



**HAL**  
open science

## Sur la classification des structures statistiques

Kpante Emmanuel Gnandi

► **To cite this version:**

Kpante Emmanuel Gnandi. Sur la classification des structures statistiques. Statistiques [math.ST].  
Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2022. Français. NNT : 2022TOU30238 . tel-04047846

**HAL Id: tel-04047846**

**<https://theses.hal.science/tel-04047846>**

Submitted on 27 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

---

Présentée et soutenue par  
**Kpante Emmanuel GNANDI**

Le 12 décembre 2022

**Sur la classification des structures statistiques**

---

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :  
**ENAC-LAB - Laboratoire de Recherche ENAC**

Thèse dirigée par  
**Stéphane PUECHMOREL et Michel NGUIFFO BOYOM**

Jury

Mme Rita FIORESI, Rapporteur  
M. Jean-Marie MORVAN, Rapporteur  
M. Robert WOLAK, Rapporteur  
Mme Florence NICOL, Examinatrice  
M. Vladimir VERSHININ, Examineur  
M. Jean-François BARRAUD, Examineur  
M. Stéphane PUECHMOREL, Directeur de thèse  
M. Michel NGUIFFO-BOYOM, Co-directeur de thèse

# Sur la classification des structures statistiques

Emmanuel Kpante Gnandi

April 2022

« Être heureux ne signifie pas que tout est parfait. Cela signifie que vous avez décidé de regarder au-delà des imperfections. »

*Aristote*

“Si tu aimes une fleur, ne la cueille pas. Si tu la cueilles, elle meurt et elle arrête d’être ce que tu aimes. Alors, si tu aimes une fleur, laisse-la vivre. Tout simplement. L’amour n’est pas la possession d’une chose. L’amour, c’est apprécier ce qui est.”

*Osho*

# Dédicace

Cette thèse est dédiée à mon maître intérieur( Le Guru ).

# Remerciements

C'est avant tout à Michel Nguiffo-Boyom et à Stéphane Puechmorel que je dois d'avoir pu mener cette thèse à bien. J'ai eu le privilège de bénéficier, depuis mon arrivée en France, d'une qualité exceptionnelle de leurs encadrements, de leurs rigueurs, de leurs grandes disponibilités et de leurs très grandes patiences à mon égard. Je leurs exprime toute ma reconnaissance.

Ma plus profonde gratitude va à Jean-Marie Morvan, Rita Fioresi et à Robert Wolak pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, qui a grandement bénéficié de leurs lectures approfondies et de la pertinence de leurs remarques.

Je suis sensible au grand honneur que me font Jean-Francois Barraud, Vladimir Vershinin et Florence Nicol en prenant part à mon jury de soutenance.

Mes pensées reconnaissantes vont à Augustin Banyaga et Fortuné Massamba pour m'avoir initié à la géométrie symplectique et à la géométrie de contact, ainsi qu'à Joel Tossa pour avoir guidé mes premiers pas en géométrie différentielle.

L'ENAC, puis l'IMAG, a été pour moi pendant trois ans un lieu d'étude et de vie extrêmement accueillant.

De conférence en séminaire, cette thèse m'a permis d'effectuer de très belles rencontres avec des pratiquants de la géométrie différentielle. Merci à Eveline Legendre, Thibaut Delcroix, Frédéric Barbaresco(GSI), Clément Dupont et Camille Laurent-Gengoux pour l'intensité de nos discussions et le plaisir de leur compagnie.

Je ne voudrais pas oublier Daniel Delahaye et Georges Mykoniatis "pour leur soutien.

Remercier individuellement les doctorants de l'IMAG, puis de l'ENAC, parmi lesquels j'ai eu l'immense privilège d'effectuer ma thèse serait bien fastidieux, et par trop révélateur du temps depuis lequel je parcours ces couloirs. Merci à toutes et à tous. Je voudrais particulièrement remercier Nathan Lombard, Morgane Garreau, Tiffany Cherchi pour leurs profondes amitiés, ainsi qu'à tout les doctorants de l'ENAC et de l'IMT pour leur mérite (en particulier lors de la rédaction de ce manuscrit).

Il serait égoïste de ma part d'omettre avoir été très bien entouré au cours de cette thèse.

Merci à mes amis montpelliérains, toulousains et d'ailleurs : Francis Hounkpè, Benjamin Haioun, Andréas Guitart, Geoffrey Scozzaro, Isaac Dione, Loukman Issaka, Michel Dotsè, Florent Koudohode, Médard Govoeyi, Grace Agbavito, Faride, Elina, Eunike Ayena, Layla, Aurore, Régis, El-Hadj, Alain, Karna, Kevin, Abdou, Trévis, Victor, Didier, Johan Franconny, Nadeige, Chaima, Bonaventure, Gilles Sado, Kamdem Daniel, Daniel Toble, Hamidou Nonni, Ib.

J'ai pu compter pendant ces années, comme pendant toutes celles qui ont précédé, sur le soutien indéfectible de mes parents et de mon cousin Joël Bansah. Cette thèse, et le reste de mon parcours, leur doivent tout. Enfin, j'aurais eu bien du mal à mener ce projet à son terme sans la tendresse et le soutien constants de Anne-Francoise Ngo Djon Li Bom.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>viii</b>
<b>1 Géométrie de Koszul</b>	<b>1</b>
1.1 Connexions de Koszul dans un Fibré vectoriel . . . . .	1
1.1.1 Fibrés différentiables . . . . .	1
1.1.2 Connexion de Ehresmann dans un fibré vectoriel . . . . .	6
1.1.3 Connexion de Koszul dans un fibré vectoriel . . . . .	6
1.1.4 Courbure d'une connexion de Koszul . . . . .	10
1.1.5 Torsion d'une connexion linéaire . . . . .	10
1.2 Structure de variété affine et structure de variété localement plate . . . . .	11
1.2.1 Structure de variété affine . . . . .	11
1.2.2 Structure de variété localement plate. . . . .	12
1.2.3 Développement et holonomie. . . . .	12
1.2.4 Complétude et hyperbolicité des variétés localement plates . . . . .	13
1.2.5 Variation sur la notion de complétude . . . . .	13
1.3 KV-algèbre . . . . .	16
1.3.1 Définition de KV-algèbre . . . . .	16
1.3.2 Exemples de KV-algèbres . . . . .	17
1.4 Généralités sur les KV-modules . . . . .	18
1.4.1 Module sur un anneau . . . . .	18
1.4.2 Module sur une KV-algèbre ou KV-module . . . . .	18
1.4.3 Exemples de KV-modules . . . . .	19
1.5 KV-cohomologie ou cohomologie de Boyom . . . . .	24
1.5.1 Rappel sur les complexes de cochaînes . . . . .	25
1.5.2 Cohomologie de Koszul-Vinberg . . . . .	26
1.6 Structures affines des groupes de Lie . . . . .	27
<b>2 Feuilletages canoniques des variétés statistiques en modèles statistiques.</b>	<b>31</b>
2.1 <b>Motivation</b> . . . . .	31
2.2 Résultats principaux obtenus . . . . .	32
2.3 Variété statistique et modèle statistique . . . . .	34
2.3.1 Paire duale . . . . .	34



2.3.2	$\alpha$ -Connexions duales . . . . .	38
2.3.3	<b>Tenseur difference</b> . . . . .	38
2.3.4	Tenseur de Codazzi . . . . .	39
2.3.5	<b>Variété statistique.</b> . . . . .	41
2.3.6	<b>Modèle Statistique</b> . . . . .	41
2.3.7	Formalisme de <b>Amari-Chentsov</b> dans $(\Theta, P)$ . . . . .	42
2.4	<b>Equation hessienne dans une structure de jauge symétrique</b> . . . . .	44
2.4.1	<b>Equation hessienne d'une connexion <math>\nabla</math></b> . . . . .	44
2.4.2	<b>Expression locale de l'équation hessienne de <math>\nabla</math></b> . . . . .	45
2.4.3	<b>Une représentation canonique de <math>G_\nabla</math></b> . . . . .	48
2.5	Application aux variétés statistiques . . . . .	51
2.5.1	Variété hessienne . . . . .	51
2.5.2	<b>La KV-cohomologie à valeur scalaire</b> et classe hessienne. . . . .	51
2.5.3	Formulation homologique de la géométrie hessienne et de la géométrie de Koszul . . . . .	52
2.5.4	Feuilles hyperboliques dans une variété statistique . . . . .	53
2.5.5	Les orbites $G_\nabla$ sont des quotients de cônes convexes . . . . .	58
2.6	Modèles statistiques sur les feuilles de $\mathcal{F}_\nabla$ . . . . .	59
2.6.1	Fonction caractéristique et formalisme du Barbaresco . . . . .	59
2.6.2	Construction de la densité de probabilité sur les feuilles de $\mathcal{F}_\nabla$ . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Des structures duales aux variétés presque de contact</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1	Motivation . . . . .	63
3.2	Transformations de jauge et parallélisme . . . . .	70
3.2.1	Equation de jauge . . . . .	70
3.3	Structure presque cosymplectique et connexions duales . . . . .	73
3.4	Structure métrique presque de contact et connexions auto-duales . . . . .	80
3.4.1	Variété de Riemann-Cartan . . . . .	80
3.5	Variété presque statistique ou variété statistique admettant une torsion (SMAT) et structure 2-calibrée. . . . .	83
3.5.1	Variété presque statistique ou variété statistique admettant une torsion . . . . .	83
3.5.2	Équation de jauge dans une variété presque statistique . . . . .	84
3.5.3	Variété 2-calibrée (Variété quasi-contact) . . . . .	84
3.5.4	Feuilletage tendu . . . . .	85
3.5.5	Algèbre de déformation de deux connexions duales . . . . .	89
3.6	Equation de jauge dans une variété statistique et variété cosymplectique . . . . .	90
3.6.1	Équation de jauge dans une variété statistique . . . . .	91
3.7	Équation jauge et structure hamiltonienne stable . . . . .	92
3.8	<b>Équation de jauge d'une connexion auto-duale sans torsion (connexion de Levi-Civita) et existence d'une structure cokählerienne dans une variété de dimension 3.</b> . . . . .	<b>94</b>

3.8.1	<b>Solution de l'équation de jauge et structure pseudo-kählerienne.</b>	95
3.9	<b>Solution de l'équation de jauge et structures K-cosymplectiques</b>	96
3.9.1	Structures k-cosymplectiques	96
3.9.2	Structure cokählerienne en dimension trois et solution de l'équation de jauge	98
3.10	Résumé du chapitre 4	100
<b>Annexes</b>		<b>102</b>
.1	Structures de variété différentielle	102
.1.1	Cartes locales et atlas	102
.1.2	Exemples de variétés	103
.1.3	Applications différentiables	104
.1.4	Paramétrisation	105
.1.5	Les structures fonctionnelles ou espace annelé	107
.1.6	Groupe de Lie et algèbre de Lie	110
.1.7	Algèbre de Lie	111
.2	Feuilletages	116
.3	Structures presque kählériennes	117
.3.1	Structure presque complexe	118
.3.2	Structures hermitiennes	118
.3.3	Structures kählériennes	120
.4	Structures presque de contact	121
.4.1	Variétés presque de contact	122
.4.2	Variétés métriques presque de contact	124
.4.3	Variétés cosymplectique et coKähler	129

# Introduction

Ce manuscrit, bien qu'initialement destiné à des lecteurs géomètres, est accessible à tous ceux qui désirent approfondir les liens existant entre les familles exponentielles de lois de probabilité et la géométrie associée à la métrique de Fisher.

Les objets qui au coeur de cette thèse sont les structures duales que nous examinerons classerons en trois catégories : auto-duales, presque-statistiques et statistiques.

Nous mettons en avant une technique basée sur l'analyse globale, introduite par le Pr. Michel Boyom, qui permet de définir sur une variété deux feuilletages canoniques. Dans cette thèse, cette approche a été utilisée avec succès sur des problématiques issues de la géométrie de l'information et de la géométrie de contact. Nous donnerons en particulier des conditions pour que des variétés statistiques admettent des modèles statistiques, ainsi pour l'existence de structures presque de contact, de contact, cosymplectiques et 2-calibrées sur une variété de dimension impaire.

Cette thèse comprend trois chapitres et une annexe. Un guide de lecture est donné ci-dessous.

## Chapitre 1

Destinée aux non spécialistes de la géométrie de Koszul, cette section peut être omise en première lecture.

La première section introduit les notions élémentaires : fibrés vectoriels, connexion de Koszul dans un fibré vectoriel, section d'un fibré vectoriel, courbure d'une connexion, torsion d'une connexion, structure affine, variété localement plate, développement et holonomie d'une variété localement plate, complétude d'une variété localement plate, hyperbolicité d'une variété localement plate. Des notions plus spécifiques sont ensuite abordées : KV-algèbre et KV-module, KV-cohomologie (cohomologie de Boyom), représentation affine d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie, représentations affines semblables ou conjuguées, groupe de Lie affine.

## Chapitre 2

Dans ce chapitre, la question de l'existence d'un modèle statistique associé à une variété statistique est étudiée d'un point de vue constructif. Rappelons qu'il existe un résultat général basé sur le théorème de plongement isométrique de Nash et un théorème de Gromov qui permet d'obtenir un tel modèle, sans fournir explicitement sa description.

**Théorème 1. Théorème d'immersion statistique de Hong Van Le[58]** Toute variété statistique lisse compacte  $(M^n, g, T)$  de dimension finie admet, pour  $N \in \mathbb{N}$  assez grand, un plongement isostatistique (i.e. préservant le tenseur  $T$ ) dans l'espace  $\text{Cap}^N$  des densités de probabilité sur  $\Omega^N$ , avec  $\Omega$  une variété différentielle munie d'une mesure de Borel.

Ce résultat montre que les variétés statistiques compactes de dimension finie sont réalisables comme modèles statistiques, mais ne donne pas de forme explicite.

Dans notre approche, fondée sur l'analyse globale, nous construisons un modèle statistique de la famille exponentielle sur un feuilletage canonique.

Soit  $(M, g, \nabla)$  une variété statistique, **l'équation hessienne de la connexion  $\nabla$**  est définie par :

$$\text{EH}(\nabla) : \nabla^2 X = 0.$$

Le faisceau de solutions  $\mathcal{J}(\nabla)$  de l'équation hessienne sur une structure de jauge  $(M, \nabla)$  est un ingrédient clé pour comprendre ses propriétés importantes d'un point de vue cohomologique. Dans notre travail, une représentation canonique du groupe de Lie  $(G_\nabla)$  associé par le troisième théorème de Lie à l'algèbre de Lie formée par les sections de  $J_\nabla$  est introduite. Sur le feuilletage (singulier) qu'elle définit, une caractérisation des feuilles hyperboliques compactes est alors obtenue grâce à la nullité de la classe hessienne ou de la classe radiante de la représentation affine canonique du groupe de Lie  $G_\nabla$  dans son algèbre de Lie  $J_\nabla$ . Nous concluons alors que ces feuilles sont dotées d'une structure de modèle statistique.

Le contenu de ce chapitre est divisé en six parties.

La première partie est consacrée aux rappels sur les avancées sur le problème de réalisation d'une variété statistique en modèle statistique.

La deuxième partie est consacrée aux nouveaux résultats obtenus.

La troisième partie est dédiée aux rappels des notions de base la géométrie de l'information ( paires duales, variétés statistiques,  $\alpha$ -connexions, tenseur de codazzi (tenseur cubique, variété statistique, modèle statistique).\*

Dans la quatrième partie, nous rappelons la définition de l'équation de jauge d'une connexion de Koszul  $\nabla$ , ensuite nous nous focalisons sur les connexions localement plates et grâce à ces dernières, nous introduisons une représentations affines des sections des faisceaux de solutions  $\mathcal{J}(\nabla)$  de l'équation hessienne sur une la variété localement plate  $(M, \nabla)$ .

La cinquième partie présente l'application aux variétés statistiques. Une représentation canonique du groupe de Lie  $(G_\nabla)$  associé par le troisième théorème de Lie à l'algèbre de Lie formée par les sections de  $J_\nabla$  est introduite. Sur le feuilletage (singulier) qu'elle définit, une caractérisation des feuilles hyperboliques compactes est alors obtenue grâce à la nullité de la classe hessienne ou de la classe radiante de la représentation affine canonique du groupe de Lie  $G_\nabla$  dans son algèbre de Lie  $J_\nabla$ .

La dernière partie est consacrée à l'utilisation de la fonction caractéristique de Koszul-Vinberg et des formalismes de Barbaresco pour munir les orbites de  $G_{\nabla}$  d'une structure de modèle statistique. Cela nous permet de conclure que sous certaines conditions, toute variété statistique compacte est feuilletée par des modèles statistiques.

### Chapitre 3

Il est fréquent de se poser la question de l'existence d'une structure particulière sur une variété différentielle. Dans ce chapitre, on tentera de répondre au problème suivant : Soit  $M$  une variété différentiable orientable de dimension impaire donnée. Existe-t-il sur  $M$  **une structure presque cosymplectique (presque de contact), une structure métrique presque de contact, une structure de contact, une structure métrique de contact, une structure quasi-contact (2-calibrée ou encore structure presque cosymplectique contact), une structure cosymplectique et une structure cokählerienne ?**

Ce chapitre est subdivisé en dix parties :

La première partie est consacrée à la motivation de l'étude de ce problème et aux rappels des avancées sur le problème d'existence des structures presque de contact et des structures de contact. Nous ferons aussi un bref rappel sur les structures concernées : **structure presque de contact, structure de contact, structure 2-calibrée, structure cosymplectique et les structures hamiltoniennes stables.**

La deuxième partie est consacrée aux énoncés des nouveaux résultats obtenus.

La troisième partie est dédiée aux rappels sur l'équation de jauge dans une variété statistique et certaines manipulations liées à cette équation.

Dans la quatrième partie nous montrerons que toute les variétés presque de contact se construisent grâce à l'équation de jauge de deux connexions duales  $(\nabla, \nabla^*)$ .

**Théorème 2.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact),
2. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

Nous ferons un lien avec les structures de dimension paire grâce à des techniques bien connues dans la littérature.

**Théorème 3.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , on pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;

2.  $M$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact) ;
3.  $W$  admet une structure presque symplectique ;
4. L'équation de jauge des connexions duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

Nous utiliserons le résultat Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy [17] et celui de Gromov [45],[44] pour conclure que toute structure de contact s'obtient grâce à l'équation de jauge.

**Théorème 4.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure de contact,
2. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

Dans la cinquième partie, des résultats similaires sont obtenus en utilisant les connexions auto-duales ( $\nabla = \nabla^*$ ). Les résultats prouvent que les variétés métriques presque de contact proviennent toutes de l'équation de jauge des connexions auto-duales.

**Théorème 5.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  admet une structure métrique presque de contact ;
2. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

Par analogie avec les variétés de dimension paire, nous montrons que toute structure presque hermitienne provient de la même équation.

**Théorème 6.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , On pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;
2.  $M$  admet une structure métrique presque de contact ;
3.  $W$  admet une structure presque hermitienne ;
4. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

En utilisant, les mêmes techniques que précédemment, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 7.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  admet une structure presque de contact ;*
2.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
3.  *$M$  admet une structure de contact ;*
4.  *$M$  admet une structure métrique de contact ;*
5. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
6. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

Dans la sixième partie, un rappel sur les variétés presque statistiques et les variétés 2-calibrées est fait. Ensuite nous démontrerons que toutes les structures 2-calibrées se construisent grâce à l'équation de jauge de deux connexions quasi-statistiques duales.

**Théorème 8.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure 2-calibrée,*
2. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

En utilisant la même technique que précédemment, nous obtenons :

**Théorème 9.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , On pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistique sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
2.  *$M$  admet une structure 2-calibrée ;*
3.  *$W$  admet une structure symplectique ;*
4. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistique sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

Nous utiliserons l'algèbre de déformation de deux connexions de Koszul introduite par Vaisman [90] pour démontrer que toute variété 2-calibrée possède un feuilletage 2-calibré si l'algèbre de déformation de  $\nabla$  et de  $\nabla^*$  est commutative.

**Théorème 10.** *Considérons  $(M, \omega, \eta)$  une variété 2-calibrée, soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une paire de connexions presque statistiques associée à  $(M, \omega, \eta)$ . Si  $\mathcal{U}(M, D)$  est une algèbre (algèbre de déformation) est commutative alors  $M$  possède un feuilletage calibré (feuilletage tendu).*

La septième partie est totalement consacrée à l'étude de l'équation de jauge dans une variété statistique. Nous obtenons que toute grâce à la classe modulaire introduite par Victor Guillemin, Eva Miranda, and Ana Rita Pires que :

**Théorème 11.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , si l'équation de jauge des connexions duales statistiques admet une solution antisymétrique de rang maximal telle que la classe modulaire de son image s'annule, alors  $M$  possède une structure cosymplectique (suspension d'une variété symplectique par un difféomorphisme symplectique).*

Dans la huitième partie, nous rappellerons la définition d'une structure hamiltonienne stable et ensuite un résultat qui fait le pont entre les structures hamiltoniennes stables et les structures cosymplectiques est obtenu.

**Théorème 12.** *Considérons  $(M, \omega, \eta)$  une variété hamiltonienne stable, soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une structure presque statistique adaptée à  $(M, \omega, \eta)$ . Si  $\mathcal{U}(M, D)$  est une algèbre commutative alors  $M$  alors  $(M, \omega, \eta)$  est une variété cosymplectique.*

Dans la neuvième partie, nous nous restreignons à l'équation de jauge pour les connexions de Lévi-Civita. Nous montrons que toute variété de cokählerienne de dimension 3 s'obtient par l'équation de jauge d'une connexion de Lévi-Civita.

**Théorème 13.** *Soit  $M$  une variété de dimension 3, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1.  $M$  admet une structure cokählerienne (suspension d'une variété kählerienne par une isométrie kählerienne),*
- 2. Il existe sur  $M$  une métrique telle que l'équation de jauge de sa connexion de Levi-Civita admette une solution antisymétrique non nulle .*

Dans la dixième partie, nous présenterons un résumé global.

Dans l'annexe, la première section rappelle les notions élémentaires de géométrie différentielle. On y aborde la notion de structure basiques de la géométrie différentielle et ensuite



nous consacrons un temps pour le rappel des notions fondamentales dans cette thèse : variété presque complexe, variété complexe, variété hermitienne, variété kählérienne, variété de contact, variété presque de contact, variété métrique presque de contact, variété cosymplectique et enfin variété cokählérienne.

# Chapitre 1

## Géométrie de Koszul

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques notions fondamentales de la géométrie de Koszul : **Connexion de Koszul, torsion d'une connexion de Koszul, courbure d'une connexion de Koszul, variété localement plate, développement et holonomie, complétude des variétés localement plates, hyperbolicité des variétés localement plate, KV-algèbre, KV-module, KV-cohomologie, représentations affines d'un groupe de Lie et d'une algèbre de Lie.**

### 1.1 Connexions de Koszul dans un Fibré vectoriel

Sauf mention contraire la classe de différentiabilité est  $C^\infty$ . Soit  $M$  une variété différentiable,  $C^\infty(M)$  est l'algèbre des fonctions différentiable dans  $M$ .

#### 1.1.1 Fibrés différentiables

##### Espaces fibrés localement triviaux

Soit  $E$ ,  $B$  et  $F$  trois variétés différentiables.

**Définition 14.** Se donner un fibré différentiable localement trivial de base  $B$ , de fibre-type  $F$  et d'espace total  $E$ , c'est se donner une variété différentiable  $E$  et une application différentiable  $\pi : E \rightarrow B$  telles que tout point de  $B$  admette un voisinage ouvert  $U$  dans  $B$  possédant la propriété suivante : Il existe un difféomorphisme  $\Phi_U : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$  telle que  $\pi_U \circ \Phi_U = pr_1$  où  $pr_1$  désigne la première projection et le difféomorphisme  $\Phi_U$  s'appelle une trivialisations locale de  $E$ .

Cette définition implique en particulier que  $\pi$  soit une submersion de  $E$  sur  $B$ , et que la restriction  $\Phi_a$  de  $\Phi$  à  $\{a\} \times F \cong F$  soit un difféomorphisme de  $F$  sur l'image réciproque  $E_a = \pi^{-1}(a)$  d'un point  $a$  de  $M$  (on appelle  $E_a$  la fibre de  $E$  en  $a$ ).

**Exemple 15.** (Fibré trivial) On prend pour  $E$  le produit  $B \times F$  des deux variétés  $B$ (base) et  $F$ (la fibre), et pour  $pr_1$  la première projection.

**Exemple 16.** Pour toute variété différentiable  $M$ , le fibré tangent  $TM \rightarrow M$  est un fibré de fibre  $\mathbb{R}^n$  ( $n = \dim M$ ).

**Exemple 17.** Soient  $(E_1, B_1, \pi_1)$  et  $(E_2, B_2, \pi_2)$  deux fibrés différentiables alors  $(E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, \pi_1 \times \pi_2)$  est fibré différentiable.

**Exemple 18.** Soient  $(E_1, B, \pi_1)$  et  $(E_2, B, \pi_2)$  deux fibrés différentiables, soit

$$E_1 \times_B E_2 = \{(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2; \pi_1(a_1) = \pi_2(a_2)\}$$

alors  $(E_1 \times_B E_2, B, \pi_1 \times \pi_2)$  est fibré différentiable.

### Section différentiable d'un fibré

On appelle section différentiable du fibré  $\pi : E \rightarrow B$  toute application différentiable  $s : B \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s$  soit l'identité dans  $B$ . Une section locale est définie seulement sur un ouvert  $U \subset B$  avec la même condition  $\pi(s(a)) = a$  pour tout  $a \in U$ . Sur un ouvert trivialisant, il y a toujours des sections mais des sections globales  $s : E \rightarrow B$  n'existent pas toujours.

*Remarque 19.* Soit  $E$  un ensemble,  $B$  et  $F$  des variétés différentiables et  $\pi : E \rightarrow B$  une surjection. Le lemme technique suivant est très pratique pour munir l'ensemble  $E$  d'une structure différentiable de façon que  $\pi : E \rightarrow B$  devient un fibré localement trivial.

**Lemme 20.** *Supposons l'existence d'un recouvrement ouvert  $\{U_i / i \in I\}$  de  $B$  avec des bijections  $\Phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  telque  $\pi_{U_i} \circ \Phi = pr_1$ . Supposons en plus que pour tout  $i, j \in I$  telque  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'application  $\pi_{U_i} \circ \pi_{U_j}^{-1} : U_{ij} \times F \rightarrow U_{ij} \times F$  est différentiable. Alors on peut mettre sur  $E$  une unique structure de variété différentiable telle que  $\{(U_i, \Phi_i) / i \in I\}$  devient un recouvrement trivialisant du fibré  $E \rightarrow B$ .*

### Fibré Vectoriel

Soient  $E$  et  $B$  deux variétés différentiables, et  $\pi : E \rightarrow B$  une application différentiable. On dira que  $(E, B, \pi)$  est un fibré vectoriel de rang  $n$  ( $E$  est l'espace total,  $B$  la base and  $\mathbb{R}^n$  la fibre) si :

1.  $\pi$  est surjectif
2. Il existe une famille de recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  et des difféomorphismes

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

telle que pour tout  $a$

$$\Phi_i(\pi^{-1}(a)) := \{a\} \times \mathbb{R}^n$$

3.  $\forall i, j \in I$ , le difféomorphisme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n$$

sous la forme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(a, v) = (a, B_{ij}v)$$

avec  $B_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$  différentiable. Chaque fibre  $\pi^{-1}(a)$  est alors équipée d'une structure d'espace vectoriel.

**Exemple 21.** L'ensemble TM des vecteurs tangents à une variété différentiable possède une structure naturelle de fibré vectoriel différentiable sur  $\mathbb{R}$  (le fibré tangent), de rang égal à la dimension de la variété.

**Exemple 22.** On définit de même le fibré cotangent  $T^*M$  des 1-formes sur une variété différentiable. Il possède une structure naturelle de fibré vectoriel différentiable sur  $\mathbb{R}$ , de rang égal à la dimension de la variété.

**Exemple 23. (Fibré dual)**

Soit  $(E, B, \pi)$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Pour tout  $a \in B$ ,  $E_a$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Notons  $E^*$  l'ensemble des couples  $(a, \theta)$ , où  $a$  est un point de  $B$  et  $\theta$  une forme linéaire sur  $E_a$  i.e, un élément du dual  $E_a^*$  de  $E_a$ . Munissons  $E^*$  de la projection définie par  $\pi^*(a, \theta) = a$ . Il existe sur  $E^*$  une unique structure de fibré vectoriel de base  $B$  satisfaisant la condition suivante : Pour toute trivialisations locale  $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$  de  $E$  en un point  $a$ , le triplet  $(U, \varphi', \mathbb{R}^{n^*})$  est une trivialisations locale  $E^*$  avec  $\varphi' : U \times \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \pi^{*-1}(U)$  est l'application  $(a, \theta) \rightarrow (a, ({}^t\varphi_a)^{-1}(\theta))$ . Nous dirons que  $(E^*, B, \pi^*)$  est appelé fibré dual du fibré  $(E, B, \pi)$ .

**Exemple 24. (Fibré produit tensoriel)** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $\mathbb{R}$ . Un tenseur  $k$ -covariant sur  $V$  est une application  $k$ -linéaire :

$$\Theta : \underbrace{V \times, \dots, \times V}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

De même, un tenseur  $l$ -contravariant est une application  $l$ -linéaire :

$$\alpha : \underbrace{V^* \times, \dots, \times V^*}_{l \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Notons  $T^k(V)$  l'espace des tenseurs  $k$ -covariant sur  $V$  et  $T^l(V)$  l'espace des tenseurs  $l$ -contravariant sur  $V$ .

Une application multilinéaire :

$$\Theta : \underbrace{V^* \times, \dots, \times V^*}_{l \text{ fois}} \times \underbrace{V \times, \dots, \times V}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Theta$  est dite tenseur de type  $(l, k)$  ou  $l$ -contravariant et  $k$ -covariant. Notons  $T_l^k(V)$  l'espace des tenseurs  $k$ -covariant et  $l$ -contravariant sur  $V$ .

Soit  $E$  un fibré vectoriel de base  $B$ . Posons

$$T_l^k(E) = \cup_{a \in B} T_l^k(E_a)$$

$T_l^k(E)$  est un fibré vectoriel appelé fibré des tenseurs sur  $E$ .

**Exemple 25. (Fibré des  $p$ -formes)** Soit  $(E, B, \pi)$  et  $(E', B, \pi^*)$  deux fibrés vectoriels de dimensions finies, de base  $B$ . Pour tout  $a \in B$ , notons par  $\wedge^p(E_a, E'_a)$  l'ensemble des applications  $p$ -linéaires alternées de  $\underbrace{E_a \times, \dots, \times E_a}_{k \text{ fois}}$  dans  $E'_a$ . Posons  $\wedge^p(E, E') = \cup_{a \in B} (\wedge^p(E_a, E'_a))$ ,

$\wedge^p(E, E')$  est un fibré vectoriel de base  $B$  et de fibres  $\wedge^p(E_a, E'_a)$ . En particulier si  $E = TB$ , les sections de  $\wedge^p(TB, E')$  sont appelées  $p$ -formes à valeurs dans  $E'$ . Si  $E' = \mathbb{R}$  et  $E = TB$  alors les sections  $\wedge^p(TB, \mathbb{R}) \equiv \wedge^p TB^*$  sont appelées des  $P$ -formes différentielles (extérieures) sur  $B$ .

### Section d'un fibré vectoriel

Si  $E \rightarrow B$  désigne un fibré vectoriel différentiable réel, l'ensemble  $\Gamma(E)$  des sections différentiables de  $E$  est muni d'une structure naturelle de  $C^\infty(B)$ -module. Celle-ci s'obtient en définissant la section  $fs + gv$  à partir de la structure d'espace vectoriel dans  $E_a$  par la formule :

1.  $(s + s')(a) = s(a) + s'(a)$
2.  $(fs)(a) = f(a)s(a),$

pour toutes sections  $s$  et  $s'$  de  $E$  et pour toute fonction  $f$  différentiable sur  $B$ .

### Produit scalaire ou métrique riemannienne sur un fibré vectoriel

**Définition 26.** On appelle métrique riemannienne ou produit scalaire sur un fibré vectoriel différentiable  $E \rightarrow B$  la donnée d'un produit scalaire  $\langle, \rangle_a$  dans chaque fibre  $E_a$  de  $E$ , de façon que : pour tout couple  $s, v \in \Gamma(E)$  de sections différentiables, la fonction  $\langle s, v \rangle : a \rightarrow \langle s(a), v(a) \rangle_a$  soit différentiable.

On notera souvent  $\langle, \rangle$  au lieu de  $\langle, \rangle_a$  le produit scalaire dans chaque fibre.

**Proposition 27. (Existence des produits scalaires)** Tout fibré vectoriel  $E \rightarrow B$  admet un produit scalaire.

*Démonstration.* Soit  $(U_i, \varphi_i)$  une famille de trivialisations locales,  $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow E_{U_i}$ , les ouverts  $U_i$  étant supposés constituer un recouvrement localement fini de  $M$ . Notons  $\langle, \rangle_i$  le produit scalaire dans chaque fibre de  $E_{U_i}$  obtenu par transport de structure à partir du produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  grâce à la trivialisations  $\varphi_i$ . Notons  $(\rho_i)_i$  une fonction différentiable de l'unité sur  $M$  subordonnée au recouvrement précédent. Notons  $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable à support dans  $U_i$  et  $\sum_i \rho_i = 1$ . On vérifie alors que  $\sum_i \rho_i \langle, \rangle_i$  est une métrique riemannienne. □

### Les jets d'ordre $s$ au point $a$ des sections de $\mathbf{E}$

Notons  $I(a)$  l'idéal de  $\mathcal{C}^\infty(B)$  constitué des fonctions  $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$  avec  $f(a) = 0$ .  
Pour tout nombre entier non négatif  $s$  le sous-ensemble

$$I^s(a)\Gamma(E) = \{fs/f \in I^s(a), s \in \Gamma(E)\}$$

est un sous-module de  $\mathcal{C}^\infty(B)$ -module  $\Gamma(E)$ .

Considérons le  $\mathcal{C}^\infty(B)$ -module quotient

$$J_a^s(E) = \frac{\Gamma(E)}{I^{s+1}(a)\Gamma(E)}.$$

En coordonnées locales, les éléments de  $J_a^s(E)$  sont des développements de Taylor à l'ordre  $k$  au point  $a$  des sections de  $E$ .

En posant

$$J^s(E) = \bigcup_{a \in B} J_a^s(E),$$

on a une fibration ensembliste

$$J^s(E) \rightarrow B$$

dont la fibre au dessus de  $a$  est  $J_a^s(E)$ . C'est une fibration vectorielle abstraite.

L'ensemble  $J^s(E)$  possède une unique structure de variété différentiable jouissant des propriétés qui suivent.

1. Chaque  $J_a^s(E)$  est une sous-variété fermée de  $J^s(E)$ .
2. La fibration

$$J^s(E) \rightarrow B$$

est une fibration vectorielle différentiable localement triviale.

**Définition 28.** Un homomorphisme de fibré vectoriel de  $(E_1, \pi_1, B)$  dans  $(E_2, \pi_2, B)$  est une application  $\Psi$  de  $E_1$  dans  $E_2$  telle que

$$\pi_2 \circ \Psi = \pi_1$$

et

$$\Psi : \pi_1^{-1}(a) \rightarrow \pi_2^{-1}(a)$$

est une application linéaire.

L'application linéaire de

$$J_a^s(E) \rightarrow E_a$$

déterminée par l'application evaluation

$$s \rightarrow s(a)$$

induit un homomorphisme surjectif

$$\pi : J^s(E) \rightarrow E$$

dont le noyau

$$\tilde{J}^s(E) \rightarrow E$$

est un fibré vectoriel de base  $B$ . On a la suite exacte des fibrés vectoriels de base  $B$

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^s(E) \xrightarrow{i} J^s(E) \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0.$$

L'exactitude de la suite signifie que l'image d'une flèche coïncide avec le noyau de la flèche suivante.

### 1.1.2 Connexion de Ehresmann dans un fibré vectoriel

Sauf mention contraire tous les fibrés vectoriels ont la même base.

**Définition 29.** Une scission de la suite exacte exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E_2 \xrightarrow{\pi} E_3 \longrightarrow 0.$$

est un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\alpha : E_3 \rightarrow E_2$$

tel que

$$\pi(\alpha(a)) = a$$

quelque soit  $a \in E_3$ .

**Définition 30.** Une connexion de Ehresmann dans un fibré vectoriel

$$E \rightarrow B$$

est une scission de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^s(E) \xrightarrow{i} J^s(E) \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$$

### 1.1.3 Connexion de Koszul dans un fibré vectoriel

Soit

$$p : E \rightarrow B$$

une fibration vectorielle de base  $B$ . Soit

$$\alpha : E \longrightarrow J^1(E)$$

une connexion de Ehresmann dans  $E$ . La scission  $\alpha$  donne naissance à un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\beta : J^1(E) \rightarrow \tilde{J}^1(E)$$

défini par la formule

$$\beta(\xi) = \xi - \alpha(\pi(\xi)).$$

Ainsi la connexion de Ehresmann

$$\alpha : E \rightarrow J^1(E)$$

donne naissance à la suite exacte des fibrés vectoriels suivante

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} J^1(E) \xrightarrow{\beta} \tilde{J}^1(E) \longrightarrow 0$$

On a visiblement

$$\beta(\alpha(v)) = 0$$

quelque soit  $v \in E$ .

Soit  $s$  une section du fibré vectoriel  $E$ . De  $s$  on déduit la section de  $\tilde{J}^1(E)$  définie par

$$a \longrightarrow \beta(J_a^1(s)).$$

Exprimons ce qui précède en **coordonnées locales**. Soit  $(a, s(a)) \in B \times E_a$  et soit  $(U, \tilde{U}) \subset B \times E$  un voisinage ouvert de  $(a, s)$  tel que  $U$  est à la fois un ouvert de trivialisatation de  $E$  et domaine des coordonnées locales  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $\tilde{U}$  est un voisinage de  $s$  domaine de coordonnées locales  $(a_1, \dots, a_n, s_1, \dots, s_m)$ .

Exprimons la section  $s$  en coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$ . On a

$$s(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, s_1(a_1, \dots, a_n), \dots, s_m(a_1, \dots, a_n)).$$

Autrement dit au dessus de  $U$ ,  $s$  est le graphe d'une application différentiable locale de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

On écrit en coordonnée la section  $j^1 s$ . On obtient

$$j_a^1 s = (s(a), s_*(a))$$

où  $s_*$  est la matrice dont le coefficient  $s_{ij}$  est,

$$s_{ji}(a) = \left[ \frac{\partial s_j}{\partial a_i} \right] (a).$$

Ainsi  $s_*(a)$  n'est autre chose que l'expression matricielle d'une application linéaire de  $T_a B$  dans  $E_a$ . Autrement dit, si  $\xi \in \mathcal{X}(B)$  alors le couple  $(\alpha, \xi)$  détermine une section de  $E$  notée  $\nabla_\xi s$  et définie par

$$(\nabla_\xi s)(a) = (\beta(j_a^1 s))(\xi(a)).$$



En coordonnées locales  $(a_1, \dots, a_n, s_1, \dots, s_m)$  on a

$$\xi(a) = \sum \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

et

$$s_*(a) = \left[ \frac{\partial s^j}{\partial a^i} \right] (a).$$

On a par conséquent,

$$(\nabla_\xi s)(a) = \sum_{i,j} \frac{\partial s^j}{\partial a_i}(a) \xi_i(a) \frac{\partial}{\partial s_j}(s).$$

L'application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(B) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (\xi, s) &\longrightarrow \nabla_\xi s \end{aligned}$$

jouit des propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \nabla_{f\xi} s &= f \nabla_\xi s, \\ (\nabla_\xi f s)(a) &= (f \nabla_\xi s)(a) + \xi_a(f) s(a). \end{aligned}$$

Inversement toute  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\nabla : \mathcal{X}(B) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

qui vérifie les 2 propriétés ci-dessus détermine une scission  $\alpha$  de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^1(E) \xrightarrow{i} J^1(E) \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0.$$

En effet l'expression

$$\nabla_\xi f s = f \nabla_\xi s + \xi(f) s$$

montre que l'application

$$s \rightarrow \nabla s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(B)}(\mathcal{X}(B), \Gamma(E))$$

dépend de  $j^1 s$ .

