



HAL
open science

Application de métamatériaux aux problématiques vibroacoustiques automobiles

Adrien Pyskir

► **To cite this version:**

Adrien Pyskir. Application de métamatériaux aux problématiques vibroacoustiques automobiles. Autre. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSEC011 . tel-04048525

HAL Id: tel-04048525

<https://theses.hal.science/tel-04048525>

Submitted on 28 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de l'École Centrale de Lyon

École Doctorale ED162 - MEGA

Spécialité : Génie Mécanique

NNT 2020LYSEC11

Confidentiel 2020-2023

Application de métamatériaux aux problématiques vibroacoustiques automobiles

Soutenue publiquement le 4 mars 2020, par :

Adrien PYSKIR

Jury composé de :

Fabrizio SCARPA	Professeur, University of Bristol,	Président du jury et rapporteur
François GAUTIER	Professeur des Universités, Université du Maine,	Rapporteur
Simon CHESNÉ	Maître de Conférences HDR, INSA de Lyon,	Examinateur
Sarah BENCHABANE-GAIFFE	Chargée de recherche CNRS, Université de Franche-Comté,	Examinatrice
Pauline BUTAUD	Maître de Conférences, FEMTO-ST,	Examinatrice
Zoran DIMITRIJEVIC	Docteur, PSA Groupe,	Tuteur industriel
Claude-Henri LAMARQUE	Professeur, École Nationale des Travaux Publics de l'État,	Directeur de thèse
Manuel COLLET	Directeur de recherche CNRS, École Centrale de Lyon,	Directeur de thèse

Remerciements

Si cette thèse a bien sûr constitué un énorme parcours personnel et professionnel, c'est avant tout un projet qui n'aurait pas abouti ainsi sans le soutien de mon entourage, à travers toutes les étapes, difficiles ou heureuses, que j'ai pu traverser.

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Manuel Collet pour sa confiance constante en moi, en particulier lorsque je ne croyais pas en moi-même. Un immense merci à Claude-Henri Lamarque pour ses remarques pertinentes, son enthousiasme permanent, et pour ses "questions bêtes", probablement parmi les plus intelligentes que j'aie entendues. Merci à mon tuteur industriel Zoran Dimitrijevic pour son soutien, professionnel et personnel, et pour sa lucidité constante.

Je remercie également mes cobureaux successifs, Sami Karkar et Emanuele De Bono, pour leur aide précieuse au quotidien.

Merci aux techniciens et ingénieurs de Centrale, Jean-Marc Ingargiola, Stéphane Lemahieu, Lionel Charles, Ahmed Telali, Patrick Perrard, Jean-Baptiste Goure, et Sebastien Leone, qui m'ont apporté une aide inestimable et spontanée pour mettre en œuvre mes idées au cours de cette thèse. Tous mes remerciements à Joachim Blanc-Gonnet pour sa gentillesse et son investissement sur les mesures optiques et leur dépouille. Un grand merci à Michelle Salvia et Bruno Berthel pour leur aide généreuse et les discussions enrichissantes sur la partie caractérisation des matériaux. Merci aussi aux "petits" stagiaires, Gustavo, Loïc, Yadaï, Rui, Mouhamed, pour leur investissement et leur contribution à cette thèse.

Un grand merci à l'équipe SMMS de PSA Groupe, Benoît Delattre, Olivier Sauvage, chef Laurent Rota, Ida Raoult, Arnaud Gaudin, Agathe Forré, Malek Zarroug, Zouhir Abbadi, Laurent Fontaine mais aussi les doctorants et les stagiaires pour m'avoir accueilli généreusement dans leur équipe et prodigué précieux conseils et parts de gâteaux.

Merci aux autres doctorants de PSA pour les afterworks et autres activités extra professionnelles qui ont bien animé mes séjours parisiens. Mention spéciale au noyau dur : Anthony, Nolwenn, Élise, Amélie, Youna, et Julien.

Merci aussi aux membres du LTDS, notamment les doctorants et les stagiaires, pour la vie et le fun qu'ils apportent au laboratoire. En parlant de doctorants, je tiens aussi à remercier ceux du LMFA, dont la bonne ambiance m'a poussé à faire cette thèse, et pour ensuite avoir continué à m'accueillir chaleureusement pour leur rituel du vendredi. Merci enfin aux motivés

du volleyball, pour ces sessions sportives intenses ! Remerciements tout particuliers à Alexis, Amaury, Bruno, Enora, Félix, Giulia, Grégoire, Jeremy, Marion, Matthias, Mouhamed, Nassardin, Nathanael, Pascal, Pradeep, Vilayvone, Zakaria.

Merci au responsable du Fablab, Bernard Jean, pour sa joie de vivre, son accueil chaleureux et ses précieux conseils pour la fabrication de mes éprouvettes. Bonne retraite à toi !

Je n'oublie pas Hélène Schoch, dont la gentillesse et l'humour ont été d'un précieux secours au quotidien de ma thèse.

Sur un plan plus personnel, et parce que la vie en dehors de la thèse est aussi importante, voire plus, que cette dernière, j'aimerais adresser mes plus sincères remerciements à un certain nombre de personnes :

Mes colocs, Masseni, Camille, Pierre, Aurélie, Camille, Pierre-Alain et Margaux, pour m'avoir supporté et pour nos précieux moments partagés.

Ma famille bien sûr, pour votre soutien et votre amour sans limites depuis de nombreuses années, et pour avoir essayé de comprendre mon sujet de thèse.

Les potos de Roanne, pour n'avoir même pas essayé. Vous êtes toujours resté fidèles à vous-mêmes, et nos expériences en commun sont ma plus grande fierté !

Yuta, pour ta gentillesse infinie et ton tutorat japonais. どうもありがとう !

Rémi pour nos délires nippophiles et ce voyage inoubliable.

Gigi, merci pour tout !

Stéphane, une des rares personnes qui ait vraiment compris mes galères doctorantes. Merci pour nos sessions de travail à domicile et le soutien psychologique qui allait avec.

Enfin, mille mercis, Diane, pour ta compréhension et ton soutien moral inestimables tout au long de l'épreuve qu'ont constituée les derniers mois de cette thèse.

Merci, amour riheur, inobnulié, entétard.

« - La porte va s'ouvrir au signal et il te faudra plonger, tu connais la contrainte. Tu te sens prêt, Lorca ?
- Absolument pas...
- C'est précisément ce que j'appelle être prêt. Cet état d'incertitude fragile, ouverte, qui rend disponible à l'inconnu. Crois-moi Lorca, quoi qu'il arrive, tu vas vivre l'un des moments les plus intenses de ton existence. Reste ouvert. »

Alain Damasio - *Les Furtifs*

Résumé

Les métamatériaux sont des matériaux architecturés de telle sorte qu'ils présentent des propriétés exotiques, issues non pas du matériau constitutif, mais de leur structure interne. Bien qu'ayant été étudiés depuis une vingtaine d'années, peu d'applications réelles ont été recensées, notamment dans le domaine industriel. Cette thèse est consacrée aux métamatériaux élastiques susceptibles de réduire les vibrations dans les véhicules automobiles. En effet, une meilleure isolation des principales sources vibratoires permettrait l'amélioration du confort vibratoire et de la durée de vie des pièces mécaniques. Les résultats de calculs numériques et essais expérimentaux montrent que les métamatériaux peuvent satisfaire des contraintes contradictoires, et représentent donc des candidats intéressants pour la réalisation d'innovations industrielles.

Ce type de solutions étant fondamentalement différent des systèmes d'isolation actuels, le premier chapitre dresse un état de l'art des métamatériaux, afin d'en comprendre les mécanismes et les méthodes numériques permettant d'en calculer les performances. Le deuxième chapitre aborde les techniques de caractérisation des matériaux employées pendant cette thèse. Les essais mécaniques ainsi que les résultats permettent de définir les modèles matériaux utilisés par la suite. Dans le troisième chapitre, des calculs numériques appliqués à différentes architectures aident à mieux comprendre certains mécanismes des métamatériaux et à choisir le meilleur candidat vis-à-vis des propriétés ciblées. Celui-ci est approfondi dans le quatrième chapitre, à travers des études paramétriques statiques et dynamiques. Des propositions d'améliorations géométriques sont proposées, y compris un métamatériau hybride aux propriétés supérieures. Afin de vérifier les résultats expérimentaux et d'acquérir une meilleure compréhension des mécanismes sous-jacents, le cinquième chapitre aborde finalement les essais expérimentaux effectués, l'analyse de leurs résultats, et leur confrontation avec les résultats numériques.

Mots-clés : vibroacoustique, métamatériaux, isolation vibratoire, matériaux auxétiques, mécanique non-linéaire, bandes interdites, flambage.

Abstract

Metamaterials are architected materials exhibiting exotic properties due to their internal structure rather than their constitutive material. They have now been studied for two decades, but have yet to make their mark outside laboratories, especially for industrial applications. This thesis focuses on elastic metamaterials that can contribute to fix vibration issues in the automotive field. Better isolation of the main vibration sources would increase both the vibroacoustic comfort in the vehicles and the safety of mechanical parts. Through computations and experimentations, it is shown that metamaterials can be designed to meet different criteria usually contradictory and as such, are strong candidates for innovative breakthroughs in industry.

As this kind of solutions differs radically from existing ones, the first chapter is a state-of-the-art review, both to grasp the main mechanisms behind the multitude of metamaterials designs that can be found in the literature, as well as the methods used to modelize them. The second chapter tackles the characterization of the materials used along this thesis. The mechanical tests and results presented allow to determine the material models then inserted in the computations. Through preliminary computations, the third chapter attempts to understand and select the most promising mechanisms to satisfy the expected specifications. The chosen design properties are further investigated in the fourth chapter, through static and dynamic computations, as well as parametric studies. A hybrid metamaterial with enhanced isolation properties is proposed. To finally assess the numerical results obtained and reach better understanding of the underlying mechanisms, the fifth chapter deals with the performed experimental tests, their analysis, and their comparison with previous results.

Keywords : vibroacoustics, metamaterials, vibration isolation, auxetic materials, non-linear mechanics, bandgaps, buckling harnessing.

Table des matières

Introduction	19
1 État de l'art	23
1.1 Introduction aux métamatériaux	23
1.1.1 Définition	23
1.1.2 Genèse	24
1.2 Cristaux phononiques	26
1.3 Métamatériaux acoustiques	27
1.4 Métamatériaux mécaniques	30
1.5 Matériaux auxétiques	34
1.5.1 Introduction	34
1.5.2 Réentrance	34
1.5.3 Chiralité	36
1.5.4 Polygones rotatifs	38
1.5.5 Variantes	40
1.5.6 Géométries auxétiques 3D	44
1.5.7 Propriétés et applications	45
1.6 Calculs vibroacoustiques	48
1.6.1 Introduction	48
1.6.2 Zone de Brillouin	50
1.6.3 Méthode de Floquet-Bloch	52
1.6.4 Méthode d'éléments finis ondulatoires	53
1.6.5 Méthode du Shifted Cell Operator	55
1.6.6 Méthodes utilisées	56
1.6.7 Comparaison des méthodes de calcul	56
2 Caractérisation matériau	59
2.1 Caractérisation mécanique des matériaux	59
2.1.1 Caractérisation statique : traction uniaxiale	59
2.1.2 Phénomènes dissipatifs	60
2.1.3 Caractérisation dynamique - DMA	61
2.2 Bancs d'essais	64
2.2.1 Traction-compression	64
2.2.2 DMA	64
2.3 Résultats de caractérisation d'élastomères	65

2.3.1	TPU 95A	65
2.3.2	Silicone	72
3	Architectures	79
3.1	Structures à résonateurs locaux	79
3.1.1	Modèles analytiques	79
3.1.2	Modèles de poutre unidimensionnelle	87
3.1.3	Modèles à résonateur flambé	93
3.2	Architectures auxétiques	101
3.2.1	Paramètres de calcul	102
3.2.2	Modèles rotatifs	102
3.2.3	Modèles chiraux	110
3.2.4	Modèles réentrants	111
3.2.5	Étude comparative	116
4	Simulations vibroacoustiques	119
4.1	Analyse paramétrique de la géométrie de référence	119
4.1.1	Définitions	119
4.1.2	Effet de l'épaisseur	121
4.1.3	Effet de longueur	122
4.1.4	Effet d'échelle	123
4.1.5	Effet des propriétés du matériau	124
4.2	Optimisation géométrique	126
4.2.1	Géométrie	126
4.2.2	Comparaison statique	127
4.2.3	Dynamique	129
4.3	Géométrie à inclusions	134
4.3.1	Géométrie	134
4.3.2	Comparaison statique	135
4.3.3	Dynamique	136
4.4	Validation sur structure finie	140
4.4.1	Géométrie	140
4.4.2	Comparaison statique	142
4.4.3	Dynamique	143
5	Validation expérimentale	145
5.1	Éprouvettes	145
5.1.1	Géométries	145
5.1.2	Fabrication d'éprouvettes en TPU	145
5.1.3	Fabrication d'éprouvettes en silicone	149
5.1.4	Fabrication d'éprouvettes à inclusions	150
5.2	Compression statique	151
5.2.1	Banc d'essais	151
5.2.2	Conditions d'essais	151
5.2.3	Résultats	152

5.2.4	Comparaison simulations essais	156
5.3	Tests dynamiques	158
5.3.1	Banc d'essais dynamiques	158
5.3.2	Conditions d'essais	160
5.3.3	Résultats T_3	161
5.3.4	Résultats S_{03}	163
5.3.5	Résultats S_{LR}	164
5.3.6	Comparaison $S_{03} - S_{LR}$	167
5.4	Corrélation simulations/essais dynamiques	168
5.4.1	Paramètres	168
5.4.2	Résultats T_3	168
5.4.3	Résultats S_{03}	170
5.4.4	Résultats S_{LR}	173
5.5	Corrélation d'images et étude de modes	175
5.5.1	Corrélation d'images	175
5.5.2	Étude de modes	176
Conclusion		179
A Fiche technique du TPU 95A		I
B Fiche technique du silicone		V
C Modèles analytiques de chaînes périodiques 1D		VII
C.1	Masses identiques	VII
C.2	Masse-et-masse	VIII
C.3	Masse-en-masse	X
D Définition des dimensions de la cellule réentrante		XIII
D.1	Épaisseur e_m constante	XIV
D.2	Masse m constante	XIV
E Paramètres d'impression du TPU 95A		XVII

Introduction

Pendant les décennies qui ont suivi l'invention de l'automobile, les constructeurs se sont principalement focalisés sur les performances des véhicules, domaine où tout restait à faire. À l'issue de multiples avancées technologiques, l'efficacité et le rendement des mécaniques se sont progressivement stabilisés et l'écart entre les différents constructeurs s'est réduit. Guidée, et parfois contrainte par les crises économiques, les préoccupations environnementales, et les choix politiques, l'industrie automobile s'est sans cesse renouvelée et améliorée pour atteindre son niveau actuel.

Aujourd'hui, la concurrence n'est plus tant déterminée par la puissance que par d'autres facteurs comme le design, la sécurité, l'impact écologique, les fonctionnalités électroniques, et le confort.

La vibroacoustique appartient à cette dernière catégorie. Bien qu'il soit relativement récent, le domaine de l'acoustique et tous les métiers qui le composent se sont rapidement imposés comme essentiels pour rester dans la course des constructeurs automobiles. À une époque, les voitures étaient tellement bruyantes que le confort sonore est rapidement devenu un argument de vente majeur. À cet argument s'ajoute aujourd'hui la réglementation, nécessaire devant le nombre toujours grandissant de véhicules terrestres. Celle-ci impose une diminution d'environ 3dB tous les dix ans. La première directive européenne date de 1970 et limitait le niveau sonore d'une voiture à 82dB. Au fil des directives, ce niveau est passé à 80dB (1984), 77dB(1988), 74dB (1995), et est limité depuis 2014 à 68dB.

Un exemple automobile d'avancée technologique souvent cité est le logo de Citroën. Il représente la forme des dentures d'engrenages imaginés par les créateurs de la marque. Auparavant les dentures étaient droites (le logo deviendrait alors un signe "égal"), mais les chocs lors des contacts entre dentures de deux roues engrenées produisaient beaucoup de bruit, notamment au vu du nombre d'engrenages dans un véhicule. André Citroën a alors eu l'idée, inspirée d'une roue en bois utilisée pour la minoterie, d'utiliser des dentures obliques. La denture oblique double (les deux branches du " \wedge ") sert quant à elle à annuler l'effort axial qu'aurait généré une denture oblique simple. C'est probablement une des premières technologies purement acoustiques, car elle n'offre pas d'avantage notable en termes de performance mécanique.

Parmi les autres technologies marquantes dans le domaine de l'acoustique, on peut également citer le pot d'échappement dont la variation de section contribue à réduire les modes acoustiques de tuyau.

La voiture électrique est aussi une révolution acoustique car avec la suppression de la quasi

totalité du bruit moteur, les voitures atteignent un niveau de silence inédit. Cependant, la suppression de ce bruit basses fréquences peut révéler d'autres composantes jusqu'ici cachées par le bruit moteur, notamment l'aérodynamique et le bruit de roulement, par phénomène de masquage.

Aujourd'hui, les performances vibratoires et acoustiques automobiles sont radicalement différentes de celles des premières voitures. Les principales sources de vibrations restent le moteur et la liaison au sol. La maîtrise vibratoire passe par des niveaux sonores faibles d'une part, mais aussi par des bruits agréables, sans aspérités. Les vibrations sont engendrées par des mécanismes internes, tels que pièces en mouvement (forces d'inertie et de contact) et forces motrices (pression de combustion, forces électromagnétiques).

La nature des signaux rencontrés, et donc des solutions possibles, varie selon la source. Une machine tournante générera des sollicitations périodiques et donc des fréquences pures. C'est le cas des engrenages d'une ligne de transmission automobile, par exemple. À l'inverse, la présence de turbulences fluides donnera un bruit large bande et aléatoire. Les impacts peuvent également générer des bruits transitoires difficiles à anticiper.

La vibroacoustique s'intéresse à la propagation d'ondes dans les structures, généralement afin de réduire les vibrations et le bruit générés. Dans cette optique, la méthode classique consiste à découpler les sources à l'aide de liaisons viscoélastiques (ressorts), généralement en caoutchouc, matière alliant bonne tenue statique et amortissement important. À très basses fréquences, sources, liaisons, et structures réceptrices vibrent en phase, comme un système unique. Au-delà d'une certaine fréquence, la mobilité de la source vue des liaisons élastiques dépasse celle de la structure réceptrice. Cette condition conduit généralement à spécifier une raideur dynamique d'accueil supérieure à la raideur des liaisons élastiques. La souplesse de ces dernières est limitée par :

- la nécessité d'assurer un bon fonctionnement de la source, c'est-à-dire de reprendre au travers des liaisons élastiques les efforts statiques ;
- l'apparition de modes de corps rigide en très basses fréquences qui ne doivent pas amplifier les sollicitations internes ni externes ;
- la durabilité des pièces souples sous sollicitations internes ou externes.

La figure 1 montre l'allure typique des raideurs des trois blocs prévus pour amortir les vibrations du moteur, dans leur direction principale respective. La cale droite est une cale hydrodynamique, ce qui explique la présence d'une résonance autour de 11Hz, liée à un pic d'amortissement ciblant un mode bien précis (figure 1a). Les deux autres cales sont des montages classiques en caoutchouc et aluminium. Exceptée la résonance de la cale droite, la raideur en basses fréquences est relativement stable. En revanche, la figure 1b montre nettement l'effet de rigidification du caoutchouc pour les plus hautes fréquences. À ces fréquences, les vibrations transmises ne sont pas ressenties par les usagers, mais couplées à d'autres éléments du véhicules, elles peuvent générer des nuisances sonores importantes. Concevoir des systèmes d'isolation dont la raideur dynamique reste faible peut donc être profitable. De plus on observe des pics de raideur sur les cales droite (270Hz) et anticouple (300Hz). Ces résonances ne sont pas dues au matériau mais à l'assemblage constituant la cale. Dans certaines

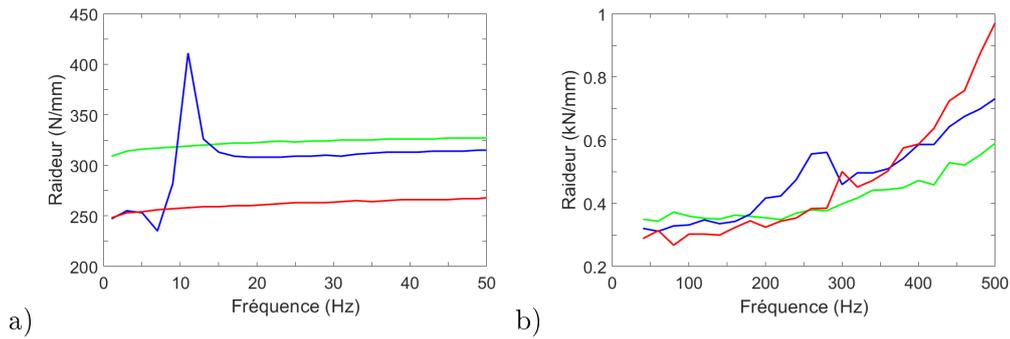


FIGURE 1 – Courbes de raideur de cales classiques d’isolation moteur pour les a) basses et b) moyennes fréquences. — Cale gauche, composante verticale, — cale droite, composante verticale, et — cale anticouple, composante longitudinale (repère véhicule).

configurations, il arrive qu’elles se produisent à des fréquences basses (autour de 100Hz), ce qui peut nuire au confort vibroacoustique dans le véhicule.

En résumé, les propriétés mécaniques recherchées pour concevoir un système d’isolation efficace sont les suivantes :

- une raideur statique suffisante pour assurer le fonctionnement du système sous une charge conséquente (e.g. la masse d’un moteur thermique automobile actuel est d’environ 500kg répartis inégalement entre trois ou quatre points d’appui) ;
- une raideur dynamique faible dès les basses fréquences ($\approx 20\text{Hz}$) sur une large plage de fréquence ;
- une bonne tenue en fatigue.

À ces propriétés cibles s’ajoutent les contraintes industrielles sévères du domaine automobile. Entre parenthèses sont indiquées les valeurs de référence des systèmes actuels :

- masse limitée ($\approx 2\text{kg}$) ;
- coût de fabrication réduit (quelques euros par pièce) ;
- encombrement minimal ($\approx 20 \times 20 \times 10\text{cm}^3$).

Ce travail tente de satisfaire au mieux ces différents critères en explorant le domaine des métamatériaux. Ce type de solutions étant fondamentalement différent des systèmes d’isolation actuels, le premier chapitre dresse un état de l’art des métamatériaux, afin d’en comprendre les mécanismes et les méthodes numériques permettant d’en calculer les performances. Le deuxième chapitre aborde les techniques de caractérisation des matériaux employées pendant cette thèse. Les essais mécaniques ainsi que les résultats permettent de définir les modèles matériaux utilisés par la suite. Dans le troisième chapitre, des calculs numériques appliqués à différentes architectures aident à mieux comprendre certains mécanismes des métamatériaux et à choisir le meilleur candidat vis-à-vis des propriétés ciblées. Celui-ci est approfondi dans le quatrième chapitre, à travers des études paramétriques statiques et dynamiques. Des

propositions d'améliorations géométriques sont proposées, y compris un métamatériau hybride aux propriétés supérieures. Afin de vérifier les résultats expérimentaux et d'acquérir une meilleure compréhension des mécanismes sous-jacents, le cinquième chapitre aborde finalement les essais expérimentaux effectués, l'analyse de leurs résultats, et leur confrontation avec les résultats numériques.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction aux métamatériaux

1.1.1 Définition

Le terme de métamatériaux reste aujourd'hui encore relativement vague, toutes les sources ne s'accordant pas nécessairement sur les caractéristiques et les limites de ce domaine. Étymologiquement, le préfixe "méta-" vient du mot grec pour "après", "au-delà". Au-delà des matériaux, donc. Le premier article à utiliser le terme "métamatériau" semble être Smith *et al.*[116]. Bien qu'il ne donne pas de définition précise, on comprend qu'il représente ainsi un milieu dont les propriétés effectives - en l'occurrence la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique - ne peuvent être observées dans des matériaux ordinaires. Cette description est aujourd'hui encore la plus courante, bien qu'elle soit somme toute très imprécise. Les métamatériaux sont plutôt définis par ce qu'ils ne sont pas, plutôt que par ce qu'ils sont.

Cummer [28], par exemple, décrit les métamatériaux comme des matériaux avec des propriétés sur commande, s'émancipant des limites imposées par la nature. En acoustique/élastodynamique, la plupart des métamatériaux utilisent le principe de résonance pour obtenir ces propriétés exotiques, mais ce n'est pas nécessairement le cas. De même, si bon nombre d'entre eux présente un caractère périodique, d'autres adoptent plutôt des géométries à gradient, ou des géométries fractales. Kim *et al.* ont posé les bases d'une définition rigoureuse des métamatériaux, notamment sur leurs propriétés de causalité, de réciprocité, et en termes de réseau ondulatoire [53]. Certains auteurs vont jusqu'à inclure les cristaux phononiques dans la catégorie, alors que la plupart les mettent plutôt en opposition.

En résumé, certaines caractéristiques communes peuvent être tirées de la littérature pour avoir une idée générale de ce qu'est un métamatériau :

- il s'agit d'un matériau structuré ;
- au moins deux échelles peuvent être distinguées : une échelle "microscopique" où des phénomènes locaux prennent place et donnent lieu aux propriétés effectives exotiques mesurables à l'échelle "macroscopique" globale ;
- ces phénomènes affectent les propriétés ondulatoires, et donc le comportement dynamique, du matériau ;

- les propriétés globales sont limitées à des plages de fréquences, dont les frontières s'affranchissent de la limite de Bragg.

Le dernier critère exclue les cristaux phononiques, décrits au paragraphe 1.2, de la catégorie des métamatériaux, parti subjectif que nous prendrons donc ici.

1.1.2 Genèse

Le point de départ des métamatériaux électromagnétiques et par extension, des métamatériaux de manière générale, est généralement attribué à un physicien russe en 1967, Viktor Veselago [119], bien que d'autres chercheurs russes semblent avoir abordé le sujet antérieurement [47]. À l'époque, Veselago partit de l'équation de dispersion d'ondes électromagnétiques dans un milieu isotrope :

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2, \quad (1.1)$$

avec κ le nombre d'onde, ω la pulsation, c la vitesse de propagation des ondes dans le milieu, et où l'indice de réfraction s'exprime selon

$$n^2 = \varepsilon\mu, \quad (1.2)$$

avec ε et μ les deux variables fondamentales de l'électromagnétisme, à savoir la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique, respectivement. Rappelons qu'elles caractérisent les équations d'onde électromagnétique, dont les expressions de propagation dans le vide sont :

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (1.3)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (1.4)$$

où \vec{E} et \vec{H} désignent respectivement les champs électrique et magnétique, et où Δ est l'opérateur laplacien.

Veselago remarqua que le changement de signe simultané de ε et de μ n'affecte pas les équations 1.1 et 1.2. Il s'interrogea alors sur les caractéristiques de matériaux qui présenteraient des valeurs négatives de ces propriétés.

D'après ses calculs, un tel milieu - dit "main gauche" car la direction des vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{H} , et $\boldsymbol{\kappa}$ s'obtiendrait visuellement sur la main gauche, et non sur la droite comme dans le cas général - donnerait ainsi lieu à des phénomènes non conventionnels, comme un effet Doppler inverse - la fréquence reçue par un capteur en mouvement serait plus basse que la fréquence d'émission, un effet Cerenkov inverse - le cône de radiation émis par une particule se déplaçant à une vitesse supérieure à celle de la lumière sera dirigé vers l'arrière par rapport au sens de déplacement, ou encore un indice de réfraction négatif. En particulier si $n = -1$, la réfraction se ferait sans réflexion, d'où la possibilité de concevoir des lentilles "parfaites", sans pertes, ou même des lentilles plates.

Bien qu'à l'époque, les plasmas étaient déjà connus pour exhiber une permittivité négative en dessous de la fréquence de plasma, il n'existait pas de matériau présentant des valeurs négatives de perméabilité. Veselago ne put donc pas vérifier expérimentalement ses conclusions

et son article passa inaperçu.

Il fallut attendre une trentaine d'années pour qu'une structure en "split-ring resonators" (ou *SRR*, soit "résonateurs en anneaux fendus", voir figure 1.1b) à perméabilité négative fasse son apparition grâce à John Pendry [90], peu après qu'il eût proposé une structure "en métal dilué" (figure 1.1a) conçue en fils très fins ($\varnothing \approx \mu m$) de tungstène couverts d'or qui présentait une permittivité négative similaire aux plasmas mais à bien plus basses fréquences (de l'ordre du *GHz*) [91, 89].

Immédiatement après, Smith *et al.* donnèrent vie aux théories de Veselago en combinant les deux structures de Pendry pour obtenir des valeurs simultanément négatives de ϵ et de μ , c'est-à-dire un indice de réfraction négatif, pour des ondes de fréquence $4.845GHz$ [116].

L'article de Smith *et al.* manquait cependant d'application pratique, et l'engouement général pour les métamatériaux électromagnétiques ne se manifesta qu'avec l'étude théorique par Pendry d'une lentille parfaite ayant un indice de réfraction négatif (figure 1.1c). Alors qu'une lentille classique ne rectifie que la phase des ondes propagatives incidentes afin de les focaliser en un point, une telle "superlentille" rectifie également l'amplitude des ondes évanescentes, de sorte que rien ne s'oppose à la reconstitution intégrale de l'image observée. La résolution s'en trouve sensiblement améliorée, leurs simulations donnant une valeur de quelques nanomètres, avec une lentille sous forme de fine lamelle d'argent [88]. Bien qu'une étude ultérieure ait démontré l'infaisabilité d'une lentille parfaite - la condition $\epsilon = \mu = n = -1$ enfreignant une loi fondamentale de l'électrodynamisme - une configuration proche peut exister et offrir une avancée considérable dans le domaine de l'optique [75].

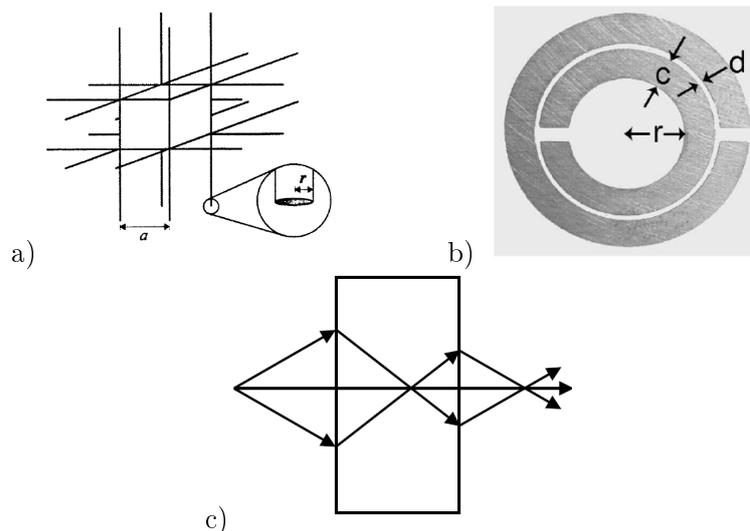


FIGURE 1.1 – Premiers métamatériaux électromagnétiques avec a) le réseau métallique [89], b) les SRR [116], et c) la lentille parfaite de Pendry [88].

Mis à part l'obtention de lentilles à focalisation de source sub-longueur d'onde, les matériaux à double négativité sont applicables pour des guides d'ondes, des modulateurs et des filtres passe-bande [109]. L'application la plus retentissante des métamatériaux est certainement la

cape d'invisibilité. Dès 2006, Schurig propose un concept de cape passive bidimensionnelle fondé sur un réseau de SRR, dont le gradient oblige les ondes - autour de la fréquence de résonance - à contourner l'aire intérieure de la cape [105]. Tout objet placé à l'intérieur de cette aire ne provoquerait aucune diffraction, et serait donc "invisible" à la fréquence prévue (figure 1.2).

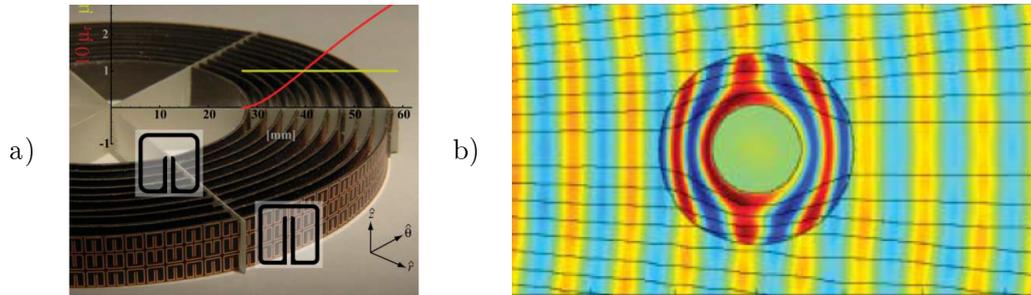


FIGURE 1.2 – Cape d'invisibilité électromagnétique de Schurig. a) Réseau de SRR à gradient constituant la cape. b) Champ électromagnétique théorique obtenu par simulations avec propriétés électromagnétiques idéales. Les ondes incidentes (venant de la gauche) sont très peu diffusées par la cape. Figures issues de [105].

Pour élargir l'éventail de possibilités des métamatériaux, le principal objectif fut, et est aujourd'hui encore, d'étendre la plage de fréquences pouvant être contrôlées par les métamatériaux. Un intérêt évident est d'atteindre le domaine visible, c'est-à-dire de l'ordre de $10^{14} - 10^{15} \text{ Hz}$. Des articles ont par exemple proposé des absorbeurs [85] et des capes [37] opérant à des fréquences optiques.

1.2 Cristaux phononiques

Les cristaux phononiques/photoniques sont des structures périodiques artificielles qui s'inspirent du modèle des réseaux cristallins à l'échelle atomique, en le transposant à notre échelle (macro, micro, nano). Elles sont généralement composées de deux phases (solides et/ou fluides) : une pour les inclusions ("atomes") et une autre pour la matrice ("vide interatomique"), comme présenté sur la figure 1.3. Ces différentes phases ont généralement des propriétés - telles que modules élastiques (i.e. vitesse de propagation des ondes) et/ou masses volumiques pour les ondes élastiques, indice de réfraction pour les ondes électromagnétiques - très contrastées, ce qui favorise la diffraction de Bragg [68].

Ce phénomène a été mis en évidence par le miroir de Bragg, qui consiste en un empilement alterné de deux matériaux d'indices de réfraction différents, et qui n'est autre qu'un cristal photonique unidimensionnel. En pénétrant dans cette structure, certaines ondes, dont la fréquence correspond à la longueur d'onde dite de Bragg, seront fortement réfléchies, formant ainsi des bandes fréquentielles où les ondes ne peuvent pas se propager, appelées bandes interdites ou bandgaps, en se plaçant du point de vue de la transmission. Les indices optiques et les épaisseurs de couches déterminent alors les fréquences affectées, tandis que le coefficient de réflexion augmente exponentiellement avec le nombre de paires de couches successives. Bien que ce système doive son nom à William Lawrence Bragg, physicien australien

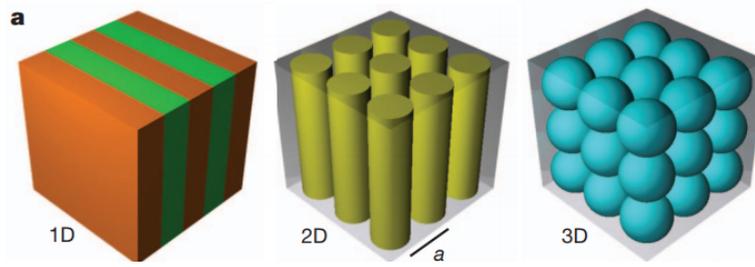


FIGURE 1.3 – Exemple de structures phononiques simples 1D (gauche), 2D (milieu) et 3D (droite). Issue de [70].

du XXème siècle, les premières observations sur une telle structure remontent aux travaux de Lord Rayleigh en 1887.

À l’instar des électrons qui ne peuvent occuper que certaines bandes d’énergie dans les matériaux semi-conducteurs [54], la diffraction de Bragg permet donc l’apparition de bandes interdites, grâce aux interférences destructives entre les multiples ondes réfléchies aux interfaces du cristal. Ces bandes, et la grande variété de configurations possibles, font des cristaux phononiques/photoniques des candidats potentiels comme filtres, isolants, guides d’ondes, lentilles, avec des applications envisageables dans de nombreux domaines. L’article de Maldovan *et al.* synthétise très bien les différentes applications offertes par la phononique [70].

1.3 Métamatériaux acoustiques

Bien qu’apparus après leurs équivalents électromagnétiques, les métamatériaux acoustiques présentent l’avantage d’avoir des effets intéressants à des échelles plus grandes, donc plus accessibles, qu’en électromagnétique et des applications inédites ont pu voir le jour grâce à l’acoustique.

L’équation d’onde s’applique aussi bien à l’électromagnétisme (voir équation 1.3) qu’à l’acoustique, raison pour laquelle la transposition entre les deux domaines est si courante. L’équation d’onde acoustique est :

$$\Delta P - \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

avec P la pression. Les paramètres constitutifs de l’acoustique sont le module de compressibilité isostatique K et la masse volumique ρ . La masse volumique et le module de compressibilité remplacent donc la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique, respectivement, et tout comme eux, ils peuvent devenir négatifs, simultanément ou non, donnant ainsi lieu à différentes applications potentielles.

La première conception d’un métamatériau acoustique est attribuée à Liu *et al.* pour un réseau tridimensionnel de billes de plomb enrobées de silicone, le tout enchâssé dans une matrice en polymère époxyde. La résonance de ces billes entraîne un module élastique effectif négatif sur des plages limitées de fréquence, associé à une chute de transmissibilité [66].

Un cas simple pour illustrer ces propriétés négatives est la propagation d'ondes unidirectionnelles dans un tube (figure 1.4). Si des membranes sont ajoutées périodiquement, celles-ci vibreront en opposition de phase pour des fréquences inférieures à leur fréquence de résonance, générant ainsi une force de direction inverse à celle de l'excitation. La masse volumique équivalente obtenue est alors négative. Au-delà de leur fréquence de résonance, les membranes vibrent en phase avec l'onde incidente, et la masse volumique devient positive [59].

Si on remplace chaque membrane par un tube ouvert radialement dans la paroi, un module de compressibilité négatif est obtenu pour les fréquences inférieures à une fréquence caractéristique dépendante des dimensions du tube ouvert et des propriétés du milieu, appelée taux d'échappement. En effet, en dessous de cette fréquence, la surpression de l'onde peut s'échapper par le tube ouvert, et la propagation ne peut s'accomplir. En revanche, peu d'air s'échappe pour des cycles de fréquences supérieures au taux d'échappement, le module de compressibilité devient alors positif, et la propagation est rétablie [60]. Le même comportement peut être observé en remplaçant les tubes ouverts par des résonateurs de Helmholtz. Le domaine de compressibilité négative est alors limité à une plage fréquentielle débutant à la fréquence de résonance des résonateurs [58].

Au vu de ces deux mécanismes, il est possible de les combiner pour obtenir une double négativité simultanée sur une certaine plage fréquentielle. On obtient alors une vitesse de phase négative [58]. Ce type de systèmes, où le milieu même de propagation est modifié pour observer des propriétés exotiques, est appelé ligne de transmission.

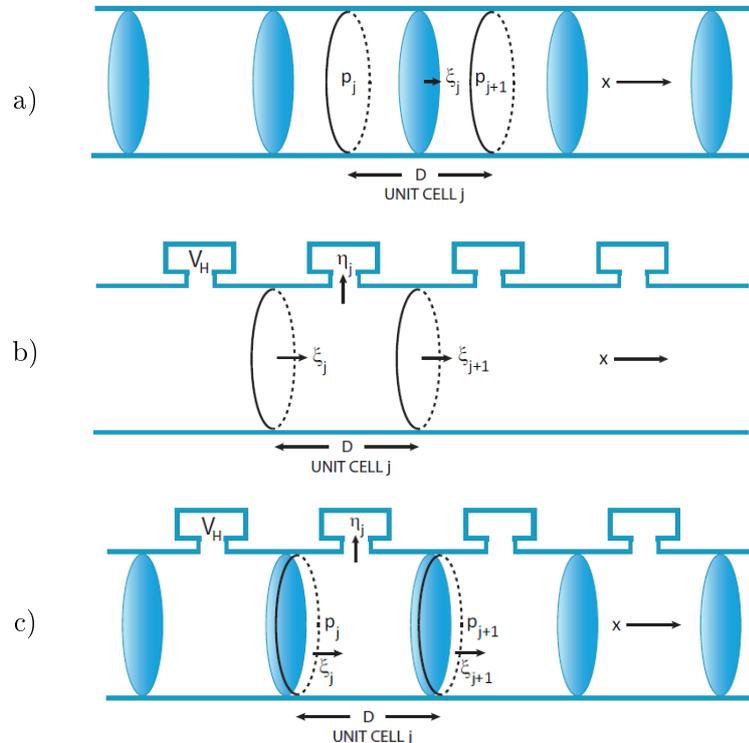


FIGURE 1.4 – Concept de ligne de transmission acoustique permettant d'obtenir a) $\rho < 0$, b) $B < 0$, et c) $\rho < 0$ et $B < 0$ simultanément. Issu de [58].

Pour maîtriser le bruit rayonné par une source, d'autres solutions, parfois appelées métasur-

faces [28], préfèrent agir sur les surfaces de réflexion de ce bruit. On distingue plusieurs types de designs, certains se basant sur des cavités résonantes de type résonateur quart d'onde, ou résonateur de Helmholtz. Ces résonateurs sont connus pour atténuer un bruit tonal indésirable mais sont inefficaces en dehors de la fréquence choisie. En créant une surface périodique dont chaque cellule est composée d'un résonateur, des plages de fréquences où la masse volumique effective est négative peuvent apparaître. Les fréquences atteintes étant directement dépendantes des dimensions des résonateurs, des astuces géométriques sont souvent utilisées pour atteindre des fréquences plus basses tout en conservant la compacité du métamatériau [17].

D'autres designs utilisent des réseaux de membranes dans la même optique. Un avantage des membranes est qu'elles peuvent présenter plusieurs modes de résonances, soit autant de bandgaps. Le principe peut être amélioré par l'ajout de masses disposées sur les membranes comme l'a montré l'équipe de Ping Sheng [76]. Si beaucoup de ces solutions visent à atténuer les réflexions acoustiques, voire absorber l'énergie acoustique, d'autres cherchent plutôt à maîtriser la directivité de ces réflexions, avec par exemple un design à gradient d'indice.

Le principe de tube enroulé est aussi utilisé pour la propagation, où des matériaux labyrinthiques peuvent ralentir considérablement la vitesse de propagation de l'onde, et également, via des résonances de type Bragg, donner lieu à une double négativité caractérisée par une vitesse de phase négative. Ce comportement induit notamment un coefficient de réflexion négatif, utilisé pour des applications de guidage d'onde, de superlentilles et d'hyperlentilles, reprenant le concept de lentille de John Pendry, transposé à l'acoustique [62]. Une illustration de divers métamatériaux acoustiques est donnée en figure 1.5.

Les "capes d'invisibilité" ont également été transposées avec succès de l'électromagnétisme aux ondes acoustiques, thermiques et élastiques. Bien qu'une multitude de méthodes existent comme la méthode de transformation, le tapis d'invisibilité, ou encore les méthodes par annulation de diffusion, l'objectif reste le même : rétablir le champ ondulatoire pour qu'il ne soit pas modifié par la présence d'un objet à camoufler. Si ces méthodes permettent théoriquement d'atteindre cet objectif, plusieurs problèmes restent à résoudre pour obtenir une solution expérimentale parfaite. Notamment, les diffusions résiduelles, le manque de robustesse, et les domaines fréquentiels réduits figurent parmi les problèmes les plus récurrents [86].

Toutes les structures présentées jusqu'ici sont dites passives car elles ne nécessitent aucun apport extérieur d'énergie pour fonctionner. D'autres solutions appelées actives utilisent une source d'énergie externe pour obtenir ou améliorer les propriétés ciblées. Généralement ces solutions sont réalisées en mesurant la réponse à contrôler, puis en appliquant à ce signal un gain arbitraire avant de le réinjecter dans le milieu. En acoustique, beaucoup de concepts actifs sont des arrangements périodiques de haut-parleurs car la membrane de ceux-ci permet simultanément de transformer la pression acoustique incidente en signal électrique et de générer une pression en lui imposant un signal. Les métamatériaux actifs offrent des propriétés étendues et facilement réglables en agissant sur le gain appliqué plutôt que sur la géométrie même, comme dans le cas des métamatériaux passifs. On peut notamment définir un gradient spatial de propriétés. Diodes acoustiques [92], imagerie acoustique [93], et acoustique

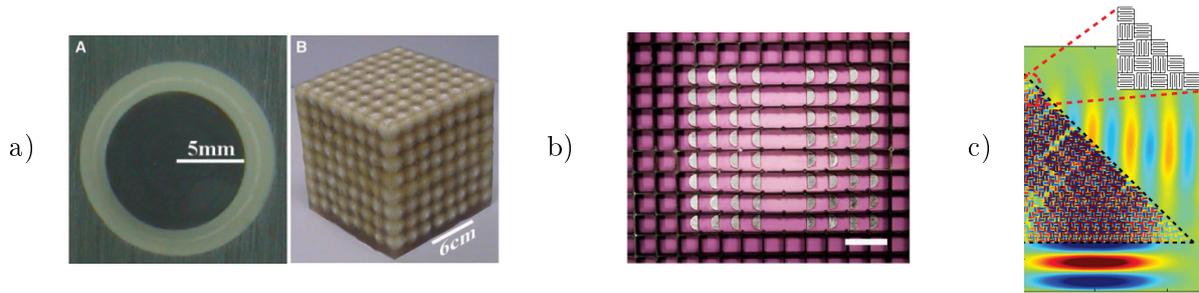


FIGURE 1.5 – Exemples de métamatériaux acoustiques. a) (A) Vue en coupe d'un résonateur de Liu *et al.*, cellule constitutive de leur (B) "cristal sonique" pour l'isolation acoustique [66]. b) Membranes pondérées comme métasurface absorbante [76]. c) Guidage d'ondes par un réseau de tubes enroulés. L'encart montre la microstructure agrandie de quelques cellules [62].

des salles sont quelques exemples d'applications possibles.

1.4 Métamatériaux mécaniques

Les métamatériaux mécaniques diffèrent de leurs équivalents électromagnétiques, acoustiques, et thermodynamiques par leur diversité et leurs mécanismes originaux. Cela est notamment dû au fait que, contrairement aux fluides, où seules les ondes longitudinales se propagent, les solides supportent le cisaillement ce qui engendre les ondes transverses, et donc une plus grande richesse modale. De plus, si les propriétés exotiques des systèmes décrits précédemment sont uniquement dynamiques, les métamatériaux mécaniques peuvent également donner lieu à des propriétés statiques améliorées, souvent couplées à des comportements dynamiques exotiques. Bien que cela soit contradictoire avec la définition donnée en 1.1.1, beaucoup d'articles admettent ces structures dans la classe des métamatériaux.

Par exemple, l'agencement périodique de cellules constituées de poutres minces peut donner des structures de masses volumiques très faibles mais présentant une raideur équivalente importante. Le rapport de ces deux grandeurs est alors meilleur que pour des matériaux homogènes. D'autres systèmes montrent les avantages d'une raideur négative pour l'isolation vibratoire. Cette propriété peut être obtenue de différentes manières, que ce soit par poutre flambée [51, 33], par des systèmes à ressort non linéaire [19, 108], par des inclusions masse-ressort-amortisseur [25], ou encore par des patches piézoélectriques [67].

Les structures pentamodes sont aussi fascinantes par leur comportement statique semblable à celui d'un liquide, c'est-à-dire qui ne supporte pas de cisaillement mais avec un module de compressibilité isostatique B important. Strictement parlant, toutes les valeurs propres de leur tenseur d'élasticité équivalent sont nulles sauf une, égale à B . Cela entraîne notamment des modules de compression simple E et de cisaillement G nuls. Des designs de structures pentamodes et de leurs équivalents 2D - appelés bimodes - ont été proposés indépendamment par Sigmund [113] et par Milton et Cherkaev [77], sous forme d'assemblage de poutres articulées entre elles. Si les contacts y sont ponctuels, leur réalisation pratique nécessite cependant des contacts de dimensions finies, ce qui donne des modules de compression et de cisaille-

ment non nuls. Grâce à l'impression par lithographie, Bückmann *et al.* ont ainsi montré la faisabilité de ce type de structure avec un rapport B/G supérieur à 10^3 , avec une application comme cape "d'intouchabilité" [15] (figure 1.6a). Quant aux matériaux auxétiques, détaillés par la suite, ils se définissent par un coefficient de Poisson négatif, rarement observé dans des matériaux naturels.

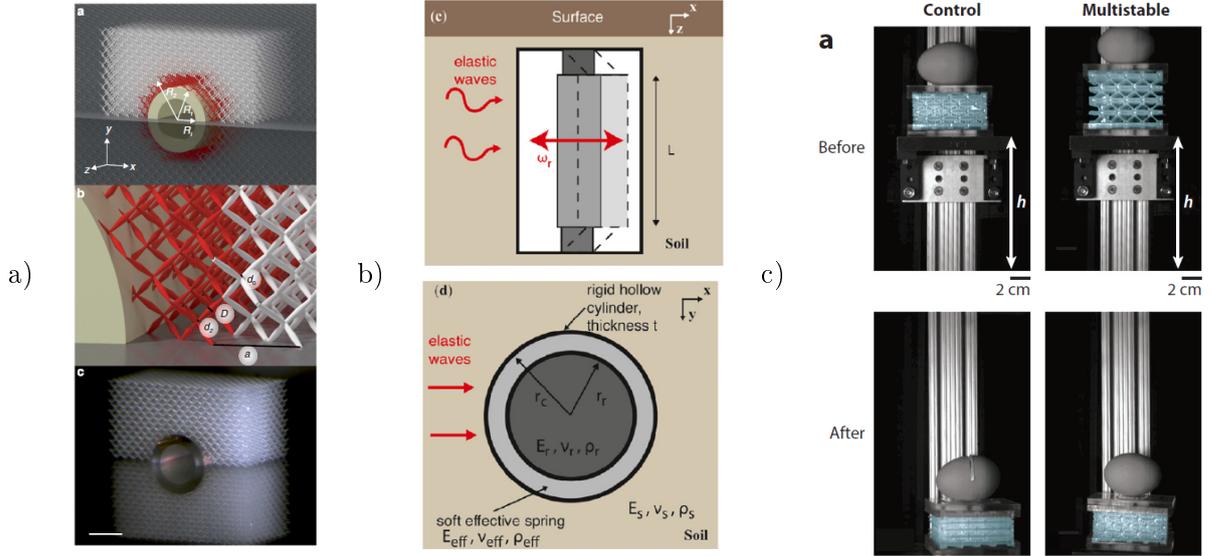


FIGURE 1.6 – Exemples de métamatériaux mécaniques. a) Structure pentamode constituant une cape d'intouchabilité [15]. b) Cellule à masse résonante pour la protection sismique de bâtiments [55]. c) Essai d'absorption de choc lors d'une chute d'un métamatériau multistable avec un oeuf fixé dessus : l'oeuf se brise sur la structure de contrôle (à gauche) mais reste intact sur la structure multistable (à droite) [107].

Comme pour les métamatériaux acoustiques, on trouve souvent dans la littérature des mécanismes de résonance pour obtenir des propriétés dynamiques négatives (figure 1.6b). Ces propriétés comprennent toujours la masse volumique ρ et le module de compressibilité B mais également le module de cisaillement G propre aux ondes solidiennes. On peut donc observer des métamatériaux mécaniques avec une masse volumique négative [78, 71], un module de compressibilité négatif, un module de cisaillement négatif [126, 129], voire B et ρ simultanément négatifs, ou G et ρ simultanément négatifs.

La notion de propriété négative peut être difficile à appréhender, mais des exemples simples permettent de comprendre l'approche qui aboutit à de telles propriétés. Le modèle le plus simple est probablement le système masse-ressort 1D de masse m et de raideur k (voir figure 1.7a). Considérons un tel système soumis à un effort harmonique $F = \bar{F}e^{-i\omega t}$, d'amplitude \bar{F} et de pulsation ω . L'équation de mouvement décrivant le système se résume à $F = m\ddot{u} + ku$ soit $\bar{F} = (-\omega^2 m + k)\bar{u}$ en considérant le déplacement harmonique $u = \bar{u}e^{-i\omega t}$. Soit encore $\frac{\bar{F}}{\bar{u}} = k - \omega^2 m = m(\omega_0^2 - \omega^2)$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ appelé pulsation propre du système. La force vue par la structure réceptrice étant opposée à celle vue par la masse ($F_r = -F$), on en déduit $\frac{\bar{F}_r}{\bar{u}} = m(\omega^2 - \omega_0^2)$. Hors, d'après le principe fondamental de la dynamique, $\frac{\bar{F}_r}{\bar{u}} = -\omega^2 M$. On peut donc en déduire une masse effective M dépendante de la fréquence,

décrivant le comportement dynamique du système :

$$M = m \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)$$

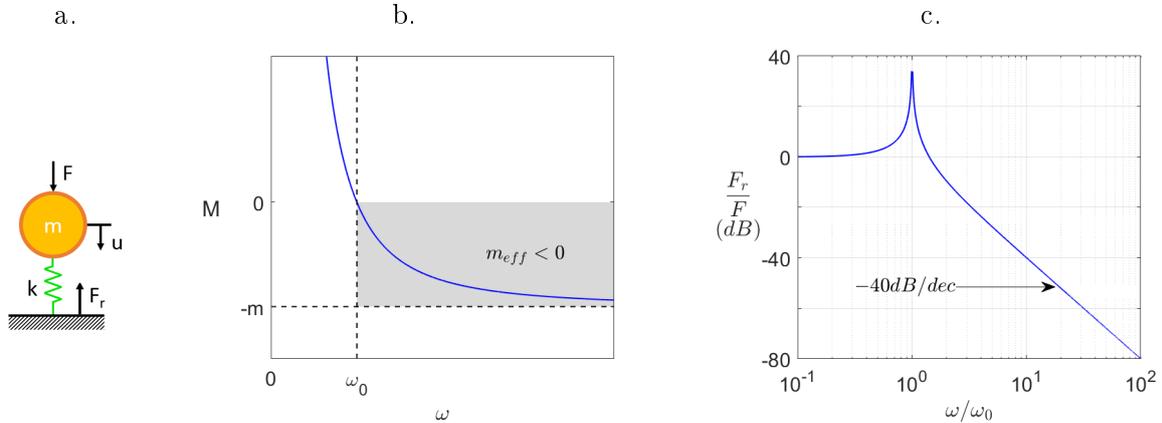


FIGURE 1.7 – Modèle de masse effective d'un système masse-ressort. a) Schéma. b) Comportement analytique fréquentiel de la masse effective et c) fonction de transfert du système.

L'allure de cette masse en fonction de la fréquence est décrite sur la figure 1.7b). À basses fréquences, le comportement du système est principalement régi par la raideur du ressort et la masse effective est positive. Mais après la fréquence de résonance, c'est-à-dire pour $\omega > \omega_0$, le système vibre en opposition de phase par rapport à l'impulsion, et la masse effective devient alors négative. Au vu de la fonction de transfert des efforts entrants et sortants, $M < 0$ est associée à une perte de transmission à hauteur de $40dB$ par décade, en excluant l'effet transitoire autour de la fréquence de résonance.

Un modèle similaire pourrait également être appliqué aux modules de compressibilité et de cisaillement effectifs [58].

Un réseau de cylindres souples dans une matrice rigide est un autre exemple simple pour comprendre les diverses propriétés mécaniques négatives. Sous l'effet d'ondes incidentes, les cylindres vont entrer en résonance. Plusieurs modes peuvent alors être distingués, les trois premiers (voir figure 1.8) correspondant à des comportements monopolaire (contraction/expansion globale sans déplacement du centre de gravité), dipolaire (déplacement uniaxiale du centre de gravité), et quadrupolaire (contractions/expansions longitudinale et transversale en opposition de phase). Lors de sa résonance, chacun de ces modes est susceptible de rendre négative une des trois propriétés mécaniques précédemment citées : le mode monopolaire engendrera un module de compressibilité effectif B négatif, le mode dipolaire entraînera une masse volumique ρ négatif, et le mode quadrupolaire sera associé à un module de cisaillement G négatif.

Lorsque B et ρ sont simultanément négatifs, cela donne comme en acoustique un coefficient de réfraction et une vitesse de phase négatifs [31]. La combinaison $G < 0$ et $\rho < 0$ est plus originale car elle provoque en plus une conversion de mode à la frontière entre le métamatériau à

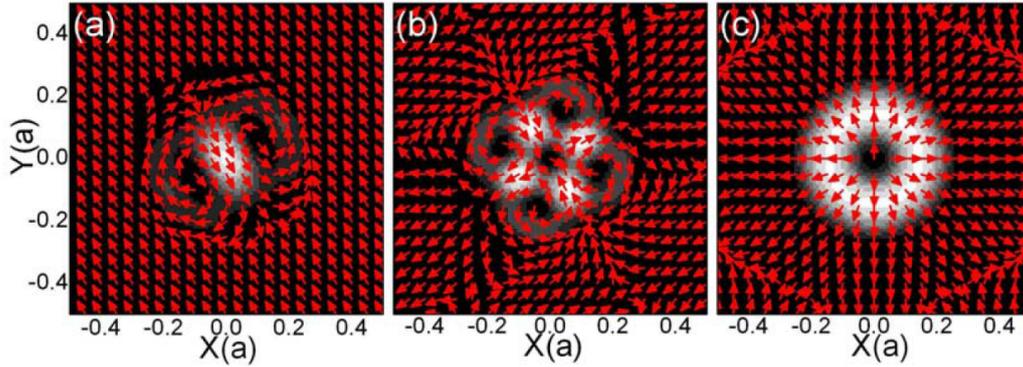


FIGURE 1.8 – Résonances d'un cylindre souple dans une matrice rigide, associées à des comportements a) dipolaire, b) quadrupolaire, et c) monopolaire. Les flèches indiquent la direction des déplacements, dont l'amplitude est représentée par la luminosité. Issu de [126].

double négativité et un matériau classique : une onde transverse sera non seulement réfractée avec un coefficient négatif, mais sera également partiellement convertie en onde longitudinale [127].

À l'instar de l'acoustique, les métamatériaux actifs s'appliquent également aux ondes mécaniques. De nombreuses solutions actives se basent cette fois sur la piézoélectricité. Les patches piézoélectriques peuvent en effet jouer le rôle des haut-parleurs en acoustique : toute déformation du patch générera un signal électrique (piézoélectricité directe) et l'application d'un potentiel électrique entraînera une déformation (c'est la piézoélectricité réciproque). La boucle de contrôle est effectuée grâce à ces deux phénomènes, de manière similaire au cas acoustique. Certains papiers montrent ainsi l'intérêt de réseaux de patches pour le guidage d'onde [20] et pour l'absorption vibratoire [1]. D'autres phénomènes physiques ont démontré un intérêt pour améliorer l'adaptativité des performances des métamatériaux. Par exemple, les bandes interdites phononiques peuvent être réglées grâce au piézomagnétisme [122], à la magnétostriction [96], ou à la température [52].

On peut également mentionner les métamatériaux bistables, ou plus généralement multistables. Les structures bistables (resp. multistables) sont caractérisés par deux (resp. plusieurs) positions stables. Plus strictement, leur courbe d'énergie de déformation présente deux minima locaux séparés par un maximum local constituant une position métastable. De telles structures sont intéressantes d'un point de vue énergétique. D'une part, une structure multistable ne nécessite aucune énergie pour se maintenir dans chacune de ses configurations géométriques stables, ce qui est particulièrement utile pour concevoir des systèmes déployables [94] avec des applications dans la robotique [22] ou l'aérospatiale [24]. D'autre part, la transition entre deux positions stables s'accompagne de stockage et de dissipation d'énergie ce qui fait des structures métastables des candidats prometteurs comme absorbeurs de chocs légers et réutilisables (figure 1.6c) [107, 40].

1.5 Matériaux auxétiques

1.5.1 Introduction

Le coefficient de Poisson ν caractérise le taux de contraction transversale, lors de l'étirement longitudinal d'un matériau. Sa formule est :

$$\nu = -\frac{\text{déformation transversale}}{\text{déformation longitudinale}} = -\frac{\Delta l_t}{l_t} / \frac{\Delta l_l}{l_l} \quad (1.6)$$

où l_t et l_l correspondent aux longueurs transversale et longitudinale, respectivement.

Pour la plupart des matériaux naturels, ce coefficient est positif (la section diminue quand le matériau s'allonge), compris entre 0 (liège) et 0.5 (caoutchouc), cette limite maximale étant associée aux matériaux incompressibles.

Mais certains matériaux peuvent avoir un coefficient négatif (ils se dilatent en traction et se condensent en compression) comme certaines mousses, macrostructures, et structures moléculaires. On les appelle alors "matériaux auxétiques", ce terme - provenant du grec *αυξητικός* [auxetikos] soit "augmentatif" - ayant vraisemblablement été introduit par Evans en 1991 [38].

L'auxétisme provient généralement d'une structuration particulière de la matière, donnant naissance à un phénomène de "dépliage", lors d'une traction. Ce phénomène peut intervenir au niveau moléculaire, microscopique, ou macroscopique. Une simple feuille de papier froissée en boule peut avoir un comportement auxétique : en tirant sur deux points opposés, sa dimension augmentera vraisemblablement dans une ou plusieurs directions transverses, dans une certaine limite. Ce n'est pas la matière elle-même qui s'expand, mais comme la fraction de vide (ou d'air) par rapport à la matière peut varier librement, le système peut s'allonger dans plusieurs directions simultanément. Tout comme les métamatériaux, l'auxétisme impose d'adopter un point de vue "effectif", où le coefficient de Poisson calculé n'est pas appliqué au matériau constitutif, mais aux dimensions globales d'un système hétérogène.

Ce n'est pas un comportement très commun, et il ne manque pas de fasciner dès lors qu'on en voit l'expression. La marque de jouet Hoberman l'a bien compris, et est devenu célèbre pour ses jeux aux mécanismes exotiques (voir figure 1.9), dont plusieurs se révèlent être auxétiques, comme le "Twist'O" et la "Transforming Sphere" qui a fait le succès de la marque [46].

Bien que des mousses et certains polymères présentent un caractère auxétique [3], ils ne rentrent pas dans le champ d'étude de cette thèse. Seules certaines architectures d'intérêt sont donc décrites ici.

1.5.2 Réentrance

Une des premières architectures auxétiques apparues, attribuée à Masters et Evans [73], fut réentrante. Elle est inspirée des structures de type nid-d'abeille : si ces dernières sont généralement constituées de cellules hexagonales régulières, c'est-à-dire $\theta = 30^\circ$ (figure 1.10), cet angle peut être modifié sans affecter l'aspect périodique du matériau. Dès que θ devient

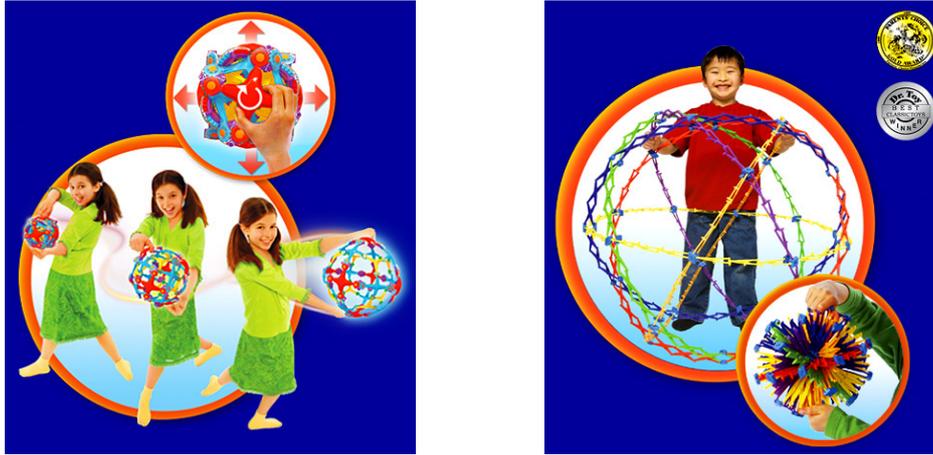


FIGURE 1.9 – Exemples de jouets auxétiques vendus par la société Hoberman : le "Twist'OTM" (à gauche), et la "Transforming SphereTM" (à droite).

négatif, on observe un comportement auxétique du matériau.

La figure 1.10 montre la géométrie d'une cellule de Evans, et le mécanisme auxétique en jeu.

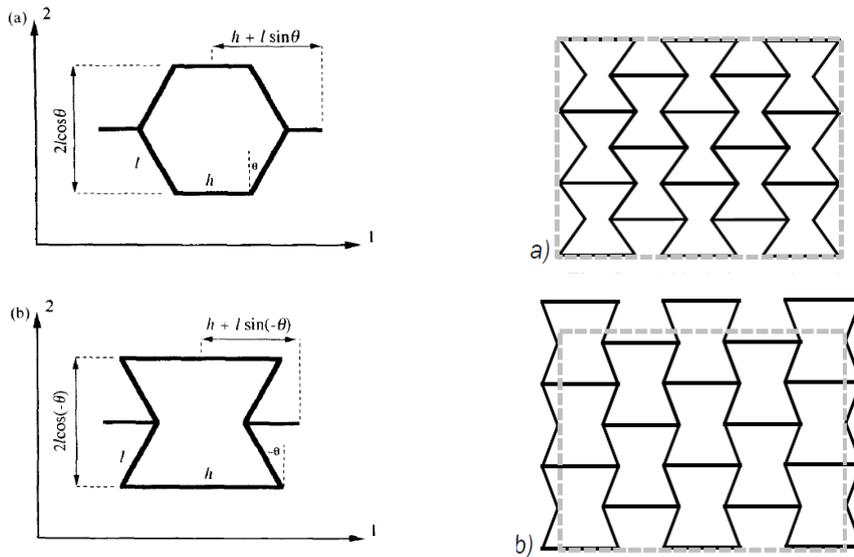


FIGURE 1.10 – À gauche : géométrie et paramètres de cellules (a) hexagonal et (b) rééminente [73]. À droite : mécanisme d'articulation à l'origine du comportement auxétique : structure (a) initiale et (b) sous traction [87].

Si ce dernier est basé sur le rotulage libre de poutres rigides entre elles, les mécanismes réels reposent plutôt sur la flexion des poutre, à cause de la raideur des jonctions. Des cellules composites avec des jonctions souples et des poutres rigides permettent de mieux s'approcher du comportement initial [102].

Ces géométries ont été étudiées en profondeur, aussi bien pour leurs propriétés élastiques statiques [73], leurs propriétés de directionnalité [100, 97], ou encore de dispersion des ondes en flexion [97].

1.5.3 Chiralité

La chiralité - mot dérivé du grec $\chi\acute{\epsilon}\rho\iota$ [cheri] : la main - désigne une propriété d'asymétrie présente dans diverses branches de la science, comme la chimie, les mathématiques, ou la physique.

Un objet chiral n'est pas superposable à son symétrique par rapport à un plan. L'exemple classique, et qui est à l'origine du terme, est celui des mains : on ne peut pas superposer sa main gauche à sa main droite, bien que l'une soit l'image miroir de l'autre. Par la suite on appellera motif "main gauche" le motif initial, et motif "main droite" son image miroir.

Dans le contexte des matériaux architecturés, de nombreuses géométries auxétiques chirales ont vu le jour et sont toutes conçues, en 2D, sur le même principe : un réseau périodique de formes géométriques simples (généralement des cercles) reliées entre elles par des ligaments tangents à ces formes. Inspirés de concepts moléculaires avancés par Wojciechowski [125, 118, 65], le premier papier montrant une telle géométrie en mécanique semble être celui de Lakes, avec un motif hexachiral. Il y donne les conditions nécessaires pour obtenir une structure chirale auxétique, à savoir des degrés de liberté en rotation associés à une forces non-centrale ou à une déformation non-affine [56]. Un autre article fondateur en la matière est celui de Sigmund *et al.*[114], dans lequel une méthode d'optimisation topologique 3D est appliquée à la conception d'hydrophones piézoélectriques. La finalité est d'améliorer la sensibilité des hydrophones, c'est-à-dire augmenter le coefficient de couplage hydrostatique $d_h^{(*)} = d_{33}^{(*)} + 2d_{13}^{(*)}$. Or $d_{33}^{(*)}$ et $d_{13}^{(*)}$ - les coefficients piézoélectriques respectivement longitudinal et transverse caractérisant la réponse diélectrique des compressions respectivement axiale et latérale - sont généralement de signes opposés, résultant en une valeur faible de $d_h^{(*)}$. Le signe du deuxième terme peut cependant changer si le coefficient de Poisson du matériau est négatif. C'est pourquoi les blocs unitaires (figure 1.11a) pour deux des quatre variables optimisées - dont $d_h^{(*)}$ - s'avèrent être auxétiques. Étrangement, les deux faces transversales (plans 1-3 et 2-3) du bloc optimisé présentent chacune un motif auxétique bien connu, mais différents l'un de l'autre : l'un est une cellule réentrante d'Evans (figure 1.11b), tandis que l'autre s'inspire plutôt du schéma anti-tetrachiral, inconnu à l'époque, et visible sur la figure 1.11c. On remarquera que le motif élémentaire de ce dernier - le quart de la face - est bien chiral, mais que la cellule entière, contenant autant de motifs main gauche que de motifs main droite, ne l'est pas. On dira alors que cette cellule est *racémique* mais pas chirale, ce qui est le cas de tous les schémas "anti-chiraux" [114, 44].

Depuis, de nombreux travaux ont été menés, notamment par Joseph N. Grima de University of Malta, qui avec son équipe a introduit les structures "méta-chirales", c'est-à-dire partiellement chirales, partiellement anti-chirales (figure 1.12.ii). Dans un article en collaboration avec des universités britanniques, les coefficients mécaniques ont été déterminés pour toutes les structures présentées sur la figure 1.12.i, avec des résultats intéressants notamment le fait que les modèles trichiraux soient en réalité toujours non auxétiques, et que le coefficient de Poisson des anti-trichiraux change de signe selon la longueur des ligaments.

Étant donné que les mécanismes de déformation principaux des architectures chirales sont

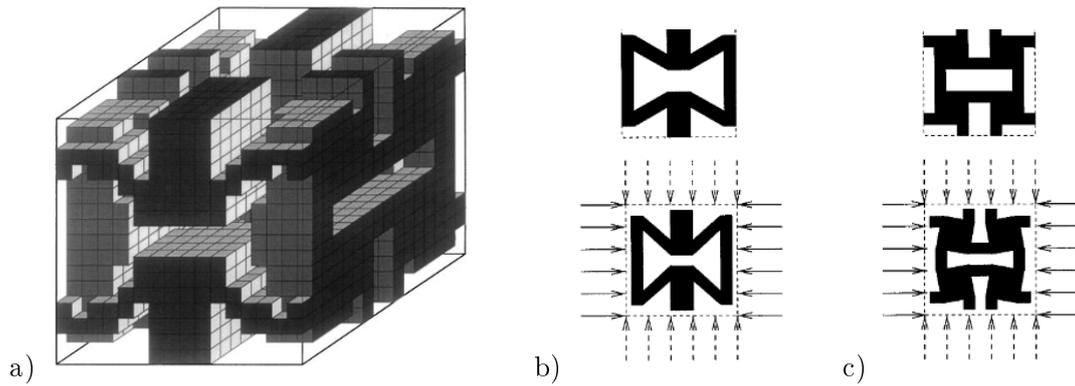


FIGURE 1.11 – Résultats de l’optimisation topologique du coefficient de charge piézoélectrique $d_h^{(*)}$: a) bloc unitaire et représentations schématiques des faces b) 1-3 et c) 2-3. [114]

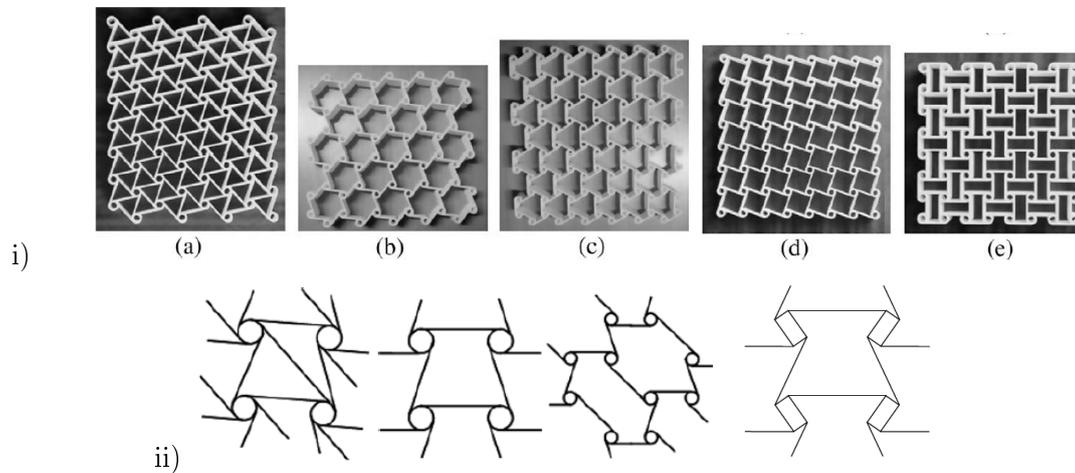


FIGURE 1.12 – i) Motifs chiraux et anti-chiraux (a) Hexachiral; (b) Trichiral; (c) Antitrichiral; (d) Tetrachiral; (e) Antitetrachiral [4].
ii) Divers motifs méta-chiraux [44]

la rotation des cercles et la flexion des poutres, plusieurs équipes ont essayé quelques années plus tard d’améliorer le concept en remplissant les cercles, dont l’espace interne a peu d’influence sur le comportement statique. S’inspirant des travaux fondateurs de l’équipe de Ping Sheng [66] sur les métamatériaux acoustiques, Liu *et al.* ont par exemple effectué des calculs numériques sur des réseaux hexachiraux dont les cercles sont remplis d’un noyau dense enveloppé d’une couche de matériau souple, combinant ainsi les propriétés d’amortissement basses fréquences des inclusions résonantes, aux caractéristiques phononiques et statiques de l’architecture chirale. Ils obtiennent ainsi des données variées comme la directionnalité, les diagrammes de bandes, ou encore l’influence de paramètres tels que densité du noyau, contraste de rayons entre noyau et cercle chirale, sur le comportement dynamique de la structure [64]. Lepidi et Bacigalupo étudient une solution similaire sur une structure anti-tetrachiral, montrant l’apparition d’une bande interdite basses fréquences grâce aux résonateurs locaux [61]. Une autre étude menée par Baravelli and Ruzzene montre l’insertion de masses dans les cercles chiraux d’une matrice en silicone souple (figure 1.13).

En intégrant cette structure dans un cadre rigide à même de supporter les efforts statiques,

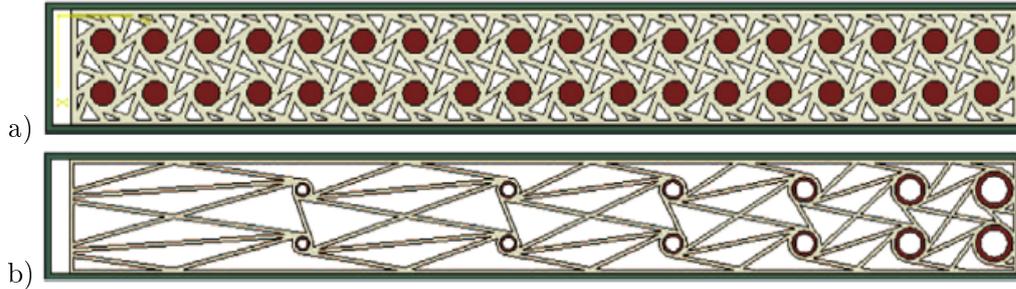


FIGURE 1.13 – Poutre étudiée par Baravelli and Ruzzene, composée d'un cadre rigide (en vert), de motifs chiraux souples(en beige), et d'inclusions (en marron). Exemples de structures a) périodique et b) à gradient (de masse et de taille de cellule)[8].

les pics de résonances de ce dernier peuvent être fortement atténués, ainsi que le niveau global à plus hautes fréquences. Ils explorent également le concept de structure à gradient, avec des masses résonantes variant le long de la structure. Contenant un faible nombre de masses par rapport au premier cas, l'atténuation est moindre sur une grande partie de la plage fréquentielle, mais le premier mode de résonance du cadre - autour de 11Hz - sur lequel sont réglées les plus grosses masses du métamatériau, observe une atténuation d'environ 40dB. Une remarque intéressante est qu'autour de cette fréquence de résonance, de nombreux pics de faibles amplitudes apparaissent lorsque le métamatériau est présent. Ils révèlent en fait autant de modes de résonances des poutres flexibles situées autour des masses en résonance. Malgré certains problèmes dus à la méconnaissance du matériau silicone utilisé, les auteurs mettent ainsi en exergue des mécanismes originaux, dont la maîtrise pourrait amener à une nouvelle gamme de systèmes d'isolation vibratoire [8].

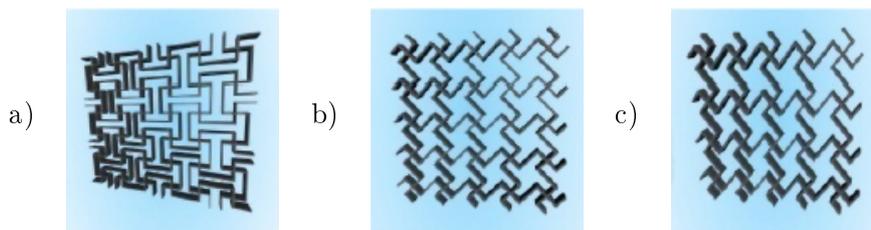


FIGURE 1.14 – Différentes géométries de type ligament manquant. a) Anti-chirale carré, b) chirale carré, et c) chirale losange. Issu de [36].

On peut également inclure dans les structures chirales les géométries à "ligament manquant" (*missing rib* en anglais) proposé en 2000 par Smith *et al.* (figure 1.14). Obtenue en supprimant certaines branches du motif d'un grillage rhombique, cette géométrie gagne ainsi son caractère auxétique, et semble conférer une meilleure représentation de certaines mousses auxétiques réticulées [115].

