



**HAL**  
open science

# Modélisation d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène et application en optimisation topologique

Mickaël Rakotobe

► **To cite this version:**

Mickaël Rakotobe. Modélisation d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène et application en optimisation topologique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de la Réunion, 2022. Français. NNT : 2022LARE0023 . tel-04047535

**HAL Id: tel-04047535**

**<https://theses.hal.science/tel-04047535v1>**

Submitted on 27 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UR | UNIVERSITÉ  
DE LA RÉUNION



# THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LA RÉUNION

**Délivré par** l'Université de La Réunion

**Spécialité :** Mécanique des fluides

**Présentée et soutenue par** Michaël Rakotobe

le 13 octobre 2022

## **Sujet de la thèse :**

Modélisation d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène  
et application en optimisation topologique

## **COMPOSITION DU JURY :**

<b>Lingai Luo</b>	Directeur de Recherche, LTEN	Rapporteur
<b>Michel Quintard</b>	Directeur de Recherche Émérite, IMFT	Rapporteur
<b>Cyrille Allery</b>	Professeur des Universités, LaSIE	Examineur (*)
<b>Innocent Mutabazi</b>	Professeur des Universités, LOMC	Examineur
<b>Delphine Ramalingom</b>	Docteure en Mécanique des fluides, PIMENT	Encadrant
<b>Pierre-Henri Cocquet</b>	Maître de Conférences, SIAME	Encadrant
<b>Laetitia Adelard</b>	Maître de Conférences HDR, PIMENT	Directeur de thèse
<b>Alain Bastide</b>	Professeur des Universités, PIMENT	Directeur de thèse

(\*) : Président du jury

**École doctorale :** Sciences, Technologies et Santé

**Unité de recherche :** Laboratoire de Physique et Ingénierie Mathématique  
pour l'Énergie, l'Environnement et le Bâtiment

**Directeurs de Thèse :** Alain Bastide, Laetitia Adelard

Cette thèse a reçu le soutien financier de la Région Réunion et de l'Union Européenne  
Fonds européen de développement régional (FEDER) PO 2014-2020



# Résumé en français

Je m'intéresse dans cette thèse à la modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène avec une application en optimisation topologique. L'écoulement s'effectuant dans les zones avec et sans matière poreuse et l'optimisation topologique modifiant ces zones, une hétérogénéité spatiale est donc présente. Dans cette thèse, je propose un modèle d'écoulement qui fait apparaître les gradients de porosité pour tenir compte de cette hétérogénéité spatiale. Le modèle proposé s'obtient avec une technique de prise de moyenne volumique et se différencie de ceux de la littérature par les termes qui s'y trouvent. La reproduction de résultats expérimentaux et de simulations numériques de la littérature montre un bon fonctionnement de la méthode de résolution numérique mise en œuvre sur OpenFoam. Les cas d'applications utilisés sont ceux du bouchon poreux et du phénomène de *channelling*. Je choisis la porosité en tant que quantité physique dépendante de la variable d'optimisation. C'est la perméabilité qui est habituellement choisie dans la littérature, elle est calculée dans cette thèse par la valeur de la porosité avec une équation de Kozeny-Carman. La fonction objectif utilisée porte sur les pertes de charge. L'approche d'optimisation permet de reproduire les formes optimisées de la littérature et de pénaliser la vitesse de l'écoulement quand une matière poreuse proche d'un solide est utilisée. Je montre dans cette thèse l'impact de plusieurs paramètres sur le fonctionnement de l'algorithme d'optimisation : l'écriture du modèle d'écoulement, les termes avec un gradient de porosité, la perméabilité, la porosité et le diamètre moyen effectif des grains. Ainsi, les formes optimisées composées d'une répartition de matière poreuse sont influencées par ces différents paramètres.



# Résumé en anglais

In this thesis, I am interested in the modelling of a fluid flow in a heterogeneous porous medium with an application in topological optimization. As the flow takes place in areas with and without porous material and the topological optimization modify these areas, spatial heterogeneity is present. In this thesis, I propose a flow model that shows porosity gradients to account for this spatial heterogeneity. The proposed model is obtained using a volume averaging technique and differs from those in the literature in the terms it contains. The reproduction of experimental results and numerical simulations from the literature shows that the numerical solution method implemented in OpenFoam works well. The application cases used are the porous plug and the *channelling* phenomenon. I choose porosity as a physical quantity dependent on the optimization variable. It is the permeability that is usually chosen in the literature, it is calculated in this thesis by the porosity value with a Kozeny-Carman equation. The objective function used is the pressure drop. The optimization approach allows reproducing the optimized shapes from the literature and to penalize the flow velocity when a porous material close to a solid is used. I show in this thesis the impact of several parameters on the operation of the optimization algorithm: the writing of the flow model, the terms with a porosity gradient, the permeability, the porosity and the effective mean grain diameter. Thus, the optimized shapes composed of a distribution of porous material are influenced by these different parameters.



# Remerciements

Je remercie Mme Laetitia Adelard, M. Alain Bastide, M. Pierre-Henri Cocquet et Mme Delphine Ramalingom qui ont accepté de m'encadrer pour la thèse. Ils m'ont consacré du temps et de l'énergie. Ils m'ont partagé leurs connaissances et fourni des références qui m'ont permis de construire des bases de réflexions. Ils m'ont prodigué des conseils et des encouragements qui m'ont permis de devenir docteur.

J'ai pris beaucoup de plaisir à explorer mon sujet de thèse et je considère personnellement avoir été très bien encadré. Enfin, j'ai eu beaucoup d'autonomie, j'ai donc pu approfondir librement des aspects de la thèse qui n'étaient pas envisagés initialement.

Je remercie Mme Lingao Luo, M. Michel Quintard, M. Cyrille Allery et M. Innocent Mutabazi qui ont accepté de faire partie du jury de thèse. Ils m'ont également consacré du temps et de l'énergie. Ils m'ont partagé leurs expertises. Ils m'ont formulé des remarques et des questions bienveillantes et riches d'enseignement. Les échanges m'ont à la fois conforté dans le travail réalisé et également fait connaître des points spécifiques qui mériteraient à être plus détaillés.

Je remercie Mme Lingai Luo et M. Michel Quintard qui ont accepté de rapporter le manuscrit de thèse. Je garde précieusement les rapports qui contiennent des pistes de réflexions et d'approfondissements du sujet de thèse.

Je remercie M. Cyrille Allery et M. Innocent Mutabazi qui ont accepté d'examiner la thèse. Je les remercie également, car ils ont accepté de faire partie du comité de suivi de thèse.

Je remercie M. Cyrille Allery qui a accepté de présider le jury de thèse.

Je remercie les membres du laboratoire PIMENT, les enseignants de l'IUT de La Réunion, du département SBE et les équipes techniques des différents services de l'Université de La Réunion que j'ai pu côtoyer.

Enfin, je remercie mon entourage, mes amis et ma famille pour leur présence et leur soutien inconditionnel au quotidien.





# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>11</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>14</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>16</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>21</b>
1.1 Résumé du chapitre . . . . .	21
1.2 Présentation générale du contexte . . . . .	22
1.2.1 Modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux . . . . .	22
1.2.2 Optimisation topologique d'un écoulement de fluide . . . . .	23
1.3 Questions de recherche et objectifs de la thèse . . . . .	25
1.4 Modélisation d'un écoulement de fluide . . . . .	27
1.4.1 Hypothèses pour la description du fluide . . . . .	27
1.4.2 Modèle d'écoulement de Navier-Stokes . . . . .	27
1.5 Écoulement de fluide en milieu poreux . . . . .	30
1.5.1 Hypothèses pour la description du milieu poreux . . . . .	30
1.5.2 Élément de volume représentatif du milieu poreux . . . . .	31
1.5.3 Modèles d'écoulement de fluide en milieu poreux . . . . .	32
1.5.4 Technique de prise de moyenne volumique . . . . .	34
1.5.5 Régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux . . . . .	37
1.6 Verrous scientifiques et organisation du manuscrit . . . . .	38
<b>2 Proposition d'un modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène</b>	<b>41</b>
2.1 Résumé du chapitre . . . . .	41
2.2 Méthode pour le développement du modèle . . . . .	42
2.2.1 Prise de moyenne pour une équation générale de bilan macroscopique à l'échelle d'un E.V.R. . . . .	42
2.2.2 Conservation de la masse de fluide . . . . .	44
2.2.3 Conservation de la quantité de mouvement de fluide . . . . .	45
2.3 Discussion et forme finale du modèle . . . . .	47
2.3.1 Discussion des modèles de la littérature . . . . .	47
2.3.2 Équation de Kozeny-Carman . . . . .	50
2.3.3 Formes sans dimension des équations . . . . .	51
2.4 Implémentation dans OpenFOAM . . . . .	53
2.5 Conclusion du chapitre . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Comparaisons avec des résultats de la littérature</b>	<b>56</b>
3.1	Résumé du chapitre	56
3.2	Application au cas du bouchon poreux	57
3.2.1	Présentation et paramètres physiques	57
3.2.2	Comparaisons avec des résultats de simulations numériques de la littérature	61
3.2.3	Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé	65
3.3	Application au cas du <i>channelling</i>	65
3.3.1	Objectifs et présentation du phénomène de <i>channelling</i>	65
3.3.2	Modélisation de l'écoulement de fluide	67
3.3.3	Mise en œuvre numérique	69
3.3.4	Comparaisons avec des résultats expérimentaux de la littérature	71
3.3.5	Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé	75
3.3.6	Comparaisons avec des résultats produits par deux modèles de Darcy-Brinkman-Forchheimer classiques de la littérature	76
3.4	Conclusion du chapitre	88
<b>4</b>	<b>Optimisation topologique d'un écoulement de fluide pour trouver une répartition optimisée de matériaux poreux</b>	<b>89</b>
4.1	Résumé du chapitre	90
4.2	Rappel du contexte et particularités des travaux	90
4.3	Problème d'optimisation topologique	93
4.3.1	Approche générale	93
4.3.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	94
4.3.3	Algorithme d'optimisation	97
4.4	Configurations et paramètres étudiés	98
4.4.1	Fonction objectif	98
4.4.2	Géométries, paramètres physiques et numériques	99
4.4.3	Modèles d'écoulement de fluide	99
4.4.4	Matériaux poreux	103
4.4.5	Valeurs du pas de descente	104
4.5	Résultats et discussions	104
4.5.1	Influence de la modélisation de l'ajout de matière et du pas de descente	104
4.5.2	Convergence de l'algorithme d'optimisation et influence de la taille du maillage sur les formes optimisées	109
4.5.3	Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour un nombre de Darcy constant proche d'un solide	112
4.5.4	Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour différentes valeurs du nombre de Darcy	119
4.5.5	Influence du choix du modèle d'écoulement de fluide	128
4.6	Conclusion du chapitre	130

<b>5 Conclusion et perspectives</b>	<b>131</b>
5.1 Conclusion . . . . .	131
5.2 Perspectives . . . . .	132
<b>Annexes</b>	<b>135</b>
<b>A Fichiers de code</b>	<b>135</b>
<b>B Forme réduite du modèle d'écoulement de fluide utilisée en optimisation topologique</b>	<b>140</b>
<b>C Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (a)</b>	<b>143</b>
<b>D Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (b)</b>	<b>149</b>
<b>E Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (c)</b>	<b>152</b>
<b>F Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (d)</b>	<b>155</b>
<b>G Tableaux des résultats d'optimisation topologique</b>	<b>158</b>
<b>H Figures des résultats d'optimisation topologique</b>	<b>161</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>168</b>

# Liste des figures

1.1	Illustration de trois éléments de volume représentatifs du milieu poreux (E.V.R.).	32
3.1	Configuration géométrique du bouchon poreux.	57
3.2	Rôle du paramètre $\tau$ dans la transition entre les zones fluides et le milieu poreux.	59
3.3	Maillage utilisé pour le bouchon poreux, l'image du haut se situe à l'entrée de la géométrie et l'image du bas à une interface entre le fluide et le milieu poreux ( $x/H = 200$ ).	60
3.4	Valeurs des normes de vitesse obtenues par rapport à celles de Betchen et al. [16] et DeGroot et al. [35] pour les nombres de Darcy $Da = 10^{-2}$ et $Da = 10^{-3}$ .	61
3.5	Valeurs des normes de vitesse obtenues par rapport à celles de DeGroot et al. [35] pour les nombres de Darcy $Da = 10^{-4}$ et $Da = 10^{-5}$ .	62
3.6	Influence du paramètre $\tau$ sur les valeurs des vitesses.	64
3.7	Comparaison des résultats pour le nombre de Darcy $Da = 10^{-2}$ entre le modèle proposé eq.(3.5) dénommé Original et ce même modèle en négligeant les gradients de porosité eq.(3.8) dénommé Classique.	66
3.8	Configuration géométrique pour le phénomène du <i>channelling</i> . On peut voir le cylindre et une de ses bases. Un plan de coupe illustre les deux types de variations de porosités suivant la direction radiale R.	70
3.9	Courbes du gradient de porosité (à gauche, A) et du laplacien de porosité (à droite, B), les codes couleurs sont les mêmes que ceux de la Figure 3.8.	71
3.10	Discrétisation du cylindre par un maillage de type O-grid d'environ 10 millions de cellules.	72
3.11	Courbe de porosité utilisée pour les simulations numériques en comparaison aux points de la courbe de porosité qui se trouve dans Giese et al.[46] pour un milieu poreux composé de sphères.	73
3.12	Comparaison aux résultats expérimentaux dans Giese et al. [46] pour $Re_p = 4$ et $Re_p = 77$ .	74
3.13	Comparaison aux résultats expérimentaux dans Giese et al. [46] pour $Re_p = 103$ et $Re_p = 532$ .	75
3.14	Écarts de vitesses entre le modèle Original (2.63) et le modèle Classique (3.8) pour $Re_p = \{4; 77; 103; 532\}$ .	77
3.15	Pourcentages d'erreurs (%) entre les points expérimentaux et les résultats du modèle Original (2.63) et du modèle Classique (3.8) pour $Re_p = \{4; 77; 103; 532\}$ .	78
3.16	Valeurs de $\mathbf{u}_{max}/U$ (en haut) et $\mathbf{u}_{center}/U$ (en bas) obtenues à la sortie du cylindre avec les modèles (A), (B) et (C) en fonction du nombre de Reynolds $Re_p$ .	83
3.17	Catégorisation des valeurs de vitesses par régime d'écoulement de fluide.	84

3.18	Valeurs de $\mathbf{u}_{max}/U$ (en haut) et $\mathbf{u}_{center}/U$ (en bas) obtenues à la sortie du cylindre avec les modèles (A2), (B2) et (C) en fonction du nombre de Reynolds $Re_p$ . . . . .	86
4.1	Configurations géométriques et champs de vitesses sans optimisation. . . . .	100
4.2	Maillages utilisés pour les deux géométries, en A à l'entrée de la géométrie 1 et en B à la sortie de la géométrie 2. . . . .	101
4.3	Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ . . . . .	105
4.4	Formes optimisées obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ . . . . .	106
4.5	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ . . . . .	107
4.6	Évolutions de la fonction objectif J en fonction des itérations avec le modèle (a). . . . .	110
4.7	Influence de la taille du maillage avec le modèle (a) pour la géométrie 2. Les illustrations correspondent aux valeurs de la variable de conception $\alpha$ , aux formes optimisées et aux normes des vitesses du fluide $ \mathbf{u} $ . . . . .	111
4.8	Zoom sur l'entrée de la géométrie 1 pour la répartition de la variable de conception $\alpha$ obtenue avec le modèle (d) et le couple ( $\varepsilon = 0,9$ , $\beta = 7290000$ ). . . . .	113
4.9	Formes optimisées obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 1). . . . .	114
4.10	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 1). . . . .	115
4.11	Formes optimisées obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 2). . . . .	116
4.12	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 2). . . . .	117
4.13	Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1. . . . .	120
4.14	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1. . . . .	121
4.15	Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2. . . . .	122
4.16	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2. . . . .	123
4.17	Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1. . . . .	124
4.18	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1. . . . .	125
4.19	Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2. . . . .	126
4.20	Répartitions de vitesse $ \mathbf{u} $ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2. . . . .	127
H.1	Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 1). . . . .	162
H.2	Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour un nombre de Darcy $Da = 10^{-5}$ (géométrie 2). . . . .	163

H.3 Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1. . . . .	164
H.4 Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2. . . . .	165
H.5 Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1. . . . .	166
H.6 Répartitions de la variable de conception $\alpha$ obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2. . . . .	167

# Liste des tableaux

1.1	Modèles de Darcy, de Forchheimer et de Brinkman. . . . .	32
2.1	Termes principaux dans les modèles d'écoulement de fluide en milieu poreux (oui : présent; X : absent; * : présent avec une différence d'écriture). . . . .	50
2.2	Termes supplémentaires avec un gradient de porosité (oui : présent; X : absent; ** : présent avec une différence d'écriture). . . . .	50
3.1	Récapitulatif des références discutées pour le phénomène de <i>channelling</i> . . .	67
3.2	Nombre de citations des sources des équations sur le phénomène de <i>channelling</i> . . .	69
3.3	Points expérimentaux retirés de l'analyse des résultats. . . . .	76
3.4	Effet de la taille du maillage sur les valeurs de $\mathbf{u}_{max}/U$ pour les modèles (A), (B) et (C). . . . .	81
3.5	Effet de la taille du maillage sur les valeurs de $\mathbf{u}_{center}/U$ pour les modèles (A), (B) et (C). . . . .	82
3.6	Effet de la taille du maillage sur les valeurs de $\mathbf{u}_{max}/U$ pour les modèles (A2), (B2) et (C). . . . .	85
3.7	Effet de la taille du maillage sur les valeurs de $\mathbf{u}_{center}/U$ pour les modèles (A2), (B2) et (C). . . . .	85
3.8	Valeurs de $\mathbf{u}_{max}/U$ avec les modèles (A2), (B2) et (C). . . . .	87
3.9	Valeurs de $\mathbf{u}_{center}/U$ avec les modèles (A2), (B2) et (C). . . . .	87
4.1	Valeurs du couple $(\varepsilon, \beta)$ qui donnent un nombre de Darcy de $10^{-5}$ . . . . .	103
4.2	Valeurs du couple $(\varepsilon, \beta)$ qui donnent un nombre de Darcy de $5.10^{-5}$ . . . . .	104
4.3	Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ (géométrie 1). . . . .	108
4.4	Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a), (b), (c) et (d) (géométrie 1). . . . .	112
4.5	Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a), (b), (c) et (d) (géométrie 2). . . . .	112
G.1	Résidus de calcul sur J pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ (géométrie 1). . . . .	158
G.2	Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour les modèles (a) et (e) avec $Da = 5E-5$ (géométrie 1). . . . .	158
G.3	Résidus de calcul sur J (géométrie 1). . . . .	159
G.4	Résidus de calcul sur J (géométrie 2). . . . .	159
G.5	Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour la géométrie 1. . . . .	160
G.6	Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour la géométrie 2. . . . .	160



# Nomenclature

## Lettres grecques

$\alpha$	variable de conception/optimisation
$\beta$	coefficient sans dimension
$\omega$	vitesse de l'interface fluide solide
$\phi$	quantité vectorielle de la phase fluide
$\sigma$	tenseur des contraintes
$\tau$	tenseur des contraintes de viscosité
$\chi, \varphi$	quantités intensives
$\Gamma$	frontière d'un domaine
$\gamma$	pas de descente
$\Lambda$	coefficient d'échange sur les interfaces fluides solides
$\lambda$	libre parcours moyen
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\Omega$	domaine de calcul
$\phi$	quantité scalaire de la phase fluide
$\rho$	masse volumique du fluide
$\tau$	paramètre de régularisation
$\varepsilon$	porosité
$\zeta$	paramètre pour la méthode du gradient conjugué

## Lettres latines

cos	fonction cosinus
Da	nombre de Darcy
exp	fonction exponentielle
J	fonction objectif

Kn	nombre de Knudsen
L	fonctionnelle de Lagrange
p	pression
Re	nombre de Reynolds
tanh	tangente hyperbolique
<b>B</b>	forces volumiques
<b>D</b>	tenseur de taux de déformation
<b>g</b>	champ de pesanteur
<b>I</b>	tenseur unité <sup>1</sup>
<b>j</b>	flux de diffusion
<b>k</b>	tenseur de perméabilité
<b>n</b>	normale à une surface, orientée de l'intérieur vers l'extérieur
<b>r</b>	système orthonormé de coordonnées cartésiennes
<b>u</b>	vitesse du fluide
<b>v, V</b>	vitesse du fluide
<i>c</i>	concentration
<i>C, C, N</i>	constantes
<i>C.S.</i>	surface de contrôle
<i>C.V.</i>	volume de contrôle
<i>F</i>	fonction
<i>H</i>	hauteur d'un canal
<i>K</i>	perméabilité sous la forme d'un scalaire
<i>k</i>	variable d'incrément
<i>L</i>	longueur caractéristique du problème considéré
<i>P, N</i>	volumes de contrôle
<i>R</i>	direction radiale
<i>S</i>	surface
<i>t</i>	variable temporelle
<i>V</i>	volume
<b>F</b>	tenseur de correction de Forchheimer

---

1. Le tenseur unité parfois appelée tenseur identité est aussi noté  $\delta_{i,j}$  qui est le delta de Kronecker.

$\mathbf{Q}$  vecteur débit d'un fluide

E.V.R. élément de volume représentatif du milieu poreux

F fluides

P milieux poreux

V.E.R. volume élémentaire représentatif du milieu poreux

### Symboles et notations mathématiques

$(\bullet)'$  quantité ou opérateur sans dimension

$(\bullet)^*$  multiplicateur de Lagrange

$(\bullet)^T$  transposée

$(\bar{\bullet})^f$  opérateur de moyenne massique

$(\Phi_w, \Phi_{in}, \Phi_{out}, \varphi)$  multiplicateurs de Lagrange

$(\tilde{\bullet})$  déviation spatiale d'une quantité  $(\bullet)$

$\langle \bullet \rangle$  moyenne dans un E.V.R. par rapport au volume de l'E.V.R.

$\langle \bullet \rangle^f$  moyenne dans un E.V.R. par rapport au volume de fluide dans l'E.V.R.

$\alpha_0$  et  $\alpha_{max}$  paramètres d'optimisation

$\Delta$  variation d'une quantité

$\sigma^f$  tenseur des contraintes

$\delta L$  différentielle de L

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  épaisseurs

$\Delta$  opérateur laplacien <sup>2</sup>

$\frac{D(\bullet)}{Dt}$  dérivée matérielle <sup>3</sup>

$\int$  intégrale

$c_F$  coefficient de Forchheimer

$d$  dérivée totale

$d\mathbf{A}$  surface orientée

$d_p$  diamètre moyen effectif des grains constitutifs du matériau poreux

$dA$  élément de surface

$dS$  facette <sup>4</sup>

$dV$  élément de volume

2. L'opérateur laplacien se note aussi  $\nabla^2$ .

3. La dérivée matérielle est aussi appelée dérivée particulaire.

4. On a  $n dS = d\mathbf{A}$ .

$J_\Gamma$	fonction objectif définie sur les frontières $\Gamma$
$J_\Omega$	fonction objectif définie dans le domaine $\Omega$
$p^f$	pression du fluide
$Re_H$	nombre de Reynolds basé sur une échelle de longueur caractéristique macroscopique
$Re_p$	nombre de Reynolds basé sur une échelle de longueur caractéristique d'un pore
$\mu_{eff}$	viscosité effective
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\nabla J$	gradient de la fonction objectif
$\nabla \times$	rotationnel
$\nabla$	opérateur gradient
$\Omega_f$	domaine fluide
$\Omega_p$	domaine poreux
$\partial$	dérivée partielle
$\partial\Omega$	frontière d'un domaine
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	produit doublement contracté de deux tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{ab}$	produit tensoriel <sup>5</sup> de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
$\mathbf{f}_\sigma^f$	vecteur qui représente la modification de la quantité de mouvement de fluide sur les interfaces fluide solide
$\mathbf{f}_\tau^f$	vecteur qui représente la résistance à l'écoulement due à la matrice solide
$\mathbf{F}_S$	forces surfaciques
$\mathbf{n}_{f-s}$	vecteur normal unitaire de la phase fluide vers la phase solide
$\mathbf{u}_{in}$	vitesse à l'entrée du domaine de calcul
$\varepsilon_0$	porosité théorique du matériau poreux
$\varepsilon_f$	porosité du fluide ( $\varepsilon_f = 1$ )
$A_{f-s}$	aire des interfaces fluides solides contenues dans un E.V.R.
$d_k$	direction de descente à l'itération $k$
$F(\Omega, t)$	quantité extensive
$f(t)$	quantité intensive
$h_\tau$	fonction de régularisation

---

5. Le produit tensoriel de deux vecteurs est aussi appelé produit dyadique et se note aussi  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

$L_0$  longueur caractéristique du problème considéré  
 $L_u$  longueur caractéristique de la variation macroscopique de vitesse  
 $L_\varepsilon$  longueur caractéristique de la variation macroscopique de porosité  
 $L_{fluide}$  longueur caractéristique de l'espace des pores  
 $m_{ij}$  composante occupant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  d'une matrice  $\mathbf{m}$   
 $r_0$  rayon d'un E.V.R.  
 $t_0$  temps de référence  
 $v_0, u_0$  vitesses de référence  
 $V_{E.V.R.}$  volume d'un E.V.R.  
 $V_{fluide}$  volume de fluide dans un milieu poreux (selon le contexte, désigne le volume de fluide dans un E.V.R.)  
 $V_{solide}$  volume de solide dans un milieu poreux (selon le contexte, désigne le volume de solide dans un E.V.R.)  
 $V_{total}$  volume total d'un milieu poreux  
 $V_{vide}$  volume de vide dans un milieu poreux  
 $(x, y, z)$  système orthonormé de coordonnées cartésiennes

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation générale du contexte</b>	<b>22</b>
1.2.1	Modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux	22
1.2.2	Optimisation topologique d'un écoulement de fluide	23
<b>1.3</b>	<b>Questions de recherche et objectifs de la thèse</b>	<b>25</b>
<b>1.4</b>	<b>Modélisation d'un écoulement de fluide</b>	<b>27</b>
1.4.1	Hypothèses pour la description du fluide	27
1.4.2	Modèle d'écoulement de Navier-Stokes	27
<b>1.5</b>	<b>Écoulement de fluide en milieu poreux</b>	<b>30</b>
1.5.1	Hypothèses pour la description du milieu poreux	30
1.5.2	Élément de volume représentatif du milieu poreux	31
1.5.3	Modèles d'écoulement de fluide en milieu poreux	32
1.5.4	Technique de prise de moyenne volumique	34
1.5.5	Régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux	37
<b>1.6</b>	<b>Verrous scientifiques et organisation du manuscrit</b>	<b>38</b>

---

### 1.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre contient une présentation du contexte dans lequel s'inscrivent ces travaux de recherche : la modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux et l'optimisation topologique d'un écoulement de fluide. Dans un premier temps, les notions liées à la modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux sont rappelées. Dans un second temps, la méthode d'optimisation topologique généralement utilisée pour un écoulement de fluide est présentée. Les questions de recherche et les objectifs des travaux sont ensuite précisés. Les hypothèses de modélisation choisies sont données et le modèle d'écoulement de Navier-Stokes ainsi que les modèles habituellement trouvés dans la littérature sur les écoulements en milieux poreux sont ensuite présentés. Une analyse de la littérature vis-à-vis des objectifs des travaux permet d'identifier les verrous scientifiques. Les stratégies utilisées pour lever ces verrous sont proposées et ce chapitre se termine par la présentation de l'organisation du manuscrit.

## 1.2 Présentation générale du contexte

### 1.2.1 Modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux

Ces travaux s'intéressent aux mouvements de fluides dans les milieux poreux. Le mot fluide indique généralement un gaz ou un liquide par exemple l'air ou l'eau. Quant aux milieux poreux, ils se trouvent sous plusieurs formes dans l'environnement. Voici quelques exemples qui illustrent la diversité d'un problème d'écoulement de fluide en milieu poreux (F = fluide et P = milieu poreux) :

- les filtres à air dans les voitures (F : air, P : filtre en carton, synthétique ...),
- les hottes aspirantes dans les cuisines (F : air, P : filtre en charbon, métal ...),
- l'eau de pluie qui s'infiltré dans le sol (F : eau, P : sol),
- la circulation de l'air dans une forêt (F : air, P : forêt).

Les écoulements de fluide en milieu poreux occupent une place importante dans plusieurs domaines d'activités tels que :

- le génie pétrolier,
- le génie civil,
- la chimie,
- l'hydrogéologie.

Des cas d'applications environnementales possibles sont le traitement de l'eau, le traitement de l'air, le traitement des fumées et le traitement des déchets. Il y a également la captation du dioxyde de carbone ou encore, le refroidissement des centrales nucléaires. D'autres situations qui peuvent relever de l'écoulement d'un fluide en milieu poreux sont : la circulation de l'air dans un quartier, le refroidissement des ordinateurs et la conception d'échangeurs thermiques. Ainsi, la particularité d'un milieu poreux est de laisser passer plus ou moins facilement un fluide, c'est la notion de perméabilité.

Dans ce manuscrit, l'échelle à laquelle les problèmes sont abordés est celle de la mécanique des milieux continus où il y a un *continuum*. L'hypothèse d'un continuum signifie que les quantités physiques sont distribuées dans l'espace et ont des valeurs finies en chaque point géométrique (élément) de l'espace, ces quantités ne pouvant pas être infinies ou discontinues en un même point [36]. Envisager un milieu poreux comme un milieu continu n'est pas évident, car une phase fluide et une phase solide sont présentes et non dissociables suivant les échelles et les hypothèses considérées. C'est pour cela que la notion d'*élément de volume représentatif* est généralement utilisée et elle est également utilisée dans ces travaux. Dans cette thèse, je considère que la *modélisation mathématique* du problème physique est possible, c'est-à-dire que l'écoulement de fluide peut se mettre sous la forme d'équations à résoudre.

Plusieurs variables influencent l'écoulement d'un fluide et recourir à la modélisation et à la simulation numérique présente des avantages, notamment un avantage financier. Les expérimentations en laboratoire ou sur le terrain restent aujourd'hui coûteuses [44]. Les simulations numériques permettent de faire varier des variables d'intérêts pour un même environnement contrôlé et de faire des expériences simultanées en ne considérant que des coûts de calcul. Même si les supercalculateurs restent coûteux et pas toujours disponibles et que des problèmes restent complexes à modéliser, cette modélisation par ailleurs permet d'accéder en détail à l'intérieur des milieux poreux qui sont souvent inaccessibles.

Un *modèle* est, par nature, une approximation de la réalité, car un ensemble d'hypothèses est utilisé pour l'obtenir. Des écarts observés entre des résultats de modélisation et des

résultats expérimentaux ne sont pas forcément liés à la simplicité d'un modèle. En effet, il y a d'autres éléments à prendre en compte tels que les hypothèses utilisées, l'adéquation du modèle au problème étudié, le choix des paramètres utilisés, etc. La principale difficulté pour le modélisateur réside dans le choix du modèle. Il est souvent plus intéressant, notamment d'un point de vue industriel, d'avoir un modèle simple et relativement proche de la réalité, au détriment d'un modèle complexe avec en plus un temps de calcul trop long, ce qui peut être inadapté aux problèmes à résoudre. Le choix d'un modèle dépend donc de plusieurs facteurs et ce choix n'est pas évident. Un modèle destiné pour la recherche peut généralement être plus complexe, car l'objectif est de mettre en lumière la modélisation de phénomènes jusqu'à présent négligés. Je m'intéresse dans ce manuscrit au modèle d'écoulement de fluide qu'il convient d'utiliser en présence d'un milieu poreux hétérogène. En effet, plusieurs modèles d'écoulement de fluide différents se trouvent dans la littérature et la question du choix du modèle n'est pas évidente. La différence d'écriture des modèles provient des hypothèses utilisées, souvent implicites, qui aboutissent à la présence ou à l'absence de certains termes qui peuvent devenir parfois négligeables. Une discussion sur différents modèles de la littérature et sur les différentes écritures de ces modèles sera présentée dans la suite du chapitre.

## 1.2.2 Optimisation topologique d'un écoulement de fluide

L'optimisation topologique est une méthode/technique mathématique qui a pour origine des applications pour la mécanique des solides. L'objectif consiste en général à chercher une répartition optimale de matière solide dans un domaine de calcul donné soumis à des contraintes. Le domaine de calcul constitue l'environnement sur lequel la simulation numérique est réalisée. Cette méthode répond à la question suivante [5] : *où la matière devrait-elle être placée pour atteindre un objectif donné?* La particularité de cette technique réside dans le fait que la répartition de matière solide obtenue satisfait à des objectifs de conception fixés et à des contraintes imposées, sans indications sur les formes initiales ou finales à obtenir. Les résultats d'un procédé d'optimisation topologique ont pour but de produire des formes dites *optimales*. Il s'agit donc d'une méthode d'optimisation de forme particulière qui permet d'économiser de la matière lors de la conception d'un système ou encore, d'améliorer les performances d'un dispositif grâce à la proposition de formes non conventionnelles (éventuellement réalisables par impression 3D ...). Il y a plusieurs applications, par exemple pour la conception d'une voiture [78], pour la conception d'un mélangeur microfluidique [7] ou pour la conception d'une structure de dissipation de la chaleur [112].

Pour les problèmes d'écoulement de fluide, la méthode d'optimisation topologique a été originellement utilisée pour un écoulement de Stokes en 2003 [17]. Par la suite, de nombreux cas d'applications ont été étudiés comme :

- les transferts de chaleur dans un fluide [83, 97],
- les écoulements turbulents [79, 113],
- les écoulements en convection naturelle [4, 88].

Une synthèse de la littérature sur les problèmes d'optimisation topologique appliqués à des écoulements de fluides se trouve dans [5, 34, 41].

Résoudre un problème d'optimisation topologique peut s'observer comme une approche par contrôle optimal et ce dernier vise à amener un système d'un état initial donné à un certain état final souhaité, en agissant sur une ou plusieurs quantités [101]. Dans le cas



d'un écoulement de fluide, la répartition de matière solide ainsi distribuée permet alors de contrôler l'écoulement.

J'illustre une méthode d'optimisation topologique pour le cas d'un fluide qui contient un soluté de concentration  $c$  à filtrer non pas à l'aide d'une matière solide pleine; mais d'une matière poreuse (appelé matériau poreux). La description d'un problème d'écoulement de fluide en milieu poreux, comme ici dans le cas d'un problème de filtration, nécessite de connaître le comportement de la phase fluide, le comportement du soluté (particules dissoutes) dans cette phase fluide et l'interaction de la phase fluide (sans solutés) et du soluté avec le milieu poreux. Ces interactions peuvent être décrites à différentes échelles. De ce fait, l'échelle de modélisation choisie peut par exemple correspondre à celle des transferts entre les particules dissoutes et les solides qui composent le milieu poreux avec dans le cas d'un milieu réactif, le renseignement de l'équation de transport des particules dissoutes comme dans [84] et des conditions aux limites des quantités physiques sur les interfaces comme dans [21]. Si cette échelle de modélisation fine est choisie initialement, il peut être intéressant par la suite de se ramener à une échelle qualifiée de macroscopique qui peut correspondre à l'échelle de mesure d'une vitesse, de concentration et donc plus généralement, de quantités physiques avec des valeurs moyennes (correspondantes à l'échelle des mesures expérimentales).

La concentration  $c$  que j'ai introduit pour illustrer la méthode d'optimisation topologique avec une matière poreuse est directement une valeur moyenne à l'échelle de la matière poreuse (dite échelle de Darcy) et je vais également dans cette thèse, considérer des quantités physiques à l'échelle de Darcy lors de l'optimisation topologique, car la répartition de matière est initialement inconnue et j'utilise une méthode d'optimisation topologique basée sur le calcul d'un adjoint continu. La méthode d'optimisation topologique que j'utilise dans la thèse se déroule à une échelle continue qui est l'échelle de Darcy et vise à trouver une répartition de matière poreuse et non de matière solide pleine. Une fois les différentes répartitions de matières optimisées obtenues, on peut alors procéder à la résolution du problème physique aux échelles de descriptions plus fines afin de s'assurer de la fiabilité des formes obtenues pour atteindre les objectifs de conception.

Je note  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse,  $p$  la pression et  $\alpha$  une variable dite *de conception*<sup>1</sup> qui permettra de localiser les zones fluides ou poreuses dans le domaine de calcul. Soit  $\mathbf{E}(\mathbf{u}, p, c, \alpha) = \mathbf{0}$ , les équations aux dérivées partielles, les conditions initiales et aux limites modélisant le problème physique, à savoir l'écoulement du fluide et le transport de la concentration dans le domaine de calcul et enfin  $J(\mathbf{u}, p, c, \alpha)$  une fonction scalaire résumant les objectifs d'optimisation à atteindre. Cette dernière, appelée fonction coût ou bien fonction objectif, traduit un critère physique par exemple la perte de charge ou la vitesse à la sortie, qui est optimisée en jouant sur la distribution de  $\alpha$  dans le domaine de calcul. Pour filtrer un soluté, la fonction objectif peut porter sur la minimisation de la concentration à l'intérieur du domaine de calcul ou sur la sortie par exemple. Il est possible d'ajouter au problème d'optimisation des contraintes supplémentaires qui portent sur le volume de fluide ou de matière poreuse à avoir dans le domaine de calcul, mais ce n'est pas le cas dans cette thèse. Un problème d'optimisation topologique s'énonce comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser} && J(\mathbf{u}, p, c, \alpha) \\ & \text{sous contraintes} && \mathbf{E}(\mathbf{u}, p, c, \alpha) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

1. Également appelée variable d'optimisation ou encore *design variable* en anglais.

[5, 41, 45, 93] expliquent que l’approche d’optimisation topologique la plus utilisée pour un écoulement de fluide est l’approche basée sur la densité de matière [83, 86] avec 77% des articles publiés de 2003 à 2020 [5] et 84% des articles publiés ces quinze dernières années sur l’optimisation des échangeurs de chaleur [41]. L’approche basée sur la densité de matière est également appelée méthode SIMP [13, 17, 45] pour *Solid Isotropic Material With Penalization*. Les zones qui contiennent une matière solide pleine correspondent numériquement à des zones où l’écoulement est considéré comme suffisamment faible au regard de l’écoulement majoritaire. Cela peut se faire grâce à l’ajout d’un terme de Darcy (équation de type Brinkman) dans le modèle d’écoulement de fluide visant à pénaliser la vitesse du fluide dans certaines zones du domaine de calcul. D’ailleurs, cette approche s’appelle également *la méthode de pénalisation de Brinkman* [4, 83].

Sur la période 2003 à 2020, seulement 14 articles s’intéressent à une répartition optimisée de matière solide qui n’est pas pleine, mais poreuse [5]. De ce fait, j’utilise dans ces travaux l’approche basée sur la densité de matière et mon objectif consistera à trouver une répartition optimisée de matériaux poreux. Comme précisé par la suite, la difficulté dans cette démarche se situe au niveau de la formulation des équations du problème physique. De plus, à ma connaissance, l’optimisation topologique pour un écoulement de fluide n’a pas encore été réalisée en tenant compte de l’hétérogénéité spatiale due à la modification de la répartition des matériaux poreux.

Ces travaux se positionnent dans la continuité de travaux précédemment effectués dans le laboratoire [10, 86, 87, 88, 90]. En ce sens, j’utilise une méthode d’optimisation basée sur le gradient de la fonction objectif, résolue à l’aide d’une méthode adjointe [15]. Les valeurs de la variable de conception  $\alpha$  sont actualisées avec une méthode de descente basée sur le calcul du gradient. Dans la suite, les objectifs des travaux et les questions de recherche sont donnés.

### 1.3 Questions de recherche et objectifs de la thèse

L’idée principale est d’utiliser une méthode d’optimisation topologique pour un écoulement de fluide et la particularité consiste à chercher une répartition optimale de matériaux poreux et non de matière solide pleine ; afin d’obtenir un milieu poreux de forme optimisée. La motivation initiale de ces travaux de thèse portait sur une application environnementale :

*Comment procéder pour trouver la forme optimale d’un filtre par une répartition de matière poreuse obtenue avec une technique d’optimisation topologique ?*

Ce sont les questions qui proviennent de cette motivation qui ont permis de définir les objectifs de cette thèse. Les matériaux poreux sont plus ou moins perméables à un écoulement de fluide, l’approche de modélisation utilisée doit donc permettre de représenter le mouvement du fluide dans les zones du domaine de calcul sans matériaux poreux et dans les zones qui contiennent des matériaux poreux. La technique d’optimisation est itérative, il y a donc une modification de la répartition spatiale des matériaux poreux au cours des itérations de l’algorithme de descente et le milieu poreux recherché correspond finalement à un milieu poreux qui a une hétérogénéité spatiale. La question de recherche qui découle de ce constat est :

**Quel est le modèle d’écoulement de fluide qu’il convient d’utiliser en présence d’un milieu poreux hétérogène ?**

Le premier objectif de cette thèse sera donc de répondre à cette question.

L'hétérogénéité est définie dans ces travaux dans le sens où les quantités physiques locales (définies comme étant représentatives d'un certain volume de matière poreuse) qui caractérisent le milieu poreux telles que la porosité  $\varepsilon$  ou le diamètre moyen effectif<sup>2</sup> des grains  $d_p$  peuvent varier dans l'espace. La porosité locale  $\varepsilon$  correspond au pourcentage de vide contenu dans l'échantillon de matière poreuse localement considérée :

$$\varepsilon = \frac{V_{vide}}{V_{vide} + V_{solide}} = \frac{V_{vide}}{V_{total}}. \quad (1.2)$$

L'hétérogénéité est une notion complexe, car il faut pouvoir utiliser des instruments et des méthodes adaptés afin d'obtenir des mesures expérimentales qui sont localement significatives ou représentatives [85]. La difficulté pour un milieu poreux réside dans le fait qu'une mesure expérimentale est en général dépendante du volume de matière poreuse qui est considéré.

De façon générale, les variations locales de porosité peuvent se rencontrer dans plusieurs situations telles que pour un sol naturel, pour la dissolution d'un milieu poreux ou encore pour un liquide qui se solidifie. Le cas d'une dissolution d'un milieu poreux présentant ainsi une variation temporelle et spatiale de la porosité est étudié dans [48]. L'hétérogénéité d'un milieu poreux s'observe également à l'intérieur des colonnes garnies telles que les colonnes de filtration. Dans ce type de dispositif, il y a :

- une situation d'hétérogénéité à l'interface entre le fluide et le milieu poreux et donc dans une zone de transition. En effet, comme vérifié expérimentalement dans [64], il peut y avoir une augmentation de la densité de matrice solide en fonction de la profondeur,
- une situation d'hétérogénéité proche des parois due à l'arrangement des grains en contact avec les parois solides qui produit un phénomène dit de *channelling*, plus d'informations peuvent être trouvées dans [73] et ce point sera abordé en détail dans le chapitre 3,
- une autre situation d'hétérogénéité au cours de l'utilisation du milieu poreux avec, par exemple, la modification de la porosité à cause de l'accumulation de polluants [28, 29] ou la colonisation du filtre par des biofilms [31].

En définitive, les systèmes avec des variations (gradients) de porosité sont d'intérêt général et le comportement global des écoulements de fluide dans les milieux poreux est fortement influencé par la porosité [110]. De plus, il est indiqué dans [73] :

*New effects to be considered include the effect of porosity variation near a solid boundary (the "channelling effect").*

Dans ce manuscrit, j'étudierai donc le phénomène de *channelling* qui apparaît à cause de l'hétérogénéité d'un milieu poreux. La démarche menée dans ces travaux s'inscrit dans un objectif global, car plusieurs autres mécanismes tels que le transfert de chaleur ou le transfert de masse sont par exemple sensibles aux variations de porosité [102] et font intervenir un écoulement de fluide.

Les variations de porosité sont également présentes en optimisation topologique, notamment avec l'approche basée sur la densité de matière comme celle envisagée ici. En effet, au cours de l'optimisation, le domaine de calcul est composé de zones solides, fluides ou intermédiaires entre un solide et un fluide [45, 86]. Les zones intermédiaires sont des zones

---

2. Une grandeur effective caractérise le milieu homogène correspondant [69].

poreuses par définition et il est donc possible de leur attribuer une valeur de porosité qui va varier au cours de l'optimisation. Mais l'objectif de la méthode est habituellement de chercher à trouver un domaine composé de zones solides ou de zones fluides et non de zones poreuses comme dans ces présents travaux. Les zones poreuses sont donc habituellement pénalisées et servent uniquement un objectif algorithmique, car elles permettent une transition continue entre le fluide et le solide [45]. L'optimisation topologique dans le but de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux peut se faire comme dans [6, 10, 80, 81, 99, 100, 107], mais l'hétérogénéité spatiale n'est pas explicitement considérée. Ceci s'explique par les hypothèses utilisées pour construire les modèles d'écoulement de fluide qui se trouvent dans ces références. Ainsi, cela amène au second objectif de cette thèse qui sera de répondre à la question de recherche suivante :

**Comment poser et résoudre un problème d'optimisation topologique pour un écoulement de fluide dans le but de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux tout en tenant compte de l'hétérogénéité spatiale ?**

## 1.4 Modélisation d'un écoulement de fluide

### 1.4.1 Hypothèses pour la description du fluide

Le domaine fluide est modélisé par un milieu continu homogène et isotrope. Une introduction générale à la mécanique des milieux continus se trouve dans [24, 55]. La continuité du domaine fluide est possible quand le libre parcours moyen  $\lambda$  est petit par rapport à une longueur caractéristique du problème étudié  $L$ . Ce ratio est défini par le nombre de Knudsen  $Kn$ . On considère ce nombre :

$$Kn = \frac{\lambda}{L}, \quad (1.3)$$

ici comme étant petit. On considère un fluide incompressible isotherme, la masse volumique  $\rho$  est donc constante. La viscosité du fluide  $\mu$  est également considérée constante et le fluide a un comportement newtonien. Les forces extérieures volumiques qui agissent sur le fluide telles que le champ de pesanteur  $\mathbf{g}$  sont négligées. Enfin, une description Eulérienne du mouvement et un système orthonormé de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  sont utilisés.

### 1.4.2 Modèle d'écoulement de Navier-Stokes

Le modèle d'écoulement de Navier-Stokes permet de modéliser l'écoulement d'un fluide newtonien et incompressible. Je pars des équations générales de bilan fondamentales pour un fluide afin de mettre en lumière les termes qui apparaissent par la suite à l'échelle du milieu poreux. Je m'intéresse plus particulièrement aux bilans de la masse de fluide et de la quantité de mouvement de fluide. Plus de détails sur les développements qui aboutissent au modèle d'écoulement de Navier-Stokes se trouvent dans [24, 62, 82].

#### Conservation de la masse de fluide

Bien que le fluide soit considéré comme incompressible isotherme, je commence mon développement par l'emploi d'une équation de bilan générale de la masse de fluide. Sur un

volume de contrôle, la forme intégrale de l'équation de conservation de la masse de fluide s'écrit comme suit (voir [55, p.90, Eq.(6)]) :

$$\int_{C.S.} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{C.V.} \rho dV, \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du fluide et  $\rho$  sa masse volumique. Le théorème de Green-Ostrogradski<sup>3</sup> pour un vecteur  $\mathbf{u}$  donné permet d'effectuer la transformation :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.5)$$

En reportant (1.5) dans l'équation (1.4) :

$$\int_{C.V.} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{C.V.} \rho dV, \quad (1.6)$$

le volume de contrôle étant arbitraire et fixe, l'équation (1.6) devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.7)$$

En utilisant alors la condition d'incompressibilité, l'équation de conservation de la masse de fluide est :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.} \quad (1.8)$$

### Conservation de la quantité de mouvement de fluide

De façon identique à la masse de fluide, la forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de fluide s'écrit comme suit [55, p.108, Eq.(1)] :

$$\mathbf{F}_S + \int_{C.V.} \mathbf{B} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{C.V.} \mathbf{v} \rho dV + \int_{C.S.} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{F}_S$  représente les forces surfaciques et  $\mathbf{B}$  les forces extérieures volumiques. Par rapport aux hypothèses de travail 1.4.1, les forces extérieures volumiques sont négligées, donc  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Les forces surfaciques sont données par  $\mathbf{F}_S = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes qui s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (1.10)$$

avec  $p$  la pression et  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes de viscosité (voir [55, p.147, Eq.(1)]). La divergence du tenseur des contraintes donne :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (1.11)$$

Je considère un fluide qui a un comportement newtonien, ce qui apporte une relation constitutive (voir [55, p.149, Eq.(4)]) :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}, \quad (1.12)$$

---

3. Le théorème de Green-Ostrogradski est aussi appelé théorème de flux-divergence.

où  $\mu$  est la viscosité et  $\mathbf{D}$  est le tenseur de taux de déformation avec  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + [\nabla\mathbf{v}]^T)$ . L'équation de Navier-Stokes est alors obtenue pour un fluide newtonien, de viscosité et de masse volumique constantes et avec les forces extérieures volumiques qui sont négligées :

$$\boxed{\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.} \quad (1.13)$$

### Nombres et équations sans dimensions

En général, les problèmes sont résolus sans dimension. Des nombres sans dimensions sont utilisés, car ils permettent de caractériser le type de problème. J'introduis les variables sans dimensions suivantes :

$$\mathbf{p}' = \frac{p}{\rho v_0^2}, \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, t' = \frac{t}{t_0} = \frac{t v_0}{L_0}, \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L_0}. \quad (1.14)$$

La notation  $(\bullet)'$  indique une quantité ou un opérateur sans dimension. L'indice zéro indique une valeur de référence,  $L_0$  est une dimension de référence et  $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Les opérateurs différentiels dans le système de coordonnées sans dimension sont liés aux opérateurs originaux :

$$\nabla'(\bullet) = L_0 \nabla(\bullet), \Delta'(\bullet) = L_0^2 \Delta(\bullet). \quad (1.15)$$

La méthode pour rendre l'équation de Navier-Stokes (1.13) sans dimension est présentée en détail ci-après, car la même procédure sera utilisée dans la suite du manuscrit. J'introduis de nouveau l'équation (1.13) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.16)$$

J'effectue les changements de variables :

— pour la vitesse  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{v}'$  dans l'équation (1.16) :

$$\rho \left( v_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v_0^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}'\mathbf{v}') \right) = -\nabla p + v_0 \mu \Delta \mathbf{v}', \quad (1.17)$$

— pour la pression  $p = \rho v_0^2 p'$  dans l'équation (1.17) :

$$\rho \left( v_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v_0^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}'\mathbf{v}') \right) = -\rho v_0^2 \nabla p' + v_0 \mu \Delta \mathbf{v}', \quad (1.18)$$

— pour la durée  $t = \frac{L_0 t'}{v_0}$  dans l'équation (1.18) :

$$\rho \left( \frac{v_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + v_0^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}'\mathbf{v}') \right) = -\rho v_0^2 \nabla p' + v_0 \mu \Delta \mathbf{v}', \quad (1.19)$$

— pour les opérateurs différentiels dans l'équation (1.19) :

$$\rho \left( \frac{v_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{L_0} \nabla' \cdot (\mathbf{v}'\mathbf{v}') \right) = -\frac{\rho v_0^2}{L_0} \nabla' p' + \frac{v_0 \mu}{L_0^2} \Delta' \mathbf{v}'. \quad (1.20)$$

Enfin, en multipliant l'équation (1.20) par  $\frac{L_0}{\rho v_0^2}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\mathbf{v}' \mathbf{v}') = -\nabla' p' + \frac{\mu}{v_0 \rho L_0} \Delta' \mathbf{v}'. \quad (1.21)$$

Le nombre sans dimension qui apparaît est le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{v_0 \rho L_0}{\mu}. \quad (1.22)$$

Une forme sans dimension de l'équation de Navier-Stokes (1.13) est obtenue :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}}, \quad (1.23)$$

où les notations sans dimensions  $(\bullet)'$  ne sont plus précisées.

## 1.5 Écoulement de fluide en milieu poreux

### 1.5.1 Hypothèses pour la description du milieu poreux

Les hypothèses utilisées s'appuient sur les ouvrages [71, 109]. Par définition, un milieu poreux est composé de solides et de vides. Je considère une matrice solide (un squelette) imperméable, non déformable et sans vitesse. Les vides sont appelés les pores. Je fais l'hypothèse que les vides sont interconnectés. Par définition, la porosité  $\varepsilon$  (dite porosité accessible, car les vides sont interconnectés) est le ratio du volume de vide par rapport au volume total de l'échantillon de matière poreuse considéré. Je considère le milieu poreux étudié comme étant composé de matériaux poreux isotropes, le tenseur local de perméabilité  $\mathbf{k}$  est donc un tenseur d'ordre zéro soit un scalaire  $K$ . Les matériaux poreux sont considérés comme étant saturés par la phase fluide définie à la section 1.4.1 donc  $V_{vide} = V_{fluide}$ . Enfin, je modélise le milieu poreux à l'échelle macroscopique comme étant un milieu continu.

**Remarque 1.1.** — L'échelle microscopique correspond à l'intérieur des pores. À cette échelle, il n'y a pas de notion d'homogénéité ou d'hétérogénéité géométrique du milieu poreux. L'équation de Navier-Stokes (1.13) peut être utilisée pour modéliser le mouvement de fluide si le fluide est un milieu continu. Ceci est renseigné par la valeur du nombre de Knudsen. Si cela est possible, il est alors nécessaire de connaître les différents réseaux de pores que constituent les vides (l'intérieur du milieu poreux). Dans ce cas, une photographie fine du milieu poreux doit être utilisée. Bien que difficiles pour de grands volumes de matériaux poreux, différentes techniques permettent d'observer la structure interne d'un milieu poreux, par exemple la microtomographie à rayons X<sup>4</sup> [31]. Les simulations numériques réalisées à l'échelle du pore sont particulièrement intéressantes, car elles apportent des éléments de validation des modèles d'écoulement de fluide développés à d'autres échelles de description.

Il existe plusieurs techniques pour obtenir un modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux à l'échelle macroscopique telles que :

4. Voir par exemple <https://mateis.insa-lyon.fr/fr/content/micro-tomographie-aux-rayons-x>.

- la prise de moyenne volumique avec résolution d’un problème de fermeture [109],
- la prise de moyenne volumique avec des relations de fermeture qui sont conformes à la deuxième loi de la thermodynamique [36, 56],
- la théorie de l’homogénéisation [92],
- l’approche TCAT pour *Thermodynamically Constrained Averaging Theory* [51],
- l’analyse stochastique [27, 43],
- la théorie des mélanges [8].

Une comparaison entre la technique de prise de moyenne volumique avec résolution d’un problème de fermeture et la théorie de l’homogénéisation se trouve dans [32]. Une discussion sur l’approche TCAT se trouve dans [11, 52, 53]. Dans ces travaux, je choisis d’utiliser une technique de prise de moyenne volumique avec les relations de fermeture qui se trouvent dans [36, 56]. La prise de moyenne se fait sur des volumes contenant plusieurs pores, donc les variables macroscopiques telles que la porosité sont définies comme des moyennes spatiales appropriées pour un élément de volume localement représentatif du milieu poreux. Ces éléments de volume portent individuellement le nom d’E.V.R. pour élément de volume représentatif et les E.V.R. constituent le milieu continu du milieu poreux.

## 1.5.2 Élément de volume représentatif du milieu poreux

Le terme E.V.R. est préféré dans ce manuscrit, mais le terme V.E.R. pour volume élémentaire représentatif est plus souvent rencontré dans la littérature. Une discussion sur la terminologie se trouve dans [32]. Le mot *élémentaire* restreint le volume représentatif à être le plus petit volume pour effectuer la prise de moyenne spatiale; or ce n’est pas une obligation, la taille du volume peut être grande si le volume utilisé pour la technique de prise de moyenne reste représentatif du milieu poreux.

De manière générale, il est considéré que la taille d’un E.V.R. ne varie pas en fonction du temps ni de l’espace [109]. Son échelle de longueur caractéristique est bien plus grande que l’échelle de longueur caractéristique d’un pore, mais bien plus petite que l’échelle de longueur caractéristique du domaine d’écoulement de fluide macroscopique. Les variables macroscopiques sont généralement considérées comme étant indépendantes de la taille de l’E.V.R. et sont définies comme des moyennes appropriées au centre des E.V.R. [71]. Un E.V.R. contient les phases fluides et solides :  $V_{E.V.R.} = V_{fluide} + V_{solide}$ . La porosité locale est définie par :

$$\varepsilon = \frac{V_{fluide}}{V_{E.V.R.}}. \quad (1.24)$$

Dans cette thèse, je tiens compte de l’hétérogénéité du milieu poreux. Quand l’hétérogénéité est significative, la taille et l’emplacement de l’E.V.R. dans le milieu poreux ont une influence sur les variables macroscopiques et une contrainte d’échelle de longueur caractéristique est donnée dans [49] :

$$L_{fluide} \leq r_0 \sim L_\varepsilon, L_{\mathbf{u}}, \quad (1.25)$$

où  $r_0$  est le rayon de l’E.V.R.,  $L_{fluide}$  est la longueur caractéristique d’un pore.  $L_\varepsilon$  est la longueur caractéristique associée à la variation macroscopique de porosité et  $L_{\mathbf{u}}$  est la longueur caractéristique associée à la variation macroscopique de vitesse. La référence [49] indique que dans ce cas, il est possible de considérer des E.V.R. de tailles variables (Figure 1.1) et



des termes de gradient de porosité apparaissent explicitement dans l'équation de bilan macroscopique de la quantité de mouvement du fluide. Ces gradients des quantités physiques (ici des gradients de porosité) traduisent l'apparition de longueur de coupure et donnent la possibilité de continuer à représenter le milieu poreux hétérogène comme étant un milieu continu [32].

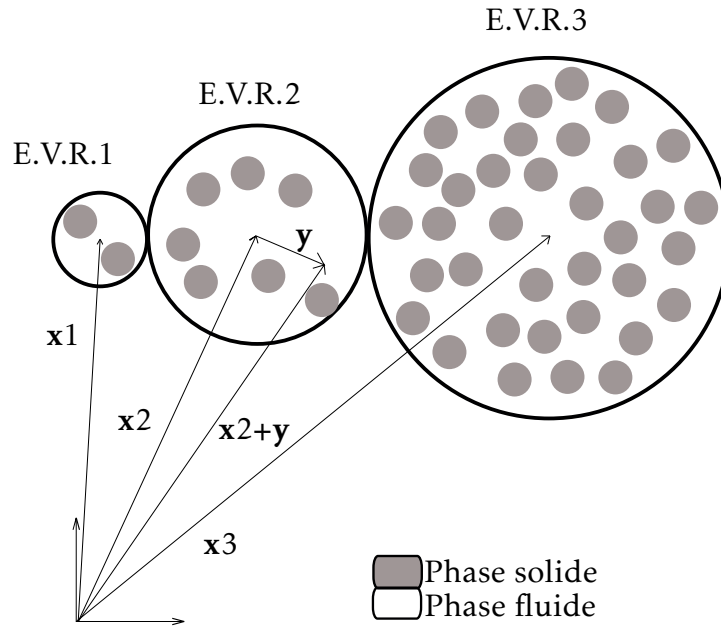


FIGURE 1.1 – Illustration de trois éléments de volume représentatifs du milieu poreux (E.V.R.).

