4066 st + -0.5481 s^2 t + 0.1554 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.19$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.19$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.5085 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: 1.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 910.2072 + 215.9866 s + 13.8446 s^2 + -0.2995 s^3 + 2.7019 t + -0.3529 t^2 + 0.2978 t^3 + 0.0923 st + -0.1859 s^2 t + -0.0510 t^2 s$ $dy = 48.1712 + -5.9056 s + 0.1824 s^2 + -0.1914 s^3 + 1.8641 t + 0.1864 t^2 + 0.7743 t^3 + 18.8366 st + -0.3736 s^2 t + -0.0758 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.19$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.19$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.3103 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: 1.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 903.7269 + 427.0519 s + 11.9568 s^2 + 0.4453 s^3 + -3.2524 t + -0.2802 t^2 + 0.1763 t^3 + 0.0638 st + 0.0281 s^2 t + 0.0216 t^2 s$ $dy = 22.3375 + -6.4421 s + 0.1041 s^2 + 0.0723 s^3 + 4.7869 t + -0.0094 t^2 + 0.9135 t^3 + 25.2008 st + -0.7754 s^2 t + -0.1635 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_191341 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.19$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.19$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.2189 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: -2.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 946.0398 + 1155.0524 s + -10.9147 s^2 + 0.3669 s^3 + 3.6881 t + 0.2292 t^2 + -0.0975 t^3 + -0.2676 st + 0.0627 s^2 t + -0.1392 t^2 s$ $dy = 29.1302 + -3.5256 s + 0.1000 s^2 + -0.0091 s^3 + 19.7513 t + 0.0998 t^2 + 0.1713 t^3 + 23.8094 st + -0.6804 s^2 t + -0.0315 t^2 s$	

Plane: 1 2	
Calibration Calibration time: 211129_185639 Plate: 058-5 Camera group: 1 Min. angle: 1-2: 22.26° Cameras: 1,2,3,4 Max. angle: 2-3: 134.05°	
Mapping of world (x/y) to raw coordinates (x/y) $x = x' - dx(s(x), t(y))$ with $s(x) = 2 * (x' - 1730.63) / 1600.19$ $y = y' - dy(s(x), t(y))$ with $t(y) = 2 * (y' - 834.84) / 1600.19$	
General Fit model: 3rd order polynomial Handedness: Right-Handed Fit error: 0.2144 pixel Scale factor: 38.64 pixel/mm Size of dewarped image: 3324 x 1656 pixel / 86.03 x 42.86 mm Z position of plane: -2.9 mm	
3rd order polynomial functions 'dx' and 'dy' with variables 's' and 't' $dx = 911.5156 + 1375.0179 s + -14.1055 s^2 + 0.3677 s^3 + -1.3927 t + 0.1248 t^2 + -0.1650 t^3 + 0.2867 st + -0.0929 s^2 t + 0.0379 t^2 s$ $dy = 35.7656 + -4.9176 s + 0.0323 s^2 + 0.0530 s^3 + 13.8968 t + -0.6095 t^2 + 0.0228 t^3 + 19.3548 st + -0.4876 s^2 t + 0.1924 t^2 s$	

Figure A.4 – Paramètres de calibrations par un modèle cubique utilisés pour l'ensemble des cas de l'expérience sur GVK. Résultats délivrés par le logiciel DaVis[®] sur les 4 caméras pour chacun des plans de la mire crénelée.

A.3 Diffusion de Mie

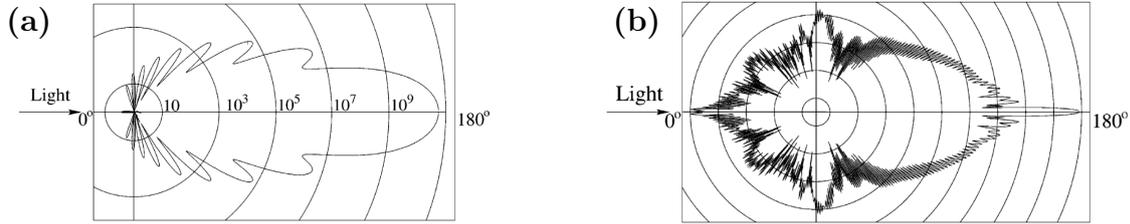


Figure A.5 – Scattering de Mie, (a), distribution angulaire de l'intensité réémise pour une particule de verre de $1 \mu m$ dans l'eau rayon incident $\lambda = 532 \text{ nm}$ ($q = 6$), (b), distribution angulaire de l'intensité ré-émise pour une particule de verre de $10 \mu m$ dans l'eau rayon incident $\lambda = 532 \text{ nm}$ ($q = 59$). Figure tirée de [137] (section 2.1.2). Pour rappel, nous avons utilisé des particules de polystyrène de $5.33 \mu m$ de diamètre moyen ($q = 41.9$).

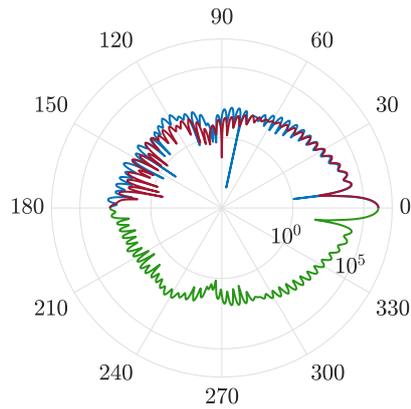


Figure A.6 – Courbe de distribution angulaire calculée par ordinateur (code disponible) pour les particules utilisées <https://omlc.org/software/mie/maetzlermie/Maetzler2002.pdf>

A.4 Auto-calibration et OTF

Idéalement, pour construire le champ de vecteurs de disparité, on cherche à connaître l'écart entre la position réelle de chacune des particules sur le capteur et le barycentre de la tache de la particule enregistrée par la caméra lors de l'expérience. Il faut d'abord estimer cette position réelle. De plus, en général, on ne cherche pas à traiter particule par particule mais plutôt par sous-volume, ce qui permet de moyennner les contributions individuelles et de minimiser les erreurs de reconstruction.

Pour l'explication de l'auto-calibration, nous nous attacherons néanmoins à une seule particule - notée A sur la figure A.8. Cette étape pourra être ensuite répétée sur l'ensemble des particules présentes sur le capteur considéré.

Avant toute recherche de la position réelle de particule, il faut sélectionner une particule (A sur la figure A.8) et un capteur (*Caméra 1*). On cherche ensuite à identifier cette particule parmi toutes les particules présentes sur les 3 autres capteurs (*Caméra 2,3 et 4*). Il s'agit là d'apparier les particules. Comme rien ne ressemble plus à une particule qu'une autre particule, ce problème peut vite devenir extrêmement complexe. Pour se faire, nous allons développer la reconstruction par lignes épipolaires [107]. La question est alors de retrouver A dans les 3 autres images. Pour cela, on peut construire la ligne épipolaire sur la base de la condition de planéité définie dans l'équation A.1 (voir [185] p .20).

$$(\overrightarrow{O_1O_2} \times \overrightarrow{O_1A}) \cdot \overrightarrow{e_2X} = 0. \quad (\text{A.1})$$

La construction des lignes épipolaires dans le cas idéal, c'est à dire sans prendre en compte la traversée des dioptrés, suit la construction schématisée sur la figure A.7.

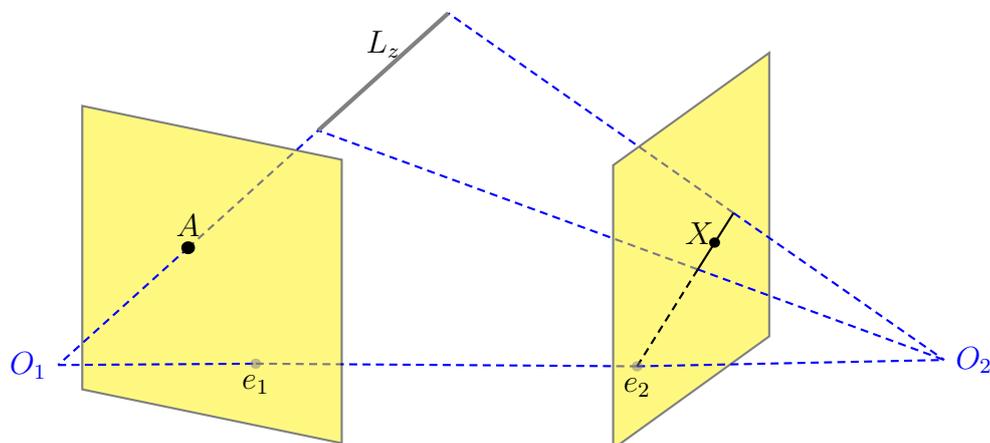


Figure A.7 – Construction des lignes épipolaires dans le cas idéal, c'est à dire sans prendre en compte la traversée des différents dioptrés qui déforment la trajectoire, ici linéaire, du rayon. Le cas d'un passage par des dioptrés a tendance à dévier le rayon modélisé par des polygone - problème traité dans [107]

La particule vue par la caméra 1 se trouvera le long de la ligne de vue (ici O_1A). Les points O_1 et O_2 sont déterminés pendant l'étape de calibration. Cette ligne de vue traverse la zone illuminée par le laser, la particule A ne peut donc se trouver que dans la partie grisée d'extension L_z . Ce segment sera lui-même projeté sur la caméra 2, suivant la même condition de projection.

Le problème, apparaissant de prime abord extrêmement complexe qui consistait à identifier A (cerclée de rouge figure A.8) dans la caméra 2, est ainsi énormément simplifié. Cette particule ne peut se trouver sur la caméra 2 que sur la surface grisée, c'est à dire sur une surface $\ell_z \cdot \epsilon_{\max}$ avec ℓ_z l'extension de la projection de la ligne de vue prenant en compte le volume d'illumination et ϵ_{\max} l'erreur de triangulation que l'on fixe et non plus sur le capteur entier. On peut alors sélectionner de potentiels candidats (B et C).

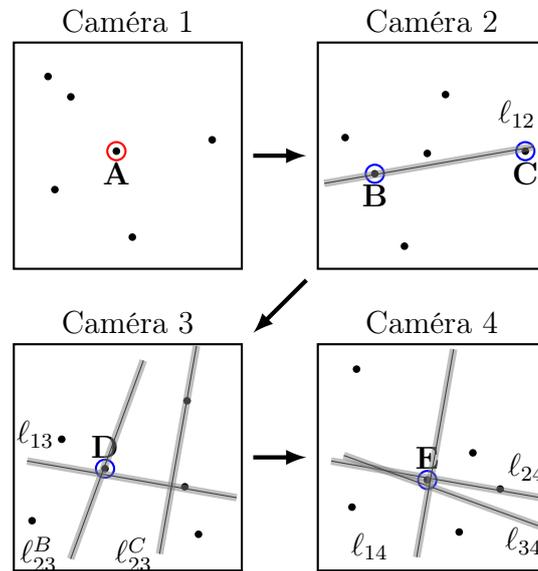


Figure A.8 – Construction des lignes épipolaires. Elles permettent d'identifier le quadruplet (A, B, D, E) comme unique triplet issue de la particule A sur la caméra 1.

On peut répéter l'opération sur les deux autres caméras à notre disposition. Sur la caméra 3, la surface de recherche est encore réduite, correspondant cette fois à une surface ϵ_{\max}^2 . On trouve alors une unique particule D dans la zone d'intersection des lignes ℓ_{13} et $\ell_{23}^{B,C}$, correspondant respectivement à la projection de la ligne issue de A (caméra 1) sur la caméra 3 et à la projection de chacune des lignes issues des deux potentiels candidats B et C (caméra 2) sur la caméra 3. Finalement, seul le quadruplet (A, B, D, E) convient. Ainsi, il est possible d'identifier une particule vue par différentes caméras, voir [107].

Une fois cette étape terminée, on peut alors ré-projeter chaque quadruplet (A, B, D, E) selon leurs lignes de vues respectives sur le modèle de la figure A.9. Ces lignes ne sont pas concourantes à cause des erreurs de calibration. La position réelle de la particule sélectionnée doit ainsi se trouver dans la zone entourée par ces lignes. On peut alors définir une particule fictive, la plus probable, par une méthode de minimisation de dis-

tance² [48]. Généralement, on minimise la distance $|(x_i, y_i) - (x'_i, y'_i)|$ avec (x'_i, y'_i) la position projetée de la particule fictive (X, Y, Z) [181]. On trouve alors une position de particule la plus probable (rond noir sur la figure A.9) qui peut ensuite être de nouveau projetée suivant le même principe évoqué précédemment.

L'écart observé entre la tache de la particule sur chaque capteur et la position estimée de la particule fictive donne un vecteur appelé vecteur de disparité (flèche en bleu clair sur la figure A.9).

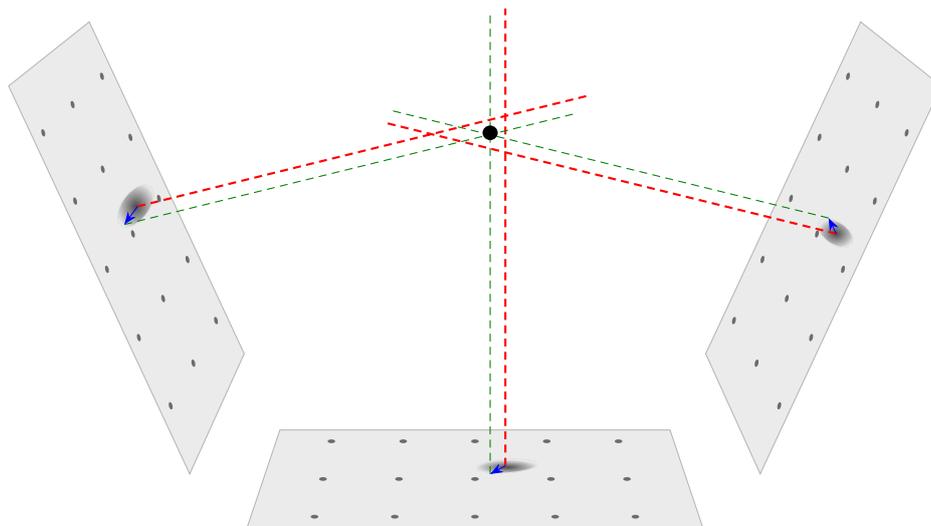


Figure A.9 – Auto-calibration adaptée de [158]. En ligne pointillée rouge, ligne de vue reliant le barycentre de la tache de particule et le point principal du modèle pinhole. Le point noir représente l'estimation de la position réelle de la particule obtenue par une étape de minimisation de distance des lignes de vue. Ligne pointillée vert, projection de la particule fictive sur chaque capteur. Vecteur bleu, vecteur de disparité.

