



**HAL**  
open science

# Observation de la Terre depuis l'Espace par interférométrie optique

Hiyam Debary

► **To cite this version:**

Hiyam Debary. Observation de la Terre depuis l'Espace par interférométrie optique. Instrumentation et méthodes pour l'astrophysique [astro-ph.IM]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPASP016 . tel-04047048

**HAL Id: tel-04047048**

**<https://theses.hal.science/tel-04047048v1>**

Submitted on 27 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Observation de la Terre depuis l'Espace  
par interférométrie optique  
*Earth observation from Space using optical  
interferometry*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 572 d'accréditation, Ondes et Matières, EDOM  
Spécialité de doctorat : Physique  
Graduate School : Physique. Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **Optique et techniques associées (Université Paris-Saclay, ONERA)**, sous la direction de **Vincent MICHAU**, directeur de recherche, la co-direction de **Laurent MUGNIER**, directeur de recherche et le co-encadrement de **Sébastien LOPEZ**, ingénieur.

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 9 février 2023, par

**Hiyam DEBARY**

**Composition du jury**

Membres du jury avec voix délibérative

<b>François Reynaud</b> Professeur, Xlim, Université de Limoges	Président
<b>Sylvestre Lacour</b> Chargé de recherche, CNRS, Observatoire de Paris	Rapporteur & Examineur
<b>Maud Langlois</b> Directrice de recherche, CRAL, Université Lyon 1	Rapporteuse & Examinatrice
<b>Loïc Denis</b> Professeur, Lab. Hubert Curien CNRS - Université de Saint-Etienne - IOGS	Examineur
<b>Jérôme Loicq</b> Professeur associé, Technische Universiteit Delft	Examineur

**Titre :** Observation de la Terre depuis l'Espace par interférométrie optique

**Mots clés :** Interférométrie optique, circuits photoniques intégrés, couverture fréquentielle, configuration pupillaire.

**Résumé :** Cette thèse a porté sur l'imagerie de la Terre par interférométrie optique, en s'attachant plus précisément au concept SPIDER, proposé initialement par la société américaine Lockheed-Martin. Il s'agit d'une application récente d'interférométrie optique, où un télescope imageur conventionnel est remplacé par un interféromètre optique effectuant ses mesures dans le plan pupillaire. Le signal est collecté par des pupilles jointives et est ensuite combiné à travers des circuits photoniques intégrés (PICs), permettant une augmentation significative du nombre de fréquences spatiales mesurées. Ainsi, j'ai exploré théoriquement les limitations introduites par un tel imageur interférométrique, et proposé plusieurs améliorations. La première partie de mon travail a porté sur l'étape d'estimation d'une grandeur physique appelée visibilité complexe, caractéristique des interférogrammes et regroupant le contraste et la position des franges. J'ai établi une synthèse exhaustive, grâce à un formalisme analytique, des performances de deux estimateurs statistiques pour l'estimation de la visibilité complexe à partir de différents échantillonnages de l'interférogramme. Cette étude a été faite dans deux cas : un premier cas simple où le bruit prépondérant est homogène, et un second cas plus complexe où le bruit prépondérant est inhomogène, en particulier un bruit photonique. Cela m'a permis d'identifier les méthodes ayant des performances supérieures à celles de l'état de l'art. Ces schémas pourraient également être utilisés dans les interféromètres astronomiques. La deuxième partie de ma thèse a porté sur les architectures de recombinaison. En m'appuyant sur des résultats de la théorie combinatoire, jamais utilisés

jusqu'à présent en interférométrie optique, j'ai proposé une méthode pour explorer de manière exhaustive des architectures de recombinaison. En utilisant cette méthode, j'ai développé un outil permettant de construire l'architecture de recombinaison optimale. Cette approche m'a permis de proposer plusieurs types d'architectures de recombinaison permettant d'améliorer significativement la couverture fréquentielle du concept SPIDER proposée habituellement dans la littérature. J'ai notamment mis en évidence l'intérêt d'un système hybride combinant un télescope monolithique avec un interféromètre optique de type SPIDER. La dernière partie de cette thèse a été consacrée à la comparaison d'un interféromètre type SPIDER et d'un imageur optique conventionnel, tous deux utilisés dans des conditions représentatives de l'observation de la Terre depuis un satellite en orbite basse. Des simulations numériques d'images qui pourraient être obtenues par un instrument de type SPIDER ont mis en évidence la présence de repliement de champ. Comme attendu, une adaptation du dispositif de prise de vue est nécessaire pour compenser le défilement rapide de la scène et augmenter le temps de pose, ce quel que soit le type d'imageur. Une adaptation de la prise de vue interférométrique est proposée en ce sens. J'ai comparé le comportement d'un interféromètre de type SPIDER et d'un imageur classique en termes de robustesse au bruit de façon analytique : si l'imageur classique se compare favorablement à l'imageur interférométrique à basses et moyennes fréquences spatiales, l'interféromètre présente un meilleur rapport signal-à-bruit à hautes fréquences spatiales.

**Title :** Earth observation from Space using optical interferometry

**Keywords :** Optical interferometry, photonic integrated circuits, frequency coverage, aperture configuration.

**Abstract :** This thesis focused on the imaging of the Earth by optical interferometry, and more precisely on the SPIDER concept, initially proposed by the American company Lockheed-Martin. This is a recent application of optical interferometry, where a conventional imaging telescope is replaced by an optical interferometer performing its measurements in the pupil plane. The signal is collected by joined pupils and is then combined through photonic integrated circuits (PICs), allowing a significant increase in the number of spatial frequencies measured. Thus, I explored theoretically the limitations introduced by such an interferometric imager, and proposed several improvements. The first part of my work focused on the estimation of a physical quantity called complex visibility, characteristic of interferograms and gathering the contrast and the position of fringes. I have established an exhaustive synthesis, thanks to an analytical formalism, of the performances of two statistical estimators for the estimation of the complex visibility from different sampling of the interferogram. This study was done in two cases : a first simple case where the preponderant noise is homogeneous, and a second more complex case where the preponderant noise is inhomogeneous, in particular photon noise. This allowed me to identify methods with better performances than the state of the art. These schemes could also be used in astronomical interferometers. The second part of my thesis focused on recombination architectures. Based on results from com-

binatorial theory, never used before in optical interferometry, I proposed a method to explore exhaustively recombination architectures. Using this method, I developed a tool to build the optimal recombination architecture. This approach allowed me to propose several types of recombination architectures that significantly improve the frequency coverage of the SPIDER concept usually proposed in the literature. In particular, I have highlighted the interest of a hybrid system combining a monolithic telescope with an optical interferometer of SPIDER type. The last part of this thesis was devoted to the comparison of a SPIDER type interferometer and a conventional optical imager, both used in conditions representative of the observation of the Earth from a low earth orbit satellite. Numerical simulations of images that could be obtained by a SPIDER-type instrument have highlighted the presence of field folding. As expected, an adaptation of the shooting device is necessary to compensate the fast scrolling of the scene and to increase the exposure time, whatever the type of imager. An adaptation of the interferometric shooting is proposed in this sense. I have compared the behavior of a SPIDER interferometer and a conventional imager in terms of noise robustness in an analytical way : if the conventional imager compares favorably to the interferometric imager at low and medium spatial frequencies, the interferometer presents a better signal-to-noise ratio at high spatial frequencies.



## Remerciements

Ce manuscrit est le fruit de 3 ans et 3 mois de travail, certes personnel, mais qui n'aurait pas pu aboutir sans le concours de nombreuses personnes. J'aimerais donc commencer par remercier sincèrement Sylvestre et Maud pour avoir accepté la charge de rapporter mon manuscrit de thèse. Leurs remarques et questions pertinentes m'ont permis de prendre du recul sur mes travaux. Ensuite, je tiens à remercier François Reynaud, Jérôme Loicq et Loïc Denis d'avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que pour les échanges constructifs que nous avons eus. Leur gentillesse, bienveillance et vive curiosité ont été remarquables.

J'aimerais remercier chaleureusement mes directeurs de thèse : Vincent et Laurent pour la confiance qu'ils m'ont témoignée dans cette aventure. Ils ont su être disponibles, à l'écoute et m'indiquer les bonnes directions pour mes recherches. C'était un plaisir d'être la doctorante de deux personnes très talentueuses dans des domaines certes différents mais complémentaires. Je tiens également à remercier Sébastien pour sa disponibilité et pour tous nos échanges utiles, toujours dans la bonne humeur, qui m'ont permis de voir mon sujet d'un œil moins théorique et plus concret.

J'aimerais également remercier toutes les personnes qui m'ont permis de pouvoir soutenir dans la magnifique salle du Conseil de l'Observatoire de Paris.

L'environnement de travail est important dans le bon déroulement d'une thèse. Cela a été possible grâce à la présence de personnes extraordinaires dans l'équipe HRA, même si le terme "extraordinaire" est un euphémisme pour décrire cette équipe. Je tiens d'abord à remercier Pablo, Luca, Mehdi, Alix, Perrine, (petit) Yann, (grand) Yann et Timothée pour leur bonne humeur permanente et contagieuse. Sans oublier Aurélie, Léa, Romain, Laurie, Chloé, Eve, Inès, Emile, Cyril Pe., Cyril Pa., Joseph, Nicolas L., Mahawa, Maxime, Pierre, Valentina, Daniel, Antoine C., Antoine O., Antoine G. et Hugo.

Je souhaiterais remercier du fond du cœur ma famille, et surtout mes parents et mes sœurs, à qui je dédie cette thèse. Mention spéciale à ma mère qui m'a toujours soutenue dans les difficultés, parmi lesquelles l'organisation d'un pot de thèse quelques jours seulement avant la soutenance. Merci à tous ceux qui ont fait le déplacement jusqu'à l'Observatoire pour venir m'écouter et m'encourager. Je pense notamment à Nicolas V., Thibaud et Pierre V. Enfin, merci à Quentin, sans qui je n'aurais pas abordé la thèse comme un long fleuve (quasi) tranquille et qui a grandement contribué (avec mes 2 chats Mia et Yuumi) à ma bonne humeur (quasi) permanente. Je le remercie de m'avoir encouragée et d'avoir toujours cru en moi, ainsi que pour son soutien indéfectible.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Contexte et besoin . . . . .	11
1.1.1	Diamètre de l'ouverture du télescope . . . . .	13
1.1.2	La masse . . . . .	14
1.1.3	Le volume . . . . .	14
1.2	Rappels théoriques utiles . . . . .	16
1.2.1	L'expérience des trous d'Young . . . . .	16
1.2.2	Principe du processus d'imagerie par un système optique . . . . .	17
1.2.3	Principe de fonctionnement d'interférométrie optique . . . . .	22
1.2.4	Bref historique de l'interférométrie optique pour l'astronomie . . . . .	23
1.2.5	Les interféromètres spatiaux . . . . .	24
1.3	Les circuits photoniques intégrés . . . . .	26
1.4	État de l'art . . . . .	28
1.4.1	Description et état bibliographique . . . . .	28
1.4.2	Aspects technologiques et système . . . . .	30
1.4.3	Études chinoises dérivées de l'étude d'un IOSOOT américain . . . . .	33
1.5	Rappels de photométrie . . . . .	36
1.6	Ma thèse dans ce contexte . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Estimation</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.1.1	Position du problème . . . . .	41
2.1.2	Démarche . . . . .	41
2.2	Modèle direct . . . . .	41
2.2.1	Écriture du modèle sans bruit et méthodes d'échantillonnage du signal . . . . .	41
2.2.2	L'écriture du modèle avec les données bruitées avec différentes modulations . . . . .	44
2.2.3	Formulation matricielle du problème direct . . . . .	47
2.3	Estimateurs . . . . .	48
2.3.1	Estimateur moindres carrés . . . . .	49
2.3.2	Estimateur maximum de vraisemblance . . . . .	49
2.4	Évaluation de la propagation du bruit . . . . .	51
2.4.1	Bruit sur l'estimée des paramètres de la fonction de cohérence mutuelle . . . . .	51
2.4.2	Cas d'un bruit homogène prépondérant : bruit de détecteur et bruit de photons à faible contraste . . . . .	52
2.4.3	Cas d'un bruit inhomogène prépondérant : bruit de photons dans un régime à fort contraste . . . . .	53
2.4.4	Variance de la fonction de cohérence mutuelle $\Gamma$ . . . . .	55
2.4.5	Résultats . . . . .	55



2.5	Conclusion . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Optimisation</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.1.1	Position du problème . . . . .	59
3.1.2	Hypothèses de départ pour l'optimisation de la couverture fréquentielle . . . . .	59
3.1.3	Complexité de la recherche de configurations pupillaires . . . . .	62
3.2	Théorie de l'optimisation . . . . .	66
3.3	Cas d'application SPIDER . . . . .	69
3.4	Suggestion d'une nouvelle architecture . . . . .	69
3.4.1	Cas d'application de la solution Langford . . . . .	69
3.4.2	Dimensionnement du télescope monolithique . . . . .	71
3.4.3	Synthèse . . . . .	73
3.5	Extension supplémentaire . . . . .	75
3.5.1	Optimisation de l'espace vide inter-bras : dimensionnement des bras additionnels . . . . .	75
3.5.2	Méthode triviale d'appariement de pupilles entre bras primaire/secondaire . . . . .	77
3.5.3	Méthode itérative d'appariement de pupilles entre bras primaire/secondaire . . . . .	79
3.5.4	Cas d'application pour le design SPIDER . . . . .	80
3.6	Conclusion . . . . .	81
3.7	Article "Aperture configuration optimization for extended scene observation by an interferometric telescope" . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Application du concept SPIDER à l'observation de la Terre</b>	<b>91</b>
4.1	Caractéristiques de la scène observée . . . . .	91
4.1.1	Luminance moyenne . . . . .	91
4.1.2	Variations spatiales de la scène . . . . .	92
4.1.3	Variations temporelles . . . . .	93
4.2	Modèle physique . . . . .	95
4.2.1	Efficacité de couplage et champ de vue . . . . .	95
4.2.2	Echantillonnage objet . . . . .	100
4.2.3	Largeur spectrale . . . . .	101
4.2.4	Temps d'intégration . . . . .	102
4.3	Comparaison avec un imageur classique . . . . .	103
4.3.1	En l'absence de bruit . . . . .	103
4.3.2	En présence de bruit : approche analytique . . . . .	106
4.4	Modélisation numérique E2E . . . . .	109
4.4.1	Conditions retenues . . . . .	109
4.4.2	Résultats . . . . .	112
4.4.3	Pistes d'amélioration pour l'augmentation du flux . . . . .	117
4.5	Conclusion . . . . .	119
4.6	Proceeding "Interferometric imaging as an alternative to telescopes" . . . . .	120

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	9
<b>5 Conclusion</b>	<b>131</b>
5.1 Objectifs et résultats . . . . .	131
5.2 Discussion et perspectives . . . . .	132
<b>Appendices</b>	<b>135</b>
<b>Approximation de la TF par la FFT</b>	<b>137</b>



# 1 - Introduction

## 1.1 . Contexte et besoin pour l'observation de la Terre

- Quelle est l'ampleur d'une inondation après une tempête ? Des dégâts après un tremblement de terre ? Quelle est l'évolution de l'érosion d'une côte ?
- Peut-on prédire le temps à partir d'observations de nuages ?
- Est-il possible de suivre avec précision la fonte des glaces ?
- Quelle est l'ampleur des dégâts liée à l'expansion urbaine sur l'environnement ?
- Peut-on cartographier les feux de forêt pour aider les sapeurs-pompiers à cibler les zones à traiter ?
- Peut-on découvrir des vestiges maya cachés depuis des siècles au cœur d'une luxuriante végétation ?

Aucune autre plateforme de mesure n'a autant révolutionné notre capacité à répondre à ces questions et à d'autres questions fondamentales géophysiques que les satellites en orbite autour de la Terre. L'idée de systèmes optiques spatiaux a été proposée dès le milieu des années 1940 par l'astronome Lyman Spitzer. Qu'il s'agisse de surveillance de l'environnement, de systèmes de navigation, de la météorologie, des télécommunications, de la cartographie ou encore pour des applications militaires, les satellites observant la Terre sont devenus au fil des 60 dernières années, et ce depuis le lancement par l'URSS de Sputnik I en 1957, un élément essentiel d'une grande variété d'activités scientifiques. Au cours de la seconde moitié du XXe siècle, la croissance a été lente mais régulière, avec environ 60 à 100 satellites lancés par an jusqu'au début des années 2010. Dans une optique de collectionner des données de manière continues ou non, on atteint un nombre conséquent de 4852 satellites à partir du 1er janvier 2022<sup>1</sup> et, avec l'intérêt grandissant des firmes telles que Amazon, SpaceX, OneWeb et StarNet/GW pour les constellations satellites, plus de 100 000 satellites supplémentaires seront envoyés en orbite avant 2025.

Depuis 60 ans, les satellites observant la Terre depuis l'Espace ont fondamentalement transformé notre perception de la Terre. Typiquement, l'image "*Blue Marble*" (figure 1.1) de la Terre prise par l'équipage de la mission Apollo 17 en 1972, perçue comme révolutionnaire à l'époque, est désormais considérée comme banale de nos jours car on s'est habitué à voir de telles images<sup>2</sup>. Au

---

1. <https://dewesoft.com/daq/every-satellite-orbiting-earth-and-who-owns-them>

2. [https://nap.nationalacademies.org/resource/11991/earth\\_observations\\_final.pdf](https://nap.nationalacademies.org/resource/11991/earth_observations_final.pdf)



FIGURE 1.1 – Image de la "Blue Marble" prise par l'équipage de la mission Apollo 17 en 1972. Crédit : [NASA](#).

fil du temps, les systèmes optiques spatiaux ont évolué, devenant plus petits et plus complexes et la capacité à imager la Terre de manière plus fine et de manière plus systématique s'est développée. Les informations satellitaires sont recueillies assez fréquemment pour qu'on arrive à imager la globalité de la Terre en un jour, fournissant ainsi, tel un film, l'évolution d'une même scène terrestre d'un jour à l'autre. Aujourd'hui, nombre de ces systèmes optiques sont utilisés par les agences de défense, de sécurité et de contre-espionnage du monde entier afin de protéger les civils. L'une des tendances actuelles dans l'industrie des plateformes optiques spatiales est de réduire la taille et le poids global de ces systèmes afin de réduire les coûts de lancement. De plus, ces plateformes miniaturisées sont chargées de fournir à la communauté le même niveau de performance que les plateformes existantes, qui sont généralement beaucoup plus volumineuses et plus coûteuses.

La valeur des satellites d'observation de la Terre depuis l'Espace ne cesse d'augmenter de façon spectaculaire à mesure que les instruments deviennent plus précis, grâce à l'émergence de nouvelles technologies. En particulier, une amélioration notable réside dans la capacité à observer des détails plus fins dans les objets étudiés. Le détail qu'il est possible de discerner sur une image dépend de la *résolution spatiale* du capteur de l'instrument utilisé et limité par

la diffraction, la dimension du plus petit élément pouvant être observé<sup>3</sup> du fait de la diffraction :

$$r \simeq \frac{\lambda z}{D} \quad (1.1)$$

avec  $z$  la distance du satellite à la scène,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $D$  le diamètre de l'ouverture du télescope. Plus  $r$  est petite, plus on a de détails de la scène observée. Cependant, on ne peut pas concevoir un télescope avec un diamètre infini car on est contraint par plusieurs éléments, notamment :

1. le diamètre de l'ouverture (*Size*),
2. le poids (*Weight*),
3. la puissance (*Power*),
4. le coût (*Cost*),

qui sont souvent mentionnés dans le cahier des charges des télescopes embarqués dans des satellites sous l'abréviation *SWaP-C*.

### 1.1.1 . Diamètre de l'ouverture du télescope

Des modèles de coût pour les télescopes terrestres existent depuis les années 1960, avec une relation de proportionnalité directe entre le coût  $C$ , et le diamètre  $D$  du miroir primaire du télescope. La relation qui les lie est  $C \propto D^a$  et la puissance  $a$  ne cesse de diminuer au fil des années. Au début des années 1960, la puissance  $a$  était de 3, ensuite, en 1978,  $a$  valait 2.77 [Mei79]. Après 1980,  $a$  valait 2.5. Enfin, en 2004, ce coefficient atteignait la puissance 2 [BMM04], témoignant d'une baisse progressive des coûts de production des ouvertures des télescopes. Cependant, ces lois sont correctes uniquement lorsque le bâtiment et/ou le dôme de l'observatoire au sol sont inclus. Or, pour les télescopes spatiaux ce n'est pas le cas. La loi de puissance est donc différente.

Les modèles de coût pour télescopes spatiaux sont moins nombreux que pour les télescopes terrestres, que ce soit pour des raisons de propriété ou de sécurité nationale. On retrouve parmi ces modèles de coût ceux de Meinel [MM86], de Bely [Bel00], de Horak [Hor96], de Wong ou encore de Smart [Sma00]. On retiendra la relation de van Belle proposée en 2004 :

$$C_{\text{tel}} \propto D_{\text{tel}}^2. \quad (1.2)$$

L'augmentation du diamètre du télescope entraîne également une augmentation de la profondeur et de l'épaisseur de l'instrument.

---

3. <https://www.rncan.gc.ca/cartes-outils-et-publications/imagerie-satellitaire-et-photos-aeriennes/tutoriel-notions-fondamentales-teledection/resolution-spatiale-espacement-des-pixels-et-echelle/resolution-spatiale-espacement>

### 1.1.2 . La masse

Si le diamètre du miroir primaire est primordiale pour les astrophysiciens puisqu'il détermine les performances du système d'observation, pour les ingénieurs et les planificateurs de mission, il en est autrement. En effet, pour ces derniers, la masse et le volume sont d'importance égale, voire supérieure puisque c'est la masse qui détermine quel véhicule peut ou non être utilisé pour lancer la charge utile. Ici encore, comme pour le diamètre du miroir primaire, il existe une relation de proportionnalité entre la masse de l'instrument  $M$ , et le coût  $C$ . Nous retiendrons la relation suivante, basée sur 15 télescopes spatiaux [Sta+10] :

$$C_{\text{tel}} \propto M_{\text{tel}}^{1.12}. \quad (1.3)$$

Au-delà des contraintes du coût associé à une masse supplémentaire, il existe aussi des contraintes de survivabilité associée à la masse [CK20]. En général, les missions spatiales sont soumises à des charges structurelles extrêmes pendant le lancement. Une charge utile déséquilibrée représente un danger potentiel pour le véhicule spatial.

### 1.1.3 . Le volume

Les véhicules de lancement spatiaux ont souvent des normes standards de volume qui sont non négociables. Le constructeur du télescope est donc contraint par ces dimensions. On songe alors à des alternatives comme le déploiement dans l'espace, comme pour le télescope spatial récent James Webb (figure 1.2). Par conséquent, tout système est inexorablement limité par le volume de charge utile disponible.

On atteint alors un plateau. Mais alors, comment contourner cette limite imposée par le SWaP-C ? On souhaiterait, si possible, proposer un instrument qui sort du paradigme défini par les imageurs conventionnels actuels, et qui réduirait considérablement l'encombrement longitudinal des télescopes classiques. L'intérêt de cette réduction en masse et volume est qu'elle s'accompagnerait d'une diminution du prix. Par ailleurs, on souhaiterait se limiter à utiliser des technologies existantes uniquement, afin que la conception instrumentale soit envisageable à moyen terme.

Les questions suivantes surviennent alors naturellement :

- Comment trouver le bon compromis entre la performance le télescope spatial d'observation et les contraintes sur le volume et la masse ?
- Comment obtenir une meilleure résolution spatiale et sans dégradation de la qualité image, tout en respectant ce compromis ?

La seule méthode connue permettant d'augmenter la résolution sans pour autant requérir des optiques à tailles exorbitantes est l'interférométrie [Bus15].

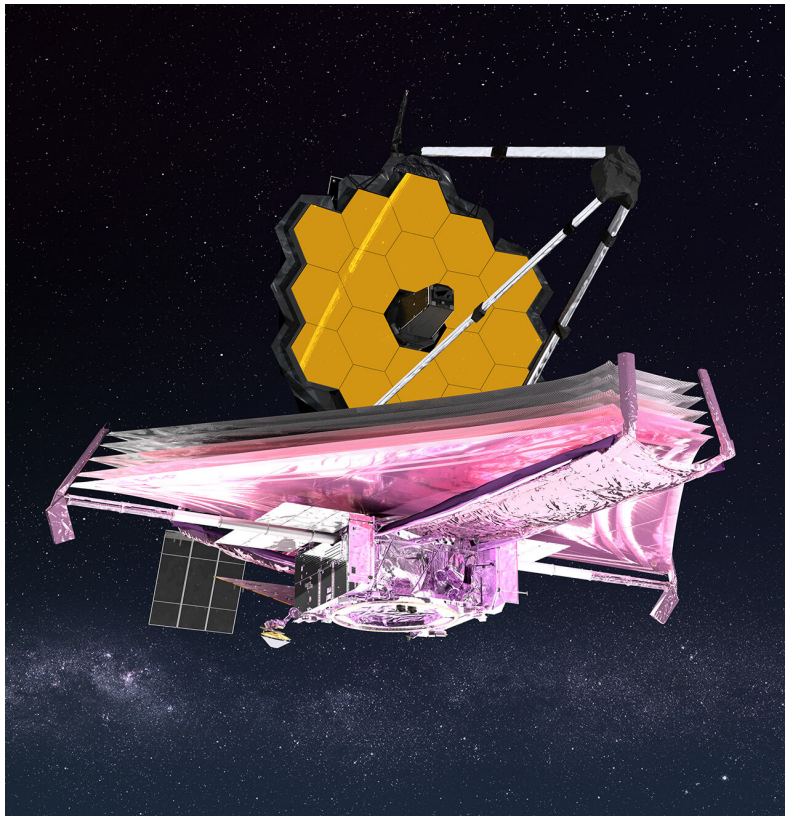


FIGURE 1.2 – James Webb Space Telescope, dont la phase majeure de déploiement du télescope s’est achevée le 8 janvier avec la mise en place du miroir primaire. Crédit : [NASA](#).



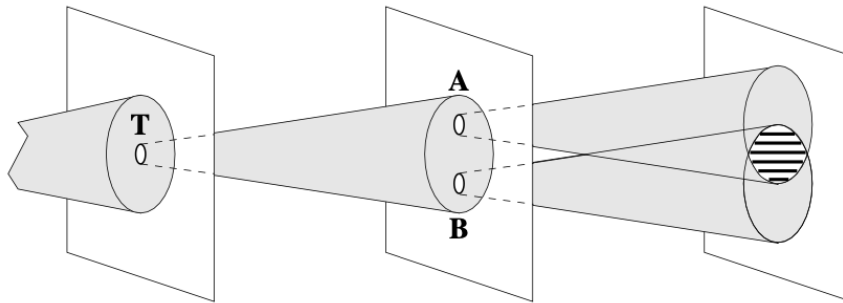


FIGURE 1.3 – Expérience des trous d’Young. On éclaire un écran dans lequel se trouve un trou, noté  $T$  dont le diamètre dépend de la longueur d’onde, qui lui éclaire deux trous,  $A$  et  $B$  dont les diamètres dépendent aussi de  $\lambda$ , sur un deuxième écran. Sur le troisième écran, les cônes issus des points  $A$  et  $B$  s’intersectent : on observe des franges d’interférences où zones sombres et brillantes apparaissent alternativement. Crédit : [Mei05].

L’idée est d’utiliser l’interférence de rayons lumineux issus d’au moins deux télescopes séparés par une distance  $b$ . La section suivante détaille les principes de cette méthode.

## 1.2 . Rappels théoriques utiles sur l’interférométrie optique

Dans cette section, le formalisme de la synthèse d’ouverture est introduit. Elle s’inspire en partie de l’introduction des manuscrits de thèse de Serge Meimon [Mei05], Frédéric Cassaing [Cas97] et Cyril Pannetier [Pan23].

### 1.2.1 . L’expérience des trous d’Young

L’expérience de 1803 des fentes d’Young fut l’expérience la plus importante dans la mise en évidence de la nature ondulatoire de la lumière. Une source quasi-ponctuelle, composée d’un trou source  $T$  percé dans un écran, éclaire à son tour deux autres trous  $A$  et  $B$  sur un deuxième écran. Deux cônes de lumière sont issus de chacun de ces trous, qui, une fois superposés, forment des franges d’interférence, alternativement brillantes et sombres, sur un troisième écran. L’effet de l’obstruction d’un de ces deux trous annule les franges d’interférences. Ainsi, l’addition de ces deux sources lumineuses peut créer des zones d’ombre.

Ce phénomène s’explique si on suppose que la lumière se propage sous

la forme d'une onde sphérique sinusoïdale de période spatiale  $\lambda$ , la longueur d'onde, correspondant à la couleur du faisceau lumineux. Lorsque les ondes issues des deux trous sont en opposition de phase, i.e. que les deux ondes se compensent, des zones sombres apparaissent : il s'agit d'interférences destructives. En revanche, lorsque les deux faisceaux s'additionnent : les ondes sont en phase. On observe alors des zones lumineuses. La distance séparant deux franges brillantes consécutives s'appelle l'interfrange  $i$  :

$$i = \frac{\lambda L}{b} \quad (1.4)$$

où  $L$  est la distance entre l'écran d'observation et l'écran sur lequel se trouvent les trous  $A$  et  $B$ , et  $b$  la distance qui sépare les deux points. Ainsi, et grâce à cette expérience, Young a pu déterminer les rapports entre les longueurs d'onde de la lumière variant entre  $0.4 \mu\text{m}$  (bleu) et  $0.8 \mu\text{m}$  (rouge).

Par ailleurs, une deuxième caractéristique en outre de l'interfrange est observée. Il s'agit de la visibilité des franges,  $V$ . Sans dimension, sa valeur est comprise entre 0 et 1. Plus les franges sont visibles et plus cette valeur tend vers 1. Dans le cas d'une source monochromatique, celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$V \triangleq \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min} + I_{\max}} \quad (1.5)$$

où  $I_{\min}$  et  $I_{\max}$  sont les intensités minimales et maximales des franges respectivement.

Supposons maintenant qu'on n'ait plus une source ponctuelle en  $T$  mais plutôt une multitude de sources avec des intensités différentes en entrée des trous d'Young. Le résultat sur l'écran devient alors la somme des figures qui seraient obtenues si on avait individuellement chacune des sources. Ainsi, les franges d'interférences obtenues dans ce cas là permettent d'accéder à des informations relatives à la distribution des sources.

Le principe d'interférométrie optique repose sur le même principe que celui de l'expérience des trous d'Young mais en utilisant des télescopes, comme illustré dans la figure 1.4.

### 1.2.2 . Principe du processus d'imagerie par un système optique

Plaçons nous dans le cas d'un instrument imageur où la recombinaison s'effectue au plan focal. Soit une onde sphérique monochromatique émise par la source observée, avec des coordonnées angulaires  $(\alpha, \beta)$  relatives à l'axe du système optique de l'instrument. Une propriété fondamentale de l'imagerie

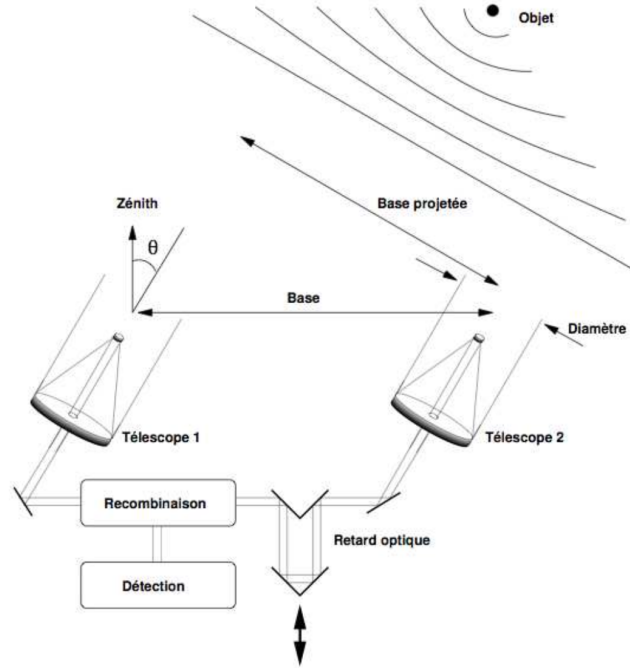


FIGURE 1.4 – Principe de l'imagerie interférométrique par un système optique. Crédit : [Hou09].

directe en lumière incohérente est le lien de convolution qui existe entre la l'objet observé  $O(\alpha, \beta)$  et l'image obtenue  $I(\alpha, \beta)$  [Lac07] :

$$I(\alpha, \beta) = O(\alpha, \beta) * PSF(\alpha, \beta), \quad (1.6)$$

où  $PSF(\alpha, \beta)$  est la fonction d'étalement de point, ou encore son équivalent anglais : la *Point Spread Function* (PSF). Cette dernière est la réponse impulsionnelle d'un système d'imagerie optique et définit complètement ses propriétés spatiales. La  $PSF$  est l'équivalent dans le domaine spatiale de la fonction de transfert optique, ou le terme anglais de *Optical Transfer Function* (OTF), d'un système d'imagerie interférométrique. On peut aussi l'exprimer en fonction de l'autocorrélation de la pupille du système optique :  $P(u, v)$ . Cette dernière est définie comme la transmission du système optique dans le plan de Fourier :

$$PSF = \widetilde{P \otimes P}. \quad (1.7)$$

Les liens entre ces différentes grandeurs sont illustrés dans la figure 1.5.

En passant dans le domaine des fréquences spatiales, l'équation 1.6 devient :

$$\widetilde{I}(u, v) = \widetilde{O}(u, v) \times FTO(u, v). \quad (1.8)$$

où  $\sim$  représente une transformée de Fourier.

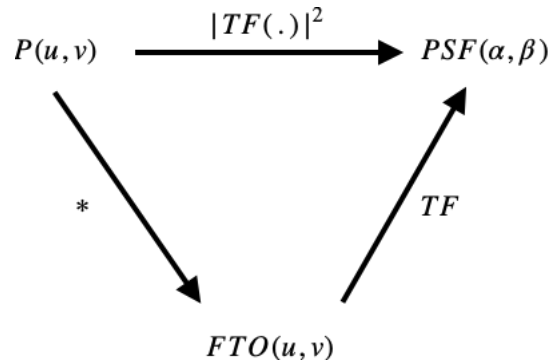


FIGURE 1.5 – Relations entre la pupille, la FTO et la PSF.

En conclusion, la forme de la pupille conditionne directement le filtrage spatial appliqué sur l'objet. D'autre part, l'autocorrélation de la pupille a un support (fini) deux fois plus grand que celui de la pupille. On accède alors à une fréquence de coupure nette au delà de laquelle il n'y a plus de transmission fréquentielle. Enfin, les systèmes optiques agissent comme des filtres passe-bas puisque l'auto-corrélation est maximale à l'origine.

Pour un télescope conventionnel monolithique à pupille pleine circulaire, la fonction de transfert optique a une forme de "chapeau chinois" (figure 1.6a), maximal à l'origine et qui décroît jusqu'à la fréquence de coupure  $D/\lambda$ , avec  $D$  le diamètre du télescope. La réponse impulsionnelle, quant à elle, est la tâche d'Airy.

En interférométrie, la pupille n'est pas pleine et la FTO prend des formes différentes. Prenons l'exemple des trous d'Young : on est en présence de l'équivalent de deux télescopes. On observe sur la figure 1.6b 3 pics. Le pic central correspond à l'auto-corrélation d'un trou (télescope) tandis que les deux pics symétriques de part et d'autre du pic central correspondent aux interférences entre les deux trous, avec une hauteur qui est la moitié du pic central. Ainsi, le pic central correspond à la tâche de diffraction d'un trou, modulée par des franges sinusoïdales. Néanmoins, une telle FTO ne suffit pas à couvrir toutes les fréquences spatiales. On s'oriente alors vers des configurations pupillaires plus complexes avec plus de 2 télescopes comme la "Golay-6" [Gol71] illustrée dans la figure 1.6c. Le pic central ici est plus atténué que celui du télescope monolithique mais couvre le même domaine fréquentiel que le télescope monolithique.

Nous retiendrons dans la suite des termes relatives aux configurations pupillaires, résumées dans la figure 1.7, notamment :

- une configuration pupillaire est dite **compacte** lorsque la FTO associée ne s'annule pas avant une fréquence de coupure donnée. Sinon elle est

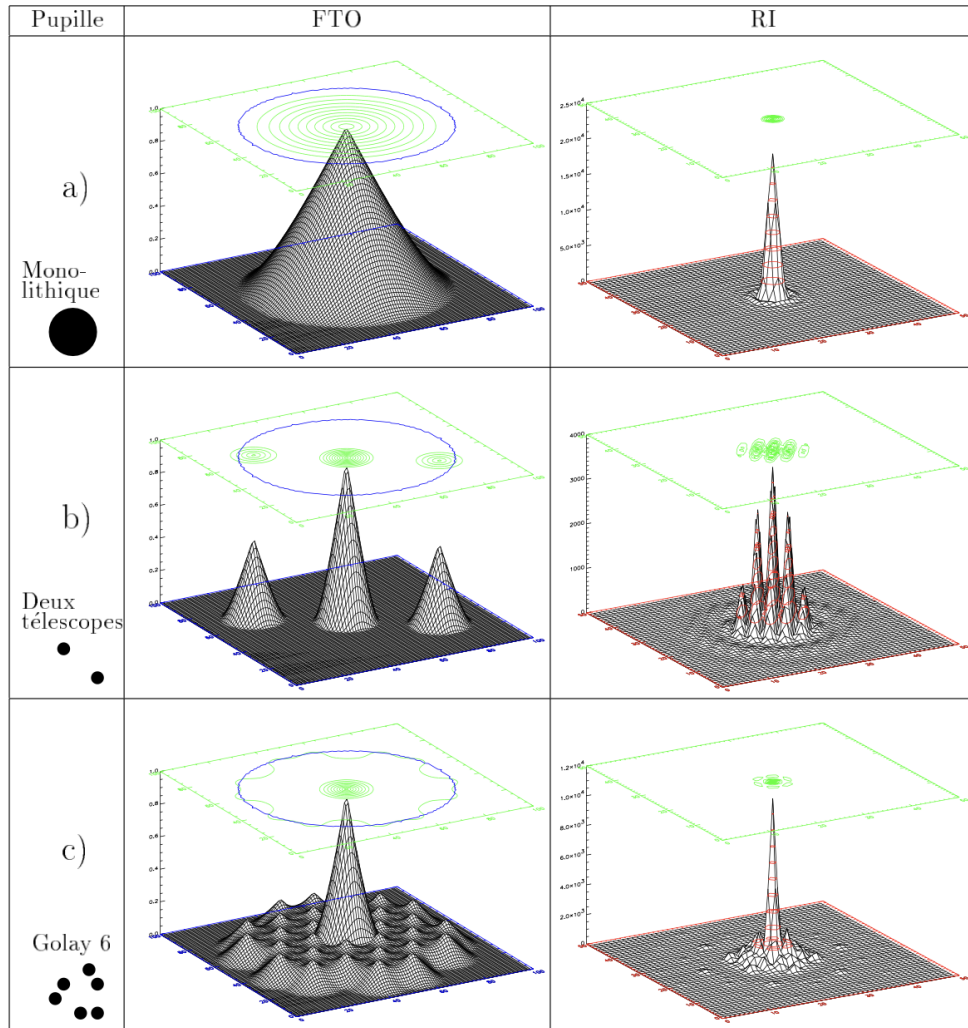


FIGURE 1.6 – Impact de la configuration pupillaire sur la PSF et la FTO. Crédit : [Cas97].

dite **diluée**,

- une configuration pupillaire est dite **redondante** lorsque la FTO présente des bases identiques. Sinon, elle est dite **non redondante**.

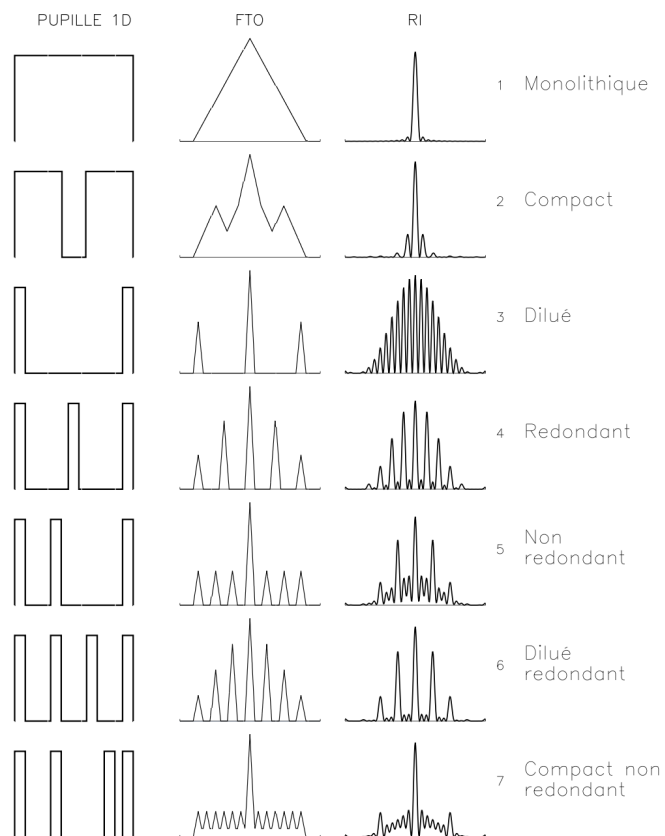


FIGURE 1.7 – Représentation des configurations pupillaires monodimensionnelles avec leurs FTO et PSF associées. Crédit : [Cas97].

### 1.2.3 . Principe de fonctionnement d'interférométrie optique

Reprenons l'exemple cité plus haut des trous d'Young. Calculons la réponse impulsionnelle associée à ce système à deux télescopes. On commence par la fonction de pupille  $P$ , nulle partout, sauf entre deux points du plan pupille :  $b_1$  et  $b_2$ . On a alors :

$$P\left(\frac{\mathbf{b}}{\lambda}\right) = P_1\delta\left(\frac{\mathbf{b}-b_1}{\lambda}\right) + P_2\delta\left(\frac{\mathbf{b}-b_2}{\lambda}\right) \quad (1.9)$$

en supposant  $D$ , le diamètre des télescopes, très petit devant la distance qui les sépare, et  $\Delta\lambda$  la largeur spectrale très petite devant  $\lambda$ . Les télescopes sont alors perçus comme des ouvertures ponctuelles. Ainsi, dans ce cadre, nous définissons quelques notions utiles pour la suite de ce chapitre :

- **la base** des trous d'Young  $\mathbf{b}$  correspond à la distance séparant les deux télescopes,
- **la fréquence spatiale** associée à cette base  $\mathbf{b}$  est :  $\mathbf{f} = \mathbf{b}/\lambda$ .

Ainsi, pour une source ponctuelle, en introduisant un déphasage par le biais d'une ligne à retard pour faire varier la différence de marche (DDM)  $\delta$  initialement nulle, nous obtenons l'intensité détectée suivante :

$$i = i_1 + i_2 + 2\sqrt{i_1 i_2} \left| \gamma\left(\frac{\mathbf{b}}{\lambda}\right) \right| \cos\left(\phi\left(\frac{\mathbf{b}}{\lambda}\right) + \phi_k\right) \quad (1.10)$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont les flux des ondes étant passées par les 2 trous d'Young, où  $\phi(\mathbf{b}/\lambda)$  est le déphasage entre les deux ondes monochromatiques et où  $\phi_k$  est un déphasage connu.  $\gamma$ , le degré de cohérence complexe (ou visibilité complexe) du champ dans le plan pupille, peut être exprimé en fonction de la distribution angulaire d'intensité de la source :

$$\gamma\left(\frac{\mathbf{b}}{\lambda}\right) = \left| \gamma\left(\frac{\mathbf{b}}{\lambda}\right) \right| e^{i\phi}. \quad (1.11)$$

Selon le **théorème de Zernike-Van Cittert** : la visibilité complexe du front d'onde mesuré est la transformée de Fourier de la distribution d'intensité de l'objet pour une certaine fréquence spatiale  $\mathbf{b}/\lambda$  normalisée à 1 pour la fréquence nulle, avec  $\mathbf{b}$  la base séparant les deux télescopes et  $\lambda$  la longueur d'onde d'observation.

En pratique, il est plus simple de s'intéresser à la composante de l'objet relative, plutôt que absolue dans le cas  $\gamma(\mathbf{b}/\lambda)$ . Ainsi, dans la suite, nous poserons  $\Gamma(\mathbf{b}/\lambda)$  cette grandeur relative, ou encore **la fonction de cohérence mutuelle**. De plus nous retiendrons deux aspects importants dans cette partie concernant ce nombre, notamment :

1. le **contraste des franges** permet de déterminer le module de la TF de l'objet à la fréquence spatiale  $b/\lambda$ , ou l'**amplitude de la fonction de cohérence complexe**,
2. la **position des franges** permet de déterminer la phase de la TF de l'objet à la fréquence spatiale  $b/\lambda$ , ou la **phase de la fonction de cohérence complexe**.

### 1.2.3.1 Objectif

Nous avons montré la FTO d'un système à deux télescopes ou plus dans la section précédente. Le but, *in fine*, est de couvrir le domaine fréquentiel de la manière la plus complète possible, comme le ferait un télescope monolithique avec un diamètre équivalent à la distance séparant les deux télescopes de l'interféromètre. Ainsi, plus on a de fréquences spatiales associées à la mesure d'une visibilité complexe, et plus l'objet reconstruit est fidèle à la réalité.

L'espace dans lequel l'interféromètre peut effectuer ses mesures est délimité par un disque de rayon  $B_{\max}/\lambda$ , avec  $B_{\max}$  la plus grande distance qui sépare une paire de télescopes. Prenons l'exemple d'un interféromètre à  $N_{\text{télescopes}} = 6$  télescopes. Le nombre de bases mesurables par un tel système optique est :

$$N_{\text{bases}} = \frac{N_{\text{télescopes}}(N_{\text{télescopes}} - 1)}{2}, \quad (1.12)$$

soit 15 bases. Ce nombre est insuffisant pour pouvoir reconstruire l'objet de manière efficace. C'est pourquoi les astronomes s'appuient sur la rotation de la Terre pour paver le domaine fréquentiel  $(u, v)$  par projection des fréquences spatiales, sans pour autant changer la position des télescopes. C'est le principe de la super-synthèse [Mal+99].

Une deuxième piste envisageable pour augmenter la couverture fréquentielle est de jouer sur la largeur des bandes spectrales. Cependant, cette méthode est utilisable que lorsque la forme de l'objet observé est supposée identique pour toutes les longueurs d'onde mesurées [Bus15].