### 1.5.3 Modèles d'écoulement de fluide en milieu poreux

Une fois le milieu poreux défini comme étant un milieu continu, différents modèles d'écoulement de fluide peuvent être utilisés. Il y a historiquement [71] :

- l'équation de Darcy,
- l'équation de Brinkman,
- l'équation de Forchheimer.

Tableau 1.1 – Modèles de Darcy, de Forchheimer et de Brinkman.

Modèle	Année	Modèle
Darcy [30] Eq. (1.26)	1856	$\nabla p^f = -\frac{\mu \mathbf{u}}{\mathbf{k}}$
Forchheimer [42] [33, Eq. (21)]	1901	$\mathbf{0} = -\nabla p^f - \frac{\mu \mathbf{u} 150(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 d_p^2} - \frac{1,75 \rho (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 d_p}  \mathbf{u}  \mathbf{u}$
Brinkman [20] [71, Eq. (1.17)]	1949	$\nabla p^f = -\frac{\mu \mathbf{u}}{\mathbf{k}} + \mu_{eff} \Delta \mathbf{u}$

Ces trois modèles sont présentées dans le tableau 1.1 et sont complétés par une équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Ces modèles permettent de trouver les valeurs de la vitesse  $\mathbf{u}$  et de la pression  $p^f$ . La viscosité effective est  $\mu_{eff}$  et le diamètre moyen effectif des grains est  $d_p$ . Il y a également  $\mu$  la viscosité,  $\rho$  la masse volumique et  $\mathbf{k}$  la perméabilité. Il y a dans la littérature différentes combinaisons d'équations telles que l'équation de Darcy-Brinkman, l'équation de Darcy-Forchheimer ou encore l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer [69]. Dans la suite du chapitre, une discussion sur la loi de Darcy et sur le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est apportée.

## Loi de Darcy

La loi de Darcy est issue d'une expérimentation en régime permanent, une formulation locale se trouve dans [72] :

$$\nabla p^f = -\frac{\mu \mathbf{u}}{\mathbf{k}}. \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) est une équation de bilan macroscopique de la quantité de mouvement de fluide à l'échelle d'un V.E.R.. La vitesse de Darcy  $\mathbf{u}$  est une vitesse moyenne sur le volume d'un V.E.R. et ce dernier se compose d'un volume de fluide et d'un volume de solide. Tandis que la pression  $p^f$  est une pression moyenne sur le volume de fluide contenu dans le V.E.R.. Il y a alors, dans la loi de Darcy, deux types de moyennes à l'échelle d'un V.E.R. qui seront discutés en détail par la suite (section 1.5.4). Cette observation est importante, car la notation de la pression peut porter à confusion. L'impact de l'écriture de la pression sur le champ d'écoulement de fluide sera illustré dans le chapitre 3 avec des résultats de simulations numériques. Il est possible d'harmoniser les équations en utilisant uniquement un seul type de moyenne comme proposé dans [72]. Lors de cette harmonisation, il faut faire un choix et en général, pour la pression, la moyenne préconisée dans la littérature est la moyenne sur le volume de fluide dans le V.E.R. [33, 106, 109]. En revanche, pour les autres quantités physiques telles que la vitesse ou la concentration d'un soluté, la moyenne la plus adaptée dépend du problème à résoudre [109]. L'harmonisation n'est donc pas évidente. Enfin, la validité de la loi de Darcy concerne uniquement des nombres de Reynolds basés sur l'échelle du pore  $Re_p = \frac{\rho |\mathbf{u}| d_p}{\mu}$  inférieurs à une certaine valeur, définie comme étant 1 dans [72] ou 10 dans [110].

## Équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer

La formulation de Darcy-Brinkman-Forchheimer (D.B.F.) est une équation de bilan macroscopique de la quantité de mouvement de fluide. Elle permet de retrouver l'équation de Navier-Stokes dans le fluide où la porosité  $\varepsilon$  est égale à 1 et la perméabilité  $\mathbf{k}$  est infinie. Cette formulation contient le terme de Darcy et les termes de corrections de Brinkman et de Forchheimer. L'équation D.B.F. permet donc de couvrir des régimes d'écoulement de fluide qui vont au-delà du régime de Darcy. Toutefois, le choix de la formulation du modèle D.B.F. n'est pas évident, car il existe plusieurs écritures dans la littérature. Par exemple, dans [1], différentes écritures du modèle sont étudiées et les différences concernent le terme de Darcy, le terme de Brinkman et le terme de Forchheimer. Un coefficient de porosité supplémentaire  $\varepsilon$  se trouve parfois dans le terme de Forchheimer et la viscosité effective  $\mu_{eff}$  dans le terme de

Brinkman peut être définie comme étant  $\mu_{eff} = \mu$  ou encore  $\mu_{eff} = \frac{\mu}{\varepsilon}$  suivant les situations. On observe donc dans la littérature des formulations qui ne sont pas consistantes mathématiquement. Dans [1], les différentes écritures du modèle D.B.F. ont un impact sur le champ de vitesse. La formulation du modèle d'écoulement de fluide est donc importante, car le champ de vitesse influence directement plusieurs phénomènes physiques tels que le transfert de chaleur convectif, les taux de réaction chimique ou encore l'efficacité d'une filtration [9, 102].

### 1.5.4 Technique de prise de moyenne volumique

La technique de prise de moyenne volumique permet d'effectuer un changement d'échelle qui se fait de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. À l'échelle macroscopique, un élément de volume qui est localement représentatif du milieu poreux, l'E.V.R. (voir section 1.5.2) est utilisé. Une présentation générale de la technique de prise de moyenne volumique avec résolution d'un problème de fermeture est donnée dans cette section puis une illustration partielle sur l'équation de Navier-Stokes sera fournie. Les informations qui sont présentées peuvent être retrouvées en détail dans [109].

#### Présentation générale

La technique de prise de moyenne volumique peut s'organiser en 5 étapes qui sont détaillées comme suit.

1. Intégrer les équations du fluide à l'échelle microscopique sur le volume de fluide  $V_{fluide}$  dans l'E.V.R. puis diviser par le volume de l'E.V.R.  $V_{E.V.R.}$ . Deux types de moyennes sur l'E.V.R. peuvent être utilisées, elles sont illustrées ici pour la vitesse du fluide dans la phase fluide  $\mathbf{v}$ .

— La moyenne de  $\mathbf{v}$  dans l'E.V.R. par rapport au volume de l'E.V.R. est :

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{E.V.R.}(\mathbf{x}, t)} \int_{V_{fluide}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) dV(\mathbf{y}). \quad (1.27)$$

— La moyenne de  $\mathbf{v}$  dans l'E.V.R. par rapport au volume de fluide dans l'E.V.R. est :

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \rangle^f (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_{fluide}(\mathbf{x}, t)} \int_{V_{fluide}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) dV(\mathbf{y}). \quad (1.28)$$

Les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont présentés sur la Figure 1.1 et les deux moyennes sont reliées par la porosité  $\varepsilon$  à travers la relation suivante :

$$\langle \mathbf{v} \rangle (\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}, t) \langle \mathbf{v} \rangle^f (\mathbf{x}, t). \quad (1.29)$$

Le choix du type de moyenne à utiliser a donc pour conséquence la présence ou l'absence d'un facteur de porosité  $\varepsilon$ .

2. Utiliser le théorème de la moyenne spatiale. Pour une quantité scalaire de la phase fluide  $\phi$ , ce théorème s'écrit [109, p.11 eq. (1.2-16)] :

$$\langle \nabla|_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \rangle (\mathbf{x}, t) = \nabla|_{\mathbf{x}} \langle \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \rangle (\mathbf{x}, t) + \frac{1}{V_{E.V.R.}(\mathbf{x}, t)} \int_{A_{f-s}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{n}_{f-s} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) dA(\mathbf{y}), \quad (1.30)$$

où  $A_{f-s}$  est l'aire des interfaces fluides solides contenues dans l'E.V.R. et  $\mathbf{n}_{f-s}$  est un vecteur normal unitaire de la phase fluide vers la phase solide.

Par la suite, les notations des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont plus précisées afin d'alléger les écritures. Pour une quantité vectorielle de la phase fluide  $\phi$ , le théorème de la moyenne spatiale est :

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle = \nabla \cdot \langle \phi \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \phi \, dA. \quad (1.31)$$

3. Utiliser les conditions aux limites des quantités sur les interfaces fluides solides pour trouver les expressions des intégrales de surface  $\int_{A_{f-s}} (\bullet) \, dA$ .
4. Décomposer les quantités dans la partie fluide qui ne sont pas sous la forme de moyenne dans l'E.V.R. :

$$\phi = \langle \phi \rangle^f + \tilde{\phi}. \quad (1.32)$$

Cette étape s'appelle la décomposition spatiale et  $\tilde{\phi}$  est un terme qui représente la déviation spatiale de  $\phi$  par rapport à  $\langle \phi \rangle^f$ . Au cours de la procédure de changement d'échelle, les quantités  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  qui ne sont pas sous la forme d'une moyenne dans l'E.V.R. et donc pas définies pour un E.V.R., mais à l'intérieur de l'E.V.R. doivent être transformées. La décomposition spatiale peut s'interpréter comme une décomposition des échelles de longueur caractéristique.

5. Transformer les équations afin que les variables présentes soient uniquement dépendantes de la position de l'E.V.R. (suivant le vecteur  $\mathbf{x}$ ). Pour cela, plusieurs stratégies doivent être mises en place dont les contraintes liées aux échelles de longueur caractéristique où notamment, le rayon de l'E.V.R.  $r_0$  est grand par rapport à la longueur caractéristique de la phase fluide  $L_{fluide}$  dans l'E.V.R. :

$$L_{fluide} \ll r_0. \quad (1.33)$$

Il peut également être nécessaire de réaliser une estimation des ordres de grandeur des termes afin de simplifier les équations obtenues. Un problème de fermeture doit ensuite être résolu afin de déterminer la forme des termes de déviations spatiales  $\tilde{\phi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t)$  introduits à l'étape 4. Ce problème de fermeture peut, par exemple, être résolu pour une région représentative telle qu'une cellule unitaire au sein d'un milieu poreux spatialement périodique. Dans [109], c'est la résolution du problème de fermeture qui fait apparaître les coefficients de transport effectifs tels que le tenseur de perméabilité.

**Remarque 1.2.** — Il est proposé dans [26] d'utiliser des éléments de volume représentatif déformables c'est-à-dire de tailles variables et des termes supplémentaires sont ajoutés aux théorèmes de la moyenne spatiale des équations (1.30) et (1.31). Ces termes sont respectivement :

$$\langle \phi \rangle \nabla \ln(V_{E.V.R.}) \quad \text{et} \quad \langle \phi \rangle \cdot \nabla \ln(V_{E.V.R.}). \quad (1.34)$$

Puis dans [60], le théorème de la moyenne spatiale est revisité et les termes supplémentaires introduits dans [26] sont discutés. Plus précisément, la discussion est menée sur la base d'une courbe arbitraire qui relie des centres d'E.V.R. et donc dans une description continue du milieu poreux. Il est indiqué dans [60] :

"the averaging volume is spatially invariant. This excludes the use of space-dependent averaging volumes as described by [26]".

Ainsi, dans le théorème de la moyenne spatiale, le volume de fluide dans l'E.V.R.  $V_{fluide}$  et la surface des entrées et des sorties du fluide dans l'E.V.R. dépendent déjà de la localisation du centre des E.V.R. et ils dépendent également du temps si les interfaces fluides solides se déplacent [60]. J'utiliserai donc la forme des théorèmes de la moyenne spatiale présentée dans [109] et donc les équations (1.30) et (1.31) sans modifications, car le volume de fluide  $V_{fluide}$  dans l'E.V.R. utilisé pour la prise de moyenne dépend déjà du temps et de l'espace.

### Illustration partielle pour l'équation de Navier-Stokes (1.23)

J'illustre la technique de prise de moyenne volumique pour l'équation (1.23) en régime permanent :

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}. \quad (1.35)$$

L'étape 1 donne pour chaque terme de l'équation (1.35) :

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) dV = \langle \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \rangle. \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \nabla p dV = \langle \nabla p \rangle. \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} dV = \langle \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \rangle. \quad (1.38)$$

L'équation (1.35) peut alors s'écrire :

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \rangle = -\langle \nabla p \rangle + \langle \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \rangle. \quad (1.39)$$

L'étape 2 donne pour chaque terme de l'équation (1.39) :

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \mathbf{v}\mathbf{v} dA. \quad (1.40)$$

$$\langle \nabla p \rangle = \nabla \langle p \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} p dA. \quad (1.41)$$

$$\langle \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\text{Re}} \langle \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\text{Re} V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \nabla \mathbf{v} dA. \quad (1.42)$$

L'équation (1.42) est obtenue grâce à l'hypothèse suivante : le nombre de Reynolds  $\text{Re}$  est indépendant du volume de prise de moyenne. En utilisant une nouvelle fois l'étape 2 sur l'équation (1.42), j'obtiens :

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \left( \nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \mathbf{v} dA \right) \\ &+ \frac{1}{\text{Re} V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \nabla \mathbf{v} dA. \end{aligned} \quad (1.43)$$

L'étape 3 est ensuite utilisée. Par exemple, si la vitesse considérée à une interface fluide solide est nulle, l'intégrale dans la parenthèse de l'équation (1.43) est égale à zéro. Ainsi, cette dernière équation s'écrit :

$$\left\langle \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} \right\rangle = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\text{Re} V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dA. \quad (1.44)$$

À ce stade, l'équation (1.39) s'écrit :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle + \nabla \langle p \rangle - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \langle \mathbf{v} \rangle = \text{termes sous la forme d'une intégrale.} \quad (1.45)$$

Le terme  $\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \varepsilon \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle^f$  est évalué grâce à la décomposition spatiale (étape 4), il peut s'écrire comme dans [18, eq. (23)] :

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle^f = \langle \mathbf{v} \rangle^f \langle \mathbf{v} \rangle^f + \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \rangle^f. \quad (1.46)$$

Les termes restants qui sont sous la forme d'une intégrale (1.45) contiennent des variables définies à l'intérieur de l'E.V.R. (suivant le vecteur  $\mathbf{y}$ ). Ces variables ainsi que les termes de déviations spatiales  $\tilde{\phi}$  sont également évalués grâce à la décomposition spatiale de la vitesse et de la pression. L'objectif étant de ne faire apparaître que des quantités moyennes sur l'E.V.R. (suivant le vecteur  $\mathbf{x}$ ). Je ne détaille pas la suite de la technique de prise de moyenne volumique avec résolution d'un problème de fermeture pour l'équation de Navier-Stokes, car je m'appuie sur [36, 56] pour les relations de fermeture. La démarche pour obtenir le modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux sera donnée au chapitre 2.

### 1.5.5 Régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux

La catégorisation des régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux se fait en général par le nombre de Reynolds, mais ce nombre peut s'écrire de différentes façons dans le cas d'un milieu poreux. Cela s'explique par les différentes possibilités pour d'une part, le choix de la dimension caractéristique et d'autre part, le choix de la vitesse caractéristique pour décrire le problème. Dans ce manuscrit, deux nombres de Reynolds sont utilisés,  $\text{Re}_H$  et  $\text{Re}_p$ . L'indice  $H$  est utilisé quand l'échelle de longueur caractéristique est une grandeur macroscopique comme celle de la largeur d'un canal et  $p$  quand l'échelle de longueur caractéristique est une grandeur caractéristique d'un pore. Pour l'échelle de longueur caractéristique d'un pore, je choisis le diamètre moyen effectif des grains constitutifs du matériau poreux  $d_p$ . Le choix de la vitesse utilisée dans  $\text{Re}_H$  et  $\text{Re}_p$  est une vitesse de Darcy  $\mathbf{u}$  qui est une vitesse moyenne sur le volume de l'E.V.R.. Je rappelle toutefois que par définition :

$$\mathbf{u} = \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle^f, \quad (1.47)$$

donc on retrouve dans la phase fluide, la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$ . Les deux nombres de Reynolds s'écrivent :

$$\text{Re}_p = \frac{|\mathbf{u}_{in}| d_p}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Re}_H = \frac{|\mathbf{u}_{in}| H}{\nu}. \quad (1.48)$$

Différents régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux sont décrits dans [33]. Le nombre de Reynolds  $\text{Re}$  est défini pour une vitesse moyenne intrinsèque et donc, pour une vitesse moyenne sur le volume de fluide dans l'E.V.R.. On retient les informations suivantes :

- quand  $Re$  tend vers 0, l'écoulement est rampant et la loi de Darcy est utilisable,
- quand  $Re$  augmente, un régime de faible inertie puis un régime de forte inertie apparaissent,
- ensuite, la transition à un écoulement instationnaire a lieu,
- au début du régime instationnaire, c'est le régime quadratique et l'équation de Forchheimer est utilisable.

Différents régimes d'écoulement de fluide sont décrits dans [110] pour un milieu poreux avec une porosité égale à 0,4. Le nombre de Reynolds  $Re$  dépend également d'une vitesse moyenne intrinsèque et donc, est définie sur le volume de fluide dans l'E.V.R.. Les correspondances des résultats pour une vitesse de Darcy, et donc, pour  $Re_p = \frac{|\mathbf{u}_{in}| d_p}{\nu}$  sont données ci-dessous :

1. le régime de Darcy pour  $Re_p < 10$ ,
2. le régime inertiel pour  $10 < Re_p < 150$ ,
3. le régime de transition pour  $150 < Re_p < 300$ ,
4. le régime turbulent pour  $Re_p > 300$ ,
5. le régime asymptotique pour  $Re_p > 1360$ .

Dans le régime de Darcy, le mouvement de fluide dans le milieu poreux est bien représenté par les équations de Stokes. Dans le régime inertiel, les effets inertiels apparaissent et la distribution de vitesse dans les pores se démarque de celle obtenue pour le régime de Darcy. Dans le régime de transition, l'écoulement est transitoire et pour  $Re_p > 300$ , le régime est turbulent. Un écoulement de fluide en milieu poreux dans un régime turbulent reste difficile à modéliser, car des questions se posent, à savoir si les structures turbulentes qui se déroulent dans l'espace des pores sont retrouvées à l'échelle de l'E.V.R. et il semble que trop peu de résultats soient disponibles dans la littérature pour l'instant, plus de détails sur la question peuvent être trouvés dans [33, 110]. Il est précisé dans [73], que la turbulence macroscopique ne peut pas se produire dans un milieu poreux régulier.

## 1.6 Verrous scientifiques et organisation du manuscrit

Je rappelle que les questions de recherche sont :

1. **Quel est le modèle d'écoulement de fluide qu'il convient d'utiliser en présence d'un milieu poreux hétérogène ?**
2. **Comment poser et résoudre un problème d'optimisation topologique pour un écoulement de fluide dans le but de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux tout en tenant compte de l'hétérogénéité spatiale ?**

Concernant la première question de recherche, l'étude de la littérature met en lumière plusieurs verrous scientifiques décrits ci-dessous :

- Les gradients de porosité  $\nabla_{\mathbf{x}} \varepsilon(\mathbf{x}, t)$  sont souvent négligés (voir par exemple les équations de Darcy, de Forchheimer et de Brikman dans le tableau 1.1) dans la littérature. Toutefois, aux vues des objectifs de la thèse, mon problème physique ne justifie pas de négliger ces gradients à l'échelle macroscopique.

- Même si ces gradients sont considérés, il y a plusieurs modèles d'écoulement dans la littérature (voir [1, 75, 104]), car il y a plusieurs méthodes et hypothèses qui sont utilisées pour les obtenir. Par exemple, avec une technique de prise de moyenne volumique, le type de moyenne utilisé induit la présence ou l'absence de termes contenant des gradients de porosité pour les moyennes spatiales de la vitesse et de la pression.

Afin de pallier à ces problèmes, la dérivation d'un modèle d'écoulement de fluide en présence d'un milieu poreux hétérogène est présentée dans le **chapitre 2**. Ses particularités sont d'utiliser une pression moyenne sur le volume de fluide dans l'E.V.R.  $\langle p \rangle^f$ , car c'est la pression lue sur un manomètre et c'est la forme de pression qui se trouve dans la loi de Darcy. Dans ce cas, la moyenne spatiale du gradient de pression donne :

$$\nabla \langle p \rangle = \nabla(\varepsilon \langle p \rangle^f) = \varepsilon \nabla \langle p \rangle^f + \langle p \rangle^f \nabla \varepsilon. \quad (1.49)$$

De plus, je choisis d'utiliser une vitesse moyenne sur le volume de l'E.V.R. comme dans la loi de Darcy et, pour ne pas négliger les gradients de porosité, je propose de revenir à la définition initiale du tenseur des contraintes, à l'origine du terme  $\Delta \langle \mathbf{v} \rangle$  de l'équation (1.12) :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}. \quad (1.50)$$

Je propose d'utiliser une équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer, car elle présente l'avantage de donner l'équation de Navier-Stokes dans le fluide. Il est alors envisageable de modéliser l'écoulement de fluide dans les zones fluides et poreuses avec un seul modèle. Toutefois, comme les gradients de porosité doivent être pris en compte, car il y a une hétérogénéité spatiale (section 1.5.2), je propose de donner une formulation de Darcy-Brinkman-Forchheimer qui fait apparaître ces gradients de porosité. Pour cela, la démarche consiste à partir d'une équation générale de bilan microscopique pour une quantité générique  $\varphi$  (2.1) et d'utiliser une technique de prise de moyenne volumique sur un E.V.R.. Une fois le modèle macroscopique d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogènes dérivé, des comparaisons avec des résultats de la littérature seront donnés dans le **chapitre 3**. Pour cela, les cas du bouchon poreux et du *channelling* avec porosité oscillante et exponentielle seront étudiés numériquement. Des comparaisons avec d'autres modèles de la littérature seront aussi effectuées. Une des motivations à étudier le cas du *channelling* est que, à ma connaissance, il n'a pas été étudié avec un modèle qui fait apparaître les gradients de porosité.

Concernant la seconde question de recherche, des études concernant l'optimisation topologique visant à trouver une répartition optimisée de matériaux poreux ont déjà été menées (voir par exemple [6, 10, 80, 81, 99, 100, 107]). Toutefois, l'optimisation topologique pour un écoulement de fluide n'a pas encore été réalisée en tenant compte de l'hétérogénéité spatiale due à la modification de la répartition des matériaux poreux. Ainsi, dans le **chapitre 4**, le modèle proposé dans le chapitre 2 est utilisé comme contrainte dans un problème d'optimisation topologique visant à trouver une répartition optimisée de matériaux poreux qui minimise les pertes de charge.

Pour résumer, le manuscrit va suivre l'organisation suivante :

- Le chapitre 2 proposera un modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux qui fait apparaître les gradients de porosité.
- Le chapitre 3 contiendra des comparaisons avec des résultats de la littérature.



- Le chapitre 4 utilisera le modèle proposé dans le chapitre 2 pour un problème d'optimisation topologique.
- Le chapitre 5 contiendra la conclusion des travaux et les perspectives à explorer.

# Chapitre 2

## Proposition d'un modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	41
<b>2.2</b>	<b>Méthode pour le développement du modèle</b>	42
2.2.1	Prise de moyenne pour une équation générale de bilan macroscopique à l'échelle d'un E.V.R.	42
2.2.2	Conservation de la masse de fluide	44
2.2.3	Conservation de la quantité de mouvement de fluide	45
<b>2.3</b>	<b>Discussion et forme finale du modèle</b>	47
2.3.1	Discussion des modèles de la littérature	47
2.3.2	Équation de Kozeny-Carman	50
2.3.3	Formes sans dimension des équations	51
<b>2.4</b>	<b>Implémentation dans OpenFOAM</b>	53
<b>2.5</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	55

---

### 2.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre contient la démarche utilisée pour obtenir un modèle d'écoulement de fluide en milieu poreux. L'idée est de faire apparaître les gradients de porosité, souvent négligés dans la littérature. Après une discussion de l'écriture du modèle par la confrontation à d'autres modèles de la littérature, l'équation de Kozeny-Carman qui permet de trouver la perméabilité scalaire est présentée et l'implémentation dans OpenFOAM est exposée. Ce chapitre se termine par une conclusion.

## 2.2 Méthode pour le développement du modèle

### 2.2.1 Prise de moyenne pour une équation générale de bilan macroscopique à l'échelle d'un E.V.R.

La démarche débute avec l'équation générale de bilan microscopique pour une quantité générique  $\varphi$  (voir [26, p.36, Eq.(1)], [36, p.68, Eq.(3.34)] et [108, Eq.(1)]) :

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j} = \text{termes sources}, \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{j}$  est un flux de diffusion. L'équation (2.1) doit être transposée à l'échelle macroscopique. La technique de prise de moyenne volumique présentée à la section 1.5.4 est utilisée et l'échelle macroscopique est l'échelle d'un E.V.R..

- On commence par intégrer chaque terme de l'équation (2.1) sur le volume de fluide  $V_{fluide}$  dans l'E.V.R. puis on divise par le volume de l'E.V.R.  $V_{E.V.R.}$ , on obtient alors pour le premier terme de l'équation (2.1) :

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV = \langle \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} \rangle. \quad (2.2)$$

On utilise ensuite le théorème de transport que l'on trouve par exemple dans [36, p.63, eq.(3.15)], qui avec les notations de la section 1.5.4 donne :

$$\langle \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho\varphi \rangle - \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \rho\varphi \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_{f-s}) dA, \quad (2.3)$$

où on suppose que le volume de l'E.V.R. est constant au cours du temps et  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse de l'interface fluide solide.

- Le deuxième terme de l'équation (2.1) donne :

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \nabla \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) dV = \langle \nabla \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) \rangle. \quad (2.4)$$

On utilise le théorème de la moyenne spatiale de l'équation (1.31) :

$$\langle \nabla \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot \langle \rho\varphi\mathbf{v} \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) dA. \quad (2.5)$$

- Le troisième terme de l'équation (2.1) donne :

$$\frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \langle \nabla \cdot \mathbf{j} \rangle. \quad (2.6)$$

En utilisant (1.31), on a :

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{j} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{j} \rangle + \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \mathbf{j} dA. \quad (2.7)$$

— On a dans l'équation (2.1) :

$$\text{termes sources} = 0, \quad (2.8)$$

car on ne considère ni des termes sources de masse de fluide ni des termes sources de quantité de mouvement de fluide (je néglige les forces extérieures volumiques).

Les équations (2.3), (2.5) et (2.7) permettent d'obtenir une première écriture de l'équation générale de bilan macroscopique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \varphi \rangle + \nabla \cdot \langle \rho \varphi \mathbf{v} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{j} \rangle = \text{termes sous la forme d'une intégrale}, \quad (2.9)$$

où les termes restants qui sont sous la forme d'une intégrale contiennent les informations sur les aires des interfaces fluides solides dans l'E.V.R. sous la forme  $\int_{A_{f-s}} (\bullet) dA$  et seront traités par la suite.

— Un opérateur de moyenne massique est utilisé (voir [26, p.39] et [36, p.62 eq. (3.8)]) :

$$\langle \bullet \rangle^f = \frac{1}{\langle \rho \rangle V_{E.V.R.}} \int_{V_{fluide}} \rho (\bullet) dV. \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) permet d'écrire :

$$\langle \rho \varphi \rangle = \langle \rho \rangle \bar{\varphi}^f \quad \text{et} \quad \langle \rho \varphi \mathbf{v} \rangle = \langle \rho \rangle \overline{\varphi \mathbf{v}}^f, \quad (2.11)$$

avec :

$$\overline{\varphi \mathbf{v}}^f = \bar{\varphi}^f \bar{\mathbf{v}}^f + \overline{\tilde{\varphi}^f \tilde{\mathbf{v}}^f}, \quad (2.12)$$

où  $\bar{\varphi}^f$  et  $\bar{\mathbf{v}}^f$  sont respectivement les moyennes massiques de  $\varphi$  et  $\mathbf{v}$  dans le volume de fluide dans l'E.V.R.. Ici,  $\tilde{\varphi}^f$  et  $\tilde{\mathbf{v}}^f$  sont les déviations spatiales comme celles présentées dans la section 1.5.4. On a :

$$\langle \rho \varphi \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{j} \rangle = \langle \rho \rangle \bar{\varphi}^f \bar{\mathbf{v}}^f + \langle \rho \rangle \overline{\tilde{\varphi}^f \tilde{\mathbf{v}}^f} + \varepsilon \langle \mathbf{j} \rangle^f \quad (2.13)$$

— On définit un vecteur de flux macroscopique  $\varepsilon \mathbf{j}^f$  avec les deux derniers termes de l'équation (2.13) :

$$\varepsilon \mathbf{j}^f = \langle \rho \rangle \overline{\tilde{\varphi}^f \tilde{\mathbf{v}}^f} + \varepsilon \langle \mathbf{j} \rangle^f. \quad (2.14)$$

— Les termes restants qui sont sous la forme d'une intégrale sont regroupés dans un coefficient général  $\langle \rho \rangle \Lambda$  qui représente les échanges sur les interfaces fluides solides, on a :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \Lambda &= \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \rho \varphi \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_{f-s}) dA \\ &\quad - \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot (\rho \varphi \mathbf{v}) dA \\ &\quad - \frac{1}{V_{E.V.R.}} \int_{A_{f-s}} \mathbf{n}_{f-s} \cdot \mathbf{j} dA. \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'équation (2.9) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \bar{\varphi}^f) + \nabla \cdot (\langle \rho \rangle \bar{\varphi}^f \bar{\mathbf{v}}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{j}^f) = \langle \rho \rangle \Lambda. \quad (2.16)$$

La masse volumique du fluide  $\rho$  étant supposée constante, on a :

$$\langle \rho \rangle = \varepsilon \rho, \quad (2.17)$$

et on obtient une équation générale de bilan macroscopique à l'échelle de l'E.V.R. :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho \varphi^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \varphi^f \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{j}^f) = \varepsilon \rho \Lambda,} \quad (2.18)$$

où l'équation (2.18) est présentée sans les notations qui indiquent des quantités moyennes ( $\bar{\bullet}$ ) pour alléger les expressions. Cette équation est ensuite utilisée pour trouver les équations du bilan macroscopique de la masse de fluide et de la quantité de mouvement de fluide.

### 2.2.2 Conservation de la masse de fluide

À partir de l'équation (2.18), l'équation de conservation de la masse de fluide dans le milieu poreux s'obtient pour :

$$\varphi^f = 1, \mathbf{j}^f = \mathbf{0} \text{ et } \Lambda = 0. \quad (2.19)$$

La dernière égalité indique qu'il n'y a pas de modifications de la masse sur les interfaces fluides solides, on obtient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \mathbf{v}^f) = 0. \quad (2.20)$$

La masse volumique du fluide étant constante, on obtient les égalités suivantes :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle^f = \varepsilon \bar{\mathbf{v}}^f = \mathbf{u}, \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse de Darcy. L'équation (2.20) s'écrit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{v}^f) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.} \quad (2.22)$$

En régime permanent ou en négligeant la variation temporelle de porosité, on a :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.} \quad (2.23)$$

Dans un domaine composé uniquement de fluide, et donc pour  $\varepsilon = 1$ , on retrouve l'équation de continuité (1.8) qui est  $\nabla \cdot \mathbf{v}^f = 0$ .

La vitesse de Darcy définie comme une vitesse moyenne sur le volume d'un E.V.R. est privilégiée dans ce manuscrit pour désigner la vitesse du fluide. En effet, c'est cette vitesse qui est généralement mesurée pour les expériences dans les milieux poreux. On a habituellement :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{Q}}{S}, \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{Q}$  est le vecteur débit d'un fluide qui traverse un milieu poreux et  $S$  est la section droite perpendiculaire à l'écoulement. La vitesse de Darcy est également la vitesse qui apparaît dans la loi de Darcy, elle est aussi appelée vitesse de filtration.

### 2.2.3 Conservation de la quantité de mouvement de fluide

À partir de l'équation (2.18), l'équation de conservation de la quantité de mouvement de fluide dans le milieu poreux s'obtient pour :

$$\varphi^f = \mathbf{v}^f, \mathbf{j}^f = \boldsymbol{\sigma}^f \text{ et } \Lambda = \mathbf{f}_\sigma^f. \quad (2.25)$$

Ainsi (2.18) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \mathbf{v}^f \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^f) = \varepsilon \rho \mathbf{f}_\sigma^f, \quad (2.26)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^f$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{f}_\sigma^f$  un vecteur qui représente la modification de la quantité de mouvement sur les interfaces fluides solides. Des équations constitutives sont utilisées pour trouver les variables  $\boldsymbol{\sigma}^f$  et  $\mathbf{f}_\sigma^f$  qui sont considérées comme étant des variables dépendantes qui ne sont pas directement mesurables. Je me réfère aux développements dans [36, 57] et j'utilise les relations [36, eq. (3.114) p.86] :

$$\boldsymbol{\sigma}^f = p^f \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^f \quad \text{et} \quad \varepsilon \rho \mathbf{f}_\sigma^f = p^f \nabla \varepsilon + \mathbf{f}_\tau^f. \quad (2.27)$$

On a  $p^f$  la pression du fluide et  $\boldsymbol{\tau}^f$  le tenseur des contraintes de viscosité. Le fluide étant newtonien, on a :

$$\boldsymbol{\tau}^f = -2\mu \mathbf{D}. \quad (2.28)$$

Enfin,  $\mathbf{f}_\tau^f$  est un vecteur qui représente la résistance à l'écoulement de fluide due à la matrice solide. Une équation phénoménologique qui se compose du terme de Darcy et du terme de Forchheimer est utilisée. On obtient ainsi [36, eq. (3.154) p.94] :

$$\mathbf{f}_\tau^f = -\varepsilon^2 \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v}^f - \varepsilon^3 \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{v}^f| \cdot \mathbf{v}^f, \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{k}$  est le tenseur de perméabilité et  $c_F$  est le coefficient de Forchheimer. Les termes (2.27), (2.28) et (2.29) sont ensuite remplacés dans l'équation (2.26) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \mathbf{v}^f \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon p^f \mathbf{I}) - 2\mu \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{D}) \\ & = p^f \nabla \varepsilon - \varepsilon^2 \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v}^f - \varepsilon^3 \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{v}^f| \cdot \mathbf{v}^f. \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Remarque 2.1.** — Les formulations des équations (2.27), (2.28) et (2.29) qui sont présentes dans (2.30) sont possibles seulement à la suite de longs développements détaillés dans [25, 36, 57, 58].

Pour les termes intégrant la pression, on développe :

$$\nabla \cdot (\varepsilon p^f \mathbf{I}) = \nabla(\varepsilon p^f) = \varepsilon \nabla(p^f) + p^f \nabla \varepsilon. \quad (2.31)$$

Il reste donc uniquement le terme de pression  $\varepsilon \nabla(p^f)$  dans l'équation (2.30). Pour le tenseur de taux de déformation, on a  $\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{v}^f + [\nabla \mathbf{v}^f]^T}{2}$  et en développant le terme  $-2\mu \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{D})$  de l'équation (2.30), on obtient :

$$\begin{aligned} -2\mu \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{D}) & = -\mu \left( \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon [\nabla \mathbf{v}^f]^T) \right) \\ & = -\mu \left( \varepsilon \Delta \mathbf{v}^f + \nabla \mathbf{v}^f \cdot \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}^f]^T + [\nabla \mathbf{v}^f]^T \cdot \nabla \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

On note que :

$$\varepsilon \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}^f]^T = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

car :

$$\nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}^f]^T = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}^f) = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

En réécrivant ensuite (2.30) avec les résultats des développements précédents :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho \mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \mathbf{v}^f \mathbf{v}^f) + \varepsilon \nabla(\mathbf{p}^f) - \mu \left( \varepsilon \Delta \mathbf{v}^f + \nabla \mathbf{v}^f \cdot \nabla \varepsilon + [\nabla \mathbf{v}^f]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\varepsilon^2 \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v}^f - \varepsilon^3 \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{v}^f| \cdot \mathbf{v}^f. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En effectuant le changement de variable pour la vitesse de Darcy  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{v}^f$ , on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \varepsilon \nabla(\mathbf{p}^f) - \mu \left( \varepsilon \Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}} \quad (2.36)$$

Je continue le développement des termes de l'équation (2.36) afin d'obtenir une formulation adaptée à la méthode des volumes finis et pour faire apparaître explicitement les gradients de porosité issus de  $\nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right)$  et  $\Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right)$ .

### Développement supplémentaire de l'équation (2.36)

Le développement de  $\Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right)$  donne :

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \Delta \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + 2 \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{2}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le développement du terme de convection donne :

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon. \quad (2.38)$$

Les équations (2.37) et (2.38) sont remplacées dans (2.36) et ainsi des termes supplémentaires avec un gradient de porosité apparaissent :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla(\mathbf{p}^f) \\ & - \mu \left( \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{2}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \right) + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Afin de disposer explicitement d'un gradient de pression pour des raisons purement numériques, l'équation précédente est divisée par  $\varepsilon$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \frac{\rho}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla (p^f) \\ & - \mu \left( \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{2}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

On effectue deux autres transformations de termes de l'équation (2.40) pour obtenir une formulation des termes adaptée à la méthode des volumes finis :

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon = \rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{\rho}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon. \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon. \quad (2.42)$$

En remplaçant (2.41) et (2.42) dans l'équation (2.40) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{\rho}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla (p^f) \\ & - \mu \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u} \right) - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

## 2.3 Discussion et forme finale du modèle

### 2.3.1 Discussion des modèles de la littérature

Le développement utilisé pour obtenir l'équation (2.36) a été réalisé sans négliger les variations de porosité. Je rappelle ici l'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \varepsilon \nabla (p^f) - \mu \left( \varepsilon \Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il est alors possible de discuter les rares modèles d'écoulement de fluide qui font apparaître les gradients de porosité qui se trouvent dans la littérature. On commence par le modèle dans [50, p.393 eq. (53)] :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \varepsilon \nabla (p^f) - \mu \Delta \mathbf{u} + \mu \nabla \varepsilon \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{F}$  est le tenseur de correction de Forchheimer. Pour obtenir la formulation donnée à l'équation (2.45), j'ai multiplié l'équation [50, p.393 eq. (53)] par la porosité  $\varepsilon$  et j'ai utilisé les notations :  $\beta = f$ ,  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_f \rangle$  et  $p^f = \langle p_f \rangle^f$ . L'équation (2.45) est une équation obtenue par une technique de prise de moyenne volumique avec résolution d'un problème de fermeture. Cette équation est utilisée dans [50] pour un problème de solidification. On trouve une



utilisation très récente de l'équation (2.45) dans [59]. Il s'agit de l'étude d'un écoulement de fluide à faible nombre de Reynolds dans un système similaire à celui de Beavers et Joseph [12]. La formulation du modèle dans [59] est :

$$\mathbf{0} = -\nabla(p^f) + \frac{\mu}{\varepsilon}\Delta\mathbf{u} - \frac{\mu}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \cdot \nabla\left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}\right) - \mu\mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.46)$$

Les équations (2.45) et (2.46) sont deux modèles d'écoulement de fluide à l'échelle macroscopique valables dans du fluide et dans un milieu poreux. En effet, pour  $\varepsilon = 1$ , on retrouve l'équation de Navier-Stokes. L'équation (2.46) a été comparée avec succès à des résultats de simulation à l'échelle du pore (voir la remarque 1.1). Il est alors conclu que les termes de corrections de Brinkman, qui sont ici :

$$\frac{\mu}{\varepsilon}\Delta\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \cdot \nabla\left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}\right), \quad (2.47)$$

doivent être inclus dans le modèle d'écoulement de fluide pour obtenir des prévisions précises des profils de vitesse pour  $Re_p \ll 1$ . Or, il y a une différence d'écriture entre les équations (2.45), (2.46) et l'équation qui est proposée dans ces travaux (2.44). En effet, tous les termes avec la viscosité  $\mu$  ont le même signe dans (2.44) tandis que les termes sont de signes opposés dans (2.45) et (2.46). Dans ces travaux, ce sont les signes obtenus à la suite du développement présenté dans le chapitre qui sont utilisés.

Dans l'équation proposée (2.35), toutes les variables sont des grandeurs moyennes qui sont définies par rapport au volume de fluide dans l'E.V.R. comme préconisées dans [72]. Les termes sont donc harmonisés, je rappelle ici l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\rho\mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon\rho\mathbf{v}^f\mathbf{v}^f) + \varepsilon\nabla(p^f) - \mu(\varepsilon\Delta\mathbf{v}^f + \nabla\mathbf{v}^f \cdot \nabla\varepsilon + [\nabla\mathbf{v}^f]^T \cdot \nabla\varepsilon) \\ = -\varepsilon^2\mu\mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v}^f - \varepsilon^3\rho\mathbf{k}^{-1/2}c_F|\mathbf{v}^f| \cdot \mathbf{v}^f. \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'équation (2.48) peut être comparée à celle que l'on trouve dans [91, p.4498 eq. (2)] et dont la formulation est rappelée ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\rho\mathbf{v}^f) + \nabla \cdot (\varepsilon\rho\mathbf{v}^f\mathbf{v}^f) + \varepsilon\nabla(p^f) - \varepsilon\mu\Delta\mathbf{v}^f - \mu\nabla\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v}^f - \mu\mathbf{v}^f\Delta\varepsilon \\ = -\varepsilon^2\mu\mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{v}^f - \varepsilon^2\mu\mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^f. \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) provient de [50] et donc de l'équation (2.45). Elle a été utilisée pour un problème de solidification. Le terme  $\mu\mathbf{v}^f\Delta\varepsilon$  présent dans l'équation (2.49) est absent de l'équation (2.48), on trouve à sa place le terme  $\mu[\nabla\mathbf{v}^f]^T \cdot \nabla\varepsilon$ . Roux et al.[91] discutent de l'influence de termes qui contiennent des gradients de porosité. La discussion est présentée sur la base de résultats numériques obtenus avec un modèle simplifié c'est-à-dire sans les termes de gradient de porosité. Les ratios des termes suivants sont comparés dans [91] :

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{|\nabla\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v}_x^f|}{|\varepsilon^2\mathbf{k}^{-1}\mathbf{v}_x^f|}, R_2 = \frac{|\nabla\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v}_z^f|}{|\varepsilon^2\mathbf{k}^{-1}\mathbf{v}_z^f|}, R_3 = \frac{|\nabla\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v}_x^f|}{|\varepsilon\Delta\mathbf{v}^f|}, \\ R_4 = \frac{|\nabla\varepsilon \cdot \nabla\mathbf{v}_z^f|}{|\varepsilon\Delta\mathbf{v}^f|}, R_5 = \frac{|\mathbf{v}^f\Delta\varepsilon|}{|\varepsilon\Delta\mathbf{v}^f|}, R_6 = \frac{|\Delta\varepsilon|}{|\varepsilon^2\mathbf{k}^{-1}|}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

On retient les observations suivantes :

- $R_1, R_2$  et  $R_6$  sont petits, inférieurs à 1% ;
- les valeurs maximales de  $R_1$  et  $R_2$  sont atteintes dans les zones où la fraction de volume de solide est faible (quand  $\varepsilon$  est grand) ;
- dans ces mêmes zones,  $R_3$  et  $R_4$  sont de l'ordre de 1 ;
- la même observation est faite pour  $R_5$  qui peut être de l'ordre de 1 dans les zones où la porosité est élevée et où des gradients de porosité sont observés.

En conclusion, les termes de correction de Brinkman sont petits par rapport au terme de Darcy, alors qu'ils peuvent être du même ordre de grandeur que le terme de diffusion visqueuse, c'est-à-dire le terme de diffusion que l'on trouve dans l'équation de Navier-Stokes, dans le cas où la fraction de volume de solide est faible. De plus, on apprend dans [91] que les termes de gradient de porosité peuvent avoir une influence sur les résultats des simulations numériques, ces termes étant uniquement estimés.

Pour un milieu poreux où la porosité est constante, les modèles d'écoulement de fluide peuvent se simplifier. En effet, les coefficients  $\varepsilon$  peuvent être transposés à l'extérieur des opérateurs différentiels et les termes de gradient de porosité s'annulent. À ce moment, on obtient une simplification de l'équation proposée (2.36) :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \varepsilon \nabla(p^f) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}.} \quad (2.51)$$

Les équations (2.36), (2.45), (2.49) et (2.51) sont des équations dites de Darcy-Brinkman-Forchheimer (D.B.F.), car elles contiennent les termes de Darcy, de Brinkman et de Forchheimer. Ces équations sont valides en théorie dans un domaine poreux et dans un domaine fluide, car elles permettent de retrouver l'équation de Navier-Stokes (1.13) dans le fluide. On parle à ce moment-là d'un modèle d'écoulement de fluide à *un domaine* [47].

Je présente dans les tableaux 2.1 et 2.2 les termes principaux des modèles d'écoulement de fluide en milieu poreux qui ont été discutés ainsi que les termes supplémentaires avec un gradient de porosité. Les équations correspondent aux modèles suivants :

- eq. (1.26) : loi de Darcy,
- eq. (2.51) : modèle D.B.F. avec l'hypothèse d'une porosité constante,
- eq. (2.45) : modèle D.B.F. issu de [50],
- eq. (2.46) : modèle issu de [59],
- eq. (2.49) : modèle D.B.F. issu de [91],
- eq. (2.36) : modèle D.B.F. proposé dans ces travaux.

On notera que le développement du terme  $\Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right)$  a été donné dans (2.37) et fait apparaître le terme de Brinkman ainsi que les termes (2), (3) et (5) dans les tableaux 2.1 et 2.2. Les signes (−) et (+) se comprennent dans le sens où la somme des termes issus des tableaux est égale à un vecteur nul. Pour le signe (\*) relatif aux équations (2.45) et (2.49), on notera que l'écriture du terme de Forchheimer est différente de celle donnée dans le tableau 2.1, qui correspond à celle trouvée à la suite du développement présenté dans le chapitre. Pour le signe (\*\*) relatif aux équations (2.45) et (2.46), le terme  $-\frac{\mu}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon$  est de signe positif.

Enfin, il est possible de passer d'un domaine fluide à un domaine poreux en utilisant une expression de la perméabilité  $\mathbf{k}$  en fonction de la porosité  $\varepsilon$ , du diamètre moyen effectif des grains  $d_p$  et de l'arrangement des grains constitutifs du matériau poreux. Cela peut se faire grâce à l'équation de Kozeny-Carman qui sera détaillée par la suite.

Tableau 2.1 – Termes principaux dans les modèles d’écoulement de fluide en milieu poreux (oui : présent; X : absent; \* : présent avec une différence d’écriture).

Équation	Pression	Darcy	Brinkman	Forchheimer	Convection
	$+\nabla p^f$	$+\frac{\mu \mathbf{u}}{\mathbf{k}}$	$-\frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u}$	$+\rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F  \mathbf{u}  \cdot \mathbf{u}$	$+\frac{\rho}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}}{\varepsilon} \right)$
eq. (1.26)	oui	oui	X	X	X
eq. (2.51)	oui	oui	oui	oui	oui
eq. (2.45)	oui	oui	oui	oui*	oui
eq. (2.46)	oui	oui	oui	X	X
eq. (2.49)	oui	oui	oui	oui*	oui
eq. (2.36)	oui	oui	oui	oui	oui

Tableau 2.2 – Termes supplémentaires avec un gradient de porosité (oui : présent; X : absent; \*\* : présent avec une différence d’écriture).

Équation	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	$-\frac{\mu}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon$	$-\mu \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3}  \nabla \varepsilon ^2$	$+\frac{2\mu}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$	$-\frac{\mu}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon$	$+\frac{\mu \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon$
eq. (1.26)	X	X	X	X	X
eq. (2.51)	X	X	X	X	X
eq. (2.45)	oui**	X	X	X	X
eq. (2.46)	oui**	X	X	X	X
eq. (2.49)	oui	oui	oui	X	X
eq. (2.36)	oui	oui	oui	oui	oui

### 2.3.2 Équation de Kozeny-Carman

Pour un matériau poreux isotrope comme dans ces travaux, le tenseur de perméabilité  $\mathbf{k}$  est un tenseur d’ordre zéro soit un scalaire  $K$ . L’équation de Kozeny-Carman est souvent utilisée dans la littérature pour calculer une perméabilité scalaire à partir des caractéristiques géométriques du matériau poreux. On trouve par exemple dans [70, 72, 94] la relation :

$$K(\varepsilon) = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{C(1 - \varepsilon)^2}, \quad (2.52)$$

où  $d_p$  est le diamètre moyen effectif des grains constitutifs du matériau poreux et  $C$  est une constante qui dépend de l’arrangement des grains. Différentes valeurs de la constante  $C$  sont utilisées dans la littérature, par exemple  $C = 180$  [94] ou encore  $C = 150$  [70, 72]. L’équation de Kozeny-Carman modélise correctement la perméabilité pour un matériau poreux composé de grains ayant des formes sphériques [71]. L’utilisation de l’équation (2.52) dans un modèle D.B.F. présente l’avantage de retrouver la formulation de l’équation de Navier-Stokes grâce à la valeur de la porosité. En effet, un coefficient  $(1 - \varepsilon)$  apparaît dans les termes de Darcy et de Forchheimer et ce coefficient s’annule dans le fluide ( $\varepsilon = 1$ ).

### 2.3.3 Formes sans dimension des équations

La procédure pour rendre sans dimension les équations a été présentée dans la section 1.4.2. La forme sans dimension de l'équation de conservation de la masse de fluide dans le domaine fluide est directement  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . De même, la forme sans dimension de l'équation de conservation de la masse de fluide dans le domaine poreux est directement  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Pour obtenir la forme sans dimension de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de fluide dans le domaine poreux, je réutilise la démarche de la section 1.4.2. Je commence par introduire de nouveau l'équation (2.43), qui est une forme développée de l'équation (2.36) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{\rho}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla (\mathbf{p}^f) \\ & - \mu \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u} \right) - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = -\mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

J'effectue successivement les changements de variables suivants,

- la vitesse  $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{u}'$ ,
- la pression  $\mathbf{p}^f = \rho u_0^2 \mathbf{p}'^f$ ,
- la durée  $t = \frac{L_0}{u_0} t'$ ,
- les opérateurs différentiels  $\nabla'(\bullet) = L_0 \nabla(\bullet)$ ,  $\Delta'(\bullet) = L_0^2 \Delta(\bullet)$ .

Puis, en multipliant par  $\frac{L_0}{\rho u_0^2}$ , on identifie la formulation du nombre de Reynolds  $\text{Re} = \frac{u_0 \rho L_0}{\mu}$ .

Pour la perméabilité, on remplace  $\mathbf{k} = L_0^2 \mathbf{k}'$ . Je précise à nouveau que le matériau poreux est isotrope et la perméabilité est un scalaire, j'utilise alors la relation de Kozeny-Carman de l'équation (2.52) dans une forme sans dimension :

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{L_0^2} = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{C(1-\varepsilon)^2 L_0^2} = \frac{\varepsilon^3}{\beta(1-\varepsilon)^2}, \quad (2.54)$$

où j'introduis un coefficient sans dimension  $\beta = \frac{CL_0^2}{d_p^2}$ . Enfin, je remplace ensuite la perméabilité de l'équation (2.54) dans (2.53). Le détail du développement pour rendre sans dimension l'équation (2.53) est donné par la suite.

#### Développement de la forme sans dimension de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide dans le domaine poreux

J'utilise la même méthode que celle présentée à la section 1.4.2. J'effectue les changements de variables :

— pour la vitesse  $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{u}'$  dans l'équation (2.53) :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}') + \rho u_0^2 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{\rho u_0^2}{\varepsilon^3} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla \varepsilon + \nabla(\mathbf{p}^f) \\
& - \mu \left( \nabla \cdot \left( \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u}' \right) - \frac{\mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{u_0}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u}' \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\
& = -\mu u_0 \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}' - \rho u_0^2 \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}',
\end{aligned} \tag{2.55}$$

— pour la pression  $\mathbf{p}^f = \rho u_0^2 \mathbf{p}'$  dans l'équation (2.55) :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}') + \rho u_0^2 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{\rho u_0^2}{\varepsilon^3} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla \varepsilon + \rho u_0^2 \nabla(\mathbf{p}') \\
& - \mu \left( \nabla \cdot \left( \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u}' \right) - \frac{\mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{u_0}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u}' \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\
& = -\mu u_0 \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}' - \rho u_0^2 \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}',
\end{aligned} \tag{2.56}$$

— pour la durée  $t = \frac{L_0 t'}{u_0}$  dans l'équation (2.56) :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0^2}{\varepsilon L_0} \frac{\partial}{\partial t'} (\rho \mathbf{u}') + \rho u_0^2 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{\rho u_0^2}{\varepsilon^3} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla \varepsilon + \rho u_0^2 \nabla(\mathbf{p}') \\
& - \mu \left( \nabla \cdot \left( \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u}' \right) - \frac{\mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^2} \Delta \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^3} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{u_0}{\varepsilon^2} \nabla \mathbf{u}' \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\
& = -\mu u_0 \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}' - \rho u_0^2 \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}',
\end{aligned} \tag{2.57}$$

— pour les opérateurs différentiels dans l'équation (2.57) :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0^2}{\varepsilon L_0} \frac{\partial}{\partial t'} (\rho \mathbf{u}') + \frac{\rho u_0^2}{L_0} \nabla' \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{\rho u_0^2}{\varepsilon^3 L_0} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{\rho u_0^2}{L_0} \nabla'(\mathbf{p}') - \mu \nabla' \cdot \left( \frac{u_0}{\varepsilon L_0^2} \nabla' \mathbf{u}' \right) \\
& - \mu \left( -\frac{\mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^2 L_0^2} \Delta' \varepsilon + \frac{2 \mathbf{u}' u_0}{\varepsilon^3 L_0^2} |\nabla' \varepsilon|^2 - \frac{u_0}{\varepsilon^2 L_0^2} \nabla' \mathbf{u}' \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon L_0^2} \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{u_0}{\varepsilon L_0^2} \left[ \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla' \varepsilon \right) \\
& = -\mu u_0 \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}' - \rho u_0^2 \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}'.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

En multipliant ensuite l'équation (2.58) par  $\frac{L_0}{\rho u_0^2}$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla' \varepsilon + \nabla'(\mathbf{p}') - \nabla' \cdot \left( \frac{\mu}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \nabla' \mathbf{u}' \right) + \mu \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon^2 \rho u_0 L_0} \Delta' \varepsilon \\
& - \mu \left( \frac{2 \mathbf{u}'}{\varepsilon^3 \rho u_0 L_0} |\nabla' \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \rho u_0 L_0} \nabla' \mathbf{u}' \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \left[ \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla' \varepsilon \right) \\
& = -\frac{\mu L_0}{\rho u_0} \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u}' - L_0 \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}'.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Enfin, en remplaçant la perméabilité  $\mathbf{k} = L_0^2 \mathbf{k}'$  dans l'équation (2.59) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u}' \mathbf{u}') \cdot \nabla' \varepsilon + \nabla' (p') - \nabla' \cdot \left( \frac{\mu}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \nabla' \mathbf{u}' \right) + \mu \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon^2 \rho u_0 L_0} \Delta' \varepsilon \\ & - \mu \left( \frac{2 \mathbf{u}'}{\varepsilon^3 \rho u_0 L_0} |\nabla' \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \rho u_0 L_0} \nabla' \mathbf{u}' \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla' \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \rho u_0 L_0} \left[ \nabla' \left( \frac{\mathbf{u}'}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla' \varepsilon \right) \\ & = - \frac{\mu}{\rho u_0 L_0 \mathbf{k}'} \cdot \mathbf{u}' - \frac{1}{\mathbf{k}'^{1/2}} c_F |\mathbf{u}'| \cdot \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le nombre de Reynolds  $\text{Re} = \frac{u_0 \rho L_0}{\mu}$  apparaît et on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla (p) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2 \text{Re}} \Delta \varepsilon \\ & - \left( \frac{2 \mathbf{u}}{\varepsilon^3 \text{Re}} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = - \frac{1}{\text{Re} \mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\mathbf{k}^{1/2}} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

où les notations sans dimension ( $\bullet$ ) ne sont plus indiquées. Le matériau poreux est isotrope et la perméabilité est un scalaire. J'utilise la relation de Kozeny-Carman de l'équation (2.52) dans une forme sans dimension :

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{L_0^2} = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{C(1-\varepsilon)^2 L_0^2} = \frac{\varepsilon^3}{\beta(1-\varepsilon)^2}, \quad (2.62)$$

où j'introduis un coefficient sans dimension  $\beta = \frac{CL_0^2}{d_p^2}$ . En remplaçant l'équation (2.62) dans (2.61), la forme finale sans dimension du modèle proposé est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2 \text{Re}} \Delta \varepsilon \\ & - \left( \frac{2 \mathbf{u}}{\varepsilon^3 \text{Re}} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = - \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} - \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le coefficient  $\beta$  permet d'étudier l'influence du diamètre moyen effectif des grains constitutifs du matériau poreux. Avec la relation de Kozeny-Carman, on peut relier  $\beta$  à un autre nombre sans dimension, le nombre de Darcy  $\text{Da} = \frac{\mathbf{k}}{L_0^2}$  grâce à la relation :

$$\beta = \frac{\varepsilon^3}{\text{Da}(1-\varepsilon)^2}. \quad (2.64)$$

## 2.4 Implémentation dans OpenFOAM

Voici les différentes étapes lors de la résolution numérique du modèle physique après le choix d'une géométrie et d'un domaine de calcul :

1. renseignement des conditions aux limites pour la vitesse et la pression,
2. discrétisation du domaine de calcul avec un maillage structuré,
3. discrétisation des équations du modèle par une méthode des volumes finis,
4. résolution du système d'équations algébrique obtenu par un solveur itératif,
5. obtention des solutions numériques et donc, des distributions des valeurs des quantités physiques d'intérêt.