1.5.4 Polygones rotatifs

Une classe de géométries auxétiques très répandue est celle des polygones rotatifs. Le caractère auxétique repose ici sur un principe géométrique simple, illustré par la figure 1.15. La structure

est constituée de polygones agencés périodiquement, qui en pivotant les uns par rapport aux autres, vont modifier la taille globale du système.

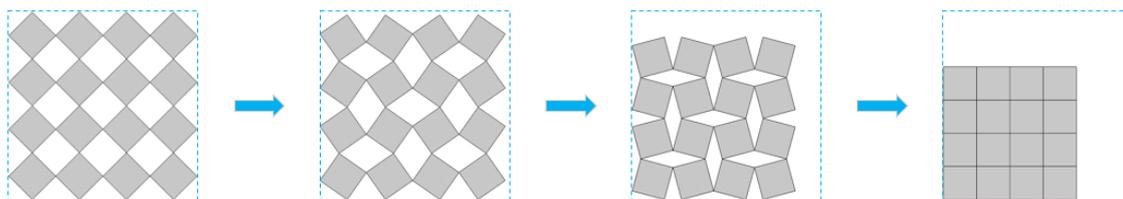


FIGURE 1.15 – Mécanisme de base des carrés rotatifs. Configurations pour différents angles (45° , 30° , 15° , 0°)

Ces géométries furent proposées par Grima et Evans de University of Exeter en 2000. Ils présentent alors non seulement la structure constituée de carrés, mais également d'autres en parallélogrammes rotatifs et en triangles rotatifs. Bien que ce mécanisme soit effectivement auxétique, un problème se pose rapidement lors de la mise en œuvre expérimentale de tels matériaux : comment concevoir les liaisons entre polygones, puisque celles-ci sont théoriquement ponctuelles ? Bien que certaines études présentent des applications avec des designs extrêmement proches de ceux de Grima et Evans, avec simplement une liaison de faible épaisseur en lieu et place de la liaison ponctuelle [12], une technique courante est d'arrondir la forme des trous inter-polygones. De cette manière, on peut obtenir une épaisseur non nulle tout en supprimant tous les angles vifs, ce qui limite les concentrations de contraintes mécaniques dans le matériau (voir figure 1.16).

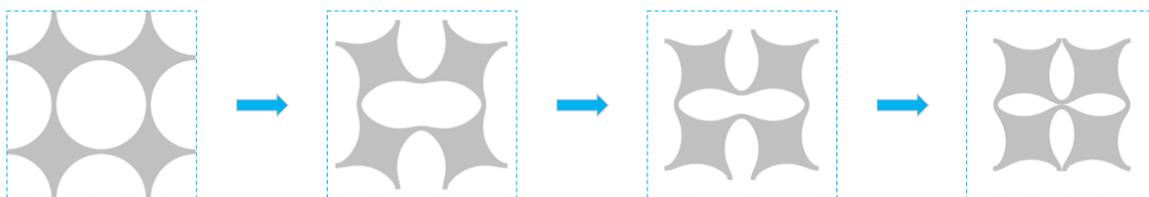


FIGURE 1.16 – Comportement mécanique en compression d'un motif unitaire. Configurations pour différentes valeurs de déformation (0% , 10% , 20% , $\approx 30\%$)

Parallélogrammes

La géométrie la plus intensivement étudiée, notamment par l'équipe de Katia Bertoldi à Harvard, est celle basée sur les carrés rotatifs (point de vue matériau), ou, en observant les espaces vides, un réseau carré de trous circulaires (cylindriques en 3D). Comparés à la plupart des autres types de polygones rotatifs, il présente l'avantage d'être périodique selon les deux directions orthogonales et ce, quel que soit son état de déformation (figure 1.16). Des articles montrent l'impact important du flambage sur la raideur statique [81], sur la répartition de bandes interdites [9], mais également sur la directionalité [121].

D'autres parallélogrammes peuvent être obtenus en variant les dimensions de la cellule unitaire, comme les rectangles. Les losanges peuvent s'organiser de deux manières, l'une où les directions de périodicité changent en fonction de la déformation, l'autre où les trous ne se

referent pas complètement. Les parallélogrammes quelconques auront les mêmes types d'organisations. L'article de Grima *et al.* recense tous les pavages possibles de parallélogrammes ainsi que leur mode de déformation théorique, en considérant les contacts inter-polygones comme ponctuels [42].

Triangles, hexagones

En se restreignant aux géométries avec des trous circulaires, chacun entouré d'un nombre pair de ligaments et dont la distance inter-centres avec les trous adjacents est constante, Shim *et al.* obtiennent un total de quatre pavages possibles, à savoir les pavages carrés, triangulaires, trihexagonaux, et rhombitrihexagonaux. Un ensemble de simulations et d'essais démontre ainsi l'importante différence de propriétés statiques (E , ν) comme dynamiques entre ces pavages. En particulier, il est intéressant de noter que le pavage triangulaire n'est vraisemblablement pas auxétique [111, 112].

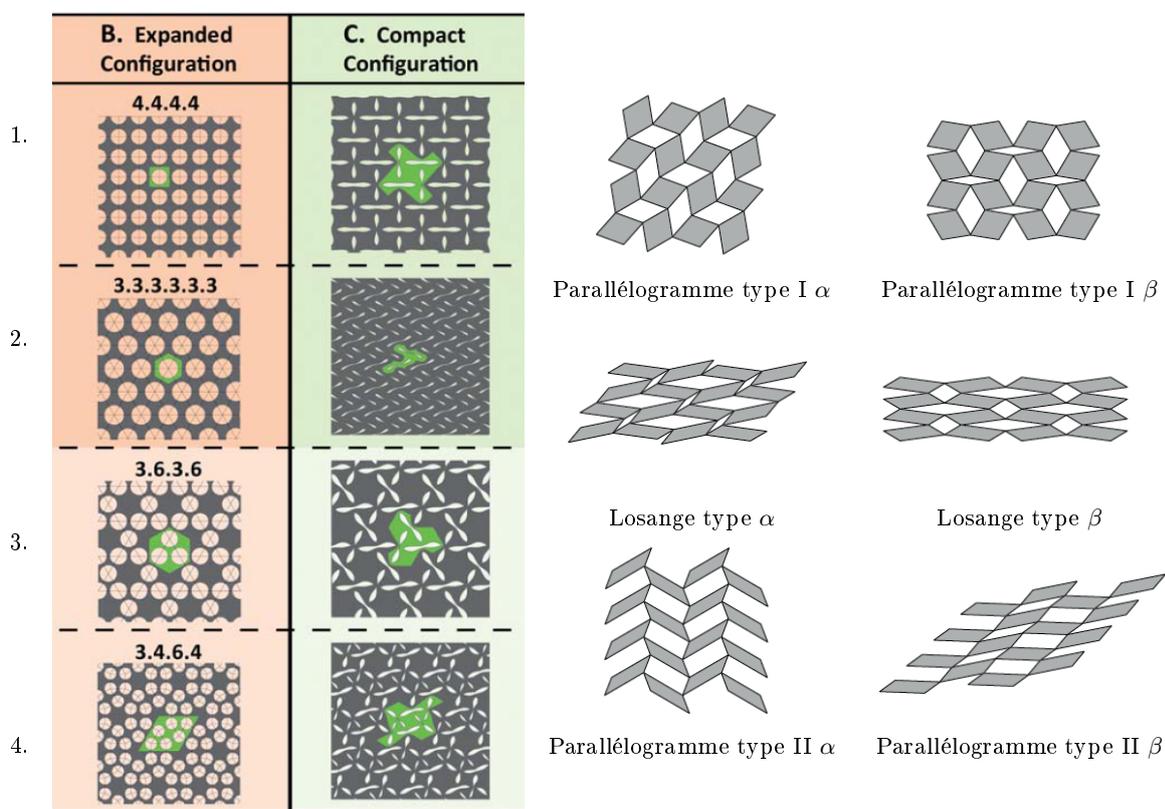


FIGURE 1.17 – Réseaux périodiques de polygones rotatifs. Configurations initiales et déformées de réseaux 1) carré, 2) triangulaire, 3) trihexagonal, 4) rhombitrihexagonal (à gauche, issu de [112]), et réseaux de parallélogrammes (à droite, issu de [42]).

1.5.5 Variantes

Bien sûr de multiples variantes dérivées de ces géométries peuvent être obtenues. Une étude notable est celle de Overvelde *et al.* où un panel de formes géométriques dérivées de la cellule en "carré rotatif" est testé et comparé en compression statique [6]. Quelques concepts récur-

rents pour étendre les propriétés des géométries auxétiques présentées précédemment sont décrits ici.

Hiérarchie

Certains articles étudient plutôt les structures hiérarchiques, c'est-à-dire dont on retrouve le motif de base plusieurs fois à l'intérieur même de la cellule périodique, de manière semblable aux fractales d'un chou romanesco (figure 1.18). En partant de structures hexagonales non auxétiques, Mousanezhad *et al.* [80] parviennent en introduisant une hiérarchie d'ordre supérieur à rendre ces structures auxétiques au-delà d'un certain seuil de compression. On obtient donc un matériau à coefficient de Poisson ajustable selon son état de déformation, bien que le seuil minimal "d'auxétisation" observé reste relativement élevé ($\varepsilon \approx 10\%$). Ce concept géométrique a également été appliqué la même année aux carrés rotatifs [41].

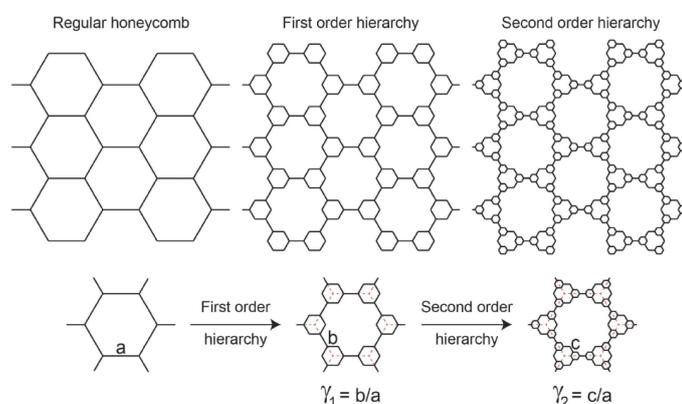


FIGURE 1.18 – a) Les fractales naturelles du chou romanesco (Source :voldia.eklablog.com). b) Différents ordres hiérarchiques appliqués à une structure nid-d'abeille conventionnelle [80].

Dans un sens, les géométries en étoiles peuvent aussi être incluses dans les développements hiérarchiques de la cellule de Evans. Un motif à quatre branches est étudiée dès 1997 par Theocaris *et al.*[117], mais il faudra attendre 2005 pour que Grima *et al.* proposent les géométries en étoiles à 3 ou 6 branches. Ces études portent principalement sur l'effet de paramètres géométriques - tels que les angles de réentrance entre les branches des étoiles et les raideurs de traction et rotulage - sur les propriétés mécaniques effectives E et ν . Dans leur article, Grima *et al.* donnent une description intéressante de ces structures, partant du principe que le motif de base des cellules hexagonales réentrantes (paragraphe 1.5.2) n'est pas le polygone entier, mais simplement une forme de flèche, le même type de flèche qui par symétrie circulaire compose les étoiles. En définissant l'ordre comme le nombre de flèches formant une étoile, on obtient la classification illustrée par la figure 1.19.

On peut également inclure dans cette catégorie une géométrie un peu différente, appelée *structurally hexagonal re-entrant honeycomb* (soit "nid-d'abeille réentrant stucturellement hexagonal") ou plus simplement "cellule de Lakes". La première apparition remonte en effet à 1991, dans un article de Lakes, dans lequel il étudie plusieurs structures auxétiques pour en déduire les conditions, notamment en terme d'efforts et de géométrie, nécessaire à l'appari-

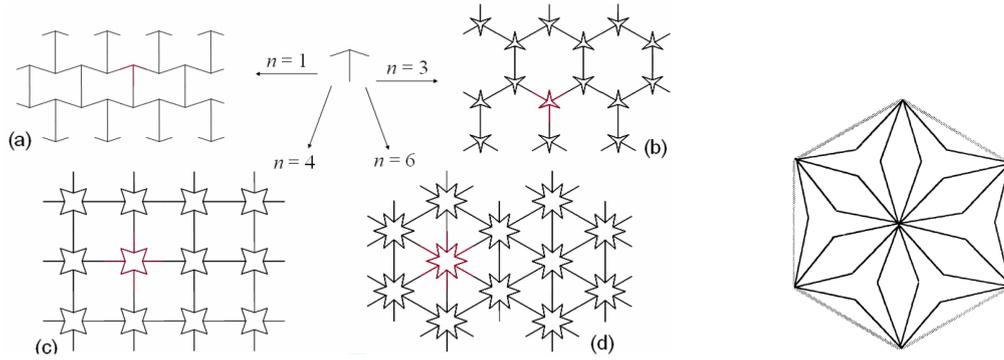


FIGURE 1.19 – Classification des structures 2D auxétiques en étoiles [43], et cellule de Lakes (à droite) [56].

tion d’auxétisme [56]. Géométriquement, on peut en fait voir la cellule de Lakes comme une étoile à six branches, dont celles-ci ne sont plus en forme de flèche comme précédemment, mais elles-mêmes en forme d’étoiles à trois branches, comme illustré sur la figure 1.19.

D’autres travaux dérivés de géométries réentrantes ont vu le jour, sous forme de variantes très diverses, comme par exemple la cellule multi-réentrante développée par Lira *et al.*[63]. Ils montrent que les paramètres supplémentaires ainsi créés permettent d’élargir la plage de coefficients de Poisson atteignable.

Gradient

En se basant sur les structures hexagonales vues au paragraphe 1.5.2, plusieurs équipes ont cherché à les combiner et à comparer leurs performances comme noyau de plaques composites (figure 1.20). Ruzzene et Scarpa, associés à d’autres chercheurs, ont beaucoup étudié ces systèmes. Ils ont par exemple réalisé des calculs pour observer des effets importants de l’alternance auxétique-conventionnel et de l’angle de réentrance sur la directionnalité des ondes se propageant dans ces plaques [98], ainsi que sur les fréquences de bandes interdites [99]. Avec Hou *et al.*, ils ont également conçu les noyaux des composites par Kirigami¹ pour en étudier la résistance en compression sur la face et sur la tranche, ou encore l’absorption de choc de la tranche. L’effet bénéfique de différents gradients sur l’amortissement de modes de plaques composites a également été prouvé par Mazloomi *et al.*[?].

Dans un concept mentionné précédemment (section 1.5.3), Baravelli et Ruzzene ont également appliqué le concept de gradient à leur géométrie chirale, montrant que l’amortissement des vibrations dans un cadre rigide pouvait ainsi être amélioré par rapport à un agencement périodique, notamment en basses fréquences [8].

¹Le Kirigami est une technique japonaise de fabrication basée sur du découpage (切る [kiru] : *couper*) et du pliage (折り紙 [origami] : *papier plié*) qui permet de former des structures tridimensionnelles à partir d’un matériau 2D. Elle est très utilisée dans l’industrie du nid-d’abeille, car elle permet une production en continu de ces matériaux. Voir les pages d’accueil des sites <https://thermhhex.com/fr/> ou <http://www.econcore.com/en> pour des animations du processus de fabrication.

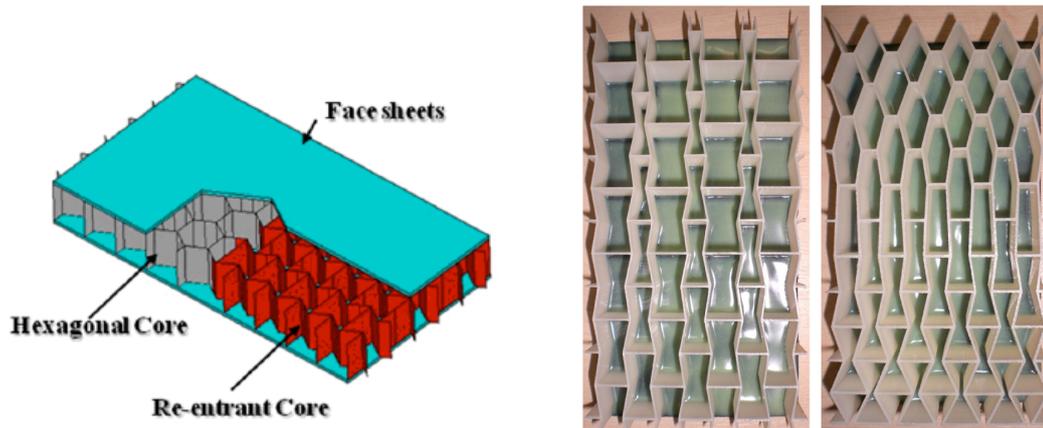


FIGURE 1.20 – À gauche : structure d'une plaque composite à noyau auxétique [98]. À droite : structures nid-d'abeille à gradient [48].

Inclusions

Certains articles explorent la possibilité d'ajouter des masses rigides à l'intérieur des cellules afin de cumuler les effets de résonateur local avec les propriétés auxétiques de la structure.

Les géométries chirales s'y prêtent tout particulièrement, en raison de la présence d'espaces vides (généralement circulaires) subissant peu de déformation. Différents travaux montrent ainsi l'ouverture d'un bandgap en basses fréquences dû aux inclusions. Si ces inclusions sont composées d'une masse enrobée de matière souple, le bandgap est contrôlé par les résonances propres des inclusions [64, 61]. En revanche, si seule la masse constitue l'inclusion, le bandgap provient alors de la résonance des ligaments adjacents [8]. On remarquera que de telles géométries sont alors très proches d'un autre concept auxétique, dénommé nodule-fibrille, inspiré de la microstructure de certains polymères [2].

De leur côté, Ma *et al.* montrent qu'en utilisant un matériau amortissant - du caoutchouc métallique (*Metal Rubber*) en l'occurrence - pour les inclusions, une réduction significative des pics de résonances structurelles basses fréquences est obtenue [?].

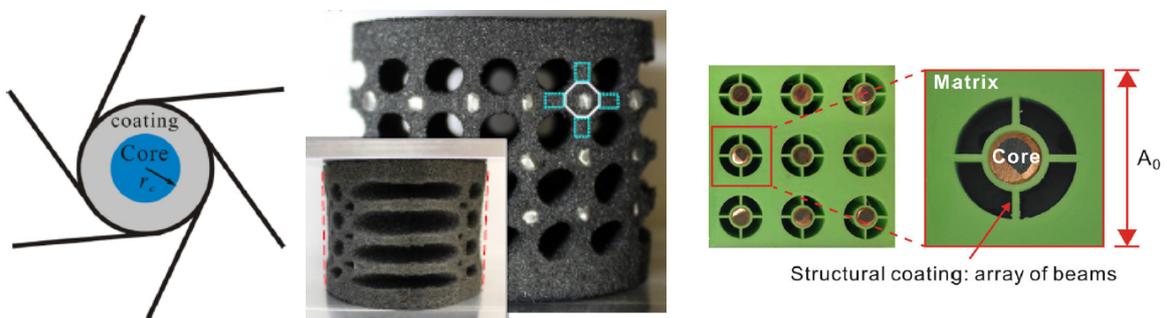


FIGURE 1.21 – Différents concepts d'inclusions : dans des cellules hexachirales (à gauche, [64]) et des cellules de type carré rotatif : dans la matière (au milieu, [27]) et dans les espaces vides (à droite, [120]).

D'autres travaux montrent également l'inclusion de masses dans les structures à polygones rotatifs. Dans le cas de Deng *et al.*, ces masses, en cuivres sont simplement destinées à augmenter

l'inertie de la cellule, par rapport au matériau constituant, plus souple [29]. En revanche, Cui et Harne ont réalisé un bloc en mousse polyuréthane à carrés rotatifs dont chaque polygone contenait un cylindre métallique, destiné à améliorer les performances d'isolation vibratoire et acoustique du système [27]. Mentionnons finalement les motifs des travaux de Wang *et al.*. Leur structure initiale est proche d'une structure à carrés rotatifs, mais les masses sont cette fois incluses dans les vides de cette structures, via des ligaments souples. Ces ligaments tendent à flamber lors de la compression du métamatériau, modifiant sensiblement ses propriétés dispersives [120].

1.5.6 Géométries auxétiques 3D

Si les formes géométriques auxétiques restent relativement simples et intuitives en deux dimensions, la mise en œuvre d'un auxétisme tridimensionnel - un tel matériau, lors d'une compression uniaxiale, se rétracterait aussi dans les deux directions transverses - est plus complexe à visualiser et à simuler, sans parler de la fabrication. Un grand nombre de cas en trois dimensions provient directement des structures planes, comme les formes réentrantes de Buckmann *et al.*[16], ou encore les "cubes" rotatifs de Ren *et al.*[95] (voir figure 1.22). L'article de Elipe *et al.*[36] dresse une liste assez complète des géométries auxétiques 2D et des structures 3D qui en découlent.

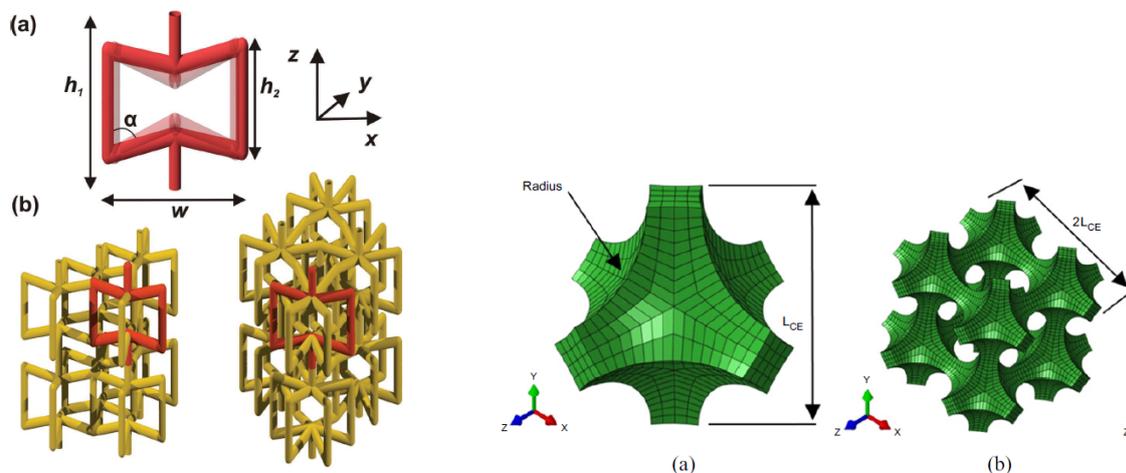


FIGURE 1.22 – Exemples de structures auxétiques tridimensionnelles. À gauche : motif réentrant : a) cellule unitaire et b) exemples de structures [16]. À droite : cubes rotatifs : a) cellule unitaire et b) exemple de structure [95].

D'autres structures, bien qu'elles usent des mêmes mécanismes géométriques qu'en 2D, sont plus originales, dans le sens où la transposition de ces structures en deux dimensions est impossible. On peut citer le cas de "l'egg rack" ou "boîte d'œufs". Cette forme, également appelé pliage de Miura, était initialement créée pour concevoir des antennes spatiales déployables [79]. Bien que la géométrie soit nécessairement tridimensionnelle, l'auxétisme ainsi obtenu n'est que selon deux directions, et ne correspond donc pas à la définition donnée plus haut (figure 1.23).

Un des systèmes les plus prometteurs est peut-être la "Buckliball" introduite par l'équipe

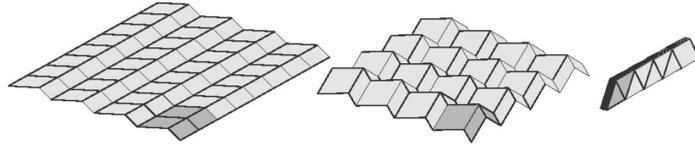


FIGURE 1.23 – Géométrie de type "egg rack" ou pliage de Miura. Issu de [104].

de Katia Bertoldi à Harvard [110]. Inspirée du "Twist-o", un jouet développé par Hoberman [46], cette sphère présente un auxétisme tridimensionnel par géométries rotatives. En prenant cette sphère comme cellule unitaire, on peut facilement obtenir un métamatériau - que Babae *et al.* ont étudié et nommé "Bucklicrystal" [7] - avec une structure cristalline périodique à l'instar des cristaux phononiques, mais possédant en plus les propriétés liées à l'auxétisme (figure 1.24).

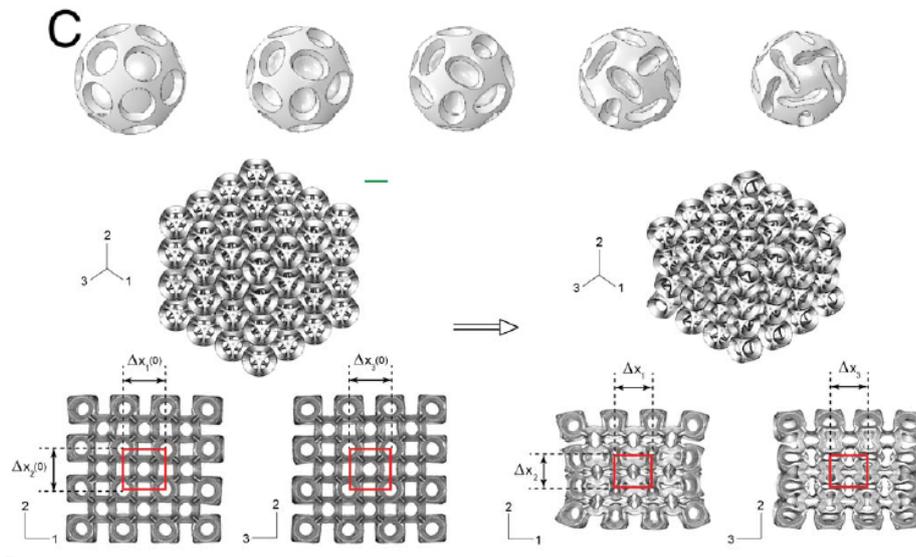


FIGURE 1.24 – Mécanisme d'une Buckliball en compression (en haut, [110]). Exemple de Bucklicrystal, formé à partir de Buckliballs en cuboctaèdre (en bas, [7]) : configurations initiale (à gauche) et déformée (à droite).

1.5.7 Propriétés et applications

Au-delà du coefficient de Poisson négatif qui lui est propre, l'auxétisme donne naissance à de nombreuses propriétés d'intérêt. Quelques propriétés des plus remarquables et certains concepts applicatifs associés sont répertoriés dans cette section.

Synclasticité

La synclasticité désigne la capacité d'un matériau à se déformer en dôme lors d'une flexion. Par opposition, les matériaux anticlastiques prennent la forme d'une selle. C'est le cas des matériaux non auxétiques. Lors de la flexion d'une plaque, la face inférieure est comprimée dans la direction de flexion tandis que la face supérieure est en elongation. Du fait de l'effet Poisson, les directions transversales subissent également des déformations opposées, résultant en une forme de selle (figure 1.25).

De par leur coefficient de Poisson négatif, les matériaux auxétiques présentent un caractère synclastique qui peut être utile pour la mise en forme du matériau selon des profils complexes, sans recours à de l'usinage, avec par exemple des applications pour des panneaux composites (sandwich) courbes, comme des nez d'avions [3]. Cette propriété peut également avoir de nombreuses applications dans le domaine textile [123], dans lequel de nombreux brevets existent, déposés notamment par Nike pour des éléments de chaussures [57, 39]. On peut également citer une application de masque anti-pollution s'adaptant mieux à la forme du visage, déposé par 3M [72].

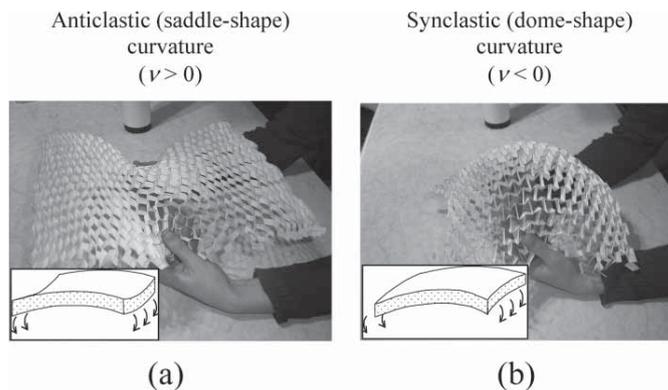


FIGURE 1.25 – Démonstration de la synclasticité par des réseaux en nid-d'abeille a) hexagonal et b) réentrant. Issu de [5].

Résistance mécanique

Lors d'une compression locale, un matériau non auxétique aura tendance à s'écraser : la matière tendra à s'écartier dans les directions transversales pour dissiper l'énergie. À l'inverse, dans un matériau auxétique, une densification locale sera observée au point de compression, et le matériau présentera alors une meilleure résistance à l'enfoncement. Associée à la synclasticité, cette propriété pourrait servir à la conception de systèmes de protections améliorés, notamment pour le sport [35].

La résistance accrue due à l'auxétisme est souvent expliquée par la formule de la dureté H d'un matériau :

$$H \propto \left[\frac{E}{1 - \nu^2} \right]^\gamma, \quad (1.7)$$

où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, et γ une constante valant 1 ou 2/3 selon que la compression est globale (pression) ou locale, respectivement.

L'analyse de cette formule révèle que lorsque le coefficient de Poisson s'approche de -1, comme il est souvent observé dans les matériaux auxétiques, la dureté tend vers l'infini. On nuancera cette remarque en notant qu'un coefficient de Poisson proche de 1, bien que rarement observé, fait également tendre la dureté vers l'infini [18]. Cependant, cette formule n'est valable que dans le cas d'un matériau isotrope, alors que la majorité des matériaux auxétiques sont anisotropes [101].

Une analyse similaire peut-être effectuée concernant le cisaillement.

La module de cisaillement G d'un matériau isotrope peut s'exprimer :

$$G = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (1.8)$$

où K est le module du compressibilité de ce matériau.

De même que dans l'exemple isotrope précédent, si on suppose cette formule applicable à un matériau auxétique dont le coefficient de Poisson approche -1, alors le module de cisaillement tend vers l'infini.

En 1996, Choi et Lakes ont également montré que des mousses auxétiques, de géométries réentrantes, présentaient une ténacité supérieure aux mousses conventionnelles, malgré un module de Young plus faible [23]. D'autres travaux sur des composites auxétiques aboutissent aux mêmes conclusions [34, 11]. Autrement dit, l'auxétisme permet au matériau de mieux résister à la propagation de fissures.

Isolation acoustique et vibratoire

Les propriétés supérieures d'absorption acoustique des matériaux auxétiques ont été observées dès les années 90 pour des mousses [49]. Chekkai *et al.* ont ensuite montré que ces propriétés étaient surtout marquées pour les fréquences inférieures à 1500Hz [21].

Du côté des structures auxétiques, plusieurs travaux démontrent les performances des nids-d'abeille, notamment dans des structures composites de type sandwich, et à leurs propriétés d'isolation acoustique, de bandes interdites et de directionnalité [103, 100, 99, 97].

D'autres publications montrent le potentiel de différentes structures auxétiques périodiques pour l'isolation vibratoire grâce à l'étude des diagrammes de dispersion (voir section 1.6.2). Les géométries réentrantes, chirales, et les polygones rotatifs présentent ainsi des bandes interdites très attractives pour des applications de systèmes isolants.

Perméabilité variable

Les mécanismes auxétiques décrits précédemment présentent tous une fraction de vide qui évolue en fonction de l'état de déformation du matériau : plus le matériau est comprimé, plus la fraction de vide est faible, et inversement plus le matériau est étiré, plus cette fraction est importante. Cette propriété est avantageuse pour concevoir par exemple des filtres dont la porosité s'adapte au degré d'encrassement. Des applications médicales sont également possibles, avec des pansements diffusants des médicaments en fonction du gonflement de la contusion [5], ou encore des stents plus performants et pouvant également diffuser des médicaments (voir figure 1.26) [32, 12].



FIGURE 1.26 – Concept de stent auxétique constitué de carrés rotatifs [12].

1.6 Calculs vibroacoustiques

1.6.1 Introduction

Le terme physique d'onde traduit la propagation d'une perturbation locale et réversible du milieu, permettant un transport d'énergie sans transport de matière. On peut distinguer les ondes électromagnétiques, les ondes élastiques, et les ondes gravitationnelles, dont l'existence n'a été prouvée que très récemment. Les ondes radio, la lumière visible, les rayonnements radioactifs correspondent tous à des ondes électromagnétiques de longueurs d'onde différentes. De même les ondes thermiques désignent simplement le domaine très hautes fréquences des ondes élastiques, catégorie plus connue pour les ondes acoustiques (se propageant dans les fluides) et les vibrations (se propageant dans les solides). Contrairement aux autres types d'ondes, les ondes élastiques ne peuvent donc pas se propager dans le vide, phénomène à l'origine de la célèbre accroche "Dans l'espace, personne ne vous entend crier"².

Les ondes acoustiques, tout comme les ondes électromagnétiques, se caractérisent par la propagation exclusive d'ondes longitudinales en milieu infini. Sous l'influence de ces ondes, les particules se déplacent dans la direction de propagation de l'énergie, ce qui se présente sous la forme d'une succession de zones de compression et de dilatation comme illustré par la figure 1.27. Le couplage des ondes longitudinales avec les limites du milieu de propagation peut donner naissance à des ondes de surface, par opposition aux ondes de volume dont la longueur d'onde est petite comparée aux directions transverses. Les vagues observées près des plages sont un exemple simple d'ondes de surface.

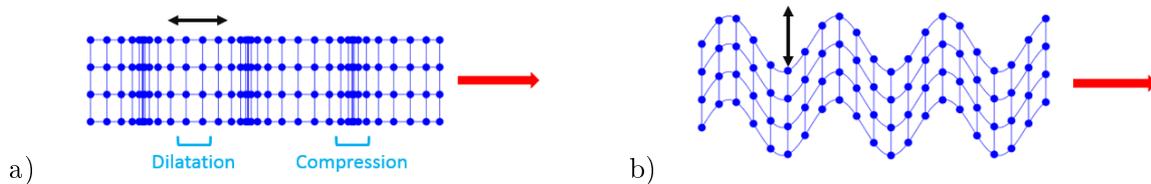


FIGURE 1.27 – Schémas des modes de propagation a) longitudinal et b) transversal. \longleftrightarrow Direction du mouvement des particules et \longrightarrow direction de propagation de l'onde.

² *Alien, le huitième passager* de Ridley Scott, 1979

En plus de la compression, les milieux solides supportent le cisaillement, et donc les ondes dites transversales, où le mouvement des particules est orthogonal à la direction de propagation. Ces ondes sont souvent dénommées ondes S, pour secondaires, tandis que les ondes P (primaires) qualifient les ondes longitudinales.

La vitesse de propagation des ondes est définie par $c_\phi = \lambda f$ où λ est la longueur d'onde et f la fréquence de l'onde considérée. c_ϕ est aussi appelée vitesse de phase, et dépend des propriétés du milieu, mais également du type d'onde considéré. Pour les matériaux homogènes et isotropes, les ondes longitudinales possèdent une vitesse de phase $c_{l,\phi}$ plus élevée que celle des ondes transversales ($c_{t,\phi}$), tel que :

$$c_{l,\phi} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} > c_{t,\phi} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad (1.9)$$

où ρ est la masse volumique du matériau, et K et G sont respectivement les modules de compression isostatique et de cisaillement, qui dépendent directement des module de Young E et coefficient de Poisson ν suivant les expressions $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Le milieu est dit dispersif lorsque la vitesse de phase est dépendante de la fréquence. Dans un tel milieu, les différentes fréquences composant généralement une onde se propagent à des vitesses différentes, ce qui provoque une distorsion du signal initial, qui croît avec la distance. De fait, tous les milieux, excepté le vide, sont dispersifs dans une certaine mesure. Heureusement, l'air l'est très peu, sans quoi la communication orale et la vision s'en trouveraient sérieusement entravées. C'est par ailleurs la dispersion de la lumière par les gouttelettes d'eau en suspension dans l'air qui donne naissance aux arc-en-ciels (figure 1.28).



FIGURE 1.28 – L'arc-en-ciel, un bel exemple des propriétés dispersives de l'eau.

La dispersion est décrite par la relation entre la fréquence f et la longueur d'onde λ , exprimées respectivement sous la forme de pulsation $\omega = 2\pi f$ et de nombre d'onde $\kappa = 2\pi/\lambda$. La vitesse de phase vaut alors

$$c_\phi = \frac{\omega}{\kappa}, \quad (1.10)$$

et le graphe illustrant la relation entre ces deux grandeurs est couramment appelé diagramme de dispersion, ou diagramme de bandes. Théoriquement, ce diagramme présente une branche

pour chaque mode propagatif, mais nous verrons plus tard que ces branches peuvent bifurquer, notamment en cas de résonances internes.

Un autre indicateur important lié à la dispersion est la vitesse de groupe :

$$c_g = \frac{d\omega}{d\kappa}, \quad (1.11)$$

Pour un milieu non dispersif, le diagramme de dispersion se résume à une droite, soit $c_g = c_\phi$. En revanche, cette égalité n'est plus valable pour un milieu dispersif : l'énergie, portée par la vitesse de groupe, ne se propage plus à la même vitesse que l'onde.

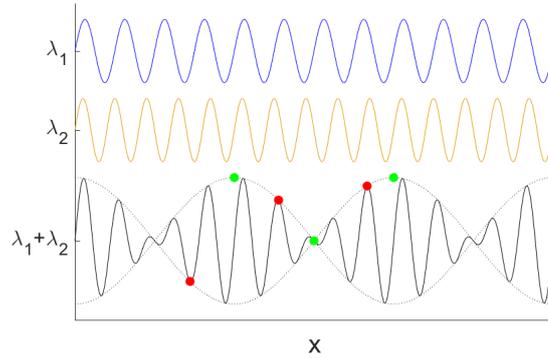


FIGURE 1.29 – Différence entre vitesse de groupe et vitesse de phase en milieu dispersif

La figure 1.29 illustre ce phénomène à un instant t : lorsque deux ondes de vitesses de phases différentes (indiquées par leur longueur d'onde respective λ_1 et λ_2) s'additionnent (courbe noire), la dispersion provoque la formation de "paquets d'ondes" dont l'enveloppe est repérée en pointillés. Ces paquets d'onde transportent l'énergie à la vitesse de groupe c_g : les points verts, placés sur des nœuds et ventres de l'enveloppe, se déplacent donc à la vitesse c_g . En revanche, tous les points rouges, situés sur des extrema d'amplitude, se déplaceront tous à la vitesse de phase c_ϕ .

1.6.2 Zone de Brillouin

Dans une structure périodique, la Zone de Brillouin (BZ pour *Brillouin Zone* en anglais) est l'équivalent de la cellule unitaire de la structure, mais dans l'espace réciproque (espace des nombres d'onde) [14].

Si les vecteurs directeurs (en trois dimensions) de la cellule unitaire sont \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , et \mathbf{d}_3 , alors les vecteurs de l'espace réciproque sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3}{V_d} \\ \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_3}{V_d} \\ \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2}{V_d} \end{cases} \quad (1.12)$$

où $V_d = \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3$ est le volume défini par les trois vecteurs dans l'espace direct. Ce travail se focalisera principalement sur les géométries bidimensionnelles, avec $\mathbf{d}_1 = L_x \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{d}_2 = L_y \mathbf{e}_y$

orthogonaux, L_x et L_y étant les dimensions de la cellule en X et Y , respectivement. Cela simplifie l'expression des vecteurs de la BZ :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{d}_2}{S_d} = \frac{2\pi}{L_x} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{d}_1}{S_d} = \frac{2\pi}{L_y} \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (1.13)$$

Comme la cellule unitaire est répétée à l'infini dans la structure, tous les modes de propagation de la structure peuvent être obtenus à partir des seules données de la BZ. Brillouin montre que les symétries de la cellule unitaire peuvent être mises à profit pour réduire encore la zone d'étude, jusqu'à atteindre la Zone Irréductible de Brillouin (IBZ pour *Irreducible Brillouin Zone* en anglais). Sur la figure 1.30, on voit que par symétries miroirs, toute la BZ peut être

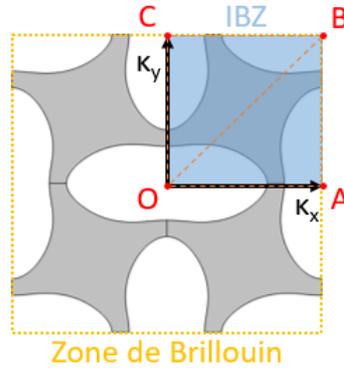


FIGURE 1.30 – Représentation de la BZ et de l'IBZ pour une cellule unitaire 2D

représentée par un quart de sa surface. On est même tenté de rediviser cette IBZ en deux (par l'axe OB), mais dans cette configuration, l'IBZ n'est pas symétrique par rapport à OB . Il existe bien une symétrie ponctuelle par rapport au centre de $OABC$, mais ce dernier étant différent du point O , cette symétrie n'est pas valable pour l'IBZ. L'article de Maurin *et al.*[74] décrit clairement les différents réseaux de Bravais bidimensionnels, ainsi que leurs vecteurs de base associés, dans les espaces direct et réciproque [54].

L'article de Maurin *et al.* synthétise les IBZ en fonction de la cellule unitaire et des symétries internes [74]. L'IBZ permet donc d'obtenir le comportement propagatif de toute la structure périodique avec un temps de calcul optimisé. Autrement dit, le suivi des modes uniquement dans l'IBZ suffit pour connaître les modes présents dans l'ensemble de la structure. Lorsque l'IBZ n'est pas unidimensionnelle, le diagramme de dispersion est généralement assemblé en suivant les contours de l'IBZ. Bien que la plupart des articles ne calcule que ces contours, il est intéressant de noter que d'autres montrent l'existence possible d'extrema à l'intérieur de l'IBZ, selon la forme de celle-ci [45, 74]. Si la détection préliminaire de bandgaps omnidirectionnels peut être réalisée sur le contour de l'IBZ, la validation de leurs bornes nécessiterait le balayage complet de celle-ci. Dans ce travail, on se satisfera généralement de cinq branches dont les bornes sont définies par :

OA : $\kappa_x \in \Delta^\circ/L_x$ et $\kappa_y = 0$

AB : $\kappa_x = 2\pi/L_x$ et $\kappa_y \in \Delta^\circ/L_y$

BC : $\kappa_x \in \Delta^\circ/L_x$ et $\kappa_y = 2\pi/L_y$

OC : $\kappa_x = 0$ et $\kappa_y \in \Delta^\circ/L_y$

OB : $\kappa_x \in \Delta^\circ/L_x$, $\kappa_y \in \Delta^\circ/L_y$, et $\kappa_x = \kappa_y$

où Δ° est l'intervalle balayé $[0, 2\pi]$. κ_x (resp. κ_y) est la composante du vecteur nombre d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ dans la direction x (resp. y). C'est-à-dire $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_x \mathbf{e}_x + \kappa_y \mathbf{e}_y$.

Un exemple de diagramme de dispersion est présenté sur la figure 1.31. On y voit tous les modes obtenus sur les contours de l'IBZ par calcul de dispersion. Certaines bandes fréquentielles ne comportent aucun mode : ce sont les bandes interdites (ou bandgaps). Si elles ne concernent qu'une branche de l'IBZ, elles sont directionnelles (en rouge), tandis qu'elles sont omnidirectionnelles si elles sont communes à toutes les branches de l'IBZ (en bleu). Dans cette étude, on s'intéressera en priorité à ces dernières qui présentent un fort potentiel pour l'isolation vibratoire.

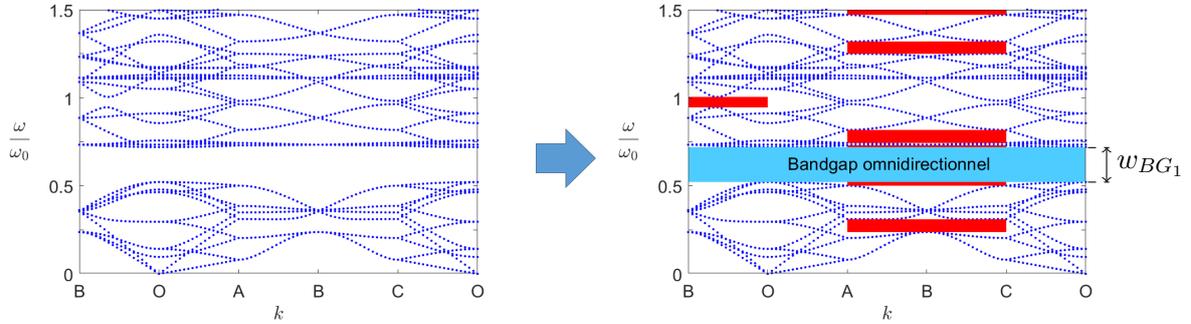


FIGURE 1.31 – Exemple de diagramme de dispersion avec bandes interdites ■ directionnelles et ■ omnidirectionnelles. w_{BG_1} désigne la largeur du premier bandgap omnidirectionnel.

1.6.3 Méthode de Floquet-Bloch

Le théorème de Floquet-Bloch, ou théorème de Floquet, est une méthode fondamentale pour obtenir le comportement dynamique de systèmes périodiques. Il s'applique aux équations différentielles unidimensionnelles de la forme $\frac{d\mathbf{u}(x)}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{u}(x)$, où $\mathbf{u}(x)$ est une fonction inconnue et $\mathbf{A}(x)$ est une fonction L -périodique³, et stipule que les solutions de ces équations sont de la forme :

$$\mathbf{u}(\omega, x) = \tilde{\mathbf{u}}(\omega, x)e^{i\kappa x} \quad (1.14)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est L -périodique. Les articles postérieurs de Bloch ont ensuite permis la généralisation multidimensionnelle du théorème de Floquet [26].

Appliquée à la propagation vibratoire dans un motif 2D périodique en X et Y , de dimensions $L_x \times L_y$, l'équation impose les déplacements aux frontières suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_L e^{i\kappa_x L_x} \\ \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_B e^{i\kappa_y L_y} \end{cases} \quad (1.15)$$

³cellule périodique de période (ici spatiale) L

où $\mathbf{u}_\bullet = \mathbf{u}(\omega, \mathbf{x}_\bullet)$ et \mathbf{x}_\bullet sont respectivement les vecteurs déplacement et position des points appartenant à la frontière \bullet telle que $\bullet \in \{L, R, T, B\}$, correspondant respectivement aux frontières gauche, droite, supérieure, et inférieure (voir figure 1.32).

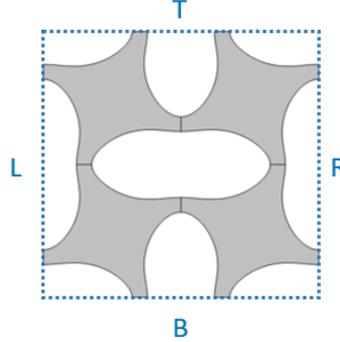


FIGURE 1.32 – Dénomination des frontières de la cellule périodique.

1.6.4 Méthode d'éléments finis ondulatoires

La méthode d'éléments finis ondulatoires (ou WFEM pour *Wave Finite Element Method*) permet de déterminer le diagramme de dispersion de structures périodiques. C'est une méthode hybride, mêlant éléments finis et approche analytique, pour modéliser des structures complexes tout en conservant un temps de calcul réduit. Elle est partiellement décrite ici sous sa forme unidirectionnelle, mais de nombreux papiers décrivent la WFEM de manière détaillée et pourront être consultés pour plus de précisions [69, 128].

L'équation qui définit l'équilibre dynamique du système est :

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1.16)$$

avec \mathbf{D} la matrice de raideur dynamique, et \mathbf{u} et \mathbf{F} les vecteurs respectifs de déplacements et efforts nodaux. La dimension caractéristique des matrices et vecteurs correspond au nombre de degrés de liberté (DDL).

Selon le modèle considéré, l'expression de \mathbf{D} peut changer. Dans le cas non amorti, on a $\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ avec ω la pulsation, et \mathbf{M} et \mathbf{K} les matrices respectives de masse et de raideur. L'introduction d'amortissement ajoute une composante imaginaire. Si cette composante est dépendante de la fréquence (i.e. de la vitesse), l'amortissement est dit visqueux. S'il est indépendant de la fréquence, il est alors structural (ou hystérétique), ce qui donne les formules suivantes :

$$\text{Amortissement visqueux : } \mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$$

$$\text{Amortissement structural : } \mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + (1 + i\eta)\mathbf{K}$$

Pour un grand nombre d'éléments finis, la taille des matrices peut rapidement devenir critique vis-à-vis du temps de calcul. La méthode de réduction de Guyan est donc appliquée pour

simplifier l'équation 1.16 en différenciant les DDL de frontières (L et R) des DDL internes (indice I)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{II} & \mathbf{D}_{IL} & \mathbf{D}_{IR} \\ \mathbf{D}_{LI} & \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RI} & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

La méthode du complément de Schur est ensuite utilisée. Pour cela, on extrait la première ligne de l'équation 1.17 :

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{D}_{II}^{-1} [\mathbf{F}_I - \mathbf{D}_{IL}\mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{IR}\mathbf{u}_R], \quad (1.18)$$

puis on l'injecte dans les deuxième et troisième lignes :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1} [\mathbf{F}_I - \mathbf{D}_{IL}\mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{IR}\mathbf{u}_R] + \mathbf{D}_{LL}\mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{LR}\mathbf{u}_R = \mathbf{F}_L \\ \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1} [\mathbf{F}_I - \mathbf{D}_{IL}\mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{IR}\mathbf{u}_R] + \mathbf{D}_{RL}\mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{RR}\mathbf{u}_R = \mathbf{F}_R \end{cases}, \quad (1.19)$$

qu'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \\ \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} - \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IL} & \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IR} \\ \mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IL} & \mathbf{D}_{RR} - \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

soit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LI}^*\mathbf{F}_I \\ \mathbf{D}_{RI}^*\mathbf{F}_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^* & \mathbf{D}_{LR}^* \\ \mathbf{D}_{RL}^* & \mathbf{D}_{RR}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{LI}^* &= \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}, & \mathbf{D}_{RI}^* &= \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1} \\ \mathbf{D}_{LL}^* &= \mathbf{D}_{LL} - \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IL}, & \mathbf{D}_{LR}^* &= \mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{LI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IR} \\ \mathbf{D}_{RL}^* &= \mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IL}, & \mathbf{D}_{RR}^* &= \mathbf{D}_{RR} - \mathbf{D}_{RI}\mathbf{D}_{II}^{-1}\mathbf{D}_{IR}, \end{aligned}$$

où \mathbf{D}^* représente la matrice de raideur dynamique condensée aux frontières de la cellule.

On cherche ici les modes propagatifs, c'est-à-dire les solutions homogènes de l'équation 1.16. Les efforts internes s'annulent donc en tous points, c'est-à-dire $\mathbf{F}_I = \mathbf{0}$. En revanche, les efforts doivent être pris en compte aux frontières de chaque cellule, suivant la loi de Floquet, soit ici $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_L e^{i\kappa_x L_x}$. En développant l'équation condensée 1.21, on obtient donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{D}_{LR}^{*-1} [\mathbf{F}_L - \mathbf{D}_{LL}^* \mathbf{u}_L] \\ \mathbf{F}_R = \mathbf{D}_{RL}^* \mathbf{u}_L + \mathbf{D}_{RR}^* \mathbf{D}_{LR}^{*-1} [\mathbf{F}_L - \mathbf{D}_{LL}^* \mathbf{u}_L] \end{cases}, \quad (1.22)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{F}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{*-1}\mathbf{D}_{LL}^* & -\mathbf{D}_{LR}^{*-1} \\ \mathbf{D}_{RL}^* - \mathbf{D}_{RR}^*\mathbf{D}_{LR}^{*-1}\mathbf{D}_{LL}^* & -\mathbf{D}_{RR}^*\mathbf{D}_{LR}^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

En définissant les vecteurs d'état à droite de la cellule $\Phi^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{R}} \end{bmatrix}$ et à gauche $\Phi^{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{L}} \\ -\mathbf{F}_{\mathbf{L}} \end{bmatrix}$, on peut alors écrire :

$$\Phi^{\mathbf{R}} = \mathbf{S}\Phi^{\mathbf{L}} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{D}_{\mathbf{LR}}^{*-1}\mathbf{D}_{\mathbf{LL}}^* & -\mathbf{D}_{\mathbf{LR}}^{*-1} \\ \mathbf{D}_{\mathbf{RL}}^* - \mathbf{D}_{\mathbf{RR}}^*\mathbf{D}_{\mathbf{LR}}^{*-1}\mathbf{D}_{\mathbf{LL}}^* & -\mathbf{D}_{\mathbf{RR}}^*\mathbf{D}_{\mathbf{LR}}^{*-1} \end{array} \right]$$

En appliquant le théorème de Floquet 1.15 sur $\mathbf{u}_{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{u}_{\mathbf{L}}$, et sur $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{F}_{\mathbf{L}}$, on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{S} - \lambda_j \mathbf{I}_{2n}] \Phi_j^{\mathbf{L}} = 0 \quad \lambda_j = e^{i\kappa_x j L_x}, \quad (1.26)$$

où j est l'indice de valeur propre, et \mathbf{I}_{2n} est la matrice identité de taille $2n$, n étant le nombre de DDL.

En résolvant 1.16 pour des solutions périodiques de type Floquet (équation 1.14), on peut alors obtenir le diagramme de dispersion de la structure.

1.6.5 Méthode du Shifted Cell Operator

Pour la méthode du Shifted Cell Operator (ou *SCOM* pour *Shifted Cell Operator Method*), l'équation d'équilibre dynamique 1.16 est reformulée par décalage des nombres d'ondes dans l'espace des dérivées :

$$\rho\omega^2 \mathbf{u} + \nabla \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.27)$$

avec ρ la masse volumique du matériau, ω la pulsation, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{C} le tenseur d'élasticité, et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations.

Plus spécifiquement, le problème aux dérivées partielles (équation 1.27) est appliqué aux ondes de Bloch (équation 1.14). En utilisant comme champ de déplacement le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ de l'équation 1.14, puis en appliquant une formulation faible à 1.27, l'équation aux valeurs propres suivante est obtenue :

$$[(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) + \lambda_i \mathbf{L} - \lambda_i^2 \mathbf{H}] \Phi_i = \mathbf{0}, \quad \lambda_i = j\kappa_i, \quad (1.28)$$

où \mathbf{K} et \mathbf{M} sont les matrices respectives de masse et de raideur définies précédemment. \mathbf{L} et \mathbf{H} sont des matrices respectivement asymétrique et symétrique semi-définie positive, toutes deux étant dépendantes de ω et du tenseur d'élasticité [26]. Ces deux matrices sont liées aux valeurs propres λ , maintenant incluses directement dans les équations de comportement de la structure. De cette manière, la périodicité est également incluse dans ces équations, et les nouvelles conditions aux limites sont de simples conditions de périodicité, avec une fonction périodique sur \mathfrak{R} de type :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}+\mathbf{L}_{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}+\mathbf{L}_{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}} \end{cases} \quad (1.29)$$

Ce qui donne, en se limitant aux frontières de la cellule (figure 1.32) :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{L}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{D}} \end{cases} \quad (1.30)$$

Un avantage notable de la SCOM est qu'un amortissement viscoélastique, c'est-à-dire dépendant de la fréquence, sera pris en compte, contrairement à la WFEM [13]. C'est particulièrement utile pour les matériaux fortement viscoélastique comme certains polymères.

La méthode détaillée est décrite dans l'article de Collet *et al.*[26].

1.6.6 Méthodes utilisées

Pour la WFEM comme pour la SCOM, deux méthodes sont possibles pour résoudre le problème aux valeurs propres bidimensionnel :

Méthode WFE (resp. SCO) directe Ici le nombre d'onde λ_i est fixé, on résout donc l'équation (1.26) (resp. (1.28)) pour trouver les pulsations propres ω_i , et donc les fréquences propres f_i . L'ensemble du diagramme de dispersion est obtenu en opérant un balayage de κ_x et κ_y .

Méthode WFE (resp. SCO) inverse Ici la fréquence - c'est-à-dire ω - est fixé, on résout donc l'équation (1.26) (resp. (1.28)) pour trouver les valeurs propres λ_i , et donc les nombres d'onde κ_i . L'ensemble du diagramme de dispersion est obtenu en opérant un balayage fréquentiel.

Pour la SCOM directe, les variables sont exprimées selon un nombre d'onde $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$ et l'angle $\theta_{eff} = \arg(\boldsymbol{\kappa})$, soit pour une IBZ rectangulaire :

$$\theta_{eff} = \begin{cases} \frac{\theta}{\pi/4} \theta_{AOB} & \text{si } \theta \in (OAB) \\ \left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\pi/4} \theta_{AOB} & \text{si } \theta \in (OBC) \end{cases} \quad (1.31)$$

où $\theta_{AOB} = \widehat{AOB} = \arctan\left(\frac{L_x}{L_y}\right)$.

En tout, quatre méthodes sont donc applicables. Une étude comparative est effectuée pour choisir la méthode la plus intéressante pour la suite des calculs.

1.6.7 Comparaison des méthodes de calcul

Le paragraphe précédent décrit quatre méthodes de calcul pour obtenir la relation de dispersion des métamatériaux étudiés. Afin de choisir judicieusement quelle méthode utiliser, leur comparaison est effectuée ici. En particulier, deux critères sont choisis pour cette comparaison : la résolution observée à temps de calcul équivalent, et inversement le temps de calcul pour obtenir une résolution satisfaisante sur chaque mode d'un cas choisi.

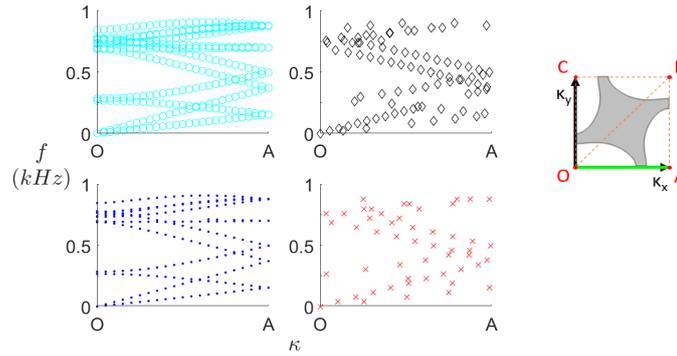


FIGURE 1.33 – Diagrammes de bande de la branche OA de l’IBZ du motif S_0 précomprimé à hauteur de $\varepsilon = 10\%$ dans la direction Y , obtenus pour un temps de calcul de 90 secondes. \circ WFEM, \bullet SCOM, \diamond WFEM inverse, et \times SCOM inverse.

Peu pertinent, le détail de la cellule choisie ici sera éludé. C’est un motif S_0 comprimé à 10%, décrit plus en détail au chapitre 3, section 3.2.2.

Pour la première comparaison, un temps de calcul fixe est choisi (90 secondes) et les diagrammes correspondants sont tracés sur la figure 1.33. Pour clarifier les résultats, seuls les modes sous $1kHz$ sont affichés.

Une différence nette est observée entre les méthodes directes (cercles cyan et points bleus) et les méthodes inverses (losanges noirs et croix rouges). Pour rappel, les premières sont définies par un nombre d’onde fixé afin de trouver les fréquences propres, tandis que pour les secondes, la fréquence f est fixée pour trouver les nombres d’onde associés aux modes propres. La lecture de ces derniers est bien plus aisée avec les méthodes directes qu’avec les méthodes inverses. En particulier lorsque les vitesses de groupe sont très faibles, c’est-à-dire lorsque les branches sont quasi horizontales, très peu de points sont observés avec les méthodes inverses.

Le mode proche de $700Hz$ est par exemple indétectable par les méthodes inverses, à moins d’effectuer les calculs avec un balayage paramétrique de résolution extrêmement fine, ce qui augmenterait le coût de calcul de manière drastique. Entre les méthodes directes, la WFEM (27 points par mode) donne des résultats légèrement plus précis que la SCOM (21 points par mode), mais cette différence s’accroît pour les méthodes inverse, où la WFEM (resp. SCOM) donne une résolution de $20Hz$ (resp. $38Hz$). L’avantage des méthodes inverses est que le nombre de valeurs propres à déterminer est souvent plus faible, mais le gain de temps résultant est minime en comparaison avec la perte de résolution.

La différence du coût de calcul entre les méthodes est estimée par un second critère. Obtenir une résolution parfaitement identique avec les quatre méthodes étant impossible, on s’attachera à comparer le temps nécessaire pour obtenir une résolution acceptable sur l’ensemble des modes, de manière à en assurer une lecture aisée sur les diagrammes de bandes (figure 1.34).

Les méthodes directes sont très faciles à régler car le nombre de points sur chaque branche

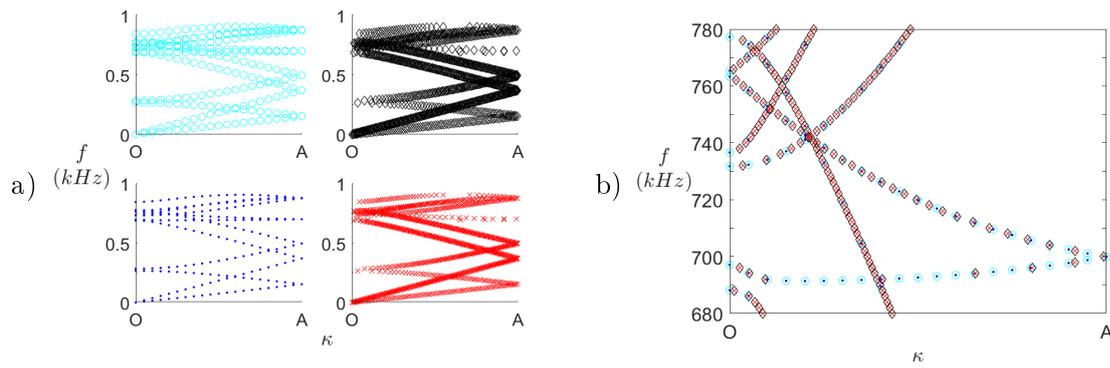


FIGURE 1.34 – Diagramme de bande pour la branche OA de l'IBZ, en considérant le motif S_0 en compression axiale (axe Y) $\varepsilon = 10\%$. \circ WFEM, \bullet SCOM, \diamond WFEM inverse, et \times SCOM inverse. a) Diagrammes pour chaque méthode et b) comparaison pour les modes compris entre $680Hz$ et $780Hz$.

est le nombre de pas choisi dans l'étude paramétrique. Les courbes cyan (WFEM) et bleue (SCOM) sont ainsi obtenues avec 21 points selon κ . Chaque branche y est parfaitement lisible. Les résultats sont identiques mais la WFEM est légèrement plus rapide (1'26) que la SCOM (1'29).

Contrairement aux méthodes directes, les résultats obtenus par méthodes inverses (courbes noire et rouge) sont très sensibles à la vitesse de groupe des modes : plus ceux-ci seront plats, plus la résolution doit être fine. Avec un pas fréquentiel de $2Hz$, le temps de calcul est de 18'15 pour la WFEM et 25'20 pour la SCOM. Malgré le coût bien plus important qu'avec les méthodes directes, l'agrandissement sur la figure 1.34b montre que le mode autour de $700Hz$ reste difficile à suivre avec les méthodes inverses.

Plus rapides et plus précises, les méthodes directes semblent plus adaptées à nos simulations. Comme mentionné dans la description de la SCOM, celle-ci présente l'avantage de prendre en compte l'amortissement, même s'il est visqueux, c'est-à-dire dépendant de la fréquence. À l'inverse, introduire un amortissement visqueux dans la WFEM implique un nombre d'onde complexe, ce qui complique fortement la résolution du problème aux valeurs propres. Cependant, comme ce l'amortissement est considéré constant en fréquence lors des calculs, la méthode WFE directe est préférée car elle est légèrement plus rapide que la SCOM directe. Dans certains cas avec simultanément des vitesses de groupe très basses et très élevées, un calcul par WFE inverse peut également venir compléter les résultats et faciliter la lecture des modes tout en conservant un temps de calcul réduit.

Chapitre 2

Caractérisation matériau

Afin d'utiliser des modèles matériaux pertinents lors des étapes de calculs numériques, une partie de la thèse est dédiée à la caractérisation des élastomères utilisés par la suite. Dans un premier temps, les principes de caractérisation et les phénomènes d'intérêt liés au matériau sont présentés. Le matériel d'essais est détaillé dans la deuxième partie, notamment le banc d'essais dynamiques conçu spécialement pour tester les performances de systèmes mécaniques précontraints pour l'isolation. Un rapport d'essais de caractérisation matériau est finalement présenté. Il comprend les résultats et l'analyse d'essais statiques et dynamiques sur les matériaux élastomères utilisés pour fabriquer les échantillons.

2.1 Caractérisation mécanique des matériaux

Pour comprendre et modéliser correctement le comportement d'un matériau, des essais sur des éprouvettes aux formes simples sont souvent réalisés. De manière évidente, ces essais diffèrent selon les propriétés d'intérêt et les applications prévues. Les travaux menés ici nécessitent la connaissance des propriétés mécaniques statiques du matériau constitutif, indispensables pour l'étude de la déformation des métamatériaux. Mais la composante vibroacoustique de ce travail impose aussi de vérifier les propriétés dynamiques du matériau, c'est-à-dire si ses propriétés mécaniques varient en fréquence. Dans une première partie, les principes d'essais mécaniques utilisés sont expliqués, suivis des bancs d'essais associés. Enfin les résultats de caractérisation pour deux matériaux sont détaillés.

2.1.1 Caractérisation statique : traction uniaxiale

Différents tests mécaniques existent afin de déterminer les propriétés mécaniques statiques d'un matériau. Parmi les tests de caractérisation classiques, on recense les tests de traction, de compression, de cisaillement pur, de cisaillement simple, de flexion. Toutefois, on considère ici un modèle très simplifié du matériau. Seul l'essai de traction uniaxiale est donc abordé et mis en œuvre. Le test de traction uniaxiale est le plus simple et le mieux connu des tests de mécanique statique. Il consiste à tirer longitudinalement sur une éprouvette de type "haltère", c'est à dire avec une partie fine comprise entre deux parties de section plus importante. Des congés sont souvent ajoutés entre les deux sections pour réduire les concentrations de contraintes. La longueur considérée reste celle où la section est minimale et en cas de rupture,

la fracture prendra place près du milieu de l'échantillon.

Cet essai est généralement utilisé pour déterminer la courbe de contrainte-déformation, et donc le module de Young du matériau. Allié à des mesures optiques par corrélation d'images, le coefficient de Poisson peut aussi être obtenu.

2.1.2 Phénomènes dissipatifs

Effet Mullins

Lors de l'étude d'élastomères, un comportement non négligeable de ces matériaux est l'effet Mullins. Ce phénomène, aussi appelé adoucissement ou accommodation, est nommé d'après Leonard Mullins qui consacre plusieurs articles sur le sujet [82, 83, 84]. On peut résumer ses caractéristiques de la manière suivante.

Lors de cycles de déformation d'un élastomère, la raideur diminue au fil des premiers cycles, pour des déformations inférieures à la déformation maximale du premier cycle. L'adoucissement maximal est observé entre les premier et deuxième cycles, et le comportement se stabilise après quelques cycles.

Pour des déformations au-delà de la déformation maximale enregistrée par l'éprouvette, le matériau n'est pas adouci : la raideur augmente et tend vers la courbe qui serait obtenue par une première traction uniaxiale.

On notera que l'effet Mullins est indépendant de la vitesse de sollicitation. Il est donc à distinguer de l'effet Payne, qui traduit la dépendance de la viscosité en fonction de l'amplitude de déformation.

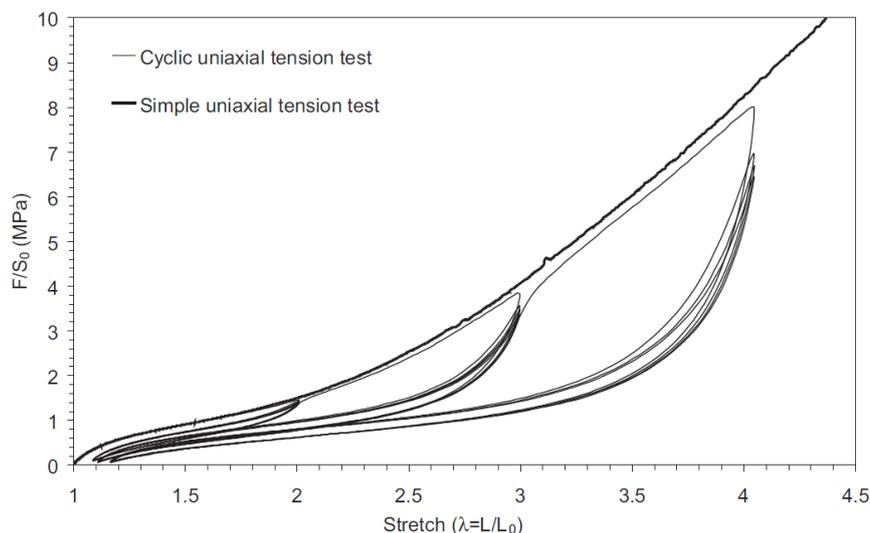


FIGURE 2.1 – Mise en évidence de l'effet Mullins. Courbes contrainte-déformation d'un caoutchouc synthétique (SBR) chargé au noir de carbone (50 PHR) soumis à une traction uniaxiale simple et à une traction uniaxiale cyclique avec déformation maximale croissante tous les 5 cycles (Issu de [30])

Un graphe tiré de la littérature est montré sur la figure 2.1. On y voit nettement, pour chacune des trois valeurs de déformation maximale, la différence entre le premier cycle et les suivants. On notera également le raidissement au-delà de la valeur de déformation maximale,

et l'enveloppe formée par les premiers cycles, très proche du test de traction simple (en gras). L'effet Mullins est parfois assimilé à de l'endommagement, bien que les dégradations liées à cet effet soient en réalité recouvrables. Selon la température, le matériau peut en effet mettre plusieurs mois à retrouver son état initial. Étant donné que cet effet ne concerne que les premiers cycles de sollicitation d'un matériau, la méthode classique consiste à ne prendre en compte que le comportement stabilisé. Dans le cas d'un système réel, l'effet de l'amplitude de déformation implique de connaître la déformation maximale appliquée au système en conditions réelles, afin de pouvoir en prédire le comportement, ce qui peut être problématique en cas de champ de déformation non homogène dans le système.

Viscosité

La viscosité désigne l'effet de la vitesse de sollicitation sur le matériau, et est généralement associée au glissement relatif des chaînes moléculaires. Plus strictement, cela se traduit par une dépendance en fréquence de l'amortissement du matériau. En particulier, le module complexe d'un matériau homogène isotrope linéairement visqueux s'exprime :

$$E^* = E(\omega)(1 + \beta\eta_E(\omega)), \quad (2.1)$$

avec E le module conservatif et η_E le facteur d'amortissement du matériau. Parmi les cas particuliers de 2.1, on peut citer l'amortissement visqueux : $E(\omega) = E^0$ et $\eta_E(\omega) = \omega\eta^0$, ou encore l'amortissement hystérétique : $E(\omega) = E^0$ et $\eta_E(\omega) = \eta^0$.

Les propriétés des élastomères dépendent fortement de la température, et ils présentent en particulier une température de transition vitreuse T_g , où le matériau passe de l'état vitreux à l'état caoutchouteux. En dessous de T_g , l'élastomère est en effet très rigide, tandis qu'au delà, il acquiert ses propriétés élastiques remarquables. Dans ce domaine de température, le module d'élasticité reste relativement stable : on parle alors de plateau caoutchoutique. En revanche, les propriétés du matériau varient rapidement autour de T_g , notamment la viscosité qui est maximale en ce point. Il est donc important de mesurer expérimentalement la viscosité des matériaux utilisés, afin de s'assurer de la tenue en température des éprouvettes et de la robustesse des résultats. Ces mesures peuvent être réalisées par une analyse mécanique dynamique, dont le principe est détaillé à la section 2.1.3.

On notera qu'un matériau viscoélastique présente simultanément des caractéristiques visqueuses et élastiques. Comme pour un solide élastique, toute contrainte entraîne une déformation réversible. Mais comme pour un fluide visqueux, cette déformation dépend de la vitesse de sollicitation.

2.1.3 Caractérisation dynamique - DMA

L'analyse mécanique dynamique - ou DMA pour *Dynamic Mechanic Analysis* - est une méthode expérimentale de mesure de la viscoélasticité. Cette technique permet de caractériser le comportement mécanique d'un matériau en fonction des fréquences et amplitudes de sollicitation, ainsi que des températures. Il est particulièrement important pour l'étude des polymères, matériaux généralement assez sensibles aux variations fréquentielles ou thermiques. Pour l'étude quasi-statique, l'utilisation de cette méthode de caractérisation permet donc de

vérifier la stabilité des propriétés du matériau en température. En dynamique, cette vérification est également valide, mais l'intérêt premier de la méthode est alors la caractérisation du comportement mécanique du polymère sur une très large gamme de fréquence grâce au principe d'équivalence Temps-Température, détaillé par la suite.

Description de l'essai

La DMA consiste à effectuer des essais périodiques dont on peut faire varier la fréquence de sollicitation, l'amplitude, ainsi que la température. L'essai classique consiste à solliciter l'éprouvette en traction, avec ou sans tension initiale constante. Cela permet de déterminer le module mécanique complexe du matériau $E^* = E' + jE''$ où E' est le module de conservation correspondant au comportement purement élastique du matériau tandis que le module de perte E'' correspond à l'amortissement du matériau.

La machine permet également la mesure du module de cisaillement du matériau, grâce à des mors spéciaux.

Il convient d'expliciter d'autres grandeurs obtenues par DMA qui seront souvent utilisées par la suite. Par exemple, le facteur de perte $\tan(\delta) = \frac{E''}{E'}$ mesure l'amortissement. Il est particulièrement utile pour déterminer la température de transition vitreuse T_g , température à laquelle la valeur du facteur de perte est généralement maximale. Cette température peut également être déterminée par un essai DSC (pour *Calorimétrie Différentielle à Balayage* ou *Differential Scanning Calorimetry* en anglais).

L'élasticité du matériau peut également être exprimée via la raideur $k^* = k' + ik''$. Ces différentes grandeurs se déduisent de leur module E associé par la formule $k^\diamond = E^\diamond \times S/h$ (pour une éprouvette de section S et de dimension longitudinale h), où \diamond peut être remplacé par $\{', ', *\}$. Il existe aussi des grandeurs G pour le cisaillement, équivalentes aux E présentés ici pour la traction-compression. Un échantillon de petite taille est soumis à une contrainte (contrôle en effort) ou à une déformation (contrôle en déplacement) sinusoïdale. Pour des raisons de temps de convergence, la deuxième méthode est ici préférée.

Le montage est placé dans une enceinte thermorégulée pour maîtriser la température d'essai. On peut ainsi chauffer le montage pour avoir des températures supérieures à celle de l'air ambiant (jusqu'à 450°C) ou le refroidir à l'aide d'azote liquide (jusqu'à -140°C).

Balayage en température

Le balayage en température est la première étape pour caractériser un polymère. Il consiste à parcourir une grande gamme de température en mesurant E^* pour quelques fréquences de sollicitation. Ces courbes permettent de mettre en évidence le phénomène de transition vitreuse caractérisé par la chute de module ainsi que le pic d'amortissement. Cela simplifie le réglage des essais suivants notamment au niveau des pas de température : le matériau étant bien plus sensible aux variations de température durant la transition vitreuse, une résolution thermique importante est nécessaire autour de T_g . Plus la température s'éloigne de cette valeur, plus la résolution peut être faible.

Principe d'équivalence temps-température

Dans le cas d'essais périodiques, l'effet de la fréquence de sollicitation sur les grandeurs viscoélastiques d'un polymère amorphe - tel qu'un élastomère rhéologiquement simple - est inverse à celui de la température. Les effets de la fréquence et de la température sont donc dépendants. Or, les fréquences programmables lors d'un test DMA sont assez limitées (e.g. entre 0.01Hz et 100Hz sur la machine utilisée, voir la section 2.2.2). On utilise donc ce principe pour étendre cet intervalle et ainsi réduire le nombre de mesures nécessaires à la caractérisation du matériau.

Après avoir déterminé les courbes isothermes grandeurs viscoélastiques-fréquence à différentes températures, ce principe est appliqué en introduisant un facteur de translation $a_t(T)$ (ou *shift factor* en anglais), afin de corrélérer ces grandeurs dans toute la gamme de température et de fréquence de mesure. En effectuant un changement de variable de type $f' = a_t(T).f$, les courbes isothermes se superposent et constituent ainsi des courbes décrivant les propriétés viscoélastiques à température constante sur un très large intervalle de fréquences, appelées courbes maîtresses. En passant en échelle logarithmique, le changement de variable devient une translation fréquentielle car $\log(f') = \log(a_t(T)) + \log(f)$. Le schéma sur la figure 2.2 illustre ce principe.

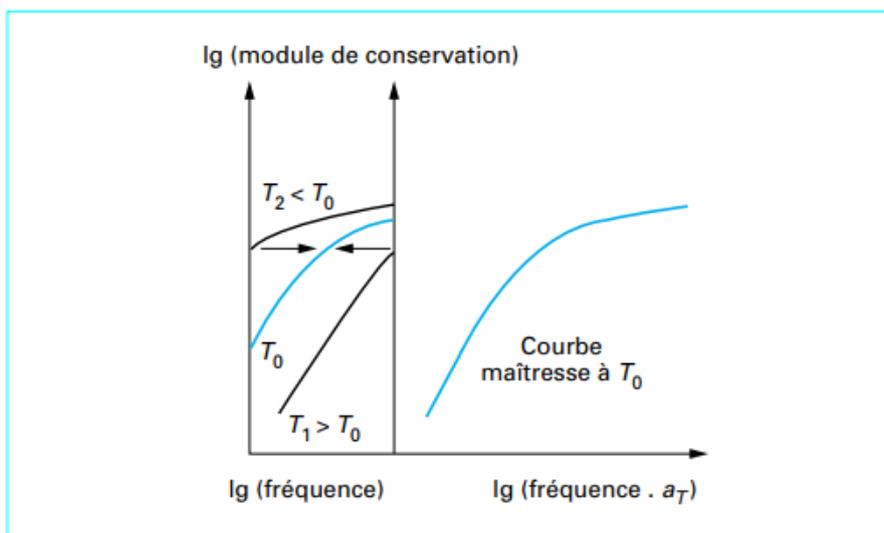


FIGURE 2.2 – Illustration de l'application du principe d'équivalence temps-température (source : Techniques de l'ingénieur)

Courbe maîtresse

La courbe maîtresse d'un polymère donne l'évolution du module mécanique complexe à une température donnée en fonction de la fréquence. Pour cela, des mesures à différentes fréquences sont effectuées comme précédemment, mais avec des pas de température bien plus fins. On peut alors plus facilement appliquer le principe d'équivalence temps-température décrit précédemment. Cette courbe permet de s'affranchir de la limite fréquentielle du dispositif expérimental, et de décrire ainsi une gamme de fréquence bien plus vaste que celle atteignable

par le dispositif de DMA.