### 1.2.4 . Bref historique de l'interférométrie optique pour l'astronomie

Depuis les fentes d'Young, une nouvelle utilisation pour l'interférométrie a émergé : l'interférométrie stellaire, grâce à une complexification des systèmes interférométriques. Fizeau fut le premier à proposer une telle application en 1868. Il propose de déduire le diamètre d'une étoile à partir des contrastes des franges par masquage pupillaire d'un télescope. Stéphan, en 1873-1874 [Sté73], parvint à réaliser cette expérience avec succès. Quelques années plus tard en 1920, Michelson et Pease [MP21] (figure 1.8) en dilatant la distance entre les



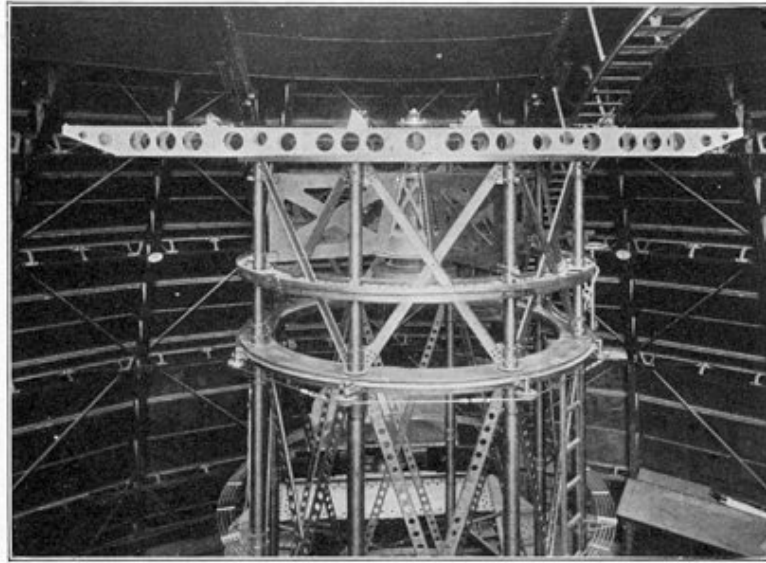


FIGURE 1.8 – Interféromètre de Michelson au Mont Wilson.

masques avec des télescopes mesurent les premiers diamètres d'étoiles requérant une base supérieure à 3 m. Ensuite, la détection directe par interférométrie a vécu 50 années stagnantes.

En 1975, Labeyrie propose un renouveau à l'interférométrie, en partie grâce à l'émergence de nouvelles technologies. Il est le premier à avoir combiné les faisceaux lumineux issus de deux télescopes différents dans le domaine de l'optique. Depuis, d'autres interféromètres plus complexes et combinant la lumière issue de plus de 2 télescopes ont vu le jour. On liste les principaux en fonctionnement, dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Interféromètres pour l'astronomie dans le domaine de l'optique et le proche infrarouge.

Interféromètre	$N_{\text{télescopes}}$	$D$ (cm)	$B_{\text{max}}$ (m)	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )
CHARA Array	6	100	330	0.45-2.4
NPOI	6	60	97	0.45-0.85
VLT	4	820	200	0.45-12

### 1.2.5 . Les interféromètres spatiaux

Les interféromètres spatiaux sont plus difficiles à mettre en place de part leur coût (comme vu précédemment) et les défis technologiques posés par leurs structures volumineuses. Ainsi, les projets d'interféromètres spatiaux se succèdent, visant à atteindre la haute résolution angulaire, mais ne vont pas au-

delà de la phase conceptuelle. Parmi ceux-là, nous pouvons citer, en s'inspirant de la liste établie par [Sch+18] :

- **Darwin** : mission de l'ESA ayant pour but la détection de nouvelles exoplanètes et de traces de vies primitives, mais dont l'étude fut annulée en 2007 pour des raisons budgétaires. L'interféromètre aurait été constitué de 5 télescopes. L'homologue américain de la NASA pour Darwin a aussi été imaginé : il s'agit du **Terrestrial Planet Finder Interferometer** (TPF-I), qui a également été abandonné définitivement en 2011 pour des raisons budgétaires.
- **Space Interferometry Mission** (SIM) : mission interférométrique de la NASA qui avait également comme objectif la détection d'exoplanètes de la taille de la Terre situées dans la zone habitable de leur système solaire. Son second objectif était la cartographie de la Voie lactée. Enfin, son ultime objectif était la collecte de données relatives à la distribution de la matière noire. Le télescope devait être lancé dans la décennie 2010 pour une somme de 200 millions de dollars américains, mais l'idée fut abandonnée à la fin de cette même année.
- **Space Infrared Interferometric Telescope** (SPIRIT) : concept de la NASA composé de deux télescopes avec une résolution spectrale fine ( $\lambda/\Delta\lambda \sim 3000$ ) et une résolution angulaire de l'ordre de la sous-arcseconde. Il fut abandonné.
- **Far Infrared Interferometer** (FIRI) : concept interférométrique de l'ESA, identique à SPIRIT, ayant pu atteindre une résolution angulaire de 1 arcseconde entre 25  $\mu\text{m}$  et 300  $\mu\text{m}$ . Il aurait été constitué d'un interféromètre Michelson à deux télescopes de diamètre 1 m séparés d'une base de 30 m<sup>4</sup>.
- **Submillimeter Probe of the Evolution of Cosmic Structure** (SPECS) : concept d'interféromètre Michelson de la NASA, avec des bases ajustables jusqu'à 1 km. Utilisant le vol en formation, il aurait une résolution spectrale jusqu'à 10<sup>4</sup> et aurait opéré dans l'infrarouge lointain.
- **Stellar Imager** (SI) : mission de la NASA opérant dans le domaine UV/optique pour le deep-space. Il était destiné à imager des étoiles telles que notre Soleil avec une résolution de 0.1 milliarcseconde [Chr+11]. Il aurait été composé de 20-30 miroirs primaires de 1 mètre de diamètre avec un base maximale de 500 mètres.
- **ESPRIT** : concept interférométrique, similaire au FIRI. Il aurait utilisé le vol en formation, et aurait été composé de 6 télescopes de 3.5 m de diamètre et formé 15 bases, de bases variant entre 7 mètres et 1000 mètres [Wil+08]. La configuration pupillaire aurait été en mouvement remplissant progressivement le plan  $(u, v)$ .

---

4. <https://sci.esa.int/web/trs/-/40090-far-infrared-interferometer>

Ainsi, l'interférométrie basée dans l'espace a été le centre d'attention depuis la fin du XX<sup>e</sup> siècle. Les concepts étudiés, très ambitieux, n'ont jamais pu aboutir de par des aspects budgétaires et technologiques. Les interféromètres spatiaux nécessitant des optiques de grand diamètre réduisent leur réalisabilité dans l'espace. L'interférométrie peut également, appliquée à la réalisation de systèmes moins ambitieux et grâce à l'émergence des circuits photoniques récente, permettre la réduction drastique du volume en profondeur de ces structures interférométriques, et donne de l'espoir de voir de telles structures dans l'espace dans le futur proche. La section suivante est consacrée à cette nouvelle technologie : les circuits photoniques intégrés.

### 1.3 . Les circuits photoniques intégrés

Les circuits photoniques intégrés (PIC), autrefois connus comme l'optique intégrée, a d'abord été introduit par Miller en 1969 [Mil69]. Ensuite, pendant les 50 années qui ont suivies, plusieurs publications ont eu lieu sur les démonstrations des PICs. Cependant, leur commercialisation et l'investissement dans leur développement fut un échec, par faute de leur coût. Plus tard, les PICs ont trouvé une application dans les communications optiques. Leur intérêt ne cesse d'augmenter et de s'étendre à des domaines différents notamment grâce à la complexification exponentielle de ces circuits [SWV19].

Le PIC, ou micropuce optique, est un composant essentiel de nombreuses technologies modernes. Doté de deux ou plusieurs composants photoniques, il forme ainsi un circuit fonctionnel. Les PICs permettent à la fois de capter, générer, transporter et traiter la lumière. Les circuits photoniques, comme leur nom l'indique, traitent des photons dont la longueur d'onde est typiquement dans le domaine du visible et infrarouge. L'avantage de l'optique intégrée, à l'inverse des composants optiques traditionnels, est le gain en volume drastique. Le coût est lui aussi considérablement réduit grâce au parallélisme massif de traitement planaire [OM21]. De plus, les PICs ne présentent pas de pièce mécanique contrairement à l'optique classique, rendant ainsi les PICs une solution beaucoup plus robuste en plus d'être plus compacte. Enfin, les PIC bénéficient de toute la filière de fabrication des composants micro-electroniques matures.

Il existe différentes techniques de fabrication pour les PICs, identiques à celle utilisées dans les circuits intégrés électroniques, typiquement la photolithographie pour la gravure et du dépôt de matériaux. La plateforme sur lesquels les composants sont déposés sont fabriqués à partir de :

1. phosphore d'indium, dont l'équivalent anglais est **indium phosphide** (InP),
2. nitrure de silicium, ou **silicon nitride** (SiN), possédant une large gamme

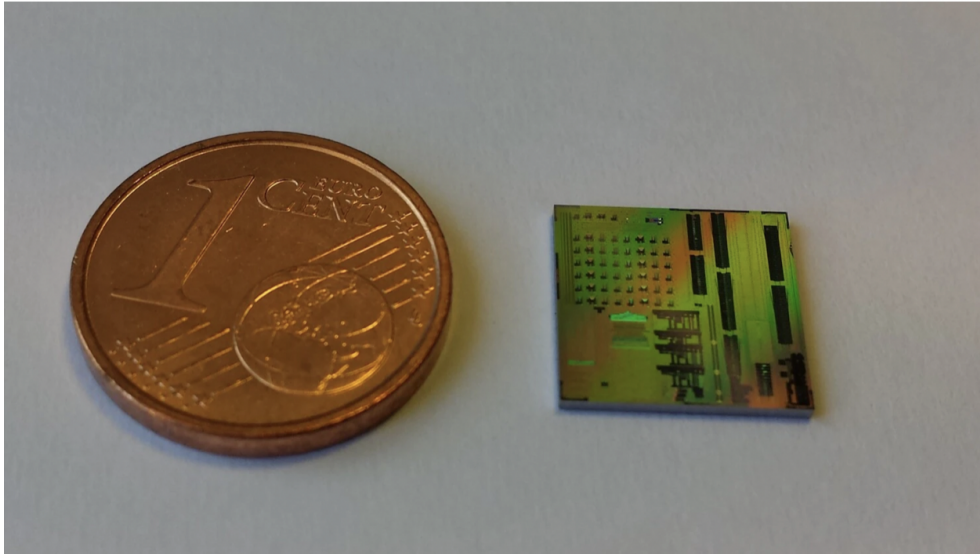


FIGURE 1.9 – La taille d’un circuit photonique relativement à une pièce de monnaie. Crédit : [Ericsson](#).

spectrale et guide d’ondes à très faibles pertes. Ils sont idéaux dans les spectromètres par exemple.

3. silicium, ou **silicon** (Si). Cette technologie permet de minimiser les pertes pour les composants passifs comme les guides d’ondes. Cette technologie est compatible avec des circuits minuscules.
4. niobate de lithium, ou **lithium niobate** (LiNbO<sub>3</sub>),
5. silice, ou **silica**,
6. arséniure de gallium, ou **gallium arsenide** (GaAS).

Intéressons nous un instant aux PICs Si ou SiN. Ces derniers sont composés de plusieurs éléments optiques permettant d’accomplir les tâches liées à la propagation de la lumière présentées précédemment, notamment :

- le séparateur et combineur de faisceaux, dits **beam splitter** (BS) et **beam combiner** (BC) en anglais : il s’agit de composants passifs qui séparent le flux (BS) en  $n$  faisceaux, et qui combine les  $n$  faisceaux (BC) en un seul. On retrouve le BC/BS notamment dans un composant des PICs : les interféromètres Mach-Zehnder.
- un interféromètre Mach-Zehnder, ou **Mach-Zehnder Interferometer** (MZI) : il s’agit d’un composant à deux BC/BS, qui réalise des interférences par division de l’amplitude induite par déphasage.
- un modulateur de phase.

Nous avons introduit rapidement dans cette section une technologie utilisée dans un interféromètre. Pour ce manuscrit de thèse, nous allons étudier un

concept de nouvelle mission spatiale, alliant à la fois l'interférométrie optique (présentée dans la section 1.2) et les circuits photoniques intégrés (présentés dans la section 1.3), dont le concept est apparu au début des années 2010. Il s'agit d'un instrument optique à synthèse d'ouverture pour l'observation de la Terre (IOSOOT) susceptible de bouleverser la façon dont on représente les instruments actuellement. La section suivante lui est consacrée et explicite l'état de l'art actuel pour un tel concept.

#### 1.4 . État de l'art de l'étude d'un instrument optique à synthèse d'ouverture pour l'observation de la Terre (IOSOOT)

##### 1.4.1 . Description et état bibliographique

Le premier concept d'interféromètre spatial miniaturisé, ayant pour but l'observation de la Terre, a été proposé, au début des années 2010. Il s'agit d'un instrument connu comme le **Segmented Planar Imaging Detector for Electro-optical Reconnaissance** (SPIDER) par des chercheurs américains à Lockheed-Martin en 2013 [Ken+13]. L'intérêt est double puisque, bien qu'il soit destiné à observer la Terre, il peut être utilisé autrement pour observer une autre source étendue telle que le Soleil, ou encore dans une application d'astronomie.

Le concept SPIDER est un système d'imagerie optique novateur fondé sur l'interférométrie qui pourrait apporter des gains substantiels en encombrement et en poids par rapport à un imageur classique, c'est-à-dire plan focal. Ce concept combine les idées suivantes :

1. remplacer un imageur plan focal par un interféromètre de type corrélateur, en quelque sorte un modèle réduit d'un interféromètre astronomique, qui est illustré dans la figure 1.10 (à gauche),
2. utiliser la technologie des PICs pour réaliser dans une épaisseur extrêmement réduite les fonctions de déphasage, de couplage de faisceaux, de dispersion spectrale et de détection, comme illustré dans la figure 1.10 à droite,
3. éviter les lignes à retard à grande course de la figure 1.10 à gauche en ayant l'ensemble des pupilles sur une monture commune, comme déjà envisagé pour l'imagerie interférométrique de satellites GEO depuis le sol [Jor+12].

Une démonstration expérimentale préliminaire de ce concept a été présentée en 2014 [DK14]. Elle possédait seulement 2 bases et 3 canaux spectraux, mais permettait d'explorer l'augmentation du champ en utilisant des groupes de 5 pupilles pour avoir 5 directions de vue. Ce PIC a donné lieu à une publication en 2017 [Su+17]. Les premiers auteurs sont de University of California,

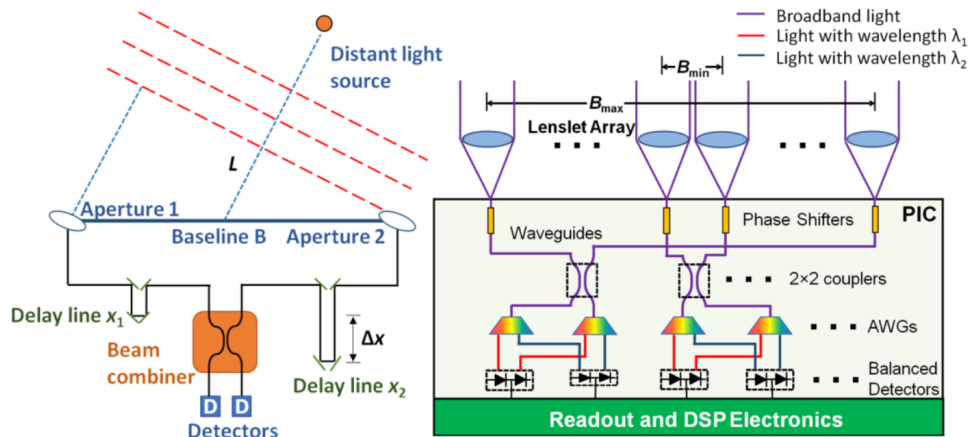


FIGURE 1.10 – À gauche : principe d'un interféromètre (grande base, lignes à retard, recombinaison fibree). À droite : principe de SPIDER (réseau de micro-lentilles, injection dans un PIC comportant plusieurs déphaseurs, coupleurs, éléments dispersifs (AWG) et détecteurs. Crédit : [Su+18].

Davis (UC Davis), les suivants de Lockheed-Martin.

Un démonstrateur avec un PIC  $\text{Si}_3\text{N}_4$  comportant 12 bases colinéaires (figure 1.11) et 18 canaux spectraux dispersés par un AWG a été ensuite développé par Lockheed-Martin et UC Davis [Dun+16]. La démonstration expérimentale en laboratoire de l'imageur SPIDER dans l'infrarouge proche avec ce PIC [Bad+17a ; Bad+17b] a donné lieu à une publication en 2018 [Su+18], qui est la publication la plus récente et complète de ces deux équipes. Le schéma de la figure 1.10 montre qu'à l'entrée dans le PIC les faisceaux dans chaque guide rencontrent d'abord les déphaseurs, qui doivent donc être achromatiques, puis les coupleurs, qui combinent les pupilles deux à deux, puis seulement les éléments dispersifs (AWG), et enfin les détecteurs. Le flux enregistré par les détecteurs permet, via une modulation produite par les déphaseurs, de remonter au contraste et à la phase des franges d'interférences de chaque paire de sous-pupilles recombinaison. Via le théorème de Zernike-Van Cittert, l'objet peut être estimé en faisant appel à une méthode de reconstruction d'image, parmi celles développées en interférométrie astronomique [Le +08].

Le télescope SPIDER échantillonne la visibilité complexe de l'objet observé sur un assez grand nombre de fréquences spatiales. Il peut être décomposé en cinq couches, comme le montre la figure 1.12.

Les réseaux de tubes minimisent la lumière parasite. Les réseaux de micro-

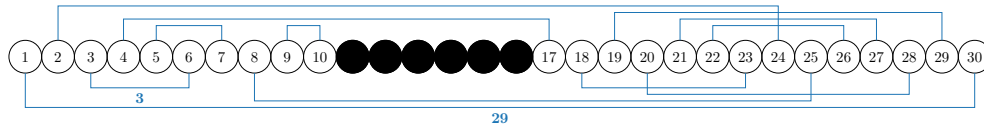


FIGURE 1.11 – Configuration pupillaire du démonstrateur à 12 bases en  $\text{Si}_3\text{N}_4$ .

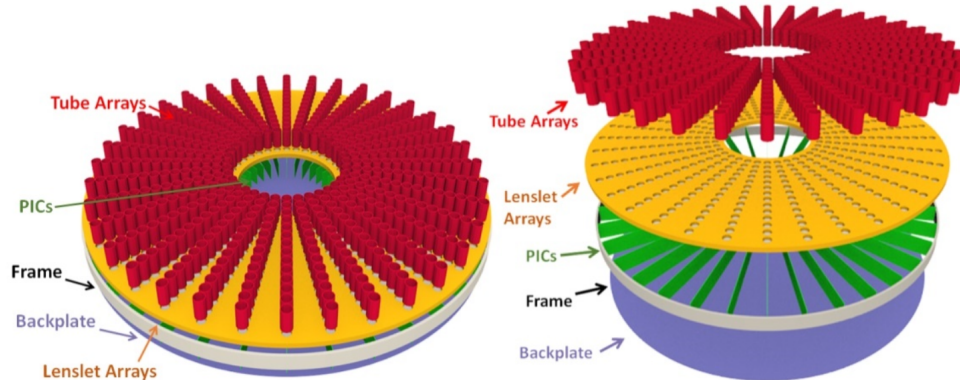


FIGURE 1.12 – Schéma de principe d'un télescope SPIDER. Crédit : [Su+18].

lentilles de la deuxième couche couplent la lumière provenant d'un tube sur les guides d'ondes du PIC. Les lentilles définissent les pupilles qui captent le flux de l'objet. Chaque PIC est un interféromètre unidimensionnel, et les 37 PIC sont disposés selon un schéma radial pour échantillonner de manière dense les fréquences spatiales 2D de la cible. La plaque arrière contient des composants électroniques de traitement numérique des signaux pour traiter les données des détecteurs. Une structure de support mécanique très rigide, non montrée sur la figure 1.12, est nécessaire pour tenir l'ensemble de ces éléments.

#### 1.4.2 . Aspects technologiques et système

Cette section est consacrée à l'analyse de la solution technologique développée spécifiquement pour SPIDER.

##### 1.4.2.1 Système SPIDER

Aujourd'hui limitée à des structures quasiment planaires par l'emploi du  $\text{SiN}$ , l'architecture SPIDER est fortement contrainte. Ceci explique la disposition en étoile de la recombinaison par ligne de bases qui ne permet pas la collection de la totalité du flux incident dans la pupille. Cette architecture se compare défavorablement aux systèmes imageurs classiques du point de vue purement photométrique. Mais, à notre connaissance, aucun travail, même conceptuel n'a été publié sur une solution technologique permettant d'envisa-

ger la collection de la totalité du flux incident dans la pupille. Dans ce paragraphe, nous nous restreignons donc aux réalisations technologiques reposant sur une recombinaison par lignes de base.

L'intégration de l'ensemble des circuits photoniques dans un ensemble mécanique stable et étalonné à la précision interférométrique est un défi. Suivant les mesures effectuées, l'exigence en termes de stabilité sera différente : en ce sens, il faut évoquer un défi système plutôt qu'un défi technologique.

Avec un système parfait, l'image se déduit directement des visibilité mesurées par transformée de Fourier. Lorsque le système présente des imperfections opto-mécaniques, des différences de marche parasites apparaissent, de même nature que les aberrations d'un système optique imageur. Lorsque ces imperfections sont stables dans le temps, il est possible d'étalonner préalablement ces déphasages pour exploiter les visibilité mesurées en étalonnant les déphasages sans dégrader la mesure. Il faut souligner que cette démarche n'est pas possible avec un imageur classique pour lequel les aberrations entachent la qualité optique de façon irréversible. Cet étalonnage a toutefois des limites : il est nécessaire que les différences de marche introduites restent suffisamment faibles pour permettre des interférences et mesurer des visibilité pas trop atténuées (longueur de cohérence dépendant de la largeur spectrale). Enfin, si le système n'est pas stable dans le temps, mais que les différences de marche restent suffisamment faibles pour permettre les interférences, il est possible de procéder à des recombinaisons permettant de s'affranchir des différences de marche parasite (clôtures de phase).

L'intégration n'est pas une problématique directement abordée dans les publications de Lockheed-Martin. Néanmoins, on peut observer que les recombinaisons décrites dans la solution SPIDER ne permettent pas de procéder à des clôtures de phase. En revanche, dans l'expérience décrite dans [Su+18], les auteurs décrivent la présence de wobble qui s'apparente à une aberration introduite par un défaut mécanique. Ils indiquent qu'ils s'affranchissent de cette aberration par traitement a posteriori, ce qui semble indiquer que l'aberration reste faible en regard de la longueur de cohérence définie par la largeur spectrale. On peut conclure que les auteurs envisagent un système SPIDER présentant des imperfections en différence de marche d'amplitude faible devant la longueur de cohérence définie par la largeur spectrale, et de stabilité comparable à la précision interférométrique. Dans le dimensionnement présenté dans [Su+18], la largeur spectrale est de  $\Delta\lambda = 28 \mu\text{m}$  à  $\lambda = 1300 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à une longueur de cohérence de :  $\lambda^2/\Delta\lambda = 60 \mu\text{m}$ .

La résolution angulaire du dispositif est fixée par la dimension de la ligne



de base définie par un seul circuit avec l'architecture présentée dans la première sous-section de cette section. En observant la figure 1.12, on constate que cette dimension est plus de deux fois inférieure à la dimension transverse de l'ensemble du dispositif. Afin d'atteindre la limite imposée par la dimension transverse du SPIDER (limite de diffraction), il faut recombinaison des signaux issus des différents circuits photoniques. Lockheed-Martin a déposé un brevet portant sur le couplage de plusieurs circuits photoniques entre eux par des fibres optiques [DK14]. Ce brevet permet de dépasser les limitations technologiques imposées aux PICs : géométrie planaire, nombre de voies limités à quelques dizaines pour atteindre la limite de diffraction imposée par la dimension transverse totale du support. Il permet également d'envisager des configurations pupillaires plus exotiques. Enfin, ce brevet évoque le nécessaire dispositif de métrologie nécessaire pour assurer la stabilité de la longueur des bras. En revanche, il ne fait pas état des possibles architectures de recombinaison et de traitement.

#### 1.4.2.2 Circuit photonique SPIDER

Dans l'architecture présentée en début de section, le défi technologique porte sur la réalisation du circuit photonique associé à une ligne de base composée de  $N_p$  sous-pupilles. Deux articles ont été trouvés sur le sujet : le premier, relatif à des travaux menés par une équipe chinoise n'a pas pu être obtenu [Yin+19]. Les avancées les plus récentes de Lockheed-Martin sont présentées dans [Su+18]. Ce paragraphe résume les principes caractéristiques du circuit présenté dans cet article.

Le circuit est réalisé sur une plateforme multicouche de SiN (comme présenté dans la section 1.3). Le caractère multicouche est également destiné à l'intégration d'un nombre accru de fonctions. Cette technologie est bien adaptée au domaine visible. La zone de transparence du SiN est satisfaisante depuis  $\lambda = 400$  nm jusqu'à l'infrarouge. Ses propriétés en terme de contraste d'indice (capacité d'intégration de fonctions et d'atténuation sont bonnes et relativement constantes sur toute la bande visible-proche infrarouge. Elle est maîtrisée en Europe [Rah+17 ; Por+19]. La filière visible est plutôt développée pour les applications biomédicales. On peut citer :

- la ligne pilote PIX4life, initiée dans le cadre d'un projet H2020 [Mas+20],
- la plateforme du SiN du Leti développée pour répondre aux applications de bioanalyse exploitant la bande visible.

Le PIC SPIDER incorpore déphaseurs actifs, MMZ et AWG. En revanche, il n'intègre pas la fonction de détection, assurée dans l'expérience de laboratoire par une matrice de détecteurs sur laquelle est imagée le plan de sortie du

PIC.

La transmission du circuit a été caractérisée en détail. Sa valeur totale est de 15 dB, pertes d'insertion exclues. Les contributions de chaque composant ont été identifiées. Comme attendu les MMZ (3 dB) et les AWG (5 dB) présentent des pertes importantes. Mais compte-tenu de la complexité du circuit les pertes linéaires, les pertes induites par les courbes et les changements de couche ne peuvent pas être négligées. La transmission est donc le problème technologique le plus important à résoudre pour le développement de ces PICs. Ces chiffres sont en retrait par rapport à ceux présentés dans la thèse de Guerber [Gue19] mais cohérents avec des mesures faites sur des PICs SiN réalisés de façon plus routinière dans le contexte des communications optiques. Les courbes de réponse spectrale des AWG sont été mesurées. Le couplage interbande est faible.

Les autres caractéristiques des déphaseurs (sensibilité à la puissance, déphasage maximum et des MMZ (équilibre des voies) ne sont pas indiquées.

La question du chromatisme des déphaseurs (en phase) et des coupleurs n'est pas abordée. Elle est pourtant importante puisque ces composants sont communs à tout le spectre. Les phénomènes physiques généralement mis en œuvre dans les déphaseurs sont achromatiques en chemin optique. Parallèlement, le taux de couplage d'un coupleur est dépendant de la longueur d'onde. Concernant SPIDER, deux hypothèses peuvent être faites : soit la largeur spectrale totale est suffisamment faible pour que les effets spectraux ne dégradent pas significativement la mesure interférométrique sous réserve d'étalonnage, soit les composants du PIC sont achromatiques sans que ce soit précisé. Ce type de composants font l'objet de développements. À titre d'exemple, Guerber présente dans sa thèse un exemple de réalisation de coupleur directionnel stabilisé, c'est-à-dire dont le coefficient de couplage est rendu indépendant de la longueur d'onde. Parallèlement, les astronomes ont développé des déphaseurs fixes achromatiques en phase [Lor+16].

### 1.4.3 . Études chinoises dérivées de l'étude d'un IOSOOT américain

Les chercheurs chinois se sont également intéressés à l'étude américaine SPIDER. Le premier article chinois qui relate de l'étude de SPIDER des américains, à notre connaissance, est celle de Chu [Chu+17] en 2017. L'intérêt était de faire varier la valeur de certains paramètres du système, typiquement l'échantillonnage fréquentiel, la largeur de bande spectrale et la configuration pupillaire, afin de voir l'effet induit sur la reconstruction d'image. Ils insistent surtout sur l'aspect configuration pupillaire pour mener leur démonstration numérique du concept, avec un nombre de pupilles par bras de  $N_p = 26$ , et en densifiant plutôt les basses ou les hautes fréquences d'une part, et d'autre

part en prenant une fréquence sur deux. Cao en 2020 [Cao+20], cette fois-ci avec  $N_p = 30$ , étoffe un peu plus le nombre de configurations pupillaires et compare les performances de chacune après reconstruction. Les configurations pupillaires des différents auteurs sont récapitulés dans le tableau 1.2.

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif des configurations pupillaires, et les bases mesurées associées, des équipes américaines (en violet) et des équipes chinoises. On représente le nombre de PICs et le nombre de pupilles par PIC. Le critère d’évaluation pour chaque méthode est précisé. Le SSIM, ou l’indice de similarité structurelle, défini par [Wan+04] est une métrique qualitative qui mesure la similitude entre l’image de référence et l’image test.

Auteurs	Nombre de pupilles	Nombre de PICs	Bases mesurées par PIC	Critère d’évaluation quantitatif
Kendrick et al. 2013	24	37	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 18, 25	
Chu et al. 2017	26	37	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 1, 3, 5, 7, 9, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	Variance (post-reconstruction)
Liu et al. 2018	12	37		SSIM, PSNR (post-reconstruction)
Yu et al. 2018	10	37	1 fréquence sur 2	PSNR (post-reconstruction)
Yu et al. 2018	4761	1 (3D)		PSNR, MSE (post-reconstruction)
Su et al. 2018	30	37	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 17, 22, 29	
Guo-mian et al. 2019	64	37	1 fréquence sur 2	PSNR (post-reconstruction)
Gao et al. 2019	30	19	3 jeux de bases différents pour 3 longueurs de bras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 17, 22, 29	Largeur de PSF
Cao et al. 2020	30	37	1, 2, 5, 7, 9, 11, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29	PSNR, MSE (post-reconstruction)

### 1.4.3.1 Variations architecturales

Dès 2018, des designs qui diffèrent de celui proposé par les américains pour SPIDER sont proposés. Dans Yu [Yu+18b], une configuration pupillaire est illustrée où les pupilles sont disposées de manière régulière sur une grille carrée (figures 1.13a et 1.13b). La même architecture sera reprise un an plus tard par un autre auteur [Yan+19]. Par la suite, une nouvelle architecture est suggérée par Ding [Din+20b], où les pupilles sont disposées sur un maillage hexagonal avec une configuration pupillaire dans une forme spirale. L’inconvénient de ces architectures est que leur réalisation requiert des PICs 3D, rendant ainsi leurs production réalisable dans une échelle temporelle lointaine. Enfin, toujours dans un contexte d’architecture pour les IOSOOT, en 2022 [Liu+22a] propose une structure en T où sont disposées des pupilles. Ce système effectue ses mesures de manière non simultanée.

### 1.4.3.2 Densification de la couverture fréquentielle

En 2019, Guo-mian [Guo+19] propose une nouvelle architecture à partir de l’étude sur l’influence de l’ajout du nombre de bras interférométriques. Il conclut que lorsque le nombre de bras augmentait mais qu’il reste pair, alors

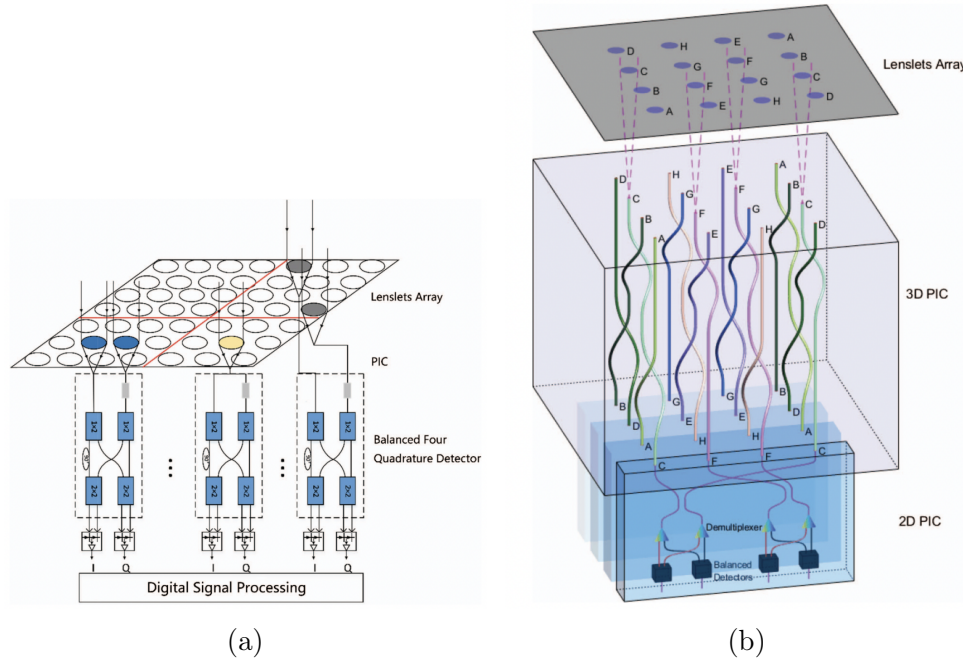


FIGURE 1.13 – Le système d'imagerie présenté par Yu avec l'utilisation de PICs 2D et 3D. Crédit : [Yu+18b].

le PSNR diminuait. Cette grandeur est définie par :

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left( \frac{\max_{\text{image}}^2}{\text{MSE}} \right), \quad (1.13)$$

avec  $\max_{\text{image}}^2$  la valeur maximale de l'image (typiquement égale à 1) et MSE l'erreur quadratique moyenne de l'image, telle que :

$$\text{MSE} = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [I(i, j) - K(i, j)]^2, \quad (1.14)$$

avec  $(m, n)$  le pixel considéré,  $K(i, j)$  la valeur moyenne de l'image et  $I(i, j)$  l'éclairement du pixel considéré. Le résultat auquel il est arrivé est prévisible : un nombre de bras pair induit une redondance dans l'information fréquentielle. Cela est dû au fait que ce nombre de bras, disposés de manière radiale, impose le placement de couples de bras dans la même direction, mesurant ainsi des fréquences identiques. Par ailleurs, lorsque le nombre de bras augmentait mais que celui-ci devenait impair, le PSNR augmentait. L'inconvénient ici devient alors la complexification du système imageur par l'ajout de PICs. Enfin, l'auteur modifie d'autres paramètres tel que le nombre de pupilles par bras interférométrique sans modifier la taille du bras, mais cela résulte en un repliement de champ.

Toujours en 2019, Gao [Gao+19], propose une nouvelle architecture qui a pour but d'intensifier les basses et moyennes fréquences. Dans ce contexte, l'instrument se décompose en bras primaire, secondaire et tertiaire. Les basses et les moyennes fréquences étaient mesurées à la fois bras secondaires et tertiaires, densifiant ainsi la couverture fréquentielle azimutale de l'instrument. Par la suite, en 2021, Gao [Gao+21] propose une amélioration de son système en faisant également varier la taille des pupilles sur chaque bras.

Enfin, une toute autre méthode pour augmenter l'échantillonnage des fréquences spatiales [LWS18] est introduite dès 2018 : le **compressive sensing** (CS) pour le design SPIDER. Par exemple, Liu propose de mesurer 19 bases avec cette technique en utilisant 4 pupilles et 5 guides d'onde avec 1 interféromètre, à l'inverse de SPIDER qui mesurerait 10 bases avec 10 interféromètres. L'instrument de Liu nécessiterait qu'un seul interféromètre car fonctionne selon des états marche-arrêt du guide d'ondes. Cependant, cette technique n'est pas idéale pour des instruments de type snapshot puisque les mesures sont faites de manière séquentielle. Ainsi, le design SPIDER des américains est favorable lorsqu'une scène défilante est observée, tandis que le design décrit par Liu est favorable pour des scènes statiques (en astronomie par exemple). La même année, Yu [Yu+18a] propose de se baser sur le concept SPIDER pour présenter un design à deux modes : un pour la détection et l'autre pour le suivi. La détection se ferait avec un système à grand champ et ensuite, le suivi se fait à plus haute résolution. Le nombre de bases mesurées de 45 pour 10 pupilles suggère soit un système de mesures consécutives, soit un système de mesures redondantes.

## 1.5 . Rappels de photométrie

Dans cette section, on rappelle quelques notions utiles pour la photométrie d'un IOSOOT.

Le flux lumineux, noté  $F$ , désigne la puissance transportée par le rayonnement optique.

L'éclairement d'une surface est défini comme la densité de flux lumineux reçu par élément de cette surface,  $dS$ , et noté  $E$ .

La luminance d'une surface est définie comme la densité de flux lumineux émis par élément de cette surface,  $dS$ , et par élément d'angle solide,  $d\Omega$ , et notée  $L$ .

Lorsqu'on considère la densité d'une de ces trois grandeurs par rapport à

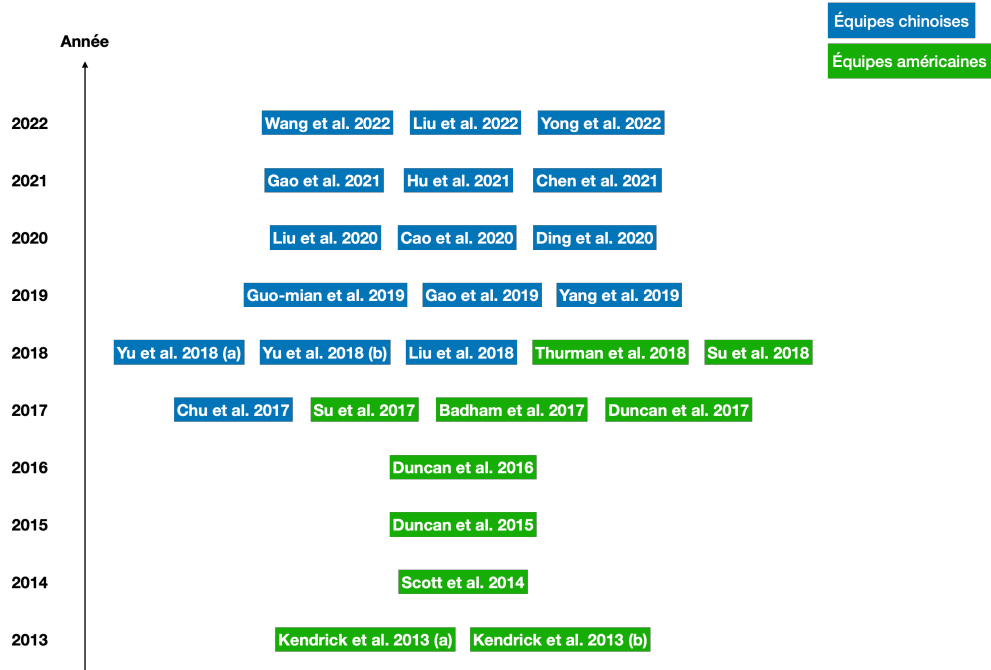


FIGURE 1.14 – Chronologie non exhaustive d'articles sur une étude d'IO-SOOT.

la longueur d'onde du rayonnement, on parle de grandeur spectrale ou spectrique. L'indice  $\lambda$  est ajouté pour la distinguer de la grandeur intégrée sur tout le spectre.

La luminance peut être exprimée à partir du flux lumineux en utilisant l'étendue géométrique. L'étendue géométrique élémentaire associée à deux éléments de surface représentés sur la figure 1.15,  $\overrightarrow{dS_1}$  en  $M_1$  et  $\overrightarrow{dS_2}$  en  $M_2$  s'écrit :

$$d^2G = \frac{dS_1 \cos\theta_1 dS_2 \cos\theta_2}{(M_1 M_2)^2} \quad (1.15)$$

avec  $\theta_1 = (\overrightarrow{dS_1}; \overrightarrow{M_1 M_2})$  et  $\theta_2 = (\overrightarrow{dS_2}; \overrightarrow{M_1 M_2})$ .

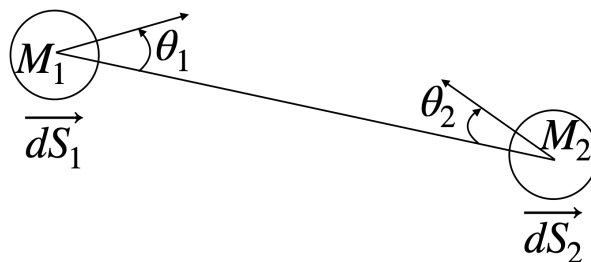


FIGURE 1.15 – Notations utilisées pour calculer l'étendue géométrique.

Le flux lumineux  $F_{12}$  émis par l'élément de surface  $\overrightarrow{dS}_1$  dans l'angle solide sous-tendu par  $\overrightarrow{dS}_2$  vaut  $F_{12} = L_1 d^2G$ .

Ces grandeurs peuvent être exprimées suivant plusieurs systèmes d'unité, selon l'unité utilisée pour mesurer l'énergie, Joule ou nombre de photons. Le tableau 1.3 récapitule les grandeurs et leurs unités.

TABLE 1.3 – Grandeurs utiles et leurs variables associées, ainsi que leurs unités énergétiques et photoniques.

Grandeurs	Variables	Unités	
		Énergétiques	Photoniques
Flux spectral	$F_\lambda$	$\text{W.m}^{-1}$	$\text{s}^{-1}.\text{m}^{-1}$
Luminance spectrale	$L_\lambda$	$\text{W}.\text{sr}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{m}^{-1}$	$\text{s}^{-1}.\text{sr}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{m}^{-1}$
Éclairement spectral	$E_\lambda$	$\text{W}.\text{m}^{-2}.\text{m}^{-1}$	$\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{m}^{-1}$
Angle solide	$d\Omega$		sr
Étendue géométrique	$G$		$\text{sr}.\text{m}^2$

## 1.6 . Ma thèse dans ce contexte

Nous venons d'introduire un concept d'imageur interférométrique optique proposé par Lockheed-Martin au début des années 2010. Dans ce concept, l'ouverture est pavée par des lentilles. Les signaux optiques collectés par ces lentilles sont combinés dans des circuits intégrés photoniques, permettant la mesure simultanée des composantes de Fourier de l'objet observé à plusieurs fréquences spatiales – on parle de visibilités. Ce concept permet d'envisager une réduction très significative de la taille des télescopes optiques, par exemple pour l'observation de la Terre. En effet, la dimension transversale d'un dispositif basé sur ce concept reste proche de celle d'un télescope de même résolution puisque la taille transversale détermine la résolution spatiale. Par contre, sa taille le long de l'axe optique est beaucoup plus petite que celle d'un télescope classique.

Plusieurs équipes travaillent sur le développement d'un tel concept, notamment aux États-Unis et en Chine. Des démonstrations expérimentales partielles ont été réalisées avec des circuits photoniques planaires associés à des lignes de lentilles. Certaines publications abordent partiellement l'analyse des performances de ce dispositif en étudiant par modélisation numérique les performances de certaines architectures préalablement définies. En revanche, elles ne se sont pas attachées à comprendre les limitations introduites par les principales composantes d'un imageur interférométrique, c'est-à-dire :

- la mesure des visibilités,

- la configuration pupillaire : pupilles élémentaires et architecture de la recombinaison interférométrique,
- la reconstruction de l'objet.

L'objectif de cette thèse est de mener une analyse théorique de ce concept. Je me suis tout d'abord attachée à étudier les deux premières composantes : la mesure de visibilité et la configuration pupillaire. L'étape de reconstruction de l'objet a été volontairement mise de côté. En effet, dans son principe, l'imageur interférométrique SPIDER pavant le plan de la pupille, on peut supposer couvert le plan des fréquences spatiales. L'étape de reconstruction n'est ainsi sans doute pas critique pour évaluer les limites théoriques d'un tel concept. Par ailleurs, elle pourrait faire l'objet de toute une thèse en soi. J'ai ensuite appliqué les résultats que j'ai obtenus sur la mesure de visibilité et la configuration pupillaire à l'évaluation des performances d'un dispositif de type SPIDER pour l'observation de la Terre. Je les ai confronté à celles atteintes avec un instrument imageur utilisé dans les mêmes conditions afin de mettre en évidence les avantages et inconvénients d'un imageur interférométrique.

Le chapitre 2 est consacré à la mesure de visibilité. Je définis le modèle de mesure d'un instrument à synthèse d'ouverture, et étudie l'estimation de la fonction de cohérence mutuelle à partir d'un échantillonnage de l'interférogramme. Après avoir établi une expression analytique de l'impact du bruit sur la mesure, je peux comparer les différentes modalités d'échantillonnage.

Le chapitre 3 est dédié aux configurations pupillaires. Après avoir défini un critère quantitatif pour juger de la qualité de la couverture fréquentielle, j'étudie les configurations pupillaires qui maximisent ce critère et identifie les configurations pupillaires optimales identifiées. Je m'appuie sur ce résultat pour proposer différentes architectures pour l'instrument.

Enfin, l'étude des performances d'un imageur interférométrique consacré à l'observation de la Terre est présentée dans le chapitre 4. Cette étude me permet de conclure sur le domaine d'emploi d'un tel dispositif et les points durs à lever pour sa mise en œuvre.





## 2 - Estimation de la fonction de cohérence mutuelle

### 2.1 . Introduction

#### 2.1.1 . Position du problème

La modélisation physique complète d'un IOSOOT de type SPIDER nécessite de modéliser la propagation du bruit :

1. des données brutes vers les fonctions de cohérence mutuelle,
2. si possible, des fonctions de cohérence mutuelle vers l'objet.

On s'intéresse ici au premier point. Comme mentionné au chapitre précédent, et contrairement à un dispositif classique, SPIDER détecte un interférogramme. Ce dernier peut être utilisé pour extraire une grandeur physique clé en interférométrie : la fonction de cohérence mutuelle. Nous allons nous y intéresser dans ce chapitre, et plus précisément, comment le bruit se propage sur cette grandeur.

#### 2.1.2 . Démarche

1. un premier cas simple/classique des moindres carrés,
2. un deuxième cas plus complexe avec le maximum de vraisemblance.

Notre démarche a consisté à :

- poser le modèle de données (section 2.2)
- donner la forme des estimateurs moindres carrés et maximum de vraisemblance appliqués à ce problème (section 2.3),
- évaluer leurs performances en fonction de paramètres de la mesure et en fonction de la variance du bruit selon sa nature.