²Least-Square méthode par exemple

A.5 Puissance laser

Cas	C1 - C2	C3 - C4	C5 - C6	C7 - C8
f_{acq} (Hz)	100	150	400	1200
P_1 (W)	0.6	0.9	2.4	7.3
I_1 (A)	19.9	19.9	20	21.5
P_2 (W)	0.61	0.92	2.43	7.32
I_2 (A)	19.5	19.5	19.5	20.6

Table A.2 – Récapitulatif des fréquences d’acquisitions, puissances et intensités utilisées sur chaque laser (en indice) pour l’expérience GVK sur les différents cas d’étude - voir les détails sur les cas au chapitre 3.4.

A.6 Détail de la chaine de mesure PTV

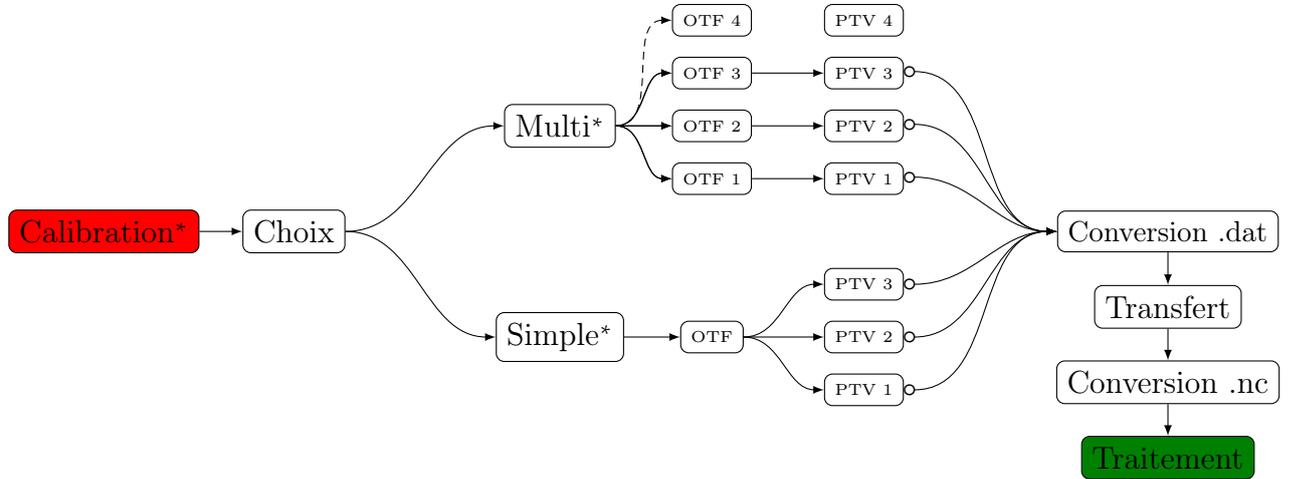


Figure A.10 – schéma de principe de la phase de résolution STB. A la suite de la calibration, nous ajoutons une étape d’auto-calibration (OTF), nous pouvons décider de réaliser une unique OTF (**simple***) ou faire une nouvelle OTF (**multi***) pour chaque nouveau run. Cette deuxième option peut être nécessaire dans le cas où les caméras bougent entre deux runs, par exemple suite aux vibration ou si le temps entre deux runs est grand. On pourra en particulier trouver une étude de l’impact du temps d’attente sur la qualité de reconstruction pour une expérience de PIV dans [49]. A la suite de cette OTF, on lance la reconstruction PTV. Une fois les calculs terminés, nous devons convertir les données en .dat, transférer celles-ci sur le serveur puis convertir les .dat en .nc pour pouvoir être exploités par nos code *MATLAB*®.

B

Mesures de couple et vitesse

B.1 Couple moyen en fonction de la fréquence d'acquisition

Nous avons évoqué la différence de mesure observée entre les différentes gammes de couplemètre employé (voir partie 3.2.7). Nous avons rassemblé, Figure B.1, l'ensemble des couples moyens en fonction de la fréquence de rotation.

Le calcul de la fréquence moyenne est estimée pour chacune des gammes 0 – 100 et 0 – 1000 N.m. Nous estimons dans un premier temps la moyenne temporelle de chaque mesure de couplemètre pour chaque gamme et pour chacun des runs. Nous affichons ensuite la moyenne temporelle du couple C_m avec

$$C_m = \frac{1}{2}(C_h + C_b),$$

C_h couple mesuré turbine haute et C_b couple mesuré turbine basse.

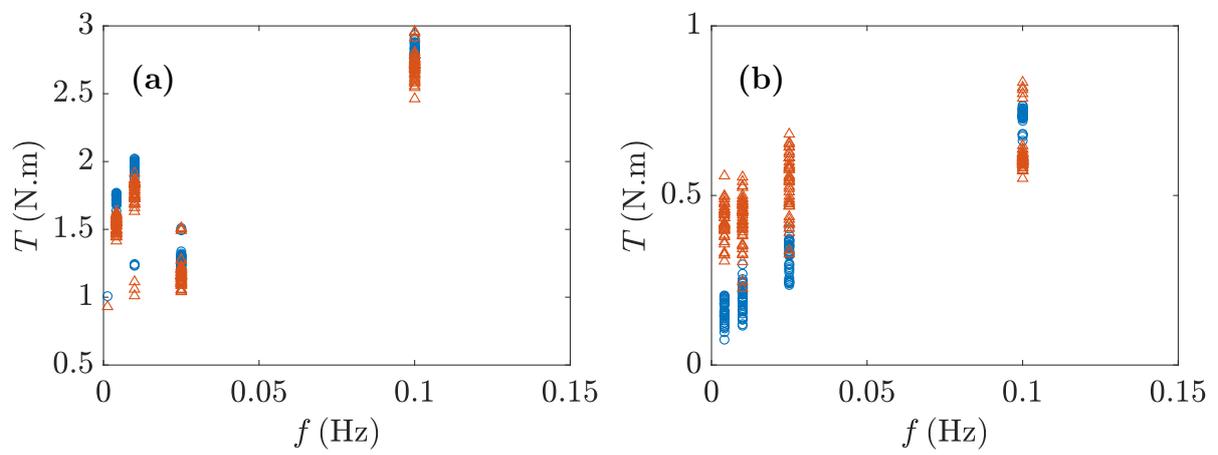
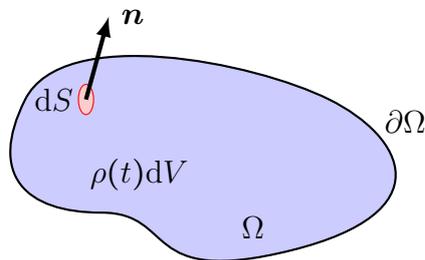


Figure B.1 – Couple moyen haut/bas des moyennes temporelles mesurées T pour chaque cas en fonction de la fréquence moyenne haut/bas des moyennes de fréquences de rotation mesurée. (a) cas anti et (b) cas contra. Les symboles \circ correspondent à la gamme 0 – 100 N.m et les \triangle la gamme 0 – 1000 N.m

C

Quelques développements théoriques

C.1 Conservation de la quantité de masse



Supposons un volume de contrôle dV . En effectuant un bilan de quantité de masse dans ce volume, nous avons,

$$\rho(t + dt)dV - \rho(t)dV = -\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{C.1})$$

Le signe moins traduisant le fait qu'un accroissement de la quantité de masse conduit à la positivité de $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$. Or par définition, $d\mathbf{S}$ est orienté vers l'extérieur du volume.

En intégrant sur le volume et par application de la formule de Green-Ostrogradski, on trouve que

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} dV = 0, \quad (\text{C.2})$$

Ou d'un point de vue local qui se traduit par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{C.3})$$

C.2 Conservation de la quantité de mouvement

Considérons un volume élémentaire de contrôle $dV = dx dy dz$ sur lequel s'applique des forces sur chaque face dans chaque direction. On peut alors écrire ces forces sous la forme du produit de contrainte σ_{ij} par la surface dS_{ij} . On note la contrainte σ_{ij} s'appliquant sur la face de normale $i \in \{x, y, z\}$ dans la direction $j \in \{x, y, z\}$.

En considérant de plus le développement à l'ordre 1 de la contrainte σ_{ij} , on a de plus :

$$\sigma_{ij}(x + dx, y, z) = \sigma_{ij}(x, y, z) + dx \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}, \quad (\text{C.4})$$

De même dans les autres directions.

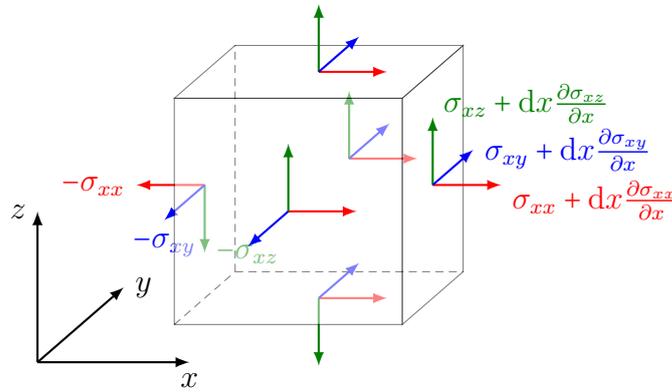


Figure C.1 – Volume élémentaire dV sur lequel s'applique les contraintes σ_{ij} . Pour plus de visibilité, nous avons représenté les contraintes uniquement sur la face de normale \mathbf{x} et $-\mathbf{x}$.

A partir de la deuxième loi de Newton:

“dans un référentiel Galiléen, la variation de quantité de mouvement entre deux instants infiniment proches est égal à la somme des contributions des forces extérieures,” on peut écrire que :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (\text{C.5})$$

Cette force résultante peut être scindée en deux contributions, une surfacique et une volumique de telle sorte que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s, \quad (\text{C.6})$$

La résultante des forces surfacique se retrouve grâce au bilan des forces sur le volume de contrôle Figure C.1. Après calculs, on trouve que la projection de la force \mathbf{F}_s selon l'axe x_i peut s'écrire sous la forme :

$$F_s^i = \partial_j \sigma_{ij} dV = [\nabla \underline{\sigma}]_i dV, \quad (\text{C.7})$$

La force volumique s'appliquant sur le volume de contrôle dV dérive d'une force volumique \mathbf{f} selon la formule suivante :

$$F_v^i = \rho f_i dV, \quad (\text{C.8})$$

La quantité de mouvement du volume dV peut s'écrire de plus sous la forme $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u} dV$, notons ici que dV est constant au cours du temps.

D'après le deuxième principe de Newton et en divisant par le volume élémentaire dV , on peut finalement écrire que :

$$\frac{d\rho \mathbf{u}}{dt} = \nabla \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{f}, \quad (\text{C.9})$$

Sous les hypothèses suivantes :

- Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est un invariant Galiléen,
- Il dépend linéairement du gradient de vitesse (fluide Newtonien),
- Le fluide est isotropique.

Il est possible de montrer que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur symétrique¹. Il peut de plus se décomposer comme la somme d'une contribution isotrope et d'un déviateur (tenseur de trace nulle) [45]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \mu \left[(2\underline{\underline{S}} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] + \xi (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}}, \quad (\text{C.10})$$

avec $\underline{\underline{S}}$ le tenseur taux de déformation défini par

$$\underline{\underline{S}} \equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (\text{C.11})$$

$\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité, p le champ de pression, μ la viscosité cinématique et ξ la seconde viscosité.

Sous ces conditions, les équations s'écrivent sous la forme :

$$\rho (\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) = \partial_j \sigma_{ij} + \rho f_i, \quad (\text{C.12})$$

C.2.1 Cas incompressible d'un fluide Newtonien

Dans le cas d'un écoulement incompressible, la masse volumique reste constante.

$$\partial_t \rho = 0, \quad (\text{C.13})$$

Il est alors possible de simplifier l'équation de conservation de la masse Eq. (C.3). Le champ de vitesse devient à divergence nulle.

$$\text{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{C.14})$$

Sous cette hypothèse, on peut également réécrire le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$,

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{S}}, \quad (\text{C.15})$$

¹p. 33 [45], c'est la seconde loi de Cauchy

Si de plus la viscosité est constante dans l'espace,

$$\nabla \underline{\underline{\sigma}} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}_i, \quad (\text{C.16})$$

Finalement, un fluide Newtonien incompressible est régie par les équations de conservations de la masse et de conservation de la quantité de mouvement suivantes. Ce jeu d'équations est nommé équations de Navier-Stokes Incompressible, nous y feront référence par le sigle (INSE).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (\text{C.18})$$

avec \mathbf{u} le champ de vitesse, p le champ de pression, \mathbf{f} le forçage correspondant à toute force extérieure (gravité, force électrostatique, poussée d'Archimède, ...), ρ la masse volumique et $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité dynamique du fluide.

C.3 Sur le développement de l'équation de la vorticité

En passant en notation tensorielle, en notant de plus que $[\nabla \times \mathbf{u}] = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k$. Soit l'équation de conservation de la quantité de mouvement introduite à l'équation (2.1)

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (\text{C.19})$$

En prenant le rotationnel de cette équation, nous obtenons:

1. $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$
2. $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}$
3. $\nabla \times (\nabla f) = 0$

Demonstration²:

1:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_i &= \epsilon_{ijk} u_j \omega_k \\ &= \epsilon_{ijk} u_j (\epsilon_{klm} \partial_l u_m) \\ &= \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) u_j \partial_l u_m \\ &= u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i \\ &= \frac{1}{2} \partial_i u_j u_j - u_j \partial_j u_i \end{aligned}$$

² $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})$

2:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} u_l \omega_m) \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (u_l \omega_m) \\
&= \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \partial_j u_l \omega_m \\
&= \partial_j (u_i \omega_j) - \partial_j (u_j \omega_i) \\
&= \underbrace{u_i \partial_j \omega_j + \omega_j \partial_j u_i - u_j \partial_j \omega_i - \omega_i \partial_j u_j}_{=0}
\end{aligned}$$

En utilisant la remarque (1) dans l'équation (2.1) nous obtenons la formulation de Helmholtz de l'équation de Navier-Stokes.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (\text{C.20})$$

En appliquant le rotationnel à cette forme, nous obtenons :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{0} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

Après avoir ré arrangé les termes de l'équation, nous obtenons finalement l'équation de la vorticité comme énoncé à l'équation (2.9).