2.2 Bancs d'essais

2.2.1 Traction-compression

Les machines de traction-compression sont assez courantes car relativement simples d'utilisation, robustes, et très polyvalentes. La machine de traction-compression utilisée pour la caractérisation des matériaux (section 2.1) est une Instron 3365 de capacité maximale 5kN (figure 2.3). Pour les échantillons de métamatériaux testés en compression, la force estimée par les simulations étant plus importante que précédemment, une machine de traction-compression Instron 3367 de capacité maximale 30kN a été choisie. Elle a également été utilisée pour des essais de traction plane, non présentés ici ; les sections des éprouvettes étant bien plus grandes que celles en traction uniaxiale, l'effort nécessaire est également plus important. Dans les deux cas, les essais sont pilotés grâce au logiciel Bluehill 3 développé par Instron.



FIGURE 2.3 – Machine de traction Instron 3365.

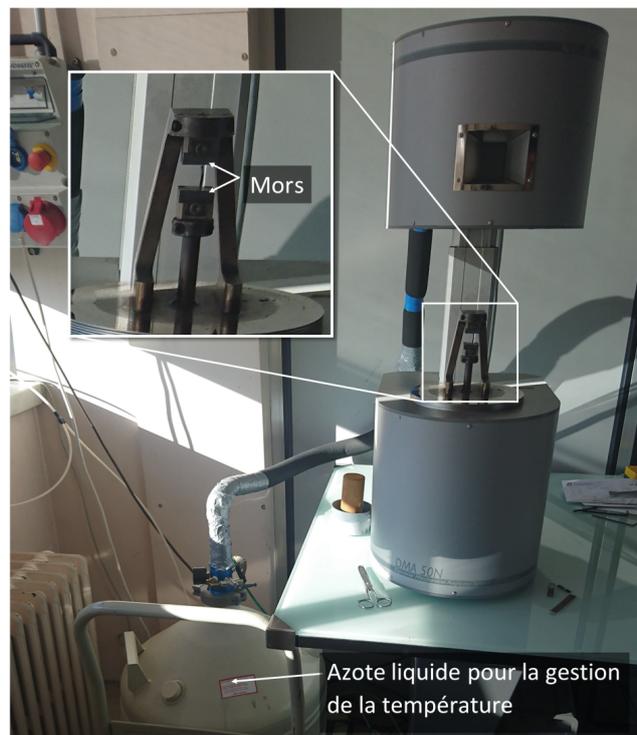


FIGURE 2.4 – Dispositif pour les essais DMA.

Bien que le contrôle en effort soit possible, la stabilisation lors des essais est plus rapide avec un contrôle en déplacement. De plus, lorsque la contrainte est fortement non linéaire et non monotone, le suivi en effort ne permet pas d'obtenir la courbe complète. Le contrôle en déplacement est donc choisi pour l'ensemble des essais de traction-compression présentés ici.

2.2.2 DMA

Pour effectuer les essais de caractérisation mécanique dynamique de matériau (section 2.1.3), le banc DMA (pour *Dynamic Mechanical Analysis*) - appelé aussi viscoanalyseur - du labo-

ratoire a pu être utilisé. Il s'agit d'une machine permettant de mesurer la réponse dynamique d'une éprouvette soumise à une sollicitation harmonique de faible amplitude. En particulier, le retard de phase de la réponse permet de déduire la viscosité du matériau, en fonction de la fréquence d'excitation.

La photo 2.4 présente la machine, avec les mors de traction-compression ainsi que la bouteille d'azote liquide permettant la descente en température. La machine est une DMA 50 (indiquant une force maximale de 50N) de la marque Metravib commandée via le logiciel Dynatest.

2.3 Résultats de caractérisation d'élastomères

2.3.1 TPU 95A

Présentation

Les polyuréthanes thermoplastiques, ou TPU, sont des thermoplastiques élastomères. Celui utilisé ici est le TPU 95A de la marque Ultimaker. Le terme "95A" représente la valeur de dureté Shore A. Les propriétés intéressantes pour nos applications sont ses taux d'allongements importants et la possibilité de le mettre en forme par impression 3D. Parmi ses qualités, on peut aussi citer de bonnes résistances à l'usure, à l'abrasion, à la corrosion, et aux impacts. Toutefois, ses défauts notables sont son inadéquation avec des applications hautes températures (au-delà de 100°C), et sa température de transition vitreuse (-24°C) proche de la température ambiante. Les propriétés principales issues des données fournisseur sont listées sur la table 2.1. L'ensemble des données disponibles sont accessibles en annexe A.

Propriété	Valeur
Module en traction	26.0MPa
Module de flexion	78.7MPa
Limite d'allongement élastique	55.0%
Allongement à rupture	580.0%
Transition vitreuse	-24°C

TABLE 2.1 – Propriétés données par le fabricant du TPU utilisé.

Traction uniaxiale

Les essais de traction sont réalisés sur une éprouvette haltère de section rectangulaire, imprimée par fabrication additive. Les dimensions sont indiquées sur la figure 2.5.

Les tests de traction sont présentés sur la figure 2.6a. Ils sont composés de trois niveaux de déformation ε_{max} (20%, 35%, et 50%), chacun composé de cinq cycles de traction-compression, à une vitesse de 1mm/min. Le contrôle se fait en déplacement et le point de départ du nouveau cycle est fixé à $\varepsilon = 0$, ce qui peut entraîner des valeurs de contrainte négatives, selon le caractère viscoélastique du matériau.

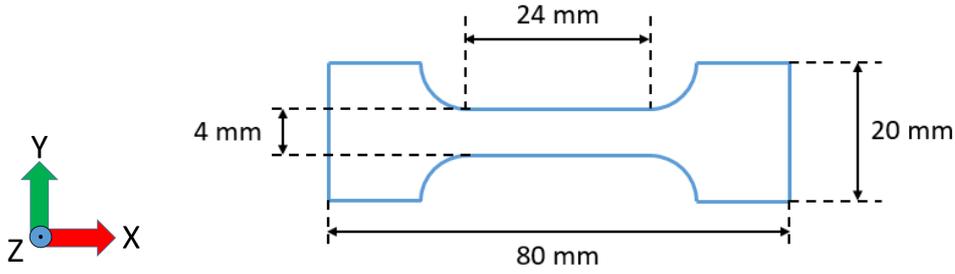


FIGURE 2.5 – Dimensions des éprouvettes de traction fabriquées. L'épaisseur en Z est de 4mm .

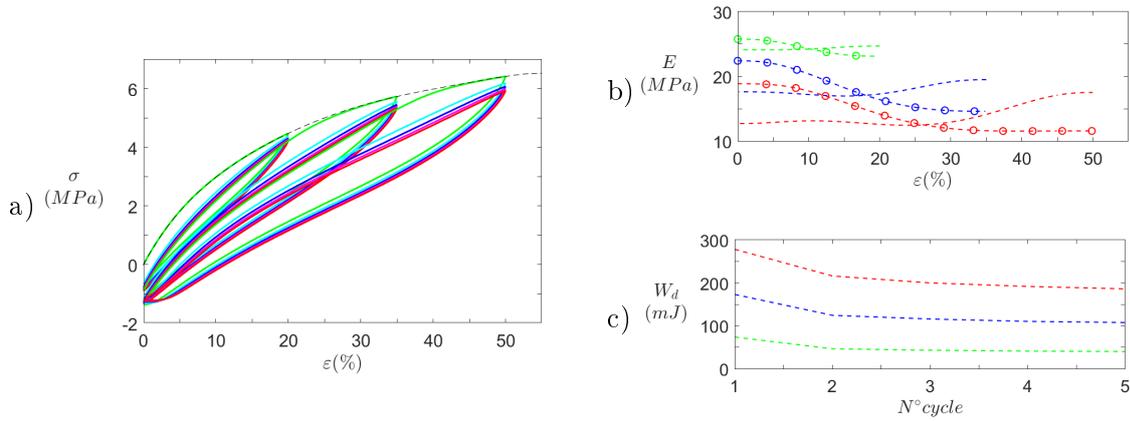


FIGURE 2.6 – Cycles de traction du TPU. a) — 1^{er}, — 2^{ème}, — 3^{ème}, — 4^{ème}, et — 5^{ème} cycles pour chaque niveau de déformation ε_{max} (20%, 35%, et 50%). - - - Courbe enveloppe extrapolée à partir des premiers cycles. b) Module d'élasticité E pour le dernier cycle - - - à $\varepsilon_{max} = 20\%$, - - - à $\varepsilon_{max} = 35\%$, et - - - à $\varepsilon_{max} = 50\%$. Les phases de traction de chaque cycle sont indiquées par des cercles. c) Évolution de l'énergie dissipée W_d au fil des cycles pour — 20%, — $\varepsilon_{max} = 35\%$, et — $\varepsilon_{max} = 50\%$.

Une première spécificité des courbes est la différence importante existant entre les phases de traction et les phases de compression. Cela montre le fort pouvoir dissipatif du matériau. En effet, l'énergie dissipée W_d lors d'un cycle correspond à l'aire \mathcal{A} de ce cycle, c'est-à-dire :

$$W_d = V \int_{\varepsilon} (\sigma|_{traction} - \sigma|_{compression}) d\varepsilon \quad (2.2)$$

où V est le volume du système. La figure 2.6c présente cette énergie dissipée pour chaque cycle. On voit que l'aire tend à se stabiliser, mais continue de décroître après cinq cycles.

La figure 2.6a montre également que le comportement du matériau change fortement quand plusieurs essais sont réalisés à la suite. C'est l'expression de phénomènes dissipatifs comme la viscosité et l'effet Mullins (voir section 2.1.2).

L'effet Mullins est clairement visible sur la figure 2.6a, où les niveaux de contrainte des premières tractions (en vert) pour chaque palier sont supérieurs aux autres. Sur la première courbe des deuxième et troisième niveaux, noter le changement de pente peu après avoir dépasser l'amplitude maximale du niveau précédent. C'est une caractéristique typique de l'effet Mullins, puisque l'accommodation du matériau ne concerne que les déformations inférieures à la déformation maximale enregistrée par le matériau. La courbe tend donc à rejoindre la

courbe de traction simple, qui serait proche de l'enveloppe tracée en pointillés noirs sur la figure 2.6a. Ici, cette courbe est issue d'une extrapolation polynomiale d'ordre 6 destinée à mieux visualiser l'allure d'une traction simple de grande amplitude.

Les cycles suivants de chaque palier sont presque confondus, mais cinq cycles sont à peine suffisants pour stabiliser le comportement du matériau. Cependant l'effet Mullins et la viscoélasticité sont difficiles à distinguer sur ces résultats. Concrètement, l'effet Mullins aura tendance à faire baisser les courbes mais avec peu d'influence sur l'aire du cycle. D'un autre côté, la viscosité sera considérée stabilisée si l'énergie dissipée reste constante. Au vu des résultats de la figure 2.6c, on peut donc supposer que l'effet Mullins s'exprime principalement sur le premier cycle, et que la viscosité est responsable de la variation entre les cycles suivants. Comme l'effet Mullins est indépendant de la vitesse de sollicitation, contrairement à la viscosité, des essais complémentaires à différentes vitesses ainsi que des mesures du temps de recouvrement du matériau donneraient des informations plus précises sur ce point.

Un autre phénomène à prendre en compte est la forte dépendance de la raideur par rapport à la déformation (figure 2.6b). D'une part, la pente - i.e. le module d'élasticité - au cours d'un cycle n'est presque jamais constante, notamment pour les déformations inférieures à 20% pour lesquelles on observe un net assouplissement lorsque la déformation augmente. D'autre part, en comparant l'allure des trois niveaux de déformation, on voit que la pente est sensiblement plus faible pour les niveaux plus élevés. La déformation maximale enregistrée influe donc sur la raideur pour une déformation inférieure : c'est l'effet d'histoire. Le module d'élasticité du matériau dépend donc non seulement de l'état de déformation, mais également de l'effet d'histoire.

Ces effets sont mis en exergue sur la figure 2.6b, qui montre bien que le module d'élasticité est fortement dépendant de la déformation ε , mais également de l'amplitude du cycle considéré (courbes de couleurs différentes). On observe aussi la différence entre cycles de compression (marqués par des cercles) et de traction (sans cercles). Finalement on notera que la valeur initiale de la courbe de compression à 20% (en vert avec cercles) est proche de la valeur de module donnée par le fabricant, à savoir 26MPa. On peut donc supposer que cette valeur fournie correspond au module d'élasticité quasi-statique dans l'hypothèse de petites déformations. Cette donnée seule est toutefois très insuffisante pour caractériser le matériau lors de grandes déformations. De plus, en examinant la courbe d'extrapolation (en pointillés noirs) de la figure 2.6a, on peut supposer que pour des amplitudes de déformation inférieures à 20% le module d'élasticité obtenu serait supérieur à 26MPa. Ce module tendrait alors vers une valeur limite pour $\varepsilon_{max} \rightarrow 0$. D'après les premiers points de mesure disponibles, cette valeur est d'environ 47MPa.

En résumé, le comportement statique du TPU est complexe : même en s'affranchissant de l'effet Mullins, ce matériau est très sensible à la déformation. Pour des structures complexes comme les métamatériaux étudiés ici, la modélisation du matériau peut être problématique et fausser ainsi la précision des simulations.

DMA

Afin de mesurer les propriétés dynamiques du TPU, des essais DMA sont réalisés. Un balayage préliminaire en température est tout d'abord effectué avant les mesures plus précises permettant de déterminer la courbe maîtresse du matériau. Se reporter à la section 2.1.3 pour une description plus détaillée du principe de l'essai.

Le balayage est réalisé de -120°C à 150°C pour 5 fréquences (0.3Hz, 1Hz, 3Hz, 10Hz, et 30Hz). La figure 2.7 ne présente que les deux fréquences les plus espacées (0.3 et 30Hz) pour une meilleure lisibilité. Les deux grandeurs présentées correspondent au module de conservation E' et au facteur d'amortissement $\tan(\delta)$ où δ est l'argument du module complexe E^* .

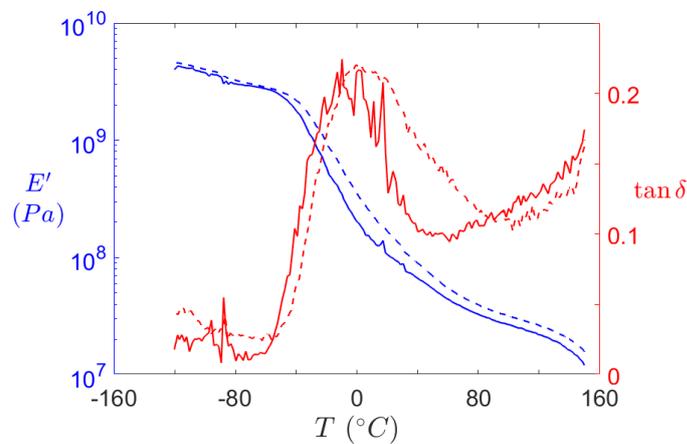


FIGURE 2.7 – Balayage en température par DMA, à fréquence constante. Module de conservation E' à — 0.3Hz et à - - - 30Hz. Facteur d'amortissement $\tan \delta$ à — 0.3Hz et à - - - 30Hz.

Ces courbes permettent de mettre en évidence le phénomène de transition vitreuse, caractérisé par une chute du module ainsi qu'un pic d'amortissement. Cette transition est particulièrement large car elle s'étend sur un intervalle d'une centaine de degré entre -50°C et 50°C . Cela signifie qu'à température ambiante le matériau est en pleine transition vitreuse et donc potentiellement assez sensible à de faibles variations de température ou de fréquence. On peut également noter que le plateau caoutchoutique est assez court ce qui est caractéristique des thermoplastiques. On observe à la fin de ce plateau le début de la « fusion » du TPU aux alentours de 145°C . Ce terme de fusion est un abus de langage car il ne s'agit pas d'une transition de phase comme la fusion au sens physique du terme. Pour les polymères thermoplastiques, il correspond à la "zone d'écoulement" du matériau, caractérisée par une chute rapide de la raideur, et généralement recherchée pour la mise en forme du matériau.

Ce premier essai permet de régler les paramètres des essais suivants notamment au niveau des pas de température. Le matériau étant bien plus sensible aux variations de température durant la transition vitreuse, les pas de température sont fins entre -50°C et 50°C , et plus importants en dehors de cet intervalle.

Pour obtenir la courbe maîtresse du TPU, les mesures DMA sont réalisées pour des isothermes allant de -60°C à 110°C sur une gamme de fréquence entre 0.1Hz à 100Hz . Ces mesures sont assez sensibles et de nombreux points peuvent être incohérents notamment pour les fréquences extrêmes. La figure 2.8 montre deux courbes isothermes du module de conservation en fonction de la fréquence, à -50°C et -45°C .

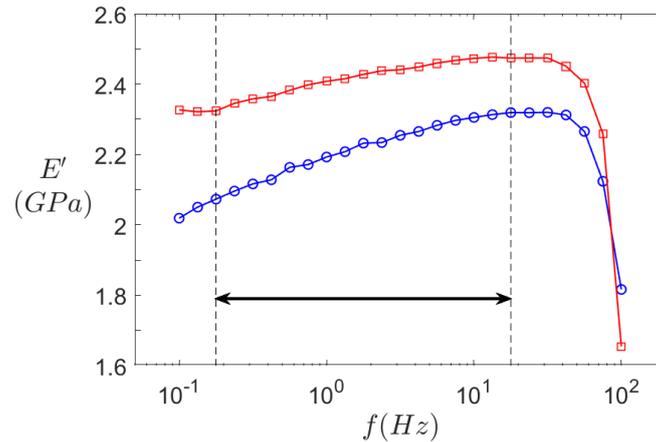


FIGURE 2.8 – Courbe du module de conservation E' pour les isothermes à $\text{---}\circ\text{---}$ -45°C et $\text{---}\square\text{---}$ -50°C

On remarque que pour ces isothermes les derniers points sont incohérents car ils indiquent une chute du module. Or, le principe d'équivalence temps-température stipule qu'une baisse de la température est équivalente à une hausse de la fréquence. La figure 2.7 confirme que le module augmente de manière monotone quand la température diminue. Les chutes du module E' sur les courbes de la figure 2.8 ne sont donc pas physiques. Cela concerne aussi bien les fréquences les plus hautes que les plus basses, comme sur la courbe isotherme à -50°C . Un intervalle fréquentiel réduit est donc choisi pour chaque isotherme, comme illustré par la flèche noire sur la figure 2.8, et les points hors de cet intervalle sont écartés lors du calcul de la courbe maîtresse. Ici, la flèche noire symbolise également la translation nécessaire pour superposer les deux courbes. Malgré un écart de seulement 5°C entre les isothermes, seuls quelques points des deux courbes se superposent. Lors du tracé de la courbe maîtresse, une extrapolation peut être nécessaire pour superposer deux courbes qui n'ont pas d'ordonnées communes, et trouver ainsi les coefficients a_t .

Le tracé de la courbe maîtresse nécessite une température de référence, sur laquelle toutes les courbes isothermes seront rapportées. Ici les essais dynamiques sont réalisés à température ambiante, l'isotherme à 22°C est donc choisie comme référence. Après avoir supprimé tous les points incohérents et réalisé les extrapolations nécessaires, on obtient les facteurs de translation thermiques de la table 2.2.

De manière évidente, le facteur de translation de la température de référence est égal à 1 qui correspond à un décalage nul. $a_t > 1$ pour les températures inférieures, ce qui correspond à un décalage vers les hautes fréquences. De même, les hautes températures donnent des facteurs de translation $a_t < 1$, soit un décalage vers les basses fréquences.

T (°C)	a_t	T (°C)	a_t	T (°C)	a_t
-60	1.65×10^{22}	-10.1	1.08×10^5	45	1.30×10^{-3}
-55	1.72×10^{21}	-1.1	3.01×10^3	50	3.27×10^{-4}
-50	4.86×10^{19}	2.6	7.33×10^2	55	9.22×10^{-5}
-45	3.79×10^{17}	10.8	3.71×10^1	60	2.81×10^{-5}
-40	4.37×10^{15}	16	8.15	70	2.17×10^{-6}
-35	1.26×10^{14}	22	1	80	2.47×10^{-7}
-30	7.68×10^{11}	30	1.07×10^{-1}	90	4.39×10^{-8}
-24.6	3.71×10^9	35	2.67×10^{-2}	100	9.01×10^{-9}
-15.7	5.72×10^5	40	5.62×10^{-3}	110	1.67×10^{-9}

TABLE 2.2 – Facteurs de translation thermique a_t pour la détermination de la courbe maîtresse du TPU à 22°C

Ces valeurs peuvent être comparées à des modèles existants afin de vérifier si elles suivent une loi. Dans ce cas, une extrapolation fréquentielle peut être facilement réalisée. Deux lois classiques existent pour les facteurs thermiques : la loi d'Arrhénius [124] et la loi de Williams-Landel-Ferry (WLF) [106]. La première est décrite par la relation :

$$\log(a_T) = \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (2.3)$$

où E_a (en Jmol^{-1}) désigne l'énergie d'activation apparente, $R = 8.314 \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits, T (en K) la température d'essais, et T_0 (en K) la température de référence.

Quant à la loi WLF, elle s'exprime selon :

$$\log(a_T) = \frac{-C_1^0(T - T_0)}{-C_2^0 + T - T_0} \quad (2.4)$$

soit :

$$\frac{T - T_0}{\log(a_T)} = \frac{T - T_0}{C_1^0} - \frac{C_1^0}{C_2^0} \quad (2.5)$$

où C_1^0 et C_2^0 sont les constantes de la loi qui dépendent du polymère et de T_0 . Les résultats du TPU pour ces deux lois sont illustrés sur la figure 2.9.

Les courbes d'interpolation des deux lois sont proches des valeurs expérimentales associées, et leurs coefficients de détermination respectifs sont corrects ($R^2 > 0.93$). Cependant, aucune loi n'est adaptée à l'ensemble du domaine de température, et une extrapolation à partir des courbes obtenues semble hasardeuse. Une telle interpolation est toutefois peu utile ici, car la plage fréquentielle obtenue par équivalence temps-température est amplement suffisante pour couvrir notre domaine d'intérêt (voir les figures 2.10 et 2.11). Les valeurs initiales de facteurs thermiques sont donc conservées pour le calcul des courbes maîtresses.

Grâce à ces facteurs, les courbes maîtresses à 22°C sont obtenues pour le module de conservation E' et le module de perte E'' . On interpole ensuite ces points expérimentaux pour obtenir des courbes lissées utilisées par la suite comme références (figure 2.10).

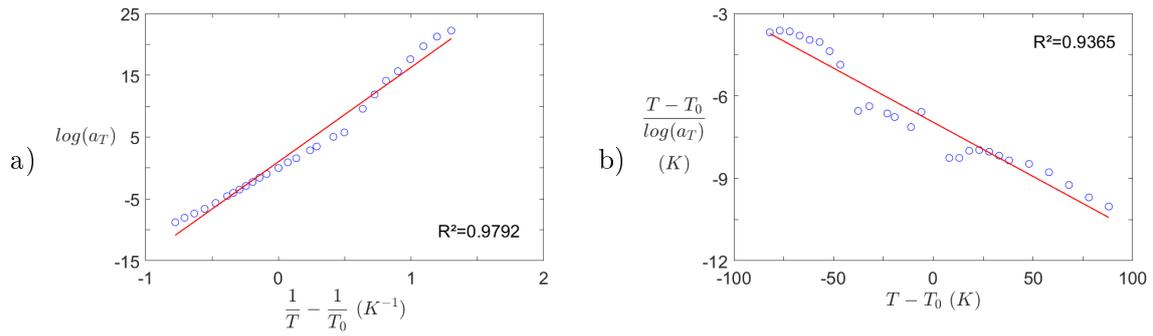


FIGURE 2.9 – Comparaison des valeurs expérimentales de a_T du TPU avec les lois de type a) Arrhénius et b) WLF. \circ Valeurs expérimentales et $—$ interpolations linéaires.

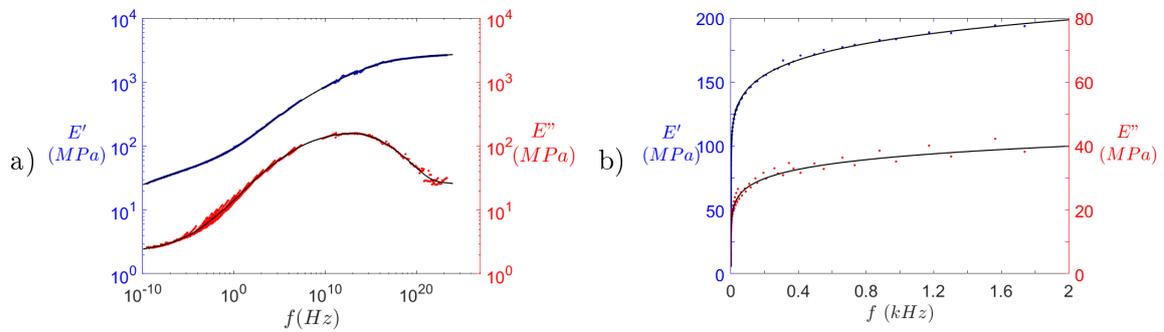


FIGURE 2.10 – Courbes maîtresses du TPU à 22°C pour les modules de \bullet conservation et de \bullet perte, avec $—$ leurs courbes d'interpolation respectives. a) Plage fréquentielle complète et b) agrandissement sur l'intervalle [0 2]kHz.

Le principe d'équivalence temps-température semble bien vérifié pour le module de conservation E' permettant une bonne superposition des différentes courbes. Pour le module de perte E'' la superposition est moins précise mais permet cependant d'avoir une courbe de tendance proche des points expérimentaux et d'avoir une bonne idée du comportement en fréquence du TPU. Sur ces courbes maîtresses, on peut noter la partie extrapolée (entre 3×10^7 Hz et 5×10^9 Hz), correspondant à l'espace entre les isothermes -15.7°C et -24.6°C . Cet écart de température, trop important pour avoir des courbes superposables, s'explique par la contenance limitée des réserves d'azote de la machine de DMA. Comme le TPU présente une transition vitreuse très étendue (-50°C à 50°C) il faut un pas de température assez fin dans cette zone et la consommation d'azote est donc élevée, d'autant que chaque isotherme nécessite un temps de stabilisation important, ce qui augmente la durée des mesures.

Globalement, les deux modules tracés varient fortement sur la plage fréquentielle complète. Le module de conservation augmente ainsi de 25MPa à 2.7GPa, et le module de perte passe de 2.5MPa à 26MPa, avec un maximum à 158MPa. Cette amplitude considérable est à mettre en parallèle de l'échelle des fréquences. En effet, le domaine fréquentiel étudié ici est assez réduit, et il convient de vérifier la variation des grandeurs sur ce domaine. La figure 2.10b montre que la variation des modules E' et E'' reste importante, notamment en basses fréquences. Même en excluant les fréquences inférieures à 50Hz, où la variation est la plus élevée,

le module de conservation passe de 135MPa à 198MPa, soit une augmentation de 47%. Idem pour le module de perte, qui subit une augmentation de 60% sur le même intervalle, bien que la dispersion des points autour de la courbe d'interpolation soit plus grande que pour E' .

Les imperfections observées pour le module de perte sont encore plus importantes pour $\tan(\delta) = E''/E'$, comme le montre la figure 2.11a). En effet, les incertitudes du module de perte sont cumulées à celles du module de conservation lors du calcul du facteur d'amortissement. Cette superposition imparfaite peut être imputée à des imprécisions de mesure, ou au fait que l'équivalence temps-température n'est pas parfaitement vérifiée pour le TPU. Étant donné que la superposition est bonne pour le module de conservation, il s'agit vraisemblablement de la seconde hypothèse. Sur la figure 2.11, la courbe interpolée de $\tan(\delta)$ est calculée à partir des interpolations des courbes de E' et E'' .

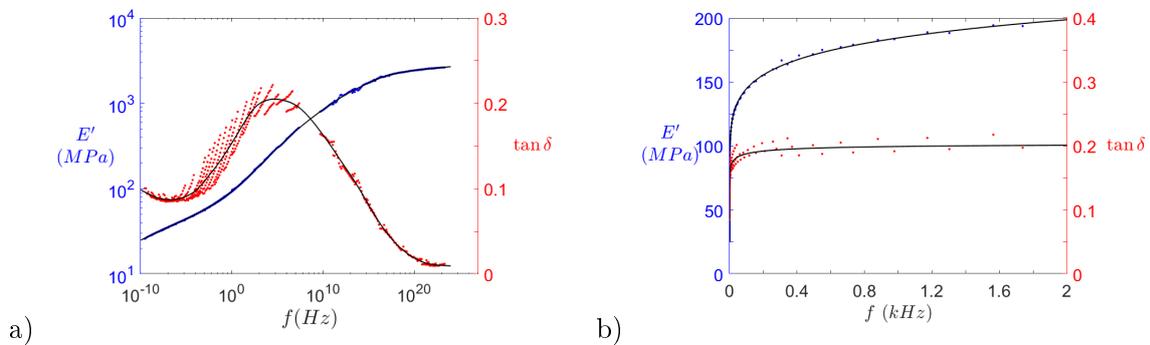


FIGURE 2.11 – Courbes maîtresses du TPU à 22°C du • module de conservation et du • facteur d'amortissement, avec leurs — courbes d'interpolation respectives. a) Plage fréquentielle complète et b) agrandissement sur l'intervalle [0, 2]kHz.

La courbe de $\tan(\delta)$ indique clairement que la transition vitreuse affecte une bande fréquentielle très étendue à température ambiante. En particulier, presque tout le domaine d'intérêt est inclus dans la zone où l'amortissement augmente. Cependant, la figure 2.11b montre que la variation de $\tan \delta$ est en réalité plus faible que celles de E' et E'' : 10% sur l'intervalle précédent ([50, 2000]Hz). On notera que la valeur limite de E' en basses fréquences est de 25MPa, soit approximativement la valeur fabricant (table 2.1). Cette valeur est cependant inadaptée à la description du comportement dynamique qui nous intéresse dans cette étude.

Étant donné que le modèle matériau recherché est linéaire, des valeurs constantes de E' et $\tan \delta$ sont retenues. Cependant, l'écart entre les modules d'élasticité statique et dynamique obtenus justifie de prendre des valeurs différentes. Ces valeurs sont indiquées dans la table 2.3, complétée par la masse volumique mesurée et par un coefficient de Poisson choisi proche de la valeur incompressible.

2.3.2 Silicone

Présentation

Le deuxième matériau utilisé dans cette thèse est un silicone élastomère, nommé vinyl polysiloxane (ou PVS), plus simplement appelé "silicone" par la suite. Le produit choisi est le Elite

Propriété	Valeur
Module de conservation statique E'_s	26MPa
Module de conservation dynamique E'_d	175MPa
Amortissement $\tan \delta$	0.2
Masse volumique ρ	1183kg/m ³
Coefficient de Poisson ν	0.499

TABLE 2.3 – Propriétés obtenues pour le TPU utilisé.

Double 32 de la marque Zhermack. Il se présente initialement sous la forme d'une base et d'un catalyseur liquides séparés. Leur mélange en proportions égales durcit en une trentaine de minutes et donne un élastomères relativement souple. Le matériau étant majoritairement utilisé pour du moulage dans le domaine dentaire, très peu de propriétés mécaniques sont données par le fournisseur. Le nombre 32 indique la dureté Shore A du matériau. L'allongement à rupture donné est de 350%. L'ensemble des données fabricant disponibles sont en annexe B.

Le silicone Zhermack Elite Double 32 est utilisé par Baravelli *et al.* [8], qui donnent les propriétés présentées sur le tableau 2.4.

Propriété	Valeur
Module d'élasticité	1.37MPa
Masse volumique ρ	1240kg/m ³
α	5
β	2×10^{-4}

TABLE 2.4 – Propriétés du silicone données par [8]. α et β sont les coefficients d'amortissement de Rayleigh.

Ces données pourront être comparées à nos résultats.

Traction uniaxiale

La plupart des paramètres d'essai de traction sont identiques à ceux choisis pour le TPU (voir section 2.3.1). Le silicone étant très élastique à température ambiante, un quatrième niveau de déformation est ajouté (soit 20%, 35%, 50%, et 70%). Contrairement au TPU, le silicone étudié est mis en forme par moulage. Les conditions de moulage pouvant affecter les propriétés du matériau, trois éprouvettes de même dimensions ont été moulées à des dates différentes, ce qui permet de confronter la robustesse des propriétés matériau.

La figure 2.12a présente les essais cycliques de traction-compression. En la comparant à la figure 2.6a, on observe immédiatement plusieurs différences.

D'une part, l'effet Mullins est quasi inexistant ici, et les courbes associées à chaque cycle sont pour ainsi dire confondues. La seule trace de ce phénomène est le décalage visible entre les différentes amplitudes de cycles. D'autre part, la différence entre les courbes de traction et de compression est très faible, ce qui montre la faible dissipation du matériau. La figure 2.6b montre d'ailleurs l'énergie dissipée au fil des cycles. Mis à part pour le cas $\varepsilon_{max} = 70\%$, aucune

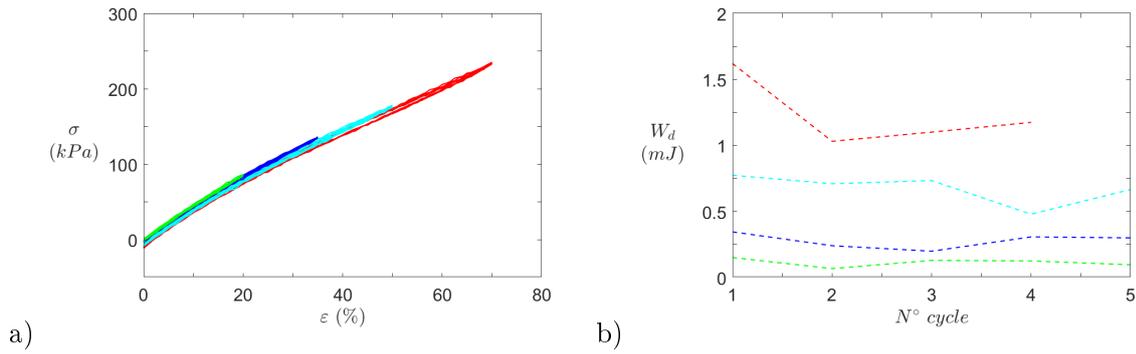


FIGURE 2.12 – a) Cycles de traction du TPU pour quatre niveaux de déformation : — 20%, — 35%, — 50%, et — 70%. b) Évolution de l'énergie dissipée W_d au fil des cycles pour --- 20%, --- 35%, --- 50%, et --- 70% de déformation maximale.

différence significative n'est observée entre le premier cycle et les suivants. L'effet Mullins est donc minimale pour le silicone. Par ailleurs, les énergies calculées ici sont inférieures à 0.5% de celles dissipées par le TPU, à déformation maximale équivalente. Enfin, les courbes sont bien plus proches du cas idéal linéaire que celles du TPU, donc plus simples à modéliser.

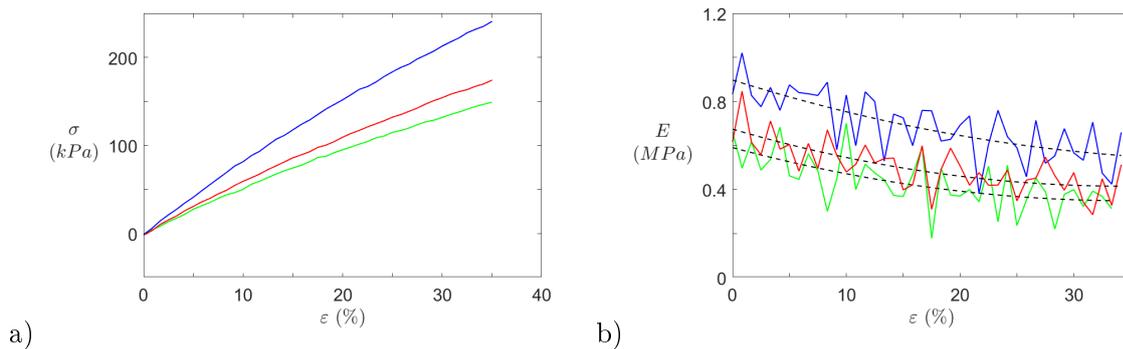


FIGURE 2.13 – Dernier cycle de traction à 35% pour trois éprouvettes haltères en silicone. a) Courbes de contrainte pour — S_{H1} , — S_{H2} , et — S_{H3} . b) Modules d'élasticité des mêmes éprouvettes avec --- leurs courbes d'interpolation respectives.

La figure 2.13a montre les résultats d'essais de traction équivalents sur trois éprouvettes de silicone, moulées à des instants et par des opérateurs différents. La dispersion observée entre ces résultats est très importante. Au vu du procédé de moulage utilisé, la cause la plus probable est la différence de proportions base/catalyseur dans le matériau. La température et l'intervalle de temps entre le moulage et l'essai peuvent aussi influencer sur les résultats. La figure 2.13b souligne la différence entre les modules d'élasticité déduits. Par comparaison avec le TPU, ces modules varient peu avec la déformation, mais la différence entre les cas extrêmes (courbes verte et bleue) est très importante (environ 50%). En revanche les modules trouvés ici sont nettement plus faibles que celui de la table 2.4.

DMA

Une DMA est également réalisée sur des échantillons en silicone. Les premiers essais sont effectués sur une large bande de fréquences, afin de déterminer la température de transition

vitreuse. La figure 2.14a montre que $T_g \approx -40^\circ C$ pour les deux fréquences extrêmes mesurées. Étant donné que les températures d'intérêt pour notre système sont vraisemblablement supérieures à T_g , on s'affranchit des températures inférieures. D'autres mesures plus fines sur le domaine $[-30, 50]^\circ C$ sont donc réalisées et présentées sur la figure 2.14b. Sur la plage de température choisie, les propriétés du matériau semblent relativement stables, donc peu dépendantes de la fréquence. Cependant, la croissance de E' avec la température est problématique. En effet, quel que soit le matériau, son module d'élasticité est supposé être monotone et décroissant lorsque T augmente. Plusieurs essais complémentaires réalisés, y compris des essais en cisaillement, aboutissent au même résultat. Dans cette situation, se baser sur les modules d'élasticité pour déterminer les courbes maîtresses n'a pas de sens. Par défaut, le principe d'équivalence temps-température est donc appliqué au module de perte.

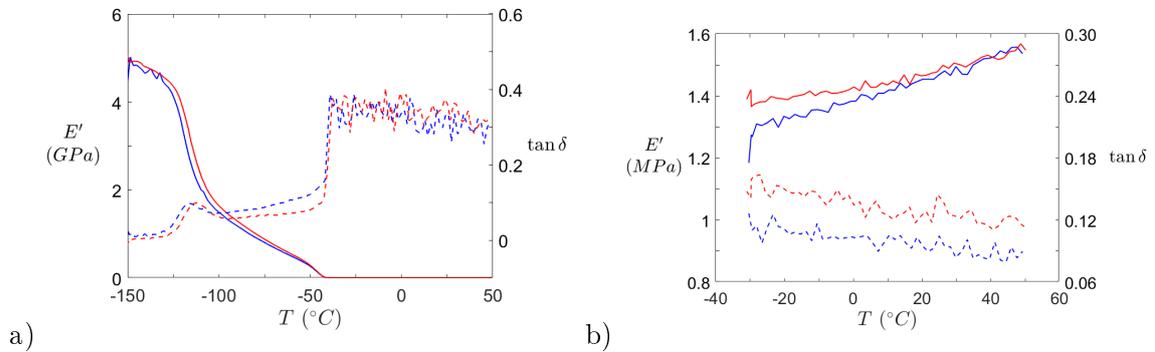


FIGURE 2.14 – Balayage en température par DMA, à fréquence constante. a) Module de conservation E' à — 0.3Hz et à — 30Hz. Facteur d'amortissement $\tan \delta$ à - - - 0.3Hz et à - - - 30Hz.

Comme pour le TPU, les facteurs de translation thermique préliminaires obtenus sont confrontés aux lois d'Arrhénius et WLF, pour vérifier s'ils suivent l'une ou l'autre de ces lois (figure 2.15).

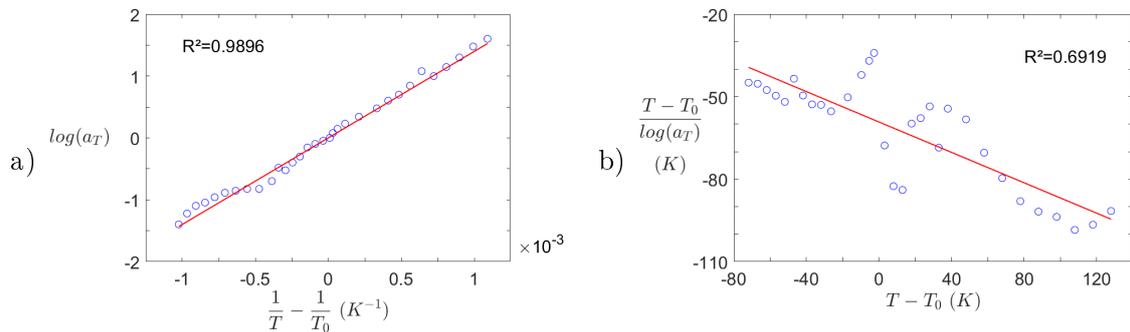


FIGURE 2.15 – Comparaison des valeurs expérimentales de a_T du silicone avec les lois de type a) Arrhénius et b) WLF. \circ Valeurs expérimentales et — interpolations linéaires.

Contrairement à la loi WLF, la loi d'Arrhénius décrit correctement les facteurs de translation trouvés (figure 2.15a). L'énergie d'activation associée est $E_a = 11.7kJ/mol$. De nouveaux facteurs thermiques respectant la loi d'Arrhénius sont donc choisis et indiqués sur la table 2.5.

T (°C)	-49.9	-44.9	-39.9	-34.9	-29.9	-24.9	-19.9	-14.9	-9.9	-4.4	48
a_t	33.5	24.4	18.1	13.5	10.2	7.85	6.07	4.75	3.75	2.92	1.96
T (°C)	12.3	16.6	19.3	21.1	25.1	30	35	40	45	50	55
a_t	1.45	1.23	1.11	1.03	0.893	0.750	0.631	0.534	0.455	0.389	0.334
T (°C)	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	
a_t	0.288	0.218	0.167	0.130	0.102	0.0817	0.0660	0.0538	0.0444	0.0369	

TABLE 2.5 – Facteurs de translation thermique a_t pour la détermination de la courbe maîtresse du silicone à 22°C

On notera que la température de référence est conservée égale à 22°C, mais comme cette température ne fait pas partie de la liste des températures de mesure, aucun facteur n'est égale à 1, bien que la courbe d'interpolation (figure 2.15a) passe effectivement par le point (0, 0). Les courbes maîtresses sont ensuite calculées selon ces facteurs, et présentées sur la figure 2.16.

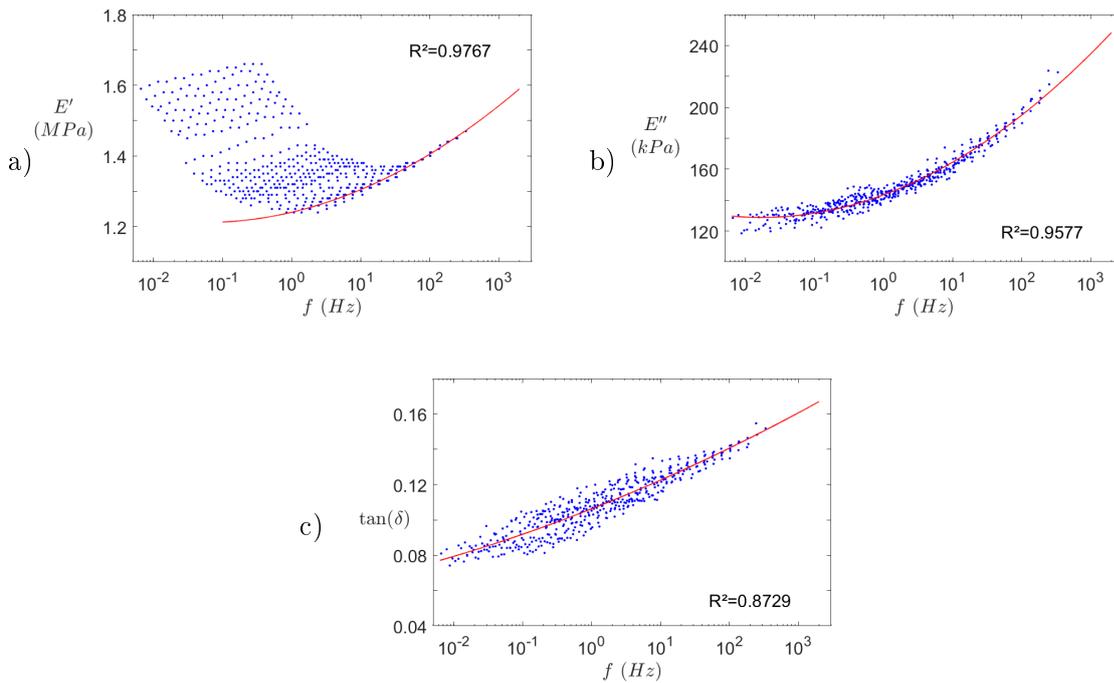


FIGURE 2.16 – Courbes maîtresses à 22°C du silicone. a) Module de conservation, b) module de perte, et c) facteur d'amortissement. • Données expérimentales et — courbes d'interpolation quadratique respectives.

Comme mentionné précédemment, le module de conservation du silicone n'est pas cohérent vis-à-vis de l'équivalence temps-température, car sa courbe maîtresse n'est pas monotone croissante en fonction de la fréquence (figure 2.16a). Il est également difficile d'interpoler une courbe sur l'ensemble des points. Le seul domaine où l'équivalence temps-température semble appliquée est pour les fréquences les plus hautes (c'est-à-dire les températures les plus basses). Une courbe d'interpolation est donc tracée pour les températures inférieures à -15°C uniquement, de manière à obtenir un coefficient de détermination satisfaisant. En considérant cette

Propriété	Valeur
Module de conservation E'	1.4MPa
Amortissement $\tan \delta$	0.1
Masse volumique ρ	1150kg/m ³
Coefficient de Poisson ν	0.499

TABLE 2.6 – Propriétés obtenues pour l'élastomère silicone utilisé.

courbe d'interpolation, son allure décroissante vers les basses fréquences pourrait expliquer la valeur statique faible obtenue par essai de traction (paragraphe 2.3.2).

Malgré le fait que la plage de température étudiée soit au-delà de la température de transition vitreuse, on observe une variation importante du module de conservation sur le domaine de la courbe d'interpolation ([0.1, 2000]Hz). Pour la suite de ce travail une valeur moyenne de $E' = 1.4\text{MPa}$ est donc choisie comme module d'élasticité linéaire isotrope.

Le module de perte étant pris comme grandeur de référence pour la détermination des facteurs de translation thermique, les données de mesure de E'' sont assez cohérentes entre elles, et le coefficient de détermination de la courbe d'interpolation quadratique est très satisfaisant (figure 2.16b). Bien que plus dispersés, les points de mesures de l'amortissement restent relativement cohérents et la courbe d'interpolation semble bien suivre l'évolution des valeurs notamment aux fréquences extrêmes (figure 2.16c). Comme pour E' , les résultats indiquent une variation fréquentielle importante. Pour la suite, un facteur d'amortissement constant $\eta = \tan \delta = 0.1$ est considéré. L'ensemble des propriétés du silicone utilisées pour les calculs est synthétisé sur la table 2.6.

Par rapport aux valeurs données au début de cette section, la valeur du module est proche, mais une différence notable (7.8%) existe entre les masses volumiques, bien que l'origine n'ait pas été déterminée. Concernant les valeurs d'amortissement, les coefficients de Rayleigh tirés de la littérature sont adaptés à de très basses fréquences ([0, 80]Hz) mais donnent un amortissement aberrant au-delà de ce domaine. Malgré la variation dynamique constatée sur la courbe maîtresse, la valeur choisie est satisfaisante sur le domaine d'intérêt ([0, 2]kHz).

Chapitre 3

Architectures

3.1 Structures à résonateurs locaux

3.1.1 Modèles analytiques

Si une représentation analytique complète d'un métamatériau serait fastidieuse, des cas simples unidimensionnels sont facilement abordables et donnent un aperçu des mécanismes en jeu et des paramètres déterminants le comportement du matériau. Tous les systèmes considérés ici sont non dissipatifs, et infinis selon la dimension étudiée. Leurs modèles analytiques sont détaillés en annexe C.

Masses identiques

Dans le cas idéal d'un matériau unidimensionnel, homogène, non dispersif et non dissipatif, le nombre d'onde et la pulsation sont liés de manière proportionnelle par la vitesse de propagation $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ de l'onde longitudinale, où E et ρ sont respectivement le module d'Young et la masse volumique du matériau. L'équation de dispersion est donc $\omega_{hom} = \kappa c_l$, avec κ le nombre d'onde. Cette équation n'est cependant plus valable pour les matériaux hétérogènes. Prenons par exemple une poutre discrétisée M_0 telle que présentée sur la figure 3.1a. Cette structure peut être représentée sous forme de chaîne périodique de masses m identiques liées par des ressorts de raideur k (figure 3.1b). Ces deux grandeurs dépendent alors des données matériau selon les expressions $k = \frac{ES}{a}$ et $m = \rho Sa$.

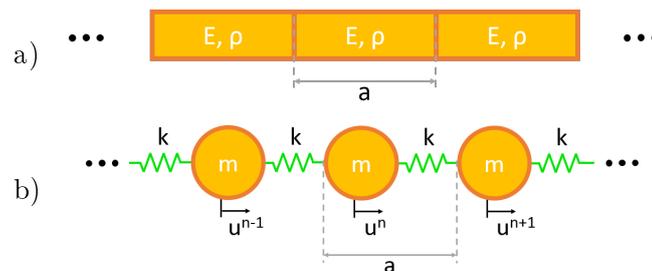


FIGURE 3.1 – Système de type M_0 . a) Poutre discrétisée (de section constante S) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.

Cette chaîne de masses-ressorts fut initialement imaginée au XVIII^{ème} siècle par Baden-Powell, puis améliorée par Kelvin afin de modéliser la propagation des ondes [14]. Pour en décrire le comportement, l'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{u}$ (où F sont les efforts appliqués à une masse m dont le déplacement est u et l'accélération \ddot{u}) est appliquée à chaque particule n :

$$m\ddot{u}^n = k(u^{n-1} - u^n) + k(u^{n+1} - u^n), \quad (3.1)$$

où u^n est le déplacement de la particule n , et $\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}$.

L'équation de dispersion est obtenue en considérant des ondes de Bloch, de la forme :

$$u^n(x, \kappa, t) = \tilde{U} e^{i\kappa(x+na)+\lambda t}, \quad (3.2)$$

où a est la dimension de la cellule périodique, κ désigne le nombre d'onde, \tilde{U} est une fonction de période a , et $\lambda = i\omega$, où $\omega = 2\pi f$ la pulsation. La dispersion est alors décrite par l'équation :

$$\omega_{inh} = \omega = \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{2} |S_\kappa| \omega_1, \quad (3.3)$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, et $S_\kappa = \sin\frac{\kappa a}{2}$. On en déduit les fréquences limites de cette branche de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$ (soit $S_\kappa = 0$) et $\kappa = \frac{\pi}{a}$ (soit $S_\kappa = 1$) :

$$\omega_{inh} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_\kappa = 0 \\ \sqrt{2}\omega_1 & \text{si } S_\kappa = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour ramener l'équation 3.3 à son équivalent homogène, les propriétés d'un bloc homogène de longueur a et de section S (voir figure 3.1a) peuvent être exprimées selon les données matériau :

$$\omega_{inh} = \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \sqrt{\frac{4ES}{\rho S h^2}} = \frac{|\sin(\kappa a/2)|}{a/2} \times \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{|\sin(\kappa a/2)|}{\kappa a/2} \times \omega_{hom} \quad (3.5)$$

On remarque que pour les basses fréquences, les deux modèles sont proches, comme illustré par la figure 3.2. En fait, l'équation 3.1 correspond à la discrétisation au sens des différences finies centrées de l'équation des ondes associée au mouvement d'une barre en traction/compression. De manière logique, ces deux équations sont donc équivalentes pour une discrétisation infiniment fine, c'est-à-dire lorsque a tend vers 0.

Comme c_l est constante, on notera que la branche du cas homogène est droite, donc non périodique, contrairement à la branche ω_{inh} .

Masse-et-masse

La structure $M_{\&}$, dénommée "masse-et-masse" (*mass-and-mass* en anglais [50]) par la suite, est constituée d'une chaîne périodique de deux sous-systèmes masse-ressort différents en série, initialement créée par Born [14] pour modéliser la propagation d'onde dans des cristaux biatomiques tels que le chlorure de sodium. Le comportement des sous-systèmes est défini par leur masse m_i , raideur k_i , et déplacement u_i respectifs, où l'indice $i \in \{1, 2\}$ dépend du sous-système considéré (figure 3.3b). Par simplification on considérera que leur longueur

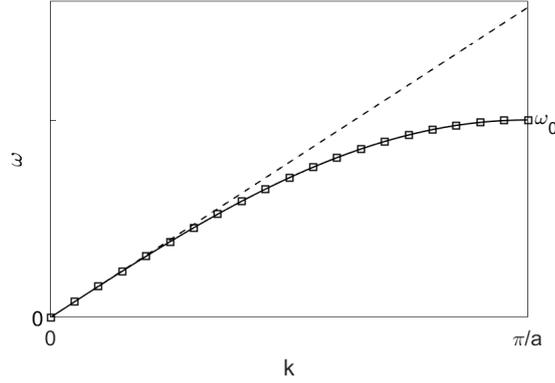


FIGURE 3.2 – Diagramme de dispersion --- pour le matériau homogène non dispersif ω_{hom} et \blacksquare cas inhomogène ω_{inh} d'une chaîne M_0 .

respective est identique et égale à a , soit une longueur de cellule périodique $a' = 2a$. Le système global représente le principe fondamental d'un cristal phononique unidimensionnel, c'est-à-dire une poutre discrétisée composée d'une succession de poutres dont les propriétés diffèrent, comme schématisée sur la figure 3.3a.

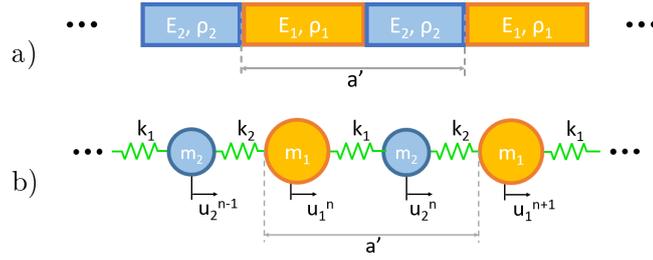


FIGURE 3.3 – Système de type $M_{\&}$. a) Poutre discrétisée (de section constante S) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.

L'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{x}$ est appliquée à chaque sous-système :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1^n = k_1(u_2^n - u_1^n) + k_2(u_2^{n-1} - u_1^n) \\ m_2 \ddot{u}_2^n = k_1(u_1^n - u_2^n) + k_2(u_1^{n+1} - u_2^n) \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme précédemment, on considère des ondes de Bloch de la forme :

$$u_\alpha^n(x, \kappa, t) = \tilde{U}_\alpha e^{i\kappa(x+na')+\lambda t} \quad (3.7)$$

En définissant les paramètres $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m_2}}$, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$ et $S_\kappa = \sin \frac{\kappa a'}{2}$, l'équation de dispersion obtenue est de la forme :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}} \quad (3.8)$$

À partir de cette équation on peut en tirer des cas simples en fonction des valeurs de m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , ainsi que valeurs limites des branches de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand

$\kappa = 0$ ($S_\kappa = 0$) et $\kappa = \frac{\pi}{a'}$ ($S_\kappa = 1$). Quatre cas sont recensés dans la table 3.1. Celle-ci comprend la relation de dispersion analytique pour chacun de ces cas, ainsi que les fréquences limites des deux branches de dispersion.

Cas	Équation générale	$S_\kappa = 0$	$S_\kappa = 1$	
			ω'_0	ω'_1 ω'_2
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\frac{2K}{M}}$	$\sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2}}$
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$	ω_1 ω_2
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m_1} \pm \sqrt{\frac{4K^2}{m_1^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$	ω_1 ω_2
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \omega_1 \sqrt{1 \pm \cos \kappa a'}$	0	$\sqrt{2}\omega_1$	ω_1 ω_1

TABLE 3.1 – Synthèse analytique de structures masse-et-masse sans amortissement

La synthèse analytique révèle quatre fréquences propres, soit deux fois plus que dans le cas précédent M_0 . Il en découle un nombre de branches également doublé, comme illustré figure 3.4. La première (lignes pleines) est généralement appelée branche acoustique et correspond aux deux masses d'une cellule vibrant en phase (en considérant des longueurs d'onde grandes devant a'). La deuxième (lignes pointillées) est quant à elle nommée branche optique, et correspond au mode de propagation où les deux masses vibrent en opposition de phase. Augmenter le nombre de degrés de liberté d'une cellule aura pour effet d'ajouter d'autres branches optiques au diagramme de dispersion [14].

On peut remarquer qu'en fonction des propriétés matériau, les résonances du système s'expriment $\omega_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{\rho_1 a^2}} \propto \frac{c_{l,1}}{a}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{\rho_2 a^2}} \propto \frac{c_{l,2}}{a}$. Ces expressions montrent que si les fréquences à atteindre sont très basses, il faut que la vitesse de propagation dans l'un des matériaux soit très faible et/ou que son épaisseur soit très grande. Cela met en lumière une grande limitation des cristaux phononiques pour les applications basses fréquences. On remarquera enfin que si comme ici, la longueur a est supposée égale pour les deux sous-systèmes, les propriétés de dispersion de la structure dépendent uniquement du contraste de propriétés entre les deux sous-systèmes, dont l'effet est illustré par la figure 3.4.

La figure 3.4 montre l'influence du rapport $\frac{m_2}{m_1}$ sur le diagramme de dispersion, c'est-à-dire l'influence du contraste de masse entre les deux systèmes masse-ressort de chaque cellule. Plusieurs effets peuvent être notés. Comme prévu par la table 3.1, l'augmentation de m_2 entraîne la baisse de ω'_2 et de ω'_0 . De plus, si $m_2/m_1 \neq 1$, alors $\omega'_1 \neq \omega'_2$ et une bande interdite (ou *band-gap*) s'ouvre entre ces deux fréquences. On peut noter que ω'_2 peut appartenir à la branche acoustique ou optique selon qu'elle est, respectivement, supérieure ou inférieure à la valeur de ω'_1 . Autrement dit, la fréquence inférieure du bandgap est contrôlée par la résonance de la masse la plus importante tandis que la plus faible définit la limite supérieure du bandgap. Assez logiquement, augmenter la différence entre les deux masses augmente la différence entre leurs résonances, et élargit donc le bandgap, ce que confirme l'examen de la figure 3.4. On remarquera finalement qu'un facteur 0.5 (en vert) crée un bandgap vers les hautes fréquences

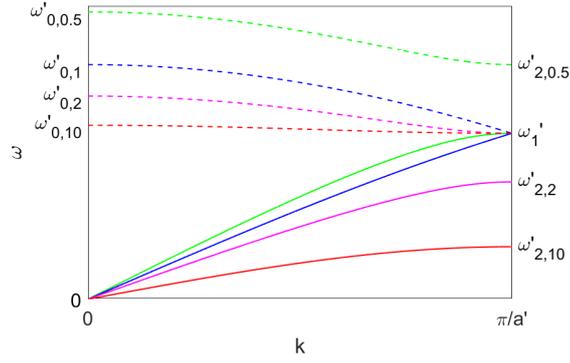


FIGURE 3.4 – Influence du contraste de propriétés entre les deux sous-systèmes d'une cellule de chaîne M_κ . Diagramme de dispersion : branches — acoustique et - - - optique pour les cas — $m_2/m_1 = 0.5$, — $m_2/m_1 = 1$, — $m_2/m_1 = 2$, et — $m_2/m_1 = 10$.

plus large qu'un facteur 2 (en magenta). En résumé, à contraste égal, des masses plus faibles génèrent un bandgap à plus hautes fréquences mais plus large qu'avec des masses importantes.

L'analyse de la table 3.1 montre qu'appliquer un facteur sur une des masses est entièrement équivalent à la division de la raideur associée par ce même facteur. Il en résulte que l'analyse paramétrique du contraste de raideur serait identique à celle de la masse. Elle ne présente donc pas d'intérêt et ne sera pas détaillée ici.

Il est finalement intéressant de noter qu'en imposant $m_1 = m_2$ et $k_1 = k_2$, la structure est identique à M_0 , excepté la taille de cellule qui vaut $a' = 2a$. Dans ce cas, la zone de Brillouin (BZ), dont les dimensions sont inversement proportionnelles à celles de la cellule, est deux fois plus petite. Le choix d'une zone de dimensions supérieures à celles de la BZ provoque alors le repliement des branches de dispersion, illustré par la figure 3.5.

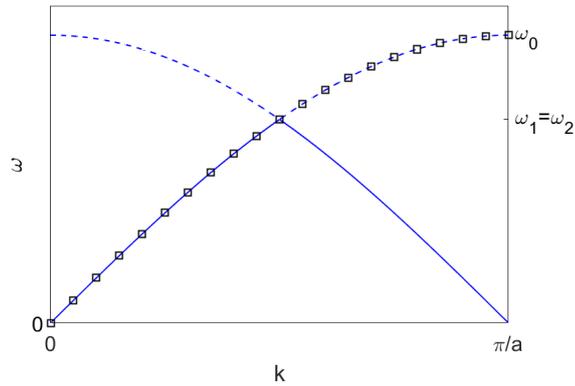


FIGURE 3.5 – Diagramme de dispersion. Branches — acoustique et - - - optique de la chaîne M_κ , et comparaison avec \square le cas M_0 .

Ici $\kappa \in [0, \frac{\pi}{a} = \frac{2\pi}{a'}]$, il est donc normal que le diagramme pour M_κ soit symétrique par

rapport à l'axe $\kappa = \frac{\pi}{2a}$. Du reste, la branche acoustique, ascendante, est bien superposée à celle du cas M_0 , mais une deuxième branche "repliée", la branche dite optique, est maintenant observée.

Masse-en-masse

La structure est maintenant constituée d'une chaîne périodique de deux systèmes masse-ressort en parallèle. Autrement dit, chaque cellule de la chaîne est un système à deux degrés de liberté (figure 3.6.b). Cette structure M_ϵ est nommée masse-en-masse (*mass-in-mass* en anglais [50]), par comparaison à la structure précédente. Le comportement des deux systèmes est défini par leur masse m_i , raideur k_i , et déplacement u_i respectifs, où l'indice $i \in \{1, 2\}$ dépend du sous-système considéré. Ce système modélise le comportement d'une poutre discrétisée à résonateurs locaux, telle que sur la figure 3.6.a. À noter que la raideur du sous-système interne est généralement choisie très importante devant k_2 - soit $E_2 S_2 / a_2 \gg k_2$ - de manière à pouvoir considérer celui-ci comme indéformable, et donc le ramener à une simple masse.

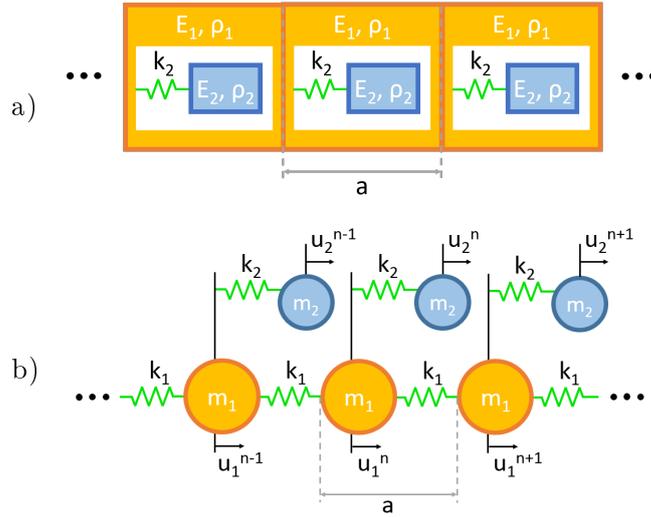


FIGURE 3.6 – Système de type M_ϵ . a) Poutre discrétisée (de section constante S . La section et la longueur de l'inclusion sont respectivement S_2 et a_2 .) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.

L'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{x}$ est appliquée à chaque système :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1^n + k_1(2u_1^n - u_1^{n+1} - u_1^{n-1}) - k_2(u_2^n - u_1^n) = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2^n + k_2 u_2^n - k_2 u_1^n = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Les ondes de Bloch (3.7) sont ensuite introduites dans l'équation 3.9. En définissant les paramètres $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m_2}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_2}{2M}}$, $S_\kappa = \sin \frac{\kappa a}{2}$, $R_k = \frac{k_1}{k_2}$, et $R_m = \frac{m_2}{m_1}$, on en déduit l'équation de dispersion :

$$\omega = \sqrt{-\Lambda} = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2 \pm \sqrt{(\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}} \quad (3.10)$$

À partir de cette équation on peut en tirer des cas simples en fonction des valeurs de m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , ainsi que valeurs limites des branches de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$ ($S_\kappa = 0$) et $\kappa = \frac{\pi}{a}$ ($S_\kappa = 1$). Quatre cas identiques à ceux étudiés au paragraphe 3.1.1 sont recensés dans la table 3.1. Celle-ci est composée d'un premier tableau (I) avec les relations de dispersion analytiques pour chaque cas, et d'un tableau (II) contenant les fréquences limites des deux branches de dispersion.

I	Équation générale
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2 \pm \sqrt{(\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{2} \sqrt{1 + R_m + 4R_m S_\kappa^2 \pm \sqrt{(1 + R_m + 4R_m S_\kappa^2)^2 - 16R_m S_\kappa^2}}$
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2R_k S_\kappa^2 \pm \sqrt{1 + 4R_k^2 S_\kappa^4}}$
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2S_\kappa^2 \pm \sqrt{1 + 4S_\kappa^4}}$

II	$S_\kappa = 0$	$S_\kappa = 1$
	ω'_0	ω'_1, ω'_2
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	0	$\sqrt{2}\omega_3$
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	0	$\sqrt{2}\omega_3$
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	0	ω_2
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	0	ω_2

TABLE 3.2 – Synthèse analytique de structures M_ϵ sans amortissement : I) équations générales et II) fréquences limites

Pour $M_\&$, on a vu que l'augmentation de la masse d'un sous-système et la diminution de sa raideur ont un effet équivalent sur sa fréquence de résonance. Comme k_1 et m_1 sont ici fixés, cela signifie que R_k et R_m auront le même effet sur ω_2 . Mais contrairement aux structures précédentes, la table 3.2 montre que la relation entre les propriétés matériaux et les fréquences limites du diagramme de dispersion est plus complexe. Les deux rapports de contraste sont donc étudiés pour M_ϵ . Comme pour la structure $M_\&$, différentes configurations sont tracées sur la figure 3.7 qui illustre les effets respectifs des paramètres $R_m = \frac{m_2}{m_1}$ et $R_k = \frac{k_1}{k_2}$.

La figure 3.7a montre que la masse du résonateur a une influence majeure sur le bandgap résonant : d'une part celui-ci s'élargit quand R_m augmente et simultanément ses fréquences limites décroissent. Les limites du bandgap ne sont donc plus seulement déterminées par la longueur et le matériau mais également par les paramètres du résonateur. Comparé à la structure sans résonateurs, caractérisée par la résonance ω_1 , la bande interdite peut ainsi atteindre des fréquences très basses si $R_m \gg 1$.

L'influence de R_k (figure 3.7b) est sensiblement différente. Si les valeurs de ω'_2 sont presque identiques à celles visibles sur la figure 3.7a, on observe une chute importante de ω'_0 quand R_k augmente. Une valeur importante de ce dernier permet donc d'atteindre les basses fréquences,

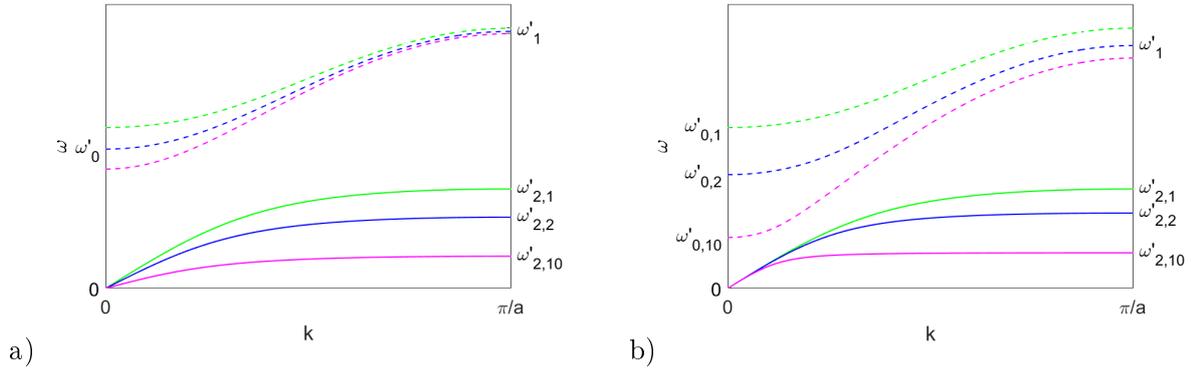


FIGURE 3.7 – Influence du contraste de propriétés entre les deux sous-systèmes d'une cellule de chaîne M_ϵ . Diagramme de dispersion : branches — optique et --- acoustique. a) $R_k = 1$ fixé et — $R_m = 1$, — $R_m = 2$, et — $R_m = 10$. b) $R_m = 1$ fixé et — $R_k = 1$, — $R_k = 2$, et — $R_k = 10$.

mais au prix d'une bande interdite plus étroite.

Dans la littérature, cette structure est souvent associée au concept de masse négative. Généralement, les propriétés négatives sont en effet obtenues par une vision effective de la structure, fondement même du principe de métamatériau. Dans le cas de la chaîne M_ϵ , la masse effective s'obtient en considérant chaque sous-système comme un simple système masse-ressort. La structure obtenue est identique à la chaîne M_0 mais avec cette fois une masse dépendante de la fréquence, nommée m_{eff} . En combinant les équations analytiques adaptées de M_0 et M_ϵ , on peut montrer que cette masse effective s'exprime :

$$m_{eff} = m_1 + \frac{m_2}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (3.11)$$

où $\omega_0 = \sqrt{k_2/m_2}$ correspond à la résonance du sous-système 2. La figure 3.8 illustre l'allure de m_{eff} .

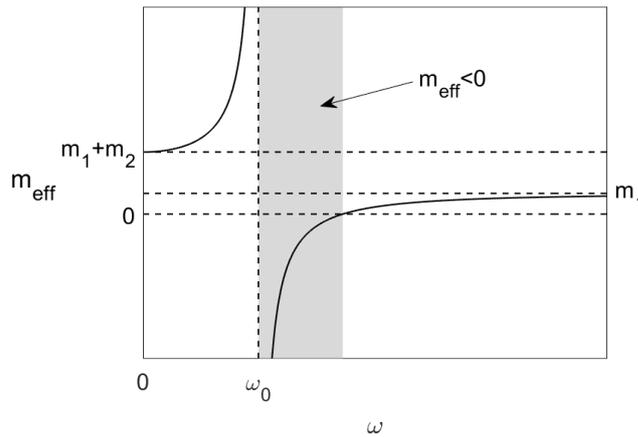


FIGURE 3.8 – Masse effective en fonction de la fréquence pour une structure M_ϵ .

L'équation 3.11 et la figure 3.8 mettent en évidence la dépendance fréquentielle de m_{eff} . Celle-

ci est pilotée par la résonance interne, "cachée" lorsque le point de vue effectif est adopté. Avant cette résonance, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_0$, la masse effective est proche de la masse totale $m_1 + m_2$ du système, car les deux masses se déplacent en phase. À l'inverse, la masse effective tend vers m_1 en hautes fréquences, quand la masse m_2 n'a plus d'influence. Enfin, m_{eff} peut prendre une valeur négative juste après la fréquence de résonance m_0 . Les deux masses sont alors en opposition de phase, et l'inertie de la deuxième masse est telle qu'elle pilote le sens de déplacement du système. Ce dernier est alors opposé au sens de l'excitation imposé, ce qui revient à une masse effective (ou une masse volumique) négative.

En résumé, si la masse ajoutée n'est pas problématique, une inclusion de masse importante semble être la meilleure solution pour obtenir une bande interdite basses fréquences relativement large. Cependant, pour de nombreuses applications, notamment dans les transports, le gain de masse est un critère important, souvent lié à la consommation d'énergie. Dans ce cas, un compromis entre raideur faible et masse du résonateur local peut permettre d'optimiser la largeur du bandgap en fonction des critères souhaités.

3.1.2 Modèles de poutre unidimensionnelle

Les modèles analytiques ont permis de comprendre les mécanismes fondamentaux des cristaux phononiques et des métamatériaux résonants dans le cas idéal unidimensionnel. Cependant, d'autres problèmes peuvent subvenir sur les structures réelles. En particulier, les dimensions transverses finies supportent des modes transverses susceptibles de modifier le diagramme de dispersion. Un cas relativement simple est donc modélisé ici afin de constater les spécificités et les limites d'un métamatériau élastique résonant.

Structure de référence : poutre

Pour observer concrètement l'effet des résonateurs, une structure réceptrice sans inclusions est préalablement modélisée.

La structure considérée est une poutre périodique infinie selon X . La cellule périodique (figure 3.9a) est de dimensions $10 \times 10 \times 1 \text{ mm}^3$. Dans le plan, l'épaisseur est 1 mm dans la direction Y et 0.5 mm dans la direction X , de manière à obtenir une épaisseur de 1 mm lorsqu'on juxtapose plusieurs cellules suivant l'axe X .

Le matériau choisi pour la structure est un aluminium dont les propriétés sont répertoriées dans la table 3.3.

Pour calculer les diagrammes de dispersion, les méthodes WFE directe et inverse sont utilisées conjointement, la méthode directe (resp. inverse) permettant l'observation de modes avec des vitesses de groupe très faibles (resp. très élevées) avec un nombre de points réduit. Les conditions de périodicité adéquates sont imposées sur les frontières 1 et 2 (figure 3.9b), soit :

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 e^{i\kappa_x L_x} \quad (3.12)$$

La figure 3.10 montre l'allure de dispersion d'une telle structure pour des fréquences relativement basses ($f \in [0, 1] \text{ kHz}$). Quatre modes bien distincts sont observés. Le premier est le mode de compression longitudinal \mathcal{P}_0 . Sa vitesse de groupe $c_g = \frac{d\omega}{d\kappa}$, associée à la pente

Matériau	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)	Couleur associée
Aluminium	70	0.33	2700	Gris clair
Acier	210	0.3	7800	Gris sombre
PMMA	6.174	0.322	1190	Vert clair

TABLE 3.3 – Propriétés des matériaux utilisés pour le modèle de poutre. La couleur indiquée est celle utilisée sur les images des géométries.

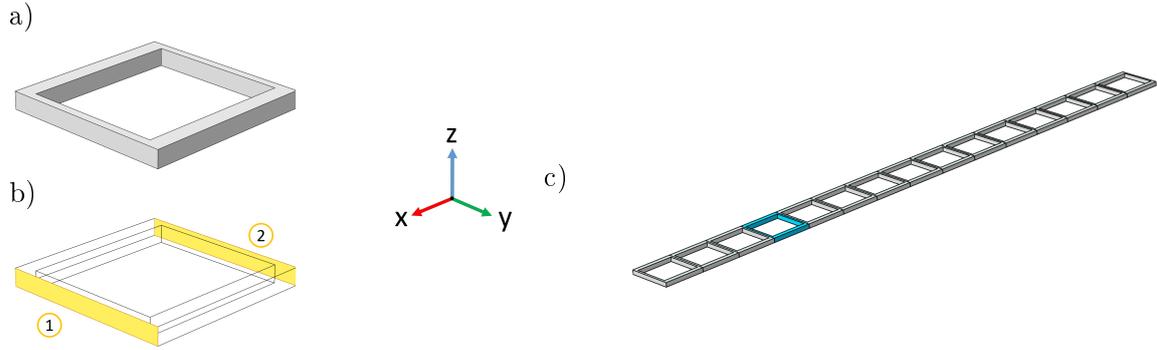


FIGURE 3.9 – Géométrie de la poutre sans résonateurs : a) cellule unitaire, b) faces imposées en déplacement et c) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.

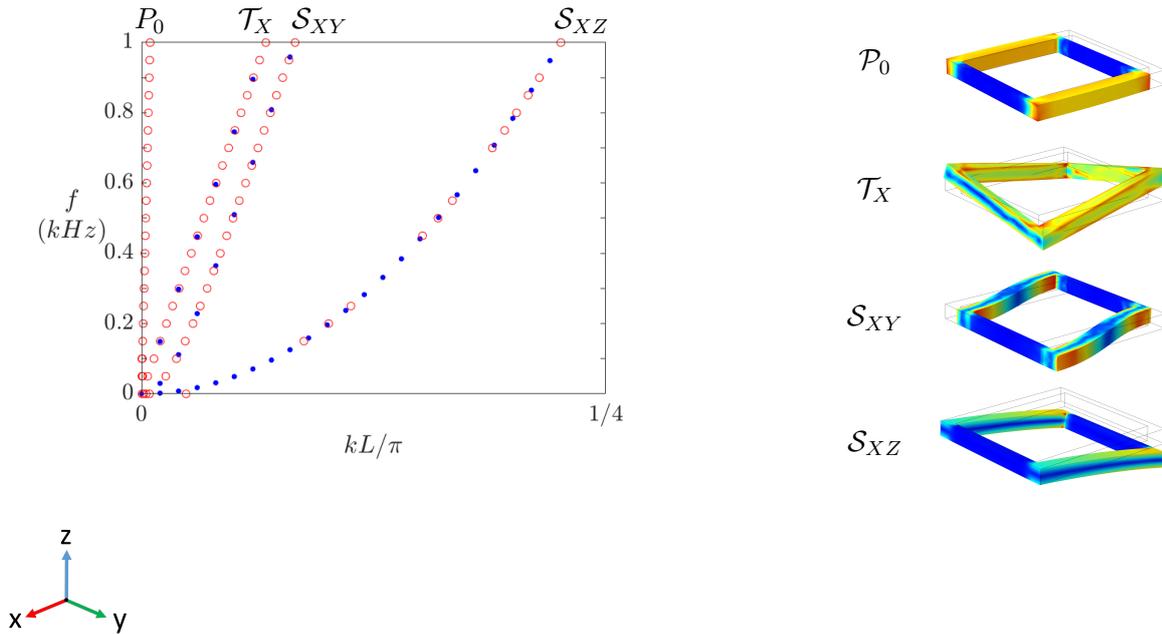


FIGURE 3.10 – Diagramme de dispersion de la poutre seule (à gauche) : ● WFEM et ○ WFEM inverse. Déformées des modes propres de la structure (à droite).

de la branche modale, est très grande. Cela s'explique par la raideur de compression, très importante en comparaison des raideurs de flexion et de cisaillement. Les branches suivantes \mathcal{T}_X , \mathcal{S}_{XY} , et \mathcal{S}_{XZ} correspondent respectivement à des ondes de torsion d'axe X , de cisaillement dans le plan, et de cisaillement hors plan. Sur le domaine fréquentiel étudié, la figure montre que les modes ne se couplent pas entre eux. On notera également que les vitesses de groupe des modes \mathcal{P}_0 et \mathcal{T}_X sont constantes, tandis que celles des modes de cisaillement

augmentent avec la fréquence même si elles tendent vers une valeur asymptotique. Ceci n'est cependant vérifié que sur la plage étudiée, et d'autres modes et couplages s'expriment pour des fréquences d'ordres plus élevés.