### 2.2 . Modèle direct

#### 2.2.1 . Écriture du modèle sans bruit et méthodes d'échantillonnage du signal

L'information, la composante de Fourier de l'objet, que cherche à mesurer un interféromètre de type SPIDER, est contenue dans les franges d'interférence telles que représentées sur la figure 2.1. Celles-ci résultent de la combinaison de faisceaux provenant de deux pupilles distantes de  $\mathbf{B}$  et de fréquence spatiale  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  s'expriment, quelle que soit la technique de modulation à  $K$  mesures, de la manière suivante :

$$i_{\text{true}}(u, v, \phi) = \frac{n_{\text{ph}}}{K} [1 + |\gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v) - \phi)], \quad (2.1)$$

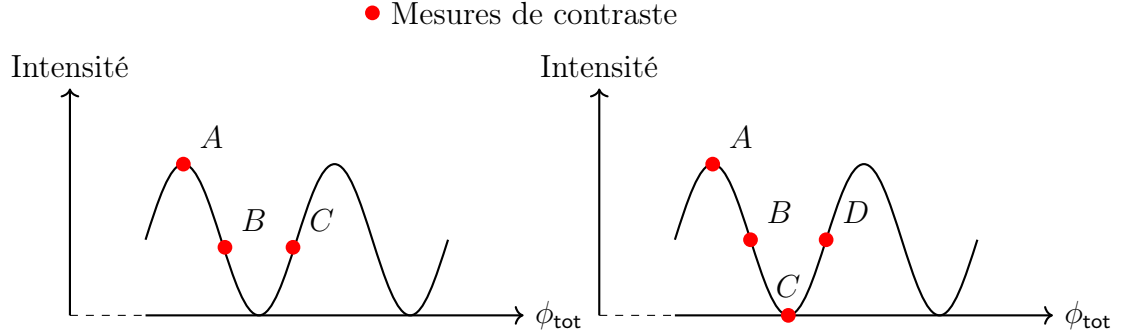


FIGURE 2.1 – Principe des modulations à 3 ou 4 points, avec  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les différentes valeurs d'intensité.

avec  $i_{\text{true}}(u, v, \phi)$  une fonction sinusoïdale de  $\phi$ , de moyenne  $n_{\text{ph}}/K$  et de périodicité  $2\pi$ .

Plus précisément, pour une paire de pupilles, on cherche à extraire de ces franges leur module  $|\gamma(u, v)|$ , et leur position  $\theta(u, v)$ . Ces deux grandeurs, une fois regroupées, forment ce qui est appelé par les interférométristes, la visibilité complexe  $\gamma(u, v)$  exprimée comme :

$$\gamma(u, v) = |\gamma(u, v)|e^{i\theta(u, v)}. \quad (2.2)$$

On définit la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma(u, v)$  de la manière suivante :

$$\Gamma(u, v) = \frac{n_{\text{ph}}}{K}\gamma(u, v), \quad (2.3)$$

Pour accéder à  $\Gamma(u, v)$ , toujours en raisonnant pour une paire de pupilles, il est nécessaire de moduler la phase des franges et d'échantillonner le signal détecté sur strictement plus de 2 mesures par période, limite imposée par le critère de Shannon. Nous pouvons utiliser par exemple 3 mesures  $A$ ,  $B$  et  $C$  avec  $\phi_A = 0$ ,  $\phi_B = 2\pi/3$  et  $\phi_C = 4\pi/3$  [Cre88] ou 4 mesures  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  avec  $\phi_A = 0$ ,  $\phi_B = \pi/2$ ,  $\phi_C = \pi$  et  $\phi_D = 3\pi/2$ , [Wya75; Cre88; Gre84] comme illustré sur la figure 2.1.

La majorité des instruments actuels mesure la phase en échantillonnant le signal sur 4 points, déphasés de  $90^\circ$ . Cette méthode de modulation, appelée *codage ABCD*, a été introduite dès 1977 par [SS77] et il s'agit de la méthode communément employée. En introduisant ces valeurs de déphasage dans l'expression d'intensité définie en 2.1, on a le flux d'intensité mesuré à chaque

quadrature, i.e. :

$$i_{\text{true}}(u, v, \phi_A = 0) = \frac{n_{\text{ph}}}{4} + |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v)), \quad (2.4)$$

$$i_{\text{true}}(u, v, \phi_B = \frac{\pi}{2}) = \frac{n_{\text{ph}}}{4} + |\Gamma(u, v)| \sin(\theta(u, v)), \quad (2.5)$$

$$i_{\text{true}}(u, v, \phi_C = \pi) = \frac{n_{\text{ph}}}{4} - |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v)), \quad (2.6)$$

$$i_{\text{true}}(u, v, \phi_D = \frac{3\pi}{2}) = \frac{n_{\text{ph}}}{4} - |\Gamma(u, v)| \sin(\theta(u, v)). \quad (2.7)$$

avec  $i_{\text{true}}(u, v, \phi_B) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_D) \propto |\Gamma(u, v)| \sin(\theta(u, v))$  et  $i_{\text{true}}(u, v, \phi_A) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_C) \propto |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v))$  les parties respectivement imaginaire et réelle de la grandeur complexe  $\Gamma(u, v)$ .

À partir des quantités d'intensités définies précédemment, et en supposant :

1. la **connaissance des déphasages**,
2. l'**absence totale de bruit**,

on peut introduire un estimateur générique de la phase à partir de combinaisons linéaires des intensités [Mor82; Gre84] d'une paire de télescopes dans le cas de la modulation  $ABCD$  :

$$\widehat{\theta(u, v)} = \tan^{-1} \left( \frac{i_{\text{true}}(u, v, \phi_B) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_D)}{i_{\text{true}}(u, v, \phi_A) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_C)} \right). \quad (2.8)$$

On peut également estimer l'amplitude des franges par :

$$|\widehat{\Gamma(u, v)}| = \sqrt{(i_{\text{true}}(u, v, \phi_B) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_D))^2 + (i_{\text{true}}(u, v, \phi_A) - i_{\text{true}}(u, v, \phi_C))^2}. \quad (2.9)$$

Il existe deux approches différentes pour échantillonner le signal, regroupées dans les figures 2.2b et 2.2a, selon que les mesures soient effectuées de manière simultanée ou non :

1. **Temporel** : Les mesures sont faites de manière *consécutives*. Cette modulation convient pour les instruments dont les contraintes temporelles sont faibles (FINITO du VLTI [Gai+03], CHAMP à CHARA [Ber+06; Ber+08] et le Keck Interferometer [Col+10]). En pratique, l'implantation d'une méthode temporelle délivre deux mesures en opposition de phase par temps de pose. Pour le codage ABCD, [Bli11] a utilisé deux temps de pose, décomposant alors les 4 mesures en 2 temps : les deux premières,  $A$  et  $C$ , sont obtenues durant un temps  $t_0/2$  de manière simultanée. Ensuite, pendant le même temps  $t_0/2$ , les deux autres mesures sont obtenues par un déphasage de  $\pi/2$  d'un des bras. Cela résulte donc par un retard de  $t_0/2$  entre  $A, C$  et  $B, D$ . Cependant, cette méthode induit un biais sur la mesure, qui peut être réduit en augmentant la vitesse de modulation, mais celle-ci reste très limitée du fait du besoin en flux.

2. **Spatiale** : Des déphaseurs fixes introduisent les différentes valeurs de déphasage. Les mesures sont faites de manière *simultanée* [BH00]. Cette modulation convient pour les instruments de type *snapshot*. Selon la thèse de Blind [Bli11], cette modulation est plus performante que la modulation temporelle car elle évite de biaiser la mesure de la phase à cause des variations temporelles sur le flux et la phase. La modulation spatiale bénéficie des développements réalisés depuis les années 2000 notamment grâce à l'avènement des fibres optiques d'abord et ensuite, plus récemment, des circuits photoniques intégrés. Par ailleurs, et selon la thèse de Houairi [Hou09], un inconvénient de cette méthode est la nécessité d'effectuer une calibration prenant en compte les aberrations différentielles provoquées par la mesure des intensités sur des détecteurs différents, provoquant ainsi une différence au niveau des chemins optiques suivis. On retrouve ce genre d'implantation dans PRIMA [Sah+09] par exemple.

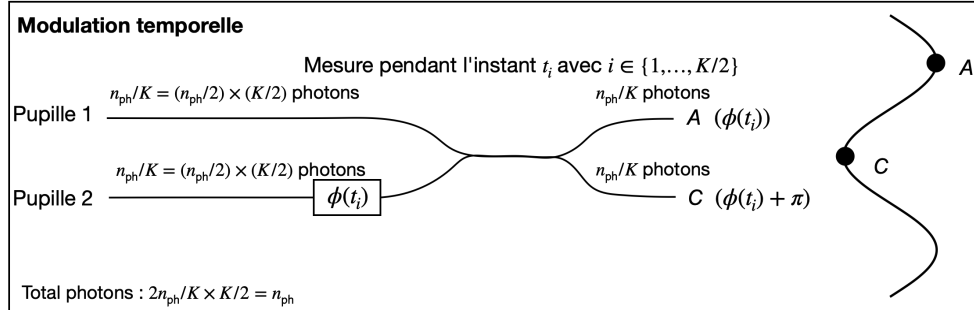
Nous allons maintenant retenir la modulation spatiale. De plus, les estimateurs actuels dans la littérature ne prennent pas en compte le bruit, et utilisent une méthode de MC pour estimer  $\Gamma$ . Dans la suite, on va au delà, notamment en :

- prenant en compte le bruit dans l'estimateur  $\Gamma$ ,
- augmentant le nombre de points de modulation, en ne considérant non plus que  $K = 4$  (le cas classique) mais aussi en considérant  $K \in \{3, 5, 6\}$ . Les déphasages  $\phi_k$  (avec  $k = 1, 2, \dots, K$ ) sont équirépartis dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , avec  $\phi_k = (k - 1)2\pi/K$ ,
- utilisant non plus qu'une méthode des moindres carrés (MC) mais aussi une méthode du maximum de vraisemblance (MV).

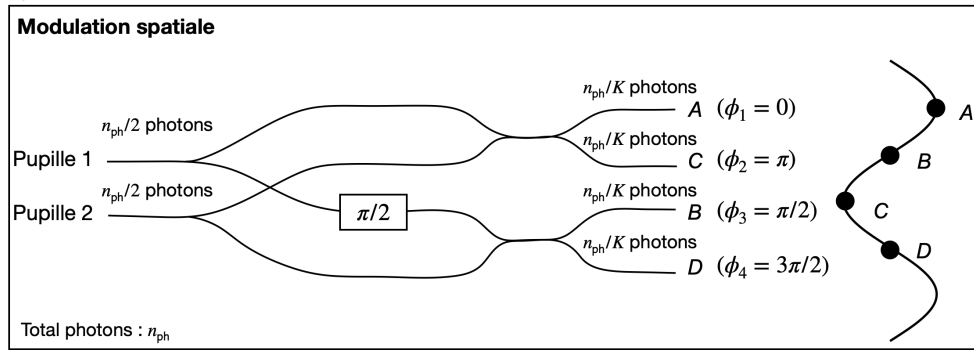
### 2.2.2 . L'écriture du modèle avec les données bruitées avec différentes modulations

Nous avons choisi d'augmenter le nombre de mesures de déphasage et de considérer 3, 4, 5 ou 6 mesures équitablement réparties sur un cercle trigonométrique. Ainsi, on fait varier le nombre de mesures de 3 à 6 toujours avec des espacements de  $120^\circ$  pour 3 mesures,  $90^\circ$  pour 4 mesures et désormais  $72^\circ$  pour 5 mesures et  $60^\circ$  pour 6 mesures. Dans ce qui suit, nous allons écrire le modèle de données pour  $K$  variant de 3 à 6, en prenant en compte le flux fini et le bruit de mesures. Récapitulons :

- $K$  : le nombre de mesures utilisées pour échantillonner les franges, avec :
  - $K = 3$  : la méthode *ABC* avec :
    - $\phi_A = 0$
    - $\phi_B = \frac{2\pi}{3}$
    - $\phi_C = \frac{4\pi}{3}$
  - $K = 4$  : la méthode *ABCD* avec :



(a) **Modulation temporelle** : chaque pupille reçoit ici  $(n_{\text{ph}}/2)/(K/2) = n_{\text{ph}}/K$  photons pendant un instant  $t_i$ . Dans le cas  $K = 4$ , on a 2 instants de mesure :  $t_1$  et  $t_2$ . Le nombre de photons total dans les 2 cas est identique :  $n_{\text{ph}}$ .



(b) **Modulation spatiale** : on est en présence d'un déphaseur fixe représenté par le rectangle. Chaque pupille reçoit ici  $n_{\text{ph}}/2$  photons au total. On représente la recombinaison des faisceaux au sein d'un circuit photonique intégrée durant une modulation  $ABCD$  spatiale. Les faisceaux, injectés à gauche, sont transportés dans des guides d'ondes et passent par plusieurs composants optiques, pour au final produire 4 sorties  $ABCD$ . Chacun des 2 faisceaux initiaux subit une séparation en 2 à la jonction en  $Y$ . Les recombinaisons se font au niveau des coupleurs (ligne continue) avant les 2 sorties en opposition de phase ( $A$  et  $C$  ou  $B$  et  $D$ ). Le déphasage  $\phi_k$  introduit sur la voie du haut est de  $\pi$  est obtenu en jouant sur l'indice optique du guide d'onde et permet alors de créer les différentes quadratures pour  $A$  et  $C$ . La même méthode est utilisée pour la voie du bas.

FIGURE 2.2 – Représentation des différents types de modulation pour les franges d'interférences.

- $\phi_A = 0$
- $\phi_B = \frac{\pi}{2}$
- $\phi_C = \pi$
- $\phi_D = \frac{3\pi}{2}$
- $K = 5$  : la méthode  $ABCDE$  avec :
  - $\phi_A = 0$
  - $\phi_B = \frac{2\pi}{5}$
  - $\phi_C = \frac{4\pi}{5}$
  - $\phi_D = \frac{6\pi}{5}$
  - $\phi_E = \frac{8\pi}{5}$
- $K = 6$  : la méthode  $ABCDEF$  avec :
  - $\phi_A = 0$
  - $\phi_B = \frac{\pi}{3}$
  - $\phi_C = \frac{2\pi}{3}$
  - $\phi_D = \pi$
  - $\phi_E = \frac{4\pi}{3}$
  - $\phi_F = \frac{5\pi}{3}$
- $\phi_k = (k - 1)\pi/K$ , pour  $k \in \{1, \dots, K\}$  la phase de modulation,
- $i_{\text{true}}(u, v, \phi_k)$  : la mesure élémentaire d'intensité associée à la phase  $\phi_k$ ,
- le vecteur de mesures  $\{i_{\text{true}}(u, v, \phi_1), \dots, i_{\text{true}}(u, v, \phi_K)\}$  de taille  $K$  : processus de  $K$  mesures, ou ensemble de mesures,
- la grandeur complexe  $\Gamma$ , estimée à partir du vecteur de mesures  $\{i_{\text{true}}(u, v, \phi_1), \dots, i_{\text{true}}(u, v, \phi_K)\}$ .

On va décrire le problème de manière analytique en estimant le bruit sur la mesure de la fonction de cohérence mutuelle pour les  $ABC$ ,  $ABCD$ ,  $ABCDE$ ,  $ABCDEF$  en présence de *bruit de photons* d'une part, et de *bruit de détecteur* d'autre part.

### 2.2.2.1 Bruit de mesure

La mesure de la grandeur complexe  $\Gamma$  est sujette à du bruit aléatoire. Nous choisissons de nous restreindre à deux types de bruit :

1. bruit de photons : le bruit fondamental associé à la détection des photons. Il suit une statistique de type Poisson.
2. bruit de détecteur : le bruit généré lors de la lecture du signal par les composants électroniques. Il s'agit en bonne approximation d'un bruit gaussien additif.

Regardons de plus près l'expression du signal 2.1 pour une quadrature donnée, en y ajoutant le terme de bruit  $b$ , supposé non biaisé, i.e  $\mathbb{E}(b) = 0$ . On rappelle que les pupilles sont séparées d'une distance  $\mathbf{B}$  permettant alors de mesurer la fréquence spatiale  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})/\lambda$ . L'expression de l'intensité réellement mesurée est l'équation 2.1 avec le bruit  $b(u, v, k)$ , soit :

$$i(u, v, k) = i_{\text{true}}(u, v, k) + b(u, v, k), \quad (2.10)$$

avec :

$$i_{\text{true}}(u, v, k) = \frac{n_{\text{ph}}}{K} + |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v) - \phi_k). \quad (2.11)$$

le signal brut sans bruit, et :

- $n_{\text{ph}}$  la quantité de photons total reçue sur les deux pupilles et pour toutes les quadratures  $K$ ,
- $\phi_k$  est le déphasage introduit,
- $\theta(u, v)$  la phase de la source.

Nous pouvons aussi ré-écrire l'expression 2.11 sous la forme développée suivante :

$$i_{\text{true}}(u, v, k) = \frac{n_{\text{ph}}}{K} + |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v)) \cos(\phi_k) + |\Gamma(u, v)| \sin(\theta(u, v)) \sin(\phi_k). \quad (2.12)$$

Pour avoir un modèle *linéaire* et *simplifier l'inversion* de notre modèle de données, nous choisissons d'exprimer l'équation 2.12 sous la forme suivante :

$$i_{\text{true}}(u, v, k) = a_0(u, v) + a_1(u, v) \cos(\phi_k) + a_2(u, v) \sin(\phi_k), \quad (2.13)$$

avec :

$$\begin{cases} a_0(u, v) &= \frac{n_{\text{ph}}}{K}, \\ a_1(u, v) &= |\Gamma(u, v)| \cos(\theta(u, v)), \\ a_2(u, v) &= |\Gamma(u, v)| \sin(\theta(u, v)). \end{cases} \quad (2.14)$$

Une fois les paramètres  $(a_0, a_1, a_2)$  estimés, on accède aisément à  $\Gamma(u, v)$  et à  $\gamma(u, v)$ .

### 2.2.3 . Formulation matricielle du problème direct

Le but de cette partie est donc d'estimer la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma(u, v)$  (problème linéaire) en estimant  $a_0(u, v)$ , et les parties réelles  $a_1(u, v)$  et imaginaires  $a_2(u, v)$  tout en tenant compte des caractéristiques du système. Nous allons extraire ces informations directement du signal de franges et raisonner sur l'ensemble des mesures d'intensités  $\{i(u, v, 1), \dots, i(u, v, K)\}$  en les



concaténant dans un vecteur de mesures qu'on appellera  $\mathbf{i}$  dans la suite. Ce vecteur s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{i} = \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \cos \phi_1 + a_2 \sin \phi_1 + b_1 \\ a_0 + a_1 \cos \phi_2 + a_2 \sin \phi_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 \cos \phi_K + a_2 \sin \phi_K + b_K \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

avec  $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{K,3}(\mathbb{R})$  la matrice de mesures,  $\mathbf{a}$  le vecteur des paramètres inconnus de taille 3 de la fonction de cohérence mutuelle et  $\mathbf{b}$  le vecteur de la contribution du bruit de taille  $K$ . Plus précisément :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_K & \sin \phi_K \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Les sections suivantes sont consacrées à l'utilisation de deux estimateurs différents mentionnés à l'introduction de ce chapitre :

- l'estimateur des moindres carrés,
- l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Nous allons évaluer leur performance et la façon dont le bruit de photons et de détecteur présents dans les données brutes se propage dans les données de visibilité. Finalement, nous cherchons à identifier le meilleur estimateur possible et étudier ses performances en fonction de différentes valeurs de  $K$  et de la nature du bruit.

### 2.3 . Estimateurs moindres carrés et maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'estimation des paramètres de la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  par moindres carrés et maximum de vraisemblance. Nous rappelons que notre modèle de données s'exprime sous la forme  $\mathbf{i} = \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , avec  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbb{E}(\mathbf{i})$ , le vecteur aléatoire décrivant le bruit

sur la mesure. Ses composantes,  $b_k$ , centrées, sont supposées indépendantes. La matrice de covariance du bruit,  $\mathbf{C}_b = \mathbb{E}(\mathbf{b}\mathbf{b}^\top)$ , est une matrice carrée diagonale de dimension 3. Ses termes diagonaux sont notées  $\sigma_k^2$ .

### 2.3.1 . Estimateur moindres carrés

On se focalise dans cette section sur l'estimation des paramètres  $\mathbf{a}$  à partir des données  $\mathbf{i}$  et du bruit  $\mathbf{b}$ . Cette méthode consiste à rechercher  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}}$  qui minimise l'écart, en moyenne quadratique, entre les données  $\mathbf{i}$  et le modèle de données  $\mathbf{M}\mathbf{a}$  [Mug08] :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{i} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2, \quad (2.20)$$

où  $\operatorname{argmin}$  est l'argument du minimum et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Notre modèle, donné par l'équation 2.15, étant linéaire, admet la solution analytique obtenue en annulant le gradient du critère 2.20 :

$$\mathbf{M}^\top \mathbf{M} \hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} = \mathbf{M}^\top \mathbf{i}. \quad (2.21)$$

Nous utilisons le résultat connu [Gre84] pour la solution des moindres carrés, nous permettant ainsi d'accéder aux paramètres de la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{i} \quad (2.22)$$

On appelle  $\mathbf{D}_{\text{MC}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top$  la matrice de démodulation pour les moindres carrés dans la suite. Nous obtenons, pour la matrice de covariance du bruit :

$$\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} - \mathbf{a})^\top] = (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b ((\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top)^\top \quad (2.23)$$

En particulier, dans le cas où nous avons un bruit homogène de variance  $\sigma_k^2$ , l'expression 2.23 se simplifie et devient :

$$\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}}_{\text{MC}} - \mathbf{a})^\top] = \sigma_k^2 (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \quad (2.24)$$

Ainsi, nous accédons à la matrice de covariance du bruit dont les coefficients diagonaux représentent la variance de l'erreur sur les paramètres de la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$ , i.e.  $(\sigma_{a_0}^2, \sigma_{a_1}^2, \sigma_{a_2}^2)$ . Le paragraphe suivant sera consacré au calcul de ces mêmes coefficients, mais par méthode du maximum de vraisemblance.

### 2.3.2 . Estimateur maximum de vraisemblance

Hormis la possibilité de calculer la solution de manière analytique, rien ne justifie le choix d'une mesure quadratique de la différence entre les données  $\mathbf{i}$  et le modèle de données  $\mathbf{M}\mathbf{a}$  dans la méthode des moindres carrés. De plus, cette méthode ne tire pas parti des connaissances possibles sur les propriétés

statistiques du bruit. Cependant, cette information sur le bruit permet d'interpréter la méthode des moindres carrés et surtout de l'étendre. De plus, elle permet de minimiser l'amplification du bruit. On trouve alors l'intérêt d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance, qui remplit ces critères.

Soit  $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}}$  l'objet qui maximise  $p(\mathbf{i}|\mathbf{a})$  une fonction de  $\mathbf{a}$ , appelée la *vraisemblance des données*, et rendant les données effectivement observées les plus probables :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{i}|\mathbf{a}). \quad (2.25)$$

Nous supposons dans la suite qu'on se place dans l'un des cas suivants :

1. Soit en présence de très faible flux, auquel cas on a un bruit de détecteur prépondérant. On approxime alors le bruit par une loi gaussienne.
2. Soit en présence d'un fort flux, auquel cas on a un bruit de photons prépondérant. On suppose que le flux de chaque mesure est assez fort (au moins une dizaine de photo-électrons typiquement) pour pouvoir raisonnablement approximer la loi du bruit par une loi gaussienne.

L'estimée  $\hat{\mathbf{a}}$  de  $\mathbf{a}$ , par maximum de vraisemblance, est identique dans les deux cas présentés ci-dessus, et vaut :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} = [(\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1}] \mathbf{i}. \quad (2.26)$$

Ici, la matrice de démodulation est  $\mathbf{D}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1}$ .

Connaissant le modèle de données  $\mathbf{i} = \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , et en utilisant l'expression de l'équation 2.26, l'erreur sur l'estimation de  $\mathbf{a}$  vaut :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} - \mathbf{a} &= [(\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1}] (\mathbf{Y}\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{a} - \mathbf{a} + (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'estimateur est donc non biaisé. La matrice de covariance du bruit dans l'estimée de  $\mathbf{a}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}\mathbf{V}} - \mathbf{a})^\top] &= (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{C}_b (\mathbf{C}_b^{-1})^\top \mathbf{M} ((\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1})^\top \\ &= (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1} \\ &= (\mathbf{M}^\top \mathbf{C}_b^{-1} \mathbf{M})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

À nouveau, si on considère un bruit homogène de variance  $\sigma_k^2$ , alors l'expression 2.28 est exactement le critère des moindres carrés de l'équation 2.24 du paragraphe précédent. Ainsi, les moindres carrés peuvent être interprétés comme un maximum de vraisemblance lorsque le bruit est un bruit blanc gaussien homogène. À l'inverse, si la loi de bruit est connue mais différente, le maximum

de vraisemblance permet de prendre en compte cette connaissance du bruit et donc de généraliser la méthode des moindres carrés. Enfin, l'estimation de  $(\hat{a}_{0MV}, \hat{a}_{1MV}, \hat{a}_{2MV})$  par MV permet, par invariance de l'estimateur MV, d'accéder directement à l'estimation de  $\hat{\Gamma}$  et puisque  $\hat{\gamma}_{MV} = \frac{\hat{a}_{1MV} + \hat{a}_{2MV}}{\hat{a}_{0MV}}$  alors on accède également à la visibilité complexe par MV.

## 2.4 . Évaluation de la propagation du bruit

Cette section est consacrée à la détermination des matrices de covariance du bruit associées à l'estimation des caractéristiques de l'interférogramme par méthode de moindres carrés (équation 2.23) et par méthode de maximum de vraisemblance (équation 2.28). Dans le paragraphe précédent, on a donné les solutions matricielles de ces deux cas, ici on s'occupera de les expliciter en faisant varier :

- la nature du bruit,
- la méthode de modulation.

À partir des coefficients diagonaux des matrices de covariance du bruit dans ces différents cas, on explicitera la variance du bruit sur la fonction de cohérence mutuelle,  $\sigma_{\Gamma}^2$ , de manière analytique dans le but d'évaluer la performance des différents estimateurs.

### 2.4.1 . Bruit sur l'estimée des paramètres de la fonction de cohérence mutuelle

L'erreur quadratique sur la mesure de la fonction de cohérence mutuelle peut se décomposer en la somme de deux termes :

$$\sigma_k^2 = i_{\text{true},k} + \sigma_d^2. \quad (2.29)$$

où :

1.  $\sigma_d^2$  est la variance du bruit de détecteur gaussien,
2.  $i_{\text{true},k} = a_0 + a_1 \cos(\phi_k) + a_2 \sin(\phi_k)$  (équation 2.13) est la variance du bruit de photon, différent pour chaque quadrature  $k$ .

Dans la suite, nous allons nous placer soit dans un cas où le bruit de détecteur est prépondérant, i.e.  $\sigma_k^2 = \sigma_d^2$ , soit dans le cas où le bruit de photons est prépondérant, i.e.  $\sigma_k^2 = i_{\text{true},k}$ . Ainsi, nous allons évaluer la performance des estimateurs de maximum de vraisemblance et moindres carrés dans les deux cas suivants :

- le cas d'un bruit de détecteur de variance  $\sigma_d^2$  (étude valable également dans le cas d'un bruit homogène  $\sigma_b^2$  quelconque),
- le cas d'un bruit de photon de variance  $i_{\text{true},k}$ .

Additionnellement, pour chaque estimateur et chaque scénario du bruit, nous allons faire varier le nombre de mesures de modulation  $K$  introduits ( $K = 3, 4, 5, 6$ ). Pour résumer, nous aurons 2 (estimateurs)  $\times$  2 (natures de bruit)  $\times$  4 (méthodes de modulation) = 16 expressions analytiques de variances du bruit de la fonction de cohérence mutuelle à comparer.

#### 2.4.2 . Cas d'un bruit homogène prépondérant : bruit de détecteur et bruit de photons à faible contraste

Commençons par le cas où nous sommes en présence d'un bruit homogène de variance  $\sigma_k^2 = \sigma_b^2$ . C'est le cas d'un bruit de détecteur de variance  $\sigma_b^2 = \sigma_d^2$ , ou d'un bruit de photons dans un régime à faible contraste. Dans ce deuxième cas, nous sommes en présence d'une visibilité faible ( $|\gamma| \ll 1$ ), auquel cas l'expression de  $i_{\text{true},k}$  devient identique pour tout  $k$ . Autrement dit,  $\sigma_b^2 = i_{\text{true},k} = i_{\text{true}} = a_0$ .

La matrice du bruit, diagonale, devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b &= \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2) \\ &= \sigma_b^2 \mathbf{I}_K. \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'équation 2.28 devient alors :

$$\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^\top] = \sigma_b^2 (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \quad (2.31)$$

Dans ce cas là, nous obtenons pour les deux estimateurs les matrices de démodulation et de covariance suivantes, en faisant varier le nombre de mesures de modulation introduits :

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\text{K=3}} = \mathbf{D}_{\text{MV}}^{\text{K=3}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\text{K=4}} = \mathbf{D}_{\text{MV}}^{\text{K=4}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\text{K=5}} = \mathbf{D}_{\text{MV}}^{\text{K=5}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{-\sqrt{5}-1}{10} & \frac{\sqrt{5}-1}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{10} & \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{10} & \frac{-\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{10} & \frac{-\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{10} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\text{K=6}} = \mathbf{D}_{\text{MV}}^{\text{K=6}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Quant aux matrices de covariance du bruit, nous avons :

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=3} = \mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=3} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_b^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_b^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=4} = \mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=4} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_b^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_b^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_b^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=5} = \mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=5} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_b^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_b^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_b^2}{5} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_b^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=6} = \mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=6} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_d^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_d^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_d^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_d^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les solutions MC et MV sont alors équivalentes dans le cas où nous sommes en présence d'un bruit de variance  $\sigma_b^2$ . De plus, puisque les matrices de covariance sont diagonales, le bruit est considéré comme blanc.

### 2.4.3 . Cas d'un bruit inhomogène prépondérant : bruit de photons dans un régime à fort contraste

Dans le deuxième cas, lorsqu'on est en présence d'un fort contraste ( $|\gamma| \neq 0$ ), la matrice du bruit est plus compliquée car chaque mesure de quadrature est différente. La variance change alors à son tour pour chaque  $i_{\text{true},k}$ . La solution MV diffère alors de celle de MC. La matrice de bruit dans 2.28 devient alors :

$$\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^\top] = \left( \mathbf{M}^\top \text{diag} \left( \frac{1}{i_{\text{true},1}}, \frac{1}{i_{\text{true},2}}, \dots, \frac{1}{i_{\text{true},K}} \right) \mathbf{M} \right)^{-1} \quad (2.40)$$

avec :

$$\begin{cases} i_{\text{true},1} &= \frac{n_{\text{ph}}}{K} + |\Gamma| \cos(\theta) \cos(\phi_1) + |\Gamma| \sin(\theta) \sin(\phi_1), \\ i_{\text{true},2} &= \frac{n_{\text{ph}}}{K} + |\Gamma| \cos(\theta) \cos(\phi_2) + |\Gamma| \sin(\theta) \sin(\phi_2), \\ &\vdots \\ i_{\text{true},K} &= \frac{n_{\text{ph}}}{K} + |\Gamma| \cos(\theta) \cos(\phi_K) + |\Gamma| \sin(\theta) \sin(\phi_K), \end{cases} \quad (2.41)$$

en utilisant l'expression 2.12.

La difficulté du problème nous dirige alors vers un outil de calcul symbolique pratique dans ce cas : la librairie `SymPy` pour Python, une alternative *open source* à Mathematica.

Ainsi, sous différents jeux d'hypothèses et grâce à cet outil, nous accédons aux expressions analytiques de chaque coefficient de la matrice de covariance

du bruit. Plus précisément, dans le cas d'un bruit de photons prépondérant, nous obtenons les matrices de démodulation suivantes :

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=3} = \mathbf{D}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{D}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2-|\gamma|\cos(\theta)}{4} & \frac{|\gamma|\cos(\theta)}{4} & \frac{-2-|\gamma|\cos(\theta)}{4} & \frac{|\gamma|\cos(\theta)}{4} \\ \frac{|\gamma|\sin(\theta)}{4} & \frac{2-|\gamma|\sin(\theta)}{4} & \frac{|\gamma|\sin(\theta)}{4} & \frac{-2-|\gamma|\sin(\theta)}{4} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

Les matrices de démodulation  $\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=5}$  et  $\mathbf{D}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=6}$  sont identiques à celles présentées dans la section 2.4.2. Quant aux matrices de covariance, et toujours avec l'outil *SymPy*, nous avons :

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=3} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{9} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}(|\gamma|\cos(\theta)+2)}{9} & -\frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} & -\frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}(-|\gamma|\cos(\theta)+2)}{9} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=3} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{9} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}(|\gamma|\cos(\theta)+2)}{9} & -\frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} & -\frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{9} & \frac{n_{\text{ph}}(-|\gamma|\cos(\theta)+2)}{9} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=4} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{16} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}}{8} & 0 \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{16} & 0 & \frac{n_{\text{ph}}}{8} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=4} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{16} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}(-|\gamma|^2\cos^2(\theta)+2)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|^2\sin(2\theta)}{16} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{16} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|^2\sin(2\theta)}{32} & \frac{n_{\text{ph}}(-|\gamma|^2\sin^2(\theta)+2)}{16} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=5} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{25} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{25} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{25} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{25} & \frac{2n_{\text{ph}}}{25} & 0 \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{25} & 0 & \frac{2n_{\text{ph}}}{25} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{C}_{\text{MC}}^{\mathbf{K}=6} = \begin{bmatrix} \frac{n_{\text{ph}}}{36} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{36} & \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{36} \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\cos(\theta)}{36} & \frac{n_{\text{ph}}}{18} & 0 \\ \frac{n_{\text{ph}}|\gamma|\sin(\theta)}{36} & 0 & \frac{n_{\text{ph}}}{18} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Les matrices  $\mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=5}$  et  $\mathbf{C}_{\text{MV}}^{\mathbf{K}=6}$ , trop longues, ne sont pas représentées ici, mais peuvent être retrouvées en annexe.

TABLE 2.1 – Tableau de la variance analytique du bruit sur  $\Gamma$ , calculée à partir de la somme des deux derniers coefficients diagonaux de la matrice de covariance du bruit pour chacun des 16 cas mentionnés : les estimateurs moindres carrés et maximum de vraisemblance, les méthodes de modulation ( $K \in \{3, 4, 5, 6\}$ ) et les deux natures de bruit (inhomogène avec  $\sigma_k^2 = i_{\text{true},k}$ , homogène avec  $\sigma_k^2 = \sigma_b^2$  valant soit  $\sigma_d^2$  pour un bruit de détecteur, ou  $n_{\text{ph}}/K$  pour un bruit de photons constant.).

Méthode de modulation	Bruit inhomogène		Bruit homogène	
	$\mathbb{V}_{\text{MV}}(\Gamma)$	$\mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$	$\mathbb{V}_{\text{MV}}(\Gamma)$	$\mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$
$K = 3$	$\frac{4n_{\text{ph}}}{9}$	$\frac{4n_{\text{ph}}}{9}$	$\frac{4\sigma_b^2}{3}$	$\frac{4\sigma_b^2}{3}$
$K = 4$	$\frac{n_{\text{ph}}(4- \gamma ^2)}{16}$	$\frac{n_{\text{ph}}}{4}$	$\sigma_b^2$	$\sigma_b^2$
$K = 5$	$\frac{8n_{\text{ph}}(2- \gamma ^2)}{25(4- \gamma ^2)}$	$\frac{4n_{\text{ph}}}{25}$	$\frac{4\sigma_b^2}{5}$	$\frac{4\sigma_b^2}{5}$
$K = 6$	$\frac{n_{\text{ph}}(16-12 \gamma ^2+ \gamma ^4)}{36(4-2 \gamma ^2)}$	$\frac{n_{\text{ph}}}{9}$	$\frac{2\sigma_b^2}{3}$	$\frac{2\sigma_b^2}{3}$

#### 2.4.4 . Variance de la fonction de cohérence mutuelle $\Gamma$

La métrique que nous allons utiliser pour définir la qualité de notre estimation est la variance de la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  :

$$\mathbb{V}(\Gamma) \triangleq \mathbb{E}(|\Gamma - \mathbb{E}(\Gamma)|^2) = \mathbb{E}(|\Gamma|^2) - |\mathbb{E}(\Gamma)|^2, \quad (2.52)$$

et l'on montre aisément que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\Gamma) &= \mathbb{E}(|\Gamma|^2) - |\mathbb{E}(\Gamma)|^2, \\ &= \mathbb{V}(\Re(\Gamma)) + \mathbb{V}(\Im(\Gamma)), \\ &= \mathbb{V}(a_1) + \mathbb{V}(a_2), \end{aligned} \quad (2.53)$$

soit les deux derniers coefficients diagonaux des matrices de covariance du bruit qu'on a défini précédemment. Si de plus, comme on peut raisonnablement le supposer dans cette étude,  $\Re(\Gamma)$  et  $\Im(\Gamma)$  sont deux variables gaussiennes indépendantes de même variance, alors  $\Gamma$  est une fonction de cohérence mutuelle gaussienne circulaire (loi invariante par toute rotation). Ainsi, nous accédons à l'expression analytique de la variance du bruit sur la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  en sommant les variances de sa partie réelle et imaginaire. Nous représentons cette quantité dans le tableau 2.1 pour tous les cas étudiés.

#### 2.4.5 . Résultats

À partir du tableau 2.1, on remarque que :

- la variance de  $\Gamma$  est identique lorsqu'on est en présence d'un bruit homogène pour les estimateurs MV et MC. C'est le cas lorsqu'on est en présence d'un bruit de photons prépondérant avec une variance égale au signal à faible contraste (i.e.  $\sigma_b^2 = a_0 = n_{\text{ph}}/K$ ) ou lorsqu'on est en présence d'un bruit de détecteur prépondérant de variance  $\sigma_b^2 = \sigma_d^2$ .



- la variance de l'erreur sur la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  est identique dans le cas d'un bruit inhomogène de photons dans un régime à fort contraste pour l'estimateur MC et dans le cas d'un bruit homogène avec  $\sigma_b^2 = n_{\text{ph}}/K$  pour  $\mathbb{V}_{\text{MV}}(\Gamma)$  et  $\mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$ .

Toutes ces expressions analytiques ont été validé numériquement.

Nous pouvons alors distinguer trois différentes situations à la vue de ce tableau :

- **Situation 1** ( $\sigma_\Gamma^2$ ) : Supposons qu'on soit en présence d'un bruit de détecteur homogène de variance  $\sigma_d^2$ . Alors utiliser  $K = 4$  plutôt que  $K = 3$  fait gagner 25% tandis que utiliser  $K = 6$  produirait un gain de 34% par rapport à  $K = 4$ . Pour  $K = 5$ , le gain est de 20%. Ces résultats sont valables quel que soit l'estimateur considéré (puisque  $\mathbb{V}_{\text{MV}}(\Gamma) = \mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$  dans ce jeu d'hypothèses). De plus, de manière plus globale, la variance de la fonction de cohérence mutuelle décroît en  $1/K$ , donc plus le nombre de mesures  $K$  augmente, plus l'estimation de la fonction de cohérence mutuelle est précise.
- **Situation 2** ( $\sigma_\Gamma^2$ ) : Nous nous plaçons dans le cas d'un bruit homogène de photons : lorsque on est dans un régime à faible contraste, i.e.  $|\gamma| = 0$ . La variance du bruit devient alors  $\sigma_b^2 = n_{\text{ph}}/K$ . Ainsi, on a un gain de 43% en se basant sur la méthode classique  $K = 4$  plutôt que la modulation  $K = 3$ . En revanche, nous obtenons un gain de 56% en considérant  $K = 6$  plutôt que  $K = 4$ , ou encore un gain de 36% pour  $K = 5$  plutôt que  $K = 4$ . Nous obtenons les mêmes conclusions pour les trois cas suivants :
  - $\mathbb{V}_{\text{MV}}(\Gamma)$  pour un bruit homogène de photons de variance  $n_{\text{ph}}/K$ ,
  - $\mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$  pour un bruit homogène de photons de variance  $n_{\text{ph}}/K$ ,
  - $\mathbb{V}_{\text{MC}}(\Gamma)$  pour un bruit inhomogène de photons de variance  $i_{\text{true},k}$ .

Par ailleurs, et contrairement à la **Situation 1**, considérer  $\sigma_b^2 = n_{\text{ph}}/K$  introduit une décroissance supplémentaire de la variance de  $\Gamma$  en  $1/K$ . Ainsi, la variance décroît en  $1/K^2$  : le gain à faire plus de mesures est plus significatif que dans le premier cas.

- **Situation 3** ( $\sigma_\Gamma^2$ ) : Enfin, le dernier cas concerne un bruit de photons inhomogène avec une variance de  $\sigma_k^2 = i_{\text{true},k}$ , i.e. lorsque  $|\gamma| \neq 0$ . Supposons qu'on soit à contraste maximal, i.e.  $|\gamma| = 1$ . Alors utiliser  $K = 4$  au lieu de  $K = 3$  mène à un gain de 57%, tandis que l'utilisation de  $K = 6$  nous permet d'obtenir un gain de 63% par rapport à la modulation classique  $K = 4$ , ou de 43% avec  $K = 5$  au lieu de  $K = 4$ .

Dans les trois situations ci-dessus, on converge vers la même conclusion : l'utilisation de  $K = 6$  est plus optimale que l'utilisation du cas classique  $K = 4$ . De plus, la méthode du maximum de vraisemblance apporte un gain supplémentaire puisqu'elle permet l'obtention des variances les plus petites dans le

cas d'un bruit de photon inhomogène.

Par ailleurs, et *in fine*, on s'intéresse non pas seulement au bruit sur  $\Gamma$  mais plutôt au rapport signal-à-bruit (SNR) de cette dernière. Dès lors, est-ce qu'on arrive aux mêmes conclusions pour les différentes situations exposées précédemment ?

Le SNR pour une fréquence  $f$  s'exprime de la manière suivante :

$$SNR_{\Gamma(f)} = \frac{|\Gamma(f)|^2}{\sigma_{\Gamma(f)}^2} \quad (2.54)$$

soit, d'après l'équation de la fonction de cohérence mutuelle 2.3 :

$$SNR_{\Gamma(f)} = \frac{(n_{\text{ph}}(f)/K)^2 |\gamma(f)|^2}{\sigma_{\Gamma(f)}^2} \quad (2.55)$$

Reprenons les cas où nous sommes en présence d'un signal à faible contraste, dans les **Situation 1** et **Situation 2** exposées plus tôt dans ce paragraphe, et analysons les en raisonnant sur le SNR.

- **Situation 1 (SNR)** : Si on considère un bruit de détecteur homogène, alors  $\sigma_{\Gamma}^2$  de l'équation 2.55 est remplacée par  $4\sigma_d^2/K$ . On a alors un SNR qui varie à nouveau en fonction du nombre de mesures  $K$ , en augmentant proportionnellement à  $K$ . Cette fois-ci, et à l'inverse de la **Situation 1** sur la variance de  $\Gamma$ , il faut limiter le nombre de mesures à faire, i.e. prendre  $K$  petit.
- **Situation 2 (SNR)** : Ici, on considère un bruit homogène de photons. Le SNR varie alors en  $(n_{\text{ph}}/K)^2/(4n_{\text{ph}}/K^2)$ , i.e. indépendamment du nombre de mesures  $K$ . Ce résultat est relativement rassurant car ceci montre que le SNR sur  $\Gamma$  ne dépend pas de la manière dont on découpe les photons.

En conclusion, lorsqu'on est en présence d'un bruit de détecteur prépondérant et d'un signal à faible contraste, alors il faut privilégier le moins de mesures possibles. En revanche, lorsqu'on est en présence d'un bruit de photons, toujours à faible contraste, le nombre  $K$  n'importe pas. Ces conclusions sont à pondérer pour un régime à fort contraste.

## 2.5 . Conclusion

Cette partie présente une synthèse des performances des estimateurs MV et MC selon deux natures de bruit ainsi que différentes méthodes de modulation pour un IOSOOT. L'étude théorique exhaustive a été menée grâce à un formalisme analytique dédié à SPIDER, mais il n'empêche qu'il peut être utilisé dans n'importe quel autre contexte : typiquement pour l'astronomie où les

résultats sur la variance de  $\Gamma$  peuvent être utiles dans le cas d'un fringe sensor, notamment lorsque le signal est à fort contraste. De plus, il peut être appliqué pour n'importe quel nombre de  $\phi_k$  introduit. Une étude parallèle sur la phase a aussi été menée pour déterminer la variance du bruit. Même si les méthodes présentées dans cette section peuvent paraître encourageantes et plus optimales en théorie que celles proposées dans la littérature aujourd'hui, en pratique il est compliqué aujourd'hui de créer des circuits photoniques intégrés à plus de 4 valeurs de déphasage.

En termes d'objet observé, on peut supposer que :

- en présence d'un bruit inhomogène et une visibilité élevée, on observe les basses fréquences de l'objet,
- en revanche, quand on considère des faibles contrastes et donc un bruit homogène, on observe les hautes fréquences de l'objet.

On rencontre alors des limites concernant ce deuxième point. Le chapitre suivant se concentrera sur cet aspect et se focalisera sur l'établissement du lien entre les fréquences de l'objet observé et la fonction de cohérence mutuelle.

## 3 - Optimisation de la couverture fréquentielle d'un réseau de pupilles

### 3.1 . Introduction

#### 3.1.1 . Position du problème

Le principe d'un IOSOOT est de mesurer plusieurs visibilités complexe issues de plusieurs bases différentes, et d'échantillonner la transformée de Fourier de la source observée. La liste des fréquences obtenues à partir des combinaisons des pupilles, ou la couverture fréquentielle, définit la fonction de transfert optique de l'instrument. Celle-ci, en l'absence de mesure pour une fréquence donnée, vaut 0. La qualité de reconstruction de l'objet dépend fortement de l'ensemble des fréquences spatiales mesurées. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'optimisation de la couverture fréquentielle d'un tel instrument.

#### 3.1.2 . Hypothèses de départ pour l'optimisation de la couverture fréquentielle

Rappelons le design conceptuel de SPIDER, dont le concept a déjà été introduit dans le premier chapitre. L'instrument comprend de nombreuses pupilles disposées de manière radiale sur des rayons, chaque rayon étant un réseau de pupilles 1D. Le nombre de rayons est toujours impair pour éviter la redondance fréquentielle. Les pupilles de ces rayons forment différentes bases interférométriques (paires de pupilles) et couplent la lumière dans un circuit intégré photonique (PIC) bidimensionnel. Un PIC utilise un réseau de guides d'ondes, une séparation spectrale et des composants de combinaison de faisceaux pour réaliser la transmission, l'interférence et la mesure de la lumière, que nous avons détaillé dans la section 1.3. Différentes paires de pupilles correspondent à plusieurs interféromètres miniature de type MMZ. Le SPIDER échantillonne un objet imagé dans le domaine de Fourier, suivie d'une reconstruction de l'objet. Dans la figure 3.1, nous montrons un exemple d'un tel type d'instrument [Bad+17b], avec un nombre de bras de 37, et un nombre de pupilles de 30 dans chaque bras.