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (\text{C.21})$$

C.4 Théorème de Kelvin

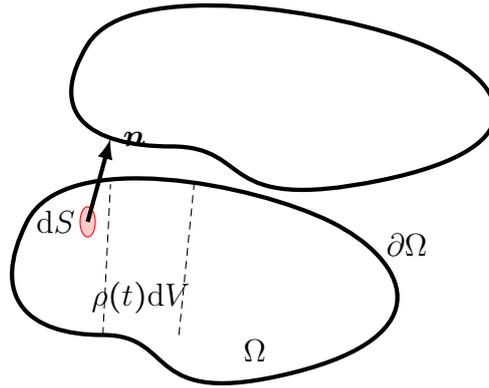


Figure C.2 – Théorème de Kelvin, image adapt e de [13]

Supposons un fluide idéal (  viscosité nulle $\nu = 0$). Supposons de plus que les forces extérieures dérivent d'un potentiel,

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \phi, \quad (\text{C.22})$$

et enfin que la densité dépend uniquement de la pression (cas d'un écoulement barocline).

D'après le théorème de la circulation d'une part, on sait que la circulation du champ de vitesse le long d'une courbe fermé est égale au flux de son rotationnel. En d'autres termes:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{C.23})$$

En dérivant la circulation Γ par la dérivée matérielle $\frac{D}{Dt}$ et en utilisant les équations d'Euler (2.12a) et (4.5b), sous les conditions moins restrictives énoncées précédemment, on obtient le développement suivant:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\boldsymbol{\ell}}{Dt} \quad (\text{C.24})$$

$$= - \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\boldsymbol{\ell} - \oint_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} d\boldsymbol{\ell}, \quad (\text{C.25})$$

$$= - \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot (d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad (\text{C.26})$$

Nous pouvons noter, comme évoquer dans le livre de C. Bailly et G. Compte-Bellot [13], que la dérivée matérielle du vecteur de déplacement $d\boldsymbol{\ell}$ se trouve en considérant le développement de Taylor à l'ordre 1 de deux points de la courbe $\mathcal{C}(t)$ \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 infiniment proches.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t+dt) - \mathbf{x}_1(t+dt) &= \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) + dt(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})), \\ &= \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) + dt d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

On obtient donc, en notant $d\boldsymbol{\ell}(t+dt) = \mathbf{x}_2(t+dt) - \mathbf{x}_1(t+dt)$ et $d\boldsymbol{\ell}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ l'assertion suivante :

$$\frac{d}{dt} d\boldsymbol{\ell} = d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Compte tenu que la circulation d'un gradient le long d'une courbe fermée est nulle, ce qui nous a permis d'éliminer le terme de gradient de potentiel ϕ et en ré-écrivant le terme de pression selon un potentiel Π_p :

$$\nabla \Pi_p = \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\text{C.27})$$

Le premier terme de l'équation est également nul.

Enfin, compte tenu que

$$\mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\ell} \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right), \quad (\text{C.28})$$

Nous obtenons la nulité du dernier terme de l'équation.

Pour conclure, dans le cas d'un écoulement d'Euler sous la condition d'une densité ρ fonction uniquement de la pression et si toutes les forces extérieures dérivent d'un potentiel (ce qui est généralement le cas) alors nous avons la conservation de la circulation le long d'une ligne de courant quelconque \mathcal{C} .

Ce point se traduit de manière équivalente par le théorème de la circulation, à la constance du flux de vorticité à travers toute surface S .

C.5 Inégalités de \mathcal{D}_ℓ^I et \mathcal{D}_ℓ^ν dans le cas d'un champ de vitesse h -hölderien

Supposons \mathbf{u} un champ h -hölderien. Par définition, on a

$$\exists C \quad \text{t.q.} \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \leq C \|\mathbf{r}\|^h. \quad (\text{C.29})$$

L'expression de \mathcal{D}_ℓ^I Eq. (2.37b) et \mathcal{D}_ℓ^ν Eq. (2.37c) est rappel  e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\ell^I &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta_\xi \mathbf{u} (\delta_\xi \mathbf{u})^2 \, d\boldsymbol{\xi}, \\ \mathcal{D}_\ell^\nu &= \frac{1}{2\text{Re}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \phi^\ell(\boldsymbol{\xi}) (\delta_\xi \mathbf{u})^2 \, d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

avec pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact et unitaire,

$$\phi^\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell^3} \phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell}\right), \quad (\text{C.30})$$

On a donc dans un premier temps,

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_\ell^I| &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i \phi^\ell(\boldsymbol{\xi})| \|\delta_\xi \mathbf{u}\|^3 \, d\boldsymbol{\xi}, \\ &\leq \frac{C}{4} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i \phi^\ell(\boldsymbol{\xi})| \|\boldsymbol{\xi}\|^{3h} \, d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\xi}/\ell$ dont la jacobienne vaut $1/\ell^3$, on obtient :

$$|\mathcal{D}_\ell^I| \leq C_{\phi,h} \ell^{3h-1},$$

avec $C_{\phi,h} = \frac{C}{4} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i \phi(\boldsymbol{\chi})| \|\boldsymbol{\chi}\|^{3h} \, d\boldsymbol{\chi}$, qui a toujours un sens pour $h \geq 0$ car $\partial_i \phi$ est à support compact et la fonction $\chi \rightarrow \chi^{3h}$ est intégrable sur tout ensemble compact.

De même, on montre pour \mathcal{D}_ℓ^ν que,

$$|\mathcal{D}_\ell^\nu| \leq C_{\phi,h}^\nu \ell^{2h-2},$$

avec $C_{\phi,h}^\nu = \frac{C}{2\text{Re}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{ii}^2 \phi(\boldsymbol{\chi})| \|\boldsymbol{\chi}\|^{2h} \, d\boldsymbol{\chi}$, qui a toujours un sens pour $h \geq 0$ car $\partial_i \phi$ est à support compact et la fonction $\chi \rightarrow \chi^{2h}$ est intégrable sur tout ensemble compact.

D

Etudes sur les calculs de courbure et de torsion

D.1 Etude préliminaire sur l'impact du schéma de dérivation et du filtrage sur le calcul de courbure

Pour étudier l'impact du filtre sur l'estimation de la courbure, nous avons comparé les résultats de courbure à partir des données brutes (STB) et des données trajectoires filtrées par l'algorithme TrackFit. Nous avons de plus remarqué que dans le cas des données bruitées, la méthode 1 à partir d'un schéma décentré et la méthode 2 donnaient des valeurs différentes (d'un facteur 10) nous avons en particulier vérifié que tous les jeux de données sont adimensionnés de la même manière.

Nous avons donc développé un deuxième schéma, centré, pour estimer la courbure. Néanmoins, les positions des trajectoires n'étant pas réparties uniformément au cours du temps, le schéma centré n'est pas nécessairement d'un ordre 2 en erreur.

$$\frac{f(x + \alpha dx) - f(x - \beta dx)}{(\alpha + \beta)dx} = \frac{df}{dx} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\alpha + \beta)} dx \frac{d^2f}{dx^2} + \mathcal{O}(dx^2), \quad (\text{D.1})$$

Ce schéma est d'ordre 2 uniquement si $\alpha = \beta$, ce qui n'est plus nécessairement le cas le long d'une trajectoire à pas de temps constant.

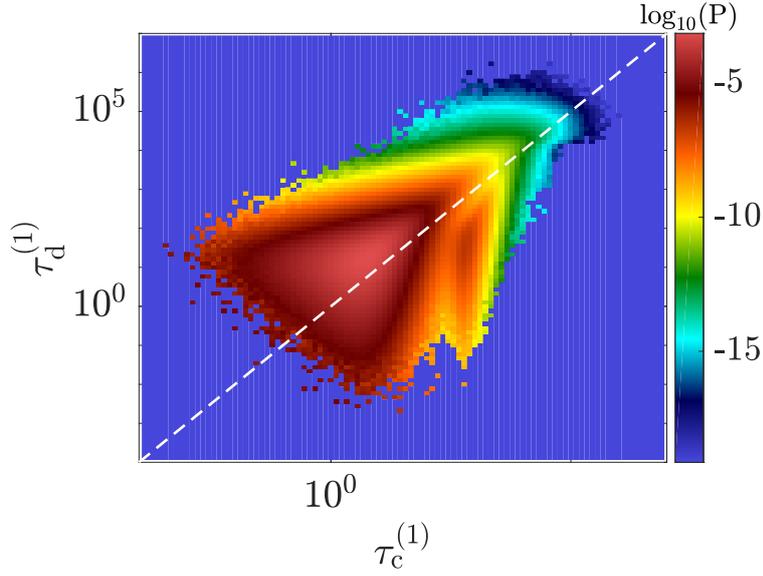


Figure D.1 – Nous comparons ici les résultats pour deux méthodes de calculs de courbure différents réalisés sur le cas de l’expérience SVK anti 0.1Hz, les statistiques ont été faites sur l’ensemble des runs et sur les trajectoires brutes (cas le plus défavorable en terme de bruit). Nous avons considéré uniquement les trajectoires supérieures à 50 pas de temps dans cette étude. Le première quantité notée $\tau_d^{(1)}$ correspond au résultat de la torsion avec la méthode 1 développée dans la partie 2.2.3. La deuxième quantité notée $\tau_c^{(1)}$ correspond à la valeur calculée de la torsion en utilisant la méthode 1 avec un schéma de dérivation centré. Le schéma de dérivation impact de manière évidente le résultat de la courbure. En particulier, on observe un décalage par rapport à la bissectrice d’un facteur 10.

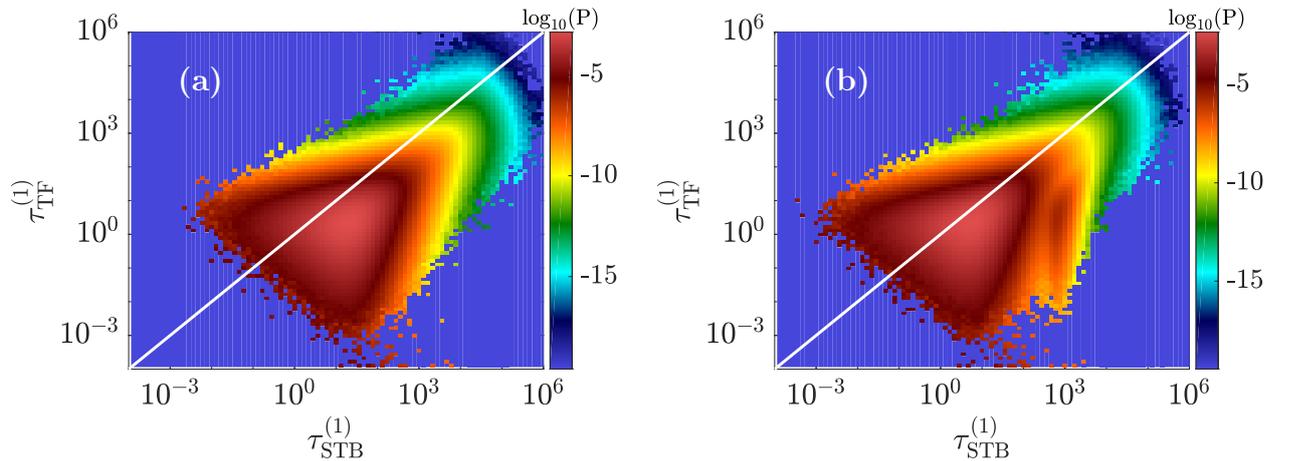


Figure D.2 – Nous avons calculé la courbures sur les données brutes (non filtrées) $\tau_{STB}^{(1)}$ et à partir des trajectoires filtrées par l’algorithme TrackFit $\tau_{TF}^{(1)}$ sur le cas anti 0.1Hz pour les mesures réalisées sur l’expérience SVK en utilisant la méthode 1 et avec des trajectoires supérieures à 50 pas de temps. **(a)** comparaison des résultats de courbure à partir d’un schéma décentré, **(b)** comparaison des données résultats de courbure à partir d’un schéma centré.



Statistiques des données expérimentales

E.1 statistiques des cas expérimentaux

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
20	0.10	0.16	0.18	0.17	0.21	0.21	0.34	3380894	107885	9857
21	0.045	0.21	-0.19	0.16	0.16	0.19	0.29	3414187	81068	6664
22	0.071	0.15	0.15	0.14	0.15	0.23	0.31	3418376	129537	13914
23	-0.11	0.010	-0.33	0.097	0.081	0.096	0.16	3848870	28224	0
24	0.14	0.010	-0.16	0.072	0.065	0.14	0.17	3249850	127930	12487
25	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.098	0.19	0.25	3848870	63055	1391
25*	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.099	0.19	0.25	3960174	66486	1497
25**	-0.39	0.23	-0.30	0.13	0.098	0.19	0.25	6254421	28572	317
26	0.17	0.15	0.34	0.12	0.16	0.14	0.24	3852900	63055	1350
27	-0.15	-0.13	0.11	0.14	0.17	0.16	0.27	3175539	167952	16682
28	0.18	-0.23	-0.05	0.18	0.18	0.15	0.30	3244141	162262	14685
29	0.44	0.05	0.30	0.18	0.10	0.09	0.23	3529457	44361	584
30	-0.04	0.02	-0.21	0.09	0.07	0.12	0.17	3317041	126028	9997
31	0.18	0.05	-0.02	0.13	0.13	0.11	0.21	2996047	209875	28363
32	-0.26	0.11	0.11	0.15	0.10	0.25	0.31	5348202	30185	1019
33	-0.03	0.15	0.10	0.14	0.11	0.21	0.28	5330949	74524	4748
34	-0.10	0.06	0.35	0.15	0.11	0.17	0.25	5641141	18672	421
35	-0.19	-0.00	0.24	0.19	0.19	0.19	0.33	5624624	22233	946
36	-0.03	0.01	-0.72	0.13	0.13	0.15	0.24	7246358	0	0
37	0.09	0.01	-0.27	0.11	0.11	0.12	0.20	5711080	15770	343
38	0.097	-0.14	-0.38	0.14	0.15	0.20	0.29	6175035	13521	180
39	0.055	0.10	-0.18	0.20	0.13	0.17	0.29	5506899	63903	3005
40	0.040	0.037	-0.075	0.15	0.11	0.18	0.26	5277443	81104	3021