Poutre avec résonateurs

On ajoute à la structure précédente des résonateurs internes sous forme de masse en acier (ici $0.5g$) reliées à la structure aluminium par des poutres souples en PMMA (voir table 3.3 pour les propriétés matériaux). La cellule obtenue est représentée sur la figure 3.11. Les conditions de périodicité sont identiques aux précédentes (équation 3.12).

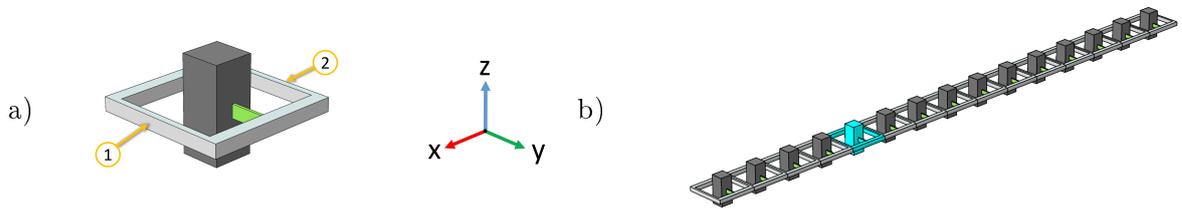


FIGURE 3.11 – Géométrie de la poutre avec résonateurs : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.

La figure 3.12 montre que les courbes de dispersion sont très fortement affectées par la présence des résonateurs. En particulier, on notera l'apparition de branches presque plates, traduisant des vitesses de groupe extrêmement faibles. Ces branches proviennent du couplage des résonances des inclusions avec les modes propres de la structure réceptrice.

Pour le vérifier, les premières fréquences de résonances du résonateur ont été calculées indépendamment par analyse modale, en imposant un vecteur déplacement nul à l'extrémité de la poutre flexible (figure 3.13).

L'analyse des déformées de modes (figure 3.12, en bas) suggère que le mode de compression longitudinale \mathcal{P}_0 est fortement compatible avec le mode de flexion \mathcal{P}_R des résonateurs : le premier excitera facilement le second, et inversement, le second sera susceptible de perturber la propagation du premier. Il en résulte une coupure dans la branche associée à \mathcal{P}_0 entre $96Hz$ et $184Hz$. La première fréquence correspond précisément au premier mode de résonateur visible sur la figure 3.13. Le mode \mathcal{P}_0 est donc bien responsable de l'ouverture d'une bande où les ondes de compression ne se propagent plus.

Des constats similaires peuvent être formulés pour tous les modes de structure précédemment décrits, mais l'influence du résonateur est parfois si faible qu'elle en devient négligeable. Des couplages entre \mathcal{S}_{XY} et $\mathcal{P}_{R,XY}$ (à $167Hz$), et entre \mathcal{T}_X et $\mathcal{T}_{R,Y}$ (à $167Hz$), par exemple, existent autour de leur fréquence de résonance respective mais ils sont tellement faibles que même l'agrandissement de la figure 3.12b ne suffit pas à les distinguer. Par ailleurs, le mode de cisaillement \mathcal{T}_X n'est pas affecté par les autres modes de résonateur présents sur la plage de fréquence visible. Selon toute vraisemblance, il est susceptible de se coupler avec le mode

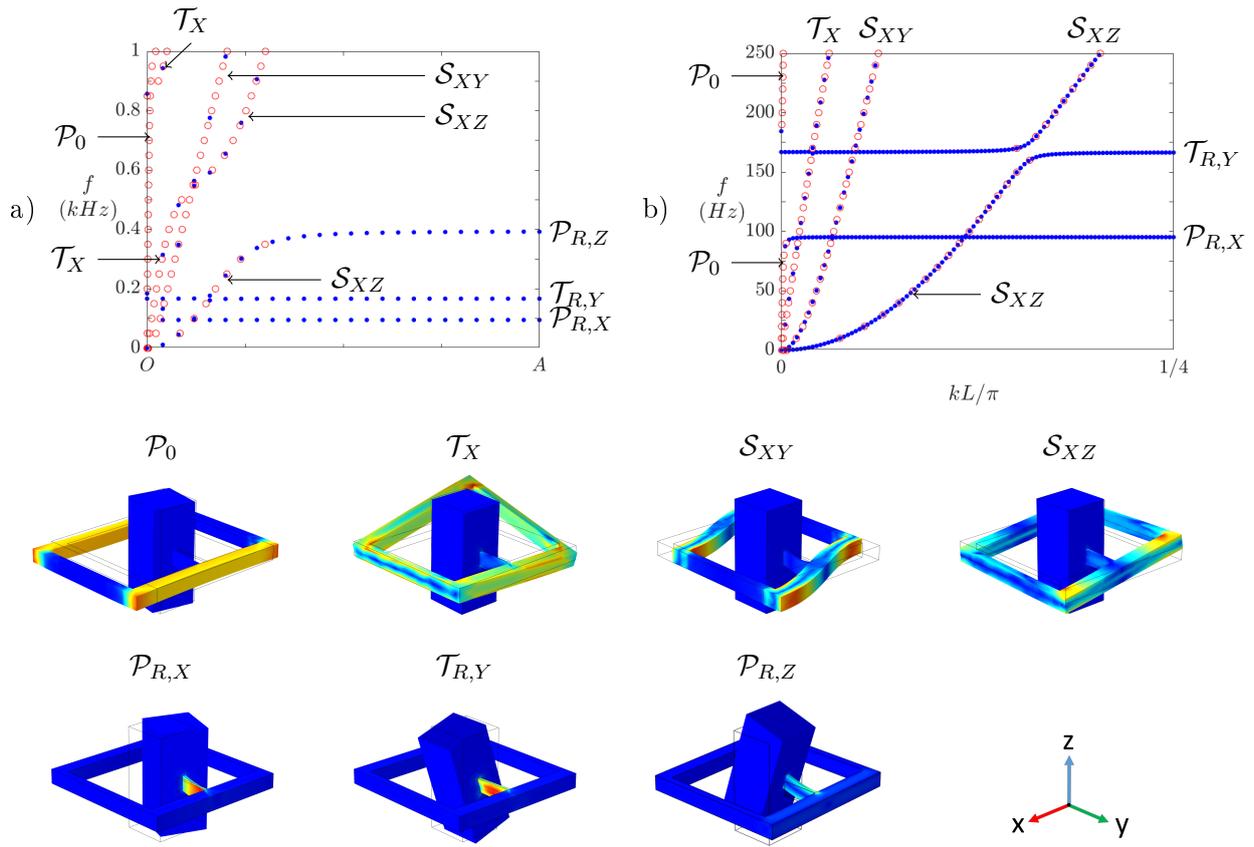


FIGURE 3.12 – En haut : diagramme de dispersion de la poutre avec résonateurs locaux. ● WFEM et ○ WFEM inverse.

En bas : modes propres de la poutre avec résonateurs. Modes de structure : compression longitudinale (\mathcal{P}_0), torsion selon X (\mathcal{T}_X), cisaillement dans le plan (\mathcal{S}_{XY}), et cisaillement hors plan (\mathcal{S}_{XZ}). Modes de résonateur : translation selon X ($\mathcal{P}_{R,X}$), rotation selon Y ($\mathcal{T}_{R,Y}$), et translation selon Z ($\mathcal{P}_{R,Z}$).

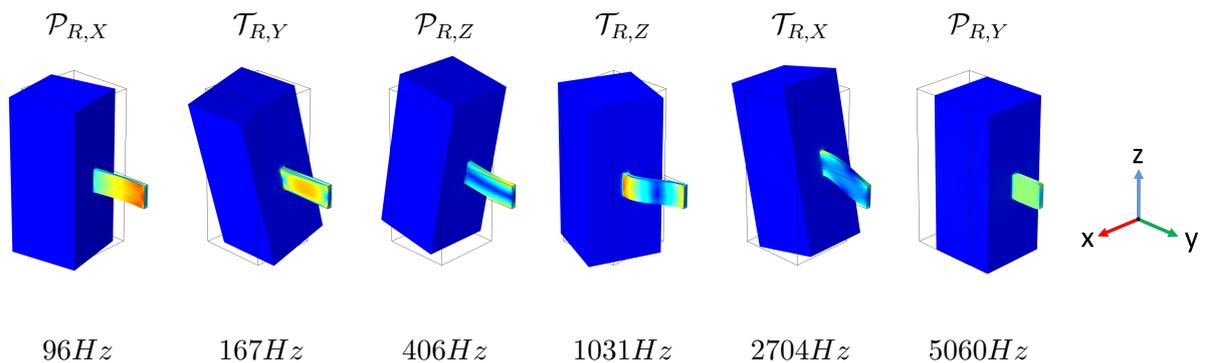


FIGURE 3.13 – Champs de contraintes (contrainte de Von Mises) des premiers modes de résonance du résonateur, et leur fréquence associée.

de compression Y du résonateur, mais la raideur de compression étant plus importante que celles de flexion et de cisaillement, ce mode intervient bien plus haut en fréquences. L'analyse modale du résonateur montre en effet que cette résonance, $\mathcal{P}_{R,Y}$, se produit à $5077Hz$.

En revanche, le mode de cisaillement hors plan \mathcal{S}_{XZ} se couple nettement avec les deuxième et troisième modes de résonateurs. On observe cependant d'importantes différences dans l'expression de ces couplages, différences que l'on peut expliquer physiquement. Pour le deuxième mode $\mathcal{T}_{R,Y}$, le centre de gravité du résonateur reste très proche du plan XY . Il est ainsi très peu efficace sur le mode \mathcal{S}_{XZ} dont la composante principale est hors plan, et il n'ouvre qu'une bande très fine dans la branche initiale ($167Hz$). En revanche le mode de résonateur hors plan $\mathcal{P}_{R,Z}$ est logiquement mieux couplé et ouvre donc une large bande entre $393Hz$ et $850Hz$. On remarquera que $\mathcal{P}_{R,Z}$ a également pour effet de coupler les modes \mathcal{T}_X et \mathcal{S}_{XZ} : sous l'influence du résonateur, la branche initiale du premier bifurque vers la branche hautes fréquences du second. La partie intermédiaire, autour de $600Hz$ est ainsi un mode de structure hybride (torsion X + cisaillement hors plan) associé à la résonance $\mathcal{P}_{R,Z}$.

On peut finalement remarquer que, bien que la résonance $\mathcal{P}_{R,Z}$ se produise autour de $400Hz$, son effet sur la structure est observé jusqu'à $850Hz$, fréquence à laquelle le mode \mathcal{T}_X se propage de nouveau. Cela souligne l'intérêt du concept de métamatériaux périodiques, dont l'effet est bien plus étendu qu'un système de résonateur accordé isolé.

Poutre avec résonateurs - deux cellules identiques

On utilise ici deux cellules identiques à celle de la partie précédente. La cellule considérée est donc de taille $L'_x = 2L_x$. La structure complète est théoriquement équivalente à la précédente (voir figure 3.14) et l'équation 3.12 devient $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 e^{i\kappa_x L'_x} = \mathbf{u}_1 e^{2i\kappa_x L_x}$.

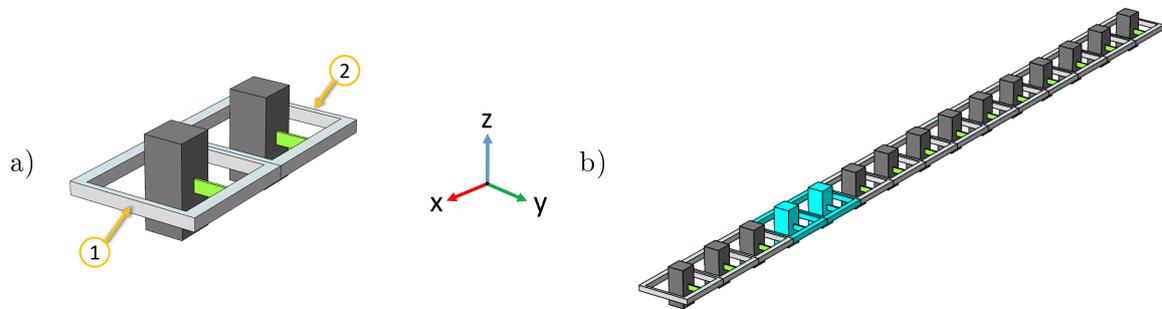


FIGURE 3.14 – Géométrie de la poutre avec deux résonateurs identiques : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.

On retrouve bien un diagramme de bandes similaires au cas à une cellule (figure 3.12). Si la plupart des modes sont strictement identiques, on observe l'apparition de plusieurs résonances supplémentaires. Ces résonances, repérées par l'indice R'' au lieu de R , correspondent aux modes où les deux résonateurs vibrent en opposition de phase. Par exemple les déformées répertoriées sur la figure 3.15 montrent les modes de résonateurs en torsion Y : $\mathcal{T}_{R,Y}$ et $\mathcal{T}_{R'',Y}$. Le premier affiche clairement les masses résonantes en phase, tandis que le deuxième correspond aux déplacements des masses en opposition de phase, même si l'amplitude de la seconde masse apparaît nettement plus faible que celle de la première. Si ces modes supplémentaires ne modifient pas sensiblement la dispersion, ils montrent que chaque résonateur est affecté

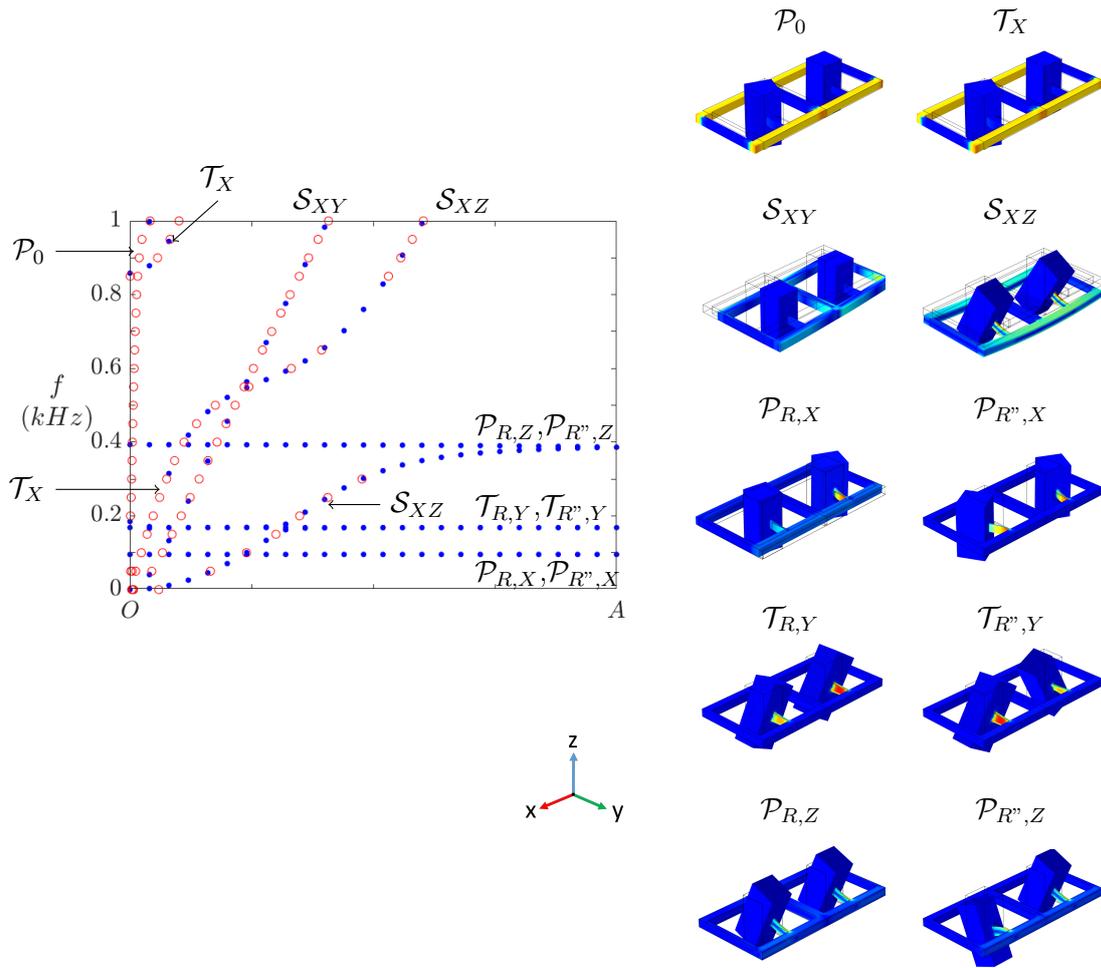


FIGURE 3.15 – À gauche : diagramme de dispersion de la poutre avec 2 cellules à résonance locale identiques. ● WFEM et ○ WFEM inverse ;
 À droite : modes propres de la poutre avec résonateurs. Modes de structure : \mathcal{P}_0 , \mathcal{T}_X , \mathcal{S}_{XY} , et \mathcal{S}_{XZ} . Modes de résonateurs : $\mathcal{P}_{R,X}$, $\mathcal{P}_{R',X}$, $\mathcal{T}_{R,Y}$, $\mathcal{T}_{R',Y}$, $\mathcal{P}_{R,Z}$, et $\mathcal{P}_{R',Z}$.

par le comportement des autres. Il en résulte qu'ils ne réagissent pas simultanément aux ondes incidentes, et que le comportement d'une structure périodique finie est susceptible de différer du comportement idéal modélisé ici (sans compter l'effet de bords induit par la dimension finie). Toutefois l'effet observé ici est minime et la description obtenue par le modèle à cellule unique est considérée satisfaisante.

Poutre avec résonateurs - deux cellules en opposition

On utilise ici deux cellules identiques à celles de la partie précédente, mais en opposition, pour créer une pseudo-symétrie transversale de la structure. Le motif peut être vu comme chiral, c'est-à-dire qu'il n'est pas superposable à son image miroir (ce type de structure sera étudié plus en détail en section 3.2.3). Comme précédemment, le motif périodique est de longueur $L'_x = 2L_x$ et les conditions de périodicité sont identiques. La structure complète est donc de même masse, composée des mêmes géométries, mais dont les cellules sont disposées

différemment, telle qu'illustrée sur la figure 3.16.

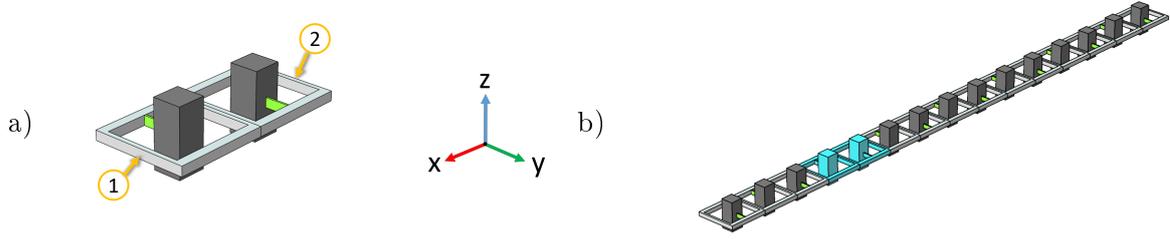


FIGURE 3.16 – Géométrie de la poutre avec deux résonateurs en opposition : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.

La comparaison entre les deux derniers modèles résonants introduits est présentée sur la figure 3.17b. On peut remarquer plusieurs modifications importantes. La mise en opposition des deux cellules a pour effet de totalement découpler les modes de structure \mathcal{T}_X et \mathcal{S}_{XZ} : tandis qu'une bifurcation de l'un vers l'autre avait été notée sur le modèle à deux cellules identiques, cette bifurcation disparaît ici, au profit d'un bandgap modal sur chacun de ces modes ($[393, 445]Hz$ pour \mathcal{T}_X , et $[393, 585]Hz$ pour \mathcal{S}_{XZ}). Il semble donc que le moment du résonateur autour de son point d'attache joue un rôle dans la bifurcation initiale, et que l'annulation de ce moment par la deuxième cellule en opposition empêche cette bifurcation. De manière assez logique, la résonance provoquant la coupure de \mathcal{T}_X est le mode déphasé $\mathcal{P}_{R,Z}$: pour des amplitudes égales des deux résonateurs, l'effort résultant est nul mais les moments s'ajoutent pour un impact maximal sur le mode de torsion Y . À l'inverse, \mathcal{S}_{XZ} est annulé par le mode $\mathcal{P}_{R,Z}$: les moments des résonateurs se compensent tandis que leur déplacement vertical (Y) s'ajoutent, augmentant ainsi leur efficacité contre le mode de cisaillement hors plan. On notera finalement que, si \mathcal{T}_X est annulé plus efficacement, l'effet est moins étendu en fréquence : le mode se propage de nouveau dès $445Hz$ contre $850Hz$ pour le modèle précédent.

3.1.3 Modèles à résonateur flambé

Principe

Grâce aux équations analytiques, il est connu que la fréquence de résonance d'un résonateur de type masse-ressort dépend de sa masse et de sa raideur selon la loi $\omega = \sqrt{k/m}$. Pour diminuer la fréquence de fonctionnement du résonateur on peut donc soit augmenter la masse, soit diminuer la raideur. La première solution est souvent la plus simple à mettre en œuvre, mais de manière générale, les stratégies industrielles visent plutôt à alléger au maximum les structures, notamment dans le domaine des transports.

La deuxième solution, qui consiste à réduire la raideur du résonateur, est souvent limitée par la stabilité du système. D'une part, la tenue statique du système peut être compromise par une réduction excessive de la raideur. D'autre part, pour un ressort linéaire, diminuer

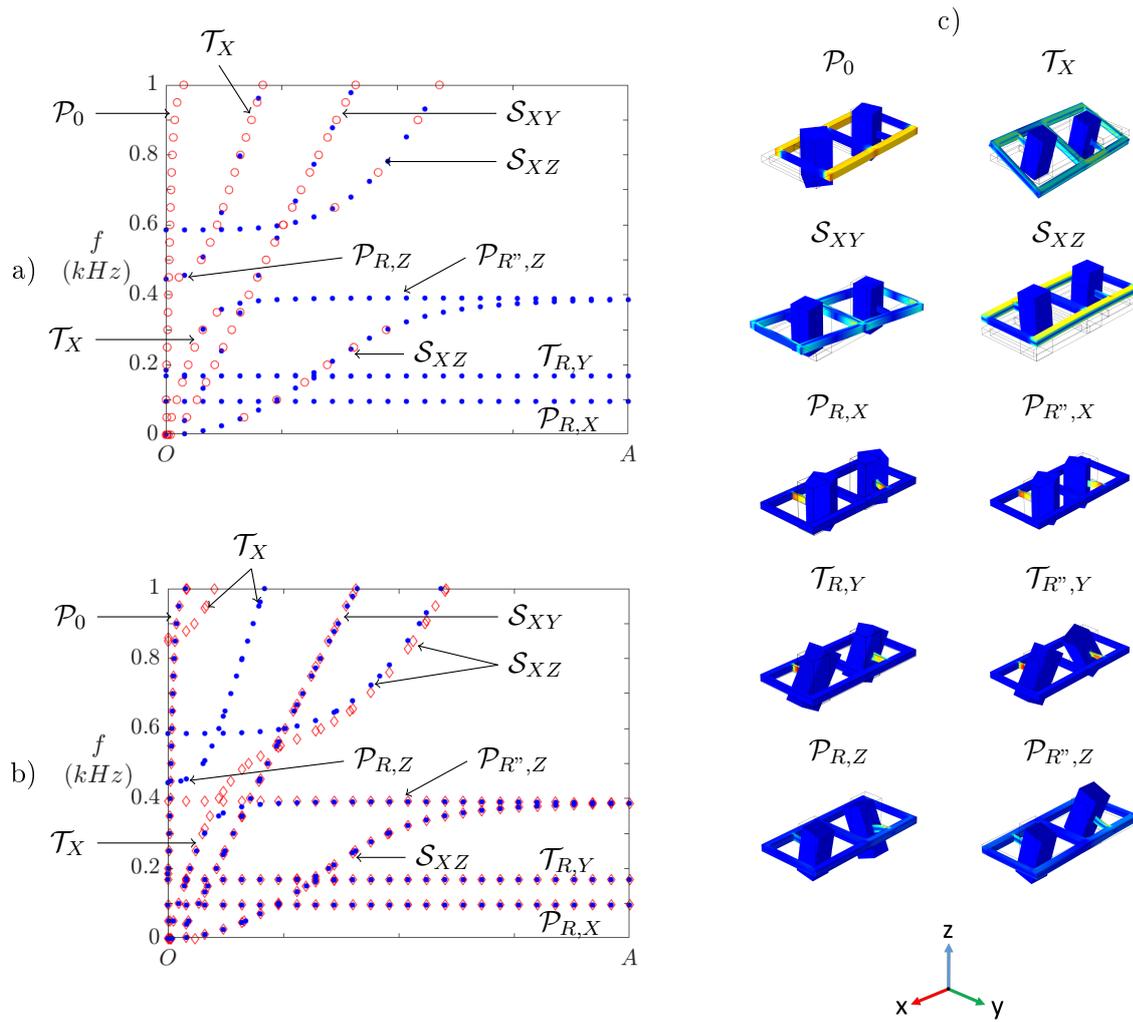


FIGURE 3.17 – a) Diagramme de dispersion de la poutre avec 2 cellules à résonance locale en opposition. ● WFEM et ○ WFEM inverse; b) Comparaison des diagramme de dispersion des 2 géométries précédentes (WFEM et WFEM inverse combinées). ◇ 2 cellules identiques; ● 2 Cellules en opposition. c) Modes propres de la poutre avec résonateurs en opposition. Modes de structure : \mathcal{P}_0 , \mathcal{T}_X , \mathcal{S}_{XY} , et \mathcal{S}_{XZ} . Modes de résonateurs : $\mathcal{P}_{R,X}$, $\mathcal{P}_{R',X}$, $\mathcal{T}_{R,Y}$, $\mathcal{T}_{R',Y}$, $\mathcal{P}_{R,Z}$, et $\mathcal{P}_{R',Z}$.

la raideur entraîne une augmentation de l'amplitude du système lors des résonances, ce qui peut nuire à la compacité de celui-ci et à sa tenue en fatigue.

Comme mentionné dans la partie 1.5, certains auteurs utilisent le phénomène de flambement pour obtenir des propriétés exotiques, en particulier pour la propagation des ondes [40, 9]. En effet, le flambement est associé à une chute de raideur de la structure, qui peut même donner lieu à une raideur négative [10]. Pour exploiter le flambement, le problème à surmonter est la stabilité, car c'est un phénomène instable par définition lié à une bifurcation - souvent non unique - par rapport au mode de déformation symétrique.

Le design présenté ici tente d'utiliser ce phénomène pour atteindre la faible raideur nécessaire afin d'affecter les basses fréquences.

Le concept consiste à maintenir le résonateur à l'état flambé en l'insérant dans un cadre rigide. En adoptant un côté pratique, un système bidimensionnel extrudé pourrait être réalisé de la manière suivante, illustrée par la figure 3.18 :

1. Fabrication d'une structure cellulaire rigide.
2. Insertion d'un composant souple dans chaque cellule rigide.
3. L'insertion d'une masse dans chaque composant souple entraîne la déformation et le flambement de ceux-ci.

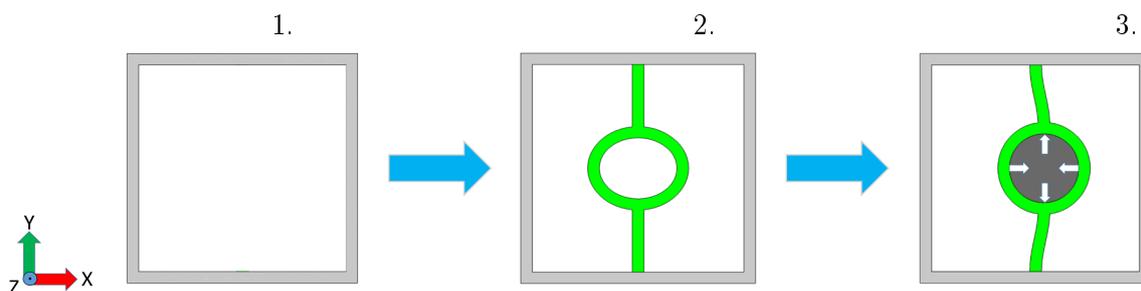


FIGURE 3.18 – Concept de cellule à résonateur flambé

Cette suggestion ne constitue évidemment pas une solution satisfaisante pour un prototype réel, car de nombreux détails d'importance, tels que l'assemblage des composants et la concentration des contraintes, sont ici éludés. Elle permet cependant d'appuyer la faisabilité pratique du design.

L'étude numérique réalisée sur ce concept utilise toutefois une structure différente de celle proposée précédemment. Cette modification est apportée afin de simplifier l'implémentation numérique. La nouvelle cellule périodique est présentée sur la figure 3.19. Deux poutres ont été supprimées. Cela permet d'appliquer une précompression transversale pour mettre le résonateur en flambement, sans compression notable de la structure rigide. En revanche, les poutres restantes ne sont pas directement reliées entre elle, ce qui peut donner naissance à de nouveaux modes et en supprimer d'autres.

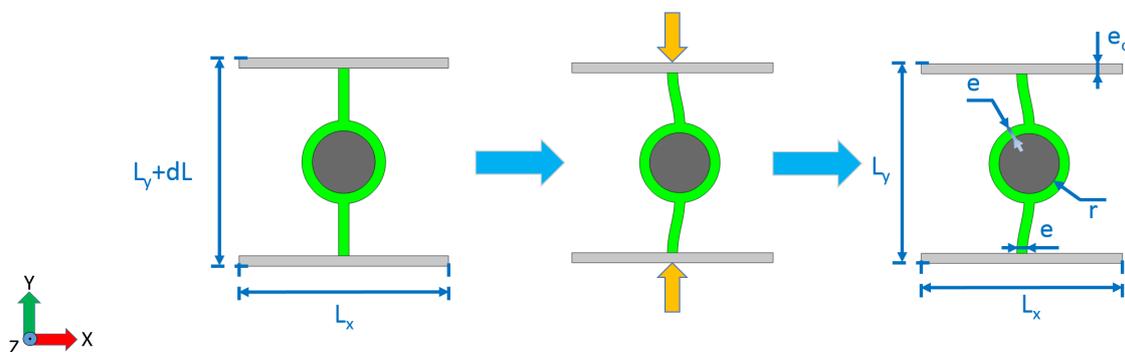


FIGURE 3.19 – Dimensions caractéristiques et étape de précompression d'une cellule périodique.

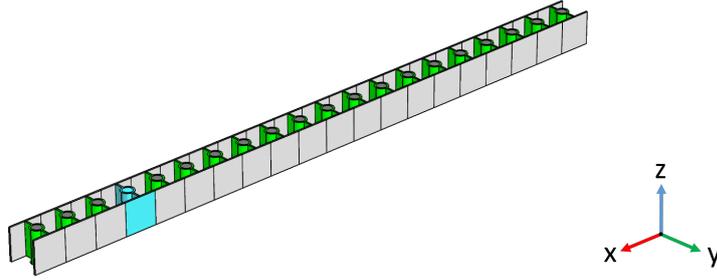


FIGURE 3.20 – Exemple de poutre périodique constituée des cellules proposées ($dL/L = 0$). Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.

Étapes numériques

Comme mentionné, le flambement est un phénomène instable, caractérisé par une bifurcation par rapport au mode de déformation symétrique. Or, si la géométrie et les conditions aux limites sont symétriques, il est théoriquement impossible d’obtenir un résultat non symétrique. Afin d’obtenir le comportement post-flambement du système, plusieurs méthodes existent.

La première consiste à rechercher le point de chargement critique par une analyse de flambage linéaire. Une fois ce point atteint, il s’agit de briser la symétrie de la matrice de raideur en introduisant un défaut. Ainsi la suite de la sollicitation se fera le long de la branche bifurquée. L’autre méthode souvent employée consiste à introduire dans la géométrie initiale une imperfection qui amorcera directement la bifurcation près du point critique. Comme précédemment, la première étape consiste à effectuer une analyse de flambage linéaire. Le premier mode bifurqué obtenu lors de cette étape est celui qui nécessite le moins d’énergie, et donc le plus susceptible d’être observé en pratique. L’imperfection introduite est alors de la forme de ce premier mode, de manière à amorcer la bifurcation avec la plus petite imperfection possible et obtenir un comportement aussi proche que possible du comportement d’origine. Cette dernière méthode est celle choisie pour la suite de l’étude car elle présente l’avantage d’être relativement simple à mettre en œuvre sur le logiciel de simulations utilisé. Un facteur d’imperfection I_f est donc choisi pour les calculs. Il correspond au ratio de la dimension de l’imperfection par rapport à la dimension caractéristique de la cellule (e.g. la diagonale dans le cas d’une cellule rectangle).

Un autre aspect à prendre en compte pour notre étude est l’influence des contraintes internes. En effet, l’analyse dynamique de systèmes précontraints implique non seulement l’effet du champ de déformations mais également du champ de contraintes. Pour vérifier l’influence de ce dernier, une brève étude est réalisée ici sur une géométrie auxétique de type carrés rotatifs (les détails de la géométrie sont donnés en section 3.2.2).

Les calculs de dispersion se basent sur la géométrie d’un motif périodique afin de déterminer les modes de propagation dans la structure. Lorsque l’on étudie l’évolution de ces modes en fonction de l’état de déformation, la géométrie initiale des simulations varie pour chaque état de déformation choisi. En outre, le champ de contraintes associé à cet état peut être considéré lors des calculs, ce qui a pour effet d’augmenter leur coût. L’influence de ces contraintes

internes est étudié ici, afin d'en estimer l'amplitude et vérifier l'intérêt de ce paramètre pour les calculs.

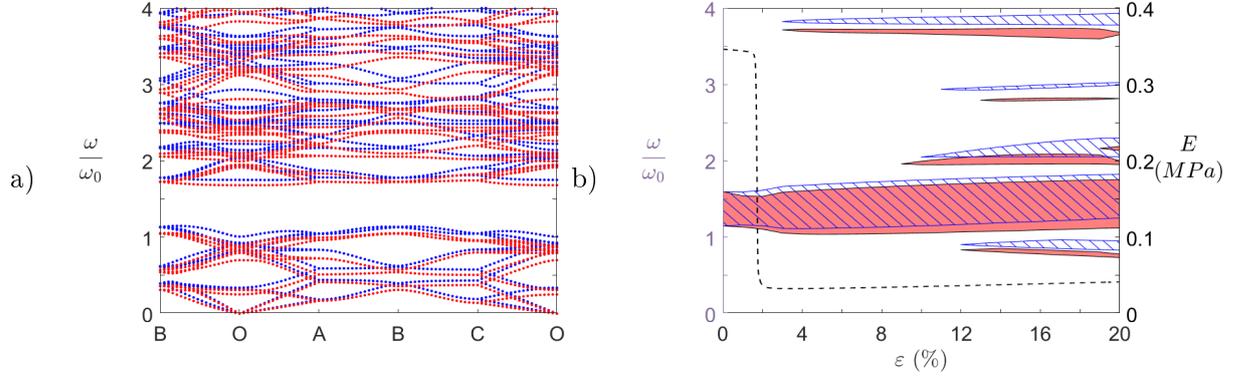


FIGURE 3.21 – Effet des contraintes internes. a) Diagramme de bande du motif S_0 sous compression axiale (axe Y, $\varepsilon = 10\%$) par WFEM directe. — Configuration initiale sans contraintes internes — et avec contraintes internes. b) Évolution des bandgaps omnidirectionnels inférieur à $2kHz$ en fonction de la déformation : /// Configuration initiale sans contraintes internes, \blacksquare et avec contraintes internes. - - - Module de Young effectif E selon l'axe longitudinal. Les résultats sont normalisés par la pulsation de Bragg $\omega_0 = \frac{2\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$.

L'effet des contraintes internes est illustré par la figure 3.21. Ces contraintes tendent visiblement à assouplir la structure, car les fréquences modales (figure 3.21a) observent une diminution.

La figure 3.21b montre que cet effet dépend non linéairement de l'état de déformation considéré. Pour le bandgap primaire (autour de $\omega/\omega_0 = 1.4$), le décalage fréquentiel induit par les contraintes internes évolue surtout autour du point de flambage ($\varepsilon \approx 2\%$), notamment le décalage de la limite supérieure du bandgap qui varie très peu au-delà de ce point. En revanche, le décalage observé sur la limite inférieure semble augmenter de manière plus linéaire en fonction de la déformation.

Pour les états de déformation les plus élevés, de nombreux bandgaps secondaires apparaissent, principalement à des fréquences supérieures au bandgap primaire. Comme pour celui-ci, les contraintes internes abaissent les plages fréquentielles associées aux bandgaps secondaires. Cependant, d'autres effets sont également observables. Le bandgap autour de $\omega/\omega_0 = 2$ est notamment affecté de plusieurs manières. Premièrement, la déformation minimale nécessaire à son observation est réduite. Ensuite, sa largeur est globalement plus faible que celle calculée sans contraintes internes, notamment pour $\varepsilon \geq 14\%$. Finalement, le cas $\varepsilon = 20\%$ semble indiquer une scission du bandgap en deux, non observée sur le cas non contraint.

Au final, les contraintes internes semblent affecter non seulement les fréquences modales, et donc la fréquence des bandgaps, mais également leur largeur en fonction de l'état de déformation initial, les conditions de déformation associées à leur ouverture et leur fermeture, mais également leur nombre. Le coût de calcul nécessaire à la prise en compte du champ

de contraintes semble donc justifié pour les structures étudiées ici. L'ensemble des calculs présentés inclue donc ce paramètre.

Résultats

Pour tous les résultats présentés ici, les matériaux utilisés sont l'aluminium pour le cadre rigide, l'acier pour la masse résonante (voir propriétés table 3.3), et le silicone caractérisé en section 2.3.2 pour le matériau souple ($E = 1.4MPa$, $\nu = 0.499$, $\rho = 1150kg/m^3$). Les dimensions caractéristiques de la cellule unitaire sont : $L_x = L_y = 1cm$, $e = e_c = 1mm$, et $r = 1.5mm$. Seul l'effet de dL , qui définit l'état de compression transversale du matériau, est étudié. Cette grandeur est ici utilisée sous sa forme adimensionnelle $\frac{dL}{L}$. La courbe 3.22 décrit la contrainte de compression en fonction de $\frac{dL}{L}$. Pour $\frac{dL}{L} = 0$ (également appelé configuration initiale par la suite), les poutres flexibles sont droites et non comprimées. La pente initiale décrit la raideur de compression non flambée, tandis que le plateau à partir de $\frac{dL}{L} = 1.385$ indique l'état flambé.

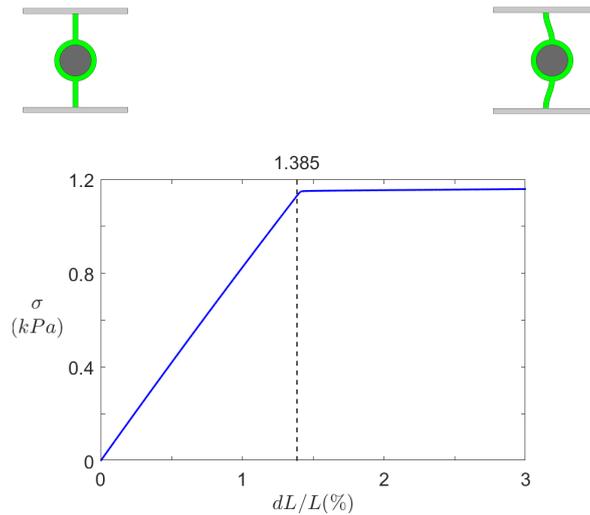


FIGURE 3.22 – — Courbe de la contrainte de compression latérale en fonction de la déformation sur une cellule, et --- déformation correspondant au point de bifurcation. Les schémas (en haut) indiquent l'état de déformation de l'abscisse correspondante.

Pour amorcer le flambement, la méthode d'imperfection décrite au paragraphe précédent (section 3.1.3, étapes numériques) est utilisée avec $I_f = 10^{-5}$.

On suppose ici une structure périodique de type poutre, de longueur infinie (voir l'exemple figure 3.20). Les calculs sont effectués pour une épaisseur hors plan $h_z = 40mm$ avec l'hypothèse d'état plan de déformation. Une fois la précompression transversale appliquée, la méthode d'éléments finis ondulatoire directe est utilisée (voir section 1.6.4) pour obtenir le diagramme de dispersion de la direction longitudinale. Dans le cas d'une onde uniaxiale d'axe X , la zone irréductible de Brillouin est composée d'une seule branche OA (1.6.2). La figure 3.23 montre la comparaison des diagrammes de dispersion pour la configuration initiale $\frac{dL}{L} = 0$ et une configuration flambée ($\frac{dL}{L} = 2\%$). Les modes affichés sont représentés sur la figure 3.24. On

notera que les modes \mathcal{P}'_0 et \mathcal{S}'_0 sont issus de la modification géométrique mentionnée plus haut. La séparation du cadre provoque en effet l'émergence de modes où les deux parties du cadre sont en opposition de phase. À ce titre, leurs fréquences sont très proches des modes équivalents respectifs \mathcal{P}_0 et \mathcal{S}_0 , où les deux parties du cadres sont en phase.

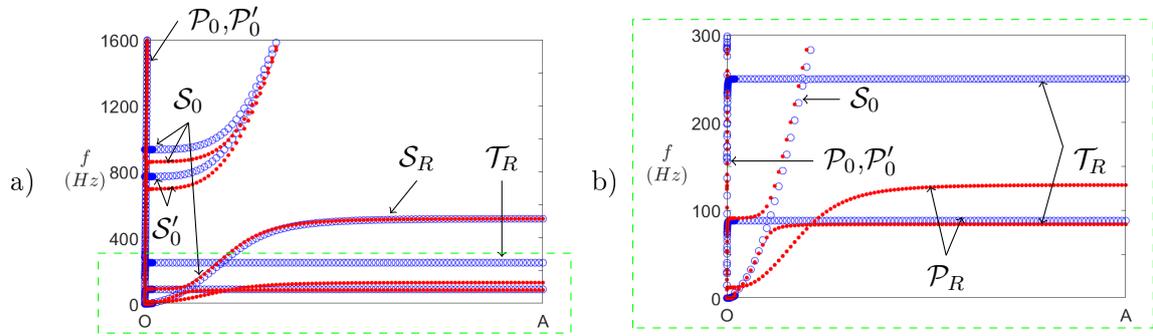


FIGURE 3.23 – Diagrammes de bandes pour deux états de compression différents : $\circ \frac{dL}{L} = 0$ et $\bullet \frac{dL}{L} = 3\%$. a) Résultats sur l'intervalle $[0, 1600]Hz$ et b) a) sur l'intervalle $[0, 300]Hz$. Les flèches indiquent le type de mode correspondant à chaque branche.

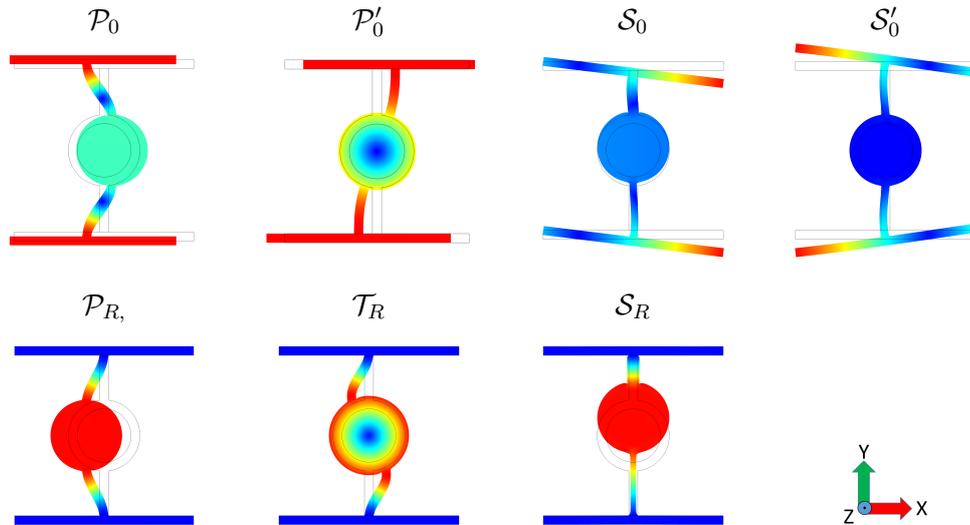


FIGURE 3.24 – Modes propres de la cellule. Modes de structure : longitudinaux \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 , et transverses \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}'_0 . Modes de résonateur : longitudinal \mathcal{P}_R , torsion \mathcal{T}_R , et transverse \mathcal{S}_R .

Au premier abord, le diagramme de dispersion semble peu affecté par le flambage du résonateur. La figure 3.23a montre que la résonance \mathcal{S}_R interagit avec le mode \mathcal{S}_0 pour ouvrir un bandgap partiel entre $530Hz$ et $795Hz$ pour le cas initial $\frac{dL}{L} = 0$. Ce bandgap est légèrement plus bas en fréquence et plus étroit ($[510, 730]Hz$) pour le cas flambé. Cependant, ces plages ne correspondent pas à une bande interdite du mode longitudinal \mathcal{P}_0 . Ce n'est donc pas un bandgap complet et certaines ondes peuvent toujours se propager dans la structure. De manière générale, le domaine fréquentiel étudié ici ne présente aucun bandgap complet. Il est néanmoins intéressant d'observer l'effet du flambement sur les modes de propagation.

En particulier, la résonance en torsion \mathcal{T}_R visible à $265Hz$ (figure 3.23b) est clairement affectée par le flambement. On la retrouve en effet autour de $90Hz$ pour le cas flambé. Il est intéressant de noter que la bande ouverte par \mathcal{T}_R dans le mode \mathcal{S}_0 est nettement plus large en configuration flambée ($2.5Hz$) que dans la configuration initiale ($< 0.05Hz$). De manière prévisible, la torsion du résonateur est donc facilitée par le flambement et son couplage avec \mathcal{S}_0 est donc amplifié.

De même, la résonance longitudinale \mathcal{P}_R est sensiblement altérée par le flambement. D'une part, la fréquence de couplage avec le mode \mathcal{P}_0 est fortement réduite, passant ainsi de $96Hz$ à environ $10Hz$. Comme pour \mathcal{T}_R , la bande ouverte dans le mode couplé est largement amplifiée. Le mode \mathcal{P}_0 présente ainsi une bande interdite d'environ $9Hz$ à $16Hz$. D'autre part, la forme du mode résonant \mathcal{P}_R est fortement modifiée : alors que dans la configuration initiale le mode totalement plat (exception faite du couplage avec \mathcal{P}_0), ce qui traduit une vitesse de groupe virtuellement nulle, cette vitesse est sensiblement accrue pour le cas flambé, en particulier pour le premier tiers de la branche. Pour mieux comprendre cet effet, une comparaison est faite pour cinq états de déformation différents sur la figure 3.25.

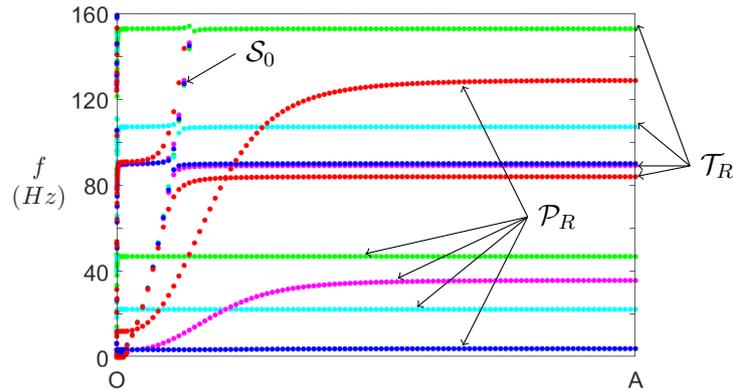


FIGURE 3.25 – Diagrammes de bandes sur l'intervalle $[0, 160]Hz$ pour différents états de compression $\frac{dL}{L}$: ● 1%, ● 1.3%, ● 1.385%, ● 1.5%, et ● 3%. Les flèches indiquent le type de mode correspondant à chaque branche.

Une première remarque est que mis à part \mathcal{P}_R , les modes varient très peu. L'analyse de \mathcal{P}_R montre que si la branche correspondant à ce mode varie beaucoup en fonction de $\frac{dL}{L}$, cette variation n'est pas monotone. Pour les deux cas non flambés 1% (en vert) et 1.3% (en cyan), la fréquence de résonance semble diminuer quand la compression augmente. À l'inverse, une fois que le résonateur est en flambement, cette fréquence augmente. Cette observation révèle qu'une fréquence minimale existe. Cette valeur est obtenue pour le point de bifurcation de la courbe statique (figure 3.22), c'est-à-dire pour $\frac{dL}{L} = 1.385\%$. Autour de ce point de flambement du résonateur, la fréquence de la résonance \mathcal{P}_R peut être inférieure à $2Hz$.

Concernant l'augmentation de la vitesse de groupe mentionné précédemment, la figure 3.25 confirme que c'est un phénomène lié au flambement, puisque seuls les cas $\frac{dL}{L} > 1.385\%$ y sont sujets. De plus, l'effet est clairement amplifié lorsque le niveau de précompression augmente.

La vitesse de groupe non nulle se traduit par la propagation d'onde. Étant donné la forme de la déformée de \mathcal{P}_R 3.24, cela provient vraisemblablement de la bistabilité du système souple lorsqu'il est flambé. Dans cette configuration, le résonateur nécessite de l'énergie pour passer d'un côté à l'autre de la position neutre. En d'autres termes, la raideur selon X du système souple augmente au passage de la position neutre. L'article de Bertoldi *et al.* [10] évoque la bistabilité de systèmes semblables. Cette bistabilité signifie que le résonateur possède deux positions stables séparées par une position métastable de plus haute énergie. Il faut donc fournir de l'énergie au système pour que celui-ci passe d'un état stable à l'autre. Dans notre cas, plus le système est comprimé, plus l'énergie nécessaire à la transition est grande.

Au vu des courbes, une valeur de précompression supérieure au point de bifurcation mais très proche de celui-ci, semble plus profitable, car l'énergie transmise est moindre, et la fréquence de couplage avec \mathcal{P}_0 est minimale. Cependant, on notera que la transition entre deux points stables s'accompagne d'une dissipation importante d'énergie. Par conséquent, si l'objectif du matériau est de dissiper l'énergie vibratoire, il est potentiellement plus intéressant d'augmenter la précompression. Une analyse du comportement bistable de ce design pourrait donc éclaircir cet aspect.

En résumé, l'état flambé permet bien au résonateur de se coupler aux modes de propagation à basses fréquences. Toutefois, les modes de résonateurs ne sont pas tous affectés de la même manière par le flambement. Ici, le mode longitudinal \mathcal{P}_R est le plus impacté. Une amélioration des résultats est possible en modifiant la forme du résonateur de manière à optimiser les résonances. À titre d'exemple, le mode de torsion \mathcal{T}_R peut être amplifié par une répartition plus excentrée de la masse résonante, de telle sorte que son inertie en rotation soit augmentée. Quant au mode de flexion, la juxtaposition d'une deuxième cellule tournée d'un quart de tour pourrait appliquer le principe proposé aux ondes transverses. Si les fréquences de couplages des différents modes de résonateurs coïncident, il est théoriquement possible d'obtenir un bandgap complet.

Pour conclure, les résonateurs locaux sont bien adaptés pour annuler des modes spécifiques à basses fréquences, avec un ajout de masse modéré et une bonne compacité. En revanche, les plages fréquentielles d'efficacité sont généralement étroites, notamment à très basses fréquences. De plus, contrairement aux ondes acoustiques, plusieurs types d'ondes peuvent se propager dans les structures, et il est plus compliqué d'obtenir un bandgap complet car tous les modes de propagation ne sont pas forcément annulés pour les mêmes fréquences. D'un autre côté, l'avantage des ondes mécaniques est que le milieu même de propagation peut être modifié et architecturé. La section suivante se focalisera sur les architectures dites auxétiques.

3.2 Architectures auxétiques

Les matériaux auxétiques sont caractérisés par un coefficient de Poisson négatif (section 1.5). Différentes géométries permettent d'obtenir cette propriété, mais leurs modes de déformation originaux peuvent donner lieu à d'autres caractéristiques intéressantes comme les profils de raideur non-linéaire obtenus par Bertoldi (figure 3.26). Le plateau de raideur qui caractérise

la compression de ces structures est un aspect prometteur pour remplir les critères cibles mentionnés en introduction : la pente initiale correspond à une raideur à même de supporter une charge statique, tandis que le plateau traduit une raideur nulle, cas idéal pour l'isolation vibratoire. L'objectif est ici de simuler différentes structures auxétiques afin d'en observer les propriétés, en particulier en fonction de leur état de compression.

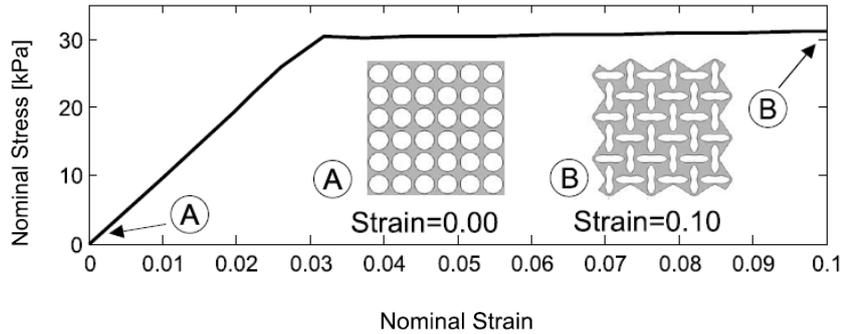


FIGURE 3.26 – Géométrie auxétique proposée par Bertoldi *et al.* et la courbe de contrainte-déformation associée. Issue de [9].

3.2.1 Paramètres de calcul

Pour toutes les géométries étudiées ici, les modèles sont définis en deux dimensions, et un état plan de déformation est supposé dans la troisième direction. Pour le post-traitement, l'épaisseur en Z est fixée à $e_z = 40mm$. De plus, la dimension caractéristique des cellules unitaires est imposée de l'ordre du centimètre. De cette manière, l'encombrement du métamatériau demeure raisonnable, même composé d'un grand nombre de cellules.

Le matériau choisi est le même élastomère silicone qu'utilisé précédemment.

Lorsqu'un phénomène de flambage est observé, la méthode de bifurcation décrite au paragraphe 3.1.3 est utilisée avec un facteur $I_f = 0.1\%$.

3.2.2 Modèles rotatifs

Carrés

Inspirés par les métamatériaux de l'équipe de Bertoldi, une première étape est de valider les propriétés de ceux-ci par un ensemble de simulations. Comme illustré dans le chapitre 1, l'auxétisme de ces métamatériaux provient du phénomène de flambage de poutre fines - appelées ligaments - reliant entre eux des polygones (en deux dimensions) de matériau. Le mécanisme de déformation pour des "carrés" rotatifs est rappelé sur la figure 3.27.

On remarque que si le motif périodique est composée d'une seule cellule à l'état initial ($\varepsilon = 0$), ce n'est plus vrai dès que flambent les ligaments. Quatre cellules sont alors nécessaires pour obtenir le motif périodique, dont les paramètres géométriques sont décrits sur la figure 3.28.

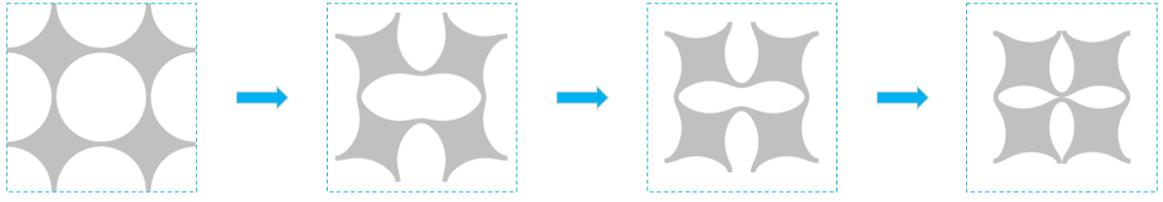


FIGURE 3.27 – Comportement mécanique en compression d'un motif unitaire. Configurations pour différentes valeurs de déformation (0%, 10%, 20%, $\approx 30\%$)

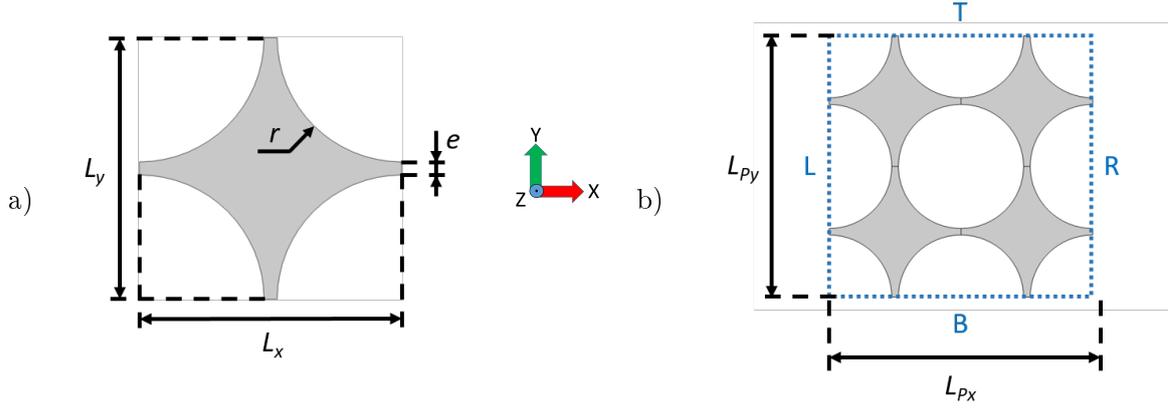


FIGURE 3.28 – Géométrie de type carrés rotatifs. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.

Les paramètres choisis pour les calculs sont $L_x = L_y = 10mm$, $e = 1mm$. Le rayon et les dimensions du motifs sont directement déduits de ces valeurs ($r = (L_x - e)/2$, $L_{Px} = 2L_x$ et $L_{Py} = 2L_y$).

Une structure infinie est ensuite modélisée via les conditions aux limites du motif périodique. Les frontières gauche, droite, supérieure, et inférieure, respectivement seront repérées par les indices L, R, T, et B, respectivement.

$$\begin{aligned}
 &\triangleright u_{B,y} = u_0/2 \\
 &\triangleright u_{T,y} = -u_{B,y} \\
 &\triangleright u_{R,y} = u_{L,y} \\
 &\triangleright \frac{\partial u_{L,x}}{\partial x} = \frac{\partial u_{R,x}}{\partial x} = 0 \\
 &\triangleright u_{T,x} = u_{B,x}
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{u}_\bullet = [u_{\bullet,x} u_{\bullet,y}]^t$ est le vecteur déplacement sur la frontière $\bullet \in \{L, R, T, B\}$, correspondant respectivement aux frontières gauche, droite, supérieure, et inférieure. u_0 est le déplacement total imposé en compression selon la direction Y. La déformation effective est donc calculée selon l'expression $\varepsilon = \frac{u_0}{L_{Py,i}}$, où l'indice i indique la valeur initiale. Les résultats du calcul statique sont présentés sur la figure 3.29.

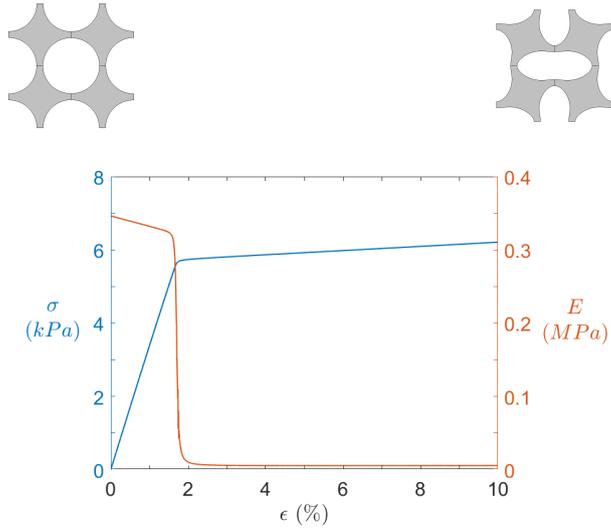


FIGURE 3.29 – Comportement statique de carrés rotatifs en compression. — Contrainte effective σ et — module de Young effectif E suivant l’axe longitudinal Y

La courbe de contrainte (en bleu) pourrait passer pour une courbe classique de traction homogène élastoplastique, mais le fait qu’elle soit associée à une compression purement élastique en justifie l’intérêt. Deux portions bien distinctes peuvent être observées : une pente initiale relativement raide par rapport à une pente secondaire stable. Ce comportement est mis en évidence par la courbe du module d’élasticité longitudinal effectif $E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$ (en rouge). Deux paliers de raideur sont clairement visibles, le premier étant associé au mode symétrique de déformation longitudinal, tandis que le deuxième correspond à l’état flambé du métamatériau. Ce second palier est faible mais non nul, et le plateau observé sur la figure 3.26 n’est pas présent. Ceci est dû aux conditions aux limites imposées. Pour les structures finies, le comportement des cellules centrales se rapproche de celui d’une structure infinie, mais globalement, les effets de bords ne peuvent être négligés. En particulier, la condition de déplacement homogène sur les frontières gauche et droite (par symétrie) est loin d’être réaliste. Une simulation sur structure finie composée de 10×10 cellules est réalisée pour vérifier cet effet de bords.

Différentes conditions aux limites sont comparées. Pour valider la représentativité du motif périodique, la même hypothèse de plaque infinie est appliquée à la structure 10×10 . Le comportement de la structure finie est ensuite calculé pour deux types de conditions sur les frontières supérieure et inférieure : appuis plans et encastres.

Premièrement, on remarque que le motif périodique de dimensions 2×2 est bien représentatif, car la contrainte (cercles noirs) est superposée à celle du motif de taille 10×10 (en vert). En revanche, des différences sont observées avec les courbes de structures finies. Si les conditions aux frontières latérales (L et R) sont retirées, en conservant des appuis plans sur T et B , le matériau sera moins contraint donc moins raide (noter les niveaux de contrainte nettement plus faibles des cellules latérales sur la figure 3.30b), au milieu). En résulte une contrainte globale plus faible (en bleu), même si l’allure reste identique ce qui montre que l’effet de bords est faible dans cette configuration. Si les déplacements transversaux sont bloqués sur

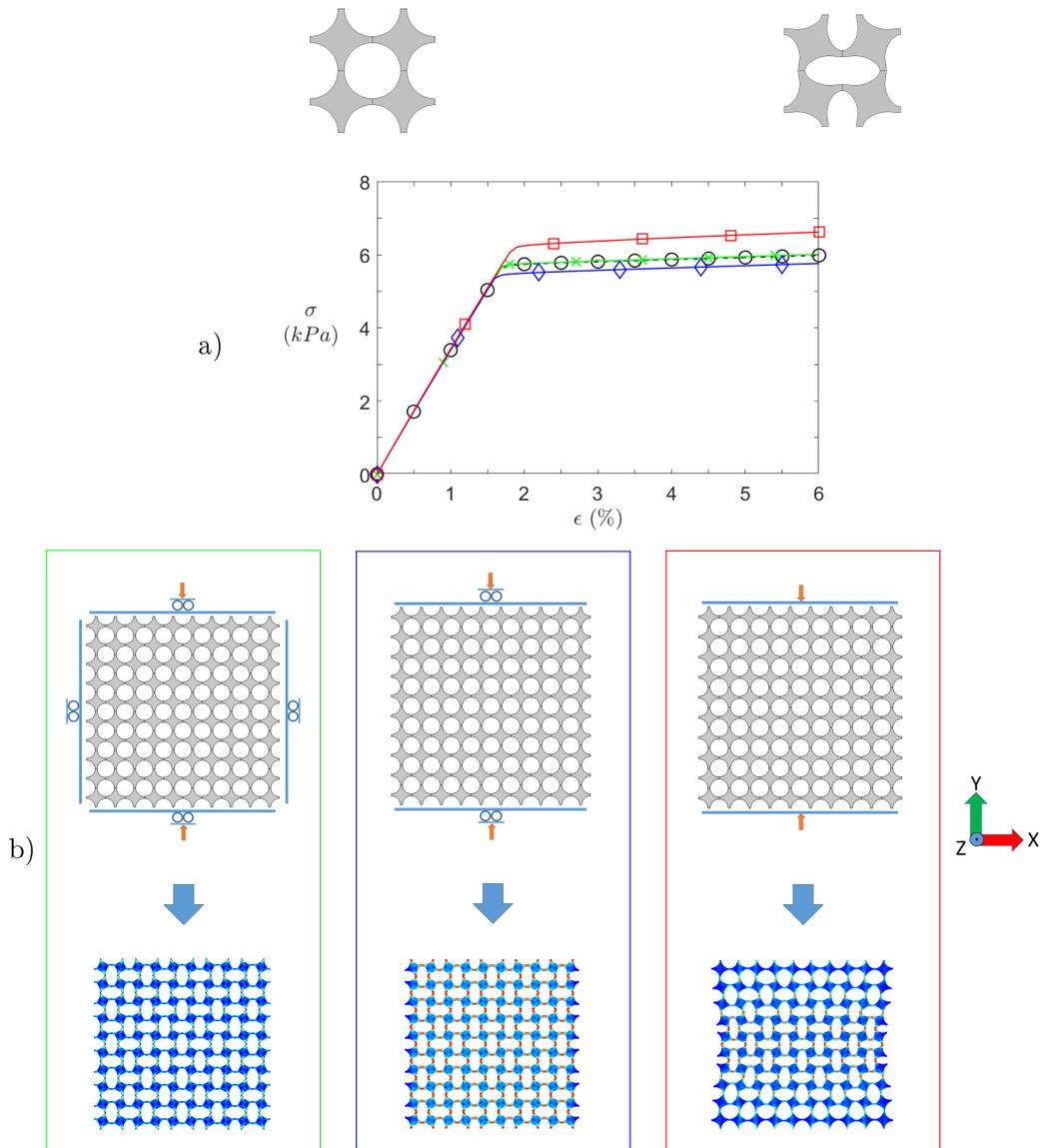


FIGURE 3.30 – Comportement statique de carrés rotatifs en compression.

- \bullet - Plaque infinie - motif 2×2 cellules (Référence),
- \times - Plaque infinie - motif 10×10 cellules,
- \diamond - Structure finie 10×10 - appuis plans (frontières B et T), et
- \square - Structure finie 10×10 - appuis encastrés en X (frontières B et T).

a) Courbes de contrainte-déformation. b) En haut : conditions aux frontières (\circ appui plan, — encastré, et \rightarrow déplacement imposé). En bas : états déformés ($\epsilon = 6\%$) pour les trois structures 10×10 .

T et B , la contrainte après flambage est sensiblement modifiée, avec une raideur proche de zéro. Cette valeur n'est cependant pas nulle, contrairement à celle observée sur la figure de Bertoldi 3.26. Ceci est vraisemblablement dû à la taille de la structure. Plus les dimensions sont importantes, plus son comportement sera proche du cas périodique infini, avec la pente non nulle observée précédemment.

Le comportement statique est donc proche de l'objectif recherché. Cette étude doit être complétée par une analyse de la dispersion du matériau en dynamique. La méthode WFE est

appliquée au motif périodique 2×2 pour obtenir le diagramme de dispersion. Ces diagrammes étant beaucoup plus riches que ceux présentés en section 3.1, l'analyse portera principalement sur les bandgaps omnidirectionnels obtenus.

Étant donnée la raideur non linéaire observée, le comportement dynamique est lui aussi susceptible de varier fortement en fonction de la déformation. Il est donc intéressant d'observer l'évolution de ces bandgaps en fonction de l'état de compression statique du matériau. La figure 3.40 présente ces résultats pour les carrés rotatifs.

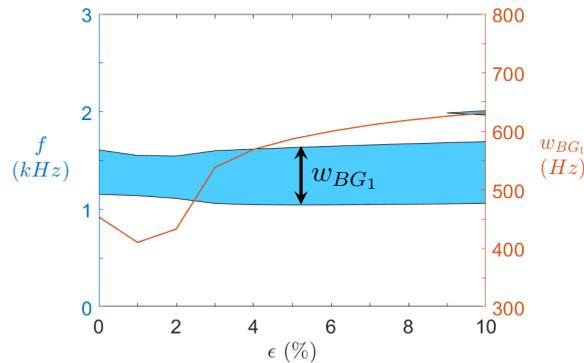


FIGURE 3.31 – Variation fréquentielle des bandes interdites omnidirectionnelles en fonction de la déformation du métamatériau à carré rotatifs. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du bandgap primaire

Deux bandes interdites sont visibles. Par la suite, on qualifiera de bandgap *primaire*, la bande interdite large et basses en fréquences (relativement aux autres bandgaps éventuels), présente quelle que soit la déformation considérée. Les autres bandes pourront alors être qualifiées de *secondaires*.

Comme attendu, le bandgap observé varie sensiblement autour du point de bifurcation du matériau. Avant flambage, la largeur du bandgap diminue, mais une fois le matériau flambé, le bandgap s'élargit monotonement, même si l'essentiel de la variation s'observe entre 2% et 4% de déformation. Au delà, le bandgap s'étend sur environ 650Hz , compris entre 1.03kHz et 1.72kHz . Ce résultat est très satisfaisant, car la bande est relativement large pour des fréquences aussi faibles, notamment en comparaison des résultats obtenus avec résonateurs locaux (section 3.1).

Pour sélectionner l'architecture matériau la plus prometteuse, ce cas sera pris comme référence pour les géométries présentées ensuite. En particulier, l'aire et la taille de la cellule pourront être imposées pour comparer les géométries à masse et à encombrement identiques.

Autres parallélogrammes

De nombreuses géométries peuvent être créées en remplaçant les carrés par d'autres polygones tels que parallélogrammes ou triangles. Ici quelques uns de ces polygones sont choisis et présentés, afin d'observer quelles propriétés pourraient être ajustées par la géométrie de la cellule. Pour faciliter la tenue en compression du matériau, seuls les motifs conservant une périodicité orthogonale X et Y en déformation sont étudiés. Les polygones répondant à

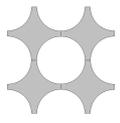
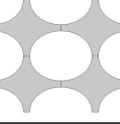
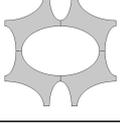
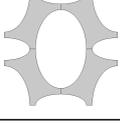
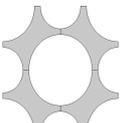
	Carré	$\begin{cases} L_x = L_y \\ r_{x,1} = r_{x,2} = r_x = [L_x - e] / 2 \\ r_{y,1} = r_{y,2} = r_y = [L_y - e] / 2 \end{cases}$
	Losange	$\begin{cases} r_{x,1} = r_{x,2} = r_x = [L_x - e] / 2 \\ r_{y,1} = r_{y,2} = r_y = [L_y - e] / 2 \end{cases}$
	Rectangle R_x	$\begin{cases} r_{x,1} = [(1 + D_R)L_x - e] / 2 \\ r_{x,2} = [(1 - D_R)L_x - e] / 2 \\ r_{y,1} = r_{y,2} = r_y = [L_y - e] / 2 \end{cases}$
	Rectangle R_y	$\begin{cases} r_{x,1} = r_{x,2} = r_x = [L_x - e] / 2 \\ r_{y,1} = [(1 + D_R)L_y - e] / 2 \\ r_{y,2} = [(1 - D_R)L_y - e] / 2 \end{cases}$
	Rectangle R_{xy}	$\begin{cases} r_{x,1} = [(1 + D_R)L_x - e] / 2 \\ r_{x,2} = [(1 - D_R)L_x - e] / 2 \\ r_{y,1} = [(1 + D_R)L_y - e] / 2 \\ r_{y,2} = [(1 - D_R)L_y - e] / 2 \end{cases}$

TABLE 3.4 – Définition des parallélogrammes étudiés

ce critère sont les rectangles (Type I), losanges (Type β), et parallélogrammes (Type I β) proposés par Grima *et al.* [42]. La dernière catégorie correspondant à la combinaison des deux premières, elle ne sera pas étudiée. En revanche, trois cas de rectangles peuvent être différenciés. La figure 3.32 donne la définition générale de ces géométries.

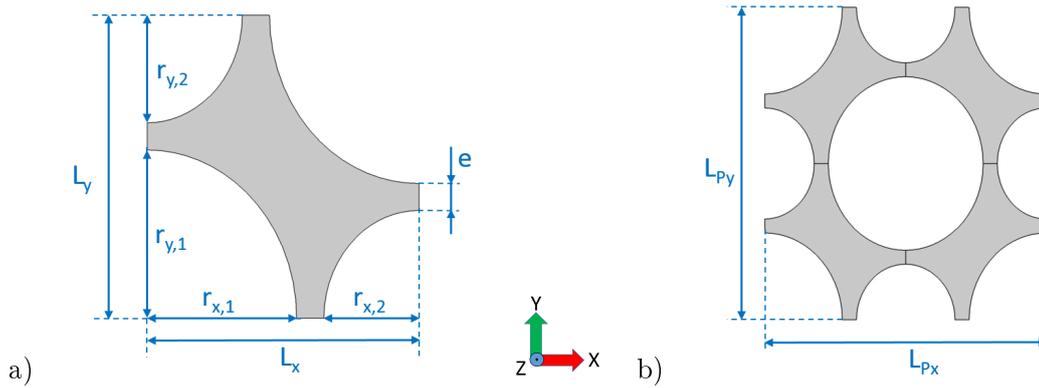


FIGURE 3.32 – Géométrie de type parallélogrammes rotatifs. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.

En pratique, les paramètres géométriques sont identiques à ceux de la cellule en carré, en ajoutant $r_{x,1}$ et $r_{y,1}$. On en déduit facilement $r_{x,2} = L_x - e - r_{x,1}$ et $r_{y,2} = L_y - e - r_{y,1}$. Les parallélogrammes particuliers étudiés ici sont définis en fixant les paramètres comme indiqué sur la table 3.4.

Pour simplifier la comparaison avec la structure à carrés rotatifs, l'épaisseur des ligaments

($e = 1mm$) est identique, ainsi que la masse totale de la cellule. Étant donné que la longueur h_z hors plan et le matériau sont les mêmes, cela revient à imposer la surface $S = S_{ref} = 36.383mm^2$.

Pour les losanges, les paramètres r_x et r_y sont directement liés aux dimensions de la cellule via $r_x = (L_x - e)/2$ et $r_y = (L_y - e)/2$. La forme de la cellule est donc contrôlée par L_x et L_y . Comme la surface S est imposée constante, ces deux variables sont dépendantes suivant la relation :

$$L_y = \frac{4S_{ref}/\pi + e^2 - L_x e}{4L_x/\pi - L_x + e}$$

Pour cette étude, trois valeurs sont comparées : $L_x \in \{9, 10, 11\} mm$, sachant que $L_x = 10mm$ entraîne automatiquement $L_y = 10mm$, ce qui correspond au cas de référence.

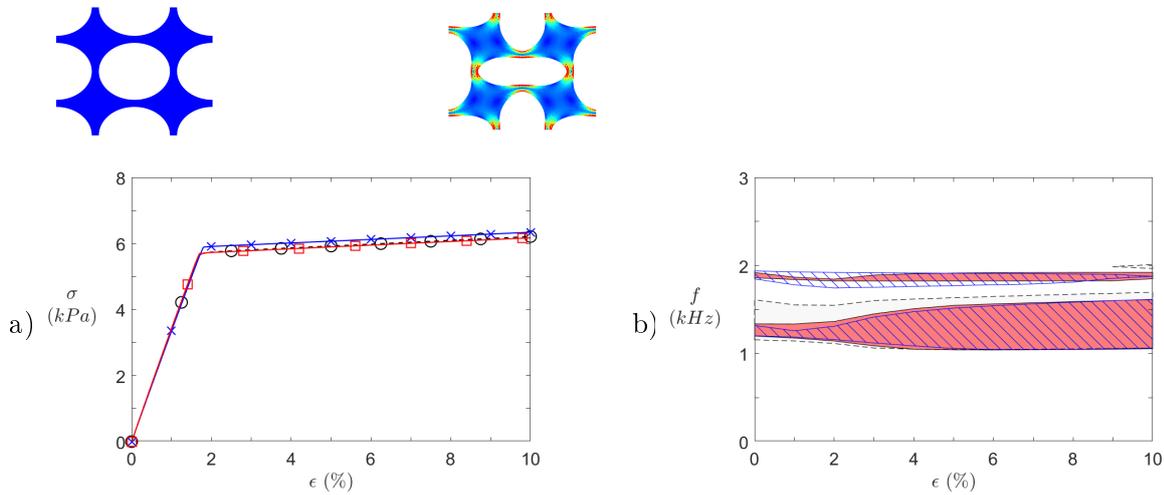


FIGURE 3.33 – Comparaison des cellules rhombiques et à carrés rotatifs. a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. $\text{---}\times\text{---}/\text{---}/\text{---}$ $L_x = 9mm$, $\text{---}\circ\text{---}/\text{---}/\text{---}$ $L_x = 10mm$ (Référence), et $\text{---}\square\text{---}/\text{---}/\text{---}$ $L_x = 11mm$.