Comme indiqué dans le titre de la thèse, et Nous rappelons qu'on s'intéresse à une scène étendue pour laquelle on ne possède pas d'*a priori*. On a choisi d'utiliser un critère dans le domaine de Fourier et en particulier celui défini par Harvey et Rockwell en 1988 [HR88], qui s'appelle la *practical resolution limit* (PRL). Lorsque les mesures possibles sont toutes de la forme  $k\Delta f$  avec  $k$  entier, on définit le PRL pour un ensemble de mesures comme étant la dernière fréquence spatiale en deçà de laquelle il n'y a aucun 0 dans la fonc-

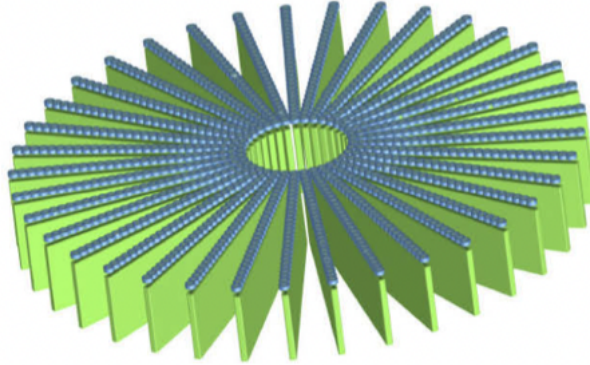


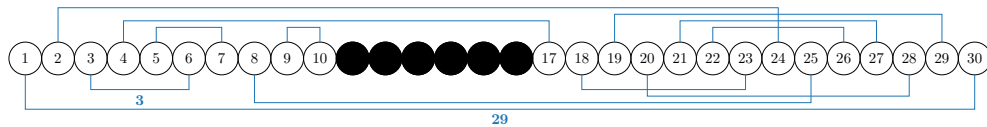
FIGURE 3.1 – L’instrument SPIDER avec 37 bras unidimensionnels contenant chacun 30 pupilles. Image de [Bad+17b].

tion de transfert. L’observation de la scène étendue sans *a priori* nécessite une couverture fréquentielle continue, sans trous. Dans la suite, on qualifiera une telle couverture fréquentielle sans trous comme *compacte* [MRC96 ; DM92]. Ce chapitre est consacré à la recherche de couvertures fréquentielles compactes en respectant les conditions suivantes :

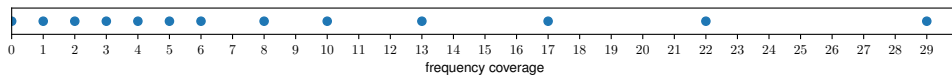
1. toutes les pupilles sont utilisées une fois et une seule :
  - au minimum une fois, pour ne pas perdre de flux,
  - au plus une fois, pour éviter la séparation du flux.
2. la disposition radiale des bras interférométriques comme dans le cas du démonstrateur SPIDER par Lockheed Martin,
3. les  $N_{\text{arms}}$  bras de l’instrument ont la même couverture fréquentielle,
4. chaque fréquence spatiale est unique, pour éviter toute redondance.

Autrement dit, nous cherchons des configurations pupillaires dont la couverture fréquentielle est de la forme  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$ , le but étant de d’optimiser la couverture fréquentielle d’un IOSOOT de type SPIDER.

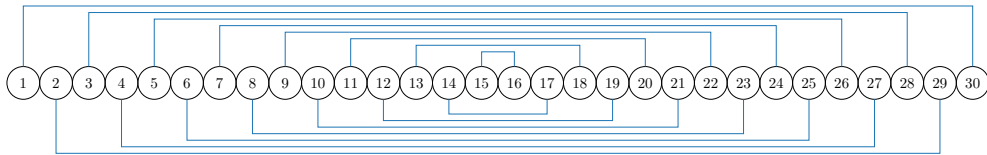
Représentons dans les figures 3.2a et 3.2c quelques cas de configurations pupillaires existantes dans la littérature. On représente aussi la couverture fréquentielle de chacune de ces configurations pupillaires dans 3.2b et 3.2d. Bien que la configuration pupillaire, telle que décrite par Lockheed-Martin dans [Bad+17b], produit des fréquences spatiales uniques, elle n’utilise pas toutes les pupilles disponibles (représentées en noir). De plus, des moyennes et hautes fréquences sont manquantes. Par ailleurs, et quant à la configuration décrite dans [Chu+17 ; Guo+19 ; Cao+20], elle utilise bien toutes les pupilles mais elle ne produit qu’une fréquence spatiale sur deux. Par conséquent, ces deux configurations ne correspondent pas à notre étude puisque elles ne produisent



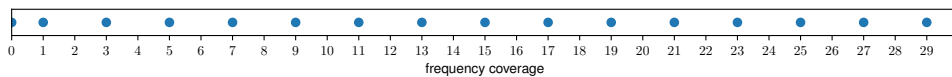
(a) Configuration pupillaire décrite par le démonstrateur SPIDER de Lockheed-Martin. Les pupilles non utilisées sont colorées en noir.



(b) Couverture fréquentielle associée à la configuration pupillaire du démonstrateur SPIDER de Lockheed-Martin, avec un PRL est de 6.



(c) Configuration pupillaire décrite dans [Chu+17; Guo+19; Cao+20].



(d) Couverture fréquentielle associée à la configuration pupillaire décrite dans [Chu+17; Guo+19; Cao+20], avec un PRL est de 1.

FIGURE 3.2 – Différentes configurations pupillaires existantes dans la littérature, et leurs couvertures fréquentielles associées.

pas de couvertures fréquentielles compactes.

Deux architectures non radiales ont également été proposées, qui ont brièvement été mentionnées dans la sous-section 1.4.3. La première est un réseau hexagonal de pupilles avec un motif en spirale [Din+20a], offrant une structure compacte et une couverture de fréquence différente. Cette architecture nécessite des PIC bidimensionnels en cours de développement, ce qui l'exclut de notre champ d'application puisque nous visons à utiliser des circuits linéaires déjà existants. La deuxième architecture est celle d'un réseau de pupilles en forme de T et produit des mesures non simultanées [Liu+22b]. Dans notre étude, nous nous limitons aux instruments instantanés avec des technologies déjà existantes, rendant ainsi la réalisabilité de ce concept plus proche dans le temps. Les deux conceptions citées ne sont donc pas appropriées.

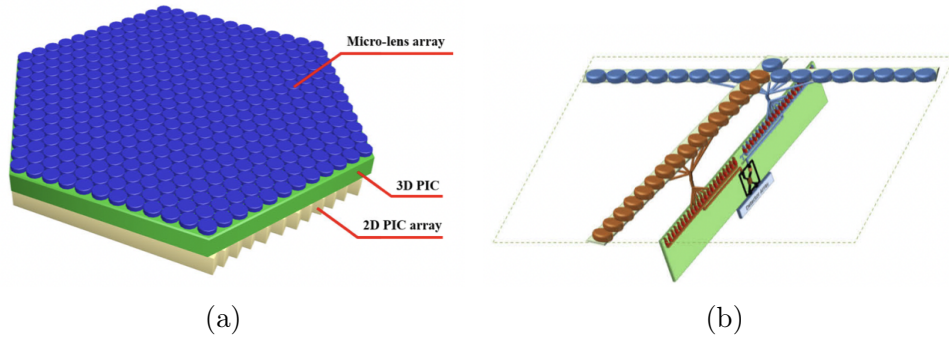


FIGURE 3.3 – a) Instrument type SPIDER avec des pupilles disposées sur un maillage hexagonal. Image prise de [Din+20a]. b) Instrument type SPIDER avec des pupilles disposées en T. Image prise de [Liu+22b].

### 3.1.3 . Complexité de la recherche de configurations pupilaires

Considérons un ensemble de  $2n$  pupilles pouvant être partitionnées en  $n$  paires de pupilles. Autrement dit, on a  $\binom{2n}{n}$  paires possibles dans  $2n$  éléments. Nous expliquons pourquoi dans la suite.

On appelle une partition un ensemble de paires. Pour construire les paires, on choisit le premier élément, puis le second et on divise par 2 pour prendre en compte le fait qu'on s'intéresse aux paires et non aux couples. Ainsi on a :

1.  $2n$  choix pour la première pupille pour la première fréquence,
2.  $(2n - 1)$  choix pour celle qu'on associe à la pupille de la première étape,
3.  $(2n - 2)$  choix pour la deuxième pupille pour la deuxième fréquence,

4.  $(2n - 3)$  choix pour celle qu'on associe à la pupille de la troisième étape,
5. etc.

On obtient alors  $\frac{(2n)!}{n!}$  choix. On a ainsi compté le nombre de paires ordonnées. Comme l'ordre d'appariement n'a pas d'importance, alors pour compter le nombre de paires non ordonnées, alors on doit diviser la quantité  $\frac{(2n)!}{n!}$  par  $2^n$ , i.e. 2 fois le nombre de paires. On a donc :

$$\frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{2^n} = \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{2^n}. \quad (3.1)$$

La complexité de cet algorithme se déduit aisément :

$$C_n = \mathcal{O} \left( \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!} \right) \quad (3.2)$$

soit, en utilisant la formule de Stirling :

$$C_n \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{2^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\pi n} \frac{n}{2e}\right)^n}$$

qui une fois simplifiée, produit l'expression suivante :

$$C_n \sim \sqrt{2} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (3.3)$$

On arrive à deux conclusions à la vue de cette complexité :

- l'ordre de grandeur,  $n!$ , rend impossible le balayage de toutes ces combinaisons,
- il faut chercher un balayage qui s'appuie sur le fait qu'on veuille mesurer chaque fréquence spatiale une seule fois et utiliser chaque pupille une seule fois.

Nous avons développé et implémenté l'algorithme récursif 1 qui remplit ces critères.

Notre but est de trouver **une** configuration pupillaire permettant de donner la couverture fréquentielle  $\{1, 2, \dots, n\}$  avec  $n = N_p/2$ . La recherche d'une telle configuration soulève deux problèmes :

- Q.1** Est-ce que une couverture fréquentielle de la forme  $\{1, 2, \dots, n\}$  existe pour  $N_p$  ?
- Q.2** Si oui, quelle est la configuration pupillaire qui produit cette couverture fréquentielle ?

Dans ce qui suit, nous allons répondre à la question **Q.1** en raisonnant en termes de couvertures fréquentielles.



---

**Algorithm 1** Algorithme récursif de construction de couvertures fréquentielles. Celui-ci prend en entrée le nombre de pupilles  $N_p$ . En sortie, on obtient la liste  $B$  de toutes les couvertures fréquentielles associées à  $N_p$  vérifiant : **1)** l'unicité de chaque fréquence spatiale au sein d'une couverture fréquentielle, **2)** l'utilisation de chaque pupille disponible et **3)** l'unicité de chaque couverture fréquentielle.

---

**Function :** Recursive choice

**Input :**  $N_p[ ]$

```

1:  $P \leftarrow [ ]$   $\triangleright P$  lenslet pairs
2:  $B \leftarrow [ ]$   $\triangleright B$  baselines
3: if  $N_p$  is empty or  $N_p$  has one element then
4:   save  $P$ 
5:   save  $B$ 
6: else
7:    $p_c \leftarrow N_p[0]$   $\triangleright p_c$  current pupil
8:   remove  $p_c$  from  $N$ 
9:   for  $p_s \in N$  do
10:     $N' \leftarrow N$ 
11:     $B' \leftarrow B$ 
12:     $P' \leftarrow P$ 
13:    remove  $p_s$  from  $N'_p$   $\triangleright p_s$  selected pupil
14:     $b \leftarrow p_s - p_c$   $\triangleright b$  current baseline
15:    if True then
16:      append  $b$  to  $B'$ 
17:      append  $(p_c, p_s)$  to  $P'$   $\triangleright$  construction of the configuration
18:      Recursive choice( $P', B', N'_p$ )
19:    end if
20:  end for
21: end if

```

---

Dans le tableau 3.1, on représente le nombre de couvertures fréquentielles pour chaque nombre de pupilles, et on voit que le nombre croît de manière exponentielle. Avec notre algorithme, on construit toutes les possibilités vérifiant l'unicité des bases ainsi que l'utilisation de toutes les pupilles. Dans [Nor08], l'auteur se contente de les dénombrer jusqu'à 40 pupilles, et j'ai vérifié qu'on retombe bien sur les mêmes résultats avec mon algorithme. De plus, j'ai pu calculer le nombre de possibilités pour 42 pupilles. Dans un but illustratif, nous avons choisi de représenter le temps de calcul en fonction du nombre de pupilles dans la figure 3.4. Comme prévu, on arrive rapidement à une limitation physique, nous empêchant de parcourir toute les solutions possibles et ainsi de vérifier si une couverture fréquentielle  $\{1, 2, \dots, n\}$  existe pour un nombre de pupilles  $N_p$  donné.

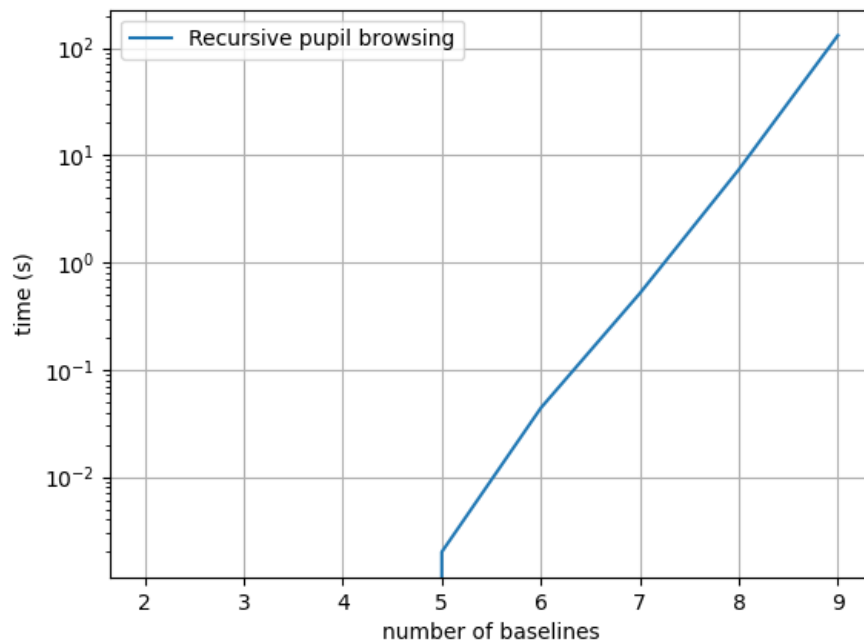


FIGURE 3.4 – Temps de calcul (en secondes) en fonction du nombre de pupilles (nombre de bases  $\times 2$ ), de l'algorithme récursif 1. Le calcul a été fait sur Python 3.7, sur un processeur Intel(R) Core(TM) i5 – 9600KF CPU @ 3.70GHz.

Compte tenu de cette limitation, on s'est naturellement dirigé vers de nouvelles solutions. La suite de ce chapitre sera donc consacré à une approche originale consistant à utiliser des résultats de théorie combinatoire obtenus par plusieurs auteurs [Sko58 ; Lan58 ; Dav59 ; BBG78] afin de résoudre ce problème

quel que soit le nombre de pupilles. On fournit également une solution explicite de configuration pupillaire, qui répond simultanément à la question **Q.2**.

TABLE 3.1 – Nombre de couvertures fréquentielles en fonction du nombre de pupilles [Nor08]. Les couvertures fréquentielles respectent les critères d’unicité de fréquence spatiale et l’utilisation de chaque pupille disponible.

Nombre de pupilles	Nombre de couvertures fréquentielles distinctes
2	1
4	1
6	3
8	11
10	35
12	114
14	407
16	1486
18	5414
20	19923
22	74230
24	278462
26	1049318
28	3972395
30	15101658
32	57607431
34	220391316
36	845366406
38	3250192681
40	12521965697

### 3.2 . Théorie de l’optimisation de la couverture fréquentielle d’un réseau de pupilles 1D

En considérant l’utilisation unique de chaque pupille et que les pupilles sont combinées par paires, le nombre total de pupilles  $N_p$  est nécessairement paire. De plus, et par conséquent, le nombre de fréquences spatiales mesurées est de  $N_p/2$ , prenant des valeurs dans l’ensemble  $[1, N_p - 1]$ . Dans la suite, on définit une *couverture fréquentielle constructible* comme étant une qui possède une configuration pupillaire qui la produit. Il faut noter que toutes les couvertures fréquentielles ne sont *pas constructibles*. Par exemple, il suffit de prendre le cas trivial une couverture fréquentielle de la forme  $\{\dots, N_p - 2, N_p - 1\}$ . En effet, les 2 pupilles à l’extrémité doivent être connectées afin de mesurer la

fréquence spatiale  $N_p - 1$ , imposant alors la valeur de la prochaine fréquence spatiale maximale mesurable à  $N_p - 3$ .

Ici, on se concentre sur les couvertures fréquentielles constructibles ayant une structure compacte, i.e. ayant des fréquences spatiales consécutives telles que  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$ . Ce problème a été formulé et résolu dans le cadre de théorie combinatoire par Skolem en 1958 [Sko58]. On appelle une telle couverture fréquentielle un *Skolem set* et sa configuration pupillaire associée une *Skolem sequence*.

De manière plus générale, on souhaite construire des couvertures fréquentielles de la forme  $\{n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\min} + N_p/2 - 1\}$ , où  $n_{\min}$  est la première fréquence spatiale mesurée.

Ce problème a été introduit par [Lan58] en 1958, et une telle couverture fréquentielle s'appelle un *Langford set* et sa configuration pupillaire associée une *Langford sequence*. L'existence de couvertures fréquentielles constructibles a été résolue pour  $n_{\min} = 1$  par Skolem en 1958, pour  $n_{\min} = 2$  par Davies [Dav59] un an après en 1959, avant d'être partiellement généralisé par Bermond [BBG78] en 1978 et enfin complètement résolue par Simpson [Sim83] en 1983.

Pour résumer les résultats dérivés par ces auteurs : **une couverture fréquentielle de la forme  $\{n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\min} + N_p/2 - 1\}$  est constructible si et seulement si :**

$$4n_{\min} \leq N_p + 2, \quad (3.4)$$

produisant alors une condition sur la fréquence spatiale minimale  $n_{\min}$  la plus élevée :

$$n_{\min} \leq \left\lfloor \frac{N_p + 2}{4} \right\rfloor \triangleq n_{\min}^{\max} \quad (3.5)$$

et l'une des conditions suivantes :

- $N_p = 0 \pmod{8}$ ,
- $N_p = 2 \pmod{8}$  et  $n_{\min}$  impaire,
- $N_p = 6 \pmod{8}$  et  $n_{\min}$  paire.

Autrement dit, la condition 3.9 se traduit par une première fréquence spatiale mesurée maximale égale à  $(N_p + 2)/4$  et, par conséquent, la fréquence spatiale la plus haute de  $(3N_p - 2)/4$ . Une solution explicite de configuration pupillaire est fournie dans [Sko58 ; Dav59 ; BBG78 ; Sim83], connaissant  $N_p$  et  $n_{\min}$  définissant la couverture fréquentielle, comme suit :

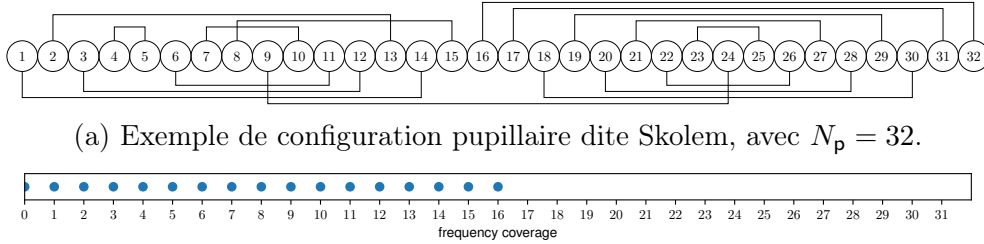
- $n_{\min} = 1$  :
  - $N_p \equiv 0 \pmod{8}$  : voir première partie de la démonstration du théorème 2 [Sko58],
  - $N_p \equiv 2 \pmod{8}$  : voir deuxième partie de la démonstration du théorème 2 [Sko58],
  - $N_p \equiv 4 \pmod{8}$  : pas de solution [Sko58],
  - $N_p \equiv 6 \pmod{8}$  : pas de solution [Sko58];
- $n_{\min} = 2$  :
  - $N_p \equiv 0 \pmod{8}$  : voir première partie de la démonstration du théorème 2 [Dav59],
  - $N_p \equiv 2 \pmod{8}$  : pas de solution [Dav59],
  - $N_p \equiv 4 \pmod{8}$  : pas de solution [Dav59],
  - $N_p \equiv 6 \pmod{8}$  : voir deuxième partie de la démonstration du théorème 2 [Dav59];
- $n_{\min} > 2$  :
  - $N_p \equiv 0 \pmod{8}$  :
    - $n_{\min} \equiv 0 \pmod{4}$  : voir premier tableau de [Sim83],
    - $n_{\min} \equiv 1 \pmod{4}$  : voir quatrième tableau de [Sim83],
    - $n_{\min} \equiv 2 \pmod{4}$  : voir deuxième tableau de [Sim83],
    - $n_{\min} \equiv 3 \pmod{4}$  : voir troisième tableau de [Sim83];
  - $N_p \equiv 2 \pmod{8}$  :
    - $n_{\min} \equiv 0 \pmod{2}$  : pas de solution (comme mentionné précédemment) [BBG78],
    - $n_{\min} \equiv 1 \pmod{2}$  : voir deuxième tableau sous le théorème 2 [BBG78];
  - $N_p \equiv 4 \pmod{8}$  : pas de solution (comme mentionné précédemment) [BBG78];
  - $N_p \equiv 6 \pmod{8}$  :
    - $n_{\min} \equiv 0 \pmod{2}$  : voir premier tableau sous le théorème 2 [BBG78],
    - $n_{\min} \equiv 1 \pmod{2}$  : pas de solution (comme mentionné précédemment) [BBG78].

Un outil pour produire ces solutions, prenant en entrée le nombre de pupilles  $N_p$  ainsi que la première fréquence spatiale mesurée  $n_{\min}$ , a été développé et est accessible via [Deb].

### 3.3 . Cas d'application pour un interféromètre imageur de type SPIDER

Dans la configuration pupillaire dite Skolem pour l'interféromètre de type SPIDER, i.e.  $n_{\min} = 1$ , les fréquences spatiales mesurées sont  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$ , et ainsi la couverture fréquentielle est constructible *si et seulement si*  $N_p \equiv 0$  ou  $2 \pmod{8}$ .

Dans ce paragraphe et en appliquant les résultats de Skolem, nous proposons un recâblage de l'instrument de type SPIDER considéré afin d'augmenter le PRL. Comme  $N_p = 30$  ne satisfait pas la condition de congruence donnée ci-dessus, nous considérons le cas d'étude le plus proche :  $N_p = 32$ . En utilisant la solution constructive de la première moitié de la preuve du théorème 2 dans [Sko58], nous fournissons une configuration pupillaire illustrative dans la figure 3.5a et sa couverture fréquentielle en 3.5b.



(a) Exemple de configuration pupillaire dite Skolem, avec  $N_p = 32$ .

(b) Couverture fréquentielle normalisée associée à la configuration pupillaire en 3.5a, s'étendant de la fréquence spatiale normalisée 1 à 16.

FIGURE 3.5 – Illustration des résultats Skolem pour  $N_p = 32$ .

Dans cette configuration, les fréquences spatiales mesurées sont  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ .

Pour résumer, cette configuration pupillaire permet d'atteindre une couverture fréquentielle compacte contrairement à SPIDER, et améliore le PRL puisqu'il ne vaut plus 6 mais 16 désormais.

### 3.4 . Suggestion d'une nouvelle architecture hybride

#### 3.4.1 . Cas d'application de la solution Langford

La deuxième étape de ce chapitre consiste à optimiser davantage le PRL obtenu pour la design de type SPIDER. Dans ce but, la conception d'un instrument hybride constitué de l'interféromètre complété par un petit télescope monolithique mesurant de courtes fréquences spatiales est envisagée.

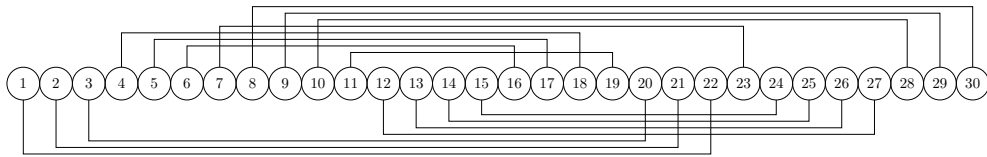
Plus précisément, nous ne souhaitons plus considérer les couvertures fréquentielles débutant à partir de la fréquence spatiale 1 mais plutôt la plus haute possible en considérant que les basses fréquences spatiales sont mesurées par le télescope monolithique, afin d'améliorer la résolution du dispositif. Il faut noter que si elle est constructible, la configuration de Skolem atteint une fréquence spatiale maximale de  $N_p/2$  par définition, alors que la configuration de Langford atteint une fréquence spatiale maximale de :

$$n_{\min}^{\max} + N_p/2 = \frac{N_p + 2}{4} + \left( \frac{N_p}{2} - 1 \right) \quad (3.6)$$

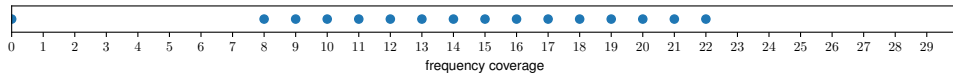
$$= \frac{3N_p - 2}{4}, \quad (3.7)$$

en utilisant l'équation 3.5. Comme la fréquence spatiale maximale mesurée passe de  $N_p/2$  à  $(3N_p - 2)/4$ , la résolution de cet interféromètre hybride est donc améliorée d'environ 50% par rapport à l'interféromètre avec la configuration de Skolem.

En conservant la complexité pupillaire de l'interféromètre de type SPIDER, i.e.  $N_p = 30$  telle que présentée dans la figure 3.2a, nous appliquons ces résultats et nous visons à trouver une couverture fréquentielle compacte avec la fréquence spatiale minimale la plus élevée,  $n_{\min}^{\max}$ , telle que définie dans l'équation 3.5. Une conséquence de cette dernière est que  $n_{\min}^{\max} = 8$  pour  $N_p = 30$ . En utilisant le premier tableau du théorème 2 dans [BBG78], nous fournissons une illustration de cette configuration pupillaire de Langford dans la figure 3.6. La configuration pupillaire représentée produit une couverture fréquentielle compacte allant des fréquences spatiales 8 à un PRL de 22, améliorant ainsi la couverture fréquentielle produite par une configuration Skolem, i.e., en augmentant considérablement la fréquence spatiale la plus élevée.



(a) Exemple de configuration pupillaire dite Langford, avec  $N_p = 30$ .



(b) Couverture fréquentielle normalisée associée à la configuration pupillaire en 3.6a, s'étendant de la fréquence spatiale normalisée 8 à 22.

FIGURE 3.6 – Illustration des résultats Langford pour  $N_p = 30$ .

### 3.4.2 . Dimensionnement du télescope monolithique

Pour la conception hybride, en utilisant les bras interférométriques pour mesurer la couverture de fréquence  $\{n_{\min}^{\max}, \dots, n_{\min}^{\max} + N_p/2 - 1\}$ , le télescope monolithique, de diamètre  $D_m$ , doit mesurer le spectre continu  $[0, n_{\min}^{\max}]$ . Cette condition se traduit par  $D_m = n_{\min}^{\max} b$ .

Cependant, nous devons vérifier si un tel télescope monolithique tient ou non dans l'espace vide de diamètre  $D_{\text{in}}$  au centre de l'instrument, i.e. si  $D_m \leq D_{\text{in}}$ . Pour calculer ce diamètre intérieur, nous faisons des hypothèses supplémentaires sur les bras :

1. le diamètre des pupilles  $d$ , est égal à la distance entre les ouvertures  $b$ ,
2. les bras de l'interféromètre sont positionnés de manière à ce que les pupilles du premier anneau soient jointives.

Compte tenu de ces hypothèses, le périmètre du cercle passant par le centre de chaque pupille  $P = \pi(D_{\text{in}} + d)$  est supérieur au périmètre du polygone régulier dont les sommets sont les centres de chaque pupille  $P' = N_a d$ , avec  $N_a$  le nombre de bras interférométriques. On représente ces différentes distances dans la figure 3.7.

L'inégalité  $P > P'$  se traduit par :

$$D_{\text{in}} > d(N_a/\pi - 1). \quad (3.8)$$

On en déduit alors une condition sur  $N_a$ , en utilisant l'expression de la fréquence spatiale minimale la plus élevée d'une configuration de Langford  $n_{\min}^{\max} = \lfloor (N_p + 2)/4 \rfloor$  :

$$N_a \geq \pi \lfloor (N_p + 6)/4 \rfloor. \quad (3.9)$$

Dans le cas particulier de la conception de type SPIDER avec  $N_a = 37$  et  $N_p = 30$ , nous avons  $D_{\text{in}} > 10$  et  $n_{\min}^{\max} = 8$ . En conséquence, la condition permettant au télescope monolithique de compléter les basses fréquences spatiales manquantes de la couverture fréquentielle de Langford est vérifiée. Contrairement à la couverture fréquentielle de SPIDER présentée dans la figure 3.8a, toutes les fréquences de 0 à 22 sont mesurées alors que SPIDER a 11 fréquences manquantes dans la gamme :  $\{7, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21\}$ . De cette manière, nous avons obtenu une couverture fréquentielle compacte jusqu'à la fréquence spatiale 22 et, en d'autres termes, un PRL amélioré par rapport à la configuration SPIDER.

En outre, la condition 3.9 suggère que nous pourrions conserver le même nombre d'ouvertures par bras tout en réduisant le nombre de bras à  $N_a \geq 9\pi$ , soit  $N_a = 29$  pour le premier nombre impair de bras, et être en mesure d'obtenir la même couverture de fréquence unidimensionnelle. Cette opération permettrait de réduire le diamètre total de l'instrument en réduisant le diamètre de



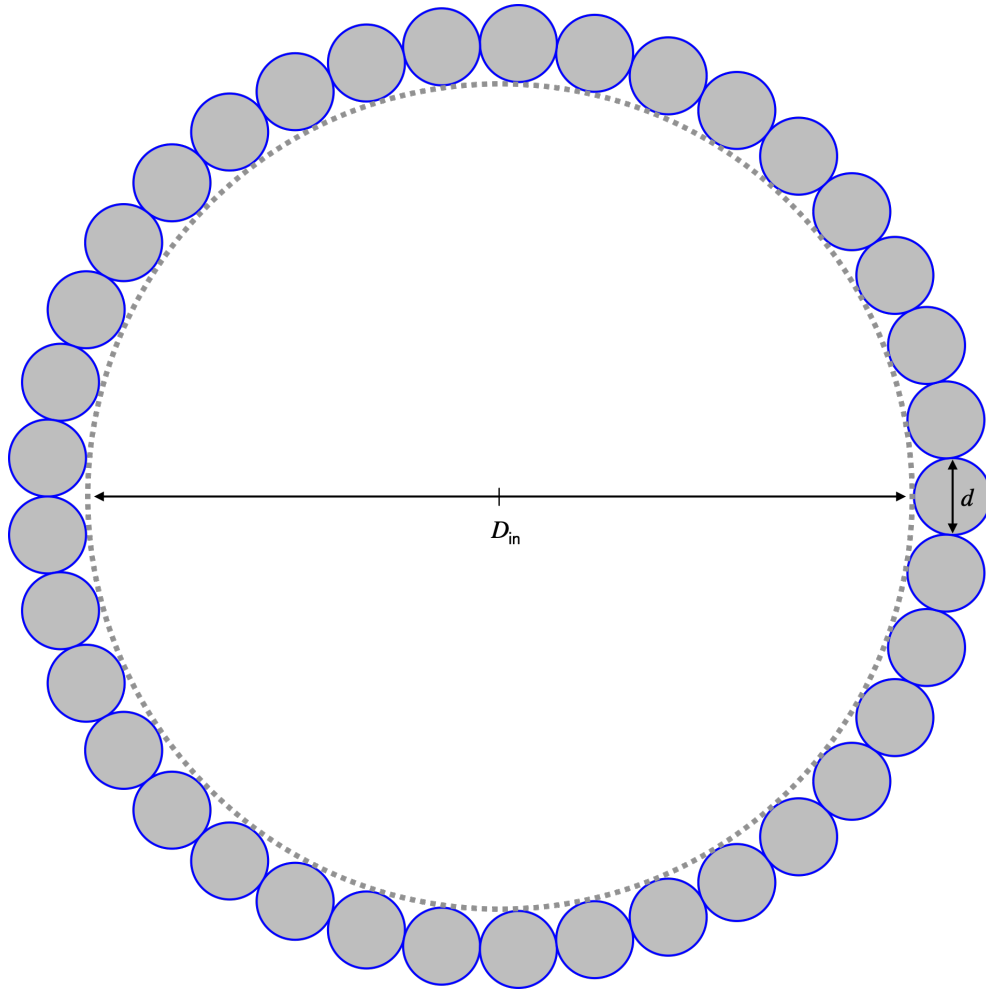


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des distances  $D_{in}$  et  $d$ .

l'espace intérieur. Cependant, elle se ferait au prix d'une couverture fréquentielle bidimensionnelle moins dense.

Enfin, dans la figure 3.8b, nous avons représenté la fonction de transfert optique bidimensionnelle suite à la fusion des couvertures fréquentielles du télescope monolithique et de l'interféromètre de type SPIDER.

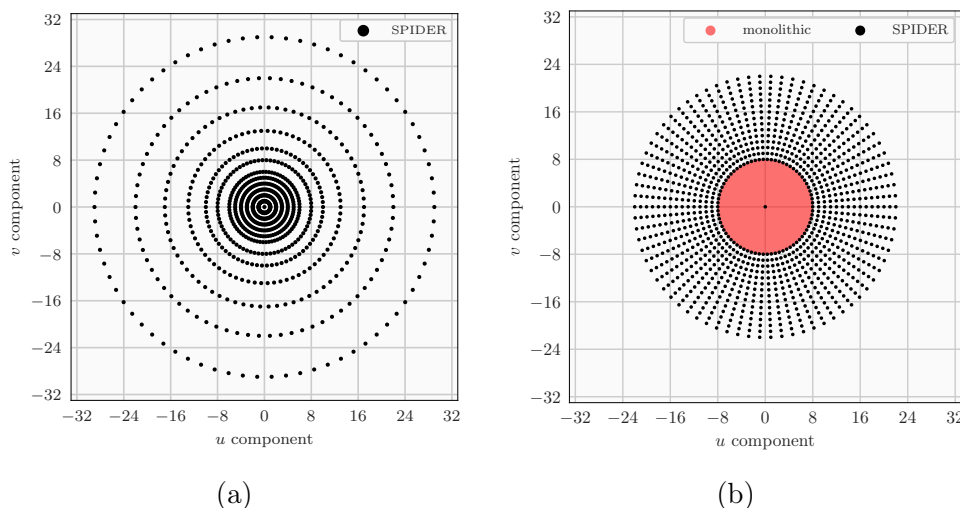


FIGURE 3.8 – a) Fonction de transfert optique de l'instrument de type SPIDER avec des bras disposés radialement. Chaque bras interférométrique mesure les fréquences spatiales discrètes  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 17, 22, 29\}$  (en noir). b) Fonction de transfert optique de l'instrument hybride proposé combinant un télescope monolithique avec l'interféromètre de type SPIDER, ayant des bras disposés radialement. Le télescope monolithique mesure les fréquences spatiales continues  $[1, 8]$  (en rouge) et l'interféromètre les fréquences spatiales discrètes  $\{8, \dots, 22\}$  (en noir).

### 3.4.3 . Synthèse

Dans ce paragraphe, nous récapitulons les résultats obtenus jusqu'à présent pour les différentes étapes d'optimisation menées.

Dans le tableau 3.2, nous résumons le PRL obtenu pour chaque étape. En effet, avec la configuration pupillaire SPIDER comme décrite dans la figure 3.2a, on atteint un PRL de 6. Cela correspondrait à une couverture fréquentielle radiale (ratio entre le PRL et la base maximum mesurable) de  $6/29 = 20\%$ . Ensuite, on a obtenu un premier résultat avec la configuration pupillaire Skolem, qui permettait de passer d'un PRL de 6 à un PRL de 16 pour 32 pupilles. Cela correspond à une couverture fréquentielle radiale de  $16/31 \approx 50\%$ . En-

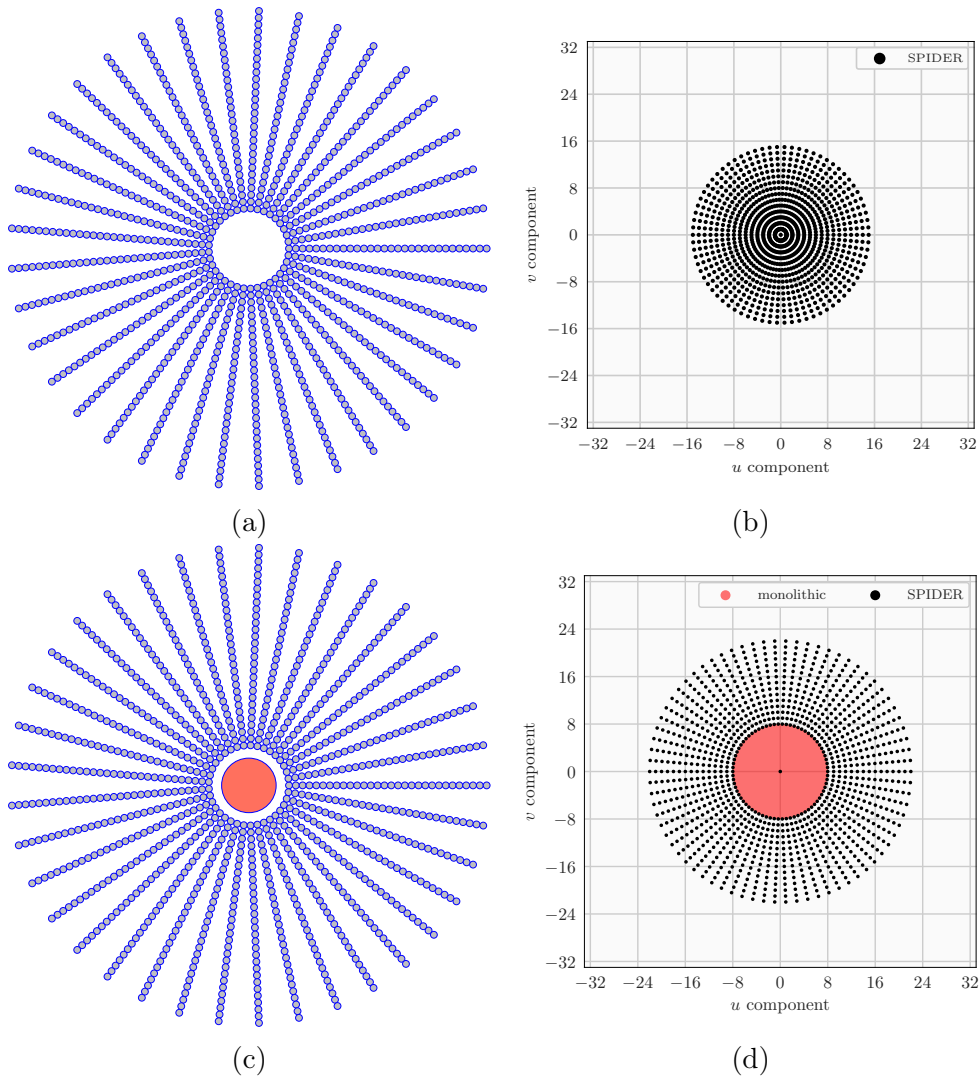


FIGURE 3.9 – a) Architecture hybride combinant un télescope monolithique et l’interféromètre de type SPIDER. b) Fonction de transfert obtenue avec la configuration Langford pour l’instrument hybride en 3.9c. c) Architecture type SPIDER. d) Fonction de transfert obtenue avec la configuration Skolem pour un instrument de type SPIDER en 3.9a.

fin, nous avons exposé un deuxième résultat avec la configuration pupillaire Langford en complément d’un petit télescope monolithique, qui elle permettait d’atteindre un PRL de 22. Cela correspond à une couverture fréquentielle radiale de  $22/29 = 75\%$ .

### 3.5 . Extension supplémentaire de la couverture fréquentielle

TABLE 3.2 – Couverture fréquentielle en fonction des différentes configurations pupillaires. L’architecture considérée est explicitée, et le PRL est donné en fréquence spatiale normalisée. La couverture fréquentielle radiale est relative à la fréquence maximale mesurable. Dans le cas étudié, elle est de  $N_p - 1$ , soit 29 dans les 3 cas.

Architecture	PRL	Couverture fréquentielle radiale
Type SPIDER ( $N_p = 30$ )	6	20%
Type SPIDER avec Skolem	$\approx 15$	50%
Hybride avec Langford	22	75%

### de l’architecture hybride par ajout de bras

Précédemment, nous avons présenté dans le paragraphe 3.3, une optimisation du design de type SPIDER, atteignant une fréquence maximale de  $N_p/2$ , en utilisant des configurations Skolem. Puis, dans le paragraphe 3.4.2, nous avons proposé une conception hybride atteignant cette fois-ci une fréquence maximale de  $(3N_p - 2)/4$ , en utilisant des configurations Langford complétées par un télescope monolithique. Cela correspondrait, comme indiqué dans le tableau 3.2, à des couvertures fréquentielles radiales respectivement de 50% and 75%.

Cette section vise à proposer une nouvelle stratégie pour surpasser ces deux couvertures de fréquence et obtenir une fréquence maximale mesurée plus proche de  $N_p - 1$ , tout en conservant le même diamètre de l’instrument. Pour ce faire, nous prévoyons d’utiliser l’espace vide entre les bras interférométriques visibles dans la figure 3.9a.

#### 3.5.1 . Optimisation de l’espace vide inter-bras : dimensionnement des bras additionnels

L’espace vide entre l’ensemble des bras interférométriques, appelés ci-après *bras primaires*, peut permettre l’installation d’un autre ensemble de bras plus courts, appelés *bras secondaires*, comme présenté sur la figure 3.10. Cette section vise à déterminer leur taille.

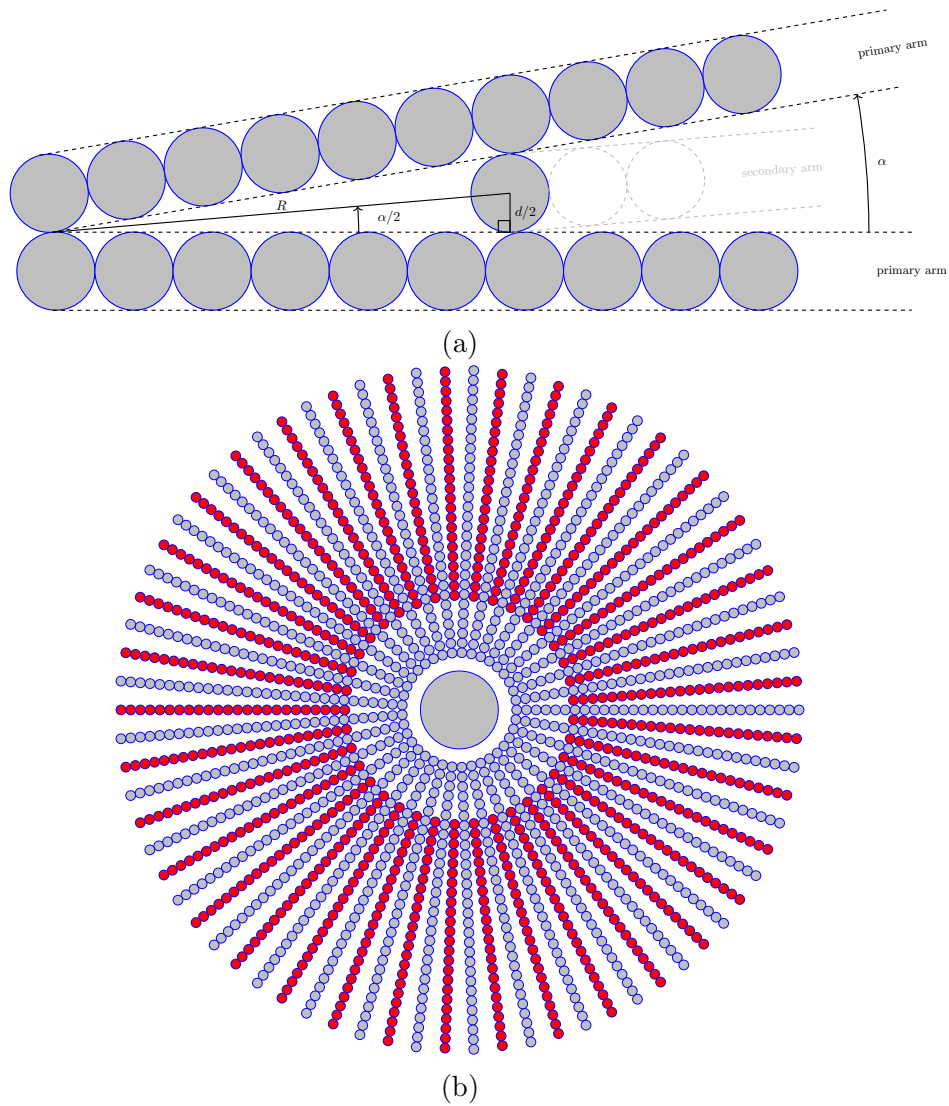


FIGURE 3.10 – a) Schéma des bras primaires et de l'espace vide permettant l'installation de bras secondaires.  $d$  est le diamètre d'une pupille,  $\alpha$  l'angle entre deux bras primaires adjacents, et  $R$  la distance entre le point de tangence de la première pupille de deux bras primaires adjacents et la première pupille du bras secondaire qui peut être placé entre eux. b) Schéma de l'instrument hybride avec les bras primaires (en bleu) et secondaire (en rouge) complété par le télescope monolithique (en gris) de la section 3.4.2.