Table E.1 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 0.004 Hz dans l'expérience GVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	0.10	0.17	-0.07	0.18	0.17	0.25	0.35	7603031	189174	11994
2	0.32	0.15	0.24	0.20	0.19	0.18	0.32	7887419	95419	2801
3	0.32	-0.05	0.09	0.12	0.17	0.26	0.34	8096662	114964	4862
4	-0.09	0.09	0.37	0.25	0.20	0.14	0.34	8604960	30179	1077
5	0.13	-0.12	-0.38	0.27	0.20	0.20	0.39	13716912	11547	34
6	0.20	0.05	-0.18	0.21	0.19	0.17	0.33	12674076	43536	537
7	0.24	-0.02	0.15	0.13	0.16	0.13	0.24	12064876	55108	726
8	0.21	0.03	-0.25	0.15	0.14	0.20	0.29	13123946	50342	1381
9	0.05	0.01	-0.02	0.28	0.18	0.31	0.45	12413164	38548	565
10	0.14	0.24	0.04	0.15	0.16	0.25	0.33	12318727	43662	578
11	-0.37	-0.04	0.24	0.24	0.17	0.23	0.37	12195910	52037	931
12	-0.08	-0.11	0.53	0.17	0.15	0.19	0.30	14804299	5212	43
13	0.10	0.04	-0.18	0.20	0.16	0.16	0.31	12357071	40944	498
14	0.11	-0.06	-0.22	0.22	0.19	0.20	0.36	12173594	50365	794
15	0.21	0.04	-0.02	0.13	0.15	0.23	0.30	12212836	63021	1048
16	-0.20	-0.08	-0.04	0.20	0.17	0.27	0.38	12182914	58918	1097
17	-0.11	0.01	0.06	0.20	0.13	0.20	0.31	11729764	71359	1536
18	-0.31	0.13	-0.23	0.19	0.19	0.17	0.32	12409129	48275	777
19	-0.55	0.12	-0.21	0.28	0.21	0.21	0.41	12183520	62611	792
20	0.16	0.09	0.34	0.31	0.22	0.26	0.45	12491729	37010	497
21	0.43	0.02	0.16	0.15	0.20	0.24	0.35	11747354	83364	1839
22	-0.54	0.08	-0.13	0.28	0.17	0.19	0.38	11807285	73004	781
23	0.09	0.07	0.30	0.30	0.19	0.22	0.42	12145490	42697	677
24	-0.18	0.08	0.01	0.15	0.20	0.20	0.32	11468259	89589	2346
25	-0.47	-0.15	-0.53	0.12	0.13	0.17	0.24	14449554	2776	5
26	0.30	0.00	-0.29	0.31	0.13	0.16	0.37	12885214	26496	284
27	-0.34	-0.10	0.24	0.19	0.20	0.23	0.36	12081172	52111	829
28	0.06	-0.16	0.18	0.16	0.25	0.20	0.36	11632017	58705	1010
29	0.04	-0.06	-0.07	0.18	0.17	0.16	0.30	11525305	95584	2167
30	0.15	0.17	-0.21	0.27	0.18	0.24	0.41	12003522	33223	496
31	-0.27	-0.04	-0.08	0.17	0.14	0.25	0.33	11926073	52656	857
32	-0.19	-0.09	-0.27	0.17	0.14	0.20	0.30	12292465	37104	668
33	-0.17	-0.02	-0.27	0.21	0.15	0.15	0.29	12128861	27208	339
34	0.10	-0.09	-0.41	0.13	0.15	0.25	0.32	13216880	15201	224
35	0.38	0.16	-0.13	0.29	0.18	0.26	0.43	11751469	64630	840
36	-0.13	0.11	0.14	0.31	0.14	0.19	0.39	11524092	75847	1595
37	0.11	0.05	-0.16	0.22	0.14	0.28	0.38	12162011	33134	384
38	0.23	-0.06	-0.07	0.20	0.19	0.26	0.38	12003733	51727	763
39	0.24	0.10	0.25	0.15	0.17	0.17	0.28	12040299	33105	271
40	-0.26	-0.02	0.49	0.17	0.20	0.12	0.29	13373946	210	0
41	-0.44	0.14	0.42	0.20	0.17	0.17	0.31	12575956	12202	146

Table E.2 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 0.1Hz dans l'expérience GVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
9	0.10	0.12	-0.15	0.22	0.16	0.16	0.32	9735624	97008	4857
10	0.20	0.01	-0.00	0.16	0.16	0.12	0.25	9911359	106649	5124
11	-0.14	0.03	0.00	0.24	0.11	0.27	0.37	9662241	89604	3186
12	0.51	-0.03	-0.18	0.14	0.10	0.11	0.20	10343171	72660	2196
13	-0.18	-0.01	0.23	0.13	0.14	0.24	0.31	9525580	77071	2552
14	0.39	0.15	-0.29	0.17	0.13	0.18	0.28	9939718	57745	2003
15	-0.19	-0.16	-0.52	0.24	0.19	0.21	0.37	10052305	21959	599
16	0.05	-0.09	0.50	0.18	0.14	0.18	0.29	10760456	11771	83
17	0.07	-0.13	0.19	0.14	0.13	0.19	0.27	9017132	105578	5034
18	0.06	-0.02	0.46	0.15	0.16	0.17	0.28	10430360	18147	344
19	0.08	-0.22	0.39	0.19	0.14	0.17	0.29	9504797	37675	918
20	-0.23	-0.03	-0.43	0.17	0.12	0.15	0.26	10253356	17479	79
21	-0.09	0.13	0.15	0.17	0.18	0.15	0.29	9030591	122623	5242
22	-0.20	-0.07	-0.33	0.20	0.15	0.22	0.33	9090121	74966	4098
23	-0.25	0.32	0.10	0.14	0.17	0.16	0.27	9049458	124853	5813
24	-0.23	0.02	-0.02	0.22	0.17	0.15	0.31	8944740	157514	9867
25	-0.33	0.17	0.10	0.17	0.16	0.19	0.30	9287051	107286	4126
26	-0.46	-0.05	0.33	0.13	0.12	0.17	0.25	10196110	46704	1384
27	0.07	0.06	-0.12	0.25	0.16	0.17	0.34	9559769	114971	6537
28	-0.04	0.16	0.43	0.27	0.17	0.17	0.36	10200600	24998	314
29	-0.18	-0.01	-0.40	0.18	0.13	0.16	0.28	10466708	32782	1092
30	0.04	-0.08	-0.35	0.31	0.22	0.21	0.43	8803414	74435	3492
31	0.26	0.03	0.15	0.22	0.10	0.15	0.29	9878155	85200	3023
32	0.06	-0.22	-0.51	0.20	0.17	0.20	0.33	10578421	11824	42
33	0.21	-0.03	-0.01	0.16	0.16	0.16	0.28	8592696	163608	10615
34	0.09	0.03	-0.20	0.20	0.16	0.16	0.30	8732820	125408	6097
35	-0.27	-0.13	0.01	0.19	0.18	0.20	0.33	8360049	166316	9110
36	-0.30	-0.18	-0.38	0.17	0.19	0.21	0.34	9582381	44377	1350
37	-0.25	-0.02	0.01	0.13	0.16	0.18	0.27	8946590	134561	7180
38	-0.12	-0.09	0.04	0.12	0.10	0.13	0.20	9356730	130969	7600
39	0.21	-0.08	-0.23	0.13	0.14	0.19	0.26	9550158	82345	3852
40	0.29	-0.17	-0.11	0.12	0.11	0.15	0.22	10375724	66067	1592
41	-0.02	0.02	0.29	0.31	0.19	0.18	0.41	8952820	83906	3007
42	0.41	0.06	-0.23	0.14	0.14	0.17	0.26	9641476	69009	2669
43	0.33	0.01	-0.10	0.21	0.22	0.25	0.39	9392571	89340	3196
44	-0.06	-0.05	0.19	0.16	0.13	0.29	0.35	9647856	79025	3892
45	-0.05	0.03	0.09	0.12	0.15	0.19	0.27	8947291	118024	5991
46	0.33	-0.08	0.11	0.25	0.18	0.23	0.38	8636601	125304	6065
47	-0.34	-0.18	-0.12	0.31	0.16	0.18	0.39	8100426	171493	10027
48	-0.44	0.12	-0.06	0.15	0.15	0.24	0.32	8999961	101048	3995

Table E.3 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 0.025 Hz dans l'expérience GVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	-0.02	0.16	0.01	0.16	0.14	0.18	0.28	8616143	89283	7308
2	-0.11	-0.03	0.05	0.22	0.20	0.28	0.41	8672876	55514	3015
3	-0.06	-0.06	-0.05	0.31	0.18	0.19	0.41	8420412	88924	6900
4	-0.06	-0.06	0.09	0.20	0.21	0.28	0.40	8466351	59222	3745
5	0.02	-0.05	-0.05	0.29	0.18	0.26	0.43	8801713	66364	4431
6	-0.07	0.01	-0.03	0.22	0.17	0.26	0.38	8593507	65658	4258
7	-0.02	-0.02	-0.06	0.22	0.17	0.31	0.41	9279377	45677	2067
8	0.03	0.04	0.03	0.19	0.17	0.26	0.36	8493993	73932	5478
9	-0.08	0.03	0.19	0.20	0.17	0.26	0.37	9230782	50614	2786
10	-0.11	-0.01	0.07	0.23	0.18	0.25	0.39	8570718	71464	4784
11	-0.01	0.06	-0.05	0.21	0.16	0.30	0.40	9216073	55092	3583
12	-0.00	0.05	-0.05	0.21	0.19	0.29	0.41	8845129	53998	2955
13	0.07	0.03	0.05	0.27	0.17	0.19	0.38	8912337	84969	6423
14	0.08	-0.04	-0.02	0.21	0.18	0.30	0.41	8988920	56711	3704
15	0.06	-0.02	-0.03	0.32	0.18	0.20	0.42	8142648	85896	6391
16	0.16	-0.10	0.10	0.22	0.17	0.22	0.36	9056157	70851	5081
17	0.06	0.02	-0.00	0.25	0.17	0.30	0.43	8976147	62363	5137
18	0.08	-0.02	-0.06	0.30	0.19	0.26	0.44	9229227	69576	4351
19	-0.19	-0.00	0.10	0.37	0.18	0.18	0.45	8882751	82141	4692
20	-0.04	-0.08	-0.07	0.23	0.17	0.26	0.39	9235341	69927	5109
21	0.01	-0.05	0.09	0.25	0.19	0.30	0.43	9126486	48318	2383
22	-0.02	-0.19	0.03	0.22	0.16	0.24	0.36	9217055	71240	5105
23	-0.05	0.01	0.04	0.25	0.20	0.27	0.42	8998100	66433	4337
24	-0.01	0.03	-0.07	0.22	0.17	0.29	0.40	9580689	47607	2848
25	0.04	-0.02	-0.01	0.32	0.18	0.19	0.41	8740672	90520	7136
26	0.16	0.02	0.16	0.22	0.18	0.26	0.38	9369670	51336	2387
27	-0.09	0.02	0.08	0.21	0.17	0.29	0.40	8753750	61532	4461
28	-0.05	-0.01	0.09	0.19	0.16	0.25	0.35	9352788	66752	5178
29	0.00	0.02	-0.16	0.25	0.21	0.25	0.41	9173409	58452	3611
30	-0.10	-0.02	0.01	0.22	0.17	0.25	0.38	9232306	73918	5941
31	-0.15	-0.02	0.03	0.29	0.18	0.23	0.41	9617054	70713	5647
32	-0.18	-0.06	-0.17	0.27	0.18	0.23	0.39	9060762	59595	4653
33	0.08	-0.01	0.06	0.20	0.16	0.31	0.40	10046414	47457	3943
34	0.06	0.05	-0.01	0.22	0.18	0.30	0.41	9581645	50750	3805
35	0.10	-0.08	0.05	0.20	0.17	0.25	0.36	8872353	72434	7692
36	-0.03	-0.04	-0.00	0.25	0.20	0.20	0.38	9621970	78348	7130
37	-0.03	-0.03	0.02	0.24	0.20	0.26	0.40	9565741	55230	4143
38	-0.07	-0.02	-0.12	0.27	0.16	0.23	0.39	8726060	60785	4424
39	0.28	-0.03	0.09	0.28	0.17	0.19	0.38	8819234	93454	9327
40	-0.23	-0.05	0.09	0.29	0.17	0.18	0.38	8472168	91928	8252

Table E.4 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 0.1Hz dans l'expérience SVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	0.17	0.03	0.02	0.37	0.19	0.25	0.49	8014902	55755	1949
2	0.11	0.02	0.07	0.29	0.20	0.30	0.46	8998687	44594	1446
3	0.02	0.02	0.14	0.34	0.21	0.33	0.53	9530410	29795	794
4	0.03	-0.05	-0.03	0.29	0.22	0.27	0.45	8591582	46341	1767
5	0.33	-0.08	0.10	0.25	0.20	0.28	0.42	9128413	44471	1437
6	0.02	-0.11	-0.02	0.35	0.21	0.28	0.50	8611905	38302	1045
7	-0.01	0.04	0.19	0.28	0.21	0.31	0.47	9650083	29409	832
8	-0.01	-0.02	-0.04	0.30	0.20	0.24	0.43	8405342	55631	2584
9	0.20	-0.08	0.05	0.28	0.21	0.31	0.47	9419648	29119	473
10	-0.15	0.03	-0.17	0.27	0.23	0.30	0.46	9080520	30196	856
11	0.07	0.03	-0.11	0.25	0.21	0.29	0.44	9332164	38172	1747
12	-0.00	0.03	0.03	0.29	0.21	0.32	0.49	7089325	38613	1343
13	-0.07	-0.06	-0.06	0.33	0.20	0.26	0.46	8812440	48947	2251
14	0.01	0.05	0.06	0.34	0.20	0.24	0.46	9139101	52931	2084
15	-0.07	-0.00	0.09	0.33	0.21	0.26	0.47	8654070	50131	2210
16	0.13	-0.09	0.11	0.30	0.21	0.33	0.49	9472368	35732	986
17	0.08	0.01	-0.00	0.37	0.20	0.30	0.51	9347189	50402	1549
18	-0.09	-0.01	-0.16	0.25	0.21	0.31	0.45	9157117	33075	1434
19	0.01	0.07	0.00	0.27	0.21	0.32	0.47	9481725	39250	1313
20	-0.18	0.01	0.04	0.32	0.21	0.23	0.45	8568678	56397	2149
21	-0.11	0.00	-0.04	0.31	0.20	0.26	0.45	9387970	45556	1812
22	0.06	0.00	0.17	0.25	0.19	0.30	0.44	9264952	32774	1402
23	-0.10	0.01	-0.02	0.35	0.20	0.32	0.52	9475919	39787	1091
24	0.06	-0.02	-0.06	0.28	0.19	0.32	0.47	8929253	33659	1068
25	0.09	0.08	0.04	0.27	0.20	0.35	0.48	9786026	34027	1254
26	-0.02	-0.00	-0.02	0.23	0.20	0.37	0.48	9471330	25245	788
27	0.09	-0.01	0.12	0.27	0.24	0.33	0.49	9905334	26926	415
28	0.12	-0.04	0.05	0.28	0.24	0.30	0.47	9177948	35915	1050
29	0.13	0.03	-0.15	0.41	0.21	0.24	0.52	9614656	43741	875
30	-0.00	-0.04	-0.09	0.32	0.19	0.25	0.45	8752952	51754	2006
31	0.13	-0.06	0.05	0.33	0.22	0.28	0.48	9568368	42081	1020
32	0.19	-0.05	0.02	0.28	0.20	0.32	0.47	9157972	41412	1182
33	-0.08	0.03	-0.05	0.32	0.21	0.32	0.50	9547283	35686	969
34	-0.03	-0.02	-0.03	0.30	0.23	0.32	0.50	8981026	38683	1633
35	0.22	0.02	-0.08	0.33	0.22	0.28	0.49	9602389	45712	1367
36	0.01	0.08	0.10	0.30	0.21	0.28	0.46	9162761	36589	1221
37	-0.05	0.01	-0.13	0.27	0.20	0.33	0.48	9923658	32136	972
38	-0.04	-0.03	-0.01	0.30	0.21	0.32	0.49	9182564	37259	1257
39	0.13	0.05	-0.15	0.25	0.23	0.31	0.46	10014255	28728	576
40	0.18	-0.01	0.14	0.30	0.21	0.29	0.46	9274152	37843	1516