Ces étapes sont réalisées sur la boîte à outils de mécanique des milieux continus OpenFOAM [108] distribué sous licence libre et open source GNU GPL. Développé en C++ et basé sur la méthode des volumes finis, on trouve sur OpenFOAM plusieurs solveurs préexistants. Un solveur a été développé sur la base du travail que l'on trouve dans [19] et [86]. C'est un solveur qui est basé sur un algorithme SIMPLE et dans lequel les quantités physiques sont renseignées et le modèle physique et le modèle d'optimisation y sont mis en œuvre numériquement. Plus de détails sur la méthode des volumes finis et sur le maillage qui est une grille colocalisée peuvent être trouvés dans [19].

Les problèmes étudiés sur OpenFOAM se présentent sous la forme d'un dossier de travail qui contient les conditions aux limites ; les paramètres physiques tels que le nombre de Reynolds ou de Darcy ; les données correspondantes au maillage, qui est ici produit avec l'outil *BlockMesh* ; les paramètres du solveur pour la résolution des équations afin de trouver la vitesse et la pression (sous-relaxation, tolérances, critères d'arrêt ... ) ; les schémas numériques d'interpolation des quantités entre les différents volumes de contrôle et les schémas de discrétisation pour trouver les valeurs des quantités dans les opérateurs différentiels. Enfin, ce dossier de travail contiendra les différents résultats de simulations numériques dont les écritures se font pour une période d'itérations spécifique par exemple, toutes les 1000 itérations.

L'implémentation pour la résolution de la vitesse et de la pression de l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide (2.63) est donnée dans l'Annexe A. Les paramètres du solveur utilisé ainsi que la discrétisation des différents opérateurs mathématiques est également donnée dans cette annexe. J'utilise des facteurs d'interpolation inversés pour la vitesse et la pression (Annexe A). Cette particularité est présentée dans [65]. On a pour un volume de contrôle  $P$  et un volume de contrôle voisin  $N$ , séparé par une face  $f$ , la vitesse et la pression sur cette face  $f$  qui sont calculées de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_f = (1 - \lambda_f)\mathbf{u}_P + \lambda_f\mathbf{u}_N \quad \text{et} \quad p_f = \lambda_f p_P + (1 - \lambda_f)p_N, \quad (2.65)$$

où  $\lambda_f$  est un facteur d'interpolation. Cette approche permet de rendre cohérentes les valeurs de la vitesse et de la pression selon le calcul de la moyenne harmonique et plus de détails peuvent être trouvés dans [65]. Les schémas numériques utilisés post-optimisation sont tous à l'ordre deux. Toutefois, lors de l'optimisation topologique, pour des raisons de stabilité de l'algorithme, un schéma numérique au premier ordre (upwind) a été mis en œuvre pour le traitement du terme de convection. Concernant les gradients, différents schémas du premier au troisième ordre ont été testés, notamment dans le traitement des discontinuités fluide-solide. De même, dans le cadre de l'optimisation topologique et pour des raisons de stabilité, un schéma numérique au premier ordre a été employé pour le calcul des gradients.

La difficulté principale du point de vue numérique, due aux spécificités de la thèse, est : la résolution du modèle d'écoulement de fluide proposé avec les termes supplémentaires en

gradient de porosité en plus du modèle adjoint continu utilisé pour la méthode d'optimisation topologique. En effet, le modèle d'écoulement a d'abord été résolu sans optimisation et donc avec des valeurs de paramètres de simulations et des choix préliminaires de schémas numériques. Une fois que l'on s'est assuré du bon fonctionnement du modèle d'écoulement par la reproduction de résultats de la littérature, le modèle adjoint continu a également été résolu pour produire des résultats d'optimisation. Mais la méthode d'optimisation est sensible aux choix des valeurs de paramètres et des schémas numériques utilisés, j'ai donc dû prioriser la stabilité numérique. Il a donc été nécessaire de produire a posteriori de l'optimisation topologique, des simulations qui incluent la forme optimisée et les schémas numériques au second ordre nécessaires à la bonne prise en compte des interfaces. Un algorithme de descente de gradient qui est déjà disponible dans le laboratoire a été utilisé [86], j'ai donc pu tirer profit de cet aspect et je n'ai pas eu à l'implémenter. Toutefois, bien que cet algorithme d'optimisation ait été utilisé dans les deux thèses qui précèdent ma thèse [86, 90], le modèle adjoint continu et les conditions d'optimalité correspondants au modèle d'écoulement proposé ont dû être implémentés pour la première fois dans cette thèse et peuvent être utilisés pour d'autres fonctions objectifs.

## 2.5 Conclusion du chapitre

La démarche utilisée pour obtenir un modèle d'écoulement de fluide valable en théorie pour un milieu poreux avec une hétérogénéité spatiale a été présentée. Les particularités du modèle proposé sont :

1. la présence de termes supplémentaires avec un gradient de porosité,
2. les signes de ces termes qui présentent des différences par rapport aux modèles que l'on trouve dans la littérature.

L'équation de Kozeny-Carman (2.52) est utilisée dans ces travaux pour trouver la perméabilité sous forme de scalaire et le coefficient  $\beta = \frac{CL_0^2}{d_p^2}$  permet d'étudier l'influence du diamètre moyen effectif des grains  $d_p$ . La forme sans dimension de l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide utilisée dans les simulations numériques a été donnée. Enfin, l'implémentation dans OpenFOAM a été exposée.



# Chapitre 3

## Comparaisons avec des résultats de la littérature

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Application au cas du bouchon poreux</b>	<b>57</b>
3.2.1	Présentation et paramètres physiques	57
3.2.2	Comparaisons avec des résultats de simulations numériques de la littérature	61
3.2.3	Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé	65
<b>3.3</b>	<b>Application au cas du <i>channelling</i></b>	<b>65</b>
3.3.1	Objectifs et présentation du phénomène de <i>channelling</i>	65
3.3.2	Modélisation de l'écoulement de fluide	67
3.3.3	Mise en œuvre numérique	69
3.3.4	Comparaisons avec des résultats expérimentaux de la littérature	71
3.3.5	Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé	75
3.3.6	Comparaisons avec des résultats produits par deux modèles de Darcy-Brinkman-Forchheimer classiques de la littérature	76
<b>3.4</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>88</b>

---

### 3.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre contient deux cas d'application utilisés pour se comparer aux résultats de la littérature. Le premier cas d'application est celui du bouchon poreux. L'objectif est de reproduire des résultats de simulations numériques qui se trouvent dans la littérature. Le deuxième cas d'application est celui du *channelling*. Deux objectifs y sont associés :

1. le premier objectif est d'illustrer que le modèle proposé permet de reproduire des résultats expérimentaux dans le cas d'écoulements de fluide en milieu poreux hétérogène,

- le second objectif est de comparer des résultats produits par différents modèles de Darcy-Brinkman-Forchheimer utilisés pour le *channelling* à savoir, le modèle proposé et deux autres modèles qui sont des classiques de la littérature.

Ce chapitre se termine par une conclusion.

## 3.2 Application au cas du bouchon poreux

### 3.2.1 Présentation et paramètres physiques

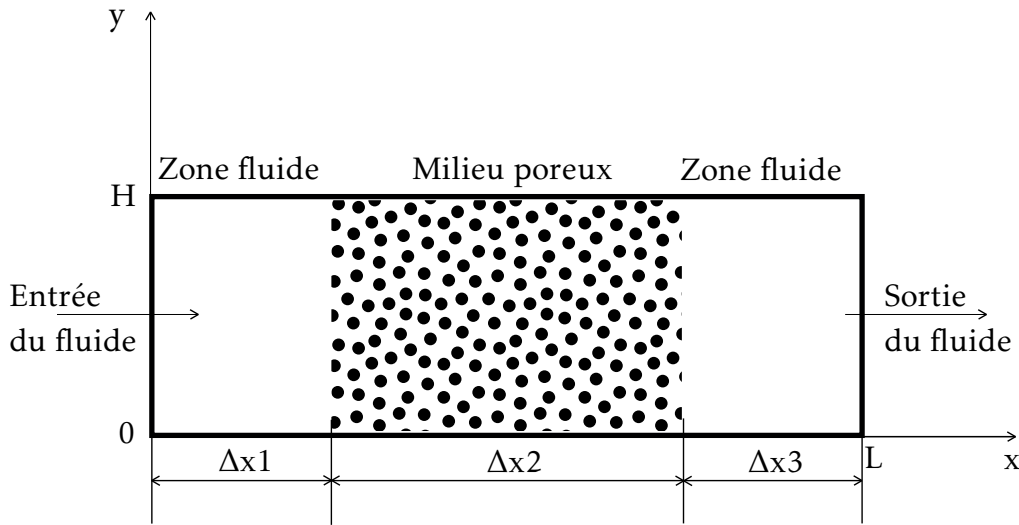


FIGURE 3.1 – Configuration géométrique du bouchon poreux.

Le problème du bouchon poreux est généralement présenté comme un canal qui se compose de trois parties. Il y a deux parties qui sont composées de fluide et la partie centrale est composée d'un milieu poreux. Il y a donc deux interfaces fluides - milieu poreux. Le cas du bouchon poreux se retrouve dans plusieurs domaines, par exemple en chimie avec les colonnes de chromatographie [95]. La géométrie étudiée est schématisée à la Figure 3.1, c'est un canal en deux dimensions et ses dimensions sont  $L \times H$ . L'entrée du fluide se fait sur  $x = 0$  et la sortie du fluide sur  $x = L$ . Les épaisseurs des zones fluides sont  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_3$  et l'épaisseur du milieu poreux est  $\Delta x_2$ . Je considère le canal comme étant rempli de fluide, le milieu poreux est donc saturé. Le problème est étudié en régime permanent et les forces extérieures volumiques sont négligées. Pour rendre le problème sans dimension, je choisis la hauteur du canal  $H$  pour la longueur caractéristique et la vitesse à l'entrée du canal  $U = \mathbf{u}_{in}$  pour la vitesse caractéristique. J'utilise une vitesse de Darcy  $\mathbf{u}$  pour représenter les mouvements du fluide. On retrouve la vitesse du fluide  $\mathbf{v}$  dans le fluide, car la porosité  $\varepsilon$  est égale à 1 et  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{v}$ . Le fluide est considéré comme étant newtonien et incompressible. Le nombre de Reynolds est  $Re_H = 1000$  où l'indice  $H$  est précisé, car le nombre de Reynolds est basé sur la largeur  $H$  du canal,  $Re_H = \frac{|\mathbf{u}_{in}| H}{\nu}$  (voir section 1.5.5). Le milieu poreux est isotrope et sa porosité  $\varepsilon_0$  est égale à 0,7. Différentes valeurs du nombre de Darcy sont considérées :

$Da = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  et le coefficient de Forchheimer utilisé est :

$$c_F(\varepsilon) = \frac{1,75}{150^{1/2} \varepsilon^{3/2}}. \quad (3.1)$$

Enfin, les paramètres physiques pour lesquels les simulations numériques sont réalisées se trouvent dans [16, 35] et vont donc permettre de comparer les résultats obtenus par rapport aux résultats des simulations numériques issus de [16, 35].

**Remarque 3.1.** — Ce n'est pas une étude approfondie de la littérature sur le problème du bouchon poreux qui est présentée, car l'objectif de cette section est de reproduire les résultats de simulations numériques présents dans la littérature.

Le cas du bouchon poreux est simple, géométriquement parlant, mais il est numériquement technique à résoudre. La modélisation de l'écoulement de fluide peut s'envisager par au moins trois façons différentes :

1. dans les pores avec un modèle d'écoulement de Navier-Stokes ;
2. dans une zone fluide et une zone poreuse qui sont distinctes et où il convient de raccorder à l'interface les modèles d'écoulement correspondants à chacune des zones (introduction d'une condition de saut à l'interface) ;
3. comme se déroulant dans un milieu poreux unique avec un modèle d'écoulement qui fait intervenir des propriétés macroscopiques hétérogènes.

C'est l'option 3 qui est utilisée dans cette thèse.

Les transitions entre le fluide et le milieu poreux sont brusques et de ce fait, les normes des vitesses obtenues numériquement sur les interfaces peuvent devenir non-physiques. Pour ce faire, j'ai apporté un soin particulier à ces aspects numériques. La complexité du traitement numérique des interfaces entre le fluide et le milieu poreux fait l'objet des travaux que l'on trouve dans [16, 35] où l'objectif est d'éviter les oscillations pour des valeurs de vitesses obtenues qui n'ont aucune justification physique. Ces situations sont illustrées dans [35, Figure 7b], l'explication qui est donnée porte sur les méthodes numériques généralement utilisées pour résoudre les écoulements de fluide. La stratégie utilisée par ces auteurs consiste à proposer des conditions de couplages particulières de la pression et de la vitesse sur les interfaces pour éviter les difficultés numériques et résoudre correctement les écoulements de fluide dans le milieu poreux et dans les zones fluides. Plus de détails sur les conditions de couplage sur une interface entre un fluide et un milieu poreux sont donnés dans [38], notamment dans le cas où des modèles d'écoulement de fluide différents sont utilisés dans chacun des domaines. Dans [16, 35], l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide utilisée est une équation à un domaine qui est la même que l'équation (2.51). C'est donc une équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer avec l'hypothèse d'une porosité constante et qui ne fait donc pas apparaître explicitement les gradients de porosité. Je rappelle ici l'équation (2.51) en régime permanent :

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \varepsilon \nabla(p^f) - \mu \Delta \mathbf{u} = -\varepsilon \mu \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \rho \mathbf{k}^{-1/2} c_F |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

Dans cette thèse, la stratégie choisie pour éviter les difficultés numériques consiste à utiliser une transition lisse de la porosité sur les interfaces fluides - milieu poreux. Je choisis

d'interpoler la porosité  $\varepsilon$  dans le domaine de calcul à l'aide d'une fonction de régularisation qui est une courbe sigmoïde :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = S_1(\mathbf{x}) \times S_2(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{x}) &= \varepsilon_f + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_f)}{2} \left( \tanh\left(\frac{\tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{2}\right) - \tanh\left(-\frac{\tau \mathbf{x}_1}{2}\right) \right), \\ S_2(\mathbf{x}) &= \varepsilon_f + \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \varepsilon_f\right)}{2} \left( \tanh\left(\frac{\tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{2}\right) - \tanh\left(-\frac{\tau \mathbf{x}_2}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans l'équation (3.4), la porosité du fluide  $\varepsilon_f$  est égale à 1 et la porosité théorique du milieu

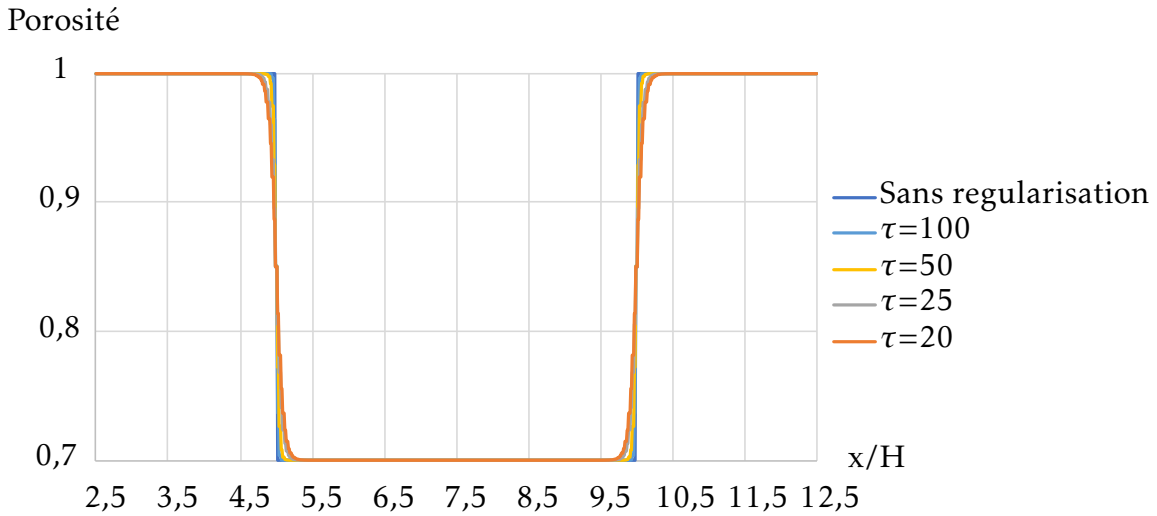


FIGURE 3.2 – Rôle du paramètre  $\tau$  dans la transition entre les zones fluides et le milieu poreux.

poreux est  $\varepsilon_0 = 0,7$ . Les valeurs  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  représentent respectivement la localisation de l'entrée et de la sortie du milieu poreux. Le paramètre  $\tau$  influence la raideur de la pente pour la transition entre les zones fluides et le milieu poreux. Les effets de différentes valeurs du paramètre  $\tau$  sur le milieu poreux qui se trouve entre  $\mathbf{x}_1/H = 5$  et  $\mathbf{x}_2/H = 10$  sont montrés sur la Figure 3.2.

La variation continue de la porosité peut s'expliquer du point de vue de la physique. En général, la valeur de la porosité proche d'une région d'interface diffère de la valeur de la porosité au centre d'un domaine poreux, cette observation est justifiée expérimentalement dans [64, Figures 5 et 6]. L'explication qui est donnée est l'augmentation de la densité de la matrice solide en fonction de la profondeur, quand on se déplace vers le centre du milieu poreux. L'interpolation de la porosité s'appuie sur le même raisonnement : on considère une zone de transition paramétrée par la valeur de  $\tau$  (voir Figure 3.2). Plus  $\tau$  est grand, plus la transition est raide. À l'inverse, des valeurs plus faibles de  $\tau$  permettent une transition plus lisse entre les zones fluides et la zone poreuse. Je précise que le modèle d'écoulement de fluide proposé dans le chapitre 2 contient des termes de gradient de porosité, il est donc nécessaire que la porosité soit une fonction dérivable. Enfin, il est courant dans la littérature de modéliser une interface entre un fluide et un milieu poreux par une zone de transition où la porosité et la perméabilité varient rapidement, mais de manière continue [23].

Dans les simulations numériques, le milieu poreux a une épaisseur  $\Delta x_2 = 5H$ . Les conditions aux limites que l'on trouve dans [16, 35] sont reprises. L'écoulement est donc totalement développé à l'entrée et à la sortie de la géométrie. Pour cela, les épaisseurs des zones fluides choisies sont  $\Delta x_1 = \Delta x_3 = 200H$ . Une condition de non-glissement est spécifiée sur les parois,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . La vitesse en entrée est  $U = \mathbf{u}_{in} = 1$ . Sur la sortie de la géométrie, le gradient normal de la vitesse est nul. Enfin, la condition aux limites pour la pression est nulle sur la sortie et le gradient normal est égal à zéro sur les parois ainsi qu'à l'entrée de la géométrie.

Je me réfère à la section 2.4 pour la méthode numérique utilisée pour calculer les écoulements de fluide. Le maillage choisi est structuré et se compose de 336000 cellules, dont 16000, dans le milieu poreux. Ce maillage est raffiné de façon à être plus fin sur les parois et en direction du milieu poreux comme on peut le voir sur la Figure 3.3.

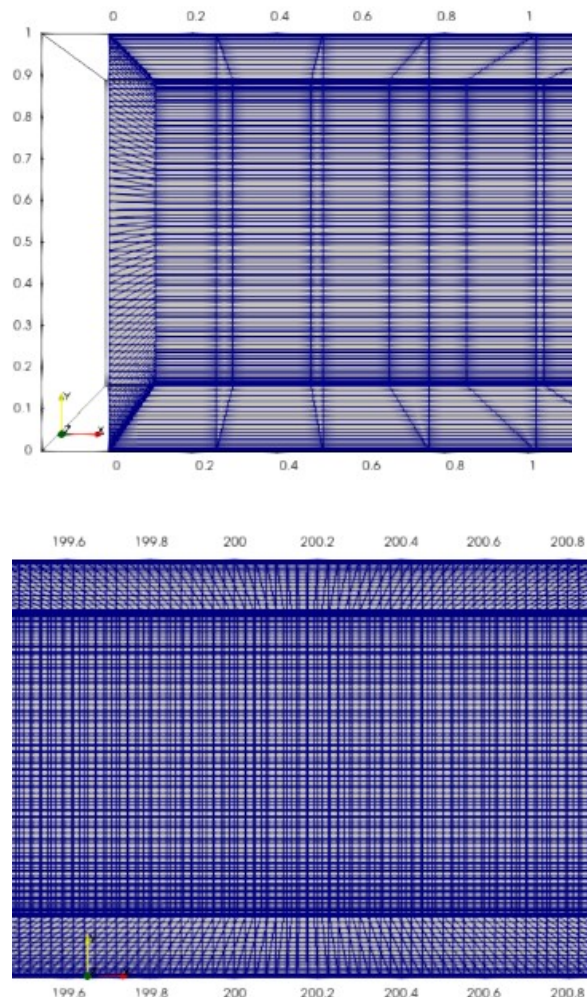


FIGURE 3.3 – Maillage utilisé pour le bouchon poreux, l'image du haut se situe à l'entrée de la géométrie et l'image du bas à une interface entre le fluide et le milieu poreux ( $x/H = 200$ ).

### 3.2.2 Comparaisons avec des résultats de simulations numériques de la littérature

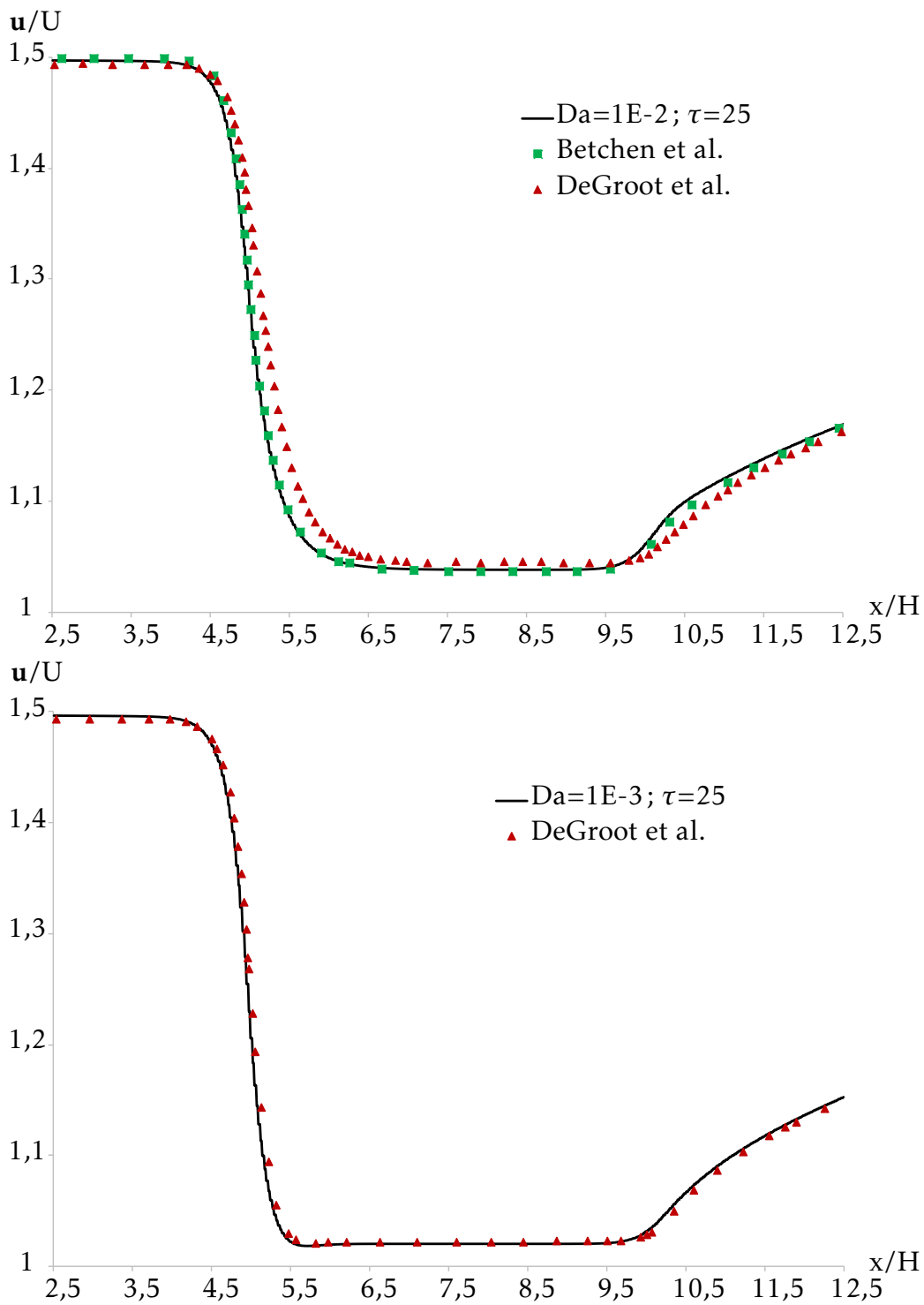


FIGURE 3.4 – Valeurs des normes de vitesse obtenues par rapport à celles de Betchen et al. [16] et DeGroot et al. [35] pour les nombres de Darcy  $Da = 10^{-2}$  et  $Da = 10^{-3}$ .

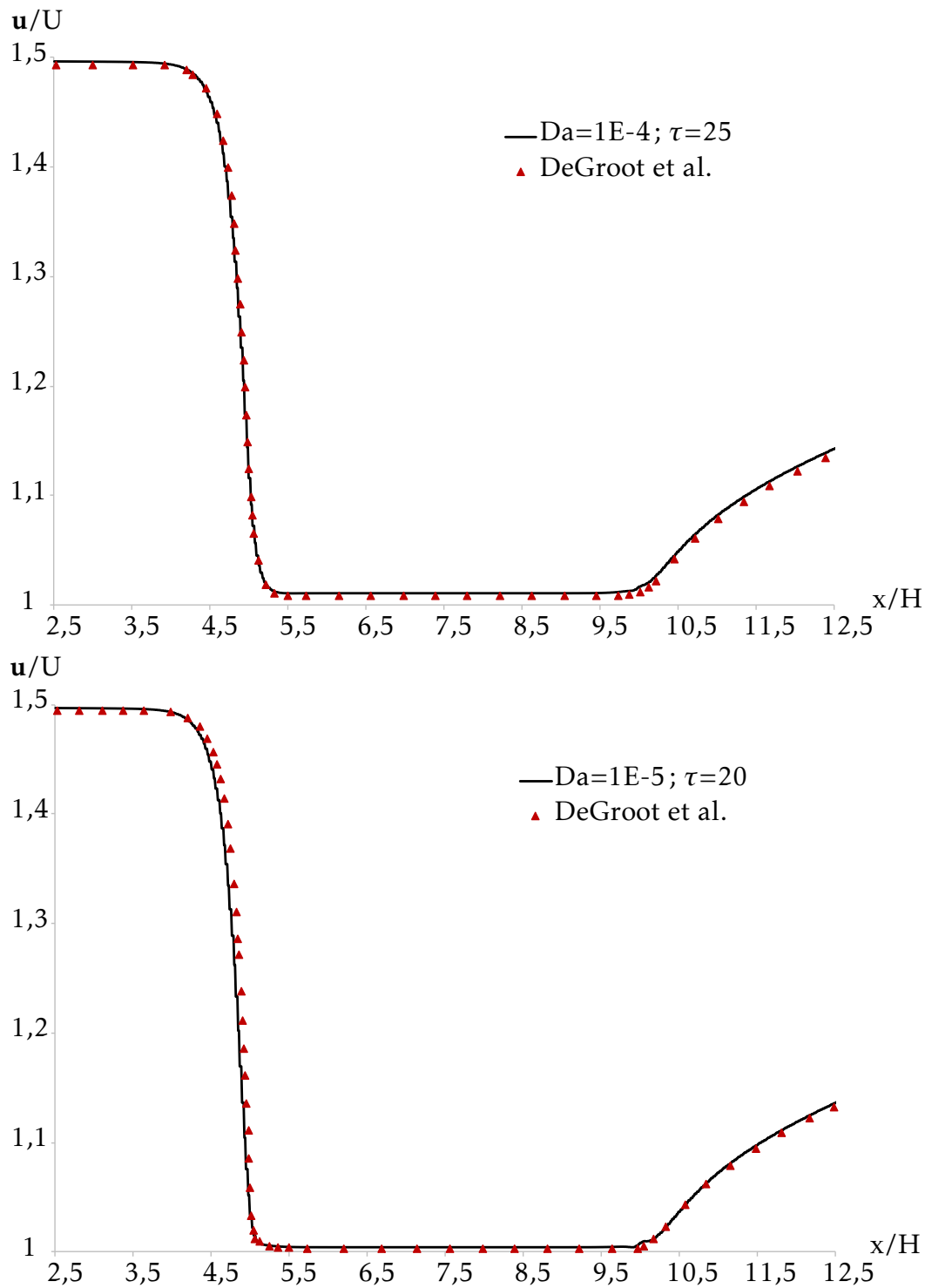


FIGURE 3.5 – Valeurs des normes de vitesse obtenues par rapport à celles de DeGroot et al. [35] pour les nombres de Darcy  $Da = 10^{-4}$  et  $Da = 10^{-5}$ .

Je rappelle que le modèle d'écoulement de fluide utilisé pour produire les résultats se compose d'une part, de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de fluide

(2.63) :

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2 \text{Re}} \Delta \varepsilon \\
& - \left( \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3 \text{Re}} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\
& = - \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} - \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \mathbf{u},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

qui fait apparaître les gradients de porosité et d'autre part, de l'équation de continuité (2.23) :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{v}^f) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{3.6}$$

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats que l'on trouve dans [16, 35]. Les valeurs des différentes normes des vitesses en fonction de la valeur du nombre de Darcy sont présentées sur les Figures 3.4 et 3.5 grâce à une interpolation linéaire des vitesses le long de la ligne  $y/H = 0,5$  et sur l'intervalle  $x/H \in [2,5; 12,5]$ . Le milieu poreux se trouve avant régularisation sur l'intervalle  $x/H \in [5; 10]$ . On observe une très bonne correspondance entre les résultats produits par le modèle proposé et les résultats de la littérature. Pour le nombre de Darcy  $\text{Da} = 10^{-2}$ , le profil de vitesse correspond exactement à celui obtenu par Betchen et al. [16]. Pour les nombres de Darcy  $\text{Da} = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ , les profils de vitesse correspondent exactement à ceux obtenus par DeGroot et al. [35]. Il y a un écart pour  $\text{Da} = 10^{-2}$  entre les résultats obtenus par [35] et ceux obtenus par [16]. Cet écart s'explique d'après [35] par les différentes façons de traiter la pression sur les interfaces.

L'objectif qui était de reproduire des résultats de simulations numériques qui se trouvent dans la littérature est atteint. En effet, on observe que le modèle permet de retrouver les normes des champs de vitesse dans le fluide, dans le milieu poreux et lors des transitions entre le fluide et le milieu poreux, pour différentes valeurs du nombre de Darcy. De plus, contrairement à ce qui a été réalisé dans [16, 35], il n'y a pas eu besoin de recourir à des conditions particulières pour le couplage de la vitesse et de la pression sur les interfaces, une transition continue de la porosité grâce à la courbe sigmoïde présentée dans ces travaux (3.4) a suffi. On peut voir que pour  $\text{Da} = 10^{-2}, 10^{-3}$  et  $10^{-4}$ ,  $\tau = 25$  donne les mêmes résultats que ceux de la littérature, mais  $\tau = 20$  est nécessaire pour  $\text{Da} = 10^{-5}$ . L'influence du paramètre  $\tau$  sur les valeurs des vitesses obtenues est illustrée sur la Figure 3.6 pour les quatre valeurs de nombre de Darcy. Le paramètre  $\tau$  a une influence sur les valeurs des vitesses obtenues qui se limite aux zones de transition. Je ne discuterai pas davantage la sigmoïde (voir [87] pour plus de détails) ni la méthode numérique utilisée, car ce n'est pas l'objet de ce cas d'application.

Betchen et al. [16] précisent qu'une validation rigoureuse a démontré la capacité du modèle mathématique et numérique, général et physiquement fondé, à fournir des solutions précises pour une variété de problèmes. Par ailleurs, DeGroot et al. [35] soulignent que des nouvelles conditions d'interface, physiquement fondées ont été proposées et sont très robustes pour des nombres de Reynolds laminaire élevés et qui ne provoquent pas d'oscillations dans les résultats obtenus. L'adéquation des résultats aux résultats qui se trouvent dans [16, 35] par l'utilisation d'une variation continue de la porosité pour représenter la transition entre un domaine fluide et un milieu poreux avec le modèle d'écoulement proposé montre un bon fonctionnement de la méthode de résolution numérique mise en œuvre sur OpenFoam.



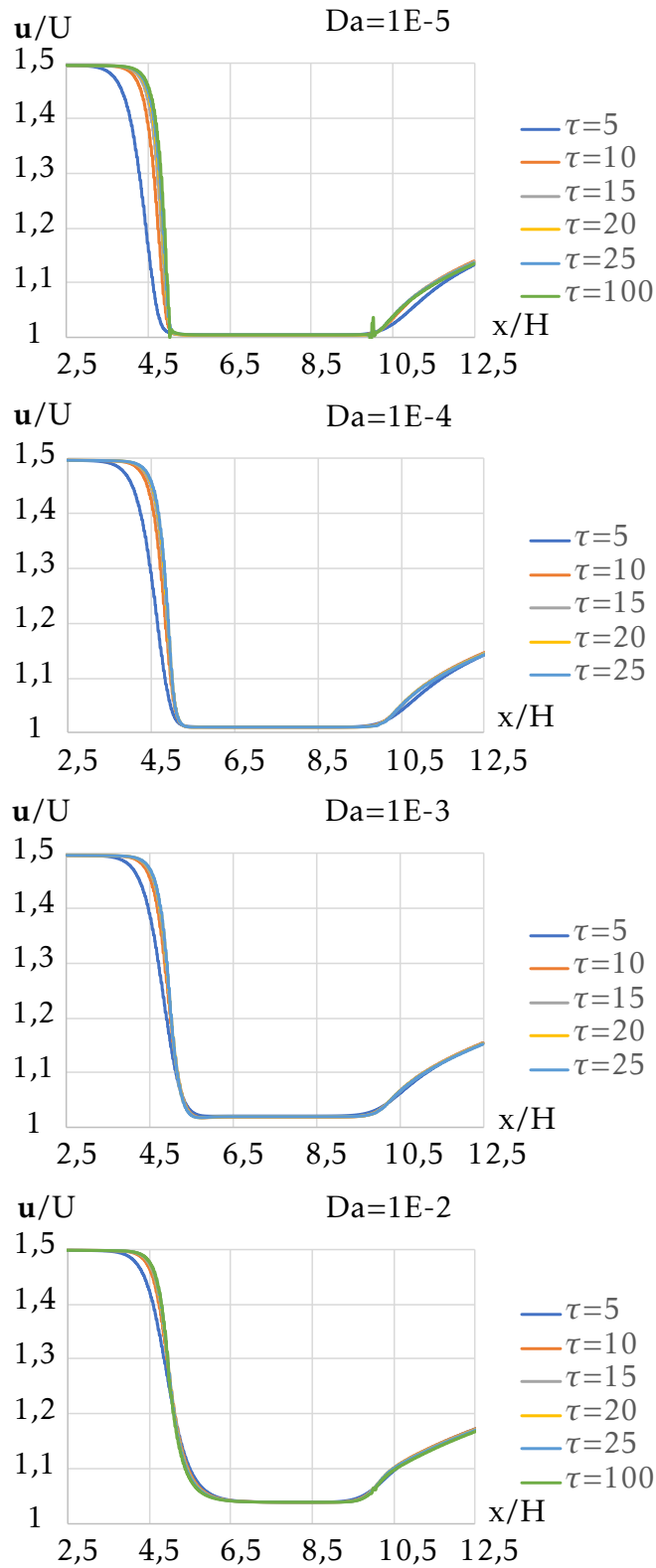


FIGURE 3.6 – Influence du paramètre  $\tau$  sur les valeurs des vitesses.

### 3.2.3 Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé

Les modèles d'écoulement de fluide qui ont permis de produire les résultats de la section 3.2.2 à savoir, celui proposé dans le chapitre 2 eq.(3.5) et celui que l'on trouve dans [16, 35] eq.(3.2) ne sont pas les mêmes. Afin d'étudier plus en détail l'influence des termes avec un gradient de porosité dans le cas du bouchon poreux, des simulations numériques ont été réalisées en considérant ces termes comme étant négligeables dans l'équation (3.5), le système d'équations qui a été résolu est donc :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{v}^f) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.7)$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} + \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Les résultats produits par les équations (3.7) et (3.8) sont présentés sur la Figure 3.7 pour le nombre de Darcy  $Da = 10^{-2}$  ainsi que les résultats produits par le modèle proposé des équations (3.5) et (3.6). J'illustre les résultats pour  $Da = 10^{-2}$ , car les normes de vitesse de fluide obtenues présentent le plus de différence. Quand le nombre de Darcy diminue, les écarts entre les résultats produits par les deux modèles diminuent également jusqu'à observer une superposition des courbes de vitesse pour  $Da = 10^{-5}$ , mais ces résultats ne sont pas présentés ici. Avec une fonction sigmoïde qui permet une transition continue de la porosité pour le problème du bouchon poreux, deux observations peuvent être réalisées sur l'influence des termes avec un gradient de porosité. Premièrement, cette influence se limite aux zones de transitions, là où la porosité est variable et deuxièmement, cette influence dépend du nombre de Darcy du milieu poreux, car plus le nombre de Darcy est grand, ici de  $10^{-5}$  à  $10^{-2}$ , plus il existe des écarts sur les normes des vitesses.

Ainsi, le modèle proposé permet de reproduire des résultats de simulations numériques qui se trouvent dans la littérature (section 3.2.2) et les termes avec un gradient de porosité peuvent avoir une influence dans les zones où la porosité varie (Figure 3.7). Dans la suite du chapitre, une configuration où le problème initial contient un milieu poreux hétérogène est abordée, dans le cas du *channelling*.

## 3.3 Application au cas du *channelling*

### 3.3.1 Objectifs et présentation du phénomène de *channelling*

Le phénomène de *channelling*<sup>1</sup> se produit à cause de l'hétérogénéité d'un milieu poreux (section 1.3). C'est une situation qui peut apparaître dans le cas d'un milieu poreux entouré de parois rigides et qui se traduit par un chemin d'écoulement de fluide préférentiel situé proche d'une paroi. Ce chemin préférentiel d'écoulement s'observe expérimentalement même pour un milieu poreux uniformément tassé [71, 95, 98, 110]. La cause est l'arrangement des grains en contact avec les parois solides, car la porosité locale au niveau d'une paroi est proche de 1. On peut alors considérer le milieu poreux comme étant hétérogène en partant de la paroi jusqu'à atteindre une distance qui permet de retrouver les propriétés moyennes

1. On trouve également la syntaxe *channeling* dans la littérature.

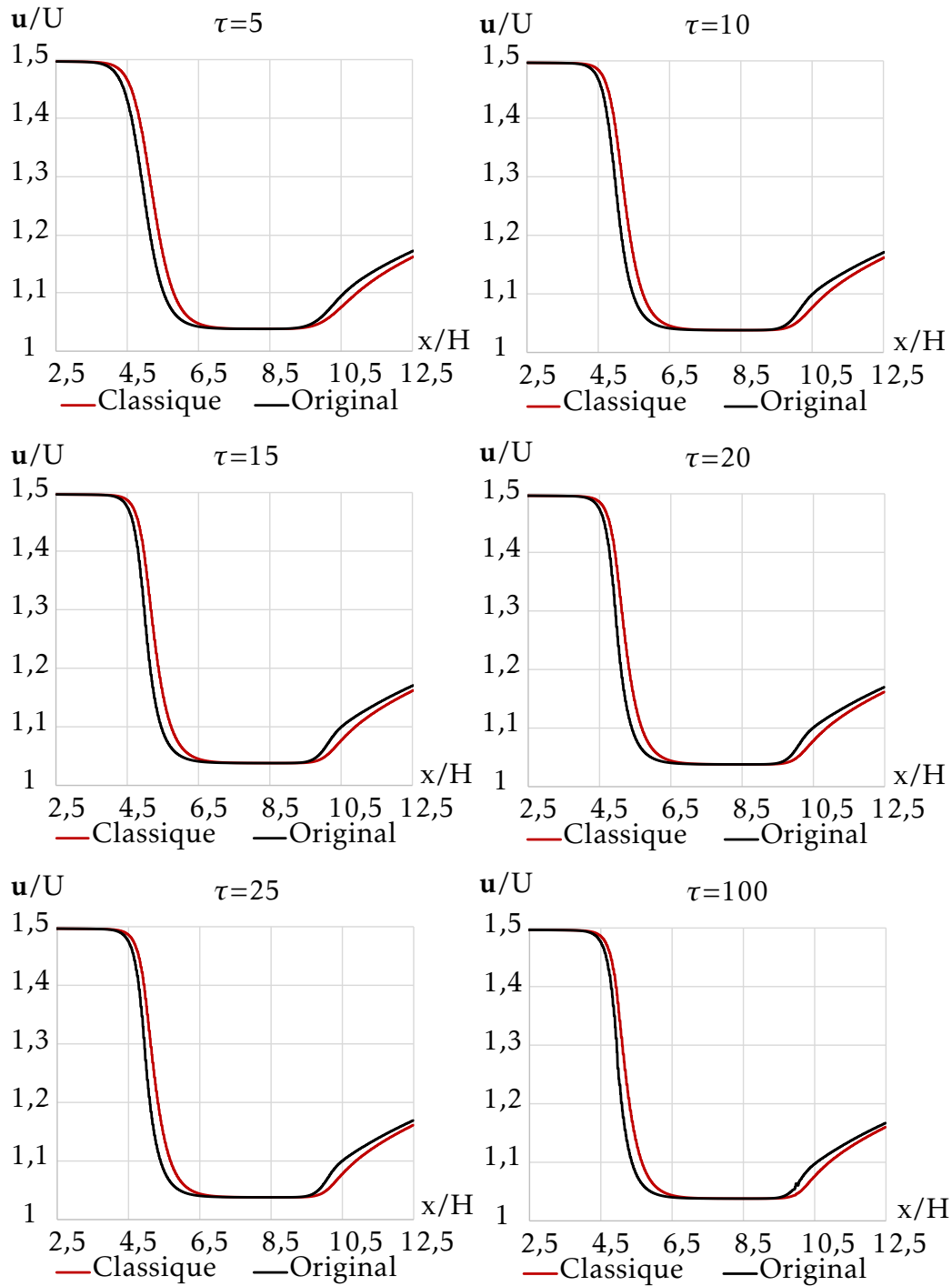


FIGURE 3.7 – Comparaison des résultats pour le nombre de Darcy  $Da = 10^{-2}$  entre le modèle proposé eq.(3.5) dénommé Original et ce même modèle en négligeant les gradients de porosité eq.(3.8) dénommé Classique.

globales du milieu poreux. Le problème du *channelling* est un problème de la littérature qui nécessite une étude approfondie d'après les recommandations que l'on trouve dans [73]. Une des causes principales est la notion d'élément de volume représentatif (E.V.R.) qui n'est en

principe plus valide proche de la paroi [71].

Il est observé expérimentalement que la valeur de la porosité locale oscille en partant d'une paroi jusqu'à atteindre une valeur moyenne à une distance d'environ  $5 d_p$  par rapport à la paroi où  $d_p$  représente le diamètre moyen effectif des grains constitutifs du milieu poreux [14, 95]. Toutefois, pour un milieu poreux qui contient un mélange de grains de tailles différentes, les oscillations peuvent être moins prononcées et la valeur moyenne globale de la porosité du milieu poreux peut alors être retrouvée plus rapidement en s'éloignant de la paroi [89, Figures 3 et 4]. L'intensité de l'écoulement préférentiel dépend du ratio entre le diamètre de la géométrie considérée  $L$  et le diamètre moyen effectif des grains constitutifs du milieu poreux  $d_p$ . Il existe plusieurs systèmes, à différentes échelles qui peuvent donner lieu au *channelling*. Il y a les colonnes de chromatographie qui sont radialement hétérogènes [95] ou encore, les colonnes remplies de capsules de matériaux à changement de phases [63, 66].

L'idée pour aborder le problème du *channelling* consiste à tirer profit de la forme du modèle d'écoulement de fluide proposée dans le chapitre 2. Ce dernier est un modèle d'écoulement à un domaine qui fait apparaître les gradients de porosité afin de tenir compte de l'hétérogénéité spatiale du milieu poreux. Je précise que d'autres stratégies auraient pu être utilisées, comme un modèle mixte ou hybride avec une couche limite traitée à l'échelle du pore et le reste du domaine de calcul traité à l'échelle de Darcy (le lien entre les deux échelles pouvant se faire au travers d'une condition à la limite). Je commencerai tout d'abord par présenter les modèles d'écoulement de fluide de la littérature qui ont été utilisés pour le *channelling*. Je décrirai ensuite la mise en œuvre numérique qui permet de produire les résultats. Enfin, deux études seront menées dans lesquelles les objectifs sont de comparer les résultats produits par le modèle proposé dans le chapitre 2 à :

1. des résultats expérimentaux d'écoulement de fluide,
2. des résultats produits par des modèles classiques de la littérature et qui ont été utilisés pour le *channelling*.

### 3.3.2 Modélisation de l'écoulement de fluide

Dans le cas du *channelling*, la modélisation de l'écoulement est un exercice difficile, car le milieu poreux est hétérogène et la notion d'E.V.R. n'est en théorie pas valide. Traiter le problème à l'échelle microscopique, c'est-à-dire dans l'espace des pores, semble être plus adapté, mais il y a dans la littérature plusieurs références qui utilisent des modèles d'écoulement de fluide obtenus à la suite d'une technique de prise de moyenne volumique. Ces références sont donc analysées ici en deux parties. En effet d'après la littérature, deux modèles d'écoulement de fluide qui seront désignés ici par (A) (eq. 3.16) et (B) (eq. 3.20) ont principalement été utilisés pour le cas du *channelling* comme on peut le voir dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 – Récapitulatif des références discutées pour le phénomène de *channelling*.

Modèle	Sources des équations	Références qui utilisent le modèle
(A)	[106, eq. (14)]	[103], [104], [105]
(B)	[61, eq. (31)] et [75, eq. (6)]	[71]

### Analyse pour le modèle (A) :

Dans VAFAI, ALKIRE et TIEN[104], une étude expérimentale d'un transfert de chaleur en milieu poreux a été menée. La variation de porosité qui induit le *channelling* est considérée. Des simulations numériques sont également réalisées et les résultats obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux. La technique de prise de moyenne sur un V.E.R. a été utilisée pour établir le modèle d'écoulement de fluide. Dans [103] où l'on trouve le même modèle d'écoulement de fluide, l'objectif est de montrer l'influence de la variation de porosité sur un écoulement de fluide et sur un transfert de chaleur en milieu poreux. Cependant, il faut noter que le modèle d'écoulement de fluide qui est utilisé dans [103] et [104] provient de [106]. Le modèle que l'on trouve dans [106] a été développé avec l'hypothèse d'un milieu poreux où la porosité est constante, car on peut y lire la phrase suivante :

*"The present analysis is under the assumption of a constant-porosity medium, thus neglecting the effect of possible porosity variations near the wall".*

Toutefois, les résultats des simulations numériques obtenus dans [103, 104] correspondent aux résultats expérimentaux. D'ailleurs, le modèle d'écoulement de fluide issu de [106] est largement cité dans la littérature (voir tableau 3.2) et est considéré comme étant une référence pour l'équation Darcy-Brinkman-Forchheimer (D.B.F.). Pour une discussion sur le domaine de validité des termes qui apparaissent dans le modèle de [106], le lecteur est invité à voir [74, 105]. On retiendra notamment que la conclusion dans [105] explique que le modèle D.B.F. présenté dans [106] est l'équation la plus couramment utilisée, car :

- il est possible de traiter les régions composées de fluides et de milieux poreux comme un seul domaine,
- le fluide peut être vu comme un milieu poreux avec une large perméabilité,
- et les résultats produits par le modèle correspondent bien aux résultats expérimentaux.

Étant donnée cette analyse, mon objectif va être de comparer les résultats produits avec le modèle d'écoulement de fluide proposé dans le chapitre 2 à ceux produits par le modèle d'écoulement de fluide qui se trouve dans [106, eq. (14)].

### Analyse pour le modèle (B) :

Un autre modèle d'écoulement de fluide utilisé pour le *channelling* se trouve dans [75]. La construction du modèle se fait avec l'introduction d'une fraction de surface disponible pour l'écoulement. Cette fraction de surface est une quantité moyenne sur l'échelle de longueur caractéristique d'un pore. Le milieu poreux considéré étant isotrope, la fraction de surface est donc la même dans toutes les directions et elle est définie comme étant la porosité locale [75]. Cette porosité locale peut alors varier sur l'échelle de longueur macroscopique du problème. Les résultats des simulations numériques que l'on trouve dans [75] sont les mêmes que les résultats expérimentaux et les résultats des simulations numériques qui se trouvent dans [104] pour un transfert de chaleur en milieu poreux où la porosité est variable. Les résultats présentés dans [75] correspondent donc également aux résultats produits par le modèle [106], les références [104] et [106] étant liées comme on peut le voir dans le tableau 3.1.

L'écriture du modèle d'écoulement de fluide dans [75] est similaire à celle que l'on trouve dans [61] où le développement a été obtenu après une prise de moyenne des équations de Navier-Stokes sur un volume représentatif du milieu poreux. Par ailleurs, la référence [61] est le modèle général D.B.F. qui est cité dans [71], un ouvrage de référence dans le domaine de la convection dans les milieux poreux. C'est la raison pour laquelle mon objectif sera

également de comparer les résultats produits par le modèle d'écoulement de fluide proposé dans le chapitre 2 avec les résultats produits par le modèle d'écoulement de fluide qui se trouve dans [61, eq. (31)] et [75, eq. (6)].

**En résumé :**

Dans la littérature, deux modèles ont principalement été utilisés pour traiter le cas du *channelling* :

- le premier (A) reproduit bien des résultats expérimentaux bien que le modèle utilisé ait été développé avec l'hypothèse d'une porosité constante,
- le second (B) est un modèle général D.B.F., conseillé pour l'étude de la convection en milieu poreux.

Mon analyse est la suivante : les références sources des équations des modèles (A) et (B) présentent un grand nombre de citations dans la littérature, le nombre de citations trouvé avec Google Scholar à la date de juillet 2022 est présenté dans le tableau 3.2. Ces modèles

Tableau 3.2 – Nombre de citations des sources des équations sur le phénomène de *channelling*.

Modèle	Sources des équations	Nombre de citations à la date de juillet 2022
(A)	[106, eq. (14)]	1922
(B)	[61, eq. (31)]	802
(B)	[75, eq. (6)]	644

peuvent donc être considérés comme étant des modèles classiques de la littérature. Ensuite, l'étude de la littérature sur la modélisation de l'écoulement de fluide dans le cas du *channelling* permet de faire trois observations :

1. je n'ai pas trouvé d'autres écritures du modèle d'écoulement de fluide D.B.F. qui ont été utilisées pour le *channelling*,
2. les modèles d'écoulement de fluide utilisés dans la littérature ne sont pas, du moins en théorie, adaptés au problème, mais les résultats expérimentaux sont pourtant correctement reproduits,
3. le modèle proposé dans le chapitre 2 fait apparaître les gradients de porosité et à ma connaissance ce type de modèle n'a pas encore été utilisé pour le cas du *channelling*.

### 3.3.3 Mise en œuvre numérique

Le problème étudié est l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un cylindre contenant un milieu poreux hétérogène. Ce problème est résolu en trois dimensions. La porosité locale du milieu poreux est variable à cause des effets de la paroi rigide. L'écoulement de fluide étudié est stationnaire et je considère les hypothèses des sections 1.4.1 et 1.5.1. La géométrie étudiée est présentée sur la Figure 3.8. L'entrée du fluide est sur le plan  $z = 0$  et la sortie du fluide sur le plan  $z = 50$ . Je choisis la vitesse du fluide en entrée  $\mathbf{u}_{in}$  comme vitesse caractéristique,  $U = \mathbf{u}_{in}$  et le diamètre moyen effectif des grains constitutifs du milieu poreux  $d_p$  comme longueur caractéristique. Le rayon du cylindre est  $5 d_p$  et la longueur du cylindre est  $50 d_p$ . Les variations spatiales de la porosité se font de deux façons qui sont illustrées sur le plan de

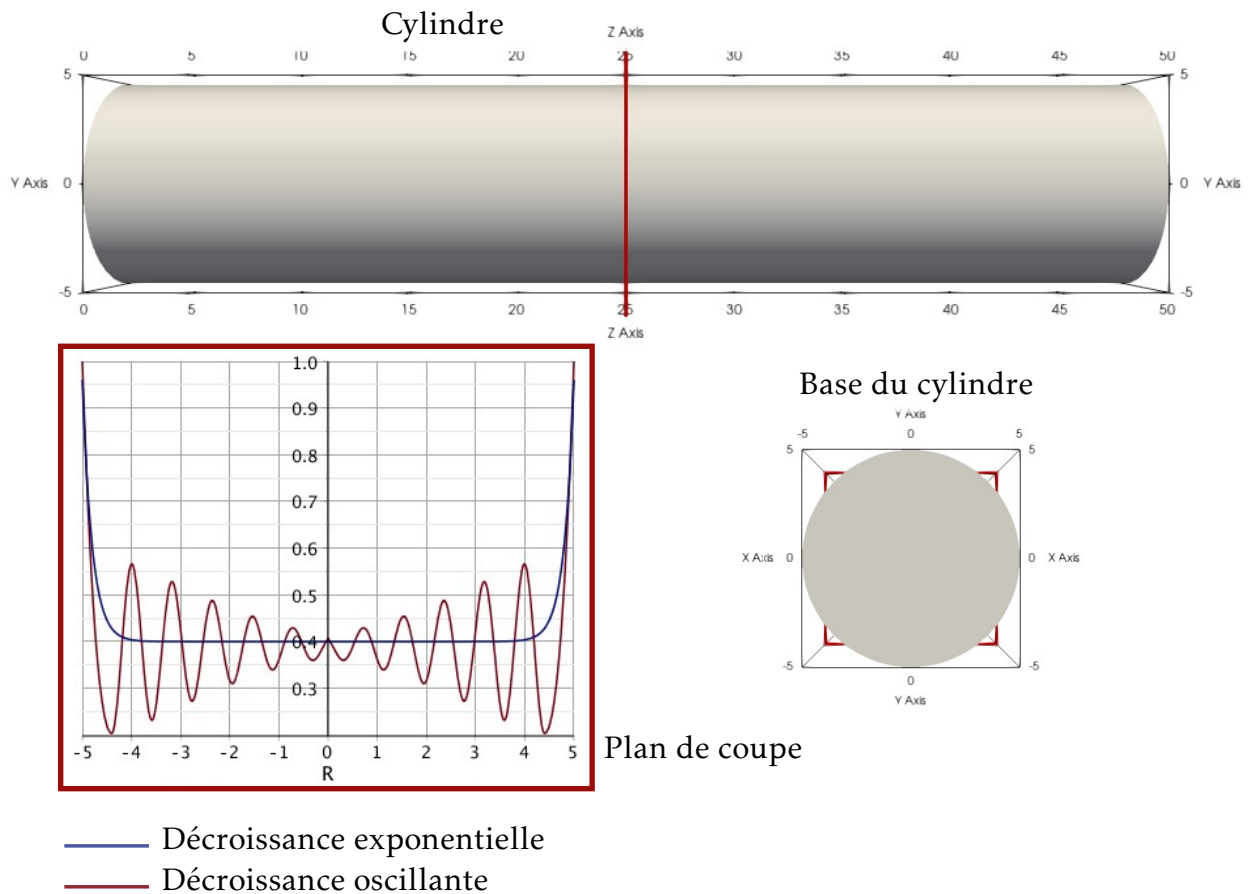


FIGURE 3.8 – Configuration géométrique pour le phénomène du *channelling*. On peut voir le cylindre et une de ses bases. Un plan de coupe illustre les deux types de variations de porosités suivant la direction radiale R.

coupe de la Figure 3.8. Il y a deux types de variations de porosités, une variation oscillatoire et une variation exponentielle de la porosité. Les équations utilisées pour les représenter seront présentées un peu plus loin dans le chapitre. On peut voir qu’avec le modèle de porosité oscillatoire choisi, les effets de la paroi ne sont pas totalement amortis (voir [14, Figure 4] où la même situation est analysée). Les dérivées radiales de la porosité sont données dans la Figure 3.9, car elles apparaissent dans le modèle proposé dans le chapitre 2 sous la forme du gradient et du laplacien. Le cylindre se compose du domaine de calcul  $\Omega$  et des frontières  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{out}$ .

Pour chaque simulation numérique, le modèle d’écoulement de fluide qui est résolu est composé d’une équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.9}$$

et d’une équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  où la forme spécifique de  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  sera précisée à chaque fois. Les paramètres physiques dans  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  sont : une porosité  $\varepsilon$  qui varie spatialement,  $c_F(\varepsilon) = \frac{1,75}{150^{1/2} \varepsilon^{3/2}}$  et  $\beta = 150$ . Les conditions aux

limites sont :

$$\begin{aligned} \text{sur l'entrée } \Gamma_{in} : \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} = 1, \partial_n p^f = 0, \\ \text{sur la paroi } \Gamma_w : \mathbf{u} = 0, \partial_n p^f = 0, \\ \text{sur la sortie } \Gamma_{out} : \partial_n \mathbf{u} = 0, p^f = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Je me réfère à la section 2.4 pour plus d'informations sur la méthode de résolution numérique utilisée pour les écoulements de fluide. La configuration géométrique est décomposée par un maillage de type O-grid avec un raffinement vers les parois et comporte environ 10 millions de cellules (voir Figure 3.10).