La figure 3.33 synthétise les résultats obtenus pour les géométries rhombiques. Les courbes de compression statique sont très proches ; l'augmentation de L_x entraîne une diminution de la raideur initiale et un abaissement du plateau, mais l'effet reste extrêmement faible. En revanche, la modification géométrique altère sensiblement les bandgaps de la structure. Le bandgap secondaire, notamment pour $L_x = 11mm$, est bien plus développé, en contrepartie d'un rétrécissement important de la bande interdite primaire. L'effet est moindre pour des déformations importantes, mais à l'état initial, la largeur du bandgap primaire passe de $504Hz$ pour le cas de référence à $139Hz$ ($L_x = 11mm$) voire $117Hz$ ($L_x = 11mm$).

L'objectif étant plutôt un large bandgap basses fréquences que plusieurs bandgaps plus étroits, les losanges ne semblent pas conférer d'avantage notable ici.

Un autre type de parallélogramme envisagé est le rectangle. Comme illustré précédemment, trois catégories sont différenciées ici : R_x , R_y , et R_{xy} , dont les définitions sont données sur

la table 3.4. En pratique, on peut remarquer que chaque cellule de R_x se caractérise par des frontières gauche et droite alignées verticalement, car $r_{y,1} = r_{y,2}$. De la même manière, les frontières supérieure et inférieure des cellules de R_y sont alignées horizontalement. Pour R_{xy} , aucun alignement n'est observé. Globalement, les trois géométries semblent très proches mais ces alignements peuvent affecter les propriétés observées, notamment la reprise des efforts statiques.

Pour les simulations, le paramètre variable est D_R , tandis que les paramètres $L_x = 10mm$, $e = 1mm$, et $S = S_{ref}$ sont imposés, de sorte que si $D_R = 0$ alors la géométrie obtenue est celle de référence. L_y est calculée pour obtenir la relation $S = S_{ref}$, soit :

$$L_y = \frac{4S_{ref}/\pi + e^2 - L_x e}{4L_x/\pi - L_x + e - L_x D_R^2}$$

On notera qu'une valeur négative de D_R est équivalente à sa valeur absolue, puisque la cellule obtenue est simplement décalée d'une demie période. La figure 3.34 présente les résultats pour les rectangles de type R_y , et la figure 3.35 regroupe les deux autres types de rectangles.

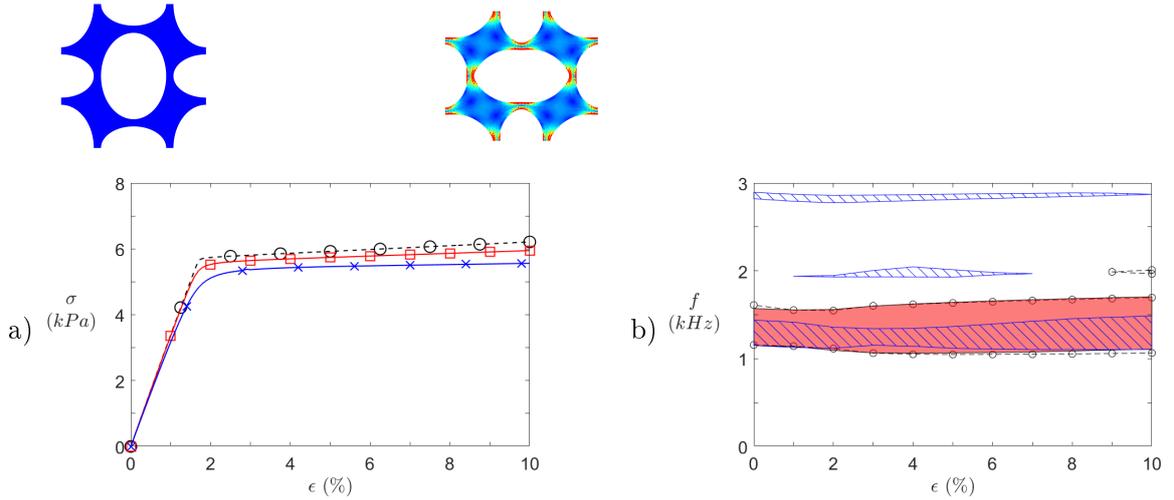


FIGURE 3.34 – Comparaison des cellules rectangulaires de type R_y . a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. - \bullet - / - - $D_R = 0$ (Référence), - \square - / \blacksquare $D_R = 0.1$, et - \times - / /// $D_R = 0.3$.

L'augmentation de D_R ne semble pas modifier la raideur statique initiale, et le plateau lié au flambement est toujours présent. En revanche la contrainte associée à ce plateau diminue quand D_R augmente, et la bifurcation est plus progressive. Cela peut faciliter le dimensionnement du matériau si l'on souhaite comprimer le matériau jusqu'à un point de raideur faible mais non nulle. En dynamique, l'intérêt est moindre, puisque qu'à $D_R = 0.1$ (en rouge), le bandgap primaire est très proche, mais légèrement moins étendu que le cas de référence, et le secondaire, pour les déformations les plus élevées, a disparu. Augmenter encore D_R semble favoriser l'ouverture de bandgaps secondaires (autour de $1950Hz$ et de $2850Hz$), mais ceci au détriment du premier bandgap qui peut ainsi s'étrécir jusqu'à 67% (à $\epsilon = 3\%$) de la valeur de référence.

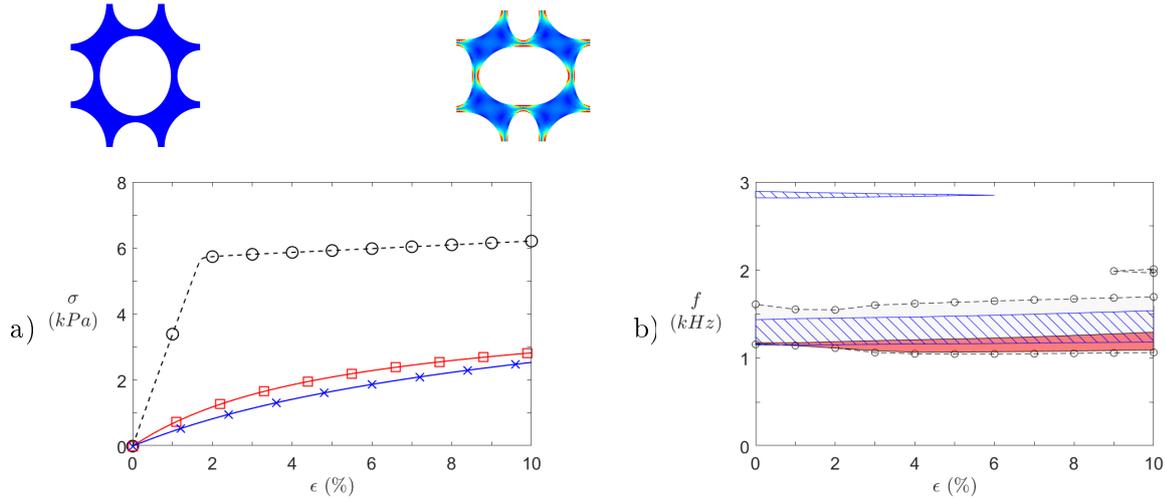


FIGURE 3.35 – Comparaison des cellules rectangulaires de type R_x ($D_R = 0.3$) et R_{xy} ($D_R = 0.2$). a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. $- \circ - / \square$ S_0 (Référence), $- \square - / \blacksquare$ R_{xy} , et $- \times - / \text{hatched}$ R_x .

Les rectangles de catégories R_x et R_{xy} sont regroupés car ils présentent des courbes de compression similaires. Le décalage transversal des ligaments verticaux de la cellule empêche l’occurrence du mode de compression pure et donc, du flambement. La bifurcation n’est plus présente et la raideur, bien que non linéaire, est globalement faible ce qui limite les capacités statiques de la structure. La taille des bandgaps est aussi diminuée en comparaison de ceux obtenus avec les carrés rotatifs.

En résumé, les carrés semblent être, à masse égale, les polygones rotatifs donnant les meilleurs résultats dynamiques, aussi bien en terme de largeur de bande que de fréquence minimale atteinte. Ce constat pourrait bien sûr être étayé en réalisant la même étude sur d’autres polygones. L’article de Shim *et al.* présente notamment une étude similaire sur quatre combinaisons de polygones rotatifs, dont les carrés. Si ces derniers présentent bien le bandgap le plus large observé, des fréquences plus faibles semblent pouvoir être atteintes, par des arrangement de triangles et d’hexagones rotatifs [112].

3.2.3 Modèles chiraux

Les structures chirales constituent une autre classe de géométries auxétiques, particulièrement adaptées à l’inclusion de masses résonantes, comme différents articles l’ont proposée par le passé 1.5.3.

L’étude portera uniquement sur la variante antitétrachirale, géométriquement proche de la structure à carrés rotatifs, et qui possède deux axes de symétries orthogonaux.

La figure 3.36 montre les paramètres géométriques de la cellule antitétrachirale, identiques à ceux de la cellule à carrés rotatifs. La comparaison statique et dynamique entre ces deux géométries est synthétisée sur la figure 3.37.

Bien que les géométries soient très proches, leurs propriétés sont clairement différentes : le

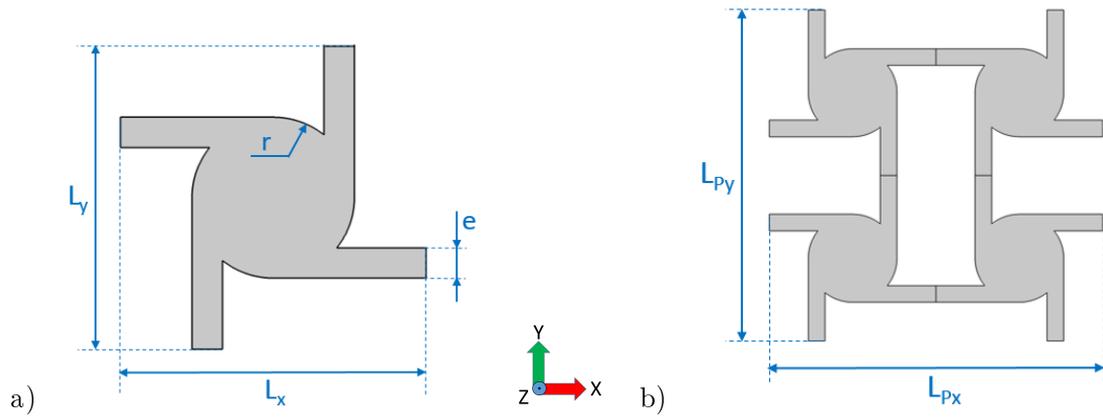


FIGURE 3.36 – Géométrie de type antitetrachiral. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.

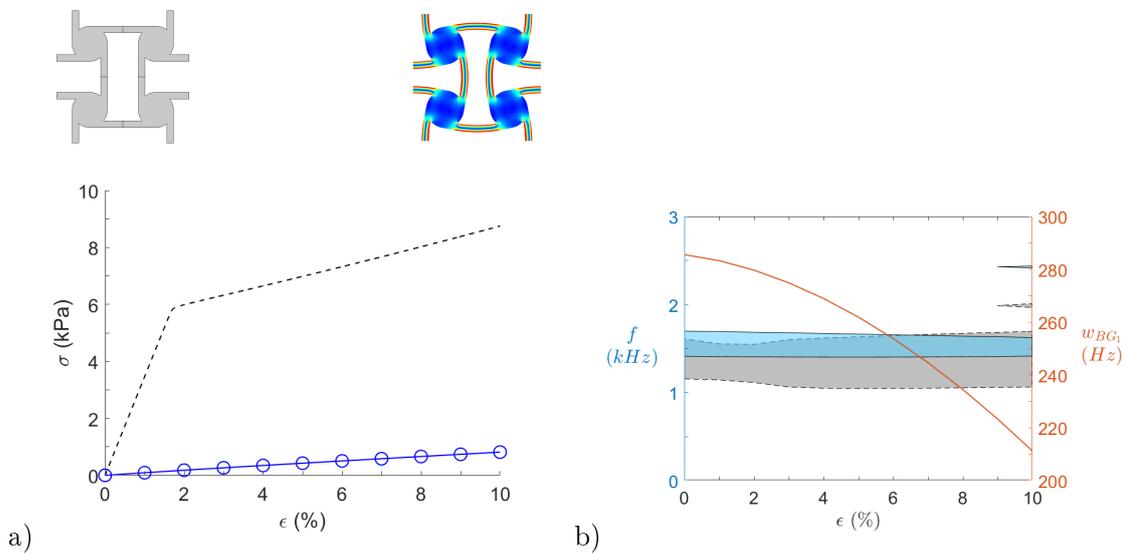


FIGURE 3.37 – Comparaison des cellules antitetrachirale et à carrés rotatifs. a) Comportement statique en compression : contrainte effective σ de la cellule $\text{---}\circ\text{---}$ antitetrachirale et --- à carrés rotatifs. b) Diagrammes de bandes des cellules \blacksquare antitetrachirale et \blacksquare à carrés rotatifs. --- Largeur w_{BG_1} du premier bandgap pour la cellule antitetrachirale.

désalignement des poutres longitudinales supprime le mode de compression rigide observé sur la cellule à carrés rotatifs ; dès les faibles déformations, les disques de la cellule pivotent et les ligaments fonctionnent immédiatement en flexion, d'où la raideur proche de l'état flambé de la cellule à carrés rotatifs (figure 3.37a). Le bandgap obtenu, bien que relativement large, est moins développé que celui de la cellule de référence (figure 3.37b). L'absence de flambage provoque un bandgap assez régulier, bien que décroissant avec la déformation (voir la courbe de w_{BG_1}).

3.2.4 Modèles réentrants

Comme énoncé dans le rapport bibliographique, les cellules réentrantes de Evans furent les premières cellules auxétiques étudiées. Nombre d'articles ont étudié leurs propriétés depuis, aussi bien statiques que dynamiques.

Les cellules réentrantantes sont définies par leurs dimensions et par leur angle de réentrance θ , tels qu'indiqués sur la figure 3.38. Si l'angle θ est strictement positif, la structure aura un coefficient de Poisson positif tandis que si $\theta < 0$, la structure sera auxétique. Le cas $\theta = 0$ est plus délicat car selon la direction des efforts, la structure peut flamber et dans ce cas le mode de déformation n'est pas trivial. Les simulations prédisent toutefois une déformation non auxétique de cette cellule (voir table 3.5).

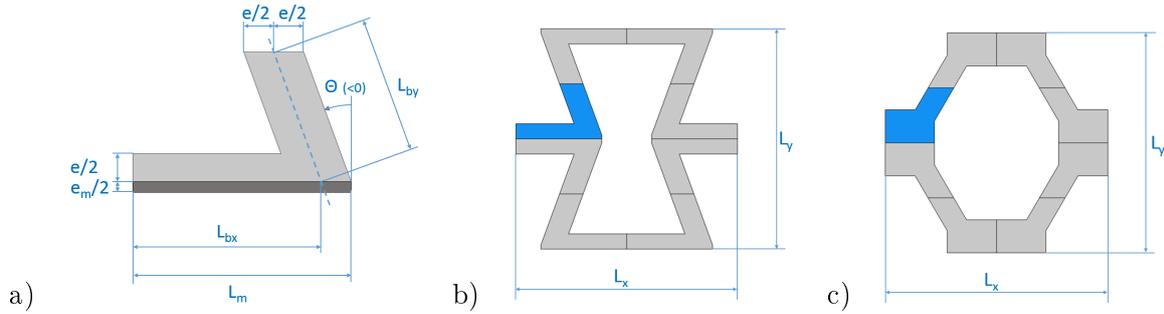


FIGURE 3.38 - Dimensions caractéristiques a) du motif élémentaire choisi (ici $\theta = -20^\circ$), b) d'une cellule réentrantante auxétique ($\theta = -20^\circ$) et c) d'une cellule hexagonale ($\theta = 30^\circ$). Les surfaces bleues correspondent à l'aire d'un motif élémentaire.

Par rapport à la cellule d'Evans, une surface (en gris foncé sur l'image 3.38a) de dimensions $L_m \times e_m$ est ajoutée. Elle permet de mieux contrôler la surface, et donc la masse m , de la cellule. En particulier, il est possible de comparer les propriétés mécaniques de cellules d'angles de réentrance θ différents, mais avec L_x , L_y , e , et m constants. Bien sûr, il est également possible de fixer l'épaisseur e_m , mais si L_x , L_y , et e , sont constants, la masse variera en fonction de θ . Le cellule d'Evans correspond au cas particulier $e_m = 0$.

Pour toute l'étude, les paramètres $L_x = L_y = 10mm$ et $e = 1mm$ sont fixés. Cette partie présente les résultats des deux comparaisons mentionnées, à savoir l'effet de θ à $e_m = 0.5mm$ constant, et l'effet de θ à masse constante. Les autres paramètres géométriques sont déduits à partir de ces valeurs. Les relations entre paramètres sont détaillées en annexe D.

Épaisseur e_m constante

Dans un premier temps les courbes de contrainte-déformation en compression des différentes cellules réentrantantes sont comparées. Les calculs sont réalisés pour $\theta = \{-30^\circ, -20^\circ, -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ\}$. Les géométries sont répertoriées table 3.5, et les résultats sont présentés sur la figure 3.39.

On observe que la seule géométrie présentant un changement de pente net est lorsque $\theta = 0^\circ$. C'est cohérent avec le fait que ce changement de pente est lié au flambage, car dès que $\theta \neq 0$, la symétrie des poutres longitudinales est brisée. Celles-ci ne travaillent donc plus en compression pure et le flambage ne peut pas se produire. Pour ces géométries, la contrainte augmente avec la déformation, mais la raideur décroît de manière monotone. Cette décroissance est toutefois plus prononcée pour les configurations non auxétiques.

Comme précédemment, seule l'évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de l'état

θ	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
Géométrie Initiale							
Géométrie Déformée							

TABLE 3.5 – Géométries réentrantantes à épaisseur constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent aux champs de contrainte de Von Mises à $\varepsilon = 10\%$.

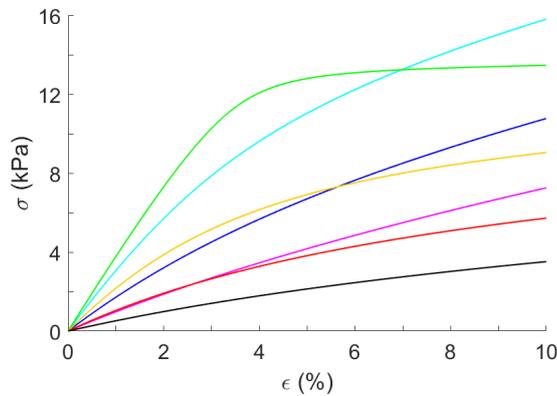


FIGURE 3.39 – Courbes de contrainte-déformation de cellules réentrantantes avec e_m constant, en fonction de l'angle de réentrance θ : — -30° , — -20° , — -10° , — 0° , — 10° , — 20° , et — 30°

de compression statique du matériau est étudiée. La figure 3.40 présente ces résultats pour les cellules réentrantantes.

On remarque que la plupart des cellules ne présentent que des bandgaps très étroits, voire aucun ($\theta \in \{0^\circ, 10^\circ\}$) sur le domaine étudié. L'échelle de fréquence est certes différente, mais ici la largeur des bandgaps ne dépasse pas $300Hz$, contre $670Hz$ pour les carrés rotatifs. Selon toute vraisemblance, d'autres bandgaps pourraient être trouvés à plus hautes fréquences, mais cette solution n'est pas satisfaisante car le matériau recherché doit être efficace à basses fréquences tout en restant compact.

Parmi les cas où des bandgaps sont observés, les plus basses fréquences affectées sont atteintes pour $\theta \in \{-30^\circ, 20^\circ, 30^\circ\}$. Augmenter $|\theta|$ peut donc favoriser l'émergence de bandgaps basses fréquences. Les bandgaps varient beaucoup d'une géométrie à l'autre, il est cependant incertain d'en tirer des règles de conception définitives. Augmenter le nombre d'angles θ testés pourrait venir confirmer ces observations.

Autant la compression semble participer à l'ouverture de bandgaps pour $\theta = -30^\circ$, autant elle peut également entraîner leur fermeture comme pour $\theta = 20^\circ$. Difficile donc de tirer

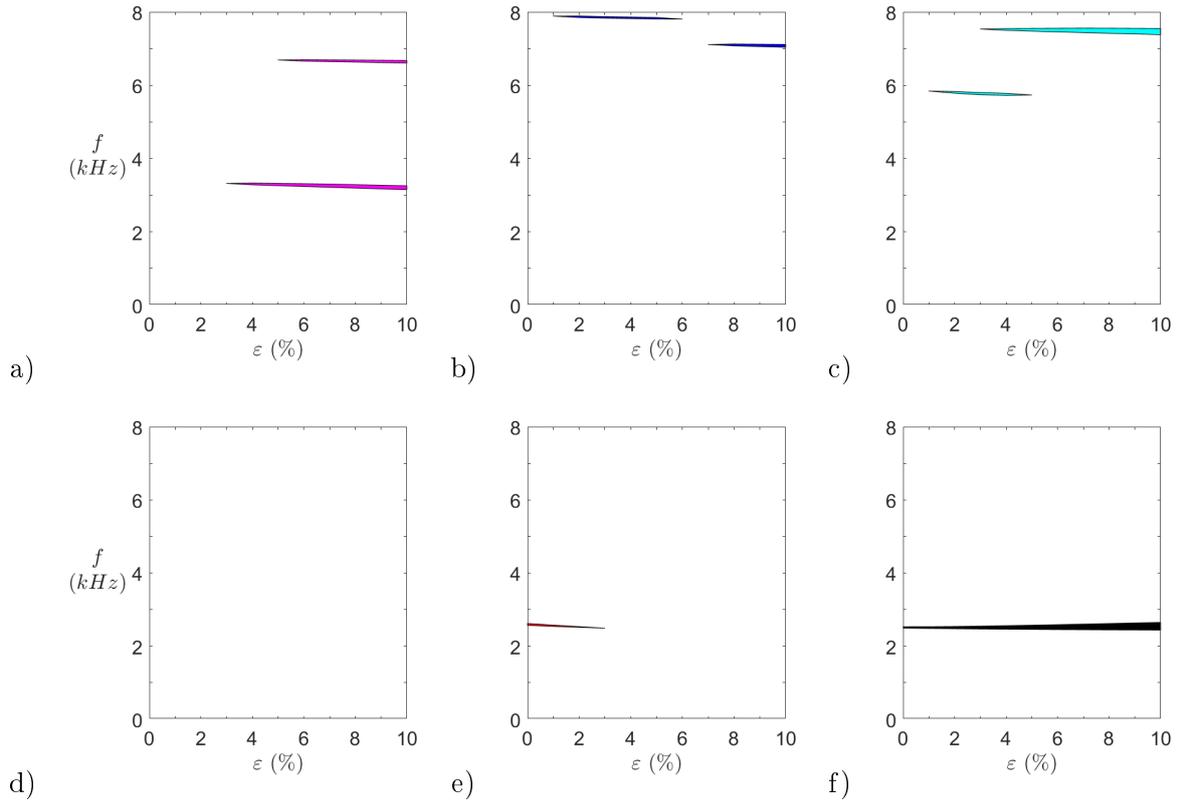


FIGURE 3.40 – Bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression de cellules réentrantes : a) $\theta = -30^\circ$, b) $\theta = -20^\circ$, c) $\theta = -10^\circ$, d) $\theta = \{0^\circ, 10^\circ\}$ (vides), e) $\theta = 20^\circ$, et f) $\theta = 30^\circ$. Les couleurs correspondent à celles de la figure 3.39.

des conclusions sur cet aspect. En revanche, on remarque que les deux cas où il n’y a pas de bandgaps correspondent à des pentes initiales raides sur la figure 3.39, tandis que le cas le plus favorable aux bandgaps larges et basses fréquences, à savoir $\theta = 30^\circ$, correspond à la pente initiale la plus faible. La raideur n’est cependant pas la seule responsable car des contre-exemples sont visibles : en particulier la raideur de la cellule $\theta = 0^\circ$ est proche de zéro quand $\varepsilon > 5\%$, alors qu’aucun bandgap n’est observé en dynamique. Le profil non linéaire de raideur, avec un plateau comme pour les carrés rotatifs, ne suffit donc pas à garantir l’apparition d’un bandgap basses fréquences.

Masse m constante

Comme le matériau et l’épaisseur hors plan $h_z = 40mm$ sont fixés, la masse m est imposée via la surface $S = m/(\rho h_z)$ de la cellule, qu’on impose égale à l’aire de la cellule unitaire à carrés rotatifs étudiée précédemment, soit $S = S_{ref} = 36.383mm^2$. Les géométries obtenues sont présentées sur la table 3.6.

De manière identique à l’étude précédente, le comportement statique de chaque cas est calculé et tracé sur la figure 3.41. On y retrouve les mêmes caractéristiques que sur la figure 3.39. Seules les raideurs sont modifiées, une réduction de e_m tendant à assouplir la structure, et réciproquement (à θ constant).

En revanche, des différences intéressantes sont à noter sur les diagrammes de dispersion, pré-

θ	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
Géométrie Initiale							
Géométrie Déformée							

TABLE 3.6 – Géométries réentrantes à masse constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent aux champs de contrainte de Von Mises à $\varepsilon = 10\%$.

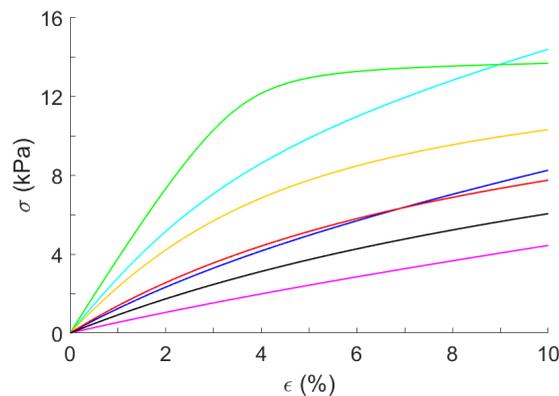


FIGURE 3.41 – Courbes de contrainte-déformation de cellules réentrantes avec la masse m constante, en fonction de l'angle de réentrance θ : — -30° , — -20° , — -10° , — 0° , — 10° , — 20° , et — 30°

sentés en figure 3.42.

Certains diagrammes sont encore vides ($\theta \in \{-30^\circ, -20^\circ\}$), mais une évolution progressive des bandgaps peut-être remarquée. Parmi les cas où des bandgaps sont observés, les plus basses fréquences affectées sont atteintes pour $\theta > 0$. Augmenter θ peut donc favoriser l'émergence de bandgaps à basses fréquences.

On remarque que les deux cas où il n'y a pas de bandgaps correspondent aux angles les plus faibles, et incidemment aux valeurs de e_m les plus faibles. On peut donc raisonnablement supposer qu'au moins l'un de ces deux paramètres favorise l'émergence et l'élargissement de bandgaps basses fréquences. L'étude paramétrique à épaisseur e_m constante a montré que θ seul n'a pas une influence évidente sur le développement de bandgaps. e_m semble donc jouer un rôle important sur les bandgaps. On peut visualiser cette épaisseur comme directement liée à la masse des poutres horizontales. Or, la masse de la cellule est ici imposée constante. Ce n'est donc pas tant la masse globale qui affecte ici la dispersion, mais la répartition de la masse. Cette importance de la répartition de matière est d'autant plus évidente si on compare les cellules réentrantes avec la cellule à carrés rotatifs étudiée précédemment. Pour rappel, la surface de cette dernière définit la surface de référence choisie ici. Pour une même masse de

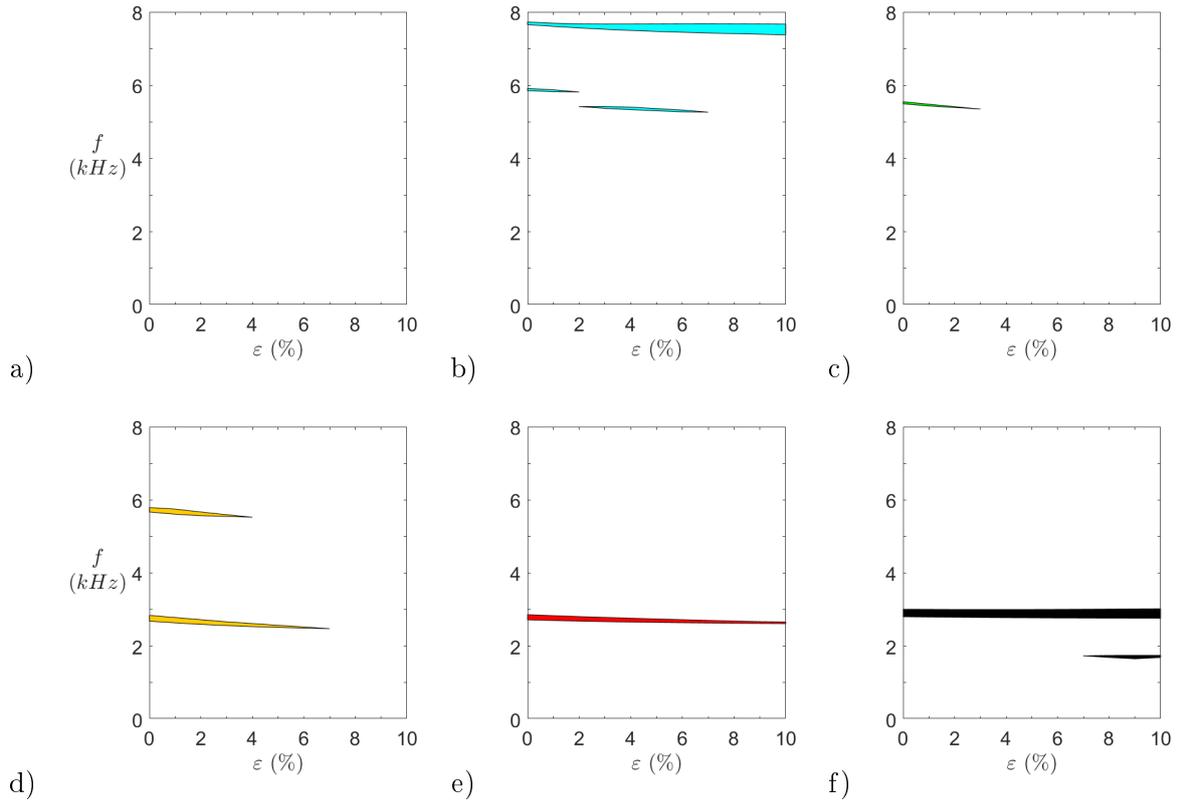


FIGURE 3.42 – Bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression de cellules réentrantes avec m constante : a) $\theta = \{-30^\circ, -20^\circ\}$ (vides), b) $\theta = -10^\circ$, c) $\theta = 0^\circ$, d) $\theta = 10^\circ$, e) $\theta = 20^\circ$, et f) $\theta = 30^\circ$. Les couleurs correspondent à celles de la figure 3.41.

cellule, la différence de largeur et de fréquence des bandgaps est très grande. Comme précédemment, le profil non linéaire de raideur obtenu pour $\theta = 0^\circ$, avec un plateau comme pour les carrés rotatifs, ne suffit donc pas à garantir l'apparition d'un bandgap basses fréquences.

Comme toutes les cellules sont ici de masse identique, la différence principale entre cellules réentrantes et cellule à carrés rotatif est la répartition de la matière dans la cellule. Cette répartition est donc essentielle lors du design du métamatériau. Une optimisation topologique pourrait donc être réalisée afin de trouver la meilleure répartition vis-à-vis des propriétés ciblées ici [114].

3.2.5 Étude comparative

Afin de choisir la géométrie la plus intéressante pour la suite de notre étude, une étude comparative des différents modèles auxétiques présentés précédemment est menée. Pour cela, deux critères sont choisis : la largeur du bandgap primaire w_{BG_1} et la limite fréquentielle inférieure f_{L,BG_1} de ce même bandgap. Le premier critère permet d'apprécier, à masse et dimensions égales, la plage fréquentielle théoriquement atteinte par un système d'isolation composé de métamatériau. Quant au second, il permet intrinsèquement d'évaluer le potentiel de compacité : plus la fréquence minimale atteinte est basse à dimensions identiques, plus les dimensions de la cellule seront petites pour atteindre une fréquence cible, ce qui équi-

vaut à une plus grande compacité de la structure finie (en considérant un nombre de cellules constant).

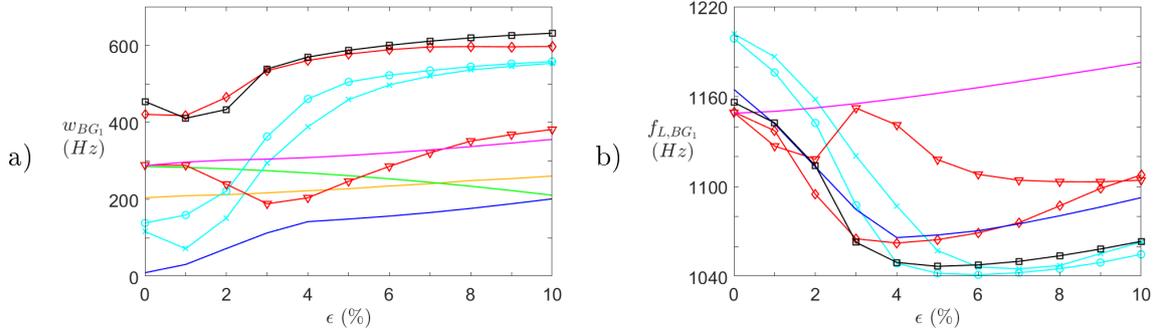


FIGURE 3.43 – Comparaison des différentes géométries auxétiques introduites, à masse et dimensions égales, en fonction de deux critères : a) la largeur du premier bandgap w_{BG_1} , et b) la limite fréquentielle inférieure du premier bandgap f_{L,BG_1} .

— Motif hexagonal ($\theta = 30^\circ$); — motif antitetrachiral; losanges rotatifs : \times $L_x = 9mm$ et \circ $L_x = 11mm$; rectangles rotatifs R_y : \diamond $D_R = 0.1$ et ∇ $D_R = 0.3$; \circ rectangles rotatifs R_x ($D_R = 0.3$); — rectangles rotatifs R_{xy} ($D_R = 0.2$); et \square carrés rotatifs S_0 .

La figure 3.43a montre les résultats pour le critère w_{BG_1} . Neuf géométries y sont comparées. Parmi l'ensemble des motifs hexagonaux, seul le cas $\theta = 30^\circ$ est présent car il donne de nettement meilleurs résultats (entre $410Hz$ et $631Hz$). Parmi tous les cas comparés, deux géométries donnent un bandgap primaire nettement plus large que les autres : S_0 et R_y ($D_R = 0.1$). Globalement, S_0 est légèrement meilleur, mais R_y donne un bandgap plus autour du point de flambement ($1 - 2\%$) : il semble que l'ovalisation des espaces vides adoucisse la bifurcation. Cependant, une modification géométrique trop grande dégrade sensiblement la largeur du bandgap, à l'instar du cas R_y ($D_R = 0.3$). Parmi les cas restants, on note une bonne performance des losanges rotatifs, mais seulement lorsqu'ils sont flambés, et plus particulièrement au-delà de $\epsilon = 4\%$. Les géométries ne présentant pas de flambement sont beaucoup moins intéressantes du point de vue de ce critère ($w_{BG_1} < 360Hz$).

Les résultats pour le critère f_{L,BG_1} sont présentés sur la figure 3.43b. Pour faciliter la lecture, l'échelle est centrée sur les meilleurs résultats, excluant ainsi les géométries antitetrachirale et hexagonale dont les valeurs se situent respectivement autour de $1400Hz$ et $2800Hz$. Parmi les autres géométries, plusieurs tendances peuvent être déterminées. Pour les états de déformation importants ($\epsilon \geq 4\%$), les carrés et losanges donnent les meilleurs résultats ($1041Hz \leq f_{L,BG_1} \leq 1064Hz$) notamment la géométrie en losanges rotatifs avec $L_x = 11mm$ ($1041Hz \leq f_{L,BG_1} \leq 1055Hz$). Cependant, les deux géométries en losanges présentent de moins bonnes performances pour $\epsilon \leq 3\%$. Sur cette plage de déformation, S_0 reste proche de la valeur optimale, mais ce sont les rectangles R_y qui donnent les meilleurs résultats. En particulier, le paramètre $D_R = 0.3$ est le cas optimal autour de $\epsilon = 1\%$ ($f_{L,BG_1} = 1127Hz$), tandis que $D_R = 0.1$ reste intéressant jusqu'à 3% . On note qu'un état de déformation optimal (autour de $\epsilon = 5\%$) semble exister pour la plupart des géométries présentant un flambement.

Pour résumer, selon l'état de déformation considéré, la géométrie optimale varie vis-à-vis du critère f_{L,BG_1} , mais le cas S_0 reste constamment proche de l'optimum et constitue donc une géométrie prometteuse avec des résultats robustes. Ce constat vaut également pour le critère w_{BG_1} . La géométrie à carrés rotatifs S_0 est donc choisie comme modèle de référence pour la suite de l'étude. Cependant, les deux critères mettent en lumière une amélioration potentielle par ovalisation des espaces vides telle que sur la géométrie R_y ($D_R = 0.1$). Cette dernière donne en effet de très bons résultats pour les deux critères, parfois meilleurs que S_0 pour de faibles états de déformations ($\varepsilon \leq 3\%$).

Conclusion

À la suite des simulations présentées dans ce chapitre, il apparaît que la plupart des géométries sont peu compatibles avec des applications compactes, large bande, et basses fréquences. Si par exemple intégrer des résonateurs locaux permet d'affecter facilement les basses fréquences, obtenir un bandgap complet semble complexe. Architecturer le matériau est une alternative possible. Cependant la plupart des architectures auxétiques simulées ne présentent que des bandgaps étroits. Vis-à-vis de la largeur de bande interdite, les géométries à polygones rotatifs donnent les meilleurs résultats. Parmi ces géométries, la plus prometteuse pour des applications basses fréquences est le modèle à carrés rotatifs, qui présente non seulement un plateau de raideur mais également la plus étendue des bandes interdites observées dans cette étude. C'est donc cette géométrie qui sera approfondie dans la suite de ce travail.

Chapitre 4

Simulations vibroacoustiques

Le chapitre précédent a permis de mettre en lumière les géométries permettant la création de bandes interdites larges et basses fréquences. Parmi les mécanismes auxétiques éprouvés, les structures à carrés rotatifs sont les plus prometteuses. Cette partie approfondit la compréhension de telles structures, à travers diverses études paramétriques. Des concepts originaux d'améliorations sont finalement proposés et évalués.

4.1 Analyse paramétrique de la géométrie de référence

La première étape de cette section regroupe les analyses de différents paramètres géométriques et matériaux afin d'observer leur effet sur les propriétés du métamatériau. Les dépendances paramétriques simples obtenues peuvent permettre de simplifier le modèle en normalisant les résultats. De plus les tendances observées donnent des clés de conception utiles pour le dimensionnement et l'optimisation du métamatériau final.

4.1.1 Définitions

Les paramètres définissant la géométrie à carrés rotatifs vue dans le chapitre 3 sont rappelés sur la figure 4.1.

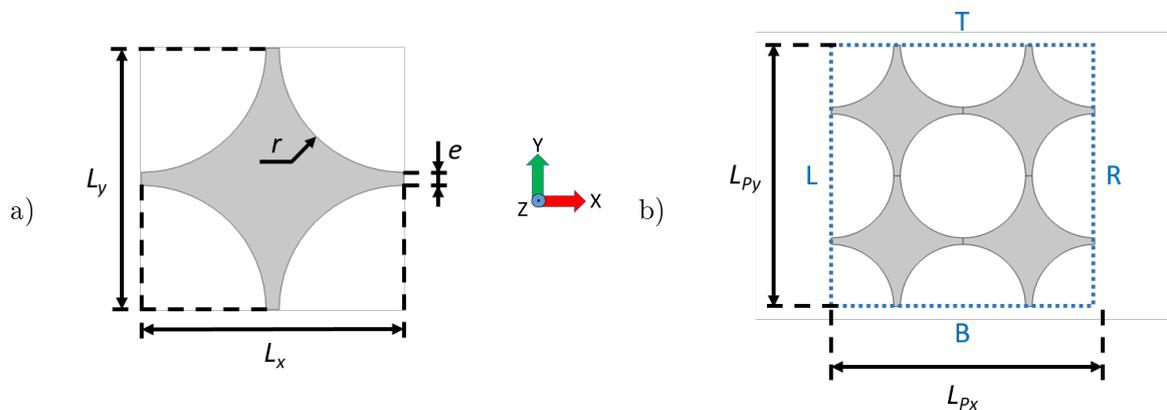


FIGURE 4.1 – Structure initiale S_0 : a) cellule unitaire et b) motif périodique.

Se restreindre à des polygones de type carré revient à imposer $L_y = L_x$, donc $L_{P,y} = L_{P,x}$. Comme $r = (L_x - e)/2$, seuls deux paramètres sont indépendants : L_x et e dont les effets sont étudiés dans les deux premiers paragraphes. L'effet d'échelle, c'est-à-dire la variation uniforme des dimensions avec le ratio L_x/e constant, est identifié dans l'étude suivante, tandis que les trois dernières sont consacrées à l'effet des constantes matériau. Dans la suite de ce chapitre, l'hypothèse de déformations planes est conservée dans la troisième direction, et l'épaisseur hors plan est fixée à $h_z = 40mm$ pour les calculs.

On suppose une structure infinie selon les directions X et Y , et les conditions aux limites imposées sur les cellules lors des calculs sont identiques à celles détaillées dans le chapitre 3. Pour l'étude en compression quasi-statique, les conditions aux limites de Dirichlet imposées sont :

$$\begin{aligned} \triangleright u_{B,y} &= u_0/2 \\ \triangleright u_{T,x} &= u_{B,x} \\ \triangleright u_{T,y} &= -u_{B,y} \\ \triangleright \frac{\partial u_{L,x}}{\partial x} &= \frac{\partial u_{R,x}}{\partial x} = 0 \\ \triangleright u_{R,y} &= u_{L,y} \end{aligned}$$

Avec $\mathbf{u}_\bullet = [u_{\bullet,x} u_{\bullet,y} u_{\bullet,z}]^t$ le vecteur déplacement sur la frontière $\bullet \in \{L, R, T, B\}$, correspondant respectivement aux frontières gauche, droite, supérieure, et inférieure. u_0 est le déplacement total imposé en compression selon la direction Y .

Pour les études dynamiques, le calcul de dispersion s'effectue par la méthode WFE directe et les conditions aux limites deviennent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_L e^{i\kappa_x L_x} \\ \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_L e^{i\kappa_x L_x} \\ \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_B e^{i\kappa_y L_y} \\ \mathbf{F}_T = \mathbf{F}_B e^{i\kappa_y L_y} \end{cases} \quad (4.1)$$

où κ (resp. κ_y) est le nombre d'onde dans la direction x (resp. y).

Le matériau choisi pour ces études paramétriques est l'élastomère silicone étudié en section 2.3.2 et dont les propriétés sont rappelées sur la table 4.1.

Matériau	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Aluminium	70	0.33	2700
Acier	210	0.3	7800
Silicone	0.0014	0.499	1150

TABLE 4.1 – Propriétés des matériaux utilisés.

4.1.2 Effet de l'épaisseur

Si l'on visualise la structure comme un réseau périodique de masses (polygones) liées par des ressorts (ligaments), l'épaisseur joue un rôle évident dans la valeur de la raideur. Ce rôle est illustré par la figure 4.2a. Il est clair que la raideur - associée à la pente de la courbe σ - ε - augmente avec l'épaisseur, ce qui provoque l'élévation du plateau lié au flambement. Ce raidissement est mis en évidence sur la figure 4.2b, notamment avant flambement. Cependant, l'augmentation d'épaisseur ne correspond pas seulement à une augmentation de raideur, mais également à un retard du phénomène de flambement. La figure 4.2b montre de manière nette ce retard, la chute de raideur se produisant pour des déformations ε plus importantes lorsque e croît.

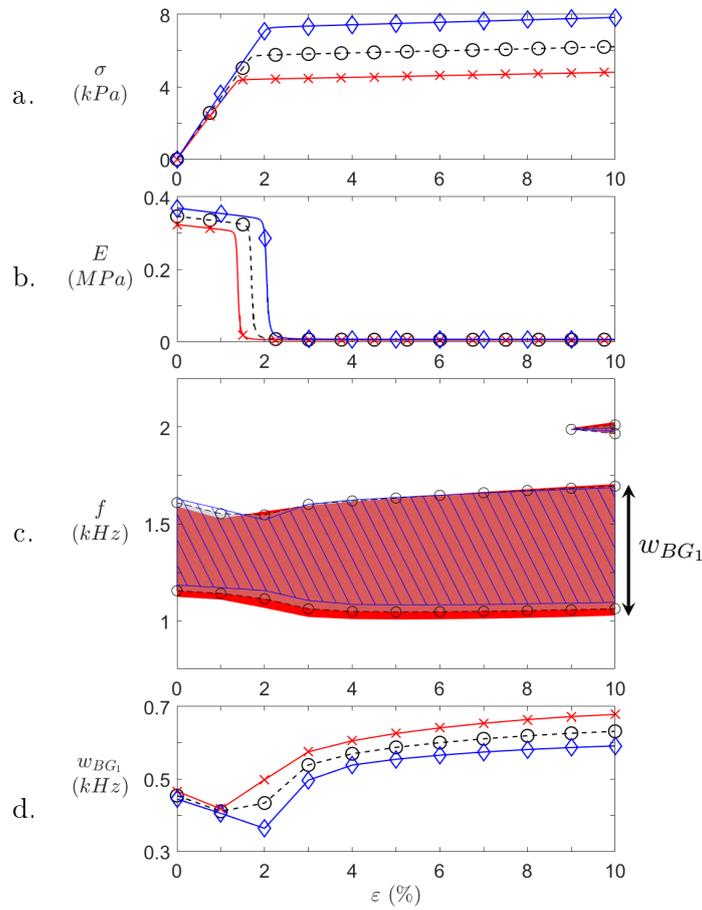


FIGURE 4.2 – Effet de l'épaisseur e sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ , b) Module de raideur équivalent E , c) bandgaps, et d) largeur w_{BG_1} du bandgap primaire. $\text{---}\times\text{---}/\blacksquare$ $e = 0.9\text{mm}$, $\text{---}\circ\text{---}/\text{---}\circ\text{---}$ $e = 1\text{mm}$ (S_0), et $\text{---}\diamond\text{---}/\text{---}\text{---}$ $e = 1.1\text{mm}$.

L'effet de e sur les propriétés de dispersion est plus complexe. Les figures 4.2c-d montrent que pour une déformation nulle, le bandgap primaire baisse en fréquences lorsque e diminue, ce qui est cohérent avec la baisse de raideur statique remarquée plus tôt. Cette baisse est cependant associée à une augmentation de w_{BG_1} . Diminuer l'épaisseur semble donc une option intéressante dans le but d'obtenir une isolation basses fréquences large bande. Pour rappel, on qualifie de bandgap *primaire* (parfois nommé BG_1), la bande interdite large et

basses en fréquences (relativement aux autres bandgaps éventuels), présente quelle que soit la déformation considérée. Les autres bandes sont qualifiées de *secondaires*.

L'intérêt est encore plus grand pour d'importants niveaux de déformation, où la baisse de e entraîne non seulement l'élargissement du bandgap primaire vers les basses fréquences mais également, dans une moindre mesure, vers les hautes fréquences. D'une manière générale, la limite supérieure de ce bandgap dépend très peu de e après flambement, mais le décalage observé sur la limite inférieure est stable quelle que soit la déformation considérée, ce qui résulte en une plage fréquentielle plus large pour les e faibles, notamment après bifurcation (figure 4.2d). Par ailleurs, on notera qu'augmenter l'épaisseur tend à rétrécir le bandgap secondaire observé pour $\varepsilon = 10\%$ (figure 4.2c).

Du point de vue des propriétés dynamiques, réduire l'épaisseur semble donc entièrement bénéfique. Plusieurs aspects sont néanmoins à prendre en compte pour le dimensionnement. La réduction d'épaisseur entraîne une baisse non négligeable des efforts statiques supportés par la structure (figure 4.2a). Selon la masse du système à isoler, cela peut devenir un facteur critique. De plus, la plage de dimensions disponibles peut être limitée par le matériel de fabrication utilisé. Enfin, selon le matériau, des parties très fines seront plus susceptibles de se dégrader au cours du temps, en particulier par fatigue. Il faut donc trouver un compromis entre les différentes propriétés souhaitées, afin de dimensionner au mieux la cellule.

4.1.3 Effet de longueur

Augmenter la longueur, sans variation d'épaisseur, entraîne une augmentation de la masse de la cellule tout en allongeant la partie fine associée aux ligaments. Le premier effet contribue à diminuer la fréquence des bandes interdites tandis que le deuxième diminue la raideur statique mesurée. En revanche, comme la taille de la cellule augmente, cela réduit le nombre de cellules contenues dans un volume imposé, et l'efficacité des bandgaps sera potentiellement moindre.

Les figures 4.3a-b montrent bien la perte de raideur lorsque L augmente. De manière similaire à une baisse de e , cette perte de raideur s'accompagne d'un abaissement conséquent du plateau. La bifurcation est alors observée pour des déformations plus faibles.

Ce décalage est également visible sur les figures 4.3c-d, la bifurcation étant repérable à l'élargissement du bandgap primaire. L'effet de L sur les résultats dynamiques est assez net : lorsque L augmente, les bandgaps tendent vers les basses fréquences mais la largeur $w_{BG,1}$ diminue également. Ce dernier point n'est toutefois pas valable pour tous les bandgaps, le bandgap secondaire (ici visible pour $\varepsilon = 10\%$ uniquement) s'élargissant quand L augmente. Augmenter la dimension de la cellule reste malgré tout très intéressant : passer de $L = 9mm$ à $L = 11mm$ entraîne pour $\varepsilon = 0\%$ par exemple une baisse de la limite inférieure du bandgap de $1320Hz$ à $1025Hz$ soit 22% , pour un rétrécissement de $w_{BG,1}$ de $493Hz$ à $423Hz$ soit 14% , mais pour $\varepsilon = 2\%$, on atteint une baisse de 24% ($1289Hz \rightarrow 974Hz$) de la limite inférieure pour un élargissement de 11% de $w_{BG,1}$ ($403Hz \rightarrow 448Hz$).

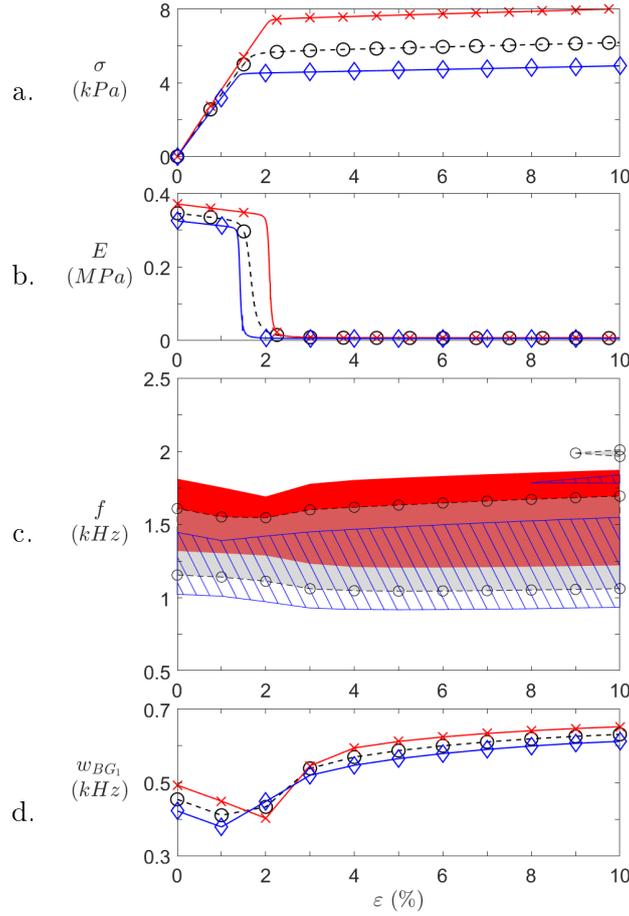


FIGURE 4.3 – Effet de la longueur L sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ , b) Module de raideur équivalent E , c) bandgaps, et d) largeur w_{BG_1} , du premier bandgap. $\text{---}\times\text{---}/\blacksquare$ $L = 9\text{mm}$, $\text{---}\circ\text{---}/\circ$ $L = 10\text{mm}$ (S_0), et $\text{---}\diamond\text{---}/\text{///}$ $L = 11\text{mm}$.

4.1.4 Effet d'échelle

On peut également vérifier l'effet d'échelle sur les résultats c'est-à-dire modifier proportionnellement toutes les dimensions, sans changer l'aspect de la cellule. Comme l'hypothèse de déformations planes permet d'exclure h_z , cela se traduit par un ratio L/e constant. Les autres dimensions sont alors définies par $L_x = L_y = L = F_s \times L|_{S_0}$ et $e = F_s \times e|_{S_0}$, où $F_s \in \mathbb{R}^+$ désigne le facteur d'échelle. Le cas S_0 correspond alors à $F_s = 1$.

L'échelle a un effet proportionnel sur les propriétés du matériau : il suffit d'appliquer le facteur d'échelle pour retrouver les résultats initiaux. En compression statique, la force est proportionnelle à la surface d'application quel que soit F_s , d'où σ indépendant de celui-ci. En revanche, les fréquences atteintes sont inversement proportionnelles à F_s . Cette relation est évidente sur la figure 4.4b, où F_s est directement intégré aux ordonnées. Cela signifie que multiplier les dimensions par un facteur permet de réduire les fréquences de bandes interdite par ce même facteur. C'est une information très intéressante pour le dimensionnement d'un prototype. Augmenter l'échelle présente toutefois deux inconvénients majeurs : d'une part la largeur des bandes interdites est elle aussi divisée par F_s , et d'autre part, dans le cas d'une

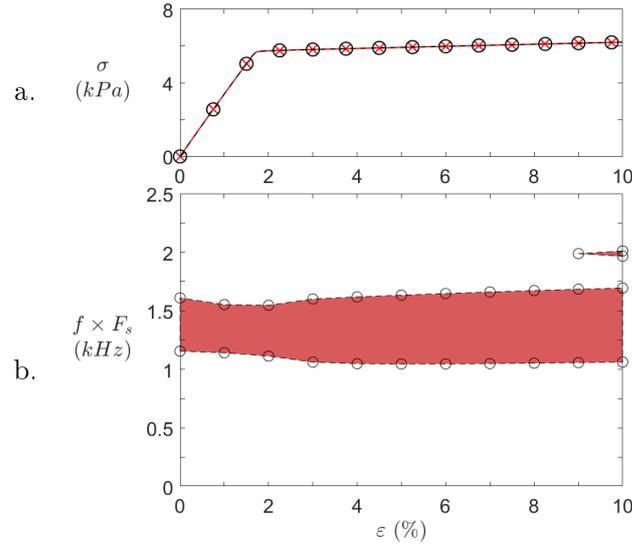


FIGURE 4.4 – Effet du facteur d'échelle F_s sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ et c) bandgaps. - \bullet - / \square $F_s = 1$ (S_0), et - \times - / \blacksquare $F_s = 2$

structure de dimensions finies, soit la compacité, soit le nombre de cellules s'en trouvera diminué.

4.1.5 Effet des propriétés du matériau

Malgré le comportement parfois complexe des élastomères, tous les calculs de cette étude sont réalisés avec un modèle de matériau élastique linéaire isotrope. Dans ce cas, seules trois propriétés sont nécessaires pour modéliser le matériau : le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν , et la masse volumique ρ . Leur contribution lors des calculs est alors relativement simple à déterminer.

En statique, la loi de Hooke généralisée énonce $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$. Appliquée à un matériau isotrope et avec les notations indicielles, elle s'exprime : $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker et ε_{kk} la trace du tenseur des déformations. Les courbes statiques précédentes ont montré que, pour les métamatériaux, cette relation n'est pas linéaire (\mathbf{C} effectif non constant) à cause de la structure et des mécanismes internes au métamatériau. Cependant le matériau constitutif est bien régi par cette loi. Il est donc possible de normaliser la contrainte nominale par E de manière à la rendre indépendante du module d'Young. Les déformations planes imposées ici contraignent le matériau lors de sa déformation, ce qui modifie les propriétés selon $E^* = E/(1-\nu^2)$ et $\nu^* = \nu/(1-\nu)$. Normaliser la contrainte par $\sigma_0 = E^*$ permet ainsi de s'affranchir de E car il disparaît du tenseur \mathbf{C} . En revanche, il n'est pas possible de factoriser une fonction de ν de manière à le faire disparaître de \mathbf{C} . L'effet de ν ne pourra donc pas être ignoré par la suite.

La même méthode peut être appliquée aux résultats dynamiques. L'équation de dispersion relie f (ou ω) et κ , via la vitesse de phase (équation 1.10), car $\omega = \kappa c_\phi$, ou encore $f\lambda = c_\phi$. Les équations analytiques ont montré que cette vitesse n'est pas constante dans les métamatériaux

car l'hétérogénéité structurelle induit la dispersion des ondes (section 3.1.1). Le comportement du matériau est toutefois dicté par cette relation. On en déduit la fréquence adimensionnelle : $f\lambda/c_\phi = 1$. Par exemple, la vitesse de phase de l'onde transversale peut être exprimée en fonction des constantes du matériau, en prenant en compte l'hypothèse de déformations planes :

$$c_{t,\phi} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E^*}{2\rho(1+\nu^*)}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (4.2)$$

En pratique, la longueur d'onde λ pour adimensionner peut être choisie arbitrairement, mais dans le cas de matériaux périodiques, la fréquence de référence est généralement la fréquence de Bragg, dont la longueur d'onde est égale au double de la taille de la cellule. Soit, dans la direction de compression $\lambda = 2L_y$. La fréquence adimensionnelle s'exprime alors $f_0 = c_{t,\phi}/(2L_y)$. La figure 4.5 synthétise les résultats pour chaque propriété du matériau.

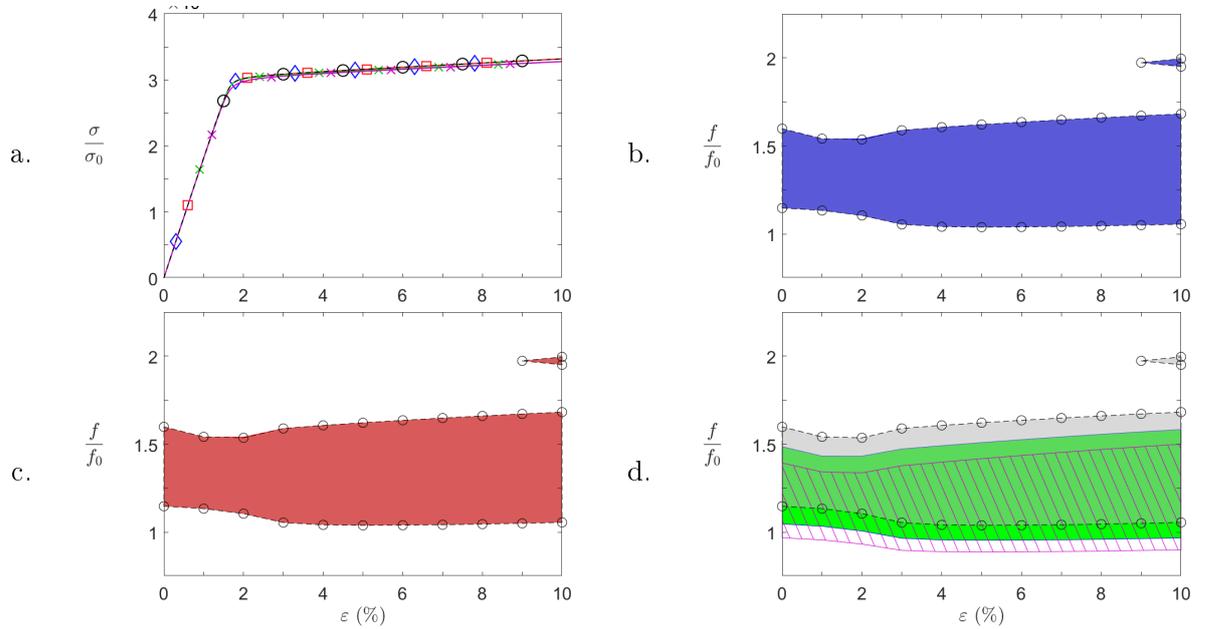


FIGURE 4.5 – Effet de E , ρ , et ν sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale adimensionnée σ/σ_0 et b-d) bandgaps en fonction de la déformation. -○- / $\frac{E}{E_0}$ Cas de référence S_0 ($E = E_{silicone}$, $\rho = \rho_{silicone}$, $\nu = \nu_{silicone}$), \diamond / \square $E = 10E_{silicone}$, \square / \square $\rho = 2\rho_{silicone}$, \times / \square $\nu = 0.3$, et \times / \square $\nu = 0.4$. Les propriétés non spécifiées sont égales à celles du cas de référence, et les fréquences sont adimensionnées par f_0 .

Les figures 4.5a-c montrent que les valeurs adimensionnées permettent effectivement de s'affranchir de l'effet de E et ρ . En statique comme en dynamique, les courbes de E (en bleu) et de ρ (en rouge) sont bien superposées au cas S_0 . La figure 4.5a montre en revanche une légère différence lorsque ν varie, différence mise en évidence sur la figure 4.5d. Les fréquences du premier bandgap diminuent en effet lorsque ν décroît. Comme estimé précédemment, ce décalage est lié à la définition des différents coefficients de la matrice de raideur \mathbf{C} , dont on ne peut complètement extraire ν .

En résumé, bien que la géométrie étudiée soit complexe, des règles de conception peuvent être

déduites des analyses paramétriques réalisées ici. En particulier, un facteur judicieusement choisi peut permettre d'adimensionner les grandeurs tracées et ainsi s'affranchir de E , ρ , ainsi que le facteur de forme L/e . Néanmoins, dans l'optique d'applications industrielles et pour une meilleure visualisation des performances des métamatériaux étudiés ici, les résultats suivants ne sont pas adimensionnés.

4.2 Optimisation géométrique

Le principe des carrés rotatifs, rappelé sur la figure 4.6a, montre que les vides entre polygones se réduisent uniformément lors de la compression de la structure, jusqu'à leur fermeture complète.

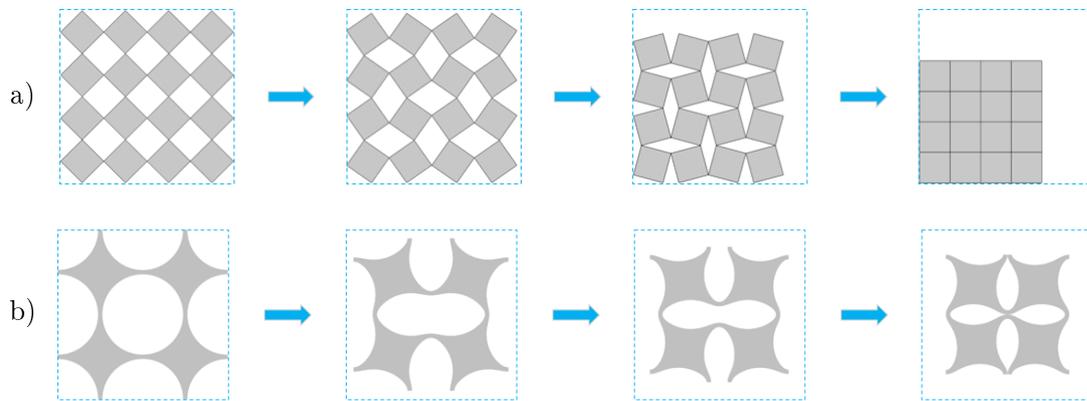


FIGURE 4.6 – Comportement mécanique en compression a) du mécanisme théorique et b) d'un motif unitaire S_0 .

En revanche, la géométrie approchée S_0 présente une déformée très différente. Pour des taux de compression importants, les ligaments entrent en contact en premier et des espaces vides demeurent. Ces contacts créent des voies de passage supplémentaires pour les vibrations, ce qui est néfaste pour la performance d'isolation recherchée. La déformation après contact n'est donc pas étudiée ici. Par conséquent, les vides résiduels constatés sur la figure 4.6b n'ont aucune utilité pour le comportement du métamatériau. À partir de ce constat simple, l'analyse de l'effet du remplissage de ces vides peut permettre d'améliorer les performances du système sans modification notable de sa compacité ni de sa raideur statique. Une première réponse est apportée dans cette partie par l'étude d'une géométrie simple, inspirée et comparée à S_0 , mais l'application de méthodes d'optimisation topologique plus avancées pourrait affiner les résultats obtenus.

4.2.1 Géométrie

De nombreuses modifications géométriques peuvent conduire au remplissage des espaces vides mentionnés. Toutefois, conserver des propriétés statiques similaires à celles de S_0 implique de limiter la modification de la géométrie des ligaments et de privilégier celle de la partie "carré". Comme ces deux parties ne sont pas délimitées précisément, une partie du travail

consiste à déterminer quel niveau de modification est considéré acceptable pour conserver la raideur statique sous un seuil donné.

La modification choisie ici consiste à ajouter un disque de matière, centré sur la cellule initiale S_0 (figure 4.1). La nouvelle cellule obtenue est décrite sur la figure 4.7. La déformée en compression (figure 4.7c) illustre la réduction des espaces vides, par comparaison au cas S_0 .

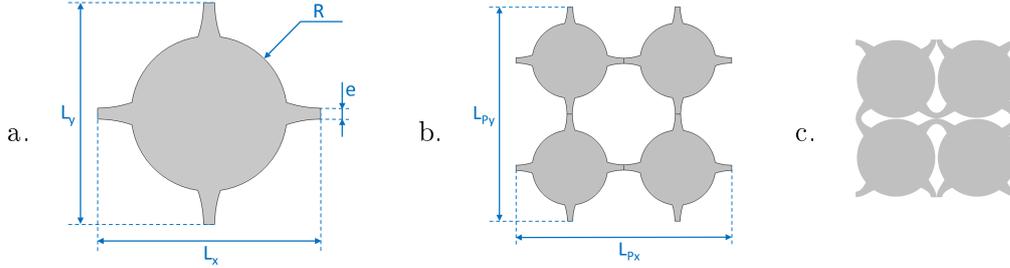


FIGURE 4.7 – Exemple de géométrie modifiée avec ses dimensions caractéristiques : a. cellule unitaire, b. motif périodique, et c. motif à $\approx 30\%$ de déformation.

Pour toutes les géométries présentées dans cette section, les paramètres initiaux suivants sont imposés : $L = L_{x,0} = L_{y,0} = 10mm$, $e = 1mm$, et $h_z = 40mm$. Les dimensions de la cellule L_x et L_y varient en fonction de la déformation $\varepsilon = (L_y - L_{y,0})/L_{y,0}$, et ne sont a priori pas égaux - bien que proches - dès que $\varepsilon > 0$. La structure complète est considérée infinie dans les direction X et Y , et une condition de déformations planes est imposée en Z .

Le même silicone que précédemment est choisi comme matériau constitutif (table 4.1).

Le paramètre déterminant permettant de contrôler la géométrie est ici le rayon R du disque central. Cependant, on peut remarquer que ce paramètre n'a pas une influence linéaire car toute valeur de R inférieure à la dimension minimale du carré central n'entraîne pas de modification géométrique. Avec les paramètres imposés ici, ces valeurs correspondent à $R \leq L(\sqrt{2}-1)+e \approx 2.57mm$. De plus, la quantité de matière ajoutée n'est pas proportionnelle à la variation de rayon. À cet égard, le rapport de masse ajoutée $m_+ = (m - m_{S_0})/m_{S_0}$ paraît plus pertinent. D'une part, deux géométries de rayons R différents ont nécessairement des valeurs différentes de m_+ et d'autre part, l'analyse paramétrique 3.1.1 a démontré l'importance de la masse sur les résultats. Si R reste le paramètre imposé en entrée, la plupart des résultats sont donc présentés en fonction de m_+ , dont les correspondances sont indiquées sur la table 4.2.

4.2.2 Comparaison statique

L'étude permet ici d'observer si la raideur statique reste relativement proche de la valeur de référence, choisie pour S_0 . Les conditions aux limites sont identiques à celles de la section 4.1.1.

La figure 4.8a montre les résultats statiques pour quelques configurations géométriques. Dans la mesure où les déformations les plus importantes sont situées au niveau des ligaments,

$R(mm)$	$m(g)$	$m_+(\%)$
0	6.7	0
2.75	6.8	2.04
2.875	7	4.57
3	7.2	7.73
3.125	7.5	11.46
3.25	7.7	15.7
3.375	8.1	20.4
3.5	8.4	25.55
3.625	8.8	31.12
3.75	9.2	37.10
3.875	9.6	43.46
4	10.1	50.19
4.125	10.5	57.28
4.25	11	64.71
4.375	11.5	72.48
4.5	12.1	80.58

TABLE 4.2 – Correspondances entre le rayon R , la masse m de la cellule, et m_+ le rapport de masse ajoutée par rapport à S_0 . La première ligne correspond à S_0 .

l'ajout de matière a ici peu d'influence sur les courbes de compression. Cependant, augmenter R au-delà d'une certaine valeur tend à réduire la longueur de la partie fine, et augmente sensiblement la raideur.

Pour observer comment la raideur évolue par rapport au cas de référence, le taux de variation $\tau_\sigma = \frac{\sigma - \sigma|_{S_0}}{\sigma|_{S_0}}$ de la contrainte nominale est tracé sur la figure 4.8b. Pour la plupart des cas, on remarque que ce taux présente deux valeurs stables : avant et après flambement, la première étant supérieure à la seconde. Pour les cas $R \in \{3, 3.5, 4\} mm$, ces deux valeurs évoluent de manière proportionnelle quand R croît : la différence entre elles croît donc également de manière proportionnelle. Cependant, cette relation ne s'applique pas pour le cas extrême $R = 4.5 mm$: la différence entre les deux valeurs stable de τ_σ est alors plus faible que pour le cas $R = 4 mm$. Ce changement montre que dans cette configuration, la modification géométrique est telle qu'elle affecte l'allure du comportement statique. Dans une optique d'amélioration des propriétés dynamiques sans changement des propriétés statiques, cette dernière géométrie est clairement à exclure.

Les deux premiers graphes montrent bien que la raideur augmente avec m_+ . La figure 4.8c permet de mettre en évidence cette tendance. Le graphe présente la valeur maximale $\tau_{\sigma,max}$ du taux de variation de contrainte en fonction de la masse ajoutée. La pente observée n'est pas linéaire mais augmente également avec la masse. Une limite de $\tau_{\sigma,max}$ peut alors être choisie pour déterminer le rayon R maximal sous lequel les niveaux de contrainte sont considérés similaires. Cette limite est ici arbitrairement fixée à 10% (pointillés noirs). Les masses

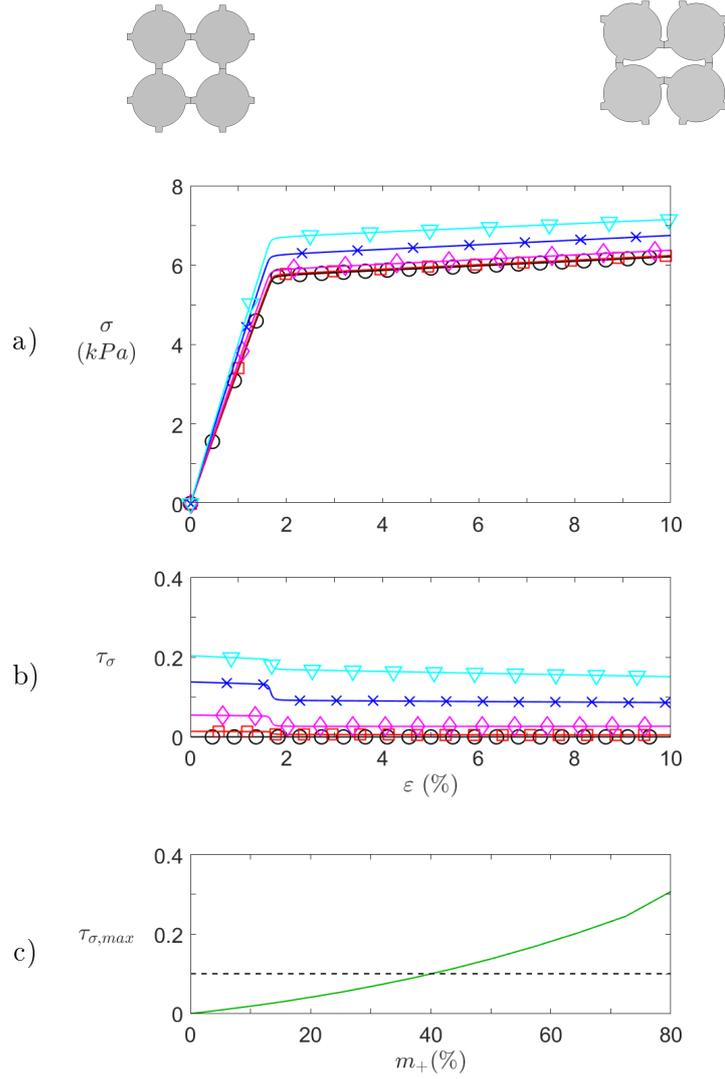


FIGURE 4.8 – Effet du rayon R sur le comportement statique : (a) contrainte nominale σ et (b) contrainte nominale τ_σ normalisée par rapport à S_0 . —●— Cas S_0 , —■— $R = 3mm$, —◇— $R = 3.5mm$, —×— $R = 4mm$, —▽— $R = 4.5mm$. (c) — Valeur maximale de la contrainte nominale normalisée en fonction de la masse ajoutée m_+ . - - - Seuil arbitraire de 10%.

ajoutées satisfaisant ce critère sont inférieures à 40%, ce qui correspond aux cas tels que $R \leq 3.75mm$. Les autres configurations sont malgré tout conservées pour comparaison dans l'étude dynamique.

4.2.3 Dynamique

La suite de l'étude compare les bandgaps omnidirectionnels obtenus pour chaque configuration et démontre l'influence de R sur les propriétés dynamiques du métamatériau. Une optimisation géométrique est ainsi effectuée, pour trois critères choisis : la largeur w_{BG_1} du premier bandgap, la limite inférieure f_{L,BG_1} de celui-ci, et la largeur totale $w_{BG,t}$ des bandgaps obtenus sous $3kHz$.

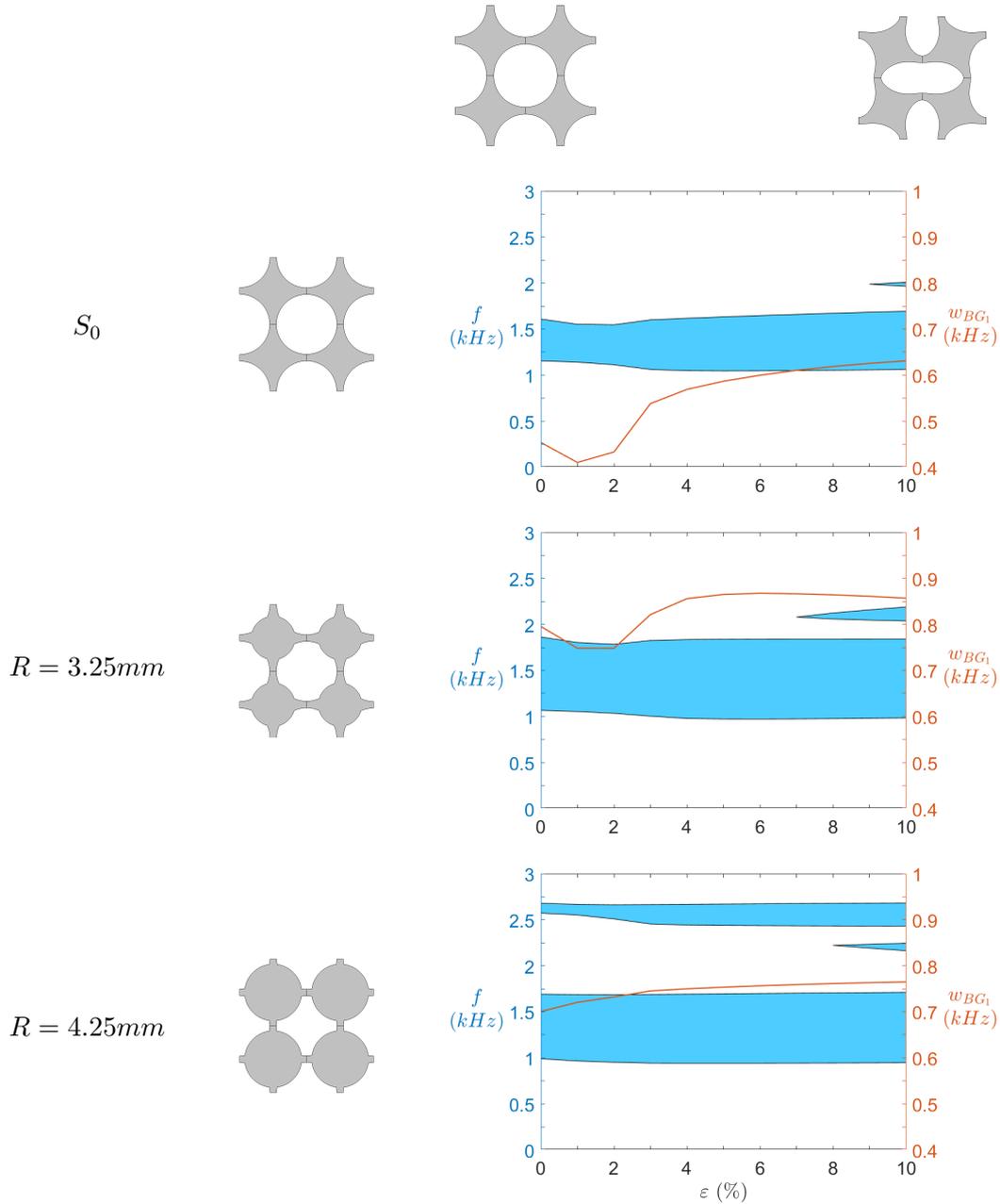


FIGURE 4.9 – Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression pour trois géométries choisies : S_0 , $R = 3.25mm$, et $R = 4.25mm$. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du premier bandgap

Les premiers résultats, présentés sur la figure 4.9, montrent l'évolution des bandgaps omnidirectionnels inférieurs à $3kHz$ en fonction de la déformation nominale. L'effet de celle-ci sur le premier bandgap de S_0 est bien visible, en particulier pour $\varepsilon < 5\%$, mais il s'estompe pour les valeurs importantes de R . Les courbes de w_{BG_1} (en rouge) soulignent clairement ce constat, puisqu'elles s'aplanissent quand R augmente.