On a ainsi une application

$$\beta : J_a^1(E) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_a B, E_a).$$

En identifiant l'espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_a B, E_a)$  avec  $\tilde{J}_a^1(E)$  on obtient une application

$$\beta : J^1(E) \longrightarrow \tilde{J}^1(E).$$

Maintenant on définit l'application

$$\alpha : E \longrightarrow J^1(E)$$

en posant

$$\alpha(s(a)) = J_a^1(s) - i(\beta(J_a^1 s)).$$

De toute évidence on a

$$\pi(\alpha(s(a))) = s(a).$$

**Définition 31.** La quantité  $\nabla_\xi s$  est appelée dérivée covariante de  $s$  dans la direction de  $\xi$ .

**Définition 32.** L'application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\nabla$  de  $\mathcal{X}(B) \times \Gamma(E)$  dans  $\Gamma(E)$  est appelée connexion de Koszul dans  $E$ .

### Connexions de Koszul induites

1. Soit  $(E, B, \pi)$  un Fibré vectoriel muni d'une connexion de Koszul  $\nabla$ , alors  $\nabla$  induit sur le fibré dual  $(E^*, B, \pi)$  une connexion  $\nabla^*$  définie par :

$$(\nabla_X^* \alpha)s = X.(\alpha(s)) - \alpha(\nabla_X s)$$

où  $\alpha$  est une section de  $E^*$ ,  $s$  une section de  $E$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $B$ .

2. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux fibrés vectoriels de base  $B$ , on note  $E = E_1 \oplus E_2 \cong E_1 \times E_2$  la somme de ces deux fibrés vectoriels. Si  $\nabla^1$  et  $\nabla^2$  sont des connexions de Koszul sur  $E_1$  et  $E_2$  respectivement alors on définit une connexion  $\nabla$  sur  $E$ . Si  $s_1$  et  $s_2$  sont des sections de  $E_1$  et de  $E_2$  respectivement, pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $B$ , nous avons :

$$\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X^1 s_1 + \nabla_X^2 s_2.$$

**Définition 33.** Lorsque  $E$  est le fibré tangent de  $M$  une connexion de Koszul dans  $TM$  est appelée une connexion linéaire dans la variété  $M$ .

### Connexions Koszul au sens faisceautique

Soit  $(M, C^\infty(M))$  une variété différentiable de dimension  $n$ ,  $\mathcal{X}(M)$  l'algèbre des dérivations de  $C^\infty(M)$  :

$$\mathcal{X}(M) = Der(C^\infty(M))$$

Nous savons que  $\mathcal{X}(M) = Der(C^\infty(M))$  est  $C^\infty(M)$ -module :

$$(fX)(\tilde{f})(a) = f(a)(X(\tilde{f}))(a).$$

**Définition 34.** Une connexion de Koszul dans  $M$  est produit dans  $Der(C^\infty(M))$  :

$$Der(C^\infty(M)) \times Der(C^\infty(M)) \in (X, \tilde{X}) \rightarrow X \circ \tilde{X} \in Der(C^\infty(M))$$

qui satisfait aux conditions :

1.  $(fX) \circ \tilde{X} = f(X \circ \tilde{X})$
2.  $X \circ (f\tilde{X}) = X(f)\tilde{X} + fX \circ \tilde{X}$

Une connexion de Koszul sera notée par  $\nabla_X \tilde{X} = X \circ \tilde{X}$

### 1.1.4 Courbure d'une connexion de Koszul

**Définition 35.** On appelle tenseur de courbure de la connexion  $\nabla$  l'application :

$$R^\nabla : \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(B) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

$$R^\nabla(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]}s$$

**Proposition 36.** *Le tenseur de courbure  $R^\nabla$  est tensoriel en  $X, Y$  et  $s$  et antisymétrique en  $X$  et  $Y$ .*

### 1.1.5 Torsion d'un connexion linéaire

Considérons le fibré tangent  $TM$  d'une variété  $M$  et  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $M$ .

**Définition 37.** On appelle torsion de la connexion  $\nabla$  le tenseur  $T^\nabla$  défini de :  $Der(\mathcal{C}^\infty(M)) \times Der(\mathcal{C}^\infty(M))$  dans  $Der(\mathcal{C}^\infty(M))$  par :

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

**Commentaires sur la torsion.**

Nous savons que  $X, Y \in Der(\mathcal{C}^\infty(M))$ , l'application

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

fait de  $Der(\mathcal{C}^\infty(M))$  une sous algèbre de Lie des commutateurs de  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M))$

**Définition 38.** On dit que  $\nabla$  est sans torsion (ou symétrique) si  $T^\nabla$  est identiquement nulle. D'autre part la connexion de Koszul définie sur  $Der(\mathcal{C}^\infty(M))$  une structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre. Pour tout  $X, Y \in Der(\mathcal{C}^\infty(M))$   $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y = X \circ Y$  dont la structure d'algèbre des commutateurs est

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Logiquement on aimerait que les deux algèbres de Lie des commutateurs coïncident :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X \circ Y - Y \circ X$$

La première obstruction à cet accomplissement est la torsion :

$$T^\nabla : (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X - X \circ Y + Y \circ X$$

**Proposition 39.** *Le tenseur  $T^\nabla$  est tensoriel; pour tout  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  et pour champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $M$  on a :  $T^\nabla(X, Y) = -T^\nabla(Y, X)$  et  $T^\nabla(fX, Y) = fT^\nabla(X, Y)$ .*

## 1.2 Structure de variété affine et structure de variété localement plate

Dans cette section, nous rappelons les notions de structure de variété affine et de structure de variété localement plate. La correspondance bijective entre ces deux notions y est examinée.

Les variétés différentielles considérées sont connexes. Tous les objets géométriques en jeu dans une variété différentielle sont supposés différentiables. La classe de différentiabilité est  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $M$  une variété différentielle : la  $\mathbb{R}$ -algèbre associative des fonctions différentiables dans  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est noté  $C^\infty(M)$  et par  $\mathcal{X}(M)$  le  $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs différentiables.

### 1.2.1 Structure de variété affine

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ .

**Définition 40.** Une structure affine dans  $M$  consiste en la donnée d'un atlas complet  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha\}$  de  $M$  dont les changements de cartes  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  sont des restrictions des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$ .

Lorsque  $\mathcal{A}$  est une structure affine dans la variété  $M$ , le couple  $(M, \mathcal{A})$  est appelée variété affine.

**Exemples :**

1. **L'espace**  $\mathbb{R}^n$  est une variété affine pour l'atlas  $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}^n, id\}$  se composant d'une seule carte.
2. Le **démi-plan de Poincaré**  $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  est une variété affine.
3. Le **tore plat**  $\mathbb{T}$  de dimension 2 est une variété affine.
4. **La variété de Hopf**  $\mathbb{R}^n / \{\lambda\}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $[\lambda] = \{\lambda^n 1_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .
5. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret du groupe  $Aff(\mathbb{R}^n)$  des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$  qui agit librement et proprement sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors **la variété quotient**  $M = \frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$  est une variété affine de revêtement universel  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $(M, \mathcal{A}(M))$  et  $(N, \mathcal{A}(N))$  deux variétés affines.

**Définition 41.** Une application continue  $h : M \rightarrow N$  est dite affine si pour tout  $x \in M$ , il existe une carte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}(M)$  en  $x$  et une carte  $(V, \psi) \in \mathcal{A}(N)$  en  $h(x)$  telles que  $h(U) \subset V$  et  $\psi \circ h \circ \varphi^{-1}$  est affine.

Une application affine définie sur une variété affine  $(M, \mathcal{A}(M))$  et à valeurs dans la variété affine  $(\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, id)\})$ , est appelée fonction affine dans  $M$ .

On suppose que  $(M, \mathcal{A}(M))$  et  $(N, \mathcal{A}(N))$  sont des variétés affines de même dimension.

**Définition 42.** Un homéomorphisme  $h : M \rightarrow N$  est appelé difféomorphisme affines de  $M$  dans  $N$  si  $h$  et  $h^{-1}$  sont affines.

On note  $Aff(M)$  l'ensemble des difféomorphismes affines d'une variété affine  $M$ . C'est un groupe de Lie de dimension  $\leq n(n+1)$ .

### 1.2.2 Structure de variété localement plate.

**Définition 43.** Une variété localement plate est un couple  $(M, \nabla)$  formé d'une variété différentielle  $M$  et d'une connexion de Koszul dont le tenseur de courbure  $R^\nabla$  et le tenseur de torsion  $T^\nabla$  sont nuls :

1.  $R^\nabla(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0$
2.  $T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$

### 1.2.3 Développement et holonomie.

Comme nous l'avons signalé au début, on supposera que la variété différentielle  $M$  est connexe. On munit  $M$  d'une structure localement plate  $\nabla$ . Ayant fait le choix d'un point  $x_0$  dans  $M$ , nous identifions le revêtement universel  $\tilde{M}$  de l'ensemble  $M$ , à l'ensemble des classes d'homotopie des chemins différentiables d'origine  $x_0$  dans  $M$ . On note  $\pi_1(M)$  le groupe fondamental de  $M$  au point  $x_0$ . Pour tout chemin différentiable  $c : [0, 1] \rightarrow M$  d'origine  $x_0$  dans  $M$ , on note  $f_\nabla(c)$  l'isomorphisme linéaire de l'espace tangent  $T_{x_0}M$  dans  $T_{c(1)}M$  définie par le transport parallèle le long de  $c$ .

**Définition 44.** [56] Le déroulement de  $c$  le long de l'espace tangent  $T_{x_0}M$  est le vecteur noté  $q_\nabla(c)$  et défini par

$$q_\nabla(c) = \int_0^1 f_\nabla^{-1}(c_\theta) \dot{c}(\theta) d\theta,$$

où  $c_\theta : [0, 1] \rightarrow M$  est le chemin d'origine  $x_0$  défini par  $c_\theta(t) = c(\theta t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

On sait que l'application  $c \rightarrow f_\nabla(c)$  est compatible avec la composition des chemins ; il en résulte que le déroulement des chemins obéit à la règle suivante :

$$q_{\nabla}(c.c') = f_{\nabla}(c)q_{\nabla}(c') + q_{\nabla}(c)$$

chaque fois que le chemin composé  $c.c'$  est défini, c'est-à-dire chaque fois que l'on a  $c'(1) = c(0)$ .

Le fait remarquable est que l'isomorphisme  $f_{\nabla}(c)$  et le vecteur  $q_{\nabla}(c)$  ne dépendent que de la classe d'homotopie du chemin  $c$  ([56]).

En identifiant l'espace tangent  $T_{x_0}(M)$  à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , on a la définition suivante.

**Définition 45.** L'application  $q_{\nabla} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui associe à toute classe  $[c] \in \tilde{M}$  le vecteur  $q_{\nabla}(c)$ , où  $c$  est un représentant de la classe de  $[c]$  est appelé le développement de la structure localement plate  $\nabla$ .

Nous signalons que l'application développement est un difféomorphisme local. Par restriction aux lacets en  $x_0$  et par factorisation, le couple  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$  définit une représentation affine du groupe  $\pi_1(M)$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  (voir [56]). On note  $Aff(n)$  le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 46.** Le morphisme de groupe  $h_{\nabla} : \pi_1(M) \rightarrow Aff(n)$  qui associe toute classe  $[c] \in \pi_1(M)$  le couple  $(f_{\nabla}(c), q_{\nabla}(c))$  où  $c$  est un représentant de la classe  $[c]$  est appelée représentation d'holonomie associée à la connexion  $\nabla$ .

L'image  $h_{\nabla}(\pi_1(M))$  du groupe fondamental par le morphisme  $h_{\nabla}$  est appelé groupe d'holonomie affine et l'image  $f_{\nabla}(\pi_1(M))$  du groupe fondamental par l'isomorphisme  $f_{\nabla}$  est appelé groupe d'holonomie linéaire.

Nous terminons cette section par un théorème qui lie les structures affines aux structures localement plates.

**Théorème 47.** *Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des structures affines dans une variété  $M$  et l'ensemble des structures localement plates dans cette variété.*

La preuve de ce théorème peut être consultée dans [53].

## 1.2.4 Complétude et hyperbolicité des variétés localement plates

### 1.2.5 Variation sur la notion de complétude

Soit  $(M, \nabla)$  un couple formé d'une variété  $M$  équipée d'une structure localement plate  $\nabla$ . Soit  $c : [0, 1] \rightarrow M$  un chemin différentiable par morceaux. Posons

$$\dot{c}(t) = \frac{dc(t)}{dt}$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ . Le vecteur  $\dot{c}(t)$  est un vecteur tangent à  $M$  au point  $c(t)$ . Il est défini par

$$\dot{c}(t)(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(c(t+s)) - f(c(t))}{s}.$$

On note  $\nabla \dot{c}(t)$  l'endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel  $T_{c(t)}M$  défini par

$$v \rightarrow \nabla_v \dot{c}(t).$$

**Définition 48.** Un chemin  $c(t)$  est une géodésique de la connexion  $\nabla$  lorsque  $\dot{c}(t) \in \text{Ker}(\nabla \dot{c}(t)) \forall t \in [0, 1]$ .

Les chemins géodésiques de la connexion de Koszul  $\nabla$  sont donc des solutions de l'équation différentielle

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0.$$

Fixons un voisinage  $U$  de  $c(0) \in \text{TM}$  qui est domaine des coordonnées locales

$$(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m).$$

On a

$$(c(t), \dot{c}(t)) = (x_1(t), \dots, x_m(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_m(t)}{dt}).$$

Les fonctions de christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  sont définies par les formules suivantes

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**Définition 49.** En coordonnées locales, l'équation des géodésiques est le systèmes d'équations numériques  $(E^i)$  suivant

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(c(t)) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{dx_k(t)}{dt} = 0.$$

Nous considérons ce système de premier ordre dans le voisinage  $U$  regardé une fois pour toutes comme ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Les fonctions coordonnées inconnues sont

$$(x_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}).$$

Sous cette perspective une condition initiale est un point  $(x_0, v) \in \text{TM}$ .

Le problème de cauchy des géodésiques de  $(M, \nabla)$  consiste en l'intégration du système ci-dessous avec condition initiale

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0 \\ c(0) = x_0 \\ \dot{c}(0) = v. \end{cases}$$

C'est un système dit équation ordinaire. L'existence et unicité de solution maximale est assurée par un théorème classique.

**Définition 50.** Une structure localement plate  $\nabla$  sur une variété différentiable est dite géodésiquement complète si les géodésiques de la structure  $\nabla$  sont définies dans  $\mathbb{R}$  tout entier.

Nous pouvons définir les notions de complétude d'une structure localement plate. L'application développement est un difféomorphisme local.

**Définition 51.** Une structure localement plate est dite complète si son application développement est un difféomorphisme de  $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$  sur  $(T_{x_0}M, \nabla^0)$  ou  $\nabla^0$  est la connexion euclidienne canonique.

**Définition 52.** La structure localement plate  $(M, \nabla)$  est dite hyperbolique si l'image  $q_{\nabla}(\tilde{M})$  est un ouvert convexe de  $T_{x_0}M$  ne contenant aucune droite entière.

Cette définition est équivalente à :

**Définition 53.** La structure localement plate  $(M, \nabla)$  est dite hyperbolique si  $M$  est un espace de orbites

$$M = \frac{\Omega}{\Gamma}$$

ou  $\Omega$  est un ouvert convexe ne contenant aucune droite entière de  $\mathbb{R}^n$  (ouvert saillant) et  $\Gamma$  est un sous groupe discret de  $Aff(\mathbb{R}^n)$ .

## Deux théorèmes de Koszul importants

**Théorème 54.** [56] *Si  $M$  est une variété compacte, pour qu'une connexion localement plate sur  $M$  soit hyperbolique, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : il existe une forme différentielle  $\alpha$  fermée de degré 1 sur  $M$  dont la différentielle covariante  $\nabla\alpha$  est définie positive.*



**Corollaire 55.** *Les variétés compactes qui vérifient cette condition ont un premier nombre de Betti non nul.*

**Théorème 56.** [56] *Si  $M$  est une variété compacte, l'espace des connexions hyperboliques sur  $M$  est un ouvert de l'espace des connexions localement plates sur  $M$ .*

## 1.3 KV-algèbre

### 1.3.1 Définition de KV-algèbre

Une algèbre de Koszul-Vinberg (algèbre de pré-Lie, ou algèbre symétrique gauche) est introduite par Koszul [54] et Vinberg [94] indépendamment dans leurs études des variétés localement plates et des cônes homogènes. Les bonnes références sont : ([69],[21],[22],[26],[25])

**Définition 57.** Une algèbre  $(\mathcal{A}, \star)$  sur un corps  $K$  est la donnée d'un  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{A}$  muni d'une application bilinéaire  $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ .

L'algèbre  $(\mathcal{A}, \star)$  sera commutative (respectivement associative, respectivement unitaire) si  $\star$  est commutatif ( respectivement associatif, respectivement unitaire) .

**Vocabulaire et notation.**

$\star$  est appelé la multiplication (interne) de l'algèbre.

Sans risque de confusion,  $\forall a, b \in \mathcal{A}$ , le produit  $a \star b$  sera noté  $ab$ .

**Définition 58.** L'anomalie de Koszul-Vinberg ou la la KV-anomalie associée à une algèbre  $\mathcal{A}$  est l'application trilinéaire

$KV : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  définie par :

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, KV(a, b, c) = (ab)c - a(bc) - (ba)c + b(ac).$$

**Définition 59.** (KV-algèbre). Une algèbre de Koszul-Vinberg ou une KV-algèbre est une algèbre  $\mathcal{A}$  dont la KV-anomalie est identiquement nulle. C'est-à-dire

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, (ab)c - a(bc) - (ba)c + b(ac) = 0.$$

### 1.3.2 Exemples de KV-algèbres

1. Toute algèbre associative est une KV-algèbre.
2. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage lagrangien sur une variété symplectique  $(M, \omega)$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{A} = \mathcal{X}(\mathcal{F})$  des champs de vecteurs lisses qui sont tangents à  $\mathcal{F}$  est une KV-algèbre. La multiplication  $(X, Y) \rightarrow X \star Y$  de  $\mathcal{A}$  est définie par :

$$i_{X \star Y} \omega = L_X i_Y \omega$$

3. Le produit cartésien de deux KV-algèbres  $(\mathcal{A}, \star_{\mathcal{A}})$  et  $(\mathcal{B}, \star_{\mathcal{B}})$  est une KV-algèbre pour le produit :

$$(a, b) \star (a', b') := (a \star_{\mathcal{A}} a', b \star_{\mathcal{B}} b'), \forall (a, b), (a', b') \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

En fait, on montre facilement que  $\forall (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ,

$$KV((a, b), (a', b'), (a'', b'')) = (KV_{\star_{\mathcal{A}}}(a, a', a''), KV_{\star_{\mathcal{B}}}(b, b', b'')) = (0, 0).$$

4. Si  $M$  est une variété différentielle et  $X$  est un champ de vecteur sur  $M$  alors,  $(\mathcal{C}^\infty(M), \star_X)$  est une KV-algèbre.  $\mathcal{C}^\infty(M)$  étant l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  vers  $\mathbb{R}$  et le produit  $\star_X$  est donné par :

$$f \star_X g := fX(g) = fdg(X) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

#### 5. Sur une variété localement plate

Soit  $(M, \nabla)$  une variété localement plate. On rappelle que  $\nabla$  est alors une connexion sur  $M$  sans torsion et de courbure nulle. C'est-à-dire que  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$(a) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

$$(b) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

On définit sur  $\mathcal{X}(M)$  le produit :  $X \star Y = \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Le couple  $(\mathcal{X}(M), \nabla)$  est une KV-algèbre et sera appelé **KV-algèbre de la variété localement plate**  $(M, \nabla)$ .

Comme preuve, l'espace des champs de vecteurs  $\mathcal{X}(M)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} KV(X, Y, Z) &= \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z + \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= -R(X, Y)Z \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 1.4 Généralités sur les KV-modules

### 1.4.1 Module sur un anneau

**Définition 60.**  $\mathcal{A}$  désigne un anneau unitaire.

Un  $\mathcal{A}$ -module à gauche est la donnée d'un triplet  $(W, +, \cdot)$  constitué d'un ensemble non vide  $W$ , d'une loi de composition interne sur  $W$  notée " + " et d'une multiplication externe sur  $W$  à opérateurs dans  $\mathcal{A}$  notée "  $\cdot$  ", vérifiant  $\forall w, w_1, w_2 \in W, a, b, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ ,

- (1)  $(W, +)$  est un groupe abélien.
- (2)  $(a_1 + a_2) \cdot w = a_1 \cdot w + a_2 \cdot w$ .
- (3)  $a \cdot (w_1 + w_2) = a \cdot w_1 + a \cdot w_2$
- (4)  $a \cdot (b \cdot w) = (ab) \cdot w$ .
- (5)  $1_{\mathcal{A}} \cdot w = w$ .

**Exemple 61.** (i) Tout  $K$ -espace vectoriel est un  $K$ -module.

(ii) Si  $M$  désigne une variété différentielle alors,  $\mathcal{X}(M)$  est un  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module (à gauche), pour la multiplication :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (f, X) &\longmapsto f \cdot X : M \longrightarrow TM \\ &\quad \quad \quad a \longmapsto (a, f(a)X(a)) \end{aligned}$$

*Remarque 62.* La multiplication externe sur  $M$  à opérateurs dans  $\mathcal{A}$  est aussi appelée action de l'anneau  $\mathcal{A}$  sur  $W$ . Le module  $W$  est dit à gauche (respectivement à droite) lorsque l'action de  $\mathcal{A}$  sur  $W$  se fait à gauche (respectivement à droite).

**Définition 63.** Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  des anneaux unitaires. Un  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -bimodule est un groupe abélien  $W$  tel que  $W$  soit un  $\mathcal{A}$ -module à gauche et un  $\mathcal{B}$ -module à droite et tel que les actions de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sur  $W$  sont compatibles. C'est-à-dire, pour tout  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, m \in W, a \cdot (m \cdot b) = (a \cdot m) \cdot b$

*Remarque 64.* Lorsque  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , on parlera tout simplement de  $\mathcal{A}$ -bimodule.

### 1.4.2 Module sur une KV-algèbre ou KV-module

Nous allons à présent définir la notion de  $\mathcal{A}$ -binomiale dans le cas particulier où  $\mathcal{A}$  est une KV-algèbre.

Ainsi dans ce paragraphe et sauf mention expresse du contraire,  $\mathcal{A}$  désigne une KV-algèbre,  $W$  un  $K$ -espace vectoriel sur lequel agit  $\mathcal{A}$  à gauche et à droite par les actions :

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathcal{A} \times W &\longrightarrow W \\ (a, w) &\longmapsto aw \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_d : W \times \mathcal{A} &\longrightarrow W \\ (w, a) &\longmapsto wa\end{aligned}$$

On définit les applications trinéaires suivantes :

$$\begin{aligned}Ass(a, b, w) &= (ab)w - a(bw) \\ Ass(a, w, b) &= (aw)b - a(wb) \\ Ass(w, a, b) &= (wa)b - w(ab) \\ KV_1(a, b, w) &= Ass(a, b, w) - Ass(b, a, w) \\ KV_2(a, w, b) &= Ass(a, w, b) - Ass(w, a, b)\end{aligned}$$

**Définition 65.** [25] L'espace vectoriel  $(W, \varphi_g, \varphi_d)$  muni des actions  $\varphi_g$  et  $\varphi_d$  est un **bi-module** sur la KV-algèbre ou un KV-module sur  $\mathcal{A}$  si les applications  $KV_1$  et  $KV_2$  sont identiquement nulles.

**Définition 66.** Soit  $W$  un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ . On appelle **élément de Jacobi** tout élément  $w$  de  $W$  vérifiant  $Ass(a, b, w) = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$ .

**KV-anomalie :** on notera indifféremment  $KV_1$  et  $KV_2$  par  $KV$ .

**Ensemble de Jacobi :** Le sous-ensemble de  $W$  formé des éléments de Jacobi sera appelé **ensemble de Jacobi** et noté

$$J(W) = \{w \in W, (ab)w - a(bw) = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}\}.$$

### 1.4.3 Exemples de KV-modules

1. Toute KV-algèbre  $\mathcal{A}$  est un KV-bimodule, les actions à gauche et à droite étant prises pour les multiplications à gauche et à droite respectivement.
2. Soit  $(M, \nabla)$  une variété localement plate. Alors l'espace  $\mathcal{C}^\infty(M)$  est un KV-module à gauche sur  $(\mathcal{X}(M), \nabla)$  muni de l'action :

$$X.f := X(f) = df(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

3. Le produit cartésien  $V \times W$  de deux KV-bimodules  $V$  et  $W$  sur  $\mathcal{A}$  est un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$  pour les actions :

$$a.(v, w) = (av, aw) \quad \text{et} \quad (v, w).a = (va, wa), \forall a \in \mathcal{A}, v \in V, w \in W.$$

En effet, on montre que :

$$KV(a, b, (v, w)) = (KV(a, b, v), KV(a, b, w)) = (0, 0)$$

et

$$KV(a, (v, w), b) = (KV(a, v, b), KV(a, w, b)) = (0, 0)$$

4. **Produit tensoriel de KV-bimodules.** Soient  $q$  un entier naturel non nul,  $M_1, M_2, \dots, M_q$  des KV-bimodules sur  $\mathcal{A}$ . On définit sur l'espace vectoriel produit tensoriel  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_q$  les actions de  $\mathcal{A}$  suivante :

$$\forall m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_q \in M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_q, a \in \mathcal{A}$$

$$a.(m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_q) = \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \dots \otimes am_i \otimes \dots \otimes m_q \quad (1.1)$$

$$(m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_q).a = m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_q a \quad (1.2)$$

muni des actions (1.1) et (1.2), l'espace tensoriel  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_q$  est un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ .

En effet pour tout,  $\xi = m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_q \in M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_q, a, b \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned}
Ass(a, b, \xi) &= (ab).(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_q) \\
&\quad - a.(b.(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_q)) \\
&= \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \cdots \otimes (ab)m_i \otimes \cdots \otimes m_q \\
&\quad - \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \cdots \otimes a(bm_i) \otimes \cdots \otimes m_q \\
&\quad - \sum_{j \neq i}^q m_1 \otimes \cdots \otimes bm_i \cdots \otimes am_j \otimes \cdots \otimes m_q \\
&= \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \cdots \otimes Ass_{M_i}(a, b, m_i) \otimes \cdots \otimes m_q \\
&\quad - \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i}^q m_1 \otimes \cdots \otimes bm_i \otimes am_j \otimes \cdots \otimes m_q
\end{aligned}$$

et en permutant  $a$  et  $b$

$$\begin{aligned}
Ass(b, a, \xi) &= \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \cdots \otimes Ass_{M_i}(b, a, m_i) \otimes \cdots \otimes m_q \\
&\quad - \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i}^q m_1 \otimes \cdots \otimes bm_i \otimes am_j \otimes \cdots \otimes m_q
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
KV(a, b, \xi) &= Ass(a, b, \xi) - Ass(b, a, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^q m_1 \otimes \cdots \otimes KV_{M_i}(a, b, m_i) \otimes \cdots \otimes m_q \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
Ass(a, \xi, b) &= (a.\xi).b - a.(\xi.b) \\
&\quad \sum_{i=1}^{q-1} m_1 \otimes \cdots \otimes am_i \otimes \cdots \otimes m_q b \\
&\quad + m_1 \otimes \cdots \otimes (am_q)b \\
&\quad - m_1 \otimes \cdots \otimes a(m_q b) \\
&= m_1 \times \cdots \otimes Ass_{M_q}(a, m_q, b)
\end{aligned}$$

aussi,  $Ass(\xi, a, b) = m_1 \otimes \cdots \otimes Ass_{M_q}(m_q, a, b)$

d'où  $KV(a, \xi, b) = m_1 \otimes \cdots \otimes KV_{M_q}(a, m_q, b) = 0$

donc  $M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_q$  est un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ .

5. Soient  $V$  et  $W$  deux KV-bimodules sur  $\mathcal{A}$ . On désigne par  $\mathcal{L}^q(V, W)$  l'espace des fonc-

tions  $q$ -linéaires de  $V$  à valeurs dans  $W$ . On définit sur  $\mathcal{L}(V, W)$  les actions à gauche et à droite de  $\mathcal{A}$  suivantes : Pour tout  $f \in \mathcal{L}^q(V, W)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\xi = (v_1, v_2, \dots, v_q) \in V^q$ ,

$$(a.f)(\xi) = af(\xi) - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, av_i, \dots, v_q) \quad (1.3)$$

$$(f.a)(\xi) = f(\xi)a \quad (1.4)$$

muni des actions (1.3) et (1.4), l'espace  $\mathcal{L}^q(V, W)$  est un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ . En effet

d'une part,

$$\begin{aligned}
Ass(a, b, f)(\xi) &= ((ab).f)(\xi) - (a.(b.f))(\xi) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} (ab)f(\xi) - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, (ab)v_i \dots v_q) \\ (ab)f(\xi) + \sum_{i=1}^q (b.f)(v_1, \dots, av_i \dots v_q) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} (ab)f(\xi) - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, (ab)v_i \dots v_q) \\ -a(bf(\xi)) + a \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, bv_i \dots v_q) \\ + \sum_{i=1}^q bf(v_1, \dots, bv_i, av_i \dots v_q) \\ - \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i} f(v_1, \dots, bv_i \dots, av_j \dots v_q) \\ - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, b(av_i) \dots v_q) \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, bv_i \dots v_q) + ba \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, av_i \dots v_q) \\ - \sum_{i=1}^q [f(v_1, \dots, (ab)v_i \dots v_q) + f(v_1, \dots, b(av_i) \dots v_q)] \\ - \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i} f(v_1, \dots, bv_i \dots, av_j \dots v_q) + Ass(a, b, f(\xi)) \end{array} \right\} l
\end{aligned}$$

.En permutant  $a$  et  $b$ ,

$$Ass(b, a, f(\xi)) = \left\{ \begin{array}{l} b \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, av_i \dots v_q) \\ + ab \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, bv_i \dots v_q) \\ - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, (ba)v_i \dots v_q) \\ + f(v_1, \dots, a(bv_i) \dots v_q) \\ - \sum_{i=1}^q \sum_{j \neq i} f(v_1, \dots, av_i \dots, bv_j \dots v_q) \\ + Ass(b, a, f(\xi)) \end{array} \right\}$$



.Ainsi,

$$KV(a, b, f)(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} b \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, Ass(b, a, v_i) - Ass(a, b, v_i) \cdots v_q) \\ + KV(a, b, f(\xi)) \end{array} \right\} = 0$$

.D'autre part,

$$\begin{aligned} Ass(a, f, b)(\xi) &= ((a.f).b)(\xi) - (a.(f.b))(\xi) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} ((a.f)(\xi))b - a(f.b)(\xi) \\ + \sum_{i=1}^q (f.b)(v_1, \dots, av_i \cdots v_q) \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (af(\xi))b - \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, av_i \cdots v_q)b \\ -a(f(\xi)b) + \sum_{i=1}^q f(v_1, \dots, av_i \cdots v_q)b \end{array} \right\} \\ &= Ass(a, f(\xi), b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Ass(f, a, b)(\xi) &= ((f.a).b)(\xi) - (f.(ab))(\xi) \\ &= (f(\xi)a)b - f(\xi)(ab) \\ &= Ass(f(\xi), a, b) \end{aligned}$$

.D'où

$$\begin{aligned} KV(a, f, b)(\xi) &= Ass(a, f(\xi), b) - Ass(f(\xi), a, b) \\ &= KV(a, f(\xi), b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

.Donc  $\mathcal{L}^q(V, W)$  est un KV-module sur  $\mathcal{A}$ .

Voilà donnés quelques exemples de KV-modules.

## 1.5 KV-cohomologie ou cohomologie de Boyom

Nous présentons dans cette section la théorie générale de la KV-cohomologie introduite par M. Nguiffo Boyom ([69],[21],[22],[26],[25]). Dans[25] Boyom rappelle la théorie générale de la cohomologie des l'algèbres de Koszul-Vinberg , qui a été développée par lui-même. Il est démontré que "la dernière formule de Koszul" donne la cohomologie KV avec des coefficients triviaux, et il généralise ces résultats à la cohomologie à coefficients dans un module KV non trivial. De plus, l'application de la cohomologie KV pour  $\mathcal{A}(M)$  aux modèles statistiques est discutée d'un point de vue de la géométrie de l'information.

### 1.5.1 Rappel sur les complexes de cochaînes

**Définition 67.** Soit  $\mathcal{A}$  une KV-algèbre. On appelle  $\mathcal{A}$ -KV-module  $\mathbb{Z}$  gradué toute famille  $C = \{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$  où  $C^q$  est un  $\mathcal{A}$ -KV module pour tout  $q$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**Vocabulaire** Lorsque  $C^q = \{0\}$  pour tout  $q \leq -1$  (respectivement  $q \geq 1$ ), on dit que le  $\mathbb{Z}$ -module  $C$  est gradué positivement (respectivement négativement).

**Exemple 68.** Soit  $\mathcal{A}$  une KV-algèbre et  $W$  un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ .

- (i)  $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}^*} \otimes^q \mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -KV-module gradué positivement
- (ii) Si on pose

$$C^q(\mathcal{A}, W) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 0 \\ J(W) & \text{si } q = 0 \\ \text{Hom}(\otimes^q \mathcal{A}, W) & \text{si } q \geq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Alors,  $C(\mathcal{A}, W) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q(\mathcal{A}, W)$  est un  $\mathcal{A}$ -KV-module gradué positivement.

**Définition 69.** Soient  $C = \{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$  et  $C' = \{C'^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$  deux  $\mathcal{A}$ -KV modules  $\mathbb{Z}$  gradués. On appelle **morphisme de  $\mathcal{A}$ -KV module gradué** de  $C$  dans  $C'$  de degré  $n \in \mathbb{Z}$ , toute famille  $d = \{d_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$  où  $d_q \in \text{Hom}(C^q, C'^{q+n})$  est un morphisme d'espaces vectoriels pour tout  $q$ .

**Exemple 70.** Soit  $\mathcal{A}$  une KV-algèbre et  $W$  un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ .

On définit un endomorphisme de degré 1 sur le  $\mathcal{A}$ -KV-module gradué  $C(\mathcal{A}, W)$  (1.5) comme suit :

$$\forall q \in \mathbb{Z}, d_q : C^q(\mathcal{A}, W) \longrightarrow C^{q+1}(\mathcal{A}, W)$$

$$f \longmapsto d_f,$$

avec

$$d_q = 0 \quad \text{si } q < 0$$

$$d_0 w(a) = -aw + wa \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall w \in J(W)$$

$$\text{et } \forall f \in C^q(\mathcal{A}, W), \forall \xi = (a_1, a_2, \dots, a_{q+1}) \in \mathcal{A}^{q+1}$$

$$d_q f(\xi) = \sum_{i=1}^q (-1)^i [(a_i \cdot f)(a_1, \dots, \check{a}_i, \dots, a_{q+1}) + f(a_1, \dots, \check{a}_i, \dots, a_q, a_i) a_{q+1}].$$

**Définition 71.** Soit  $\mathcal{A}$  une KV-algèbre.

Un **complexe de cochaînes** sur  $\mathcal{A}$  est la donnée d'un couple  $(C, d)$  où  $C = \{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$  est un

$\mathcal{A}$ -KV-module  $\mathbb{Z}$  gradué et  $d$  est un endomorphisme de  $C$  de degré  $+1$  et vérifiant  $d \circ d = 0$ . Le morphisme  $d$  est alors appelé **opérateur de cobord** du complexe de cochaînes et on a la longue suite suivante :

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} C^q \xrightarrow{d_q} C^{q+1} \longrightarrow \dots \quad (S)$$

## 1.5.2 Cohomologie de Koszul-Vinberg

Nous présentons ici la KV-cohomologie d'une KV-algèbre à valeurs dans un KV-bimodule tel que introduite par M.Nguiffo [69].

Soient  $\mathcal{A}$  une KV-algèbre et  $W$  un KV-bimodule sur  $\mathcal{A}$ .

Nous avons vu dans l'exemple 68 que  $C(\mathcal{A}, W) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q(\mathcal{A}, W)$  est un  $\mathcal{A}$ -KV module gradué, où le  $q$ -ième espace  $C^q(\mathcal{A}, W)$  est donné par (1.5). On note  $d_{KV}$  l'endomorphisme défini sur  $C(\mathcal{A}, W)$  à l'exemple 70.

**Théorème 72.** [69] *Le couple  $(C(\mathcal{A}, W), d_{KV})$  est un complexe de cochaînes.*

$d_{KV}$  est un morphisme sur le KV-module gradué  $C(\mathcal{A}, W)$  vérifiant  $d_{KV} \circ d_{KV} = 0$ . La preuve détaillée a été faite dans [69]. D'où  $(C(\mathcal{A}, W), d_{KV})$  est un complexe de cochaînes.

**Définition 73.** (Complexe de la KV-cohomologie). Le complexe  $(C(\mathcal{A}, W), d_{KV})$  est appelé **complexe de la cohomologie de Koszul-Vinberg** de la KV-algèbre  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $W$ .

La conséquence directe (en cohomologie) du fait que  $d_{KV} \circ d_{KV} = 0$  est que  $\forall q \in \mathbb{Z}, \text{Im } d_{KV_{q-1}} \subset \text{Ker } d_{KV_q}$ . On peut alors poser pour tout entier  $q$ ,

$$H_{KV}^q(\mathcal{A}, W) = \frac{\text{Ker } d_{KV_q}}{\text{Im } d_{KV_{q-1}}}$$

**Définition 74.** (Cohomologie de Koszul-Vinberg). La cohomologie du complexe  $(C(\mathcal{A}, W), d_{KV})$  est appelée **cohomologie de Koszul-Vinberg** (ou simplement KV-cohomologie) de la KV-algèbre  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $W$  et est notée :

$$H_{KV}(\mathcal{A}, W) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H_{KV}^q(\mathcal{A}, W).$$

**Définition 75.** (i) L'espace vectoriel quotient  $H_{KV}^q(\mathcal{A}, W)$  est appelé  $q$ -ième espace de cohomologie de la KV-cohomologie.

(ii) Si pour tout entier  $q$ ,  $\text{Im } d_{KV_{q-1}} = \text{Ker } d_{KV_q}$  alors  $H_{KV}^q(\mathcal{A}, W) = 0$  et la suite (S) est dite exacte.

## 1.6 Structures affines des groupes de Lie

### Représentation affine des groupes et algèbre de Lie.

Soit  $V$  un espace vectoriel, le groupe des automorphismes affines de  $V$  qui sera noté par  $\text{Aff}(V)$ , s'identifie donc à  $GL(V) \ltimes V$ . Le produit étant donné par la formule

$$(A_1, v_1)(A_2, v_2) = (A_1 A_2, A_1(v_2) + v_1).$$

L'élément neutre est  $(1, 0)$ . Le symétrique d'un élément  $(A, v)$  est

$$(A^{-1}, -A^{-1}(v)).$$

Le groupe  $\text{Aff}(V)$  est ainsi identifié au produit semi-direct de  $GL(V)$  et de  $V$  avec sa structure additive. Le groupe  $GL(V) \ltimes V$  est un ouvert de l'espace  $\text{End}(V) \times V$ . L'algèbre de Lie  $\text{aff}(V)$  s'identifie donc à  $\text{End}(V) \ltimes V$ . Le crochet  $y$  est donné par :

$$[(S_1, v_1), (S_2, v_2)] = ([S_1, S_2], S_1(v_2) - S_2(v_1))$$

quels que soient  $S_1, S_2 \in \text{End}(V)$ ,  $v_1, v_2 \in V$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie et soit  $V$  un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

**Définition 76.** Une représentation affine du groupe de Lie  $G$  dans l'espace vectoriel  $V$  est une application  $\theta$  différentiable de  $G$  dans le groupe  $\text{Aff}(V)$  ayant la propriété suivante

$$\theta(S_1 S_2) = \theta(S_1) \circ \theta(S_2)$$

pour tout  $S_1, S_2 \in G$ .

Autrement dit  $\theta$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $\text{Aff}(V)$ . **L'espace vectoriel  $V$  est appelé l'espace de représentation de  $\theta$ .** La dimension de l'espace vectoriel  $V$  est appelée la dimension de la représentation  $\theta$ .

**Définition 77.** Une représentation affine  $\theta$  d'un groupe de Lie  $G$  dans un espace vectoriel  $V$  est dite **fidèle** si l'application  $s \rightarrow \theta(s)$  de  $G$  dans  $\text{Aff}(V)$  est injective.