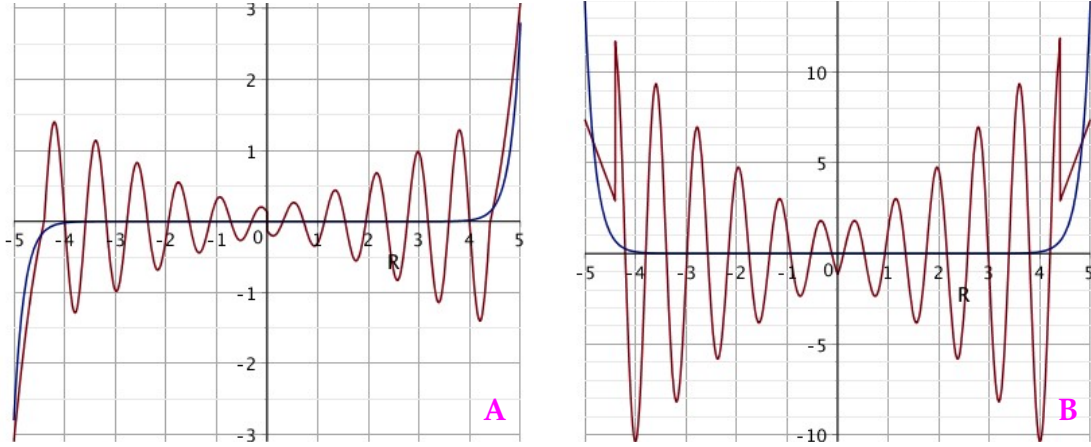


FIGURE 3.9 – Courbes du gradient de porosité (à gauche, A) et du laplacien de porosité (à droite, B), les codes couleurs sont les mêmes que ceux de la Figure 3.8.

### 3.3.4 Comparaisons avec des résultats expérimentaux de la littérature

L'objectif est de comparer les résultats produits avec le modèle d'écoulement de fluide proposé au chapitre 2 avec les résultats expérimentaux d'écoulements de fluide que l'on trouve dans [46] où la variation de la porosité du milieu poreux est oscillatoire. Dans ce cas,  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  équivaut à l'équation (2.63) en régime permanent.

#### Variation oscillatoire de la porosité

Parmi les résultats que l'on trouve dans [46], je choisis de reproduire ceux pour lesquels le diamètre interne du cylindre est de 80 mm et où le milieu poreux se compose de sphères de diamètre 8,6 mm. La variation de la porosité due à l'effet de la paroi est modélisée par une fonction oscillatoire et j'utilise l'équation qui se trouve dans [111, Eq. (9)]. Cette dernière est adaptée en tenant compte des dimensions de la géométrie et pour une variation de la porosité sur les directions  $x$  et  $y$  (direction radiale  $R$ ) :

$$\varepsilon = \begin{cases} -14,50180 + 3,10036 (x^2 + y^2)^{1/2} + 3,70243 (5 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 - 1,24612 (5 - (x^2 + y^2)^{1/2})^3 \\ \text{si } -(x^2 + y^2)^{1/2} \leq -4,4 \\ -0,1865 \exp(-0,22(-(x^2 + y^2)^{1/2} + 4,4)^{1,5}) \cos(-33,704 + 7,66 (x^2 + y^2)^{1/2}) + 0,39 \\ \text{si } 0 \leq -(x^2 + y^2)^{1/2} + 4,4. \end{cases} \quad (3.11)$$



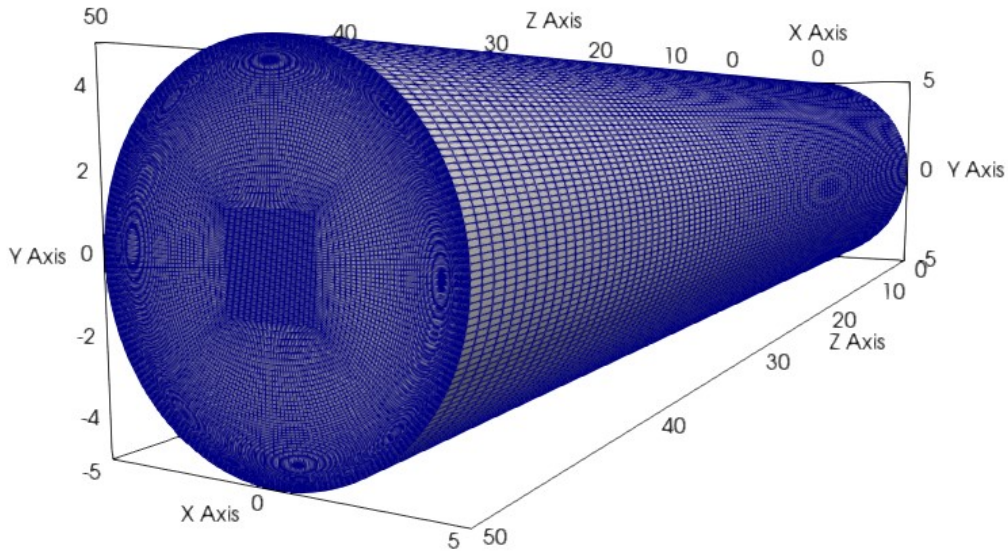


FIGURE 3.10 – Discrétisation du cylindre par un maillage de type O-grid d’environ 10 millions de cellules.

Les valeurs de porosité obtenues avec l’équation (3.11) et celles trouvées dans [46] sont présentées à la Figure 3.11.

### Résultats

Dans [46], les vitesses de fluide sont mesurées grâce à un appareil de commande automatique qui utilise la technique de vélocimétrie laser Doppler<sup>2</sup>. La plus proche distance entre deux mesures de vitesse est de 1 mm et plusieurs valeurs de vitesses d’écoulement interstitielles sont mesurées et des valeurs moyennes sont fournies. Je compare les résultats des simulations numériques à ces valeurs moyennes expérimentales, qui sont données pour quatre nombres de Reynolds  $Re_p = \{4; 77; 103; 532\}$  où  $Re_p = \frac{\mathbf{u} \rho d_p}{\mu}$ .

**Remarque 3.2.** — Dans [46], les vitesses de fluide sont mesurées pour deux sections transversales différentes, mais comme l’écoulement de fluide est totalement développé, les valeurs entre les sections ne présentent pas de différences notables. Les résultats entre les deux sections de mesures sont donc rassemblés pour constituer l’ensemble des points expérimentaux qui sont utilisés.

Les résultats des simulations numériques ainsi que les points expérimentaux sont présentés sur les Figures 3.12 et 3.13 où les vitesses  $\mathbf{u}/U$  sont trouvées par une interpolation linéaire des normes de vitesse à la sortie de la géométrie. On observe visuellement une très bonne correspondance entre les résultats produits par le modèle proposé au chapitre 2 et les résultats expérimentaux. Les courbes de vitesse de fluide obtenues suivent parfaitement la

2. Voir par exemple le site du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique de Lyon : <http://lmfa.ec-lyon.fr/spip.php?article1313>.

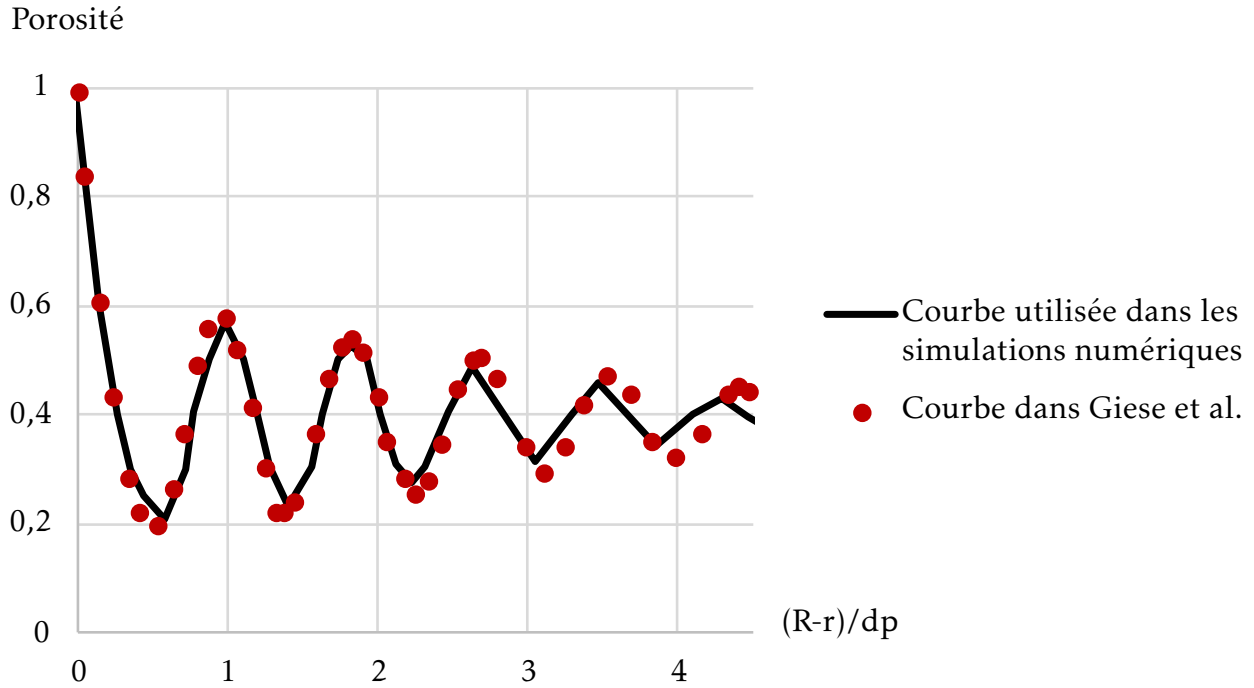


FIGURE 3.11 – Courbe de porosité utilisée pour les simulations numériques en comparaison aux points de la courbe de porosité qui se trouve dans Giese et al.[46] pour un milieu poreux composé de sphères.

courbe des oscillations de la porosité présentée à la Figure 3.11.

Enfin, il convient de préciser que le nombre de Reynolds  $Re_p = 532$  correspond à un régime d'écoulement de fluide turbulent (section 1.5.5). C'est une difficulté dans le cas présent, car on ne sait pas si les structures turbulentes qui se déroulent naturellement dans l'espace des pores se retrouvent à l'échelle d'un E.V.R. et plus de détails sur la question se trouvent dans [33, 110]. La valeur maximale de vitesse proche de la paroi pour  $Re_p = 532$  semble trop élevée par rapport à la valeur trouvée expérimentalement. Une façon de limiter ce pic maximal de vitesse est présentée dans [46]. En effet, en plus des résultats expérimentaux, les auteurs ont réalisé des simulations numériques grâce à un modèle d'écoulement de fluide basé sur une équation de Brinkman avec une viscosité effective  $\mu_{eff}$ . La valeur de la viscosité effective  $\mu_{eff}$  est ajustée afin de faire correspondre la valeur du pic maximal de vitesse obtenue numériquement aux points expérimentaux. Le meilleur résultat en accord avec l'expérience est notamment trouvé pour  $\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 13$  où  $\frac{\mathbf{u}}{U} \approx 2,4$ , car pour  $\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 30$  le pic de vitesse se trouve en dessous de  $\frac{\mathbf{u}}{U} = 2$  et pour  $\frac{\mu_{eff}}{\mu} = 3$ , le pic de vitesse est autour de  $\frac{\mathbf{u}}{U} \approx 3,5$  [46, Figure 7, c]. La viscosité effective est également abordée comme un paramètre de calibration dans [39], où le pic proche de la paroi est habituellement surestimé avec les modèles et est donc corrigé par la suite. De même, une étude de la valeur de la viscosité effective en fonction de la porosité du milieu poreux est donnée dans [67]. En revanche, je ne discuterai pas davantage de la valeur de la viscosité effective, car ce n'est pas l'objet de ce cas

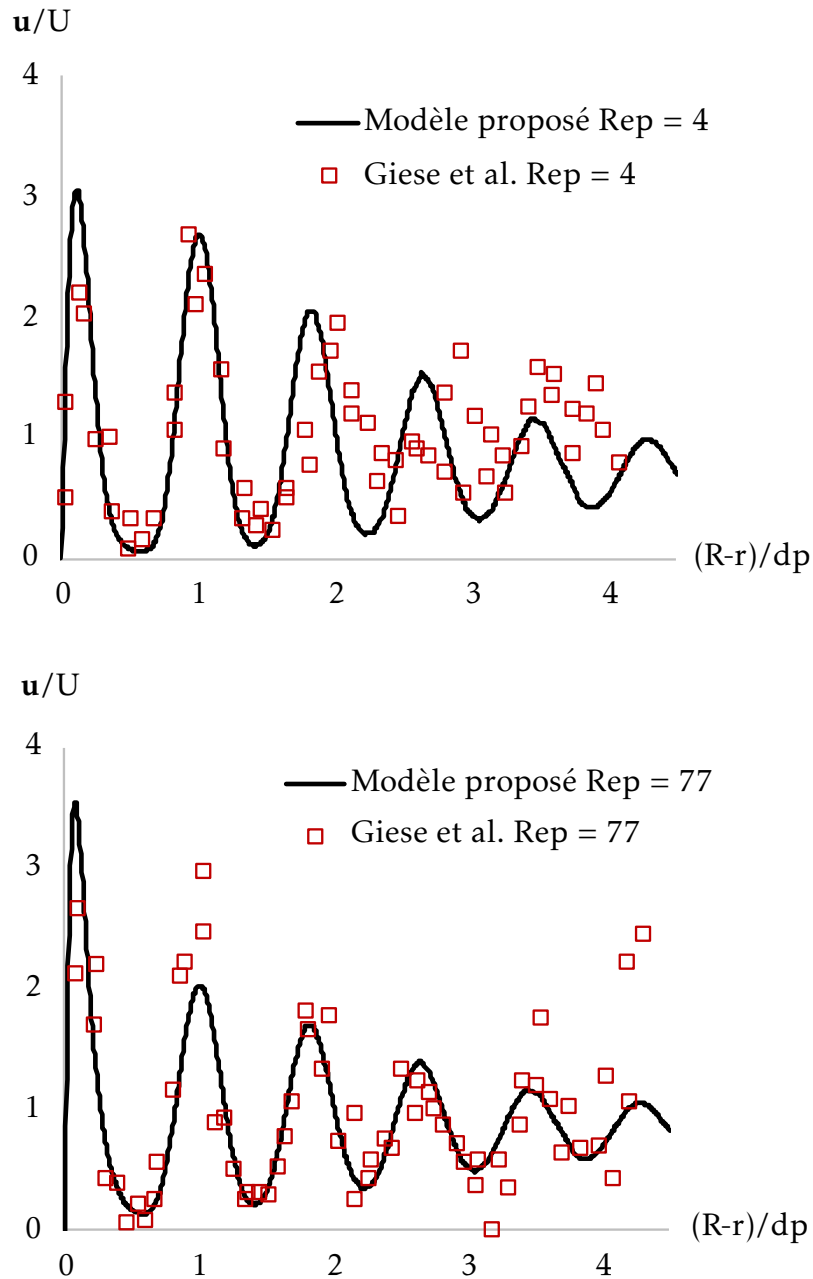


FIGURE 3.12 – Comparaison aux résultats expérimentaux dans Giese et al. [46] pour  $Re_p = 4$  et  $Re_p = 77$ .

d'application.

En conclusion, l'objectif 1 qui était de reproduire des résultats expérimentaux dans le cas d'écoulements de fluide en milieu poreux hétérogène est atteint. Le modèle proposé permet de retrouver les vitesses de fluide mesurées expérimentalement dans Giese et al. [46] pour une variation de la porosité de forme oscillatoire même si le cas où l'écoulement de fluide est dans un régime turbulent reste ouvert à la discussion. Cette étude comparative montre également un bon fonctionnement de la méthode de résolution numérique mise en œuvre

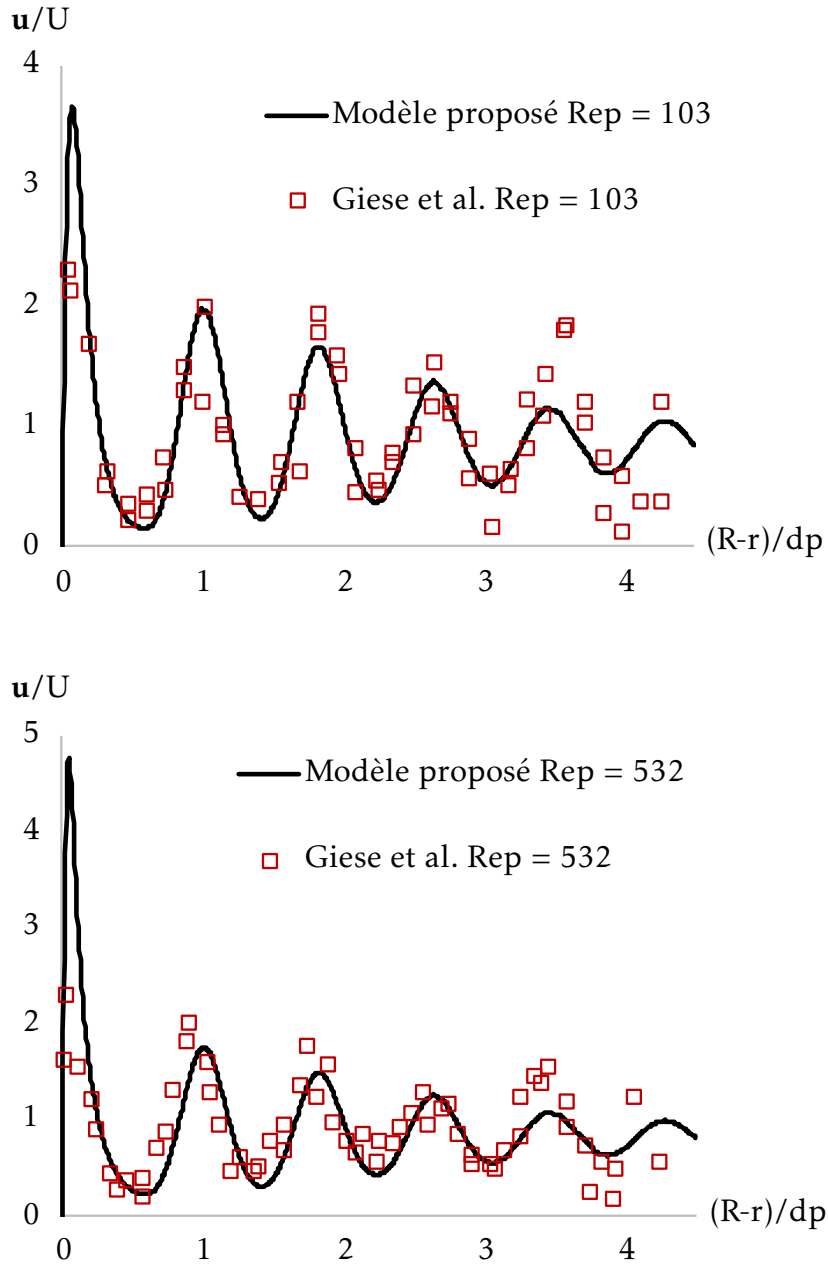


FIGURE 3.13 – Comparaison aux résultats expérimentaux dans Giese et al. [46] pour  $Re_p = 103$  et  $Re_p = 532$ .

sur OpenFoam dans le cas d'une hétérogénéité radiale du milieu poreux.

### 3.3.5 Résultats quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé

De façon identique à la section 3.2.3, des simulations numériques ont été réalisées avec le modèle proposé en considérant comme étant négligeables les termes avec des gradients

de porosité. Dans ce cas,  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  est l'équation (3.8). Les écarts de vitesses trouvés entre l'utilisation des deux modèles sont calculés de la façon suivante :

$$\delta \mathbf{u} = |\mathbf{u}|_{Original} - |\mathbf{u}|_{Classique} \quad (3.12)$$

Les valeurs de  $\delta \mathbf{u}$  et  $|\delta \mathbf{u}|$  sont présentés sur la Figure 3.14 et  $|\mathbf{u}|_{Original}$  est produit quand  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  est l'équation (2.63). Les écarts sont de moins en moins prononcés à mesure que le nombre de Reynolds augmente, comme le montrent les différents ordres de grandeur des ordonnées. Les pourcentages d'erreurs entre les points expérimentaux et les résultats de chaque modèle sont donnés sur la Figure 3.15. Le calcul utilisé pour trouver les pourcentages est :

$$\text{Pourcentage (\%)} = \frac{|\text{Point expérimental} - \text{Point du modèle}|}{\text{Point expérimental}} \times 100. \quad (3.13)$$

Les différences de pourcentages obtenus entre les deux modèles sont également illustrées sur la Figure 3.15. Le calcul utilisé est :

$$\text{Différence (\%)} = |(\%) \text{ obtenu avec le modèle Original} - (\%) \text{ obtenu avec le modèle Classique}|. \quad (3.14)$$

De façon identique à l'observation réalisée pour la Figure 3.14, les différences de pourcentages entre l'utilisation de l'un ou de l'autre modèle diminuent à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Ceci est illustré par les différents ordres de grandeur des ordonnées.

Il y a quatre points expérimentaux qui ont été retirés des résultats présentés sur la Figure 3.15, car les valeurs de vitesses mesurées dans [46] sont proches de 0 or les résultats numériques calculés en sont éloignés ce qui produit des valeurs de pourcentages élevées (> 200%). Ces points sont présentés dans le tableau 3.3 avec les calculs correspondants.

Tableau 3.3 – Points expérimentaux retirés de l'analyse des résultats.

$Re_p$	$(R - r)/d_p$	$\mathbf{u}/U$ [46]	$\mathbf{u}_{Original}/U$ (%)	$\mathbf{u}_{Classique}/U$ (%)	Différence (%)
77	3,175	0,017	0,566 (3298%)	0,572 (3335%)	37%
103	3,060	0,159	0,504 (217%)	0,510 (221%)	4%
103	3,985	0,125	0,704 (464%)	0,708 (467%)	4%
532	3,916	0,168	0,639 (281%)	0,641 (282%)	1%

### 3.3.6 Comparaisons avec des résultats produits par deux modèles de Darcy-Brinkman-Forchheimer classiques de la littérature

L'objectif est de comparer les résultats produits avec le modèle d'écoulement de fluide proposé au chapitre 2 avec les résultats produits en utilisant des modèles d'écoulement de fluide classiques de la littérature, dans une configuration où le milieu poreux est hétérogène. Dans cette étude du *channelling*, la variation de la porosité du milieu poreux est modélisée par une fonction exponentielle. Cette fonction exponentielle est une approximation de la fonction oscillatoire de porosité et est utilisée quand les oscillations sont considérées comme étant négligeables.

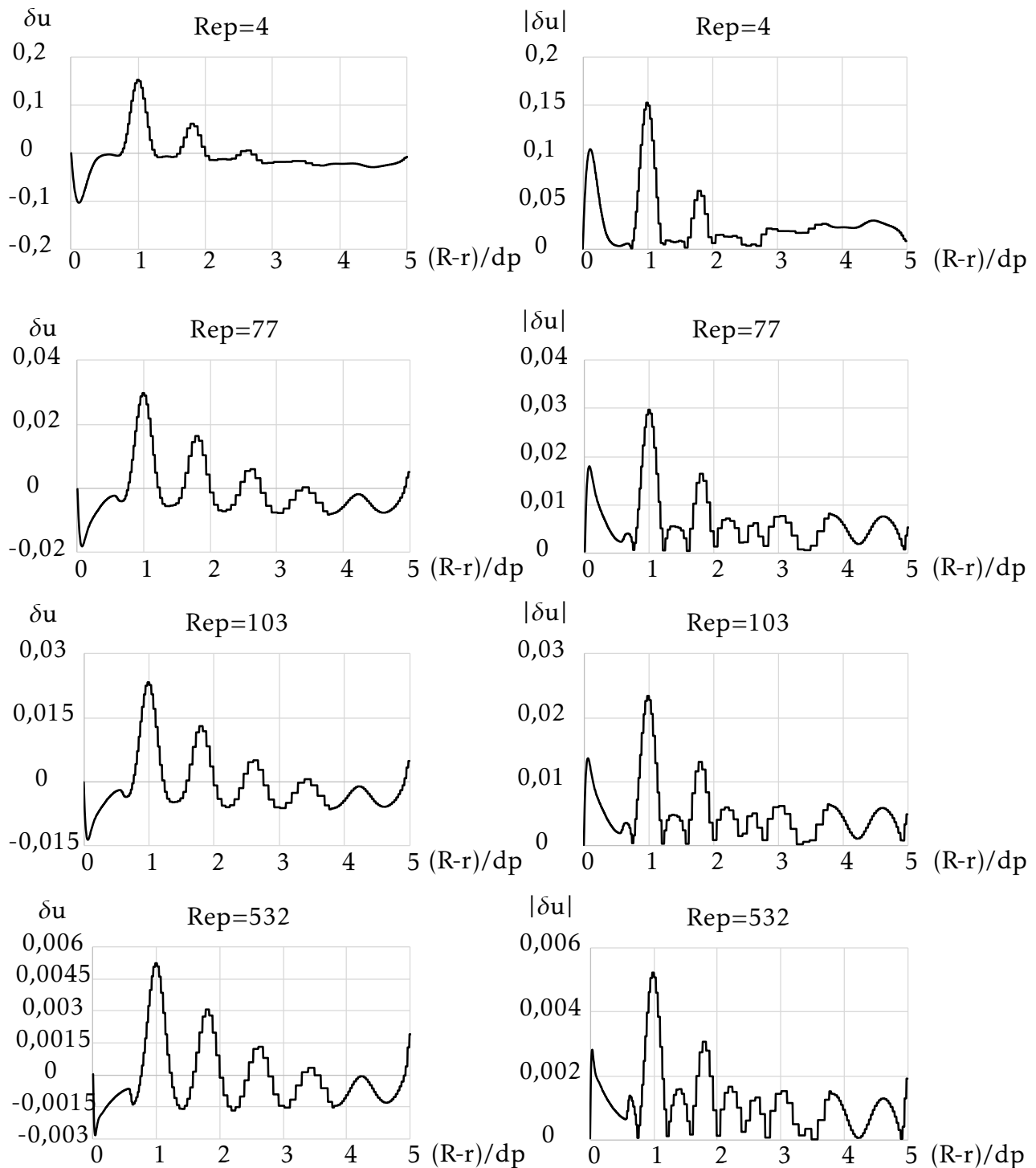


FIGURE 3.14 – Écarts de vitesses entre le modèle Original (2.63) et le modèle Classique (3.8) pour  $Re_p = \{4; 77; 103; 532\}$ .

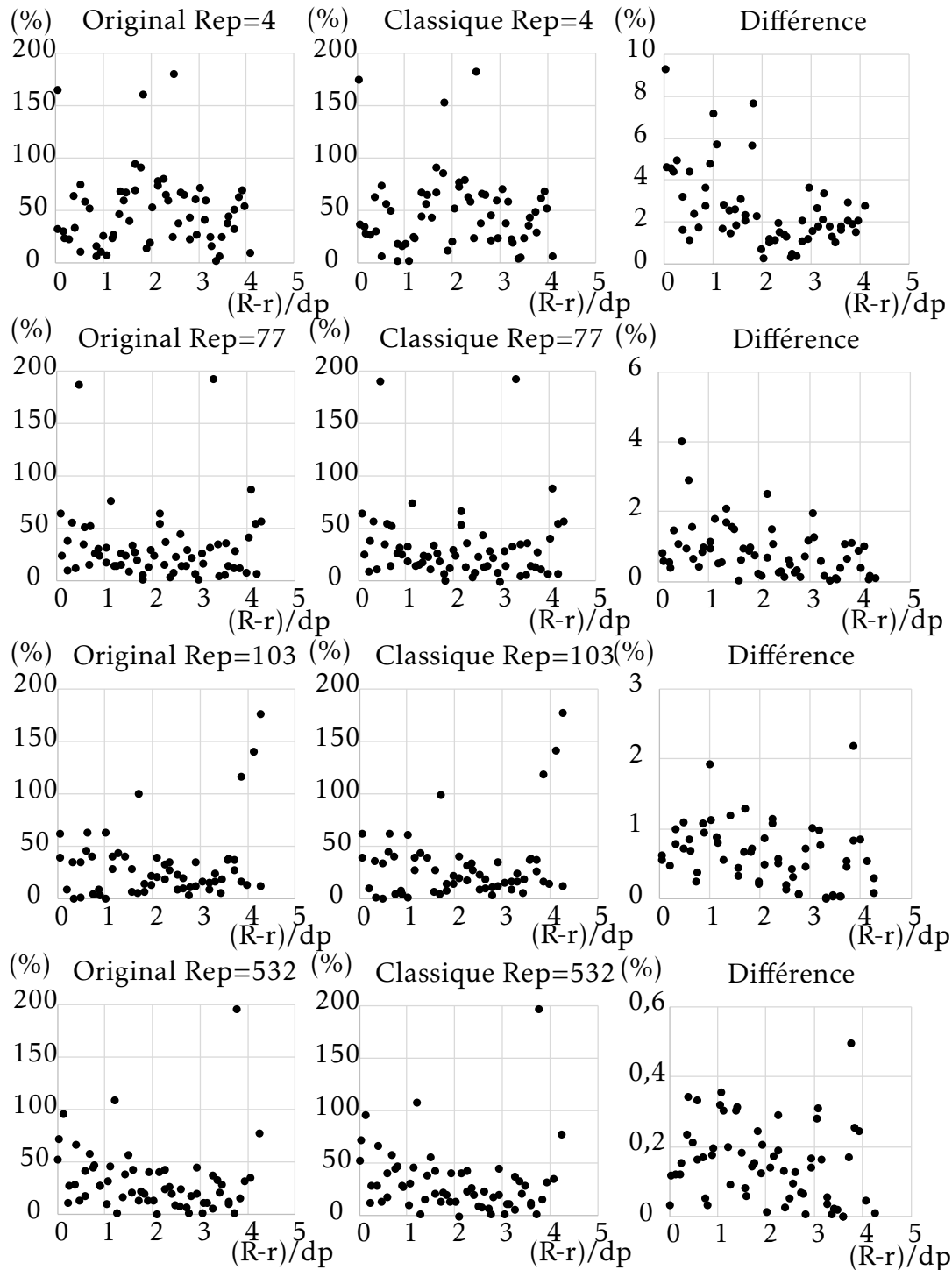


FIGURE 3.15 – Pourcentages d’erreurs (%) entre les points expérimentaux et les résultats du modèle Original (2.63) et du modèle Classique (3.8) pour  $Re_p = \{4; 77; 103; 532\}$ .

## Variation exponentielle de la porosité

J'utilise l'équation qui se trouve dans [71, p.27, Eq.(1.26)] pour modéliser la variation de porosité. En prenant en compte les dimensions de la géométrie et pour une variation de la porosité sur les directions  $x$  et  $y$  (direction radiale  $R$ ), on a :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + C \exp\left(-N(5 - (x^2 + y^2)^{1/2})\right) \right], \quad (3.15)$$

où je choisis les valeurs des paramètres suivants :  $\varepsilon_0 = 0,4$ ,  $C = 1,4$  et  $N = 5$ .

## Équations de bilan de la quantité de mouvement de fluide

Trois équations différentes de bilan de la quantité de mouvement de fluide  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  en milieu poreux vont être comparées. Comme indiqué dans la section 3.3.2, deux de ces équations sont issues de la littérature, elles sont présentées comme étant les modèles (A) et (B) qui sont décrits par la suite.

— Le modèle (A) provient de [106, eq. (14)] :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{\varepsilon} \langle (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \rangle \\ & = -\nabla \langle p \rangle^f + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \langle \mathbf{V} \rangle - \frac{\mu}{\mathbf{k}} \langle \mathbf{V} \rangle - \rho c_F \varepsilon \mathbf{k}^{-1/2} [\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \langle \mathbf{V} \rangle] \frac{\mathbf{V}_p}{|\mathbf{V}_p|}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les crochets  $\langle \bullet \rangle$  désignent une quantité moyenne sur le volume d'un E.V.R.. L'équation (3.16) a connu différentes écritures au cours du temps. Dans [103, Eq. (3)], on a  $\mathbf{V}_p = \langle \mathbf{V} \rangle$ . Dans [104, Eq. (1)], les vitesses dans le terme de Forchheimer sont réécrites comme suit :  $[\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \langle \mathbf{V} \rangle] \frac{\mathbf{V}_p}{|\mathbf{V}_p|} = \langle \mathbf{V} \rangle^2$ . Je choisis d'écrire le terme de Forchheimer de façon identique à la forme présentée dans [105, eq. (1)] :

$$[\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \langle \mathbf{V} \rangle] \frac{\mathbf{V}_p}{|\mathbf{V}_p|} = |\langle \mathbf{V} \rangle| \langle \mathbf{V} \rangle. \quad (3.17)$$

Le terme de convection dans l'équation (3.16) ne fait pas intervenir uniquement des quantités moyennes  $\langle \mathbf{V} \rangle$ , il doit donc être réécrit. Je choisis la forme d'écriture qui se trouve dans <sup>3</sup> [2, eq. (2) et (3)], on a alors :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \langle (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \rangle = \frac{\rho}{\varepsilon^2} (\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{V} \rangle. \quad (3.18)$$

La forme finale du modèle (A) utilisée pour les comparaisons avec les notations du chapitre 2 est :

$$\boxed{\frac{\rho}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p^f + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \rho c_F \varepsilon \mathbf{k}^{-1/2} |\mathbf{u}| \mathbf{u}.} \quad (3.19)$$

— Le modèle (B) provient de [61, eq. (31)] et [75, eq. (6)] :

$$\boxed{\frac{\rho}{\varepsilon} \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right] = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla (\varepsilon p^f) + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \rho c_F \mathbf{k}^{-1/2} |\mathbf{u}| \mathbf{u}.} \quad (3.20)$$

3. Cette référence est choisie, car la temporalité de publication de cette référence est proche de la temporalité de ces travaux de thèse et on trouve le même auteur dans [2] et [106].



— Le modèle (C) provient du chapitre 2, c'est l'équation (2.36) que je réécris ici, après l'avoir divisée par la porosité  $\varepsilon$  afin d'harmoniser les écritures avec les équations (3.19) et (3.20) :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) &= -\nabla(p^f) + \frac{\mu}{\varepsilon} \left( \varepsilon \Delta \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ -\frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \rho c_F \mathbf{k}^{-1/2} |\mathbf{u}| \mathbf{u}. \end{aligned}} \quad (3.21)$$

Suite à l'écriture des trois équations (3.19), (3.20) et (3.21), on observe les points suivants :

1. le modèle (A) de l'équation (3.19), écrit avec les hypothèses considérées, a un coefficient de porosité supplémentaire dans le terme de Forchheimer (on gardera à l'esprit que cette différence d'écriture peut être due à la définition du coefficient de Forchheimer  $c_F$ ),
2. les modèles (A), (B) et (C) ont le même terme de Darcy,
3. le modèle (C) de l'équation (3.21) contient plusieurs termes de correction de Brinkman,
4. le modèle (B) de l'équation (3.20) a un terme de pression qui peut se voir comme une moyenne sur le volume d'un E.V.R.,
5. le modèle (A) de l'équation (3.19) contient un terme de convection qui est différent de celui des deux autres modèles.

Pour obtenir les trois équations (3.19), (3.20) et (3.21) dans une forme sans dimension, la même procédure que celle présentée dans les sections 1.4.2 et 2.3.3 est utilisée. On obtient respectivement les trois équations suivantes qui seront utilisées dans les simulations numériques :

Modèle (A) :

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\beta (1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} + \beta^{1/2} \frac{c_F \varepsilon (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \mathbf{0}.} \quad (3.22)$$

Modèle (B) :

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla (\varepsilon p^f) - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\beta (1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} + \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \mathbf{0}.} \quad (3.23)$$

Modèle (C) :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \\ + \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \right) \cdot \nabla \varepsilon \\ + \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \mathbf{u} \Delta \varepsilon - \frac{2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} |\nabla \varepsilon|^2 + \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} \\ + \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{aligned}} \quad (3.24)$$

Dans le fluide, et donc pour  $\varepsilon = 1$ , les trois équations  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$ , à savoir (3.22), (3.23) et (3.24) permettent de retrouver l'équation de Navier-Stokes. Dans un milieu poreux, les trois équations  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p^f)$  sont différentes.

### Influence de la taille du maillage

Le maillage utilisé est de type O-grid et ce dernier a été présenté à la Figure 3.10. Ce maillage se compose d'une zone centrale et d'une zone périphérique. Le maillage retenu pour les simulations numériques comporte environ 10 millions de cellules. Cette valeur a été trouvée après une étude de l'influence des résultats par rapport à la taille du maillage. Un raffinement minimal de la géométrie pour la résolution du problème avec les équations (3.22) et (3.23) a été nécessaire. En effet, en dessous de 10 millions de cellules, le code de calcul utilisé n'a pas permis d'atteindre les critères d'arrêt qui portent sur des résidus de calculs inférieurs à  $1.10^{-6}$  pour la pression et  $1.10^{-5}$  pour la vitesse. Le maillage retenu que j'appelle M1 correspond à (80/160/160) et (80/80/160) éléments respectivement pour la zone centrale et la zone périphérique pour les directions (x/y/z).

L'influence d'un raffinement supplémentaire du maillage sur les résultats est présentée. J'appelle M2 un maillage plus fin trouvé en multipliant par deux la discrétisation dans les directions (x/y), c'est-à-dire dans la direction radiale. Le maillage M2 se compose de (160/320) et (160/160) éléments sur les directions (x/y) et contient environ 40 millions de cellules. Je choisis trois valeurs du nombre de Reynolds  $Re_p \in \{0, 1; 20; 200\}$  et j'utilise les deux critères de comparaison suivants pour étudier l'influence de la taille du maillage :

- la vitesse maximale  $\mathbf{u}_{max}$ ,
- la vitesse au centre du cylindre  $\mathbf{u}_{center}$  ( $x=0/y=0/z=50$ ).

Ces deux valeurs de vitesses ( $\mathbf{u}_{max}$  et  $\mathbf{u}_{center}$ ) sont obtenues par une interpolation linéaire des normes de vitesse à la sortie du cylindre et sont présentées dans les tableaux 3.4 et 3.5. Les pourcentages représentent des taux de variation, ils sont calculés de la façon suivante :

$$\text{Pourcentage (\%)} = \frac{\text{Valeur pour le maillage M2} - \text{Valeur pour le maillage M1}}{\text{Valeur pour le maillage M1}} \times 100. \quad (3.25)$$

Le maillage M2 qui est plus fin produit des taux de variation inférieurs à 6%. Je considère donc le maillage M1 comme étant satisfaisant. De plus, les pourcentages d'écart obtenus lors du raffinement du maillage sont toujours du même ordre de grandeur entre les différents modèles (A), (B) et (C) pour un nombre de Reynolds donné, on l'observe en se déplaçant horizontalement dans les tableaux 3.4 et 3.5.

Tableau 3.4 – Effet de la taille du maillage sur les valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  pour les modèles (A), (B) et (C).

$Re_p$	$\mathbf{u}_{max}$ (A) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (A) M2	$\mathbf{u}_{max}$ (B) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (B) M2	$\mathbf{u}_{max}$ (C) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (C) M2
0,1	3,61	3,41 (-5,6%)	2,67	2,52 (-5,4%)	3,50	3,31 (-5,4%)
20	3,12	2,99 (-4,1%)	2,37	2,28 (-3,8%)	3,13	3,01 (-3,8%)
200	2,711	2,66 (-2,1%)	2,48	2,43 (-2,0%)	3,39	3,32 (-2,2%)

Tableau 3.5 – Effet de la taille du maillage sur les valeurs de  $\mathbf{u}_{center}/U$  pour les modèles (A), (B) et (C).

$Re_p$	$\mathbf{u}_{center}$ (A) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (A) M2	$\mathbf{u}_{center}$ (B) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (B) M2	$\mathbf{u}_{center}$ (C) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (C) M2
0,1	0,64	0,67 (+3,6%)	0,76	0,78 (+2,7%)	0,66	0,68 (+3,3%)
20	0,72	0,73 (+1,9%)	0,82	0,83 (+1,4%)	0,73	0,75 (+1,6%)
200	0,82	0,82 (+0,5%)	0,85	0,86 (+0,4%)	0,78	0,78 (+0,5%)

## Résultats

Comme pour l'étude de l'influence de la taille du maillage, les normes de vitesse à la sortie du cylindre sont interpolées linéairement afin de déterminer les vitesses maximales  $\mathbf{u}_{max}$  ainsi que les vitesses au centre de la géométrie  $\mathbf{u}_{center}$ . Ces vitesses sont relevées et retenues comme critères de comparaisons entre les modèles (A), (B) et (C). Je rappelle pour l'interprétation des résultats que les vitesses sont présentées dans une forme sans dimension et la vitesse de référence est la vitesse à l'entrée de la géométrie  $U = \mathbf{u}_{in} = 1$ . Plusieurs valeurs du nombre de Reynolds  $Re_p$  sont étudiées dans l'intervalle ]0; 250[ afin de couvrir différents régimes d'écoulement de fluide en milieu poreux à savoir, le régime de Darcy, le régime inertiel et le régime transitoire (voir section 1.5.5). Les résultats sont présentés à la Figure 3.16. Les résultats catégorisés par régime d'écoulement de fluide sont donnés sur la Figure 3.17. Plusieurs observations peuvent être faites :

- Les valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  sont comprises entre 2,2 et 3,8. Le modèle (B) présente toujours les plus faibles valeurs de vitesses maximales à la sortie du milieu poreux.
- Les valeurs de  $\mathbf{u}_{center}/U$  sont comprises entre 0,6 et 0,9. Le modèle (B) présente toujours les plus fortes valeurs de vitesses au centre du domaine poreux à la sortie du milieu poreux, mais les écarts entre les trois modèles sont faibles.
- Les modèles (B) et (C) donnent des valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  et  $\mathbf{u}_{center}/U$  qui ont toujours les mêmes allures en fonction du nombre de Reynolds.
- Dans le régime inertiel (Figure 3.17), le modèle (A) présente une variation de  $\mathbf{u}_{max}/U$  décroissante.

En plus de ces observations, les vitesses maximales sont trouvées pour une distance par rapport à la paroi comprise entre  $0,07d_p$  et  $0,17d_p$  et cette valeur diminue à mesure que le nombre de Reynolds  $Re_p$  augmente.

## Ajustement de l'écriture des modèles (A) et (B)

Dans l'ensemble, les résultats obtenus avec chacun des modèles d'écoulement de fluide (A), (B) ou (C) sont proches. Toutefois, on peut se demander si les différences observées dans les résultats ne sont pas dues à l'écriture de certains termes. Pour cela, un ajustement de l'écriture des modèles (A) et (B) est proposé en fonction des observations trouvées dans la littérature et présentées par la suite. L'ajustement de l'écriture du modèle (A) est motivé par l'explication du régime inertiel. En effet, du point de vue de la physique, l'augmentation du nombre de Reynolds correspond à l'augmentation des forces inertielles. Il est précisé dans [39] qu'à mesure que le nombre de Reynolds  $Re_p$  prend des valeurs élevées, une réduction de l'épaisseur de la couche limite à la paroi est attendue et par conséquent, une augmentation des

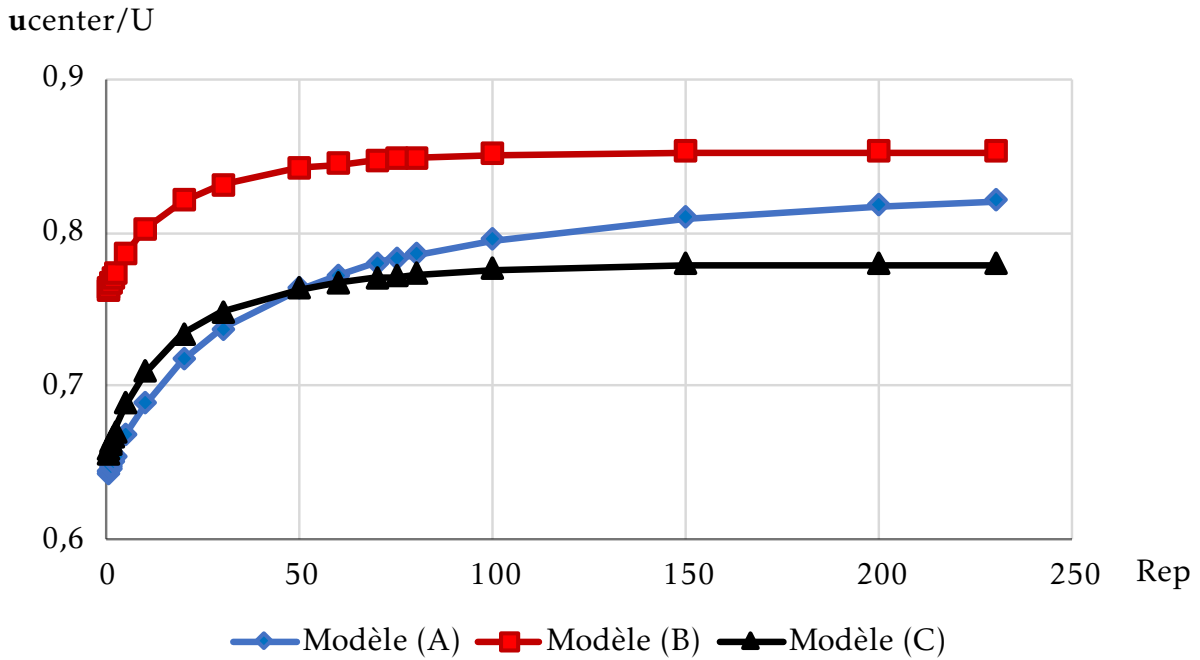
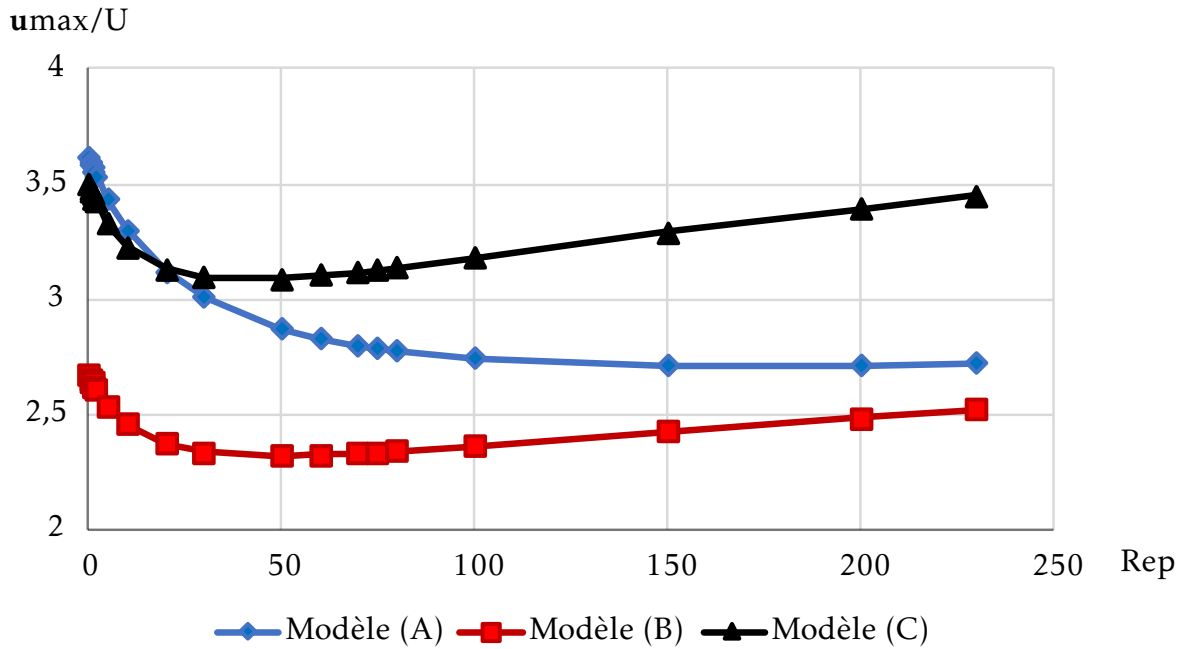


FIGURE 3.16 – Valeurs de  $u_{max}/U$  (en haut) et  $u_{center}/U$  (en bas) obtenues à la sortie du cylindre avec les modèles (A), (B) et (C) en fonction du nombre de Reynolds  $Re_p$ .

vitesse maximale à proximité de la paroi est également attendue. Dans [106], il est expliqué que les gradients de vitesse proche de la paroi sont voués à augmenter et que les effets de bords sont amplifiés à mesure que l'inertie augmente. Dans les résultats, une variation

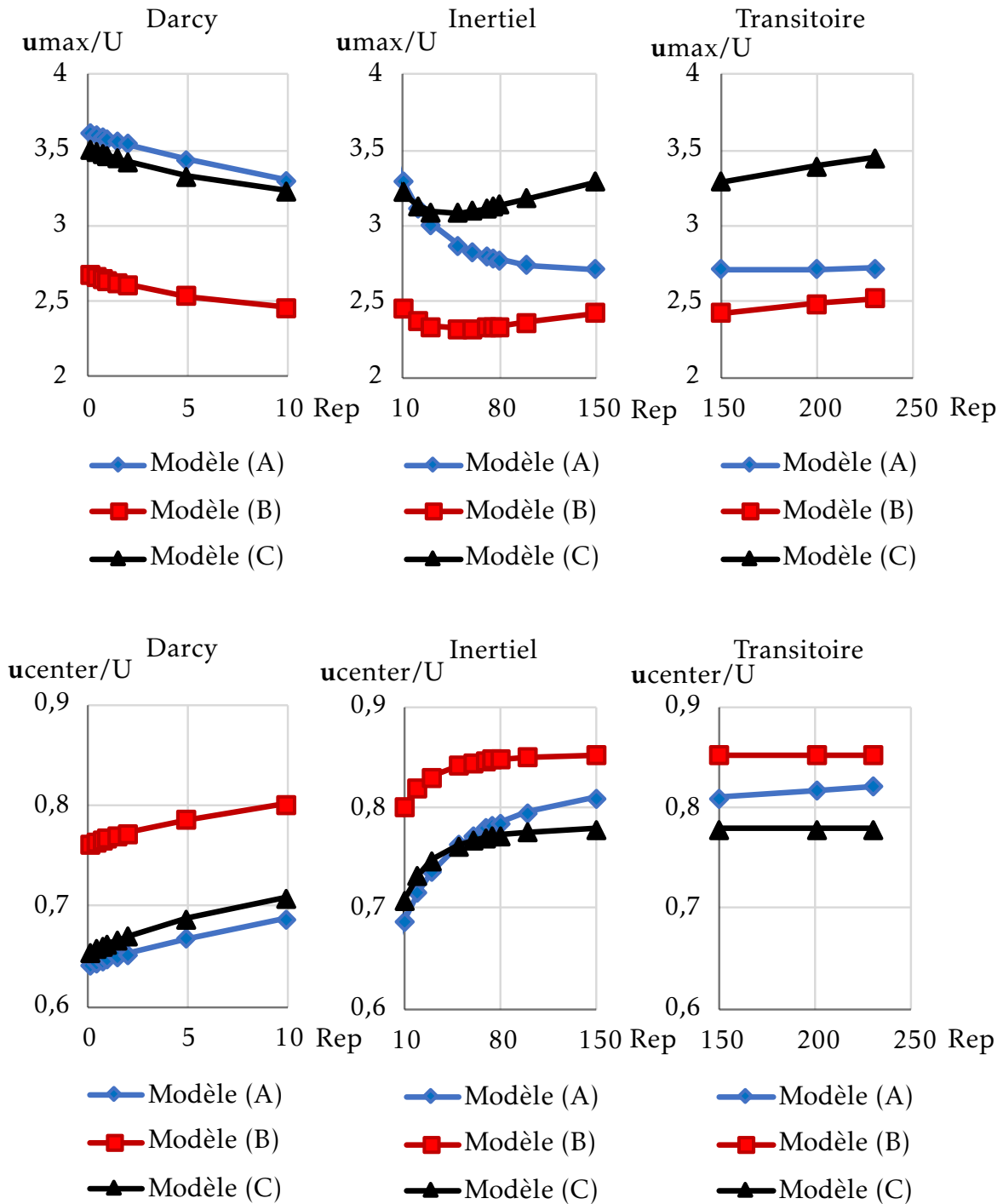


FIGURE 3.17 – Catégorisation des valeurs de vitesses par régime d'écoulement de fluide.

décroissante de  $u_{max}/U$  a été obtenue avec le modèle (A) dans le régime inertiel et cela peut s'expliquer par le coefficient de porosité supplémentaire dans le terme de Forchheimer. En effet, on observe occasionnellement un facteur supplémentaire de porosité dans le terme de Forchheimer [72]. Je propose donc d'enlever le facteur de porosité  $\varepsilon$  qui se trouve dans le

terme de Forchheimer du modèle (A) pour obtenir un modèle que je nomme (A2).

L'ajustement de l'écriture du modèle (B) est motivé par l'utilisation d'une pression moyenne sur le volume de fluide dans l'E.V.R., car c'est la pression lue sur un manomètre. On peut se demander si l'écart entre le modèle (B) et le modèle (C) qui semble constant (autour de  $0,8 \mathbf{u}_{max}/U$  et  $0,1 \mathbf{u}_{center}/U$ ) pour chaque  $Re_p$  ne serait pas dû à l'écriture du terme de pression. Je propose d'écrire le terme de pression  $\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\varepsilon p^f)$  sous la forme  $\nabla p^f$  dans le modèle (B) pour obtenir un modèle que je nomme (B2). Les équations finalement obtenues sont les suivantes :

Modèle (A2) :

$$\frac{\rho}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p^f + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \rho c_F \mathbf{k}^{-1/2} |\mathbf{u}| \mathbf{u}, \quad (3.26)$$

Modèle (B2) :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right] = -\nabla p^f + \frac{\mu}{\varepsilon} \Delta \mathbf{u} - \frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} - \rho c_F \mathbf{k}^{-1/2} |\mathbf{u}| \mathbf{u}. \quad (3.27)$$

L'avantage de ces modifications est que, les formulations des trois modèles (A2), (B2) et (C) respectivement des équations (3.26), (3.27) et (3.21) sont maintenant identiques pour un milieu poreux à porosité constante.

### Influence de la taille du maillage sur les résultats produits par les modèles (A2) et (B2)

Tableau 3.6 – Effet de la taille du maillage sur les valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  pour les modèles (A2), (B2) et (C).

$Re_p$	$\mathbf{u}_{max}$ (C) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (C) M2	$\mathbf{u}_{max}$ (A2) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (A2) M2	$\mathbf{u}_{max}$ (B2) M1	$\mathbf{u}_{max}$ (B2) M2
0,1	3,50	3,31 (-5,4%)	3,61	3,41 (-5,6%)	3,61	3,41 (-5,6%)
20	3,13	3,01 (-3,8%)	3,18	3,06 (-3,8%)	3,18	3,06 (-3,8%)
200	3,39	3,32 (-2,2%)	3,41	3,34 (-2,2%)	3,41	3,34 (-2,2%)

Tableau 3.7 – Effet de la taille du maillage sur les valeurs de  $\mathbf{u}_{center}/U$  pour les modèles (A2), (B2) et (C).

$Re_p$	$\mathbf{u}_{center}$ (C) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (C) M2	$\mathbf{u}_{center}$ (A2) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (A2) M2	$\mathbf{u}_{center}$ (B2) M1	$\mathbf{u}_{center}$ (B2) M2
0,1	0,66	0,68 (+3,3%)	0,64	0,67 (+3,6%)	0,64	0,67 (+3,6%)
20	0,73	0,75 (+1,6%)	0,73	0,74 (+1,6%)	0,73	0,74 (+1,6%)
200	0,78	0,78 (+0,5%)	0,78	0,78 (+0,5%)	0,78	0,78 (+0,5%)

Une étude de l'influence de la taille du maillage sur les modèles (A2) et (B2) a également été menée. Comme illustré dans les tableaux 3.6 et 3.7, cette étude amène les mêmes conclusions qu'avec les modèles (A) et (B) de la section 3.3.6. Le maillage M1 est donc considéré comme étant satisfaisant.

### Résultats après ajustement de l'écriture des modèles (A) et (B)

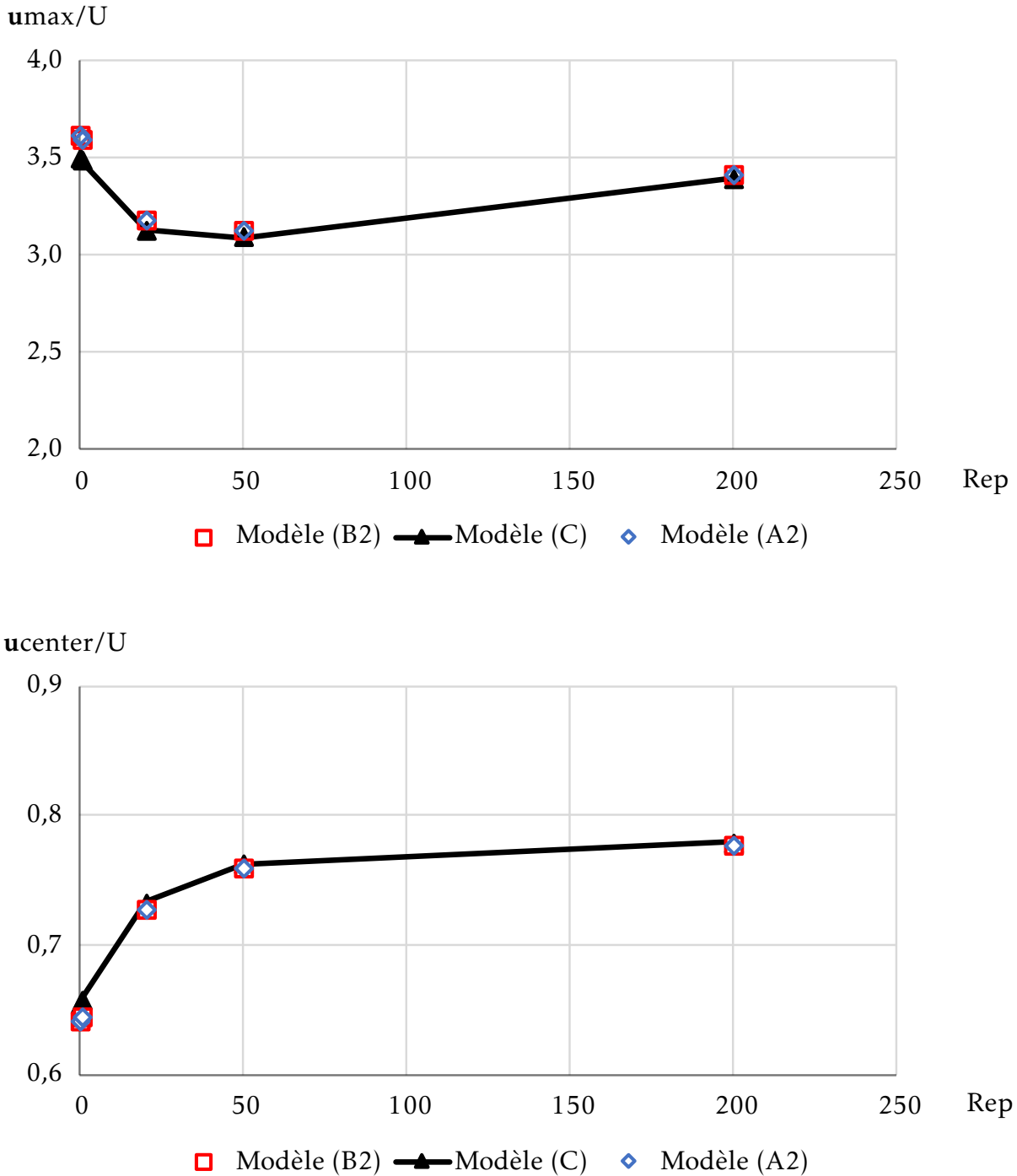


FIGURE 3.18 – Valeurs de  $u_{max}/U$  (en haut) et  $u_{center}/U$  (en bas) obtenues à la sortie du cylindre avec les modèles (A2), (B2) et (C) en fonction du nombre de Reynolds  $Re_p$ .