Pour de faibles déformations ($\varepsilon < 2\%$), les deux premières configurations montrent un rétrécissement du bandgap ainsi qu'une légère baisse en fréquences quand ε augmente. Ce

comportement semble proche d'une augmentation du contraste de raideur dans une chaîne masse-et-masse (voir les résultats analytiques section 3.1.1). Or, pour ces valeurs de déformation, la structure n'est pas flambée et peut être assimilée à une chaîne diatomique de masses-ressorts fonctionnant principalement en traction-compression. La compression entraîne une répartition inhomogène des déformations dans la direction longitudinale, celles-ci étant plus importantes dans les ligaments. Le contraste de raideur entre les ligaments et les polygones augmente alors. On peut donc supposer que la modification du bandgap est liée à cette variation de contraste. On notera toutefois que ce phénomène n'est pas observé pour $R = 4.25mm$. L'augmentation de R semble donc modifier sensiblement le comportement dynamique pour des ε faibles, avec notamment une variation monotone de la largeur w_{BG_1} sur l'intervalle considéré.

Un autre point remarquable de la figure 4.9 est la taille du bandgap primaire pour la deuxième géométrie, nettement supérieure à S_0 . La différence est particulièrement évidente pour des valeurs de déformation faibles, et est également valable pour le second bandgap, situé autour de $2.1kHz$. L'augmentation de R améliore donc sensiblement la largeur des bandgaps. L'analyse pour $R = 4.25mm$ révèle toutefois une réduction de cette largeur, confirmée par les courbes de w_{BG_1} . Une valeur optimale de R semble donc exister. Pour le prouver, une analyse des bandgaps en fonction de m_+ est effectuée. Les résultats de cette analyse pour quelques valeurs de déformation statique sont présentés sur la figure 4.10.

Cette figure montre bien une variation non monotone des bandgaps, aussi bien à l'égard de leur limite inférieure, leur limite supérieure, ou de leur largeur. Le cas optimal varie selon lequel de ces critères est privilégié, mais la masse associée à ce cas optimal semble peu affectée par la déformation. Les courbes de w_{BG_1} présentent en effet une zone optimale relativement plate. De petites variations de masse auront donc peu d'influence, ce qui montre la robustesse des résultats. La figure 4.11 et la table 4.3 synthétisent les résultats d'optimisation pour toutes les configurations testées et pour les trois critères suivants :

- la largeur w_{BG_1} du bandgap primaire
- la largeur totale $w_{BG,t}$ des bandgaps obtenus sous $3kHz$
- la limite inférieure f_{L,BG_1} du bandgap primaire

L'analyse du premier critère (figure 4.11 - haut) montre que le rayon optimal varie entre $3.375mm$ et $3.5mm$ selon les états de déformation étudiés. La largeur maximale $w_{BG_1} = 908.5Hz$ est obtenue pour une déformation initiale de 7%. ε a cependant peu d'influence sur la valeur optimale, ce qui montre encore une fois la robustesse des résultats vis-à-vis de ce paramètre. Par comparaison avec S_0 , l'amélioration est très importante, notamment pour les faibles valeurs de déformation. En particulier, la largeur optimale obtenue pour $\varepsilon = 1\%$ correspond à un élargissement de 103% par rapport au cas de référence.

Dans la plupart des cas, plusieurs bandgaps sont observés simultanément. Il peut parfois être intéressant d'avoir le plus grand nombre de fréquences incluses dans un bandgap quelconque, plutôt que d'avoir un seul bandgap large. La figure 4.11 (centre) montre donc les résultats de

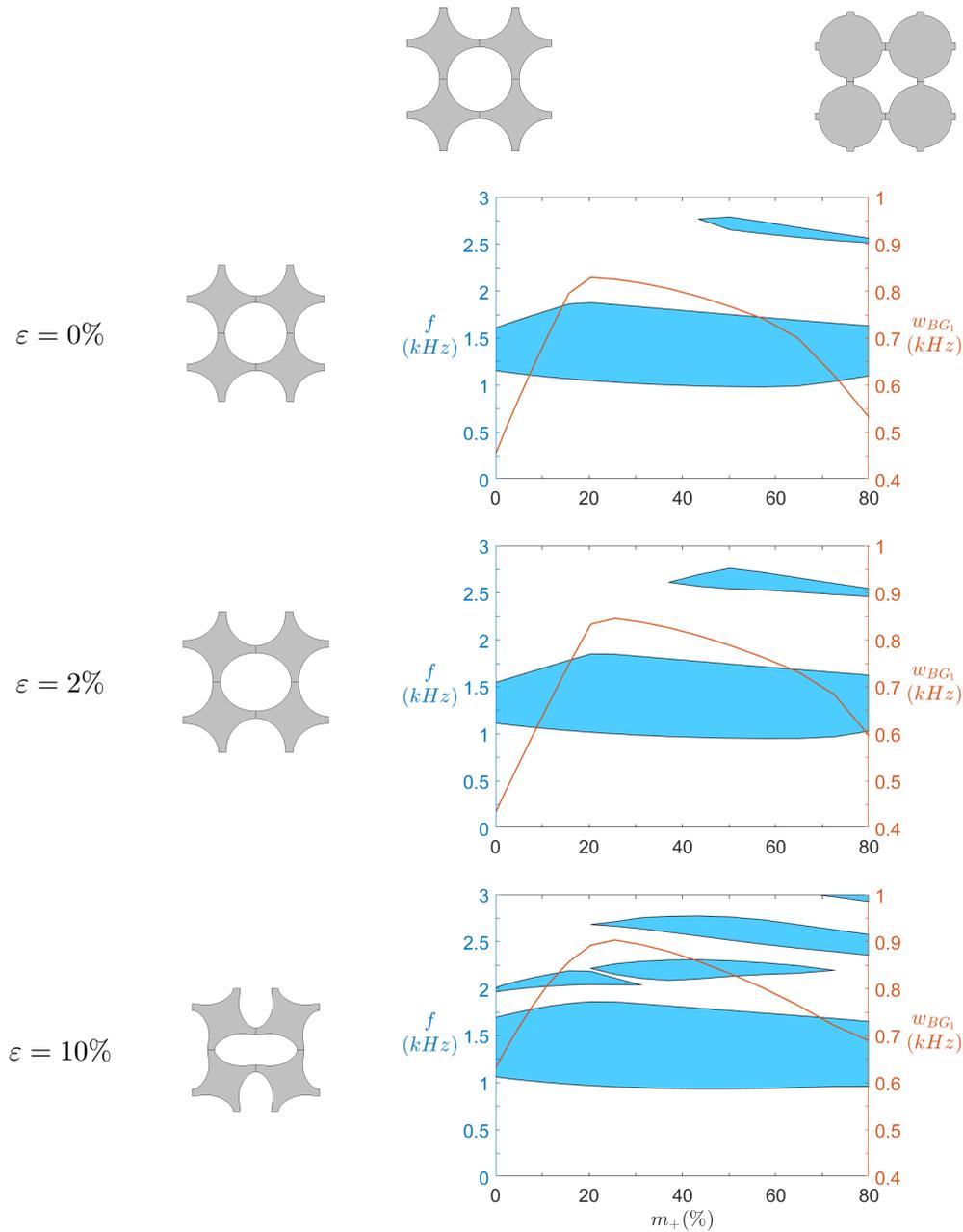


FIGURE 4.10 – Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la masse ajoutée pour trois états de précompression : $\varepsilon = 0\%$, $\varepsilon = 2\%$, et $\varepsilon = 10\%$. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du premier bandgap.

l'optimisation de $w_{BG,t}$, soit la somme des largeurs de bandgaps inférieurs à $3kHz$. Le rayon optimal pour chaque cas de déformation est différent du premier critère : pour $\varepsilon \leq 6\%$, le R optimal est de $4mm$ tandis que pour $\varepsilon \geq 7\%$, $R_{opt} = 3.875mm$. En outre, l'évolution du maximum de $w_{BG,t}$ est quasi monotone en fonction de la déformation : même quand w_{BG_1} diminue, la somme de tous les bandgaps augmente, excepté avant flambage. Une valeur optimale existe peut-être pour des valeurs de déformation supérieures, mais le domaine d'étude ne permet pas de le vérifier. On notera également la différence de $w_{BG,t}$ optimal entre les cas non flambés ($\varepsilon < 2\%$) et flambés. Il semble donc qu'augmenter la déformation favorise le développement de bandgaps secondaires, parfois au détriment du premier bandgap. Globalement,

l'optimisation géométrique est très intéressante pour $w_{BG,t}$, avec une augmentation de celui-ci comprise entre 80% (pour $\varepsilon = 6\%$) et 132% (pour $\varepsilon = 2\%$), selon l'état de déformation. Et contrairement aux autres critères, la déformation augmente sensiblement la valeur optimale de $w_{BG,t}$: un élargissement de 40% est ainsi observé pour $\varepsilon = 10\%$, par comparaison au cas non précontraint.

Le troisième critère (Figure 4.11 - bas) donne des rayons optimaux assez proches de ceux du deuxième critère. R_{opt} reste en effet proche de $4mm$, et la valeur optimale de f_{L,BG_1} est très peu affectée par l'état de déformation. La fréquence la plus basse est $f_{L,BG_1} = 926Hz$, obtenue pour $R_{opt} = 3.875mm$ et $\varepsilon = 6\%$, soit seulement $55Hz$ de moins que pour le cas optimal sans compression initiale. La modification géométrique est toutefois bénéfique, avec une chute de 15% de f_{L,BG_1} par rapport au cas de référence pour les deux valeurs de précompression les plus faibles. Même en se restreignant aux cas satisfaisant le critère de contrainte choisi lors de l'analyse statique (paragraphe 4.2.2), cette valeur reste supérieure à 13% pour $R_{opt} = 3.75mm$, ce qui est appréciable au vu des fréquences considérées.

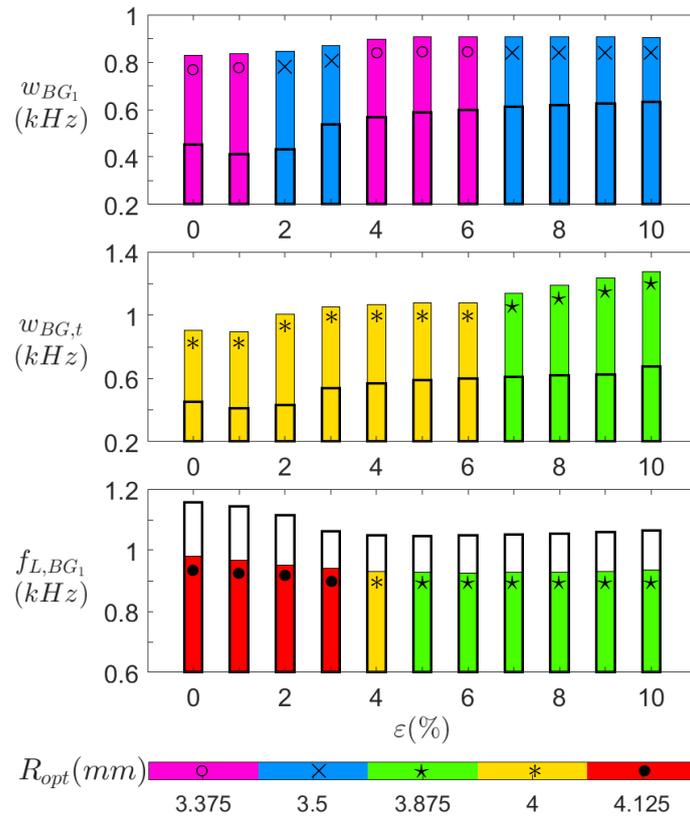


FIGURE 4.11 – Résultats d'optimisation pour trois critères : w_{BG_1} (haut), $w_{BG,t}$ (centre), and f_{L,BG_1} (bas). ■ ■ ■ ■ ■ Optimum pour chaque état de déformation, comparé au \square cas de référence S_0 .

ε (%)	BG ₁ le plus large			Étendue maximale des BGs			Fréquence minimale de BG ₁		
	R (mm)	w_{BG_1} (Hz)		R (mm)	$w_{\text{BG},t}$ (Hz)		R (mm)	$f_{\text{L,BG}_1}$ (Hz)	
	Opt	Opt	S_0	Opt	Opt	S_0	Opt	Opt	S_0
0	3.375	829	454		905	454	4.125	981	1156
1		836	411		896	411		966	1143
2	3.5	846	434	4	1007	434		953	1114
3		871	539		1050	539		941	1063
4	3.375	898	569		1069	569	4	930	1049
5		907	587		1076	587		927	1047
6	3.5	907	600		1079	600	3.875	926	1048
7		908	611		1136	611		927	1050
8	3.5	907	619	3.875	1188	619		929	1054
9		906	626		1234	626		932	1058
10		903	631		1275	676		935	1064

TABLE 4.3 – Valeurs optimales en fonction des critères.

4.3 Géométrie à inclusions

4.3.1 Géométrie

Comme évoqué dans le premier chapitre (section 1.5.5), de nombreux exemples de la littérature montrent qu’inclure des masses résonantes permet d’obtenir des propriétés améliorées des métamatériaux, notamment en basses fréquences. Même si l’augmentation de la masse peut poser problème, en particulier dans un contexte industriel, ces inclusions peuvent apporter des propriétés très intéressantes. Toutefois, peu de travaux traitent de telles inclusions dans des géométries à carrés rotatifs. À la connaissance de l’auteur, les seuls articles abordant le sujet sont ceux de Wang *et al.* [120] et de Cui et Harne [27]. Le premier montre l’intérêt d’inclusions dans les espaces vides du métamatériau, mais le comportement auxétique n’est pas intégré à l’étude. Dans le second, les masses sont incluses dans les polygones de la structure, mais celle-ci est en mousse. Si cette double porosité permet de bonnes performances acoustiques, la tenue mécanique du matériau est sensiblement différente. Le métamatériau conserve son caractère auxétique en compression, mais le matériau constitutif étant lui-même poreux, le mécanisme de déformation est à différencier d’un flambage au sens strict. Cela entraîne la disparition de toutes les propriétés qui caractérisent le phénomène de flambage. À la connaissance de l’auteur, le métamatériau présenté ici est donc la première étude exploitant simultanément le flambage caractéristique des géométries à polygones rotatifs, et le concept d’inclusions dans ces polygones.

La figure 4.12 décrit les paramètres de la géométrie proposée. On note que l’amélioration géométrique étudiée dans la section précédente est également intégrée au design, ce qui permet d’élargir la plage de diamètres d’inclusions possible. Afin de faciliter la réalisation expérimentale d’un prototype, l’inclusion est de forme circulaire, concentrique au cercle extérieur de rayon R_o .

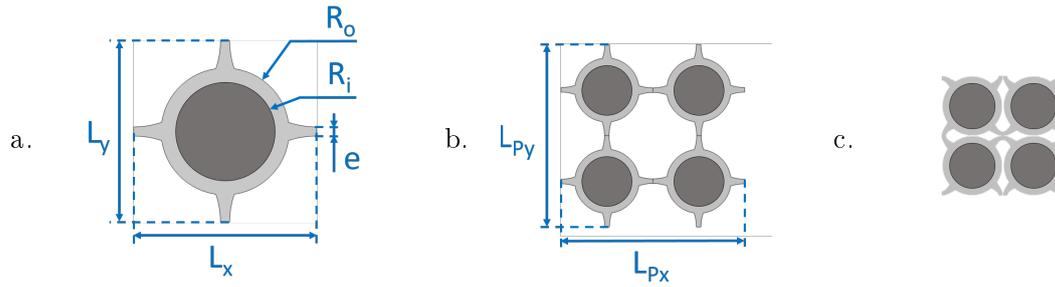


FIGURE 4.12 – Géométrie avec inclusions S_R et ses dimensions caractéristiques : a. cellule unitaire, b. motif périodique, et c. motif à $\approx 30\%$ de déformation.

Les paramètres de l'étude d'optimisation sont reprises ici : $L = L_x = L_y = 10mm$, $e = 1mm$, et $h_z = 40mm$. Pour élargir la plage de diamètres, le rayon extérieur R_o n'est pas fixé à l'une des valeurs optimales obtenues précédemment, mais à une valeur supérieure ($R_o = 4.2mm$). La structure complète est considérée infinie dans les direction X et Y , et une condition de déformations planes est imposée en Z .

Le silicone est conservé comme matériau constitutif, tandis que l'acier est choisi pour son contraste important avec les propriétés du silicone. De plus c'est un matériau peu cher et simple à usiner, ce qui en fait un excellent candidat pour une mise en œuvre expérimentale. Les propriétés d'intérêt des matériaux sont rappelées sur la table 4.1.

L'objectif est ici de vérifier l'effet de l'inclusion, en fonction de sa masse. De manière similaire à l'étude précédente, le paramètre contrôlé est le rayon R_i de l'inclusion mais les résultats sont principalement présentés en fonction de la masse m_R de l'inclusion (voir la table 4.4 pour les correspondances).

4.3.2 Comparaison statique

La première étape consiste à étudier les courbes de contrainte-déformation, en fonction de la masse ajoutée. Bien que S_0 soit conservé comme cas de référence, les résultats avec inclusions sont souvent comparés au cas $R_o = 4.2mm$; $R_i = 0mm$ dénommé par la suite S_E . Les résultats de compression sont synthétisés sur la figure 4.13.

L'étude précédente (section 4.2.2) a montré que la raideur statique augmente de manière non négligeable lorsque R_o dépasse un certain seuil. La différence entre les cas S_0 et S_E sur la figure 4.13a illustre aussi cette augmentation. En revanche, les courbes de contrainte semblent peu affectées par la taille de l'inclusion, notamment au niveau du plateau de raideur. Mis à part le cas extrême $R_i = 3mm$, les plateaux des géométries à inclusions sont presque confondus avec celui de S_E . Des variations plus importantes sont cependant notées entre les raideurs pré-flambement. La raideur importante de l'acier rend l'inclusion très peu déformable par rapport au reste de la cellule. De manière logique, plus la proportion d'acier est importante, plus la raideur de compression pré-flambement est grande. En revanche, après bifurcation la déformation est principalement liée aux ligaments, d'où l'effet moindre de la composition des

$R_i(mm)$	$m_R(g)$	$m(g)$	$m_+(\%)$
(S_0)	0	1.67	0
0 (S_E)	0	2.71	62
0.25	0.06	2.76	65
0.5	0.25	2.92	74
0.75	0.55	3.18	90
1	0.98	3.54	112
1.25	1.53	4.01	140
1.5	2.21	4.59	174
1.75	3.00	5.27	215
2	3.92	6.05	261
2.25	4.96	6.94	314
2.5	6.13	7.93	374
2.75	7.41	9.03	439
3	8.82	10.23	511

TABLE 4.4 – Correspondances entre le rayon R_i , la masse m_R de l'inclusion, m la masse totale d'une cellule, et $m_+ = (m - m_{S_0})/m_{S_0}$, le rapport de masse ajoutée par rapport à S_0 .

polygones. La figure 4.13b met ce phénomène en évidence. On notera également le déclenchement avancé de la bifurcation associée au flambement, lorsque R_i augmente, alors que la valeur de ε marquant le début du plateau reste constante. Cette spécificité pourrait conférer une meilleure robustesse à des systèmes réels avec un rayon R_i grand, par exemple si le point de fonctionnement souhaité se situe près de la bifurcation.

4.3.3 Dynamique

Les bandgaps omnidirectionnels sont ensuite comparés pour chaque configuration. En particulier, l'influence de R_i et de la précompression sur les propriétés dynamiques du métamatériau est étudiée. La plage de fréquence est ici étendue à $[0, 4]kHz$ afin que le premier bandgap soit entièrement inclus dans cette plage, quelle que soit la configuration considérée.

La figure 4.14 présente l'évolution des bandgaps en fonction de l'état de compression initiale ε pour trois géométries : $R_i = 0mm$, $R_i = 1.5mm$, et $R_i = 3mm$ (avec $R_o = 4.2mm$ constant). On remarque immédiatement que les diagrammes de dispersion sont bien plus riches, notamment pour les déformations les plus élevées. Concernant le bandgap primaire, l'augmentation de R_i entraîne clairement un élargissement de la bande interdite, confirmé par les courbes de w_{BG_1} tracées en rouge. Celle du troisième cas ($R_i = 3mm$) montre un changement brusque de comportement autour de la bifurcation, alors que pour les deux premiers cas, w_{BG_1} augmente de manière monotone avec la déformation, et l'effet du flambement est moins évident. La cause de ce phénomène est vraisemblablement la rigidité des polygones par rapport aux ligaments. De nombreux bandgaps secondaires sont également visibles, mais il est difficile de déduire une évolution avec seulement trois cas. Avec une telle quantité de bandes interdites, l'évolution des bandgaps en fonction de R_i est particulièrement intéressante. La figure 4.15

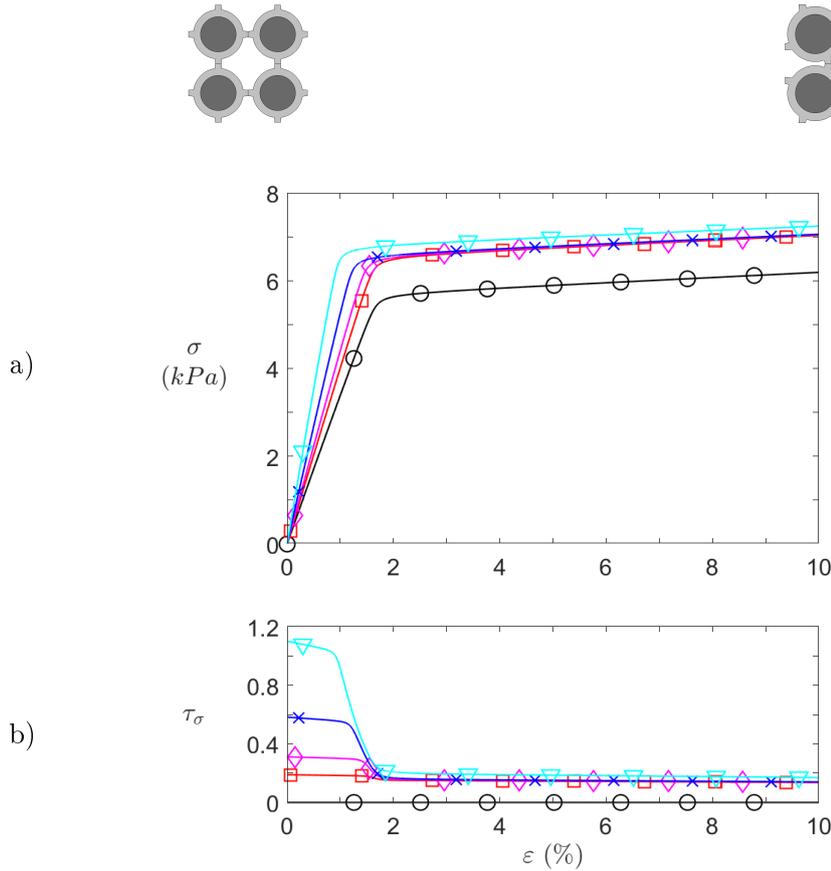


FIGURE 4.13 – Effet du rayon R_i de l'inclusion sur le comportement statique :

(a) contrainte nominale σ et (b) taux de variation τ_σ de la contrainte nominale par rapport à S_0 .

—○— S_0 , —□— $R_i = 0\text{mm}$ (S_E), —◇— $R_i = 1\text{mm}$, —×— $R_i = 2\text{mm}$, —▽— $R_i = 3\text{mm}$.

en montre les résultats pour trois états de déformation : $\epsilon = 0\%$, $\epsilon = 2\%$, et $\epsilon = 10\%$.

Le constat le plus évident est probablement l'effet de la masse ajoutée sur la largeur du bandgap primaire. Quel que soit l'état de compression, ce dernier observe une augmentation quasi monotone sur toute la plage de masses étudiées. Seuls quelques points entre 20% et 50% de masse ajoutée (visible sur les deux premiers graphes) présentent une décroissance. Ces décroissances semblent liées à une valeur particulière de m_+ , présente pour les trois cas de précompression, où la limite supérieur du premier bandgap change brusquement de pente. Il semble donc exister un rayon d'inclusion R_i critique, au delà duquel l'évolution des propriétés dynamiques change. La raison précise de ce changement n'a cependant pas été déterminée. La **valeur critique** se situe à $\mathbf{R_i} \approx \mathbf{0.5mm}$. Au vu de l'effet d'échelle observé en section 4.1.4, cette valeur peut être généralisée à un ratio critique de rayon, soit $\mathbf{R_i/R_o} \approx \mathbf{12\%}$.

Un autre aspect important de la figure 4.15 est l'évolution du nombre de bandgaps secondaires. L'influence de la précompression était déjà pressentie avec les courbes de la section 4.2.3, mais apparaît bien plus clairement ici, en particulier pour $\epsilon = 10\%$. On notera l'apparition d'un bandgap à des fréquences inférieures à celles du bandgap primaire. Le développement des bandes secondaires est complexe : nombre d'entre elles ne sont observées que pour quelques

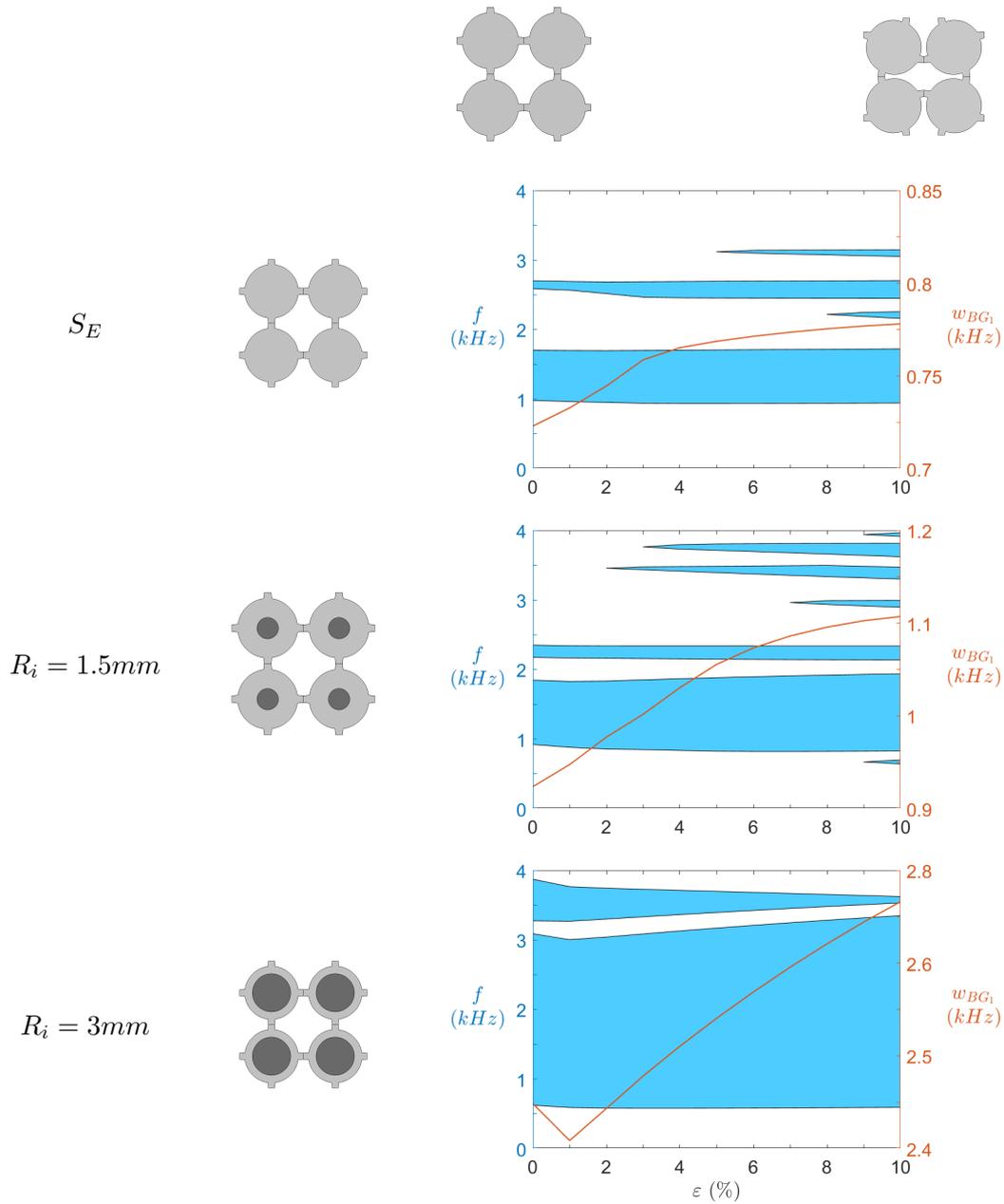


FIGURE 4.14 – Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression pour trois géométries à inclusions choisies : $R_i = 0\text{mm}$ (S_E), $R_i = 1.5\text{mm}$, et $R_i = 3\text{mm}$. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du premier bandgap

géométries avant de se refermer. Une résolution plus précise pourrait affiner les résultats et faciliter le suivi des bandgaps.

Une étude d'optimisation a été réalisée sur les géométries à inclusions. Dans le domaine d'étude considéré, tous les critères choisis précédemment, à savoir w_{BG_1} , $w_{BG,t}$, et f_{L,BG_1} , donnent la valeur maximale $R_i = 3\text{mm}$ comme optimum, quel que soit l'état de déformation initial. Cependant, l'allure des courbes précédentes (notamment sur la figure 4.15) semble indiquer que ce n'est pas un maximum local et que les critères croîtraient encore pour des

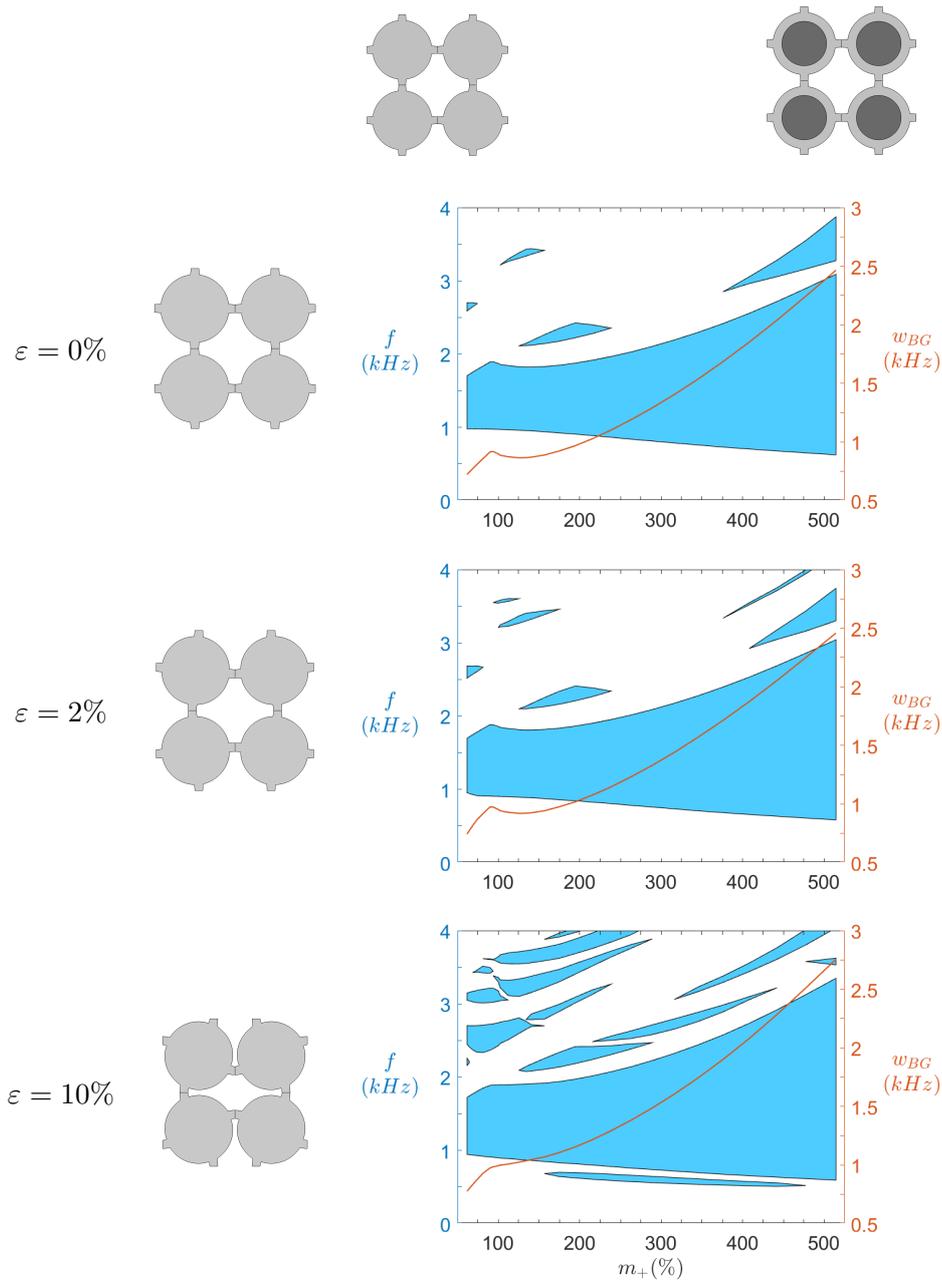


FIGURE 4.15 – Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la masse ajoutée pour trois états de précompression. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du bandgap primaire.

valeurs de R_i supérieures. La figure 4.16 résume finalement les résultats obtenus pour les cas S_0 , S_E , et $R_i = 3mm$.

Comme attendu, les performances du métamatériau à inclusions sont largement supérieures aux autres cas tracés. En particulier, le bandgap primaire est très affecté, avec un gain de largeur de plus de $2kHz$, dont plus de $560Hz$ vers les basses fréquences et ce, quel que soit l'état de déformation initiale. En outre, l'influence du flambement est toujours perceptible pour la géométrie à inclusions, notamment sur la courbes de w_{BG_1} , qui augmente sensiblement après flambement.

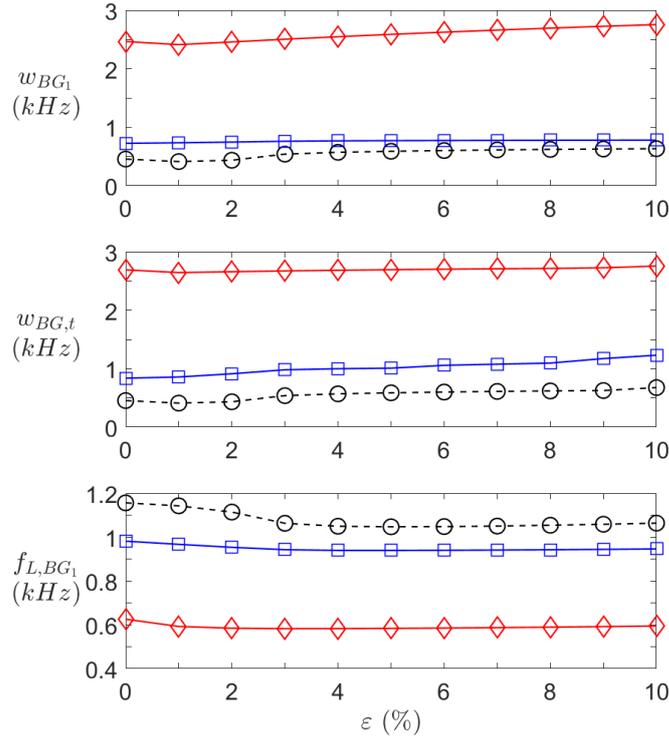


FIGURE 4.16 – Comparaison pour trois géométries différentes de trois critères : w_{BG_1} (en haut), $w_{BG,t}$ (au centre), et f_{L,BG_1} (en bas). -○- Géométrie de référence S_0 , -■- géométrie améliorée S_E ($R_o = 4.2mm$), et -◇- géométrie à inclusions ($R_o = 4.2mm$, $R_i = 3mm$).

4.4 Validation sur structure finie

Cette section aborde les calculs de structures finies. Dans la partie expérimentale menée au chapitre 5, des structures de dimensions finies seront étudiées. Il est donc important de valider les résultats numériques obtenus ici sur des modèles comportant un nombre fini de cellules. La géométrie choisie pour réaliser cette vérification est la géométrie S_0 . Deux modèles finis sont ainsi comparés : un bidimensionnel (avec déformations planes imposées dans la troisième direction) et un modèle tridimensionnel, de manière à vérifier si l'hypothèse bidimensionnelle adoptée pour les calculs de dispersion de ce chapitre est satisfaisante.

4.4.1 Géométrie

Plus le nombre de cellules est grand, plus la structure est proche du cas infini étudié précédemment, et donc plus les diagrammes de dispersion obtenus sont prédictifs. Il est donc préférable d'avoir le plus grand nombre de cellules possible. En pratique, les dimensions sont nécessairement limitées par des contraintes d'encombrement, de fabrication, ou de masse. Il faut donc trouver un compromis entre ces aspects. Pour faciliter la fabrication et la caractérisation, on souhaite que la surface totale occupée dans le plan XY par la structure soit de l'ordre de $100 \times 100mm^2$. En conservant les dimensions caractéristiques des cellules étudiées jusqu'ici, les structures finies sont finalement réduites à 8×7 cellules, comme illustré par la figure 4.17a pour le cas S_0 .

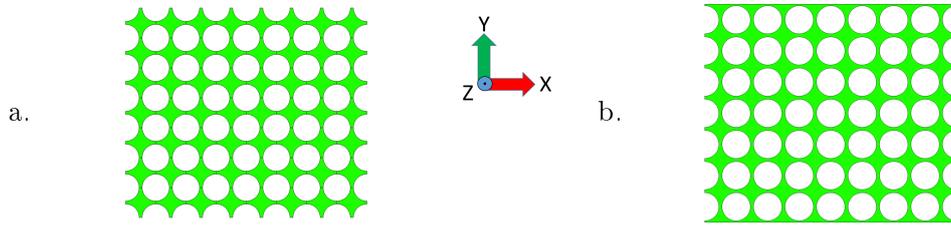


FIGURE 4.17 – Structures finies composées de 8×7 cellules S_0 avec des conditions a) libres (S_0^L) ou b) encastrées (S_0^E) en X sur les frontières supérieure et inférieure.

Cette première géométrie peut cependant poser problème lors de la réalisation expérimentale. Des conditions de déplacements libres en X sur les frontières supérieure (T) et inférieure (B) sont en effet complexes à reproduire en pratique, car un frottement existe nécessairement entre les surfaces contraintes et le banc d'essais sur lequel elles sont fixées. D'autre part, si les frontières supérieure et inférieure sont supposées encastrées, les ligaments appartenant à ces frontières présenteront des concentrations de contraintes très importantes. Pour éviter ces problèmes, une deuxième géométrie est créée en prévision de la mise en œuvre expérimentale détaillée au chapitre 5. Cette géométrie, présentée sur la figure 4.17b, est de mêmes dimensions que la première, mais ses frontières supérieure et inférieure sont décalées d'une demie cellule ($L_y/2$) en Y . Ces frontières ne coupent plus les ligaments comme précédemment, mais passent cette fois par les centres des cellules unitaires. Cette modification géométrique permet de simplifier la réalisation expérimentale de conditions encastrées, et limite les concentrations de contraintes aux frontières. En parallèle, la première géométrie (figure 4.17a) est conservée avec des conditions libres en X , plus proches du cas périodique infini supposé lors des calculs de dispersion. Ce type de conditions aux limites sera repéré par la suite par un exposant L , tandis que des conditions d'encastrement en X seront symbolisées par E .

À partir de ces géométries, deux structures tridimensionnelles sont déduites par extrusion, telles qu'indiquées sur la figure 4.18. Les frontières de toutes les structures simulées sont repérées par les indices répertoriés par la figure 4.19.

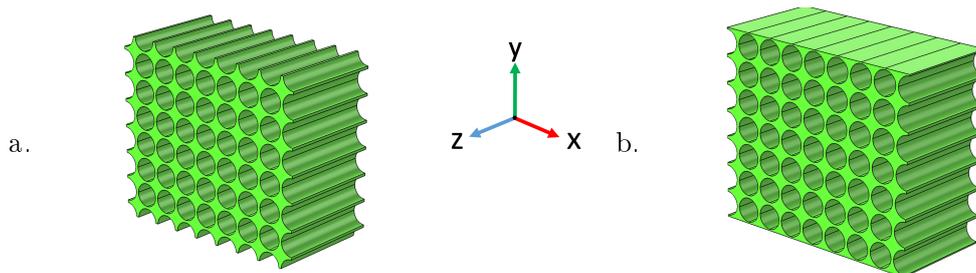


FIGURE 4.18 – Structures finies tridimensionnelles extrudées à partir des géométries a) S_0^L et b) S_0^E .

Pour un déplacement imposé u_0 , les conditions aux limites des modèles bidimensionnels s'expriment finalement :

- ▷ $u_{T,y} = -u_0$
- ▷ $u_{B,y} = 0$
- ▷ $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_L = \mathbf{0}$

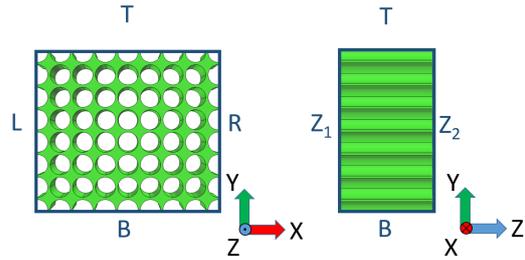


FIGURE 4.19 – Dénomination des frontières des échantillons tridimensionnels.

- ▷ $\mathbf{F}_{Z_1} = \mathbf{F}_{Z_2} = \mathbf{0}$

Pour S_0^E , la condition $u_{B,x} = u_{T,x} = 0$ est rajoutée, tandis que pour S_0^L , cette condition devient $F_{B,x} = F_{T,x} = 0$. Dans la troisième direction, un état plan de déformation est considéré. Enfin, des conditions ponctuelles adaptées sont rajoutées pour exclure les modes de corps rigides.

Une étude en domaine fréquentiel est ensuite effectuée pour obtenir les fonctions de transfert entre les surfaces supérieure et inférieure.

4.4.2 Comparaison statique

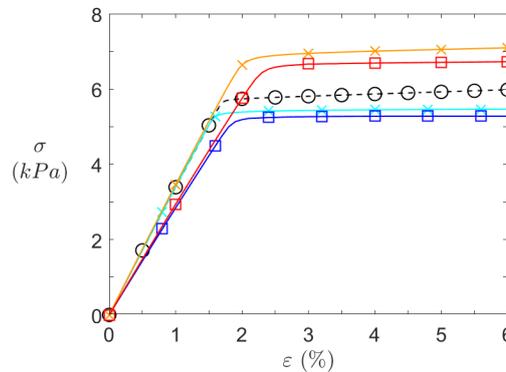


FIGURE 4.20 – Résultats numériques de compression statique. -●- Plaque infinie 2D, -×- S_0^L 2D, et -×- S_0^E 2D, -□- S_0^L 3D, et -□- S_0^E 3D.

La figure 4.20 montre que la raideur initiale reste sensiblement la même pour toutes les géométries bidimensionnelles. Il en va de même pour les géométries tridimensionnelles. En revanche, une différence nette existe entre les cas 2D et les cas 3D. En effet, les déformations planes imposées aux premiers les raidissent par rapport aux derniers, qui peuvent se déformer dans la troisième direction. Cependant, la hauteur du plateau semble peu affectée.

Parmi les trois configurations bidimensionnelles, la hauteur du plateau est très différente suivant les cas. La plaque infinie et S_0^L ont théoriquement la même déformée, excepté au niveau des frontières latérales. S_0^L étant moins contrainte, elle flambe pour des déformations plus faibles, mais les deux courbes restent relativement proches. Quant à S_0^E , ses contraintes supplémentaires sur les frontières supérieure et inférieure entraînent un flambement plus tardif.

En résumé, les conditions aux frontières latérales n'affectent pas le comportement initial des structures, mais font sensiblement varier la valeur de contrainte critique de flambage. À l'inverse, passer de deux à trois dimensions abaisse la raideur initiale mais affecte peu le plateau post-flambement. Bien que les courbes statiques soient relativement proches, les conditions aux limites influent de manière non négligeable sur les résultats, et des calculs tridimensionnels semblent nécessaires pour une comparaison cohérente avec les essais.

4.4.3 Dynamique

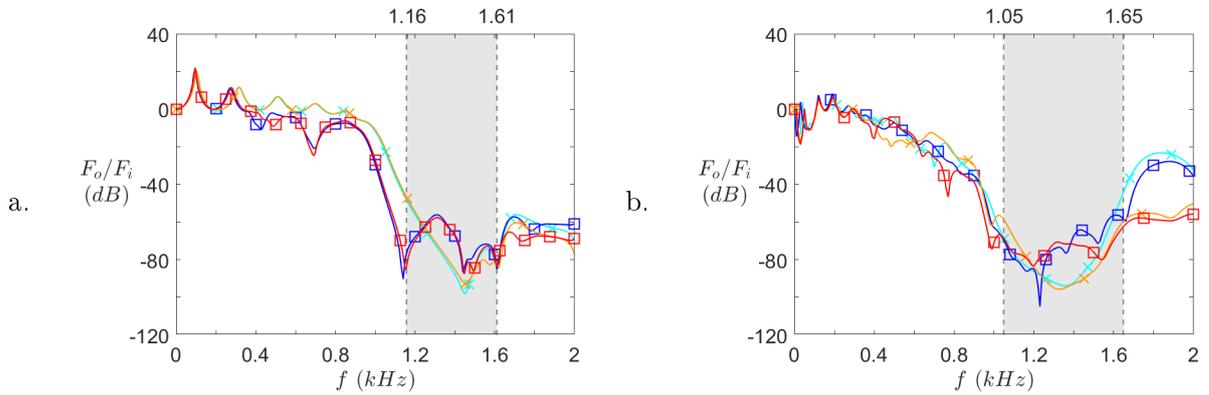


FIGURE 4.21 – Résultats numériques dynamiques pour a) $\varepsilon = 0$ et b) $\varepsilon = 6\%$. \times S_0^L 2D, et \times S_0^E 2D, \square S_0^L 3D, et \square S_0^E 3D et \square bandgap théorique.

Les courbes dynamiques sont présentées pour les deux cas extrêmes de la compression statique décrite précédemment : $\varepsilon = 0$ (figure 4.21a) et $\varepsilon = 6\%$ (figure 4.21b). Dans le premier cas, les courbes de S_0^L et S_0^E sont presque confondues, que ce soit en 2D ou en 3D. Le passage en 3D implique cependant plusieurs différences. En particulier les quatrième ($510Hz$) et cinquième ($700Hz$) modes sont remplacés par des antirésonances. Le comportement à ces fréquences est donc très mal prédit par le calcul bidimensionnel. Par ailleurs, l'assouplissement noté sur les courbes statiques (figure 4.20) se manifeste ici par un décalage des modes vers les basses fréquences. Ce décalage est aussi observé sur la chute de transmission dont l'extremum passe de $1450Hz$ à $1140Hz$. Le bandgap théorique (en gris) est relativement bien corrélé aux plages de faibles transmission.

Pour $\varepsilon = 6\%$, les niveaux de toutes les courbes sont relativement proches, notamment sous $1.2kHz$ (figure 4.21b). Le bandgap théorique (en gris) prédit remarquablement bien les plages de faibles transmission, quel que soit le cas considéré. Après cette plage (i.e. pour $f > 1.65Hz$), une différence de niveau est observée entre les cas S_0^L et S_0^E : ces derniers semblent en effet offrir une meilleure isolation à hautes fréquences.

Au final, les résultats des géométries des cas 2D et 3D semblent bien corrélés, mais des différences subsistent. Par exemple, la figure 4.21a montre la présence d'un pic de transmission à $1310Hz$ prédit par les calculs 3D, mais pas par les calculs 2D. Par conséquent, l'ensemble des calculs numériques destinés à la corrélation essais-calculs (chapitre 5) sera réalisé avec

des modèles tridimensionnels.

Chapitre 5

Validation expérimentale

Afin d'éprouver les résultats numériques présentés au chapitre 4, une partie importante de ce travail a été dédiée à la mise en œuvre expérimentale des métamatériaux choisis. Les différentes étapes de cette mise en œuvre sont détaillées dans ce chapitre. Dans un premier temps, les procédés de fabrication utilisés sont décrits. De même, le matériel d'essais est détaillé dans la deuxième partie, notamment le banc d'essais dynamiques conçu spécialement pour tester la performance isolatoire de systèmes mécaniques précontraints. Les résultats d'isolation vibratoire obtenus pour les échantillons fabriqués sont finalement présentés, puis comparés aux simulations numériques.

5.1 Éprouvettes

5.1.1 Géométries

Le chapitre précédent a montré l'intérêt des architectures auxétiques à carrés rotatifs pour l'isolation vibratoire, notamment en présence d'inclusions. À partir des cellules identifiées sur la figure 5.1, huit éprouvettes de métamatériaux auxétiques ont donc été réalisées par moulage ou fabrication additive, puis testées en compression. Leurs paramètres de fabrication respectifs sont répertoriés dans la table 5.1, et leurs dimensions générales mesurées dans la table 5.2. Une photographie de chaque type d'éprouvette est visible sur la figure 5.2. Les éprouvettes S_{01} , S_{02} , et S_{03} sont toutes issues du même moule, une seule photographie (figure 5.2e) est donc affichée. Les trois éprouvettes permettent de vérifier si les résultats varient de l'une à l'autre.

5.1.2 Fabrication d'éprouvettes en TPU

Fabrication additive

Initiée dans les années 80, la fabrication additive (ou impression 3D) est en pleine expansion depuis une dizaine d'années. Des technologies différentes ont vu le jour depuis, avec des performances sans cesse meilleures, que ce soit au niveau de la précision, de la vitesse, de la qualité, ou encore de la diversité des matériaux utilisés. Si nombre de ces techniques restent aujourd'hui encore peu utilisées du fait de leur coût élevé, certaines d'entre elles comme le dépôt de fil en fusion (ou FDM pour *Fused Deposition Modeling*) ou la stéréolithographie (ou

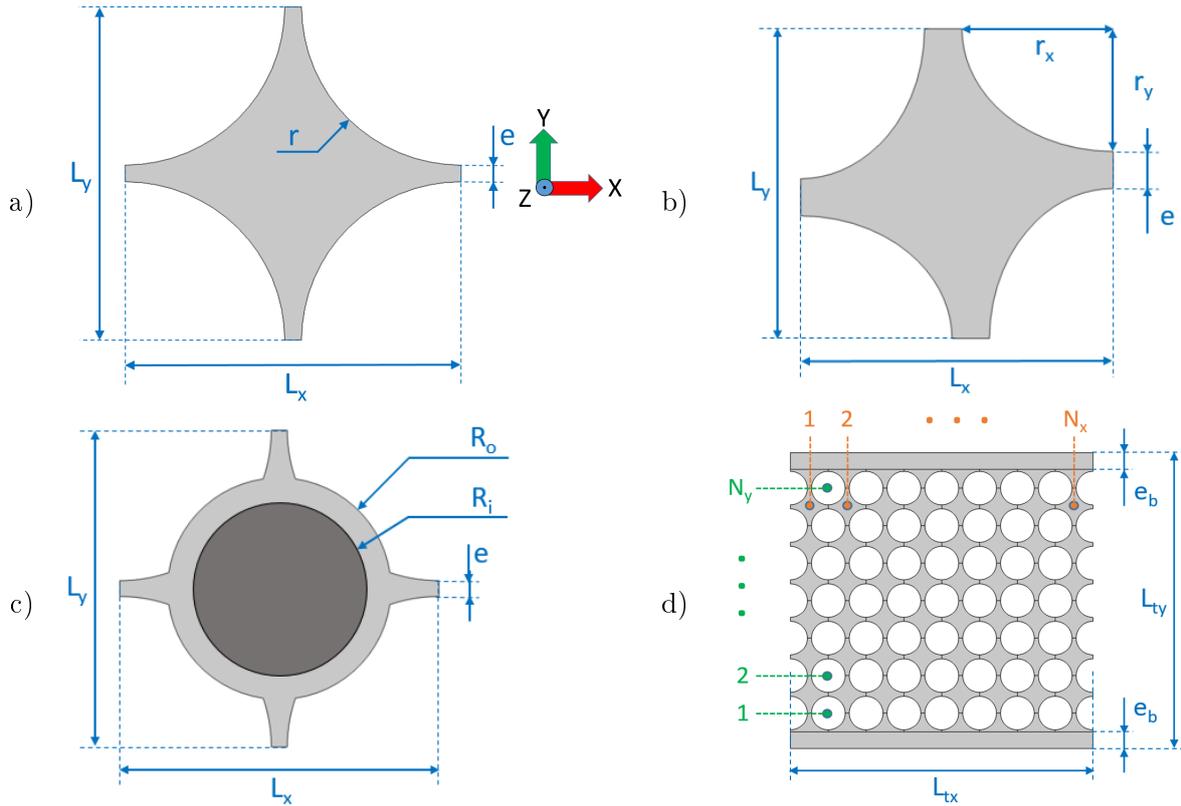


FIGURE 5.1 – Dimensions caractéristiques des géométries étudiées. Cellules unitaires à vides a) circulaires ou b) ovalisés, et c) à inclusions. D) Structure multicellulaire (ici $N_x = 8$ et $N_y = 7$). Pour l'ensemble des géométries, l'épaisseur e_b vaut 5mm .

Éprouvette	Matériau	$N_x \times N_y$	$L_x = L_y$	e	r	h_z	R_o	R_i
T_0	TPU	8×8	15	1.2	6.9	50	/	/
T_1	TPU	8×7	10	1.2	4.4	40	/	/
T_2	TPU	8×7	10	1.2	{4.18, 4.62} [*]	40	/	/
T_3	TPU	8×7	10	0.4	4.8	40	/	/
S_{01}	Silicone	8×7	11.2	1.2	5	40	/	/
S_{02}	Silicone	8×7	11.2	1.2	5	40	/	/
S_{03}	Silicone	8×7	11.2	1.2	5	40	/	/
S_{LR}	Sil. et acier	8×7	11.2	1.2	5	40	4.2	3

TABLE 5.1 – Dimensions caractéristiques des huit éprouvettes testées. Toutes les longueurs (L_x , L_y , e , h_z , R_o , R_i) sont exprimées en millimètres. *Les espaces vides de l'éprouvette T_2 sont ovales et possèdent donc deux demi-axes r_x et r_y selon X et Y , respectivement.

SLA pour *Stereolithography Apparatus*) sont aujourd'hui très répandues, bien que leur usage reste majoritairement professionnel.

La fabrication additive, de par sa grande polyvalence et la simplicité de sa mise en oeuvre, est souvent utilisée pour du prototypage rapide. Pour ces mêmes raisons, la fabrication de structures complexes comme les métamatériaux est grandement simplifiée par l'utilisation

Éprouvette	L_{tx} (mm)	L_{ty} (mm)	h_z (mm)	$m(g)$
T_0	119.3	129.3	49.95	341.2
T_1	79.49	79.60	39.96	142.2
T_2	79.79	79.71	39.90	142.1
T_3	79.64	79.68	40.01	113.7
S_{01}	87.96	87.34	42.41	168.3
S_{02}	90.24	87.24	38.75	157.5
S_{03}	90.23	87.29	42.40	167.9
S_{LR}	89.17	90.64	41.50	577.5

TABLE 5.2 – Dimensions mesurées sur les éprouvettes.

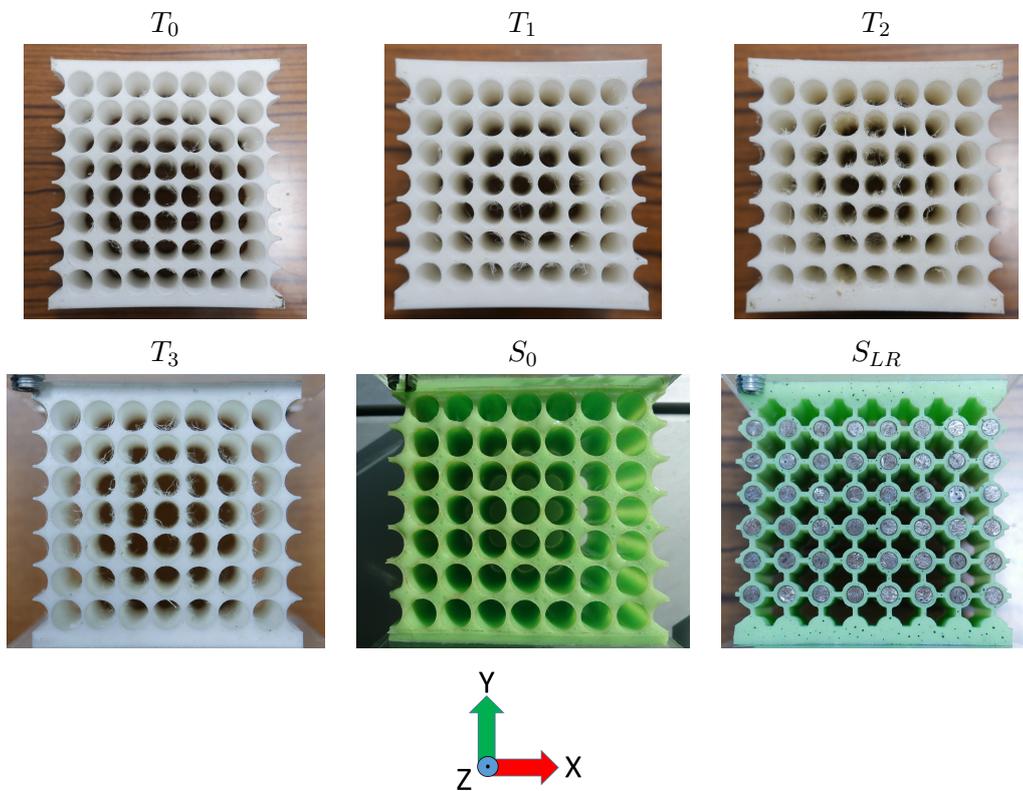


FIGURE 5.2 – Échantillons testés.

d'imprimantes 3D. Cette technique s'est donc naturellement imposée lors du choix de fabrication des échantillons. Plusieurs imprimantes de type FDM sont accessibles à l'École Centrale de Lyon et ont pu être utilisées.

On notera que la méthode de FDM s'accompagne généralement de divers inconvénients liés au processus. En particulier, les propriétés du matériau sont anisotropiques, du fait de la différence entre l'impression dans le plan, et l'extrusion verticale. De même, la taille de la buse d'éjection de matière influe naturellement sur la qualité d'impression, et peut entraîner des imperfections sur des détails fins.

Le Fablab de l'École Centrale de Lyon possède plusieurs imprimantes de la marque Ultimaker. Ces imprimantes grand public sont très simples d'utilisation, mais la qualité de finition est limitée. La finesse des détails est notamment restreinte par la buse de 0.4mm de diamètre (une buse de 0.25mm est compatible, mais non disponible dans notre cas). L'avantage principale de cette imprimante réside dans le large choix de matériaux aux propriétés très variées. En particulier, le TPU 95A est un élastomère imprimable capable de supporter les larges déformations requises par nos matériaux (se référer à la section 2.3.1 pour plus de détails sur ce matériau).

Le logiciel Ultimaker Cura est utilisé pour définir les paramètres d'impression. Bien que plusieurs essais préalables aient été nécessaires pour obtenir un rendu satisfaisant, l'impression d'échantillons sur un modèle Ultimaker 3 (figure 5.3) donne des résultats corrects, même si l'état de surface se dégrade pour les épaisseurs les plus fines.

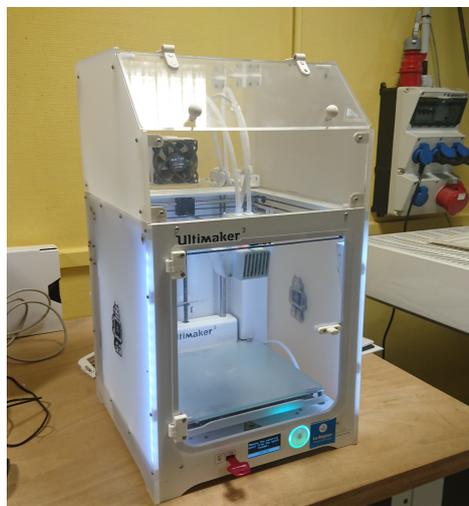


FIGURE 5.3 – Imprimante 3D Ultimaker 3 mise à disposition par le Fablab de l'École Centrale de Lyon.

La FDM facilite grandement la fabrication de géométries complexes, mais il est impossible de déposer du fil s'il n'y a pas de matière sur les couches inférieures, ce qui peut poser problème pour des structures concaves. Dans cette situation, un matériau soluble est généralement utilisé comme support, puis dissous une fois l'impression terminée. On notera toutefois que le matériau soluble proposé par Ultimaker - le PVA¹ - est incompatible avec le TPU utilisé ici. Toutefois, les échantillons présentés ici sont issus de géométries bidimensionnelles, extrudées dans la troisième direction Z . Aucun support n'est donc nécessaire, mais ce problème est à prendre en compte en perspective d'une extension tridimensionnelle.

Impression des éprouvettes

L'impression des éprouvettes en TPU est relativement simple, car elle ne requiert qu'un seul matériau, et aucun ajout de support soluble. En revanche l'utilisation d'un matériau souple et la présence de faibles épaisseurs rendent le choix des paramètres d'impression primordial pour une impression et un état de finition corrects. Certains polymères usuels, comme le PLA², sont bien connus, et leur qualité d'impression est robuste. En revanche, le TPU est

¹ *Alcool Polyvinyle*

² *Acide Polylactique*

très sensible aux paramètres, en particulier la température, et le fabricant donne peu d'informations à ce sujet. Plusieurs tests préalables ont donc dû être réalisés avant d'obtenir un état de surface satisfaisant. Une fois les bons paramètres obtenus (voir annexe E), la fabrication est très simple, bien que longue.

Les premières tentatives d'impression ont également été déterminantes pour appliquer les géométries auxétiques au domaine expérimental. Dans l'optique d'une application industrielle, et pour simplifier la correspondance entre essais et simulations, des conditions d'encastrement des frontières supérieure et inférieure (T et B , respectivement) sont imposées. À cette fin, des blocs homogènes de matériau sont rajoutés au niveau de ces frontières. À la jonction, la structure auxétique est décalée d'une demie période (soit $L_y/2$), pour éviter les concentrations de contraintes (cf figures 5.1d et 5.2).

5.1.3 Fabrication d'éprouvettes en silicone

Moule

Pour obtenir des états de surface de qualité supérieure, le moulage est une solution intéressante, notamment dans l'optique d'une implémentation industrielle.

Dans le cas d'un moule réutilisable, le moulage permet en effet d'avoir une cadence de production plus importante, avec une qualité robuste. Toutefois, il faut prendre en compte lors de la conception l'étape de démoulage du matériau, c'est-à-dire prévoir le démontage des différents éléments de moule et le remontage de ce dernier. Cela limite les possibilités géométriques pour les architectures tridimensionnelles : un ensemble de cavités internes reliées entre elles, par exemple, ne peut être réalisé de cette manière. Dans cette situation, la technique de moulage à modèle perdu, où le moule est détruit lors du démoulage, est préférée. Lors d'un moulage à modèle perdu, le temps et le coût de fabrication sont toutefois augmentés par les étapes systématiques de fabrication du moule et de sa destruction (généralement par dissolution dans un bain spécial) après moulage.

Moulage

Le remplissage est également une étape primordiale. L'échappement de l'air lors cette étape doit être anticipé pour ne pas emprisonner de bulles lors de la solidification, et l'échec de la mise en forme (Figure 5.4).

Le matériau sélectionné pour le moulage est un silicone bi-composant Elite Double 32 de la marque Zhermack, spécialisée dans la duplication dentaire. Cet élastomère est choisi pour ses excellentes propriétés élastiques, sa faible raideur, et sa faible dissipation, étudiées et mesurées dans la section 2.3.2. Une fois les deux composants mélangés en parts égales, le silicone liquide est versé dans un moule. Celui dédié à la fabrication des éprouvettes S_0 est un moule en aluminium usiné au laboratoire (voir figure 5.5). À la suite du temps de prise (environ 30 minutes), le matériau peut être démoulé en démontant le moule.



FIGURE 5.4 – Échec de moulage en silicone, pour cause de bulles d'air emprisonnées lors du remplissage.

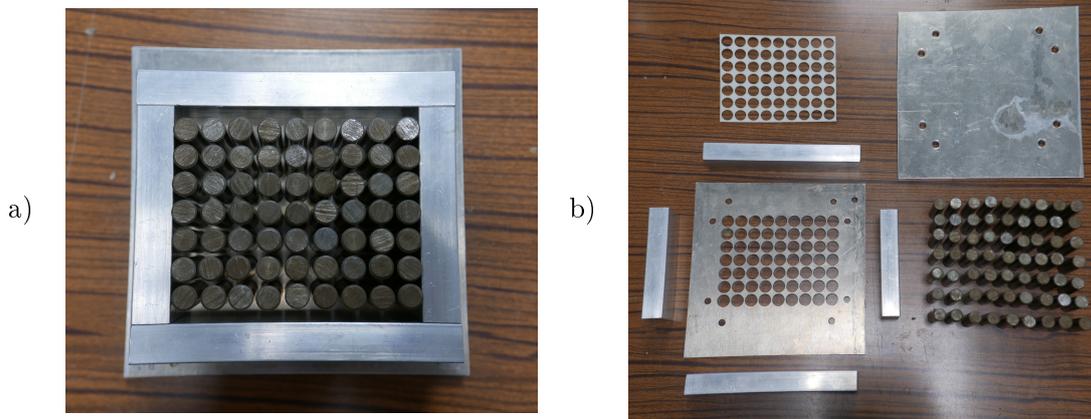


FIGURE 5.5 – Moule en aluminium a) assemblé et b) démonté, pour la fabrication d'éprouvettes de type S_0 .

5.1.4 Fabrication d'éprouvettes à inclusions

Moule

Deux imprimantes de la marque Stratasys, sont mises à disposition des laboratoires. Ces modèles Fortus 250mc et 450mc, allient grande précision, vitesse d'impression élevée, et bonne fiabilité. Cependant, le choix de matériaux est fortement limité. En particulier, aucune matière élastomère n'est compatible. L'imprimante Fortus 450mc n'est donc pas viable pour l'impression des échantillons eux-mêmes, et a principalement été utilisée pour le moule de l'échantillon S_{LR} fabriqué en ABS-M30³, pour lequel une grande précision ainsi que l'ajout de support soluble est préférable. Une image du moule et de ses différents composants est présentée figure 5.6a.

Concernant les logiciels utilisés, les géométries 3D sont créées sur COMSOL Multiphysics, tandis que les paramètres d'impression sont gérés sur le logiciel Stratasys Fortus Insight.

Moulage

L'opération de moulage est identique à celle des éprouvettes S_0 (paragraphe 5.1.3). L'assemblage du moule et le démoulage sont toutefois plus longs car le moule est composé de plus de

³ Acrylonitrile Butadiène Styène de la marque Stratasys.

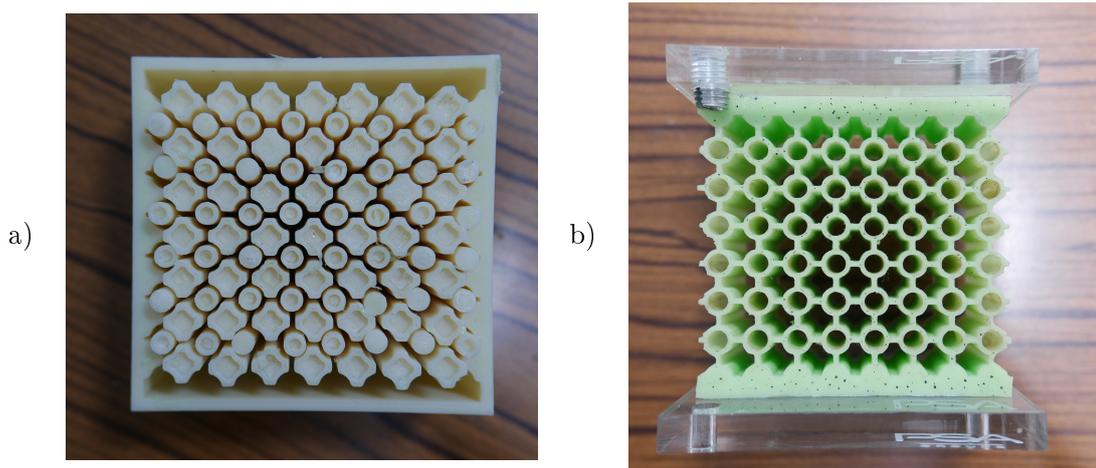


FIGURE 5.6 – a) Moule en ABS pour la fabrication d'éprouvettes de type S_{LR} . b) Matrice en silicone moulé d'une éprouvette S_{LR}

pièces, et la faible épaisseur du matériau moulé rend le démoulage plus délicat (figure 5.6b).

Inclusions

La forme cylindrique des inclusions utilisées dans la géométrie S_{LR} rend leur fabrication beaucoup plus simple. Leur diamètre étant choisi parmi les tailles standards disponibles, la production des inclusions est effectuée en coupant des barres cylindriques d'acier à la longueur souhaitée. Si cette opération s'est révélée très rapide, elle peut rapidement devenir problématique pour des formes et tailles d'inclusions plus exotiques. Ce détail est à prendre en compte, notamment en cas d'optimisation topologique de la géométrie. Quant à l'assemblage, l'insertion des inclusions, bien que chronophage, est simplifiée par l'élasticité de la matrice en silicone.

5.2 Compression statique

5.2.1 Banc d'essais

Pour tester les éprouvettes en compression, on dispose du matériel décrit en section 2.2.1. L'éprouvette est placée entre deux plateaux de compression, mais n'est pas fixée de manière rigide comme pour un test en traction. Une photographie prise lors d'un essai de compression sur une éprouvette auxétique montre les plateaux utilisés pour ces essais (figure 5.7).

5.2.2 Conditions d'essais

La vitesse choisie pour les essais est de $1\text{mm}/\text{min}$. Comme pour la caractérisation matériau, la plupart des essais sont composés de cycles (compression et remontées successives) pour observer les effets dépendants du temps comme l'effet Mullins et la viscosité.

Un problème est apparu lors de l'utilisation en compression de la machine d'essai. Pour un effort donné, on observe un palier sans sens physique sur les courbes de compression. En effet un déplacement $\Delta u \approx 0.3\text{mm}$ associé à une variation d'effort faible et irrégulière est constaté.

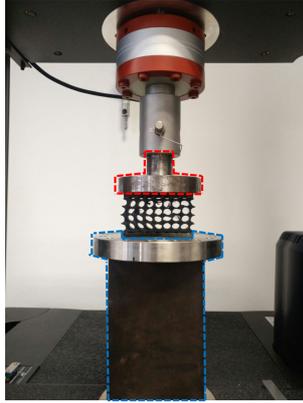


FIGURE 5.7 – Banc de traction-compression utilisé avec les plateaux de compression --- supérieur --- inférieur. Seul le plateau supérieur est mobile.

Ce palier est également observé sur les cycles descentes, parfois avec un faible décalage en effort. Étant donné que ce décalage n'est jamais observé sur les essais de traction, le problème provient vraisemblablement d'un jeu dans la machine, correspondant au déplacement Δu et dont la mise en place se produit autour d'une valeur d'effort constante (environ 15N). Une révision technique de la machine pourrait probablement résoudre le problème, mais un technicien spécialisé est alors indispensable. Pour s'affranchir de cet effet indésirable, les points correspondants au palier sont exclus, et une correction est appliquée sur les autres points afin d'annuler le déplacement associé au jeu. Une courbe d'interpolation de type spline lissée (Méthode *Smoothing Spline* dans Matlab, avec un paramètre de lissage $p = 0.99$) est finalement appliquée pour reconstituer la courbe complète. Un exemple illustrant cette correction est visible sur la figure 5.8.

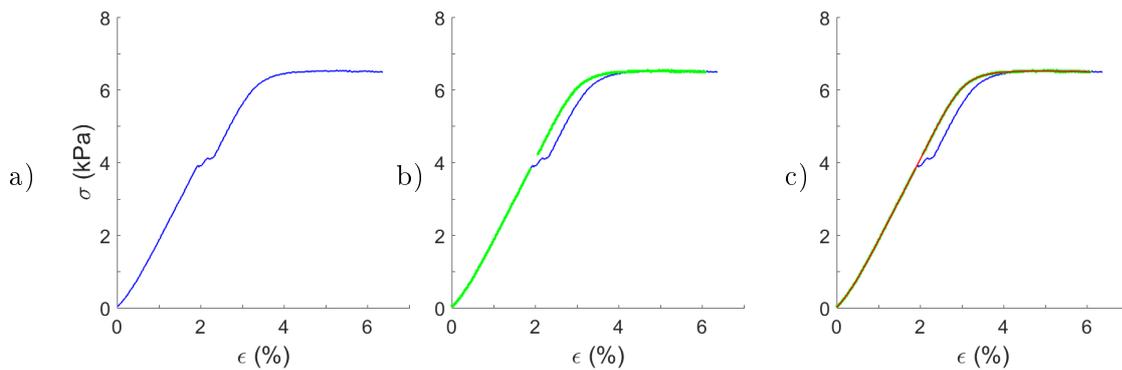


FIGURE 5.8 – Étapes de correction des données de compression statique pour compenser le jeu de la machine d'essai : a) — données initiales, b) application de la correction, puis c) interpolation des données corrigées. ● Données corrigées et — courbe d'interpolation.

5.2.3 Résultats

Dans cette section sont présentés les résultats des différents tests de compression quasi-statique. Les figures 5.9a, 5.10a, 5.11a, 5.12a montrent les courbes de contrainte-déformation obtenues pour les éprouvettes en TPU (T_0 à T_3). La section 2.3.1 a montré que le TPU

est très sensible aux effets de cycle. Pour les éprouvettes en TPU, une série de cycles semblables a donc été réalisée. Trois amplitudes de cycles sont présentées : une autour du point de flambage, une sur le plateau, et une après contact entre cellules. Les dimensions globales de l'éprouvette T_0 étant plus grandes (cf table 5.1), les valeurs de déformations sont fixées à 4mm ($\varepsilon = 3\%$), 8mm ($\varepsilon = 6.5\%$), et 12mm ($\varepsilon = 10\%$), alors que les niveaux des autres éprouvettes sont de 3.5mm ($\varepsilon = 5\%$), 7mm ($\varepsilon = 10\%$), et 10.5mm ($\varepsilon = 15\%$).

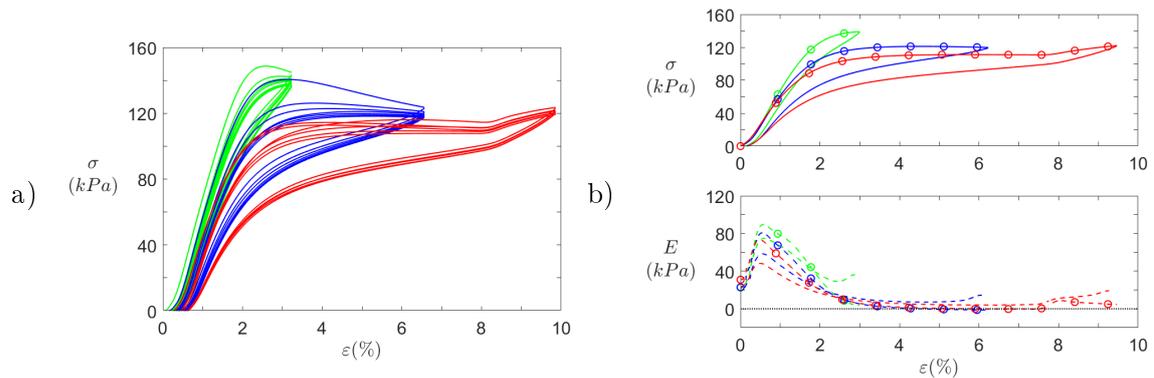


FIGURE 5.9 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_0 . a) Cycles successifs à environ — 3%, — 6.5%, et — 10% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec - - - le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

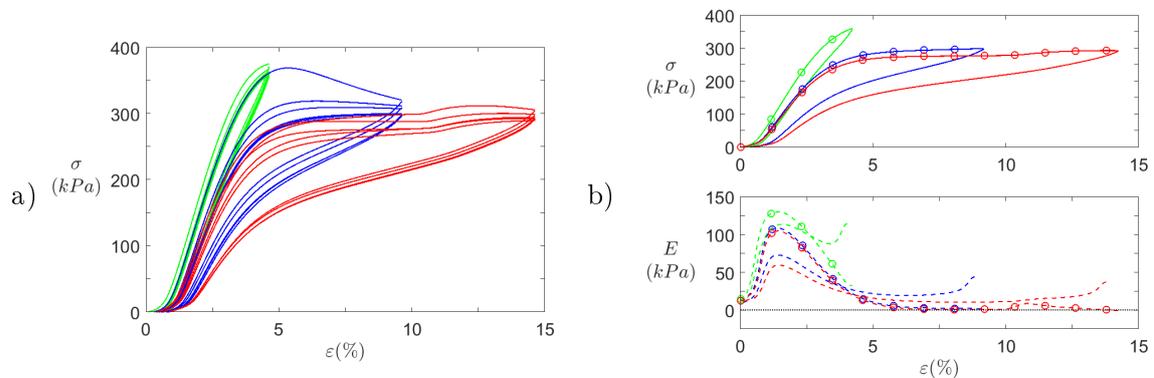


FIGURE 5.10 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_1 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec - - - le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

Ces courbes confirment l'importance de l'effet Mullins et de la viscosité sur les éprouvettes de TPU, du fait de la grande différence entre le premier cycle de chaque niveau et les cycles suivants. L'aire des cycles tend à se stabiliser sur les derniers cycles, mais des différences sont tout de même perceptibles.