Un point  $v \in V$  est dit point fixe pour la représentation  $\theta$  si pour tout  $s \in G$ , on a

$$\theta(s)(v) = v.$$

Compte tenu de l'identification de  $\text{Aff}(V)$  et  $GL(V) \ltimes V$ , [54] **une représentation affine de  $G$  dans  $V$  est un couple  $(f, q)$**  où  $f$  est une représentation de  $G$  dans  $V$  et que  $q$  est une application différentiable de  $G$  dans  $V$  vérifiant les relations :

1.  $f(s_1 s_2) = f(s_1) f(s_2)$
2.  $q(s_1 s_2) = f(s_1) q(s_2) + q(s_1)$  pour tout  $s_1, s_2 \in G$

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels de même dimension sur le corps des nombres réels et soit  $G$  un groupe de Lie réel.

**Définition 78.** Deux représentations affines  $\theta$  et  $\theta'$  du groupe  $G$  dans les espaces vectoriels  $V$  et  $W$  respectivement sont **semblables** s'il existe un isomorphisme affine  $S : V \rightarrow W$  telque

$$\theta'(s) = S \circ \theta(s) \circ S^{-1}$$

pour tout  $s \in G$ . Si

$$\theta = (f, q), \quad \theta' = (f', q'), \quad S = (r, v)$$

alors

$$S \circ (f(s), q(s)) \circ S^{-1} = (r f(s) r^{-1}, v - r f(s) r^{-1}(v) + r q(s)).$$

pour tout  $s \in G$ .

**Proposition 79.** *Soit  $(f, q)$  une représentation affine de  $G$  dans  $V$ . Les conditions suivantes*

1. *Il existe un point de  $V$  invariant par toutes les transformations  $(f(s), q(s))$  où  $s \in G$ .*
2. *La représentation  $(f, q)$  est semblable à une représentation linéaire de  $G$  dans  $V$ .*
3. *La représentation  $(f, q)$  est semblable à la représentation linéaire  $f$ .*
4. *L'application  $q$  est un cobord (i.e. il existe  $v \in V : q(s) = f(s)v - v$  pour tout  $s \in G$ .*

Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie sur un corps  $K$  et soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$ .

**Définition 80.** Une **représentation affine de  $\mathcal{G}$**  dans l'espace vectoriel  $V$  est un homomorphisme d'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$  dans l'algèbre de Lie  $\text{End}(V) \ltimes V$ .

[54] Une représentation affine de  $\mathcal{G}$  dans  $V$  est donc un couple  $(\hat{f}, \hat{q})$  où  $\hat{f}$  est une représentation linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $\text{End}(V)$  et  $\hat{q}$  est une application linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $V$  vérifiant les conditions

1.  $\hat{f}([\alpha, \beta]) = \hat{f}(\alpha)f(\beta) - \hat{f}(\beta)\hat{f}(\alpha)$
2.  $\hat{q}([\alpha, \beta]) = \hat{f}(\alpha)\hat{q}(\beta) - \hat{f}(\beta)\hat{q}(\alpha)$

pour tous  $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ .

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $K$ .

**Définition 81. Deux représentations affines**  $(\hat{f}, \hat{g})$  et  $(\hat{f}', \hat{g}')$  de  $\mathcal{G}$  dans  $V$  et  $W$  respectivement sont dites semblables s'il existe un isomorphisme affine  $(h, l)$  de  $V$  sur  $W$  tel que

1.  $\hat{f}'(a) = h \circ f(a) \circ h^{-1}$
2.  $\hat{g}'(a) = h \circ (\hat{g}(a)) - (h \circ \hat{f}(a) \circ h^{-1})l$

pour tout  $a \in \mathcal{G}$ .

Ces relations signifient que

$$(\hat{f}'(a), \hat{g}'(a)) = (h, 0) \circ (f(a), q(a)) \circ (h, l)^{-1}$$

pour tout  $a \in \mathcal{G}$ .

**Proposition 82.** Soit  $(\hat{f}, \hat{q})$  une représentation affine de  $G$  dans  $V$ . Les conditions suivantes

1. Il existe un point de  $V$  invariant par toutes les transformations  $(\hat{f}(s), \hat{q}(s))$  où  $s \in G$ .
2. La représentation  $(\hat{f}, \hat{q})$  est semblable à une représentation linéaire de  $G$  dans  $V$ .
3. La représentation  $(\hat{f}, \hat{q})$  est semblable à la représentation linéaire  $\hat{f}$ .
4. L'application  $\hat{q}$  est un cobord( ie il existe  $v \in V$  ;  $\hat{q}(s) = \hat{f}(s)v$  pour tout  $s \in G$ ).

## Structures affines invariantes dans un groupe de Lie.

Les groupes de Lie considérés sont réels. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche dans un groupe de Lie  $G$  sera noté  $\mathcal{G}$ . Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\nabla$  une structure localement plate dans  $G$ . La structure  $\nabla$  est invariante à gauche si pour  $X$  et  $Y$

dans  $\mathcal{G}$  le champ de vecteurs  $\nabla_X Y$  est aussi dans  $\mathcal{G}$ . On associe donc à  $\nabla$  la représentation linéaire  $l_\nabla : \mathcal{G} \rightarrow \text{End}(\mathcal{G})$  définie par

$$l_\nabla(X)Y = \nabla_X Y.$$

Puisque les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion  $\nabla$  sont identiquement nuls, la représentation  $l_\nabla$  jouit des propriétés suivantes

1.  $l_\nabla(X)Y - l_\nabla(Y)X = [X, Y]$ ,
2.  $l_\nabla(l_\nabla(X)Y)Z - l_\nabla(X)l_\nabla(Y)Z = l_\nabla(l_\nabla(Y)X)Z - l_\nabla(Y)l_\nabla(X)Z$

pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ .

On suppose que  $G$  est un groupe simplement connexe. La correspondance qui associe à une structure localement plate  $\nabla$  invariante à gauche de  $G$ , la KV-structure  $(X, Y) \rightarrow X \cdot Y = \nabla_X Y$ , définit une bijection entre l'ensemble des structures affines invariantes à gauche dans le groupe de Lie  $G$  et l'ensemble des KV-structures de  $G$ .

**Définition 83.** Une structure affine dans  $G$  est appelée structure affine de groupe de Lie si elle est associée à une structure localement plate invariante à gauche.

Compte tenu des correspondances décrites précédemment, toute propriété de structure localement plate invariante à gauche a son analogue dans la KV-structure associée. Une structure affine est dite complète lorsqu'elle est associée à une structure localement plate  $\nabla$  complète ; ce qui signifie que les géodésiques de la connexion sont définies dans  $\mathbb{R}$  tout entier. On a en particulier le résultat suivant

**Proposition 84.** [23] Soit  $\nabla$  une structure localement plate invariante à gauche dans un groupe de Lie  $G$ , soit  $(X, Y) \rightarrow X \cdot Y$  la KV-structure obtenue en posant  $X \cdot Y = \nabla_X Y$  quels que soient  $X, Y \in \mathcal{G}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

1. La connexion linéaire  $\nabla$  est complète ;
2. pour tout élément fixé  $Z_0 \in \mathcal{G}$  l'application  $X \rightarrow XZ_0 + X$  est bijective ;
3. il existe une action affine simplement transitive du revêtement universel  $\tilde{G}$  de  $G$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{G}$  dont la différentielle en l'élément neutre est l'homomorphisme

$$X \rightarrow (X, \nabla_X) \in \mathcal{G} \times \text{End}(\mathcal{G}).$$

# Chapitre 2

## Feuilletages canoniques des variétés statistiques en modèles statistiques.

### 2.1 Motivation

Une variété statistique  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  est souvent obtenue à partir d'un modèle statistique, à savoir une famille paramétrée  $p_\theta, \theta \in \Theta$  de lois de probabilités telle que  $g$  en soit la métrique de Fisher.

$$g_{ij} = E [\partial_{\theta_i} l_\theta \partial_{\theta_j} l_\theta]$$

avec  $l_\theta = \log p_\theta$ . Partant de cette constatation, Lauritzen et Amari ont posé la question suivante : est-il possible de réaliser les variétés statistiques comme modèles statistiques de dimension finie ? Ce problème a reçu une réponse positive par Hong Van Le, qui utilise les deux théorèmes suivants pour construire un plongement de la variété statistique initiale dans  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N$  suffisamment grand.

#### **Théorème 85. Théorème de plongement isométrique de Nash**

Toute variété Riemannienne  $(M^n, g)$  lisse peut être plongée isométriquement dans  $(\mathbb{R}^N, g^0)$  pour un certain  $N$  dépendant de  $M^n$ , avec  $g_0 = \sum_{i=1}^N dx_i^2$ .

#### **Théorème 86. Théorème de plongement de Gromov**

Supposons que  $M^m$  est munie d'un tenseur de type  $(3, 0)$  symétrique lisse  $T$ . Alors il existe un plongement  $h : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{N_1(m)}$  avec  $N_1(m) = 3(m + \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{3})$  tel que  $h^*(T_0) = T$ , avec  $T_0 = \sum_{i=1}^{N_1(m)} dx_i^3$

En appliquant le théorème de Nash à  $g$  et celui de Gromov au tenseur :

$$T : (X, Y, Z) \mapsto (\nabla_X g)(Y, Z)$$



on arrive au résultat final :

**Théorème 87. Théorème d'immersion statistique de Hong Van Le[58]** *Toute variété statistique lisse compacte  $(M^n, g, T)$  de dimension finie admet, pour  $N \in \mathbb{N}$  assez grand, un plongement isostatistique (i.e. préservant le tenseur  $T$ ) dans l'espace  $\text{Cap}^N$  des densités de probabilité sur  $\Omega^N$ , avec  $\Omega$  une variété différentielle munie d'une mesure de Borel.*

Ce résultat montre que les variétés statistiques compacte de dimension finie sont réalisables comme modèles statistiques, mais ne donne pas de forme explicite.

Dans notre approche, fondée sur l'analyse globale, nous construisons un modèle statistique de la famille exponentielle sur un feuilletage canonique.

Soit  $(M, g, \nabla)$  une variété statistique, **l'équation hessienne de la connexion  $\nabla$**  est définie par :

$$\mathbf{EH}(\nabla) : \nabla^2 X = 0.$$

Le faisceau de solutions  $\mathcal{J}(\nabla)$  de l'équation hessienne sur une structure de jauge  $(M, \nabla)$  est un ingrédient clé pour comprendre ses propriétés importantes d'un point de vue cohomologique. Dans notre travail, une représentation canonique du groupe de Lie  $(G_\nabla)$  associé par le troisième théorème de Lie à l'algèbre de Lie formée par les sections de  $J_\nabla$  est introduite. Sur le feuilletage(singulier) qu'elle définit, une caractérisation des feuilles hyperboliques compactes est alors obtenue grâce a la nullité de la classe hessienne ou de la classe radiante de la représentation affine canonique du groupe de Lie  $G_\nabla$  dans son algèbre de Lie  $J_\nabla$ . Nous concluons alors que ces feuilles sont dotées d'une structure de modèle statistique grâce a des manipulations de **la géométrie de Koszul**.

## 2.2 Résultats principaux obtenus

Les principaux théorèmes et nouvelles reformulations prouvées dans cette approche sont résumés ci-dessous.

**Théorème 88.** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'action affine*

$$G_\nabla \times J_\nabla \ni (\gamma, X) \rightarrow f_\nabla(\gamma).X + q_\nabla(\gamma) \in J_\nabla$$

*admet un point fixe ;*

2. *La classe de cohomologie(classé radiante)  $[q_\nabla]$  s'annule ;*

3. La représentation affine

$$G_{\nabla} \ni \gamma \rightarrow (f_{\nabla}(\gamma), q_{\nabla}(\gamma)) \in \text{Aff}(J_{\nabla}) = GL(J_{\nabla}) \ltimes J_{\nabla}.$$

est conjuguée à la représentation

$$G_{\nabla} \ni \gamma \rightarrow f_{\nabla}(\gamma) \in GL(J_{\nabla}).$$

**Théorème 89.** Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte. Alors le feuilletage  $\mathcal{F}_{\nabla}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\nabla^*}$ ) est un feuilletage hessien sur  $(M, g, \nabla)$  (resp.  $(M, g, \nabla^*)$ ).

**Théorème 90.** Sur une variété statistique  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $[g_{\nabla}] = 0 \in H_{KV}^2(\mathcal{F}_{\nabla})$
2.  $[q_{\nabla^*}] = 0 \in H^1(G_{\nabla^*}, J_{\nabla^*})$
3.  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$  admet un point fixe.
4. La représentation affine  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$  est affinement conjuguée à sa partie linéaire  $f_{\nabla^*}$ .

**Théorèmes Intermédiaires :**

**Théorème 91.** Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété hessienne compacte. Si :

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

Alors  $M$  est un espace d'orbites :

$$M = \frac{\Omega}{\Gamma}$$

avec  $\Omega$  un ouvert convexe ne contenant aucune droite entière de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  est un sous groupe discret de  $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 92.** Soit  $(M, \nabla)$  une variété hyperbolique fermée. Alors les deux classes s'annulent simultanément :

$$[q_{\nabla^*}] = 0 \in H^1(G_{\nabla^*}, J_{\nabla^*})$$

et

$$[q_{\nabla}] = 0 \in H^1(G_{\nabla}, J_{\nabla})$$

**Théorème 93.** Soit  $(N^n, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}_\nabla$  son feuilletage hessien canonique. Si :

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

Alors, chaque feuille compacte de  $\mathcal{F}_\nabla$  est affinement difféomorphe à un quotient de cônes convexes saillants de  $\mathbb{R}^m$  par un sous groupe discret  $H(\nabla)$  de  $GL(\mathbb{R}^m)$ . Avec  $m$  la dimension de la feuille de  $\mathcal{F}_\nabla$ .

**Théorème 94.** Soit  $(N^n, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}_\nabla$  son feuilletage hessien canonique. Si :

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

Alors, chaque feuille compacte  $F_\nabla$  du feuilletage canonique  $\mathcal{F}_\nabla$  est affinement difféomorphe à l'espace des paramètres d'un modèle statistique pour un ensemble mesurable  $(\Omega^*, \mathcal{B}(\Omega^*))$

$$\langle F_\nabla, Q \rangle$$

Avec  $Q$  définie par :

$$Q(\Theta, \xi) = \int_{H(\nabla)} \frac{e^{-\langle \gamma\theta, \xi \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \gamma\theta, \xi \rangle} d\xi} d\mu^{H(\nabla)}$$

Avec  $H(\nabla) \subset GL(\mathbb{R}^m)$ .

## 2.3 Variété statistique et modèle statistique

### 2.3.1 Paire duale

Dans cette section, nous allons définir et étudier les principales propriétés des connexions duales. Ces connexions ont été introduites pour la première fois par A. P. Norden dans la littérature de la géométrie différentielle affine sous le nom de "connexions conjuguées", voir Simon [84]. Elles ont également été introduites indépendamment par Nagaoka et Amari [68] et utilisées par Lauritzen [57] dans la définition des structures statistiques.

**Définition 95.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. Deux connexions linéaires  $\nabla$  et  $\nabla^*$  sur  $M$  sont dites **duales**, par rapport à la métrique  $g$ , si :

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z^* Y) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (2.1)$$

En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , la condition de dualité peut être exprimée comme suit :

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}^* \quad (2.2)$$

où  $\Gamma_{ki,j} = g_{il} \Gamma_{ki}^l$  et  $\Gamma_{kj,i}^* = g_{il} \Gamma_{kj}^{*l}$  sont les symboles de Christoffel des connexions  $\nabla$  et  $\nabla^*$ , respectivement.

**Proposition 96.** *Soit  $\nabla$  une connexion de Koszul, alors  $\nabla^*$  définie par :*

$$g(Y, \nabla_X^* Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)$$

*est une connexion de Koszul, duale de  $\nabla$ .*

*Démonstration.* Pour toute fonction  $f$ , nous avons :

$$g(Y, \nabla_{fX}^* Z) = fX.g(Y, Z) - g(\nabla_{fX} Y, Z)$$

En utilisant  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ , nous obtenons :

$$g(Y, \nabla_{fX}^* Z) = fg(Y, \nabla_X^* Z) = g(Y, f\nabla_X^* Z)$$

Donc

$$\nabla_{fX}^* Y = f\nabla_X^* Y$$

Ensuite, nous vérifions la propriété de Leibniz

$$g(Y, \nabla_X^* fZ) = X.g(Y, fZ) - g(\nabla_X Y, fZ) \quad (2.3)$$

$$= X(f)g(Y, Z) + fX.g(Y, Z) - fg(\nabla_X Y, Z) \quad (2.4)$$

$$= g(Y, X(f)Z) + fg(Y, \nabla_X^* Z) \quad (2.5)$$

$$= g(Y, X(f)Z + f\nabla_X^* Z) \quad (2.6)$$

Nous déduisons alors que la règle de Leibniz est satisfaite :

$$\nabla_X^* fZ = X(f)Z + f\nabla_X^* Z.$$

□

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ . On notera dans la suite  $\nabla^{lc}$  la connexion de Levi-Civita par rapport à  $g$ . Les isomorphismes musicaux  $\flat : TM \rightarrow TM^*$  et  $\sharp = \flat^{-1} : T^*M \rightarrow TM$  sont définis par :

$$\forall X \in TM, X^\flat | \forall Y \in TM, X^\flat(Y) = g(X, Y)$$

$$\forall \omega \in TM^*, \omega^\sharp | \forall Y \in TM \mapsto g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y)$$

Soit  $\nabla^*$  la connexion duale de  $\nabla$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $\forall \eta \in TM^*, \forall X \in TM, (\nabla_Y \eta)X = g(\nabla_Y^* \eta^\sharp, X)$
2.  $\forall \eta \in TM^*, \forall X \in TM, (\nabla_X \eta)^\sharp = \nabla_X^* \eta^\sharp$
3.  $\eta \in TM^*$  est  $\nabla$ -parallèle si et seulement si  $\eta^\sharp$  est  $\nabla^*$ -parallèle.

**Définition 97.** Le triplet  $(g, \nabla, \nabla^*)$  est appelé **structure duale** sur  $M$ .

Étant donnée une connexion linéaire  $\nabla$  sur une variété riemannienne, il est facile de montrer que la dualité est involutive, c'est-à-dire que  $(\nabla^*)^* = \nabla$  et que  $\nabla$  est une connexion métrique sur la variété riemannienne  $(M, g)$  si et seulement si  $\nabla = \nabla^*$ .

Rappelons qu'une connexion  $\nabla$  est à courbure constante  $K$  si pour tous champs de vecteurs  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  la relation suivante est satisfaite :

$$R^\nabla(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

**Proposition 98.** Soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une paire de connexions duales. On a :

1.  $g(R^\nabla(X, Y)Z, W) + g(R^{\nabla^*}(X, Y)W, Z) = 0$ .
2.  $(M, g, \nabla)$  a une courbure constante si et seulement si  $(M, g, \nabla^*)$  a une courbure constante, et dans ce cas les tenseurs de courbure sont égaux. En particulier,  $R^\nabla = 0$  si et seulement si  $R^{\nabla^*} = 0$ .
3. Si  $\nabla$  et  $\nabla^*$  sont symétriques, alors  $\nabla^0$  est la connexion de Levi-Civita de  $g$ .

**Proposition 99.** Les tenseurs de torsion  $T^\nabla$  et  $T^{\nabla^*}$  de  $\nabla$  et  $\nabla^*$ , respectivement, satisfont :

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z) + (\nabla^*g)(X, Y, Z) - (\nabla^*g)(Y, X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

*Démonstration.* D'après la formule de la torsion, nous avons :

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g([X, Y], Z)$$

Par un calcul simple, nous avons

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = X.g(Y, Z) - g(Y, \nabla_X^* Z) - Y.g(X, Z) + g(X, \nabla_Y^* Z) - g(\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X - T^{\nabla^*}(X, Y), Z)$$

En réordonnant les termes nous obtenons :

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z) + (\nabla^*g)(X, Y, Z) - (\nabla^*g)(Y, X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

□

**Corollaire 100.** Si  $\nabla^*g = 0$ , alors

$$T^\nabla = T^{\nabla^*}.$$

**Proposition 101.** Soit  $\nabla, \nabla^*$  deux connexions duales, nous avons :

$$\nabla^*g = -\nabla g$$

*Démonstration.*

$$(\nabla^*g)(X, Y, Z) = X.g(Y, Z) - g(\nabla_X^*Y, Z) - g(Y, \nabla_X^*Z) \quad (2.7)$$

$$= X.g(Y, Z) - X.g(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - X.g(Y, Z) + g(Z, \nabla_X Z) \quad (2.8)$$

$$= -(\nabla g)(X, Y, Z). \quad (2.9)$$

for any  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ . □

**Corollaire 102.** La connexion

$$\nabla^0 = \frac{\nabla + \nabla^*}{2}$$

est autoduale, c'est à dire

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X^0 Y, Z) + g(Y, \nabla_X^0 Z)$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\nabla^0 g = \left(\frac{\nabla + \nabla^*}{2}\right)g = \frac{1}{2}\nabla g - \frac{1}{2}\nabla g = 0.$$

□

On suppose que  $\nabla + \nabla^* = 2\nabla^{lc}$ ,

**Lemme 103.** Si  $\nabla$  est symétrique, alors  $\nabla^*$  est symétrique.

*Démonstration.* Le point de départ est le même que pour établir la formule de Koszul :

$$Y(g(X, Z)) = g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y^* Z)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z^* Y)$$

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + X(g(Y, Z)) = \\ -g((\nabla_X + \nabla_X^*)Z, Y) + g([Y, X], Z) - g([Z, X], Y) \\ + g(X, \nabla_Y^* Z - \nabla_Z^* Y) \end{aligned}$$

Nous savons que  $\nabla + \nabla^* = 2\nabla^{lc}$ , On obtient :

$$g(X, \nabla_Y^* Z - \nabla_Z^* Y) = g(X, [Y, Z])$$

et le lemme s'ensuit. □

**Proposition 104.** *Deux des conditions suivantes impliquent les autres.*

1.  $\nabla$  est symétrique.
2.  $\nabla^*$  est symétrique.
3.  $\nabla^{lc} = \frac{\nabla + \nabla^*}{2}$  est la connexion de Levi-Civita de  $g$ .
4.  $\nabla g \in \Gamma(TM^{(3,0)})$  est totalement symétrique, c'est-à-dire vérifie l'équation de Codazzi :

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_Y g(X, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

### 2.3.2 $\alpha$ -Connexions duales

Soit  $\nabla$  et  $\nabla^*$  deux connexions duales symétriques, par rapport à la métrique  $g$ . Considérons la famille de connexions à un paramètre donnée par la combinaison convexe des connexions duales précédentes :

$$\nabla^{(\alpha)} = \frac{\alpha + 1}{2} \nabla^* + \frac{1 - \alpha}{2} \nabla, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Avec  $\nabla^{(0)} = \nabla^{lc}$ ,  $\nabla^{(1)} = \nabla^*$  et  $\nabla^{(-1)} = \nabla$

Les connexions  $\nabla^{(\alpha)}$  sont appelées les  $\alpha$ -connexions, et jouent un rôle central dans l'étude des variétés statistiques.

*Remarque 105.* Pour une paire duale symétrique, nous avons les propriétés suivantes :

1.  $\nabla^{(\alpha)}$  et  $\nabla^{(-\alpha)}$  sont des connexions duales par rapport à la métrique  $g$ ,
2. Toutes les  $\alpha$ -connexions sont symétriques.

### 2.3.3 Tenseur différence

Soit  $\nabla$  et  $\nabla^*$  deux connexions duales sans torsion. Nous définissons le tenseur de différence (1, 2) par :

$$D(X, Y) = \nabla_X^* Y - \nabla_X Y. \quad (2.11)$$

**Lemme 106.**  $D$  est symétrique, en plus, pour tout  $X, Y, Z$  :

$$g(D(Z, X), Y) = g(X, D(Z, Y))$$

*Démonstration.* la première relation s'obtient facilement par :

$$D(X, Y) = \nabla_X^* Y - \nabla_X Y = \nabla_Y^* X + [X, Y] - \nabla_Y X - [X, Y] = D(Y, X)$$

Pour la seconde, nous savons que

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla^{lc}_Z X, Y) + g(X, \nabla^{lc}_Z Y) - \frac{1}{2}g(D(Z, X), Y) + \frac{1}{2}g(X, D(Z, Y))$$

En utilisant le caractère métrique de la connexion de Levi-Civita, nous obtenons :

$$g(D(Z, X), Y) - g(X, D(Z, Y)) = 0.$$

□

$D$  est un  $(2, 1)$ -tenseur :

$$D(fX, Y) = D(Y, fX) = D(X, fY) = D(fY, X) = fD(X, Y),$$

pour toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ . Le tenseur  $D$  peut également être exprimé avec la connexion de Levi-Civita  $\nabla^{lc} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$  par :

$$\nabla = \nabla^{lc} - \frac{1}{2}D, \quad \nabla^* = \nabla^{lc} + \frac{1}{2}D \quad (2.12)$$

En utilisant la définition des  $\alpha$ -connexions, nous avons :

$$\nabla^{-\alpha} - \nabla^\alpha = \alpha D$$

### 2.3.4 Tenseur de Codazzi

En supposant sans torsion les connexions duales, on pose :

$$T(X, Y, Z) = (\nabla_Z g)(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$$



**Proposition 107.** *Le tenseur  $T$  vérifie :*

$$T(X, Y, Z) = (-\nabla^* g)(X, Y, Z).$$

*pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .*

**Proposition 108.** *Le tenseur  $T$  et le tenseur de différence  $D$  sont liés par :*

$$T(X, Y, Z) = g(D(Z, X), Y) \quad (2.13)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (\nabla_Z g)(X, Y) &= Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z^* X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) \\ &= g(D(Z, X), Y). \end{aligned}$$

□

**Proposition 109.**  *$T$  est totalement symétrique, c'est-à-dire que :*

$$T(X, Y, Z) = T(X, Z, Y) = T(Z, Y, X) = T(Y, X, Z).$$

*pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .*

*Remarque 110.* Si les connexions duales ne sont pas supposées sans torsion, le tenseur  $T$  possède seulement une propriété de symétrie cyclique :

$$T(X, Y, Z) = T(Z, X, Y) = T(Y, Z, X)$$

**Proposition 111.** *Les  $\alpha$ -connexions peuvent s'écrire dans l'une des formes équivalentes suivantes :*

$$\nabla^{(\alpha)} = (1 - \alpha)\nabla^{lc} + \alpha\nabla^* \quad (2.14)$$

$$= (1 + \alpha)\nabla^{lc} + \alpha\nabla \quad (2.15)$$

$$= \nabla^{lc} + \frac{1}{2}\alpha(\nabla^* - \nabla) \quad (2.16)$$

$$= \nabla^{lc} + \frac{1}{2}\alpha D \quad (2.17)$$

**Corollaire 112.** *Le tenseur  $T$  satisfait les deux relations suivantes :*

$$g(\nabla_X^\alpha Y, Z) = g(\nabla_X^{lc} Y, Z) + \frac{\alpha}{2}T(X, Y, Z). \quad (2.18)$$

$$\nabla^\alpha g = -\alpha T \quad (2.19)$$

*Démonstration.* En utilisant la définition des  $\alpha$ -connexions, nous avons :

$$\nabla^\alpha g = \frac{\alpha + 1}{2} \nabla^* g + \frac{1 - \alpha}{2} \nabla g \quad (2.20)$$

$$= \frac{\alpha + 1}{2} (-\nabla g) + \frac{1 - \alpha}{2} \nabla g \quad (2.21)$$

$$= -\alpha T. \quad (2.22)$$

□

### 2.3.5 Variété statistique.

Dans cette section, nous supposons les connexions sans torsion.

**Définition 113.** Soit  $M$  une variété munie d'une connexion  $\nabla$  sans torsion et d'une métrique Riemannienne  $g$ . Nous dirons que  $(M, \nabla, g)$  est une variété statistique si le champ de tenseur  $T = \nabla g$  de type  $(3, 0)$  est totalement symétrique. On dira alors que la paire  $(\nabla, g)$  est une structure statistique sur  $M$ .

Pour une structure statistique donnée  $(\nabla, g)$  sur  $M$ , notons par  $\nabla^*$  la connexion duale de  $\nabla$  par rapport à  $g$ . Si  $(\nabla, g)$  est une structure statistique, alors  $(\nabla^*, g)$  est aussi une structure statistique, que l'on appelle structure statistique duale sur  $M$ . La connexion de Levi-Civita est donnée par :  $\nabla^{lc} = \frac{\nabla + \nabla^*}{2}$ .

*Remarque 114.* On remarque qu'une variété statistique avec  $T = 0$  est une variété riemannienne avec  $\nabla = \nabla^{lc}$ . En ce sens, la notion de variétés statistiques peut être considérée comme une généralisation de la notion de variété riemannienne.

*Remarque 115.* Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, et  $\nabla^{lc}$  la connexion Levi-Civita de  $g$ , soit  $V$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Le triplet  $(g, \nabla, \nabla^*)$  est une structure statistique sur  $M$ , avec :

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{lc} Y + g(X, V)g(Y, V)V \quad \text{et} \quad \nabla_X^* Y = \nabla_X^{lc} Y - g(X, V)g(Y, V)V.$$

### 2.3.6 Modèle Statistique

Soit  $(\Xi, \Omega, P)$  un ensemble probabilisé.

**Définition 116.** Un modèle statistique de dimension  $n$  pour  $(\Xi, \Omega)$  est un couple  $(\Theta, p)$  dans lequel  $\Theta$  est un ouvert de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  est une fonction

$$\Theta \times \Xi \ni (\theta, \xi) \rightarrow p(\theta, \xi) \in \mathbb{R}$$

satisfaisant les conditions suivantes.

1.  $p(\theta, \xi)$  est différentiable selon la variable  $\theta$  ;
2. Pour tout  $\theta$ ,  $p_\theta: \xi \mapsto p(\theta, \xi)$  est la densité par rapport à  $P$  d'une mesure de probabilité sur  $(\Xi, \Omega)$  ;
3. Si  $\theta \neq \theta^*$ , alors il existe  $\xi$  tel que  $p(\theta, \xi) \neq p(\theta^*, \xi)$  ;
4. L'opérateur de différentiation  $\frac{d}{d\theta}$  et l'opérateur d'intégration  $\int_\Xi$  commutent, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{d\theta} \circ \int_\Xi = \int_\Xi \circ \frac{d}{d\theta}$$

5. L'information de Fisher :

$$I(\theta)_{ij} = E_{p_\theta} [\partial_{\theta_i} \log p_\theta, \partial_{\theta_j} \log p_\theta]$$

est définie positive.

En vertu de (5), en posant  $g(\theta; X, Y) = X^i Y^j I(\theta)_{ij}$ , on définit une métrique riemannienne sur  $\Theta$ . La géométrie de l'information consiste en l'étude des propriétés de  $(\Theta, g)$ .

### 2.3.7 Formalisme de Amari-Chentsov dans $(\Theta, P)$

La suite  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  sont les fonctions coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^n$ . Nous adoptons les notations suivante :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i},$$

$$\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}$$

Soit  $\alpha$  un nombre réel et soient  $i, j, s = 1, \dots, m$ . On pose

$$\Gamma_{i,j;s}^\alpha(\theta) = \sum_{\xi} P(\theta, \xi) \left[ \left[ \frac{1+\alpha}{2} \partial_i \log(P(\theta, \xi)) \partial_j \log(P(\theta, \xi)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\alpha}{2} \partial_{ij}^2 \log(P(\theta, \xi)) \right] \partial_s \log(P(\theta, \xi)) \right]$$

Les fonctions  $\Gamma_{i,j;s}^\alpha(\theta)$  sont les symboles de Christoffel d'une connexion de Koszul sans torsion dans la variété  $\Theta$ . Cette connexion est notée  $\nabla^\alpha$  et nous avons :

$$g(\nabla_{\partial_i}^\alpha \partial_j, \partial_s) = \Gamma_{ij;s}^\alpha.$$

La relation entre  $\nabla^\alpha$ ,  $\nabla^{-\alpha}$  et l'information de Fisher  $g$  est le formalisme de Amari-Chentsov : pour des champs de vecteurs  $U, V, W$  on a :

$$U.g(V, W) = g(\nabla_U^\alpha V, W) + g(V, \nabla_U^{-\alpha} W).$$

La relation ci-dessus montre que le tenseur  $g$  est invariant par la connexion :

$$\nabla^{lc} = \frac{\nabla^\alpha + \nabla^{-\alpha}}{2}$$

Lorsque l'information de Fisher  $g$  est définie, la variété  $\Theta$  possède une famille à un paramètre de structures de variété statistique  $(\Theta, g, \nabla^\alpha, \nabla^{-\alpha})$ .

**Exemple 117.** [83]

Pour la famille de la distribution normale de dimension 1,  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)}$  est un modèle statistique de dimension 2 :

$$\begin{aligned} \Xi &= \mathbb{R}, \quad \Theta = \{(\mu, \sigma) \mid (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)} &= \left\{ p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \mid (\mu, \sigma) \in \Theta \right\} \end{aligned}$$

La métrique de Fisher  $g^F$  est de courbure sectionnelle riemannienne constante  $-\frac{1}{2}$ , donc  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)}$  peut être considéré comme le modèle du demi-plan de Poincaré  $(\mathbb{H}, g)$ .

2. La famille des distributions normales multivariées  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \Sigma)}$  est un modèle statistique de dimension  $\left(n + \frac{n(n+1)}{2}\right)$  :

$$\begin{aligned} \Xi &= \mathbb{R}^2, \quad \Theta = \{(\mu, \Sigma) \mid (\mu, \Sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}, \Sigma : \text{ définie positive}\}, \\ \mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \Sigma)} &= \left\{ p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu) \right] \mid (\mu, \Sigma) \in \Theta \right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\Sigma = \sigma^2 Id_n$  :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2 E_n)} = \left\{ p(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right] \mid (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \right\},$$

où  $Id_n$  est la matrice identité de taille  $n$ . Ce modèle statistique  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2 E_n)}$  avec la métrique de Fisher  $g^F$  est de courbure sectionnelle riemannienne constante  $-\frac{n}{2}$ . Par conséquent,  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2 E_n)}$  peut être considéré comme le demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique  $(\mathbb{H}^{n+1}, g)$ .

**Définition 118.** Soit  $(\Xi, \Omega)$  un espace mesurable. Une famille de distributions de probabilité  $\mathcal{E} = \{p(x; \theta) \mid \theta \in \Theta\}$  sur  $\Xi$  est dite être une famille exponentielle s'il existe des fonctions  $C, F_1, \dots, F_m$  sur  $\Xi$ , et une fonction  $\psi$  sur  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ , telles que :

$$p(x; \theta) = \exp \left[ C(x) + \sum_{j=1}^m \theta^j F_j(x) - \psi(\theta) \right] \quad (\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)).$$

On dit alors que  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  sont ses paramètres naturels ou canoniques.

**Exemple 119.** [83] La famille des distributions normales à une dimension :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)} = \left\{ p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \mid (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \right\}$$

est une famille exponentielle. En effet, en posant

$$\theta^1 := \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad \theta^2 := \frac{1}{2\sigma^2},$$

il en vient :

$$\begin{aligned} p(x; \theta) &= \exp[\theta^1 F_1(x) + \theta^2 F_2(x) - \psi(\theta)], \\ \theta \in \Theta &:= \{(\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta^2 > 0\}. \end{aligned}$$

avec

$$F_1(x) := x, \quad F_2(x) := -x^2, \quad \psi(\theta) := \frac{(\theta^1)^2}{4\theta^2} + \frac{1}{2} \log \left( \frac{\pi}{\theta^2} \right),$$

Par conséquent, la famille des distributions normales de dimension 1 est une famille exponentielle.

## 2.4 Equation hessienne dans une structure de jauge symétrique

### 2.4.1 Equation hessienne d'une connexion $\nabla$

Une structure de jauge est une paire  $(\mathbf{M}, \nabla)$  où  $\nabla$  est une connexion de Koszul dans une variété  $\mathbf{M}$ . Nous dirons que  $(\mathbf{M}, \nabla)$  est une structure jauge symétrique si la connexion  $\nabla$  est symétrique. Nous utilisons la paire  $(\mathbf{M}, \nabla)$  pour introduire un opérateur différentiel  $\nabla^2$  de second ordre appelé opérateur hessien et en déduisons un système d'équations aux dérivées partielles noté  $\mathbf{HE}(\nabla)$ . Ce travail est consacré aux impacts de l'analyse globale de l'équation  $\mathbf{HE}(\nabla)$  sur la topologie différentielle d'une variété statistique. Nous rappelons les notations que nous adoptons dans la suite :

1. L'espace vectoriel des sections de  $\mathbf{TM}$  est  $\mathcal{X}(M)$ ;
2. L'espace vectoriel des sections de  $\mathbf{Hom}(\mathbf{TM}, \mathbf{TM})$  est dénoté par  $T_1^1(M)$
3. L'espace vectoriel des sections de  $\mathbf{Hom}(\mathbf{TM} \times \mathbf{TM}, \mathbf{TM})$  est dénoté  $T_2^1(M)$ .

**Définition 120.** L'opérateur hessien  $\nabla^2: \chi(M) \rightarrow T_2^1(M)$  est, pour tout  $Z \in \chi(M)$  fixé, la dérivée covariante du tenseur de  $T_1^1(M)$  :  $X \mapsto \nabla_X Z$ . Pour triplet  $(X, Y, Z)$  de champs de vecteurs, son expression est donnée par la formule :

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

**Proposition 121.** *Le produit  $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \mapsto \nabla_X Y$  admet  $\nabla^2$  comme associateur.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la déf.120, Nous avons :

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = X.(Y.Z) - (X.Y).Z$$

□

**Définition 122.** L'équation hessienne de  $(M, \nabla)$  est l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\text{HE}(\nabla) : \quad \nabla^2 X = 0$$

## 2.4.2 Expression locale de l'équation hessienne de $\nabla$

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de coordonnées dans  $M$  et soit  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ X &= \sum X^k \partial_k \\ \nabla_{\partial_i} \partial_j &= \sum_k \Gamma_{i,j}^k \partial_k \end{aligned}$$

Le **symbole principal** de l'opérateur différentiel hessien  $\nabla^2$  peut être exprimé comme suit :

$$(\nabla^2 X)(\partial_i, \partial_j) = \sum_k \Omega_{i,j}^k(X) \partial_k \quad (2.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^l(X) &= \frac{\partial^2 X^l}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma_{ik}^l \frac{\partial X^k}{\partial x_j} + \Gamma_{jk}^l \frac{\partial X^k}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial X^l}{\partial x_k} \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^k - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le symbole géométrique  $\sigma_{\nabla}$  de  $\nabla^2$  est

$$\sigma_{\nabla}(X)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_l \frac{\partial^2 X^l}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Par l'acyclicité du complexe de Koszul-Spencer, l'opérateur différentiel hessien  $\nabla^2$  est involutif [24].

**Proposition 123.** [24] Soit  $(M, \nabla)$  une structure de jauge. Le faisceau de solutions de l'équation hessienne est noté par  $\mathcal{J}_{\nabla}(M)$ . C'est un faisceau d'algèbres associatives :

$$U \mapsto \{X \in \chi(U), \nabla^2 X = 0\}$$

avec le produit défini dans la proposition 121.

*Démonstration.* L'espace des sections de  $\mathcal{J}_{\nabla}(M)$  sera noté dans la suite par  $J_{\nabla}$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs dans  $M$ . Leur produit est :

$$X.Y = \nabla_X Y$$

Soit  $U$  et  $V$  des éléments de  $J_{\nabla}$ . Par un calcul élémentaire, nous avons :

$$X.(Y.(U.V)) - (X.Y).(U.V) = X.((Y.U).V) - ((X.Y).U).V \quad (2.25)$$

$$= (X.(Y.U)) - ((X.Y).U).V \quad (2.26)$$

$$= 0. \quad (2.27)$$

Montrons a présent que si  $U$  et  $V$  sont des éléments de  $J_{\nabla}$  alors  $\nabla_U V$  est un élément de  $J_{\nabla}$ . Par un calcul assez simple nous obtenons :

$$(\nabla_{X,Y}^2 \nabla_U V) = X.(Y.(U.V)) - (X.Y).(U.V) \quad (2.28)$$

$$= (X.Y).(U.V) - (X.Y).(U.V) \quad (2.29)$$

$$= 0. \quad (2.30)$$

□

**Proposition 124.** La paire  $(J_{\nabla}, \nabla)$  est une algèbre associative avec une algèbre de Lie  $(J_{\nabla}, [-, -]_{\nabla})$  où le crochet  $[X, Y]_{\nabla}$  est :

$$[X, Y]_{\nabla} = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Lorsque  $\nabla$  est une connexion symétrique, on dit que  $(M, \nabla)$  est une structure de jauge symétrique et l'algèbre de Lie  $(J_\nabla, [-, -]_\nabla)$  est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs

$$(\mathcal{X}(M), [-, -])$$

**Proposition 125.** [24]  $(M, \nabla)$  est une structure de jauge symétrique, alors  $J_\nabla$  est une sous-algèbre de Lie de dimension finie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs  $\mathcal{X}(M)$ .