Des simulations numériques ont été réalisées avec les modèles (A2) et (B2), dans les

mêmes conditions qu’avec les modèles (A), (B) et (C). Les résultats sont présentés à la Figure 3.18. Deux tableaux (3.8 et 3.9) avec les valeurs  $\mathbf{u}_{max}/U$  et  $\mathbf{u}_{center}/U$  sont également fournis pour les modèles (A2), (B2) et (C), car maintenant les valeurs obtenues avec chaque modèle sont très proches. La différence d’écriture entre les modèles (A2) et (B2) porte sur le terme de convection et à ce sujet, on peut lire dans [72] qu’en général l’inclusion de ce terme a peu de conséquences sur la résolution numérique du problème d’écoulement de fluide en milieu poreux. Les résultats présentés ici montrent donc que l’écriture du terme de convection a peu d’influence sur la vitesse maximale et la vitesse au centre d’un milieu poreux dans le cas d’une variation de la porosité de forme exponentielle. Les résultats produits par les modèles (A2) et (B2) présentent uniquement une différence sur la dernière ligne du tableau 3.8, quand le nombre de Reynolds est grand ( $Re_p = 200$ ).

Sur la Figure 3.18, la vitesse maximale obtenue pour  $Re_p = 10$  est supérieure à la vitesse maximale obtenue pour  $Re_p = 100$ . Cette observation est appuyée par les résultats dans [22]. En effet, dans [22], les valeurs des vitesses sont données pour  $Re_p = 10$  et  $Re_p = 100$  pour un fluide newtonien et incompressible qui s’écoule en convection forcée dans un canal rectangulaire et où la porosité varie de façon exponentielle. Il semble donc que dans le régime inertiel ( $10 < Re_p < 150$ ) [110], pour une variation de porosité de forme exponentielle, les valeurs des vitesses maximales diminuent jusqu’à environ  $Re_p = 50$  et puis augmentent par la suite.

En conclusion, l’étude de la variation de porosité de forme exponentielle a permis d’envisager un ajustement des écritures des modèles classiques (A) et (B). Une fois cet ajustement réalisé, les valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  et  $\mathbf{u}_{center}/U$  obtenues avec les trois modèles comparés (A2), (B2) et (C) deviennent très proches (voir Figure 3.18). Le cas du *channelling* a finalement permis de reproduire des résultats expérimentaux (objectif 1) et de comparer les résultats à ceux obtenus avec des modèles classiques de la littérature (objectif 2).

Tableau 3.8 – Valeurs de  $\mathbf{u}_{max}/U$  avec les modèles (A2), (B2) et (C).

$Re_p$	(A2)	(B2)	(C)
0,1	3,612	3,612	3,502
0,5	3,590	3,590	3,484
20,0	3,182	3,182	3,130
50,0	3,122	3,122	3,089
200,0	3,409	3,413	3,394

Tableau 3.9 – Valeurs de  $\mathbf{u}_{center}/U$  avec les modèles (A2), (B2) et (C).

$Re_p$	(A2)	(B2)	(C)
0,1	0,642	0,642	0,655
0,5	0,646	0,646	0,659
20,0	0,728	0,728	0,734
50,0	0,760	0,760	0,763
200,0	0,778	0,778	0,779



### 3.4 Conclusion du chapitre

Deux cas d'applications ont été étudiés dans ce chapitre :

1. le cas du bouchon poreux, qui a permis de retrouver des résultats de simulations numériques de vitesses de fluide issus de ([16, 35]),
2. le cas du *channelling* qui est un cas problématique de la notion d'E.V.R. [71] et qui a permis de retrouver des résultats expérimentaux de vitesses de fluide issus de [46].

Ces deux cas d'applications montrent également un bon fonctionnement de la méthode de résolution numérique mise en œuvre sur OpenFoam pour :

- un domaine composé entièrement de fluide (cas 1),
- un milieu poreux à porosité constante (cas 1),
- une transition entre les deux domaines fluides et poreux (cas 1),
- une situation d'hétérogénéité radiale du milieu poreux (cas 2).

Des résultats de simulations numériques ont été donnés quand les gradients de porosité sont négligés dans le modèle proposé. Le cas du bouchon poreux a montré que d'une part, l'influence de ces termes se limite aux zones de transitions, là où la porosité est variable. D'autre part, l'influence de ces termes dépend du nombre de Darcy du milieu poreux, car plus le nombre de Darcy est grand, ici de  $10^{-5}$  à  $10^{-2}$ , plus il existe des écarts sur les normes des vitesses. Le cas du *channelling* a quant à lui montré que les écarts sur les vitesses de fluide calculées avec la présence ou l'absence de ces termes sont de moins en moins prononcés à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Enfin, les résultats produits par deux modèles de Darcy-Brinkman-Forchheimer classiques de la littérature et qui ont été utilisés pour le *channelling* ont été comparés aux résultats produits par le modèle proposé dans le chapitre 2. Des différences dans les résultats obtenus ont été observées pour les vitesses maximales et les vitesses au centre d'un cylindre contenant un milieu poreux et où la porosité varie de façon exponentielle. Ces vitesses ont été trouvées par interpolation linéaire à la sortie du cylindre. Les différences dans les valeurs des normes des vitesses sont dues à l'écriture du terme de pression et du terme de Forchheimer. En ajustant les écritures des deux modèles classiques (écritures qui peuvent varier en fonction des définitions des différents coefficients tels que le coefficient de Forchheimer) suivant les observations trouvées dans la littérature, les résultats finalement obtenus sont les mêmes qu'avec le modèle proposé. Par la suite, le modèle d'écoulement de fluide proposé dans le chapitre 2 est utilisé dans une méthode d'optimisation topologique.

# Chapitre 4

## Optimisation topologique d'un écoulement de fluide pour trouver une répartition optimisée de matériaux poreux

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Rappel du contexte et particularités des travaux</b>	<b>90</b>
<b>4.3</b>	<b>Problème d'optimisation topologique</b>	<b>93</b>
4.3.1	Approche générale	93
4.3.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	94
4.3.3	Algorithme d'optimisation	97
<b>4.4</b>	<b>Configurations et paramètres étudiés</b>	<b>98</b>
4.4.1	Fonction objectif	98
4.4.2	Géométries, paramètres physiques et numériques	99
4.4.3	Modèles d'écoulement de fluide	99
4.4.4	Matériaux poreux	103
4.4.5	Valeurs du pas de descente	104
<b>4.5</b>	<b>Résultats et discussions</b>	<b>104</b>
4.5.1	Influence de la modélisation de l'ajout de matière et du pas de descente	104
4.5.2	Convergence de l'algorithme d'optimisation et influence de la taille du maillage sur les formes optimisées	109
4.5.3	Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour un nombre de Darcy constant proche d'un solide	112
4.5.4	Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour différentes valeurs du nombre de Darcy	119
4.5.5	Influence du choix du modèle d'écoulement de fluide	128
<b>4.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>130</b>

---

## 4.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre contient une optimisation topologique d'un écoulement de fluide avec l'approche basée sur la densité de matière. Je considère que l'écoulement se déroule dans un milieu poreux hétérogène et le modèle d'écoulement proposé dans le chapitre 2 est utilisé. Une répartition optimisée de matériaux poreux est recherchée et la modification de la répartition des matériaux poreux est prise en compte avec le modèle utilisé. L'approche est originale dans la mesure où la variable de conception agit sur la porosité locale et non la perméabilité locale comme habituellement vue dans la littérature. Dans un premier temps, le contexte et les particularités des travaux sont rappelés. Puis la formulation du problème d'optimisation, la méthode utilisée ainsi que l'algorithme de résolution sont présentés. Enfin, les configurations et paramètres étudiés sont introduits et les résultats sont analysés. La fonction objectif vise à minimiser les pertes de charge à l'intérieur de deux géométries qui proviennent de la littérature. Ce chapitre se termine par une conclusion.

## 4.2 Rappel du contexte et particularités des travaux

L'optimisation topologique pour un problème d'écoulement de fluide vise généralement à trouver une répartition optimisée de matière solide pleine. Le but est habituellement d'obtenir un système binaire fluide solide. La méthode la plus utilisée pour localiser les zones solides est celle basée sur la densité de matière [5, 45, 87, 88, 93] qui consiste à pénaliser la vitesse dans les zones solides pour la rendre assez faible. Il s'agit de trouver les valeurs des propriétés effectives du fluide et de la matière recherchée grâce à la valeur d'une variable de conception. Cette dernière peut s'interpréter comme étant la densité de matière [93] ou la porosité [17]. Le terme de pénalisation placé dans l'équation de Stokes ou de Navier-Stokes a la signification de l'inverse d'une perméabilité scalaire. Habituellement, cette perméabilité est une fonction localement définie qui dépend d'une variable dite de conception, on parle également d'une fonction dite de contrôle, généralement notée  $\alpha$  [45]. On a alors :

$$\text{Terme de pénalisation} = \frac{\mu}{\mathbf{k}} \mathbf{u} = \frac{\mu}{K(\alpha)} \mathbf{u}. \quad (4.1)$$

C'est finalement les distributions des valeurs de la variable de conception  $\alpha$  à l'intérieur du domaine de calcul qui vont permettre de trouver les zones fluides et les zones solides.

Dans ce cas, la modélisation de l'écoulement concerne uniquement les zones fluides et peut se faire grâce aux équations suivantes :

Modèle d'écoulement de Stokes pénalisé :

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{K(\alpha)} \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

Modèle d'écoulement de Navier-Stokes pénalisé eq. (1.16) :

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{K(\alpha)} \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

Dans cette thèse, je m'intéresse à une répartition de matériaux poreux et non de matière solide pleine. Il y a ainsi des difficultés qui se présentent pour la modélisation de l'écoulement. En effet, cette modélisation doit être valide dans les zones fluides et poreuses afin de

représenter correctement le processus physique qui se déroule en parallèle de la méthode d'optimisation. Le domaine de calcul composé de zones fluides et de zones poreuses peut s'observer dans son ensemble comme un environnement dans lequel se trouve un milieu poreux hétérogène. Les caractéristiques géométriques de ce milieu poreux peuvent alors varier dans l'espace et cette hétérogénéité spatiale devrait être prise en compte car elle fait partie du problème physique. De ce fait, l'objet de ces travaux consiste à trouver une répartition optimisée de matériaux poreux tout en tenant compte de l'hétérogénéité spatiale.

### Intérêts des travaux vis-à-vis de la littérature

L'optimisation topologique dans le but de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux peut se faire comme dans [6, 10, 80, 81, 99, 100, 107], mais l'hétérogénéité spatiale n'est pas explicitement considérée et des questions peuvent alors se poser sur l'approche utilisée. Ces questions s'appuient sur les hypothèses considérées pour obtenir les modèles d'écoulement de fluide que l'on trouve dans ces références. Ces références utilisent toutes une approche basée sur la densité de matière et sont discutées par la suite.

1. Dans [80], le problème étudié est la recherche de la répartition optimisée de deux matériaux poreux de perméabilité différente. La variable de conception est l'interface entre les deux matériaux et l'objectif de l'optimisation est de maximiser le taux de dissipation mécanique lors d'un écoulement de fluide. Un modèle de Darcy est utilisé et des répartitions optimisées de matières qui ne sont pas symétriques ont été observées. Ces résultats sont interprétés comme des erreurs numériques, car la configuration étudiée possède une géométrie et des conditions aux limites qui sont symétriques. Une récente discussion dans [3] s'appuie sur les résultats dans [80, Figure 4] pour indiquer que la méthode d'optimisation topologique peut donner des résultats imprécis quand les zones poreuses sont considérées.
2. Dans [6], l'étude d'un appareil à turbine de type Tesla est présentée. La modélisation de l'écoulement se fait par une équation de Navier-Stokes avec un terme de pénalisation qui rassemble les termes de Darcy et de Forchheimer. Une fonction multiobjective est utilisée pour minimiser la dissipation d'énergie et maximiser la puissance transférée par le fluide. La variable de conception agit sur la perméabilité qui se trouve dans les termes de Darcy et de Forchheimer. Le domaine de calcul est composé de zones fluides et poreuses puis les zones poreuses sont rendues solides grâce à une filtration de la valeur de  $\alpha$  et un système binaire est finalement trouvé.
3. Dans [107], un absorbeur de liquide est étudié. Ce dernier est vu comme un milieu poreux non saturé composé de trois matériaux poreux différents. Une équation de Richards est utilisée, cette dernière est analogue à un modèle de Darcy, mais pour un milieu poreux non saturé. L'objectif est de maximiser le volume de liquide absorbé grâce à la distribution des matériaux. La variable de conception est une densité qui rassemble les trois matériaux. La valeur de cette densité renseigne alors sur la présence de l'un des trois matériaux dans chacune des cellules du maillage.
4. Dans [81], l'optimisation topologique d'un écoulement de fluide en régime turbulent est étudiée. Le modèle d'écoulement de Navier-Stokes est utilisé avec un terme de pénalisation qui rassemble les termes de Darcy et de Forchheimer. La perméabilité est trouvée avec l'équation de Kozeny-Carman. La porosité est utilisée en tant que variable

de conception et apparaît dans les termes de Darcy et de Forchheimer. La fonction objectif vise à minimiser les pertes d'énergie mécanique. Une méthode adjointe est utilisée et le gradient de la fonction objectif est calculé par rapport à la valeur de la porosité. La méthode s'appelle SPAM pour *Sensitive Porosity Adjoint Method*. Les matériaux poreux trouvés avec la méthode d'optimisation sont transformés en barrières solides grâce à une filtration de la valeur de la porosité. Finalement, un système binaire est trouvé avec des valeurs de porosité égales à 0 ou à 1.

5. Dans [99, 100], l'étude d'une structure en grille abordée à une échelle macroscopique est présentée. La fonction objectif est multiobjective et vise à réduire la température sur les frontières et réduire la pression sur l'entrée. Dans [100], la fonction objectif tient également compte de la déformation de la structure à cause de la température. La variable de conception modélise la densité de distribution de la grille. Le modèle d'écoulement de fluide est un modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer (D.B.F.). La porosité et la perméabilité sont interpolées suivant les valeurs trouvées à partir de simulations numériques réalisées pour une cellule unitaire homogène de la grille. Le modèle D.B.F. dans [99, 100] ne fait pas apparaître explicitement les gradients de porosité.

Mon objectif est de donner une signification physique aux matériaux poreux obtenus après optimisation et pas à pénaliser les zones qui ne sont pas du fluide. D'après la littérature, cette démarche n'est pas évidente [3] (observation 1). De plus, le modèle de Darcy étant valide seulement pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds (section 1.5.3), le couplage entre une équation de Navier-Stokes et une équation de Darcy quand un matériau poreux est recherché peut ne pas être adapté. On trouve dans la littérature l'utilisation d'un terme de pénalisation qui rassemble les termes de Darcy et de Forchheimer, afin de tenir compte des effets inertiels (observations 2 et 4). Mon approche consiste à considérer que le mouvement de fluide se déroule dans un milieu poreux hétérogène. Le modèle d'écoulement proposé dans le chapitre 2 est ensuite utilisé. Ce modèle fait apparaître des termes de correction de Brinkman et des coefficients de porosité à l'intérieur des opérateurs différentiels et à ma connaissance, ces termes ne sont pas retrouvés dans la littérature en optimisation topologique. Enfin, bien qu'un modèle D.B.F. ait été utilisé dans la littérature (observation 5), ce dernier ne fait pas apparaître explicitement les gradients de porosité. Pour ces raisons, dans ce chapitre, j'utilise le modèle proposé dans le chapitre 2 pour trouver une répartition optimisée de matériaux poreux.

Concernant la variable de conception utilisée dans ces travaux, on trouve dans [17] qui est la première application de l'optimisation topologique pour un problème d'écoulement de fluide [5], une préconisation sur la variable de conception  $\alpha$ . Il est souhaité que cette dernière mesure la quantité relative de fluide en chaque point du domaine de calcul. L'idée est alors d'indiquer la présence de fluide quand  $\alpha$  est égale à 1 et l'absence de fluide quand elle est égale à 0. On remarque alors que cette définition de la variable de conception  $\alpha$  correspond à la définition de la porosité locale  $\varepsilon$ . C'est l'approche généralement utilisée dans la littérature où la porosité correspond à la variable de conception et permet de trouver la valeur de la perméabilité. C'est donc la perméabilité qui modélise habituellement la matière recherchée. Pour cette raison, une particularité de ces travaux est d'utiliser la porosité  $\varepsilon$  et non la perméabilité  $K$  pour définir les zones de matière au sein du fluide. On a alors :

$$\varepsilon = \varepsilon(\alpha). \quad (4.4)$$

Cette approche est possible avec un modèle d'écoulement qui fait apparaître les coefficients de porosité tel que le modèle D.B.F. ; le modèle proposé dans le chapitre 2 a pour particularité de faire apparaître explicitement les gradients de porosité  $\nabla \varepsilon$  en plus des coefficients de porosité. Ces gradients vont être retrouvés à l'intérieur du domaine de calcul au cours de l'optimisation. Je choisis d'utiliser la relation de Kozeny-Carman pour calculer la perméabilité scalaire. La perméabilité est donc obtenue en fonction de la porosité  $\varepsilon$ , du diamètre moyen effectif des grains  $d_p$  et de l'arrangement des grains constitutifs du matériau poreux à l'intérieur du domaine de calcul  $\Omega$ , on a (2.52) :

$$K(\varepsilon) = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{C(1 - \varepsilon)^2}. \quad (4.5)$$

A la fin du processus d'optimisation, les zones fluides et poreuses seront définies avec l'aide de la variable de conception  $\alpha$  comme ci-dessous :

Le domaine fluide par :

$$\Omega_f := \{x \in \Omega \mid \varepsilon(\alpha(x)) = 1\}, \quad (4.6)$$

et le domaine poreux par :

$$\Omega_p := \{x \in \Omega \mid \varepsilon(\alpha(x)) = \varepsilon_0\}, \quad (4.7)$$

où  $\varepsilon_0$  est la valeur de la porosité du matériau poreux recherché avec la méthode d'optimisation. En l'état, la porosité est une fonction qui prend uniquement les deux valeurs discrètes 1 ou  $\varepsilon_0$ . Résoudre un problème d'optimisation topologique à ce stade est difficile, voire impossible [40], de ce fait une fonction de régularisation est généralement utilisée. La porosité locale est interpolée par une fonction sigmoïde qui dépend de la valeur de la variable de conception  $\alpha$  de façon identique à [87] :

$$\varepsilon(\alpha) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_f)h_\tau(\alpha) + \varepsilon_f, \quad (4.8)$$

et :

$$h_\tau(\alpha) = \left( \frac{1}{1 + \exp(-\tau(\alpha - \alpha_0))} - \frac{1}{1 + \exp(\tau \alpha_0)} \right), \quad (4.9)$$

où  $h_\tau(\alpha)$  est une fonction de régularisation qui pour  $\tau \rightarrow +\infty$  tend vers 0 quand  $\alpha < \alpha_0$  et vers 1 quand  $\alpha > \alpha_0$ . De plus, on a  $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$  pour une valeur de  $\alpha_{max}$  fixée. La porosité du fluide est  $\varepsilon_f = 1$ . Les zones fluides sont obtenues quand  $\tau \rightarrow +\infty$  et  $\alpha < \alpha_0$  et les zones poreuses quand  $\alpha > \alpha_0$ . Enfin, cette régularisation de la porosité permet de définir correctement les gradients de la porosité.

## 4.3 Problème d'optimisation topologique

### 4.3.1 Approche générale

La formulation mathématique du problème d'optimisation topologique est :

Minimiser	la fonction objectif $J(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha)$ (4.23)	
Sous contraintes	des équations du problème physique (2.23) et $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha)$	(4.10)
	ainsi que des conditions aux limites (4.11).	

La forme spécifique de l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p, \alpha)$  sera précisée à chaque fois. On a le domaine de calcul  $\Omega$  et les frontières du domaine qui sont  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{\text{out}}$ . Ces frontières se décomposent respectivement par l'entrée, les parois et la sortie. Les équations sont résolues sans dimension et les conditions aux limites du problème d'écoulement de fluide sont :

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Gamma_{\text{in}} : \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{\text{in}} = 1, \partial_n p = 0, \\ \text{Sur } \Gamma_w : \mathbf{u} &= 0, \partial_n p = 0, \\ \text{Sur } \Gamma_{\text{out}} : \partial_n \mathbf{u} &= 0, p = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour actualiser les valeurs de la variable de conception  $\alpha$ , j'utilise une méthode de descente de gradient. Les équations du problème physique sont généralement appelées les *équations d'état* et je vais rechercher, de façon analogue à [15, Annexe D], le *système optimal* associé au problème d'optimisation. Ce système optimal contient :

- les équations d'état,
- les équations adjointes,
- et les conditions d'optimalité.

J'utilise une démarche *différentiation puis discrétisation* et pour construire le système optimal, j'utilise la *méthode des multiplicateurs de Lagrange*. La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'une part d'obtenir le système d'équations adjointes et d'autre part, de formuler les conditions d'optimalité qui permettent de calculer le gradient de la fonction objectif  $\nabla J$  par rapport à la variable de conception  $\alpha$ . Le calcul du gradient est une étape clé dans l'utilisation d'un algorithme d'optimisation non linéaire, on parle dans ce cas d'une méthode d'optimisation basée sur le gradient [96] (voir plus de détails dans [15, Annexe C]). L'algorithme d'optimisation non linéaire est utilisé pour minimiser la fonction objectif et résoudre le problème d'optimisation topologique. Dans la suite, la méthode des multiplicateurs de Lagrange et l'algorithme d'optimisation sont présentés.

### 4.3.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour calculer le gradient de la fonction objectif par rapport à la variable de conception, j'utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour plus de détails, voir par exemple [54]. Pour une fonction objectif générale de la forme :

$$J(\mathbf{u}, p, \alpha) = \int_{\Omega} J_{\Omega}(\mathbf{u}, p, \alpha) d\Omega + \int_{\Gamma} J_{\Gamma}(\mathbf{u}, p, \alpha) d\Gamma, \quad (4.12)$$

la méthode consiste à introduire une fonction particulière dite fonctionnelle de Lagrange et notée  $L$ . J'utilise pour illustration un des modèles étudiés dans la suite de ce chapitre, le modèle (a) :

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Avec le modèle (a) (4.13), la fonctionnelle de Lagrange L s'écrit :

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) = & \\
& + \int_{\Omega} J_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha) \, d\Omega + \int_{\Gamma} J_{\Gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha) \, d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{p}^* \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \nabla \mathbf{p} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \operatorname{Re}} \mathbf{u} + \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}| \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_w} (\mathbf{u} \cdot \Phi_w) \, d\Gamma_w \\
& - \int_{\Gamma_{in}} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_{in}) \cdot \Phi_{in}) \, d\Gamma_{in} \\
& - \int_{\Gamma_{out}} (\partial_n \mathbf{u} \cdot \Phi_{out} + \mathbf{p} \varphi) \, d\Gamma_{out},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

où j'introduis les multiplicateurs de Lagrange suivant  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \Phi_w, \Phi_{in}, \Phi_{out}, \varphi)$  qui permettent d'imposer les contraintes du problème. Le problème d'optimisation devient maintenant un problème d'optimisation sans contraintes qui s'énonce :

*Déterminer les variables d'état  $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ , la variable de contrôle  $\alpha$  et les multiplicateurs de Lagrange  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \Phi_w, \Phi_{in}, \Phi_{out}, \varphi)$  telle que la fonctionnelle de Lagrange L présente un extremum.*

La fonctionnelle de Lagrange présente un extremum lorsque L est rendue *stationnaire* par rapport à chacun de ses arguments et donc quand sa différentielle est égale à zéro ( $\delta L = 0$ ). J'introduis la dérivée de Fréchet d'une fonction F :

$$\frac{\partial F}{\partial X}[\delta X] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(X + h\delta X) - F(X)}{h}, \tag{4.15}$$

et on a :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^*} \delta \mathbf{u}^* + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}^*} \delta \mathbf{p}^* = 0. \tag{4.16}$$

En supposant par la suite, les variables  $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*)$  indépendantes, les dérivées de Fréchet de L doivent donc être identiquement nulles dans toutes les directions  $\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*$  admissibles, c'est-à-dire, quelles que soient les valeurs de  $\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, \delta \alpha, \delta \mathbf{u}^*, \delta \mathbf{p}^*$ . Les expressions pour lesquelles on a  $\delta L = 0$  permettent de trouver le modèle adjoint continu et les conditions d'optimalité. Je souhaite obtenir :

$$\frac{\partial L}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha)}[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, \delta \alpha] = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}, \delta \alpha. \tag{4.17}$$

Les détails des calculs pour les annulations de la dérivée de Fréchet de L suivant  $(\mathbf{u}, \mathbf{p}$  et  $\alpha)$



pour le modèle (a) (4.13) sont donnés dans l'Annexe C. Les résultats donnent :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{p})} [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}] = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{p})} [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}] \, d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{p})} [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{p}] \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \, \nabla \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{p} \, \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \nabla \mathbf{p}^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \right) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( [\nabla(\mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) \right) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( -[\nabla(\varepsilon \mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \right) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \operatorname{Re}} \mathbf{u}^* \right) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( -\beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] \right) \, d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \mathbf{p}^* \mathbf{n} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{\varepsilon^2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] \right) \, d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} \right) \, d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_w} (\delta \mathbf{u} \cdot \Phi_w) \, d\Gamma_w \\
& - \int_{\Gamma_{in}} (\delta \mathbf{u} \cdot \Phi_{in}) \, d\Gamma_{in} \\
& - \int_{\Gamma_{out}} (\partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \Phi_{out} + \delta \mathbf{p} \, \varphi) \, d\Gamma_{out}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

### Forme finale du système d'équations adjointes continues avec le modèle (a)

La forme finale du modèle adjoint continu est :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{p}} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{dans } \Omega \\
& -\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = \nabla \mathbf{p}^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \\
& - [\nabla(\varepsilon \mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} + [\nabla(\mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) \\
& - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \operatorname{Re}} \mathbf{u}^* - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] \\
& \text{dans } \Omega.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Les conditions aux limites du problème adjoint sont :

$$\begin{aligned}
\text{sur } \Gamma_{\text{in}} : \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{p}} &= 0 \text{ et } u_t^* = 0, \\
\text{sur } \Gamma_w : \mathbf{u}^* &= 0, \\
\text{sur } \Gamma_{\text{out}} : \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{n} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{\varepsilon^2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

### Calcul du gradient de la fonction objectif avec le modèle (a)

Le calcul du gradient de la fonction objectif  $J(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \alpha)$  pour une valeur de  $\alpha$  donnée s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u} \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \right] \partial \varepsilon(\alpha) + \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \\
&+ \frac{3 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha)} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon(\alpha)) + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \\
&+ \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} \partial \varepsilon(\alpha) c_F}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} + \frac{3}{2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} c_F (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$-\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [[\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}] \partial \varepsilon(\alpha) - \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} [\nabla \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}. \tag{4.22}$$

L'équation (4.22) donne  $\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 0$  si la condition  $\partial_{\alpha} \varepsilon(\alpha) = 0$  est vérifiée sur les frontières du domaine. C'est le cas dans ces travaux, car un matériau poreux avec une porosité constante est recherché sur les frontières du domaine. En effet, j'impose une zone fluide sur l'entrée et la sortie et du solide sur les parois.

### 4.3.3 Algorithme d'optimisation

La résolution numérique du problème d'optimisation topologique se fait dans le prolongement de la méthode numérique utilisée pour la résolution du problème direct (le problème d'écoulement de fluide), présentée à la section 2.4. Pour trouver les solutions du système optimal, le système d'équations adjointes continues doit être résolu en plus du problème direct puis le gradient de la fonction objectif est calculé. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité des travaux dans [86] et reprennent donc le même algorithme d'optimisation. Il s'agit d'un algorithme de résolution itérative dont la méthode est basée sur le calcul du gradient. Les valeurs de la variable de conception  $\alpha$  sont calculées grâce à une méthode du gradient conjugué, l'objectif est de trouver une valeur  $\alpha_{\text{optimale}}$  telle que  $J(\alpha_{\text{optimale}}) \leq J(\alpha)$ . Les étapes de l'algorithme [86, tableau 1.2 p.23] sont les suivantes :

1. on débute par une initialisation,  $k = 1$  et  $\alpha_k = \alpha_{\text{initiale}}$  ;
2. on résout le problème direct pour les variables  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  ;
3. on résout le problème adjoint pour les variables  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{p}^*$  ;

4. on effectue le calcul du gradient de la fonction objectif et on évalue une direction de descente  $d_k = -\nabla J(\alpha_k)$ ;
5. on détermine un pas de descente  $\gamma_k$  qui minimise la valeur de la fonction objectif le long de la direction de descente  $d_k$ ;
6. on actualise la valeur de la variable de conception  $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \gamma_k d_k$ ;
7. on détermine une nouvelle direction de descente par une méthode du gradient conjugué  $d_{k+1} = -\nabla J(\alpha_{k+1}) + \zeta_{k+1} d_k$  où  $\zeta_{k+1}$  est trouvé par la méthode de Polack-Ribière [15];
8. on incrémente,  $k = k + 1$  et on recommence à la résolution du problème direct si les critères d'arrêt ne sont pas atteints.

Les simulations numériques débutent avec un domaine de calcul composé entièrement de fluide,  $\varepsilon = 1$ . Les critères d'arrêt sont spécifiés pour la pression et la vitesse. Ces critères portent sur les valeurs des résidus entre deux itérations successives qui sont de  $1.10^{-6}$  pour la pression et  $1.10^{-5}$  pour la vitesse.

## 4.4 Configurations et paramètres étudiés

L'ensemble des configurations et paramètres étudiés dans le chapitre sont maintenant présentés :

- la fonction objectif,
- les deux géométries,
- les cinq modèles d'écoulement de fluide  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p, \alpha)$ ,
- les cinq couples de valeurs  $(\varepsilon, \beta)$  qui donnent un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$ ,
- les trois valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et  $\beta$ ,
- les six valeurs du pas de descente.

Ces différentes configurations sont étudiées pour un problème d'optimisation topologique appliqué à un écoulement de fluide en régime permanent et je considère les hypothèses des sections 1.4.1 et 1.5.1.

### 4.4.1 Fonction objectif

La fonction objectif utilisée est une fonction de puissance mécanique qui en l'absence de forces volumiques agissant sur le fluide, correspond à la puissance dissipée par le fluide [17], on parle aussi de pertes de charge :

$$J_\Gamma = - \int_\Gamma \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (4.23)$$

C'est une fonction objectif classique de la littérature et elle est spécifiée uniquement sur les frontières donc  $J_\Omega = 0$ . Les dérivées de Fréchet donnent :

$$-\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} \delta p = \int_\Gamma \delta p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (4.24)$$

$$-\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = \int_\Gamma \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_\Gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) \, d\Gamma. \quad (4.25)$$

Avec les équations (4.24) et (4.25), il est maintenant possible de résoudre les équations adjointes, par exemple avec le modèle (a) (4.19) et les conditions aux limites du problème adjoint (4.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_w \\ u_t^* = 0 \text{ et } u_n^* = -u_n \quad \text{sur } \Gamma_{in} \\ -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \\ = \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \quad \text{sur } \Gamma_{out}. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

#### 4.4.2 Géométries, paramètres physiques et numériques

Les deux configurations géométriques utilisées sont en deux dimensions  $(x, y)$  de tailles  $L \times L$  et sont présentées à la Figure 4.1. Les maillages utilisés sont présentés sur la Figure 4.2. On notera les points suivants :

- la *géométrie 1* est comme étudié dans [68, 87, 97] et également appelé le *single pipe* dans la littérature. L'entrée du fluide se fait sur l'axe vertical  $x = 0$  et  $y \in [0, 4; 0, 6] L$ . La sortie du fluide se fait sur l'axe vertical  $x = L$ ,  $y \in [0, 4; 0, 6] L$ ;
- la *géométrie 2* est comme étudié dans [77]. L'entrée du fluide se fait sur l'axe horizontal pour  $x \in [0, 4; 0, 6] L$  et  $y = 0$ . La sortie du fluide se fait sur l'axe vertical  $x = L$  et  $y \in [0, 4; 0, 6] L$ .

Pour chaque géométrie,

- le domaine de calcul est un carré et le côté est choisi comme longueur caractéristique  $L = 1$ ,
- la vitesse en entrée est choisie comme vitesse de référence  $\mathbf{u}_{in} = U = 1$ ,
- le maillage utilisé est structuré et se compose de 640000 cellules,
- le nombre de Reynolds est  $\text{Re}_H = \text{Re}_L = 1000$ ,
- les paramètres utilisés dans la fonction de régularisation sont :  $\tau = 0,5$ ,  $\alpha_0 = 10$  et  $\alpha_{max} = 20$ ,
- le pas de descente utilisé est constant et est pris égal à 1 hormis dans la section 4.5.1 où des résultats d'optimisation sont donnés pour différentes valeurs du pas de descente,
- les calculs sont réalisés en parallèle sur 32 processeurs grâce au supercalculateur de l'Université de La Réunion,
- les simulations numériques qui requièrent plus de 80h de temps de calcul et/ou plus de 500000 itérations ne sont pas retenues dans les résultats.

Le paramètre  $\tau$  est pris suffisamment petit afin de permettre une plus grande plage de variation de la porosité (section 3.2). Enfin, il n'y a pas de contraintes sur les volumes de fluide ou de matériaux poreux à trouver dans le domaine de calcul.

#### 4.4.3 Modèles d'écoulement de fluide

Dans la formulation du problème d'optimisation topologique,  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p, \alpha)$  représente l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide et peut prendre différentes formes. Je

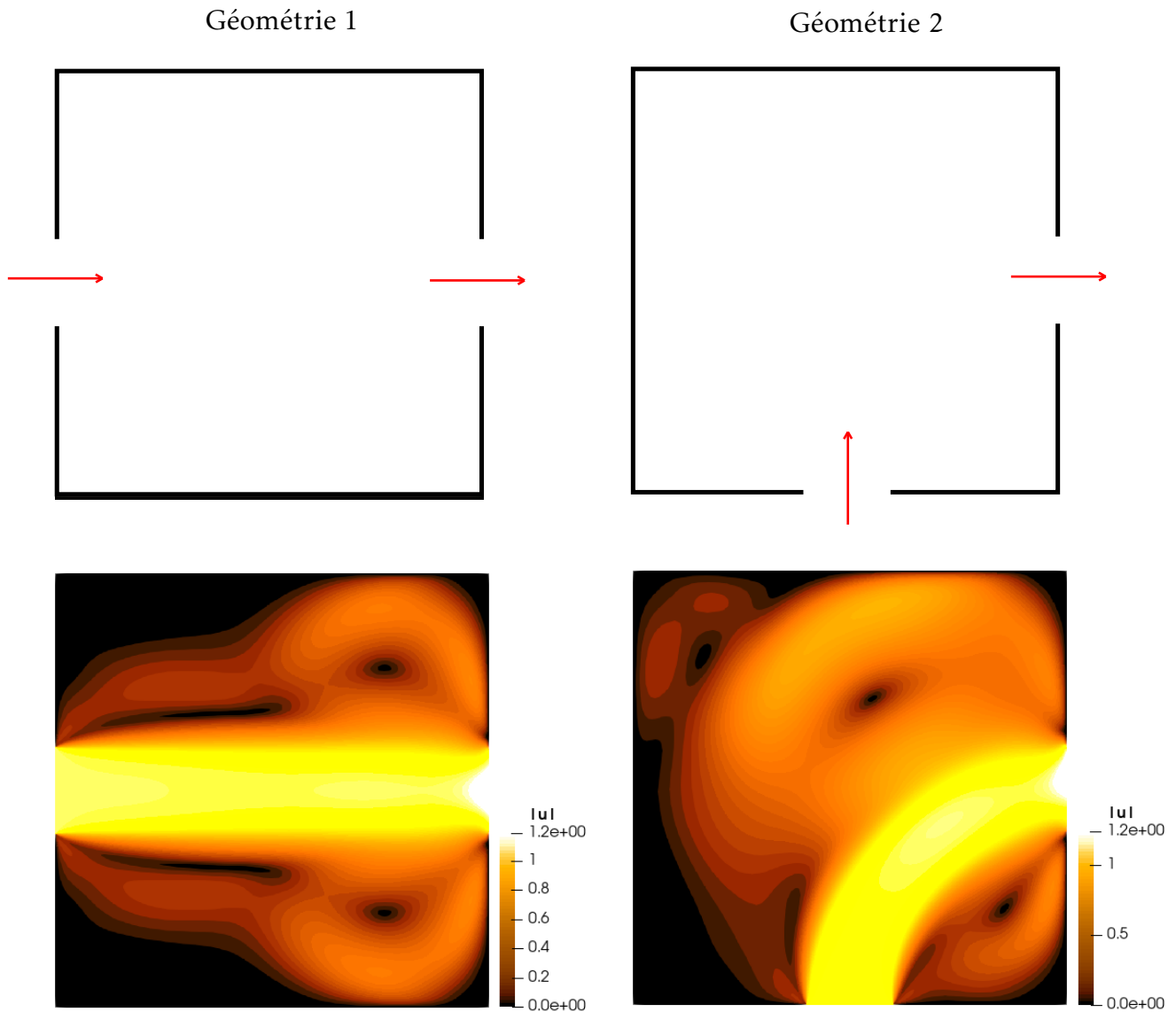


FIGURE 4.1 – Configurations géométriques et champs de vitesses sans optimisation.

définis maintenant les expressions de  $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p, \alpha)$  qui correspondent aux cinq modèles d'écoulements de fluide utilisés pour produire les résultats et discutés dans la section 4.5.5. Le modèle (a) de l'équation (4.27) est la formulation qui contient le plus de termes parmi les cinq modèles étudiés. D'ailleurs, les modèles suivants (b), (c), (d) et (e) sont utilisés pour voir l'influence spécifique de certains termes et sont donc des variants du modèle (a).

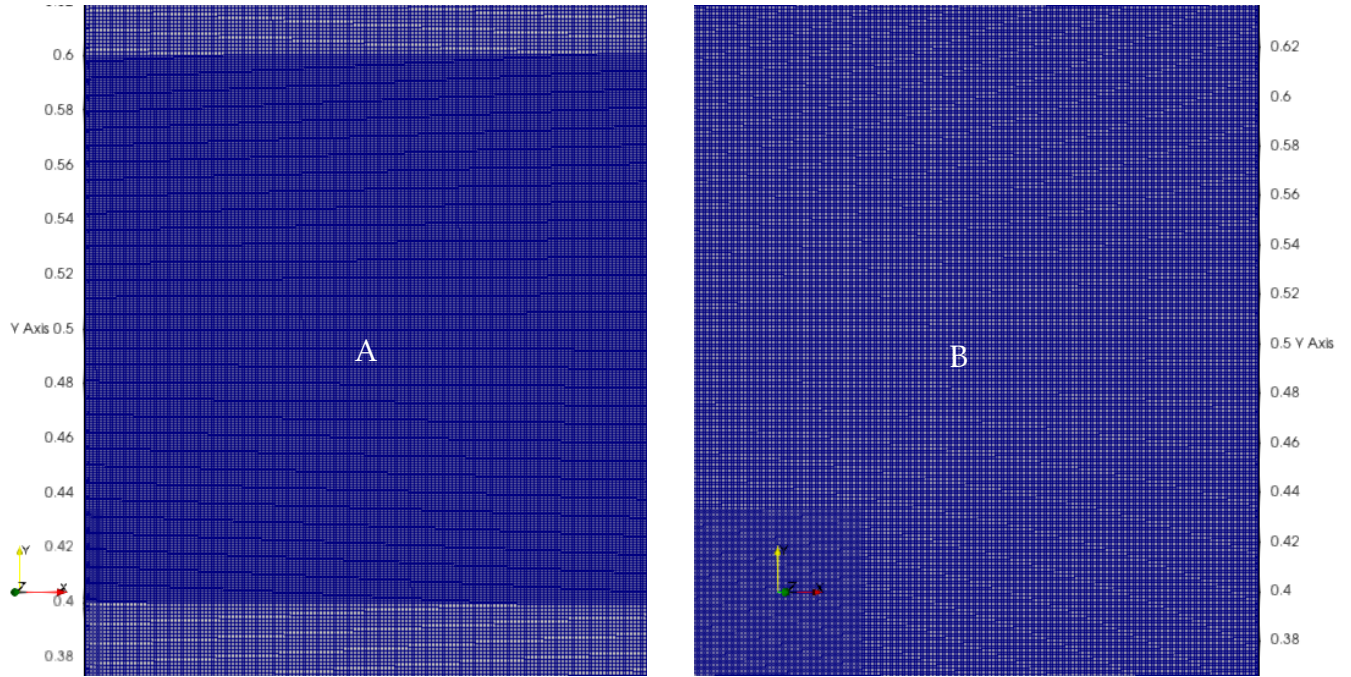


FIGURE 4.2 – Maillages utilisés pour les deux géométries, en A à l’entrée de la géométrie 1 et en B à la sortie de la géométrie 2.

Cas (a) :

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\
 & = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Le modèle (a) est une forme réduite du modèle proposé dans le chapitre 2 eq. (2.63). La démarche qui permet d’obtenir cette forme réduite est présentée dans l’Annexe B. Dans cette formulation, la particularité du modèle est la présence du terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$  et les coefficients de porosité qui sont à l’intérieur des opérateurs différentiels pour le terme de convection et de diffusion. Je précise que le terme de diffusion  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right)$  est le seul terme de correction de Brinkman présent, les autres termes de correction étant rendus négligeables dans le cas d’une valeur du nombre de Reynolds qui n’est pas petite. Le cas d’application envisagé et qui a motivé la considération d’une forme réduite du modèle proposé est la filtration d’une eau où la valeur du nombre de Reynolds n’est habituellement pas petite.

Cas (b) :

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\
 & = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Le modèle (b) se différencie du modèle (a) par l'absence du terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$ . Les différences entre les résultats produits avec les modèles (a) et (b) peuvent donc traduire l'influence de ce terme avec un gradient de porosité.

Cas (c) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} - \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le modèle (c) néglige les gradients de porosité qui se trouvent dans les opérateurs différentiels pour les termes de convection et de diffusion en plus du terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$ . C'est donc un modèle d'écoulement de fluide sous forme réduite avec l'hypothèse d'une porosité constante. Les différences entre les résultats produits avec les modèles (b) et (c) peuvent donc traduire l'influence des gradients de porosité qui se trouvent dans les termes de convection et de diffusion.

Cas (d) :

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le modèle (d) est un modèle de Brinkman (tableau 1.1) auquel un terme de convection est ajouté. Je prends ici  $\mu_{eff} = \frac{\mu}{\varepsilon}$ . Par rapport au modèle (c), le modèle (d) se différencie d'une part avec l'absence du terme de Forchheimer et d'autre part, avec l'écriture du terme de convection. Les différences entre les résultats produits avec les modèles (c) et (d) peuvent donc traduire l'influence de ces termes.

Cas (e) :

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -h_\tau(\alpha) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le modèle (e) fait apparaître le terme de pénalisation de Brinkman noté  $h_\tau(\alpha)$ . L'expression utilisée pour  $h_\tau(\alpha)$  est celle donnée dans l'équation (4.9). Par rapport au modèle (d), ce modèle a pour particularité d'une part, l'absence du coefficient  $\frac{1}{\varepsilon}$  dans le terme de diffusion et d'autre part, la forme d'écriture du terme de Darcy. Les résultats obtenus avec le modèle (e) peuvent être considérés comme étant des résultats classiques de la littérature (voir la section 4.2).

Enfin, les détails des calculs pour les annulations de la dérivée de Fréchet de L suivant  $(\mathbf{u}, p \text{ et } \alpha)$  pour les modèles (a), (b), (c), (d) et (e) sont respectivement donnés dans les Annexes C, D, E, F et [87].

#### 4.4.4 Matériaux poreux

L'objectif est de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux dans le domaine de calcul. Habituellement dans la littérature, la matière ajoutée est une matière solide pleine ou encore, un matériau poreux très faiblement perméable qui correspond à une certaine valeur du nombre de Darcy. On peut se demander si l'approche proposée qui consiste à utiliser le modèle (a) et une porosité qui dépend de la variable de conception permet de pénaliser la vitesse du fluide de façon identique aux méthodes généralement trouvées dans la littérature. C'est donc une des configurations étudiées dans les résultats (section 4.5.3).

Par définition, le nombre de Darcy renseigne sur la perméabilité, on a  $Da = \frac{\mathbf{k}}{L^2}$ . Dans la littérature, la valeur du nombre de Darcy  $Da$  préconisée pour trouver une répartition de matière solide pleine est inférieure ou égale à  $10^{-5}$  [76, 79]. Cette valeur  $Da = 10^{-5}$  peut s'obtenir de différentes façons avec l'équation de Kozeny-Carman (2.52) que je rappelle ici :

$$K(\varepsilon) = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{C(1-\varepsilon)^2}. \quad (4.32)$$

Dans la section 2.3.3, un coefficient sans dimension  $\beta$  a été introduit pour étudier l'influence du diamètre moyen effectif des grains :

$$\beta = \frac{CL^2}{d_p^2}. \quad (4.33)$$

Les équations (4.32) et (4.33) permettent de trouver une expression du nombre de Darcy :

$$Da = \frac{\mathbf{k}}{L^2} = \frac{K}{L^2} = \frac{d_p^2 \varepsilon^3}{CL^2(1-\varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon^3}{\beta(1-\varepsilon)^2}. \quad (4.34)$$

Ainsi, avec l'équation (4.34), les cinq couples de valeurs  $(\varepsilon, \beta)$  choisis pour trouver un nombre de Darcy constant de  $10^{-5}$  sont présentés dans le tableau 4.1. Chaque couple  $(\varepsilon, \beta)$  est donc

Tableau 4.1 – Valeurs du couple  $(\varepsilon, \beta)$  qui donnent un nombre de Darcy de  $10^{-5}$ .

$\varepsilon$	$\beta$
0,9	7290000
0,8	1280000
0,7	381111
0,6	135000
0,5	50000

utilisé dans une méthode d'optimisation topologique pour trouver une répartition optimisée de différents matériaux poreux, mais ayant la même valeur de perméabilité.

Par la suite, je vais faire varier ce nombre de Darcy pour explorer plus en détail les influences de la porosité et du diamètre moyen effectif des grains sur les résultats d'optimisation. C'est donc une des configurations étudiées dans les résultats (section 4.5.4). Je choisis trois valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et  $\beta$ , car ces deux variables sont caractéristiques de la configuration géométrique du matériau poreux et sont en ce sens important dans la modélisation de ce dernier. Les valeurs suivantes seront étudiées :  $\beta = \{2.10^4; 1.10^5; 1.10^6\}$  et  $\varepsilon = \{0,3; 0,5; 0,8\}$ .



#### 4.4.5 Valeurs du pas de descente

Le choix de la valeur du pas de descente  $\gamma$  est une étape importante [37], car s'il est trop petit, la convergence de l'algorithme d'optimisation vers un minimum sera longue et à l'inverse, si  $\gamma$  est trop grand, la minimisation de la fonction objectif de l'itération  $k$  à l'itération  $k + 1$  n'est pas assurée. Une technique de recherche linéaire peut être utilisée pour trouver la valeur du pas de descente. J'ai choisi ici de réaliser les simulations numériques avec un pas de descente constant égal à 1. Dans la suite, les résultats et discussions débutent par (section 4.5.1) une présentation de l'influence de la valeur  $\gamma = 1$  en comparaison à cinq autres valeurs du pas de descente :  $\gamma = \{1E1; 1E2; 1E3; 1E4; 1E5\}$ .

### 4.5 Résultats et discussions

Les deux géométries utilisées dans les simulations numériques et les champs de vitesses correspondants sans optimisation ont été présentés à la Figure 4.1. La valeur finale de  $J$  sans optimisation pour la géométrie 1 est de 0,0333867 obtenue au bout de 55471 itérations et 15h de temps de calcul. La valeur finale de  $J$  sans optimisation pour la géométrie 2 est de 0,0350069 obtenue au bout de 36164 itérations et 12h de temps de calcul. Les temps de calcul correspondent à un temps réel et non CPU (machine) et ils varient de 11 à 56h pour les résultats du chapitre. Pour la suite, les résultats de minimisation de pertes de charge sont présentés en pourcentage de réduction de  $J$  par rapport aux valeurs avant optimisation. Des résultats complémentaires (résidus, nombres d'itérations et temps de calcul) ont été placés dans l'Annexe G.

#### 4.5.1 Influence de la modélisation de l'ajout de matière et du pas de descente

Je commence par comparer les résultats d'optimisation produits avec l'approche proposée à ceux produits avec une méthode classique de la littérature. Cela peut se faire en comparant les résultats de simulations numériques produits avec le modèle (e) qui contient un terme de pénalisation de Brinkman et le modèle (a) qui est une forme réduite du modèle proposé au chapitre 2. Dans le modèle (e), la variable de conception  $\alpha$  agit sur le terme de pénalisation  $h_\tau(\alpha)$  tandis que dans le modèle (a), la variable de conception agit sur la porosité  $\varepsilon(\alpha)$ . Dans cette section, les résultats sont produits pour la géométrie 1 (un single pipe) et la matière poreuse recherchée avec l'algorithme d'optimisation correspond à une valeur du nombre de Darcy de  $Da = 5E-5$ . Les valeurs des couples  $(\varepsilon, \beta)$  sont données dans le tableau 4.2. La

Tableau 4.2 – Valeurs du couple  $(\varepsilon, \beta)$  qui donnent un nombre de Darcy de  $5.10^{-5}$ .

$\varepsilon$	$\beta$
0,9	1458000
0,8	256000
0,7	76222
0,6	27000

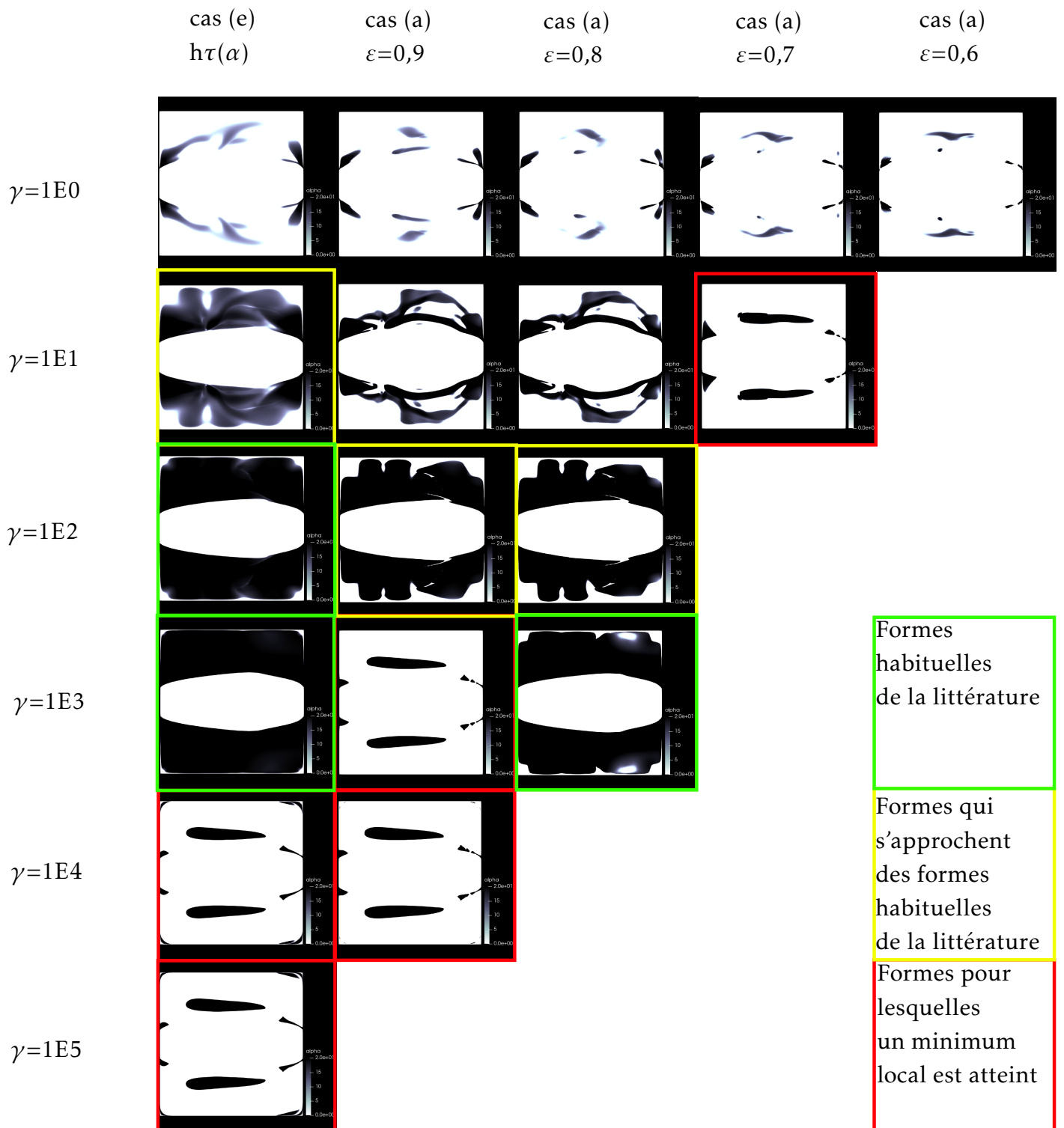


FIGURE 4.3 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec  $Da = 5E-5$ .

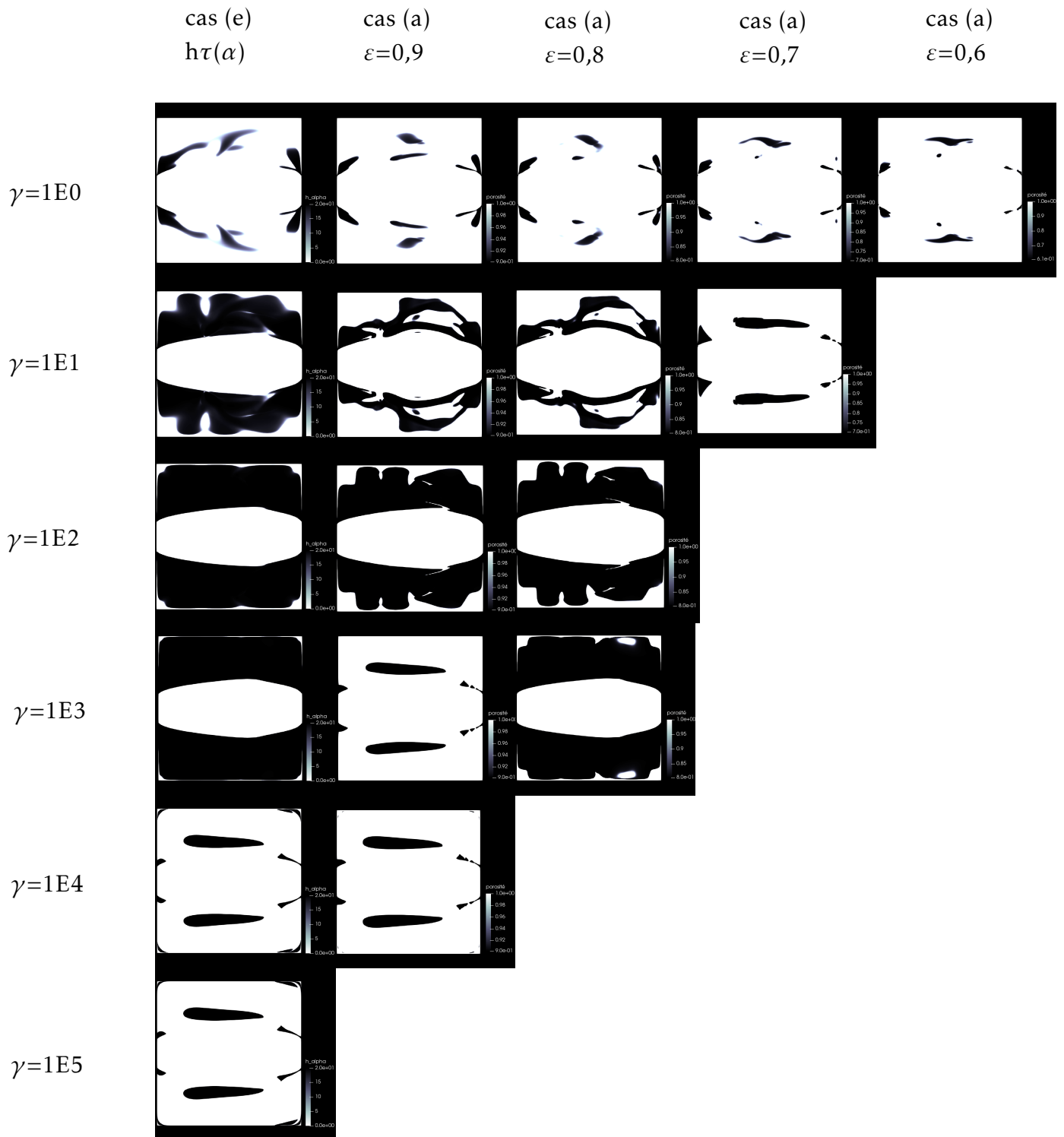


FIGURE 4.4 – Formes optimisées obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec  $Da = 5E-5$ .