Connaissant le diamètre  $d$  des pupilles et le petit angle  $\alpha = 2\pi/N_a$  séparant deux bras, on peut calculer la distance  $R$  permettant d'installer la première pupille du bras secondaire. Cela se traduit par :

$$R = \frac{d/2}{\tan(\alpha/2)} \approx \frac{dN_a}{2\pi} \quad (3.10)$$

Soit  $N_p$  le nombre de pupilles du bras primaire. En utilisant l'équation 3.10, le nombre de pupilles du bras secondaire,  $N_p^s$ , s'écrit :

$$N_p^s = N_p - \left\lceil \frac{N_a}{2\pi} \right\rceil \quad (3.11)$$

Ainsi, les bras secondaires sont plus petits que les bras primaires de  $\lceil \frac{N_a}{2\pi} \rceil$  pupilles, et peuvent également être disposés de manière radiale comme indiqué dans la figure 3.10b. Veuillez noter que puisque le nombre de bras primaire est impair, chaque bras secondaire est parallèle à un bras primaire du côté opposé de l'instrument. Les configurations que nous présentons dans cette section considèrent chaque couple de bras primaire et secondaire parallèles.

De la même manière que l'analyse effectuée dans la section 3.2, nous pouvons nous concentrer sur l'optimisation unidimensionnelle du câblage des bras primaires et secondaires, et reproduire la même configuration pupillaire sur chaque paire de bras primaire et secondaire parallèles disposés radialement.

### 3.5.2 . Méthode triviale d'appariement de pupilles entre bras primaire/secondaire

L'approche la plus simple pour câbler les bras primaire et secondaire consiste à mesurer toutes les bases impaires dans le bras secondaire, et toutes les bases paires dans le bras primaire. Le câblage correspondant à la mesure de toutes les fréquences spatiales impaires a déjà été présenté dans la figure 3.2c, et celui correspondant à la mesure de toutes les fréquences spatiales paires est identique, avec une ouverture inutilisée au milieu, incrémentant toutes les fréquences spatiales mesurées d'une unité. Plus précisément, en utilisant la méthode décrite, et en supposant que  $N_p$  et  $N_p^s$  sont pairs, il est possible pour le bras primaire de mesurer les fréquences spatiales  $\{2, 4, \dots, N_p - 2\}$ , et pour le bras secondaire de mesurer les fréquences spatiales  $\{1, 3, \dots, N_p^s - 1\}$ . Cette configuration triviale est dense jusqu'à  $N_p^s$ , car  $N_s + 1$  est la première base manquante.

Appliquons cette méthode à SPIDER avec  $N_p = 30$ . Le bras primaire mesurerait les fréquences spatiales paires  $\{2, 4, 6, \dots, 28\}$  tandis que le bras secondaire mesurerait les fréquences spatiales impaires  $\{1, 3, 5, \dots, 23\}$  soit une couverture fréquentielle compacte  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 24\}$  avec un PRL de 24, i.e., une couverture fréquentielle radiale de 83%. Autrement dit, cette méthode fournirait une couverture dense avec 18 fréquences spatiales de plus que la configuration SPIDER, 9 fréquences spatiales de plus que la configuration Skolem et 2 fréquences spatiales de plus que la configuration Langford. On représente la FTO associée à une telle couverture fréquentielle dans la figure 3.11.

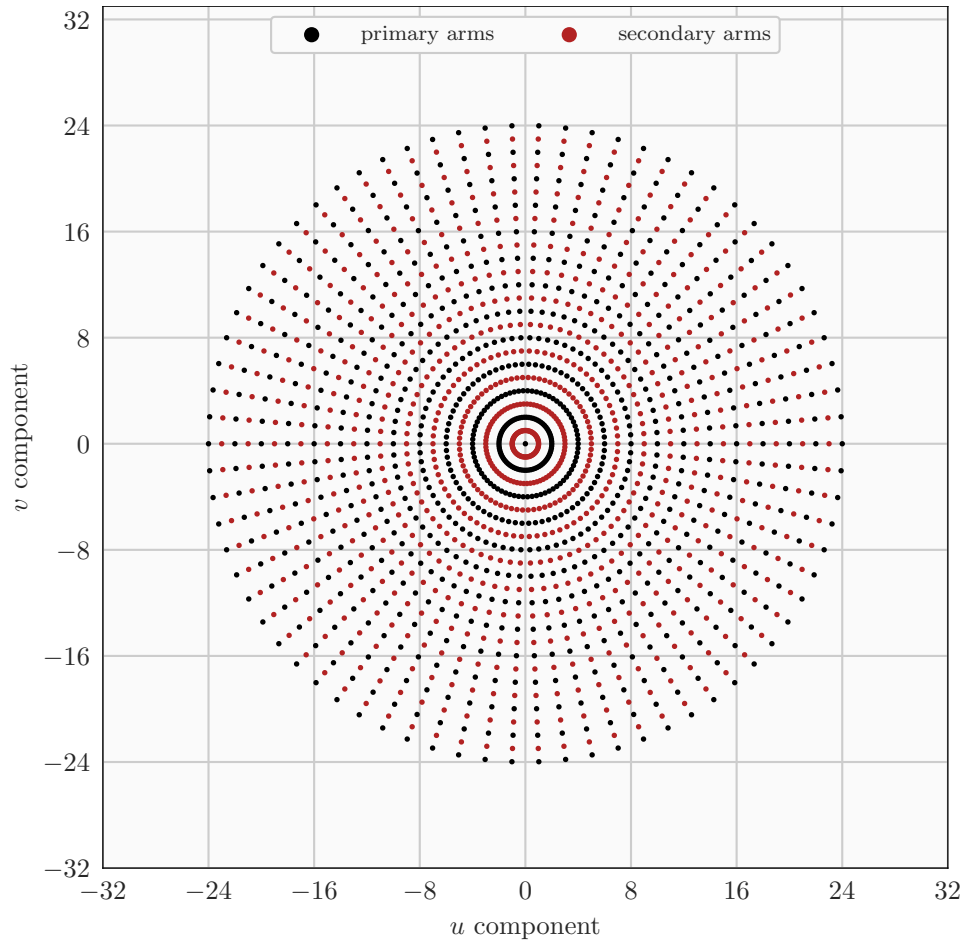


FIGURE 3.11 – Fonction de transfert obtenue à partir de 2 bras, composés  $N_p = 30$  pour le bras primaire et  $N_p^s = 24$  pour le bras secondaire, en appliquant la méthode triviale.

### 3.5.3 . Méthode itérative d'appariement de pupilles entre bras primaire/secondaire

Dans cette sous-section, nous avons pour objectif de présenter une méthode permettant de câbler les pupilles de deux types de bras primaire et secondaire afin d'atteindre la fréquence maximale la plus élevée possible. La méthode est composée d'une étape itérative qui est appliquée alternativement aux bras primaire et secondaire. Nous considérerons le cas général où :

$$N_p = N_p^s + \Delta_p, \quad (3.12)$$

avec une différence impaire entre les bras primaire et secondaire  $\Delta_p = 2k + 1$ .

Nous cherchons ici à montrer explicitement comment câbler n'importe quelles  $N \geq 2\Delta_p$  pupilles consécutives, de manière à mesurer les  $\Delta_p$  bases consécutives  $\{N - 3k - 1, N - 3k, \dots, N - k - 1\}$ , et en laissant  $N - 2\Delta_p = N - 4k - 2$  pupilles consécutives non utilisées (comme représentées au centre de la figure 3.12). Une figure représentant la méthode d'appariement des pupilles associée est présentée dans la figure 3.12.

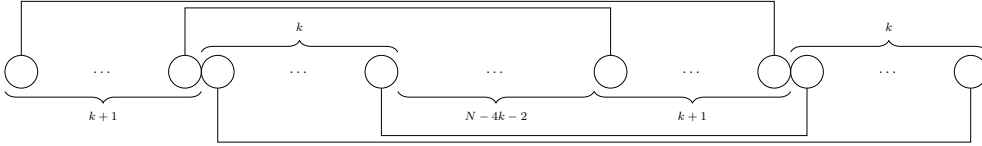


FIGURE 3.12 – Bases issues des appariements d'une seule étape itérative pour  $N$  ouvertures : les  $k + 1$  appariements connectés sur la partie supérieure de la figure sont  $\{N - 3k - 1, N - 3k + 1, \dots, N - k - 1\}$ . Les paires connectées sur la partie inférieure de la figure sont  $\{N - 3k, N - 3k + 2, \dots, N - k - 2\}$ . L'union de ces séquences est la couverture fréquentielle compacte  $\{N - 3k - 1, N - 3k, \dots, N - k - 1\}$ .

En appliquant cette étape alternativement sur les bras primaires et secondaires, on obtient :

1. **câblage du bras primaire avec  $N = N_p$**  : mesure les bases  $\{N_p - 3k - 1, N_p - 3k, \dots, N_p - k - 1\}$ , laissant alors  $N_p - 2\Delta_p$  pupilles consécutives inutilisées sur le bras primaire,
2. **câblage du second bras avec  $N = N_p^s = N_p - \Delta_p$**  : mesure  $\{N_p - 5k - 2, N_p - 5k - 1, \dots, N_p - 3k - 2\}$ , laissant alors  $N_p - 3\Delta_p$  pupilles consécutives inutilisées sur le second bras,
3. **câblage du bras primaire avec  $N = N_p - 2\Delta_p$**  : mesure  $\{N_p - 7k - 3, N_p - 7k - 2, \dots, N_p - 5k - 3\}$ , laissant alors  $N_p - 4\Delta_p$  pupilles consécutives inutilisées sur le bras primaire,



4. *etc.*

Ainsi, nous pouvons voir que, par construction, notre méthode d'appariement itérative forme une couverture fréquentielle compacte avec une fréquence maximale mesurée de  $N_p - (\Delta_p - 1)/2 - 1 \simeq N_p - 1 - N_a/(2\pi)$ .

Dans le cas particulier où  $N_p \equiv 0 \pmod{\Delta_p}$ , la couverture fréquentielle est dense de  $k + 1$  à  $N_p - k - 1$ .

Veillez noter que pour que cette méthode produise une couverture fréquentielle compacte, il est essentiel que le nombre de pupilles appariées à chaque étape soit identique aux différences entre les bras primaire et secondaire. Ce type de configuration, combiné à l'utilisation d'un télescope monolithique mesurant les basses fréquences comme présenté dans la section 3.4.2, surpasse la couverture fréquentielle triviale présentée dans la section 3.5.2, dans le sens où il permet d'obtenir une couverture fréquentielle compacte plus élevée.

Plus précisément, dans la configuration favorable correspondant à la méthode d'appariement de pupilles triviale, c'est-à-dire avec  $N_p^s$  pair, la fréquence spatiale de coupure est de  $N_p^s$  alors que dans la méthode présentée, nous atteignons une fréquence spatiale de coupure de  $N_p - k - 1 = N_p - (2k + 1) + k = N_p^s + k$ .

### 3.5.4 . Cas d'application pour le design SPIDER

Comme le montre la section 3.5.1, le nombre de bras considérés impose une certaine différence dans le nombre de pupilles entre les bras primaire et secondaire.

Dans le cas où  $N_p = 30$ ,  $d = 1$  et  $N_a = 37$ , et en utilisant l'expression de l'équation 3.11, cette différence est de 6. Ce nombre étant incompatible avec la méthode générale que nous avons présentée dans la section 3.5.3, il est cependant possible d'adapter notre méthode générale à cette application, simplement en ayant un câblage initial différent pour le bras primaire.

Plus précisément, et comme présenté dans la figure 3.13, il est possible de câbler n'importe quelles  $N \geq 13$  pupilles consécutives, de manière à mesurer les 6 lignes de base consécutives  $\{N - 9, N - 8, \dots, N - 4\}$ , et en laissant  $N - 13$  pupilles consécutives non utilisées ainsi qu'une pupille non contiguë non utilisée.

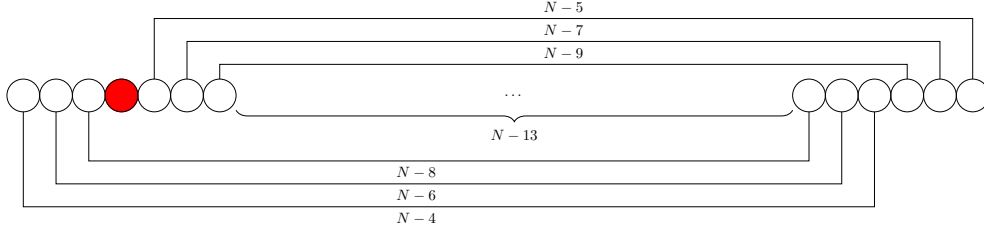


FIGURE 3.13 – Diagramme représentant la méthode d'appariement initiale pour le bras primaire. Les 6 premières bases consécutives mesurées sont  $\{N - 9, N - 8, \dots, N - 4\}$ . La pupille inutilisée est représentée en rouge. Les  $N - 13$  pupilles consécutives inutilisées restantes sont représentées par les points au milieu.

On applique cette méthode d'appariement de pupilles au bras primaire avec  $N_p$  pupilles, et au bras secondaire avec  $N_p^s = N_p - 6$  pupilles.

Une application illustrative de la méthode d'appariement de pupilles des bras interférométriques est présentée dans la 3.14. Lorsque la condition  $N \geq 2\Delta_p$  n'est pas remplie, nous câblons manuellement les pupilles inutilisées restantes (deux panneaux du bas).

En résumé, nous avons montré comment mesurer toutes les fréquences spatiales,  $\{1, 2, \dots, 26\}$  sans trous à partir de deux bras contenant respectivement 30 et 24 pupilles. Cette valeur de fréquence spatiale maximale mesurée, ou PRL, de 26 est plus grande que la solution de Skolem et Langford. De plus, et dans ce cas précis, la solution ne nécessite même pas l'utilisation d'un télescope monolithique pour mesurer les basses fréquences spatiales. Avec cette nouvelle méthode, nous obtenons une couverture radiale en fréquence de presque 90% (contre 50% et 75% obtenus respectivement par les configurations de Skolem et Langford), toujours sans modification de la taille de l'instrument.

### 3.6 . Conclusion

En résumé, nous avons proposé une méthode originale permettant de déterminer si une couverture fréquentielle compacte est constructible ou non, étant donné le nombre de pupilles et la fréquence spatiale la plus basse recherchée. La solution est constructive et ne nécessite pas une exploration systématique coûteuse en calcul, ce qui rend notre approche adaptée aux bras interférométriques avec un grand nombre de pupilles.

Cet outil nous a permis dans un premier temps de proposer un recâblage de l'architecture SPIDER, permettant d'obtenir une couverture fréquentielle compacte. Nous l'avons ensuite utilisé pour proposer une architecture hybride

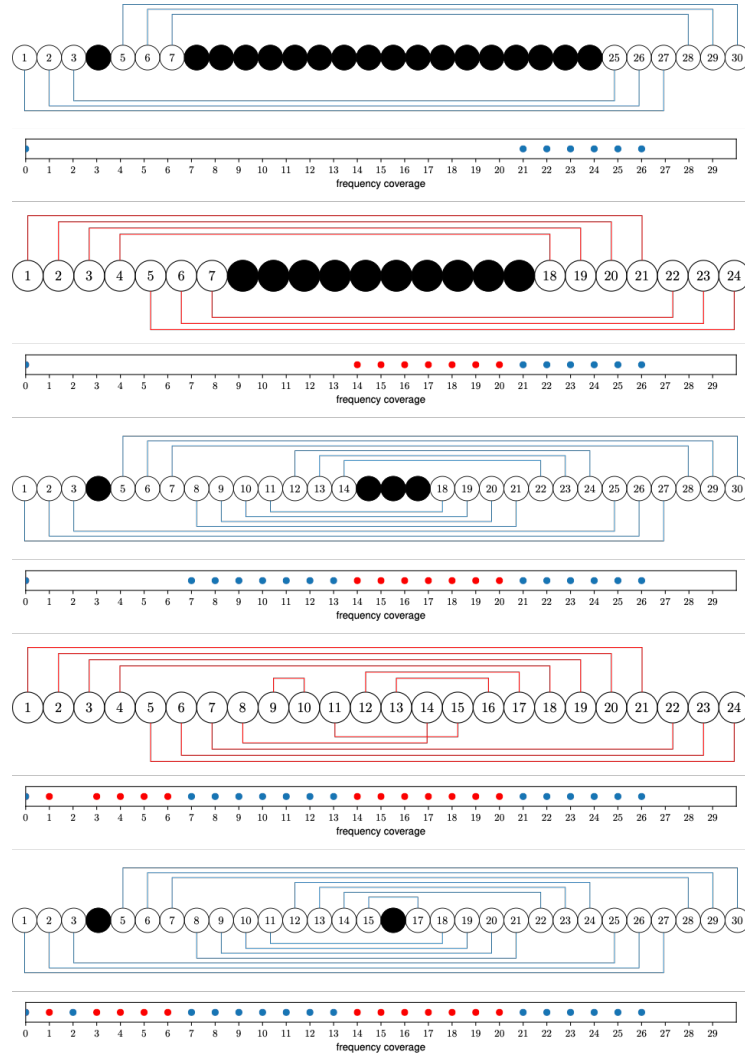


FIGURE 3.14 – Diagramme représentant les configurations pupillaires et les couvertures fréquentielles associées pour les méthodes d'appariement initial et général avec les bras primaire et secondaire. Les pupilles inutilisées sont représentées en rouge et les couvertures fréquentielles à chaque étape sont cumulées. Les fréquences mesurées par le bras primaire sont représentées en rouge et ceux mesurés par le bras secondaire sont représentés en bleu. Les pupilles inutilisées sont représentées en noir.

combinant un petit télescope monolithique, pour mesurer les basses fréquences spatiales, placé au centre d'un instrument de type SPIDER qui lui mesure des fréquences spatiales plus élevées, tout en réalisant une couverture de fréquence compacte. Nous représentons la fonction de transfert optique correspondant à cette configuration dans la figure 3.15.

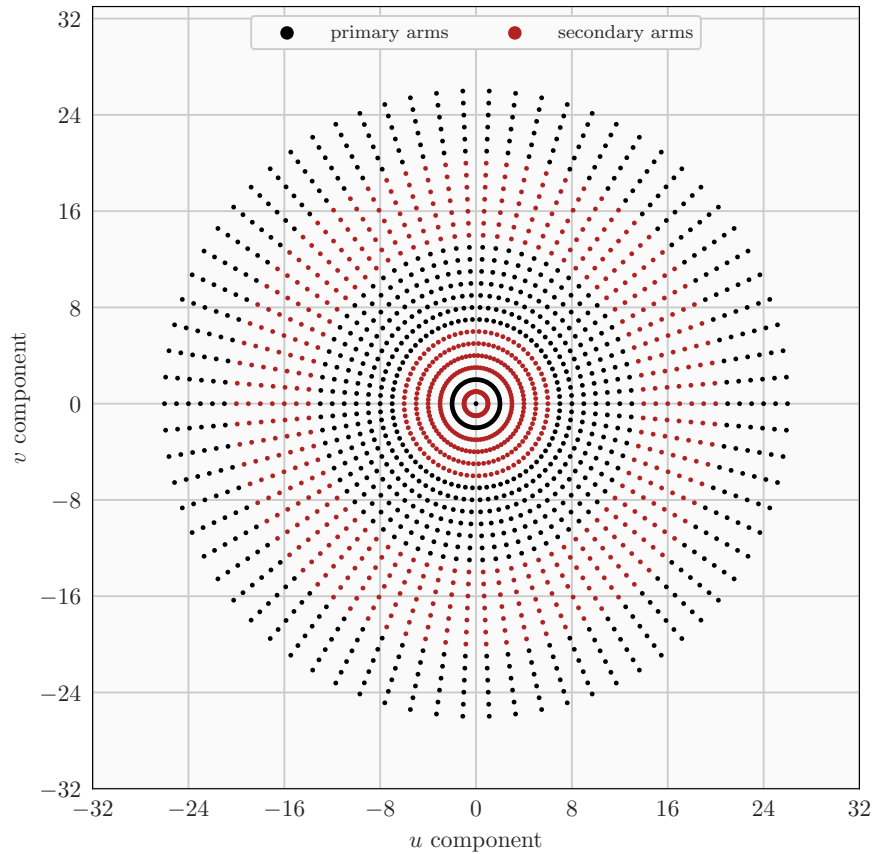


FIGURE 3.15 – Fonction de transfert obtenue avec la configuration avec les bras primaires et secondaires, avec l'architecture illustrée dans la figure 3.10b.

Ces résultats ont été récemment été publiés dans une revue à comité de lecture [DMM22]. Enfin, une nouvelle méthode a été proposée permettant d'augmenter encore la fréquence de coupure, et peut être appliquée quel que soit le nombre d'ouvertures. Nous résumons nos résultats avec le tableau 3.3.

Comme perspective, nous envisageons de considérer la couverture fréquentielle 2D et de combler les lacunes de manière angulaire, contrairement à notre

étude radiale. Une limitation actuelle du travail de couverture de fréquence présenté ici est qu'il ne considère que les fréquences radiales. Une perspective de ce travail est donc de considérer la couverture de fréquence 2D et de combler les lacunes de manière azimutale.

### **3.7 . Article "Aperture configuration optimization for extended scene observation by an interferometric telescope"**

Toute la partie incluant les résultats théoriques est reprise dans l'article [\[DMM22\]](#) ci-dessous, publié en 2022 dans le journal *Optics Letters*.



# Optics Letters

## Aperture configuration optimization for extended scene observation by an interferometric telescope

HIYAM DEBARY,\*  LAURENT M. MUGNIER,  AND VINCENT MICHAU

Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, B.P. 72, 92322 Châtillon, France

\*Corresponding author: [hiyam.debary@onera.fr](mailto:hiyam.debary@onera.fr)

Received 6 May 2022; revised 23 June 2022; accepted 12 July 2022; posted 13 July 2022; published 5 August 2022

**In this Letter, we aim at optimizing the aperture configuration of an optical interferometric imager for observing extended objects. We exploit combinatorial theory results from different authors to prove the existence of solutions to some problems of aperture configuration optimization in dimension 1. We determine in which cases these solutions exist for a compact frequency coverage and provide an explicit solution whatever the number of apertures. We apply these results and provide an illustration in two cases: the first is an interferometer composed of radially disposed arms; and the second consists of an innovative hybrid architecture involving a small monolithic telescope, which covers short spatial frequencies added at the center of the first case design. Last, we carry out an analysis to determine under which condition a monolithic telescope placed at the center of this hybrid instrument can complete its frequency coverage without gaps.**

© 2022 Optica Publishing Group under the terms of the [Optica Open Access Publishing Agreement](#)

<https://doi.org/10.1364/OL.462561>

The acquisition of the first successful interferences from two separate apertures dates back to the Albert Michelson and Francis Pease experiment in 1921 [1]. The elementary measurement, called an interferogram [2], is generated through the combination of the light from two different apertures separated by a given distance, called a baseline. The characteristics of the interferogram, which are the contrast and the position of the fringes, can be grouped into a physical quantity called the complex visibility. Using the van Cittert–Zernike theorem [3], and in the absence of atmospheric turbulence, one can directly link the complex visibility to the Fourier transform of the “source”, at a spatial frequency given by the baseline and the wavelength.

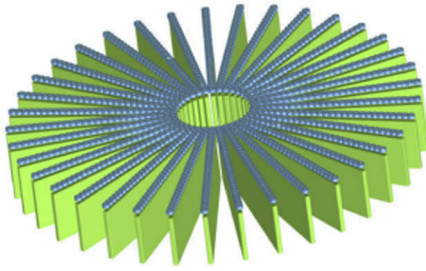
The principle of an interferometric imager is to measure multiple complex visibilities from multiple baselines, and thus sample the Fourier transform of the observed source. In astronomy, optical long baseline interferometry uses this principle with baselines between a few large telescopes. Famous examples of such instruments include ESO’s Very Large Interferometer Telescope (VLTI) [4], the Navy Precision Optical Interferometer (NPOI) [5], and Georgia State University’s Center for High Angular Resolution Astronomy (CHARA) [6]. Astronomers rely on the super synthesis principle [7] where the rotation of the

Earth during an observation night is used in order to increase the number of measured spatial frequencies.

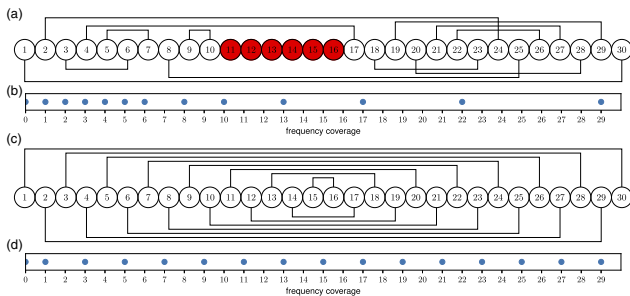
Recently, another application of interferometry has emerged, where a traditional telescope making snapshot images is substituted by a pupil plane interferometer in which all spatial frequencies are measured simultaneously. The signal is collected by joint apertures and combined through photonic integrated circuits (PICs), allowing a significant increase in the number of spatial frequency measurements, in contrast to astronomical interferometers. In the so-called SPIDER (segmented planar imaging detector for electro-optical reconnaissance) demonstrator by Lockheed Martin [8–11], the apertures are evenly disposed in one-dimensional arrays, called arms in the following. Each arm is associated with a PIC which combines apertures, used at most once, by pairs. The arms are radially disposed, as represented in Fig. 1. In the following, we shall call such an interferometer SPIDER-like.

The set of measured spatial frequencies, called frequency coverage, is a key aspect in the design of the interferometer, and should be tailored to the type of source observed. In such an interferometer, the spatial frequencies are sampled with a step of  $b/\lambda$ , with  $b$  the distance between two consecutive apertures. For simplicity purposes, we will henceforth consider normalized spatial frequencies in units of  $b/\lambda$ . In this Letter, we consider the interferometric observation of a very extended source such as the Earth, viewed from a satellite. In this framework, Harvey and Rockwell [13] introduced the “practical resolution limit” (PRL), defining it as the inverse of the maximum spatial frequency before which no zero occurs in the optical transfer function. Indeed, few priors are available for a very extended source, making it necessary to have no gaps in the frequency coverage. We qualify such a frequency coverage as compact [14,15].

The list of combined aperture pairs in the instrument is hereafter called an aperture configuration. Lockheed Martin’s aperture configuration, as described in Ref. [12], is presented in Figs. 2(a) and its associated frequency coverage in 2(b), where some medium and high spatial frequencies are missing. A different aperture configuration was suggested in Refs. [16–18] for the same SPIDER-like design with a frequency coverage producing only every other spatial frequency, and is presented in Figs. 2(c) and 2(d). In the above-mentioned SPIDER-like designs, each arm has the same aperture configuration and thus the same frequency coverage. Furthermore, each spatial frequency is formed at most once. Finally, in the case of the aperture configuration



**Fig. 1.** Segmented planar integrated optical imaging system design with 37 one-dimensional arrays of 30 apertures (figure from Ref. [12]).



**Fig. 2.** (a) Aperture configuration of an interferometric arm of the SPIDER-like instrument as described in Ref. [12]. The black lines represent aperture pairings. The unused apertures are colored in red. The associated frequency coverage is represented in (b). (c) Aperture configuration as described in Refs. [16–18], with the associated frequency coverage in (d).

presented in Fig. 2(a), not all apertures are used and the frequency coverage presents many gaps even in the first half of the spectrum. A satisfactory reconstruction of these spatial frequencies would require strong priors on the object, such as the knowledge that it has a reduced support on a dark background. As a consequence, none of these two aperture configurations is suitable for very extended objects.

Two non-radial architectures have also been proposed. The first is a hexagonal array of apertures with a spiral pattern [19], providing a compact structure and a different frequency coverage. This architecture requires in-development two-dimensional PICs, which excludes it from our scope as we aim at using existing linear PICs. The second architecture is one with a T-shape array of apertures and produces non-simultaneous measurements [20]. In our study, we restrict ourselves to snapshot instruments and thus this design is not appropriate.

In this Letter, we aim at optimizing the frequency coverage of two types of flat instruments aiming at observing the Earth. The first is a SPIDER-like interferometer substituting a traditional telescope. The second is a hybrid instrument made of a traditional but smaller telescope which we complement with a SPIDER-like snapshot telescope. From the SPIDER-like description provided in Fig. 2, we keep the radially disposed arm architecture with the same aperture configuration shared between each arm, as well as the single use of each aperture for the simplicity of the device. We also keep the uniqueness of each spatial frequency measured, to avoid spatial frequency redundancy. In contrast, we wish to use all apertures available in order to broaden the spatial frequency coverage, i.e., to maximize the PRL. A major difference of our work with respect to that of

previous authors, e.g., Refs. [16,18], lies in the fact that our optimization will be over all possible aperture configurations.

The number of aperture configurations scales exponentially with the number of apertures, thus it is impossible to carry out a systematic exploration. For instance, for 40 apertures, there are 12 521 965 697 different frequency coverages [21]. In the following, we present an original approach based on combinatorial theory results obtained by several authors [21–25], to solve the problem whatever the number of apertures and provide an associated example of aperture configuration. Then, we apply this approach to optimize the frequency coverages of both the above-mentioned instruments.

As we consider configurations where each aperture is used once and once only, the total number of apertures  $N_p$  must be even, given that they are connected by pairs. The number of measured spatial frequencies is thus  $N_p/2$  in the range  $[1, N_p - 1]$ . A buildable frequency coverage is defined as one that has an aperture configuration leading to it. Note that each frequency coverage is not buildable.

For instance, a frequency coverage of the form  $\{\dots, N_p - 2, N_p - 1\}$  is trivially not buildable. Indeed, the two outer apertures have to be connected in order to measure the  $N_p - 1$  spatial frequency, leaving a next maximal measurable spatial frequency of  $N_p - 3$ .

We first wish to find buildable frequency coverages that have a compact structure, i.e., that are composed of consecutive spatial frequencies  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$ . This problem has been formulated and solved in the framework of combinatorial theory by Skolem [22], and such a frequency coverage is called a Skolem set and its associated aperture configuration a Skolem sequence.

More generally, for the applications presented in this Letter, we wish to build frequency coverages in the form  $\{n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\min} + N_p/2 - 1\}$ , where  $n_{\min}$  is the first measured spatial frequency. This problem has been introduced by Langford [26], and such a frequency coverage is called a Langford set and its associated aperture configuration a Langford sequence. The existence of buildable compact frequency coverages was solved for  $n_{\min} = 1$  by Skolem in 1958, for  $n_{\min} = 2$  by Davies [23] in 1959, then partially generalized by Bermond [24] in 1978, and finally completed by Simpson [25] in 1983.

To sum up the results derived by these authors, a frequency coverage of the form  $\{n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\min} + N_p/2 - 1\}$  is buildable if and only if

$$4n_{\min} \leq N_p + 2, \quad (1)$$

yielding a condition on the highest minimum spatial frequency for  $n_{\min}$ ,

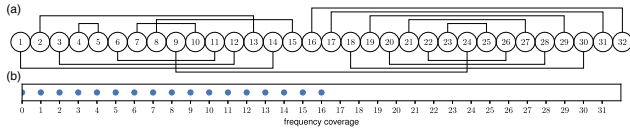
$$n_{\min} \leq \left\lfloor \frac{N_p + 2}{4} \right\rfloor \triangleq n_{\min}^{\max} \quad (2)$$

and any of

- $N_p \equiv 0 \pmod{8}$ ,
- $N_p \equiv 2 \pmod{8}$  and  $n_{\min}$  odd,
- $N_p \equiv 6 \pmod{8}$  and  $n_{\min}$  even.

The first condition translates into having a maximal first spatial frequency of  $\frac{N_p+2}{4}$  and thus the highest spatial frequency of  $\frac{3N_p-2}{4}$ . One explicit aperture configuration is provided in Refs. [22–25] given the values of  $N_p$  and  $n_{\min}$  defining the frequency coverage, as follows.

- $n_{\min} = 1$ :



**Fig. 3.** (a) Example of a Skolem aperture configuration with 32 apertures. (b) Associated frequency coverage ranging from 1 up to 16.

- $N_p \equiv 0 \pmod{8}$ : see first part of proof of theorem 2 [22]
- $N_p \equiv 2 \pmod{8}$ : see second part of proof of theorem 2 [22]
- $N_p \equiv 4 \pmod{8}$ : no solution [22]
- $N_p \equiv 6 \pmod{8}$ : no solution [22]
- $n_{\min} = 2$ :
  - $N_p \equiv 0 \pmod{8}$ : see first part of proof of theorem 2 [23]
  - $N_p \equiv 2 \pmod{8}$ : no solution [23]
  - $N_p \equiv 4 \pmod{8}$ : no solution [23]
  - $N_p \equiv 6 \pmod{8}$ : see second part of proof of theorem 2 [23]
- $n_{\min} > 2$ :
  - $N_p \equiv 0 \pmod{8}$ :
    - \*  $n_{\min} \equiv 0 \pmod{4}$ : see first table of Ref. [25]
    - \*  $n_{\min} \equiv 1 \pmod{4}$ : see fourth table of Ref. [25]
    - \*  $n_{\min} \equiv 2 \pmod{4}$ : see second table of Ref. [25]
    - \*  $n_{\min} \equiv 3 \pmod{4}$ : see third table of Ref. [25]
  - $N_p \equiv 2 \pmod{8}$ :
    - \*  $n_{\min} \equiv 0 \pmod{2}$ : no solution (as mentioned before) [24]
    - \*  $n_{\min} \equiv 1 \pmod{2}$ : see second table under theorem 2 [24]
  - $N_p \equiv 4 \pmod{8}$ : no solution (as mentioned before) [24]
  - $N_p \equiv 6 \pmod{8}$ :
    - \*  $n_{\min} \equiv 0 \pmod{2}$ : see first table under theorem 2 [24]
    - \*  $n_{\min} \equiv 1 \pmod{2}$ : no solution (as mentioned before) [24]

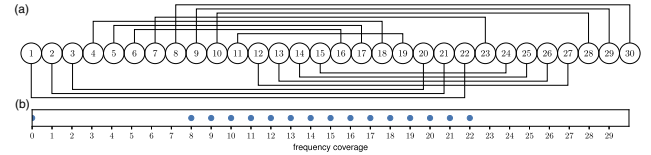
In Code 1, Ref. [27], we provide the reader with a tool exhibiting aperture configurations given  $n_{\min}$  and  $N_p$ .

In the Skolem case ( $n_{\min} = 1$ ), the measured spatial frequencies are  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$  and thus the frequency coverage is buildable if and only if  $N_p \equiv 0$  or  $2 \pmod{8}$ .

As a first step, we focus on a rewiring of the first SPIDER-like design considered in order to increase the PRL. We study the case of a compact frequency coverage starting at the spatial frequency 1, i.e., the above defined Skolem configuration. As  $N_p = 30$  does not satisfy the congruity condition given above, we consider the closest working case  $N_p = 32$ . Using the constructive solution from the first half of the proof of theorem 2 in Ref. [22], we provide an illustrative aperture configuration in Fig. 3. In summary, this aperture configuration achieves a compact frequency coverage in contrast to SPIDER, and improves the PRL as it is no longer equal to 6, but 16.

As a second step, we aim at further optimizing the PRL obtained in the first SPIDER-like design studied. In that sense, we consider the hybrid instrument constituted of the interferometer complemented with a small monolithic telescope measuring short spatial frequencies.

More specifically, we no longer wish to consider frequency coverages starting at the spatial frequency 1 but rather as high as possible considering the low spatial frequencies are measured by the monolithic telescope, to improve the resolution of the device. In the general case, if buildable, the Skolem configuration reaches  $N_p/2$  by definition and the Langford configuration reaches  $(3N_p - 2)/4$  as a consequence of Eq. (1). Because the maximum spatial frequency measured increases



**Fig. 4.** (a) Example of a Langford configuration with 30 apertures. (b) Associated frequency coverage ranging from spatial frequencies 8 up to 22.

from  $N_p/2$  to  $(3N_p - 2)/4$ , the resolution of this hybrid interferometer is improved by approximately 50% with respect to the interferometer with the Skolem configuration. Maintaining the SPIDER-like interferometer aperture complexity, i.e.,  $N_p = 30$  as presented in Fig. 2, we apply these results and we aim at finding a compact frequency coverage with the highest minimum spatial frequency,  $n_{\min}^{\max}$ , as defined in Eq. (2). A consequence of the latter is that  $n_{\min}^{\max} = 8$  for  $N_p = 30$ . Using the first table under theorem 2 in Ref. [24], we provide an illustration of this Langford aperture configuration in Fig. 4. The represented aperture configuration produces a compact frequency coverage ranging from spatial frequencies 8 to 22, improving the frequency coverage provided by a Skolem configuration, i.e., by substantially extending the highest spatial frequency.

For this hybrid instrument, the monolithic telescope must complete the frequency coverage  $\{8, \dots, 22\}$  by measuring the continuous spectrum  $[0, 8]$ . In contrast to SPIDER's frequency coverage presented in Fig. 2, we would measure all spatial frequencies from 0 to 22 whereas SPIDER has 11 missing spatial frequencies in this range  $\{7, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21\}$ . To sum up, we would achieve a compact frequency coverage up to the spatial frequency 22 and would improve the PRL with respect to the SPIDER configuration.

We now aim at dimensioning the monolithic telescope and deriving under which condition it fits at the center of the interferometer.

As can be observed in Fig. 1, the central space may be used to install the monolithic telescope. Let us look at the conditions under which the low frequencies that are not measured by the arms may be recorded with this telescope.

The maximum frequency measured by the telescope is fixed by its diameter, itself necessarily smaller than the diameter of this central space,  $D_{\text{in}}$ .

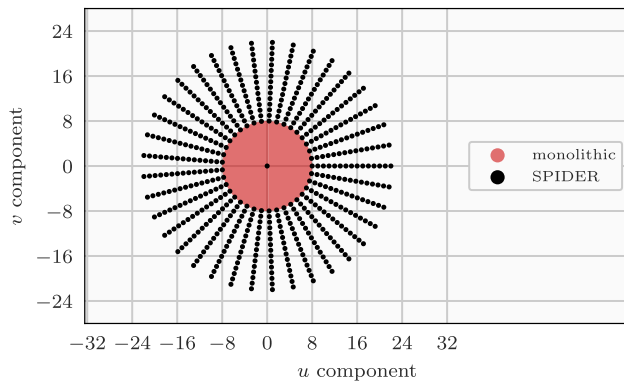
To calculate this diameter, we must make some additional assumptions about the arms. First, we assume that the diameter of the apertures,  $d$ , is equal to the distance between apertures,  $b$ . Secondly, we consider the arms positioned in such a way that the apertures of the first ring are joint.

Under these assumptions, the perimeter of the circle going through the center of each aperture is  $P = \pi(D_{\text{in}} + d)$ . Secondly, the perimeter of the regular polygon whose vertices are the centers of each aperture, if the first apertures of each arm are touching one another, is  $P' = N_a d$ , with  $N_a$  the number of interferometric arms. Thus, we have approximately  $P' = P$ , yielding

$$D_{\text{in}} = d(N_a/\pi - 1). \quad (3)$$

Hence, the monolithic telescope measures continuous spatial frequencies up to  $d/b \times (N_a/\pi - 1)$ . As we consider our apertures to be joint, i.e.,  $d = b$ , the spatial frequencies measured by the monolithic telescope span up to  $N_a/\pi - 1$ .





**Fig. 5.** Optical transfer function of the suggested hybrid instrument with a monolithic telescope complemented by a SPIDER-like instrument with radially disposed arms. The monolithic measures the continuous spatial frequencies  $[1, 8]$  (red) and the interferometer spatial frequencies  $\{8, \dots, 22\}$  (black).

To ensure that there is no gap between the spatial frequencies measured by the monolithic telescope and the interferometer, the maximum spatial frequency measured by the monolithic telescope must be equal to or greater than the minimum spatial frequency measurement by the interferometer. In other words, we need

$$D_{\text{in}} \geq n_{\text{min}}^{\text{max}} b. \quad (4)$$

Considering Eq. (3), and injecting the expression of  $n_{\text{min}}^{\text{max}}$  from Eq. (2) in Eq. (4), we obtain the following inequality:

$$N_a \geq \pi[(N_p + 6)/4]. \quad (5)$$

In the particular case of the SPIDER-like design presented in Fig. 2 with  $N_a = 37$  and  $N_p = 30$ , this condition is verified, allowing the monolithic telescope to be placed at the center of the interferometer and measuring the necessary missing low spatial frequencies. Finally, the two-dimensional optical transfer function resulting from the combination of the monolithic telescope and SPIDER-like interferometer is presented in Fig. 5.

In summary, we have proposed an original method allowing one to determine whether or not a compact frequency coverage is buildable, given the number of apertures and the lowest sought spatial frequency. The solution is constructive and does not require a computationally costly systematic exploration, making our approach fit to interferometric arms with a large number of apertures. This tool allowed us firstly to propose a rewiring of the SPIDER architecture, achieving a compact frequency coverage. We then used it to suggest a hybrid architecture combining a small monolithic aperture, for low spatial frequency measurements, placed at the center of a SPIDER-like instrument that measures higher spatial frequencies and still achieves a compact frequency coverage. The methodology used is transposable to any two-dimensional instrument composed of a set of linear interferometric arms.

**Acknowledgments.** The authors acknowledge the useful discussions with Sébastien Lopez from Airbus Defence and Space.

**Disclosures.** The authors declare no conflicts of interest.

**Data availability.** Simulation code is available in Code 1 Ref. [27].

## REFERENCES

1. A. A. Michelson and F. G. Pease, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **7**, 143 (1921).
2. W. J. Tango and R. Twiss, *Progress in Optics* (Elsevier, 1980), Vol. 17, pp. 239–277.
3. J.-M. Mariotti, *Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes* (Springer, 1989), pp. 3–32.
4. R. G. Petrov, F. Malbet, and G. Weigelt, *et al.*, *A&A* **464**, 1 (2007).
5. J. T. Armstrong, D. Mozurkewich, L. J. Rickard, D. J. Hutter, J. A. Benson, P. Bowers, N. Elias II, C. Hummel, K. Johnston, D. Buscher, J. H. Clark, L. Ha, L.-C. Ling, N. M. White, and R. S. Simon, *Astrophys. J.* **496**, 550 (1998).
6. H. McAlister, T. ten Brummelaar, D. Gies, W. Huang, W. Baguolo Jr, M. Shure, J. Sturmman, L. Sturmman, N. Turner, S. Taylor, D. H. Berger, E. K. Baines, E. Grundstrom, C. Ogden, S. T. Ridgway, and G. van Belle, *Astrophys. J.* **628**, 439 (2005).
7. M. Malbet, J. Schanen-Duport, J. Berger, K. Rousset-Perraut, P. Benech, and P. Kern, *Astron. Astrophys.* **348**, 1055 (1999).
8. R. L. Kendrick, A. Duncan, C. Ogden, J. Wilm, D. M. Stubbs, S. T. Thurman, T. Su, R. P. Scott, and S. Yoo, in *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference* (AMOS, 2013), E45.
9. A. L. Duncan and R. L. Kendrick, "Segmented planar imaging detector for electro-optic reconnaissance," U.S. patent 8913859 (16 December 2014).
10. T. Su, R. P. Scott, C. Ogden, S. T. Thurman, R. L. Kendrick, A. Duncan, R. Yu, and S. Yoo, *Opt. Express* **25**, 12653 (2017).
11. T. Su, G. Liu, K. E. Badham, S. T. Thurman, R. L. Kendrick, A. Duncan, D. Wuchenich, C. Ogden, G. Chriqui, S. Feng, J. Chun, W. Lai, and S. J. B. Yoo, *Opt. Express* **26**, 12801 (2018).
12. K. Badham, R. L. Kendrick, D. Wuchenich, C. Ogden, G. Chriqui, A. Duncan, S. T. Thurman, S. J. B. Yoo, T. Su, W. Lai, J. Chun, S. Li, and G. Liu, in *2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim (CLEO-PR)* (IEEE, 2017), pp. 1–5.
13. J. E. Harvey and R. A. Rockwell, *Opt. Eng.* **27**, 279762 (1988).
14. L. Damé and M. Martic, in *Proceedings of the ESA Colloquium* (European Space Agency, 1992), pp. 201–208.
15. L. M. Mugnier, G. Rousset, and F. Cassaing, *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 2367 (1996).
16. Q. Chu, Y. Shen, M. Yuan, and M. Gong, *Opt. Commun.* **405**, 288 (2017).
17. G.-M. Lv, Q. Li, Y.-T. Chen, H.-J. Feng, Z.-H. Xu, and J. Mu, *Opt. Rev.* **26**, 664 (2019).
18. K. Cao, Z. Ye, C. Jiang, J. Zhu, Z. Qiao, and Y. Jiang, *Opt. Eng.* **59**, 043105 (2020).
19. C. Ding, X. Zhang, X. Liu, H. Meng, and M. Xu, *IEEE Access* **8**, 139396 (2020).
20. G. Liu, D. Wen, W. Fan, Z. Song, B. Li, and T. Jiang, *Opt. Express* **30**, 4905 (2022).
21. G. Nordh, *Discret. Math.* **308**, 1653 (2008).
22. T. Skolem, *Math. Scand.* **6**, 273 (1958).
23. R. O. Davies, *Math. Gaz.* **43**, 253 (1959).
24. J.-C. Bermond, A. E. Brouwer, and A. Germa, in *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Colloque International CNRS 260* (CNRS, 1978), Vol. 260, pp. 35–38.
25. J. E. Simpson, *Discret. Math.* **44**, 97 (1983).
26. C. D. Langford, *Math. Gaz.* **42**, 228 (1958).
27. H. Debary, "Python code providing optimal aperture configurations of an interferometric telescope for extended scene observation," figshare (2022), <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.20440353>.

TABLE 3.3 – Récapitulatif des résultats en terme de couverture fréquentielle radiale obtenue selon les différentes méthodes exposées.

<b>Architecture</b>	<b>PRL</b>	<b>Couverture fréquentielle radiale</b>
Type SPIDER	6	20%
Type SPIDER avec Skolem	$\approx 15$	50%
Hybride avec Langford	22	75%
Hybride avec méthode triviale	24	83%
Hybride avec bras secondaires	26	90%



## 4 - Application du concept SPIDER à l'observation de la Terre

Une analyse théorique de la mesure des visibilités par un instrument de type SPIDER a été proposée dans les chapitres 2 et 3. Le chapitre qui va suivre est dédié à la compréhension du domaine d'emploi d'un tel instrument. Nous nous plaçons dans le cas de l'observation de Terre depuis une orbite basse. Les composants et notamment le circuit photonique sont supposés parfaits. Dans ce cas d'observation réaliste mais technologiquement très optimiste, un premier dimensionnement est effectué et la limite d'un tel dispositif en terme de résolution en fonction du rapport signal-à-bruit est évaluée et comparée à celle atteinte avec un imageur classique. Une simulation bout-en-bout est présentée pour illustrer les conclusions présentées. Au-delà de l'identification des limites de ce concept, cet exercice permet d'identifier les points durs, et les axes de développement technologiques ou méthodologiques à suivre pour les lever.

### 4.1 . Caractéristiques de la scène observée

Une scène est définie par sa répartition spatiale de luminance à un instant donné. On supposera les répartitions spatiales des luminances de scènes caractérisées de façon probabiliste par une loi gaussienne dont nous allons donner des valeurs moyennes et des densités spectrales.