Les propositions suivantes montrent que  $J_\nabla$  peut être trivial.

**Proposition 126.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et  $Ric$  son tenseur de courbure de Ricci. Nous avons

$$J_{\nabla^{lc}} \subset \ker(Ric).$$

*Démonstration.* Soit  $(X, Y)$  un couple de champs de vecteurs sur  $M$  et soit  $U \in J_{\nabla^{lc}}$ . Nous avons :

$$R^{\nabla^{lc}}(X, Y)U = (\nabla^2 U)(X, Y) - (\nabla^2 U)(Y, X)$$

En prenant la trace, il en vient que :

$$Ric(X, U) = 0.$$

D'où :

$$J_{\nabla^{lc}} \subset \ker(Ric).$$

□

**Corollaire 127.** Si  $\nabla^{lc}$  est la connexion de Levi-Civita d'une variété d'Einstein, alors :

$$J_{\nabla^{lc}} = \{0\}$$

**Proposition 128.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte tel que le

$$Ric < 0$$

alors :

$$J_{\nabla^{lc}} = \{0\}.$$

*Démonstration.* En utilisant la formule

$$L_X \nabla^{lc} = i_X R^{\nabla^{lc}} + \nabla^{lc2} X$$



Nous déduisons que  $J_{\nabla^{lc}}$  est un champ de Killing sur  $M$ . Par hypothèse  $Ric < 0$ , le théorème de Böchner montre alors que

$$J_{\nabla^{lc}} = \{0\}$$

□

Une conséquence directe du troisième théorème de Lie est la suivante : A un isomorphisme de groupe de Lie près, il existe un unique groupe de Lie simplement connexe  $G_{\nabla}$  dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'algèbre de Lie  $J_{\nabla}$ .

**Définition 129.** [77]  $J_{\nabla}$  est dite complètement intégrable si elle provient d'une action différentiable localement effective :

$$G_{\nabla} \times M \ni (\gamma, x) \rightarrow \gamma.x \in M.$$

Dans une variété compacte  $M$ , toute sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de  $M$  de dimension finie est intégrable. Cela est dû au fait que chaque champ de vecteurs  $X$  est complet, c'est-à-dire que  $X$  est le générateur d'un sous-groupe à un paramètre du groupe des difféomorphismes.

### 2.4.3 Une représentation canonique de $G_{\nabla}$

**Définition 130.** Soit  $W$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Son groupe des transformations affines, noté  $Aff(W)$ , est défini comme le produit semi-direct :

$$Aff(W) = GL(W) \ltimes W$$

où  $W$  est, par abus de notation, le groupe des translations de  $W$ .

Dans toute la suite  $\nabla$  sera supposée être une connexion localement plate. Il existe une représentation affine naturelle de l'algèbre de Lie  $J_{\nabla}$  sur elle-même en tant qu'espace vectoriel :

$$J_{\nabla} \ni X \rightarrow \rho(X) = (\nabla_X, X) \in gl(J_{\nabla}) \times J_{\nabla} = aff(J_{\nabla}).$$

avec une action affine donnée par :

$$\rho(X).Y = \nabla_X Y + X, \quad \forall Y \in J_{\nabla}.$$

En vertu de la propriété universelle des groupes de Lie de dimension finie simplement connexes, il existe une unique représentation affine :

$$\gamma \in G_{\nabla} \rightarrow (f_{\nabla}(\gamma), q_{\nabla}(\gamma)) \in Aff(J_{\nabla}).$$

vérifiant la condition suivante :

$$\frac{d}{dt}((f_{\nabla}(\exp -tX), q_{\nabla}(\exp -tX))|_{t=0} = (\nabla_X, X)$$

**Proposition 131.** Avec les notations ci-dessus,  $f_{\nabla}$  est une représentation linéaire de  $G_{\nabla}$  dans  $J_{\nabla}$  et  $q_{\nabla}$  est un 1-cocycle de  $G_{\nabla}$  à valeurs dans  $J_{\nabla}$ .

*Démonstration.* Le couple  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$  est un homomorphisme continu du groupe de Lie  $G_{\nabla}$  sur le groupe de Lie  $Aff(J_{\nabla})$ , donc, pour tout  $\gamma_1, \gamma_2 \in G_{\nabla}$  :

$$(f(\gamma_1).f(\gamma_2), f(\gamma_1)q(\gamma_2) + q(\gamma_1)) = (f(\gamma_1.\gamma_2), q(\gamma_1.\gamma_2)).$$

□

La cohomologie du groupe de Lie  $G_{\nabla}$  valeur dans son algèbre de Lie  $J_{\nabla}$  est définie par le complexe [33],[29] :

$$\dots \rightarrow C^q(G_{\nabla}, J_{\nabla}) \rightarrow C^{q+1}(G_{\nabla}, J_{\nabla}) \rightarrow C^{q+2}(G_{\nabla}, J_{\nabla}) \rightarrow$$

avec la différentielle  $D$  :

$$D\theta(\gamma_1, \dots, \gamma_{q+1}) = f_{\nabla}(\gamma_1).\theta(\gamma_2, \dots, \gamma_{q+1}) + \sum_{i \leq q} (-1)^i \theta(\dots, \gamma_i \gamma_{i+1}, \dots) + (-1)^q \theta(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$$

La condition :

$$q_{\nabla}(\gamma_1.\gamma_2) = f_{\nabla}(\gamma_1)q_{\nabla}(\gamma_2) + q_{\nabla}(\gamma_1) \\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in G_{\nabla}$$

est équivalent à  $q_{\nabla} \in Z^1(G_{\nabla}, J_{\nabla})$ . La définition suivante prend donc tout son sens : La classe de cohomologie  $[q_{\nabla}] \in H^1(G_{\nabla}, J_{\nabla})$  est appelée **la classe radiante** de la représentation affine  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$ . La classe de cohomologie  $[q_{\nabla}^*] \in H^1(G_{\nabla}^*, J_{\nabla}^*)$  de la représentation affine  $(f_{\nabla}^*, q_{\nabla}^*)$  est appelée **la classe radiante duale** . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les principaux résultats de ce travail :

**Théorème 132.** Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'action affine

$$G_{\nabla} \times J_{\nabla} \ni (\gamma, X) \rightarrow f_{\nabla}(\gamma).X + q_{\nabla}(\gamma) \in J_{\nabla}$$

admet un point fixe ;

2. La classe de cohomologie (**classe radiante**)  $[q_{\nabla}]$  s'annule ;

3. La représentation affine

$$G_{\nabla} \ni \gamma \rightarrow (f_{\nabla}(\gamma), q_{\nabla}(\gamma)) \in \text{Aff}(J_{\nabla}) = \text{GL}(J_{\nabla}) \ltimes J_{\nabla}$$

est conjuguée à la représentation

$$G_{\nabla} \ni \gamma \rightarrow f_{\nabla}(\gamma) \in \text{GL}(J_{\nabla}).$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que (1) implique (2). Soit  $-Y_0$  un point fixe de l'action affine  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$ , alors

$$f_{\nabla}(\gamma)(-Y_0) + q_{\nabla}(\gamma) = -Y_0, \quad \forall \gamma \in G_{\nabla}.$$

Par conséquent, on a :

$$q_{\nabla}(\gamma) = f_{\nabla}(\gamma)(Y_0) - Y_0, \quad \forall \gamma \in G_{\nabla}.$$

Donc le cocycle  $q$  est exact. Pour prouver que (2) implique (3), considérons l'isomorphisme affine  $(e, Y_0)$  qui n'est rien d'autre que la translation par  $Y_0$ .

$$X \rightarrow X + Y_0;$$

Nous calculons

$$(e, Y_0)(f_{\nabla}(\gamma), q_{\nabla}(\gamma))(e, Y_0)^{-1} = (f_{\nabla}(\gamma), 0_{\nabla})$$

où  $0_{\nabla}$  représente l'élément zéro de l'espace vectoriel  $J_{\nabla}$ . Enfin, (3) implique (1). Cette assertion signifie qu'il existe un isomorphisme affine

$$J_{\nabla} \ni Y \rightarrow L(Y) + X_0 \in J_{\nabla}$$

tel que

$$(L, X_0)(f_{\nabla}(\gamma), q_{\nabla}(\gamma))(L, X_0)^{-1} = (f_{\nabla}(\gamma), 0_{\nabla}), \quad \forall \gamma \in G_{\nabla}$$

Le calcul du membre de gauche donne les identités suivantes :

$$(a) : \quad L\dot{f}_{\nabla}(\gamma)\dot{L}^{-1} = f_{\nabla}(\gamma) \tag{2.31}$$

$$(b) : \quad L(q_{\nabla}(\gamma)) + X_0 - [L\dot{f}_{\nabla}(\gamma)\dot{L}^{-1}](X_0) = 0_{\nabla}. \tag{2.32}$$

L'identité (b) donne :

$$q_{\nabla}(\gamma) = f_{\nabla}(\gamma)(L^{-1}(X_0)) - L^{-1}(X_0), \quad \forall \gamma \in G_{\nabla}.$$

En tenant compte de l'identité (a), on obtient :

$$q_{\nabla}(\gamma) = f_{\nabla}(\gamma)(X_0) - X_0, \quad \forall \gamma \in G_{\nabla}.$$

Donc le vecteur  $-X_0$  est un point fixe de la représentation affine  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$ . □

**Définition 133.** La représentation affine  $(f_{\nabla}, q_{\nabla})$  s'appelle **la représentation affine canonique** de la variété localement plate  $(M, \nabla)$ .

*Remarque 134.* Lorsque l'action infinitésimale  $J_{\nabla}$  est intégrable, la proposition ci-dessus est un outil clé pour relier la représentation affine canonique de  $(M, \nabla)$  et le problème d'hyperbolicité pour les orbites de  $G_{\nabla}$ .

## 2.5 Application aux variétés statistiques

### 2.5.1 Variété hessienne

**Définition 135.** Une métrique riemannienne  $g$  sur une variété localement plate  $(M, \nabla)$  est appelée une métrique hessienne si  $g$  peut être exprimée localement par

$$g = \nabla^2 h;$$

c'est-à-dire :

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées affines par rapport à  $\nabla$ .

**Définition 136.** Une **variété hessienne** est un triplet  $(M, g, \nabla)$  formé d'une connexion localement plate  $\nabla$  et d'une métrique (pseudo) Riemannienne  $g$  telle que le tenseur métrique soit localement de la forme  $\nabla^2 h$  où  $h$  est une fonction lisse.

### 2.5.2 La KV-cohomologie à valeur scalaire et classe hessienne.

Soit  $(M, \nabla)$  une variété localement plate. Soit  $\mathcal{A}_{\nabla} = (\mathcal{X}(M), \nabla)$  l'algèbre de Koszul-Vinberg associée à  $(M, \nabla)$ .

**Définition 137.** Pour une variété localement plate, le KV-complexe à valeurs scalaires est l'espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué défini comme suit :

$$C(\nabla) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q(\nabla)$$

avec  $C_q(\nabla), q \geq 0$  les espaces vectoriels définis par :

$$\begin{cases} C^0(\nabla) = \{f \in C^\infty(M), \nabla^2 f = 0\} \\ C^q(\nabla) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\otimes^q \mathcal{A}_{\nabla}, C^\infty(M)) \end{cases}$$

. L'opérateur cobord  $\delta_{KV}: C^q(\nabla) \rightarrow C^{q+1}(\nabla)$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{KV} f = df \quad \forall f \in C^0(\nabla) \\ \delta_{KV} f(X_1 \otimes \dots \otimes X_{q+1}) = \sum_1^q (-1)^i [d(f(\dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes X_{q+1}))(X_i) \\ \quad - \sum_{j \neq i} f(\dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes \nabla_{X_i} X_j \otimes \dots)] \end{array} \right.$$

Le complexe  $(C(\nabla), \delta_{KV})$  est le complexe de Koszul-Vinberg à valeurs scalaire de  $(M, \nabla)$ . L'espace de cohomologie KV à valeurs réels est graduée par le sous-espace vectoriel :

$$H_{KV}^q(\nabla) = \frac{\text{Ker } \delta_{KV}(C^q(\nabla) \rightarrow C^{q+1}(\nabla))}{\text{Im } \delta_{KV}(C^{q-1}(\nabla))}$$

**Définition 138.** Un élément  $g_\nabla$  dans  $H_{KV}^2(\nabla)$  est appelé **une classe hessienne** (resp. hessienne non dégénérée, hessienne définie positive) s'il contient un cocycle symétrique (resp. symétrique non dégénérée, symétrique définie positive).

### 2.5.3 Formulation homologique de la géométrie hessienne et de la géométrie de Koszul

**Proposition 139.** [83] Soit  $(M, \nabla)$  une variété localement plate et  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $g$  est une métrique hessienne ;
2.  $g$  vérifie l'équation de Codazzi :

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_Y g(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

**Corollaire 140.** Un triplet  $(M, g, \nabla)$  est une variété Hessienne si et seulement si  $(M, g, \nabla^*)$  est une variété Hessienne.

Dans [24] Michel Boyom a donné un analogue cohomologique de la proposition ci-dessus, son résultat s'énonce comme suit :

**Proposition 141.** [24] Lorsque  $A_\nabla = (\mathcal{X}(M), \nabla)$  est la KV algèbre associée à  $(M, \nabla)$  alors une métrique  $g$  définit une structure hessienne  $(g, \nabla)$  sur  $M$  si et seulement si  $g$  est un 2-cocycle de  $A_\nabla$  à coefficient dans l'espace des fonctions  $C^\infty(M)$ .

Dans le formalisme cohomologique de Boyom, pour une variété hessienne  $(M, g, \nabla)$ , la métrique hessienne admet deux classes hessiennes :

$$[g_\nabla] \in H^2(A_\nabla, C^\infty(M)) \quad \text{et} \quad [g_{\nabla^*}] \in H^2(A_{\nabla^*}, C^\infty(M)).$$

Le théorème suivant, du à Koszul, caractérise l'hyperbolicité d'une connexion.

**Théorème 142.** [56] Si  $M$  est une variété compacte, pour qu'une connexion localement plate sur  $M$  soit hyperbolique, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : Il existe une forme différentielle  $\alpha$  fermée de degré 1 sur  $M$  dont la différentielle covariante  $\nabla\alpha$  est définie positive.

Il se reformule comme suit dans le formalisme de la KV-cohomologie de Boyom :

**Théorème 143.** [23](Théoreme 14) Soit  $(M, g, \nabla)$  une variété hessienne compacte alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $[g] = 0 \in H_{KV}^2(\nabla)$ ;
- $(M, \nabla)$  est hyperbolique.

#### 2.5.4 Feuilles hyperboliques dans une variété statistique

Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte et  $\nabla^{lc}$  la connexion de Levi-Civita de  $g$ . Nous considérons les trois structures de jauges suivantes  $(M, \nabla)$ ,  $(M, \nabla^*)$  and  $(M, \nabla^{lc})$ . Par hypothèse de compacité de  $M$ , les trois algèbres associatives,  $J_\nabla$ ,  $J_{\nabla^*}$  et  $J_{\nabla^{lc}}$  sont des actions infinitésimales des systèmes dynamiques différentiables localement effectifs suivants :

$$G_\nabla \times M \rightarrow M \tag{2.33}$$

$$G_{\nabla^*} \times M \rightarrow M \tag{2.34}$$

$$G_{\nabla^{lc}} \times M \rightarrow M \tag{2.35}$$

*Remarque 144.* Du point de vue de la géométrie riemannienne, les orbites de  $G_{\nabla^{lc}}$  sont des sous-variétés riemanniennes plates. À un revêtement fini près, chacune de ces orbites de dimension  $n$  est isométrique à un cylindre plat sur un tore euclidien, à savoir

$$\left(\frac{\mathbb{T}^k}{\Gamma} \times \mathbb{R}^{n-k}, g_0\right)$$

avec la métrique plate  $g_0$  induite de la métrique euclidienne ambiante de  $\mathbb{R}^n$ . L'entier  $k$  est le premier nombre de Betti de l'orbite et  $\Gamma$  est un groupe fini d'isométries, voir [5] pour plus d'informations.

**Notation :** Nous noterons par  $\mathcal{F}_{\nabla}$  le feuilletage dont les feuilles sont les orbites du groupe de Lie  $G_{\nabla}$  et  $g_{\nabla}$  la restriction de  $g$  à  $\mathcal{F}_{\nabla}$ .

**Théorème 145.** *Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte. Alors le feuilletage  $\mathcal{F}_{\nabla}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\nabla^*}$ ) est un feuilletage hessien dans  $(M, g, \nabla)$  (resp.  $(M, g, \nabla^*)$ ).*

*Démonstration.* Soit  $V \in J_{\nabla}$ , nous avons :

$$R^{\nabla}(X, Y)V = (\nabla^2 V)(X, Y) - (\nabla^2 V)(Y, X) = 0.$$

Les orbites de  $G_{\nabla}$  sont donc des sous-variétés localement plates. Rappelons que  $(M, g, \nabla)$  satisfait l'identité suivante :

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_Y g(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

$$\nabla_X^* g(Y, Z) = \nabla_Y^* g(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Puisque  $J_{\nabla}$  est algèbre associative pour la loi  $X.Y = \nabla_X Y$ , alors toute orbite de  $G_{\nabla}$  est  $\nabla$ -auto-parallèle, donc ces orbites sont des sous-variétés hessiennes. Ceci termine la preuve.  $\square$

**Théorème 146.** *Dans une variété hessienne  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $[g_{\nabla}] = 0 \in H_{KV}^2(\mathcal{F}_{\nabla})$
2.  $[q_{\nabla^*}] = 0 \in H^1(G_{\nabla^*}, J_{\nabla^*})$ .
3.  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$  a un point fixe.
4.  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$  est affinement conjuguée à sa composante linéaire  $f_{\nabla^*}$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 132, les assertions (2), (3) et (4) sont équivalentes. Par conséquent, il suffit de prouver que les assertions (1) et (2) sont équivalentes.

Démontrons d'abord que (1) implique (2)

Supposons que la classe  $[g_\nabla]$  s'annule. Alors il existe une 1-forme différentielle  $\theta$  fermée au sens de Rham telle que :

$$g_\nabla(X, Y) = -X\theta(Y) + \theta(\nabla_X Y), \quad \forall (X, Y).$$

Par la définition des variétés statistiques, il en résulte que :

$$Xg_\nabla(Y, Z) = g_\nabla(\nabla_X^* Y, Z) + g_\nabla(Y, \nabla_X Z), \quad \forall (X, Y, Z).$$

Soit  $H$  l'unique champ de vecteurs satisfaisant :

$$\theta(X) = g_\nabla(H, X), \quad \forall X.$$

En utilisant une fois de plus la propriété de définition des variétés statistiques, nous obtenons :

$$Xg_\nabla(H, Y) - g_\nabla(\nabla_X^* H, Y) - g_\nabla(H, \nabla_X Y) = 0.$$

Puisque le membre de gauche est  $C^\infty(M)$ -multilinéaire, nous pouvons supposer que  $H \in J_\nabla$  et nous obtenons l'identité suivante :

$$g_\nabla(\nabla_X^* H, Y) = Xg_\nabla(H, Y) - g_\nabla(H, \nabla_X Y) = g_\nabla(-X, Y), \quad \forall (X, Y) \subset \mathcal{X}(M).$$

On a donc :

$$\nabla_X^*(-H) - X = 0_\nabla, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Donc  $-H$  est un point fixe de  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$ .

Démontrons maintenant que (2) implique (1).

Supposons que  $(f_{\nabla^*}, q_{\nabla^*})$  admet un point fixe  $Y_0 \in J_{\nabla^*}$ . Alors :

$$f_{\nabla^*}(\gamma)(Y_0) + q_{\nabla^*}(\gamma) = Y_0, \quad \forall \gamma \in G_{\nabla^*}.$$

À tout  $X \in J_{\nabla^*}$ , nous associons le sous-groupe à un paramètre

$$\{Exp(tX), t \in \mathbb{R}\} \subset G_{\nabla^*}.$$

Nous avons :

$$f_{\nabla^*}(Exp(tX))(Y_0) + q_{\nabla^*}(Exp(tX)) = Y_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En calculant la dérivée à  $t = 0$ , on obtient :

$$\nabla_X^* Y_0 + X = 0.$$

Par dualité, nous avons :

$$Xg_\nabla(Y_0, Y) = g_\nabla(\nabla_X^* Y_0, Y) + g_\nabla(Y_0, \nabla_X Y)$$

En utilisant  $\nabla_X^* Y_0 = -X$ ,  $\forall X$ , on obtient l'identité suivante :

$$Xg_\nabla(Y_0, Y) = -g_\nabla(X, Y) + g_\nabla(Y_0, \nabla_X Y).$$

En définissant  $\theta$  par :  $\theta(Y) = -g_\nabla(Y_0, Y)$ ,  $\forall Y$ , on obtient :

$$g_\nabla(X, Y) = X\theta(Y) - \theta(\nabla_X Y), \quad \forall (X, Y)$$

On a alors  $[g_\nabla] = 0 \in H_{KV}^2(\nabla)$ , ce qui conclut la preuve. □



**Théorème 147.** Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété hessienne compacte. Si :

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

Alors  $M$  est un espace d'orbites :

$$M = \frac{\Omega}{\Gamma}$$

avec  $\Omega$  un ouvert convexe ne contenant aucune droite entière de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  est un sous groupe discret de  $Aff(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* D'après le théorème précédent et le théorème de reformulation de Boyom 2.5.3, le théorème se déduit assez facilement.  $\square$

*Remarque 148.* Le théorème précédent prouve que **la nullité de la classe hessienne(2.5.3) et la nullité de la classe radiante de représentation affine de la connexion duale** sont des reformulations cohomologiques de l'hyperbolicité d'un variété localement plate au sens de Koszul. Nous déduisons que l'hyperbolicité au sens de Koszul(142) peut être décrite par la nullité de la classe radiante duale de la représentation affine de la connexion duale.

**Corollaire 149.** Soit  $(M, g, \nabla, \nabla^*)$  tel  $J_{\nabla}$  et  $J_{\nabla^*}$  soient intégrables. Nous supposons que les feuilles de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  et de  $\mathcal{F}_{\nabla^*}$  satisfont l'une des assertions du théorème 146. Alors chaque feuille compacte de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  (resp.  $\mathcal{F}_{\nabla^*}$ ) est hyperbolique.

**Théorème 150.** [[43], [92],[52],[96]] Soit  $M$  une variété hyperbolique fermée. Alors  $M$  est un quotient d'un cône proprement convexe.

**Théorème 151.** Soit  $(M, \nabla)$  une variété hyperbolique fermée. Les deux classes radiantés s'annulent simultanément :

$$[q_{\nabla^*}] = 0 \in H^1(G_{\nabla^*}, J_{\nabla^*})$$

et

$$[q_{\nabla}] = 0 \in H^1(G_{\nabla}, J_{\nabla})$$

*Démonstration.* Ce théorème se démontre en deux étapes :

**Première étape([56] Lemme 3) :**

D'après 150, le revêtement universel  $\tilde{M}$  est difféomorphe à un cône convexe ne contenant

aucune droite entière de  $\mathbb{R}^n$ , que nous noterons  $C$ . Soit  $q$  le revêtement affine de  $C$  dans  $M$  défini par :

$$q = \pi \circ \mathcal{D}^{-1} \text{ avec } \pi : \tilde{M} \rightarrow M \quad \text{et } \mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow C.$$

Soit  $H \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$  un champ de vecteur défini par  $H(x) = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  $H$  est un champ d'homothéties (c'est-à-dire que ce champ est généré par un groupe à 1 paramètre d'homothéties de centre 0 et de rapport  $e^t$ ). Nous avons, pour tout  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ , la condition  $\nabla_X^0 H = X$  avec  $\nabla^0$  la connexion plate canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . Le champ de vecteurs  $H$  est  $GL(\mathbb{R}^n)$ -invariant. Puisque  $C$  est un cône saillant de  $\mathbb{R}^n$ , alors toute transformation affine de  $C$  est la restriction d'un élément de  $GL(\mathbb{R}^n)$ . La restriction de  $H$  à  $C$  est invariante par les transformations affines de  $C$ . Par conséquent, il existe un et un seul champ de vecteurs  $H'$  sur  $M$  tel que  $dq(H) = H'$ . Nous savons que  $q$  est localement un isomorphisme de variétés localement plates ie( $dq(\nabla^0) = \nabla$ ) Nous avons :

$$\begin{aligned} dq(\nabla_X^0 H) &= \nabla_{X'} H' \\ \nabla_{X'} H' &= X' \end{aligned}$$

Alors  $[q_\nabla] = 0 \in H^1(G_\nabla, J_\nabla)$ .

**Deuxième étape :**

Par hypothèse  $(M, \nabla)$  est une variété hyperbolique compacte, donc il existe une 1-forme différentielle fermée  $\theta$  telle que  $\nabla\theta$  soit définie positive, alors  $g = \nabla\theta$  est une métrique hessienne. Soit  $\nabla^*$  le dual de  $\nabla$  par rapport à  $g$ , définit par :

$$g(\nabla_X^* Y, Z) = X.g(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

$\nabla^*$  est une connexion localement plate sur  $M$  et d'après 146 nous déduisons que :

$$[q_{\nabla^*}] = 0 \in H^1(G_{\nabla^*}, J_{\nabla^*})$$

□

Les variétés hyperboliques sont étroitement liées aux variétés hessiennes

**Proposition 152.** [55] *Toute variété hyperbolique  $(M, \nabla)$  est une variété hessienne.*

*Démonstration.* Soit  $(M, \nabla)$  une variété hyperbolique, d'après 142 il existe une 1-forme fermée  $\theta$  telle que sa différentielle covariante  $\nabla\theta$  soit définie positive.  $\nabla\theta$  est une métrique Riemannienne. Puisque les formes fermées sont localement exactes, alors  $\theta = dh$ , pour une certaine fonction  $h$ . Dans ce cas,  $\nabla\theta$  est exactement la hessienne de  $h$  ( $d^2h$ ). □

**Corollaire 153.** *Soit  $(M, \nabla)$  une variété hyperbolique fermée. Alors il existe une 1-forme différentielle fermée  $\theta$  telle que  $\nabla^*\theta$  soit définie positive.*

*Démonstration.* En utilisant le théorème 151, la classe  $[q_{\nabla}]$  s'annule, d'après 146,  $[g_{\nabla^*}]$  s'annule, nous en déduisons qu'il existe une 1-forme différentielle fermée  $\theta$  telle que  $\nabla^*\theta$  soit définie positive.  $\square$

**Corollaire 154.** *Soit  $M$  une variété fermée.  $(M, \nabla)$  est une variété hyperbolique si et seulement  $(M, \nabla^*)$  est aussi une variété hyperbolique.*

*Démonstration.* Ce corollaire se déduit du précédent de façon naturel.  $\square$

### 2.5.5 Les orbites $G_{\nabla}$ sont des quotients de cônes convexes

Les cônes convexes sont des exemples de domaines bornés. L'étude des cônes convexes a été et continue à être un sujet de premier plan en géométrie et en analyse. Les travaux pionniers sont ceux d'Elie Cartan, mais il existe une multitude de travaux ultérieurs, cf : [28] Cartan 1935, [54] Koszul 1961, [94] Vinberg 1967 et bien d'autres. De nos jours, l'analyse dans les cônes convexes joue un rôle clé dans la géométrie de l'information, voir Barbaresco [7], [8]. Le théorème 146 fournit les conditions sous lesquelles les orbites compactes de  $G_{\nabla}$  sont hyperboliques. Nous allons démontrer qu'à difféomorphisme près, les feuilles compactes de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  sont des quotients de cônes convexes. Nous adoptons comme notations :  $F_{\nabla}$  pour les feuilles compactes de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  et  $\mathcal{D}(\tilde{F}_{\nabla})$  pour l'image du revêtement universel de  $F_{\nabla}$  par l'application de développement  $\mathcal{D}$ .

**Théorème 155.** [55] *Soit*

$$(M, g, \nabla)$$

*une variété hessienne compact. Si :*

$$\{[g_{\nabla}] = 0\}.$$

*Alors pour que  $D(\tilde{M})$  soit un cône, il suffit que  $\tilde{M}$  soit homogène sous le groupe de transformation affine de  $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ .*

**Théorème 156.** *Soit  $(N^n, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}_{\nabla}$  son feuilletage hessien canonique. Si :*

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

*Alors, chaque feuille compacte de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  est affinement difféomorphe à un quotient de cône convexe saillant dans  $\mathbb{R}^m$  par un sous groupe  $H(\nabla)$  de  $GL(\mathbb{R}^m)$ .*

*Démonstration.* L'action

$$G_{\nabla} \times F_{\nabla} \rightarrow F_{\nabla}$$

donne lieu à l'action

$$G_{\nabla} \times \tilde{F}_{\nabla} \rightarrow \tilde{F}_{\nabla}.$$

$(F_{\nabla}, \nabla)$  est homogène sous l'action du groupe de Lie  $G_{\nabla}$  et  $F_{\nabla}$  est le quotient de  $\tilde{F}_{\nabla}$  par son groupe fondamental  $\pi_1(F_{\nabla})$ . Par conséquent,  $\pi_1(F_{\nabla})$  et  $G_{\nabla}$  sont des sous-groupes du groupe de

$$Aff(\tilde{F}_{\nabla}, \tilde{\nabla}).$$

Il est facile de vérifier que  $G_{\nabla}$  est inclus dans le normalisateur de  $\pi_1(F_{\nabla})$ .

Puisque l'action de  $G_{\nabla}$  est transitive sur  $F_{\nabla}$ , alors chaque orbite de  $G_{\nabla}$  dans  $\tilde{F}_{\nabla}$  est une sous-variété ouverte de  $\tilde{F}_{\nabla}$ . Puisque  $\tilde{F}_{\nabla}$  est connexe, l'action de  $G_{\nabla}$  sur  $\tilde{F}_{\nabla}$  est transitive. Du théorème précédent 155, nous déduisons que les feuilles compactes de  $\mathcal{F}_{\nabla}$  sont diffeomorphes au quotient d'un cône convexe saillant par un groupe discret de  $GL(\mathbb{R}^m)$ .  $\square$

## 2.6 Modèles statistiques sur les feuilles de $\mathcal{F}_{\nabla}$

### 2.6.1 Fonction caractéristique et formalisme du Barbaresco

La structure localement plate de  $(M, \nabla)$  se relève sur son recouvrement universel  $\tilde{M}$  comme une structure localement plate  $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$  pour laquelle la projection  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{\nabla}) \rightarrow (M, \nabla)$  est une application affine. La structure localement plate sur  $\tilde{M}$  est définie par le difféomorphisme affine local  $\mathcal{D} : (\tilde{M}, \tilde{\nabla}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \nabla^0)$  où  $\nabla^0$  est la connexion standard localement plate définie par  $\nabla^0 \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

L'application développement donne lieu à une représentation  $H(\nabla)$  du groupe fondamental  $\pi_1(M)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$ , appelée représentation holonomie de  $M$ .

Elle est définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (M, \tilde{\nabla}) & \xrightarrow{\pi_1(M)} & (\tilde{M}, \tilde{\nabla}) \\ \downarrow \mathcal{D} & & \downarrow \mathcal{D} \\ (\mathbb{R}^n, \nabla^0) & \xrightarrow{H(\nabla)} & (\mathbb{R}^n, \nabla^0) \end{array}$$

$$\mathcal{D} \circ \gamma = H(\nabla) \circ \mathcal{D}, \forall \gamma \in \pi_1(M).$$

Par le théorème 156,  $\Omega$  est un cône convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $H(\nabla) \subset Gl(\mathbb{R}^n)$ , il existe donc un difféomorphisme local  $\tilde{D}$  correspondant au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\langle \tilde{M}, \tilde{\nabla}, \pi_1(M) \rangle & \xrightarrow{D} & (\Omega, \nabla^0, H(\nabla)) \\
\downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\
(M, \nabla) & \xrightarrow{\tilde{D}} & (\frac{\Omega}{H(\nabla)}, \bar{\nabla}^0)
\end{array}$$

.Soit  $\Omega$  un cône convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\bar{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$ . L'ensemble :

$$\Omega^* = \{ \Psi \mid (\Psi, x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega} - \{0\} \}$$

s'appelle le cône dual de  $\Omega$ .

L'holonomie  $H(\nabla)$  agit sur  $\Omega^*$  par représentation duale

$$H(\nabla) : \Omega^* \ni \xi \longrightarrow \tilde{\gamma} \cdot \xi = \xi \circ \gamma^{-1} \in \Omega^*$$

où  $\gamma \in H(\nabla)$ , pour plus d'informations voir [83].

J-L Koszul et E.B. Vinberg ont introduit l'intégrale suivante  $\rho$  sur un cône convexe saillant  $\Omega$  :

$$\rho_{\Omega}(\theta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \theta, \xi \rangle} d\xi, \forall \theta \in \Omega \quad (2.36)$$

où  $d\xi$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^*$ .

$\rho$  est une fonction analytique sur  $\Omega$ , avec  $\rho_{\Omega}(\theta) \in ]0, +\infty[$ , appelée la fonction caractéristique de Koszul-Vinberg sur le cône  $\Omega$ . Elle satisfait à plusieurs conditions (voir [93]) :

1.  $\rho_{\Omega}$  est logarithmiquement strictement convexe et  $\Phi_{\Omega}(\theta) = \log(\rho_{\Omega})$  est strictement convexe.
2. Si  $\gamma \in H(\nabla)$  alors  $\rho_{\Omega}(\gamma\theta) = \det(\gamma)^{-1} \rho_{\Omega}(\theta)$ .
3. 1-forme de Koszul : La 1-forme différentielle  $\alpha = d \log \rho_{\Omega} = \frac{d\rho_{\Omega}}{\rho_{\Omega}}$  est invariante par  $H(\nabla)$ . Si  $\theta \in \Omega$  et  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\langle \alpha_{\theta}, u \rangle = - \int_{\Omega^*} \langle \xi, u \rangle e^{-\langle \xi, \theta \rangle} d\xi$  et  $\alpha_{\theta} \in -\Omega^*$ .
4. 2-forme de Koszul  $\beta$  : La 2-forme différentielle symétrique  $\beta = \nabla \alpha = d^2 \log(\rho_{\Omega})$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  invariante par  $H(\nabla)$ .
5. Métrique de Koszul-Vinberg : La métrique riemannienne  $d^2 \log \rho_{\Omega}$  est une métrique invariante par  $H(\nabla)$ .

Dans [9], Frédéric Barbaresco a introduit une densité de probabilité appelée densité de Koszul et définie par :

Pour  $\theta \in \Omega$  et  $\xi \in \Omega^*$ , on définit

$$P(\theta, \xi) = \frac{e^{-\langle \theta, \xi \rangle}}{\rho_\Omega} = \exp\{-\langle \theta, \xi \rangle - \log(\rho(\theta))\}.$$

Alors  $\{P(\theta, \xi), \xi \in \Omega^*\}$  est une famille exponentielle de distributions de probabilités sur  $\Omega^*$  paramétrée par  $\theta \in \Omega$ .

## 2.6.2 Construction de la densité de probabilité sur les feuilles de $\mathcal{F}_\nabla$

Notre objectif est de doter les feuilles de  $\mathcal{F}_\nabla$  de la structure d'un modèle statistique. Le groupe  $H(\nabla) \subset Gl(n, \mathbb{R})$  est un groupe moyennable, il existe donc une moyenne  $\mu \in Hom(L^\infty(H(\nabla)), \mathbb{R})$  définie par :

$$\mu(f) = \int_{H(\nabla)} f(\gamma) d\mu(\gamma)$$

et satisfaisant :

1. If  $f > 0$ ,  $\mu(f) > 0$ .
2.  $\mu(f \circ \gamma) = \mu(f)$ ,  $\forall f, \forall \gamma \in H(\nabla)$ .
3.  $\mu(1) = 1$ .

Soit :

$$f_{\theta, \xi} : \gamma \ni H(\nabla) \longrightarrow P(\theta\gamma, \xi) = P(\theta, \gamma^t \xi) \in \mathbb{R}.$$

Nous avons :

$$P(\theta\gamma, \xi) \leq 1$$

Alors :

$$f_{\theta, \xi} \in L^\infty(H(\nabla))$$

**Proposition 157.**

$$Q(\theta, \xi) = \mu(P_{\theta, \xi}) = \int_{H(\nabla)} P(\theta\gamma, \xi) d\mu(\gamma)$$

est  $H(\nabla)$ -invariant c'est-à-dire :

$$Q(\gamma\theta, \xi) = Q(\theta, \xi).$$

**Proposition 158.** Soit  $Q$  l'application

$$Q : \frac{\Omega}{H(\nabla)} \times \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Nous avons

$$\int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi = 1$$

*Démonstration.*

$$\int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi = \int_{\Omega^*} \left[ \int_{H(\nabla)} P(\theta\gamma, \xi) d\mu(\gamma) \right] d\xi$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi &= \int_{\Omega^* \times H(\nabla)} P(\theta\gamma, \xi) d\tilde{\mu}(\mu, \xi) \\ \int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi &= \int_{H(\nabla)} \left[ \int_{\Omega^*} P(\theta\gamma, \xi) d\xi \right] d\mu(\gamma) \\ \int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi &= \int_{H(\nabla)} 1 d\mu(\gamma) \\ \int_{\Omega^*} Q(\theta, \xi) d\xi &= 1. \end{aligned}$$

□

Nous avons :

**Théorème 159.** *Soit  $(N^n, g, \nabla, \nabla^*)$  une variété statistique compacte de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}_\nabla$  son feuilletage hessien canonique. Si :*

$$\{[q_{\nabla^*}] = 0\}.$$

*Alors, chaque feuille compacte  $F_\nabla$  du feuilletage canonique  $\mathcal{F}_\nabla$  est affinement difféomorphe à un espace de paramètres d'un modèle statistique pour un ensemble mesurable  $(\Omega^*, \mathcal{B}(\Omega^*))$*

$$\langle F_\nabla, Q \rangle$$

*Avec  $Q$  définie par :*

$$Q(\Theta, \xi) = \int_{H(\nabla)} \frac{e^{-\langle \gamma\theta, \xi \rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \gamma\theta, \xi \rangle} d\xi} d\mu^{H(\nabla)}$$

*Avec  $H(\nabla) \subset GL(\mathbb{R}^m)$  et  $m$  la dimension de la feuille  $F_\nabla$ .*

# Chapitre 3

## Des structures duales aux variétés presque de contact

### 3.1 Motivation

Il est fréquent de se poser la question de l'existence d'une structure particulière sur une variété différentielle. Dans ce chapitre, on tentera de répondre au problème suivant : Soit  $M$  une variété différentiable orientable de dimension impaire donnée. Existe-t-il sur  $M$  **une structure presque cosymplectique (presque de contact), une structure métrique presque de contact, une structure de contact, une structure métrique de contact, une structure quasi-contact(2-calibrée ou encore structure presque cosymplectique contact), une structure cosymplectique, structure cokählerienne ?**

**Approche de solution :** Une structure duale sur une variété riemannienne  $M$  est un triplet  $(M, g, \nabla)$  avec  $g$  une métrique riemannienne et  $\nabla$  une connexion affine, généralement supposée être sans torsion. A partir de  $g$  et de  $\nabla$ , la connexion duale  $\nabla^*$  peut être définie et la paire  $(\nabla, \nabla^*)$  est appelé structure dualistique sur  $M$ . La paire  $(\nabla, \nabla^*)$  est un objet de base en géométrie de l'information. Dans ce travail, nous donnons des conditions basées sur cette notion pour qu'une variété orientable admette une structure presque de contact et quelques structures liées aux structures presque de contact (structure presque de contact métrique, structure de contact, structure métrique de contact, structure quasi-contact(2-calibrée), structure cosymplectique, structure cokählerienne).

**Rappel bref des structures concernées :**

1. structure presque cosymplectique :  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)$  telles que

$$\eta \wedge \omega^n \neq 0,$$

2. structure de contact :  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)$  telles que



$$\omega = d\eta, \quad \eta \wedge \omega^n \neq 0,$$

3. structure 2-calibrée (quasi-contact ou structure presque cosymplectique-contact) :  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)$  telles que

$$d\omega = 0, \quad \eta \wedge \omega^n \neq 0,$$

4. structure cosymplectique :  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)$  telles que

$$d\eta = 0, \quad d\omega = 0, \quad \eta \wedge \omega^n \neq 0,$$

5. structure hamiltonienne stable :  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)$  telles que

$$\omega^n \wedge \eta \neq 0 \quad \text{and} \quad \ker \omega \subset \ker d\eta.$$

**Conjecture de longue date en topologie de contact (conjecture Chern) :**

**Énoncé :** [31] Toute structure de presque de contact sur une variété  $M$  admet une déformation dans sa classe d'homotopie de structures de presque de contact en une structure de contact. Autrement dit. **Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.**

Dans le cas de variétés ouvertes, le résultat est vrai et c'est l'une des premières applications du principe h de Gromov (1970).