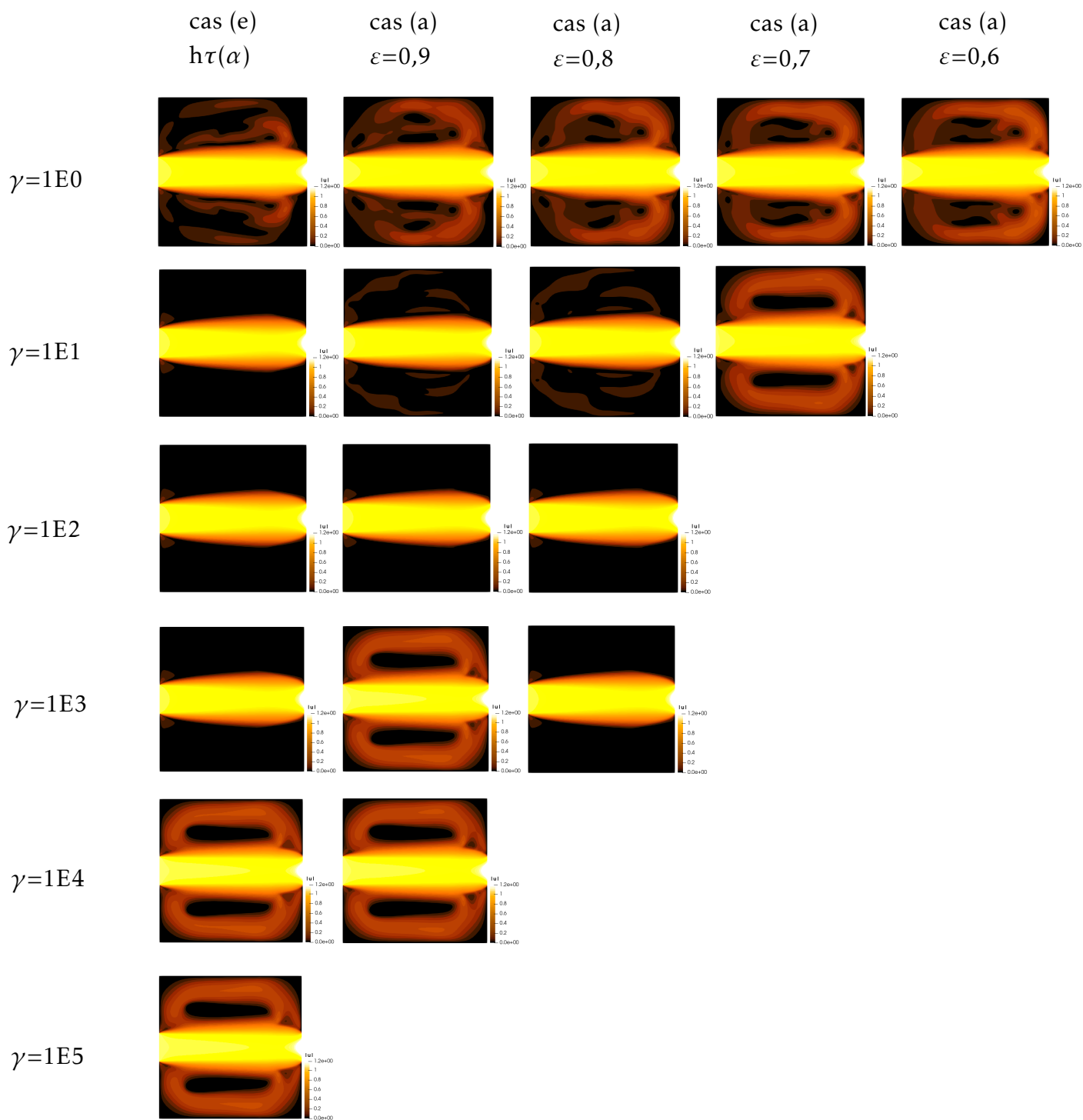


FIGURE 4.5 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues en fonction du pas de descente pour les modèles (a) et (e) avec  $Da = 5E-5$ .

valeur de pénalisation maximale  $h_\tau(\alpha) = \alpha_{max}$  est quant à elle trouvée en considérant :

$$\text{Terme de pénalisation sans dimension} = \alpha_{max} \mathbf{u} = \frac{1}{\text{Re Da}} \mathbf{u}. \quad (4.35)$$

En remplaçant dans (4.35) la valeur du nombre de Reynolds égale à 1000 et la valeur du nombre de Darcy égale à 5E-5, il apparaît  $\alpha_{max} = 20$ .

Les Figures 4.3, 4.4 et 4.5 représentent respectivement les distributions de la variable de conception  $\alpha$ , les formes optimisées et les distributions de vitesses obtenues. Pour les images qui illustrent les formes optimisées et les distributions de la variable de conception, l'absence de couleur (en blanc) correspond à des zones fluides et les couleurs (en noir) correspondent à de la matière poreuse ajoutée par l'algorithme. La Figure 4.4 montre les formes optimisées obtenues pour les deux modèles (a) et (e). Bien qu'on n'ait pas les résultats pour toutes les valeurs de porosité  $\varepsilon$ , le modèle proposé (a) permet de retrouver les formes optimisées de la littérature. En effet, quand l'objectif est de minimiser les pertes de charge, les formes optimisées de la littérature correspondent aux situations où les valeurs de la fonction objectif sont améliorées à la suite de la procédure d'optimisation. Dans le cas d'un écoulement laminaire, ces formes optimisées sont binaires (correspondant à des zones fluides ou non fluides) et les zones fluides forment un ou plusieurs canaux qui relient l'entrée et la sortie. La géométrie 1 qui correspond à un single pipe est une géométrie classique de la littérature et des résultats d'optimisation dans le but de minimiser les pertes de charge peuvent donc être trouvés [68, 87, 97]. Dans le cas d'un écoulement laminaire, ces formes habituelles de la littérature ressemblent à celles entourées en vert sur la Figure 4.3. Il est donc possible de retrouver ces formes classiques de la littérature avec la méthode d'optimisation proposée et avec le modèle d'écoulement de fluide qui est proposé. Les formes habituellement observées dans la littérature sont reproduites ici avec le modèle (e) quand  $\gamma = 1E2$  et  $\gamma = 1E3$  et le modèle (a) quand  $\varepsilon = 0,8$  et  $\gamma = 1E3$ . On s'en approche également avec le modèle (a) pour  $\varepsilon = 0,9$  et  $0,8$  pour  $\gamma = 1E2$ . Les profils de vitesses correspondants à ces résultats (Figure 4.5) ne contiennent pas de zones de recirculations. Le tableau 4.3 indique les pourcentages de minimisation de la fonction objectif J. Les pourcentages de minimisations de J dans ce tableau montrent que la matière poreuse considérée  $\text{Da} = 5E-5$  ne permet pas de réduire efficacement les pertes de charge (de 2 à 5%).

Tableau 4.3 – Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a) et (e) avec  $\text{Da} = 5E-5$  (géométrie 1).

$\gamma$	Cas (e)	Cas (a) $\varepsilon = 0,9$	Cas (a) $\varepsilon = 0,8$	Cas (a) $\varepsilon = 0,7$	Cas (a) $\varepsilon = 0,6$
1E0	-3	-3	-3	-3	-2
1E1	-4	-4	-3	-4	-
1E2	-3	-4	-4	-	-
1E3	-4	-5	-3	-	-
1E4	-5	-5	-	-	-
1E5	-5	-	-	-	-

Les formes optimisées et les distributions de vitesses sont influencées par la valeur du pas de descente  $\gamma$  (Figures 4.4 et 4.5). On retiendra que plus la valeur du pas de descente  $\gamma$  choisie est grande, plus la quantité de matière poreuse placée par l'algorithme est grande

jusqu'à une certaine limite. En effet, à partir d'une certaine valeur qui dépend du modèle et des paramètres utilisés,  $\gamma = 1E4$  avec le modèle (e) par exemple et  $\gamma = 1E3$  avec le modèle (a) quand  $\varepsilon = 0,9$ , l'algorithme semble avoir atteint un minimum et produit les mêmes formes optimisées.

On retiendra de ces résultats que l'approche proposée permet de reproduire les formes optimisées de la littérature en fonction de la valeur du pas de descente  $\gamma$ . Les résultats d'optimisation sont influencés par la valeur de  $\gamma$ , car avec le modèle (a) pour  $\varepsilon = 0,7$  et  $\gamma = 1E1$ , l'algorithme d'optimisation semble déjà avoir atteint un minimum (près de 500000 itérations en seulement 6h, tableau G.2). En ce sens, la valeur du pas de descente utilisée pour produire les autres résultats du chapitre est  $\gamma = 1E0 = 1$ . De plus, bien que les formes optimisées soient plutôt inhabituelles avec cette valeur du pas de descente, on peut observer des comportements différents de l'algorithme en fonction du modèle, (a) ou (e), mais aussi en fonction de la valeur de la porosité avec le modèle (a) (Figures 4.3 et 4.4). Les formes optimisées produites avec cette valeur du pas de descente peuvent également être intéressantes, car il est possible de réaliser une économie sur le volume de matière ajouté pour atteindre les objectifs fixés et ceci, sans la spécification d'une contrainte sur les volumes de fluide ou de matériaux poreux à obtenir dans le domaine de calcul. En effet, contrairement aux résultats habituels de la littérature, il n'y a pas de phénomène de remplissage. Enfin, l'algorithme d'optimisation semble bien fonctionner, car les formes optimisées produites avec la géométrie 1 (un single pipe) sont symétriques et la valeur maximale du résidu sur J est de  $1E-7$  (tableau G.1). La convergence de l'algorithme d'optimisation est explorée plus en détail dans la suite.

#### 4.5.2 Convergence de l'algorithme d'optimisation et influence de la taille du maillage sur les formes optimisées

Je présente à la Figure 4.6 les évolutions des valeurs de J au cours des itérations pour les deux géométries avec le modèle (a) et quand le nombre de Darcy vaut  $1E-5$ . Ces graphes permettent de vérifier que l'algorithme converge puisque les valeurs de J diminuent systématiquement jusqu'à atteindre un plateau. Cette affirmation est complétée par les valeurs des résidus sur J présentées à l'Annexe G où les valeurs maximales sont de  $2E-7$ . Je présente dans les tableaux 4.4 et 4.5 les valeurs de la fonction objectif J obtenues à l'issue des simulations numériques pour les différentes valeurs du nombre de Darcy  $Da$ , de porosité  $\varepsilon$  et de  $\beta$ . Tout comme dans la section précédente, on observe que l'algorithme minimise la fonction objectif.

**Remarque 4.1.** — Il peut arriver dans certaines situations que la valeur de J obtenue après optimisation soit supérieure à la valeur de J sans optimisation. Ces valeurs sont de l'ordre de 3% et présentées avec un signe positif dans les tableaux 4.4 et 4.5.

La Figure 4.2 montre les maillages utilisés pour produire les résultats (variable de conception  $\alpha$ , formes optimisées et vitesse du fluide  $|\mathbf{u}|$ ). Une étude de l'influence de la taille du maillage a été réalisée en multipliant par deux les discrétisations des blocs utilisés sur les directions  $(x, y)$ . Comme on peut le voir sur la Figure 4.7, les résultats avec le couple de valeur  $(\varepsilon = 0,3, \beta = 1E6)$  pour le modèle (a) et la géométrie 2 sont différents pour les deux tailles de maillage étudiées. Néanmoins, le choix de 640000 cellules permet de reproduire correctement les répartitions de matière suggérées par un maillage plus fin de 2560000 cellules. Par la suite, les simulations ont donc été menées avec un maillage de 640000 cellules.

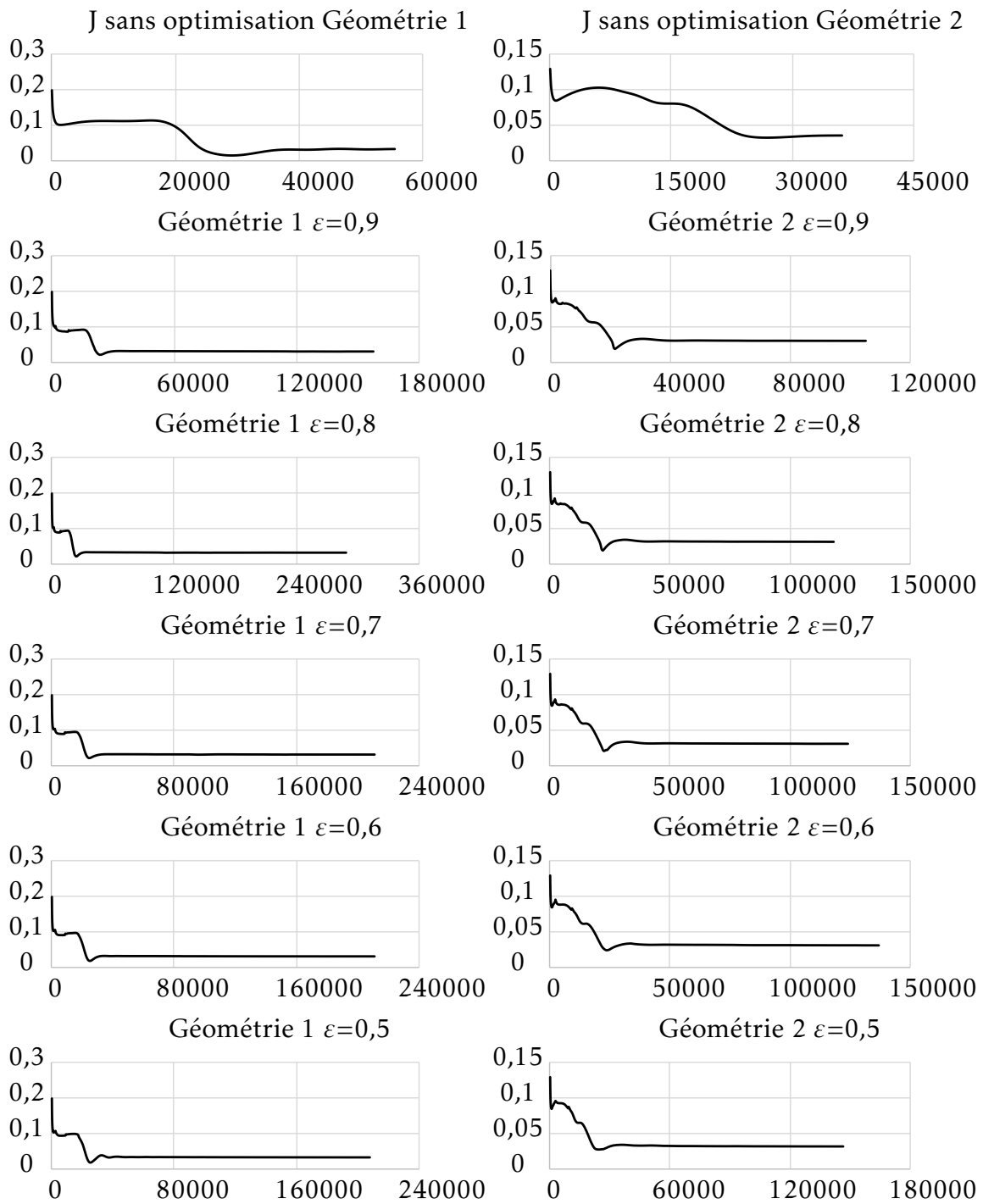
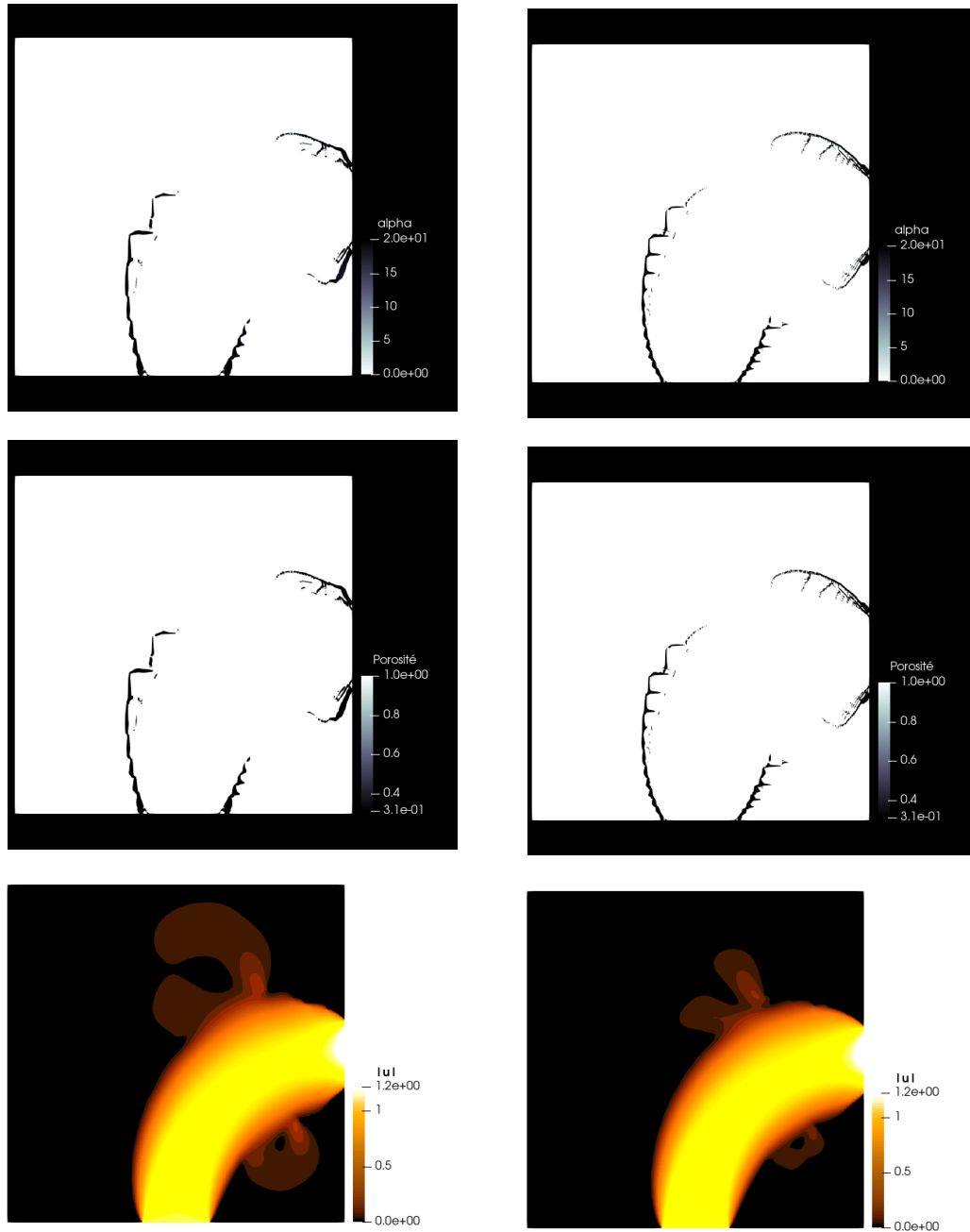


FIGURE 4.6 – Évolutions de la fonction objectif J en fonction des itérations avec le modèle (a).



$Re = 1000$   
 $\varepsilon = 0,3$   
 $\beta = 1E6$   
 Cellules = 640000

$Re = 1000$   
 $\varepsilon = 0,3$   
 $\beta = 1E6$   
 Cellules = 2560000

FIGURE 4.7 – Influence de la taille du maillage avec le modèle (a) pour la géométrie 2. Les illustrations correspondent aux valeurs de la variable de conception  $\alpha$ , aux formes optimisées et aux normes des vitesses du fluide  $|\mathbf{u}|$ .



Tableau 4.4 – Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a), (b), (c) et (d) (géométrie 1).

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	-9	-10	-10	-2
0,8	1280000	1E-5	-8	-9	-9	-2
0,7	381111	1E-5	-7	-	-7	-2
0,6	135000	1E-5	-6	-6	-5	-0
0,5	50000	1E-5	-6	-4	-3	+1
0,3	1000000	6E-8	-13	-14	-	-15
0,3	100000	6E-7	-	-6	-	-2
0,5	1000000	5E-7	-12	-12	-13	-7
0,5	100000	5E-6	-7	-6	-8	-2
0,5	20000	3E-5	-3	-	+1	+2
0,8	1000000	1E-5	-6	-6	-7	-2
0,8	100000	1E-4	-2	-	-1	+1
0,8	20000	6E-4	+0	-	+2	+1

Tableau 4.5 – Taux de variation (%) de la fonction objectif J pour les modèles (a), (b), (c) et (d) (géométrie 2).

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	-14	-	-14	-1
0,8	1280000	1E-5	-13	-	-13	-1
0,7	381111	1E-5	-12	-	-13	+0
0,6	135000	1E-5	-12	-	-12	+1
0,5	50000	1E-5	-12	-	-10	+2
0,3	1000000	6E-8	-18	-	-19	-
0,3	100000	6E-7	-	-	-16	-3
0,5	1000000	5E-7	-16	-17	-18	-10
0,5	100000	5E-6	-12	-11	-13	-0
0,5	20000	3E-5	-9	-12	-4	+3
0,8	1000000	1E-5	-12	-12	-13	+0
0,8	100000	1E-4	-5	-7	-5	+1
0,8	20000	6E-4	-3	-6	-1	+2

### 4.5.3 Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour un nombre de Darcy constant proche d'un solide

J'étudie dans cette section un problème d'optimisation topologique avec pour objectif d'avoir un matériau poreux proche d'un solide suivant les valeurs de porosité et de diamètre moyen effectif des grains (voir 4.2). Une cellule du maillage qui doit contenir un solide correspond à un terme de pénalisation suffisamment fort pour que le matériau poreux ajouté

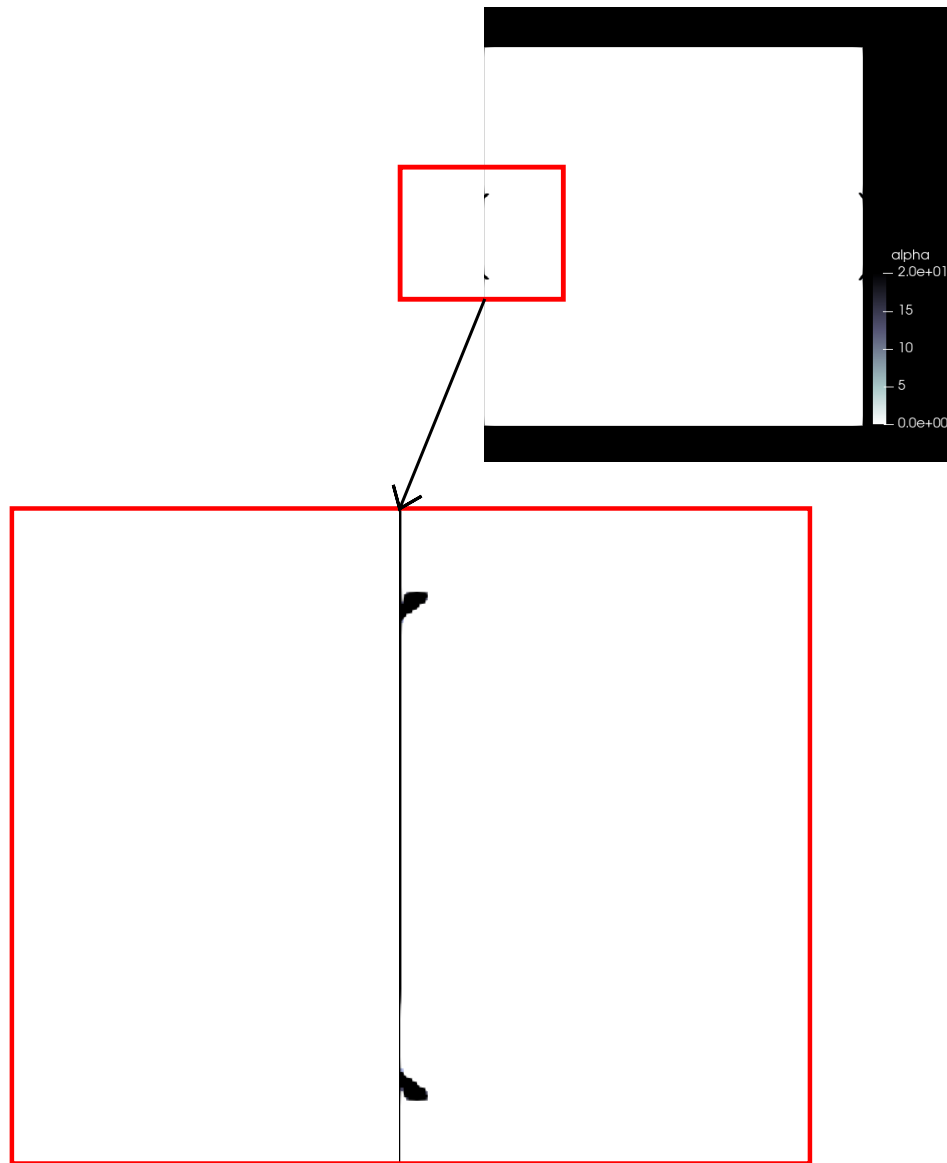


FIGURE 4.8 – Zoom sur l’entrée de la géométrie 1 pour la répartition de la variable de conception  $\alpha$  obtenue avec le modèle (d) et le couple  $(\varepsilon = 0,9, \beta = 7290000)$ .

devienne pratiquement imperméable et cela correspond à une valeur du nombre de Darcy inférieure ou égale à  $10^{-5}$  [76, 79]. Les résultats obtenus dans ce cas pour la géométrie 1 sont présentés sur les Figures 4.9, 4.10 et ceux pour la géométrie 2 sur les Figures 4.11, 4.12. Les figures qui illustrent les distributions de la variable de conception  $\alpha$  sont données à l’Annexe H, ces résultats étant directement reflétés par les formes optimisées obtenues. Je rappelle que pour les images qui illustrent les formes optimisées, l’absence de couleur (en blanc) correspond à des zones fluides et les couleurs (en noir) correspondent à de la matière poreuse ajoutée par l’algorithme.

Tout d’abord, on notera que les résultats avec le modèle (d) sont particuliers. Ce dernier n’a pas permis d’obtenir des formes optimisées, car la matière ajoutée se trouve exclusivement au niveau de l’entrée et de la sortie (voir le zoom sur la Figure 4.8). Ensuite, on remarquera

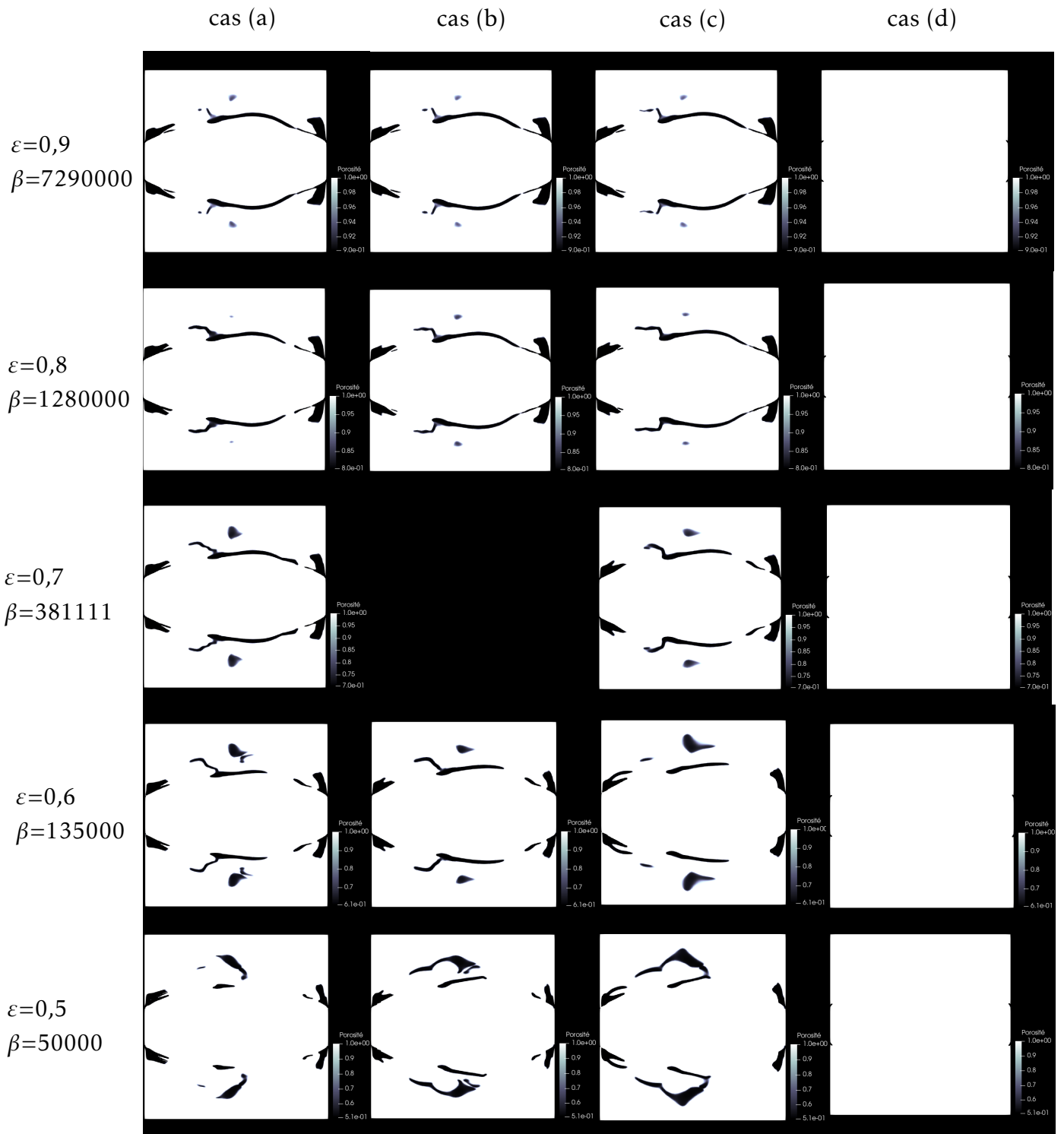


FIGURE 4.9 – Formes optimisées obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 1).

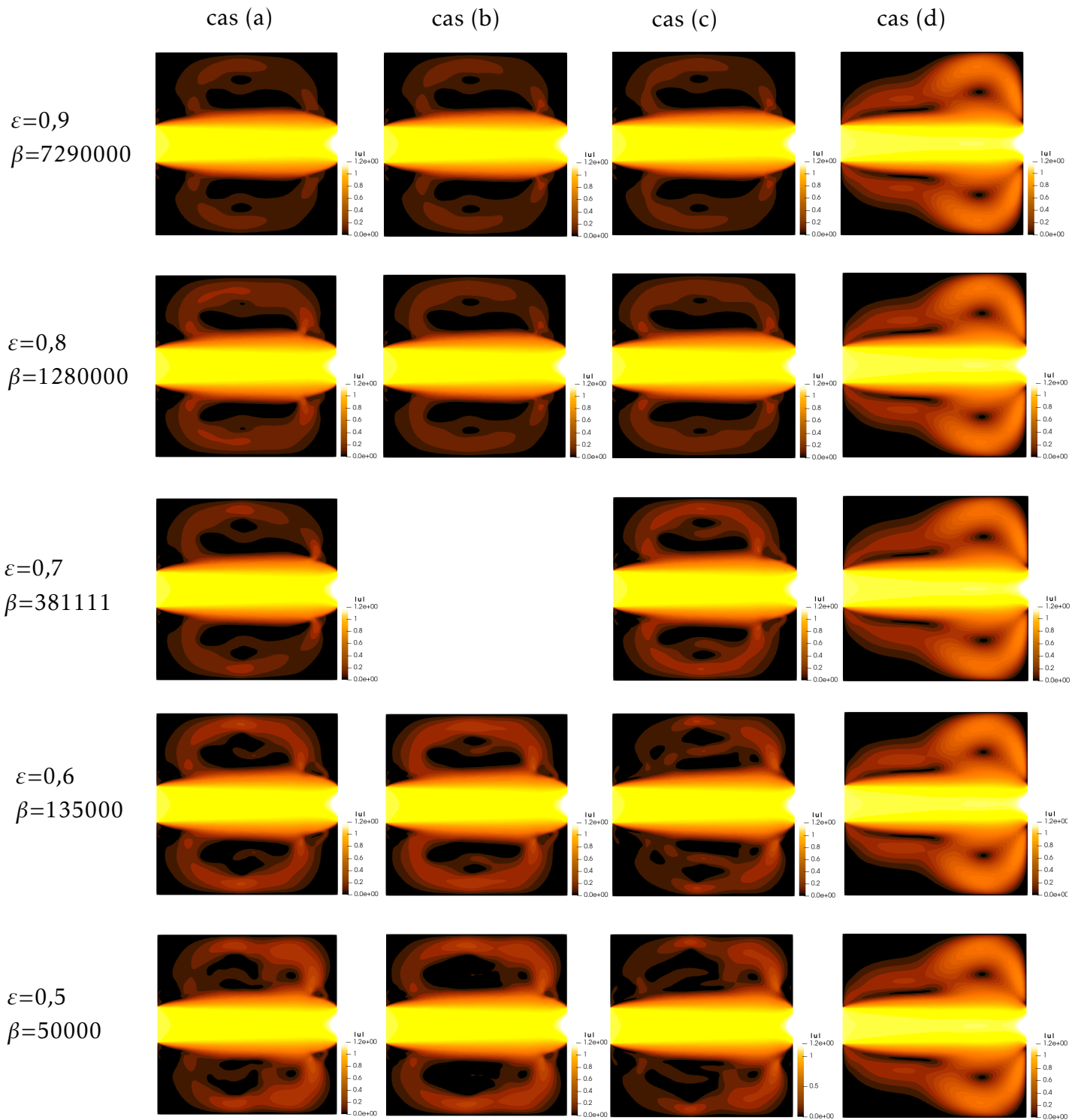


FIGURE 4.10 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 1).

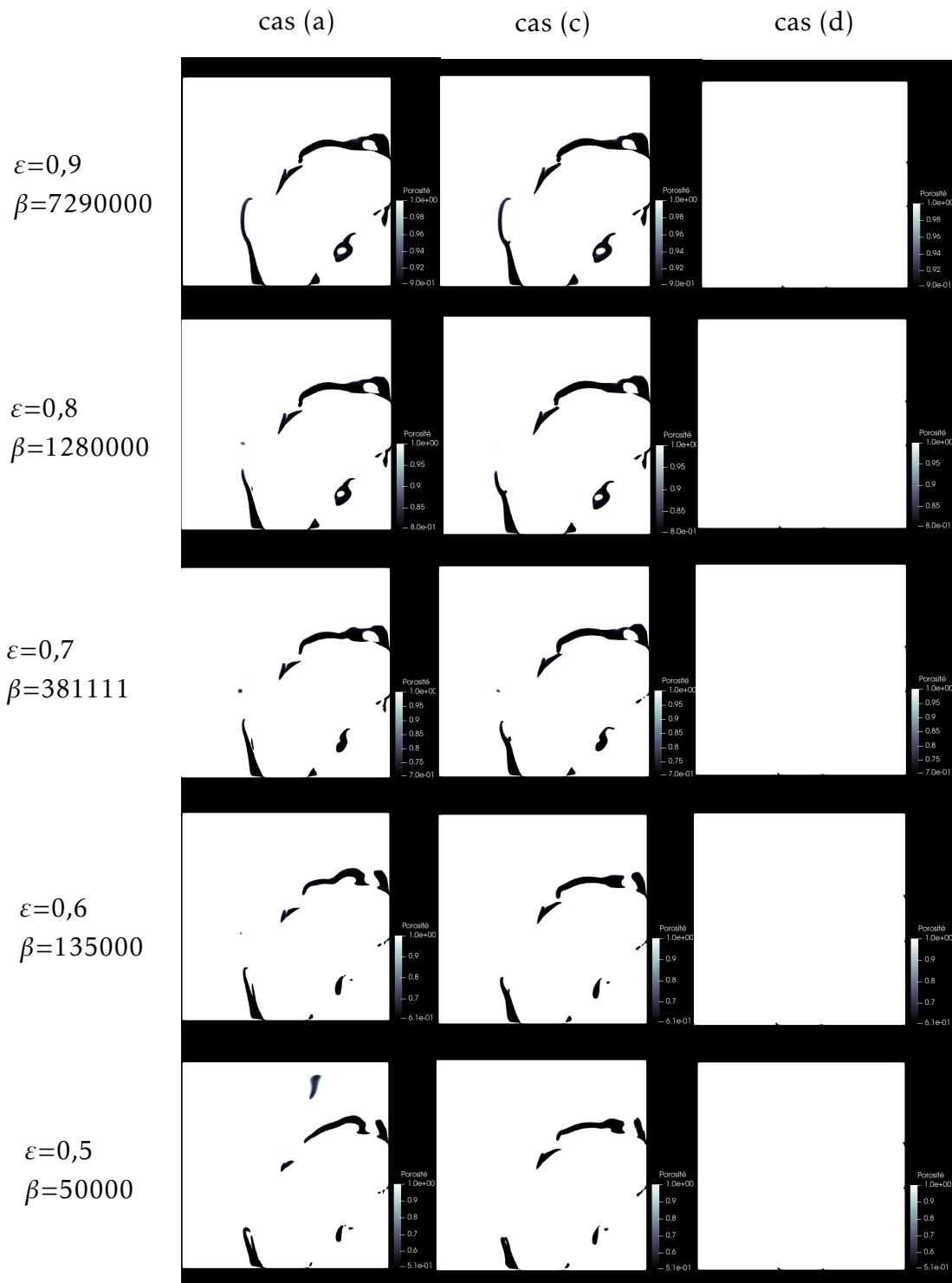


FIGURE 4.11 – Formes optimisées obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 2).

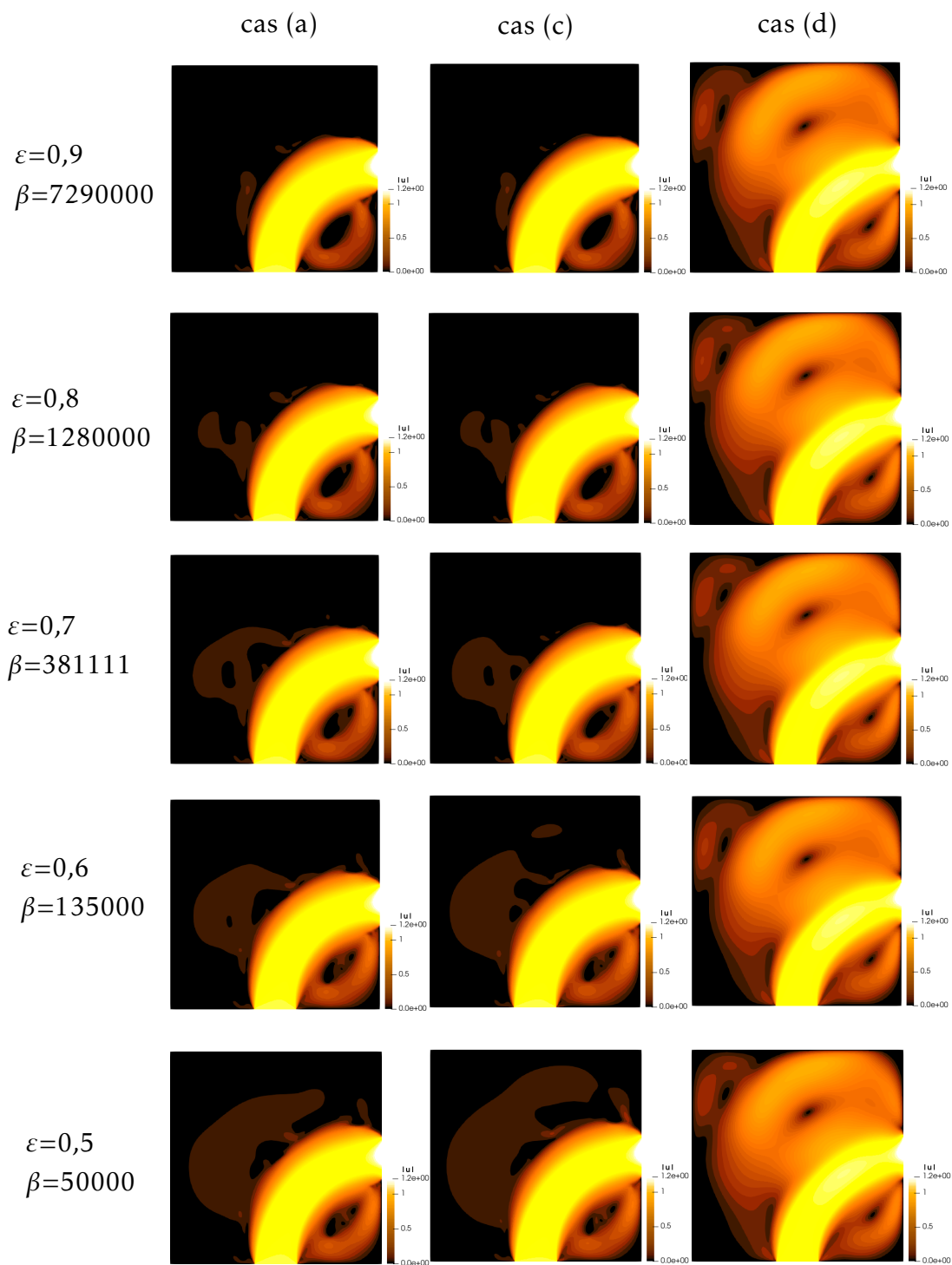


FIGURE 4.12 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 2).

une nouvelle fois la symétrie des formes optimisées obtenues dans le cas de la géométrie 1 (un single pipe) sur la Figure 4.9. L'approche d'optimisation utilisée permet de pénaliser la vitesse de fluide c'est-à-dire, les zones qui contiennent des matériaux poreux ont une vitesse de fluide  $|\mathbf{u}|$  qui tend vers zéro pour un nombre de Darcy de  $Da = 10^{-5}$  (Figures 4.10 et 4.12). De même, ces champs de vitesse sur les Figures 4.10 et 4.12 montrent des zones de recirculation atténuées, voire absentes, qui s'observent clairement en comparaison des résultats du cas (d). Les formes optimisées obtenues avec les modèles (a), (b) et (c) sont visuellement proches, il y a donc une cohérence des résultats même si quelques différences peuvent s'observer pour ( $\varepsilon = 0,5$ ,  $\beta = 50000$ ) et dans une moindre mesure pour ( $\varepsilon = 0,6$ ,  $\beta = 135000$ ). Les formes optimisées sont en accord avec ce que l'on s'attend à observer comme distribution de matière dans le domaine de calcul quand on souhaite minimiser les pertes de charge par rapport aux configurations initiales (Figure 4.1). Les modèles (a), (b) et (c) ont donc permis d'optimiser l'écoulement de fluide, pas le modèle (d). On notera que le cas (b) n'a pas produit de résultats exploitables, c'est-à-dire qui ont atteint les critères d'arrêt, avec la géométrie 2.

Il y a systématiquement une minimisation de la fonction objectif J (en excluant le cas (d)) et ces valeurs vont de 3 à 10% pour la géométrie 1 et de 10 à 14% pour la géométrie 2 (voir les cinq premières valeurs des tableaux 4.4 et 4.5). La minimisation de J avec la géométrie 2 est plus grande qu'avec la géométrie 1. Il est en effet plus simple de minimiser la valeur de la fonction objectif qui porte sur les pertes de charge dans le cas de la géométrie 2. Dans la géométrie 1 qui est un single pipe, l'entrée est en face de la sortie, le mouvement du fluide est donc déjà dans le bon sens et en ligne droite. Il y a donc relativement peu de modifications géométriques à apporter. En revanche, dans la géométrie 2, les zones à pénaliser sont moins évidentes. Comme on peut le voir sur la Figure 4.1. De plus, on observe initialement des zones de recirculation de fluide dans les géométries. Ces écoulements secondaires sont dus au cisaillement et participent à maintenir l'équilibre des écoulements dans leurs positions initiales. Ces situations demandent de l'énergie au système fluide, il est donc compréhensible que l'algorithme d'optimisation pénalise ces zones tout en maintenant la forme principale de l'écoulement de fluide. Les plus fortes minimisations de J (tableaux 4.4 et 4.5) sont obtenues quand la porosité  $\varepsilon$  est égale 0,9 et quand la valeur de  $\beta$  est la plus grande. Les pourcentages de variation de la fonction objectif J sont proches entre les cas (a), (b) et (c) comme on peut le voir dans les tableaux 4.4 et 4.5, l'écart maximal obtenu est de 3% entre les cas (a) et (c), trouvé pour la géométrie 1 avec le couple de valeurs ( $\varepsilon = 0,5$ ,  $\beta = 50000$ ).

Enfin, les points suivants sont à retenir à la suite de ces résultats :

1. il est valide d'envisager une méthode d'optimisation topologique qui a pour but de trouver une répartition optimisée de matière solide pleine grâce aux valeurs de  $\varepsilon$  et  $\beta$ ,
2. à priori le choix du modèle d'écoulement de fluide entre les cas (a), (b) et (c) n'influence pas les formes optimisées,
3. avec les paramètres utilisés, le modèle (d) n'a pas permis d'optimiser l'écoulement de fluide,
4. les pourcentages de minimisation de J ainsi que les formes optimisées peuvent tout de même présenter des différences en fonction du couple ( $\varepsilon$ ,  $\beta$ ), on peut l'observer en se déplaçant d'une ligne à l'autre sur les Figures 4.9 et 4.11. Il semble donc que les coefficients  $\varepsilon$  et  $\beta$  n'aient pas le même poids dans la méthode d'optimisation.

On retiendra de ces résultats qu'il est possible de trouver plusieurs répartitions optimisées

de matériaux poreux avec une méthode d'optimisation topologique suivant les valeurs de la porosité ( $\varepsilon$ ) et du diamètre moyen effectif des grains (à travers  $\beta$ ). En conséquence, indiquer uniquement la valeur d'une perméabilité ( $\mathbf{k} = K$ ) est insuffisant pour trouver un milieu poreux de forme optimisée considéré à l'échelle macroscopique.

#### 4.5.4 Influence des caractéristiques géométriques du matériau poreux pour différentes valeurs du nombre de Darcy

Dans cette section, les simulations numériques sont réalisées avec pour objectif d'étudier l'influence des valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et  $\beta$ . Contrairement à la section précédente (4.5.3), les formes optimisées ne font pas intervenir des matériaux poreux qui ont la même valeur de perméabilité. D'une part, les variations du diamètre moyen effectif des grains  $d_p$  se font à travers les valeurs de  $\beta$  et les trois valeurs de  $\beta$  étudiées sont  $\beta = \{2.10^4; 1.10^5; 1.10^6\}$  avec  $\beta = \frac{CL^2}{d_p^2}$ . D'autre part, les trois valeurs de porosité  $\varepsilon$  étudiées sont  $\varepsilon = \{0,3; 0,5; 0,8\}$ . Chaque couple de valeur ( $\varepsilon, \beta$ ) correspond à une valeur de perméabilité et donc à un certain nombre de Darcy comme on a pu le voir dans la section 4.5.3. Les résultats obtenus pour chaque géométrie sont présentés en deux parties. Ceux de la géométrie 1 sont illustrés sur les Figures 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 et ceux de la géométrie 2 sur les Figures 4.17, 4.18, 4.19, 4.20.

Tout d'abord, on notera une nouvelle fois que les formes optimisées obtenues avec la géométrie 1 (un single pipe) sont symétriques comme dans les sections 4.5.1 et 4.5.3. Contrairement aux cas étudiés dans 4.5.3, on observe que le modèle (d) a produit une forme optimisée pour ( $\varepsilon = 0,3, \beta = 1000000$ ) avec la géométrie 1 et une forte proportion de matière a été ajoutée par l'algorithme (Figure 4.13). Il en résulte la plus importante minimisation de la fonction objectif pour la géométrie 1 qui est de 15% (tableau 4.4).

Ensuite, pour une valeur  $\beta$  constante, les pourcentages de minimisation de J augmentent quand la valeur de la porosité  $\varepsilon$  diminue (tableaux 4.4 et 4.5). De plus, pour une valeur  $\varepsilon$  constante, les pourcentages de minimisation de J augmentent quand la valeur de  $\beta$  augmente (tableaux 4.4 et 4.5). Ces deux observations ne sont pas les mêmes que la section précédente 4.5.3 où on avait observé que les pourcentages de minimisation de J les plus forts étaient obtenus pour les plus grandes valeurs des deux paramètres  $\varepsilon$  et  $\beta$ . Ici, les plus fortes minimisations de la fonction objectif J sont obtenues quand  $\beta$  est grand et  $\varepsilon$  est petit. Cette combinaison produit de faibles valeurs du nombre de Darcy et c'est finalement la valeur du nombre de Darcy qui influence la minimisation de J et non les valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et de  $\beta$ .

Par rapport à la section 4.5.3 où les valeurs maximales de minimisation étaient de 10% et 14% respectivement pour la géométrie 1 et la géométrie 2, on obtient maintenant des minimisations maximales qui sont de 15% et 19%. Un nombre de Darcy  $Da=6E-8$  permet une plus forte minimisation (-5%) de J par rapport à  $Da=1E-5$ . Ce qui signifie qu'utiliser une matière avec une plus faible perméabilité permet effectivement de réduire plus efficacement les pertes de charge dans le domaine de calcul en pénalisant le fluide. Cette observation est une évidence, il faut toutefois veiller à ne pas choisir une valeur du nombre de Darcy  $Da$  trop petite, car le problème d'optimisation n'étant pas convexe, on n'a pas l'unicité d'un optimum et de plus, on a que des minimums locaux (voir [76]). Pour un nombre de Darcy petit (comme dans la section précédente 4.5.3), la procédure d'optimisation topologique se



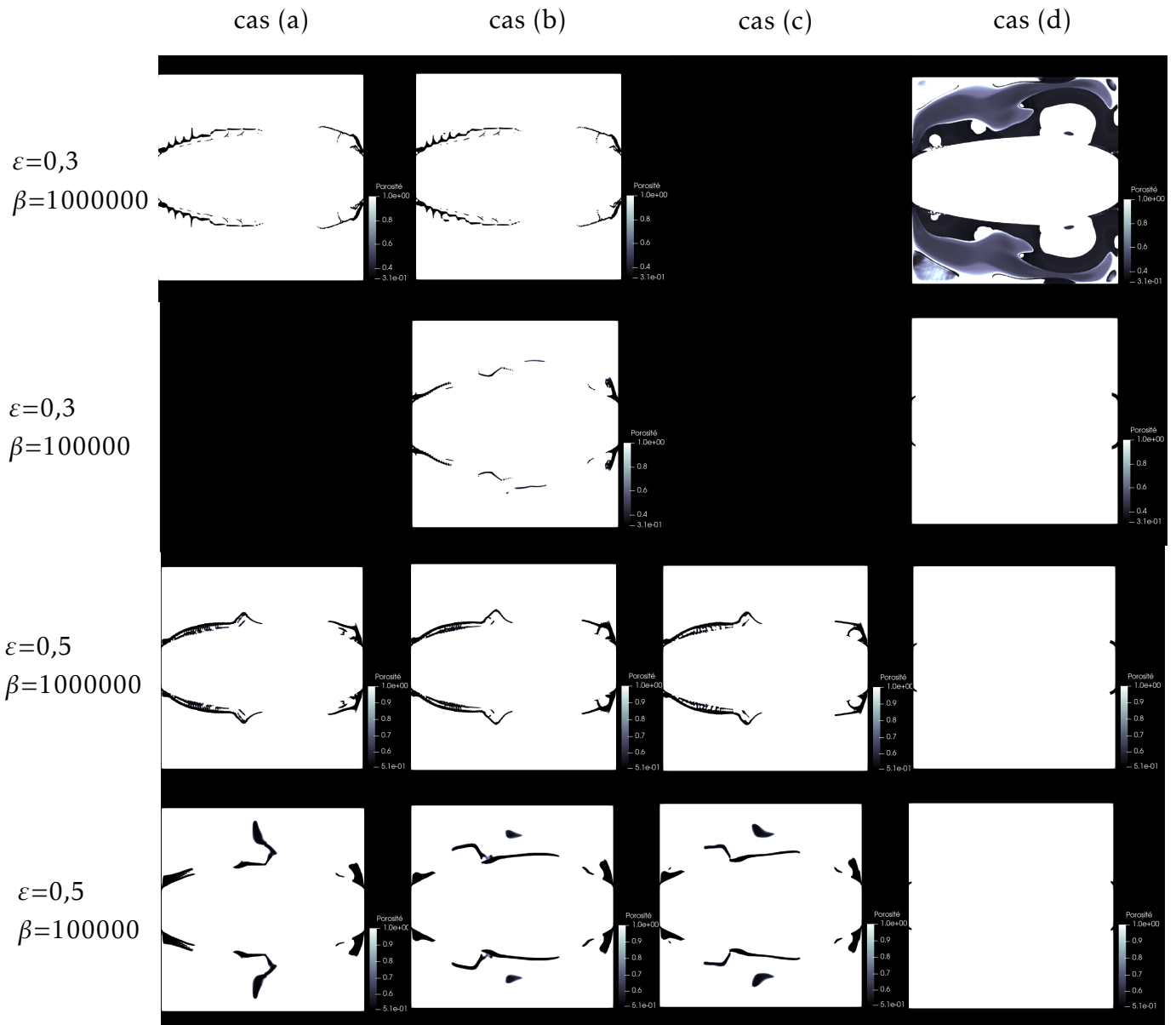


FIGURE 4.13 – Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1.

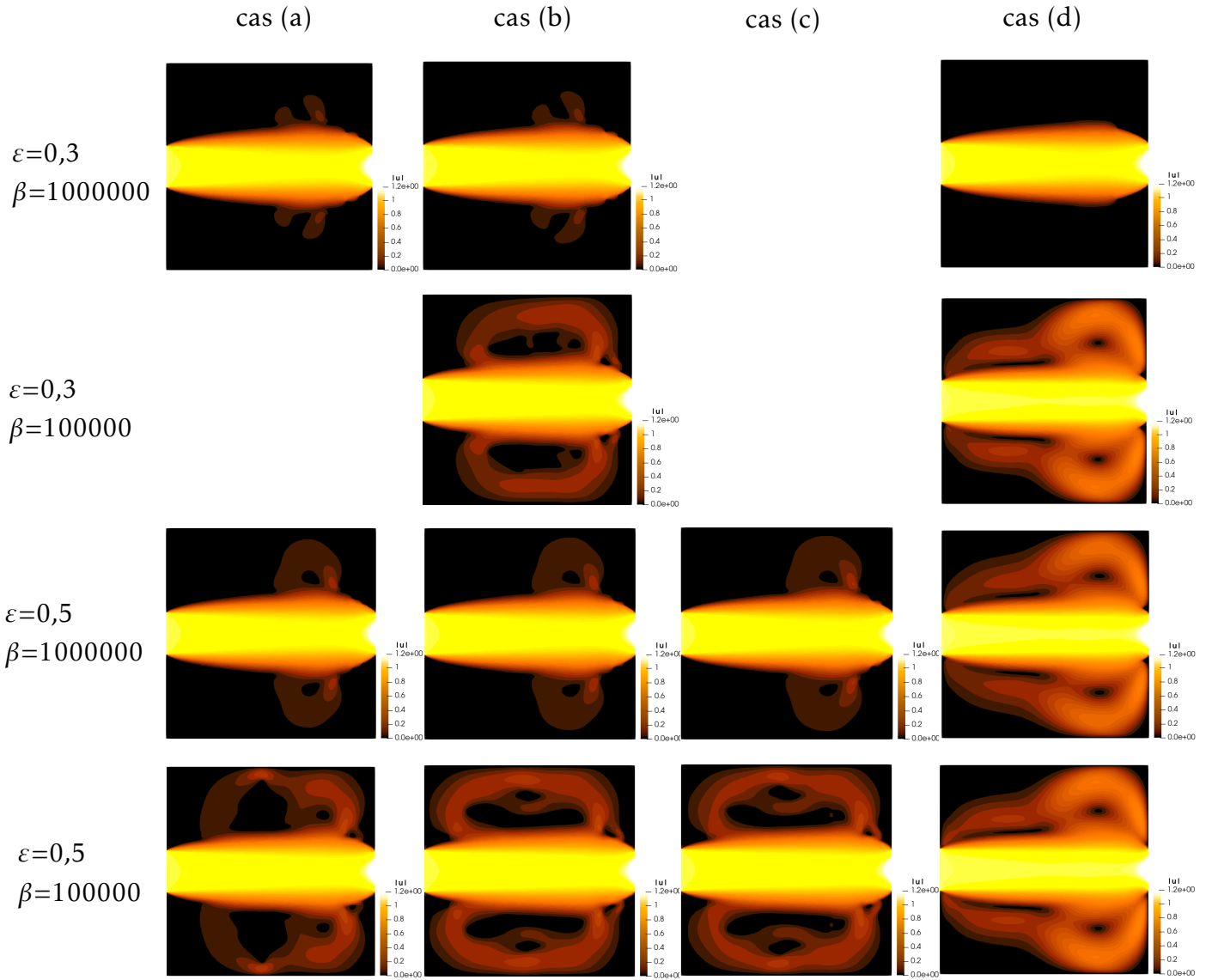


FIGURE 4.14 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1.