L'observation des trois différents niveaux montre aussi la variation de raideur en fonction de la déformation maximale. Cette variation est mise en évidence par les figures 5.9b, 5.10b,

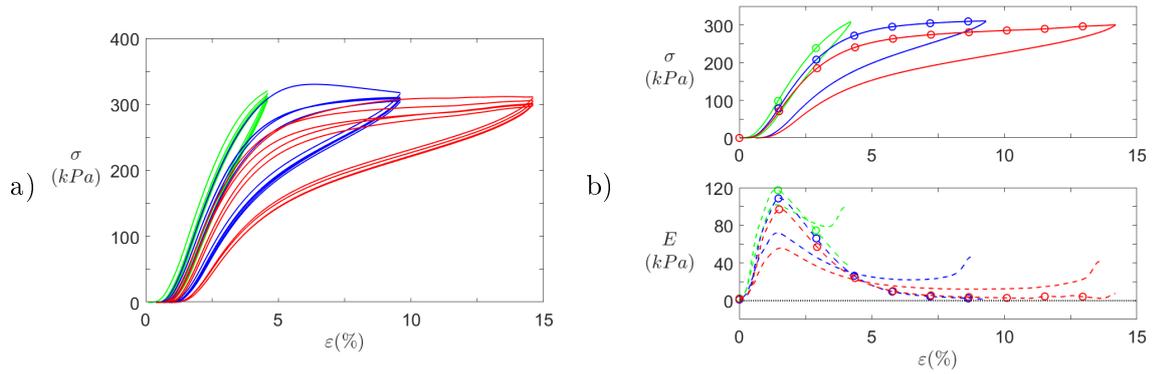


FIGURE 5.11 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_2 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec - - - le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

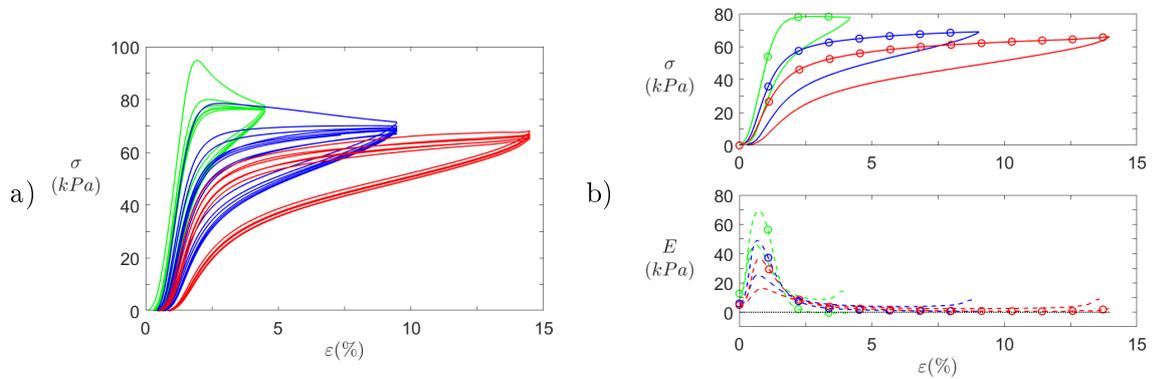


FIGURE 5.12 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_3 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec - - - le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

5.11b, et 5.12b. Le dernier cycle de chaque niveau est tracé et mis en parallèle avec le module élastique tangent. Pour toutes les éprouvettes de TPU, l'assouplissement du métamatériau lié à l'augmentation de la déformation maximale enregistrée est bien visible sur les courbes de E , notamment pour les faibles déformations ($\varepsilon < 3\%$), où la différence est plus importante. C'est un facteur problématique car les champs de déformation en compression sont fortement hétérogènes dans les métamatériaux étudiés ici. Pour rappel, les déformations sont principalement concentrées dans les ligaments, en particulier après la bifurcation due au flambage. Si une approximation de ces champs peut être facilement obtenue par simulations, il est complexe d'introduire un module de raideur dépendant de la déformation maximale appliquée. Un modèle matériau aussi avancé n'entre pas dans les objectifs de ce travail. Comme mentionné dans la partie 2.3.1, on conserve donc un modèle purement élastique avec un module d'élasticité constant.

Sur les courbes de E , on note également un accroissement rapide pour les déformations très faibles. Ce phénomène est dû au contact de l'échantillon avec la machine. Malgré une pre-

mière approche jusqu'à contact avant le début des mesures, les imperfections géométriques des échantillons entraînent un contact progressif et donc un effort non-uniforme sur la surface d'appui. Ces imperfections sont dues en partie à la rétraction thermique lors de l'impression, qui déforme la pièce finale, sans compter que la fabrication de pièces de tailles importantes peut s'en trouver altérée.

Cette raideur initiale n'est donc pas représentative de la valeur homogène. En première approximation, la pente pré-flambage sur les courbes de contrainte-déformation paraît constante ; on pourrait donc estimer la raideur initiale comme étant égale à la valeur atteinte lorsque toute la surface de l'échantillon est en contact avec le plateau de compression, c'est-à-dire à la valeur maximale observée sur la courbe de E . Cependant, le module d'élasticité observé après ce maximum n'est jamais constant comme on l'attendrait d'un comportement purement élastique, ce qui confirme la forte viscoélasticité du TPU. À la place, on observe une décroissance de E jusqu'au plateau indiquant l'état flambé de l'échantillon.

Ce plateau de raideur valide expérimentalement le choix de ces structures, qui possèdent bien les propriétés statiques ciblées, à savoir un profil non-linéaire de raideur avec une valeur importante à l'état initial, et une valeur proche de zéro atteignable par compression. Sur les courbes, les raideurs associées aux plateaux varient selon l'éprouvette et l'amplitude du cycle : on observe ainsi des valeurs faibles mais non négligeables (e.g. éprouvette T_2 , figure 5.11b), virtuellement nulles (e.g. éprouvette T_0 , figure 5.9b, deuxième et troisième niveaux), voire même négatives (voir la phase de compression de l'éprouvette S_{03} , figure 5.13b).

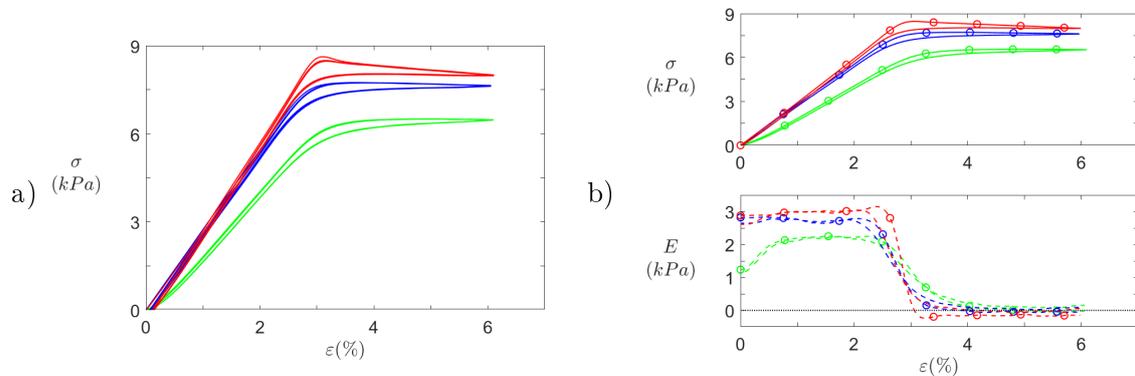


FIGURE 5.13 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour les éprouvettes — S_{01} , — S_{02} , et — S_{03} . a) 5 cycles successifs à environ 6%, et b) — dernier cycle de chaque éprouvette (en haut) avec - - - le module d'élasticité équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

Les figures 5.13 et 5.14 montrent les résultats de compression pour les éprouvettes en silicone. La section 2.3.2 a montré l'influence négligeable de l'effet Mullins et de la viscosité dans ce matériau, ce que confirment les figures 5.13a et 5.14a, où tous les cycles de chaque éprouvette sont confondus, exception faite des premiers cycles respectifs de S_{03} et de S_{LR} qui diffèrent légèrement des cycles suivants. Les autres niveaux de compression seront donc omis ici et on s'intéressera principalement aux derniers cycles de chaque cas, tracés en figures 5.13b et 5.14b.

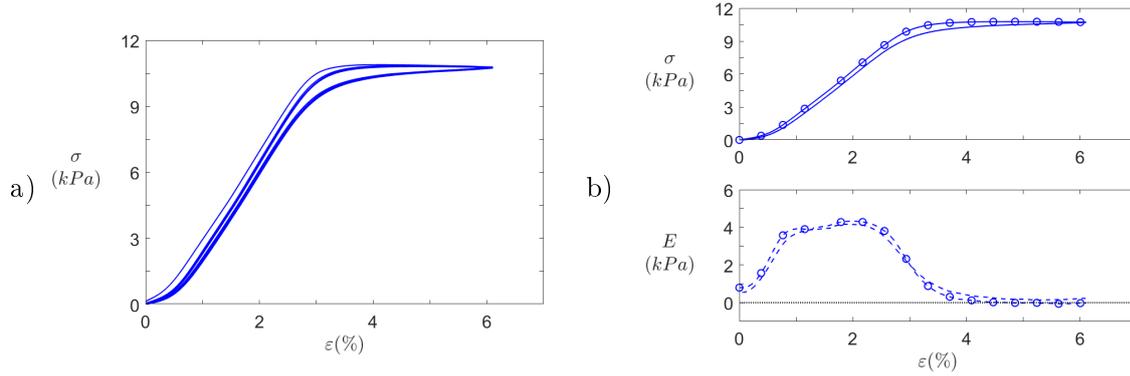


FIGURE 5.14 – Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette S_{LR} . a) — 5 cycles successifs à environ 6%, et b) — dernier cycle de chaque éprouvette (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.

La première montre qu'une dispersion non négligeable de propriétés existe entre des éprouvettes de géométrie identique mais moulées à des instants différents et par des opérateurs différents. La pente initiale est particulièrement affectée, comme le soulignent les courbes du module d'élasticité E . Le silicone utilisé étant initialement sous forme de base et de catalyseur séparés, on peut imputer cette dispersion à la différence de proportions de ces deux phases et à l'homogénéité du mélange final. En outre, le silicone se fige plus ou moins rapidement selon la température ambiante lors du moulage, et la présence de microbulles dans le matériau final n'est pas à exclure.

Les courbes de S_{01} et de S_{LR} présentent une pente initiale non constante, similaire aux résultats observés sur les éprouvettes en TPU, et qui sera imputée aux mêmes causes expérimentales. En revanche les éprouvettes en silicone présentent des plateaux de raideurs bien plus nets que pour le TPU, comme le soulignent les courbes de E . Un plateau initial correspondant au mode de compression symétrique est clairement visible, suivi d'une chute rapide jusqu'à un plateau proche de $E = 0$ décrivant l'état flambé.

On notera que les courbes de traction et de compression sont très proches, ce qui traduit le caractère linéaire de l'élasticité et la faible dissipation du silicone.

5.2.4 Comparaison simulations essais

Afin de vérifier la corrélation essais calculs en statique, des simulations des éprouvettes sont réalisées. Suite aux remarques du chapitre 4 (section 4.4.3), le choix de modèles tridimensionnels est adopté.

La comparaison des courbes statiques précédentes est réalisée sur les figures 5.15 et 5.16. La première montre les résultats pour les échantillons en TPU. Comme discuté dans le chapitre 2, le comportement du TPU est complexe, et le modèle matériau linéaire choisi ici ne décrit que partiellement son comportement réel. En particulier, la dissipation visqueuse, nettement observée sur les courbes expérimentales, est négligée par le modèle. Pour les courbes statiques

présentées sur la figure 5.15, le module de conservation $E' = 26MPa$ est choisi.

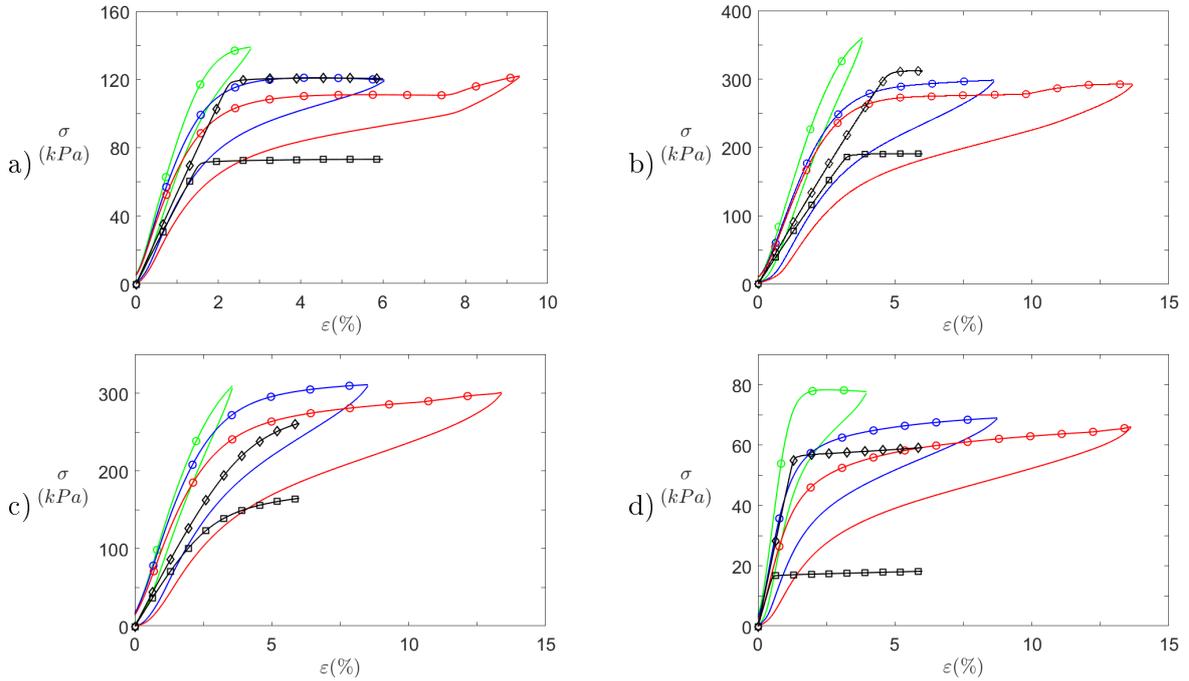


FIGURE 5.15 – Résultats de la compression statique pour les échantillons en TPU : a) T_0 , T_1 , T_2 , et T_3 . Comparaison des $\text{---}\circ\text{---}$ données expérimentales à trois niveaux d'amplitude différents et des résultats numériques avec l'épaisseur e $\text{---}\square\text{---}$ théorique et $\text{---}\diamond\text{---}$ mesurée numériques de l'échantillon S_{LR} .

Une première observation est que les courbes théoriques (marquées par des carrés) sont bien inférieures aux valeurs expérimentales. Les résultats semblent indiquer que la structure est plus rigide que théoriquement. Le procédé utilisé ici, la fabrication additive par FDM (voir section 5.1.2), n'est pas extrêmement précis, notamment pour les dimensions faibles, à cause de la taille de la buse et du retrait thermique. Il est donc susceptible d'engendrer une différence entre les dimensions théoriques et réelles. Après mesure des échantillons, il s'avère que les épaisseurs e sont en moyenne $0.3mm$ plus importantes que théoriquement (soit $e = 1.5mm$ pour T_0 , T_1 , et T_2 , et $e = 0.7mm$ pour T_3). En ajustant le modèle numérique en conséquence, les courbes marquées de losanges sont obtenues. Certaines caractéristiques sont bien mieux décrites, comme la hauteur du plateau. Sur la figure 5.15c, la transition progressive associée à l'ovalisation des espaces vides est également bien prédite. En revanche, la raideur initiale reste mal évaluée par le modèle.

La figure 5.16a synthétise les résultats pour les éprouvettes en silicone, de type S_0 . En s'affranchissant de l'effet - faible - de la viscosité, la courbe numérique est très proche des cas S_{02} et S_{03} , et plus particulièrement de ce dernier. En effet, la pente initiale et le plateau (phase de traction) semblent tous deux captés par le modèle. Seul le point de bifurcation associé au flambement diffère légèrement. On notera que cette bifurcation est moins abrupte sur les courbes expérimentales que numérique, ce qui peut laisser penser que les imperfections géométriques naturellement présentes dans la structure sont plus importantes que celles considérées ici ($I_f = 5 \times 10^{-5}$). Comme S_{03} est le cas le mieux décrit par le modèle numérique, seule cette éprouvette sera conservée pour la suite de l'étude.

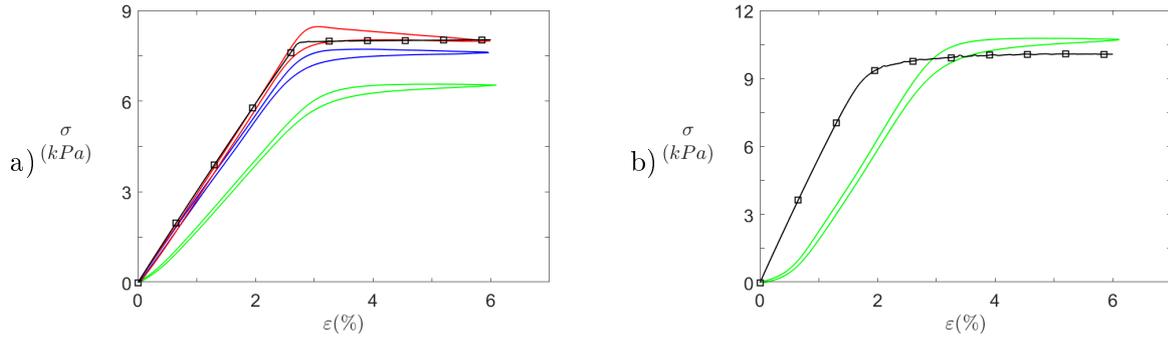


FIGURE 5.16 – Résultats de la compression statique pour les échantillons en silicone. a) Comparaison des données expérimentales — S_{01} , — S_{02} , — S_{03} , et —■— numériques des échantillons S_0 . b) Comparaison des données — expérimentales et —■— numériques de l'échantillon S_{LR} .

La figure 5.16b montre les mêmes résultats pour l'éprouvette S_{LR} . Comme mentionné dans le paragraphe 5.2.3, la courbe expérimentale montre plusieurs effets parasites, notamment pour des déformations faibles, qui ne sont pas observées dans les conditions idéales de simulation. Toutefois, la pente stabilisée qui précède le flambement est proche de la raideur obtenue numériquement, et bien que le plateau expérimental soit plus élevé que pour la simulation, la différence entre les deux est relativement faible. Ces deux aspects étant bien capturés par la courbe numérique, le modèle sera considéré satisfaisant.

5.3 Tests dynamiques

5.3.1 Banc d'essais dynamiques

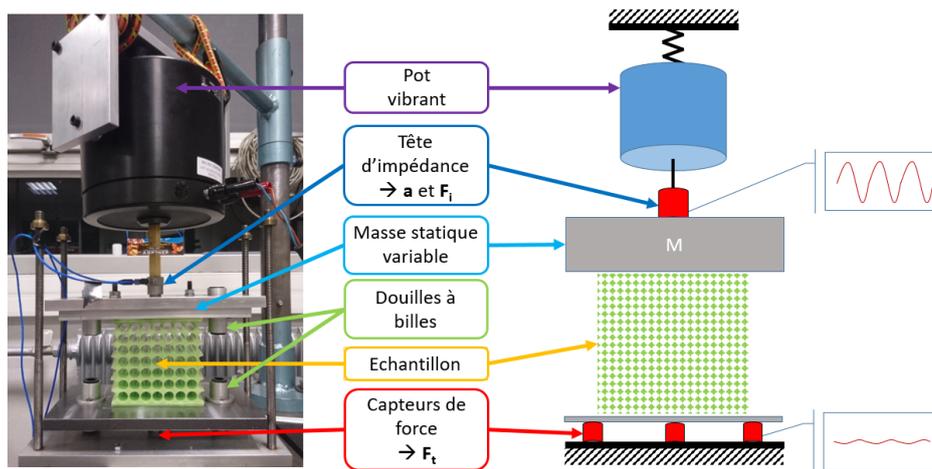


FIGURE 5.17 – Banc d'essais pour la mesure d'isolation vibratoire.

Dans le cadre de ce travail, un banc d'essais a été spécialement conçu pour observer les propriétés d'isolation des métamatériaux étudiés. Le principe général est simple : une masse inerte permet une précompression statique de l'échantillon. Une perturbation dynamique est ensuite appliquée autour de ce point de fonctionnement, à l'aide d'un pot vibrant (figure

n°	0	1	2	3	4	5	6	7
Masse (kg)	0.460	0.526	0.991	1.496	2.082	4.00	4.00	8.00
Matériau	Aluminium	Aluminium	Acier	Acier	Acier	Acier	Acier	Acier

TABLE 5.3 – Table des masses disponibles pour la précontrainte des échantillons.

5.17).

Afin de faciliter la fixation de l'échantillon sur le banc, des plaques en PMMA⁴, fabriquées par découpe laser, sont collées aux faces supérieure et inférieure des échantillons à tester. Les plaques et un échantillon ainsi obtenu sont présentés sur la figure 5.18.

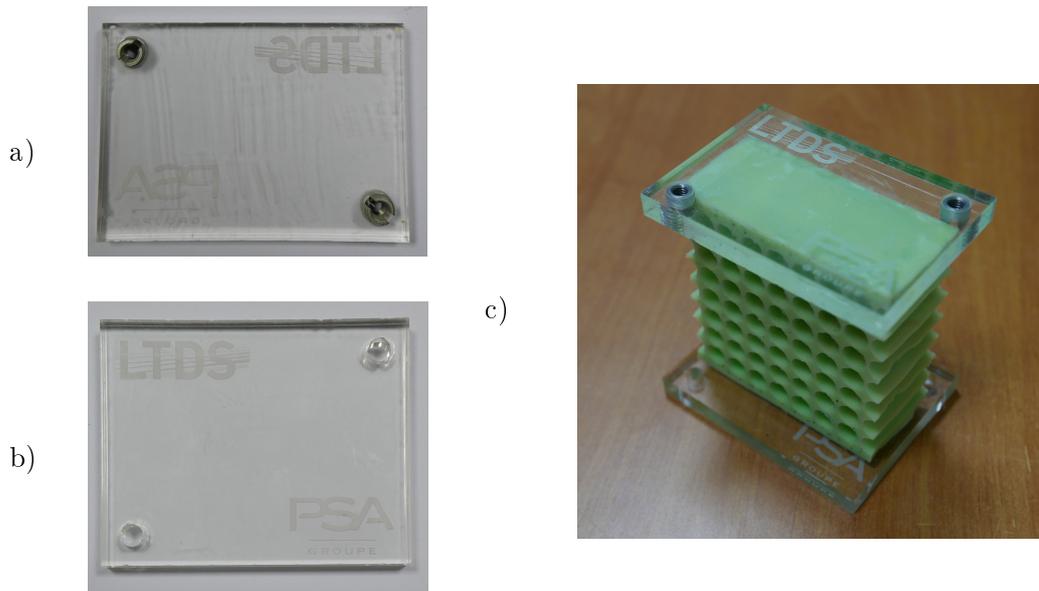


FIGURE 5.18 – Plaques a) supérieure (avec inserts métalliques) et b) inférieure, fabriquées en PMMA par découpe laser et c) collées sur les échantillons à tester en dynamique. Les masses des plaques supérieure et inférieure sont, respectivement, 87.7g et 86.7g.

Grâce à ces plaques, l'échantillon peut être vissé rapidement au banc afin de garantir la solidité de l'assemblage. L'échantillon est fixé entre deux plaques métalliques, la plaque supérieure étant en aluminium, tandis que la plaque inférieure est en acier. Cette dernière est reliée au marbre via trois capteurs de force ICP[®] 208C02 de la marque PCB Piezotronics. Quant à la plaque supérieure, une ou plusieurs masses métalliques peuvent y être apposées et fixées grâce à deux boulons (voir table 5.3). Cet ensemble supérieur, considéré comme un solide indéformable, permet d'appliquer une précontrainte uniaxiale variable au métamatériau afin d'en étudier l'effet sur la transmission vibratoire. L'excitation est générée par un pot vibrant Brüel & Kjær type 4809 suspendu au dessus de la plaque supérieure (et des masses potentiellement ajoutées) et est rattaché à celle-ci par une tige d'aluminium et une tête d'impédance ICP[®] 288D01 PCB Piezotronics. Ce capteur, vissé sur l'ensemble plaque supérieure/masses, en mesure simultanément l'accélération et l'effort axiaux.

⁴ Polyméthacrylate de méthyle, plus couramment appelé plexiglas

Sur la figure 5.17, on peut voir des douilles à billes fixées sur les plaques inférieure et supérieure, permettant ainsi d'installer des guides cylindriques pour assurer un déplacement uniaxial de l'ensemble supérieur. Cependant, des tests préliminaires ont montré que ces guides tendent à transmettre les vibrations. Pour certaines gammes de fréquences, ces vibrations peuvent être supérieures à celles transmises par l'éprouvette elle-même, et ainsi fausser complètement les résultats. C'est pourquoi l'ensemble des résultats présentés dans cette section a été obtenu sans guides. Par conséquent, des modes transverses non symétriques peuvent exister. Néanmoins, pour de faibles perturbations statiques, le système est considéré assez rigide pour que les déplacements transverses soient négligeables, et les modes transverses sont ignorés lors des calculs.

Le pilotage des essais est effectué par un script Matlab commandant un module PXI 4472. Un signal numérique converti par un module BNC2110 est envoyé au pot vibrant via un amplificateur de tension DP PA100. Les réponses de chaque capteur sont envoyées au PXI dont les données peuvent ensuite être exploitées sur Matlab.

Ce banc permet de modifier rapidement la charge statique et l'éprouvette. Toutefois, la précontrainte est ici imposée en effort via le poids des masses disponibles, ce qui peut poser problème. D'une part les possibilités de chargement sont limitées aux combinaisons des masses de la table 5.3, ce qui est critique pour une utilisation polyvalente et précise. D'autre part, en cas de profil de compression fortement non-linéaire, avec des zones de raideur $k \leq 0$, certaines plages de déformation peuvent être inaccessibles. Typiquement, se placer sur le plateau de raideur observé jusqu'ici sur les éprouvettes est virtuellement impossible, car lorsque l'effort augmente, la structure passe extrêmement rapidement de l'état non flambé à la reprise d'effort par contact intercellulaire.

5.3.2 Conditions d'essais

Comme mentionné précédemment, les mesures sont entièrement pilotées via le logiciel Matlab. Cela permet de faire varier facilement un grand nombre de paramètres tels que la forme, la fréquence, et l'amplitude du signal envoyé. Ici, on cherche à calculer la fonction de transfert de la force transmise F_o sur la force incidente F_i , via la densité spectrale de puissance de type Welsh, sur la bande fréquentielle choisie $[0, 2]kHz$. Pour améliorer la cohérence des spectres, le signal d'entrée est envoyé dans le système sous forme de balayage harmonique, plutôt qu'un bruit blanc. Dans la même optique, ce balayage est divisé en plages fréquentielles réduites (d'environ $100Hz$ sur 20 secondes). Quant à l'amplitude du signal, elle est ajustée selon la fréquence et la cohérence obtenue. On notera finalement que les fréquences inférieures à $10Hz$ sont trop basses pour donner des résultats fiables. Le comportement à ces fréquences pourrait toutefois être extrapolé à partir des fréquences supérieures et de la limite statique, pour laquelle le métamatériau peut être considéré comme rigide : tous les efforts incidents sont transmis, ce qui donne $\left. \frac{F_o}{F_i} \right|_{f=0Hz} = 0dB$.

Comme indiqué sur la table 5.3, le choix de masses pour précontraindre l'échantillon est limité. Par la suite, les masses statiques m_s appliquées sont notées sous la forme $m_{ij} = m_i + m_j$ avec i

et j entiers entre 0 et 7 correspondant aux numéros de la table 5.3 (e.g. $m_{013} = m_0 + m_1 + m_3 = 0.460 + 0.526 + 1.496 = 2.482kg$). En combinant l'ensemble des masses, on atteint une masse statique totale d'environ $m_{max} = 21.5kg$. L'objectif des essais dynamiques étant d'observer l'effet de la raideur non linéaire du métamatériau sur l'isolation, seuls les échantillons dont le plateau de raideur peut être atteint par le poids associé à m_{max} présentent un intérêt. Si le point de flambement des éprouvettes en silicone est rapidement atteint ($\approx 3.3kg$), les éprouvettes T_0 , T_1 , et T_2 flambent théoriquement pour des masses appliquées supérieures à $70kg$, ce qui est bien au-delà de la limite évoqué. Parmi les éprouvettes en TPU, seul T_3 présente une masse critique atteignable ($\approx 20kg$). Étant donné qu'une seule éprouvette de type S_0 est conservée (voir paragraphe 5.2.4), les trois éprouvettes testées dans cette partie sont T_3 , S_{03} , et S_{LR} .

5.3.3 Résultats T_3

La figure 5.19 présente les résultats expérimentaux de l'éprouvette T_3 pour différents états de précontrainte statique, décrits sur la figure 5.19a. La fonction de transfert, représentant la transmissibilité, semble diminuer fortement lorsque la masse statique augmente (figure 5.19b). Cependant, il faut prendre en compte l'inertie de ces masses, qui a un effet direct sur la fréquence du premier mode. La perte de niveau qui suit ce mode (cf modèle masse-ressort chapitre 1, figure 1.7) est d'autant plus avancée que le premier mode est bas en fréquence. Ce décalage proportionnel est particulièrement visible au niveau du deuxième mode à $370Hz$. Afin de n'observer que l'effet de la déformation du métamatériau, cet effet de la masse est donc compensé sur les ordonnées de la figure 5.20a. En considérant l'effet de la masse de l'éprouvette négligeable devant celui de la masse totale $m_t = m_s + m_p$, où m_p est la masse de la plaque supérieure de PMMA fixée à l'éprouvette (voir figure 5.18), on peut s'affranchir de l'effet de masse en multipliant les niveaux par m_t . Cette compensation n'est valable que pour les fréquences au-delà du premier mode observé.

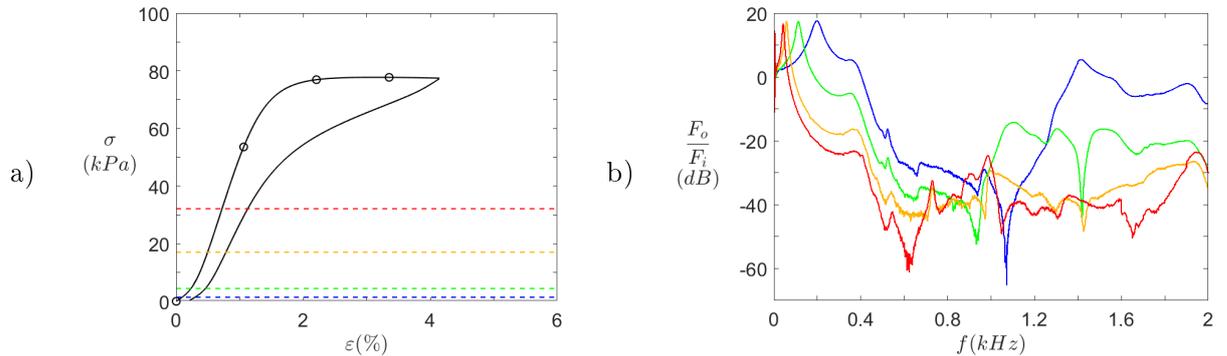


FIGURE 5.19 – Résultats des essais sur l'éprouvette T_3 en fonction de la masse appliquée : a) --- niveaux de chargement par rapport à la — compression statique et b) fonctions de transfert des cas — m_0 , — m_{02} , — m_{01234} , et — m_{01356} .

La figure 5.20a montre une différence de niveaux négligeable pour le deuxième mode ($370Hz$). Après celui-ci, c'est-à-dire pour $f > 500Hz$, une dispersion très importante est observée.

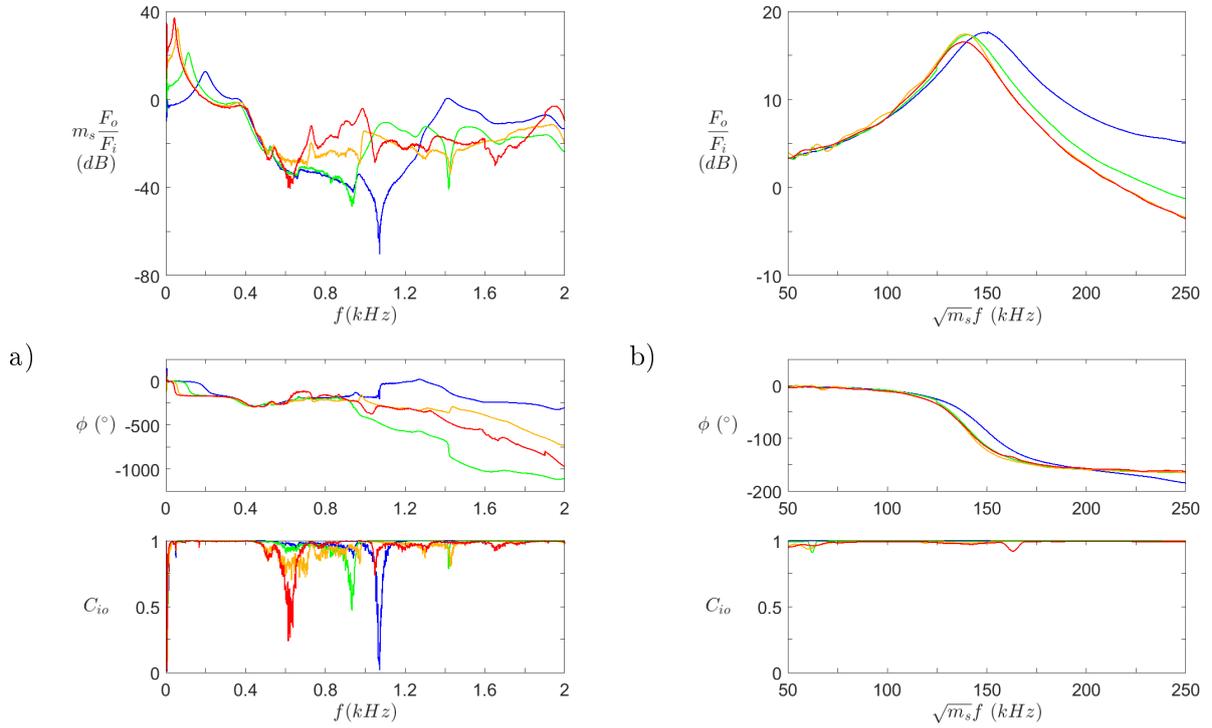


FIGURE 5.20 – Résultats des essais sur l'éprouvette T_3 en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet et b) premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas). Cas — m_0 , — m_{02} , — m_{01234} , et — m_{01356} .

Aucune relation proportionnelle nette n'apparaît pour ces fréquences. Une densité modale commune à toutes les courbes semble exister autour de 1930Hz (particulièrement visible sur la courbe rouge), fréquence à laquelle les niveaux obtenus sont de nouveau très proches.

Sur la figure 5.20b, le premier mode est tracé en supprimant la contribution de la masse. Ce mode correspondant au premier mode de compression longitudinal, le comportement de l'échantillon à cette fréquence peut être assimilé à un système masse-ressort à un degré de liberté, l'éprouvette, souple, jouant le rôle de ressort. La résonance d'un tel système est définie par $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On peut donc s'affranchir de l'effet de masse en multipliant la fréquence par $\sqrt{m_t}$, et n'observer ainsi que les variations éventuelles de raideur.

En l'occurrence, le mode varie très peu en fonction de la masse, ce qui montre que la raideur effective de l'éprouvette ne varie presque pas pour les précompressions testées. La fréquence associée au cas m_0 est légèrement différente mais les trois autres sont si proches que l'effet est considéré négligeable. De même, l'amplitude des résonances ne varie presque pas : l'amortissement est donc sensiblement identique entre les cas considérés.

Bien que les niveaux de filtration apparaissent bas dans certaines configurations, les courbes de cohérences de la figure 5.20 sont globalement très proches de 1 ce qui indique l'absence de bandgap sur la plage fréquentielle étudiée. Le TPU étant relativement rigide en dynamique (voir 2.3.1), il est logique que la bande interdite se situe à hautes fréquences. La valeur prédite

par les diagrammes de dispersion théoriques est donnée au paragraphe 5.4.2.

5.3.4 Résultats S_{03}

La même comparaison est effectuée pour l'éprouvette S_{03} . Les niveaux de précompression atteints sont illustrés par la figure 5.21 et les mesures dynamiques associées sont présentées sur la figure 5.22.

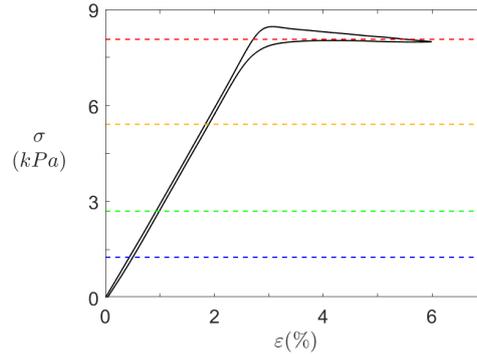


FIGURE 5.21 – Niveaux de chargement par rapport à la — compression statique de l'éprouvette S_{03} , pour les cas - - - m_0 , - - - m_{01} , - - - m_{012} , et - - - m_{023} .

Les résultats associés à l'éprouvette silicone sont radicalement différents des précédents. En basses fréquences, le premier mode est très affecté par la précompression : à part les deux premières courbes très proches, l'augmentation de la précompression entraîne une diminution de la fréquence du premier mode (figure 5.22b). Sur la figure 5.22a, les deux modes suivants sont très peu affectés par la masse, autant en fréquence qu'en amplitude. En revanche, un mode apparaît vers $74Hz$ pour les cas les plus contraints. L'encart de la figure 5.22a montre en effet qu'il est présent sur la courbe de m_{012} , mais il est surtout efficace pour le cas m_{023} où l'antirésonance atteint $-54dB$.

La plage fréquentielle entre $400Hz$ et $1500Hz$ est très particulière, car la majeure partie de cette plage se situe dans le niveau de bruit, c'est-à-dire qu'à ces fréquences le signal enregistré par les capteurs de force est si faible qu'il est alors d'ordre égal ou inférieur au bruit de mesure. Dans cette situation, la cohérence chute rapidement, car le bruit est aléatoire et sa cohérence est par définition nulle. De fait, la cohérence de la figure 5.22a est très faible, mises à part quelques fréquences autour de $550Hz$ et de $1300Hz$ où la cohérence remonte. Trois zones peuvent donc être distinguées : deux bandes étroites autour de $500Hz$ et $1400Hz$, une bande large entre $550Hz$ et $1200Hz$.

La première est peu affectée par la masse statique, et sa largeur est estimée à $60Hz$. Pour le cas m_0 , où le signal est le moins bruité, l'antirésonance est comprise entre $473Hz$ et $535Hz$, avec une valeur minimale de transfert de $-62dB$ (sans facteur de correction m_s) observé à $506Hz$. À l'inverse, la bande vers $1400Hz$ est nettement affectée par la précompression, la fréquence augmentant lorsque la masse statique augmente. Exceptés les pics d'antirésonance des cas m_{01} et m_{012} qui sont très proches, cette relation se vérifie aussi bien pour la largeur de la bande

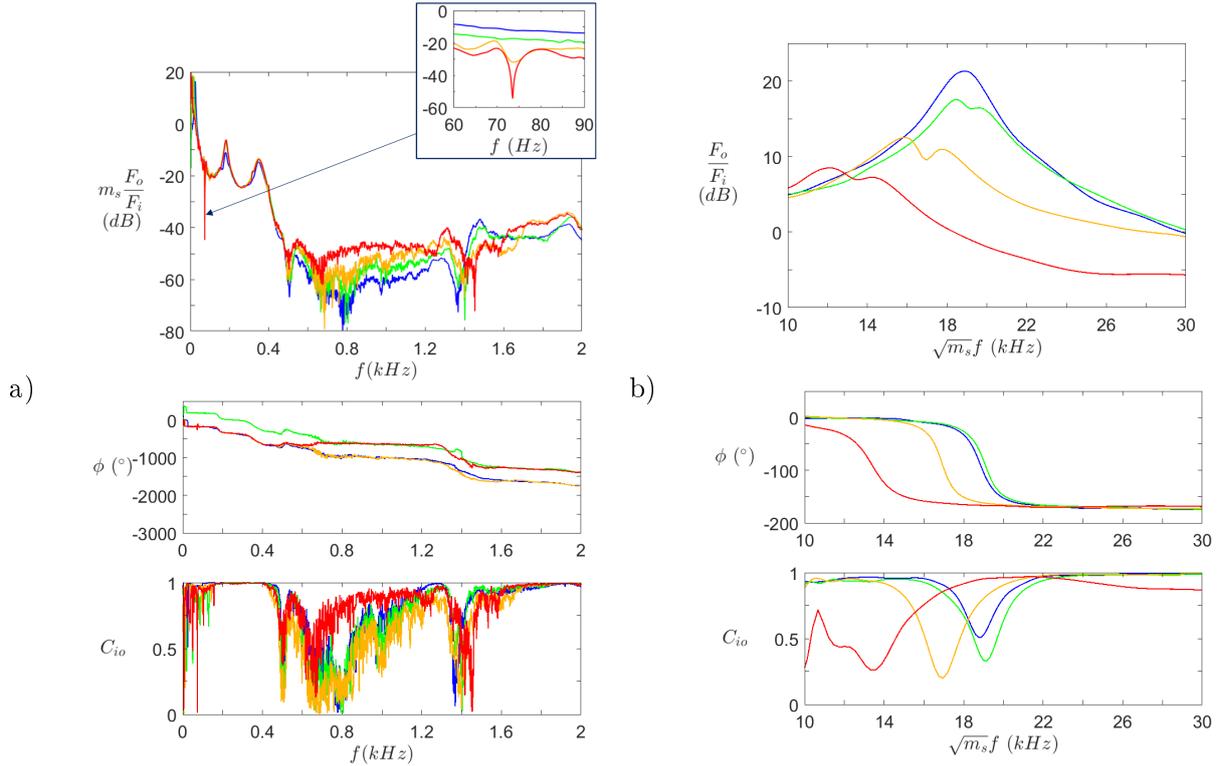


FIGURE 5.22 – Résultats des essais sur l'éprouvette S_{03} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet. L'encart est un agrandissement d'une antirésonance basses fréquences. b) Premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas). Cas — m_0 , — m_{01} , — m_{012} , et — m_{023} .

($130Hz$, $150Hz$, $155Hz$, et $190Hz$ pour resp. m_0 , m_{01} , m_{012} , et m_{023}), le niveau minimum de transfert de force atteint (resp. $-68dB$, $-76dB$, $-73dB$, et $-82dB$), et la fréquence de ce dernier (resp. $1368Hz$, $1402Hz$, $1400Hz$, et $1453Hz$). Enfin la bande la plus large est extrêmement bruitée et il est difficile de tirer une relation claire entre précompression et résultats. On notera que la différence de niveau de bruit observée entre les fonctions de transfert (figure 5.22a, en haut) est uniquement due au facteur de correction m_s . En effet, le niveau de bruit dépend principalement de la sensibilité du capteur et est donc identique quelle que soit la configuration. Ces trois bandes correspondent à des niveaux d'isolation très importants et donc potentiellement à des bandes interdites. La section 5.4 confronte les résultats numériques et expérimentaux pour comparer ces bandes aux bandgaps théoriques.

5.3.5 Résultats S_{LR}

Finalement, les résultats dynamiques expérimentaux de l'éprouvette S_{LR} sont présentés sur la figure 5.24, en parallèle des niveaux de précompression atteints (figure 5.23).

Côté basses fréquences, le premier mode suit la même tendance que précédemment avec globalement une réduction de sa fréquence lorsque la masse augmente, excepté entre les cas m_0 et m_{01} . La raison de cette inversion de tendance provient probablement des limites du modèle de masse-ressort évoqué au paragraphe 5.3.3. Il ne prend pas en compte la masse de l'éprouvette

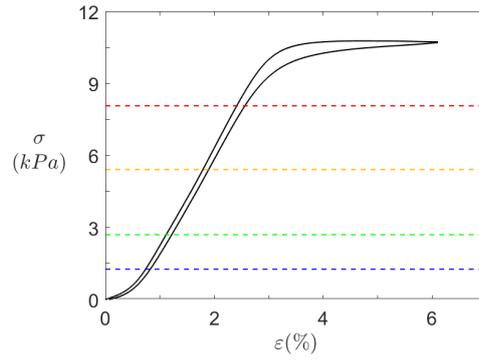


FIGURE 5.23 – Niveaux de chargement par rapport à la — compression statique de l'éprouvette S_{LR} , pour les cas --- m_0 , --- m_{01} , --- m_{012} , et --- m_{023} .

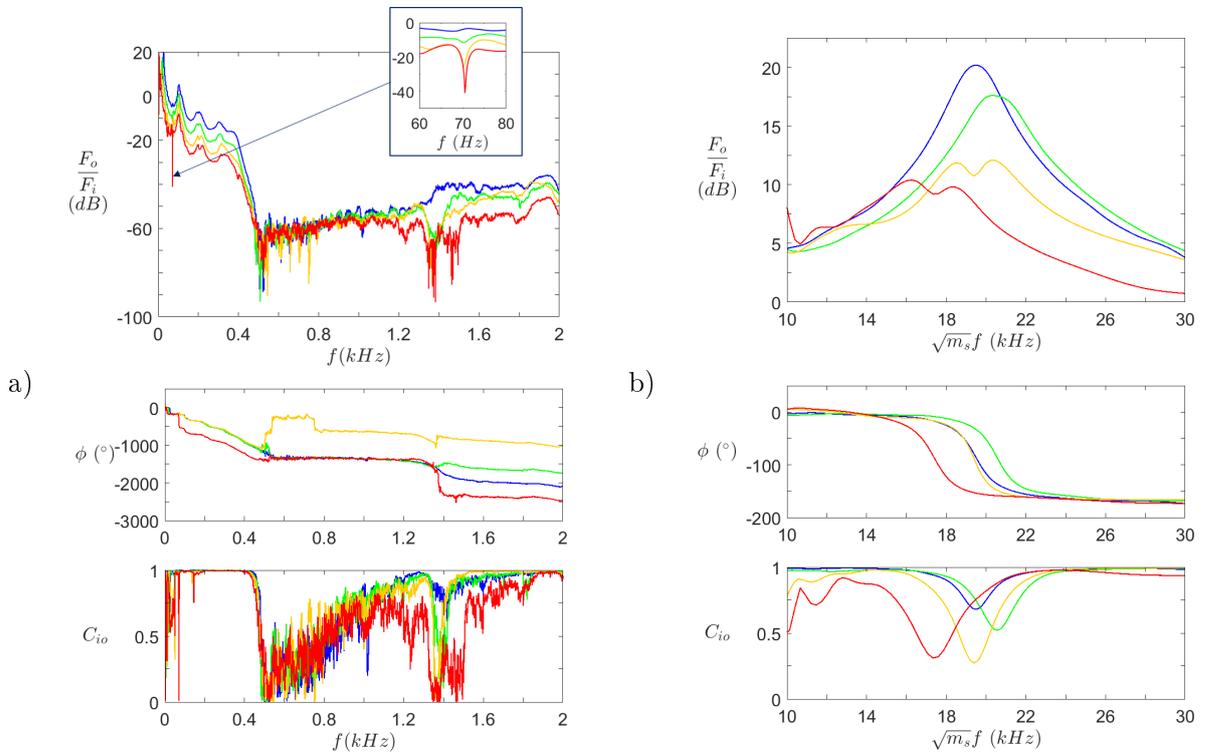


FIGURE 5.24 – Résultats des essais sur l'éprouvette S_{LR} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet et b) premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas).
— m_0 , — m_{01} , — m_{012} , et — m_{023} .

elle-même. Si pour les éprouvettes homogènes la différence de masse entre l'éprouvette et la masse variable valide cette hypothèse, les inclusions présentes dans S_{LR} peuvent biaiser cette hypothèse. En revanche, l'amortissement accru lors de la précompression de l'éprouvette est confirmé par les courbes de la figure 5.24b. On retrouve également la division du pic principal en deux pour $m_s > m_{01}$. Cette division et l'amortissement des pics sont probablement liés au flambage dynamique des ligaments et à la rotation associée des masses. Des mesures complémentaires, notamment optiques (voir paragraphe 5.5), pourraient valider cette hypothèse.

Comme pour l'éprouvette S_{03} , une antirésonance apparaît autour de $70Hz$ dès que $m_s > m_0$. Les résonances suivantes ($102Hz$, $207Hz$, et $310Hz$) sont bien moins affectées par la pré-compression que la première, mais les fréquences des deux dernières tendent néanmoins à augmenter légèrement avec la charge statique. On notera que la résonance autour de $200Hz$ est en réalité composée de deux pics très proches dont l'écart croît avec la précompression (cf figure 5.25).

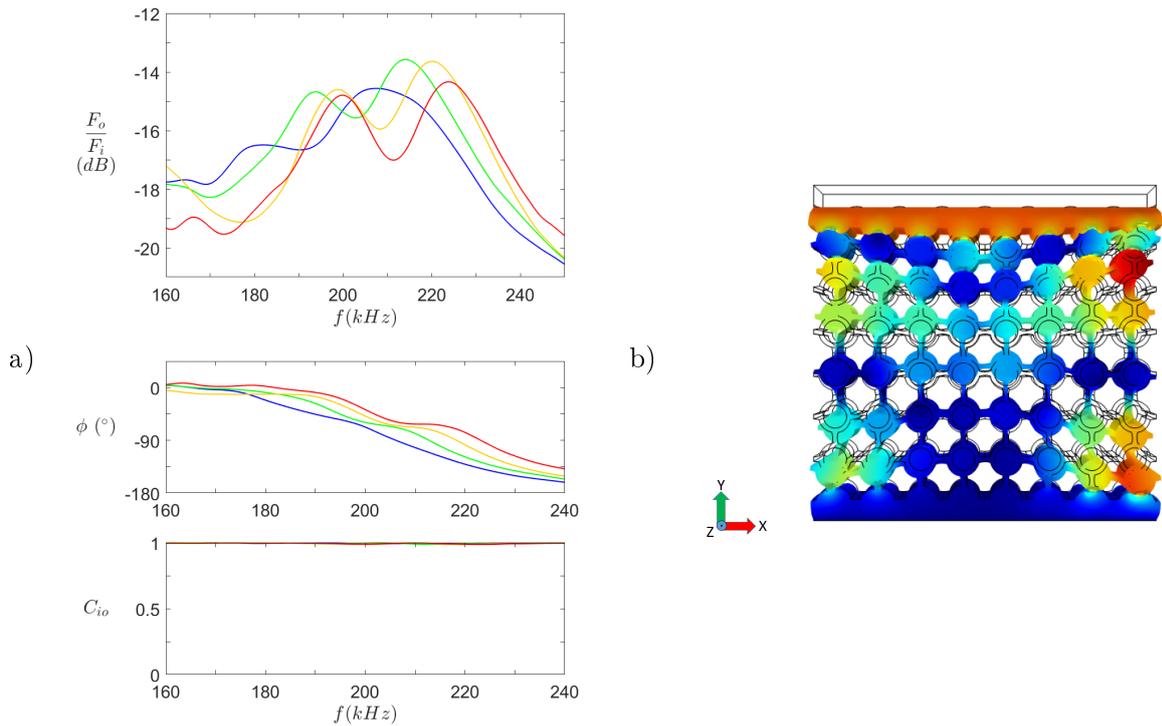


FIGURE 5.25 – Résultats des essais sur l'éprouvette S_{LR} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Troisième mode observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas). — m_0 , — m_{01} , — m_{012} , et — m_{023} . b) Déformée modale correspondante ($210Hz$).

Comme précédemment, le reste du domaine fréquentiel ($f > 400Hz$) est caractérisé par des niveaux de transmission et de cohérence très faibles. Seules les fréquences supérieures à $1850Hz$ sont de nouveau cohérentes pour les quatre cas présentés. Si la cohérence du cas m_{023} est très mauvaise sur tout le domaine $[400, 1850]Hz$, des zones de cohérence correcte existent toutefois sur les cas moins contraints, comme les plages $[1250, 1350]Hz$ et $[1500, 1850]Hz$, où les cas $m_s \leq m_{012}$ présentent une bonne cohérence ($C_{io} \geq 0.9$). L'intervalle entre ces deux plages est caractérisé par une chute de transmission semblable à celle observée sur le cas S_{03} . Mais contrairement à ce dernier, les fréquences atteintes tendent plutôt à décroître avec la précontrainte. Cette tendance est particulièrement visible sur les courbes de cohérence de la figure 5.24a, où la chute se produit de plus en plus bas en fréquences lorsqu'on augmente la masse statique.

Une autre chute de transmission est observée autour de $510Hz$, suivie d'une large plage fréquentielle où les résultats sont très fortement bruités. Il en résulte un intervalle fréquentielle de $480Hz$ à $1150Hz$ où les fonctions de transfert (non compensées) restent inférieures à $-50dB$ et où la cohérence ne dépasse pas 0.9, quel que soit le cas de chargement considéré. On peut supposer qu'une partie importante de ce domaine est confondue avec le bruit de mesure, et que la perte de transmission réelle est encore plus importante que les valeurs obtenues ici. Cette plage est liée au phénomène de bandgap identifié au chapitre 4 et validé par la comparaison avec les résultats numériques, détaillée en section 5.4.

5.3.6 Comparaison S_{03} - S_{LR}

Afin de vérifier l'effet des inclusions sur le comportement dynamique du métamatériau, une comparaison des résultats obtenus pour S_{LR} et S_{03} - à masse statique égale m_{01} - est présentée sur la figure 5.26.

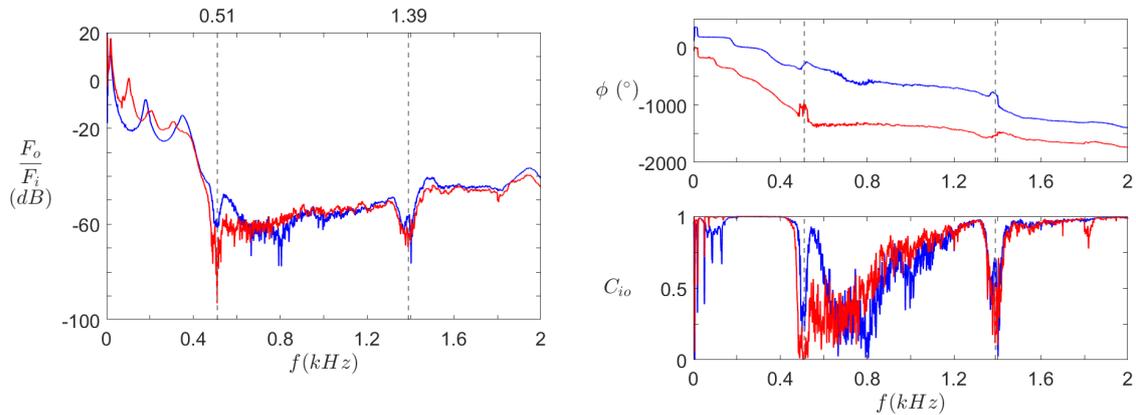


FIGURE 5.26 – Comparaison des mesures sur S_{03} et S_{LR} pour une masse m_{01} : fonction de transfert (à gauche), phase ϕ (à droite en haut), et cohérence C_{io} (à droite en bas).

Pour une grande partie des résultats, principalement au delà de $1kHz$, les résultats sont similaires. En revanche, pour les fréquences plus basses, des différences notables sont observables. Concernant les modes basses fréquences par exemple, si le premier mode est similaire pour les deux éprouvettes (environ $19Hz$), les suivants diffèrent en nombre comme en fréquence. En effet, la courbe de S_{03} présente deux modes bien distincts (à $180Hz$ et $350Hz$), tandis que l'échantillon S_{LR} présente trois modes autour de $102Hz$, $200Hz$, et $307Hz$. Ce plus grand nombre de modes basses fréquences s'explique par la masse accrue des cellules qui diminue leurs fréquences de résonances.

La différence la plus significative entre les deux courbes se situe autour de $550Hz$. Pour l'éprouvette S_{03} , une antirésonance est observée à $510Hz$, après quoi le niveau de la fonction de transfert remonte, puis diminue de nouveau au-delà de $550Hz$. En revanche la courbe de S_{LR} reste dans le niveau de bruit sur toute cette plage fréquentielle. Cette différence est très nette sur les courbes de cohérence. Alors que celle de S_{03} remonte jusqu'à $C_{io} = 0.9$, S_{LR} reste inférieure à 0.5. L'ajout d'inclusions semble donc coupler le mode responsable de la perte de

transmission (autour de $510Hz$) avec la bande extrêmement bruitée au-delà de $600Hz$.

5.4 Corrélation simulations/essais dynamiques

5.4.1 Paramètres

Cette section est dédiée à la comparaison des courbes dynamiques obtenues expérimentalement avec les résultats des modélisations numériques des échantillons. Les dimensions des modèles correspondent aux valeurs théoriques (voir table 5.1), exceptée l'épaisseur des ligaments de l'éprouvette T_3 dont la valeur mesurée $e = 0.7mm$ est choisie (cf paragraphe 5.2.3).

Les géométries sont en 3D pour prendre en compte les déformations hors plan. La masse statique est considérée comme indéformable, et est donc modélisée par une force surfacique sous forme de masse ajoutée au niveau de la frontière supérieure (T) de l'échantillon.

Les conditions aux limites sont imposées telles que :

$$\triangleright \mathbf{u}_B = \mathbf{0}$$

$$\triangleright \mathbf{F}_L = \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{Z_1} = \mathbf{F}_{Z_2} = \mathbf{0}$$

$$\triangleright u_{T,x} = u_{T,z} = 0$$

$$\triangleright u_{T,y} = u_0 + u_d$$

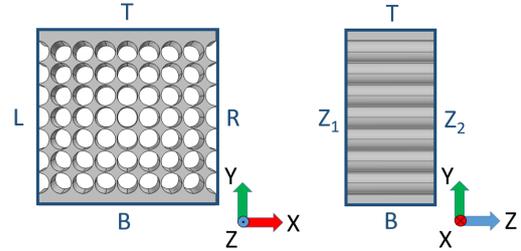


FIGURE 5.27 - Dénomination des frontières des échantillons tridimensionnels.

où $\mathbf{u}_\bullet = [u_{\bullet,x} u_{\bullet,y} u_{\bullet,z}]^t$ et $\mathbf{F}_\bullet = [F_{\bullet,x} F_{\bullet,y} F_{\bullet,z}]^t$ sont respectivement les vecteurs déplacement et effort sur la frontière $\bullet \in \{L, R, T, B, Z_1, Z_2\}$. u_0 et u_d sont respectivement les déplacements statique et dynamique imposés en compression selon la direction Y . Des formulations faibles sont appliquées aux faces B et T, de manière à récupérer les contraintes locales sous forme de multiplicateurs de Lagrange. Ces derniers sont ensuite intégrés sur la surface supérieure (resp. inférieure) pour obtenir l'effort incident (resp. transmis) total.

Les calculs sont décomposés en deux étapes. Une compression statique, équivalente à celle présentée à la section 4.2.2 du chapitre 4, permet dans un premier temps d'atteindre le point de fonctionnement correspondant à la précontrainte désirée. Puis une perturbation harmonique linéaire est appliquée autour de ce point de fonctionnement pour calculer le comportement dynamique du métamatériau.

5.4.2 Résultats T_3

Si les calculs statiques donnent des résultats très satisfaisants pour les éprouvettes S_{03} et S_{LR} , une différence de raideur initiale non négligeable est obtenue pour T_3 (section 5.2.4). Afin que les champs de déformation et de contrainte initiaux lors des calculs dynamiques soient les plus proches possibles du cas expérimental, le comportement en compression de T_3 est recalé via le module d'élasticité statique. La courbe rouge de la figure 5.28a est ainsi obtenue avec un module $E = 40MPa$ et un facteur d'imperfection $I_f = 10^{-4}$.

La raideur initiale est correctement prédite, mais le niveau du plateau de contrainte est sur-estimé par rapport au cas expérimental. Toutefois, la précontrainte est ici imposée en effort, et se placer sur le plateau est impossible (voir paragraphe 5.3.1). La courbe numérique est donc jugée satisfaisante sur la plage de déformation accessible. La figure 5.28a montre cette courbe tracée en parallèle de la courbe expérimentale de compression à 4% (tirée de la figure 5.15d), décalée en ε pour s'affranchir de l'effet de contact partiel mentionné au paragraphe 5.2.3. Cet effet sera ignoré pour les calculs dynamiques, car l'éprouvette étant collée aux plaques de PMMA, le contact est considéré parfaitement homogène. La courbe en pointillés bleus indique le niveau de précontrainte imposé lors des calculs dynamiques.

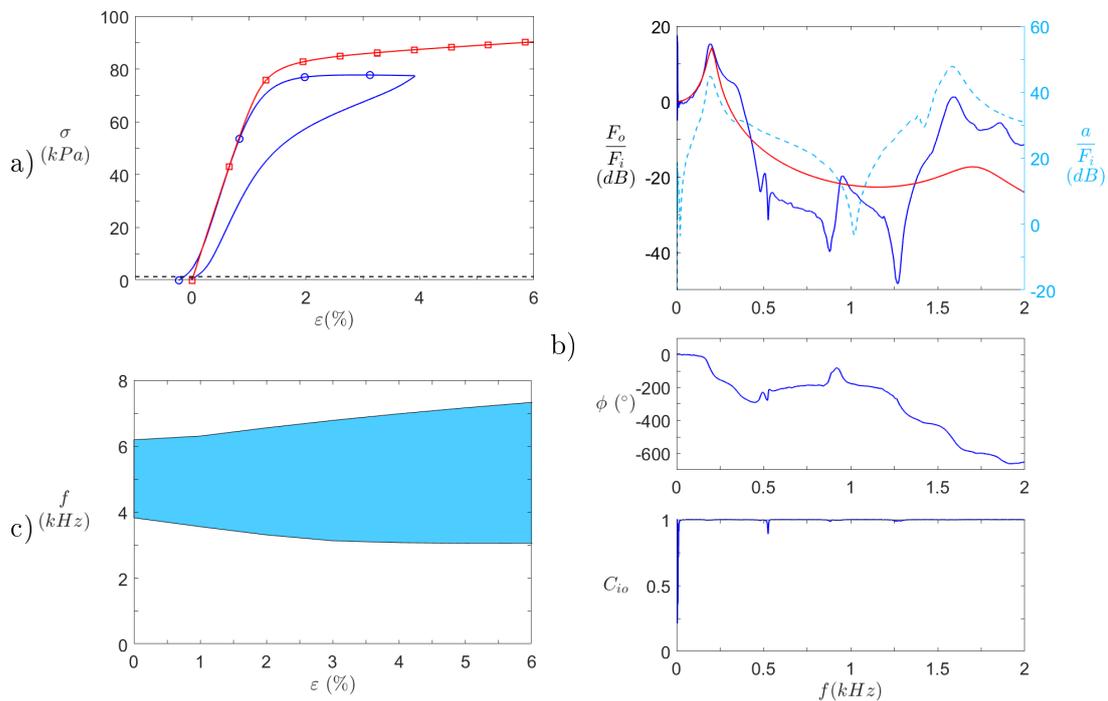


FIGURE 5.28 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette T_3 , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et —■— numérique. --- Contrainte de compression correspondante à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et — numérique : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). --- Inertance mesurée. c) ■ Bandgap théorique.

La figure 5.28b montre les résultats dynamiques de T_3 en situation de précompression m_0 . Sur la courbe numérique (en rouge), seuls deux modes apparaissent : à $230Hz$ et à $1920Hz$. Si pour ces fréquences, les résultats obtenus expérimentalement sont proches, la courbe mesurée présente de nombreux reliefs entre ces fréquences. La cohérence étant excellente sur l'ensemble du domaine fréquentiel, cette différence n'est pas imputable au niveau de bruit des capteurs. L'analyse paramétrique présentée sur la figure 5.20 avait toutefois montré une grande dispersion des résultats sur cette plage, sans relation évidente avec la précompression. De fait, cette plage fréquentielle correspond à des valeurs d'inertance $\frac{a_i}{F_i}$ très proches de zéro. Autrement dit, l'accélération incidente est très faible devant la force exercée. Cette situation rend le système très sensible aux perturbations. Les résultats sont donc peu fiables. En revanche,

ces explications ne justifient pas la présence du deuxième mode observé expérimentalement, à $370Hz$. Il est observé quelle que soit la précontrainte appliquée et est très peu affecté par celle-ci. Après réalisation d'essais au marteau de choc et vérification par calcul, ce mode est un mode parasite de flexion de la poutre supportant le pot vibrant.

En s'intéressant au premier mode uniquement, un décalage fréquentiel est visible entre la valeur mesurée et celle calculée. Vraisemblablement, cela résulte d'une erreur dans la valeur de module d'élasticité du matériau. Cette hypothèse est cohérente avec la variation importante du module dynamique observée en fonction de la fréquence lors des essais DMA (chapitre 2, figure 2.11). Une valeur moyenne arbitraire $E'_d = 175MPa$ avait été choisie, mais à basses fréquences la valeur lue sur la courbe maîtresse chute rapidement. À $230Hz$, fréquence du premier mode de T_3 , le module obtenu était égal à $158MPa$. Assouplir ainsi le modèle matériau ferait baisser la fréquence du mode. La solution idéale serait toutefois de considérer un modèle matériau dépendant en fréquence, de manière à améliorer encore la précision des résultats.

Au vu de son amplitude, le premier mode semble indiquer une valeur cohérente de l'amortissement obtenu par DMA (voir section 2.3.1).

On notera que les résultats de calculs de dispersion prédisent un premier bandgap à $3833Hz$, bien au-delà de la plage de fréquence considérée (figure 5.28).

5.4.3 Résultats S_{03}

La même analyse est maintenant effectuée sur l'éprouvette S_{03} et présentée sur la figure 5.29. Le point de fonctionnement est indiqué par la ligne en pointillés bleus de la figure 5.29a.

En comparant les fréquences des résonances et antirésonances notables sur les courbes numérique et expérimentale de la fonction de transfert (figure 5.29b), il apparaît qu'un décalage existe. Cependant, en recalant le module d'élasticité pour le premier mode, tous les pics constatés s'en trouvent bien corrélés. Le modèle matériau linéaire semble donc être suffisant pour décrire le comportement dynamique du silicone sur la plage fréquentielle étudiée mais un facteur de correction par rapport à la valeur choisie de E' au chapitre 2 est nécessaire. Un module dynamique $E'_d = 1.7MPa$ donne ainsi une très bonne corrélation essais-calculs (cf figure 5.30).

L'amplitude des pics semble correct, signe d'un coefficient d'amortissement structurel adapté. En revanche, les niveaux de la courbe de simulation sont peu prédictifs par rapport aux valeurs expérimentales. Globalement, les calculs surestiment la perte de transmission provoquée par le matériau, exceptée une zone autour de $600H$, où l'inverse est observé.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur la bande interdite prédite par les calculs de dispersion 2D. Si on la compare aux résultats numériques seuls, les résultats semblent cohérents car la bande correspond à la plage fréquentielle où les niveaux de fonction de transfert sont les plus bas. En revanche, l'analyse de la courbe de cohérence expérimentale montre que le bandgap le plus vraisemblablement détecté est situé entre $600Hz$ et $1200Hz$. Lors des calculs

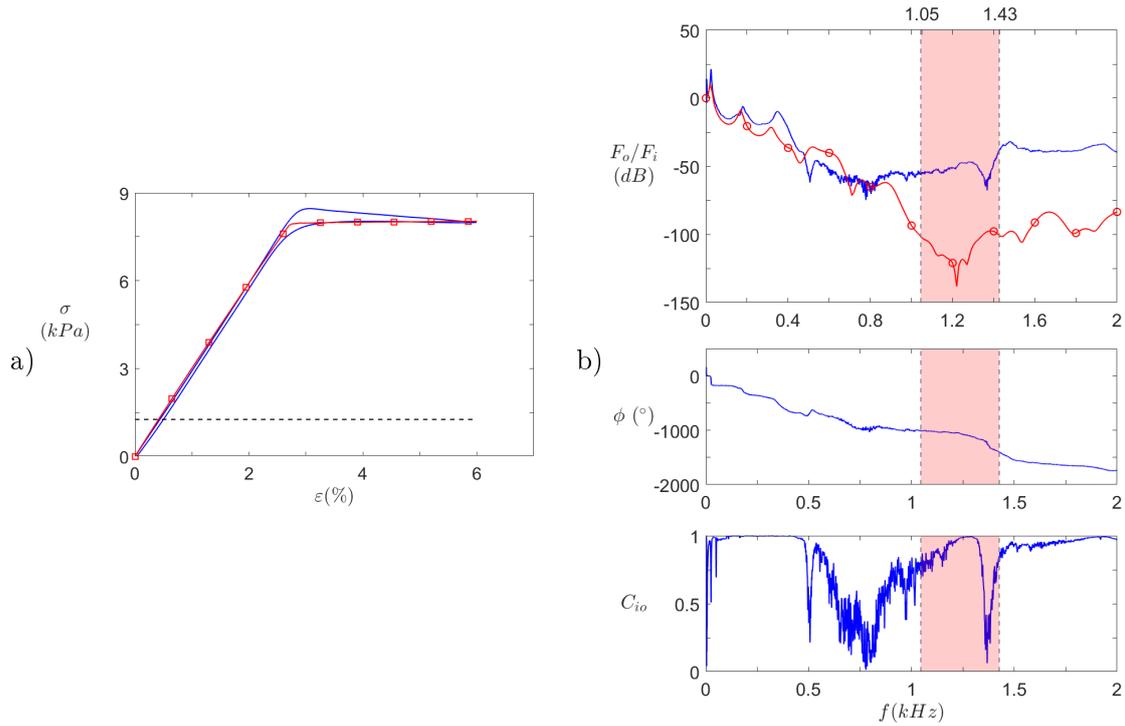


FIGURE 5.29 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette S_{03} , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et —■— numérique. --- Contrainte de compression correspondante à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et —○— numériques : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). ■ Bandgaps théoriques.

de dispersion 2D, l'hypothèse de déformations planes adoptée rigidifie la structure, en empêchant toute déformation dans la troisième direction Z . Or, une raideur plus importante tend à augmenter la fréquence des modes structuraux. Il est donc logique que les bandgaps obtenus soient situés à des fréquences plus élevées que pour une structure de dimension finie selon Z . Un calcul de dispersion tridimensionnel pourrait donner des résultats plus précis. L'effet de bords de la structure finie est aussi à prendre en compte. Les frontières transversales libres de l'éprouvette rendent cette dernière plus souple qu'une structure de dimensions infinies, où chaque cellule est contrainte aux bords par la présence de cellules voisines.

Cependant cette explication n'explique pas la présence des antirésonances autour de 500Hz et 1400Hz . Concernant ces phénomènes, une piste peut être trouvée dans l'étude de la section 4.3.3. Celle-ci a montré qu'un état de compression élevé favorise l'ouverture de bandes interdites secondaires, notamment après flambement des ligaments. Ces bandes sont souvent situées à plus hautes fréquences par rapport au bandgap primaire, mais parfois aussi plus bas en fréquences. En prenant une valeur de précompression assez importante ($\epsilon = 14\%$), et en recalant les résultats de dispersion par rapport aux mesures, on obtient la figure 5.30. Le recalage consiste à compenser le raidissement observé sur les calculs de dispersion 2D par un module d'élasticité arbitraire plus faible.

Les résultats de la figure 5.30 montrent une corrélation forte entre les données recalées et les mesures. Les premier ($[519, 551]\text{Hz}$), deuxième ($[697, 1108]\text{Hz}$), et quatrième ($[1796, 1813]\text{Hz}$)

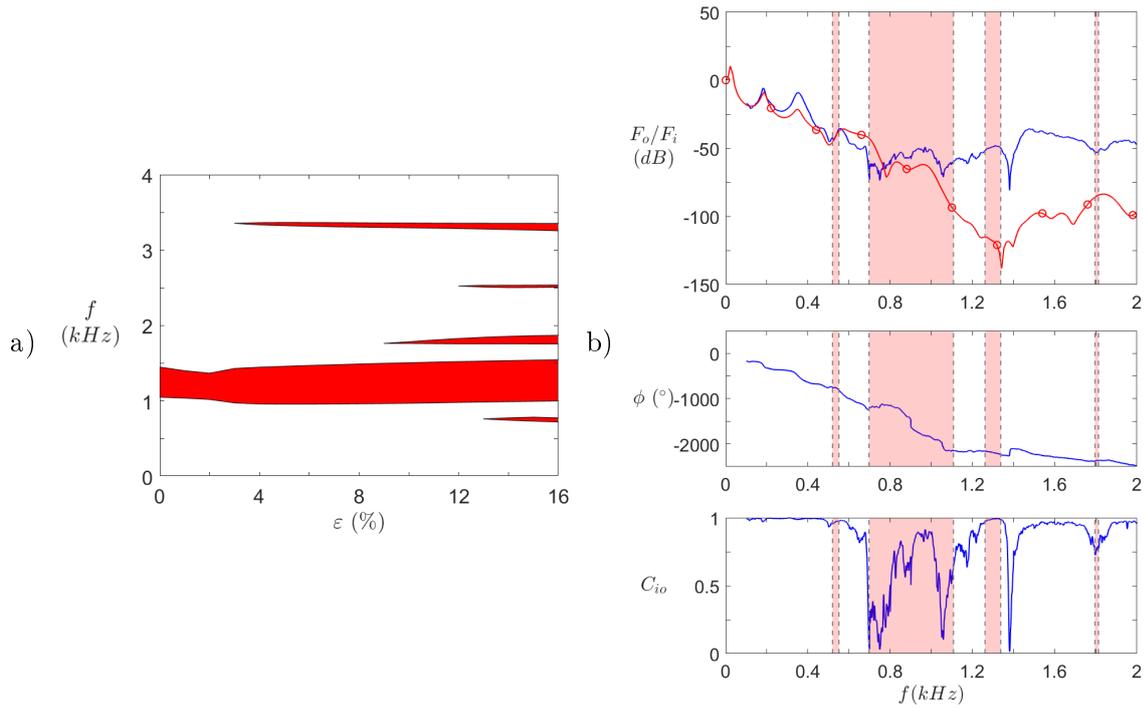


FIGURE 5.30 – a) ■ Bandgaps théoriques. b) Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques recalés pour l'éprouvette S_{03} , sous chargement statique m_0 . Résultats dynamiques — expérimentaux et — numériques recalés ($E' = 1.21E'_{d,silicone}$) : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). ■ Bandgaps recalés ($E' = 0.41E'_{d,silicone}$) obtenus pour $\varepsilon = 14\%$.

bandgaps sont précisément sur des plages de bas niveaux et de faibles cohérences. Quant au troisième, il est très proche d'une telle zone. Étant donnée l'influence de l'état de déformation sur la fréquence des bandgaps, une étude étendue de dispersion pour de grandes déformations pourrait mettre en lumière des états de déformation donnant des bandgaps encore mieux corrélés.

Un aspect primordial de ces résultats est la présence des bandgaps secondaires, car ces derniers sont associés à des états flambés de déformation. Or, le chargement m_0 choisi ici est beaucoup plus faible que la charge critique de flambement (figure 5.29a). Ces résultats indiquent donc que le flambement intervient ici de manière dynamique, alors même que le métamatériau conserve sa tenue statique. Cela implique que contrairement au concept ciblé lors de ce travail, le matériau ne nécessite pas d'être comprimé jusqu'à un point proche du plateau pour bénéficier des avantages de ce dernier en matière d'isolation vibratoire.

Les modes locaux sont donc susceptibles de générer des flambements dynamiques localisés qui induisent une perte de raideur et l'apparition d'une bande interdite. À la connaissance de l'auteur, c'est la première fois que ce phénomène est mis en évidence.

On peut émettre l'hypothèse que ce flambement dynamique n'intervient que pour les amplitudes importantes de signal. Ce phénomène dépendrait alors non-linéairement de l'amplitude des vibrations incidentes. Des calculs et des mesures complémentaires sont nécessaires pour

confronter cette hypothèse.

Finalement, ces résultats indiquent également une bonne corrélation des calculs 2D avec les mesures expérimentales, à condition de corriger la raideur.

5.4.4 Résultats S_{LR}

Finalement, une comparaison similaire est effectuée pour l'éprouvette S_{LR} . La figure 5.31a rappelle les résultats statiques pour cette éprouvette, avec le niveau de précompression en pointillés. Comme pour T_3 , on s'affranchit de l'effet de contact partiel observé sur la mesure de compression : le point de fonctionnement pour les calculs dynamiques se trouve donc à l'intersection de la courbe numérique (en noir) et du niveau de précompression (en pointillés).

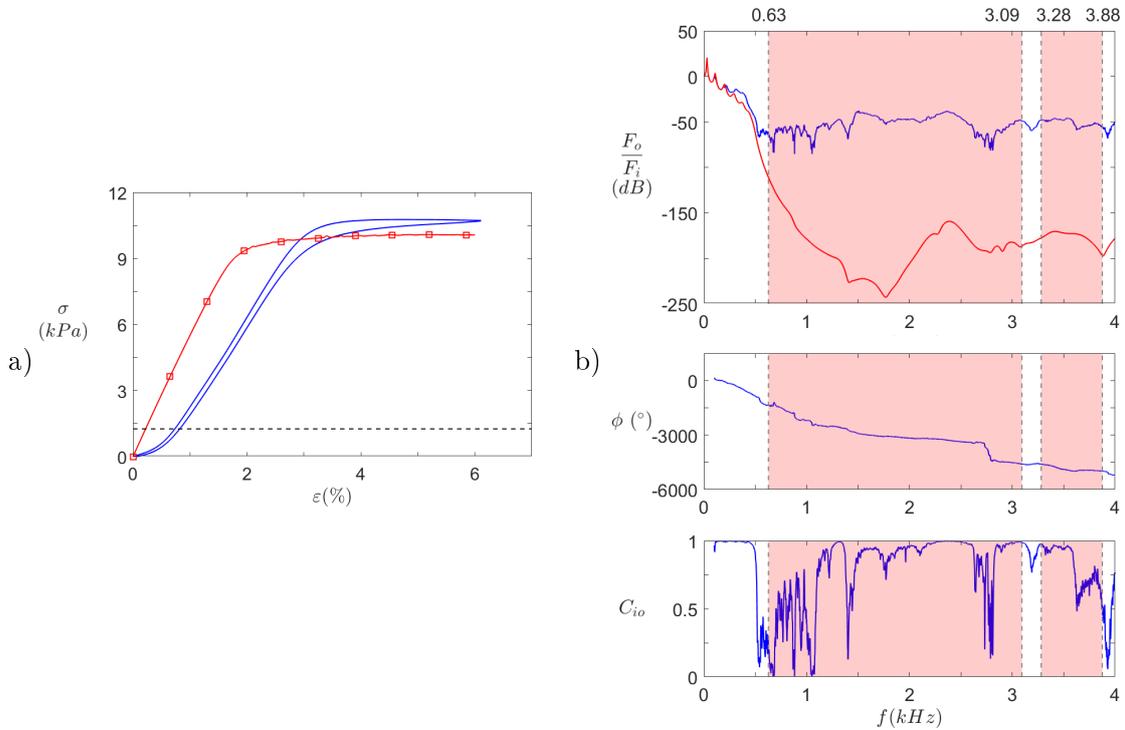


FIGURE 5.31 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette S_{LR} , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et —■— numérique. --- Contrainte de compression correspondant à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et —■— numériques : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). ■ Bandgaps théoriques.