**Théorème 160.** [45][44] *Dans le cas variétés ouvertes. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

Autrement dit, nous avons :

**Théorème 161. (h-principe de Gromov)** [45][44] *Soit  $M$  une variété ouverte de dimension  $2n + 1$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une forme de contact sur  $M$  ;*
2. *il existe une structure de presque de contact sur  $M$  ;*
3. *il existe une 1-forme  $\eta$  et une 2-forme  $\omega$  telles que  $\eta \wedge \omega^n \neq 0$  partout sur  $M$ .*

L'existence de structures de contact sur les variétés de dimension 3 a une longue histoire qui commence par la question de S.S. Chern [31] en 1966 :

Une variété compacte orientable de dimension 3 possède-t-elle une structure de contact ?

Toujours en 1970, Lutz[63] et Martinet [64] ont prouvé l'existence de structures de contact pour les variétés compactes dimension 3.

**Théorème 162** ([63],[64]). *Une variété compacte orientable de dimension 3, possède toujours une forme de contact.*

Lutz[63] et Martinet [64] ont parallèlement démontré l'équivalent du théorème de Gromov dans le cas des variétés fermées de dimension 3.

**Théorème 163** ([63],[64]). *Si  $M$  est une variété fermée de dimension 3. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

En 1971 H. Geiges prouve le même théorème dans le cadre des variétés fermées simplement connexes de dimension 5 :

**Théorème 164.** [41] *Toute variété fermée orientable simplement connexe de dimension 5 admet une structure de contact dans chaque classe d'homotopie des structures de presque contact.*

En 2012 cette question fut réglée pour les variétés fermées de dimension 5 dans [30] par R. Casals, D.M. Pancholi and F. Presas .

**Théorème 165.** [30] *Soit  $M$  une variété orientée fermée de dimension 5. Il existe une structure de contact dans chaque classe d'homotopie de structures presque de contact.*

En particulier, les variétés presque de contact orientées fermées de dimension 5 sont de contact.

En 2014, un résultat Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy [17] généralise en toute dimension impaire les théorèmes précédents.

**Théorème 166.** [17] *Soit  $M$  une variété fermée de dimension impaire. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

## Conjecture de longue date en topologie de contact (conjecture Chern) :

**Énoncé** :[31] Toute structure de presque de contact sur une variété  $M$  admet une déformation dans sa classe d'homotopie de structures de presque de contact en une structure de contact. Autrement dit. **Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.**

Dans le cas de variétés ouvertes, le résultat est vrai et c'est l'une des premières applications du principe  $h$  de Gromov(1970).

**Théorème 167.** [45][44] *Dans le cas variétés ouvertes. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

Autrement dit, nous avons :

**Théorème 168.** (*h-principe de Gromov*) [45][44] *Soit  $M$  une variété ouverte de dimension  $2n + 1$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une forme de contact sur  $M$  ;*
2. *il existe une structure de presque de contact sur  $M$  ;*
3. *il existe une 1-forme  $\eta$  et une 2-forme  $\omega$  telles que  $\eta \wedge \omega^n \neq 0$  partout sur  $M$ .*

L'existence de structures de contact sur les variétés de dimension 3 a une longue histoire qui commence par la question de S.S. Chern[31] en 1966 :

Une variété compacte orientable de dimension 3 possède-t-elle une structure de contact ?

Toujours en 1970, Lutz[63] et Martinet [64] ont prouvé l'existence de structures de contact pour les variétés compactes dimension 3.

**Théorème 169** ([63],[64]). *Une variété compacte orientable de dimension 3, possède toujours une forme de contact.*

Lutz[63] et Martinet [64] ont parallèlement démontré l'équivalent du théorème de Gromov dans le cas des variétés fermées de dimension 3.

**Théorème 170** ([63],[64]). *Si  $M$  est une variété fermée de dimension 3. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

En 1971 H. Geiges prouve le même théorème dans le cadre des variétés fermées simplement connexes de dimension 5 :

**Théorème 171.** [41] *Toute variété fermée orientable simplement connexe de dimension 5 admet une structure de contact dans chaque classe d'homotopie des structures de presque contact.*

En 2012 cette question fut réglée pour les variétés fermées de dimension 5 dans [30] par R. Casals, D.M. Pancholi and F. Presas .

**Théorème 172.** [30] *Soit  $M$  une variété orientée fermée de dimension 5. Il existe une structure de contact dans chaque classe d'homotopie de structures presque de contact.*

En particulier, les variétés presque de contact orientées fermées de dimension 5 sont de contact.

En 2014, un résultat Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy [17] généralise en toute dimension impaire les théorèmes précédents.

**Théorème 173.** [17] *Soit  $M$  une variété fermée de dimension impaire. Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

**Théorème 174.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , On pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
2.  *$M$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact) ;*
3.  *$W$  admet une structure presque symplectique ;*
4. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Théorème 175.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
2. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Théorème 176.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , on pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
2.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
3.  *$W$  admet une structure presque hermitienne ;*
4. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Théorème 177.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
2.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
3.  *$M$  admet une structure de contact ;*
4.  *$M$  admet une structure métrique de contact ;*
5. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
6. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Théorème 178.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure 2-calibrée,*
2. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistique sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Théorème 179.** Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , on pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;
2.  $M$  admet une structure 2-calibrée ;
3.  $W$  admet une structure symplectique ;
4. L'équation de jauge des connexions duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

**Théorème 180.** Considérons  $(M, \omega, \eta)$  une variété hamiltonienne stable, soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une structure presque statistique adaptée à  $(M, \omega, \eta)$ . Si  $\mathcal{U}(M, D)$  est une algèbre (algèbre de déformation) commutative alors  $M$  alors  $(M, \omega, \eta)$  est une variété cosymplectique.

**Théorème 181.** Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , si l'équation de jauge des connexions duales sans torsion admet une solution antisymétrique de rang maximal telle que la classe modulaire de son image soit nulle, alors  $M$  possède une structure cosymplectique (suspension d'une variété symplectique par un difféomorphisme symplectique).

**Théorème 182.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne orientable, si l'équation de jauge de la connexion de Levi-Civita admet une solution antisymétrique de rang maximal. Alors  $M$  admet une structure  $K$ -cosymplectique.

**Théorème 183.** Soit  $M$  une variété de dimension 3, les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  admet une structure cokählerienne ( suspension d'une variété kahlerienne par une isométrie kahlerienne),
2. Il existe sur  $M$  une métrique telle que l'équation de jauge de sa connexion de Levi-Civita admette une solution antisymétrique non nulle .

## 3.2 Transformations de jauge et parallélisme

Dans cette section,  $(M, g)$  est une variété riemannienne lisse. Soit  $TM \rightarrow M$  le fibré tangent de  $M$ ,  $\Gamma(TM)$  désignant l'espace de ses sections lisses. Pour toute connexion affine  $\nabla$ , sa connexion duale  $\nabla^*$  est définie par la relation  $(\nabla_Y^* X)^{\flat} = \nabla_Y X^{\flat}$ , ou de manière équivalente comme satisfaisant pour tout triplet de champs vectoriels  $X, Y, Z$  dans  $\Gamma(TM)$ , l'équation :

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z^* Y)$$

Sur les 1-formes, la relation de dualité devient :  $(\nabla_X \omega)^{\sharp} = \nabla_X^* \omega^{\sharp}$ , pour toute 1-forme  $\omega$  et tout champ de vecteur  $X$ . Elle peut aussi s'écrire comme

$$\nabla_X^* Y = (\nabla_X Y^{\flat})^{\sharp}$$

### 3.2.1 Equation de jauge

Étant donné une paire de connexion duales  $\nabla$  et  $\nabla^*$ , on dit qu'un  $(1, 1)$ -tenseur  $\theta$  satisfait l'équation de jauge si pour tous les champs vecteurs  $X, Y$  :

$$\nabla_X^* \theta Y = \theta \nabla_X Y \quad (3.1)$$

De manière équivalente, en utilisant le tenseur différence  $D$ , nous obtenons :

$$\nabla(\theta) = -(D \otimes 1)(\theta) \quad (3.2)$$

$$\nabla^* \theta = -(1 \otimes D)(\theta) \quad (3.3)$$

Avec :

$$(D \otimes 1)(\theta)(X, Y) = D(X, \theta Y), \quad (1 \otimes D)(\theta)(X, Y) = \theta D(X, Y).$$

Dans le cadre des variétés statistiques, l'équation de jauge devient :

$$\left( \nabla^{lc} + \frac{1}{2} (1 \otimes D + D \otimes 1) \right) \theta = 0 \quad (3.4)$$

Rappel

$$\nabla(\theta)(X, Y) = \nabla_X \theta Y - \theta(\nabla_X Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Lorsque  $\nabla = \nabla^{lc}$  l'équation 3.1 se résume à  $\nabla^{lc}(\theta) = 0$ . Dans ce cas, l'équation 3.1 admet des solutions locales si les conditions decrites dans [4] sont satisfaites. En coordonnées, l'équation de jauge devient, avec la convention d'Einstein sur les indices de sommation

$$\partial_k \theta_i^j = \Gamma_{ik}^b \theta_b^j - \Gamma_{ak}^j \theta_i^a - \theta_i^a D_{ak}^j \quad (3.5)$$

où les  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel de  $\nabla$ . Il est commode d'utiliser une base orthonormée  $(X_1, \dots, X_n)$  et pour sa base duale  $(\omega^1 = X_1^b, \dots, \omega^n = X_n^b)$  pour représenter le tenseur  $D$  : c'est-à-dire

$$D = D_{ij}^k X_k \otimes \omega^i \otimes \omega^j$$

**Définition 184.** Soit  $\theta$  un tenseur  $(1, 1)$ . Son adjoint  $\theta^*$  est défini, pour tout champ de vecteurs  $X, Y$ , par la relation :

$$g(\theta X, Y) = g(X, \theta^* Y)$$

**Proposition 185.** Si  $\theta$  est une solution de l'équation de jauge pour  $\nabla, \nabla^*$ , alors son adjoint  $\theta^*$  l'est aussi.

*Démonstration.* Pour tout champ de vecteurs  $X, Y, Z$  :

$$g((\nabla_Z^* \theta)X, Y) = g(\nabla_Z^*(\theta X), Y) - g(\theta \nabla_Z^* X, Y) \quad (3.6)$$

$$= Z(g(\theta X, Y)) - g(\theta X, \nabla_Z Y) - g(\theta \nabla_Z^* X, Y) \quad (3.7)$$

$$= Z(g(X, \theta^* Y)) - g(X, \theta^* \nabla_Z Y) - g(\nabla_Z^* X, \theta^* Y) \quad (3.8)$$

$$= g(X, \nabla_Z \theta^* Y) - g(X, \theta^* \nabla_Z Y) \quad (3.9)$$

Par hypothèse  $\theta$  satisfait l'équation de jauge ,  $\nabla_Z^* \theta = -\theta D(Z, \cdot)$ , alors :

$$g((\nabla_Z^* \theta)X, Y) = -g(\theta D(Z, X), Y) = -g(D(Z, X), \theta^* Y) = -g(X, D(Z, \theta^* Y))$$

Nous avons alors :

$$0 = g(X, D(Z, \theta^* Y)) + g(X, \nabla_Z \theta^* Y) - g(X, \theta^* \nabla_Z Y) \quad (3.10)$$

$$= g(X, \nabla_Z^* \theta^* Y) - g(X, \nabla_Z \theta^* Y) + g(X, \nabla_Z \theta^* Y) - g(X, \theta^* \nabla_Z^* Y) \quad (3.11)$$

$$= g(X, \nabla_Z^* \theta^* Y) - g(X, \theta^* \nabla_Z Y) \quad (3.12)$$

Cette équation implique à son tour la propriété voulue :

$$\nabla_Z^* \theta^* Y = \theta^* \nabla_Z Y$$

□



*Remarque 186.* Cette proposition généralise le théorème 10.3.2 de [78]. Cela implique que si un tenseur de type (1,1) est une solution de l'équation de jauge, il en est de même pour ses parties symétrique et antisymétrique.

**Proposition 187.** *Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge. Soit le tenseur  $p_\theta$  défini pour tous les champs vectoriels  $X, Y$  par :*

$$p_\theta(X, Y) = g(\theta X, Y)$$

*Alors  $p_\theta$  est  $\nabla$  parallèle, ou de manière équivalente, pour tout champ vectoriel  $X, Y, Z$  :*

$$(\nabla_Z^* g)(\theta X, Y) = g((\nabla_Z \theta) X, Y)$$

*Démonstration.* Pour tout champ vectoriel  $X, Y, Z$  :

$$\begin{aligned} (\nabla_Z p_\theta)(X, Y) &= Z(p_\theta(X, Y)) - p_\theta(\nabla_Z X, Y) - p_\theta(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z^* \theta X, Y) + g(\theta X, \nabla_Z Y) - g(\theta \nabla_Z X, Y) - g(\theta X, \nabla_Z Y) \\ &= g((\nabla_Z^* \theta - \theta \nabla_Z) X, Y) = 0 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\nabla_Z^* g)(\theta X, Y) &= Z(g(\theta X, Y)) - g(\nabla_Z^* \theta X, Y) - g(\theta X, \nabla_Z^* Y) \\ &= g(\nabla_Z \theta X, Y) - g(\nabla_Z^* \theta X, \nabla_Z Y) \\ &= -g(D(Z, \theta X), Y) \end{aligned}$$

et par l'équation de jauge :

$$-g(D(Z, \theta X), Y) = g((\nabla_Z \theta) X, Y).$$

Et cela prouve la seconde assertion □

**Corollaire 188.** *Soit  $\theta$  une solution de l'équation de jauge. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $\nabla \theta = 0$
2.  $\nabla$  est la connexion métrique, pour la métrique  $g$ .

*Démonstration.* En utilisant la proposition précédente , nous avons

$$(-\nabla_Z g)(\theta X, Y) = (\nabla_Z^* g)(\theta X, Y) = g((\nabla_Z \theta) X, Y)$$

le corollaire est ainsi démontré. □

*Remarque 189.* Dans le cas de connexions duales sans torsion,  $\nabla$  est exactement la connexion de Levi-Civita de la métrique  $g$ .

**Corollaire 190.** *Soit  $\theta$  une solution de l'équation de jauge de connexions duales sans torsion. La 2-forme  $p_\theta$  est fermée et  $\nabla$ -cofermée relativement à  $\nabla$ .*

*Démonstration.* Pour une connexion sans torsion  $\nabla$  et une forme  $\omega$  :

$$d\omega_\theta(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)$$

Puisque  $\nabla p_\theta = 0$ , la formule précédente appliquée à  $p_\theta$  montre que  $dp_\theta = 0$ . D'après [76], le codifférentiel relatif à  $\nabla$  agit sur les formes différentielles comme suit :

$$\delta^\nabla \omega = -tr_g \nabla \omega$$

la formule précédente appliquée à  $p_\theta$  montre que  $\delta^\nabla p_\theta = 0$ , alors  $p_\theta$  est  $\nabla$ -cofermée.  $\square$

### 3.3 Structure presque cosymplectique et connexions duales

Être une variété presque de contact est une condition purement topologique. En dimension 5, elle se résume à la nullité de la troisième classe intégrale de Stiefel-Whitney. Dans [10], cette propriété est utilisée pour classifier les variétés de presque contact simplement connexes. Rappelons qu' **une variété presque cosymplectique** (cf. [61],[3]) de dimension  $2n + 1$  est un triplet  $(M, \omega, \eta)$  tel que la 2-forme  $\omega$  et la 1-forme  $\eta$  satisfont  $\omega^n \wedge \eta \neq 0$ . [31] Dans le langage des  $G$ -structures, une **structure presque cosymplectique** peut être définie de manière équivalente comme la donnée d'une  $1 \times Sp(n, R)$ -structure. D'après le [3], toute structure presque cosymplectique sur  $M$  induit un isomorphisme de  $C^\infty(M)$ -modules

$$b_{(\eta, \omega)} : \begin{cases} \mathcal{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \\ X \mapsto i_X \omega + \eta(X) \eta \end{cases}$$

pour tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Un isomorphisme de fibré vectoriels (noté avec le même symbole)  $b_{(\eta, \omega)} : TM \rightarrow T^*M$  est également induit. Le champ de vecteur

$$\xi = b_{(\eta, \omega)}^{-1}(\eta)$$

sur  $M$  est appelé le champ de Reeb de la variété presque cosymplectique  $(M, \eta, \omega)$  et est caractérisé par les conditions suivantes

$$i_\xi \omega = 0 \quad \text{et} \quad i_\xi \eta = 1$$

Inversement, nous avons la caractérisation suivante des variétés presque cosymplectiques qui découle de [3] [proposition 2]

**Proposition 191.** [3] Soit  $M$  une variété munie d'une 1-forme  $\eta$  et d'une 2-forme  $\omega$ , telle que l'application  $b_{(\eta,\omega)} : TM \rightarrow T^*M$  soit un isomorphisme. Supposons également qu'il existe un champ de vecteurs  $\xi$  tel que  $i_\xi\omega = 0$  et  $\eta(\xi) = 1$ . Alors,  $M$  est de dimension impaire et  $(M, \eta, \omega)$  est une variété presque cosymplectique avec pour champ de Reeb  $\xi$ .

**Définition 192.** Soit  $W$  une variété de dimension paire et soit  $\Omega$  une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang maximum définie sur  $W$ . La paire  $(W, \Omega)$  définit sur  $W$  une structure de variété presque-symplectique, si de plus  $d\Omega = 0$  alors le couple  $(W, \Omega)$  définit sur  $W$  une structure de variété symplectique.

**Théorème 193.** [91][19] Sur une variété presque-symplectique  $(M, \omega)$ , il existe toujours des connexions presque-symplectiques. L'espace des connexions presque-symplectiques est un espace affine paramétré par l'espace des 3-tenseurs complètement symétriques. [12] Sur une variété symplectique  $(M, \omega)$ , il existe toujours des connexions symplectiques. L'espace des connexions symplectiques est un espace affine paramétré par l'espace des 3-tenseurs symétriques et complètement symétriques (totalement symétriques)  $\Gamma(S^3TM^*)$ .

**Théorème 194.** (*h-principe de Gromov*)[45][44] Soit  $W$  une variété ouverte,  $a \in H_{DR}^2(M; \mathbb{R})$  et  $\omega_0$  une 2-forme non-dégénérée (presque symplectique) sur  $W$ . Alors il existe un chemin de 2-formes non-dégénérées  $\omega_t$ , commençant à  $\omega_0$  et se terminant à une 2-forme fermée  $\omega_1$  avec  $[\omega_1] = a \in H_{DR}^2(M; \mathbb{R})$ . Autrement dit, dans une variété ouverte, toute structure presque symplectique se déforme en une structure symplectique.

**Question :** Soit  $M$  une variété orientable de dimension impaire, possède-t-elle une presque cosymplectique (structure presque de contact) ?

**Théorème 195.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact),
2. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

*Démonstration.* Prouvons la partie nécessaire (1) implique (2) : Supposons que  $M$  admette une structure presque de contact  $(\omega, \eta)$ , il existe un champ de vecteurs  $\xi$  tel que  $i_\xi\omega =$

0 et  $\eta(\xi) = 1$ . Pour tout  $x \in M$ , il existe une base adaptée  $(X_0, X_1, \dots, X_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$  de  $T_x M$  tel que

$$X_0 = \xi_x \quad \text{et} \quad (X_1, \dots, X_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n) \text{ est une base symplectique de } H = \ker(\eta).$$

La base duale adaptée  $(\alpha^0 = X_0^\flat, \dots, \hat{\alpha}^n = \hat{X}_n^\flat)$  satisfait :

$$\omega_x = \alpha^1 \wedge \hat{\alpha}^1 + \dots + \alpha^n \wedge \hat{\alpha}^n \quad \text{et} \quad \eta_x = \alpha^0.$$

Nous avons selon [32], que le groupe de structure du fibré tangent de  $M$  est réductible à  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \times 1$ . Soit  $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n)$  et  $(X_0, X_1, \dots, X_n, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$  deux bases adaptées en  $x$ . Nous avons :

$$Y_i = C_i^j X_j + D_i^j \hat{X}_j \quad \text{et} \quad \hat{Y}_i = -D_i^j X_j + C_i^j \hat{X}_j$$

où  $C, D \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ . Ainsi les deux bases sont liées par la  $(2n + 1) \times (2n + 1)$  matrice  $S$  :

$$\begin{pmatrix} C & D & 0 \\ -D & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque le groupe de structure du fibré tangent de  $M$  est réductible à  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \times 1$ , on peut trouver des connexions adaptées ( $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \times 1$ -connexion)  $\nabla$  préservant  $\omega, \xi$  :

$$\nabla \xi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \omega = 0.$$

D'après [13], à une structure presque cosymplectique  $(\omega, \eta)$  il existe une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur  $M$  avec les mêmes  $\xi$  et  $\eta$ , dont la 2-forme fondamentale  $\Omega$  coïncide avec  $\omega$ . Nous définissons une métrique  $g$  sur  $M$  par :

$$g(X, Y) = g_H(X, Y), \quad g(X, \xi) = 0, \quad g(\xi, \xi) = 1, \quad \forall X, Y \in \Gamma(H).$$

Le tenseur de type  $(1, 1)$   $\theta : TM \rightarrow TM$  est défini par :

$$\theta X = JX, \quad \theta \xi = 0, \quad \forall X \in \Gamma(H)$$

où  $J^2 = -Id_H$  où  $Id_H$  désigne l'application identité sur  $H$  et  $g_H$  est une métrique sur  $H$  telle que

$$\Omega(X, Y) = g_H(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(H).$$

Nous déduisons alors que

$$\omega(X, Y) = \Omega(X, Y) = g(\theta X, Y) \quad \text{et} \quad g(\theta X, Y) = -g(X, \theta Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\nabla\omega &= \nabla\Omega = 0 \\ X.\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ X.g(\theta Y, Z) - g(\theta\nabla_X Y, Z) - g(\theta Y, \nabla_X Z) &= 0\end{aligned}$$

Par dualité entre  $\nabla, \nabla^*$ , on a

$$g(\nabla_X^* \theta Y, Z) - g(\theta\nabla_X Y, Z) = 0$$

on en déduit que

$$\nabla_X^* \theta Y = \theta\nabla_X Y \quad \text{et} \quad g(\theta X, Y) = -g(X, \theta Y)$$

Donc  $\theta$  est une solution antisymétrique de l'équation de jauge de rang maximal.

La partie suffisante (2) implique (1) :

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge. Par hypothèse, le rang de  $\theta$  est  $2n$ , donc la 2-forme  $p_\theta$  est de rang maximal, c'est-à-dire que  $p_\theta^n$  se s'annule nulle part. À  $p_\theta$  est associée sa distribution de dimension 1 donnée par son noyau  $\ker p_\theta$ . Puisque  $M$  est orientable, en utilisant l'opérateur de Hodge  $\star$  sur  $M$ , on définit une 1-forme unique  $\eta_\theta$  telle que :  $\eta_\theta = \star p_\theta^n$  et satisfant naturellement  $p_\theta^n \wedge \eta_\theta \neq 0$ . La 2-forme  $p_\theta$  définit un fibré en droites  $l_{p_\theta} = \cup_{a \in M} \{a, \ker p_\theta^a\}$ , où  $\ker p_\theta^a$  est le noyau de la l'application linéaire  $p_\theta^a : TM_a \rightarrow TM_a^*$  définie par  $X \rightarrow \ker p_\theta^a(X, \cdot)$ . Soit  $\xi_\theta$  l'unique section de  $l_{p_\theta}$  satisfaisant  $i_{\xi_\theta} \eta_\theta = 1$ , la 1-forme  $\eta_\theta$  induit un champ d'hyperplans coorientés défini par :  $H^{\eta_\theta} = \ker \eta_\theta$  qui est partout transverse à  $l_{p_\theta}$ . Ainsi la paire  $(p_\theta, \eta_\theta)$  induit une décomposition

$$TM = (l_{p_\theta}, \xi_\theta) \oplus (H^{\eta_\theta}, \hat{p}_\theta)$$

du fibré tangent de  $M$  en un fibré en droites et un hyperplan presque symplectique  $(H^{\eta_\theta}, \hat{p}_\theta)$ , où  $\hat{p}_\theta$  est la restriction de  $p_\theta$  à  $H^{\eta_\theta}$ . □

**Corollaire 196.** *Dans une variété presque cosymplectique (presque de contact)  $(M, \omega, \eta)$ , avec  $M$  de dimension  $2n + 1$ , il existe toujours des connexions duales  $(\nabla, \nabla^*)$  adaptées aux distributions  $\ker \omega$  et  $\ker \eta$ , c'est-à-dire  $\nabla \Gamma^\infty(\ker \omega) \subset \Gamma^\infty(\ker \omega)$  et  $\nabla^* \Gamma^\infty(\ker \eta) \subset \Gamma^\infty(\ker \eta)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\omega, \eta)$  une structure de presque de contact sur  $M$ . Il existe une  $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \times 1$ -connexion  $\nabla$  tel que :

$$\nabla\omega = 0, \nabla\xi = 0.$$

(i)  $\nabla\omega = 0$ , soit  $Y \in \Gamma^\infty(\ker \omega)$ . En utilisant l'identité

$$X.\omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) = 0.$$

nous avons

$$\nabla\Gamma^\infty(\ker\omega) \subset \Gamma^\infty(\ker\omega).$$

(ii)  $\nabla\xi = 0$ , Par dualité, on a :

$$(\nabla^*\eta)(X, Y) = g(\nabla_X\xi, Y).$$

Donc  $\nabla^*\eta = 0$ . Par un simple calcul, nous avons :

$$\nabla^*\Gamma^\infty(\ker\eta) \subset \Gamma^\infty(\ker\eta).$$

□

**Corollaire 197.** *Toute variété presque de contact possède une infinité de structure duale adaptées, l'espace des connexions duales adaptées est un espace affine paramétrisé par l'espace des 3-tenseurs complètement symétriques.*

*Démonstration.* En utilisant le corollaire précédent et le théorème 3.3, nous avons le résultat.

□

**Définition 198.** Une forme de contact sur une variété  $M^{2n+1}$  est une 1-forme  $\alpha$  telle que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n$$

est une forme volume sur  $M^{2n+1}$ .

Une variété de contact est un couple  $(M^{2n+1}, \alpha)$  où  $M^{2n+1}$  est une variété différentiable et  $\alpha$  une forme de contact sur  $M^{2n+1}$ .

**Théorème 199.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure de contact,*
2. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

*Démonstration.* Prouvons la partie nécessaire (1) implique (2) : soit  $\alpha$  une forme de contact sur  $M$ , en posant  $\omega = d\alpha$ , nous déduisons que la paire  $(\alpha, \omega)$  est une structure presque de contact sur  $M$ . Nous avons une inclusion canonique des structures de contact dans les structures presque de contact, d'après le théorème précédent l'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

La partie suffisante (2) implique (1).

Supposons que (2) est satisfaite, d'après le théorème précédent, nous savons que  $M$  admet une structure presque de contact, d'après [17], nous déduisons que  $M$  possède une structure de contact.

□

**Théorème 200.** Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , on pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;
2.  $M$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact) ;
3.  $W$  admet une structure presque symplectique ;
4. L'équation de jauge des connexions duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

*Démonstration.* (1)  $\iff$  (2) est exactement l'assertion du théorème 195.

Prouvons que (2)  $\iff$  (3) : La partie nécessaire "(2)  $\implies$  (3)" : partons d'une structure presque cosymplectique  $(\omega, \eta)$ , d'après [13] il existe une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur  $M$  associée à la structure presque cosymplectique, d'après [82] nous savons que  $W = M \times \mathbb{R}$  admet une structure presque complexe  $J$  définie par :

$$J(X, f \frac{\partial}{\partial s}) = (\theta X - f\xi, \eta(X) \frac{\partial}{\partial s}).$$

Delon [37], l'existence d'une structure presque complexes sur une variété est équivalente à l'existence d'une structure presque symplectique.

La partie suffisante (2)  $\longleftarrow$  (3).

Désignons par  $p : W = \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  la projection canonique et par  $l(a) = (0, a) : M \rightarrow W = \mathbb{R} \times M$  une section fixe. Soit  $\Omega$  la 2-forme presque symplectique sur  $W$  ie  $(\Omega^{n+1} \neq 0)$ , soit  $s$  la coordonnée dans  $\mathbb{R}$  et  $\frac{\partial}{\partial s}$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}$ , nous définissons  $(\eta, \omega)$  par :

$$\omega = l^* \Omega \quad , \quad \eta = l^* i_{\frac{\partial}{\partial s}} \Omega.$$

Sur  $W = M \times \mathbb{R}$  nous avons

$$\Omega = p^* \omega + p^* \eta \wedge ds.$$

D'après [36],  $\Omega^{n+1} = (n + 1)p^*(\eta \wedge \omega^n) \wedge ds$ . La 2-forme  $\Omega$  satisfait  $\Omega^{n+1} \neq 0$  donc  $\eta \wedge \omega^n$  est une forme volume sur  $M$ , et par conséquent la paire  $(\eta, \omega)$  est une structure presque cosymplectique sur  $M$ .

Prouvons que (3)  $\iff$  (4) :

La partie nécessaire "(3)  $\implies$  (4)".

Soit  $\Omega$  une presque symplectique sur  $W$ , d'après [91],[19], il existe des connexions presque symplectiques  $\nabla$  définies par

$$\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + A(X, Y), \text{ où } A \text{ est un tenseur de type } (2,1) \text{ sur } W$$

avec  $\nabla^0$  la connexion linéaire sur  $W$ , définie par :

$$\nabla_X^0 \Omega(Y, Z) = \Omega(A(X, Y), Z).$$

Les connexions presque symplectiques satisfont :

$$\nabla \Omega = 0$$

Il existe  $\theta \in \Gamma(TW^* \otimes TW)$  et une métrique riemannienne sur  $W$  telles que :

$$\Omega(X, Y) = g(\theta X, Y), \quad \theta^2 = -Id_{TW}$$

L'identité

$$\nabla \Omega = 0$$

implique que :

$$\begin{aligned} X.\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ X.g(\theta Y, Z) - g(\theta \nabla_X Y, Z) - g(\theta Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ g(\nabla_X^* \theta Y - \theta \nabla_X Y, Z) &= 0 \end{aligned}$$

La partie suffisante "(3) $\Leftarrow$ (4)".

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge des connexions duales  $(\nabla, \nabla^*)$  de rang maximal sur  $W = M \times \mathbb{R}$ . La 2-forme  $p_\theta$  est non-dégénérée sur  $W$ , alors  $p_\theta$  induit une structure presque symplectique sur  $W$ .  $\square$

En procédant de la même manière, on a le théorème suivant :

**Théorème 201.** *Soit  $M$  une variété de dimension de dimension  $2n$ , soit  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
2.  *$M$  admet une structure presque symplectique ;*
3.  *$W$  admet une structure presque cosymplectique (structure presque de contact) ;*
4. *L'équation de jauge des connexions duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

**Proposition 202.** *Soit  $(\theta, \eta, \xi)$  une presque de contact sur  $M$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\nabla \theta = 0, \quad \nabla \xi = 0,$
2.  $\nabla \theta = 0, \quad \nabla \eta = 0,$



*Démonstration.* Soit  $(\theta, \eta, \xi)$  une structure presque de contact ie :

$$\theta \circ \theta + I = \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

Par un simple calcul, on a

$$(\nabla_X \theta)(\theta Y) + \theta((\nabla_X \theta)Y) = \eta(Y)(\nabla_X \xi) + ((\nabla_X \eta)Y)\xi.$$

on déduit l'équivalence. □

**Proposition 203.** *Soit  $(\omega, \eta)$  une variété presque cosymplectique à laquelle est associée une structure métrique presque de contact  $(\theta, \eta, \xi, g)$ . Si  $\nabla \omega = 0$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\nabla \theta = 0$ ,
2.  $g$  est  $\nabla$ -parallèle i.e.  $(\nabla g = 0)$ ,
3.  $(\nabla_X \xi)^{\flat} = \nabla_X \eta$  ou  $\nabla_X \xi = (\nabla_X \eta)^{\sharp}$ .

*Démonstration.* Prouvons que (1)  $\iff$  (2)

.Prouvons que (1)  $\iff$  (2) : Pour tout  $X, Y, Z$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_Z(\omega)(X, Y) &= Z(g(\theta X, Y)) - g(\theta \nabla_Z X, Y) - g(\theta X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z \theta X, Y) + g(\theta X, \nabla_Z Y) - g(\theta \nabla_Z X, Y) - g(\theta X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_Z \theta X, Y) - g(\theta \nabla_Z X, Y) \\ &= g((\nabla_Z \theta)X, Y) \end{aligned}$$

Nous déduisons donc la partie suffisante.

Prouvons à présent la partie nécessaire

(1)  $\implies$  (2) Rappelons que,  $\nabla \omega = 0$  est équivalent à  $\nabla_X^* \theta Y = \theta \nabla_X Y$ , (1) implique  $\nabla_X \theta Y = \nabla_X^* \theta Y$ , on en déduit que  $\nabla = \nabla^*$ , donc  $\nabla g = 0$ . Ceci prouve la partie nécessaire.

Prouvons que (1)  $\iff$  (3) : prouvons la partie nécessaire.

(1)  $\implies$  (3) : supposons que  $\nabla \theta = 0$ , alors  $\nabla = \nabla^*$ , en utilisant la formule  $(\nabla_Y^* X)^{\flat} = \nabla_Y X^{\flat}$  (resp,  $(\nabla_X \omega)^{\sharp} = \nabla_X^* \omega^{\sharp}$ ), on en déduit que  $(\nabla_X \xi)^{\flat} = \nabla_X \eta$  (resp,  $\nabla_X \xi = (\nabla_X \eta)^{\sharp}$ ).

La partie suffisante : (1)  $\impliedby$  (3) : par une simple observation  $(\nabla_X \xi)^{\flat} = \nabla_X \eta = (\nabla_X^* \xi)^{\flat}$ , donc  $\nabla = \nabla^*$ , alors (1) est démontrée. □

## 3.4 Structure métrique presque de contact et connexions auto-duales

### 3.4.1 Variété de Riemann-Cartan

**Définition 204.** [2] Une variété de Riemann-Cartan est un triplet  $(M, g, \nabla)$ , où  $(M, g)$  est une riemannienne et  $\nabla$  est une connexion affine métrique, c'est-à-dire  $\nabla g = 0$ . Communément, on dit que  $\nabla$  est compatible avec la métrique  $g$ . La torsion de  $\nabla$  est définie par  $T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ , pour  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Elle ne s'annule pas en général. Ces variétés peuvent être vues comme une généralisation des variétés riemanniennes.

*Remarque 205.* Grâce à la définition précédente, on peut constater que les structures de Riemann-Cartan sont des cas particuliers des structures duales, c'est exactement le cas des connexions dites auto-duales ( $\nabla = \nabla^*$ ).

Lorsque  $\nabla = \nabla^*$ , l'équation de jauge est équivalente à :

$$\nabla(\theta) = 0 \tag{3.13}$$

**Théorème 206.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  admet une structure métrique presque de contact ;*
2. *L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

*Démonstration.* Ceci est essentiellement un corollaire du théorème 195. Prouvons que (1) implique (2).

Soit  $(\theta, \xi, \eta, g)$ -structure (structure métrique presque de contact) sur  $M$ , d'après [82][Théorème 11],[67][Théorème 2], il existe une connexion linéaire telle que :

$$\nabla \xi = 0 \quad , \quad \nabla \theta = 0, \nabla \eta = 0, \nabla g = 0.$$

On en déduit que  $\theta$  est une solution antisymétrique de la connexion auto-duale  $\nabla$  et que son rang est maximal.

Prouvons à présent que (2) implique (1).

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge des connexions auto-duales  $\nabla$  telle que  $\text{rank } \theta = 2n$ . D'après 195,  $M$  admet une structure presque cosymplectique (presque de contact). D'après [13], il existe une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur  $M$ .  $\square$

*Remarque 207.* Toute variété métrique presque de contact possède une infinité de structures auto-duales (Riemann-Cartan) adaptées.

**Théorème 208.** Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , On pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;
2.  $M$  admet une structure métrique presque de contact ;
3.  $W$  admet une structure presque hermitienne ;
4. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

*Démonstration.* (1)  $\iff$  (2) est exactement l'assertion du théorème précédent. Prouvons que (2)  $\iff$  (3) :

La partie nécessaire "(2)  $\implies$  (3)".

Soit  $(\theta, \xi, \eta, g)$  une structure métrique presque de contact sur  $M$ , de [13] la paire  $(J, h)$  où  $J$  est une structure presque complexe définie par :

$$J(X, f \frac{\partial}{\partial s}) = (\theta X - f\xi, \eta(X) \frac{\partial}{\partial s})$$

et  $h = g + dt^2$  est une métrique produit sur  $W$ . On a

$$h(J(X, f \frac{\partial}{\partial t}), J(Y, f \frac{\partial}{\partial t})) = h((X, f \frac{\partial}{\partial t}), (Y, f \frac{\partial}{\partial t})).$$

La paire  $(J, h)$  est une structure presque hermitienne sur  $W$ .

La partie suffisante "(2)  $\impliedby$  (3)".

Soit  $(J, h)$  une structure presque hermitienne sur  $W$ . La forme presque hermitienne définie par  $\Omega(X, Y) = h(JX, Y)$  est une forme 2 non-dégénérée sur  $W$ . Soit  $s$  la coordonnée dans  $\mathbb{R}$  et  $\frac{\partial}{\partial s}$  son champ de vecteurs de coordonnées sur  $\mathbb{R}$ . Nous définissons  $(\eta, \omega)$  par :

$$\omega = l^* \Omega \quad , \quad \eta = l^* i_{\frac{\partial}{\partial s}} \Omega.$$

où la projection canonique et par  $l(a) = (0, a) : M \rightarrow W = \mathbb{R} \times M$ . La paire  $(\omega, \eta)$  est une structure presque cosymplectique sur  $M$ . De [13] il existe une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur  $M$ .

(3)  $\iff$  (4) : La partie nécessaire

"(3)  $\implies$  (4)" Soit  $(J, h)$  une structure presque hermitienne sur  $W$ . D'après [72] [Théorème 15.1, corollaire 1] il existe des connexions presque hermitiennes, à savoir, des connexions linéaires  $\nabla$  (connexion de Bismut, connexion de Chern) définies par :

$$\nabla = \nabla^h - \frac{1}{2} J \nabla^h J$$

satisfaisant :

$$\nabla J = 0 \quad \text{et} \quad \nabla h = 0.$$

Alors l'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique  $J$  telle que  $\text{rank } J = 2n + 2$ .

La partie suffisante "(3) $\Leftarrow$ (4)".

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge de connexions auto-duales  $\nabla$  sur  $W = M \times \mathbb{R}$  de rang maximal. La 2-forme  $p_\theta$  est non dégénérée sur  $W$ . Il existe sur  $W$  une structure presque hermitienne  $(J, h)$  telle que  $p_\theta(X, Y) = h(JX, Y)$ .  $\square$

**Théorème 209.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  admet une structure presque de contact ;
2.  $M$  admet une structure métrique presque de contact ;
3.  $M$  admet une structure de contact ;
4.  $M$  admet une structure métrique de contact ;
5. L'équation de jauge des connexions auto-duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;
6. L'équation de jauge des connexions duales sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

*Démonstration.* Ce théorème se démontre en utilisant les mêmes techniques que les théorèmes précédents.  $\square$

## 3.5 Variété presque statistique ou variété statistique admettant une torsion (SMAT) et structure 2-calibrée.

### 3.5.1 Variété presque statistique ou variété statistique admettant une torsion

.Soit  $\nabla$  une connexion sur  $M$  et  $\nabla^*$  sa connexion duale définie par :

$$\nabla_X^* Y = (\nabla_X Y^\flat)^\sharp$$

La condition de dualité entraîne que :

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z) + (\nabla^*g)(X, Y, Z) - (\nabla^*g)(Y, X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

ou

$$g(T^\nabla(X, Y), Z) = g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z) - (\nabla g)(X, Y, Z) + (\nabla g)(Y, X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Nous avons  $T^\nabla = 0$  si et seulement si

$$g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z) + (\nabla^* g)(X, Y, Z) - (\nabla^* g)(Y, X, Z) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

Dans cette situation  $(M, g, \nabla^*)$  est appelée variété presque statistique.