Table E.5 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 0.5Hz dans l'expérience SVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	-0.30	0.00	0.04	0.35	0.24	0.32	0.53	8787133	16336	110
2	0.06	0.01	0.15	0.27	0.21	0.37	0.51	9643564	7923	80
3	-0.06	0.04	0.03	0.30	0.26	0.36	0.53	9483658	7824	59
4	0.02	0.07	0.14	0.32	0.20	0.30	0.48	9305510	15882	275
5	-0.09	0.03	-0.01	0.32	0.23	0.32	0.51	9169043	18173	184
6	-0.19	0.03	-0.06	0.35	0.21	0.25	0.48	8980922	17409	169
7	-0.07	0.00	-0.11	0.26	0.24	0.34	0.49	9077157	9726	114
8	0.15	-0.09	-0.12	0.28	0.23	0.35	0.51	9289767	9364	64
9	0.05	-0.09	-0.01	0.23	0.22	0.29	0.43	9243897	12805	198
10	-0.18	-0.09	-0.03	0.35	0.21	0.26	0.48	8552644	19208	253
11	0.07	0.05	0.03	0.35	0.21	0.29	0.50	8572000	16977	202
12	0.06	-0.05	-0.07	0.29	0.22	0.31	0.48	9263699	11881	142
13	0.15	0.02	-0.11	0.36	0.20	0.28	0.50	8984084	17501	223
14	-0.12	-0.05	-0.06	0.24	0.23	0.33	0.47	8872445	10987	149
15	-0.05	-0.01	-0.08	0.28	0.21	0.36	0.51	9335739	10426	118
16	-0.04	-0.02	-0.06	0.27	0.23	0.39	0.52	9018770	5675	51
17	-0.14	-0.03	0.02	0.29	0.21	0.34	0.49	9294805	12443	143
18	0.09	-0.06	0.09	0.25	0.23	0.37	0.50	9168621	7689	98
19	0.08	-0.01	-0.04	0.34	0.23	0.32	0.52	8615219	11762	177
20	0.04	-0.05	0.06	0.31	0.22	0.32	0.49	9335087	13030	119
21	-0.09	-0.01	-0.07	0.26	0.23	0.36	0.50	9587928	9106	78
22	0.09	0.01	-0.02	0.27	0.24	0.36	0.51	9520079	8551	82
23	0.07	0.01	0.05	0.34	0.20	0.27	0.48	9218695	15357	252
24	0.01	0.02	0.11	0.25	0.19	0.40	0.50	9676423	8804	156
25	0.24	0.01	-0.01	0.33	0.23	0.25	0.48	8514991	22768	256
26	0.16	0.05	0.17	0.34	0.22	0.25	0.48	8839586	17742	278
27	0.21	-0.03	-0.15	0.32	0.21	0.31	0.49	9182494	11735	83
28	0.12	0.04	0.03	0.41	0.20	0.27	0.53	8525432	16934	160
29	-0.08	0.07	-0.10	0.29	0.22	0.35	0.50	9432317	6041	24
30	-0.02	-0.08	-0.10	0.28	0.22	0.34	0.50	8974491	8837	92
31	0.01	-0.06	-0.08	0.27	0.26	0.36	0.51	9403097	8275	51
32	0.12	0.08	-0.02	0.26	0.23	0.35	0.49	8961463	9632	130
33	-0.23	-0.01	0.06	0.28	0.22	0.31	0.47	9197729	13457	134
34	0.08	0.03	-0.17	0.26	0.20	0.27	0.43	9109951	10864	219
35	0.01	-0.01	0.26	0.24	0.22	0.31	0.45	9692807	6773	95
36	-0.18	0.04	0.11	0.28	0.22	0.29	0.46	8912605	11974	162
37	-0.35	-0.01	-0.25	0.26	0.20	0.25	0.41	9218679	10571	82
38	0.07	-0.03	-0.21	0.28	0.24	0.32	0.48	9077552	8938	97
39	-0.04	0.02	-0.18	0.26	0.22	0.36	0.49	9448424	8969	112

Table E.6 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 1 Hz dans l'expérience SVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	\bar{u}/U	\bar{v}/U	\bar{w}/U	u_{rms}/U	v_{rms}/U	w_{rms}/U	$u_{\text{rms}}^{\text{tot}}/U$	N_{tot}	$N_{\geq 100}$	$N_{\geq 200}$
1	-0.16	0.00	0.12	0.30	0.23	0.39	0.54	9552777	6560	40
2	0.12	-0.02	-0.03	0.34	0.23	0.35	0.54	9708337	7666	37
3	0.03	0.04	-0.04	0.35	0.22	0.32	0.52	9536237	11966	68
4	0.02	-0.04	0.08	0.34	0.22	0.34	0.53	9633057	9395	58
5	0.13	-0.00	0.02	0.45	0.21	0.28	0.57	9435382	12571	103
6	0.01	-0.03	0.02	0.29	0.21	0.37	0.51	9649264	11112	134
7	0.06	-0.02	0.15	0.33	0.22	0.31	0.51	9340152	10192	66
8	-0.05	-0.01	0.07	0.35	0.23	0.33	0.53	9504940	10486	56
9	0.09	-0.01	0.06	0.30	0.24	0.35	0.52	9587473	9427	96
10	-0.13	-0.03	0.06	0.31	0.22	0.38	0.53	9761638	8506	104
11	-0.04	-0.03	-0.01	0.29	0.21	0.37	0.51	9701222	9532	75
12	-0.02	0.05	0.08	0.34	0.24	0.36	0.55	9700459	9047	51
13	-0.09	0.06	-0.08	0.32	0.23	0.33	0.52	9571588	8752	79
14	-0.11	-0.08	0.00	0.41	0.23	0.30	0.55	9318293	9688	93
15	0.03	-0.05	-0.14	0.30	0.23	0.35	0.51	9670961	8824	72
16	0.08	-0.10	-0.04	0.42	0.22	0.29	0.56	9341353	11129	77
17	0.01	-0.11	0.06	0.33	0.22	0.33	0.52	9547470	13333	129
18	-0.02	-0.08	-0.09	0.31	0.23	0.36	0.53	9709338	10074	81
19	0.08	-0.07	0.09	0.32	0.21	0.41	0.56	9942898	8673	94
20	-0.03	-0.02	-0.04	0.29	0.24	0.39	0.54	9840057	8764	49
21	-0.09	-0.07	0.08	0.25	0.22	0.34	0.48	9446384	11288	113
22	0.11	0.01	-0.09	0.29	0.20	0.31	0.48	9396195	14796	211
23	0.14	0.01	0.16	0.37	0.21	0.31	0.53	9503496	9936	72
24	0.10	-0.00	-0.03	0.31	0.21	0.33	0.50	9437768	11613	157
25	-0.08	-0.07	-0.03	0.28	0.21	0.37	0.51	9615299	10048	109
26	0.04	-0.04	-0.06	0.35	0.21	0.32	0.52	9287846	12266	79
27	0.18	-0.03	-0.06	0.35	0.21	0.24	0.47	9000223	19486	207
28	-0.03	-0.00	0.13	0.30	0.23	0.35	0.51	9756666	8522	78
29	-0.16	0.02	0.15	0.32	0.23	0.34	0.52	9615732	8546	70
30	0.07	-0.12	0.02	0.39	0.22	0.26	0.52	9201150	12899	53
31	-0.03	-0.02	-0.05	0.23	0.22	0.42	0.52	9875995	9218	79
32	0.01	0.17	0.02	0.34	0.22	0.37	0.55	9780310	8542	30
33	0.07	-0.04	0.10	0.27	0.22	0.34	0.49	9620819	12740	126
34	0.00	-0.00	0.19	0.26	0.22	0.34	0.48	9816220	10084	168
35	0.01	-0.06	0.07	0.41	0.22	0.28	0.54	9260491	13684	98
36	-0.01	0.02	0.08	0.34	0.22	0.32	0.52	9553172	10479	106
37	0.13	-0.01	0.16	0.32	0.23	0.31	0.50	9657723	8775	38
38	0.13	-0.01	0.12	0.28	0.22	0.30	0.47	9467292	11862	106
39	-0.00	-0.00	0.07	0.28	0.23	0.34	0.50	9441601	10250	105
40	0.03	0.08	-0.06	0.32	0.22	0.33	0.51	9527579	9773	84

Table E.7 – Statistiques des vitesses moyennes, vitesses rms, nombre total de trajectoires reconstruites N_{tot} , nombre de trajectoires supérieures à 100 pas de temps $N_{\geq 100}$, nombre de trajectoires supérieures à 200 pas de temps $N_{\geq 200}$ pour le cas anti 2.5Hz dans l'expérience SVK. Les données de vitesses sont adimensionnées par $U = 2\pi R f$ avec R le rayon de la cuve, f la fréquence de rotation des turbines.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
1	4990.6	46.2	2239.8	52.8	3682.9	48.6
2	6334.5	44.4	5397.8	45.6	6334.5	44.4
3	20189.3	36.6	20189.3	36.6	18312.6	37.2
4	2093.0	53.4	1415.0	57.0	2398.8	52.2
5	13791.8	39.0	1328.8	57.6	1831.7	54.6
6	6873.3	43.8	3682.9	48.6	5397.8	45.6
7	13791.8	39.0	7466.3	43.2	16636.3	37.8
8	6873.3	43.8	4279.0	47.4	15136.3	38.4
9	2960.9	50.4	2239.8	52.8	2398.8	52.2
10	5397.8	45.6	2398.8	52.2	2758.0	51.0
11	6873.3	43.8	2758.0	51.0	3682.9	48.6
12	6873.3	43.8	6873.3	43.8	13791.8	39.0
13	3181.5	49.8	1607.7	55.8	2960.9	50.4
14	7466.3	43.2	6334.5	44.4	7466.3	43.2
15	20189.3	36.6	20189.3	36.6	15136.3	38.4
16	7466.3	43.2	4990.6	46.2	12584.5	39.6
17	4990.6	46.2	2960.9	50.4	4618.8	46.8
18	2758.0	51.0	2398.8	52.2	2960.9	50.4
19	13791.8	39.0	7466.3	43.2	7466.3	43.2
20	1415.0	57.0	655.5	64.8	1328.8	57.6
21	4990.6	46.2	2960.9	50.4	4618.8	46.8
22	3682.9	48.6	2960.9	50.4	5397.8	45.6
23	7466.3	43.2	2960.9	50.4	6873.3	43.8
24	15136.3	38.4	6873.3	43.8	12584.5	39.6
25	27323.3	34.8	20189.3	36.6	20189.3	36.6
26	20189.3	36.6	12584.5	39.6	18312.6	37.2
27	4990.6	46.2	2571.0	51.6	2960.9	50.4
28	5397.8	45.6	4990.6	46.2	4618.8	46.8
29	4618.8	46.8	2398.8	52.2	4279.0	47.4
30	2960.9	50.4	2960.9	50.4	2960.9	50.4
31	20189.3	36.6	16636.3	37.8	20189.3	36.6
32	20189.3	36.6	11498.8	40.2	15136.3	38.4
33	20189.3	36.6	15136.3	38.4	11498.8	40.2
34	12584.5	39.6	5844.3	45.0	7466.3	43.2
35	2960.9	50.4	2960.9	50.4	2960.9	50.4
36	12584.5	39.6	6873.3	43.8	11498.8	40.2
37	2571.0	51.6	1415.0	57.0	2398.8	52.2
38	2239.8	52.8	1174.2	58.8	1415.0	57.0
39	4618.8	46.8	2398.8	52.2	2960.9	50.4
40	1104.8	59.4	1174.2	58.8	923.6	61.2

Table E.8 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas C7.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
20	488025.2	0.9	535356.7	0.9	587278.7	0.9
21	54789012.0	0.4	18041864.0	0.5	15702901.0	0.5
22	30018358.0	0.5	10843660.0	0.5	5941134.0	0.6
24	91158880.0	0.4	91158880.0	0.4	95477160.0	0.4
25	20729218.0	0.5	15702901.0	0.5	11895341.0	0.5
26	19791668.0	0.5	1175849.5	0.8	2049074.8	0.7
27	34489624.0	0.4	23816856.0	0.5	8603464.0	0.6
28	2704959.8	0.7	1289890.2	0.8	3570786.0	0.6
29	23816856.0	0.5	60102768.0	0.4	9437878.0	0.5
30	91158880.0	0.4	91158880.0	0.4	95477160.0	0.4
31	26126752.0	0.5	8603464.0	0.6	10843660.0	0.5
32	45529352.0	0.4	32929712.0	0.4	23816856.0	0.5
33	23816856.0	0.5	13049020.0	0.5	13049020.0	0.5
34	4500557.5	0.6	1702769.1	0.7	775259.8	0.8
35	1350993.5	0.8	2146141.2	0.7	674754.4	0.8
37	75752504.0	0.4	22739658.0	0.5	7149429.0	0.6
38	9437878.0	0.5	2146141.2	0.7	3255088.5	0.7
39	23816856.0	0.5	16446762.0	0.5	8603464.0	0.6
40	18041864.0	0.5	12458834.0	0.5	10353218.0	0.5