#### 4.1.1 . Luminance moyenne

Dans le domaine visible, le rayonnement propre de la Terre peut être négligé devant le rayonnement émis par diffusion du rayonnement solaire par la surface de la Terre. Dans la suite, on se limite donc à l'évaluation du rayonnement solaire diffusé.

En faisant l'hypothèse que la surface terrestre est un diffuseur lambertien, la luminance moyenne de la scène due à la diffusion du rayonnement solaire s'exprime en fonction de l'émittance,  $M_\lambda$ , ou de l'éclairement solaire  $E_\lambda$  et de l'albédo moyen de scène,  $\rho_\lambda$  :

$$L_\lambda = \frac{M_\lambda}{\pi} = \rho_\lambda \frac{E_\lambda}{\pi} \quad (ph.s^{-1}.sr^{-1}.m^{-2}.nm^{-1}). \quad (4.1)$$

La luminance apparente (vue depuis le satellite) s'écrit  $L_{app,\lambda} = \tau_{atm,\lambda}^2 L_\lambda$  où  $\tau_{atm,\lambda}$  est la transmission atmosphérique. La dépendance spectrale de l'éclairement solaire peut être décrite en approchant son émission par celle d'un corps

noir à  $T = 5780 \text{ K}$  :

$$E_\lambda \propto M_{\odot\lambda} = \frac{2c\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (ph.s^{-1}.m^{-2}.nm^{-1}), \quad (4.2)$$

où  $E_\lambda$  est l'éclairement. L'expression est donnée en unités photoniques.

Le coefficient de proportionnalité s'évalue en remarquant qu'il s'agit d'un effet géométrique. Il peut donc se calculer en raisonnant sur des grandeurs intégrées exprimées dans un système d'unité quelconque. Dans le système énergétique, la constante solaire vaut  $E = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  (en TOA) et l'émittance solaire totale se calcule suivant la Loi de Stephan :  $M_\odot = \sigma T_\odot^4 = 63.2 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Soit  $E_{\text{Terre}}$  l'éclairement terrestre. À la distance  $R_{\text{Terre}-\odot}$ , par conservation de l'énergie rayonnée à travers l'espace, on a :

$$4\pi R_\odot^2 M_{\odot\lambda} = 4\pi R_{\odot-\text{Terre}}^2 E_{\text{Terre}\lambda}, \quad (4.3)$$

où  $R_\odot$  est le rayon solaire égal à 696 342 km, et  $R_{\odot-\text{Terre}}$  est la distance séparant la Terre du Soleil ( $150.10^6 \text{ km}$ ). Alors l'éclairement terrestre vaut :

$$E_{\text{Terre}\lambda} = M_{\odot\lambda} \left( \frac{R_\odot}{R_{\odot-\text{Terre}}} \right)^2 \quad (4.4)$$

**Application numérique** Dans la suite, les évaluations numériques sont menées dans le domaine visible. On choisit comme valeurs d'albédo moyen et de transmission atmosphérique respectivement 0.3 et 0.9, respectivement. Parallèlement on se place dans le cas où le Soleil et le satellite sont au zénith. La luminance apparente évaluée est donc une valeur optimiste.

#### 4.1.2 . Variations spatiales de la scène

Pour décrire de façon statistique les variations spatiales de la luminance de scène, on s'appuie sur le modèle analytique de densité spectrale de scène donné par Kattnig [KP97] :

$$DSP(f) = \frac{K}{1 + \left(\frac{f}{f_o}\right)^p}, \quad (4.5)$$

où :

- la décroissance spectrale  $p$ , caractéristique de la scène observée et de sa rugosité, varie typiquement entre 2 et 4 [KP97],
- la fréquence de coupure  $f_o$ , est liée à la longueur caractéristique moyenne des structures observées.

La valeur à la fréquence  $(0, 0)$  est proportionnelle à l'intégrale du signal sur le champ considéré. Elle n'est pas décrite par ce modèle de DSP. L'intégrale de la DSP de la scène sur toutes les fréquences hormis la fréquence nulle est proportionnelle à la variance des fluctuations de luminance de la scène.

Un exemple de scène urbaine typique échantillonnée au pas pixel de 50 cm est représentée sur la figure 4.1. En normalisant son maximum à 1 et son minimum à 0, la moyenne spatiale de cette scène vaut 0.33 et son écart-type est de 0.19. Statistiquement, les fluctuations de la scène sont donc plutôt bien réparties et bien équilibrées entre son maximum et son minimum (pas de minimum ou de maximum aberrant qui écrase les contrastes du reste de la scène). Cette image a été obtenue à partir d'un capteur aéroporté de résolution très faible par rapport à 50 cm, de telle sorte que l'impact de la fonction de transfert de l'optique de prise de vue sur cette image peut être négligé.

Le module carré de la FFT de la scène a été calculé en normalisant à 1 la valeur à la fréquence fondamentale. La moyenne circulaire du résultat a été fitté par le modèle de spectre décrit par l'équation 4.5. L'ensemble est représenté sur la figure 4.7. La décroissance spectrale obtenue par fit est lente : elle vaut  $p = 2$ . Autrement dit, l'image est riche spectralement, ce qui est une caractéristique des scènes urbaines. En effet, ces scènes comportent de nombreuses marches dont le spectre décroît en  $p^{-2}$ . Il n'a pas été possible de mettre en évidence la présence d'un plateau puisque la fréquence de coupure trouvée par fit du modèle est la première fréquence spatiale de la décomposition par transformée discrète. Enfin, il faut souligner que la valeur maximum du spectre de la scène est de l'ordre de  $2.10^{-3}$ . Il s'agit d'une valeur élevée si on considère qu'elle est fonction du rapport entre écart-type et moyenne de la scène, rapport représentatif d'une scène à fort contraste.

### 4.1.3 . Variations temporelles

Les évolutions temporelles de la scène trouvent leur origine d'une part dans le défilement induit par le satellite et d'autre part dans son évolution propre (mouvement de ses composantes comme par exemple le déplacement des véhicules).

Dans le cas d'un satellite en orbite basse à une altitude de 500 km, la vitesse de défilement est de l'ordre de  $v = 7$  km/s. On peut raisonnablement penser que cet effet est beaucoup plus rapide que les évolutions propres de la scène. Dans la suite, nous supposons que les variations temporelles de la scène sont limitées au défilement. Cette hypothèse devra être pondérée dans l'hypothèse d'un fort ralenti sur image.

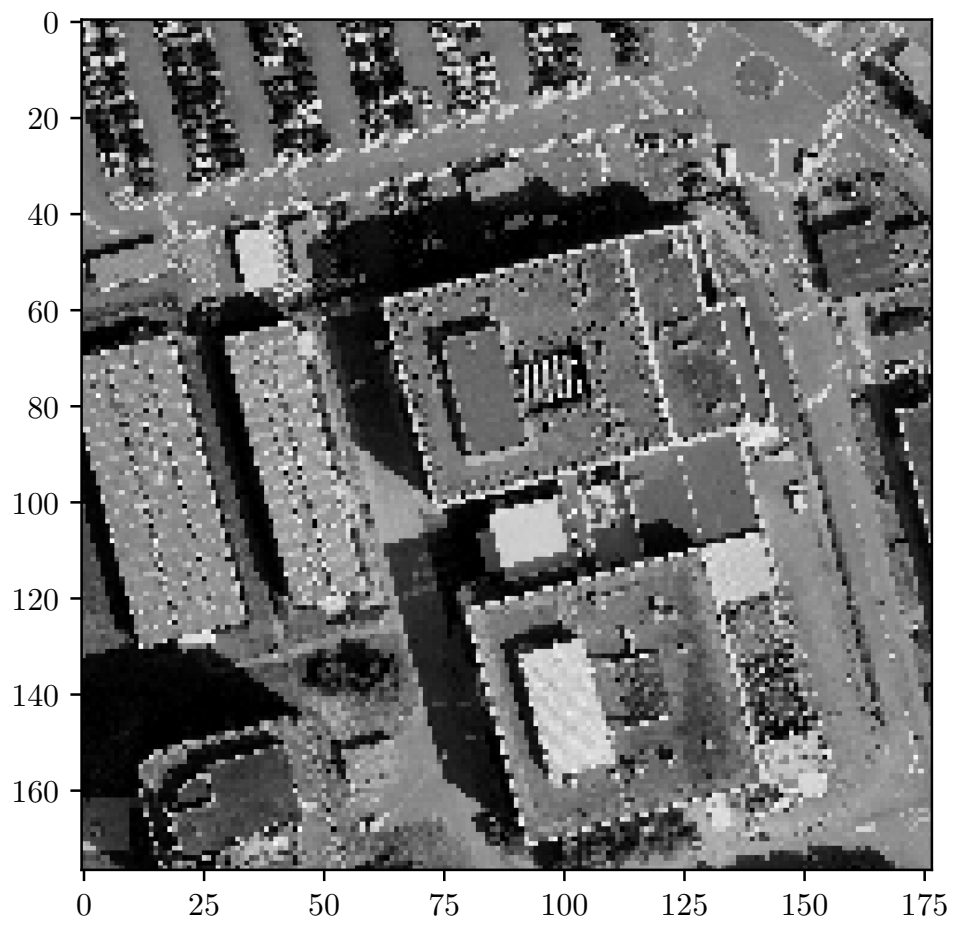


FIGURE 4.1 – Scène urbaine observée de taille  $177 \times 177$  pixels, avec un pas pixel de 50 cm.

## 4.2 . Modèle physique

### 4.2.1 . Efficacité de couplage et champ de vue

Le champ d'un interféromètre corrélateur est limité à  $\lambda/D$ , où :

- $\lambda$  est la longueur d'onde centrale considérée,
- $D$  est le diamètre des pupilles.

Dans le cas de SPIDER, du fait de l'injection dans des guides d'ondes, l'objet observé est apodisé par le *lobe d'antenne* en intensité du guide d'onde dans lequel la lumière est injectée,  $\eta$ . L'objet effectif dont l'interféromètre mesure des visibilités complexes est :

$$o_{\text{eff}}(\alpha_x, \alpha_y) = o(\alpha_x, \alpha_y) \times \eta(\alpha_x, \alpha_y). \quad (4.6)$$

L'efficacité de couplage  $\eta$  est une fonction des coordonnées angulaires, proche d'une fonction gaussienne de largeur  $\lambda/D$ , comme étudié en détail dans [DC99 ; MMC03]. Le champ  $\theta_{\text{fov}}$  vu par l'instrument est donc :

$$\theta_{\text{fov}} \simeq \frac{\lambda}{D} \quad (4.7)$$

Etablissons une expression analytique de ce lobe d'antenne dans le cas d'un mode guidé couplé dans l'espace libre par une pupille de diamètre  $D$ .

**Efficacité de couplage sur axe** Selon [Neu88], le champ couplé dans le guide est proportionnel à l'intégrale de recouvrement entre le champ incident et le profil du mode guidé. Plus précisément, le coefficient de couplage en champ,  $\Omega$ , s'exprime en fonction du mode de propagation gaussien de la fibre,  $G$ , et de l'amplitude complexe du champ incident,  $E$  [RC01], comme :

$$\Omega = \frac{\langle E|G \rangle}{\|E\| \times \|G\|} \quad (4.8)$$

où le produit scalaire et la norme sont définis de la manière suivante :

$$\langle X|Y \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} X(x, y).Y^*(x, y)dx dy \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{\langle X|X \rangle}. \quad (4.9)$$

L'intégration est effectuée suivant les directions perpendiculaires à la direction de propagation. Par conservation du flux lumineux, l'intégrale ne dépend pas de la position longitudinale du plan transverse où elle est calculée. Nous choisissons le plan de la pupille de la lentille pour des raisons de simplicité de calcul.

La distribution du champ dans la pupille est une constante,  $E_P$ , multipliée par la fonction caractéristique de la pupille,  $P(x, y)$ .  $G_P(x, y)$  le mode de propagation gaussien dans la pupille s'écrit :

$$G_P(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}, \quad (4.10)$$



On obtient :

$$\Omega = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} E_P(x, y) P(x, y) G_P(x, y) dx dy}{\sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} |E_P(x, y) P(x, y)|^2 dx dy \iint_{\mathbb{R}^2} |G_P(x, y)|^2 dx dy}} \quad (4.11)$$

Dans la suite, on omet l'indice  $P$  dans les équations. On obtient en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\Omega = \frac{\int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} r P(r) G(r) dr d\theta}{\sqrt{\int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} r |P(r)|^2 dr d\theta \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r |G(r)|^2 dr d\theta}}. \quad (4.12)$$

avec  $D$  le diamètre de la pupille. Connaissant l'expression de la transmittance de la pupille  $P(r)$  (unitaire si  $r^2 \leq D^2/4$ , 0 sinon), l'expression 4.12 devient :

$$\Omega = \frac{2\pi \int_0^{D/2} r \exp(-r^2/\omega^2) dr}{\sqrt{\pi \frac{D^2}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} |\exp(-r^2/\omega^2)|^2 dr d\theta}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{2\omega}{D} \sqrt{2} \left(1 - e^{-(\frac{D}{2\omega})^2}\right) \quad (4.14)$$

Le coefficient de couplage en intensité s'écrit :

$$\eta = |\Omega|^2 \quad (4.15)$$

La figure 4.2 représente  $\eta$  en fonction de  $\frac{D}{2\omega}$ . En dérivant l'expression obtenue, on accède à la valeur et position du maximum :  $\eta = 82\%$  pour  $\frac{D}{2\omega} = 1.12$ .

**Efficacité de couplage hors axe** En introduisant dans l'expression du champ incident un basculement de la surface d'onde d'amplitude  $\alpha$ , l'expression du coefficient de couplage devient :

$$\Omega = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(i2\pi\alpha x/\lambda) P(x, y) G(x, y) dx dy}{\sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} |\exp(i2\pi\alpha x/\lambda) P(x, y)|^2 dx dy \iint_{\mathbb{R}^2} |G(x, y)|^2 dx dy}} \quad (4.16)$$

En développant cette expression, et en utilisant l'outil de calcul formel *SymPy*, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\sqrt{\pi}\omega \int_{-D/2}^{D/2} \exp(i\Delta\phi) \exp\left(-\frac{x^2}{\omega^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{D^2/4-x^2}}{\omega}\right) dx}{\pi D\omega/2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}D} \int_{-D/2}^{D/2} \exp(i2\pi\alpha x/\lambda) \exp\left(-\frac{x^2}{\omega^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{D^2/4-x^2}}{\omega}\right) dx, \end{aligned}$$

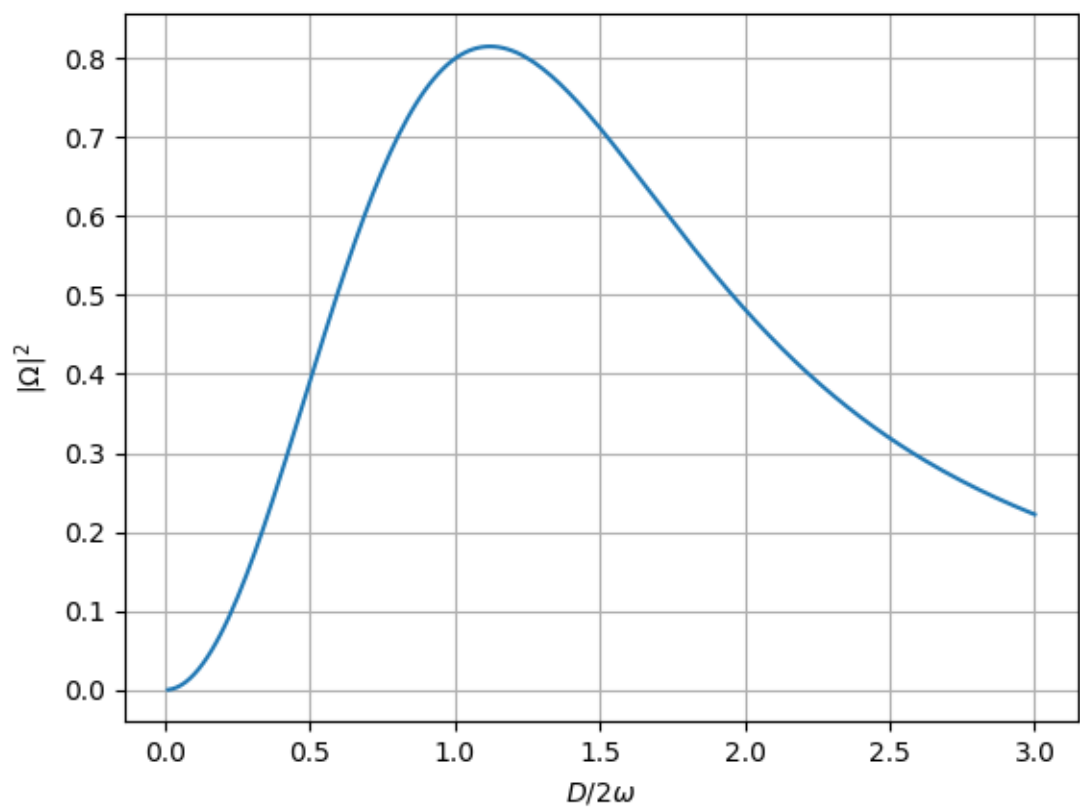


FIGURE 4.2 – Efficacité de couplage  $|\Omega|^2$  en fonction du ratio  $D/2\omega$ , avec un maximum atteint pour 1.12 à 82%.

où erf est la fonction erreur (ou la fonction d'erreur gaussienne) définie comme une fonction complexe d'une variable complexe  $z$  telle que :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (4.17)$$

En effectuant le changement de variable  $X = x/D$ , l'expression précédente devient :

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} \exp\left(i2\pi \frac{\alpha D}{\lambda} X\right) \exp\left(-\left(\frac{D}{\omega}\right)^2 X^2\right) \operatorname{erf}\left(\frac{D}{\omega} \sqrt{\frac{1}{4} - X^2}\right) dX \quad (4.18)$$

Le coefficient de couplage dépend seulement du rapport  $D/\omega$  et du déphasage induit par le basculement entre les deux bords de la pupille :  $2\pi \frac{\alpha D}{\lambda}$ .

**Étendue géométrique associée** Nous avons vu que le flux élémentaire collecté pouvait s'écrire comme le produit de la luminance de la source par l'étendue géométrique élémentaire. De plus, l'étendue géométrique élémentaire peut s'écrire comme le produit de la surface élémentaire de collection par l'angle solide élémentaire sous laquelle est vue la surface élémentaire d'émission. Parallèlement, dans le cas d'une scène uniforme, le flux collecté par le guide d'onde est égal à la luminance moyenne multipliée par la surface de collection  $\pi \frac{D^2}{4}$  et par l'intégrale du coefficient de couplage  $\Omega(\alpha)$  sur toutes les directions  $\alpha$ . On définit ainsi la pseudo étendue géométrique d'un guide d'onde monomode par le produit de ces deux termes.

On se place dans les conditions de couplage maximum ( $D/\omega = 1, 12$ ).  $\Omega(\alpha)$  ne dépend plus que de  $u = \frac{\alpha D}{\lambda}$ .  $\Omega(u)$  est représenté sur la figure 4.3. L'intégrale de  $\Omega(\alpha)$  se simplifie par changement de variable :

$$\Omega_{tot} = 2\pi \int \alpha |\Omega(\alpha)|^2 d\alpha = 2\pi \frac{\lambda^2}{D^2} \int u |\Omega(u)|^2 du. \quad (4.19)$$

Finalement l'étendue géométrique associée à un mode de guide vaut :

$$G_m = \pi \frac{D^2}{4} 2\pi \frac{\lambda^2}{D^2} \int u |\Omega(u)|^2 du = \frac{\pi^2}{2} \lambda^2 \int u |\Omega(u)|^2 du.$$

Une intégration numérique de  $\int_{\alpha D/\lambda} u |\Omega(u)|^2 du$  donne :

$$G_m = \pi \frac{D^2}{4} 2\pi \frac{\lambda^2}{D^2} \int u |\Omega(u)|^2 du = 0.18 \frac{\pi^2}{2} \lambda^2. \quad (4.20)$$

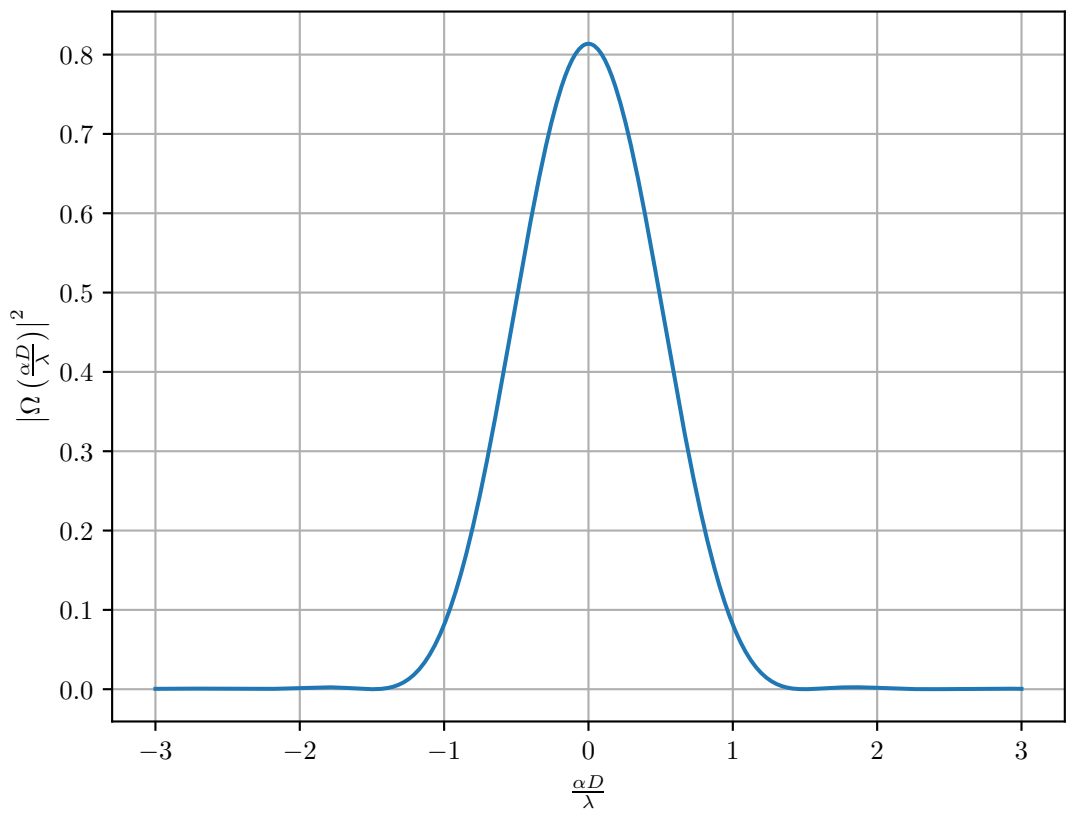


FIGURE 4.3 – Efficacité de couplage  $|\Omega|^2$  en fonction de l'angle normalisé par le diamètre de la tâche de diffraction  $\alpha/(\lambda/D)$ . Sur l'axe ( $\alpha = 0$ ), on retrouve le coefficient de couplage maximum, 82%.

Pour deux modes, on considère  $2 \times G_m$ , soit :

$$2 \times G_m = 0.18\lambda^2\pi^2. \quad (4.21)$$

Cette étendue géométrique de l'équation 4.20 est très proche de la pseudo-étendue géométrique obtenue avec un instrument imageur et définie par une pupille de diamètre  $D$ , et un élément de diamètre égal à celui d'une tâche de diffraction :

$$G_d = \frac{\pi D^2}{4} \times \frac{\pi \lambda^2}{4D^2} = \lambda^2 \frac{\pi^2}{16}. \quad (4.22)$$

L'étendue géométrique associée à la tâche de diffraction d'un instrument imageur est donc 3 fois plus petite que celle associée au couple de modes d'un interféromètre ce qui induira une quantité de photons 3 fois plus petite dans le cas d'un imageur classique que pour un couple de modes.

#### 4.2.2 . Echantillonnage objet

Comme pour tout interféromètre, la fréquence spatiale maximale enregistrée par un télescope de type SPIDER est donnée par la distance maximale séparant deux pupilles, ou base maximale  $B_{\max}$  (figure 4.4), et vaut  $B_{\max}/\lambda$ .

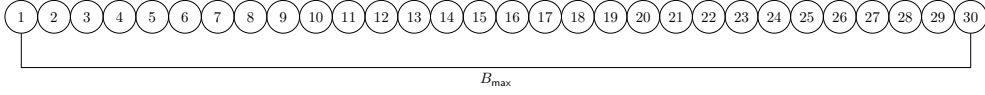


FIGURE 4.4 – Distance maximale séparant deux pupilles, ou base maximale  $B_{\max}$ .

La résolution angulaire d'un tel instrument est donc :

$$r = \frac{\lambda}{B_{\max}}. \quad (4.23)$$

Le champ angulaire étant de  $\lambda/D$ , le nombre de points résolus  $N$  d'un télescope de type SPIDER dans le champ angulaire observable est :

$$N = B_{\max}/D. \quad (4.24)$$

Pour un échantillonnage objet respectant le critère de Shannon-Nyquist, cela signifie que la reconstruction donnera un objet sur un support de  $N_{\text{Shannon}}$  pixels de côté donné par :

$$N_{\text{Shannon}} = \frac{2B_{\max}}{D}. \quad (4.25)$$

### 4.2.3 . Largeur spectrale

La fréquence spatiale de l'objet mesurée pour des pupilles ponctuelles séparées de la distance  $B$  interférant à une longueur d'onde  $\lambda$  avec une largeur de bande nulle est  $B/\lambda$ . Dès que la largeur de bande est non nulle, on enregistre dans l'interférogramme une moyenne de fréquences spatiales de l'objet pour toutes les longueurs d'onde de la bande. Dès lors, quelle largeur de bande spectrale peut-on tolérer ?

Pour répondre à cette question, il est utile de se rendre compte que l'équation 4.6 signifie que même à largeur spectrale nulle, un interféromètre avec injection dans des guides d'onde mesure intrinsèquement une moyenne de fréquences spatiales de l'objet sur une largeur typique de  $D/\lambda$ . Une autre façon de se représenter ceci est de voir que les faisceaux recombinaés contiennent des interférences entre pupilles de diamètre  $D$  espacées de  $B$ , donc entre des paires de points séparés de distances allant de  $(B - D)$  à  $(B + D)$ .

Il est alors raisonnable de spécifier que le moyennage de fréquences spatiales dû à la largeur spectrale  $d\lambda$  soit inférieur au moyennage intrinsèque dû à la taille non nulle des pupilles. En différentiant  $f = B/\lambda$ , d'une part, par rapport à  $\lambda$ , d'autre part par rapport à  $B$ , on obtient la condition suivante :

$$df = \frac{B}{\lambda^2}d\lambda < dB/\lambda = D/\lambda \quad (4.26)$$

soit, pour la longueur d'onde la plus courte de la bande considérée et pour la plus grande base :

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{\min}} < \frac{D}{B_{\max}} \quad (4.27)$$

En inversant cette inégalité, on peut aussi la lire ainsi : le pouvoir de résolution spectral  $\lambda/d\lambda$  doit être supérieur au nombre de points résolus (spatialement) de l'interféromètre  $B_{\max}/D$ . Sans que ce raisonnement soit explicité dans la littérature, il apparaît que les designs actuels suivent cette règle. En particulier dans [Su+18], les canaux spectraux sont séparés de 28 nm et la bande spectrale la plus courte est centrée sur 1065 nm, donc :

$$\frac{\lambda_{\min}}{d\lambda} \simeq 38, \quad (4.28)$$

qui est supérieur au nombre des points résolus :

$$\frac{B_{\max}}{D} = 29. \quad (4.29)$$

Le choix d'une largeur spectrale identique pour tous les canaux a sans doute été le résultat d'une contrainte technologique dans [Su+18]. En l'absence de contrainte, il est possible et souhaitable d'un point de vue rapport signal-à-bruit d'augmenter la largeur spectrale des canaux proportionnellement à la longueur d'onde.

#### 4.2.4 . Temps d'intégration

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer l'effet de l'intégration temporelle sur la mesure, pour en déduire un temps d'intégration acceptable.

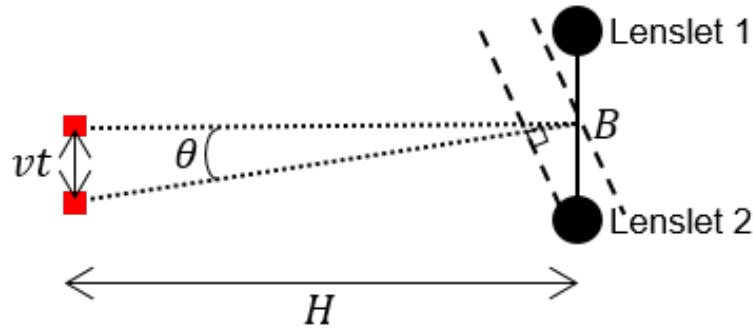


FIGURE 4.5 – Défilement du satellite pendant l'observation d'une scène terrestre.  $B$  est la base séparant les deux pupilles 1 et 2, et  $H$  l'altitude du satellite.

Pendant le temps  $t$ , la scène se déplace d'une valeur  $vt$  ce qui correspond à un déplacement angulaire de  $\frac{vt}{H}$  et à un déphasage de  $\frac{2\pi}{\lambda} B \frac{vt}{H}$  entre deux pupilles placées à une distance  $B$ .

La visibilité complexe instantanée de l'interférogramme s'écrit :

$$\Gamma(t, B/\lambda) = \tilde{o}(B/\lambda) \times e^{i \frac{2\pi}{\lambda} B \frac{vt}{H}} \quad (4.30)$$

où  $\tilde{o}(B/\lambda)$  représente la composante de Fourier de la scène à la fréquence spatiale  $B/\lambda$ . La visibilité mesurée à partir de la moyenne des interférogrammes pendant le temps de pose peut s'exprimer comme la moyenne des visibilités instantanées. On en déduit la visibilité complexe mesurée pendant une intégration de durée  $T$  :

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}\left(\frac{B}{\lambda}\right) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Gamma\left(t, \frac{B}{\lambda}\right) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{o}\left(\frac{B}{\lambda}\right) \times e^{i\frac{2\pi}{\lambda} B \frac{vt}{H}} dt \\
&= \tilde{o}\left(\frac{B}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi B v T}{\lambda H}\right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi B v T}{\lambda H}\right)$  représente l'atténuation du signal induite par le défilement du satellite. En appliquant le théorème de Shannon-Nyquist, on fixe l'atténuation maximum à  $2/\pi$ , ce qui conduit à la condition suivante :

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi B v T}{\lambda H}\right) \geq \frac{2}{\pi}, \tag{4.32}$$

c'est-à-dire :

$$T \leq \frac{\lambda H}{2Bv}. \tag{4.33}$$

Cette condition peut se résumer simplement ainsi : le déplacement pendant un temps de pose ( $vT$ ) doit être inférieur à la demi-résolution, c'est-à-dire à un pixel de l'objet reconstruit pour un échantillonnage de la reconstruction à Shannon.

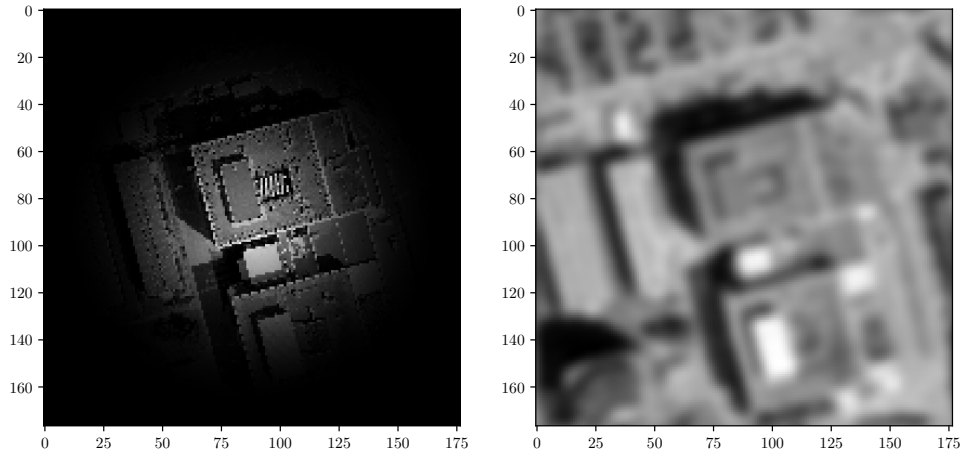
### 4.3 . Comparaison avec un imageur classique

#### 4.3.1 . En l'absence de bruit

L'image détectée par un IOSOOT comme par un instrument imageur n'est pas identique à l'image source. Dans le cas d'un imageur classique, l'image est filtrée par la fonction de transfert optique. Dans le cas d'un IOSOOT, le champ est pondéré par la fonction d'acceptance du mode de propagation du guide d'onde qui capte le signal (lobe). La figure 4.6 illustre la même image vue par un instrument imageur (figure 4.6b) et avec la pondération induite par le mode de couplage de l'IOSOOT (figure 4.6a). L'image source est celle présentée sur la figure 4.1.

Dans l'image obtenue avec un instrument imageur, la fonction de transfert est celle d'un instrument parfait à pupille circulaire, la fréquence de Nyquist étant supposée égale à la fréquence de coupure de l'instrument. Il est intéressant de noter que les oscillations à la fréquence de coupure présentes sur le toit d'un bâtiment dans l'image ne sont plus visibles sur l'image obtenue avec l'instrument, car filtrées par la fonction de transfert.





(a) Lobe d'antenne appliqué à la scène (b) Image mesurée par un imageur observée. On a alors  $\sigma_{\text{eff}}$ . conventionnel.

FIGURE 4.6 – Images qui seraient vue par l'imageur SPIDER et mesurée par un imageur conventionnel.

Les densités spectrales de puissance de l'image source, de l'image vue par un instrument imageur et celle pondérée par un lobe d'antenne sont représentées sur la figure 4.7. La DSP de l'image vue par l'instrument imageur est égale à celle de l'image source atténuée par la fonction de transfert. Aux basses fréquences, les deux spectres sont très proches. Aux hautes fréquences, le spectre de l'image vu par l'imageur est très fortement atténué. Le spectre de l'image pondéré par le lobe d'antenne est supérieur aux deux autres spectres par un artifice numérique : la pondération par le lobe se traduit par une convolution dans l'espace de Fourier qui diminue la valeur relative du spectre à la fréquence fondamentale.

La largeur du lobe représenté sur l'image associée à l'IOSOOT est définie par la dimension de la pupille élémentaire d'un bras d'un interféromètre. Après filtrage par le lobe, l'image détectée est repliée du fait de l'échantillonnage de la pupille par les sous-pupilles de l'IOSOOT. Pour représenter ce repliement, nous avons choisi le tiers de l'image initiale comme taille d'image repliée. Cela correspond à une image de  $59 \times 59$  pixels, soit une image obtenue avec un interféromètre composé de 30 par 30 sous-pupilles jointives dont le diamètre est noté  $D$ . La largeur du lobe représenté sur la figure 4.6 est telle que le rapport entre le diamètre des sous-pupille,  $D$  et le diamètre du mode dans la pupille  $\omega$  vaut  $D/\omega = 1.12$  (couplage optimal sur axe).

Les figures 4.8a et 4.8b représentent ainsi les images obtenues sur un champ de  $59 \times 59$  pixels, en prenant en compte le repliement dans le cas du IOSOOT.

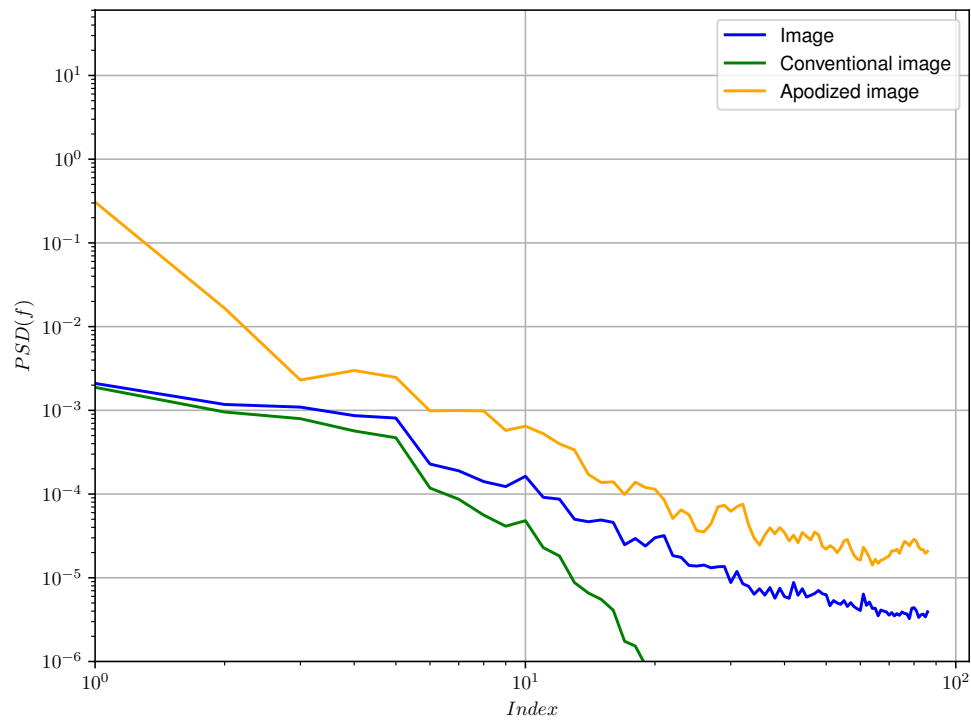
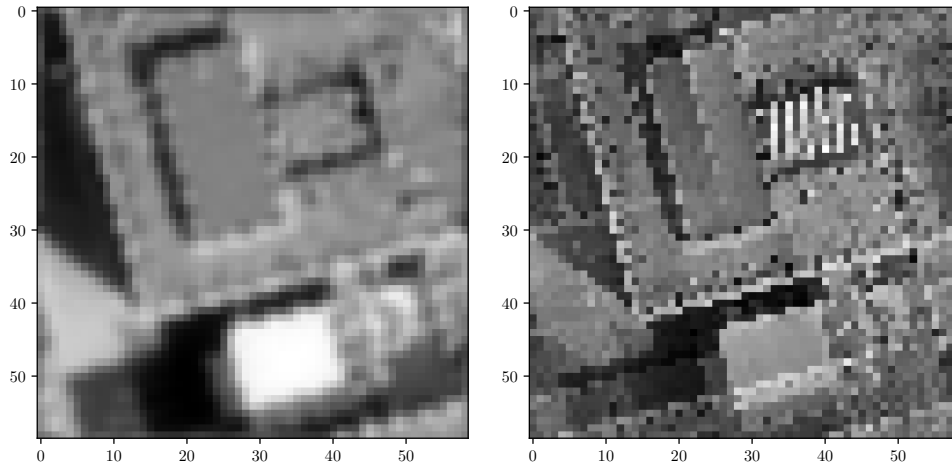


FIGURE 4.7 – DSP de : 1) la scène source (bleu) de la figure 4.1, 2) la scène pondérée par le lobe d’antenne (orange) de la figure 4.6a et 3) la scène vue par un imageur sans aberrations à pupille circulaire (vert) de la figure 4.6b.



(a) Image mesurée par l'imageur conventionnel, sans bruit. (b) Image reconstruite par l'interféromètre SPIDER, sans bruit.

FIGURE 4.8 – Images observées par les différents imageurs : conventionnel (à gauche) et interféromètre (à droite).

En dépit de l'atténuation des bords du champ par le lobe, le repliement de champ s'observe en particulier dans la structure présente en bas de l'image (vers  $x = 30$  et  $y = 50$ ).

Ce phénomène de repliement est intrinsèquement lié à la dimension des sous-pupilles qui est au mieux égale au pas entre sous-pupilles. Pour éliminer ce repliement, une technique de micro-balayage pourrait être envisagée pour réduire le pas d'échantillonnage, comme cela a été mis en oeuvre avec les premiers capteurs infrarouge. Mais cette solution est instrumentalement lourde et retire à l'IOSOOT une partie de ses avantages. Une autre solution pourrait être de tirer avantage du balayage naturel de la scène induit par le déplacement du satellite pour moyenner les effets du repliement, ou mieux encore pour les identifier et les séparer de la scène.

#### 4.3.2 . En présence de bruit : approche analytique

La propagation du bruit dans la reconstruction de l'objet à partir de visibilités complexes est délicate car cette étape peut être notablement non linéaire. C'est pourquoi, nous nous attachons à comparer l'impact du bruit dans l'espace de Fourier de l'image. Pour prendre en compte l'atténuation par la fonction de transfert optique dans le cas imageur, nous allons évaluer le rapport quadratique bruit à signal dans l'espace de Fourier. Ce faisant, la prise en compte de l'effet de la pondération par le lobe ne peut pas être prise en compte. Nous négligeons cet effet dans cette approche analytique.

### 4.3.2.1 L'interféromètre imageur compact

Nous supposons ici que (seulement) deux mesures brutes sont obtenues simultanément en utilisant les deux sorties en opposition de phase de chaque coupleur. Deux autres mesures doivent alors être obtenues en introduisant un déphasage de  $\pi/2$ . Autrement dit, nous avons  $K = 4$ . Chaque mesure complexe utilise donc 2 instants de mesure, chacun produisant 2 mesures interférométriques brutes simultanées, avec chaque instant de mesure recevant  $n_{\text{ph}}/4$  photons par ouverture. Dans ce qui suit, nous supposons que le bruit de la mesure est principalement un bruit de photon ce qui est raisonnable pour de nombreux scénarios, du moins dans le visible et le proche infrarouge. Dans l'analyse du bruit, nous supposons en outre que l'imageur interférométrique compact ne mesure chaque fréquence spatiale qu'une seule fois, comme dans [Deb+22].

Sous l'hypothèse d'un faible contraste, i.e.  $|\gamma| \ll 1$ , la variance du bruit sur la fonction de cohérence mutuelle  $\Gamma$  résultant de la démodulation de quatre mesures brutes est donnée par [Mug+22] et 2.1 :

$$\sigma_{\Gamma(u,v)}^2 = n_{\text{ph}}/4, \quad (4.34)$$

où  $n_{\text{ph}}$  est le nombre moyen de photons reçu par paire de pupilles pour les quatre mesures brutes conduisant à une mesure complexe. Ceci découle directement du fait que  $\Gamma(u, v)$  est la démodulation de quatre mesures de données brutes, chacune étant soumise à un bruit de photons de variance  $n_{\text{ph}}/4$ .

La variance de ces mesures complexes, normalisée par le module carré du signal à la fréquence  $(u, v)$  est donc :

$$\frac{\sigma_{\Gamma(u,v)}^2}{|\Gamma(u, v)|^2} = \frac{n_{\text{ph}}/4}{n_{\text{ph}}^2/16|\gamma(u, v)|^2}, \quad (4.35)$$

soit :

$$\frac{\sigma_{\Gamma(u,v)}^2}{|\Gamma(u, v)|^2} = \frac{4}{n_{\text{ph}}|\gamma(u, v)|^2}. \quad (4.36)$$

Jusqu'à présent on ne fait que rappeler les résultats obtenus pour la modélisation du bruit d'un IOSOOT. Dès lors, on se pose la question : qu'en est-il de la modélisation du bruit d'un imageur classique ?

### 4.3.2.2 L'imageur classique

Le nombre total d'ouvertures élémentaires d'un IOSOOT compact de type SPIDER est noté  $N_p$ . On considère que chaque ouverture élémentaire est utilisée une seule fois et qu'elle est reliée par paires.  $N_p$  est nécessairement pair

et le nombre de fréquences spatiales mesurées est de  $N_p/2$ . Nous considérons un système d'imagerie ayant la même surface collectrice que ce SPIDER. On supposera par ailleurs que le temps de pose de l'imageur classique est le même que celui retenu pour l'interféromètre imageur.

Le nombre de fréquences spatiales mesurées, supposées pavées sur un rectangle, est  $(B_{\max}/D) + 1$  selon un degré de liberté, et  $2B_{\max}/D + 1$  selon l'autre. On a alors  $N_p = (2B_{\max}/D + 1)^2$  fréquences spatiales mesurées (en 2D). Pour compléter la couverture fréquentielle obtenue, et par symétrie hermitienne, on calcule également le nombre de pixels de l'image reconstruite  $N_{\text{pix}} = (4B_{\max}/D + 1)^2$ . Donc l'image reconstruite comporte un nombre de pixels égal à deux fois le nombre de fréquences spatiales mesurées, soit  $N_{\text{pix}} = N_p$ . L'étendue géométrique du pixel d'un imageur à Shannon s'écrit :

$$G_{\text{pix}} = \left( \frac{\lambda}{2D} \right)^2 \times \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \lambda^2}{16}, \quad (4.37)$$

où  $D$  est le diamètre du télescope imageur. En faisant le rapport de cette étendue géométrique avec la pseudo-étendue géométrique de deux modes de guide (équation 4.21)  $2G_m = 0.18\lambda^2\pi^2$ , on obtient l'expression du nombre moyen de photons  $N'_{\text{ph}}$  captés par pixel dans un imageur de même surface et de même temps de pose :

$$N'_{\text{ph}} = \frac{1}{0.18 \times 16\pi} n_{\text{ph}} \approx \frac{n_{\text{ph}}}{9}. \quad (4.38)$$

Finalement, le nombre de photons total dans l'image vaut  $N_{\text{phtot}} = N_p N'_{\text{ph}} \approx N_p \frac{n_{\text{ph}}}{9}$ .

Nous avons déjà supposé que la visibilité est négligeable par rapport à 1. Pour un instrument d'imagerie classique, nous supposons en outre que la luminance de la scène est suffisamment homogène, de sorte que le bruit peut être considéré comme stationnaire, c'est-à-dire que la variance du bruit de l'imageur classique  $\sigma_n^2$  est approximativement constante sur tous les pixels  $N_{\text{pix}}$ . Nous supposons également que le bruit de photons est prépondérant. Ce bruit étant indépendant d'un pixel à l'autre, son spectre est uniforme. Il se calcule facilement à la fréquence fondamentale où la transformée de Fourier du signal est égale à l'intégrale du signal et vaut  $N_{\text{phtot}}$ .