D'une façon analogue  $T^{\nabla^*} = 0$  si et seulement si  $g(T^\nabla(X, Y), Z) = -(\nabla g)(X, Y, Z) + (\nabla g)(Y, X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

Dans cette situation  $(M, g, \nabla)$  est appelée variété presque statistique.

Pour plus de renseignements sur ces structures voir [65],[48],[47].

Dans toute la suite nous appellerons connexions duales presque statistiques une paire de connexions duales  $(\nabla, \nabla^*)$  telle que  $\nabla$  soit symétrique et  $\nabla^*$  non nécessairement symétrique.

### 3.5.2 Équation de jauge dans une variété presque statistique

Soit  $\nabla$  une connexion symétrique sur  $M$  et  $\nabla^*$  sa connexion duale, on dit qu'un  $(1, 1)$ -tenseur  $\theta$  satisfait l'équation de jauge si pour tous les champs vecteurs  $X, Y$  :

$$\nabla_X^* \theta Y = \theta \nabla_X Y, \quad T^\nabla = 0. \quad (3.14)$$

### 3.5.3 Variété 2-calibrée (Variété quasi-contact)

**Définition 210.** Une **2-structure calibrée** sur  $M^{2n+1}$  est une paire  $(H, \omega)$ , où  $H$  est une distribution de codimension un et  $\omega$  une forme fermée à 2 non dégénérée sur  $H$ . Dans le cas des variétés orientables, sous cette hypothèse, le champ d'hyperplans  $H$  se laisse décrire comme le champ des noyaux d'une 1-forme  $\eta$  globale, coorienté par  $\eta$ . Une structure **2-calibrée** est alors une structure presque cosymplectique  $(\omega, \eta)$  telle que  $d\omega = 0$ .

Les Variétés quasi-contact sont aussi nommées dans la littérature par variétés presque-cosymplectique contact, voir [51]. Lorsque  $H$  est intégrable, on parle de **2-feuillements calibrés**.

### 3.5.4 Feuilletage tendu

**Définition 211.** [40] Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 sur une variété  $M$  (quelconque) est dit tendu si tout arc transverse à  $\mathcal{F}$  se prolonge en un lacet transverse.

**Proposition 212.** *Un feuilletage est tendu si et seulement si par tout point passe un lacet transverse.*

Cette définition, qui est de nature topologique, peut être caractérisée comme suit :

**Théorème 213.** [85][79] *Pour un feuilletage transversalement orientable de codimension un dans une variété  $M$  fermée de dimension  $m$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathcal{F}$  est tendu,
2. il existe une forme fermée  $(m - 1)$  qui se restreint à une forme volume sur chaque feuille,
3. il existe une métrique riemannienne sur  $M$  telle que chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est une sous-variété minimale de  $M$ ,
4. il existe un champ vectoriel transverse à  $\mathcal{F}$  dont le flot préserve une certaine forme de volume sur  $M$ .

Les structures 2-calibrées généralisent les structures hamiltoniennes stables, les structures hamiltoniennes stables à leur tour généralisent les structures de contact, les structures cosymplectiques (suspension symplectique par un difféomorphisme symplectique) et les structures cokeriennes.

Pour plus d'informations sur les variétés 2-calibrées voir [89],[50].

**Théorème 214.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$  admet une structure 2-calibrée,
2. L'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

*Démonstration.* Prouvons en premier temps la partie nécessaire (1) implique (2) : supposons que  $M$  admette une structure 2-calibrée  $(\omega, \eta)$  et  $\xi$  l'unique champ vecteur (champ

de Reeb) tel que :  $\eta(\xi) = 1$  et  $\omega(\xi, \cdot) = 0$ . Les conditions  $\eta \wedge \omega^n \neq 0$  et  $d\omega = 0$  impliquent que la restriction de  $\omega$  à l'hyperplan intégrable  $H = \ker(\eta)$  est une forme symplectique. De [12] les connexions  $\nabla$  sont définies par :

$$\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + \frac{1}{3}N(X, Y) + \frac{1}{3}N(Y, X) \quad \forall X, Y \in \Gamma(H)$$

sont des connexions symplectiques sur  $H$ , où  $\nabla^0$  est une connexion linéaire quelconque sans torsion sur  $H$  et  $N$  est un tenseur de type  $(2,1)$  vérifiant :

$$\nabla_X^0 \omega(Y, Z) = \omega(N(X, Y), Z) \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(H).$$

Le fibré tangent se décompose comme :

$$TM = \mathbb{R}\xi \oplus H$$

où  $\pi : TM \rightarrow H$  désignent la projection correspondante. Les connexions symplectiques  $\nabla$  le long de  $H$  admettent des relèvements en connexions sans torsion  $\tilde{\nabla}$  :

$$\nabla := \pi \tilde{\nabla}|_H \quad \text{et} \quad \tilde{\nabla}\xi = 0.$$

On notera que  $\nabla\omega = 0$  implique :

$$\tilde{\nabla}\omega = 0 \quad \text{and} \quad \tilde{\nabla}\xi = 0.$$

Toute variété 2-calibrée  $(M, \omega, \eta)$  admet une infinité de structures métriques presque de contact  $(\theta, g)$  obtenues en polarisant  $\omega$  sur l'hyperplan  $H = \ker(\eta)$ , elles vérifient les identités suivantes :

$$\eta(\xi) = 1, \theta^2 = -\text{Id} + \eta \otimes \xi, g(\theta X, \theta Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

La forme 2 fondamentale  $\Omega$  de la structure métrique de contact coïncide avec  $\omega$  et est définie par :

$$\omega(X, Y) = g(\theta X, Y)$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}\omega &= \tilde{\nabla}\Omega = 0 \\ X.\Omega(Y, Z) - \Omega(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \Omega(Y, \tilde{\nabla}_X Z) &= 0 \\ X.g(\theta Y, Z) - g(\theta \tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\theta Y, \tilde{\nabla}_X Z) &= 0 \\ g(\tilde{\nabla}_X^* \theta Y, Z) - g(\theta \tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 0 \end{aligned}$$

on en déduit alors :

$$\tilde{\nabla}_X^* \theta Y = \theta \tilde{\nabla}_X Y \quad \text{et} \quad g(\theta X, Y) = -g(X, \theta Y).$$

Donc  $\theta$  est une solution antisymétrique de rang maximal de l'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $M$ .

(2) implique (1) :

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge des connexions duales presque statistiques  $(\nabla, \nabla^*)$  sur  $M$ . D'après le corollaire 187,  $p_\theta$  est  $\nabla$ -parallèle, donc  $p_\theta$  fermée. Par hypothèse, le rang de  $\theta$  est  $2n$ , donc la 2-forme  $p_\theta$  est de rang maximal, c'est-à-dire telle que  $p_\theta^n$  ne s'annule nulle part. Nous associons à  $p_\theta$  une feuilletage de dimension 1 définie par  $\ker p_\theta = \ker(\theta)$ . La paire  $(p_\theta, D)$  où  $D = \ker p_\theta^\perp$  est une structure 2-calibrée sur  $M$ . Comme  $M$  est orientable, sous cette hypothèse, le champ d'hyperplans  $D$  se laisse décrire comme le champ des noyaux d'une 1-forme  $\eta_\theta$  globale, coorienté par  $\eta_\theta$ , alors  $(p_\theta, \eta_\theta)$  est une structure 2-calibrée sur  $M$ .  $\square$

**Théorème 215.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , On pose  $W = M \times \mathbb{R}$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $M$  admet une solution antisymétrique de rang maximal ;*
2.  *$M$  admet une structure 2-calibrée ;*
3.  *$W$  admet une structure symplectique ;*
4. *L'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.*

*Démonstration.* (1)  $\iff$  (2) est exactement le théorème précédent.

(2)  $\iff$  (3)

Prouvons la partie nécessaire (2) $\implies$ (3) :  $(\omega, \eta)$  une structure 2-calibrée sur  $M$ , par symplectisation,  $W$  admet une structure symplectique définie par :

$$\Omega := \omega + d(\eta s)$$

avec  $s$  la coordonnée dans  $\mathbb{R}$ .

La partie suffisante (2) $\longleftarrow$ (3).

Soit  $\Omega$  une structure symplectique sur  $W$ ,  $M$  est une hypersurface de  $W$  ( $M = M \times \{0\} \subset W$ ). Une structure 2-calibrée sur  $M$  est obtenue par :

$$\omega = l^* \Omega \quad , \quad \eta = l^* i_{\frac{\partial}{\partial s}} \Omega.$$

Avec

$$l(a) = (0, a) : M \rightarrow W = \mathbb{R} \times M$$

(3)  $\iff$  (4)

La preuve de cette équivalence utilise le même cheminement que l'équivalence (3)  $\iff$  (4) dans 200.

La partie nécessaire (3) $\implies$ (4)



De [12] les connexions  $\nabla$  définies par :

$$\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + \frac{1}{3}N(X, Y) + \frac{1}{3}N(Y, X) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TW)$$

sont des connexions symplectiques sur  $W$ , où  $\nabla^0$  est une connexion linéaire quelconque symétrique sur  $W$  et  $N$  est un tenseur de type (2,1) sur  $W$  vérifiant :

$$\nabla_X^0 \omega(Y, Z) = \omega(N(X, Y), Z) \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TW)$$

Les connexions symplectiques satisfont :

$$\nabla \Omega = 0$$

Il existe une  $\theta \in \Gamma(TW^* \otimes TW)$  et une métrique riemannienne sur  $W$  telle que :

$$\Omega(X, Y) = g(\theta X, Y), \quad \theta^2 = -Id_{TW}$$

L'identité

$$\nabla \Omega = 0$$

implique que :

$$\begin{aligned} X.\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ X.g(\theta Y, Z) - g(\theta \nabla_X Y, Z) - g(\theta Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ g(\nabla_X^* \theta Y - \theta \nabla_X Y, Z) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de jauge des connexions duales presque statistiques sur  $W$  admet une solution antisymétrique de rang maximal.

La partie suffisante "(3) $\Leftarrow$ (4)"

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge des connexions duales presque symétriques  $(\nabla, \nabla^*)$  de rang maximal sur  $W = M \times \mathbb{R}$ . La 2-forme  $p_\theta$  est non-dégénérée sur  $W$ . En utilisant 187, on déduit que  $\nabla p_\theta = 0$ , comme  $\nabla$  est symétrique  $dp_\theta = 0$ . La 2-forme  $p_\theta$  induit une structure symplectique sur  $W$ .  $\square$

**Corollaire 216.** *Dans une variété 2-calibrée  $(M, \omega, \eta)$ , de dimension  $2n + 1$ , il existe toujours des connexions duales presque statistiques  $(\tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$  toutes deux adaptées aux distributions  $\ker \omega$  et  $\ker \eta$ , c'est-à-dire  $\tilde{\nabla} \Gamma^\infty(\ker \omega) \subset \Gamma^\infty(\ker \omega)$  et  $\tilde{\nabla}^* \Gamma^\infty(\ker \eta) \subset \Gamma^\infty(\ker \eta)$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce corollaire est similaire à celle du corollaire 196. D'après le théorème précédent, nous savons qu'il existe des connexions sans torsion sur  $M$  telle que :

$$\tilde{\nabla} \xi = 0 \quad , \quad \tilde{\nabla} \omega = 0.$$

Par dualité, il en résulte que :

$$\tilde{\nabla}(\Gamma^\infty \ker \omega) \subset \Gamma^\infty \ker \omega \quad , \quad \tilde{\nabla}^*(\Gamma^\infty \ker \eta) \subset \Gamma^\infty \ker \eta.$$

$\square$

**Corollaire 217.** *Toute variété 2-calibrée possède une infinité de structures presque statistiques adaptées et l'espace des connexions presque statistiques adaptées est un espace affine paramétré par l'espace des 3-tenseurs symétriques et complètement symétriques (totalement symétrique)  $\Gamma(S^3T^*M)$  .*

*Démonstration.* En utilisant le corollaire précédent et le théorème 3.3, le résultat est immédiat.  $\square$

**Corollaire 218.** *Dans le cas des variétés de contact  $(\eta, \omega = d\eta)$ , nous avons :*

$$\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X \neq [X, Y].$$

*Démonstration.* La condition de non intégrabilité implique qu'il existe deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  de  $\ker \eta$ , tels que  $[X, Y] \notin \ker \eta$ . De  $\nabla^* \eta = 0$ , on déduit que :  $\nabla_X^* Y, \nabla_Y^* X \in \ker \eta$ . Supposons que  $T^{\nabla^*} = 0$ , alors  $[X, Y] \in \ker \eta$  (absurde), donc :

$$\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X \neq [X, Y].$$

$\square$

### 3.5.5 Algèbre de déformation de deux connexions duales

Soit  $D$  le tenseur différence associé  $\nabla^*$  et  $\nabla$  défini par :

$$D = \nabla^* - \nabla$$

$$\mathcal{U}(M, D) = (\mathcal{X}(M), \circ)$$

avec

$$X \circ Y = D(X, Y)$$

est appelé algèbre de déformation de  $\nabla$  et  $\nabla^*$  ( voir [90],[71]).

**Théorème 219.** *Considérons  $(M, \omega, \eta)$  une variété 2-calibrée, soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une paire de connexions presque statistique associée à  $(M, \omega, \eta)$ . Si  $\mathcal{U}(M, D)$  est une algèbre (algèbre de déformation) est commutative alors  $M$  possède un feuilletage calibré (feuilletage tendu).*

*Démonstration.* Par calcul, nous avons :

$$g(D(X, Y), Z) - g(D(Y, X), Z) = g(T^{\nabla^*}(X, Y), Z).$$

Par hypothèse  $\mathcal{U}(M, D)$  est commutative alors  $T^{\nabla^*} = 0$ . Dans ce cas la distribution  $\ker(\eta)$  est un feuilletage calibré. La forme  $\omega^n$  est une forme volume lorsqu'elle est restreinte à une feuille quelconque de  $H = \ker(\eta)$ . D'après le théorème 213,  $H = \ker(\eta)$  est un feuilletage tendu.  $\square$

### 3.6 Equation de jauge dans une variété statistique et variété cosymplectique

Une "**variété cosymplectique**", est une variété  $M$  munie d'une 1-forme fermée  $\eta$  et d'une 2-forme fermée  $\omega$  telles que  $\omega^n \wedge \eta$  soit une forme volume. Cette définition est due à P. Libermann en 1959 [60]. La paire  $(\eta, \omega)$  est appelée une **structure cosymplectique** sur  $M$ . Dans le document [13], Blair donne une définition équivalente des variétés cosymplectiques, qui est plus souvent mentionnée dans la littérature, voir [59], [11], [34], [27], [39], [75], [74]. D'après Blair[13], une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur une variété lisse de dimension impaire  $M$  est cosymplectique si  $d\eta = d\Omega = 0$ , où  $\Omega$  est la 2-forme fondamentale de la structure métrique presque de contact. **Les variétés cosymplectiques** peuvent être considérées comme la contrepartie en dimension impaire des variétés symplectiques. En fait, sur toute variété cosymplectique  $(M, \eta, \omega)$ , la distribution dite horizontale  $\ker \eta$  est un feuilletage symplectique de codimension 1. D'autre part, on a le résultat suivant dû à Manuel de Léon et Martin Saralegi :

**Théorème 220** ([36]). *Soit  $M$  une variété et  $\omega, \eta$  deux formes différentielles sur  $M$  de degrés respectives 2 et 1. Considérons, sur  $W = M \times \mathbb{R}$ , la 2-forme différentielle  $\Omega = pr^*\omega + pr^*\eta \wedge ds$ , où  $s \in \mathbb{R}$  et  $pr : W \rightarrow M$ . Alors :  $(M, \eta, \omega)$  est une variété cosymplectique si et seulement si  $(W, \Omega)$  est une variété symplectique.*

**Le théorème de Darboux** admet un équivalent en structure cosymplectique. Une variété cosymplectique  $(M, \eta, \omega)$  de dimension  $2n + 1$  admet autour de tout point des coordonnées locales  $(t, q^\alpha, p_\alpha), \alpha = 1, \dots, n$ , telles que :

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^n dq^\alpha \wedge dp_\alpha, \quad \eta = dt, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

**Définition 221.** Une suspension en tore de  $\varphi : K \rightarrow K$  est l'espace :

$$M = K_\varphi = K \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\varphi x, 1)$$

Dans le cas où  $(K^{2n}, \omega)$  une variété symplectique avec  $\varphi : K^{2n} \rightarrow K^{2n}$  un symplectomorphisme tel que  $\varphi^*\omega = \omega$ , nous dirons que  $K_\varphi^{2n}$  est une suspension en tore symplectique.

En 2008, le théorème principal de HONGJUN LI dans [59] affirme que les variétés cosymplectiques sont équivalentes aux suspensions symplectiques. L'idée principale de la preuve de Li provient du théorème de Tischler[87], **qui stipule qu'une variété compacte admet une 1 forme fermée sans singularité si et seulement si elle est fibre sur le**

cercle ( $\mathbb{S}^1$ ). Cette assertion est également équivalente à : " une variété compacte est une suspension en tore si et seulement si elle admet une 1-forme fermée sans singularité." Les feuilletages de codimension un, co-orientables, définis par le noyau d'une 1-forme fermées sans singularité sont appelés feuilletages unimodulaires. Dans [46] pour les feuilletages co-orientables de codimension un, l'existence d'une 1-forme fermée tel que le feuilletage soit unimodulaire est équivalente à la nullité de leur classe modulaire.

**Théorème 222** ([46]). *La première classe d'obstruction (la classe modulaire)  $c_{\mathcal{F}}$  s'annule si et seulement si nous pouvons choisir une 1-forme  $\eta$  fermée telle que le feuilletage soit décrit par le noyau de  $\eta$  ( $T\mathcal{F} = \ker\eta$ ).*

### 3.6.1 Équation de jauge dans une variété statistique

Une structure statistique dans une variété différentiable  $M$  est un triplet  $(g, \nabla, \nabla^*)$ . formé de deux connexions symétriques  $(\nabla, \nabla^*)$  et d'une métrique riemannienne  $g$  vérifiant l'identité suivante :

$$X.g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X^* Z) = 0 \forall (X, Y, Z) \in \mathcal{X}(M).$$

$$\text{Dans ce cas : } \nabla^{lc} = \frac{\nabla + \nabla^*}{2}.$$

Les identités suivantes sont des conséquences directes de la définition précédente,

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_Y g(X, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

$$\nabla_X^* g(Y, Z) = \nabla_Y^* g(X, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

$$\nabla\theta = -(D \otimes 1)\theta \tag{3.15}$$

$$\nabla^*\theta = -(1 \otimes D)\theta \tag{3.16}$$

$$\left( \nabla^{lc} + \frac{1}{2}(1 \otimes D + D \otimes 1) \right) \theta = 0 \tag{3.17}$$

**Théorème 223.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$ , si l'équation de jauge des connexions duales statistiques admet une solution antisymétrique de rang maximal telle que la classe modulaire de son image s'annule, alors  $M$  possède une structure cosymplectique (suspension d'une variété symplectique par un difféomorphisme symplectique).*

*Démonstration.* Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge des connexions statistiques  $(\nabla, \nabla^*)$ . D'après le corollaire 190, la 2-forme  $p_\theta$  est  $\nabla$ -parallèle, donc elle est fermée. Par hypothèse, le rang de  $\theta$  est  $2n$ , donc la 2-forme  $p_\theta$  a un rang maximal, c'est-à-dire telle que  $p_\theta^n$  ne s'annule nulle part. Nous associons à  $p_\theta$  une distribution  $\ker p_\theta = \ker(\theta)$ , de dimension 1. De 190  $p_\theta$  est  $\nabla$ -parallèle, donc  $\ker p_\theta$  est un feuilletage  $\nabla$ -parallèle, c'est-à-dire  $(\nabla\Gamma(\ker p_\theta) \subset \Gamma(\ker p_\theta))$ . En utilisant la relation de dualité entre  $(\nabla, \nabla^*)$  :

$$X.g(v, v^\perp) = g(\nabla_X v, v^\perp) + g(v, \nabla_X^* v^\perp).$$

Nous déduisons que  $im\theta$  est  $\nabla^*$ -parallèle c'est-à-dire  $\nabla^*(\Gamma(im\theta)) \subset \Gamma(im\theta)$ , donc  $im\theta$  est un feuilletage. En utilisant l'orientation sur  $M$  conjointement avec l'orientation transverse  $p_\theta^n$ , nous orientons  $\ker p_\theta$ , alors  $im\theta$  devient un feuilletage transversalement orientable de codimension un. Par hypothèse, sa classe modulaire s'annule. D'après [46], il existe une 1-forme fermée  $\eta_\theta$  sur  $M$  telle que  $im\theta = \ker(\eta_\theta)$ , nous en déduisons que  $(p_\theta, \eta_\theta)$  une structure cosymplectique sur  $M$ . En utilisant le théorème clé de [59], nous déduisons que  $M$  est une suspension en tore symplectique.  $\square$

### 3.7 Équation jauge et structure hamiltonienne stable

**Définition 224.** Une structure hamiltonienne (HS) sur une orientée de dimension  $2n+1$   $M$  est une 2 forme fermée  $\omega$  de rang maximal, c'est-à-dire telle que  $\omega^n$  ne s'annule nulle part. La 2-forme  $\omega$  définit sur  $M$  un fibré vectoriel en ligne  $V_\omega \subset TM$

$$V_\omega = \cup_{a \in M} \{a, \ker \omega^a\}$$

avec  $\ker \omega^a$  est le noyau de l'application linéaire  $\omega^a : TM_a \rightarrow TM_a^*$  définie par  $X \rightarrow \ker \omega^a(X, \cdot)$ .

*Remarque 225.* En utilisant la formule :

$$i_{[X,Y]} = [i_X, L_Y]$$

Nous déduisons que  $V_\omega$  est un feuilletage.

**Définition 226.** Une structure hamiltonienne  $\omega$  est dite stabilisable s'il existe une 1-forme (forme stabilisante) telle que

$$\omega^n \wedge \eta \neq 0 \quad \text{and} \quad \ker \omega \subset \ker d\eta.$$

**Définition 227.** Un feuilletage orientable  $\mathcal{F}$  de dimension 1 est dit géodésible s'il existe un champ de vecteurs  $\xi$  générant  $\mathcal{F}$  et une métrique riemannienne  $g$  telle que le flot de  $\xi$  soit géodésique pour  $g$  i.e.  $(\nabla_{\xi}^{lc}\xi = 0)$ .

La stabilisation de  $\omega$  ne dépend que de la géodésibilité de son noyau  $V_{\omega}$ .

**Théorème 228.** [95] Soit  $\omega$  une structure hamiltonienne sur  $M$ ,  $\omega$  est stabilisable si et seulement si le feuilletage associé  $V_{\omega}$  est géodésible.

Soit  $M$  une variété orientable équipée d'une paire  $(\omega, \eta)$  où  $\eta$  est une 1-forme et  $\omega$  une 2-forme sur  $M$ . Supposons que nous ayons une paire  $(\omega, \eta)$  une 1-forme  $\eta$  et une 2-forme  $\omega$  sur  $M$ . Supposons que :

1.  $\omega^n \wedge \eta$  est une forme volume sur  $M$
2.  $\omega$  est fermée
3.  $d\eta$  s'annule sur  $V_{\omega}$  (condition de stabilisation)

**Définition 229.** Une paire  $(\omega, \eta)$  satisfaisant les conditions 1,2,3 est structure hamiltonienne stable sur  $M$ . Dans un autre sens les structures hamiltoniennes stables sont des structures 2-calibrées  $(\omega, \eta)$  telles que :

$$\ker\omega \subset \ker d\eta \quad (d\eta(\xi, \cdot) = 0).$$

Pour plus de renseignements sur les structures hamiltoniennes stables voir [35],[38],[49].

**Théorème 230.** [66],[70],[80] Supposons que  $(M, \omega, \eta)$  soit une variété de dimension 3. Si  $V_{\omega}$  vérifie l'une des conditions suivantes, alors  $M$  est une variété de contact ou une variété cosymplectique ;

1. les feuilles de  $V_{\omega}$  sont compactes,
2. les feuilles  $V_{\omega}$  sont denses,
3.  $V_{\omega}$  est définie par une action dynamique de  $\mathbb{R}$
4. Il existe une forme volume sur  $M$  invariante par  $V_{\omega}$  et  $V_{\omega}$  n'a pas de fonctions basiques non constantes,
5. il existe une forme volume invariante par  $V_{\omega}$  et  $H_{V_{\omega}}^2 \cong \mathbb{R}$ .

Dans un travail assez récent l'auteur utilise la cohomologie basique du feuilletage  $V_\omega$  pour démontrer un résultat similaire en toute dimension.

**Théorème 231.** [1][proposition 2.5] Supposons que  $(M, \omega, \eta)$  soit de dimension  $2n+1$ . Si  $H_{V_\omega}^2 \cong \mathbb{R}$  alors  $M$  est une variété de contact ou une variété cosymplectique.

Nous donnons ici un résultat utilisant la dualité :

**Théorème 232.** Considérons  $(M, \omega, \eta)$  une variété hamiltonienne stable, soit  $(\nabla, \nabla^*)$  une structure presque statistique adaptée à  $(M, \omega, \eta)$ . Si  $\mathcal{U}(M, D)$  est une algèbre commutative alors  $M$  est une variété cosymplectique.

*Démonstration.* En utilisant le théorème 248, nous obtenons que  $\ker \eta$  est un feuilletage calibré. En utilisant la condition d'intégrabilité, nous obtenons :

$$\eta([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(\ker \eta).$$

D'où :

$$d\eta(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(\ker \eta). \quad (3.18)$$

En plus de la condition de stabilisation

$$d\eta(\xi, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M). \quad (3.19)$$

Nous déduisons que  $\eta$  est fermée, donc  $(\omega, \eta)$  est une structure cosymplectique.  $\square$

### 3.8 Équation de jauge d'une connexion auto-duale sans torsion (connexion de Levi-Civita) et existence d'une structure cokählerienne dans une variété de dimension 3.

Soit  $\theta$  une solution non triviale de l'équation de jauge  $\nabla^{lc}\theta = 0$  et  $p_\theta: (X, Y) \mapsto g(\theta X, Y)$ .

**Proposition 233.** La 2-forme  $p_\theta$  est harmonique :  $\Delta^{lc}p_\theta = 0$ .

*Démonstration.* Pour une connexion sans torsion  $\nabla$  et une  $k$ -forme  $\omega$  :

$$d\omega(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i}\omega) (X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)$$

Puisque  $\nabla p_\theta = 0$ , la formule précédente appliquée à  $p_\theta$  montre que  $dp_\theta = 0$ . Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge, la 2-forme  $p_\theta(X, Y) \mapsto p_\theta(X, Y) = g(\theta X, Y)$  satisfait :

$$\delta^{lc} p_\theta(Y_1, \dots, Y_{r-1}) = - \sum_{i=0}^{2n} (\nabla_{E_i} p_\theta)(E_i, Y_1, \dots, Y_{r-1})$$

$$\Delta^{lc} p_\theta = d(\delta^{lc} p_\theta) + \delta^{lc}(dp_\theta) = 0.$$

□

### 3.8.1 Solution de l'équation de jauge et structure pseudo-kählerienne.

Les variétés pseudo-kählerienne ont été introduites par André Lichnerowicz dans [62].

**Définition 234.** Une variété de dimension  $2n$   $M$  est **pseudo-kählerienne**, lorsqu'on peut définir sur elle une métrique riemannienne  $g$  et une forme différentielle  $\Omega$  de rang  $2n$  telles que  $\nabla^{lc}\Omega = 0$ .

**Proposition 235.** Soit  $M$  une variété de dimension  $2n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  admet une structure pseudo-kählerienne,
2. Il existe une métrique  $g$  telle que l'équation de jauge de la connexion auto-duale sans torsion (connexion de Lévi-Civita) sur  $M$  admet une solution antisymétrique  $\theta$  de rang maximal.

*Démonstration.* Prouvons (1) $\implies$ (2) : Supposons que  $M$  admet une structure pseudo-Kähler  $(\Omega, g)$ , d'après la définition précédente, nous avons  $\nabla^{lc}\Omega = 0$  et  $\Omega^n \neq 0$ . Il existe un  $\theta$  symétrique de rang  $2n$ , tel que :

$$\Omega(X, Y) = g(\theta X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

A partir de l'identité

$$\nabla^{lc}\Omega = g(\nabla_Z^{lc}\theta X, Y) - g(\theta \nabla_Z^{lc} X, Y)$$

La condition  $\nabla^{lc}\Omega = 0$  implique que  $\nabla^{lc}\theta = 0$ .

(1) $\impliedby$ (2) : Soit  $g$  une métrique sur  $M$  et par  $\nabla^{lc}$  sa connexion de Lévi-Civita. Soit  $\theta$  la solution antisymétrique de l'équation linéaire  $\nabla^{lc}\theta = 0$  telle que le rang de  $\theta$  soit  $2n$ . D'après la proposition précédente, on a  $\nabla^{lc}p_\theta = 0$  et  $p_\theta^n \neq 0$ . On en déduit que  $(g, p_\theta)$  est une structure pseudo-Kähler sur  $M$ . □



## 3.9 Solution de l'équation de jauge et structures K-cosymplectiques

### 3.9.1 Structures k-cosymplectiques

**Définition 236.** [11] Une variété de dimension  $2n+1$  munie d'une structure cosymplectique  $(\omega, \eta)$  telle que le champ de vecteurs de Reeb soit Killing par rapport à une certaine métrique riemannienne sur  $M$  est dite **K-cosymplectique**.

*Remarque 237.* En utilisant la définition de Blair des variétés cosymplectiques, Giovanni Bazzoni et Oliver Goertsches dans [11] proposent une définition équivalente à la précédente, une structure K-cosymplectique est une structure cosymplectique  $(\theta, \xi, \eta, g)$  telle que le champ de vecteurs Reeb  $\xi$  soit Killing pour la métrique  $g$ .

**Théorème 238.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne orientable de dimension impaire, si l'équation de jauge de la connexion de Levi-Civita admet une solution antisymétrique de rang maximal. Alors  $M$  admet une structure K-cosymplectique.

*Démonstration.* Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge. Par hypothèse, le rang de  $\theta$  est  $2n$ , donc la forme  $2p_\theta$  a un rang maximal, c'est-à-dire tel que  $p_\theta^n$  ne s'annule nulle part. L'équation de jauge ( $\nabla^{lc}\theta = 0$ ) implique que  $\nabla^{lc}p_\theta = 0$  ( $dp_\theta = 0$ ). Nous associons à  $p_\theta$  la distribution donnée par son noyau  $\ker p_\theta$  de dimension 1. La condition ( $\nabla^{lc}\theta = 0$ ) implique que la distribution  $\ker p_\theta$  est  $\nabla^{lc}$ -parallèle, alors  $\ker p_\theta$  est un feuilletage. En utilisant l'orientation sur  $M$  ainsi que l'orientation transverse donnée par  $p_\theta^n$ , on oriente  $\ker p_\theta$ . Soit  $\hat{\xi}_\theta$  une section unitaire de  $\ker p_\theta$ . Dénotons par  $H$  le vecteur de courbure moyenne du feuilletage  $\ker p_\theta$

$$H = (\nabla_{\hat{\xi}_\theta}^{lc} \hat{\xi}_\theta)|_{\ker p_\theta^\perp}$$

et  $\eta_\theta$  est la forme volumique de  $\ker p_\theta$  :

$$\eta_\theta(X) = g(X, \hat{\xi}_\theta) \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Nous avons par simple calcul

$$d\eta_\theta(\hat{\xi}_\theta, X) = \hat{\xi}_\theta \cdot \langle \hat{\xi}_\theta, X \rangle - X \cdot |\hat{\xi}_\theta|^2 - \langle \hat{\xi}_\theta, [\hat{\xi}_\theta, X] \rangle$$

$$d\eta_\theta(\hat{\xi}_\theta, X) = \langle \nabla_{\hat{\xi}_\theta}^{lc} \hat{\xi}_\theta, X \rangle - \frac{1}{2} X \cdot |\hat{\xi}_\theta|^2 = \langle H, X \rangle$$

le feuilletage  $\ker p_\theta$  est minimalisable, donc

$$d\eta_\theta(\hat{\xi}_\theta, X) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(M). \quad (3.20)$$

La distribution  $\ker \eta_\theta$  est  $\nabla^{lc}$ -parallèle, alors  $\ker \eta_\theta$  est un feuilletage co-orienté de codimension un, en utilisant la condition d'intégrabilité :

$$\eta_\theta([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(\ker \eta_\theta)$$

nous en déduisons que :

$$d\eta_\theta(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(\ker \eta_\theta) \quad (3.21)$$

Des deux calculs précédents nous déduisons que

$$d\eta_\theta = 0$$

$(p_\theta, \eta_\theta)$  est une structure cosymplectique sur  $M$  et  $\hat{\xi}_\theta$  son champ de Reeb.

(i)

$$\nabla^{lc}_{\hat{\xi}_\theta} \hat{\xi}_\theta = 0.$$

$\hat{\xi}_\theta$  est un flot géodésique.

(ii) Par calcul :

$$(L_{\hat{\xi}_\theta} g)(X, Y) = g(\nabla_X^{lc} \hat{\xi}_\theta, Y) + g(X, \nabla_Y^{lc} \hat{\xi}_\theta) = 0 \quad \forall X, Y \in \ker \eta_\theta.$$

Alors  $\hat{\xi}_\theta$  est un flot riemannien. D'après la proposition 10.10 de [88], (i) et (ii) impliquent que le champ de vecteurs de Reeb  $\hat{\xi}_\theta$  est un champ de vecteurs de Killing ie ( $L_{\hat{\xi}_\theta} g = 0$ ).  $\square$

**Corollaire 239.** *Soit  $M$  une variété pseudo-Kähler au sens de Lichnerowicz, la variété  $W = M \times \mathbb{S}^1$  admet des structures  $K$ -cosymplectique.*

*Démonstration.*  $W$  est un fibré sur  $\mathbb{S}^1$ , soit  $\pi : W \rightarrow \mathbb{S}^1$  la projection naturelle sur  $\mathbb{S}^1$ . Soit  $d\alpha$  la forme angulaire sur  $\mathbb{S}^1$  et  $\frac{d}{d\alpha}$  son champ vectoriel dual. Elle satisfait à la condition  $d\alpha(\frac{d}{d\alpha}) = 1$ , et induit donc naturellement sur  $W$  une forme 1 fermée non nulle  $\eta_\alpha = \pi^*(d\alpha)$  et un champ de vecteurs non nul  $\xi_\alpha$  tels que :

$$\eta_\alpha(\xi_\alpha) = d\alpha\left(\frac{d}{d\alpha}\right) = 1.$$

Par hypothèse,  $M$  admet une structure pseudo-Kähler  $(g, \Omega_\theta)$ , alors sur  $M$  nous avons :

$$\nabla \Omega_\theta = 0 \text{ et } \Omega_\theta^n \neq 0.$$

Soit  $p : W \rightarrow M$  la projection naturelle. Désignons par  $\bar{\Omega}_\theta$  la 2-forme fermée définie par :

$$\bar{\Omega}_\theta = p^* \Omega_\theta.$$

Nous avons

$$\bar{\Omega}_\theta^n \wedge \eta_\alpha \neq 0 \quad \text{sur } W.$$

$\ker \bar{\Omega}_{\theta_p}$  est de dimension 1 pour tout  $p \in W$  et  $\bar{\Omega}_\theta$  détermine un fibré en droites par :

$$l_{\bar{\Omega}_\theta} = \cup_{p \in W} (p, \ker \bar{\Omega}_{\theta_p})$$

$\ker(\eta_\alpha)$  est un champ hyperplan transverse à  $l_{\bar{\Omega}_\theta}$  et donc  $\bar{\Omega}_\theta$  se restreint à une forme non dégénérée sur  $\ker(\eta_\alpha)$ . Soient  $\xi_\alpha$  l'unique section de  $l_{\bar{\Omega}_\theta}$  qui satisfaisant  $\eta_\alpha(\xi_\alpha) = 1$ . Il est facile de voir que  $\bar{\Omega}_\theta^n \wedge \eta_\alpha \neq 0$ , donc le fibré tangent  $TM$  se décompose comme la somme directe d'un fibré en droites, et d'un fibré symplectique :

$$TM = \mathbb{R}\xi_\theta \oplus (\ker \eta_\alpha, \bar{\Omega}_\theta).$$

Soit  $h = g + (d\alpha)^2$  une métrique de  $W$ ,  $\xi_\theta$  est Killing pour la métrique  $h$ , alors  $(\bar{\Omega}_\theta, \eta_\alpha)$  est une structure K-cosymplectique sur  $W = M \times \mathbb{S}^1$ . □

### 3.9.2 Structure cokählerienne en dimension trois et solution de l'équation de jauge

**Définition 240.** Une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur une variété de dimension impaire  $M$  est cokählerienne si elle est cosymplectique et normale, c'est-à-dire  $N_\theta + d\eta \otimes \xi = 0$ , où  $N_\theta$  est la torsion de Nijenhuis de  $\theta$ , définie comme :

$$N_\theta(X, Y) = \theta^2[X, Y] - \theta([\theta X, Y] + [X, \theta Y]) + [\theta X, \theta Y].$$

Une structure métrique presque de contact est cokählerienne si et seulement si [74]  $\nabla^{lc}\eta = 0$  et  $\nabla^{lc}\Omega = 0$ , où  $\nabla^{lc}$  est la métrique de Levi-Civita de  $g$  et  $\Omega$  la 2-forme fondamentale de la structure métrique presque de contact. De [13](Théorème 6.7) nous avons l'affirmation suivante :

**Proposition 241.** [13] Une variété métrique presque de contact  $(M, \theta, \xi, \eta, g)$  est cokählerienne si et seulement si  $\nabla^{lc}\theta = 0$ .

D'après [59], les variétés coKähleriennes sont des analogues de dimension impaire des variétés de kählerienne :

**Théorème 242.** [59] *Toute variété cokählerienne est une suspension en tore d'une variété kählerienne par un isométrie hermitienne.*

L'existence des structures cokähleriennes a des fortes répercussions sur la topologie de la variété.

**Théorème 243.** [14] *Tous les nombres de Betti d'une variété cokählerienne compacte sont non nuls.*

**Théorème 244.** [34] *Les nombres de Betti  $b_k$  d'une variété cokählerienne compacte satisfont une propriété monotonie :*

$$1 = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n = b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq \dots \geq b_{2n+1} = 1$$

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure cokählerienne pour les variétés de dimension 3.

**Théorème 245.** *Soit  $M$  une variété de dimension 3, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  admet une structure cokählerienne (suspension d'une variété kählerienne par une isométrie kählerienne),*
2. *Il existe sur  $M$  une métrique telle que l'équation de jauge de sa connexion de Levi-Civita admette une solution antisymétrique non nulle .*

*Démonstration.* La partie nécessaire (1) implique (2) :

Supposons que  $M$  admette une structure cokählerienne, alors il existe une structure métrique presque de contact  $(\theta, \xi, \eta, g)$  sur  $M$  où  $\eta$  est une forme 1,  $\theta$  est un endomorphisme de  $T M$ ,  $\xi$  est un champ de vecteur non nul tel que

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \theta^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

La métrique riemannienne compatible  $g$  satisfait : :

$$g(\theta X, \theta Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad \text{et} \quad g(\theta X, Y) = -g(X, \theta Y),$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . D'après [13](Théorème 6.7), la connexion de Levi-Civita  $\nabla^{lc}$  de la métrique compatible  $g$  satisfait  $\nabla^{lc}\theta = 0$ . Nous déduisons alors qu'il existe une métrique  $g$  sur  $M$  telle

que l'équation de jauge de la connexion de Levi-Civita admette une solution antisymétrique non nulle .

Prouvons que la partie suffisante (2) implique (1) :

Soit  $\theta$  une solution antisymétrique de l'équation de jauge ( $\nabla^{lc}\theta = 0$ ). Par hypothèse, le rang de  $\theta$  est 2, d'après la théorème 238, nous savons que  $M$  admet une structure K-cosymplectique. De [11] [proposition 2.8]  $M$  admet une structure coKähler.