Table E.9 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas C1.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
1	14.0	410.0	8.6	445.0	36.2	350.0
2	13.0	415.0	6.2	470.0	39.5	345.0
3	17.5	395.0	10.5	430.0	47.1	335.0
4	20.4	385.0	12.1	420.0	68.1	315.0
5	30.6	360.0	16.3	400.0	101.0	295.0
6	22.1	380.0	15.1	405.0	68.1	315.0
7	16.3	400.0	12.1	420.0	51.5	330.0
8	15.1	405.0	13.0	415.0	47.1	335.0
9	16.3	400.0	10.5	430.0	51.5	330.0
10	23.9	375.0	16.3	400.0	68.1	315.0
11	15.1	405.0	10.5	430.0	51.5	330.0
12	16.3	400.0	14.0	410.0	68.1	315.0
13	14.0	410.0	11.3	425.0	62.0	320.0
14	18.9	390.0	11.3	425.0	51.5	330.0
15	14.0	410.0	8.6	445.0	33.3	355.0
16	15.1	405.0	11.3	425.0	47.1	335.0
17	22.1	380.0	15.1	405.0	75.0	310.0
18	23.9	375.0	15.1	405.0	75.0	310.0
19	16.3	400.0	11.3	425.0	75.0	310.0
20	16.3	400.0	8.6	445.0	43.1	340.0
21	16.3	400.0	8.6	445.0	47.1	335.0
22	16.3	400.0	15.1	405.0	62.0	320.0
23	14.0	410.0	10.5	430.0	62.0	320.0
24	22.1	380.0	16.3	400.0	51.5	330.0
25	20.4	385.0	13.0	415.0	51.5	330.0
26	16.3	400.0	13.0	415.0	51.5	330.0
27	22.1	380.0	16.3	400.0	68.1	315.0
28	15.1	405.0	8.6	445.0	47.1	335.0
29	16.3	400.0	6.2	470.0	51.5	330.0
30	16.3	400.0	8.6	445.0	51.5	330.0
31	16.3	400.0	12.1	420.0	62.0	320.0
32	20.4	385.0	11.3	425.0	47.1	335.0
33	15.1	405.0	11.3	425.0	62.0	320.0
34	16.3	400.0	11.3	425.0	51.5	330.0
35	16.3	400.0	16.3	400.0	91.3	300.0
36	18.9	390.0	14.0	410.0	68.1	315.0
37	18.9	390.0	11.3	425.0	47.1	335.0
38	16.3	400.0	11.3	425.0	68.1	315.0
39	20.4	385.0	13.0	415.0	56.5	325.0
40	11.3	425.0	8.6	445.0	47.1	335.0

Table E.10 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas T1t.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
1	36.2	140.0	24.9	149.0	75.0	124.0
2	24.9	149.0	24.9	149.0	82.7	122.0
3	27.0	147.0	16.3	160.0	49.3	133.0
4	39.5	138.0	30.6	144.0	111.9	116.0
5	36.2	140.0	34.7	141.0	86.9	121.0
6	24.9	149.0	22.1	152.0	68.1	126.0
7	22.1	152.0	17.5	158.0	51.5	132.0
8	30.6	144.0	24.9	149.0	65.0	127.0
9	41.2	137.0	30.6	144.0	86.9	121.0
10	30.6	144.0	23.9	150.0	78.7	123.0
11	20.4	154.0	16.3	160.0	36.2	140.0
12	23.0	151.0	20.4	154.0	54.0	131.0
13	29.3	145.0	16.3	160.0	65.0	127.0
14	12.6	167.0	12.6	167.0	33.3	142.0
15	33.3	142.0	23.9	150.0	71.5	125.0
16	27.0	147.0	23.9	150.0	49.3	133.0
17	23.9	150.0	23.0	151.0	54.0	131.0
18	21.3	153.0	15.1	162.0	49.3	133.0
19	24.9	149.0	23.0	151.0	54.0	131.0
20	31.9	143.0	17.5	158.0	78.7	123.0
21	24.9	149.0	22.1	152.0	54.0	131.0
22	24.9	149.0	19.7	155.0	65.0	127.0
23	30.6	144.0	21.3	153.0	68.1	126.0
24	45.0	135.0	34.7	141.0	101.0	118.0
25	23.9	150.0	21.3	153.0	54.0	131.0
26	31.9	143.0	31.9	143.0	75.0	124.0
27	24.9	149.0	23.9	150.0	54.0	131.0
28	29.3	145.0	20.4	154.0	54.0	131.0
29	20.4	154.0	11.7	169.0	36.2	140.0
30	17.5	158.0	11.7	169.0	36.2	140.0
31	20.4	154.0	16.9	159.0	43.1	136.0
32	36.2	140.0	24.9	149.0	71.5	125.0
33	27.0	147.0	17.5	158.0	51.5	132.0
34	34.7	141.0	33.3	142.0	106.3	117.0
35	17.5	158.0	14.0	164.0	45.0	135.0
36	19.7	155.0	12.6	167.0	51.5	132.0
37	22.1	152.0	15.1	162.0	37.8	139.0
38	24.9	149.0	20.4	154.0	54.0	131.0
39	34.7	141.0	23.0	151.0	91.3	120.0

Table E.11 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas T2t.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
1	86.9	60.5	51.5	66.0	228.4	51.5
2	78.7	61.5	51.5	66.0	192.2	53.0
3	101.0	59.0	82.7	61.0	272.7	50.0
4	49.3	66.5	41.2	68.5	145.8	55.5
5	101.0	59.0	82.7	61.0	289.6	49.5
6	47.1	67.0	33.3	71.0	117.9	57.5
7	68.1	63.0	34.7	70.5	138.1	56.0
8	96.0	59.5	82.7	61.0	256.9	50.5
9	51.5	66.0	41.2	68.5	131.0	56.5
10	47.1	67.0	34.7	70.5	124.2	57.0
11	75.0	62.0	49.3	66.5	171.8	54.0
12	49.3	66.5	37.8	69.5	145.8	55.5
13	71.5	62.5	49.3	66.5	181.7	53.5
14	86.9	60.5	51.5	66.0	256.9	50.5
15	75.0	62.0	49.3	66.5	192.2	53.0
16	51.5	66.0	43.1	68.0	131.0	56.5
17	111.9	58.0	101.0	59.0	327.3	48.5
18	78.7	61.5	51.5	66.0	203.5	52.5
19	86.9	60.5	51.5	66.0	192.2	53.0
20	86.9	60.5	51.5	66.0	242.1	51.0
21	78.7	61.5	51.5	66.0	192.2	53.0
22	106.3	58.5	82.7	61.0	256.9	50.5
23	78.7	61.5	49.3	66.5	203.5	52.5
24	91.3	60.0	51.5	66.0	192.2	53.0
25	91.3	60.0	51.5	66.0	256.9	50.5
26	91.3	60.0	51.5	66.0	192.2	53.0
27	51.5	66.0	31.9	71.5	138.1	56.0
28	43.1	68.0	30.6	72.0	117.9	57.5
29	91.3	60.0	51.5	66.0	272.7	50.0
30	106.3	58.5	82.7	61.0	289.6	49.5
31	78.7	61.5	49.3	66.5	181.7	53.5
32	75.0	62.0	49.3	66.5	181.7	53.5
33	91.3	60.0	51.5	66.0	203.5	52.5
34	51.5	66.0	49.3	66.5	192.2	53.0
35	86.9	60.5	51.5	66.0	242.1	51.0
36	51.5	66.0	47.1	67.0	181.7	53.5
37	82.7	61.0	51.5	66.0	192.2	53.0
38	82.7	61.0	51.5	66.0	192.2	53.0
39	51.5	66.0	34.7	70.5	124.2	57.0
40	51.5	66.0	47.1	67.0	181.7	53.5

Table E.12 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas T3t.

RUN	λ_x	f_c^x (Hz)	λ_y	f_c^y (Hz)	λ_z	f_c^z (Hz)
1	4618.8	7.8	4618.8	7.8	7466.3	7.2
2	1715.4	9.2	1715.4	9.2	3967.9	8.0
3	1957.2	9.0	2239.8	8.8	7466.3	7.2
4	1507.8	9.4	1174.2	9.8	2239.8	8.8
5	1507.8	9.4	1507.8	9.4	5397.8	7.6
6	3967.9	8.0	2960.9	8.4	5397.8	7.6
7	3421.5	8.2	2571.0	8.6	6334.5	7.4
8	2571.0	8.6	2571.0	8.6	6334.5	7.4
9	2239.8	8.8	2239.8	8.8	5397.8	7.6
10	1328.8	9.6	1957.2	9.0	5397.8	7.6
11	2239.8	8.8	1715.4	9.2	5397.8	7.6
12	1507.8	9.4	1715.4	9.2	4618.8	7.8
13	1715.4	9.2	1507.8	9.4	6334.5	7.4
14	2960.9	8.4	2960.9	8.4	6334.5	7.4
15	1174.2	9.8	1174.2	9.8	2239.8	8.8
16	1957.2	9.0	1715.4	9.2	4618.8	7.8
17	1957.2	9.0	1957.2	9.0	6334.5	7.4
18	1715.4	9.2	1715.4	9.2	6334.5	7.4
19	1715.4	9.2	2239.8	8.8	7466.3	7.2
20	1957.2	9.0	1957.2	9.0	6334.5	7.4
21	1715.4	9.2	1328.8	9.6	3421.5	8.2
22	2239.8	8.8	2960.9	8.4	6334.5	7.4
23	2239.8	8.8	2239.8	8.8	6334.5	7.4
24	3421.5	8.2	2571.0	8.6	6334.5	7.4
25	2960.9	8.4	3421.5	8.2	7466.3	7.2
26	1715.4	9.2	1174.2	9.8	2239.8	8.8
27	1715.4	9.2	1957.2	9.0	5397.8	7.6
28	3967.9	8.0	2960.9	8.4	7466.3	7.2
29	1174.2	9.8	1328.8	9.6	2239.8	8.8
30	2571.0	8.6	3421.5	8.2	7466.3	7.2
31	1328.8	9.6	2960.9	8.4	7466.3	7.2
32	4618.8	7.8	2960.9	8.4	15136.3	6.4
33	1715.4	9.2	2571.0	8.6	5397.8	7.6
34	2571.0	8.6	2239.8	8.8	12584.5	6.6
35	2239.8	8.8	2960.9	8.4	15136.3	6.4
36	1328.8	9.6	1715.4	9.2	8841.2	7.0
37	1328.8	9.6	1715.4	9.2	4618.8	7.8
38	8841.2	7.0	2571.0	8.6	15136.3	6.4
39	5397.8	7.6	2239.8	8.8	22294.3	6.0
40	7466.3	7.2	8841.2	7.0	33726.6	5.6

Table E.13 – Valeurs du coefficient de lissage λ utilisé pour TrackFit (éq. (3.36)) et fréquences de coupures correspondantes f_c en Hz pour les trois composantes du cas T4t.

Bibliographie

- [1] Navier-stokes equations, 2022. URL <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation>.
- [2] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, Amsterdam Boston, 2nd ed edition, 2003.
- [3] R. J. Adrian. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):261–304, 1991. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.23.010191.001401>.
- [4] R. J. Adrian. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Physics of Fluids*, 19(041301):1–16, 2007. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2717527>.
- [5] R. J. Adrian and Ch.-Sh. Yao. Pulsed laser technique application to liquid and gaseous flows and the scattering power of seed materials. *Applied Optics*, 24(1):44–52, 1985. URL <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-24-1-44>.
- [6] S. Amjad. *Development of a tomographic background-oriented schlieren method for instantaneous three-dimensional density field measurements of heated jets*. PhD thesis, Monash University, Melbourne, Australie, 2022. URL <https://doi.org/10.26180/19083560.v1>.
- [7] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 140:63–89, 1984. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112084000513/type/journal_article.
- [8] B. Atcheson, I. Ihrke, W. Heidrich, A. Tevs, D. Bradley, M. Magnor, and H.-P. Seidel. Time-resolved 3d capture of non-stationary gas flows. *ACM transactions on graphics (TOG)*, 27(5):1–9, 2008.
- [9] C. Atkinson and J. Soria. Algebraic reconstruction techniques for tomographic particle image velocimetry. Crown Plaza, Gold Coast, Australia, December 2007. 16th Australian Fluid Mechanics Conference.
- [10] C. Atkinson and J. Soria. An efficient simultaneous reconstruction technique for tomographic particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 47(4-5):553–568, 2009. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00348-009-0728-0>.

- [11] C. K. Avinash and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society for industrial and applied mathematics edition, 2001.
- [12] A. Babiano, J. H. E. Cartwright, O. Piro, and A. Provenzale. Dynamics of a small neutrally buoyant sphere in a fluid and targeting in hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 84(25):5764–5767, 2000. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5764>.
- [13] Ch. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*. Experimental Fluid Mechanics. Springer International Publishing, 2015. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-16160-0>.
- [14] R. J. M Bastiaans. *Cross-correlation PIV; theory, implementation and accuracy*. Eindhoven University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Eindhoven, 2000.
- [15] G. K. Batchelor. Kolmogoroff’s theory of locally isotropic turbulence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(4):533–559, 1947. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100023793/type/journal_article.
- [16] G. K. Batchelor. Batchelor, G. K. (1949). Diffusion in a field of homogeneous turbulence. I. Eulerian analysis. *Australian Journal of Chemistry*, 2(4):437–450, 1949.
- [17] G. K. Batchelor. The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 76(328):133–146, 1950. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/qj.49707632804>.
- [18] G. K. Batchelor. Note on a class of solutions of the navier-stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 4(1):29–41, 1951. URL <https://academic.oup.com/qjmam/article-lookup/doi/10.1093/qjmam/4.1.29>.
- [19] G. K. Batchelor. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 47(2):359–374, 1951. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100026712/type/journal_article.
- [20] G. K. Batchelor. Diffusion in a field of homogeneous turbulence: Ii. the relative motion of particles. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48(2):345–362, 1952. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100027687/type/journal_article.

- [21] G. K. Batchelor. The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 213(1114):349–366, 1952. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1952.0130>.
- [22] G. K. Batchelor and A. A. Townsend. The nature of turbulent motion at large wave-numbers. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 199(1057):238–255, 1949. URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0136>.
- [23] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 94(1):61–66, 1984. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01212349>.
- [24] F. Belin, P. Tabeling, and H. Willaime. Exponents of the structure functions in a low temperature helium experiment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 93(1-2):52–63, 1996. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0167278995002790>.
- [25] J. Berg, B. Lüthi, J. Mann, and S. Ott. Backwards and forwards relative dispersion in turbulent flow: An experimental investigation. *Physical Review E*, 74(1):016304, 2006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.74.016304>.
- [26] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Order with Chaos : towards a deterministic approach to turbulence*. Wiley edition, 1984.
- [27] C. F. Bohren and D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [28] V. Bouillaut, B. Miquel, K. Julien, S. Aumaître, and B. Gallet. Experimental observation of the geostrophic turbulence regime of rapidly rotating convection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(44):e2105015118, 2021. URL <https://pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.2105015118>.
- [29] M. Bourgoïn. Some Aspects of Lagrangian Dynamics of Turbulence. In H. J. H. Clercx and G. F. Van Heijst, editors, *Mixing and Dispersion in Flows Dominated by Rotation and Buoyancy*, volume 580, pages 101–127. Springer International Publishing, 2018. URL http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-66887-1_5. Series Title: CISM International Centre for Mechanical Sciences.
- [30] M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, Ph. Odier, and J.-F. Pinton. Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment. *Physics of Fluids*, 14(9):3046–3058, September 2002. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1497376>.