Finalement, en notant que le rapport quadratique bruit-à-signal à la fréquence fondamentale vaut  $N_{\text{phtot}}/N_{\text{phtot}}^2$ , on obtient :

$$\frac{\sigma_n^2}{|\tilde{i}(u, v)|^2} = \frac{N_{\text{phtot}}}{N_{\text{phtot}}^2 |\gamma(u, v)|^2 |\tilde{\mathbf{h}}|^2}, \quad (4.39)$$

ou encore :

$$\frac{\sigma_n^2}{|\tilde{i}(u, v)|^2} = \frac{9}{N_p n_{\text{ph}} |\gamma(u, v)|^2 |\tilde{h}|^2}. \quad (4.40)$$

### 4.3.2.3 Comparaison

La comparaison des relations 4.36 et 4.40 suggère que les rapports signal à bruit sont similaires pour les deux types d'instruments, i.e. proportionnels à  $\sqrt{N'_{\text{ph}}}$ , et qu'ils sont identiques si :

$$|\tilde{h}| = \sqrt{\frac{9}{4N_p}} = \frac{3}{2\sqrt{N_p}}, \quad (4.41)$$

En d'autres termes, pour ce qui est de la propagation du bruit, un IOSOOT compact "standard" (standard dans le sens où chaque fréquence spatiale serait mesurée une et une seule fois) est équivalent à un imageur conventionnel ayant une MTF plate de l'ordre de  $\frac{3}{2\sqrt{N_p}}$ .

Il convient de noter qu'il existe des imageurs à plan focal dont la MTF est assez plate, notamment les instruments à réseau phasé ou les télescopes à ouverture clairsemée avec une redondance minimale, tels que ceux examinés dans la référence [CM18]. Pour ces derniers, la MTF est plate et de l'ordre de  $1/N_{\text{tel}}$ , où  $N_{\text{tel}}$  est le nombre d'ouvertures.

Enfin, les résultats ci-dessus montrent que, pour les plus hautes fréquences spatiales, un imageur interférométrique compact et un instrument d'imagerie conventionnel ont un comportement très similaire en ce qui concerne le bruit. Pour le premier, la propagation du bruit est défavorable pour les basses fréquences. Cependant, il est tout à fait possible, pour une tâche particulière (la détection par exemple), de concevoir la fonction de transfert d'un imageur interférométrique compact pour qu'elle soit plus élevée aux fréquences spatiales pertinentes pour la tâche.

Afin d'illustrer ces résultats analytiques, nous avons procédé à une simulation numérique avec la scène urbaine de la figure 4.1, pour l'imageur conventionnel et l'IOSOOT.

## 4.4 . Modélisation numérique E2E

### 4.4.1 . Conditions retenues

#### 4.4.1.1 Longueur d'onde centrale de la bande spectrale

On choisit la bande spectrale correspondant au maximum du spectre d'éclairement solaire sur la figure 4.9, très couramment utilisée pour l'imagerie. On

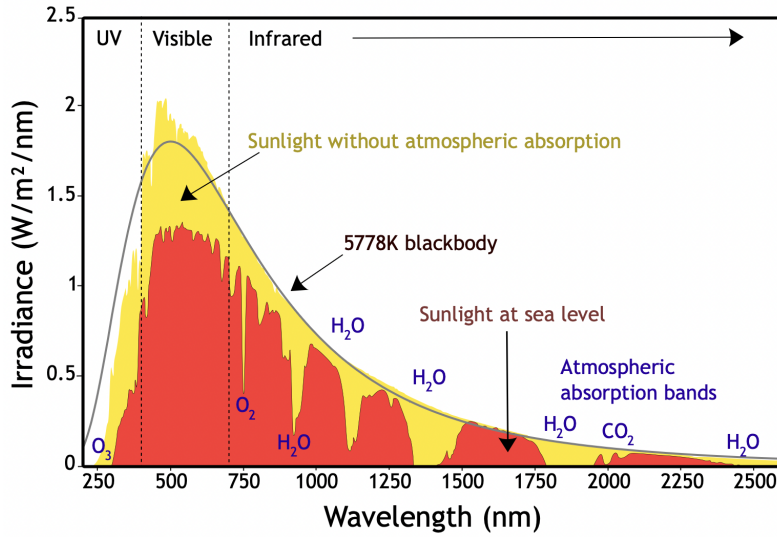


FIGURE 4.9 – Spectre d'éclairement solaire. Crédit : [Wikipédia](#).

observe que le pic d'éclairement est atteint pour  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

#### 4.4.1.2 Largeur spectrale

Ayant  $\lambda$ , on accède directement à la largeur spectrale  $\Delta\lambda$  par la relation 4.27. On choisit ainsi :

$$\Delta\lambda = \frac{D}{B_{\max}} \lambda, \quad (4.42)$$

soit, en prenant en compte  $D = d$ ,  $B_{\max} = 29d$  et  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , on a finalement une largeur spectrale de  $\Delta\lambda \approx 17 \text{ nm}$ . Il faut noter que ce choix n'est pas favorable en terme de flux pour l'IOSOOT. En effet, le choix d'une longueur plus importante aurait permis une augmentation très significative du flux disponible comme cela est illustré sur la figure 4.10.

#### 4.4.1.3 Base maximale

Pour accéder à la base maximale, on doit utiliser le pas pixel de la reconstruction projeté au sol en calculant le Ground Sample Distance (GSD) défini par :

$$\begin{aligned} GSD &= \frac{1}{2f_{\max}} \\ &= \frac{\lambda H}{2B_{\max}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

En supposant qu'on veuille que le pas pixel soit fixé à 50 cm, en considérant toujours une altitude  $H = 500 \text{ km}$ , on obtient une base maximale  $B_{\max} = 25 \text{ cm}$ .

#### 4.4.1.4 Taille des pupilles

Comme dans l'étude SPIDER détaillée dans le chapitre 3, on peut considérer un bras interférométrique pavé de 30 sous-pupilles de base maximale  $B_{\max} = 29d$ , avec  $d$  le diamètre d'une sous-pupille. Les 30 sous-pupilles sont supposées jointives, i.e. positionnées selon un pas  $d$ , pour minimiser les pertes de flux entre les sous-pupilles.  $B_{\max} = 29d$ , donc  $d = B_{\max}/29$ . Ainsi, on accède au diamètre de la sous-pupille :  $d \approx 8.6$  mm.

#### 4.4.1.5 Scène observée

Nous supposons dans cette section l'observation d'une scène urbaine. Ce type de scène présente intrinsèquement une régularité des structures artificielles. Sa décroissance spectrale  $p$  doit donc être particulièrement élevée. Nous retenons donc la valeur de  $p = 2$ , qui est également celle de qu'on retrouve en fittant les DSP de notre scène urbaine avec le modèle de [KP97].

#### 4.4.1.6 Temps de pose

Le temps de pose  $T$  retenu est le temps maximum défini dans l'équation 4.33. On prend :

$$T_{\max} = \frac{\lambda H}{2B_{\max}v} \quad (4.44)$$

en considérant, dans le cadre réaliste d'un instrument observant la Terre, les paramètres suivants :

- une longueur d'onde  $\lambda = 500$  nm,
- une altitude  $H = 500$  km,
- une vitesse de défilement  $v = 7$  km/s,
- une base maximale de  $B_{\max} = 25$  cm.

L'application numérique donne  $T_{\max} \approx 71$   $\mu$ s.

#### 4.4.1.7 Nombre de photons total $n_{\text{ph}}$

Le nombre de photons total  $n_{\text{ph}}$  reçu par une paire de pupilles pendant une mesure interférométrique se calcule à partir de :

- l'étendue géométrique  $G_{m,\lambda}$ , dont la valeur numérique pour nos conditions d'étude a été explicité dans l'équation 4.20,
- le temps de pose  $T_{\max}$ ,
- la largeur spectrale  $\Delta\lambda$ ,
- la température  $T = 5780$  K,
- l'émittance  $M_{\text{Terre}\lambda}$ ,



- l'albédo moyen  $\rho_\lambda$ ,
- le coefficient d'atténuation lié à la propagation du rayonnement dans l'espace depuis le Soleil jusqu'à la Terre  $(R_\odot/R_{\odot-\text{Terre}})^2 = M_{\text{Terre}\lambda}/M_{\odot\lambda}$ ,
- le coefficient de transmission terrestre  $\tau_{\text{atm},\lambda}$ .

Il vaut :

$$n_{\text{ph}} = \Delta\lambda \times 2G_{\text{m},\lambda} \times T_{\text{max}} \times \rho_\lambda \tau_{\text{atm},\lambda}^2 \left( \frac{R_\odot}{R_{\odot-\text{Terre}}} \right)^2 \frac{2c}{\lambda^4} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}, \quad (4.45)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\lambda = 0.3, \\ \tau_{\text{tau},\lambda} = 0.9, \\ \left( \frac{R_\odot}{R_{\odot-\text{Terre}}} \right)^2 = 2.2 \times 10^{-5}, \\ \frac{2c}{\lambda^4} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} = 6.65 \times 10^{31} \quad \text{ph.s}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{nm}^{-1}. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Ainsi, en remplaçant les différentes grandeurs par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\begin{aligned} n_{\text{ph}} &= (17 \times 10^{-9}) \times (2 \times 2.23 \times 10^{-13}) \times (71 \times 10^{-6}) \times (3.48 \times 10^{26}) \\ &= \mathbf{190 \text{ ph.}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ce nombre de photons a été calculé pour une longueur d'onde de 500 nm. Pour étudier l'influence de  $\lambda$  (à temps de pose et largeur spectrale égaux) sur la quantité de photons  $n_{\text{ph}}$ , on représente les figures 4.10a et 4.10b. On a :

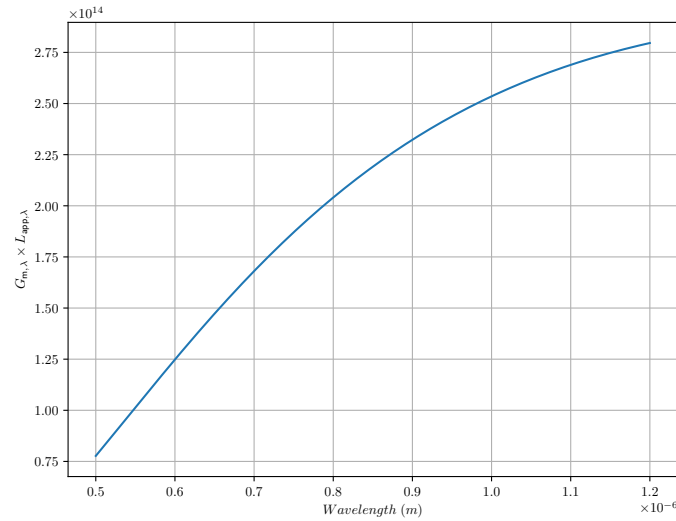
- le produit de l'étendue géométrique  $G_{\text{m},\lambda}$  et de la luminance apparente  $L_{\text{app},\lambda}$ ,
- l'expression 4.45 (par multiplication du produit  $G_{\text{m},\lambda} \times L_{\text{app},\lambda}$  par la constante  $\Delta\lambda T_{\text{max}}$ ).

Ainsi dans le domaine visible, la décroissance du spectre solaire est largement compensée par l'augmentation de l'étendue géométrique, proportionnelle à  $\lambda^2$ . Dans la suite, nous nous placerons toutefois à 500 nm. Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, les effets d'un tel nombre de photons sur la scène reconstruite par un IOSOOT en raisonnant sur les propriétés spatiales de la scène (contraste/visibilité en fonction de la fréquence spatiale).

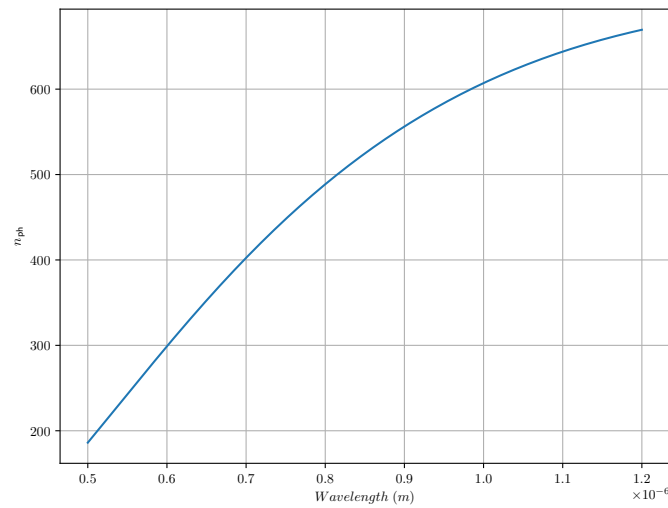
#### 4.4.2 . Résultats

##### 4.4.2.1 Application du bruit

Soit le rapport signal-à-bruit pour une fréquence donnée, défini dans l'équation 2.54 dans le chapitre 2 relatif à la propagation du bruit dans la fonction de cohérence mutuelle. Nous avons calculé, dans l'équation 4.47, la valeur du



(a) Influence de la longueur d'onde sur le produit de l'étendue géométrique et de la luminance apparente.



(b) Influence de la longueur d'onde sur le nombre de photons total.

FIGURE 4.10 – Évolution du nombre de photons selon différents paramètres.

nombre de photons totale lors d'une mesure de la fonction de cohérence mutuelle, pour une longueur d'onde de 500 nm. Si on suppose qu'on est en présence d'un bruit de photons dominant et inhomogène, ce qui est un scénario réaliste pour l'observation de la Terre depuis l'espace, et qu'on utilise le meilleur cas pour ce bruit : i.e.  $K = 6$ . On applique alors un bruit, suivant une loi Gaussienne, avec une variance de :

$$\sigma_{\Re(\Gamma)}^2 = \sigma_{\Im(\Gamma)}^2 = \frac{n_{\text{ph}}(16 - 12|\gamma|^2 + |\gamma|^4)}{72(4 - 2|\gamma|^2)}, \quad (4.48)$$

où  $n_{\text{ph}}$  est donnée par l'équation 4.45. On suppose que le bruit sur la fréquence nulle est nul. En réalité, la fréquence 0 étant mesurée autant de fois qu'on a de mesures indépendantes, i.e.  $N_p^2$  fois, sa variance est atténuée par  $1/N_p^2$ . L'hypothèse de  $\frac{\sigma_{\Re(0,0)}^2}{N_p^2} \simeq 0$  en première approche est donc réaliste. De plus, le bruit est généré avec une symétrie hermitienne, correspondant à un bruit réel dans l'espace de l'image.

Nous comparons, sous les mêmes hypothèses :

- les images reconstruites d'un interféromètre type SPIDER avec une méthode d'échantillonnage de  $K = 6$  et une méthode d'estimation par maximum de vraisemblance,
- et les images mesurées pour un bruit de photons de variance  $N_{\text{phot}}$  dans le cas d'un imageur conventionnel.

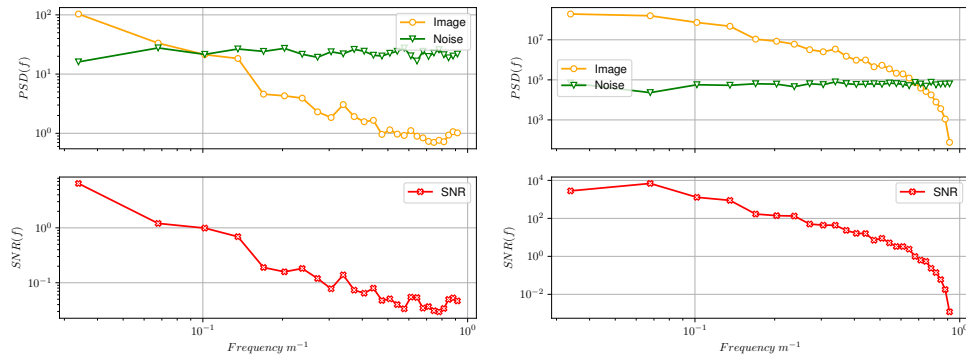
#### 4.4.2.2 Résultats et discussions

On procède à l'application du bruit. On commence par  $n_{\text{ph}} = 200$  dans la figure 4.11, correspondant au flux photonique qu'on a calculé avec l'équation 4.45.

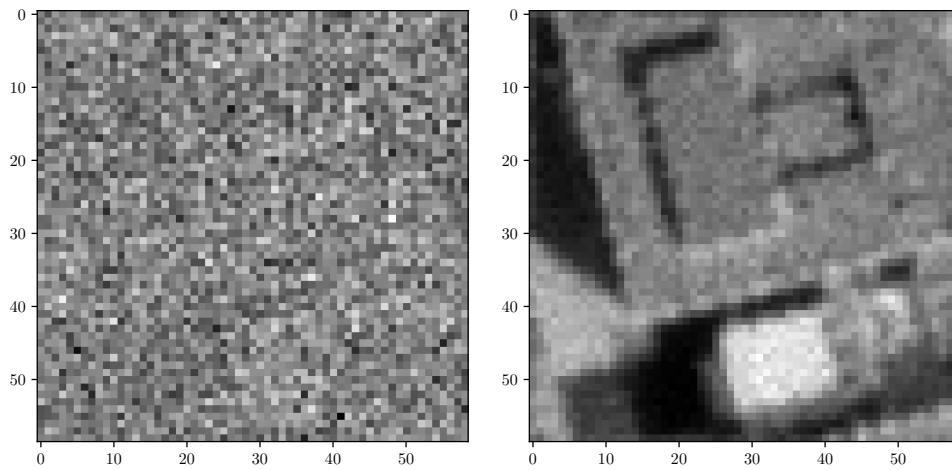
On remarque que la qualité de l'image reconstruite par l'interféromètre est insuffisante. Le niveau du bruit l'emporte à partir de  $0.1 \text{ m}^{-1}$ , i.e. pour les moyennes et hautes fréquences. Quant à l'imageur classique, le niveau de bruit reste assez négligeable par rapport au signal et ce jusqu'à environ  $0.7 \text{ m}^{-1}$  et la qualité de l'image mesurée permet de distinguer les différentes structures de la scène urbaine observée.

Le signal étant insuffisant pour l'interféromètre, on regarde les mêmes images mais en considérant  $n_{\text{ph}} = 6000$  dans la figure 4.12, i.e. le cas où le SNR de la fréquence de coupure  $f_o$  de l'interféromètre type SPIDER est égale à 1.

On remarque à nouveau que l'image mesurée par le dispositif conventionnel est toujours satisfaisante, mais avec un niveau de bruit plus faible que dans le

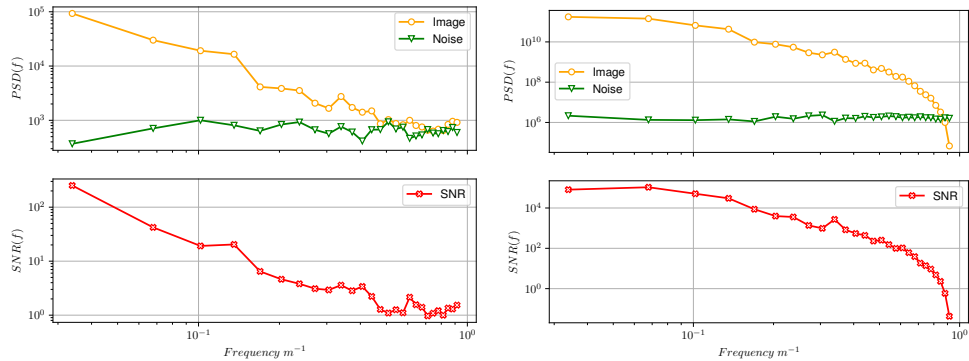


(a) DSP et SNR pour l'interféromètre. (b) DSP et SNR pour l'imageur conventionnel.

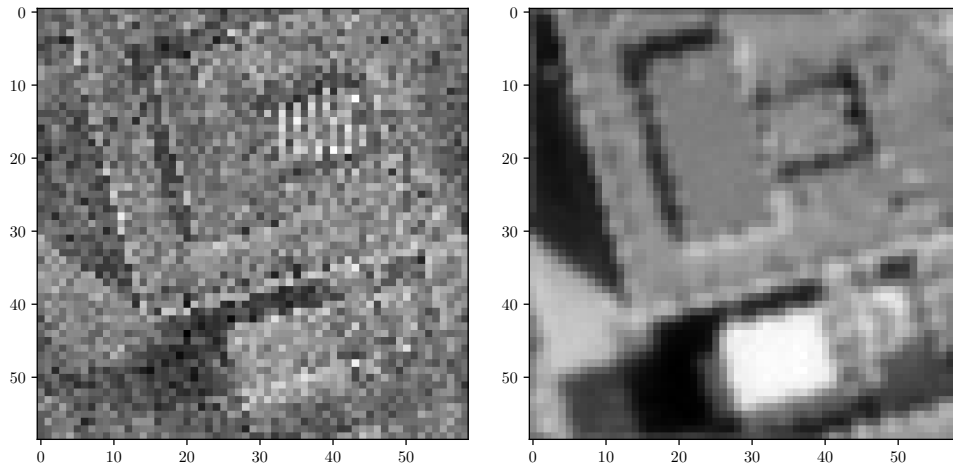


(c) Image reconstruite par l'interféromètre. (d) Image mesurée par l'imageur conventionnel.

FIGURE 4.11 – On considère  $n_{\text{ph}} = 200$  pour l'évaluation des performances de SPIDER et  $N_{\text{phtot}} = N_{\text{pix}}^2 N'_{\text{ph}}$  pour l'imageur classique, avec  $N_{\text{pix}} = 59$ ,  $N'_{\text{ph}} = 66$  photons et  $N_{\text{phtot}} = 2.10^5$  photons.



(a) DSP et SNR pour l'interféromètre. (b) DSP et SNR pour l'imageur conventionnel.



(c) Image reconstruite par l'interféromètre. (d) Image mesurée par l'imageur conventionnel.

FIGURE 4.12 – On considère  $n_{\text{ph}} = 6000$  pour l'évaluation des performances de SPIDER et  $N_{\text{phtot}} = N_{\text{pix}}^2 N'_{\text{ph}}$  pour l'imageur classique, avec  $N_{\text{pix}} = 59$ ,  $N'_{\text{ph}} = 2000$  photons et  $N_{\text{phtot}} = 7.10^6$  photons.

cas  $n_{\text{ph}} = 200$ . Cependant, l'image reconstruite par l'interféromètre commence à afficher des structures marquées, mais celles-ci restent toujours très bruitées.

On choisit enfin de considérer  $n_{\text{ph}} = 20\,000$  dans la figure 4.13.

L'image reconstruite par SPIDER présente des structures bien marquées, contrairement aux images reconstruites pour  $n_{\text{ph}} = 200$  et  $n_{\text{ph}} = 6000$ . Le bruit maintient partout dans le spectre un niveau plus bas que le signal. On remarque également que les artéfacts observés dans la scène reconstruite par SPIDER dans la figure 4.8b restent présents, mais cela n'empêche pas la distinction des différents éléments de l'image reconstruite de manière aisée. Quant à l'image mesurée par l'imageur classique, elle reste à fort rapport signal-à-bruit, donc très similaire au cas précédent,  $n_{\text{ph}} = 6000$ .

En résumé, ces résultats illustrent bien les calculs analytiques sur le SNR qu'ont été menés dans la section 4.3 : l'interféromètre permet de voir des détails à la limite de résolution qu'un imageur classique ne permet pas d'observer là car la fonction de transfert optique est quasiment nulle à la fréquence de coupure  $f_o$ . En revanche, lorsque le signal est trop faible, aux moyennes fréquences pour lesquelles la fonction de transfert optique de l'imageur est élevée, le spectre de l'image donnée par l'imageur sort du bruit au contraire du signal de l'interféromètre.

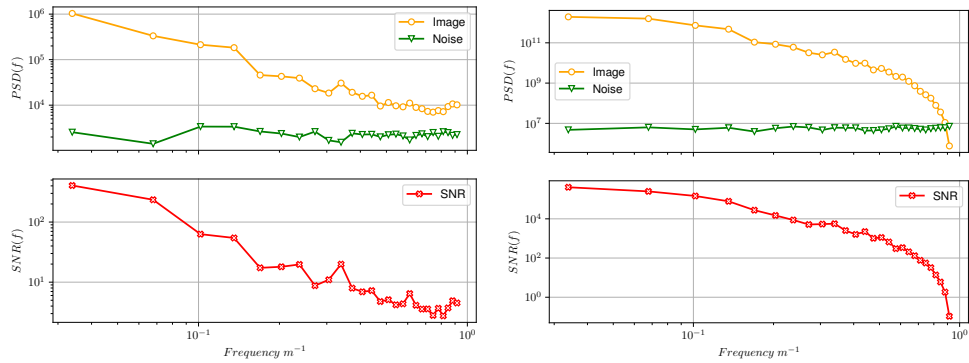
#### 4.4.3 . Pistes d'amélioration pour l'augmentation du flux

Comme nous pouvons le constater à partir des figures 4.11, 4.12 et 4.13, nous commençons à percevoir des détails bien visibles que à partir de  $n_{\text{ph}} = 20\,000$ . Or, comme on a pu le calculer dans l'équation 4.45, on a  $n_{\text{ph}} = 200$ . Mais alors, pouvons nous augmenter ce flux photonique pour qu'on puisse obtenir une image avec des détails perceptibles ?

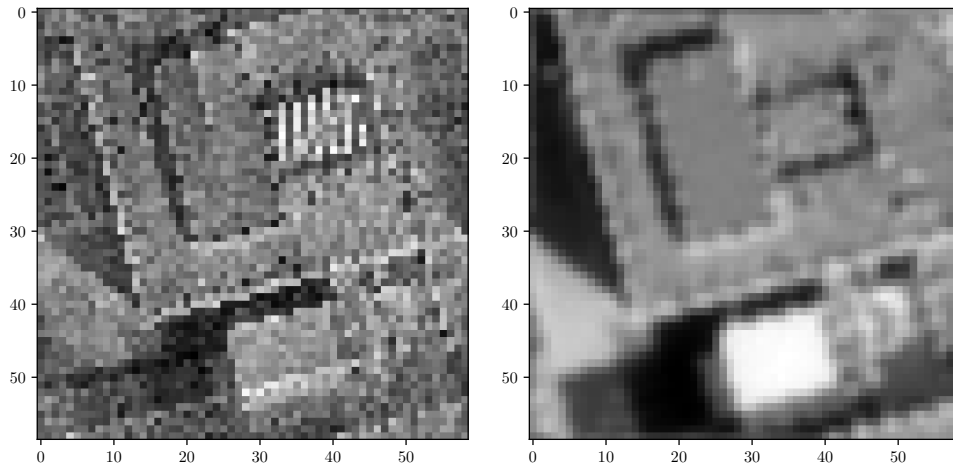
Plusieurs pistes peuvent être envisagées afin de répondre à cette problématique.

Une première solution repose sur le principe du photodétecteur à report et intégration (ou plus communément *TDI* en anglais), destiné à capter des images d'objets peu éclairés. De la même façon qu'il est possible d'intégrer le signal dans des puits qui se translatent à la même vitesse que l'image, il est possible de piloter les déphaseurs d'un IOSOOT pour compenser le défilement de l'image et augmenter le temps d'intégration du signal.

Une autre approche pourrait consister à faire une intégration numérique a posteriori de l'image défilante. En effet, à chaque instant l'IOSOOT permet d'obtenir une image qui se décale légèrement. Cette seconde approche n'est pas



(a) DSP et SNR pour l'interféromètre. (b) DSP et SNR pour l'imageur conventionnel.



(c) Image reconstruite par l'interféromètre. (d) Image mesurée par l'imageur conventionnel.

FIGURE 4.13 – On considère  $n_{\text{ph}} = 20\,000$  pour l'évaluation des performances de SPIDER et  $N_{\text{phtot}} = N_{\text{pix}}^2 N'_{\text{ph}}$  pour l'imageur classique, avec  $N_{\text{pix}} = 59$ ,  $N'_{\text{ph}} = 6666$  photons et  $N_{\text{phtot}} = 2.10^7$  photons.

utilisée dans le cas de détecteurs plan focaux du fait de la taille des images à traiter mais dans le cas d'un IOSOOT, le nombre de points résolus est suffisamment limité pour cette approche soit considérée comme réaliste. Le gain en flux dans ce dernier cas serait égale au nombre de points résolus dans la direction du défilement (59 dans notre cas si on se réfère aux images reconstruites 4.11, 4.12 et 4.13). Il resterait alors un facteur légèrement inférieur à 2 pour atteindre l'objectif final :  $n_{\text{ph}} = 20\ 000$ . Il faut souligner que cette approche n'est pas combinable avec l'utilisation des déphaseurs.

Ce dernier facteur pourrait être gagné grâce à la fusion a posteriori des données issues des différents canaux spectraux lors d'observation de scènes grises, de la même façon que des images panchromatiques sont enregistrées avec un imageur classique.

#### 4.5 . Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié l'application du concept SPIDER à l'observation de la Terre.

Nous avons tout d'abord précisé les conditions d'emploi d'un tel dispositif (champ, nombre de point résolu, bande spectrale, temps de pose). Une première simulation numérique a permis de donner l'exemple d'une image qui pourrait être obtenue avec un tel dispositif en l'absence de bruit. Cet exemple a mis en évidence la présence de repliement de champ de vue dû à l'angle d'acceptance trop important du mode de guide.

La limite en résolution de tous les instruments d'imagerie est limitée par le rapport signal-à-bruit aux hautes fréquences spatiales. Nous avons montré analytiquement que si l'imageur classique se compare favorablement à l'imageur interférométrique jusqu'aux moyennes fréquences spatiales pour lesquelles la fonction de transfert optique reste élevée, il n'en est pas de même aux hautes fréquences, près de la fréquence de coupure, où l'interféromètre présente un meilleur rapport signal-à-bruit.

Ce comportement au bruit a été alors illustré par une simulation numérique menée dans des conditions photométriques représentatives de l'observation de la Terre. Le flux disponible pour obtenir une image acceptable n'est pas suffisant avec une seule courte pose. Ce problème n'est pas surprenant puisqu'il se rencontre de la même façon avec un imageur classique. Comme avec un imageur classique, il est possible d'augmenter le temps de pose par hardware : l'effet du TDI mis en oeuvre avec un classique pourrait être reproduit en utilisant les déphaseurs de l'interféromètre à condition de développer des dispositifs



à grande dynamique. Il est également possible d'augmenter le temps de pose artificiellement par addition d'images, la taille des données étant suffisamment faible pour qu'elles soient enregistrées et traitées a posteriori.

#### **4.6 . Proceeding "Interferometric imaging as an alternative to telescopes"**

Le proceeding de la conférence ICSO à Dubrovnik (Croatie, en 2022) explore l'étude comparative entre l'imageur classique et l'interféromètre SPIDER.

# Interferometric imaging as an alternative to telescopes

Hiyam Debary<sup>a,c</sup>, Vincent Michau<sup>a</sup>, Laurent Mugnier<sup>a</sup>, Frédéric Cassaing<sup>a</sup>, Matthieu Castelnaud<sup>b</sup>, and Sébastien Lopez<sup>c</sup>

<sup>a</sup>ONERA, Université de Paris-Saclay, 6 Chemin de la Vauve aux Granges, Palaiseau, France

<sup>b</sup>CNES, 18 avenue Edouard Belin, Toulouse, France

<sup>c</sup>Airbus Defence and Space, 31 Rue des Cosmonautes, 31402 Toulouse Cedex 4, France

## ABSTRACT

A concept of optical interferometric imager was proposed by Lockheed-Martin in the early 2010s. In this concept, the aperture is paved by lenses. The optical signals collected by these lenses are combined in photonic integrated circuits, allowing the simultaneous measurement of the Fourier components of the observed object at a number of spatial frequencies. This concept allows one to consider a very significant reduction of the size of optical telescopes, e.g., for Earth observation. Indeed, the transverse dimension of a device based on this concept remains close to that of a telescope of the same resolution since the transverse size determines the spatial resolution. On the other hand, its size along the optical axis is much smaller than that of a conventional telescope.

After a quick description of this concept, its intrinsic performance will be analyzed. The field of this device, its spatial resolution, the spectral constraints imposed by the interferometric measurement will be presented. Based on these preliminary considerations, the noise on the measurement will be evaluated. The measurement noise will be compared to that obtained with a focal plane imaging instrument.

The geometry of combination of the signals collected by the lenses, or aperture configuration, is a key issue to minimize the size of the device and optimize the quality of the reconstructed image at a given spatial resolution. The literature proposes solutions leading to a partial frequency coverage. In this communication, solutions will be presented leading to a frequency coverage that is more suitable for applications such as Earth observation.

**Keywords:** Interferometry, Photonic integrated circuit, Earth observation, signal-to-noise ratio, spatial frequency coverage

## 1. INTRODUCTION

The innovative optical imaging system concept based on interferometry known as SPIDER<sup>\*1</sup> could bring substantial gains in size and weight compared to a conventional focal plane imager by combining the following ideas:

- replace a focal plane imager by an interferometer which is illustrated Fig. 1a ;
- use the technology of PICs (*Photonic Integrated Circuit*) to realize in an extremely reduced thickness the functions of phase shifting, beam coupling, spectral dispersion and detection, as illustrated Fig. 1b.

The concept of SPIDER was presented in 2013,<sup>1</sup> by researchers at Lockheed-Martin, and several preliminary experimental demonstrations followed.<sup>3,4</sup> Several aspects of such a concept have been studied since then.<sup>5-9</sup> A  $Si_3N_4$  PIC demonstrator with 12 baselines and 18 spectral channels dispersed by an *Arrayed Waveguide Grating* or AWG was then developed by Lockheed-Martin and UC Davis.<sup>10</sup> The experimental laboratory demonstration of the near-infrared SPIDER imager based on this PIC resulted in a publication in 2018,<sup>2</sup> which is the most comprehensive publication by these two teams.

---

Further author information: (Send correspondence to V. Michau or Hiyam Debary)

V. Michau: E-mail: vincent.michau@onera.fr, Telephone: +33 (0)6 84 53 24 62

H. Debary: E-mail: hiyam.debary@universite-paris-saclay.fr, Telephone: +33 (0)6 35 58 54 43

\*SPIDER stands for Segmented Planar Imaging Detector for Electrooptical Reconnaissance.

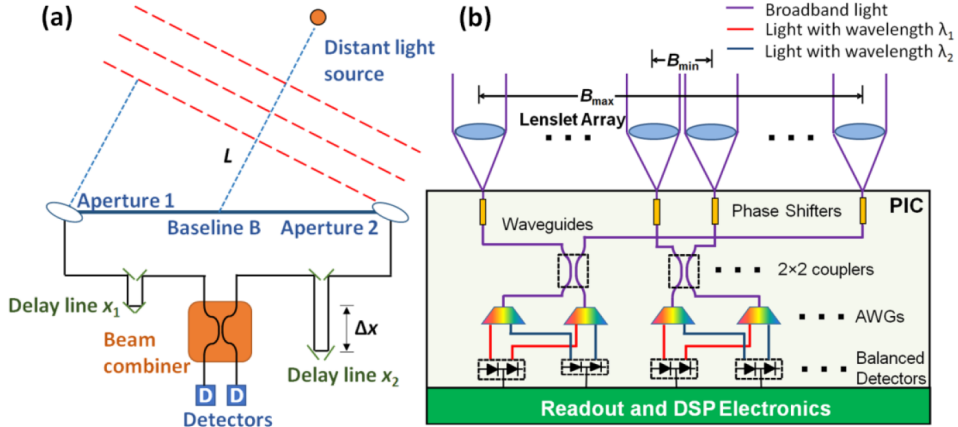


Figure 1: a: principle of an interferometer (long baseline, delay lines, fibered combination); b: principle of SPIDER (micro-lens array, injection in a PIC that contains phase shifters, couplers, dispersing elements (AWG) and detectors). Illustration taken from Ref. 2.

The diagram in Figure 1 shows that at their entry in the PIC, the beams in each guide meet first the phase shifters, then the couplers, which combine the apertures two by two, then only the dispersive elements (AWG), and finally the detectors. The flux recorded by the detectors allows, via a modulation produced by the phase shifters, to reconstruct the contrast and the phase of the interference fringes of each pair of recombined apertures. The contrast and phase are grouped into a quantity called *complex visibility*, which gives a sample of the Fourier Transform of the object via the Van Cittert-Zernike theorem. Then, the object can be estimated through an image reconstruction, using a method among those developed in astronomical interferometry.<sup>11,12</sup>

The telescope uses a large number of baselines to sample the complex visibility of the observed object on a rather large number of spatial frequencies. The implementation proposed by Lockheed-Martin is presented in Figure 2, taken from Ref. 2.

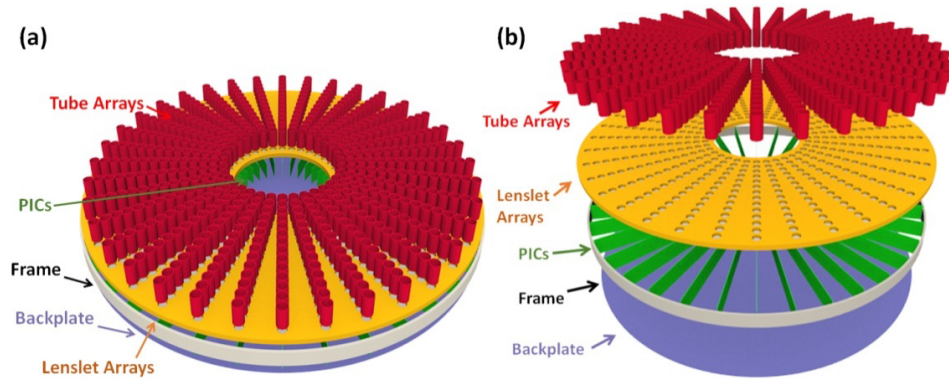


Figure 2: schematic diagram of a compact interferometric imager (taken from Ref. 2).

## 2. BASIC DESIGN RULES

### 2.1 Field of view

With SPIDER, the observed object is apodized by the “antenna lobe” in intensity  $L$  of the waveguide inside which the light is coupled, so that the effective object whose complex visibilities are measured by the interferometer is:

$$o_{\text{eff}}(\alpha_x, \alpha_y) = o(\alpha_x, \alpha_y) \times L(\alpha_x, \alpha_y). \quad (1)$$

$L$  is the intensity of the back-propagation towards the object of the waveguide's propagation mode in the aperture plane:  $L = |\text{FT}(P)|^2$ .  $L$  is typically a Gaussian 2D function of FWHM  $\lambda/D$ , where  $\lambda$  is the wavelength and  $D$  is the diameter of the apertures, as studied in details in Refs. 13,14. Finally, the field-of-view (FOV) of SPIDER is:

$$\theta_{\text{fov}} = \lambda/D. \quad (2)$$

## 2.2 Visibility measurement model

Let us consider a pair of apertures separated by  $\mathbf{B}$  measuring the spatial frequency  $(u, v) = \mathbf{B}/\lambda$ . Let us call  $C_1$  (respectively  $C_2$ ) the coupling coefficient of aperture 1 (respectively 2) towards the output,  $\phi_k$  the modulation phase of the  $k$ -th measurement, and  $N_{\text{ph}}$  the mean number of photons received in each of the two apertures, during a given exposure time. Assuming balanced channels *i.e.*,  $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$ , a model of the recorded raw data (intensities) is:

$$i(u, v, \phi_k) = N_{\text{ph}} \{1 + |\gamma(u, v)| \cos[\phi_k + \theta(u, v)]\}, \quad (3)$$

where the complex visibility of the observed object is:

$$\gamma(u, v) = |\gamma(u, v)| \exp(j\theta(u, v)). \quad (4)$$

The mean number of photons received and detected per aperture and exposure time is:

$$N_{\text{ph}} = \int o(\alpha_x, \alpha_y) \times L(\alpha_x, \alpha_y) d\alpha_x d\alpha_y. \quad (5)$$

By using typically four measurements ( $\phi_k = (k-1)\pi/2$ , for  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) followed by a demodulation<sup>†</sup>, one obtains a complex measurement  $y(u, v)$  proportional to the mean number of photons received in each of the two apertures and to the complex visibility of the object at the measured spatial frequency:

$$y(u, v) = N_{\text{ph}} |\gamma(u, v)| \exp(j\theta(u, v)) = N_{\text{ph}} \gamma(u, v). \quad (6)$$

Thanks to the Van Cittert-Zernike theorem:

$$\gamma(u, v) = \tilde{o}_{\text{eff}}(u, v) / \tilde{o}_{\text{eff}}(0, 0), \quad (7)$$

so  $\gamma(0, 0) = 1$ . Equation 6 then yields  $y(0, 0) = N_{\text{ph}}$ , *i.e.*, the collection  $\mathbf{y}$  of complex measurements  $y(u, v)$  is a set of samples of the Fourier transform of  $o_{\text{eff}}(\alpha_x, \alpha_y)$  of integral (*i.e.*, of total flux)  $N_{\text{ph}}$ .

## 2.3 Resolution and number of resolution elements

As for any interferometer, the maximum spatial frequency recorded by a compact interferometric imager is given by the maximum distance separating two apertures, or maximum baseline  $B_{\text{max}}$ , and is  $B_{\text{max}}/\lambda$ . The angular resolution of such an instrument is thus:

$$r = \lambda/B_{\text{max}}. \quad (8)$$

The angular field being  $\lambda/D$ , the number of resolved elements of a compact interferometric imager in the observable angular field is  $B_{\text{max}}/D$ .

---

<sup>†</sup>For each spatial frequency  $(u, v)$ , the demodulation consists in estimating  $y(u, v)$  as:  $\Re(y(u, v)) = (i(u, v, \phi_1) - i(u, v, \phi_3))/2$  and  $\Im(y(u, v)) = (i(u, v, \phi_4) - i(u, v, \phi_2))/2$ .

## 2.4 Spectral width

In case of point-like apertures separated by  $B$  interfering at a wavelength  $\lambda$  with zero bandwidth, the visibility is measured at the spatial frequency  $B/\lambda$ . As soon as the bandwidth is non-zero, the detected interferogram is an average of interferograms at the spatial frequencies given by all the wavelengths in the band. Therefore, what spectral bandwidth can be tolerated?

To answer this question, it is useful to realize that the recombined beams contain interferences between apertures of diameter  $D$  spaced by  $B$  and thus between pairs of points separated by distances ranging from  $(B - D)$  to  $(B + D)$ . Such an interferometer with waveguide injection intrinsically measures an average of spatial frequencies of the object over a typical width of  $D/\lambda$ . It is then reasonable to specify that the spatial frequency averaging due to the spectral width  $d\lambda$  is less than the intrinsic averaging due to the non-zero aperture size. Differentiating  $f = B/\lambda$  we obtain the following condition:<sup>‡</sup>

$$df = \frac{B}{\lambda^2} d\lambda < D/\lambda.$$

For the shortest wavelength and the longest baseline, this yields:

$$\frac{d\lambda}{\lambda_{\min}} < \frac{D}{B_{\max}}. \quad (9)$$

The inequality 9 can also be read as follows: the spectral resolution  $\lambda/d\lambda$  must be greater than the number of (spatially) resolved points of the interferometer,  $B_{\max}/D$ .

## 3. NOISE MODELING AND COMPARISON WITH A CONVENTIONAL IMAGER

A study of the compact interferometric imager concept must include the modeling of noise, and if possible comparatively to a classical *i.e.*, focal plane imager. The propagation of noise in the algorithm that reconstructs the object from complex visibilities is delicate because these algorithms can be notably non-linear. In order to avoid dealing with such noise propagation, we have chosen to model the noise of a compact interferometric imager and of a classical instrument in the Fourier *i.e.*, spatial frequency domain. An in-depth analysis may be found in.<sup>15</sup>

Here we assume that (only) two raw measurements are obtained simultaneously using the two outputs in phase opposition of each coupler. Two other measurements must then be obtained by introducing a phase shift of  $\pi/2$ . Each complex measurement thus uses  $4N_{\text{ph}}$  photons (2 raw interferometric measurements, each receiving  $N_{\text{ph}}$  photons per aperture). We assume in the following that the measurement noise is predominantly photon noise, which is reasonable for many scenarios at least in the visible and near-infrared. In the noise analysis, we additionally assume that the compact interferometric imager measures each spatial frequency only once, as in Ref. 16.

### 3.1 Noise modeling for a compact interferometric imager

Under the assumption that  $|\gamma(u, v)| \ll 1$ , the variance of the noise on the complex measurement  $y(u, v)$  of Equation 6, resulting from the demodulation of four raw measurements given by Equation 3, is<sup>§</sup>:

$$\sigma_y^2(u, v) = N_{\text{ph}}, \quad (10)$$

<sup>‡</sup>This condition can also be obtained by specifying that the optical path difference between two apertures separated by  $B$  for a direction  $\theta = \lambda/(2D)$  at the edge of the field of view, which is  $B\theta = B\lambda/(2D)$ , must be less than half the coherence length  $L_c = \lambda^2/(d\lambda)$ .

<sup>§</sup>The variance of the complex variable  $y$  can be defined as  $\text{Var}(y) \triangleq E(|y - E(y)|^2)$ , and it is easy to show that  $\text{Var}(y) = E(|y|^2) - |E(y)|^2 = \text{Var}(\Re(y)) + \text{Var}(\Im(y))$ . If moreover, as we can reasonably assume in this study,  $\Re(y)$  and  $\Im(y)$  are two independent Gaussian variables of the same variance, then  $y$  is a complex circular Gaussian variable (distribution invariant by any rotation).

where  $N_{\text{ph}}$  is still the average number of photons received in each of the two apertures contributing to the interference during a raw measurement. This directly follows from the fact that  $y(u, v)$  is the demodulation of 4 raw data measurements, where each is corrupted by photon noise, of variance  $N_{\text{ph}}$ .

The variance of these complex measurements, normalized by the square modulus of the signal at frequency  $(u, v)$ , is therefore simply, according to Equation 5:

$$\frac{\sigma_y^2(u, v)}{|y(u, v)|^2} = \frac{N_{\text{ph}}}{N_{\text{ph}}^2 |\gamma(u, v)|^2},$$

or:

$$\boxed{\frac{\sigma_y^2(u, v)}{|y(u, v)|^2} = \frac{1}{N_{\text{ph}} |\gamma(u, v)|^2}}. \quad (11)$$

### 3.2 Noise modeling for a conventional imager

The total number of elementary apertures of a compact interferometer SPIDER is denoted  $N_d$ . Considering each elementary aperture used a single time and connected by pairs,  $N_d$  is necessarily even and the number of measured spatial frequencies is  $N_d/2$ . We consider an imaging system with the same collecting surface as this SPIDER<sup>¶</sup>. The object observed by the imaging system is assumed to be the object seen by the SPIDER device,  $\mathbf{o}_{\text{eff}}$ , to simplify the comparison. The measurement of each frequency requires the detection of 4 signals of average amplitude  $N_{\text{ph}}$ . The measurement of all these spatial frequencies therefore takes a total of  $N_{\text{phot}} = N_d/2 \times 4N_{\text{ph}} = 2N_d N_{\text{ph}}$  photons. Hence, the image model of a conventional imager collecting a total of  $N_{\text{phot}}$  photons writes:

$$\mathbf{i} = 2N_d \cdot \mathbf{h} \star \mathbf{o}_{\text{eff}} + \mathbf{n}, \quad (12)$$

where  $\mathbf{h}$  is the discrete PSF, and  $\star$  is the discrete convolution operator.