□

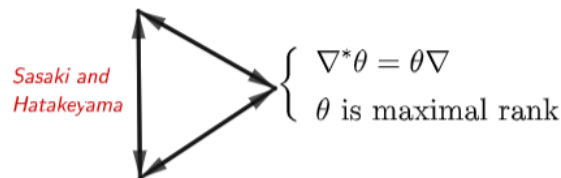
*Remarque 246.* Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne orientable fermée de dimension 3 tel que l'équation de jauge de la connexion de Levi-Civita de  $g$  admette une solution antisymétrique. D'après les travaux d'Etienne Ghys, [42] nous savons

$$M \simeq \left\{ \frac{\mathbb{T}^2 \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (Ax, 1)} \right\} \cup \{\text{Seifert fiber space}\}$$

, où  $A$  est une isométrie de hermitienne de  $\mathbb{T}^2$ .

### 3.10 Résumé du chapitre 4

$M$  admits an almost  
contact structure



$M \times \mathbb{R}$  admits an almost  
symplectic structure



$M \times \mathbb{R}$  almost complex  
structure

FIGURE 3.1 – variété presque de contact et équation de jauge

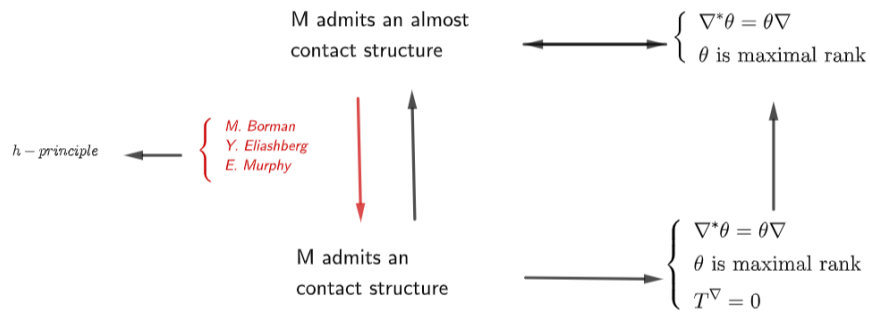


FIGURE 3.2 – variété de contact et équation de jauge

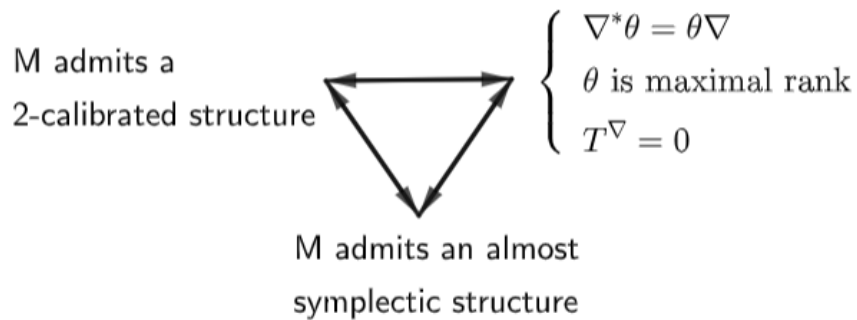


FIGURE 3.3 – variété de 2-calibrée et équation de jauge

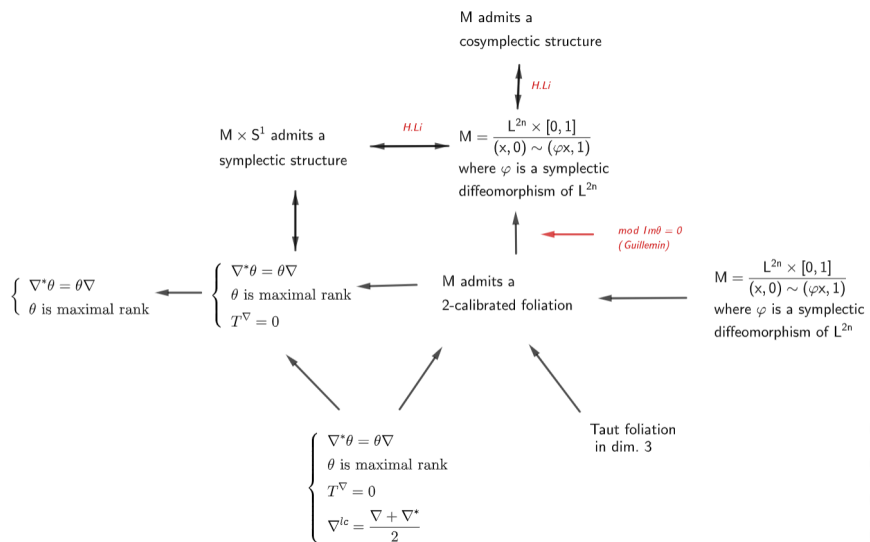


FIGURE 3.4 – variété cosymplectique et équation de jauge

# Annexes

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques notions classiques de géométrie différentielle qui seront utilisées régulièrement dans le suite. Sauf mention contraire, les espaces topologiques considérés sont connexes par arcs, séparés au sens de Hausdorff et paracompacts.

## .1 Structures de variété différentielle

### .1.1 Cartes locales et atlas

La construction la plus courante d'une variété différentielle exploite la notion de carte locale, que l'on peut définir de façon très générale sur un ensemble.

**Définition 247.** Soit  $M$  un ensemble. Une carte de dimension  $n \in \mathbb{N}$  sur  $M$  est un couple  $(U, \phi)$  avec  $U$  une partie de  $M$  et  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application bijective sur son image telle que  $\phi(U)$  soit un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 248.** Soit  $k$  un entier. Deux cartes locales de même dimension  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$ , telles que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , sont dites  $C^k$ -compatibles si l'application :

$$\theta_{ij} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est de classe  $C^k$ .

**Définition 249.** Soit  $m, k$  deux entiers. Un atlas  $\mathcal{A}$  de dimension  $m$  et de régularité  $C^k$  de  $M$  est la donnée d'une famille  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  de cartes locales deux à deux  $C^k$  compatibles telle que  $M = \cup_{i \in I} U_i$ .

La donnée d'un atlas sur l'ensemble  $M$  permet de munir ce dernier de la topologie initiale induite par la famille d'applications  $\phi_i, i \in I$ , qui deviennent alors des homéomorphismes.

**Définition 250.** Soient  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  deux atlas de mêmes dimension  $m$  et régularité  $k$ . On dira qu'ils sont équivalents si leur réunion est encore un atlas de dimension  $m$  et de régularité  $k$ . Cette relation est une relation d'équivalence.

La réunion de tous les atlas dans une même classe d'équivalence donne un atlas maximal au sens de l'inclusion.

**Définition 251.** Soient  $m, k$  deux entiers et  $M$  un ensemble. Une structure de variété différentielle de dimension  $m$  et de classe  $C^k$  sur  $M$  est la donnée d'une classe d'équivalences d'atlas sur  $M$ .

*Remarque 252.* Une structure de variété différentielle s'obtient pratiquement par la donnée d'un représentant de la classe d'atlas équivalents.

Dans la suite on fera l'hypothèse que toutes les variétés différentielles sont de régularité  $C^\infty$ , c'est à dire de classe  $C^k$  pour tout entier  $k$ . On dira encore que de telles variétés sont lisses.

Il est parfois plus simple de recourir à une construction par recollement pour décrire une variété différentielle. Pour ce faire, on notera que si  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  sont deux cartes telles que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , pour  $x \in U_1 \cap U_2, y = \varphi_1(x)$  et  $z = \varphi_2(x)$  représentent deux points de  $\mathbb{R}^n$  liés par la relation  $\theta_{12}y = z$ . Réciproquement, si  $y \in \varphi_1(U_1), z \in \varphi_2(U_2)$  vérifient  $\theta_{12}y = z$ , alors  $\varphi_1^{-1}(y) = \varphi_2^{-1}(z)$ . En posant  $V_i = \varphi(U_i), i \in I$ , la variété différentielle  $M$  est homéomorphe à :

$$\bigsqcup_{i \in I} V_i / \sim$$

où  $x \in V_i \sim y \in V_j$  si et seulement si  $y = \theta_{ij}x$ . En réalité, l'objet ainsi construit est difféomorphe de classe  $C^k$  à  $M$  si  $M$  est de régularité  $C^k$  comme cela apparaîtra plus loin dans le texte.

## .1.2 Exemples de variétés

**Exemple 253.** l'espace  $\mathbb{R}^n$  est une variété pour l'atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$  se composant d'une seule carte,

**Exemple 254.** Soit  $V \subset M$  un ouvert d'une variété différentielle et soit  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas définissant  $M$ .

L'atlas  $(U_i \cap V, \varphi_i|_{U_i \cap V})_{i \in I}$  fait de  $M$  une variété différentielle.

**Exemple 255.** Si  $M$  et  $M'$  sont deux variétés différentielles, on note  $M \times M'$  et on l'appelle variété produit, la variété différentielle dont l'espace topologique sous-jacent est le produit  $M \times M'$  muni de la topologie produit et si  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ , respectivement  $(V_j, \Psi_j)_{j \in J}$  définissent  $M$ , respectivement  $M'$ , on considère l'atlas différentiable  $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \Psi_j)_{(i,j) \in I \times J}$  pour définir sur  $M \times M'$  une structure de variété différentiable.

**Exemple 256.** Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  considérons la n-sphère

$$\mathbb{S}^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$$

Un atlas lisse est donné par un couple de projections stéréographiques  $(\mathbb{S}^n - (0, \dots, 0, 1), \varphi_N), (\mathbb{S}^n - (0, \dots, 0, -1), \varphi_S)$  avec :

$$\begin{cases} \phi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}} \\ \phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}} \end{cases}$$



Et l'on a, pour  $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $\theta_{NS}(y) = y/\|y\|^2$  (même forme pour l'application réciproque  $\theta_{SN}$ ).

**Exemple 257.** L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$  est l'ensemble des directions de droites passant par l'origine de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On peut obtenir cet ensemble comme quotient de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, y = \lambda x$$

Si  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  est tel que  $x_i \neq 0$ , alors un représentant de sa classe d'équivalence est :

$$(x_1/x_i, x_2/x_i, \dots, 1, x_{i+1}/x_i, \dots, x_{n+1}/x_i)$$

Pour  $i = 1 \dots n + 1$ , on posera  $U_i$  la partie de  $\mathbb{R}P^n$  formée des directions de droites non contenues dans l'hyperplan  $x_i = 0$ . Les couples  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1 \dots n + 1$  avec :

$$\phi_i([(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)]) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

forment un atlas lisse de  $\mathbb{R}P^n$ . Les applications de changement de carte sont données par :

$$\begin{cases} \theta_{ij} \mathbb{R}^n - \{x_j = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{x_i = 0\} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1/x_j, \dots, x_{i-1}/x_j, 1/x_j, x_i/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \dots, x_n/x_j), i < j \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \dots, x_{i-1}/x_j, 1/x_j, x_i/x_j, \dots, x_n/x_j), i > j \end{cases}$$

### .1.3 Applications différentiables

Soient  $(M, \mathcal{A}(M))$  et  $(N, \mathcal{A}(N))$  deux variétés différentielles. Une application  $f : M \rightarrow N$  est continue si et seulement si pour tout couple de cartes  $(U, \phi) \in \mathcal{M}, (V, \psi) \in \mathcal{N}$ , l'application  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  est continue lorsqu'elle est définie. Ceci est une conséquence directe du fait qu'une variété différentielle est munie de la topologie initiale associée à la famille des cartes locales.

**Définition 258.** Soit  $k$  un entier. Une application  $f : M \rightarrow N$  est dite de classe  $C^k$  si pour tout couple de cartes  $(U, \phi) \in \mathcal{M}, (V, \psi) \in \mathcal{N}$ , l'application  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  est de classe  $C^k$  lorsqu'elle est définie.

La différentiabilité est une propriété locale, liée aux germes de fonction. Si  $f$  est une application de classe  $C^1$ , et si  $x \in M$ , alors pour deux cartes de  $M$   $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  dont les domaines contiennent  $x$ , et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  dont le domaine contient  $f(x)$ , les dérivées des germes de  $\psi \circ f \circ \phi_1^{-1}$  et  $\psi \circ f \circ \phi_2$  en respectivement  $y_1 = \phi_1(x), y_2 = \phi_2(x)$  sont liées par la relation :

$$(\psi \circ f \circ \phi_1^{-1})'_{y_1} \theta'_{21}(y_2) = (\psi \circ f \circ \phi_2^{-1})'_{y_2}$$

On note par  $C^l(M)$  l'ensemble des fonctions différentiables de classe  $C^l$  sur une variété différentiable  $M$ .

On munit l'ensemble  $C^l(M)$  des fonctions différentiables de classe  $C^l$  de l'addition

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$$

et de la multiplication de deux fonctions

$$(ff')(x) = f(x)f'(x)$$

on obtient un anneau associatif commutatif.

Soient  $(M, \mathcal{A}(M))$  et  $(N, \mathcal{A}(N))$  deux variétés différentiables de même dimension.

**Définition 259.** Un homéomorphisme  $f : M \rightarrow N$  est appelé difféomorphisme de classe  $C^l$  de  $M$  dans  $N$  si  $f$  et  $f^{-1}$  sont différentiables de classe  $C^l$ .

L'ensemble  $\text{Diff}(M)$  des difféomorphismes d'une variété différentiable  $M$  dans elle même muni de la loi de composition d'applications est un groupe (abstrait).

## .1.4 Paramétrisation

**Définition 260.** Une paramétrisation de  $M$ , de dimension  $n$  au point  $a \in M$  est un homéomorphisme local  $\varphi$  de  $(0, \mathbb{R}^n)$  dans  $(a, M)$ .

**Définition 261.** Deux paramétrisations de dimension  $n$  au point  $a \in M$   $\varphi$  et  $\varphi^*$  sont dites différentiablement compatibles si homéomorphisme :

$$\varphi^{-1} \circ \varphi^* : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow ((\mathbb{R}^n, 0)$$

est un difféomorphisme.

**Définition 262.** Une paramétrisation différentiable de  $M$ , de dimension  $n$  est une famille de paramétrisation de dimension  $n$ ,

$$\mathcal{P}(M) = \{\mathcal{P}_a, a \in M\}$$

dont ses éléments sont deux à deux différentiablement compatibles.

**Définition 263.** Une paramétrisation  $\mathcal{P}(M) = \{\mathcal{P}_a, a \in M\}$  différentiable de dimension  $n$  est dite complète si toute paramétrisation différentiable de dimension  $n$   $\varphi$  qui est compatible avec  $\mathcal{P}_a$  appartient à  $\mathcal{P}(M)$ .

**Définition 264.** Une structure de variété différentiable de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$  dans  $M$  est un couple  $(M, \mathcal{P})$  ou  $\mathcal{P}$  est une paramétrisation complète de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$ .

## Champs de vecteurs et formes différentielles (Atlas et paramétrisation)

Soient  $(M, \mathcal{A})$  une structure de variété différentiable définie par un atlas  $\mathcal{A}$ . Soit  $a \in M$ , on pose  $C_x^0([-1, 1], M)$  l'ensemble des courbes paramétrées continues  $c : [-1, 1] \rightarrow M$  tels que  $c(0) = a$

**Définition 265.** Deux courbes paramétrées  $c, \hat{c} \in C_a^0([-1, 1], M)$  appartiennent au même germe au point  $a$  s'il existe un nombre réel positif  $\epsilon < 1$  tel que pour tout  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  entraîne

$$c(t) = \hat{c}(t).$$

La relation ci-dessus est une relation d'équivalence. La classe de la courbe  $c$  est notée  $[c]_a$ .

Cette classe est appelée germe des courbes paramétrées au point  $a$ .

**Définition 266.** Une courbe paramétrée  $c \in C^0([-1, 1], M)$  est différentiable de classe  $C^l$  si pour toute différentiable  $f \in C^k(X)$  la fonction

$$t \rightarrow f(c(t))$$

est différentiable de classe  $C^l$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Soit  $c \in C^0([-1, 1], M)$  une courbe paramétrée différentiable de classe  $C^l$  et  $f \in C^l(M)$ . Posons  $a = c(0)$ ; la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(a)}{t} \text{ existe et ne dépend que du germe } [c]_a$$

On définit ainsi l'application  $v_a : C^l(M) \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$v_a(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(a)}{t}$$

L'application  $v_a$  jouit des propriétés suivantes

1. elle est  $\mathbb{R}$ -linéaire.
2.  $v_a(fg) = v_a(f)g + f(a)v_a(g)$

**Définition 267.** L'application linéaire de  $v_a : C^l(M) \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé vecteur tangent à  $M$  au point  $a$ .

On obtient ainsi une application injective qui associe à tout germe des courbes  $[c]_a$  une application linéaire  $v_a$  de  $C^l(M)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $T_a M$  le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(C^l(M), \mathbb{R})$  des applications linéaires engendré par les  $v_a$ .

**Définition 268.** L'espace vectoriel  $T_a M$  est appelé espace tangent au point  $a$  à la variété différentielle  $M$ .

Nous signalons que la dimension de l'espace vectoriel  $T_aM$  est la dimension de la variété différentiable  $M$ .

**Définition 269.** Un champ de vecteurs tangents est une application  $v$  qui associe à chaque point  $a \in M$  un vecteur tangent  $v_a \in T_aM$ .

Soit  $(v, f)$  un couple formé d'un champ des vecteurs tangents  $v$  et d'une fonction  $f \in C^l(M)$ . On lui associe la fonction  $v(f)$  définie par

$$v(f)(a) = v_a(f).$$

Le champ des vecteurs tangents  $v$  est dite de classe  $C^l$  si  $v(f)$  est de classe  $C^l$  pour tout  $f$  de classe  $C^{l+1}$ . On note par  $\mathcal{X}(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur  $M$ . C'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### .1.5 Les structures fonctionnelles ou espace annelé

**Définition 270.** Soit  $M$  un espace topologique. Un préfaisceau d'anneaux sur  $M$  est la donnée, pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , d'un anneau  $\mathcal{F}(U)$  et, pour  $U$  et  $V$  ouverts avec  $V \subset U$ , d'applications dites de restriction  $r_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

1.  $r_U^W = r_V^W \circ r_U^V$  pour tous ouverts  $W \subset V \subset U$ .
2.  $r_U^U = Id_U$  pour tout  $U$ .

On note par  $s_U := \mathcal{F}(i)(s)$  pour toute inclusion  $i : U \rightarrow V$  et toute section sur  $V$ ,  $s \in \mathcal{F}(V)$ .

un préfaisceau  $\mathcal{F}$  est un faisceau si pour tout recouvrement ouvert  $U_{i \in I}$  d'un ouvert  $U$ ,

1. (Localité) : lorsqu'on a  $s \in \mathcal{F}(U)$  et  $s_{U_i} = 0$  pour chaque  $i \in I$ , alors  $s = 0$ ;
2. (recollement) : lorsqu'on a  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ , pour chaque  $i \in I$  tels que  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , alors il existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $s_i = s|_{U_i}$ .

**Exemple 271.**

1. Faisceau de toutes les fonctions,
2. Faisceau des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
3. Le faisceau des fonctions lisses sur une variété  $M$ .
4. Pour tout entier naturel  $p$ , le faisceau  $\Omega^p(M)$  des  $p$ -formes différentielles sur une variété  $M$ .

**Définition 272.** Une structure fonctionnelle ou une structure d'espace annelé dans  $M$  est la donnée de la pair  $(M, C^\infty(M))$  ou  $C^\infty(M)$  Le faisceau des fonctions lisses sur une variété  $M$ .

La notion de champs de vecteurs peut être interprétée en terme de dérivation de l'anneau structural  $C^\infty(M)$ .

**Définition 273.** Un champ de vecteurs différentiables sur  $M$  est la donnée d'une application linéaire  $v : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  vérifiant

$$v(fg) = v(f)g + fv(g)$$

quels que soient  $f, g \in C^\infty(M)$ .

Naturellement tout champ des vecteurs tangents  $v$  vu comme dérivation de l'anneau  $C^\infty(M)$  définit en chaque point  $a \in M$  un vecteur tangent  $v_a$

$$v_a(f) = (v(f))(a)$$

En fait  $v_a$  est une dérivation de l'anneau  $C^\infty(M)$  à valeurs dans le  $C^\infty(M)$ -module  $\mathbb{R}$  défini par

$$f \circ \alpha = f(a)\alpha$$

quels que soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f \in C^\infty(M)$ . Nous Rappelons que la loi du groupe abélien et le produit dans l'anneau  $C^\infty(M)$  sont l'addition

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

et la multiplication classique des fonctions réelles

$$(fg)(a) = f(a)g(a).$$

Avec ces deux lois de composition  $C^\infty(M)$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre associative commutative unitaire. On y définit une loi de composition qui associe à deux dérivations  $\mathcal{D}$  et  $\hat{\mathcal{D}}$  leur commutateur

$$[\mathcal{D}, \hat{\mathcal{D}}] = \mathcal{D} \circ \hat{\mathcal{D}} - \hat{\mathcal{D}} \circ \mathcal{D}$$

Cette loi est  $\mathbb{R}$ -linéaire et anticommutative.

On observe que  $\mathcal{X}(M)$  est un  $C^\infty(M)$ -module, cependant le crochet n'est pas  $C^\infty(M)$ -linéaire. Soient  $v, w \in \mathcal{X}(M)$  et  $f, g \in C^\infty(M)$ . On a les formules suivantes

1.  $(fv)(g) = fv(g)$
2.  $[v, fw] = f[v, w] + v(f)w$ .

Le couple  $\mathcal{A}(M) = (\mathcal{X}(M), [,])$  est une structure d'algèbre de Lie dans  $\mathcal{X}(M)$ . Le crochet

$$(v, w) \rightarrow [v, w]$$

satisfait l'indentité de Jacobi suivante

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

quels que soit  $u, v, w \in \mathcal{A}(M)$ .

Dans ce formalisme faisceautique, nous avons la correspondance suivante :

1.  $M \iff Spectre(C^\infty(M))$
2.  $Diff^\infty(M) \iff Aut_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$
3.  $\mathcal{X}(M) \implies Derivation(C^\infty(M))$
4.  $C^\infty(M, N) \implies Hom_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$

**Définition 274.** Etant donné un nombre entier non négatif  $q$ , une forme différentielle  $\omega$  de degré  $q$  (ou  $q$ -forme différentielle) est une application  $C^\infty(M)$ -multilinéaire alternée

$$\omega : \mathcal{A}(M) \times \dots \times \mathcal{A}(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

L'ensemble  $\Omega^q(M)$  des  $q$ -formes différentielles est un module sur l'anneau  $C^\infty(M)$ . On note  $\Omega(M)$  le  $C^\infty(M)$ -module  $\mathbb{Z}$ -gradué par les sous-modules homogènes  $\Omega^q(M)$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux formes différentielles de degré  $k$  et  $k'$  respectivement.

**Définition 275.** Le produit extérieur  $\omega \wedge \omega'$  est une  $(k + k')$ -forme différentielle définie par la formule suivante

$$(\omega \wedge \omega')(a_1, \dots, a_{k+k'}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(k:k')} \text{sign}(\sigma) \omega(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}) \omega'(a_{\sigma(k+1)}, \dots, a_{\sigma(k+k')}).$$

Dans la formule ci-dessus  $\mathcal{S}(k : k')$  est le sous-ensemble des permutations de  $\sigma$  de  $(1, 2, \dots, k + k')$  telle que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k)$$

et

$$\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+k')$$

$\text{sing}(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

Par  $C^\infty(M)$ -linéarité on étend le produit extérieur dans tout  $\Omega(M)$ . Le produit extérieur est associative,  $C^\infty(M)$ -bilinéaire et commutatif gradué dans le sens suivant

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{kk'} \omega' \wedge \omega.$$

### Dérivation de Lie dans la direction d'un champ des vecteurs tangents.

Soit  $X \in \mathcal{A}(M)$  et  $\omega \in \Omega^q(M)$ . La dérivation de Lie dans la direction  $X$  est l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire notée  $L_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  définie par la formule suivante :

$$(L_X \omega)(Z_1, \dots, Z_q) = X.(\omega(Z_1, \dots, Z_q)) - \sum_{1 \leq j \leq q} \omega(Z_1, \dots, L_X Z_j, \dots, Z_q)$$

Pour tout  $X \in \mathcal{A}(M)$ ,  $L_X$  est une dérivation du produit extérieur :

$$L_X(\omega \wedge \tilde{\omega}) = L_X\omega \wedge \tilde{\omega} + \omega \wedge L_X\tilde{\omega}$$

**Produit intérieur par un champ des vecteurs tangents.** C'est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de degré  $-1$  notée  $i_X$  et définie par la formule suivante :

$$(i_X\omega)(Z_1, \dots, Z_{q-1}) = \omega(X, Z_1, \dots, Z_{q-1})$$

Si  $\omega \in \Omega^q(M)$ . C'est aussi une dérivation d'algèbre graduée dans le sens suivant. Pour  $\omega \in \Omega^q(M)$  et  $\tilde{\omega} \in \Omega(M)$  on a la formule :

$$i_Z(\omega \wedge \tilde{\omega}) = i_Z(\omega) \wedge \tilde{\omega} + (-1)^q \omega \wedge i_Z\tilde{\omega}.$$

### Dérivation extérieure

La dérivation extérieure est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de degré 1 notée  $d$  et définie comme il suit : soit  $\omega \in \Omega^q(M)$  et  $Z_1, \dots, Z_{q+1} \in \mathcal{A}(M)$ , nous avons

$$(d\omega)(Z_0, \dots, Z_q) = \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j Z_j(\omega(Z_0, \dots, \hat{Z}_j, \dots, Z_q)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Z_i, Z_j], \dots, \hat{Z}_i, \dots, \hat{Z}_j, \dots).$$

$d$  peut être interprétée comme une dérivation d'algèbre graduée. On a donc

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d(\omega) \wedge \tilde{\omega} + (-1)^q \omega \wedge d(\tilde{\omega}).$$

avec  $\omega \in \Omega^q(M)$ .

**Formules importantes** Soit  $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{A}(M)$

1.  $L_Z = d \circ i_Z + i_Z \circ d.$
2.  $L_{[Z, \tilde{Z}]} = L_Z \circ L_{\tilde{Z}} - L_{\tilde{Z}} \circ L_Z.$
3.  $i_{[Z, \tilde{Z}]} = i_Z \circ L_{\tilde{Z}} - L_{\tilde{Z}} \circ i_Z.$
4.  $L_Z \circ d = d \circ L_Z.$

## .1.6 Groupe de Lie et algèbre de Lie

Nous rappelons les notions des groupes et algèbres de lie. La référence principale est [46]

**Définition 276.** Un groupe de Lie est un groupe  $G$  muni d'une structure de variété différentiable telle que les applications :

1. Multiplication  $\mu : G \times G \rightarrow G$ ,  $\mu(g, h) = gh$ ,
2. Inversion  $\nu : G \rightarrow G$ ,  $\nu(g) = g^{-1}$ ,

soient de classe  $C^\infty$ .

## Exemples de groupe de Lie

1.1 **le groupe linéaire général**  $GL(n, \mathbb{R})$ . C'est le groupe des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels et dont le déterminant est non nul; C'est un ouvert de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n^2}$ . le signe de déterminant partage ce groupe en deux composantes connexes.

1.2 **Le groupe linéaire spécial**  $SL(n, \mathbb{R})$  est le sous-groupe du précédent constitué des matrices carrées dont le déterminant est égal à  $-1$  ou à  $+1$ . C'est une sous-variété fermée de  $GL(n, \mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - 1$ .

1.3 **Le groupe orthogonal**  $\mathcal{O}(n)$  est le sous-groupe de  $SL(n, \mathbb{R})$  formé des matrices  $A$  solution de

$$AA^t = I_n.$$

Dans le membre de gauche de la dernière égalité  $A^t$  est la transposée de  $A$ , dans le membre de droite  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ . Ce groupe est aussi un sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{R})$ ; sa dimension est égale à  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Il possède aussi deux composantes connexes.

1.4 **Le groupe symplectique**  $Sp(2n, \mathbb{R})$  est le groupe des matrices solutions

$$SJS^t = J$$

$$\text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 Le produit direct (ou "semi-direct") de groupes de Lie.

1.6 Le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe distingué et fermé est un groupe de Lie.

1.7 Le groupe des difféomorphismes d'une variété préservant certaines structures. Par exemple le groupe des isométries d'une variété riemannienne.

**Définition 277. (Sous-groupe de Lie)** Soit  $G$  un groupe de Lie. Un sous-groupe de Lie  $H$  de  $G$  est un sous-groupe munie d'une topologie et d'une structure différentiable qui en font un groupe de Lie et tel que l'injection canonique  $j : H \rightarrow G$  soit une immersion  $G$ .

## .1.7 Algèbre de Lie

Tout élément  $g \in G$  d'un groupe  $G$  définit la translation à gauche  $L_g$  et la translation à droite  $R_g$ . Ce sont des bijections de  $G$  dans  $G$  définies par :

$$\begin{aligned} L_g(h) &= gh \\ R_g(h) &= hg. \end{aligned}$$

Soit  $G$  un groupe de Lie. Pour tout  $g \in G$   $L_g$  et  $R_g$  sont des difféomorphismes de la variété  $G$ .



**Définition 278.** Un champ des vecteurs tangents  $\xi \in \mathcal{X}(G)$  est invariant à gauche si pour tout  $g \in G$  on a

$$d(L_g)(\xi) = \xi.$$

L'invariance à gauche signifie donc que pour tout  $g, h \in G$  on a

$$(d_h(L_g))(\xi(h)) = \xi(L_g(h)).$$

Le champ des vecteurs tangents  $\xi$  est invariant à droite si pour tout  $g \in G$  on a

$$(d(R_g))(\xi) = \xi.$$

L'invariance à droite signifie donc que pour tout  $g, h \in G$  on a

$$(d_h(R_g))(\xi(h)) = \xi(R_g(h)).$$

Rappelons que le dérivée  $d(\Theta)$  d'un difféomorphisme  $\Theta$  transforme un champ des vecteurs tangents  $\xi$  en un champ des vecteurs tangents  $(d(\Theta))(\xi)$ . En outre, on a

$$(d(\Theta))([\xi, \hat{\xi}]) = [(d(\Theta))(\xi), (d(\Theta))\hat{\xi}].$$

Maintenant il est facile de voir que dans un groupe de lie  $G$  le crochet  $[\xi, \hat{\xi}]$  des champs des vecteurs tangents invariants à gauche est un champ des vecteurs tangents invariants à gauche. Le crochet des champs des vecteurs satisfait l'identité de Jacobi. L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$  est noté  $\mathcal{X}^{L_g}(G)$ , c'est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs  $\mathcal{X}^{L_g}(G)$ .

**Proposition 279.** *L'application  $\varphi : X \in \mathcal{X}^{L_g}(G) \rightarrow X(e) \in T_e G$  est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

On déduit de la proposition précédente que, les champ des vecteurs tangents invariants à gauche  $\xi$  sont définies par leur valeur  $\xi(e)$  en l'élément neutre  $e$  du groupe de Lie  $G$ . La dimension de l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents invariants à gauche est égale à la dimension de la variété  $G$ .

**Définition 280.** Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{G}$  des champs de vecteurs invariants à gauche dans un groupe de Lie  $G$  est appelé algèbre de Lie du groupe de Lie  $G$ .

En dimension finie la topologie de  $G$  et la structure du groupe de Lie sont complètement déterminées par la structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel  $\mathcal{G}$ .

### Systèmes dynamiques abstraites.

Nous introduisons la notion d'action de groupe ou de loi d'opération. Soit  $M$  une variété différentiable,  $\text{Diff}(M)$  le groupe des  $C^\infty$ -difféomorphismes.

**Définition 281.** Une action de  $G$  sur  $M$  est un homomorphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ . Autrement dit, pour tout  $g \in G$ ,  $\varphi(g) : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme tel que

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h).$$

L'action  $\varphi$  de  $G$  sur  $M$  est  $C^\infty$  si l'application évaluation :

$$(g, m) \in G \times M \rightarrow \varphi(g, m) \in M$$

est  $C^\infty$ .

*Remarque 282.* Ce que nous venons de définir est une action à gauche. On peut définir une action à droite comme étant un antihomomorphisme  $\hat{\varphi} : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ , ce qui se traduit par :

$$\hat{\varphi}(gh) = \hat{\varphi}(h) \circ \hat{\varphi}(g).$$

Par composition avec l'inversion du groupe  $g \rightarrow g^{-1}$ , on peut passer d'une action à droite à une action à gauche et réciproquement.

**Définition 283.** 1. a Le sous-groupe  $G_a$  formé des  $g \in G$  tels que  $ga = a$  est appelé **sous-groupe d'isotropie** au point  $a$  ( ou **sous-groupe stabilisateur** du point  $x$ ).  
 b Le sous-ensemble  $G(a) \subset M$  formé des  $ga, g \in G$  est appelé **l'orbite** du point  $a$  ( ou **trajectoire** de  $G$  passant par le point  $a$ ).  
 c La relation d'appartenance à la même trajectoire est une relation d'équivalence dans  $E$  dont l'espace quotient noté  $M \backslash G = \{G.a/a \in M\}$  est appelé **l'espace des orbites**.

Une loi d'opération (ou d'action ) d'un groupe  $G$  dans un ensemble  $X$  peut porter les qualificatifs qui suivent.

**Définition 284.** Soit  $G \times M \rightarrow M$  une loi d'opération d'un groupe abstrait  $G$  dans un ensemble  $X$ . Notons  $e$  l'élément neutre du groupe  $G$ .

- a) La loi d'action est **effective** si  $\bigcap_{a \in X} G_a = e$ .
- b) La loi d'action est **libre** quel que soit  $a \in M$  on a  $G_a = e$ .
- c) La loi d'action est **transitive** si pour un  $a \in M$  on a  $G(a) = M$ .
- d) Une action est **simplement transitive** si elle libre et transitive.

Lorsque une loi  $G \times M \rightarrow M$  est transitive,  $M$  est isomorphe à l'ensemble quotient  $\frac{G}{G_a}$ .

**Définition 285.** L'ensemble quotient  $\frac{G}{G_x}$  est appelé espace homogène du groupe  $G$ .

### Exemples

1. Un groupe possède trois lois d'opérations canoniques dans lui même

- (a) L'action par les translations à gauche  $L_g : h \rightarrow gh$ .
- (b) L'action par les translations à droite  $R_g : h \rightarrow hg$ .
- (c) L'action par les automorphismes intérieurs  $Ad(g) : h \rightarrow g^{-1}hg$ .
- (d) Dans un groupe de Lie  $G$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathcal{G}$  toute translation à droite  $R_g$  transforme un champ de vecteurs invariant à gauche en un champ de vecteurs invariant à gauche. Il en résulte que si  $\xi \in \mathcal{G}$

$$d(ad(g))(\xi) \in \mathcal{G}.$$

Il s'en suit une action linéaire  $G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  appelée **représentation adjointe** de  $G$  dans  $\mathcal{G}$ .

- 2. Tout groupe sous-groupe de  $GL(\mathbb{R}^n)$  opère sur  $\mathbb{R}^n$  par des transformations linéaires.
- 3. Le groupe orthogonal  $SO(n+1) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$  opère effectivement et transitivement dans la sphère unité  $S^n$ . Les sous-groupes d'isotropie sont isomorphes à  $SO(n)$ . On a donc  $S^n$  est difféomorphe à l'espace homogène

$$\frac{SO(n+1)}{SO(n)}$$

- 4. La donnée d'un champ de vecteurs sur une variété compacte équivaut à la donnée d'une action (différentiable) de  $\mathbb{R}$  sur  $M$ .
- 5. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; Le groupe linéaire général  $GL(n+1, \mathbb{R})$  opère transitivement dans  $\mathbb{R}P^n$  cette action n'est pas effective. En effet, le sous-groupe  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  préserve chaque sous-espace vectoriel de dimension 1.
- 6. Le tore euclidien  $\mathbb{T}^n$  est le quotient du groupe additif  $\mathbb{R}^n$  par le sous-groupe additif  $\mathbb{Z}^n$  des points à coordonnées entières.  
L'action (linéaire) naturelle du groupe  $GL(n, \mathbb{Z}) \subset GL(n, \mathbb{R})$  des matrices inversibles à coefficients entiers préserve le sous-groupe additif  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Cette action passe au quotient et y définit une action libre  $GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ .
- 7. Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , alors l'action homogène de  $G$  sur  $G/H$  est l'action différentiable :  $(g, aH) \rightarrow gaH$ .

### Orbites vues comme sous-variétés et Champs fondamentaux

Soit  $\varphi : G \rightarrow Diff(M)$  une action différentiable et  $a \in M$ . L'application évaluation

$$\varphi_a : G \rightarrow M, \varphi_a(g) = g.a$$

est différentiable.

**Théorème 286.** 1. Le groupe d'isotropie  $G_a$  est un sous-groupe de Lie de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}_a = \ker d_e \varphi_a$ .

2. L'orbite  $G.a$  est une sous-variété immergée.

3. Si l'action est transitive, l'application  $gG_a \rightarrow g.a$  est un difféomorphisme  $G$ -équivariant de l'espace homogène  $G/G_a$  sur  $M$ .

**Champs fondamentaux** Soit  $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  une action différentiable. Pour tout vecteur  $g \in \mathcal{G}$ , l'application de  $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$  donnée par :

$$(s, a) \rightarrow (\exp_G(-sg)).a.$$

est une action différentiable de  $\mathbb{R}$  sur  $M$ . C'est donc le flot d'un champ de vecteur complet sur  $M$ , on le note  $X^g$ . On l'appelle le champ de vecteurs fondamental associé à  $g$ . Pour tout  $a \in M$ , on a :

$$X_a^g = \frac{d}{ds}_{s=0} (\exp_G(-sg)).a$$

**Proposition 287.** Soit  $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  une action différentiable et  $a \in M$ . Alors :

1. L'espace tangent à l'orbite  $G.a$  en  $a$  est

$$T_a(G.a) = \{X_a^g, g \in \mathcal{G}\}$$

2. L'algèbre de Lie  $\mathcal{G}_a$  du groupe d'isotropie est :

$$\mathcal{G}_a = \{g \in \mathcal{G}, X_a^g = 0\}$$

3. L'application  $\hat{\varphi} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}(M)$ ,  $\hat{\varphi}(g) = X^g$  est un homomorphisme d'algèbres de Lie de  $\mathcal{G}$  vers l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur  $M$ .

Nous terminons par un groupe de Lie qui est fondamental dans ce mémoire.

**Le groupe de Lie  $Aff(n)$  et l'algèbre de Lie  $aff(n)$ .**

Soit  $n$  un entier non nul et  $\mathbb{R}^n$  l'espace affine réel de dimension  $n$  muni d'une orientation. Nous identifions  $\mathbb{R}^n$  à l'hyperplan affine  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On désigne par  $Aff(n)$  le groupe des automorphismes de  $\mathbb{R}^n$  préservant l'orientation. Via l'identification ci-dessus, le groupe  $Aff(n)$  prend le forme

$$Aff(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{R}), A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Le produit étant donné par la formule

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & Ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son action sur l'espace affine  $\mathbb{R}^n$  est donné par

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie  $aff(n)$  du groupe de Lie  $Aff(n)$  s'identifie à l'ensemble

$$aff(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{R}), A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Le crochet y est donné par

$$\left[ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} AA' - A'A & Ab' - A'b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Définition 288.** Le groupe  $Aff(n)$  est appelé groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$ . Son algèbre de Lie  $aff(n)$  est appelé algèbre des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$ .

## .2 Feuilletages

Dans cette section,  $M$  désigne une variété différentiable de dimension  $n$  et  $k$  un entier naturel.

**Définition 289. (Distribution).** On appelle distribution de rang  $k$  sur  $M$ , tout sous-ensemble  $D = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times D_a$  du fibré tangent  $TM$  tel que  $\forall a \in M$ ,  $D_a$  soit un sous-espace vectoriel de dimension  $k$  de la fibre  $T_aM$ .

**Définition 290.** Une distribution  $D$  de rang  $k$  sur  $M$  est dite différentiable si tout point  $a$  de  $M$  possède un voisinage  $U_a$  sur lequel il existe  $k$  champs de vecteurs, disons  $(X_l)_{1 \leq l \leq k}$  de classe  $C^\infty$  tels que  $\forall a \in U_a$ , les valeurs en  $a$   $(X_l(a))_{1 \leq l \leq k}$  forment une base de la fibre  $D_a$ .

**Définition 291.** On appelle intégrale d'une distribution  $D$  de rang  $k$  sur  $M$  toute immersion  $i : F \rightarrow M$  d'une variété connexe  $S$  dans la variété  $M$  telle que  $\forall a \in F$ , l'image  $d_a i(T_a S)$  de la différentielle  $d_a i$  au point  $a$ , soit un sous espace vectoriel de  $D_{j(a)}$ . La variété  $F$  est alors appelée sous-variété intégrale de  $D$ .