- [31] J. Boussinesq. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie nationale, Paris, 1877. URL <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076>.
- [32] A. D. Bragg, P. J. Ireland, and L. R. Collins. Forward and backward in time dispersion of fluid and inertial particles in isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 28(1):013305, 2016. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4939694>.
- [33] W. Braun, F. De Lillo, and B. Eckhardt. Geometry of particle paths in turbulent flows. *Journal of Turbulence*, 7:N62, 2006. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14685240600860923>.
- [34] G. H. Bryan. The Third International Congress of Mathematicians. *Nature*, 70:417–418, 1904.
- [35] E. Buckingham. On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations. *Physical Review*, 4(4):345–376, 1914. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.4.345>.
- [36] B. J. Cantwell. Exact solution of a restricted euler equation for the velocity gradient tensor. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(4):782–793, 1992. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.858295>.
- [37] B. J. Cantwell. On the behavior of velocity gradient tensor invariants in direct numerical simulations of turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(8):2008–2013, 1993. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.858828>.
- [38] L. Cappanera, P. Debue, H. Faller, D. Kuzay, E-W. Saw, C. Nore, J.-L. Guermond, F. Daviaud, C. Wiertel-Gasquet, and B. Dubrulle. Turbulence in realistic geometries with moving boundaries: When simulations meet experiments. *Computers & Fluids*, 214:104750, 2021. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045793020303200>.
- [39] S. Cerutti and Ch. Meneveau. Intermittency and relative scaling of subgrid-scale energy dissipation in isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 10(4):928–937, 1998. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.869615>.
- [40] T. Chaabo. *Optimization of a 4D-PTV metrology for the characterization of a turbulent flow at very small scales*. PhD thesis, Université de Lille, Lille, France, 2022.
- [41] J.-Y. Chemin. Equation d’euler d’un fluide incompressible. pages 1–22, 2010. URL <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups10-01.pdf>.
- [42] A. Cheminet, Y. Ostovan, V. Valori, Ch. Cuvier, F. Daviaud, P. Debue, B. Dubrulle, J.-M. Foucaut, and J.-Ph. Laval. Optimization of regularized B-spline smoothing for turbulent Lagrangian trajectories. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 127:110376, 2021. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0894177721000285>.

- [43] A. Cheminet, D. Geneste, A. Barlet, Y. Ostovan, T. Chaabo, V. Valori, P. Debue, Ch. Cuvier, F. Daviaud, J.-M. Foucaut, J.-Ph. Laval, V. Padilla, C. Wiertel-Gasquet, and B. Dubrulle. Eulerian vs Lagrangian Irreversibility in an Experimental Turbulent Swirling Flow. *Physical Review Letters*, 129(12):124501, 2022. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.124501>.
- [44] S. Chen, K. R. Sreenivasan, M. Nelkin, and N. Cao. Refined similarity hypothesis for transverse structure functions in fluid turbulence. *Physical Review Letters*, 79(12):2253–2256, 1997. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.2253>.
- [45] A. J. Chorin, J. E. Marsden, and J. E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [46] R. A. Clark, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 91(01):1, 1979. URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S002211207900001X.
- [47] S. W. Coleman and J. C. Vassilicos. A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous, isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 21(11):113301, 2009. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3257638>.
- [48] Ph. Cornic, F. Champagnat, and B. Leclaire. Lagrangian particle tracking: a link between localisation error and fraction of missed particles. page 10. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03346193>.
- [49] Ph. Cornic, C. Illoul, A. Cheminet, G. Le Besnerais, F. Champagnat, Y. Le Sant, and B. Leclaire. Another look at volume self-calibration: calibration and self-calibration within a pinhole model of Scheimpflug cameras. *Measurement Science and Technology*, 27(9):094004, 2016. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-0233/27/9/094004>.
- [50] H. B. Curry and I. J. Schoenberg. On Polya frequency IV: The fundamental spline and their limits. 1966.
- [51] B. Dalziel. Decay of rotating turbulence: some particle tracking experiments. *Applied Scientific Research*, 49:217–244, 1992. URL <https://doi.org/10.1007/BF00384624>.
- [52] C. De Boor. *A practical guide to splines*, volume 27. New-York, springer-verlag edition, 1978.
- [53] P. Debue. *Experimental approach to the problem of the Navier-Stokes singularities*. PhD thesis, Université Paris Saclay (COMUE), September 2019. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02420454>.

- [54] P. Debue, V. Shukla, D. Kuzzay, D. Faranda, E.-W. Saw, F. Daviaud, and B. Dubrulle. Dissipation, intermittency, and singularities in incompressible turbulent flows. *Physical Review E*, 97(5):053101, 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.053101>.
- [55] S. Douady, Y. Couder, and M. E. Brachet. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Physical Review Letters*, 67(8):983–986, 1991. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.983>.
- [56] Th. D. Drivas. *Anomalous Dissipation, Spontaneous Stochasticity & Onsager’s Conjecture*. PhD thesis, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, April 2017. URL <http://www.math.stonybrook.edu/~tdrivas/DrivasPhDThesis.pdf>.
- [57] Th. D. Drivas. Turbulent Cascade Direction and Lagrangian Time-Asymmetry. *Journal of Nonlinear Science*, 29(1):65–88, 2019. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00332-018-9476-8>.
- [58] B. Dubrulle. Beyond Kolmogorov cascades. *Journal of Fluid Mechanics*, 867: P1, May 2019. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112019000983/type/journal_article.
- [59] J. Duchon and R. Robert. Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 13(1):249–255, 2000. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/13/1/312>.
- [60] R. E. Ecke. Chaos, patterns, coherent structures, and turbulence: Reflections on nonlinear science. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(9):097605, 2015. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4915623>.
- [61] P. H. C. Eilers and B. D. Marx. Flexible smoothing with b-splines and penalties. *Statistical Science*, 11(2), May 1996. URL <https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-11/issue-2/Flexible-smoothing-with-B-splines-and-penalties/10.1214/ss/1038425655.full>.
- [62] G. E. Elsinga, F. Scarano, B. Wieneke, and B. W. van Oudheusden. Tomographic particle image velocimetry. *Exp Fluids*, 41(6):933–947, 2006. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00348-006-0212-z>.
- [63] L. Euler. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, pages 274–315, 1757.
- [64] T. Faber and J. C. Vassilicos. Turbulent pair separation due to multiscale stagnation point structure and its time asymmetry in two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 21(1):015106, 2009. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3059618>.

- [65] H. Faller. *Dissipation, cascade et singularités en turbulence*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, Paris, January 2022. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03669581>.
- [66] H. Faller, L. Fery, D. Geneste, and B. Dubrulle. A Model of Interacting Navier–Stokes Singularities. *Entropy*, 24(7):897, 2022. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/24/7/897>.
- [67] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 24(1):395–458, 1992.
- [68] S. Fauve, C. Laroche, and B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. 1993.
- [69] Ch. L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. *The millennium prize problems*, 57:67, 2000.
- [70] J.-M. Foucaut, J. Carlier, and M. Stanislas. PIV optimization for the study of turbulent flow using spectral analysis. *Measurement Science and Technology*, 15(6):1046–1058, June 2004. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-0233/15/6/003>.
- [71] U. Frisch and A. N. Kolmogorov. *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, [Eng.] ; New York, 1995. URL <https://doi.org/10.1017/CB09781139170666>.
- [72] I. Gallagher. Le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes. page 34, 2011. URL <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups10-02.pdf>.
- [73] S. Gesemann. From Particle Tracks to Velocity and Acceleration Fields Using B-Splines and Penalties. *arXiv:1510.09034 [physics]*, October 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1510.09034>. arXiv: 1510.09034.
- [74] T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano. Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation. *Physics of Fluids*, 14(3):1065–1081, March 2002. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1448296>.
- [75] I. Grooms, K. Julien, J. B. Weiss, and E. Knobloch. Model of Convective Taylor Columns in Rotating Rayleigh–Bénard Convection. *Physical Review Letters*, 104(22):224501, 2010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.224501>.
- [76] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique: 3e édition*. EDP Sciences, November 2020. URL <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1051/978-2-7598-0893-9/html>.

- [77] D. Gérard-Varet. De Navier-Stokes vers Euler. (4):18, 2010. URL <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups10-04.pdf>.
- [78] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New haven yale university press edition, 1923. URL <https://archive.org/details/lecturesoncauchy00hadauoft/mode/2up>.
- [79] P. C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. page 24.
- [80] J. Heikkila and O. Silven. Calibration procedure for short focal length off-the-shelf CCD cameras. In *Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition*, pages 166–170 vol.1, Vienna, Austria, 1996. IEEE. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/546012/>.
- [81] W. Heisenberg. Zur statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 124:628–657, 1948. URL <https://doi.org/10.1007/BF01668899>.
- [82] G. T. Herman and A. Lent. Iterative reconstruction algorithms. page 22.
- [83] H. Ch. Hulst. *Light scattering by small particles*. New York, dover publication, inc edition, 1981.
- [84] A. K. M. F. Hussain. Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:303–356, 1986. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112086001192/type/journal_article.
- [85] I. Ihrke and M. Magnor. Image-Based Tomographic Reconstruction of Flames. page 9.
- [86] P. Isett. A proof of onsager's conjecture, 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1608.08301>.
- [87] J. Jiménez. Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? *Journal of Turbulence*, 4, 2003. URL <https://doi.org/10.1088/1468-5248/4/1/022>.
- [88] D. J. Jobson, Z. Rahman, and G. A. Woodell. A multiscale retinex for bridging the gap between color images and the human observation of scenes. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(7):965–976, 1997. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/597272/>.
- [89] J. Jucha, H. Xu, A. Pumir, and E. Bodenschatz. Time-reversal-symmetry Breaking in Turbulence. *Physical Review Letters*, 113(5):054501, 2014. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.054501>.
- [90] P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, and G. Stolovitzky. Probability density of velocity increments in turbulent flows. *Physical Review Letters*, 68(18):2766–2769, 1992. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.2766>.

- [91] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187(4):471–480, 1984. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01174182>.
- [92] T. Kato and H. Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 32:243–260, 1962. URL http://www.numdam.org/article/RSMUP_1962__32__243_0.pdf.
- [93] J. Kestin, M. Sokolov, and W. A. Wakeham. Viscosity of liquid water in the range -8°C to 150°C . *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 7(3):941–948, July 1978. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.555581>.
- [94] A. Kolmogoroff. Zur Theorie der Markoffschen Ketten. *Mathematische Annalen*, 112(1):155–160, December 1936. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01565412>.
- [95] A. Kolmogoroff. Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze. *Mathematische Annalen*, 113(1):766–772, December 1937. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01571664>.
- [96] A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:9–13, 1941.
- [97] D. Kuzzay, D. Faranda, and B. Dubrulle. Global vs local energy dissipation: The energy cycle of the turbulent von Kármán flow. *Physics of Fluids*, 27(7):075105, 2015. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4923750>.
- [98] D. Kuzzay, E.-W. Saw, F. J. W. A. Martins, D. Faranda, J.-M. Foucaut, F. Daviaud, and B. Dubrulle. New method for detecting singularities in experimental incompressible flows. *Nonlinearity*, 30(6):2381–2402, June 2017. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6544/aa6aaf>.
- [99] Th. V. Kármán. Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1(4):233–252, 1921. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.19210010401>. [_eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/zamm.19210010401](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/zamm.19210010401).
- [100] O. A. Ladyzhenskaia. Solution “in the large” of the nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 12(3):427–433, 1959. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160120303>.
- [101] J. M. Lawson, E. Bodenschatz, C. C. Lalescu, and M. Wilczek. Bias in particle tracking acceleration measurement. *Experiments in Fluids*, 59(11):172, November 2018. URL <http://arxiv.org/abs/1805.12440>. arXiv:1805.12440 [physics].

- [102] T. D. Lee. On some statistical properties of hydrodynamical and magneto-hydrodynamical fields. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(1):69–74, 1952. URL <https://www.ams.org/qam/1952-10-01/S0033-569X-1952-51081-8/>.
- [103] J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique. page 87, 1933.
- [104] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Mathematica*, 63(0):193–248, 1934. URL <http://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888078>.
- [105] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Number 84 in Fluid mechanics and its applications. Springer, Dordrecht, 4th rev. and enl. ed edition, 2008. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6435-7>.
- [106] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics, volume 1, incompressible models*, volume 17. 1998. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997754698802653>.
- [107] H. G. Maas, A. Gruen, and D. Papantoniou. Particle tracking velocimetry in three-dimensional flows. *Experiments in Fluids*, 15:133–146, 1993. URL <https://doi.org/10.1007/BF00190953>.
- [108] A. A. Mailybaev. Spontaneous stochasticity of velocity in turbulence models. *Multiscale Modeling & Simulation*, 14(1):96–112, 2016. URL <http://arxiv.org/abs/1504.00575>. arXiv:1504.00575 [math-ph, physics:physics].
- [109] B. Malgrange. L. Schwartz et la théorie des distributions. *Astérisque*, 131:25–33, 1985.
- [110] J. Mann, S. Ott, and J. S. Andersen. *Experimental study of relative, turbulent diffusion*. Number 1036 in Risø-R. Risø National Laboratory, Roskilde, 1999.
- [111] L. Marié. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: Influence de la Rotation*. PhD thesis, Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris, 2003. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007755>.
- [112] L. Marié and F. Daviaud. Experimental measurement of the scale-by-scale momentum transport budget in a turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 16(2): 457–461, 2004. URL <https://doi.org/10.1063/1.1637602>.
- [113] M. R. Maxey and J. J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26(4):883, 1983. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.864230>.

- [114] Ch. Meneveau and K. R. Sreenivasan. The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 224:429–484, 1991. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112091001830/type/journal_article.
- [115] R. Monchaux. *Mécanique statistique et effet dynamo dans un écoulement de von Karman turbulent*. PhD thesis, Université Paris-Diderot - Paris VII, Paris, September 2007. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199751>.
- [116] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical fluid mechanics, volume I: mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, 1971.
- [117] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical fluid mechanics, volume II: mechanics of turbulence*, volume 2. MIT Press, Cambridge, Mass., 1987.
- [118] J. Morlet. Sampling Theory and Wave Propagation. In C. H. Chen, editor, *Issues in Acoustic Signal — Image Processing and Recognition*, pages 233–261. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1983. URL http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-82002-1_12.
- [119] F. Nguyen, J.-P. Laval, and B. Dubrulle. Characterizing most irregular small-scale structures in turbulence using local Hölder exponents. *Physical Review E*, 102(6):063105, 2020. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.063105>.
- [120] C. Nore, L. S. Tuckerman, O. Daube, and S. Xin. The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von kármán swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 477, February 2003. URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112002003075.
- [121] C. Nore, D. Castanon Quiroz, L. Cappanera, and J.-L. Guermond. Numerical simulation of the von Kármán sodium dynamo experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 854:164–195, 2018. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112018005827/type/journal_article.
- [122] E. A. Novikov. Dynamics and statistics of a system of vortices. (68):1868–1882, 1975. URL http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_041_05_0937.pdf.
- [123] E. A. Novikov. Generalized dynamics of three-dimensional vortical singularities (vortons). *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 84:975–981, 1983. URL http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_057_03_0566.pdf.
- [124] A. M. Oboukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1):77–81, 1962. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112062000506/type/journal_article.