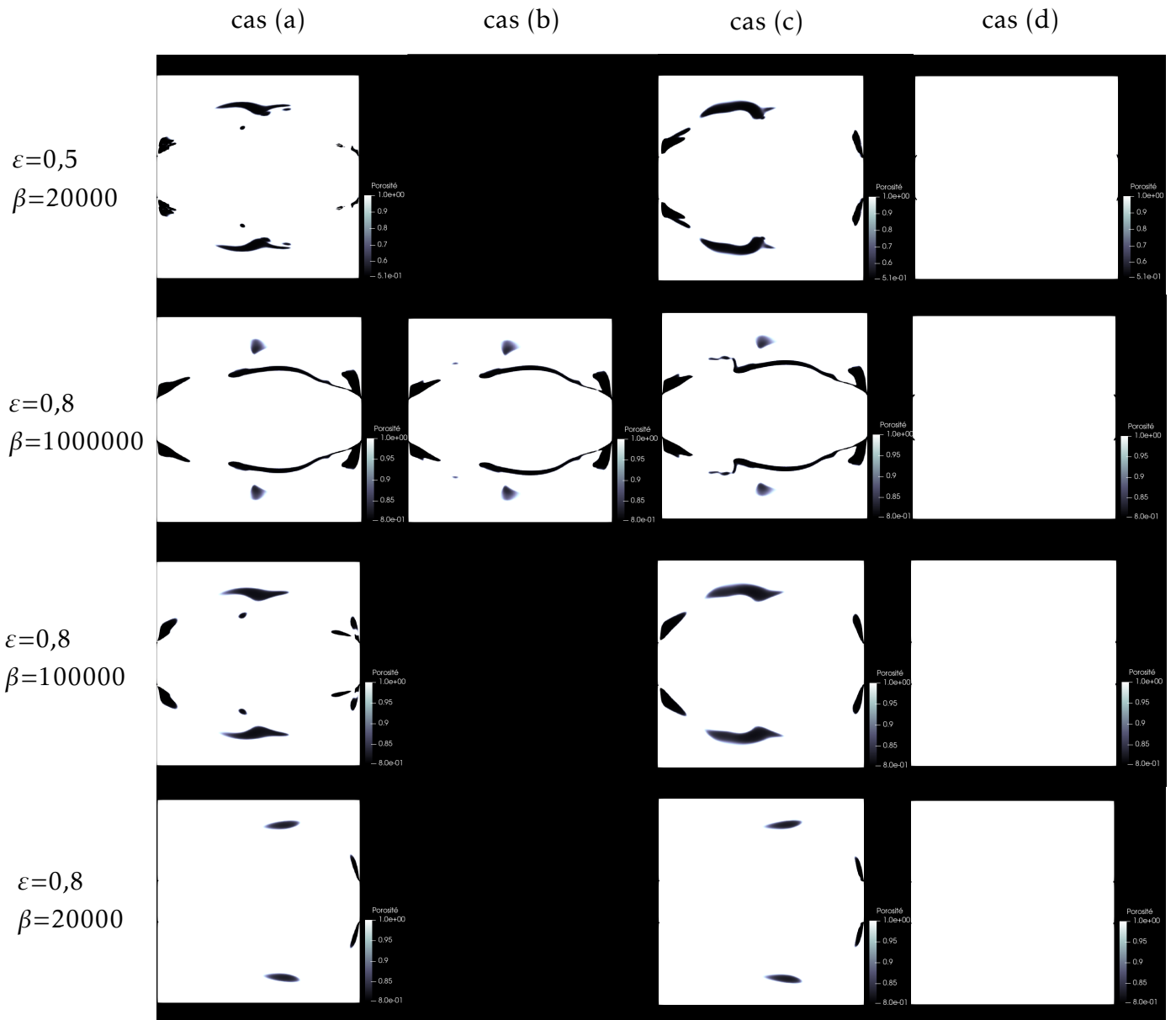


FIGURE 4.15 – Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2.

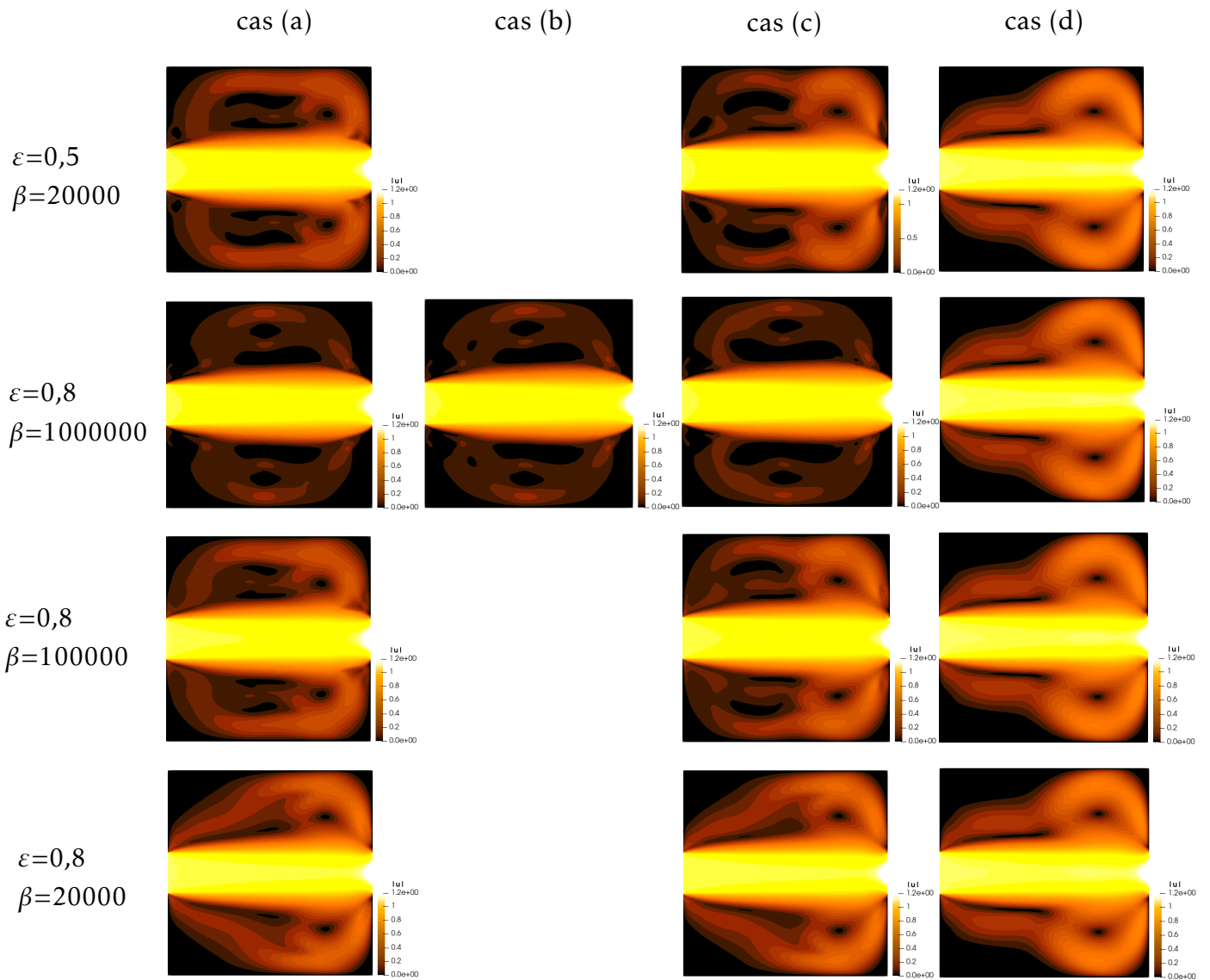


FIGURE 4.16 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2.

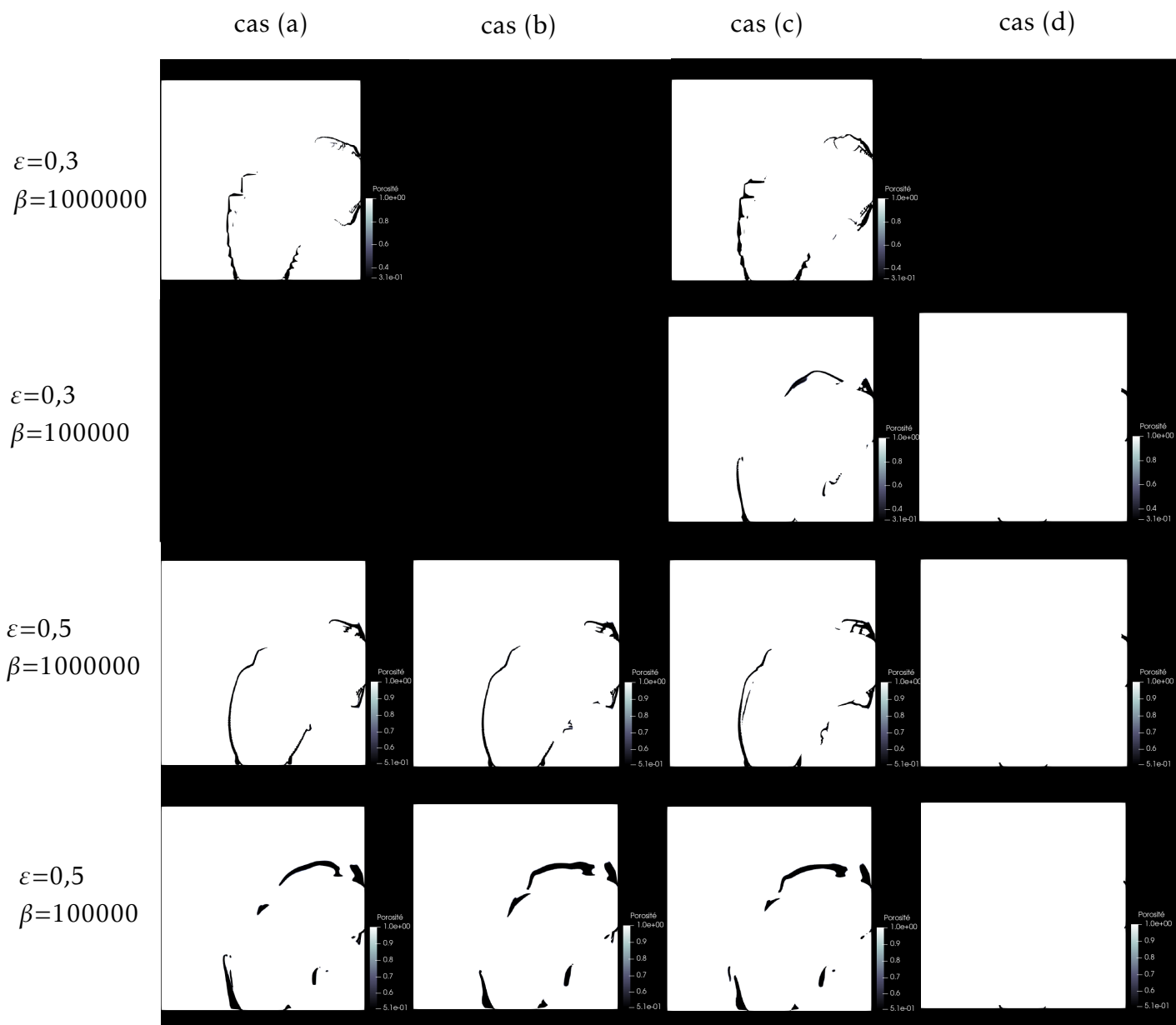


FIGURE 4.17 – Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1.

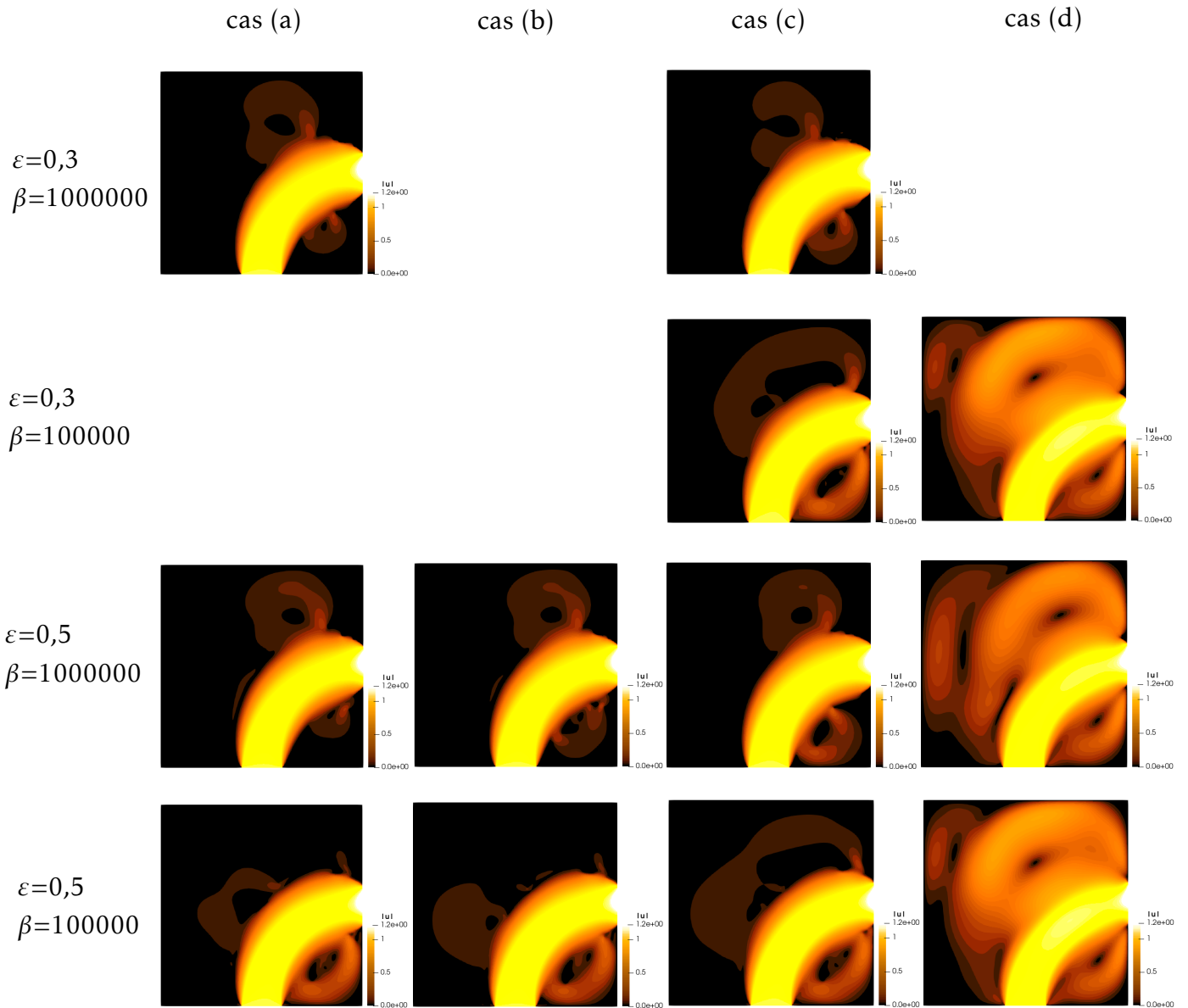


FIGURE 4.18 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1.

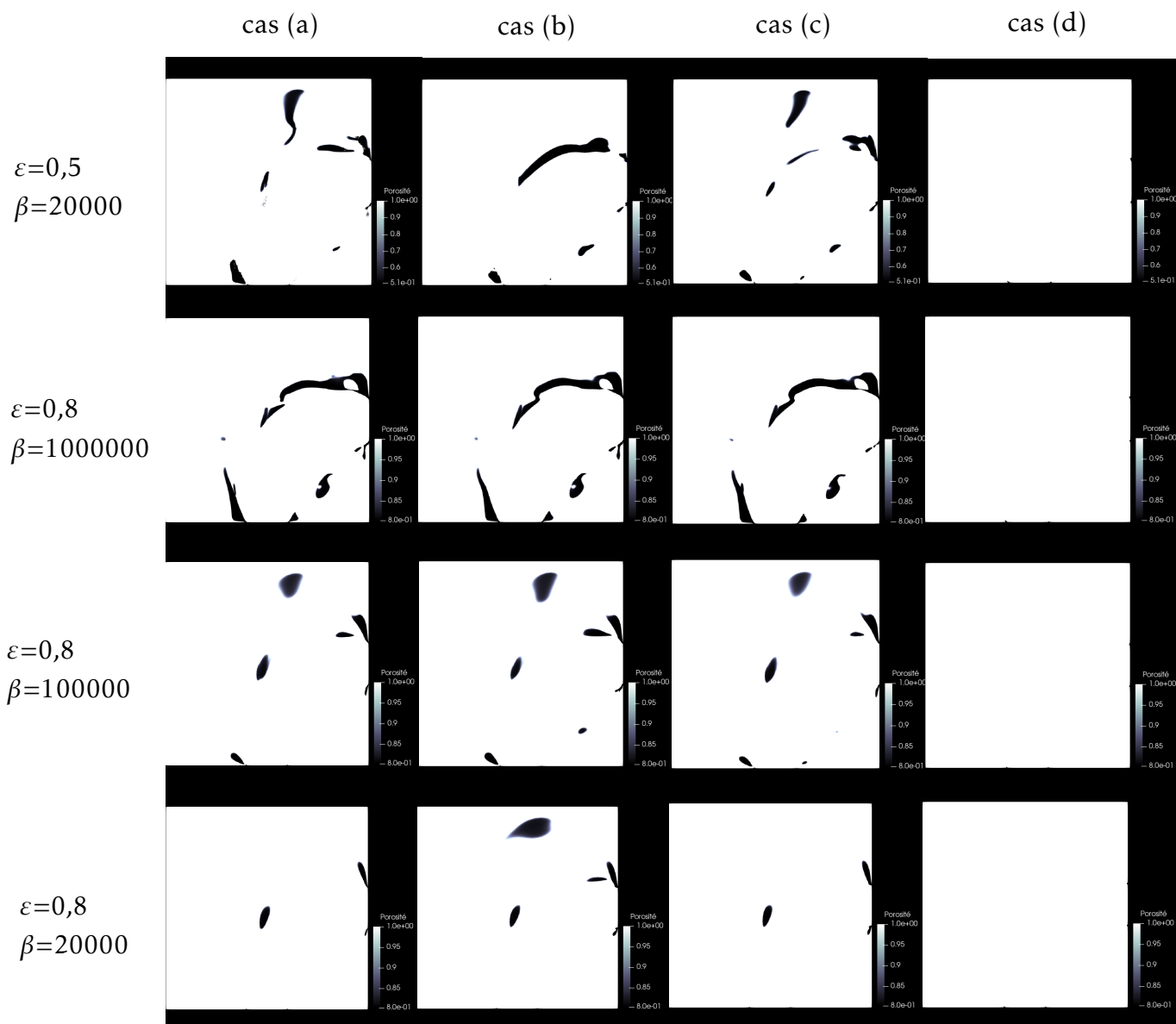


FIGURE 4.19 – Formes optimisées obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2.

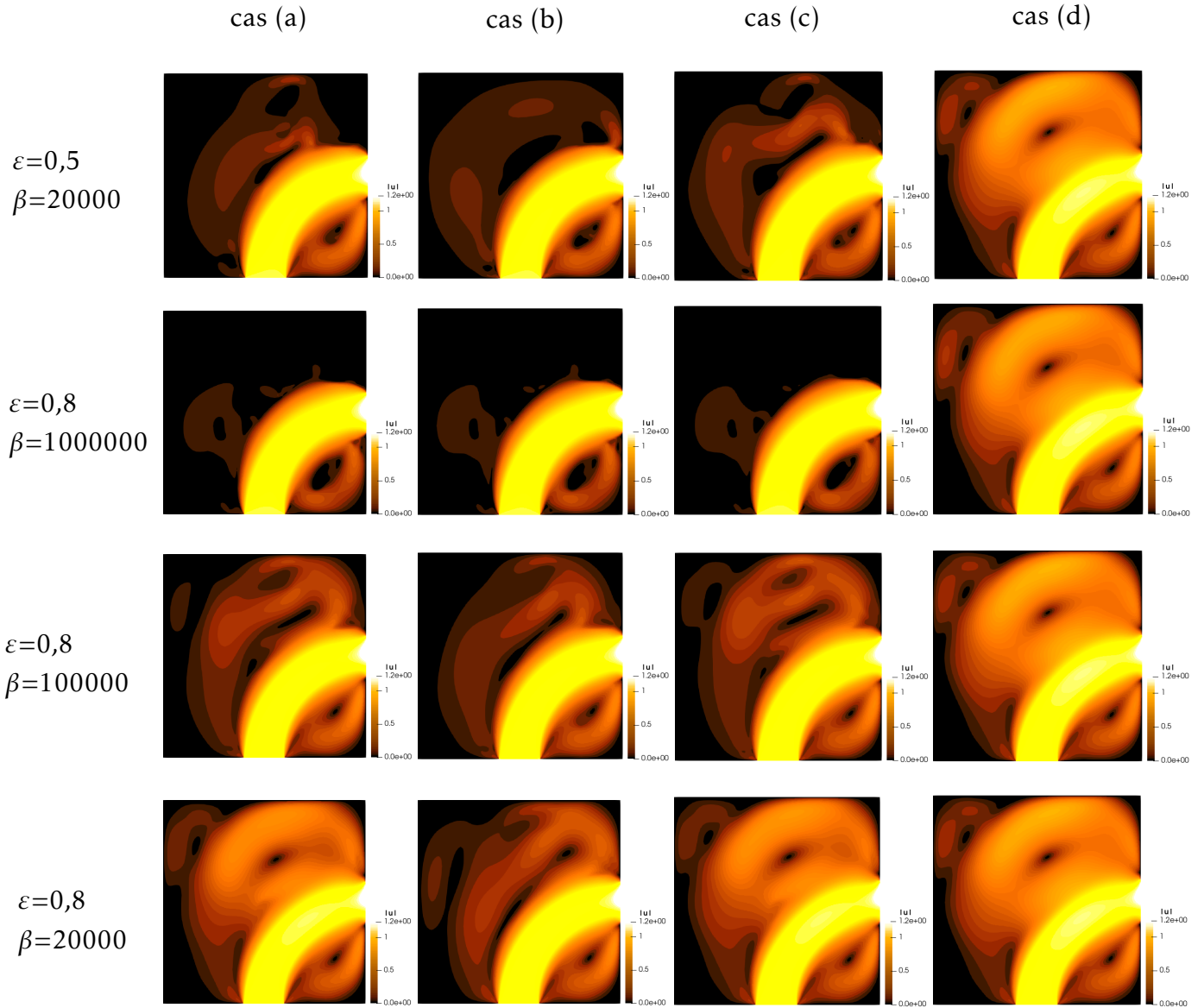


FIGURE 4.20 – Répartitions de vitesse  $|\mathbf{u}|$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2.



rapproche des procédures classiques qui visent à trouver la distribution de matière solide pleine dans le domaine de calcul. Il n'est pas possible de discuter des résultats obtenus pour les grandes valeurs du nombre de Darcy (1E-4 et 6E-4), car l'algorithme a du mal à optimiser l'écoulement, c'est-à-dire que l'algorithme ne place pas de matière, quel que soit le modèle utilisé.

En parallèle, les plus petites valeurs du nombre de Darcy produisent des formes optimisées qui sont de faibles épaisseurs (voir Figures 4.13 et 4.17) comme le montrent les formes optimisées pour le couple de valeurs ( $\varepsilon = 0,3$ ,  $\beta = 1000000$ ). Ces résultats sont en accord avec ceux présentés dans [76, Figure 2] où l'influence du nombre de Darcy  $Da$  sur les résultats d'optimisation topologique est discutée. Le modèle utilisé dans [76] est un modèle d'écoulement de Navier-Stokes avec un terme classique de pénalisation de Brinkman et il n'y a pas de spécification sur le volume minimal ou maximal de matière à ajouter. Il y est montré que le choix de la valeur de  $Da$  a un fort impact sur la solution obtenue dans le cas où des barrières sont placées par l'algorithme dans le but de dévier un écoulement de fluide. Les résultats dans [76] sont présentés pour  $Da = 10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  et  $10^{-6}$  et indiquent que les barrières deviennent de plus en plus minces à mesure que le nombre de Darcy diminue. On peut donc supposer qu'une accentuation des zones qui devraient être pénalisées peut se produire, ce qui traduirait des difficultés de l'algorithme et a pour conséquence une augmentation des épaisseurs de matière. Cela peut être le cas quand  $\varepsilon$  est grand et cette observation peut expliquer pourquoi dans la section précédente 4.5.3, les plus fortes minimisations de  $J$  ont été obtenus lorsque la porosité du matériau poreux recherché était la plus grande (voir Figures 4.9 et 4.11).

On retiendra de ces résultats que la fonction objectif utilisée dans ces travaux ne permet pas de discuter de l'influence des valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et de  $\beta$ , car l'aspect *solide* de la matière prévaut sur les caractéristiques géométriques de la matière poreuse.

#### 4.5.5 Influence du choix du modèle d'écoulement de fluide

Je rappelle que le modèle (a) est une forme réduite du modèle proposé dans le chapitre 2, développé de manière à faire apparaître les gradients de porosité. L'objectif qui était d'utiliser ce modèle proposé en optimisation topologique est atteint grâce aux résultats qui ont été produits et discutés dans les sections précédentes. La question qui se pose ensuite est l'influence de la présence ou de l'absence des termes avec un gradient de porosité qui se trouvent dans le modèle (a). Un problème d'optimisation topologique est un bon candidat pour observer l'intérêt de ces termes, car l'hétérogénéité spatiale est présente. C'est pourquoi des simulations numériques ont été réalisées avec les modèles (b), (c), (d) et (e) qui sont des variants du modèle (a), bien que la validité de l'utilisation de ces modèles ne soit pas justifiée en théorie pour un milieu poreux hétérogène.

Des simulations numériques ont été réalisées avec le modèle (e) et un terme de Darcy écrit en remplaçant  $h_\tau(\alpha)\mathbf{u}$  par  $\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{Re \varepsilon^3}\mathbf{u}$  et en considérant que la variable de conception  $\alpha$  agit sur la porosité  $\varepsilon$ . On a alors un modèle de Brinkman (tableau 1.1) où  $\mu_{eff} = \mu$  avec la présence d'un terme de convection. Il se trouve que dans ce cas, l'algorithme d'optimisation ne peut pas actualiser les valeurs de la variable de conception. Ceci s'explique par l'écriture du gradient de la fonction objectif. En effet, dans cette formulation, les coefficients de porosité

sont seulement présents dans le terme de Darcy  $\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re } \varepsilon^3} \mathbf{u}$  et les dérivées par rapport à  $\alpha$  de ce terme sont produits de  $(1-\varepsilon(\alpha))$ . Au vu de la condition initiale, le domaine de calcul est rempli de fluide donc  $(1-\varepsilon(\alpha))$  est égal à 0. De ce fait, le calcul du gradient nécessiterait la présence initiale d'un matériau poreux. Le modèle (d) n'a pas cet inconvénient, car un coefficient de porosité se trouve dans le terme de diffusion. Finalement, la formulation de Kozeny-Carman pour trouver la perméabilité et une variable de conception qui agit sur la porosité ne peuvent pas être utilisées directement avec un modèle de Stokes ou de Navier-Stokes auquel on aurait ajouté un terme de Darcy. Il serait nécessaire de modifier les écritures qui aboutissent au calcul du gradient pour utiliser cette approche.

Les résultats produits avec le modèle (d) pour lequel le terme de Forchheimer est absent ne permettent pas d'optimiser l'écoulement de fluide. La seule situation où une forme optimisée a été produite correspond à la géométrie 1 et le couple de valeurs  $(\varepsilon = 0,3, \beta = 1000000)$ . Avec les paramètres étudiés, la présence du terme de Forchheimer est donc importante pour l'algorithme d'optimisation. On pense moins à l'écriture du terme de convection, qui présente une différence entre les modèles (c) et (d), car les résultats obtenus avec les modèles (A2) et (B2) dans le chapitre 3 avec le cas du *channelling* ont montré que l'écriture de ce terme a peu de conséquences sur la résolution numérique du problème d'écoulement de fluide en milieu poreux.

Comme on peut le voir dans les tableaux 4.4 et 4.5, le modèle (b) n'a pas convergé (n'a pas pu atteindre les critères d'arrêt) pour plusieurs paramètres. Il semble donc que le terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$  ait une importance d'un point de vue numérique.

On observe pour la géométrie 2, des écarts sur J entre les modèles (b) et (c), qui sont de 8%  $(\varepsilon = 0,5, \beta = 20000)$  et 5%  $(\varepsilon = 0,8, \beta = 20000)$ . Cela montre que les gradients de porosité qui se trouvent dans le terme de convection et le terme de diffusion de Brinkman peuvent influencer la méthode d'optimisation topologique.

Les formes optimisées obtenues avec le modèle proposé (a) et le modèle (c) qui néglige les gradients de porosité sont proches. Ceci est d'une part rassurant, car le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est généralement utilisé dans la littérature avec l'hypothèse d'une porosité constante. De plus, on avait également observé dans le chapitre 3 que les résultats obtenus avec un modèle d'écoulement de fluide qui néglige les gradients de porosité et un modèle qui fait apparaître les gradients de porosité peuvent présenter peu d'écarts, surtout quand le nombre de Reynolds est grand et quand le nombre de Darcy est faible. D'autre part, cette similitude des résultats entre les modèles (a) et (c) peut être due à la méthode numérique utilisée, qui est une méthode des volumes finis colocalisés. La méthode numérique induit nécessairement un biais, car la spécificité du modèle physique peut ne pas être prise en compte correctement.

On retiendra donc de ces résultats qu'avec les paramètres considérés, la formulation du modèle d'écoulement de fluide proposé produit des résultats d'optimisation qui sont dans l'ensemble proches de ceux obtenus avec une formulation du modèle avec l'hypothèse d'une porosité constante. Des différences ont parfois été observées, mais d'autres stratégies sont nécessaires pour savoir si les termes supplémentaires avec un gradient de porosité peuvent devenir indispensables dans l'approche de modélisation. Enfin, les résultats ont montré que le terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$  ainsi que les coefficients de porosité qui se trouvent à l'intérieur des opérateurs différentiels pour le terme de convection et de diffusion peuvent avoir une

influence sur les formes optimisées produites en optimisation topologique.

## 4.6 Conclusion du chapitre

L'optimisation topologique d'un écoulement de fluide a été étudiée dans ce chapitre. L'objectif a été de trouver une répartition optimisée de matériaux poreux et l'approche a consisté à :

1. considérer que l'écoulement de fluide se déroule dans un milieu poreux avec une hétérogénéité spatiale,
2. utiliser le modèle d'écoulement proposé dans le chapitre 2 qui fait apparaître les gradients de porosité,
3. choisir la porosité en tant que quantité physique dépendante de la variable de conception.

Au vu des résultats présentés, l'approche proposée est valide, car elle permet de reproduire les formes optimisées de la littérature en fonction de la valeur du pas de descente  $\gamma$ . De plus, cette approche permet, de façon identique aux méthodes habituelles de la littérature, d'optimiser l'écoulement en pénalisant la vitesse du fluide dans les zones non attractives, car dissipatrices d'énergie dans le cas d'une fonction objectif qui porte sur les pertes de charge et d'un matériau poreux proche d'un solide.

Pour des matériaux poreux avec la même perméabilité, il a été possible de trouver plusieurs répartitions optimisées de matière, suivant les valeurs de la porosité ( $\varepsilon$ ) et du diamètre moyen effectif des grains (à travers  $\beta$ ). Ces résultats suggèrent que ces variables qui sont caractéristiques de la configuration géométrique du matériau poreux n'ont pas le même poids dans la méthode d'optimisation. En conséquence, indiquer uniquement la valeur d'une perméabilité scalaire ( $\mathbf{k} = K$ ) est insuffisant pour trouver un milieu poreux de forme optimisée quand ce dernier est considéré à l'échelle macroscopique.

La fonction objectif considérée dans le problème d'optimisation n'a pas permis d'étudier l'influence des valeurs individuelles de  $\varepsilon$  et de  $\beta$  sur les formes optimisées. C'est l'aspect *solide* de la matière qui prévaut sur les caractéristiques géométriques de la matière poreuse quand on souhaite diminuer les pertes de charge.

Avec les paramètres considérés, la formulation du modèle d'écoulement de fluide proposé a produit des résultats d'optimisation qui sont dans l'ensemble proches de ceux obtenus avec une formulation du modèle avec l'hypothèse d'une porosité constante. Toutefois, les résultats ont montré que le terme  $\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$  ainsi que les coefficients de porosité qui se trouvent à l'intérieur des opérateurs différentiels pour le terme de convection et de diffusion peuvent avoir une influence sur les formes optimisées produites en optimisation topologique.

# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

### 5.1 Conclusion

Cette thèse s'intéresse à la modélisation d'un écoulement de fluide en milieu poreux hétérogène avec une application en optimisation topologique. L'idée principale est d'utiliser une approche d'optimisation basée sur la densité de matière pour un écoulement de fluide et la particularité consiste à chercher une répartition optimale de matière poreuse et non de matière solide pleine; afin d'obtenir un milieu poreux de forme optimisée. L'optimisation modifie les zones avec et sans matière poreuse, il y a donc une hétérogénéité spatiale qui est présente. Cette hétérogénéité est visible à l'échelle macroscopique, c'est l'échelle à laquelle les problèmes sont résolus dans la thèse. L'hétérogénéité est définie dans ces travaux dans le sens où les quantités physiques locales qui caractérisent le milieu poreux telles que la porosité  $\varepsilon$  ou le diamètre moyen effectif des grains  $d_p$  peuvent varier dans l'espace. Les questions de recherche qui ont été traitées dans la thèse sont :

- Quel est le modèle d'écoulement de fluide qu'il convient d'utiliser en présence d'un milieu poreux hétérogène?
- Comment poser et résoudre un problème d'optimisation topologique pour un écoulement de fluide dans le but de trouver une répartition optimisée de matière poreuse tout en tenant compte de l'hétérogénéité spatiale?

Mon approche a consisté à :

- considérer que l'écoulement de fluide se déroule dans un milieu poreux avec une hétérogénéité spatiale,
- utiliser un modèle d'écoulement en milieu poreux qui tient compte de cette hétérogénéité,
- choisir la porosité en tant que quantité physique dépendante de la variable de conception.

Un modèle d'écoulement obtenu avec une technique de prise de moyenne volumique est proposé. Ce modèle fait apparaître les gradients de porosité, habituellement négligés dans la littérature, pour tenir compte de l'hétérogénéité spatiale. Sa formulation se différencie de celles de la littérature par les termes qui s'y trouvent.

Des comparaisons avec des résultats de la littérature ont été apportées grâce à deux cas d'applications, le cas du bouchon poreux et le cas du *channelling*. Dans le premier cas, les normes des vitesses de fluide provenant de résultats de simulations numériques sont retrouvées. Dans le second cas, les normes des vitesses de fluides issues de résultats

expérimentaux sont reproduites. Ces deux cas d'applications permettent également d'étudier l'influence des termes avec un gradient de porosité et on retient que cette influence :

- se situe dans les zones où la porosité est variable, pour une zone de transition entre un fluide et une zone poreuse,
- dépend du nombre de Darcy du milieu poreux et l'influence des termes diminue quand la valeur du nombre de Darcy diminue,
- dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement et l'influence des termes diminue quand la valeur du nombre de Reynolds augmente.

Le modèle proposé a ensuite été utilisé dans une technique d'optimisation topologique avec pour particularité de choisir la porosité en tant que quantité physique dépendante de la variable de conception. C'est habituellement la perméabilité qui est choisie dans la littérature. Cette perméabilité scalaire est trouvée dans la thèse grâce à la relation de Kozeny-Carman. Elle dépend alors des caractéristiques géométriques que sont la porosité et le diamètre moyen effectif des grains. La fonction objectif utilisée vise à diminuer les pertes de charge et les résultats obtenus dans ces travaux montrent que l'approche proposée est valide. En effet, elle permet de reproduire les formes optimisées de la littérature et aussi d'optimiser l'écoulement en pénalisant la vitesse du fluide dans les zones non attractives quand une matière poreuse proche d'un solide est utilisée. Par exemple, certaines formes obtenues permettent de réduire les pertes de charge jusqu'à 19%. Ces formes optimisées produites ne sont pas toujours identiques quand on fait varier les valeurs des caractéristiques géométriques, mais que l'on garde la même valeur de perméabilité. Il semble alors que la porosité et le diamètre moyen effectif des grains n'ont pas le même poids dans la méthode d'optimisation. Indiquer seulement la valeur d'une perméabilité scalaire peut alors aboutir à différentes répartitions de matière poreuse en optimisation topologique. Enfin, les résultats d'optimisation montrent que l'écriture du modèle d'écoulement et les termes supplémentaires avec un gradient de porosité influencent la répartition de matière poreuse et donc, les formes optimisées produites.

## 5.2 Perspectives

À la suite de cette thèse, je propose les trois perspectives suivantes.

1. La première perspective est l'application de l'approche d'optimisation proposée pour la captation d'un polluant présent dans un fluide. La motivation initiale de ces travaux de thèse portait sur une application environnementale : comment procéder pour trouver la forme optimale d'un filtre par une répartition de matière poreuse obtenue avec une technique d'optimisation topologique? Cela nécessite la formulation de l'équation de transport de la concentration. Le problème peut être plus complexe s'il y a une réaction avec le milieu poreux comme dans le phénomène d'adsorption. Cette complexité s'accroît si plusieurs polluants sont considérés, car il peut y avoir une compétition pour les sites d'adsorption. Il est également possible d'étendre les notions de variations de porosité aux phénomènes qui apparaissent naturellement lors de l'utilisation d'un filtre. Il peut y avoir un blocage du filtre à cause de l'accumulation de polluants [28, 29] et la colonisation du filtre par des biofilms [31]. La modélisation de ces phénomènes répond à une problématique actuelle et présente des intérêts scientifiques, environnementaux et industriels.

2. La seconde perspective est la validation du modèle d'écoulement par rapport à des résultats expérimentaux où l'on connaît les distributions de porosité et de perméabilité. D'un point de vue global, les résultats expérimentaux d'écoulement de fluide en milieu poreux sont peu nombreux. Dans ces travaux, les résultats sont comparés à ceux de [46] de l'année 1998. Cela nécessite de mettre en place une stratégie pour mesurer localement les différentes quantités physiques que sont la vitesse de fluide, la porosité et la perméabilité. Ces expérimentations permettraient également de mesurer les gradients de porosité et d'étudier plus en détail leurs influences sur l'écoulement de fluide.
3. La troisième perspective vise à faire le lien entre différentes méthodes de changement d'échelles existantes. Cette démarche permet d'apporter des éléments de comparaison entre les méthodes de changement d'échelle qui ont chacune leurs communautés scientifiques dédiées. On peut notamment prendre exemple sur [32] où l'on trouve une comparaison entre la technique de prise de moyenne volumique avec résolution d'un problème de fermeture et la théorie de l'homogénéisation.

# Annexes

# Annexe A

## Fichiers de code

```
1 tmp<fvVectorMatrix> tUEqn
2 (
3   fvm::div(fvc::interpolate(1./epsilon)*fvc::interpolate(1./epsilon)*phi, U)//
4   1./epsilon/epsilon * fvm::div(phi, U) sans les variations de porosite
5   + 1./epsilon/epsilon/epsilon*((U*U)&fvc::grad(epsilon))
6   - fvm::laplacian(nu*(1./epsilon), U)//1./epsilon*fvm::laplacian(nu, U) sans
7   les variations de porosite
8   + fvm::Sp(nu/epsilon/epsilon*fvc::laplacian(epsilon), U)
9   - fvm::Sp(2.*nu/epsilon/epsilon/epsilon*magSqr(fvc::grad(epsilon)), U)
10  + nu/epsilon/epsilon*(fvc::grad(U)&fvc::grad(epsilon))
11  - nu/epsilon*(fvc::grad(U/epsilon)&fvc::grad(epsilon))
12  - nu/epsilon*((fvc::grad(U/epsilon))().T())&fvc::grad(epsilon))
13  + fvm::Sp(beta*nu*(1.-epsilon)*(1.-epsilon)/epsilon/epsilon/epsilon, U)
14  + fvm::Sp(betaa*Cf*(1.-epsilon)/sqrt(epsilon)/epsilon*mag(U), U)
15  );
16  fvVectorMatrix& UEqn = tUEqn.ref();
17  UEqn.relax();
18  if (simple.momentumPredictor())
19  {
20    solve
21    (
22      UEqn
23      ==
24      fvc::reconstruct
25      (
26        (
27          - fvc::snGrad(p)
28          )*mesh.magSf()
29      )
30    );
31  }
```

Code A.1 – Fichier UEqn.H

```
1 {
2   volScalarField rAU(1.0/UEqn.A());
3   surfaceScalarField rAUf("1|A(U)", fvc::interpolate(rAU));
4   volVectorField HbyA("HbyA", U);
5   HbyA = rAU*UEqn.H();
6 }
```



```

7  tUEqn.clear();
8
9  surfaceScalarField phiHbyA
10     (
11     "phiHbyA",
12     (fvc::interpolate(HbyA) & mesh.Sf())
13     );
14
15  adjustPhi(phiHbyA, U, p);
16
17  while (simple.correctNonOrthogonal())
18  {
19     fvScalarMatrix pEqn
20     (
21     fvm::laplacian(rAUf, p) == fvc::div(phiHbyA)
22     );
23  pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);
24  pEqn.solve();
25     if (simple.finalNonOrthogonalIter())
26     {
27         phi = phiHbyA - fvc::snGrad(p)*mesh.magSf()*rAUf;
28         p.relax();
29         U = HbyA + rAU*fvc::reconstruct((fvc::snGrad(p)*mesh.magSf(
30 *rAUf )/rAUf ) );
31         U.correctBoundaryConditions();
32     }
33 }

```

Code A.2 – Fichier pEqn.H

```

1  /*----- C++ -----*/
2  | ===== |
3  | \ \ / Field | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
4  | \ \ / Operation | Version: 2.2.1 |
5  | \ \ / And | Web: www.OpenFOAM.org |
6  | \ \ / Manipulation |
7  /*-----*/
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     location     "system";
14     object       fvSolution;
15 }
16 // * * * * *
17
18 solvers
19 {
20     "(p|pa)"
21     {
22         solver          PCG;
23         preconditioner  DIC;
24         tolerance       1e-08;
25         relTol          0.01;

```

```

26     maxIter      5000;
27 }
28
29 "(U|Ua)"
30 {
31     solver        PBiCGStab;
32     preconditioner DILU;
33     tolerance     1e-7;
34     relTol        0.1;
35 }
36 }
37
38 SIMPLE
39 {
40     nUCorrectors      0;
41     nNonOrthogonalCorrectors 0; //1 pour le cas du "channelling"
42     pRefCell          0;
43     pRefValue         0;
44     momentumPredictor yes;
45     residualControl
46     {
47         p            1e-6;
48         U            1e-5;
49     }
50 }
51
52 relaxationFactors
53 {
54     fields
55     {
56         "(p)"        0.7; //0.2 en optimisation topologique
57         "(pa)"       0.5; //0.2 en optimisation topologique
58         alpha        0.1; //variable de conception
59     }
60     equations
61     {
62         "(U)"        0.2; //0.3 en optimisation topologique
63         "(Ua)"       0.2; //0.3 en optimisation topologique
64     }
65 }
66 // *****

```

Code A.3 – Fichier fvSolution

```

1  /*----- C++ -----*/
2  |=====|
3  |  \ \ /  Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  |  \ \ /  Operation  | Version: 2.2.1
5  |   \ \ /  And       | Web: www.OpenFOAM.org
6  |   \ \ /  Manipulation |
7  |-----*/
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;

```



```

52 {
53     default      Gauss linear limited corrected 0.5;
54 }
55
56 interpolationSchemes
57 {
58     default      none;
59     interpolate(U)    linear;
60     interpolate(HbyA) reverseLinear;
61     flux(U)    linear;
62     interpolate((1|epsilon)) harmonic;
63     interpolate((1|A(U))) harmonic;
64     interpolate(p) linear;
65 }
66
67 snGradSchemes
68 {
69     default      corrected;
70 }
71
72 fluxRequired
73 {
74     default      no;
75     p;
76     pa;
77 }
78 // ***** //

```

Code A.4 – Fichier fvSchemes

## Annexe B

# Forme réduite du modèle d'écoulement de fluide utilisée en optimisation topologique

Je présente dans cette annexe un développement qui permet d'obtenir une forme réduite de l'équation de bilan de la quantité de mouvement du fluide grâce à une estimation des ordres de grandeur de chaque terme. Ce développement est mené dans le cas où le nombre de Reynolds est  $Re_H = 1000$  où l'indice  $H$  est précisé pour indiquer une longueur caractéristique de référence à l'échelle macroscopique (voir 1.5.5 pour une discussion sur le nombre de Reynolds).

L'équation (1.25) représente la contrainte d'échelle de longueur caractéristique quand l'hétérogénéité d'un milieu poreux est significative :

$$L_{fluide} \leq r_0 \sim L_\varepsilon, L_{\mathbf{u}}, \quad (\text{B.1})$$

où  $r_0$  est le rayon de l'E.V.R.,  $L_{fluide}$  est la longueur caractéristique d'un pore,  $L_\varepsilon$  est la longueur caractéristique associée à la variation macroscopique de porosité et  $L_{\mathbf{u}}$  est la longueur caractéristique associée à la variation macroscopique de vitesse. On note par  $\Delta$  la variation d'une quantité et on a :

$$\Delta\varepsilon = \mathcal{O}(1), \quad \mathbf{u} = \mathcal{O}(U) \text{ et donc } \Delta\mathbf{u} = \mathcal{O}(U), \quad (\text{B.2})$$

avec  $U$  une vitesse caractéristique. On voit dans [109] :

$$\nabla\phi = \mathcal{O}\left(\frac{\Delta\phi}{L_\phi}\right), \quad (\text{B.3})$$

où  $\phi$  est une quantité physique et  $L_\phi$  son échelle de longueur caractéristique. On introduit de nouveau l'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide dans le milieu poreux présenté au chapitre 2, dans sa forme sans dimension (2.63) :

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2 \text{Re}} \Delta \varepsilon \\ & - \left( \frac{2\mathbf{u}}{\varepsilon^3 \text{Re}} |\nabla \varepsilon|^2 - \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon \right) \\ & = - \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} - \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \mathbf{u}. \end{aligned}} \quad (\text{B.4})$$

Cette équation (B.4) permet de retrouver l'équation de Navier-Stokes dans le fluide et est valable dans un milieu poreux comme a pu le justifier les cas d'applications du chapitre 3. On observe que le nombre de Reynolds se trouve au dénominateur pour de nombreux termes. On choisit donc de réaliser une estimation des ordres de grandeur des termes de l'équation (B.4) grâce aux relations (B.1), (B.2) et (B.3). En considérant :

$$L_{\mathbf{u}} \sim L_{\varepsilon} = L_0, \quad (\text{B.5})$$

on obtient les résultats suivants :

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}\right) = \frac{\nabla\mathbf{u}}{\varepsilon} + \mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\nabla\mathbf{u}}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{u} \nabla\varepsilon}{\varepsilon^2} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{\varepsilon L_{\mathbf{u}}} - \frac{U}{\varepsilon^2 L_{\varepsilon}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U}{\varepsilon^2 L_0}\right), \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) + \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{2}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{\varepsilon^3 L_0}\right), \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{\varepsilon^3 L_0}\right), \quad (\text{B.8})$$

$$\beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}| = \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} U^2\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\beta} L_0 \left(\frac{U^2}{\varepsilon^3 L_0}\right)\right), \quad (\text{B.9})$$

$$\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} = \mathcal{O}\left(\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} U\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\beta L_0}{U \text{Re}} \left(\frac{U^2}{\varepsilon^3 L_0}\right)\right), \quad (\text{B.10})$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla\mathbf{u}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} (\varepsilon \Delta\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u} \nabla\varepsilon) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right), \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right), \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla\left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^3 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right), \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\nabla\left(\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}\right)\right]^T \cdot \nabla\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^3 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right), \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \mathbf{u} \Delta\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right), \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} |\nabla\varepsilon|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}\right). \quad (\text{B.16})$$

J'introduis les hypothèses suivantes sur  $\beta$ ,  $U$ ,  $L_0$ ,  $\text{Re}$  :

$$\sqrt{\beta} L_0 \geq 1, \quad U \geq 1, \quad \frac{\beta L_0}{\text{Re}} \geq 1, \quad (\text{B.17})$$

ce qui permet d'obtenir que les termes de Forchheimer (B.9) et de Darcy (B.10) soient du même ordre de grandeur que le terme de convection (B.7). L'hypothèse (B.17) indique que  $\beta$ ,  $U$ ,  $L_0$  et  $\text{Re}$  ne sont pas trop petits. On note que  $\varepsilon \leq 1$  donc on a :

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^3 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2}. \quad (\text{B.18})$$

Et, si  $L_0 \text{Re} \gg 1$ , on en déduit :

$$\frac{1}{\varepsilon^3 \text{Re}} \frac{U}{L_0^2} \ll \frac{U}{\varepsilon^3 L_0} \leq \frac{U^2}{\varepsilon^3 L_0}, \quad (\text{B.19})$$

ce qui permet de dire que les termes suivants deviennent négligeables dans l'équation (B.4) :

1.  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right)$
2.  $\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon$
3.  $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varepsilon$
4.  $\frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon} \right) \right]^T \cdot \nabla \varepsilon$
5.  $\frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \mathbf{u} \Delta \varepsilon$
6.  $\frac{2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} |\nabla \varepsilon|^2$

Je souhaite maintenir la présence du terme de Brinkman  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right)$  dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement du fluide dans le milieu poreux, car ce terme est nécessaire pour retrouver l'équation de Stokes ou de Navier-Stokes dans le fluide. Pour résumer, les restrictions utilisées sont :

$$L_{\mathbf{u}} \sim L_{\varepsilon} = L_0, U \geq 1, \sqrt{\beta} L_0 \geq 1, \frac{\beta L_0}{\text{Re}} \geq 1 \text{ et } L_0 \text{Re} \gg 1. \quad (\text{B.20})$$

En régime permanent, la forme réduite suivante qui sera utilisée dans les procédures d'optimisation topologique est :

$$\boxed{\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|. \end{aligned}} \quad (\text{B.21})$$

## Annexe C

# Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (a)

L'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide est représentée par (4.27) :

$$\boxed{\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ & = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|. \end{aligned}} \quad (\text{C.1})$$

J'utilise la même méthodologie que celle donnée dans [87] :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{p} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega = 0 \quad (\text{C.2})$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{p}^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega}_{T_1} \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \underbrace{\frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \delta \mathbf{u}}_{T_2} + \underbrace{\nabla \left( \frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{u}}_{T_3} + \underbrace{\nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \delta \mathbf{u}}_{T_4} \right] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^3} \nabla \cdot (\varepsilon \delta \mathbf{u} \mathbf{u})}_{T_5} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^3} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} \delta \mathbf{u})}_{T_6} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \mathbf{u})}_{T_7} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \delta \mathbf{u})}_{T_8} \right] d\Omega \quad (C.3) \\
&+ \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \right) d\Omega}_{T_9} \\
&- \int_{\Omega} \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \operatorname{Re}} \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \delta \mathbf{u} \cdot \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] d\Omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\underline{T_1}: \quad - \int_{\Omega} \mathbf{p}^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{p}^* \, d\Omega \quad (C.4)$$

$$\underline{T_2}: \quad - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned}
\underline{T_3}: \quad &- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \nabla \left( \frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{u} \right] d\Omega \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u}_j^* (\mathbf{u}_i \partial_i) \frac{\delta \mathbf{u}_j}{\varepsilon^2} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \partial_i \left( \mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_i \frac{\delta \mathbf{u}_j}{\varepsilon^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\delta \mathbf{u}_j}{\varepsilon^2} \partial_i (\mathbf{u}_j^* \mathbf{u}_i) \, d\Omega \\
&= - \int_{\Gamma} \mathbf{u}_j^* \frac{\delta \mathbf{u}_j}{\varepsilon^2} \mathbf{u}_i \mathbf{n}_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\delta \mathbf{u}_j}{\varepsilon^2} (\mathbf{u}_i \partial_i) \mathbf{u}_j^* \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\delta \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \, d\Omega \quad (C.6)
\end{aligned}$$

$$\underline{T_4}: \quad - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \delta \mathbf{u} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \right]^T \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (C.7)$$

T<sub>5</sub> :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \cdot \nabla \cdot (\varepsilon \delta \mathbf{u} \mathbf{u}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \cdot \nabla (\varepsilon \delta \mathbf{u}) \mathbf{u} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_j^*}{\varepsilon^3} \mathbf{u}_i \partial_i (\varepsilon \delta \mathbf{u}_j) \, d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \right) \mathbf{u} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{C.8}$$

T<sub>6</sub> :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \cdot \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u} \delta \mathbf{u}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \cdot \nabla (\varepsilon \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\nabla (\varepsilon \mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{C.9}$$

T<sub>7</sub> est similaire à T<sub>5</sub> :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \cdot \nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \cdot \nabla (\delta \mathbf{u}) \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_j^*}{\varepsilon^2} \mathbf{u}_i \partial_i (\delta \mathbf{u}_j) \, d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{u} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{C.10}$$

T<sub>8</sub> est similaire à T<sub>6</sub> :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u} \delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \cdot \nabla (\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\nabla (\mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{C.11}$$

T<sub>9</sub> :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \right) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) \, d\Omega \tag{C.12}$$

Donc on obtient une première écriture du problème adjoint :

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{p}} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{dans } \Omega \\
& - \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = \nabla p^* + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \right]^T \mathbf{u}^* + \varepsilon \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \right) \mathbf{u} - [\nabla (\varepsilon \mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \\
& - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{u} + [\nabla (\mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \operatorname{Re}} \mathbf{u}^* - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] \\
& \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned} \tag{C.13}$$

J'effectue les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \right) \mathbf{u} &= \varepsilon \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \right) - \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \\ -\nabla \left( \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{u} &= -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \right) \\ \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) &= [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} + \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} \right) \right]^T \mathbf{u}^*\end{aligned}$$

La forme finale du problème adjoint est :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{p}} &= \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{in } \Omega \\ -\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} &= \nabla \mathbf{p}^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\varepsilon^3} \mathbf{u}^* \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon - [\nabla(\varepsilon \mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^3} \\ &+ [\nabla(\mathbf{u})]^T \frac{\mathbf{u}^*}{\varepsilon^2} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u}^* - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] \quad \text{in } \Omega\end{aligned} \tag{C.14}$$

Pour les conditions aux limites du problème adjoint :

Sur  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned}-\mathbf{p}^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_{in} \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{p}} &\Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} &= 0\end{aligned} \tag{C.15}$$

Sur  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}-\mathbf{p}^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{p}} + \varphi &\Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \varphi \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} &= \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \Phi_{out}\end{aligned} \tag{C.16}$$

Sur  $\Gamma_w$  :

$$\begin{aligned}-\mathbf{p}^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_w \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{p}} &\Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} &= 0\end{aligned} \tag{C.17}$$

Sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\partial_n \delta \mathbf{u})_n \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\nabla \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla_\Gamma \cdot \delta \mathbf{u}_t - \kappa \delta \mathbf{u}_n)|_\Gamma \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] &= 0 \end{aligned}$$

Pour la vitesse  $\mathbf{u}$ , on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  donc on considère :  $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$

En imposant  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^* = 0 \text{ donc : } \mathbf{u}_t^* = 0$$

Pour  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned} -\mathbf{p}^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\ -\mathbf{p}^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* &= \left( \mathbf{p} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Pour la condition d'optimalité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \delta \alpha &= \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial \alpha} \delta \alpha \, d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial \alpha} \delta \alpha \, d\Gamma + \underbrace{\int_\Omega 2 \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \delta \alpha \mathbf{u} \mathbf{u} \right) d\Omega}_{\text{T1}} \\ &+ \int_\Omega \frac{3 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha)} \delta \alpha \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon(\alpha)) \, d\Omega - \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla (\partial \varepsilon(\alpha) \delta \alpha)) \, d\Omega}_{\text{T2}} \\ &- \underbrace{\int_\Omega \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega}_{\text{T3}} + \int_\Omega \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha \, d\Omega \quad (\text{C.19}) \\ &+ \int_\Omega \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha \, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} \partial \varepsilon(\alpha) c_F}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} \delta \alpha \, d\Omega \\ &+ \int_\Omega \frac{3}{2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} c_F (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} \delta \alpha \, d\Omega \end{aligned}$$

T<sub>1</sub> :

$$\int_\Omega 2 \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \delta \alpha \mathbf{u} \mathbf{u} \right) d\Omega = \int_\Gamma 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \delta \alpha [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_\Omega 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \delta \alpha \mathbf{u} \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \, d\Omega \quad (\text{C.20})$$

T<sub>2</sub> :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla (\partial \varepsilon(\alpha) \delta \alpha)) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\partial \varepsilon(\alpha) \delta \alpha) \, d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [[\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}] \partial \varepsilon(\alpha) \delta \alpha \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \right] \partial \varepsilon(\alpha) \delta \alpha \, d\Omega
\end{aligned} \tag{C.21}$$

T<sub>3</sub> :

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \left( \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha \nabla \mathbf{u} \right) \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha [\nabla \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \delta \alpha \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \, d\Omega \tag{C.22}$$

Finalemnt, le gradient de la fonction objectif J par rapport à la variable de conception  $\alpha$  est donné par :

$$\boxed{
\begin{aligned}
& - \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \alpha} = -2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u} \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \right] \partial \varepsilon(\alpha) + \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \\
& + \frac{3 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha)} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon(\alpha)) + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \\
& + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} \partial \varepsilon(\alpha) c_F}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} + \frac{3}{2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} c_F (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} \\
& - \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^3(\alpha)} [[\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}] \partial \varepsilon(\alpha) - \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} [\nabla \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Et en imposant  $\partial_{\alpha} \varepsilon(\alpha) = 0$  sur les frontières, on a  $\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 0$ .

## Annexe D

### Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (b)

L'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide est représentée par (4.28) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) + \nabla p^f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) \\ = -\beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u} - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{u} \cdot |\mathbf{u}|. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

J'utilise la même méthodologie que celle présentée à l'Annexe C.

La forme finale du problème adjoint est :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J_\Omega}{\partial p} &= \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{in } \Omega \\ -\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} &= \nabla p^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \\ + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u}^* - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] & \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Pour les conditions aux limites du problème adjoint :

Sur  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned} -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_{in} \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Sur  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \varphi \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \varphi \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \partial_n \mathbf{u} \cdot \Phi_{out}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Sur  $\Gamma_w$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_w \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\partial_n \delta \mathbf{u})_n \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\nabla \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla_\Gamma \cdot \delta \mathbf{u}_t - \kappa \delta \mathbf{u}_n)|_\Gamma \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0
\end{aligned}$$

Pour la vitesse  $\mathbf{u}$ , on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  donc on considère :  $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$

En imposant  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^* = 0 \text{ donc : } \mathbf{u}_t^* = 0$$

Pour  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* = \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Finalement, le gradient de la fonction objectif J par rapport à la variable de conception  $\alpha$

est donné par :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u} \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T + \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \\
&+ \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \\
&+ \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} \partial \varepsilon(\alpha) c_F}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} + \frac{3}{2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} c_F (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} \\
-\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} [\nabla \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Et en imposant  $\partial_{\alpha} \varepsilon(\alpha) = 0$  sur les frontières, on a  $\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 0$ .



## Annexe E

# Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (c)

L'idée est de négliger tous les termes de gradient de porosité. L'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide est représentée par (3.8) et (4.29) :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} + \frac{\beta^{1/2}(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} c_F |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (\text{E.1})$$

J'utilise la même méthodologie que celle présentée à l'Annexe C.