**Définition 292.** Une sous-variété intégrale d'une distribution  $D$  est dite maximale si toute sous-variété intégrale de  $D$  qui la contient lui est égale.

**Définition 293.** Une distribution  $D$  différentiable de rang  $k$  sur  $M$  est dite complètement intégrable si  $\forall a \in M$ , il existe une sous-variété intégrale de  $D$  de dimension  $k$  contenant le point  $a$ .

**Définition 294.** Lorsqu'une distribution différentiable  $D$  de rang  $k$  sur  $M$  est complètement intégrable, on montre que par chaque point  $x$  de  $M$  passe une unique sous-variété intégrale maximale de  $D$ .

**Définition 295.** On appelle section différentiable de la distribution  $D$  tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(M)$  tel que  $\forall a \in M, X(a) \in D_a$ . On notera  $\mathcal{X}^D(M)$  le sous ensemble de  $\mathcal{X}(M)$  formé des sections différentiables de  $D$ .

**Théorème 296.** Une distribution  $D$  de rang  $k$  est complètement intégrable si et seulement si  $\forall X, Y \in \mathcal{X}^D(M), [X, Y] \in \mathcal{X}^D(M)$ . Dans ce cas,  $(\mathcal{X}^D(M), [,])$  est une sous algèbre de Lie, de algèbre de Lie de  $(\mathcal{X}(M), [,])$ .

**Définition 297.** Un feuilletage de rang  $k$  sur  $M$  est la donnée d'une distribution  $\mathcal{F}$  de rang  $k$  différentiable et complètement intégrable.

Autrement dit, un feuilletage de  $M$  est une distribution  $\mathcal{F} \subset TM$  telle que pour tout point  $a$  de  $M$ , il existe une unique sous-variété intégrale maximale  $F$  contenant  $a$ .

**Définition 298.** Les sous-variétés intégrales maximales  $F$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  sont appelées les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Nous dirons qu'un feuilletage est orientable (orienté) si le fibré vectoriel  $T\mathcal{F}$  est orientable (orienté). Nous dirons qu'un feuilletage est co-orientable (co-orienté) si le fibré normal au feuilletage,  $TM/T\mathcal{F}$ , est orientable (orienté). La co-orientabilité est également appelé orientation transverse. Tout feuilletage co-orientable de codimension 1 peut être décrite comme étant le noyau d'une forme 1-forme. Si  $\beta \in \Omega^1(M)$ , le noyau de  $\beta$  est une distribution complètement intégrable (c'est-à-dire un feuilletage) si  $d\beta \wedge \beta = 0$ .

### .3 Structures presque kählériennes

La géométrie kählérienne est l'une des branches les plus importantes de la géométrie différentielle. Elle a été découverte par Erich Kähler en 1933. De nos jours les variétés kählériennes ont été largement étudiées et des nombreux résultats importants ont été obtenus. Une variété kählérienne ou variété de Kähler est une variété différentielle équipée d'une structure unitaire satisfaisant une condition d'intégrabilité. C'est en particulier une variété Riemannienne,

une variété symplectique et une variété complexe, ces trois structures étant mutuellement compatibles. Les variétés kählériennes sont des objets d'étude naturel en géométrie complexe.

Dans cette section, nous introduisons quelques notions nécessaires (variétés complexes, variétés hermitiennes et variétés presque kählériennes ) qui nous permettra de définir les variétés kählériennes. Pour plus de détail, voir [53], [97] et [13].

### .3.1 Structure presque complexe

**Définition 299.** Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $2n$ . Une structure presque complexe  $J$  sur  $M$  est un endomorphisme sur  $T_p M$ ,  $\forall p \in M$  tel que  $J^2 = -I$ , où  $I$  dénote la transformation identité. Si une telle structure  $J$  existe sur  $M$ , alors  $(M, J)$  est dite une variété presque complexe.

#### Tenseur de Nijenhuis

**Définition 300.** Soit  $M$  une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe  $J$ . Le tenseur de torsion complexe  $N$  est un tenseur de type  $(1, 2)$  défini par :

$$N(X, Y) = 2\{[JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]\}, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

**Théorème 301.** Soit  $M$  une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe  $J$ .  $M$  est dite variété complexe si et seulement si  $N \equiv 0$ .

Pour la preuve voir ([97], p124)

*Remarque 302.* Pour toute structure presque complexe  $J$  définie sur une variété de dimension 2 on a,  $N(X, Y) = N(X, JX) = 0$ .

**Théorème 303.** [97] Soit  $M$  une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe  $J$ .  $M$  est dite variété complexe si et seulement si  $M$  admet une connexion linéaire  $\nabla$  de torsion  $T$  telle que  $\nabla J = 0$  et  $T = 0$

**Théorème 304.** [97] Une structure presque-complexe  $J$  est intégrable si et seulement si  $N = 0$ . ( Théorème de Newlander-Nirenberg )

### .3.2 Structures hermitiennes

**Définition 305.** Soit  $M$  une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe  $J$ . On appelle métrique hermitienne toute métrique riemannienne  $g$  qui vérifie :

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{22}$$

et nous disons que  $J$  et  $g$  sont compatibles.

**Proposition 306.** *Toute variété presque complexe  $(M, J)$  admet une structure hermitienne.*

*Démonstration.* Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ , on pose

$$h(X, Y) = g(JX, JY) + g(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

alors,

$$h(JX, JY) = g(X, Y) + g(JX, JY) = h(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

donc  $h$  est une métrique hermitienne. □

**Définition 307.** *Toute variété  $M$  presque complexe munie d'une métrique hermitienne est une variété presque hermitienne. De plus, si  $M$  est une variété complexe alors, elle est hermitienne.*

**Définition 308.** Soit  $M$  une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe  $J$  et une métrique hermitienne  $g$ . On appelle 2-forme fondamentale l'application  $\Omega$  définie sur  $M$  par :

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*Propriété 309.* 1. La 2-forme fondamentale  $\Omega$  est antisymétrique c.à.d  $\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X)$ .  
2.  $\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y)$ .

**Lemme 310.** *Soit  $M$  une variété presque hermitienne munie d'une structure presque complexe  $J$  et une métrique hermitienne  $g$  alors, la connexion riemannienne  $\nabla$ , la deuxième forme fondamentale  $\Omega$  et la torsion  $T$  satisfont la relation suivante :*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) - g(JX, N(Y, Z)) = 3d\Omega(X, JY, JZ) - 3d\Omega(X, Y, Z)$$

pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Pour la preuve voir ([53], p148)

**Théorème 311.** *Soit  $(M, g, J)$  une variété hermitienne et  $\nabla$  la connexion de Levi-Cevita associée à  $g$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $\nabla J = 0$
- (b)  $\nabla \Omega = 0$
- (c)  $N \equiv 0$  et  $d\Omega = 0$ .



*Démonstration.* Pour tous  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , on a

(a) $\iff$ (b)

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Omega)(Y, Z) &= X\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= Xg(Y, JZ) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z)) \\ &= g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X(JZ)) - g(\nabla_X Y, JZ) - g(Y, J(\nabla_X Z)) \\ &= g(Y, (\nabla_X J)Z). \end{aligned}$$

(b) $\iff$ (c) Supposons  $\nabla \Omega = 0$ , d'après le lemme 310 on a  $d\Omega = 0$  et  $N \equiv 0$ . Inversement, si  $d\Omega = 0$  et  $N \equiv 0$  d'après le lemme 310,  $\nabla J = 0$  donc  $\Omega = 0$ .

□

### .3.3 Structures kählériennes

#### Structures Presque kählériennes

**Définition 312.** Une variété presque hermitienne  $(M, g, J)$  est dite presque kählérienne si la 2-forme fondamentale  $\Omega$  est fermée c.à.d.  $d\Omega = 0$ .

**Proposition 313.** Pour tous  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , on a

$$d\Omega = 0 \iff g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y) = 0.$$

*Démonstration.* Pour la preuve utilisons la relation suivante

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X, Y, Z) &= X(\Omega(Y, Z)) + Y(\Omega(Z, X)) + Z(\Omega(X, Y)) \\ &\quad - \Omega([X, Y], Z) - \Omega([Y, Z], X) - \Omega([Z, X], Y). \end{aligned}$$

□

**Proposition 314.** Une variété strictement presque kählérienne est une variété presque kählérienne dont la structure presque complexe n'est pas intégrable (c.à.d.  $N \neq 0$ ).

#### Structures kählériennes

**Définition 315.** Soit  $M$  une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe  $J$ . La métrique hermitienne  $g$  est dite métrique kählérienne si la 2-forme fondamentale  $\Omega$  est fermée c.à.d.  $d\Omega = 0$ .

**Définition 316.** Toute variété presque complexe  $M$  munie d'une métrique kählérienne est dite variété presque kählérienne. De plus, toute variété complexe  $M$  munie d'une métrique kählérienne est dite variété kählérienne.

**Théorème 317.** *Toute variété presque hermitienne est une variété kählérienne si et seulement si  $\nabla J = 0$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème (311) la preuve est directe. □

## .4 Structures presque de contact

La géométrie de contact est une branche de la géométrie différentielle qui étudie les formes et les structures de contact. Elle entretient d'étroits liens avec la géométrie symplectique, la géométrie complexe, la théorie des feuilletages de codimension un. La géométrie de contact classique est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique.

Dans cette section, nous rappelons quelques structures qui interviendront dans notre travail.

Pour plus de détail, voir [20], [16], [13], [6], [97] ...

### Variétés de contact

**Définition 318** ([15]). Une variété différentiable  $M$  de dimension impaire  $(2n+1)$  est dite variété de contact si elle existe une 1-forme  $\eta$  globale sur  $M$  telle que

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

On dit que  $M$  est une variété de contact munie d'une forme de contact  $\eta$ .

*Remarque 319.* En particulier,  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  est un élément de volume de  $M$ , donc une variété de contact est orientable. Aussi le rang de  $d\eta$  est  $2n$  sur l'algèbre de Grassmann  $T_p^*M$  à chaque point  $p \in M$ , et donc nous avons un sous-espace de dimension 1,  $\{X \in T_pM / d\eta(X, T_pM) = 0\}$ , dont  $\eta \neq 0$  et qui est complémentaire au sous-espace défini par  $\eta = 0$ . Par conséquent, le choix de  $\xi_p$  dans ce sous-espace normalisée par  $\eta(\xi_p) = 1$ , nous avons un champ de vecteurs global  $\xi$  satisfaisant

$$d\eta(\xi, X) = 0, \quad \eta(\xi) = 1.$$

$\xi$  est appelé le champ de vecteur caractéristique ou le champ de Reeb de la structure de contact  $\eta$ . Utilisant la dérivée de Lie on obtient immédiatement,

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \quad \mathcal{L}_\xi d\eta = 0.$$

On note  $\mathcal{D}$  la distribution de contact ou sous-fibré défini par le sous-espace  $\mathcal{D}_p = \{X \in T_p M : \eta(X) = 0\}$ . Grosso modo, le sens de la condition  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ , est que le sous-fibré de contact est aussi loin d'être intégrable que possible, en particulier,  $\mathcal{D}$  tourne en un seul mouvement sur la variété. Pour un sous-fibré défini par une 1-forme  $\eta$  d'être intégrable, il faut et il suffit que  $\eta \wedge (d\eta)^n \equiv 0$ .

**Théorème 320** ([15]). *Soit  $\alpha$  une 1-forme sur une variété différentiable  $M^n$  et supposons que  $\alpha \wedge (d\alpha)^p \neq 0$  et  $(d\alpha)^{p+1} \equiv 0$  sur  $M^n$ . Ensuite, sur chaque point, il existe un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$  de telle sorte que  $\alpha = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^p y^i dx^i$ . Ainsi, sur chaque point d'une variété de contact  $(M^{2n+1}, \eta)$  il existe des coordonnées  $(x^i, y^i, z), i = 1, \dots, n$  telle que*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i \quad (23)$$

**Théorème 321.** [64] *Toute variété compacte et orientable de dimension 3, possède toujours une forme de contact.*

**Exemple 322.** 1. [18]  $T^{2n+1}$  possède une structure de contact,  
 2.  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , on considère sur  $\mathbb{R}^{2n+2}$  la une forme  $\theta = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i)$  et l'application d'inclusion  $i : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ , la 1-forme  $\alpha = i^* \theta$  est une forme de contact sur  $\mathbb{S}^{2n+1}$

#### .4.1 Variétés presque de contact

**Définition 323** ([16]). Soit  $M$  une variété différentiable de dimension impaire  $(2n + 1)$ . On appelle structure presque de contact sur  $M$  la donnée d'un triplet  $(\eta, \xi, \varphi)$  tel que

- $\varphi$  un champ de tenseur de type  $(1, 1)$
- $\xi$  un champ de vecteurs
- $\eta$  une 1-forme sur  $M$

vérifiant les conditions suivantes

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

**Définition 324** ([16],[81],[82]). Une variété de dimension  $(2n + 1)$  munie d'une structure presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta)$  est une variété presque de contact.

**Théorème 325** ([15]). *Soit  $(\varphi, \xi, \eta)$  une structure presque de contact, alors on a les propriétés suivantes :*

$$\varphi \xi = 0,$$

$$\eta \circ \varphi = 0,$$

$$\text{rang} \varphi = 2n.$$

*Démonstration.* 1- On a

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

remplacent  $X$  par  $x_i$ , on trouve :

$$\varphi^2 \xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = 0 = \varphi(\varphi \xi)$$

Ce qui implique :  $\varphi \xi = 0$  ou  $\varphi \xi$  est un vecteur propre de  $\varphi$  qui correspond à la valeur 0.  
Raisonnement par absurde : Supposons que  $\varphi \xi \neq 0$  on trouve

$$0 = \varphi^2(\varphi \xi) = -\varphi \xi + \eta(\varphi \xi)\xi$$

c'est-à-dire :

$$\eta(\varphi \xi)\xi = \varphi \xi$$

Donc :

$$\eta(\varphi \xi)\xi \neq 0$$

et :

$$\eta(\varphi \xi)\varphi \xi = \varphi^2 \xi = 0$$

Contradiction, avec le fait que  $\eta(\varphi \xi) \neq 0$  et  $\varphi \xi \neq 0$ , donc

$$\varphi \xi = 0.$$

2- Maintenant prenant  $\varphi \xi = 0$ ,

$$\begin{aligned} \eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X \\ &= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\ &= \varphi(-X + \eta(X)\xi) + \varphi X \\ &= \eta(X)\varphi \xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(\varphi X)\xi = 0 &\implies \eta(\varphi X) = 0 \\ &\implies \eta \circ \varphi = 0 \end{aligned}$$

3- On a  $\varphi \xi = 0$ ,  $\xi \neq 0$  et  $\text{rang}(\varphi) < 2n + 1$   
supposons qu'il existe  $\bar{\xi}$  tel que  $\varphi \bar{\xi} = 0$   
alors remplacer  $X$  par  $\bar{\xi}$  dans  $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ ,  
on trouve

$$0 = \varphi^2 \bar{\xi} = -\bar{\xi} + \eta(\bar{\xi})\xi \implies \xi = \eta(\bar{\xi})\bar{\xi}$$

$\bar{\xi}$  est proportionnel par rapport à  $\xi$   
donc on a

$$\text{rang} \varphi = 2n.$$

□

## .4.2 Variétés métriques presque de contact

### Métrique riemannienne associée à une structure presque de contact

**Théorème 326** ([13]). *Toute variété presque de contact  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  admet une métrique riemannienne  $g$  telle que,*

$$g(X, \xi) = \eta(X).$$

*Démonstration.* Soit  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  une variété presque de contact. Pour tous  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , on pose

$$g(X, Y) = h(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi) + \eta(X)\eta(Y)$$

où  $h$  est une métrique riemannienne sur  $M^{2n+1}$ . On remplace  $Y$  par  $\xi$  on aura

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= h(X - \eta(X)\xi, \xi - \eta(\xi)\xi) + \eta(X)\eta(\xi) \\ &= h(X - \eta(X)\xi, 0) + \eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

□

**Proposition 327** ([13]). *Toute variété presque de contact  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  admet une métrique riemannienne  $g$  telle que,*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (24)$$

*et  $g$  dans ce cas dite compatible avec la structure.*

*Démonstration.* Soit  $h$  une application définie pour tous  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  par  $h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y)$  où  $h'$  est une métrique riemannienne sur  $M^{2n+1}$ . Alors, on a

$$h(\xi, X) = h'(\varphi^2 \xi, \varphi^2 X) + \eta(\xi)\eta(X) = \eta(X)$$

on définit  $g$  par

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}(h(X, Y) + h(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)).$$

Donc  $g$  est une métrique riemannienne et :

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)) \\ &= \frac{1}{2}(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

□

## Variétés métriques presque de contact

**Définition 328** ([13]). On appelle une variété métrique presque de contact toute variété presque de contact  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  munie d'une métrique riemannienne  $g$  compatible avec la structure presque de contact sur  $M$ .

**Notation 329.** Dans ce cas une variété métrique presque de contact est notée par  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ .

**Définition 330.** Pour chaque structure métrique presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  sur  $M$  on définit la 2-forme fondamentale  $\Phi$  par,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

**Proposition 331** ([16]). *On dit que  $M^{2n+1}$  admet une structure métrique presque de contact si il existe une 1-forme différentielle globale  $\eta$  et une 2-forme différentielle globale  $\Phi$  sur  $M$  telles que*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0.$$

**Proposition 332** ([16]). *Si  $M^{2n+1}$  une variété de contact avec la forme de contact  $\eta$ , alors il existe une structure métrique presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  telle que la 2-forme fondamentale  $\Phi$  est définie par,*

$$\Phi = d\eta.$$

*Démonstration.* voir ([16], page 26) □

**Théorème 333** ([16]). *Soit  $M$  une variété de contact de dimension  $(2n + 1)$  munie d'une structure de contact  $\eta$  alors, il existe une structure métrique presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  telle que,*

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y).$$

## Normalité d'une structure presque de contact

**Définition 334** ([86]). Soient  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$  une variété presque de contact et  $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$  la variété produit où  $(X, f \frac{d}{dt})$  un champ de vecteurs sur  $M \times \mathbb{R}$  tel que  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ ,  $f$  une fonction sur  $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$  et  $t$  système de coordonnées sur  $\mathbb{R}$ . On définit sur  $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$  une structure presque complexe  $J$  par,

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}).$$

*Remarque 335.* Montrons que  $J$  est une structure presque complexe, ie :  $J^2 = -I$ . On a

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= J\left(J\left(X, f \frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= J\left(\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \varphi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - \eta(f\xi)) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, -f\eta(\xi) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f \frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

On sait que

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \implies -X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi$$

donc

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= \left(-X, -f \frac{d}{dt}\right) \\
&= -\left(X, f \frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$J^2 = -I$$

**Définition 336.** Soit  $J$  une structure presque complexe sur  $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ ,  $J$  est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis  $N_J(X, Y) = 0$ . ( voir théorème 301 )

**Définition 337** ([16], page 80). Soit  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  une structure métrique presque de contact sur  $M$ . On dit que  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  est normale si la structure presque complexe  $J$  est intégrable.

*Remarque 338.* On va exprimer la condition de normalité en terme de  $N_\varphi$  le tenseur de Nijenhuis de  $\varphi$  avec :

$$N_\varphi(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y].$$

Puisque  $N_J$  est un tenseur de type  $(1, 2)$ , alors il suffit de calculer  $N_J((X, 0), (Y, 0))$  et

$N_J((X, 0), (0, \frac{d}{dt}))$ . On trouve :

$$\begin{aligned}
N_J((X, 0), (Y, 0)) &= J^2[(X, 0), (Y, 0)] + [J(X, 0), J(Y, 0)] - J[(X, 0), J(Y, 0)] - J[J(X, 0), (Y, 0)] \\
&= \left( \begin{array}{l} -([X, Y], 0) + ([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X \eta Y - \varphi Y \eta(X)) \frac{d}{dt}) \\ -(\varphi([X, \varphi Y]), X \eta(Y) \xi, \eta([X, \varphi Y]) \frac{d}{dt}) \\ -(\varphi([\varphi X, Y]), Y \eta(X) \xi, \eta([\varphi X, Y]) \frac{d}{dt}) \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{l} -[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi([X, \varphi Y]) \\ -\varphi([\varphi X, Y]) - (X \eta(Y) + Y \eta(X)) \xi \\ -(\varphi X \eta(Y) - \varphi Y \eta(X) - \eta([X, \varphi Y]) - \eta([\varphi X, Y])) \frac{d}{dt} \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{l} -\varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi([X, \varphi Y]) \\ -\varphi([\varphi X, Y]) - (X \eta(Y) + Y \eta(X)) \xi \\ -(\varphi X \eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y \eta(X) - \eta([X, \varphi Y])) \frac{d}{dt} \end{array} \right) \\
&= (N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y), (\mathfrak{L}_{\varphi X} \eta(Y) - \mathfrak{L}_{\varphi Y} \eta(X)) \frac{d}{dt}) \\
&= (N^1(X, Y), N^2(X, Y))
\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
N_J\left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) &= J^2\left[(X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] + \left[J(X, 0), J\left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] \\
&\quad - J\left[(X, 0), J\left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] - J\left[J(X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] \\
&= \left([\xi, \varphi X], \xi \eta(X) \frac{d}{dt}\right) + \left(\varphi([\xi, X]), \eta([\xi, X]) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left([\xi, \varphi X] - \varphi([\xi, X]), \xi \eta(X) \frac{d}{dt} - \eta([\xi, X]) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\mathfrak{L}_\xi \varphi) X, (\mathfrak{L}_\xi \eta) X \frac{d}{dt}\right) \\
&= (N^3(X), N^4(X))
\end{aligned}$$

d'où



$$\begin{aligned}
N^{(1)} &= N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \\
N^{(2)} &= (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)X \\
N^{(3)} &= (\mathfrak{L}_\xi\varphi)X \\
N^{(4)} &= (\mathfrak{L}_\xi\eta)X
\end{aligned}$$

Donc : La structure métrique presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  est normale si

$$N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0.$$

**Théorème 339** ([97]). *Soit  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$  une variété presque de contact si  $N^1 = 0$  alors,*

$$N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0.$$

**Lemme 340** ([13], p 82). *Pour une structure métrique presque de contact  $(\varphi, \xi, \eta, g)$ , la dérivée covariante de  $\varphi$  est donnée par,*

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\
&\quad + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Rappelons que la connexion riemannienne  $\nabla$  de  $g$  donnée par

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) \\
&\quad - g([Y, Z], X)
\end{aligned}$$

et que la formule de  $d$  sur la 2-forme  $\Phi$  est

$$\begin{aligned}
d\Phi(X, Y, Z) &= \frac{1}{3} \left( X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) \right. \\
&\quad \left. - \Phi([Y, Z], X) \right)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 2g(\nabla_X\varphi Y, Z) + 2g(\nabla_X Y, \varphi Z) \\
&= Xg(\varphi Y, Z) + \varphi Yg(X, Z) - Zg(X, \varphi Y) + g([X, \varphi Y], Z) + g([Z, X], \varphi Y) \\
&\quad - g([\varphi Y, Z], X) + Xg(Y, \varphi Z) + Yg(X, \varphi Z) - \varphi Zg(X, Y) + g([X, Y], \varphi Z) \\
&\quad + g([\varphi Z, X], Y) - g([Y, \varphi Z], X)
\end{aligned}$$

sachant que

$$\begin{aligned}
2d\eta(\varphi Y, X) &= \varphi Y(\eta(X)) - X(\eta(\varphi Y)) - \eta([\varphi Y, X]) \\
N^{(1)}(Y, Z) &= N_\varphi(Y, Z) + 2d\eta(Y, Z)\xi \\
&= \varphi^2[Y, Z] + [\varphi Y, \varphi Z] - \varphi([Y, \varphi Z]) - \varphi([\varphi Y, Z]) + 2d\eta(Y, Z)\xi \\
N^{(2)}(Y, Z) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)Z - (\mathfrak{L}_{\varphi Z}\eta)Y \\
&= -\eta([Y, \varphi Z]) + \varphi Y\eta(Z) - Z\eta(\varphi Y) - \eta([\varphi Y, Z]) - \varphi Z\eta(Y)
\end{aligned}$$

donc

$$2g((\nabla_{X\varphi})Y, Z) = 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y).$$

□

### 4.3 Variétés cosymplectique et coKähler

#### Structure cosymplectique :

Les variétés cosymplectiques ont été introduites par Libermann (voir [60], [61]).

**Définition 341** ([61],[73]). Une structure presque cosymplectique sur une variété  $M$  de dimension impaire  $2n + 1$  est une paire  $(\eta, w)$ , où  $\eta$  est une 1-forme et  $w$  est une 2-forme telle que  $\eta \wedge w^n \neq 0$  (i.e. forme de volume) sur  $M$ . Cette structure est dite cosymplectique si  $\eta$  et  $w$  sont fermées.

Si  $(\eta, w)$  est une structure presque cosymplectique sur  $M$ , le triple  $(M, \eta, w)$  est considéré comme une variété presque cosymplectique.

#### Structure coKähler :

Historiquement, les variétés coKähler ont été définies par Blair dans [15].

**Définition 342** ([27]). Une variété presque coKähler est une variété métrique presque contact  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$  de telle sorte que la 2-forme fondamentale  $w$  et la 1-forme  $\eta$  sont fermées (i.e.  $dw = 0$  et  $d\eta = 0$ ).

Si, en plus, la structure presque contact est normale, on dit que  $M$  est une variété **coKähler**.

*Remarque 343.* Soient  $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$  une variété presque de contact métrique et  $w$  la 2-forme fondamentale. On peut distinguer les classes suivantes, on dit que :

- $M$  est cosymplectique si  $dw = d\eta = 0$  (i.e.  $w$  et  $\eta$  sont fermées),
- $M$  est coKähler si elle est normale et cosymplectique.

**Théorème 344** ([73]). Soient  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  une variété presque de contact de dimension  $(2n + 1)$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Cevita sur  $M$ . Alors on a :

$$M \text{ est coKähler} \iff \text{pour tous } X, Y \in \mathfrak{X}(M) : (\nabla_X \varphi)Y = 0.$$

*Démonstration.* Supposons que  $M$  une variété coKähler (i.e.  $d\varphi = 0$ ,  $d\eta = 0$ , et  $(\varphi, \xi, \eta)$  est normale)

$$\begin{aligned} (\varphi, \xi, \eta) \text{ est normale} &\iff N^{(1)} = 0 \\ &\iff N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0 \end{aligned}$$

suivant le lemme 340, pour tous  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  on a,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$(\nabla_X \varphi)Y = 0.$$

Pour l'inverse, supposons  $(\nabla_X \varphi)Y = 0$  on a,

$$\begin{aligned} 3d\Phi(X, Y, Z) &= X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) \\ &\quad - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X) \\ &= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) + g(\nabla_Y Z, \varphi X) + g(Z, \nabla_Y \varphi X) + g(\nabla_Z X, \varphi Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_Z \varphi Y) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \varphi Z) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, \varphi Y) \\ &\quad - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, \varphi X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors  $d\Phi = 0$  et

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = 0 \implies N^{(1)}(X, Y) = 2d\eta(X, Y)\xi.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} N^{(2)}(Y, \xi) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y} \eta)(\xi) \\ &= -\eta([\varphi Y, \xi]) \\ &= -g(\xi, \nabla_{\varphi Y} \xi - \nabla_{\xi \varphi} Y) \\ &= g(\xi, \varphi \nabla_{\xi} Y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dans le lemme 340 posons  $Z = \xi$ , on obtient  $d\eta(\varphi Y, X) = 0, \forall X, Y$ . D'où  $d\eta = 0$  i.e.  $N^{(1)} = 0$  donc  $M$  est coKähler.  $\square$

**Proposition 345.** Soit  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  une variété coKähler. Alors pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , on a :

$$(\nabla_X w)(Y, Z) = 0,$$

où  $w$  2-forme fondamentale.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}(\nabla_X w)(Y, Z) &= Xw(Y, Z) - w(\nabla_X Y, Z) - w(Y, \nabla_X Z) \\ &= Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) - (\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\ &= g(Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\ (\nabla_X w)(Y, Z) &= 0.\end{aligned}$$

□

# Bibliographie

- [1] Bill Acakpo. Stable hamiltonian structure and basic cohomology. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, pages 1–6, 2022.
- [2] Ilka Agricola. Non-integrable geometries, torsion, and holonomy. 2010.
- [3] Claude Albert. Le théoreme de réduction de marsden-weinstein en géométrie cosymplectique et de contact. *Journal of Geometry and Physics*, 6(4) :627–649, 1989.
- [4] Richard Atkins. Existence of parallel sections of a vector bundle. *Journal of Geometry and Physics*, 61(1) :309–311, 2011.
- [5] Joseph A.Wolf. *Space of constant curvature*. Boston Mass, 1974.
- [6] Augustin Banyaga and Djideme F Houenou. *A brief introduction to symplectic and contact manifolds*, volume 15. World Scientific, 2016.
- [7] Frédéric Barbaresco. Information geometry of covariance matrix : Cartan-siegel homogeneous bounded domains, mostow/berger fibration and frechet median. In *Matrix information geometry*, pages 199–255. Springer, 2013.
- [8] Frédéric Barbaresco. Koszul information geometry and souriau geometric temperature/capacity of lie group thermodynamics. *Entropy*, 16(8) :4521–4565, 2014.
- [9] Frédéric Barbaresco. Koszul information geometry and souriau lie group thermodynamics. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1641, pages 74–81. American Institute of Physics, 2015.
- [10] Dennis Barden. Simply connected five-manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 365–385, 1965.
- [11] Giovanni Bazzoni and Oliver Goertsches. K-cosymplectic manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 47(3) :239–270, 2015.
- [12] Pierre Bieliavsky, Michel Cahen, Simone Gutt, John Rawnsley, and Lorenz Schwachhöfer. Symplectic connections. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 3(03) :375–420, 2006.

- [13] David E Blair. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [14] David E Blair and SI Goldberg. Topology of almost contact manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 1(3-4) :347–354, 1967.
- [15] David Ervin Blair. The theory of quasi-sasakian structures. *J. Diff. Geometry*, 1 :331–345, 1967.
- [16] David Ervin Blair. Contact manifolds. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, pages 1–16, 1976.
- [17] Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg, and Emmy Murphy. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. *Acta Mathematica*, 215(2) :281–361, 2015.
- [18] Frédéric Bourgeois. Odd dimensional tori are contact manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 2002(30) :1571–1574, 2002.
- [19] Frédéric Bourgeois and Michel Cahen. A variational principle for symplectic connections. *Journal of Geometry and Physics*, 30(3) :233–265, 1999.
- [20] Charles P Boyer, Krzysztof Galicki, and Paola Matzeu. On eta-einstein sasakian geometry. *Communications in mathematical physics*, 262(1) :177–208, 2006.
- [21] Michel Nguiffo Boyom. Kv-cohomology of koszul–vinberg algebroids and poisson manifolds. *International Journal of Mathematics*, 16(09) :1033–1061, 2005.
- [22] Michel Nguiffo Boyom. The cohomology of koszul-vinberg algebra and related topics. *African Diaspora Journal of Mathematics. New Series*, 9(2) :53–65, 2009.
- [23] Michel Nguiffo Boyom. Foliations-webs-hessian geometry-information geometry-entropy and cohomology. *Entropy*, 18(12) :433, 2016.
- [24] Michel Nguiffo Boyom. Numerical properties of koszul connections. *arXiv preprint arXiv :1708.01106*, 2017.
- [25] Michel Nguiffo Boyom. The last formula of jean-louis koszul. *Information Geometry*, 4(1) :263–310, 2021.
- [26] Michel Nguiffo Boyom and Robert A Wolak. Affine structures and kv-cohomology. *Journal of Geometry and Physics*, 42(4) :307–317, 2002.
- [27] Beniamino Cappelletti-Montano, Antonio De Nicola, and Ivan Yudin. A survey on cosymplectic geometry. *Reviews in Mathematical Physics*, 25(10) :1343002, 2013.

- [28] Élie Cartan. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace des variables complexes. In *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 11, pages 116–162. Springer, 1935.
- [29] Henry Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*, volume 41. Princeton University Press, 1999.
- [30] Roger Casals, Dishant M Pancholi, and Francisco Presas. Almost contact 5-manifolds are contact. *Annals of Mathematics*, pages 429–490, 2015.
- [31] Shiing-Shen Chern. The geometry of  $g$ -structures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(2) :167–219, 1966.
- [32] SS Chern. Pseudo-groupes continus infinis in géométrie différentielle, colloques internationaux. *CNRS, Strasbourg*, 1953.
- [33] Claude Chevalley and Samuel Eilenberg. Cohomology theory of lie groups and lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 63(1) :85–124, 1948.
- [34] Domingo Chinea, Manuel de León, and Juan Carlos Marrero. Topology of cosymplectic manifolds. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 72(6) :567–591, 1993.
- [35] Kai Cieliebak and Evgeny Volkov. Stable hamiltonian structures in dimension three are supported by open books. *arXiv preprint arXiv :1012.3854*, 2010.
- [36] M De León and M Saralegi. Cosymplectic reduction for singular momentum maps. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 26(19) :5033, 1993.
- [37] Charles Ehresmann. Sur les variétés presque complexes. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass*, volume 2, pages 412–419, 1950.
- [38] Yakov Eliashberg, Sang Seon Kim, and Leonid Polterovich. Geometry of contact transformations and domains : orderability versus squeezing. *Geometry & Topology*, 10(3) :1635–1747, 2006.
- [39] Atsuo Fujimoto and Hisanori Muto. On cosymplectic manifolds. *Tensor NS*, 28 :43–52, 1974.
- [40] David Gabai. Foliations and the topology of 3-manifolds. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 8(1) :77–80, 1983.
- [41] Hansjörg Geiges. Contact structures on 1-connected 5-manifolds. *Mathematika*, 38(2) :303–311, 1991.
- [42] Étienne Ghys. Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58(1) :543–572, 1983.

- [43] William Goldman. Geometric structures on manifolds. *University of Maryland, Lecture Notes*, 2018.
- [44] Mikhael Gromov. *Partial differential relations*, volume 9. Springer Science & Business Media, 1986.
- [45] Mikhail Leonidovich Gromov. Stable mappings of foliations into manifolds. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 3(4) :671, 1969.
- [46] Victor Guillemin, Eva Miranda, and Ana Rita Pires. Codimension one symplectic foliations and regular poisson structures. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 42(4) :607–623, 2011.
- [47] Masayuki Henmi. Statistical manifolds admitting torsion, pre-contrast functions and estimating functions. In *International Conference on Geometric Science of Information*, pages 153–161. Springer, 2017.
- [48] Masayuki Henmi and Hiroshi Matsuzoe. Statistical manifolds admitting torsion and partially flat spaces. In *Geometric Structures of Information*, pages 37–50. Springer, 2019.
- [49] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser, 2012.
- [50] Alberto Ibort, David Marti, et al. Lefschetz pencil structures for 2-calibrated manifolds. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(3) :215–218, 2004.
- [51] Josef Janyška and Marco Modugno. Generalized geometrical structures of odd dimensional manifolds. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 91(2) :211–232, 2009.
- [52] Shoshichi Kobayashi. Projectively invariant distances for affine and projective structures. *Banach Center Publications*, 1(12) :127–152, 1984.
- [53] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.
- [54] Jean-Louis Koszul. Domaines bornés homogenes et orbites de groupes de transformations affines. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 89 :515–533, 1961.
- [55] Jean-Louis Koszul. Variétés localement plates et convexité. *Osaka Journal of Mathematics*, 2(2) :285–290, 1965.
- [56] Jean-Louis Koszul. Déformations de connexions localement plates. *Annales de l’institut Fourier*, 18(1) :103–114, 1968.
- [57] Stefan L Lauritzen. Statistical manifolds. *Differential geometry in statistical inference*, 10 :163–216, 1987.



- [58] Hong-Van Le. Monotone invariants and embeddings of statistical manifolds, 2005.
- [59] Hongjun Li. Topology of co-symplectic/co-kähler manifolds. *Asian Journal of Mathematics*, 12(4) :527–544, 2008.
- [60] Melle Paulette LIBERMANN. Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact. *Coll. Géom. Diff. Globale*, pages 37–58, 1959.
- [61] Paulette Libermann. Sur quelques exemples de structures pfaffiennes et presque cosymplectiques. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 60(1) :153–172, 1962.
- [62] André Lichnerowicz. Variétés localement kählériennes. *Séminaire Bourbaki*, 1954.
- [63] Robert Lutz. Sur l'existence de certaines formes différentielles remarquables sur la sphere  $S^3$ . *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 270 :A1597–A1599, 1970.
- [64] Jean Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. In *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, pages 142–163. Springer, 1971.
- [65] Hiroshi Matsuzoe and Takashi Kurose. Quasi-statistical manifolds and geometry of affine distributions. *Pure and Applied Differential Geometry*, pages 208–214, 2012.
- [66] Gilbert Monna. Feuilletages de k-contact sur les variétés compactes de dimension 3. *Publicacions de la Secció de Matemàtiques*, 28(2/3) :81–87, 1984.
- [67] Kanji Motomiya. A study on almost contact manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 20(1) :73–90, 1968.
- [68] H Nagaoka and S Amari. Differential geometry of smooth families of probability distributions," *metr* 82-7, univ, 1982.
- [69] Michel Nguiffo Boyom. The cohomology of Koszul–Vinberg algebras. *Pacific journal of mathematics*, 225(1) :119–153, 2006.
- [70] M Nicolau and A Reventós. On some geometrical properties of seifert bundles. *Israel Journal of Mathematics*, 47(4) :323–334, 1984.
- [71] Liviu Nicolescu and Mircea Martin. Sur l'algèbre associée à un champ tensoriel du type  $(1, 2)$ . *Acta Mathematica Hungarica*, 31(1-2) :27–35, 1978.
- [72] Morio Obata. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or hermitian structure. In *Japanese journal of mathematics : transactions and abstracts*, volume 26, pages 43–77. The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [73] Z Olszak. Almost cosymplectic manifolds with kahlerian leaves. *Tensor, NS*, 46 :117–124, 1987.

- [74] Zbigniew Olszak. On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4(2) :239–250, 1981.
- [75] Zbigniew Olszak. Locally conformal almost cosymplectic manifolds. In *Colloquium Mathematicum*, volume 57, pages 73–87. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1989.
- [76] Barbara Opozda. Bochner’s technique for statistical structures. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 48(4) :357–395, 2015.
- [77] Richard S Palais. A global formulation of the lie theory of transformtion groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 22, 1957.
- [78] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171. Springer, 2006.
- [79] Hansklaus Rummmler. Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 54(1) :224–239, 1979.
- [80] M Saralegui. The euler class for flows of isometries. *Research Notes in Mathematics*, 131 :220–227, 1985.
- [81] Shigeo Sasaki. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure i. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 12(3) :459–476, 1960.
- [82] Shigeo Sasaki and Yoji Hatakeyama. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. ii. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 13(2) :281–294, 1961.
- [83] Hirohiko Shima and Katsumi Yagi. Geometry of hessian manifolds. *Differential geometry and its applications*, 7(3) :277–290, 1997.
- [84] U Simon. Affine differential geometry, ed. by f. dillen, l. verstraelen, handbook of differential geometry, vol. i, 2000.
- [85] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Inventiones mathematicae*, 36(1) :225–255, 1976.
- [86] Shûkichi TANNÔ. Almost complex structures in bundle spaces over almost contact manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 17(2) :167–186, 1965.
- [87] David Tischler. On fibering certain foliated manifolds overs1. *Topology*, 9(2) :153–154, 1970.
- [88] Philippe Tondeur. *Geometry of foliations*. Number 90. Springer Science & Business Media, 1997.

- [89] David Martinez Torres. The geometry of 2-calibrated manifolds. *Portugaliae Mathematica*, 66(4) :427–512, 2009.
- [90] Izu Vaisman. Sur quelques formules du calcul de ricci global. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 41(1) :73–87, 1966.
- [91] Izu Vaisman. Symplectic curvature tensors. *Monatshefte für Mathematik*, 100(4) :299–327, 1985.
- [92] Jacques Vey. *Sur une notion d'hyperbolicité des variétés localement plates*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1969.
- [93] Jacques Vey. Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 24(4) :641–665, 1970.
- [94] Ernest B Vinberg. Theory of homogeneous convex cones. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12 :303–368, 1967.
- [95] Wad. Geodesic foliations by circles. *Journal of Differential Geometry*, 10(4) :541–549, 1975.
- [96] H Wu. Some theorems on projective hyperbolicity. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 33(1) :79–104, 1981.
- [97] K Yano and M Kon. Structures on manifolds, vol. 3, series in pure math. *World Scientific, Singapore*, 10 :0067, 1984.