- [125] P. Odier, J.-F. Pinton, and S. Fauve. Magnetic induction by coherent vortex motion. *The European Physical Journal B*, 16(2):373–378, July 2000. URL <http://link.springer.com/10.1007/s100510070239>.
- [126] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cim*, 6(2):279–287, 1949.
- [127] C. W. Oseen. *Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamik*. Leipzig: Akademische verlagsgesellschaft mb h. edition, 1927.
- [128] N. T. Ouellette, H. Xu, M. Bourgoin, and E. Bodenschatz. An experimental study of turbulent relative dispersion models. *New Journal of Physics*, 8(6):109–109, 2006. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/8/6/109>.
- [129] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence in turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics. *Turbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics*, 88:84–87, 1985.
- [130] R. Pasquetti, R. Bwemba, and L. Cousin. A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows. *Applied Numerical Mathematics*, 58(7):946–954, 2008. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927407000815>.
- [131] A. B. Petro, C. Sbert, and J.-M. Morel. Multiscale Retinex. *Image Processing On Line*, 4:71–88, April 2014. URL https://www.ipol.im/pub/art/2014/107/?utm_source=doi.
- [132] Y. Pomeau and M. Le Berre. Leray turbulence: what can we learn from acceleration compared to velocity, 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1909.01724>.
- [133] L. Prandtl. *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz.*, volume 5 of *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 1925.
- [134] A. K. Prasad and K. Jensen. Scheimpflug stereocamera for particle image velocimetry in liquid flows. *Applied Optics*, 34(30):7092, October 1995. URL <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-34-30-7092>.
- [135] A. K. Prasad, R. J. Adrian, C. C. Landreth, and P. W. Offutt. Effect of resolution on the speed and accuracy of particle image velocimetry interrogation. *Experiments in Fluids*, page 12, 1992.
- [136] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 69:262–277, 1917. 00000.
- [137] M. Raffel, Ch. E. Willert, T. W. Steve, and Jürgen K. *Particle image velocimetry: a practical guide*. Springer, Heidelberg ; New York, 2nd ed edition. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72308-0>.

- [138] F. Ravelet. *Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Karman turbulent*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, Paris, September 2005. URL <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00011016>.
- [139] F. Ravelet, L. Marié, A. Chiffaudel, and F. Daviaud. Multistability and memory effect in a highly turbulent flow: Experimental evidence for a global bifurcation. *Physical Review Letters*, 93(16):164501, October 2004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.164501>.
- [140] F. Ravelet, A. Chiffaudel, and F. Daviaud. Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Kármán closed flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 601:339–364, April 2008. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifiser/S0022112008000712/type/journal_article.
- [141] F. Raynal. Exact relation between spatial mean enstrophy and dissipation in confined incompressible flows. *Physics of Fluids*, 8(8):2242–2244, August 1996. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.868997>.
- [142] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge, The University press, 1922. URL <https://archive.org/details/weatherpredictio00richrich/page/66/mode/2up>.
- [143] L. F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 110:709–737, 1926.
- [144] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 3rd ed edition, 1987.
- [145] J. S. Russell. *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. 1845.
- [146] A. Rényi. On projections of probability distributions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 3(3):131–142, 1952.
- [147] P. G. Saffman. On the effect of the molecular diffusivity in turbulent diffusion. *Journal of Fluid Mechanics*, 8(2):273–283, 1960. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifiser/S0022112060000591/type/journal_article.
- [148] P. G. Saffman and D. I. Meiron. Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flow. *Physics of Fluids*, 29(8):2373, 1986. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.865529>.
- [149] P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction*. Scientific computation. Springer, Berlin ; New York, 3rd ed edition, 2006. URL <https://doi.org/10.1007/b137536>.

- [150] B. Saint-Michel. *L'écoulement de von Kármán comme paradigme de la physique statistique hors de l'équilibre*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Paris, October 2013. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00911544>.
- [151] B. Saint-Michel, E. Herbert, J. Salort, C. Baudet, M. Bon Mardion, P. Bonnay, M. Bourgoïn, B. Castaing, L. Chevillard, F. Daviaud, P. Diribarne, B. Dubrulle, Y. Gagne, M. Gibert, A. Girard, B. Hébral, Th. Lehner, B. Rousset, and SHREK Collaboration. Probing quantum and classical turbulence analogy in von Kármán liquid helium, nitrogen, and water experiments. *Physics of Fluids*, 26(12):125109, 2014. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4904378>.
- [152] J. P. L. C. Salazar and L. R. Collins. Two-Particle Dispersion in Isotropic Turbulent Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1):405–432, 2009. URL <https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102224>.
- [153] E.-W. Saw, P. Debue, D. Kuzzay, F. Daviaud, and B. Dubrulle. On the universality of anomalous scaling exponents of structure functions in turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 837:657–669, February 2018. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112017008485/type/journal_article.
- [154] B. Sawford. Turbulent relative dispersion. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33(1):289–317, 2001. URL <https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev.fluid.33.1.289>.
- [155] B. L. Sawford, P. K. Yeung, M. S. Borgas, P. Vedula, A. La Porta, A. M. Crawford, and E. Bodenschatz. Conditional and unconditional acceleration statistics in turbulence. *Physics of Fluids*, 15(11):3478–3489, November 2003. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1613647>.
- [156] A. Scagliarini. Geometric properties of particle trajectories in turbulent flows. *Journal of Turbulence*, 12:N25, 2011. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14685248.2011.571261>.
- [157] F. Scarano. Tomographic PIV: principles and practice. *Measurement Science and Technology*, 24(1):012001, January 2013. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-0233/24/1/012001>.
- [158] D. Schanz, S. Gesemann, A. Schröder, B. Wieneke, and M. Novara. Non-uniform optical transfer functions in particle imaging: calibration and application to tomographic reconstruction. *Measurement Science and Technology*, 24(2):024009, December 2012. URL <https://doi.org/10.1088/0957-0233/24/2/024009>. Publisher: IOP Publishing.
- [159] D. Schanz, A. Schröder, S. Gesemann, D. Michaelis, and B. Wieneke. Shake the box: A highly efficient and accurate tomographic particle tracking velocimetry

- (tomo-ptv) method using prediction of particle positions. Delft, The Netherlands, July 2013. 10th International symposium on particle image velocimetry-PIV13. URL https://www.pco-tech.com/fileadmin/user_upload/Applications/Shake_the_Box/Daniel_Schanz_Shake_the_box_paper.pdf.
- [160] D. Schanz, S. Gesemann, and A. Schröder. Shake-the-box: Lagrangian particle tracking at high particle image densities. *Exp Fluids*, 57(70):1–27, 2016. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00348-016-2157-1>.
- [161] Th. Scheimpflug. Improved Method and Apparatus for the Systematic Alteration or Distortion of Plane Pictures and Images by Means of Lenses and Mirrors for Photography and for other purposes. 1904.
- [162] L. Schwartz. Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. *Annales de l'université de Grenoble*, 21:57–74, 1945.
- [163] L. Schwartz. *Théorie des distributions et transformation de Fourier*, volume 15. 1949.
- [164] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. The soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, 61(10):1443–1483, 1973. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/1451226/>.
- [165] K. R. Sreenivasan. On the universality of the Kolmogorov constant. *Physics of Fluids*, 7(11):2778–2784, 1995. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.868656>.
- [166] K. Stewartson. On the flow between two rotating coaxial disks. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49(2):333–341, April 1953. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0305004100028437/type/journal_article.
- [167] D. Stirzaker. *Stochastic processes and models*. Oxford University Press, Oxford ; New York, 2005.
- [168] G. G. Stokes. *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1850. URL <http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CB09780511702266>.
- [169] S. Sumbekova, A. Cartellier, A. Aliseda, and M. Bourgoïn. Preferential concentration of inertial sub-kolmogorov particles. the roles of mass loading of particles, stokes and reynolds numbers. *Physical Review Fluids*, 2(2):024302, 2017. URL <http://arxiv.org/abs/1607.01256>.
- [170] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, 1(1):73–100, 1973. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045793073900273>.

- [171] G. I. Taylor. Diffusion by Continuous Movements. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):196–212, 1922. URL <http://doi.wiley.com/10.1112/plms/s2-20.1.196>.
- [172] G. I. Taylor. Statistical theory of turbulence I. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 151(873):421–444, 1935. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1935.0158>.
- [173] Ch.-M. Tchen. *Mean Value and Correlation Problems connected with the Motion of Small Particles suspended in a turbulent fluid*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1947. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-94-017-6101-7>.
- [174] M. A. C. Teixeira and C. A. Mériaux. Estimating the filtering of turbulence properties by finite-sized particles using analytical energy spectra. *Physics of Fluids*, 34(4):045117, 2022. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0084622>.
- [175] S. Thalabard, J. Bec, and A. A. Mailybaev. From the butterfly effect to spontaneous stochasticity in singular shear flows. *Communications Physics*, 3(1):122, 2020. URL <http://www.nature.com/articles/s42005-020-0391-6>.
- [176] F. Thiesset, R. A. Antonia, L. Danaila, and L. Djenidi. Kármán-Howarth closure equation on the basis of a universal eddy viscosity. *Physical Review E*, 88(1):011003, 2013. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.011003>.
- [177] P. Vieillefosse. Internal motion of a small element of fluid in an inviscid flow. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 125(1). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0378437184900086>.
- [178] A. Vincent and M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 225:1–20, 1991. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112091001957/type/journal_article.
- [179] A. Vincent and M. Meneguzzi. The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 258:245–254, 1994. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112094003319/type/journal_article.
- [180] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:121–160, 2002. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112002001842/type/journal_article.
- [181] B. Wieneke. Volume self-calibration for 3D particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 45(4):549–556, October 2008. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00348-008-0521-5>.

- [182] B. Wieneke. Iterative reconstruction of volumetric particle distribution. *Measurement Science and Technology*, 24(2):024008, December 2012. URL <https://doi.org/10.1088/0957-0233/24/2/024008>. Publisher: IOP Publishing.
- [183] N. Wiener. *Extrapolating, interpolating and smoothing of stationary time series*. 1949.
- [184] G. A. Williams and R. E. Packard. Photographs of Quantized Vortex Lines in Rotating He II. *Physical Review Letters*, 33(5):280–283, 1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.280>.
- [185] J. Willneff. *A spatio-temporal matching algorithm for 3D particle tracking velocimetry*. PhD thesis, ETH Zurich, 2003. URL <http://hdl.handle.net/20.500.11850/147726>.
- [186] H. Xu, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz. Curvature of lagrangian trajectories in turbulence. *Physical Review Letters*, 98(5):050201, January 2007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.050201>.
- [187] A. M. Yaglom. The field of acceleration in turbulent flow. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 67(5):795–798, 1949.
- [188] J. Yao and F. Hussain. Polarized vortex reconnection. *Journal of Fluid Mechanics*, 922:A19, 2021. URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112021005176/type/journal_article.
- [189] P. K. Yeung, X. M. Zhai, and K. R. Sreenivasan. Extreme events in computational turbulence. *PNAS*, page 6, 2015. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.1517368112>.
- [190] G. Zocchi, P. Tabeling, J. Maurer, and H. Willaime. Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds numbers. *Physical Review E*, 50(5):3693–3700, November 1994. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.3693>.

Titre: Des événements extrêmes de dissipation aux événements extrêmes de dispersion, une empreinte de singularité: Approche expérimentale

Mots clés: Turbulence, singularités, PTV, Navier-Stokes

Résumé: Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à des phénomènes reliés à une propriété étonnante des écoulements turbulents: l'indépendance du taux de dissipation par rapport à la viscosité à grands nombres de Reynolds. Cela suggère l'existence de zones très localisées dans lesquelles se développent des gradients de vitesse extrêmes, hors de portée des simulations numériques actuelles.

Dans ce travail, nous tentons d'observer ces phénomènes rares et fugaces correspondant à des événements extrêmes de dissipation très localisée. Nous réalisons une étude expérimentale dans un écoulement turbulent de von Kármán. L'expérience est constituée d'un cylindre rempli d'eau mis en mouvement par deux turbines indépendantes en rotation opposée placées à chaque extrémité de la cuve cylindrique. Nous visualisons les champs de vitesses dans une zone au milieu de l'expérience par une méthode de vélocimétrie

par suivi de particules (4D-PTV) cette technique permet de suivre en temps réel le trajet de particules de petites tailles illuminées par un puissant laser. Finalement, cette technique nous permet de confronter les observations des événements extrêmes d'un point de vue eulérien d'une part, via les extrêmes de taux de dissipation local, et d'un point de vue lagrangien d'autre part, via les événements extrêmes d'irréversibilité - dissymétrisation temporelle de dispersion des paires de particules. Nous tentons de montrer dans quelle mesure ces deux quantités (i) sont reliées - dans la limite finie des grands nombres de Reynolds - et (ii) peuvent fournir des indicateurs de phénomènes extrêmes de la turbulence. Finalement, nous discutons de la possibilité de mettre au point un critère fiable permettant de sélectionner les phénomènes particuliers impliqués dans l'intermittence et le mélange turbulent (régime de Richardson-Oboukhov).

Title: From Dissipation Extreme Events to Dispersion Extreme Events, a Print of Singularity : Experimental Approach.

Keywords: Turbulence, singularities, PTV, Navier-Stokes

Abstract: In this thesis, we focus on phenomena linked to a surprising property of turbulent flows: the independence of dissipation rate on viscosity at large Reynolds numbers. This suggests the existence of small areas of space where extreme velocity gradients take place, that is far out of reach by numerical simulations.

Herein, we attempt to observe these rare and short-lived phenomena linked to very localized events. We achieve through an experimental study of a von Kármán turbulent flows. The experiment is composed of a water-tank stirred by two independent counter-rotating impellers placed at the top and bottom of the tank. We visualize the velocity field in the middle of the tank by a so-

called Particle Tracking Velocimetry method (4D-PTV), this method tracks small particles illuminated by a powerful laser. Finally, it enables the comparison of extreme events from the Eulerian point-of-view via extreme events in the local dissipation rate, with the Lagrangian point-of-view via irreversible extreme events (the temporal dissymmetry of the particle-pair dispersion). We try to show (i) the link between these extreme events and (ii) how they can be used as the indicators of extreme events in turbulent flows. Finally, we promote the possibility to create a reliable criteria allowing to select a particular phenomenon linked to the intermittency and turbulent mixing (Richardson-Oboukhov mixing).