We have already assumed that the visibility is negligible with regards to 1. For a classical imaging instrument, we additionally assume that the scene luminance is sufficiently homogeneous, so that the noise can be assumed to be stationary, *i.e.*, so that the variance of the noise of the classical imager  $\sigma_n^2$  can be assumed to be approximately constant over all  $N_{\text{pix}}$  pixels. Hence, in the Fourier space, the noise spectrum is uniform and equals  $N_{\text{phot}}$ .

Since  $\tilde{\mathbf{o}}_{\text{eff}}(0, 0) = N_{\text{ph}}$ , as pointed out in paragraph 2.2, in the Fourier domain, the spectrum of the noise normalized by the square modulus of the signal at frequency  $(u, v)$  is:

$$\frac{\sigma_b^2(u, v)}{|\tilde{\mathbf{i}}(u, v)|^2} = \frac{N_{\text{phot}}}{N_{\text{phot}}^2 |\gamma(u, v)|^2 |\tilde{\mathbf{h}}|^2},$$

or:

$$\boxed{\frac{\sigma_b^2(u, v)}{|\tilde{\mathbf{i}}(u, v)|^2} = \frac{1}{2N_d \times N_{\text{ph}} |\gamma(u, v)|^2 |\tilde{\mathbf{h}}|^2}}. \quad (13)$$

Comparison of Equations 11 and 13 suggests that signal-to-noise ratios are similar for both types of instruments, *i.e.*, proportional to  $\sqrt{N_{\text{ph}}}$ , and that they are identical if:

$$|\tilde{\mathbf{h}}| = \frac{1}{\sqrt{2N_d}}, \quad (14)$$

at all frequencies except the zero frequency, at which the MTF is 1 by convention. In other words, with respect to noise propagation, a “standard” compact interferometric imager (standard in the sense that each spatial frequency would be measured once and only once) is equivalent to a conventional imager with a flat MTF of the order of  $\frac{1}{\sqrt{2N_d}}$ . Note that focal-plane imagers with quite flat MTFs exist, namely phased array instruments or sparse

<sup>¶</sup>The set of spatial frequencies to be measured to cover the same frequency support as a conventional imaging instrument of the same resolution, *i.e.*, of diameter  $B_{\text{max}}$ , is contained in a half-disk of radius  $B_{\text{max}}/\lambda$ , that is to say of the order of  $\pi(B_{\text{max}}/D)^2/2$  distinct frequencies, if the frequency sampling step is  $D/\lambda$  (which requires joint apertures).

aperture telescopes with minimal redundancy such as the ones discussed in Ref. 17. For these, the MTF is flat and of the order  $1/N_{\text{tel}}$ , where  $N_{\text{tel}}$  is the number of apertures.

Finally, the above results show that, for the highest spatial frequencies, a compact interferometric imager and a conventional imaging instrument have a very similar behavior with respect to noise. For the former, the propagation of noise is unfavorable for the lower frequencies. However it is quite possible, for a particular task (detection for example), to design the transfer function of a compact interferometric imager to make it higher at the spatial frequencies relevant to the task.

#### 4. FREQUENCY COVERAGE

The set of measured spatial frequencies, *i.e.*, the *frequency coverage* is a key aspect in the design of the interferometer. Lockheed Martin's aperture configuration<sup>18</sup> of one arm is presented in the top panel of 3. The frequency coverage associated to this aperture configuration is presented at the bottom, and each measured frequency is represented by a blue dot. Since the spatial frequencies are sampled with a step of  $b/\lambda$ , with  $b$  the distance between two consecutive apertures, normalized spatial frequencies in units of  $b/\lambda$  are considered for simplicity purposes. Not all apertures are used (the unused ones are shown in red) and missing frequencies start from spatial frequency 7. The bidimensional optical transfer function deduced from this aperture configuration is illustrated in Fig. 6a.

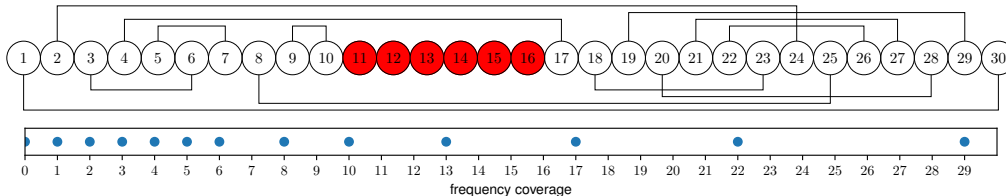


Figure 3: top panel: aperture configuration of an interferometric arm of the SPIDER-like instrument as described in;<sup>18</sup> the black lines represent aperture pairings; the unused apertures are colored in red - bottom panel: associated frequency coverage.

In case of the Earth observation viewed from a satellite, few priors are available making it necessary to have no gaps in the frequency coverage. A no gap frequency coverage is called compact.<sup>19,20</sup> Harvey and Rockwell<sup>21</sup> introduced the "practical resolution limit" (PRL), defining it as the maximum spatial frequency before which no zero occurs in the optical transfer function. In the following, the list of combined aperture pairs in the instrument is called *aperture configuration*. The monodimensional aperture configurations can be scanned to find the one with the highest PRL. Unfortunately, the number of aperture configurations scales exponentially with the number of apertures. An approach based on combinatorial theory results obtained by several authors<sup>22-26</sup> has been elaborated by Debarry.<sup>27</sup> This paragraph summarizes her main results.

##### 4.1 Optimization of the frequency coverage of dense 1D arrays

The total number of apertures in a single arm (1D) is denoted  $N_p$ . Still considering each aperture used a single time and connected by pairs,  $N_p$  is even. The number of measured spatial frequencies is consequently  $N_p/2$  and the measured frequencies have values in the range  $[1, N_p - 1]$ .

A frequency coverage is defined as *buildable* if there is an aperture configuration that allows it to be measured (not all frequency coverages are buildable). Finding compact buildable frequency coverages composed of consecutive spatial frequencies  $\{1, 2, \dots, N_p/2\}$  is a problem formulated and solved in the framework of combinatorial theory by Skolem.<sup>23</sup> Such a frequency coverage is called a Skolem set and its associated aperture configuration a Skolem sequence.

More generally, it is possible to build frequency coverages in the form  $\{n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\min} + N_p/2 - 1\}$ , where  $n_{\min}$  is the first measured spatial frequency. This problem has been introduced by Langford.<sup>28</sup> Such a frequency coverage is called a Langford set and its associated aperture configuration a Langford sequence. The existence of buildable compact frequency coverages was proved for  $n_{\min} = 1$  by Skolem in 1958, for  $n_{\min} = 2$  by Davies<sup>24</sup> in 1959, then partially generalized by Bermond<sup>25</sup> in 1978 and finally completed by Simpson<sup>26</sup> in 1983.

## 4.2 Application to a SPIDER-like interferometer

Applying the Skolem results, an illustrative aperture configuration is provided in Fig. 4.

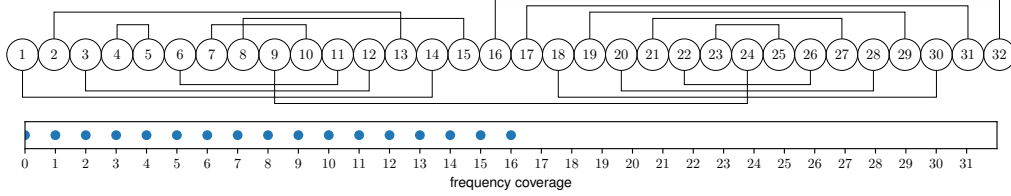


Figure 4: top panel: example of a Skolem aperture configuration with 32 apertures - bottom panel: associated normalized frequency coverage ranging from 1 up to 16.

## 4.3 Suggestion of a hybrid architecture using Langford configurations

It is possible to further optimize the PRL obtained for the SPIDER-like design by considering an interferometer based on a Langford sequence, complemented with a small monolithic telescope measuring short spatial frequencies.

If buildable, the Skolem configuration reaches a maximum spatial frequency of  $N_p/2$  by definition whereas the Langford configuration reaches a maximum spatial frequency of  $(3N_p - 2)/4$ . Because the maximum spatial frequency measured increases from  $N_p/2$  to  $(3N_p - 2)/4$ , the resolution of this hybrid interferometer is therefore improved by about 50% with respect to the interferometer with the Skolem configuration.

Maintaining the SPIDER-like interferometer aperture complexity, *i.e.*  $N_p = 30$ , an illustration of this Langford aperture configuration is presented in Fig. 5. The represented aperture configuration produces a compact frequency coverage ranging from spatial frequencies 8 to 22, improving the frequency coverage provided by a Skolem configuration, *i.e.* by considerably stretching the highest spatial frequency.

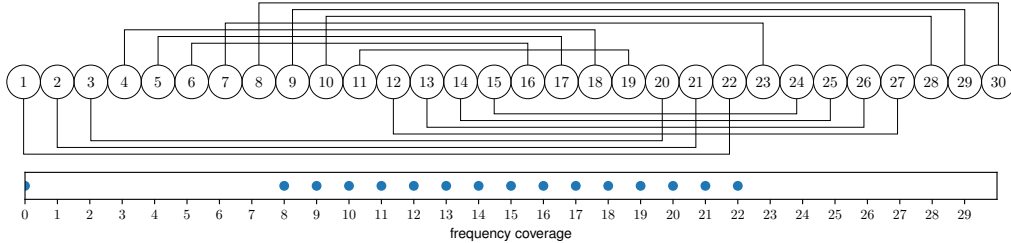


Figure 5: top panel: example of a Langford configuration with 30 apertures - bottom panel: associated frequency coverage ranging from spatial frequency 8 up to 22.

Finally, in Fig. 6b, we have represented the two-dimensional optical transfer function following the merging of the frequency coverages from the monolithic telescope and the SPIDER-like interferometer.



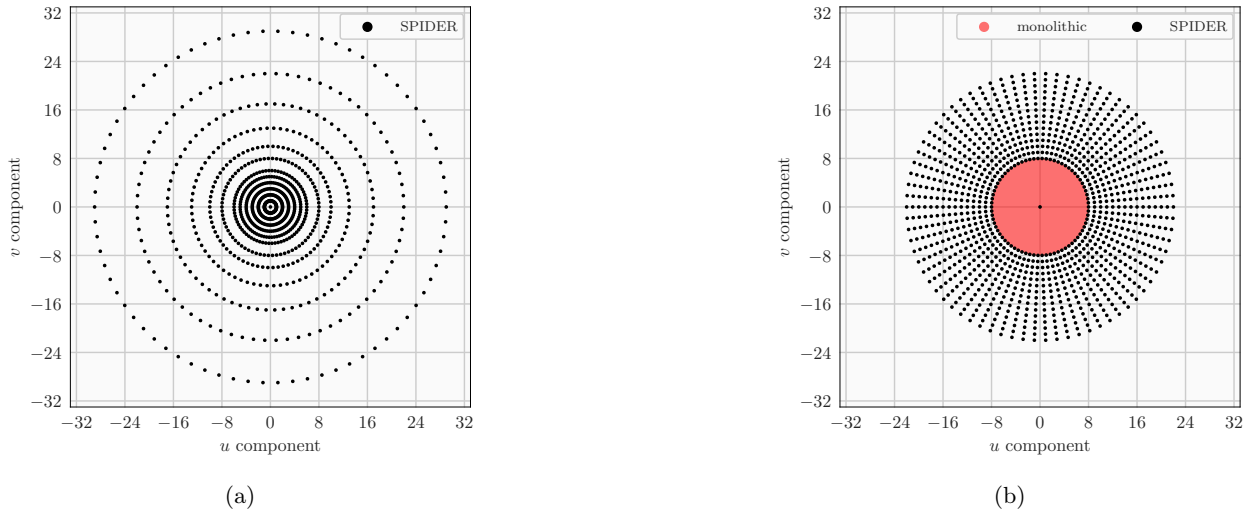


Figure 6: optical transfer functions - a) SPIDER-like instrument with radially disposed arms, discrete spatial frequencies measured by the interferometer  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 17, 22, 29\}$  (black) - b) suggested hybrid instrument: monolithic telescope complemented by SPIDER-like instrument with radially disposed arms, continuous spatial frequencies measured by the telescope  $[1, 8]$  (red) and discrete spatial frequencies measured by the interferometer  $\{8, \dots, 22\}$  (black).

## REFERENCES

- [1] Kendrick, R. L., Duncan, A., Ogden, C., Wilm, J., and Thurman, S. T., "Segmented Planar Imaging Detector for EO Reconnaissance," in *[Imaging and Applied Optics]*, CM4C.1, OSA, Arlington, Virginia (2013).
- [2] Su, T., Liu, G., Badham, K. E., Thurman, S. T., Kendrick, R. L., Duncan, A., Wuchenich, D., Ogden, C., Chriqui, G., Feng, S., Chun, J., Lai, W., and Yoo, S. J. B., "Interferometric imaging using  $\text{Si}_3\text{N}_4$  photonic integrated circuits for a SPIDER imager," *Optics Express* **26**, 12801–12812 (May 2018). Publisher: Optical Society of America.
- [3] Scott, R. P., Su, T., Ogden, C., Thurman, S. T., Kendrick, R. L., Duncan, A., Yu, R., and Yoo, S. J. B., "Demonstration of a photonic integrated circuit for multi-baseline interferometric imaging," in *[2014 IEEE Photonics Conference]*, 1–2 (Oct. 2014). ISSN: 1092-8081.
- [4] Su, T., Scott, R. P., Ogden, C., Thurman, S. T., Kendrick, R. L., Duncan, A., Yu, R., and Yoo, S. J. B., "Experimental demonstration of interferometric imaging using photonic integrated circuits," *Optics Express* **25**, 12653 (May 2017).
- [5] Liu, G., Wen, D.-S., and Song, Z.-X., "System design of an optical interferometer based on compressive sensing," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **478**, 2065–2073 (Aug. 2018).
- [6] Gao, w., Wang, X., Ma, L., and Guo, D., "Quantitative analysis of imaging quality of the segmented planar imaging detector," in *[Tenth International Conference on Information Optics and Photonics]*, Yang, Y., ed., 139, SPIE, Beijing, China (Nov. 2018).
- [7] Guo-mian, L., Qi, L., Yue-ting, C., Hua-jun, F., Zhi-hai, X., and Jingjing, M., "An improved scheme and numerical simulation of segmented planar imaging detector for electro-optical reconnaissance," *Optical Review* **26**, 664–675 (Dec. 2019).
- [8] Cao, K., Ye, Z., Jiang, C., Zhu, J., Qiao, Z., and Jiang, Y., "Lenslets combination optimal design of the segmented planar image detector for electro-optical reconnaissance," *Optical Engineering* **59**, 1 (Apr. 2020).
- [9] Liu, G., Wen, D., Song, Z., and Jiang, T., "System design of an optical interferometer based on compressive sensing: an update," *Optics Express* **28**, 19349 (June 2020).
- [10] Duncan, A., Kendrick, R., Ogden, C., Wuchenich, D., Thurman, S., Su, T., Lai, W., Chun, J., Li, S., Liu, G., et al., "Spider: next generation chip scale imaging sensor update," in *[Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference]*, 6 (2016).

- [11] Le Besnerais, G., Lacour, S., Mugnier, L. M., Thiébaud, E., Perrin, G., and Meimon, S., “Advanced imaging methods for long-baseline optical interferometry,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* **2**, 767–780 (Oct. 2008).
- [12] Thiébaud, E. and Young, J., “Principles of image reconstruction in optical interferometry: tutorial,” *J. Opt. Soc. Am. A* **34**, 904–923 (June 2017).
- [13] Dyer, S. D. and Christensen, D. A., “Pupil-size effects in fiber optic stellar interferometry,” *JOSA A* **16**, 2275–2280 (Sept. 1999). Publisher: Optical Society of America.
- [14] Mege, P., Malbet, F., and Chelli, A., “Interferometry with singlemode waveguide,” in [*Interferometry for Optical Astronomy II*], **4838**, 329–337, International Society for Optics and Photonics (Feb. 2003).
- [15] Mugnier, L. M., Michau, V., Debary, H., and Cassaing, F., “Analysis of a compact interferometric imager,” in [*Space Telescopes and Instrumentation 2022: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*], Coyle, L. E., Matsuura, S., and Perrin, M. D., eds., **12180**, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (2022). Conference date: July 2022, Montréal.
- [16] Debary, H., Mugnier, L. M., Michau, V., and Lopez, S., “Optical interferometry imaging from space: optimization of the aperture configuration of a dense array,” in [*Space Telescopes and Instrumentation 2022: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*], Coyle, L. E., Matsuura, S., and Perrin, M. D., eds., **12180**, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. (2022). Conference date: July 2022, Montréal.
- [17] Cassaing, F. and Mugnier, L. M., “Optimal sparse apertures for phased-array imaging,” *Opt. Lett.* **43**, 4655–4658 (Oct. 2018).
- [18] Badham, K., Kendrick, R. L., Wuchenich, D., Ogden, C., Chriqui, G., Duncan, A., Thurman, S. T., Yoo, S. J. B., Su, T., Lai, W., Chun, J., Li, S., and Liu, G., “Photonic integrated circuit-based imaging system for spider,” in [*2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim (CLEO-PR)*], 1–5 (2017).
- [19] Damé, L. and Martic, M., “Study of an optimized configuration for interferometric imaging of complex and extended solar structures,” *Targets for Space-Based Interferometry* **354**, 201–208 (1992).
- [20] Mugnier, L. M., Rousset, G., and Cassaing, F., “Aperture configuration optimality criterion for phased arrays of optical telescopes,” *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 2367–2374 (Dec 1996).
- [21] Harvey, J. E. and Rockwell, R. A., “Performance characteristics of phased array and thinned aperture optical telescopes,” *Optical Engineering* **27**(9), 279762 (1988).
- [22] Nordh, G., “Perfect skolem sets,” *Discrete mathematics* **308**(9), 1653–1664 (2008).
- [23] Skolem, T., “Some remarks on the triple systems of steiner,” *Mathematica Scandinavica* **6**(2), 273–280 (1958).
- [24] Davies, R. O., “On langford’s problem (ii),” *The Mathematical Gazette* **43**(346), 253–255 (1959).
- [25] Bermond, J.-C., Brouwer, A. E., and Germa, A., “Systemes de triplets et differences associees,” in [*Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Colloque international CNRS 260*], **260**, 35–38, CNRS (1978).
- [26] Simpson, J. E., “Langford sequences: perfect and hooked,” *Discrete Mathematics* **44**(1), 97–104 (1983).
- [27] Debary, H., Mugnier, L. M., and Michau, V., “Aperture configuration optimization for extended scene observation by an interferometric telescope,” *Optics Letters* **47**(16), 4056–4059 (2022).
- [28] Langford, C. D., “Langford problem,” *Math. Gazette* **42**, 228 (1958).



## 5 - Conclusion

### 5.1 . Objectifs et résultats

Les travaux reportés dans ce manuscrit de thèse ont porté sur un instrument optique à synthèse d'ouverture pour l'observation de la Terre, ou IOSOOT. Plus précisément, j'ai introduit le concept imageur interférométrique optique SPIDER par les équipes américaines et chinoises. J'ai exploré les limitations introduites par les principales composantes d'un imageur interférométrique. À travers mon manuscrit, j'ai :

1. mené une analyse theorique de ce concept, et plus précisément j'ai :
  - (a) établi une synthèse exhaustive dans le chapitre 2, grâce à un formalisme analytique, des performances des estimateurs de maximum de vraisemblance et moindres carrés selon deux natures de bruit différentes, ainsi que différentes méthodes de modulation pour un tel instrument,
  - (b) utilisé des résultats, jamais utilisé jusqu'à présent pour l'interférométrie optique, du domaine de la théorie combinatoire pour optimiser la configuration pupillaire de ce système dans le chapitre 3. L'exploration est pour la première fois exhaustive en termes de configurations pupillaires.
2. appliqué dans le chapitre 4, les resultats obtenus dans les chapitres 2 et 3 sur la mesure de visibilité et la configuration pupillaire pour évaluer les performances d'un dispositif de type SPIDER pour l'observation de la Terre et je les ai comparé à celles d'un imageur classique dans les mêmes conditions, afin de conclure sur les avantages et inconvénients d'un imageur interférométrique.

Le travail que j'ai mené sur la mesure des visibilités m'a permis de proposer de nouvelles méthodes d'échantillonnage de l'interférogramme et de proposer une méthode d'estimation permettant de gagner en gain par rapport à l'état de l'art actuel.

Le deuxième axe de travail sur lequel je me suis focalisé, portant sur la configuration pupillaire, m'a permis de proposer un nouveau câblage adapté à l'observation de la Terre en considérant des technologies déjà existantes. Ce câblage produit, avec une complexité pupillaire identique à celle utilisée pour l'étude SPIDER par les américains, une couverture fréquentielle compacte à 90%, contrairement à 20% retrouvée dans la littérature aujourd'hui. Je fournis également un outil permettant de représenter immédiatement les configurations

pupillaires associées à n'importe quel nombre de pupilles donné. Cet outil est adapté pour :

- un interféromètre seul composé de bras interférométriques,
- un système hybride combinant un télescope monolithique avec un interféromètre type SPIDER,
- un système hybride comme décrit au deuxième point, avec des bras secondaires en plus,

toujours à dimension instrumentale égale.

La troisième et dernière partie de mon travail portant sur la reconstruction d'objet apporte de l'information sur le domaine d'emploi et les limitations d'un imageur interférométrique SPIDERet nous place au niveau système. Il permet de sortir du paradigme théorique dans lequel nous plaçaient les chapitres 2 et 3. Je présente des simulations numériques d'images que pourraient être obtenues par un IOSOOT type SPIDER avec et sans bruit. Je mets en évidence la présence de repliement de ce dispositif, intrinsèque au fait de mesurer des fréquences discrètes. Je conclus que :

- analytiquement, l'imageur classique se compare favorablement à SPIDER pour les BF et MF. Quant aux HF, l'interféromètre présente un meilleur rapport signal-à-bruit,
- numériquement, dans des conditions typiques d'observation de la Terre, un dispositif SPIDER manque de flux.

J'ai montré également que ce second point peut être pallié, entre autre, par augmentation du temps de pose comme pour un imageur classique. J'obtiens alors une image dont les structures sont aisément différenciables.

## 5.2 . Discussion et perspectives

À court terme, la mise en œuvre de ce concept s'avère délicate à la fois du fait de la complexité du circuit phonique, le nombre de lentilles étant du même ordre de grandeur que le nombre de points de résolution recherché, mais également de par les contraintes instrumentales associées à la mesure interférométrique.

Deux défis majeurs doivent être abordés pour progresser dans sa mise en œuvre.

Le **premier défi** concerne la réduction de la complexité d'un tel concept par combinaison d'une image à basse résolution formée avec un télescope de petite taille avec des visibilités mesurées aux hautes fréquences spatiales, et le développement d'un algorithme dédié à la reconstruction d'image à haute

résolution avec ces données.

En effet, l'objet peut être estimé en faisant appel à une méthode de reconstruction d'image, parmi celles développées en interférométrie astronomique lorsque les données interférométriques sont utilisées seules. À noter qu'un problème récurrent de la reconstruction d'image en interférométrie astronomique est l'obtention de la forme générale de l'objet, codée dans les basses fréquences spatiales, lesquelles sont généralement mal échantillonnées par ces interféromètres.

L'utilisation conjointe évoquée ci-dessus d'un télescope monolithique et de données interférométriques acquises simultanément pourrait donc non seulement réduire la complexité technologique du dispositif SPIDER, mais également améliorer sensiblement la qualité des images reconstruites, et ce pour plusieurs types d'interféromètres.

Ce couplage de données interférométriques avec des données d'imagerie est un problème qui n'a pas été traité dans la littérature jusqu'à présent et qui dépasse celui du dispositif de type SPIDER. En effet, il existe en astronomie des sites équipés de grands télescopes et d'interféromètres optiques. Le développement de cette méthode de traitement de données pourrait améliorer de façon notable la qualité des images obtenues. À plus long terme, cette approche pourrait être mise en œuvre pour l'observation de satellites géostationnaires.

Du point de vue des traitements, la problématique d'une telle reconstruction est double : il s'agit d'une part de combiner des données image, plan focal (donc un ensemble continu de fréquences spatiales) avec des visibilités complexes c'est-à-dire un ensemble discret d'échantillons de Fourier de l'objet observé dans un cadre homogène commun. Il s'agit d'autre part de prendre en compte les erreurs d'étalonnage de l'interféromètre du fait de flexions thermomécaniques entre autres, dans une reconstruction «myope», par exemple sous forme d'une différence de marche achromatique par base mesurée à estimer conjointement à l'objet multispectral reconstruit. Il est également envisageable, dans une approche de co-conception, de modifier la configuration pupillaire du dispositif (enregistrement de clôtures de phase par exemple) en fonction de la robustesse constatée de la reconstruction myope.

Le **second défi** porte sur le développement d'un circuit photonique adapté à un tel concept. L'étape clé à franchir dans le domaine des circuits photoniques est de développer des circuits 3D adaptés à la géométrie de recombinaison requise pour SPIDER avec des pertes faibles. Une telle activité fait l'objet d'une proposition de thèse menée en collaboration avec l'Institut de Chimie

Moléculaire et des Matériaux d'Orsay (ICMMO). L'objectif de cette thèse est de développer un prototype de circuit photonique à base de guide d'ondes non plus planaire, mais en volume, qui pourra être dédié à une matrice de lentilles (et non plus une ligne), de le mettre en œuvre en laboratoire et de le tester pour la mesure de visibilités. La fabrication d'un tel circuit en trois dimensions serait effectuée à l'ICMMO par une technique de texturation de l'indice optique d'un verre de silice utilisant un laser à impulsions ultracourtes. Ce circuit sera ensuite mis en œuvre expérimentalement dans une expérience d'imagerie en laboratoire. Elle sera pour l'instant monochromatique et devrait démontrer à la fois le fonctionnement du PIC et la capacité à reconstruire des images en présence des inévitables aberrations. On pourrait aussi valider la fusion de données pour l'augmentation du flux, évoquée dans la sous-section 4.4.3, sur cette expérience.

# Appendices





## Approximation de la TF par la FFT

Cette annexe a pour but de décrire la démarche de la FFT de la scène urbaine présentée dans la figure 4.1 du chapitre 4.

Premièrement, on va considérer un tableau de bases cartésien  $b_{j,k} = (jb_{\min}, kb_{\min})$   $\forall (j, k) \in \llbracket 0, N_p - 1 \rrbracket^2$ , avec  $N_p$  le nombre de pupilles.

Ensuite, on considère que les mesures associées aux bases  $b_{j,k}$  sont les mesures complexes  $\Gamma_{j,k} = \Gamma(jb_{\min}, kb_{\min})$ . Le théorème de Zernike Van-Cittert relie les mesures à l'objet  $o_{\text{eff}}$  à travers :

$$\Gamma_{j,k} = \iint_{\text{source}} o_{\text{eff}}(\alpha, \beta) e^{-2i\pi(jb_{\min}\alpha/\lambda + kb_{\min}\beta/\lambda)} d\alpha d\beta, \quad (1)$$

avec  $b_{\min} = D$ . Comme on peut le voir sur la figure 4.3, le lobe d'antenne est nul au-delà de  $3\lambda/2D$ . On va donc approximer cette intégrale en réduisant le support du lobe d'antenne à un domaine carré  $(\alpha, \beta) \in [-3\lambda/2D, 3\lambda/2D]^2$ . Considérant ces hypothèses, et en raisonnant en unités spatiales  $(x, y)$ , l'intégrale définie en 1 devient :

$$\Gamma_{j,k} \simeq \frac{1}{H^2} \iint_{[-3\lambda H/(2D), 3\lambda H/(2D)]^2} o_{\text{eff}}(x, y) e^{-2i\pi(jDx/(\lambda H) + kDy/(\lambda H))} dx dy, \quad (2)$$

Discretisons le domaine d'intégration astucieusement en un domaine cartésien régulier de  $N$  points sur  $N$  points. On pose  $\forall (p, q) \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket^2$ ,

$$x_p = \frac{-(N-1)3\lambda H}{N} \frac{3\lambda H}{2D} + p \frac{3\lambda H}{DN}, \quad (3)$$

$$y_q = \frac{-(N-1)3\lambda H}{N} \frac{3\lambda H}{2D} + q \frac{3\lambda H}{DN}. \quad (4)$$

Maintenant, on va poser :

$$x'_p = x_p + \frac{(N-1)3\lambda H}{N} \frac{3\lambda H}{2D}, \quad (5)$$

$$y'_q = y_q + \frac{(N-1)3\lambda H}{N} \frac{3\lambda H}{2D}. \quad (6)$$

On pose l'objet translaté  $o'$  tel que  $o'(x', y') = o(x, y)$ . Les pas spatiaux associés à cette discrétisation sont :

$$\Delta x = \Delta y = \frac{3\lambda H}{DN}. \quad (7)$$

On pose  $\forall (p, q) \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket^2$  l'objet discrétisé  $\boldsymbol{o}'_{p,q} = \boldsymbol{o}'_{\text{eff}}(x'_p, y'_q)$ . L'intégrale 2 peut être approximée par :

$$\Gamma_{j,k} \simeq \frac{1}{H^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \boldsymbol{o}_{\text{eff}}(x_p, y_q) e^{-2i\pi(jDx_p/(\lambda H) + kDy_q/(\lambda H))} \Delta x \Delta y, \quad (8)$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{H^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \boldsymbol{o}'_{\text{eff}}(x'_p, y'_q) e^{-2i\pi(j3p/N + k3q/N)}, \quad (9)$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{H^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \boldsymbol{o}'_{p,q} e^{-2i\pi(j3p/N + k3q/N)}. \quad (10)$$

Pour tout  $(p, q) \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket^2$  :

$$\Gamma_{j,k} = \frac{\Delta x \Delta y}{H^2} [\text{DFT}(\boldsymbol{o}')]_{3j,3k}. \quad (11)$$

Enfin, dans ce calcul, on reconnaît le calcul de la DFT de  $\boldsymbol{o}'$  sur les fréquences qui sont  $(3j, 3k)$ .

## Bibliographie

- [Sté73] E STÉPHAN. « On interference fringes observed with large telescopes directed on sirius and on numerous other stars ; results which may be obtained, relating to the angular diameters of these stars. extract of a letter from Mr. Stephan to Mr. Fizeau ». In : *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 76 (1873), p. 1008-1010.
- [MP21] Albert A MICHELSON et Francis G PEASE. « Measurement of the diameter of Alpha-Orionis by the interferometer ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 7.5 (1921), p. 143.
- [Lan58] C Dudley LANGFORD. « Langford problem ». In : *Math. Gazette* 42 (1958), p. 228.
- [Sko58] Th SKOLEM. « Some remarks on the triple systems of Steiner ». In : *Mathematica Scandinavica* (1958), p. 273-280.
- [Dav59] Roy O DAVIES. « On Langford's problem (II) ». In : *The Mathematical Gazette* 43.346 (1959), p. 253-255.
- [Mil69] Stewart E MILLER. « Integrated optics : An introduction ». In : *The Bell System Technical Journal* 48.7 (1969), p. 2059-2069.
- [Gol71] Marcel JE GOLAY. « Point arrays having compact, nonredundant autocorrelations ». In : *JOSA* 61.2 (1971), p. 272-273.
- [Wya75] James C WYANT. « Use of an ac heterodyne lateral shear interferometer with real-time wavefront correction systems ». In : *Applied optics* 14.11 (1975), p. 2622-2626.
- [SS77] Michael SHAO et David H STAELIN. « Long-baseline optical interferometer for astrometry ». In : *JOSA* 67.1 (1977), p. 81-86.
- [BBG78] Jean-Claude BERMOND, Andries Evert BROUWER et Anne GERMA. « Systemes de triplets et differences associees ». In : *Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Colloque international CNRS 260*. T. 260. CNRS. 1978, p. 35-38.
- [Mei79] Aden B MEINEL. « Cost-scaling laws applicable to very large optical telescopes ». In : *Optical Engineering* 18.6 (1979), p. 645-647.

- [Mor82] CJ MORGAN. « Least-squares estimation in phase-measurement interferometry ». In : *Optics Letters* 7.8 (1982), p. 368-370.
- [Sim83] James E SIMPSON. « Langford sequences : perfect and hooked ». In : *Discrete Mathematics* 44.1 (1983), p. 97-104.
- [Gre84] John E GREIVENKAMP. « Generalized data reduction for heterodyne interferometry ». In : *Optical Engineering* 23.4 (1984), p. 350-352.
- [MM86] Aden B MEINEL et Marjorie MEINEL. « Very large telescopes ». In : *Optics News* 12.3 (1986), p. 9-14.
- [Cre88] Katherine CREATH. « V phase-measurement interferometry techniques ». In : *Progress in optics*. T. 26. Elsevier, 1988, p. 349-393.
- [HR88] James E HARVEY et Richard A ROCKWELL. « Performance characteristics of phased array and thinned aperture optical telescopes ». In : *Optical Engineering* 27.9 (1988), p. 279762.
- [Neu88] Ernst-Georg NEUMANN. « The fundamental fiber mode ». In : *Single-Mode Fibers*. Springer, 1988, p. 61-141.
- [DM92] L DAMÉ et M MARTIC. « Study of an optimized configuration for interferometric imaging of complex and extended solar structures. » In : *Targets for Space-Based Interferometry* 354 (1992), p. 201-208.
- [Hor96] John A HORAK. « Cost trends of space electronics ». In : *Technomics, Inc. Report* (1996), p. 681-0001.
- [MRC96] Laurent M MUGNIER, Gérard ROUSSET et Frédéric CASSAING. « Aperture configuration optimality criterion for phased arrays of optical telescopes ». In : *JOSA A* 13.12 (1996), p. 2367-2374.
- [Cas97] Frédéric CASSAING. « Analyse d'un instrument à synthèse d'ouverture optique : méthodes de cophasage et imagerie à haute résolution angulaire ». 1997PA112445. Thèse de doct. 1997, 290 p. URL : <http://www.theses.fr/1997PA112445>.
- [KP97] Alain Philippe KATTNIG et Jerome PRIMOT. « Model of the second-order statistic of the radiance field of natural scenes, adapted to system conceiving ». In : *Visual information processing VI*. T. 3074. SPIE. 1997, p. 132-141.
- [DC99] Shellee D DYER et Douglas A CHRISTENSEN. « Pupil-size effects in fiber optic stellar interferometry ». In : *JOSA A* 16.9 (1999), p. 2275-2280.

- [Mal+99] M MALBET et al. « Integrated optics for astronomical interferometry ; 1, Concept and astronomical applications ». In : *Astron. Astrophys.* 348.astro-ph/9907031 (1999), p. 1055.
- [Bel00] Pierre Yves BELY. « Large space optics ». In : *Next Generation Space Telescope Science and Technology*. T. 207. 2000, p. 25.
- [BH00] Jan BURKE et Heinz HELMERS. « Spatial versus temporal phase shifting in electronic speckle-pattern interferometry : noise comparison in phase maps ». In : *Applied optics* 39.25 (2000), p. 4598-4606.
- [Sma00] CB SMART. « Telescope cost estimating relationship ». In : *Litton PRC white paper* 13 (2000).
- [RC01] Cyril RUILIER et Frédéric CASSAING. « Coupling of large telescopes and single-mode waveguides : application to stellar interferometry ». In : *JOSA A* 18.1 (2001), p. 143-149.
- [Gai+03] M GAI et al. « FINITO : three-way fringe sensor for VLTI ». In : *Memorie della Societa Astronomica Italiana* 74 (2003), p. 472.
- [MMC03] Pierre MEGE, Fabien MALBET et Alain CHELLI. « Interferometry with singlemode waveguide ». In : *Interferometry for Optical Astronomy II*. T. 4838. SPIE. 2003, p. 329-337.
- [BMM04] Gerard Theodore van BELLE, Aden Baker MEINEL et Marjorie Pettit MEINEL. « The scaling relationship between telescope cost and aperture size for very large telescopes ». In : *Ground-based telescopes*. T. 5489. Spie. 2004, p. 563-570.
- [Wan+04] Zhou WANG et al. « Image quality assessment : from error visibility to structural similarity ». In : *IEEE transactions on image processing* 13.4 (2004), p. 600-612.
- [Mei05] Serge MEIMON. « Reconstruction d'images astronomiques en interférométrie optique ». Theses. Université Paris Sud - Paris XI, nov. 2005. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011355>.
- [Ber+06] DH BERGER et al. « First results from the CHARA Array. IV. The interferometric radii of low-mass stars ». In : *The Astrophysical Journal* 644.1 (2006), p. 475.
- [Lac07] Sylvestre LACOUR. « Imagerie des étoiles évoluées par interférométrie : réarrangement de pupille ». 2007PA066622. Thèse de doct. 2007, 1 vol. (XIII-229 p.) URL : <http://www.theses.fr/2007PA066622>.

- [Ber+08] David H BERGER et al. « CHARA Michigan phase-tracker (CHAMP) : a preliminary performance report ». In : *Optical and Infrared Interferometry*. T. 7013. SPIE. 2008, p. 382-391.
- [Le +08] Guy LE BESNERAIS et al. « Advanced imaging methods for long-baseline optical interferometry ». In : *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 2.5 (2008), p. 767-780.
- [Mug08] L MUGNIER. « Des données à la connaissance de l'objet : le problème inverse, L'observation en astrophysique, éd. P. Léna, D. Rouan, F. Lebrun, F. Mignard & D. Pelat ». In : *EDP Sciences, chapitre 9* (2008), p. 591-613.
- [Nor08] Gustav NORDH. « Perfect Skolem sets ». In : *Discrete mathematics* 308.9 (2008), p. 1653-1664.
- [Wil+08] W WILD et al. « ESPRIT : a study concept for a far-infrared interferometer in space ». In : *Optical and Infrared Interferometry*. T. 7013. SPIE. 2008, p. 910-919.
- [Hou09] Kamel HOUAIRI. « Cophasage de télescopes multi-pupilles sur point source : application à l'interféromètre en frange noire Persée ». 2009PA077199. Thèse de doct. 2009, 1 vol. (287 p.) URL : <http://www.theses.fr/2009PA077199>.
- [Sah+09] Johannes SAHLMANN et al. « The PRIMA fringe sensor unit ». In : *Astronomy & Astrophysics* 507.3 (2009), p. 1739-1757.
- [Col+10] MM COLAVITA et al. « Fringe measurement and control for the Keck interferometer ». In : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 122.893 (2010), p. 795.
- [Sta+10] H Philip STAHL et al. « Single-variable parametric cost models for space telescopes ». In : *Optical Engineering* 49.7 (2010), p. 073006.
- [Bli11] Nicolas BLIND. « Etude de concept d'instruments cophaseur pour l'imagerie interférométrique infrarouge. Observation de binaires en interaction à très haute résolution angulaire ». Theses. Université de Grenoble, nov. 2011. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00684251>.
- [Chr+11] Jørgen CHRISTENSEN-DALSGAARD et al. « The Stellar Imager (SI)—a mission to resolve stellar surfaces, interiors, and magnetic activity ». In : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 271. 1. IOP Publishing. 2011, p. 012085.

- [Jor+12] Anders M JORGENSEN et al. *Imaging geostationary satellites with a common-mount interferometer : image quality and fringe tracking*. Rapp. tech. NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC, 2012.
- [Ken+13] Richard L KENDRICK et al. « Flat-panel space-based space surveillance sensor ». In : *Advanced maui optical and space surveillance technologies conference*. 2013, E45.
- [DK14] Alan L DUNCAN et Richard Lee KENDRICK. *Segmented planar imaging detector for electro-optic reconnaissance*. US Patent 8,913,859. 2014.
- [Bus15] David F BUSCHER. *Practical optical interferometry*. 11. Cambridge University Press, 2015.
- [Dun+16] A DUNCAN et al. « SPIDER : next generation chip scale imaging sensor update ». In : *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*. 2016, p. 6.
- [Lor+16] Joran LORIDAT et al. « Achromatic modulators and hybrid beam combiners for astrophotonics ». In : *CLEO : QELS\_Fundamental Science*. Optica Publishing Group. 2016, JF2N-3.
- [Bad+17a] K BADHAM et al. « Testbed experiment for SPIDER : a photonic integrated circuit-based interferometric imaging system ». In : *Advanced Maui Optical and Space Surveillance (AMOS) Technologies Conference*. 2017, p. 58.
- [Bad+17b] Katherine BADHAM et al. « Photonic integrated circuit-based imaging system for SPIDER ». In : *2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim (CLEO-PR)*. 2017, p. 1-5. DOI : [10.1109/CLEOPR.2017.8118616](https://doi.org/10.1109/CLEOPR.2017.8118616).
- [Chu+17] Qiuhui CHU et al. « Numerical simulation and optimal design of segmented planar imaging detector for electro-optical reconnaissance ». In : *Optics Communications* 405 (2017), p. 288-296.
- [Rah+17] Abdul RAHIM et al. « Expanding the silicon photonics portfolio with silicon nitride photonic integrated circuits ». In : *Journal of lightwave technology* 35.4 (2017), p. 639-649.
- [Su+17] Tiehui SU et al. « Experimental demonstration of interferometric imaging using photonic integrated circuits ». In : *Optics Express* 25.11 (2017), p. 12653-12665.



- [CM18] Frederic CASSAING et LM MUGNIER. « Optimal sparse apertures for phased-array imaging ». In : *Optics letters* 43.19 (2018), p. 4655-4658.
- [LWS18] Gang LIU, De-Sheng WEN et Zong-Xi SONG. « System design of an optical interferometer based on compressive sensing ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 478.2 (2018), p. 2065-2073.
- [Sch+18] Luca SCHIFANO et al. « Développement d'un interféromètre spatial pour la détection et la caractérisation d'exoplanètes ». In : (2018).
- [Su+18] Tiehui SU et al. « Interferometric imaging using Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> photonic integrated circuits for a SPIDER imager ». In : *Opt. Express* 26.10 (2018), p. 12801-12812. DOI : [10.1364/OE.26.012801](https://doi.org/10.1364/OE.26.012801). URL : <http://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-26-10-12801>.
- [Yu+18a] Qinghua YU et al. « Design of a wide-field target detection and tracking system using the segmented planar imaging detector for electro-optical reconnaissance ». In : *Chinese Optics Letters* 16.7 (2018), p. 071101.
- [Yu+18b] Qinghua YU et al. « System design for a “checkerboard” imager ». In : *Applied Optics* 57.35 (2018), p. 10218-10223.
- [Gao+19] Wei Ping GAO et al. « Quantitative analysis of segmented planar imaging quality based on hierarchical multistage sampling lens array ». In : *Optics Express* 27.6 (2019), p. 7955-7967.
- [Gue19] Sylvain GUERBER. « Intégration d'un deuxième niveau de guidage photonique par dépôt de SiN au-dessus du SOI traditionnel ». Thèse de doct. Université Paris Saclay (COMUE), 2019.
- [Guo+19] Lv GUO-MIAN et al. « An improved scheme and numerical simulation of segmented planar imaging detector for electro-optical reconnaissance ». In : *Optical Review* 26.6 (2019), p. 664-675.
- [Por+19] Marco AG PORCEL et al. « Silicon nitride photonic integration for visible light applications ». In : *Optics & Laser Technology* 112 (2019), p. 299-306.
- [SWV19] Meint SMIT, Kevin WILLIAMS et Jos VAN DER TOL. « Past, present, and future of InP-based photonic integration ». In : *APL Photonics* 4.5 (2019), p. 050901.

- [Yan+19] Fan YANG et al. « Electro-Optical Imaging Technology Based on Microlens Array and Fiber Interferometer ». In : *Applied Sciences* 9.7 (2019). ISSN : 2076-3417. DOI : [10.3390/app9071331](https://doi.org/10.3390/app9071331). URL : <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/7/1331>.
- [Yin+19] Hao YINLEI et al. « Manufacturing and characterization of integrated optical phase-shift interferometer ». In : 48.4 (2019), p. 420001-0420001.
- [Cao+20] Kang CAO et al. « Lenslets combination optimal design of the segmented planar image detector for electro-optical reconnaissance ». In : *Optical Engineering* 59.4 (2020), p. 043105.
- [CK20] John CORTES et Jordan KARBURN. *Low Size, Weight, and Power Space-Based Imaging System*. Rapp. tech. Lawrence Livermore National Lab.(LLNL), Livermore, CA (United States), 2020.
- [Din+20a] Can DING et al. « Structure Design and Image Reconstruction of Hexagonal-Array Photonics Integrated Interference Imaging System ». In : *IEEE Access* 8 (2020), p. 139396-139403. DOI : [10.1109/ACCESS.2020.3013316](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3013316).
- [Din+20b] Can DING et al. « Structure design and image reconstruction of hexagonal-array photonics integrated interference imaging system ». In : *IEEE Access* 8 (2020), p. 139396-139403.
- [Mas+20] Adil MASOOD et al. « PIX4life's silicon nitride integrated photonics platforms : present status and future outlook ». In : *Integrated Photonics Platforms : Fundamental Research, Manufacturing and Applications*. T. 11364. SPIE. 2020, p. 80-88.
- [Gao+21] Weiping GAO et al. « Quantitative analysis and optimization design of the segmented planar integrated optical imaging system based on an inhomogeneous multistage sampling lens array ». In : *Optics Express* 29.8 (2021), p. 11869-11884.
- [OM21] Richard OSGOOD JR et Xiang MENG. *Principles of Photonic Integrated Circuits : Materials, Device Physics, Guided Wave Design*. Springer Nature, 2021.
- [DMM22] H. DEBARY, L. M. MUGNIER et V. MICHAU. « Aperture configuration optimization for extended scene observation by an interferometric telescope ». In : *Optics Letters* accepted (2022).

- [Deb+22] Hiyam DEBARY et al. « Optical interferometry imaging from space : optimization of the aperture configuration of a dense array ». In : *Space Telescopes and Instrumentation 2022 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. T. 12180. SPIE. 2022, p. 175-188.
- [Liu+22a] Gang LIU et al. « Fully connected aperture array design of the segmented planar imaging system ». In : *Optics Letters* 47.18 (2022), p. 4596-4599.
- [Liu+22b] Gang LIU et al. « Single photonic integrated circuit imaging system with a 2D lens array arrangement ». In : *Opt. Express* 30.4 (2022), p. 4905-4918. DOI : [10.1364/OE.447584](https://doi.org/10.1364/OE.447584). URL : <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-30-4-4905>.
- [Mug+22] LM MUGNIER et al. « Analysis of a compact interferometric imager ». In : *Space Telescopes and Instrumentation 2022 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. T. 12180. SPIE. 2022, p. 1283-1291.
- [Pan23] Cyril PANNETIER. « Développement de l'instrument CHARASPICAVIS et optimisation d'un interféromètre stellaire à N bras ». Thèse de doct. 2023.
- [Deb] H. DEBARY. « Python code providing optimal aperture configurations of an interferometric telescope for extended scene observation ». figshare (2022), <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.19673577>.