La forme finale du problème adjoint est :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J_\Omega}{\partial p} &= \nabla \cdot \mathbf{u}^* && \text{in } \Omega \\ -\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} &= \nabla p^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u}^* - \beta^{1/2} \frac{c_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^{3/2}} \left[ |\mathbf{u}| \mathbf{u}^* + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*)}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \right] && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Pour les conditions aux limites du problème adjoint :

Sur  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned} -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \Phi_{in} \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} &\Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Sur  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \varphi \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \varphi \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \partial_n \mathbf{u} \cdot \Phi_{out}
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Sur  $\Gamma_w$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_w \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\partial_n \delta \mathbf{u})_n \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\nabla \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla_\Gamma \cdot \delta \mathbf{u}_t - \kappa \delta \mathbf{u}_n)|_\Gamma \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0
\end{aligned}$$

Pour la vitesse  $\mathbf{u}$ , on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  donc on considère :  $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$

En imposant  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^* = 0 \text{ donc : } \mathbf{u}_t^* = 0$$

Pour  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -p^* \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{u}^* = \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Finalement, le gradient de la fonction objectif J par rapport à la variable de conception  $\alpha$

est donné par :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} \mathbf{u} \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T + \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^T \\
 &+ \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \\
 &+ \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} \partial \varepsilon(\alpha) c_F}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} + \frac{3}{2} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} |\mathbf{u}| \frac{\beta^{1/2} c_F (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^{3/2}(\alpha)} \\
 -\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha)} [\mathbf{u} \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} [\nabla \mathbf{u}]^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Et en imposant  $\partial_{\alpha} \varepsilon(\alpha) = 0$  sur les frontières, on a  $\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \alpha} = 0$ .

## Annexe F

# Annulation des dérivées de Fréchet du Lagrangien dans le cas (d)

L'idée est d'utiliser une équation de Brinkman. L'équation de bilan de la quantité de mouvement de fluide est représentée par (4.30) :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p^f - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (\text{F.1})$$

J'utilise la même méthodologie que celle présentée à l'Annexe C.

La forme finale du problème adjoint est :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J_\Omega}{\partial p} &= \nabla \cdot \mathbf{u}^* && \text{in } \Omega \\ -\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} &= \nabla p^* + [\nabla(\mathbf{u}^*)]^T \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \\ +\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \right) - \beta \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 \text{Re}} \mathbf{u}^* &&& \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Pour les conditions aux limites du problème adjoint :

Sur  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned} -p^* \mathbf{n} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{n} &= -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_{in} \\ -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} &\Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Sur  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \varphi \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \varphi \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \partial_n \mathbf{u} \cdot \Phi_{out}
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Sur  $\Gamma_w$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*] - \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + \Phi_w \\
& -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} \Rightarrow -\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\partial_n \delta \mathbf{u})_n \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} [(\nabla \cdot \delta \mathbf{u} - \nabla_\Gamma \cdot \delta \mathbf{u}_t - \kappa \delta \mathbf{u}_n)|_\Gamma \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^*] = 0
\end{aligned}$$

Pour la vitesse  $\mathbf{u}$ , on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  donc on considère :  $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$

En imposant  $\delta \mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_w$  et  $\Gamma_{in}$  :

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \mathbf{u}_t^* = 0 \text{ donc : } \mathbf{u}_t^* = 0$$

Pour  $\Gamma_{out}$  :

$$\begin{aligned}
& -p^* \mathbf{n} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \\
& -p^* \mathbf{n} - (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* = \left( p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Finalement, le gradient de la fonction objectif J par rapport à la variable de conception  $\alpha$  est donné par :

$$\boxed{
\begin{aligned}
-\frac{\partial J_\Omega}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} \nabla \mathbf{u} : [\nabla \mathbf{u}^*]^\top + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{2 \beta (1 - \varepsilon(\alpha)) \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^3(\alpha) \text{Re}} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \frac{3 \beta (1 - \varepsilon(\alpha))^2 \partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^4(\alpha) \text{Re}} \\
-\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\varepsilon^2(\alpha) \text{Re}} [\nabla \mathbf{u}]^\top \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}
} \tag{F.7}$$

Et en imposant  $\partial_\alpha \varepsilon(\alpha) = 0$  sur les frontières, on a  $\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \alpha} = 0$ .

# Annexe G

## Tableaux des résultats d'optimisation topologique

Les valeurs des résidus de calcul sur J ont été calculés par :

$$\text{Résidu de calcul sur J} = |\text{J}_{\text{avant-dernière itération}} - \text{J}_{\text{dernière itération}}|. \quad (\text{G.1})$$

Tableau G.1 – Résidus de calcul sur J pour les modèles (a) et (e) avec  $Da = 5E-5$  (géométrie 1).

$\gamma$	Cas (e)	Cas (a) $\varepsilon = 0,9$	Cas (a) $\varepsilon = 0,8$	Cas (a) $\varepsilon = 0,7$	Cas (a) $\varepsilon = 0,6$
1E0	<1E-7	<1E-7	<1E-7	<1E-7	<1E-7
1E1	<1E-7	<1E-7	<1E-7	<1E-7	–
1E2	<1E-7	<1E-7	<1E-7	–	–
1E3	<1E-7	1E-7	1E-7	–	–
1E4	<1E-7	<1E-7	–	–	–
1E5	<1E-7	–	–	–	–

Tableau G.2 – Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour les modèles (a) et (e) avec  $Da = 5E-5$  (géométrie 1).

$\gamma$	Cas (e)	Cas (a) $\varepsilon = 0,9$	Cas (a) $\varepsilon = 0,8$	Cas (a) $\varepsilon = 0,7$	Cas (a) $\varepsilon = 0,6$
1E0	50464 (28h)	88607 (17h)	113999 (23h)	180787 (41h)	201242 (35h)
1E1	39929 (20h)	81240 (15h)	82696 (16h)	489644 (6h)	–
1E2	30533 (14h)	62465 (10h)	73571 (13h)	–	–
1E3	30028 (13h)	331284 (3h)	32575 (6h)	–	–
1E4	145926 (44h)	143720 (22h)	–	–	–
1E5	113388 (35h)	–	–	–	–

Tableau G.3 – Résidus de calcul sur J (géométrie 1).

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	1E-7	<1E-7	<1E-7	2E-7
0,8	1280000	1E-5	<1E-7	1E-7	<1E-7	1E-7
0,7	381111	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	1E-7
0,6	135000	1E-5	<1E-7	<1E-7	<1E-7	1E-7
0,5	50000	1E-5	<1E-7	1E-7	<1E-7	1E-7
0,3	1000000	6E-8	<1E-7	1E-7	–	<1E-7
0,3	100000	6E-7	–	<1E-7	–	1E-7
0,5	1000000	5E-7	<1E-7	<1E-7	<1E-7	<1E-7
0,5	100000	5E-6	<1E-7	<1E-7	<1E-7	1E-7
0,5	20000	3E-5	<1E-7	–	1E-7	1E-7
0,8	1000000	1E-5	<1E-7	<1E-7	<1E-7	1E-7
0,8	100000	1E-4	<1E-7	–	<1E-7	1E-7
0,8	20000	6E-4	<1E-7	–	1E-7	1E-7

Tableau G.4 – Résidus de calcul sur J (géométrie 2).

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	<1E-7
0,8	1280000	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	<1E-7
0,7	381111	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	1E-7
0,6	135000	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	1E-7
0,5	50000	1E-5	<1E-7	–	<1E-7	<1E-7
0,3	1000000	6E-8	1E-7	–	<1E-7	–
0,3	100000	6E-7	–	–	<1E-7	1E-7
0,5	1000000	5E-7	<1E-7	1E-7	1E-7	<1E-7
0,5	100000	5E-6	<1E-7	<1E-7	1E-7	1E-7
0,5	20000	3E-5	<1E-7	1E-7	<1E-7	<1E-7
0,8	1000000	1E-5	1E-7	<1E-7	2E-7	1E-7
0,8	100000	1E-4	1E-7	1E-7	2E-7	<1E-7
0,8	20000	6E-4	1E-7	<1E-7	2E-7	<1E-7



Tableau G.5 – Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour la géométrie 1.

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	157813 (28h)	166190 (29h)	167917 (29h)	64939 (18h)
0,8	1280000	1E-5	288672 (56h)	200740 (37h)	226979 (40h)	63023 (17h)
0,7	381111	1E-5	210688 (42h)	–	184143 (31h)	72562 (20h)
0,6	135000	1E-5	211088 (34h)	208727 (35h)	75852 (15h)	57521 (15h)
0,5	50000	1E-5	207864 (36h)	215040 (38h)	76561 (16h)	64716 (17h)
0,3	1000000	6E-8	103863 (19h)	104214 (19h)	–	183664 (35h)
0,3	100000	6E-7	–	194614 (36h)	–	55782 (15h)
0,5	1000000	5E-7	151655 (22h)	186639 (26h)	164537 (22h)	74119 (18h)
0,5	100000	5E-6	219088 (44h)	223973 (40h)	214142 (40h)	61154 (16h)
0,5	20000	3E-5	200984 (35h)	–	47905 (13h)	58826 (16h)
0,8	1000000	1E-5	110103 (22h)	109685 (22h)	148964 (31h)	61201 (17h)
0,8	100000	1E-4	124789 (28h)	–	45241 (13h)	55504 (15h)
0,8	20000	6E-4	59108 (16h)	–	54749 (15h)	55277 (15h)

Tableau G.6 – Nombre d'itérations (temps de calcul nécessaires en heures) pour la géométrie 2.

$\varepsilon$	$\beta$	Da	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
0,9	7290000	1E-5	105286 (21h)	–	114222 (22h)	39180 (12h)
0,8	1280000	1E-5	118359 (23h)	–	117316 (22h)	37429 (12h)
0,7	381111	1E-5	124029 (24h)	–	144546 (29h)	36533 (12h)
0,6	135000	1E-5	136879 (27h)	–	117706 (26h)	38421 (12h)
0,5	50000	1E-5	146421 (27h)	–	100800 (24h)	36925 (12h)
0,3	1000000	6E-8	72548 (14h)	–	114803 (24h)	–
0,3	100000	6E-7	–	–	273275 (46h)	39133 (11h)
0,5	1000000	5E-7	77245 (13h)	103787 (17h)	210827 (31h)	60852 (17h)
0,5	100000	5E-6	148930 (27h)	132266 (26h)	135230 (29h)	40053 (12h)
0,5	20000	3E-5	147396 (26h)	145706 (29h)	58015 (16h)	36677 (12h)
0,8	1000000	1E-5	120735 (24h)	107144 (21h)	138442 (28h)	38670 (12h)
0,8	100000	1E-4	53128 (16h)	78007 (21h)	45424 (14h)	36233 (12h)
0,8	20000	6E-4	39546 (12h)	70118 (20h)	36937 (12h)	36316 (12h)

## **Annexe H**

### **Figures des résultats d'optimisation topologique**

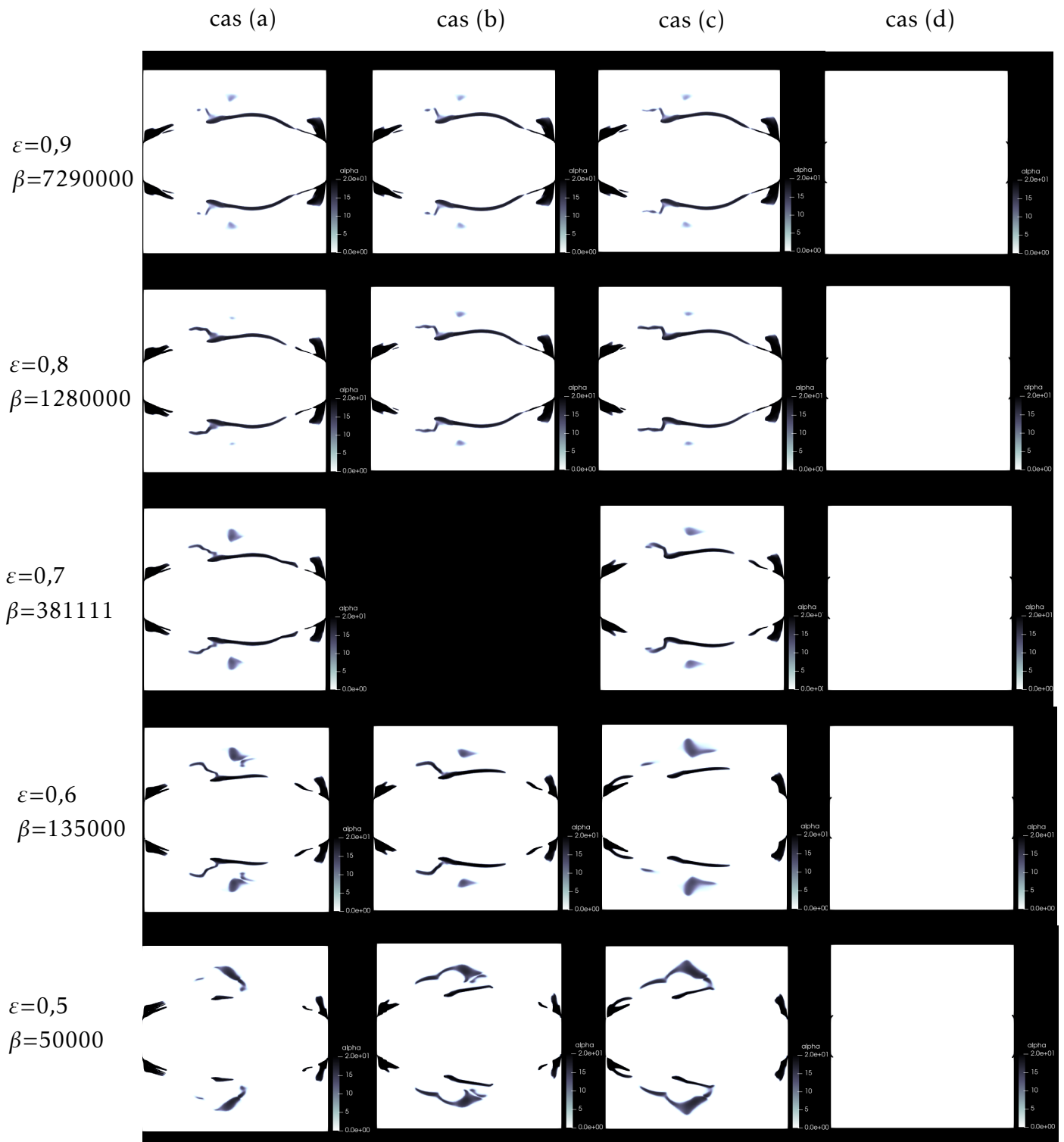


FIGURE H.1 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 1).

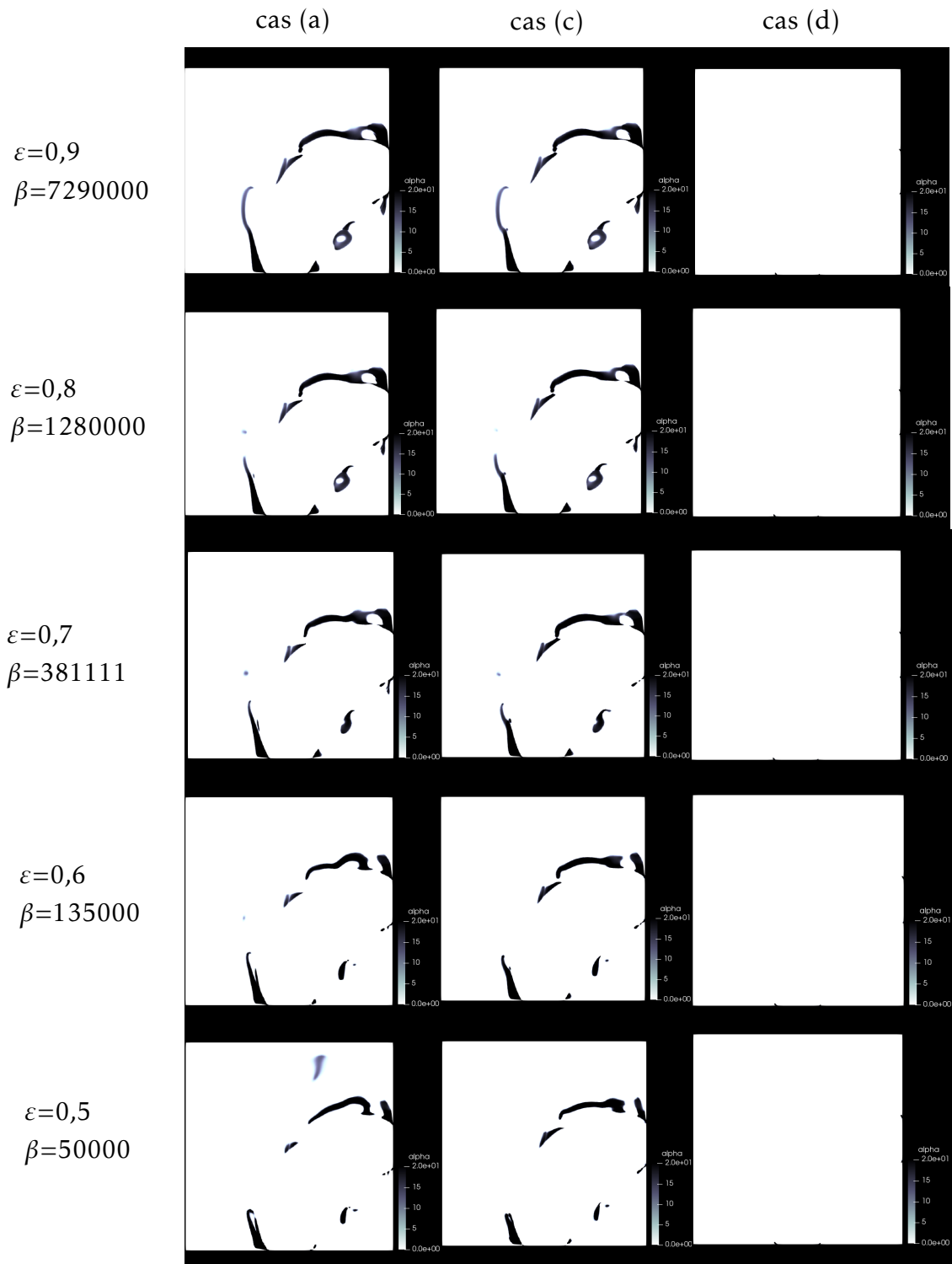


FIGURE H.2 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour un nombre de Darcy  $Da = 10^{-5}$  (géométrie 2).

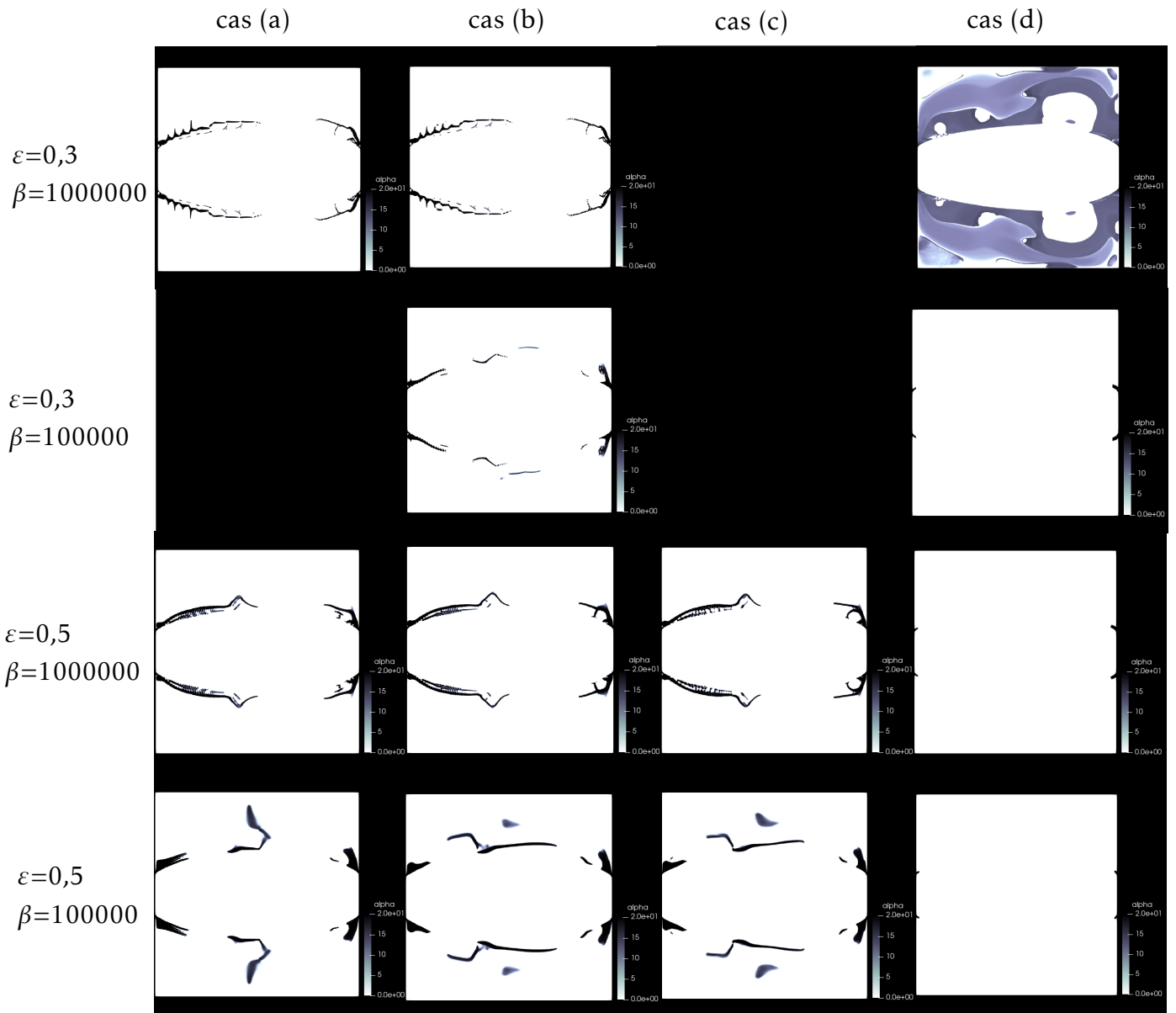


FIGURE H.3 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 1.

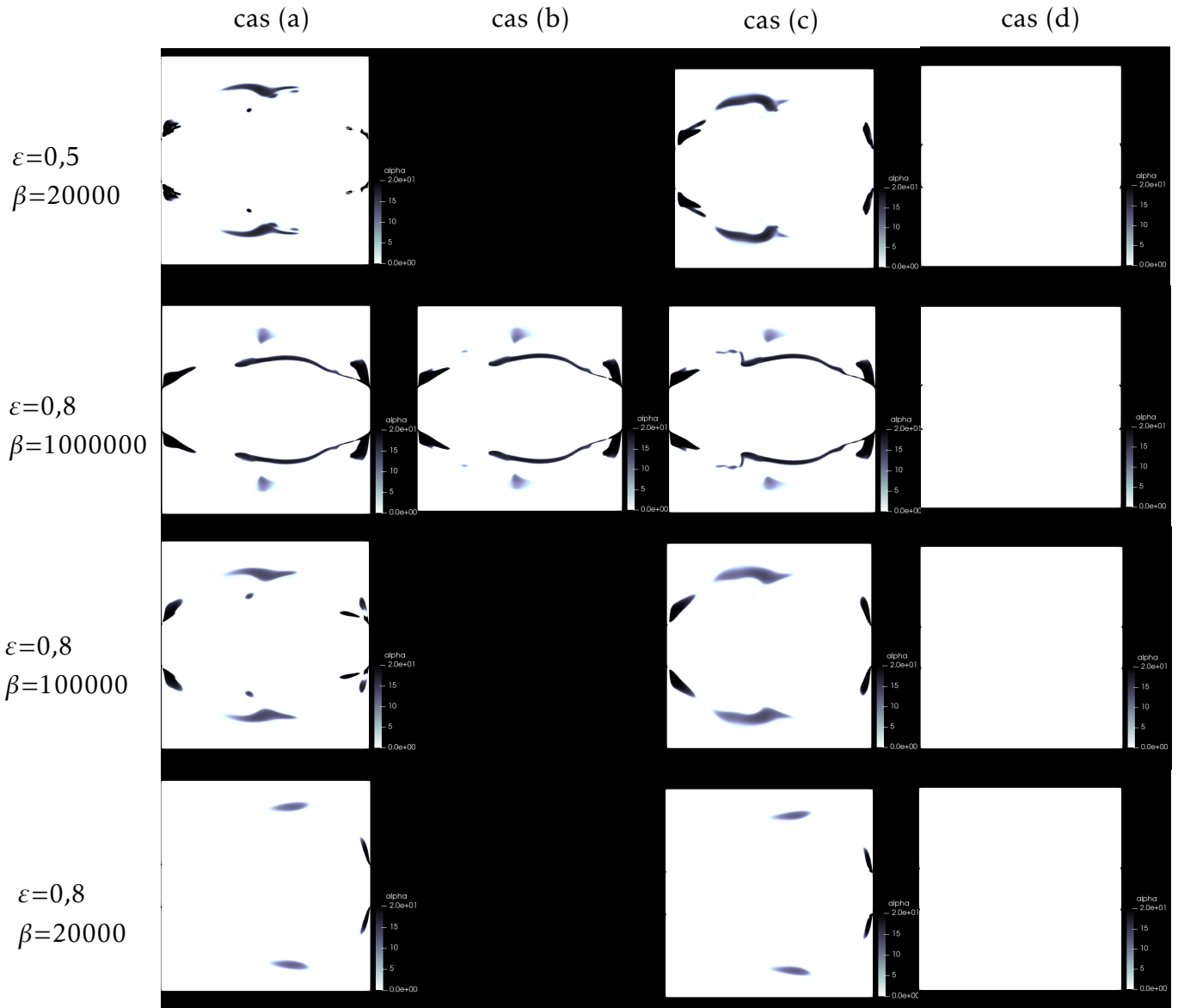


FIGURE H.4 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 1) - partie 2.

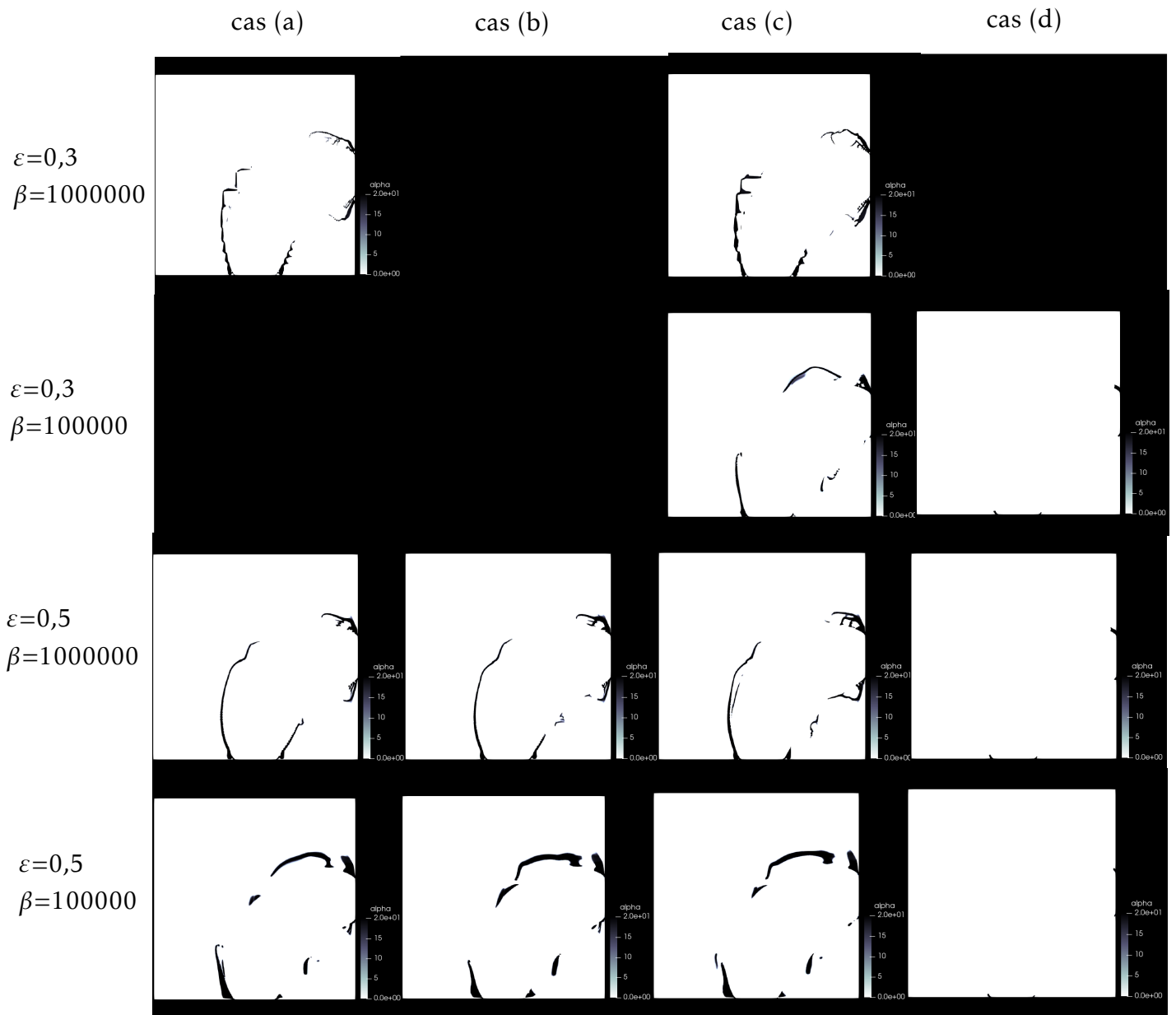


FIGURE H.5 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 1.

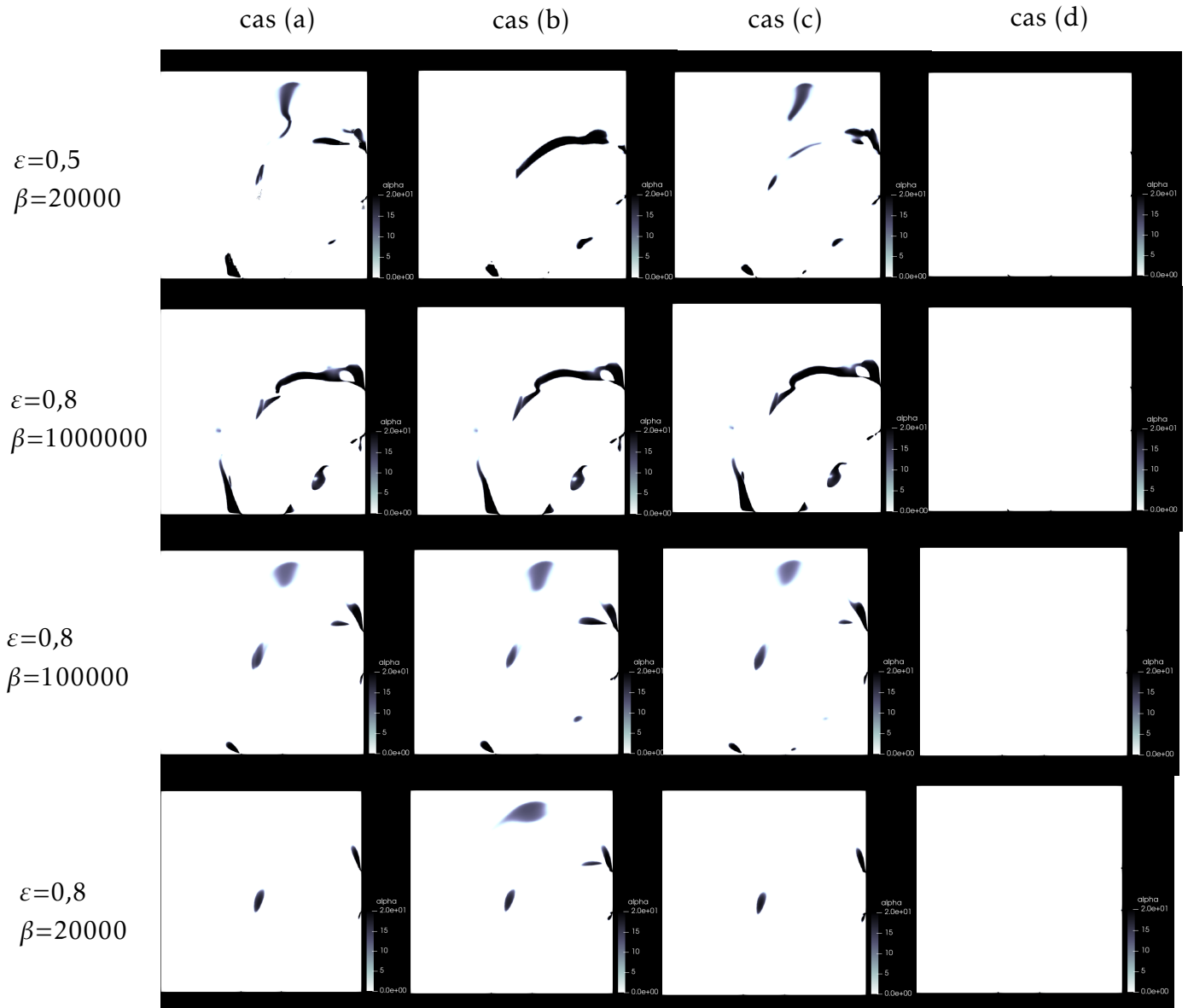


FIGURE H.6 – Répartitions de la variable de conception  $\alpha$  obtenues pour différentes valeurs du nombre de Darcy (géométrie 2) - partie 2.



# Bibliographie

- [1] B. ALAZMI et K. VAFAI. « Analysis of Variants Within the Porous Media Transport Models ». In : *Journal of Heat Transfer* 122.2 (déc. 1999), p. 303-326 (cf. p. [33](#), [34](#), [39](#)).
- [2] A. ALBOJAMAL et K. VAFAI. « Analysis of particle deposition of nanofluid flow through porous media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 161 (nov. 2020), p. 120227 (cf. p. [79](#)).
- [3] J. ALEXANDERSEN. « Topography optimisation of fluid flow between parallel plates of spatially-varying spacing: Revisiting the origin of fluid flow topology optimisation ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 65.5 (mai 2022) (cf. p. [91](#), [92](#)).
- [4] J. ALEXANDERSEN, N. AAGE, C. S. ANDREASEN et O. SIGMUND. « Topology optimisation for natural convection problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 76.10 (sept. 2014), p. 699-721 (cf. p. [23](#), [25](#)).
- [5] J. ALEXANDERSEN et C. S. ANDREASEN. « A Review of Topology Optimisation for Fluid-Based Problems ». In : *Fluids* 5.1 (mar. 2020), p. 29 (cf. p. [23](#), [25](#), [90](#), [92](#)).
- [6] D. H. ALONSO et E. C. N. SILVA. « Topology optimization applied to the design of Tesla-type turbine devices ». In : *Applied Mathematical Modelling. Simulation and Computation for Engineering and Environmental Systems* 103 (mar. 2022), p. 764-791 (cf. p. [27](#), [39](#), [91](#)).
- [7] C. S. ANDREASEN, A. R. GERSBORG et O. SIGMUND. « Topology optimization of microfluidic mixers ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 61.5 (oct. 2009), p. 498-513 (cf. p. [23](#)).
- [8] R. J. ATKIN et R. E. CRAINE. « Continuum Theories of Mixtures: Applications ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 17.2 (avr. 1976), p. 153-207 (cf. p. [31](#)).
- [9] Ö. BAĞCI, N. DUKHAN et M. ÖZDEMİR. « Flow Regimes in Packed Beds of Spheres from Pre-Darcy to Turbulent ». In : *Transport in Porous Media* 104.3 (juin 2014), p. 501-520 (cf. p. [34](#)).
- [10] A. BASTIDE, P.-H. COCQUET et D. RAMALINGOM. « Penalization model for Navier–Stokes–Darcy equations with application to porosity-oriented topology optimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 28.08 (juil. 2018), p. 1481-1512 (cf. p. [25](#), [27](#), [39](#), [91](#)).
- [11] P. C. BAVEYE. « Comment on “Averaging theory for description of environmental problems: What have we learned?” by William G. Gray, Cass T. Miller, and Bernhard A. Schrefler ». In : *Advances in Water Resources* 52 (fév. 2013), p. 328-330 (cf. p. [31](#)).

- [12] G. S. BEAVERS et D. D. JOSEPH. « Boundary conditions at a naturally permeable wall ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 30.1 (oct. 1967), p. 197-207 (cf. p. 48).
- [13] M. P. BENDSØE et O. SIGMUND. « Material interpolation schemes in topology optimization ». In : *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 69.9-10 (nov. 1999), p. 635-654 (cf. p. 25).
- [14] R. F. BENENATI et C. B. BROSILOW. « Void fraction distribution in beds of spheres ». In : *AIChE Journal* 8.3 (juin 1962), p. 359-361 (cf. p. 67, 70).
- [15] M. BERGMANN. « Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004 (cf. p. 25, 94, 98).
- [16] L. BETCHEN, A. STRAATMAN et B. THOMPSON. « A Nonequilibrium Finite-Volume Model for Conjugate Fluid/Porous/Solid Domains ». In : *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications* 49.6 (sept. 2006), p. 543-565 (cf. p. 58, 60, 61, 63, 65, 88).
- [17] T. BORRVALL et J. PETERSSON. « Topology optimization of fluids in Stokes flow ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41.1 (2002), p. 77-107 (cf. p. 23, 25, 90, 92, 98).
- [18] P. BOUSQUET-MELOU, B. GOYEAU, M. QUINTARD, F. FICHOT et D. GOBIN. « Average momentum equation for interdendritic flow in a solidifying columnar mushy zone ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45.17 (août 2002), p. 3651-3665 (cf. p. 37).
- [19] B. BRANGEON. « Contribution à l'étude numérique de la ventilation naturelle dans des cavités ouvertes par la simulation des grandes échelles : application au rafraîchissement passif des bâtiments ». Thèse de doct. Université de la Réunion, 2012 (cf. p. 54).
- [20] H. C. BRINKMAN. « On the permeability of media consisting of closely packed porous particles ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 1.1 (déc. 1949) (cf. p. 32).
- [21] S. CADALEN. « Transport d'un polluant dans des sables argileux : écoulement réactif en milieu poreux saturé ou non-saturé en eau ». Thèse de doct. Toulouse, INPT, 2008 (cf. p. 24).
- [22] G. CHEN et H.A. HADIM. « Numerical study of three-dimensional non-Darcy forced convection in a square porous duct ». In : *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 9.2 (mar. 1999), p. 151-169 (cf. p. 87).
- [23] H. CHEN et X.-P. WANG. « A one-domain approach for modeling and simulation of free fluid over a porous medium ». In : *Journal of Computational Physics* 259 (fév. 2014), p. 650-671 (cf. p. 59).
- [24] J. COIRIER et C. NADOT-MARTIN. *Mécanique des milieux continus-4e éd.* Dunod, 2020 (cf. p. 27).
- [25] B. D. COLEMAN et W. NOLL. « The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1 (déc. 1963), p. 167-178 (cf. p. 45).

- [26] J. H. CUSHMAN. « Multiphase transport equations: I - general equation for macroscopic statistical, local space-time homogeneity<sup>sup1/sup</sup> ». In : *Transport Theory and Statistical Physics* 12.1 (jan. 1983), p. 35-71 (cf. p. [35](#), [36](#), [42](#), [43](#)).
- [27] G. DAGAN. « Statistical theory of groundwater flow and transport: Pore to laboratory, laboratory to formation, and formation to regional scale ». In : *Water Resources Research* 22.9S (août 1986), 120S-134S (cf. p. [31](#)).
- [28] M. P. DALWADI, M. BRUNA et I. M. GRIFFITHS. « A multiscale method to calculate filter blockage ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 809 (nov. 2016), p. 264-289 (cf. p. [26](#), [132](#)).
- [29] M. P. DALWADI, I. M. GRIFFITHS et M. BRUNA. « Understanding how porosity gradients can make a better filter using homogenization theory ». In : *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 471.2182 (oct. 2015), p. 20150464 (cf. p. [26](#), [132](#)).
- [30] H. DARCY. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : Exposition et application...* Victor Dalmont, 1856 (cf. p. [32](#)).
- [31] Y. DAVIT. « Multiple-scale analysis of transport phenomena in porous media with biofilms ». Thèse de doct. 2010 (cf. p. [26](#), [30](#), [132](#)).
- [32] Y. DAVIT, C. G. BELL, H. M. BYRNE, L. A.C. CHAPMAN, L. S. KIMPTON, G. E. LANG, K. H.L. LEONARD, J. M. OLIVER, N. C. PEARSON, R. J. SHIPLEY, S. L. WATERS, J. P. WHITELEY, B. D. WOOD et M. QUINTARD. « Homogenization via formal multiscale asymptotics and volume averaging: How do the two techniques compare? » In : *Advances in Water Resources* 62 (déc. 2013), p. 178-206 (cf. p. [31](#), [32](#), [133](#)).
- [33] Y. DAVIT et M. QUINTARD. « One-Phase and Two-Phase Flow in Highly Permeable Porous Media ». In : *Heat Transfer Engineering* 40.5-6 (fév. 2018), p. 391-409 (cf. p. [32](#), [33](#), [37](#), [38](#), [73](#)).
- [34] T. DBOUK. « A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization ». In : *Applied Thermal Engineering* 112 (fév. 2017), p. 841-854 (cf. p. [23](#)).
- [35] C. T. DEGROOT et A. G. STRAATMAN. « A Finite-Volume Model for Fluid Flow and Nonequilibrium Heat Transfer in Conjugate Fluid-Porous Domains Using General Unstructured Grids ». In : *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 60.4 (oct. 2011), p. 252-277 (cf. p. [58](#), [60-63](#), [65](#), [88](#)).
- [36] H.-J. G. DIERSCH. *Feflow*. Springer Berlin Heidelberg, 2014 (cf. p. [22](#), [31](#), [37](#), [42](#), [43](#), [45](#)).
- [37] F. DUGAST. « Optimisation topologique en convection thermique avec la méthode de Lattice Boltzmann ». Theses. Université de Nantes, 2018 (cf. p. [104](#)).
- [38] M. EHRHARDT. « An introduction to fluid-porous interface coupling ». In : *Progress in Computational Physics (PiCP) Vol 2* (2010), p. 3-12 (cf. p. [58](#)).
- [39] B. EISFELD et K. SCHNITZLEIN. « A new pseudo-continuous model for the fluid flow in packed beds ». In : *Chemical Engineering Science* 60.15 (août 2005), p. 4105-4117 (cf. p. [73](#), [82](#)).

- [40] A. EVGRAFOV. « The Limits of Porous Materials in the Topology Optimization of Stokes Flows ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 52.3 (oct. 2005), p. 263-277 (cf. p. 93).
- [41] A. FAWAZ, Y. HUA, S. LE CORRE, Y. FAN et L. LUO. « Topology optimization of heat exchangers: A review ». In : *Energy* 252 (août 2022), p. 124053 (cf. p. 23, 25).
- [42] P. FORCHHEIMER. « Wasserbewegung durch boden ». In : *Z. Ver. Deutsch, Ing.* 45 (1901), p. 1782-1788 (cf. p. 32).
- [43] L. W. GELHAR et C. L. AXNESS. « Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers ». In : *Water Resources Research* 19.1 (fév. 1983), p. 161-180 (cf. p. 31).
- [44] A. GERDES. *Fluid dynamic optimization of HVAC-components with adjoint methods*. Technische Universität Hamburg-Harburg, 2018 (cf. p. 22).
- [45] A. GERSBORG-HANSEN, O. SIGMUND et R.B. HABER. « Topology optimization of channel flow problems ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30.3 (juin 2005), p. 181-192 (cf. p. 25-27, 90).
- [46] M. GIESE, K. ROTTSCHÄFER et D. VORTMEYER. « Measured and modeled superficial flow profiles in packed beds with liquid flow ». In : *AIChE Journal* 44.2 (fév. 1998), p. 484-490 (cf. p. 71-76, 88, 133).
- [47] D. GOBIN et B. GOYEAU. « Thermosolutal Natural Convection in Partially Porous Domains ». In : *Journal of Heat Transfer* 134.3 (jan. 2012) (cf. p. 49).
- [48] F. GOLFIER, C. ZARCONI, B. BAZIN, R. LENORMAND, D. LASSEUX et M. QUINTARD. « On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 457 (avr. 2002), p. 213-254 (cf. p. 26).
- [49] B. GOYEAU, T. BENIHADDADENE, D. GOBIN et M. QUINTARD. « Averaged Momentum Equation for Flow Through a Nonhomogeneous Porous Structure ». In : *Transport in Porous Media* 28.1 (1997), p. 19-50 (cf. p. 31).
- [50] B. GOYEAU, P. BOUSQUET-MELOU, D. GOBIN, M. QUINTARD et F. FICHOT. « Macroscopic modeling of columnar dendritic solidification ». In : *Computational Applied Mathematics* 23.2-3 (déc. 2004) (cf. p. 47-49).
- [51] W. G. GRAY et C. T. MILLER. « Thermodynamically constrained averaging theory approach for modeling flow and transport phenomena in porous medium systems: 1. Motivation and overview ». In : *Advances in Water Resources* 28.2 (fév. 2005), p. 161-180 (cf. p. 31).
- [52] W. G. GRAY, C. T. MILLER et B. A. SCHREFLER. « Averaging Theory for Description of Environmental Problems : What Have We Learned? » In : *Advances in Water Resources* 51 (2013), p. 123-138 (cf. p. 31).
- [53] W. G. GRAY, C. T. MILLER et B. A. SCHREFLER. « Response to comment on “Averaging theory for description of environmental problems: What have we learned?” » English (US). In : *Advances in Water Resources* 52 (fév. 2013), p. 331-333 (cf. p. 31).
- [54] M. D. GUNZBURGER. *Perspectives in Flow Control and Optimization*. Society for Industrial et Applied Mathematics, jan. 2002 (cf. p. 94).

- [55] M. E. GURTIN. *An introduction to continuum mechanics*. Academic press, 1982 (cf. p. 27, 28).
- [56] M. HASSANIZADEH et W. G. GRAY. « General conservation equations for multi-phase systems: 1. Averaging procedure ». In : *Advances in Water Resources* 2 (mar. 1979), p. 131-144 (cf. p. 31, 37).
- [57] M. HASSANIZADEH et W. G. GRAY. « General conservation equations for multi-phase systems: 2. Mass, momenta, energy, and entropy equations ». In : *Advances in Water Resources* 2 (mar. 1979), p. 191-203 (cf. p. 45).
- [58] M. HASSANIZADEH et W. G. GRAY. « General conservation equations for multi-phase systems: 3. Constitutive theory for porous media flow ». In : *Advances in Water Resources* 3.1 (mar. 1980), p. 25-40 (cf. p. 45).
- [59] R. HERNANDEZ-RODRIGUEZ, P. ANGOT, B. GOYEAU et J. A. OCHOA-TAPIA. « Momentum transport in the free fluid-porous medium transition layer: One-domain approach ». In : *Chemical Engineering Science* 248 (fév. 2022), p. 117111 (cf. p. 48, 49).
- [60] F. A. HOWES et S. WHITAKER. « The spatial averaging theorem revisited ». In : *Chemical Engineering Science* 40.8 (1985), p. 1387-1392 (cf. p. 35, 36).
- [61] C.T. HSU et P. CHENG. « Thermal dispersion in a porous medium ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33.8 (août 1990), p. 1587-1597 (cf. p. 67-69, 79).
- [62] W. F. HUGHES et J. A. BRIGHTON. *Fluid Dynamics*. 3rd. Schaum's Outlines, 1999 (cf. p. 27).
- [63] B.P. JELLE et S.E. KALNÆS. « Phase Change Materials for Application in Energy-Efficient Buildings ». In : *Cost-Effective Energy Efficient Building Retrofitting*. Elsevier, 2017, p. 57-118 (cf. p. 67).
- [64] A. KHALILI, M. R. MORAD, M. MATYKA, B. LIU, R. MALEKMOHAMMADI, J. WEISE et M. M.M. KUYPERS. « Porosity variation below a fluid-porous interface ». In : *Chemical Engineering Science* 107 (avr. 2014), p. 311-316 (cf. p. 26, 59).
- [65] A.S. KOZELKOV, S.V. LASHKIN, V.R. EFREMOV, K.N. VOLKOV, Yu. A. TSIBEREVA et N.V. TARASOVA. « An implicit algorithm of solving Navier-Stokes equations to simulate flows in anisotropic porous media ». In : *Computers amp; Fluids* 160 (jan. 2018), p. 164-174 (cf. p. 54).
- [66] M.-J. LI, B. JIN, Z. MA et F. YUAN. « Experimental and numerical study on the performance of a new high-temperature packed-bed thermal energy storage system with macroencapsulation of molten salt phase change material ». In : *Applied Energy* 221 (juil. 2018), p. 1-15 (cf. p. 67).
- [67] T. S. LUNDGREN. « Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 51.2 (jan. 1972), p. 273-299 (cf. p. 73).
- [68] G. MARCK, M. NEMER et J.-L. HARION. « Topology Optimization of Heat and Mass Transfer Problems: Laminar Flow ». In : *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 63.6 (juin 2013), p. 508-539 (cf. p. 99, 108).
- [69] A. MOJTABI, M. PRAT, M. QUINTARD et J. TAINÉ. « Transferts de chaleur dans les milieux poreux : Conduction, convection, rayonnement ». In : *Techniques de l'ingénieur. Génie énergétique* BE8250V2 (2019) (cf. p. 26, 33).

- [70] D. A. NIELD. « The boundary correction for the Rayleigh Darcy problem: Limitations of the Brinkman equation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 128.-1 (mar. 1983), p. 37 (cf. p. 50).
- [71] D. A. NIELD et A. BEJAN. *Convection in Porous Media*. Springer International Publishing, 2017 (cf. p. 30-32, 50, 65, 67, 68, 79, 88).
- [72] D. A. NIELD et A. V. KUZNETSOV. « An Historical and Topical Note on Convection in Porous Media ». In : *Journal of Heat Transfer* 135.6 (mai 2013) (cf. p. 33, 48, 50, 84, 87).
- [73] D. A. NIELD et Craig T. SIMMONS. « A Brief Introduction to Convection in Porous Media ». In : *Transport in Porous Media* 130.1 (oct. 2018), p. 237-250 (cf. p. 26, 38, 66).
- [74] D.A. NIELD. « The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 12.3 (sept. 1991), p. 269-272 (cf. p. 68).
- [75] P. NITHIARASU, K.N. SEETHARAMU et T. SUNDARARAJAN. « Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40.16 (oct. 1997), p. 3955-3967 (cf. p. 39, 67-69, 79).
- [76] L. H. OLESEN, F. OKKELS et H. BRUUS. « A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes flow ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65.7 (2006), p. 975-1001 (cf. p. 103, 113, 119, 128).
- [77] C. OTHMER. « A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 58.8 (nov. 2008), p. 861-877 (cf. p. 99).
- [78] C. OTHMER. « Adjoint methods for car aerodynamics ». In : *Journal of Mathematics in Industry* 4.1 (2014), p. 6 (cf. p. 23).
- [79] E. M. PAPOUTSIS-KIACHAGIAS et K. C. GIANNAKOGLU. « Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.2 (déc. 2014), p. 255-299 (cf. p. 23, 103, 113).
- [80] T. PHATAK et K. B. NAKSHATRALA. « On Optimal Designs Using Topology Optimization for Flow Through Porous Media Applications ». In : *Transport in Porous Media* (mai 2021) (cf. p. 27, 39, 91).
- [81] B. PHILIPPI et Y. JIN. « Topology optimization of turbulent fluid flow with a sensitive porosity adjoint method (spam) ». In : *arXiv preprint arXiv :1512.08445* (2015) (cf. p. 27, 39, 91).
- [82] M. POTTER et D. C. WIGGERT. *Fluid Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008 (cf. p. 27).
- [83] X. QIAN et E. M. DEDE. « Topology optimization of a coupled thermal-fluid system under a tangential thermal gradient constraint ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54.3 (avr. 2016), p. 531-551 (cf. p. 23, 25).
- [84] M. QUINTARD et S. WHITAKER. « Aerosol filtration : An analysis using the method of volume averaging ». In : *Journal of Aerosol Science* 26 (1995), p. 1227-1255 (cf. p. 24).

- [85] M. QUINTARD et S. WHITAKER. « Ecoulement monophasique en milieu poreux : Effet des hétérogénéités locales ». In : *J. Meca Theor. Appl* 6 (1987), p. 691-726 (cf. p. 26).
- [86] D. RAMALINGOM. « Optimisation topologique des transferts thermiques et massiques dans un canal asymétriquement chauffé ». Theses. Université de la Réunion, 2017 (cf. p. 25, 26, 54, 55, 97).
- [87] D. RAMALINGOM, P.-H. COCQUET et A. BASTIDE. « A new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer ». In : *Computers amp; Fluids* 168 (mai 2018), p. 144-158 (cf. p. 25, 63, 90, 93, 99, 102, 108, 143).
- [88] D. RAMALINGOM, P.-H. COCQUET, R. MALECK et A. BASTIDE. « A multi-objective optimization problem in mixed and natural convection for a vertical channel asymmetrically heated ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60.5 (juin 2019), p. 2001-2020 (cf. p. 23, 25, 90).
- [89] K. RIDGWAY et K. J. TARBUCK. « Radial voidage variation in randomly-packed beds of spheres of different sizes ». In : *Journal of Pharmacy and Pharmacology* 18 (déc. 1966), 168S-175S (cf. p. 67).
- [90] G. RIVIÈRE. « Optimisation topologique d'écoulements turbulents et application à la ventilation des bâtiments ». Thèse de doct. Université de la Réunion, 2017 (cf. p. 25, 55).
- [91] P. ROUX, B. GOYEAU, D. GOBIN, F. FICHOT et M. QUINTARD. « Chemical non-equilibrium modelling of columnar solidification ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.23-24 (nov. 2006), p. 4496-4510 (cf. p. 48, 49).
- [92] P. ROYER, J.-L. AURIAULT, J. LEWANDOWSKA et C. SERRES. « Continuum modelling of contaminant transport in fractured porous media ». In : *Transport in Porous Media* 49.3 (2002), p. 333-359 (cf. p. 31).
- [93] G. I. N. ROZVANY. « A critical review of established methods of structural topology optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37.3 (fév. 2008), p. 217-237 (cf. p. 25, 90).
- [94] R. SCHULZ, N. RAY, S. ZECH, A. RUPP et P. KNABNER. « Beyond Kozeny–Carman: Predicting the Permeability in Porous Media ». In : *Transport in Porous Media* 130.2 (août 2019), p. 487-512 (cf. p. 50).
- [95] R.A. SHALLIKER, B.S. BROYLES et G. GUIOCHON. « Physical evidence of two wall effects in liquid chromatography ». In : *Journal of Chromatography A* 888.1-2 (août 2000), p. 1-12 (cf. p. 57, 65, 67).
- [96] O. SIGMUND. « On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43.5 (mar. 2011), p. 589-596 (cf. p. 94).
- [97] V. SUBRAMANIAM, T. DBOUK et J.-L. HARION. « Topology optimization of conjugate heat transfer systems: A competition between heat transfer enhancement and pressure drop reduction ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 75 (fév. 2019), p. 165-184 (cf. p. 23, 99, 108).

- [98] J. SZEKELY et J. J. POVEROMO. « Flow maldistribution in packed beds: A comparison of measurements with predictions ». In : *AIChE Journal* 21.4 (juil. 1975), p. 769-775 (cf. p. 65).
- [99] A. TAKEZAWA, X. ZHANG, M. KATO et M. KITAMURA. « Method to optimize an additively-manufactured functionally-graded lattice structure for effective liquid cooling ». In : *Additive Manufacturing* 28 (août 2019), p. 285-298 (cf. p. 27, 39, 91, 92).
- [100] A. TAKEZAWA, X. ZHANG et M. KITAMURA. « Optimization of an additively manufactured functionally graded lattice structure with liquid cooling considering structural performances ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 143 (nov. 2019), p. 118564 (cf. p. 27, 39, 91, 92).
- [101] A. TALLET. « Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments ». Thèse de doct. Université de La Rochelle, 2013 (cf. p. 23).
- [102] K. VAFAI. « Analysis of the Channeling Effect in Variable Porosity Media ». In : *Journal of Energy Resources Technology* 108.2 (juin 1986), p. 131-139 (cf. p. 26, 34).
- [103] K. VAFAI. « Convective flow and heat transfer in variable-porosity media ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 147.-1 (oct. 1984), p. 233 (cf. p. 67, 68, 79).
- [104] K. VAFAI, R. L. ALKIRE et C. L. TIEN. « An Experimental Investigation of Heat Transfer in Variable Porosity Media ». In : *Journal of Heat Transfer* 107.3 (août 1985), p. 642-647 (cf. p. 39, 67, 68, 79).
- [105] K. VAFAI et S.J. KIM. « On the limitations of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation ». In : *International Journal of Heat and Fluid Flow* 16.1 (fév. 1995), p. 11-15 (cf. p. 67, 68, 79).
- [106] K. VAFAI et C.L. TIEN. « Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24.2 (fév. 1981), p. 195-203 (cf. p. 33, 67-69, 79, 83).
- [107] F. WEIN, N. CHEN, N. IQBAL, M.I STINGL et M. AVILA. « Topology optimization of unsaturated flows in multi-material porous media: Application to a simple diaper model ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 78 (nov. 2019), p. 104871 (cf. p. 27, 39, 91).
- [108] H. G. WELLER, G. TABOR, H. JASAK et C. FUREBY. « A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques ». In : *Computers in Physics* 12.6 (1998), p. 620 (cf. p. 42, 54).
- [109] S. WHITAKER. *The Method of Volume Averaging*. Springer Netherlands, 1999 (cf. p. 30, 31, 33-36, 140).
- [110] B. D. WOOD, X. HE et S. V. APTE. « Modeling Turbulent Flows in Porous Media ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics, Vol 43* 52.1 (jan. 2020), p. 171-203 (cf. p. 26, 33, 38, 65, 73, 87).
- [111] J.-W. WU et H.-S. CHU. « Combined Conduction And Radiation Heat Transfer In Plane-Parallel Packed Beds With Variable Porosity ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 61.4 (mar. 1999), p. 443-452 (cf. p. 71).



- [112] G. H. YOON. « Topological design of heat dissipating structure with forced convective heat transfer ». In : *Journal of Mechanical Science and Technology* 24.6 (juin 2010), p. 1225-1233 (cf. p. 23).
- [113] G. H. YOON. « Topology optimization for turbulent flow with Spalart–Allmaras model ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 303 (mai 2016), p. 288-311 (cf. p. 23).