Les résultats dynamiques de S_{LR} sont présentés sur la figure 5.31b. Ici la plage fréquentielle est étendue à $[0, 4]kHz$ afin de pouvoir observer les limites du bandgap primaire. En y ajoutant le bandgap secondaire, presque toutes les fréquences supérieures à $630Hz$ sont incluses dans un bandgap théorique. Or l'étude comparative menée au paragraphe 5.3.6 a montré que peu de différences apparaissent entre les performances mesurées de S_{03} et S_{LR} , tandis que les simulations (section 4.3.3) prédisent une amélioration importante des bandgaps obtenus par rapport à la géométrie S_0 . Ces deux aspects sont fortement contradictoires. Un recalage des données, similaire à l'analyse de S_{03} , est donc effectué pour vérifier la cohérence des bandgaps

théoriques.

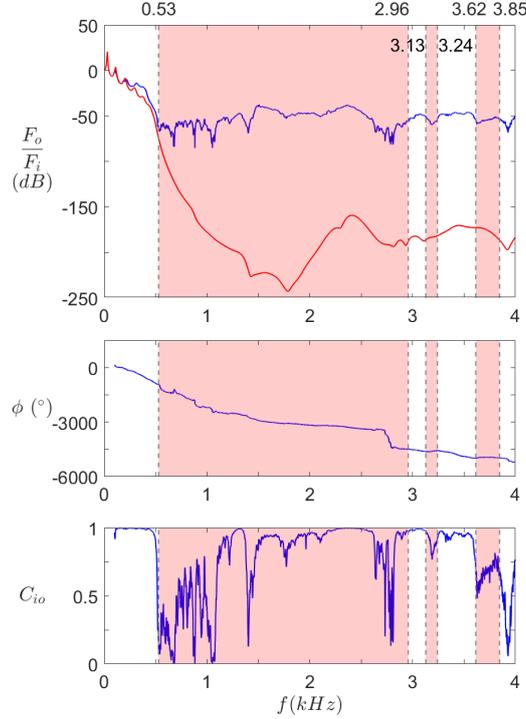


FIGURE 5.32 – Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques recalés pour l'éprouvette S_{LR} , sous chargement statique m_0 . Résultats dynamiques — expérimentaux et — numériques recalés ($E' = 1.01E'_{d,silicone}$) : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). ■ Bandgaps recalés ($E' = 0.8E'_{d,silicone}$) obtenus pour $\varepsilon = 9\%$.

La figure 5.32 montre de très bonnes corrélations pour les deuxième et troisième bandgaps, ainsi que pour les fréquences limites du premier. Cependant, une large plage fréquentielle à l'intérieur du bandgap primaire présente une bonne cohérence associée à des niveaux peu bruités de fonction de transfert. Mis à part les niveaux prédits par le calcul 3D, la corrélation essais-calculs des événements notables est satisfaisante pour l'éprouvette S_{LR} . On peut remarquer par exemple la bonne prédiction de l'antirésonance à $1450Hz$, ou encore la forte similitude des deux fonctions de transfert entre $2.4kHz$ et $4kHz$. Les incohérences entre les essais et les bandgaps prédits sont donc potentiellement causés par des modes transversaux selon Z . La propagation de ces modes pourrait ainsi diviser le bandgap primaire théorique en plusieurs bandgaps plus étroits, dont les plages approximatives seraient $[520, 1240]Hz$, $[1360, 2160]Hz$, et $[2620, 2840]Hz$.

Si les mesures effectuées sur l'éprouvette S_{LR} indiquent des performances d'isolation moins importantes que celles obtenues au chapitre 4, cette géométrie permet néanmoins la création d'un bandgap très large à basses fréquences.

5.5 Corrélation d'images et étude de modes

5.5.1 Corrélation d'images

La corrélation d'images est une méthode de mesure optique, ici bidimensionnelle, qui permet d'évaluer le déplacement de points sur une surface lors de la déformation de celle-ci. Cette méthode a l'avantage de ne pas être intrusive, et permet de mesurer l'ensemble de la surface simultanément. En revanche, la qualité des mesures dépend fortement de paramètres tels que les résolutions optiques et temporelles des caméras utilisées, la distance à la surface. Un autre inconvénient est le traitement numérique relativement long.

Avant toute mesure, un calibrage à l'aide d'un étalon spécial est nécessaire. Celui-ci consiste en une plaque crénelée noire, sur laquelle un réseau de points blancs est visible (voir figure 5.33a). En plaçant cet étalon sur la surface de mesure, les caméras mesurent la différence entre la position des points sur leurs images respectives. Étant donné que la position relative des points est connue, cette étape permet de calibrer la position relative des caméras par rapport à la surface à mesurer (figure 5.33b).

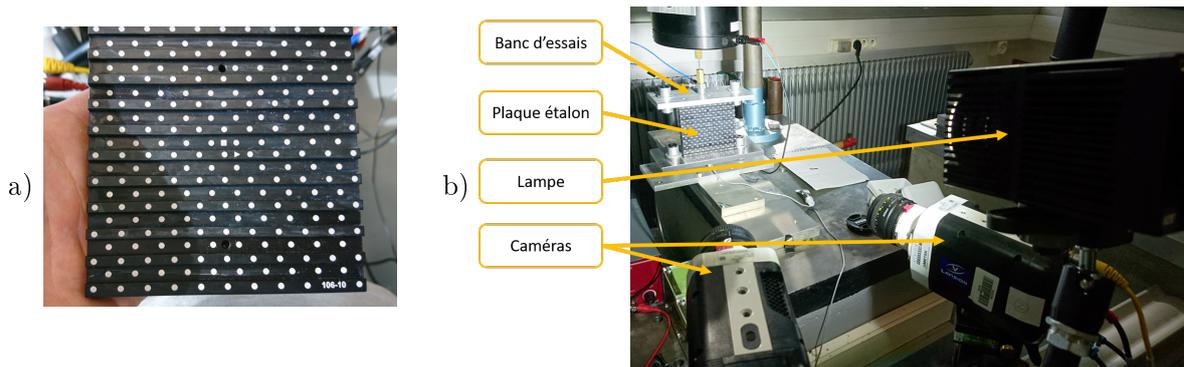


FIGURE 5.33 – a) Étalon pour la calibration des caméras, b) disposées devant le banc d'essais dynamiques.

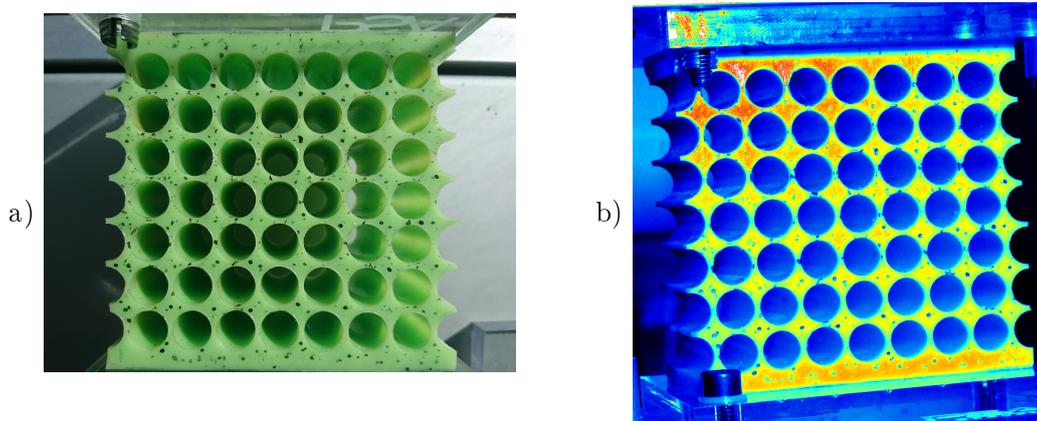


FIGURE 5.34 – a) Exemple de mouchetis sur l'éprouvette S_{03} et b) profil de luminosité capté par une caméra.

De plus, afin de faciliter la mesure des déplacements, la surface de l'échantillon doit être la plus contrastée possible. Pour cela, une technique classique est celle du mouchetage : un mouchetis irrégulier est appliqué sur la surface, ici à l'aide d'encre noire. De cette manière,

le logiciel sera plus précis lors du post traitement. La figure 5.34a montre un exemple de mouchetis appliqué sur l'éprouvette S_{03} . Le contraste octroyé par ce mouchetis est nettement visible par les caméras, comme l'illustre la figure 5.34b.

La géométrie de nos échantillons pose cependant problème pour l'application de la corrélation d'image. En effet, les zones de faible épaisseur au niveau des ligaments ne permettent pas un mouchetis suffisamment distinct, et le nombre de pixels en ces points est également très faible. En conséquence, les mesures de déformation des ligaments sont très incertaines, voire inexploitable ici.

Les caméras utilisées sont des Vision Research Phantom. Elles sont performantes pour des mesures jusqu'à $800Hz$. Cependant, pour des fréquences élevées, les déplacements sont si faibles qu'ils sont indécélables par les caméras. Dans ce travail, la fréquence maximale de mesure est donc limitée à $600Hz$. Seuls les échantillons en silicone (S_{LR} et S_{03}), riches en modes basses fréquences et présentant un bandgap inférieur à $600Hz$, sont ici testés.

Concernant les paramètres de mesure, les caméras sont placées à environ $30cm$ de l'éprouvette, et séparées de $20cm$. Une lampe placée au-dessus des caméras permet un éclairage optimal de l'éprouvette. Un trépied spécial supporte les caméras et la lampe, et permet d'ajuster le positionnement de ces dernières. Le logiciel utilisé pour le traitement des données de mesures est DaVis de la marque LaVision.

5.5.2 Étude de modes

Cette dernière section présente quelques résultats de la corrélation d'image, avec en parallèle les modes de déformation obtenus numériquement. Pour les raisons mentionnées précédemment, seuls les échantillons S_{LR} et S_{03} sont ici étudiés (cf paragraphe 5.5.1). De plus, on se contente ici de l'analyse des deux premiers modes du cas $m_s = m_0$.

Cette dernière section présente quelques résultats de la corrélation d'image, avec en parallèle les modes de déformation obtenus numériquement pour l'échantillon S_{LR} . En outre, on se contente ici de l'analyse des deux premiers modes du cas $m_s = m_0$.

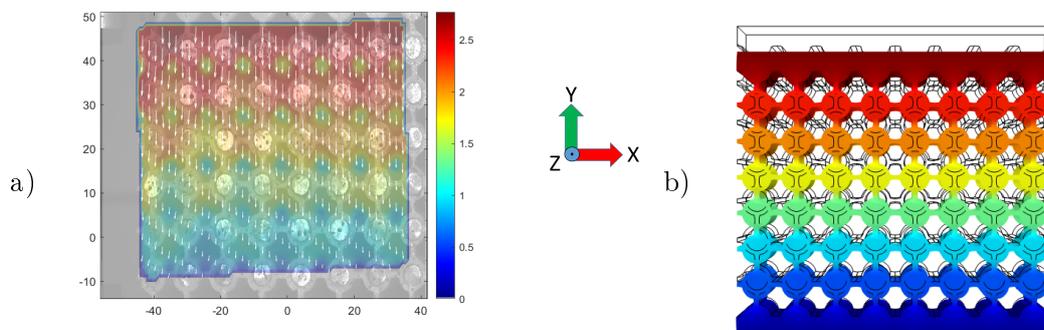


FIGURE 5.35 – Comparaison du mode de structure S_{LR} à $25Hz$ par a) corrélation d'image et b) par simulation.

La figure 5.35 montre les résultats obtenus pour le premier mode de S_{LR} situé à $25Hz$. Les mesures (figure 5.35a) sont plus difficiles à lire car les espaces vides ne sont pas retirés des résultats. Cependant, ils sont facilement repérables car leur déplacement affiché est faible par rapport aux points sur l'éprouvette. L'image de l'éprouvette en fond permet de le confirmer facilement. En excluant ces zones de vide, le profil de déplacement correspond parfaitement à celui obtenu par simulations (figure 5.35b). Ce mode correspond au premier mode de compression longitudinale. Il est facilement mesurable car son allure est simple et les amplitudes de déplacement sont grandes.

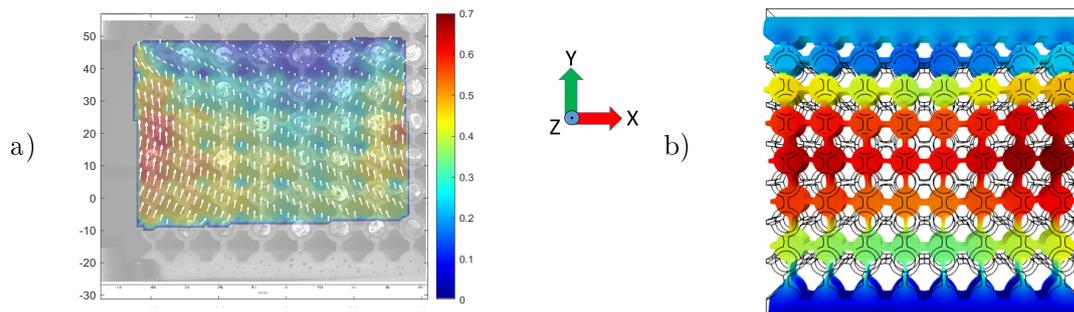


FIGURE 5.36 – Comparaison du mode de structure S_{LR} à $98Hz$ par a) corrélation d'image et b) par simulation.

Dès le mode suivant, la déformée est plus difficile à lire comme sur la figure 5.36a. Cependant, on observe une différence entre les points sur le bord gauche et ceux au milieu de l'éprouvette, autant en direction (flèches blanches) qu'en amplitude (couleur). Si les points du milieu sont globalement colinéaires (comme pour le mode à $25Hz$), les points à gauche présentent une courbure mise en évidence par les flèches blanches. Cette courbure suit celle obtenue par compression statique au-delà de la charge critique de flambage. On en déduit que pour ce mode, les cellules flambent légèrement. Par ailleurs la zone rouge à gauche des lignes centrales de l'éprouvette indique la zone où les déplacements sont le plus grands. Ce comportement est aussi obtenu par simulations (figure 5.36b) : les zones de plus grands déplacements (en rouge sombre) sont bien situées aux extrémités gauche et droite des lignes centrales. La courbure des faces latérales, bien que faible, est également présente. Au final, le mode est ici un mode de compression d'ordre 2, mais avec une composante transversale due au caractère auxétique de la structure. On remarquera que sur les résultats expérimentaux, les niveaux semblent beaucoup élevés à gauche car les points de la dernière colonne à droite n'ont pas été mesurés.

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse était de rechercher parmi les métamatériaux une solution permettant d'améliorer l'isolation des sources vibratoires automobiles. Après un état de l'art en matière de métamatériaux, plusieurs topologies ont été explorées, notamment les matériaux à résonateurs locaux et les architectures auxétiques. En définissant les propriétés cibles d'un système d'isolation idéal, les calculs de compression statique et de dispersion des ondes mécaniques ont permis de sélectionner une géométrie auxétique prometteuse sur la base de carrés rotatifs. De nombreuses simulations ont alors été réalisées afin de mieux comprendre le lien entre cette géométrie et les bandes interdites générées, et d'optimiser la réponse statique et vibroacoustique du matériau proposé. Enfin, des essais expérimentaux, complétés par des tests de caractérisation matériau, ont permis de mesurer les caractéristiques statiques et dynamiques d'éprouvettes fabriquées, et ainsi évaluer la corrélation entre essais et calculs. Ce travail s'est articulé autour d'étapes importantes, donnant ainsi lieu à plusieurs contributions notables.

- La première contribution porte sur le concept de résonateur flambé. Sur le type de système étudié, le niveau de précompression influe directement sur l'état du résonateur, notamment sur son flambage statique. L'effet majeur de cette précompression sur le couplage entre les modes de résonateur et les modes de structure est mis en évidence. Le mode de translation longitudinal du résonateur est particulièrement affecté, et sa fréquence de couplage avec le mode de compression longitudinal de la structure réceptrice varie fortement avec la précompression. Bien que des améliorations géométriques soient nécessaires pour obtenir un bandgap complet, des réglages adéquats du système pourraient ainsi générer une bande interdite à très basses fréquences.
- La deuxième contribution concerne l'optimisation multicritère de la géométrie à carrés rotatifs. Dans une certaine mesure, augmenter la taille de la partie "polygone" permet d'augmenter les performances dynamiques, telles que la largeur des bandgaps et leur fréquence inférieure, sans variation notable de la raideur statique. De plus l'ajout d'inclusions massiques dans les polygones améliore sensiblement les capacités d'isolation de la structure. Cette dernière architecture est la première proposition d'une géométrie alliant les effets du flambement des polygones rotatifs aux effets basses fréquences des résonateurs locaux et fait l'objet d'un brevet déposé par PSA Groupe. Les résultats dynamiques expérimentaux confirment que l'éprouvette à inclusions offre une bande interdite plus large et à plus basses fréquences qu'une éprouvette à carrés rotatifs de même volume et de raideur statique comparable, bien que la différence soit moindre que

celle prévue par les calculs. L'ensemble des calculs effectués posent les bases d'outils pour la conception de métamatériaux pour isolation vibratoire. Cela inclue les calculs de compression statique, les calculs de dispersion, et les calculs de transmission sur structures finies.

- La troisième contribution concerne les essais dynamiques et le banc associé. La conception de celui-ci a permis de mesurer l'effet de la précontrainte sur les résultats dynamiques d'éprouvettes fabriquées, notamment sur les premiers modes et sur les fréquences limites des plages de forte isolation vibratoire. De telles plages ont en effet été observées, indiquant la présence de bandes interdites. Dans la plupart des cas, les niveaux de transmission correspondants sont inférieurs au bruit de mesure et la valeur exacte de perte de transmission obtenue est impossible à déterminer. Les mesures ont également mis en lumière une chute de transmission à basses fréquence ($70Hz$) apparaissant pour les précontraintes les plus élevées des éprouvettes à base de silicone, indiquant ainsi une isolation accrue lorsque le système est fortement précontraint.
- Ce banc a finalement participé à la quatrième contribution de cette thèse, à savoir la mise en évidence de flambage des ligaments de la structure à carrés rotatifs sous sollicitation dynamique, malgré une précontrainte statique bien inférieure à la contrainte critique de flambement. Les mesures indiquent en effet l'apparition de bandgaps que les calculs de dispersion ne prédisent que pour des états de déformation importants où les ligaments sont largement flambés. Cela signifie que même dans un état de chargement statique non flambé, la sollicitation dynamique amène les ligaments à flamber, modifiant ainsi le comportement dynamique prévu par les calculs. C'est la première fois que ce phénomène fondamentalement non-linéaire est prouvé expérimentalement, et un article consacré à ces résultats sera publié prochainement.

Ces résultats sont prometteurs mais une étude plus approfondie est nécessaire pour mieux comprendre le fonctionnement de ce flambage dynamique. L'aspect non-linéaire est particulièrement important, et il peut être intéressant de vérifier si le phénomène dépend non-linéairement de l'amplitude. Pour ce niveau de mesure, l'amélioration du banc d'essais dynamiques est nécessaire. Un pot vibrant avec une force statique très importante pourrait ainsi permettre d'affiner la gamme d'efforts statiques atteignables, de réduire les opérations de montage et de démontage, et de s'affranchir de l'effet de la masse constaté ici. D'autre part, des géométries avec un plus grand nombre de bandes interdites, et avec de plus grandes variations de fréquences de ces dernières, pourraient étendre la compréhension du phénomène, en reliant plus précisément les données expérimentales et les calculs de dispersion. D'autre part, les champs de déformation statique étant fortement hétérogènes, il serait intéressant d'observer la contribution de chaque cellule aux bandgaps en fonction de sa position dans le matériau, et de vérifier si cette répartition est identique pour toutes les bandes interdites. Finalement, on notera que les mesures préliminaires de corrélation d'images n'ont pas donné de résultats satisfaisants jusqu'à présent, mais que des méthodes avancées de mesure optique, comme la déflectométrie, permettraient certainement d'observer directement le flambage dy-

namique.

Une autre perspective à développer concerne la corrélation essais-calculs. Des calculs de dispersion tridimensionnels seraient une première étape vers une meilleure prédiction des bandgaps expérimentaux. Le nombre de cellules joue également un rôle évident sur les résultats et il conviendrait d'en évaluer l'effet sur l'efficacité de l'isolation obtenue. Finalement, l'effet important des conditions aux limites de structures finies n'est pas négligeable, ce qui pousse à considérer l'élaboration d'un modèle homogénéisé. En particulier, les approches micromorphiques pourraient être une solution permettant la modélisation de ce type de matériaux.

En vue d'une implémentation industrielle, plusieurs problèmes restent à résoudre. D'une part, cette étude se focalise sur la propagation longitudinale des ondes dans le métamatériau. Des études similaires en cisaillement selon XY et selon YZ seraient utiles pour contrôler l'ensemble des vibrations réellement transmises. D'autre part, les éprouvettes dont la transmission vibratoire a été mesurée ici supportent peu de charge statique, et augmenter celle-ci tendra à faire également croître les fréquences des bandes interdites. Une application à basses fréquences et forte raideur statique semble donc difficile à réaliser. En prenant en considération les coefficients de sécurité du domaine automobile, il semble également difficile de dimensionner la pièce pour être très proche du plateau de raideur en toutes situations de fonctionnement. Des géométries avec une raideur de "plateau" moins faible (comme les rectangles rotatifs), ou avec un gradient, pourraient rendre le système plus robuste (voir figure 5.37).

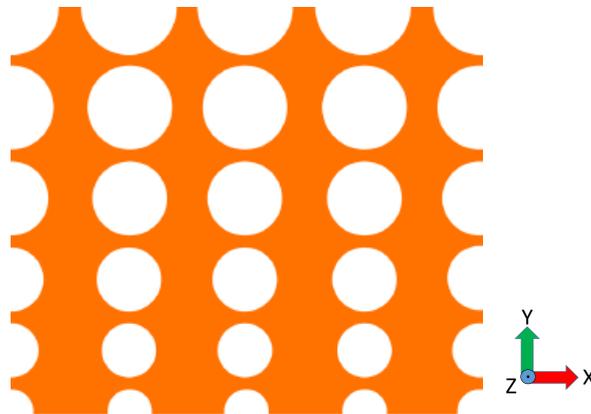


FIGURE 5.37 – Géométrie possible à polygones rotatifs à gradient. Ici l'épaisseur en Y des ligaments et la taille de chaque cellule en X sont constantes, mais le rayon des espaces vides et la dimension des cellule en Y varient selon leur position Y .

Liste des figures

1	Courbes de raideur de cales classiques d'isolation moteur pour les a) basses et b) moyennes fréquences. — Cale gauche, composante verticale, — cale droite, composante verticale, et — cale anticouple, composante longitudinale (repère véhicule).	21
1.1	Premiers métamatériaux électromagnétiques avec a) le réseau métallique [89], b) les SRR [116], et c) la lentille parfaite de Pendry [88].	25
1.2	Cape d'invisibilité électromagnétique de Schurig. a) Réseau de SRR à gradient constituant la cape. b) Champ électromagnétique théorique obtenu par simulations avec propriétés électromagnétiques idéales. Les ondes incidentes (venant de la gauche) sont très peu diffusées par la cape. Figures issues de [105].	26
1.3	Exemple de structures phononiques simples 1D (gauche), 2D (milieu) et 3D (droite). Issue de [70].	27
1.4	Concept de ligne de transmission acoustique permettant d'obtenir a) $\rho < 0$, b) $B < 0$, et c) $\rho < 0$ et $B < 0$ simultanément. Issu de [58].	28
1.5	Exemples de métamatériaux acoustiques. a) (A) Vue en coupe d'un résonateur de Liu <i>et al.</i> , cellule constitutive de leur (B) "cristal sonique" pour l'isolation acoustique [66]. b) Membranes pondérées comme métasurface absorbante [76]. c) Guidage d'ondes par un réseau de tubes enroulés. L'encart montre la microstructure agrandie de quelques cellules [62].	30
1.6	Exemples de métamatériaux mécaniques. a) Structure pentamode constituant une cape d'intouchabilité [15]. b) Cellule à masse résonante pour la protection sismique de bâtiments [55]. c) Essai d'absorption de choc lors d'une chute d'un métamatériau multistable avec un oeuf fixé dessus : l'oeuf se brise sur la structure de contrôle (à gauche) mais reste intact sur la structure multistable (à droite) [107].	31
1.7	Modèle de masse effective d'un système masse-ressort. a) Schéma. b) Comportement analytique fréquentiel de la masse effective et c) fonction de transfert du système.	32
1.8	Résonances d'un cylindre souple dans une matrice rigide, associées à des comportements a) dipolaire, b) quadrupolaire, et c) monopolaire. Les flèches indiquent la direction des déplacements, dont l'amplitude est représentée par la luminosité. Issu de [126].	33
1.9	Exemples de jouets auxétiques vendus par la société Hoberman : le "Twist'O™" (à gauche), et la "Transforming Sphere™" (à droite).	35

1.10	À gauche : géométrie et paramètres de cellules (a) hexagonal et (b) rééminente [73]. À droite : mécanisme d'articulation à l'origine du comportement auxétique : structure (a) initiale et (b) sous traction [87].	35
1.11	Résultats de l'optimisation topologique du coefficient de charge piézoélectrique $d_n^{(*)}$: a) bloc unitaire et représentations schématiques des faces b) 1-3 et c) 2-3. [114]	37
1.12	i) Motifs chiraux et anti-chiraux (a) Hexachiral ; (b) Trichiral ; (c) Antitrichiral ; (d) Tetrachiral ; (e) Antitetrachiral [4]. ii) Divers motifs méta-chiraux [44]	37
1.13	Poutre étudiée par Baravelli and Ruzzene, composée d'un cadre rigide (en vert), de motifs chiraux souples(en beige), et d'inclusions (en marron). Exemples de structures a) périodique et b) à gradient (de masse et de taille de cellule)[8].	38
1.14	Différentes géométries de type ligament manquant. a) Anti-chirale carré, b) chirale carré, et c) chirale losange. Issu de [36].	38
1.15	Mécanisme de base des carrés rotatifs. Configurations pour différents angles (45° , 30° , 15° , 0°)	39
1.16	Comportement mécanique en compression d'un motif unitaire. Configurations pour différentes valeurs de déformation (0%, 10%, 20%, $\approx 30\%$)	39
1.17	Réseaux périodiques de polygones rotatifs. Configurations initiales et déformées de réseaux 1) carré, 2) triangulaire, 3) trihexagonal, 4) rhombitrihexagonal (à gauche, issu de [112]), et réseaux de parallélogrammes (à droite, issu de [42]).	40
1.18	a) Les fractales naturelles du chou romanesco (Source :volodia.eklablog.com). b) Différents ordres hiérarchiques appliqués à une structure nid-d'abeille conventionnelle [80].	41
1.19	Classification des structures 2D auxétiques en étoiles [43], et cellule de Lakes (à droite) [56].	42
1.20	À gauche : structure d'une plaque composite à noyau auxétique [98]. À droite : structures nid-d'abeille à gradient [48].	43
1.21	Différents concepts d'inclusions : dans des cellules hexachirales (à gauche, [64]) et des cellules de type carré rotatif : dans la matière (au milieu, [27]) et dans les espaces vides (à droite, [120]).	43
1.22	Exemples de structures auxétiques tridimensionnelles. À gauche : motif réentrant : a) cellule unitaire et b) exemples de structures [16]. À droite : cubes rotatifs : a) cellule unitaire et b) exemple de structure [95].	44
1.23	Géométrie de type "egg rack" ou pliage de Miura. Issu de [104].	45
1.24	Mécanisme d'une Buckliball en compression (en haut, [110]). Exemple de Bucklicristal, formé à partir de Buckliballs en cuboactaèdre (en bas, [7]) : configurations initiale (à gauche) et déformée (à droite).	45
1.25	Démonstration de la synclasticité par des réseau en nid-d'abeille a) hexagonal et b) réentrant. Issu de [5].	46
1.26	Concept de stent auxétique constitué de carrés rotatifs [12].	48
1.27	Schémas des modes de propagation a) longitudinal et b) transversal. \longleftrightarrow Direction du mouvement des particules et \longrightarrow direction de propagation de l'onde.	48

1.28	L'arc-en-ciel, un bel exemple des propriétés dispersives de l'eau.	49
1.29	Différence entre vitesse de groupe et vitesse de phase en milieu dispersif	50
1.30	Représentation de la BZ et de l'IBZ pour une cellule unitaire 2D	51
1.31	Exemple de diagramme de dispersion avec bandes interdites ■ directionnelles et ■ omnidirectionnelles. w_{BG_1} désigne la largeur du premier bandgap omnidirectionnel.	52
1.32	Dénomination des frontières de la cellule périodique.	53
1.33	Diagrammes de bande de la branche OA de l'IBZ du motif S_0 précomprimé à hauteur de $\varepsilon = 10\%$ dans la direction Y , obtenus pour un temps de calcul de 90 secondes. ○ WFEM, ● SCOM, ◇ WFEM inverse, et × SCOM inverse.	57
1.34	Diagramme de bande pour la branche OA de l'IBZ, en considérant le motif S_0 en compression axiale (axe Y) $\varepsilon = 10\%$. ○ WFEM, ● SCOM, ◇ WFEM inverse, et × SCOM inverse. a) Diagrammes pour chaque méthode et b) comparaison pour les modes compris entre $680Hz$ et $780Hz$	58
2.1	Mise en évidence de l'effet Mullins. Courbes contrainte-déformation d'un caoutchouc synthétique (SBR) chargé au noir de carbone (50 PHR) soumis à une traction uniaxiale simple et à une traction uniaxiale cyclique avec déformation maximale croissante tous les 5 cycles (Issu de [30])	60
2.2	Illustration de l'application du principe d'équivalence temps-température (source : Techniques de l'ingénieur)	63
2.3	Machine de traction Instron 3365.	64
2.4	Dispositif pour les essais DMA.	64
2.5	Dimensions des éprouvettes de traction fabriquées. L'épaisseur en Z est de $4mm$. 66	
2.6	Cycles de traction du TPU. a) — 1 ^{er} , — 2 ^{ème} , — 3 ^{ème} , — 4 ^{ème} , et — 5 ^{ème} cycles pour chaque niveau de déformation ε_{max} (20%, 35%, et 50%). --- Courbe enveloppe extrapolée à partir des premiers cycles. b) Module d'élasticité E pour le dernier cycle - - - à $\varepsilon_{max} = 20\%$, - - - à $\varepsilon_{max} = 35\%$, et - - - à $\varepsilon_{max} = 50\%$. Les phases de traction de chaque cycle sont indiquées par des cercles. c) Évolution de l'énergie dissipée W_d au fil des cycles pour — 20%, — $\varepsilon_{max} = 35\%$, et — $\varepsilon_{max} = 50\%$	66
2.7	Balayage en température par DMA, à fréquence constante. Module de conservation E' à — 0.3Hz et à --- 30Hz. Facteur d'amortissement $\tan \delta$ à — 0.3Hz et à --- 30Hz.	68
2.8	Courbe du module de conservation E' pour les isothermes à —○— $-45^\circ C$ et —■— $-50^\circ C$	69
2.9	Comparaison des valeurs expérimentales de a_T du TPU avec les lois de type a) Arrhénius et b) WLF. ○ Valeurs expérimentales et — interpolations linéaires. 71	
2.10	Courbes maîtresses du TPU à $22^\circ C$ pour les modules de ● conservation et de ● perte, avec — leurs courbes d'interpolation respectives. a) Plage fréquentielle complète et b) agrandissement sur l'intervalle $[0, 2]kHz$	71
2.11	Courbes maîtresses du TPU à $22^\circ C$ du ● module de conservation et du ● facteur d'amortissement, avec leurs — courbes d'interpolation respectives. a) Plage fréquentielle complète et b) agrandissement sur l'intervalle $[0, 2]kHz$	72

2.12	a) Cycles de traction du TPU pour quatre niveaux de déformation : — 20%, — 35%, — 50%, et — 70%. b) Évolution de l'énergie dissipée W_d au fil des cycles pour - - - 20%, - - - 35%, - - - 50%, et - - - 70% de déformation maximale.	74
2.13	Dernier cycle de traction à 35% pour trois éprouvettes haltères en silicone. a) Courbes de contrainte pour — S_{H1} , — S_{H2} , et — S_{H3} . b) Modules d'élasticité des mêmes éprouvettes avec - - - leurs courbes d'interpolation respectives.	74
2.14	Balayage en température par DMA, à fréquence constante. a) Module de conservation E' à — 0.3Hz et à — 30Hz. Facteur d'amortissement $\tan \delta$ à - - - 0.3Hz et à - - - 30Hz.	75
2.15	Comparaison des valeurs expérimentales de a_T du silicone avec les lois de type a) Arrhénius et b) WLF. o Valeurs expérimentales et — interpolations linéaires.	75
2.16	Courbes maîtresses à 22°C du silicone. a) Module de conservation, b) module de perte, et c) facteur d'amortissement. • Données expérimentales et — courbes d'interpolation quadratique respectives.	76
3.1	Système de type M_0 . a) Poutre discrétisée (de section constante S) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.	79
3.2	Diagramme de dispersion - - - pour le matériau homogène non dispersif ω_{hom} et \square cas inhomogène ω_{inh} d'une chaîne M_0 .	81
3.3	Système de type $M_{\&}$. a) Poutre discrétisée (de section constante S) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.	81
3.4	Influence du contraste de propriétés entre les deux sous-systèmes d'une cellule de chaîne $M_{\&}$. Diagramme de dispersion : branches — acoustique et - - - optique pour les cas — $m_2/m_1 = 0.5$, — $m_2/m_1 = 1$, — $m_2/m_1 = 2$, et — $m_2/m_1 = 10$.	83
3.5	Diagramme de dispersion. Branches — acoustique et - - - optique de la chaîne $M_{\&}$, et comparaison avec \square le cas M_0 .	83
3.6	Système de type M_{ϵ} . a) Poutre discrétisée (de section constante S . La section et la longueur de l'inclusion sont respectivement S_2 et a_2 .) et b) représentation schématique par chaîne infinie de systèmes masse-ressort.	84
3.7	Influence du contraste de propriétés entre les deux sous-systèmes d'une cellule de chaîne M_{ϵ} . Diagramme de dispersion : branches — optique et - - - acoustique. a) $R_k = 1$ fixé et — $R_m = 1$, — $R_m = 2$, et — $R_m = 10$. b) $R_m = 1$ fixé et — $R_k = 1$, — $R_k = 2$, et — $R_k = 10$.	86
3.8	Masse effective en fonction de la fréquence pour une structure M_{ϵ} .	86
3.9	Géométrie de la poutre sans résonateurs : a) cellule unitaire, b) faces imposées en déplacement et c) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.	88
3.10	Diagramme de dispersion de la poutre seule (à gauche) : • WFEM et o WFEM inverse. Déformées des modes propres de la structure (à droite).	88
3.11	Géométrie de la poutre avec résonateurs : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.	89

3.12	En haut : diagramme de dispersion de la poutre avec résonateurs locaux. • WFEM et ◦ WFEM inverse. En bas : modes propres de la poutre avec résonateurs. Modes de structure : compression longitudinale (\mathcal{P}_0), torsion selon X (\mathcal{T}_X), cisaillement dans le plan (\mathcal{S}_{XY}), et cisaillement hors plan (\mathcal{S}_{XZ}). Modes de résonateur : translation selon X ($\mathcal{P}_{R,X}$), rotation selon Y ($\mathcal{T}_{R,Y}$), et translation selon Z ($\mathcal{P}_{R,Z}$).	90
3.13	Champs de contraintes (contrainte de Von Mises) des premiers modes de résonance du résonateur, et leur fréquence associée.	90
3.14	Géométrie de la poutre avec deux résonateurs identiques : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.	91
3.15	À gauche : diagramme de dispersion de la poutre avec 2 cellules à résonance locale identiques. • WFEM et ◦ WFEM inverse ; À droite : modes propres de la poutre avec résonateurs. Modes de structure : \mathcal{P}_0 , \mathcal{T}_X , \mathcal{S}_{XY} , et \mathcal{S}_{XZ} . Modes de résonateurs : $\mathcal{P}_{R,X}$, $\mathcal{P}_{R^o,X}$, $\mathcal{T}_{R,Y}$, $\mathcal{T}_{R^o,Y}$, $\mathcal{P}_{R,Z}$, et $\mathcal{P}_{R^o,Z}$	92
3.16	Géométrie de la poutre avec deux résonateurs en opposition : a) cellule unitaire (les numéros indiquent les faces imposées en déplacement) et b) structure multicellulaire. Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.	93
3.17	a) Diagramme de dispersion de la poutre avec 2 cellules à résonance locale en opposition. • WFEM et ◦ WFEM inverse ; b) Comparaison des diagramme de dispersion des 2 géométries précédentes (WFEM et WFEM inverse combinées). ◊ 2 cellules identiques ; • 2 Cellules en opposition. c) Modes propres de la poutre avec résonateurs en opposition. Modes de structure : \mathcal{P}_0 , \mathcal{T}_X , \mathcal{S}_{XY} , et \mathcal{S}_{XZ} . Modes de résonateurs : $\mathcal{P}_{R,X}$, $\mathcal{P}_{R^o,X}$, $\mathcal{T}_{R,Y}$, $\mathcal{T}_{R^o,Y}$, $\mathcal{P}_{R,Z}$, et $\mathcal{P}_{R^o,Z}$	94
3.18	Concept de cellule à résonateur flambé	95
3.19	Dimensions caractéristiques et étape de précompression d'une cellule périodique.	95
3.20	Exemple de poutre périodique constituée des cellules proposées ($dL/L = 0$). Le volume occupé par une cellule est indiqué en bleu.	96
3.21	Effet des contraintes internes. a) Diagramme de bande du motif S_0 sous compression axiale (axe Y , $\varepsilon = 10\%$) par WFEM directe. — Configuration initiale sans contraintes internes — et avec contraintes internes. b) Évolution des bandgaps omnidirectionnels inférieur à $2kHz$ en fonction de la déformation : ☒ Configuration initiale sans contraintes internes, ■ et avec contraintes internes. --- Module de Young effectif E selon l'axe longitudinal. Les résultats sont normalisés par la pulsation de Bragg $\omega_0 = \frac{2\pi}{2L_x} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$	97
3.22	— Courbe de la contrainte de compression latérale en fonction de la déformation sur une cellule, et --- déformation correspondant au point de bifurcation. Les schémas (en haut) indiquent l'état de déformation de l'abscisse correspondante.	98
3.23	Diagrammes de bandes pour deux états de compression différents : ◦ $\frac{dL}{L} = 0$ et • $\frac{dL}{L} = 3\%$. a) Résultats sur l'intervalle $[0, 1600]Hz$ et b) a) sur l'intervalle $[0, 300]Hz$. Les flèches indiquent le type de mode correspondant à chaque branche.	99

3.24	Modes propres de la cellule. Modes de structure : longitudinaux \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}'_0 , et transverses \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}'_0 . Modes de résonateur : longitudinal \mathcal{P}_R , torsion \mathcal{T}_R , et transverse \mathcal{S}_R	99
3.25	Diagrammes de bandes sur l'intervalle $[0, 160]Hz$ pour différents états de compression $\frac{dL}{L}$: ● 1%, ● 1.3%, ● 1.385%, ● 1.5%, et ● 3%. Les flèches indiquent le type de mode correspondant à chaque branche.	100
3.26	Géométrie auxétique proposée par Bertoldi <i>et al.</i> et la courbe de contrainte-déformation associée. Issue de [9].	102
3.27	Comportement mécanique en compression d'un motif unitaire. Configurations pour différentes valeurs de déformation (0%, 10%, 20%, \approx 30%)	103
3.28	Géométrie de type carrés rotatifs. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.	103
3.29	Comportement statique de carrés rotatifs en compression. — Contrainte effective σ et — module de Young effectif E suivant l'axe longitudinal Y	104
3.30	Comportement statique de carrés rotatifs en compression. -⊙- Plaque infinie - motif 2×2 cellules (Référence), -×- Plaque infinie - motif 10×10 cellules, -◇- Structure finie 10×10 - appuis plans (frontières B et T), et -⊞- Structure finie 10×10 - appuis encastés en X (frontières B et T). a) Courbes de contrainte-déformation. b) En haut : conditions aux frontières (⊞ appui plan, — encasté, et → déplacement imposé). En bas : états déformés ($\varepsilon = 6\%$) pour les trois structures 10×10	105
3.31	Variation fréquentielle des bandes interdites omnidirectionnelles en fonction de la déformation du métamatériau à carré rotatifs. ■ Bandgaps et — largeur w_{BG_1} du bandgap primaire	106
3.32	Géométrie de type parallélogrammes rotatifs. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.	107
3.33	Comparaison des cellules rhombiques et à carrés rotatifs. a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. -×- / -// $L_x = 9mm$, -⊙- / -⊞ $L_x = 10mm$ (Référence), et -⊞- / -■ $L_x = 11mm$	108
3.34	Comparaison des cellules rectangulaires de type R_y . a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. -⊙- / -⊞ $D_R = 0$ (Référence), -⊞- / -■ $D_R = 0.1$, et -×- / -// $D_R = 0.3$	109
3.35	Comparaison des cellules rectangulaires de type R_x ($D_R = 0.3$) et R_{xy} ($D_R = 0.2$). a) Contrainte effective statique σ en compression et b) diagrammes de bandes. -⊙- / -⊞ S_0 (Référence), -⊞- / -■ R_{xy} , et -×- / -// R_x	110
3.36	Géométrie de type antitetrachiral. a) Cellule unitaire et b) motif périodique.	111
3.37	Comparaison des cellules antitetrachirale et à carrés rotatifs. a) Comportement statique en compression : contrainte effective σ de la cellule -⊙- antitetrachirale et - - - à carrés rotatifs. b) Diagrammes de bandes des cellules ■ antitetrachirale et ■ à carrés rotatifs. — Largeur w_{BG_1} du premier bandgap pour la cellule antitetrachirale.	111
3.38	Dimensions caractéristiques a) du motif élémentaire choisi (ici $\theta = -20^\circ$), b) d'une cellule réentrante auxétique ($\theta = -20^\circ$) et c) d'une cellule hexagonale ($\theta = 30^\circ$). Les surfaces bleues correspondent à l'aire d'un motif élémentaire.	112

3.39	Courbes de contrainte-déformation de cellules réentrantées avec e_m constant, en fonction de l'angle de réentrance θ : — — — -30° , — — — -20° , — — — -10° , — — — 0° , — — — 10° , — — — 20° , et — — — 30°	113
3.40	Bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression de cellules réentrantées : a) $\theta = -30^\circ$, b) $\theta = -20^\circ$, c) $\theta = -10^\circ$, d) $\theta = \{0^\circ, 10^\circ\}$ (vides), e) $\theta = 20^\circ$, et f) $\theta = 30^\circ$. Les couleurs correspondent à celles de la figure 3.39.	114
3.41	Courbes de contrainte-déformation de cellules réentrantées avec la masse m constante, en fonction de l'angle de réentrance θ : — — — -30° , — — — -20° , — — — -10° , — — — 0° , — — — 10° , — — — 20° , et — — — 30°	115
3.42	Bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression de cellules réentrantées avec m constante : a) $\theta = \{-30^\circ, -20^\circ\}$ (vides), b) $\theta = -10^\circ$, c) $\theta = 0^\circ$, d) $\theta = 10^\circ$, e) $\theta = 20^\circ$, et f) $\theta = 30^\circ$. Les couleurs correspondent à celles de la figure 3.41.	116
3.43	Comparaison des différentes géométries auxétiques introduites, à masse et dimensions égales, en fonction de deux critères : a) la largeur du premier bandgap w_{BG_1} et b) la limite fréquentielle inférieure du premier bandgap f_{L,BG_1} . — — — Motif hexagonal ($\theta = 30^\circ$) ; — — — motif antitetra-chiral ; losanges rotatifs : — — — $L_x = 9mm$ et — — — $L_x = 11mm$; rectangles rotatifs R_y : — — — $D_R = 0.1$ et — — — $D_R = 0.3$; — — — rectangles rotatifs R_x ($D_R = 0.3$) ; — — — rectangles rotatifs R_{xy} ($D_R = 0.2$) ; et — — — carrés rotatifs S_0	117
4.1	Structure initiale S_0 : a) cellule unitaire et b) motif périodique.	119
4.2	Effet de l'épaisseur e sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ , b) Module de raideur équivalent E , c) bandgaps, et d) largeur w_{BG_1} du bandgap primaire. — — — $e = 0.9mm$, — — — $e = 1mm$ (S_0), et — — — $e = 1.1mm$	121
4.3	Effet de la longueur L sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ , b) Module de raideur équivalent E , c) bandgaps, et d) largeur w_{BG_1} du premier bandgap. — — — $L = 9mm$, — — — $L = 10mm$ (S_0), et — — — $L = 11mm$	123
4.4	Effet du facteur d'échelle F_s sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale σ et c) bandgaps. — — — $F_s = 1$ (S_0), et — — — $F_s = 2$	124
4.5	Effet de E , ρ , et ν sur les propriétés statiques et dynamiques de structures à carrés rotatifs. a) Contrainte nominale adimensionnée σ/σ_0 et b-d) bandgaps en fonction de la déformation. — — — Cas de référence S_0 ($E = E_{silicone}$, $\rho = \rho_{silicone}$, $\nu = \nu_{silicone}$), — — — $E = 10E_{silicone}$, — — — $\rho = 2\rho_{silicone}$, — — — $\nu = 0.3$, et — — — $\nu = 0.4$. Les propriétés non spécifiées sont égales à celles du cas de référence, et les fréquences sont adimensionnées par f_0	125
4.6	Comportement mécanique en compression a) du mécanisme théorique et b) d'un motif unitaire S_0	126
4.7	Exemple de géométrie modifiée avec ses dimensions caractéristiques : a. cellule unitaire, b. motif périodique, et c. motif à $\approx 30\%$ de déformation.	127

4.8	Effet du rayon R sur le comportement statique : (a) contrainte nominale σ et (b) contrainte nominale τ_σ normalisée par rapport à S_0 . $\text{---}\ominus\text{---}$ Cas S_0 , $\text{---}\boxminus\text{---}$ $R = 3mm$, $\text{---}\diamond\text{---}$ $R = 3.5mm$, $\text{---}\times\text{---}$ $R = 4mm$, $\text{---}\nabla\text{---}$ $R = 4.5mm$. (c) --- Valeur maximale de la contrainte nominale normalisée en fonction de la masse ajoutée m_+ . $\text{---}\text{---}$ Seuil arbitraire de 10%.	129
4.9	Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression pour trois géométries choisies : S_0 , $R = 3.25mm$, et $R = 4.25mm$. \blacksquare Bandgaps et --- largeur w_{BG_1} du premier bandgap	130
4.10	Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la masse ajoutée pour trois états de précompression : $\varepsilon = 0\%$, $\varepsilon = 2\%$, et $\varepsilon = 10\%$. \blacksquare Bandgaps et --- largeur w_{BG_1} du premier bandgap.	132
4.11	Résultats d'optimisation pour trois critères : w_{BG_1} (haut), $w_{BG,t}$ (centre), and f_{L,BG_1} (bas). \blacksquare Optimum pour chaque état de déformation, comparé au \square cas de référence S_0 .	133
4.12	Géométrie avec inclusions S_R et ses dimensions caractéristiques : a. cellule unitaire, b. motif périodique, et c. motif à $\approx 30\%$ de déformation.	135
4.13	Effet du rayon R_i de l'inclusion sur le comportement statique : (a) contrainte nominale σ et (b) taux de variation τ_σ de la contrainte nominale par rapport à S_0 . $\text{---}\ominus\text{---}$ S_0 , $\text{---}\boxminus\text{---}$ $R_i = 0mm$ (S_E), $\text{---}\diamond\text{---}$ $R_i = 1mm$, $\text{---}\times\text{---}$ $R_i = 2mm$, $\text{---}\nabla\text{---}$ $R_i = 3mm$.	137
4.14	Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la précompression pour trois géométries à inclusions choisies : $R_i = 0mm$ (S_E), $R_i = 1.5mm$, et $R_i = 3mm$. \blacksquare Bandgaps et --- largeur w_{BG_1} du premier bandgap	138
4.15	Évolution des bandgaps omnidirectionnels en fonction de la masse ajoutée pour trois états de précompression. \blacksquare Bandgaps et --- largeur w_{BG_1} du bandgap primaire.	139
4.16	Comparaison pour trois géométries différentes de trois critères : w_{BG_1} (en haut), $w_{BG,t}$ (au centre), et f_{L,BG_1} (en bas). $\text{---}\ominus\text{---}$ Géométrie de référence S_0 , $\text{---}\boxminus\text{---}$ géométrie améliorée S_E ($R_o = 4.2mm$), et $\text{---}\diamond\text{---}$ géométrie à inclusions ($R_o = 4.2mm$, $R_i = 3mm$).	140
4.17	Structures finies composées de 8x7 cellules S_0 avec des conditions a) libres (S_0^L) ou b) encastées (S_0^E) en X sur les frontières supérieure et inférieure.	141
4.18	Structures finies tridimensionnelles extrudées à partir des géométries a) S_0^L et b) S_0^E .	141
4.19	Dénomination des frontières des échantillons tridimensionnels.	142
4.20	Résultats numériques de compression statique. $\text{---}\ominus\text{---}$ Plaque infinie 2D, $\text{---}\times\text{---}$ S_0^L 2D, et $\text{---}\times\text{---}$ S_0^E 2D, $\text{---}\boxminus\text{---}$ S_0^L 3D, et $\text{---}\boxminus\text{---}$ S_0^E 3D.	142
4.21	Résultats numériques dynamiques pour a) $\varepsilon = 0$ et b) $\varepsilon = 6\%$. $\text{---}\times\text{---}$ S_0^L 2D, et $\text{---}\times\text{---}$ S_0^E 2D, $\text{---}\boxminus\text{---}$ S_0^L 3D, et $\text{---}\boxminus\text{---}$ S_0^E 3D et \blacksquare bandgap théorique.	143
5.1	Dimensions caractéristiques des géométries étudiées. Cellules unitaires à vides a) circulaires ou b) ovalisés, et c) à inclusions. D) Structure multicellulaire (ici $N_x = 8$ et $N_y = 7$). Pour l'ensemble des géométries, l'épaisseur e_b vaut $5mm$.	146
5.2	Échantillons testés.	147

5.3	Imprimante 3D Ultimaker 3 mise à disposition par le Fablab de l'École Centrale de Lyon.	148
5.4	Échec de moulage en silicone, pour cause de bulles d'air emprisonnées lors du remplissage.	150
5.5	Moule en aluminium a) assemblé et b) démonté, pour la fabrication d'éprouvettes de type S_0	150
5.6	a) Moule en ABS pour la fabrication d'éprouvettes de type S_{LR} . b) Matrice en silicone moulé d'une éprouvette S_{LR}	151
5.7	Banc de traction-compression utilisé avec les plateaux de compression --- supérieur --- inférieur. Seul le plateau supérieur est mobile.	152
5.8	Étapes de correction des données de compression statique pour compenser le jeu de la machine d'essai : a) — données initiales, b) application de la correction, puis c) interpolation des données corrigées. ● Données corrigées et — courbe d'interpolation.	152
5.9	Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_0 . a) Cycles successifs à environ — 3%, — 6.5%, et — 10% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	153
5.10	Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_1 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	153
5.11	Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_2 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	154
5.12	Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette T_3 . a) Cycles successifs à environ — 5%, — 10%, et — 15% de déformation, et b) — dernier cycle de chaque niveau (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	154
5.13	Résultats des essais de compression quasi-statique pour les éprouvettes — S_{01} , — S_{02} , et — S_{03} . a) 5 cycles successifs à environ 6%, et b) — dernier cycle de chaque éprouvette (en haut) avec --- le module d'élasticité équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	155
5.14	Résultats des essais de compression quasi-statique pour l'éprouvette S_{LR} . a) — 5 cycles successifs à environ 6%, et b) — dernier cycle de chaque éprouvette (en haut) avec --- le module de raideur équivalent associé (en bas). Les phases de compression sont indiquées par les cercles.	156

5.15	Résultats de la compression statique pour les échantillons en TPU : a) T_0 , T_1 , T_2 , et T_3 . Comparaison des    données expérimentales à trois niveaux d'amplitude différents et des résultats numériques avec l'épaisseur e  théorique et  mesurée numériques de l'échantillon S_{LR}	157
5.16	Résultats de la compression statique pour les échantillons en silicone. a) Comparaison des données expérimentales  S_{01} ,  S_{02} ,  S_{03} , et  numériques des échantillons S_0 . b) Comparaison des données  expérimentales et  numériques de l'échantillon S_{LR}	158
5.17	Banc d'essais pour la mesure d'isolation vibratoire.	158
5.18	Plaques a) supérieure (avec inserts métalliques) et b) inférieure, fabriquées en PMMA par découpe laser et c) collées sur les échantillons à tester en dynamique. Les masses des plaques supérieure et inférieure sont, respectivement, 87.7g et 86.7g.	159
5.19	Résultats des essais sur l'éprouvette T_3 en fonction de la masse appliquée : a)  niveaux de chargement par rapport à la  compression statique et b) fonctions de transfert des cas  m_0 ,  m_{02} ,  m_{01234} , et  m_{01356}	161
5.20	Résultats des essais sur l'éprouvette T_3 en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet et b) premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas). Cas  m_0 ,  m_{02} ,  m_{01234} , et  m_{01356}	162
5.21	Niveaux de chargement par rapport à la  compression statique de l'éprouvette S_{03} , pour les cas  m_0 ,  m_{01} ,  m_{012} , et  m_{023}	163
5.22	Résultats des essais sur l'éprouvette S_{03} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet. L'encart est un agrandissement d'une antirésonance basses fréquences. b) Premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas). Cas  m_0 ,  m_{01} ,  m_{012} , et  m_{023}	164
5.23	Niveaux de chargement par rapport à la  compression statique de l'éprouvette S_{LR} , pour les cas  m_0 ,  m_{01} ,  m_{012} , et  m_{023}	165
5.24	Résultats des essais sur l'éprouvette S_{LR} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Domaine fréquentiel complet et b) premier mode de compression observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas).  m_0 ,  m_{01} ,  m_{012} , et  m_{023}	165
5.25	Résultats des essais sur l'éprouvette S_{LR} en fonction de la masse appliquée m_s . a) Troisième mode observé, en s'affranchissant de l'effet de la masse statique ajoutée. Fonctions de transfert (en haut), phase ϕ (au milieu), et cohérence C_{io} (en bas).  m_0 ,  m_{01} ,  m_{012} , et  m_{023} . b) Déformée modale correspondante (210Hz).	166
5.26	Comparaison des mesures sur  S_{03} et  S_{LR} pour une masse m_{01} : fonction de transfert (à gauche), phase ϕ (à droite en haut), et cohérence C_{io} (à droite en bas).	167

5.27	Dénomination des frontières des échantillons tridimensionnels.	168
5.28	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette T_3 , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et $\text{---}\square\text{---}$ numérique. --- Contrainte de compression correspondante à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et --- numériques : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). --- Inertance mesurée. c) \blacksquare Bandgap théorique.	169
5.29	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette S_{03} , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et $\text{---}\square\text{---}$ numérique. --- Contrainte de compression correspondante à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et $\text{---}\circ\text{---}$ numériques : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). \blacksquare Bandgaps théoriques.	171
5.30	a) \blacksquare Bandgaps théoriques. b) Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques recalés pour l'éprouvette S_{03} , sous chargement statique m_0 . Résultats dynamiques — expérimentaux et --- numériques recalés ($E' = 1.21E'_{d,silicone}$) : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). \blacksquare Bandgaps recalés ($E' = 0.41E'_{d,silicone}$) obtenus pour $\varepsilon = 14\%$	172
5.31	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques pour l'éprouvette S_{LR} , sous chargement statique m_0 . a) Courbes de compression statique — expérimentale et $\text{---}\square\text{---}$ numérique. --- Contrainte de compression correspondante à m_0 . b) Résultats dynamiques — expérimentaux et --- numériques : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). \blacksquare Bandgaps théoriques.	173
5.32	Comparaison des données expérimentales et des résultats numériques recalés pour l'éprouvette S_{LR} , sous chargement statique m_0 . Résultats dynamiques — expérimentaux et --- numériques recalés ($E' = 1.01E'_{d,silicone}$) : fonction de transfert (en haut), phase (au milieu), et cohérence (en bas). \blacksquare Bandgaps recalés ($E' = 0.8E'_{d,silicone}$) obtenus pour $\varepsilon = 9\%$	174
5.33	a) Étalon pour la calibration des caméras, b) disposées devant le banc d'essais dynamiques.	175
5.34	a) Exemple de mouchetis sur l'éprouvette S_{03} et b) profil de luminosité capté par une caméra.	175
5.35	Comparaison du mode de structure S_{LR} à $25Hz$ par a) corrélation d'image et b) par simulation.	176
5.36	Comparaison du mode de structure S_{LR} à $98Hz$ par a) corrélation d'image et b) par simulation.	177
5.37	Géométrie possible à polygones rotatifs à gradient. Ici l'épaisseur en Y des ligaments et la taille de chaque cellule en X sont constantes, mais le rayon des espaces vides et la dimension des cellule en Y varient selon leur position Y	181
B.1	Propriétés de différents silicones moulés de la marque Zhermack.	V
C.1	Représentation schématique d'une chaîne infinie de systèmes masse-ressort-amortisseur de type M_0	VII

C.2	Représentation schématique d'une chaîne infinie de type $M_{\&}$	IX
C.3	Représentation schématique d'une chaîne infinie de type M_{ϵ}	XI
D.1	Dimensions caractéristiques a) du motif élémentaire choisi (ici $\theta = -20^\circ$), b) d'une cellule réentrante auxétique ($\theta = -20^\circ$) et c) d'une cellule hexagonale ($\theta = 30^\circ$). Les surfaces bleues correspondent à l'aire d'un motif élémentaire. . .	XIII

Liste des tableaux

2.1	Propriétés données par le fabricant du TPU utilisé.	65
2.2	Facteurs de translation thermique a_t pour la détermination de la courbe maîtresse du TPU à 22°C	70
2.3	Propriétés obtenues pour le TPU utilisé.	73
2.4	Propriétés du silicone données par [8]. α et β sont les coefficients d'amortissement de Rayleigh.	73
2.5	Facteurs de translation thermique a_t pour la détermination de la courbe maîtresse du silicone à 22°C	76
2.6	Propriétés obtenues pour l'élastomère silicone utilisé.	77
3.1	Synthèse analytique de structures masse-et-masse sans amortissement	82
3.2	Synthèse analytique de structures M_ϵ sans amortissement : I) équations générales et II) fréquences limites	85
3.3	Propriétés des matériaux utilisés pour le modèle de poutre. La couleur indiquée est celle utilisée sur les images des géométries.	88
3.4	Définition des parallélogrammes étudiés	107
3.5	Géométries réentrantes à épaisseur constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent aux champs de contrainte de Von Mises à $\epsilon = 10\%$	113
3.6	Géométries réentrantes à masse constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent aux champs de contrainte de Von Mises à $\epsilon = 10\%$	115
4.1	Propriétés des matériaux utilisés.	120
4.2	Correspondances entre le rayon R , la masse m de la cellule, et m_+ le rapport de masse ajoutée par rapport à S_0 . La première ligne correspond à S_0	128
4.3	Valeurs optimales en fonction des critères.	134
4.4	Correspondances entre le rayon R_i , la masse m_R de l'inclusion, m la masse totale d'une cellule, et $m_+ = (m - m_{S_0})/m_{S_0}$ le rapport de masse ajoutée par rapport à S_0	136
5.1	Dimensions caractéristiques des huit éprouvettes testées. Toutes les longueurs (L_x , L_y , e , h_z , R_o , R_i) sont exprimées en millimètres. *Les espaces vides de l'éprouvette T_2 sont ovales et possèdent donc deux demi-axes r_x et r_y selon X et Y , respectivement.	146

5.2	Dimensions mesurées sur les éprouvettes.	147
5.3	Table des masses disponibles pour la précontrainte des échantillons.	159
C.1	Synthèse analytique de structures masse-et-masse sans amortissement	X
C.2	Synthèse analytique de structures masse-en-masse sans amortissement : équations générales	XII
C.3	Synthèse analytique de structures masse-en-masse sans amortissement : fréquences limites	XII
D.1	Géométries réentrantes à épaisseur constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent à $\varepsilon = 10\%$	XIV
D.2	Géométries réentrantes à masse constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent à $\varepsilon = 10\%$	XVI
E.1	Paramètres recommandés d'impression 3D du TPU.	XVIII

Bibliographie

- [1] L Airoidi and M Ruzzene. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, 13(11) :113010, 2011. [33](#)
- [2] A Alderson and KE Evans. Microstructural modelling of auxetic microporous polymers. *Journal of materials science*, 30(13) :3319–3332, 1995. [43](#)
- [3] Alderson Alderson and KL Alderson. Auxetic materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 221(4) :565–575, 2007. [34](#), [46](#)
- [4] Andrew Alderson, Kim L Alderson, Daphne Attard, Kenneth E Evans, Ruben Gatt, Joseph N Grima, W Miller, N Ravirala, CW Smith, and K Zied. Elastic constants of 3-, 4-and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70(7) :1042–1048, 2010. [37](#), [184](#)
- [5] Andy Alderson and Kim Alderson. Expanding materials and applications : exploiting auxetic textiles. *Technical textiles international*, 14(6) :29–34, 2005. [46](#), [47](#), [184](#)
- [6] Overvelde J. T. B, Shan S, and Bertoldi K. Compaction Through Buckling in 2d Periodic, Soft and Porous Structures : Effect of Pore Shape. *Advanced Materials*, 24(17) :2337–2342, 2012. [40](#)
- [7] Sahab Babaee, Jongmin Shim, James C Weaver, Elizabeth R Chen, Nikita Patel, and Katia Bertoldi. 3d soft metamaterials with negative poisson’s ratio. *Advanced Materials*, 25(36) :5044–5049, 2013. [45](#), [184](#)
- [8] Emanuele Baravelli and Massimo Ruzzene. Internally resonating lattices for band-gap generation and low-frequency vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25) :6562–6579, 2013. [38](#), [42](#), [43](#), [73](#), [184](#), [195](#)
- [9] Katia Bertoldi and MC Boyce. Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures. *Physical Review B*, 77(5) :052105, 2008. [39](#), [94](#), [102](#), [188](#)
- [10] Katia Bertoldi, Vincenzo Vitelli, Johan Christensen, and Martin van Hecke. Flexible mechanical metamaterials. *Nature Reviews Materials*, 2(11) :17066, 2017. [94](#), [101](#)
- [11] A Bezazi, W Boukharouba, and F Scarpa. Mechanical properties of auxetic carbon/epoxy composites : static and cyclic fatigue behaviour. *physica status solidi (b)*, 246(9) :2102–2110, 2009. [47](#)

- [12] SK Bhullar, Farid Ahmed, Junghyuk Ko, and Martin Jun. Design and fabrication of stent with negative poisson's ratio. *Int J Mech Ind Sci Eng*, 8(2) :213–4, 2014. [39](#), [47](#), [48](#), [184](#)
- [13] Kevin Billon, Morvan Ouisse, Emeline Sadoulet-Reboul, and Manuel Collet. Outils numériques pour la simulation de propagation d'ondes dans les structures périodiques amorties. *S20 Mécanique et conception de matériaux architecturés et de métamatériaux*, 2015. [56](#)
- [14] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal lattices*. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1946. [50](#), [80](#), [82](#)
- [15] T Bückmann, M Thiel, M Kadic, R Schittny, and M Wegener. An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials. *Nature communications*, 5 :4130, 2014. [31](#), [183](#)
- [16] Tiemo Bückmann, Nicolas Stenger, Muamer Kadic, Johannes Kaschke, Andreas Frölich, Tobias Kennerknecht, Christoph Eberl, Michael Thiel, and Martin Wegener. Tailored 3d mechanical metamaterials made by dip-in direct-laser-writing optical lithography. *Advanced Materials*, 24(20) :2710–2714, 2012. [44](#), [184](#)
- [17] Xiaobing Cai, Qiuquan Guo, Gengkai Hu, and Jun Yang. Ultrathin low-frequency sound absorbing panels based on coplanar spiral tubes or coplanar helmholtz resonators. *Applied Physics Letters*, 105(12) :121901, 2014. [29](#)
- [18] Vitor Hugo Carneiro, José Meireles, and Hélder Puga. Auxetic materials—a review. *Materials Science-Poland*, 31(4) :561–571, 2013. [46](#)
- [19] A Carrella, MJ Brennan, TP Waters, and V Lopes Jr. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 55(1) :22–29, 2012. [30](#)
- [20] Filippo Casadei, Tommaso Delpero, Andrea Bergamini, Paolo Ermanni, and Massimo Ruzzene. Piezoelectric resonator arrays for tunable acoustic waveguides and metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 112(6) :064902, 2012. [33](#)
- [21] I Chekkal, M Bianchi, C Remillat, F-X Becot, L Jaouen, and F Scarpa. Vibro-acoustic properties of auxetic open cell foam : model and experimental results. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(2) :266–274, 2010. [47](#)
- [22] Tian Chen, Osama R Bilal, Kristina Shea, and Chiara Daraio. Harnessing bistability for directional propulsion of soft, untethered robots. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(22) :5698–5702, 2018. [33](#)
- [23] JB Choi and RS Lakes. Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio : experiment and analysis. *International Journal of fracture*, 80(1) :73–83, 1996. [47](#)
- [24] Johan Christensen, Muamer Kadic, Oliver Kraft, and Martin Wegener. Vibrant times for mechanical metamaterials. *Mrs Communications*, 5(3) :453–462, 2015. [33](#)

- [25] Dimitrios Chronopoulos, I Antoniadis, M Collet, and M Ichchou. Enhancement of wave damping within metamaterials having embedded negative stiffness inclusions. *Wave Motion*, 58 :165–179, 2015. [30](#)
- [26] Manuel Collet, Morvan Ouisse, Massimo Ruzzene, and MN Ichchou. Floquet–bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20) :2837–2848, 2011. [52](#), [55](#), [56](#)
- [27] Shichao Cui and Ryan L Harne. Tailoring broadband acoustic energy suppression characteristics of double porosity metamaterials with compression constraints and mass inclusions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(6) :4715–4726, 2017. [43](#), [44](#), [134](#), [184](#)
- [28] Steven A Cummer, Johan Christensen, and Andrea Alù. Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nature Reviews Materials*, 1 :16001, 2016. [23](#), [29](#)
- [29] B Deng, JR Raney, Vincent Tournat, and K Bertoldi. Elastic vector solitons in soft architected materials. *Physical review letters*, 118(20) :204102, 2017. [44](#)
- [30] Julie Diani, Bruno Fayolle, and Pierre Gilormini. A review on the Mullins effect. *European Polymer Journal*, 45(3) :601 – 612, 2009. [60](#), [185](#)
- [31] Yiqun Ding, Zhengyou Liu, Chunyin Qiu, and Jing Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :093904, Aug 2007. [32](#)
- [32] William Jacob Dolla, Brian A Fricke, and Bryan R Becker. Structural and drug diffusion models of conventional and auxetic drug-eluting stents. *Journal of Medical Devices*, 1(1) :47–55, 2007. [47](#)
- [33] Liang Dong and Roderic Lakes. Advanced damper with high stiffness and high hysteresis damping based on negative structural stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 50(14-15) :2416–2423, 2013. [30](#)
- [34] JP Donoghue, KL Alderson, and KE Evans. The fracture toughness of composite laminates with a negative poisson’s ratio. *physica status solidi (b)*, 246(9) :2011–2017, 2009. [47](#)
- [35] Olly Duncan, Todd Shepherd, Charlotte Moroney, Leon Foster, Praburaj Venkatraman, Keith Winwood, Tom Allen, and Andrew Alderson. Review of auxetic materials for sports applications : Expanding options in comfort and protection. *Applied Sciences*, 8(6) :941, 2018. [46](#)
- [36] Juan Carlos Álvarez Elipe and Andrés Díaz Lantada. Comparative study of auxetic geometries by means of computer-aided design and engineering. *Smart Materials and Structures*, 21(10) :105004, 2012. [38](#), [44](#), [184](#)

- [37] Tolga Ergin, Nicolas Stenger, Patrice Brenner, John B Pendry, and Martin Wegener. Three-dimensional invisibility cloak at optical wavelengths. *science*, 328(5976) :337–339, 2010. [26](#)
- [38] Kenneth E Evans, MA Nkansah, IJ Hutchinson, and SC Rogers. Molecular network design. *Nature*, 353(6340) :124, 1991. [34](#)
- [39] Bryan N. Farris and Petre Gheorghian. Upper for an article of footwear with auxetic configuration, 2017. [46](#)
- [40] Tobias Frenzel, Claudio Findeisen, Muamer Kadic, Peter Gumbsch, and Martin Wegener. Tailored buckling microlattices as reusable light-weight shock absorbers. *Advanced Materials*, 28(28) :5865–5870, 2016. [33](#), [94](#)
- [41] Ruben Gatt, Luke Mizzi, Joseph I Azzopardi, Keith M Azzopardi, Daphne Attard, Aaron Casha, Joseph Briffa, and Joseph N Grima. Hierarchical auxetic mechanical metamaterials. *Scientific reports*, 5 :8395, 2015. [41](#)
- [42] Joseph N Grima, Pierre-Sandre Farrugia, Ruben Gatt, and Daphne Attard. On the auxetic properties of rotating rhombi and parallelograms : a preliminary investigation. *physica status solidi (b)*, 245(3) :521–529, 2008. [40](#), [107](#), [184](#)
- [43] Joseph N Grima, Ruben Gatt, Andrew Alderson, and KE Evans. On the potential of connected stars as auxetic systems. *Molecular Simulation*, 31(13) :925–935, 2005. [42](#), [184](#)
- [44] Joseph N Grima, Ruben Gatt, and Pierre-Sandre Farrugia. On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures. *physica status solidi (b)*, 245(3) :511–520, 2008. [36](#), [37](#), [184](#)
- [45] JM Harrison, Peter Kuchment, Alexander Sobolev, and Brian Winn. On occurrence of spectral edges for periodic operators inside the brillouin zone. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(27) :7597, 2007. [51](#)
- [46] Charles Hoberman. Reversibly expandable doubly-curved truss structure, July 24 1990. US Patent 4,942,700. [34](#), [45](#)
- [47] C. L. Holloway, E. F. Kuester, J. Baker-Jarvis, and P. Kabos. A double negative (dng) composite medium composed of magnetodielectric spherical particles embedded in a matrix. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(10) :2596–2603, Oct 2003. [24](#)
- [48] Y Hou, YH Tai, C Lira, F Scarpa, JR Yates, and B Gu. The bending and failure of sandwich structures with auxetic gradient cellular cores. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 49 :119–131, 2013. [43](#), [184](#)
- [49] Barbara Howell, Pat Prendergast, and Larry Hansen. Acoustic behavior of negative poisson’s ratio materials. Technical report, DAVID TAYLOR RESEARCH CENTER BETHESDA MD SHIP MATERIALS ENGINEERING DEPT, 1991. [47](#)

- [50] H.H. Huang, C.T. Sun, and G.L. Huang. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 47(4) :610 – 617, 2009. [80](#), [84](#)
- [51] Xiuchang Huang, Xingtian Liu, Jingya Sun, Zhiyi Zhang, and Hongxing Hua. Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using euler buckled beam as negative stiffness corrector : A theoretical and experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 333(4) :1132–1148, 2014. [30](#)
- [52] K. L. Jim, C. W. Leung, S. T. Lau, S. H. Choy, and H. L. W. Chan. Thermal tuning of phononic bandstructure in ferroelectric ceramic/epoxy phononic crystal. *Applied Physics Letters*, 94(19), 2009. [33](#)
- [53] Noori Kim, Yong-Jin Yoon, and Jont B Allen. Generalized metamaterials : Definitions and taxonomy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(6) :3412–3418, 2016. [23](#)
- [54] Charles Kittel, Paul McEuen, and Paul McEuen. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1976. [27](#), [51](#)
- [55] S Krödel, N Thomé, and C Daraio. Wide band-gap seismic metastructures. *Extreme Mechanics Letters*, 4 :111–117, 2015. [31](#), [183](#)
- [56] Roderic Lakes. Deformation mechanisms in negative poisson’s ratio materials : structural aspects. *Journal of materials science*, 26(9) :2287–2292, 1991. [36](#), [42](#), [184](#)
- [57] Elizabeth Langvin, Tory M. Cross, Bryant Russell Klug, Timothy K. Liles, Robert Mervar, and Olivier Henrichot. Auxetic sole with upper cabling, 2016. [46](#)
- [58] Sam H Lee and Oliver B Wright. Origin of negative density and modulus in acoustic metamaterials. *Physical Review B*, 93(2) :024302, 2016. [28](#), [32](#), [183](#)
- [59] Sam Hyeon Lee, Choon Mahn Park, Yong Mun Seo, Zhi Guo Wang, and Chul Koo Kim. Acoustic metamaterial with negative density. *Physics letters A*, 373(48) :4464–4469, 2009. [28](#)
- [60] Sam Hyeon Lee, Choon Mahn Park, Yong Mun Seo, Zhi Guo Wang, and Chul Koo Kim. Acoustic metamaterial with negative modulus. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 21(17) :175704, 2009. [28](#)
- [61] Marco Lepidi and Andrea Bacigalupo. Passive control of wave propagation in periodic anti-tetrachiral meta-materials. ECCOMAS, 2016. [37](#), [43](#)
- [62] Zixian Liang and Jensen Li. Extreme acoustic metamaterial by coiling up space. *Physical review letters*, 108(11) :114301, 2012. [29](#), [30](#), [183](#)
- [63] C Lira, P Innocenti, and F Scarpa. Transverse elastic shear of auxetic multi re-entrant honeycombs. *Composite Structures*, 90(3) :314–322, 2009. [42](#)

- [64] XN Liu, GK Hu, CT Sun, and GL Huang. Wave propagation characterization and design of two-dimensional elastic chiral metacomposite. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11) :2536–2553, 2011. [37](#), [43](#), [184](#)
- [65] Yanping Liu and Hong Hu. A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays*, 5(10) :1052–1063, May 2010. [36](#)
- [66] Zhengyou Liu, Xixiang Zhang, Yiwei Mao, YY Zhu, Zhiyu Yang, CT Chan, and Ping Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485) :1734–1736, 2000. [27](#), [30](#), [37](#), [183](#)
- [67] Stéphanie Livet, Manuel Collet, Marc Berthillier, Pierrick Jean, and Jean-Marc Cote. Structural multi-modal damping by optimizing shunted piezoelectric transducers. *European Journal of Computational Mechanics*, 20(1-4) :73–102, 2011. [30](#)
- [68] Ming-Hui Lu, Liang Feng, and Yan-Feng Chen. Phononic crystals and acoustic metamaterials. *Materials today*, 12(12) :34–42, 2009. [26](#)
- [69] Brian R Mace and Elisabetta Manconi. Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5) :884–902, 2008. [53](#)
- [70] Martin Maldovan. Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, 503(7475) :209–217, November 2013. [27](#), [183](#)
- [71] James M Manimala, Hsin Haou Huang, CT Sun, Robert Snyder, and Scott Bland. Dynamic load mitigation using negative effective mass structures. *Engineering Structures*, 80 :458–468, 2014. [31](#)
- [72] Philip G. Martin. Filtering face-piece respirator having an auxetic mesh in the mask body, 2011. [46](#)
- [73] IG Masters and KE Evans. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Composite structures*, 35(4) :403–422, 1996. [34](#), [35](#), [184](#)
- [74] Florian Maurin, Claus Claeys, Elke Deckers, and Wim Desmet. Probability that a band-gap extremum is located on the irreducible brillouin-zone contour for the 17 different plane crystallographic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 135 :26–36, 2018. [51](#)
- [75] Daniel Maystre, Stefan Enoch, Boris Gralak, and Gérard Tayeb. Metamaterials : from microwaves to the visible region. *Comptes Rendus Physique*, 6(6) :693–701, 2005. [25](#)
- [76] Jun Mei, Guancong Ma, Min Yang, Zhiyu Yang, Weijia Wen, and Ping Sheng. Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound. *Nature communications*, 3 :756, 2012. [29](#), [30](#), [183](#)
- [77] Graeme W Milton and Andrej V Cherkaev. Which elasticity tensors are realizable? *Journal of engineering materials and technology*, 117(4) :483–493, 1995. [30](#)

- [78] Graeme W Milton and John R Willis. On modifications of newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2079) :855–880, 2007. [31](#)
- [79] Koryo Miura. Method of packaging and deployment of large membranes in space. *Title The Institute of Space and Astronautical Science Report*, 618 :1, 1985. [44](#)
- [80] Davood Mousanezhad, Sahab Babaei, Hamid Ebrahimi, Ranajay Ghosh, Abdelmagid Salem Hamouda, Katia Bertoldi, and Ashkan Vaziri. Hierarchical honeycomb auxetic metamaterials. *Scientific reports*, 5 :18306, 2015. [41](#), [184](#)
- [81] Tom Mullin, S Deschanel, Katia Bertoldi, and Mary C Boyce. Pattern transformation triggered by deformation. *Physical review letters*, 99(8) :084301, 2007. [39](#)
- [82] L. Mullins. Effect of stretching on the properties of rubber. *Journal of Rubber Research*, 16(12) :275–289, December 1947. [60](#)
- [83] L Mullins and NR Tobin. Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubbers. *Rubber chemistry and technology*, 30(2) :555–571, 1957. [60](#)
- [84] Leonard Mullins. Softening of rubber by deformation. *Rubber chemistry and technology*, 42(1) :339–362, 1969. [60](#)
- [85] Evgenii E Narimanov and Alexander V Kildishev. Optical black hole : Broadband omnidirectional light absorber. *Applied Physics Letters*, 95(4) :041106, 2009. [26](#)
- [86] Andrew N Norris. Acoustic cloaking. *Acoust. Today*, 11(1) :38–46, 2015. [29](#)
- [87] Nejc Novak, Matej Vesenjak, and Zoran Ren. Auxetic cellular materials-a review. *Strojniški vestnik-Journal of Mechanical Engineering*, 62(9) :485–493, 2016. [35](#), [184](#)
- [88] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3966–3969, Oct 2000. [25](#), [183](#)
- [89] J B Pendry, A J Holden, D J Robbins, and W J Stewart. Low frequency plasmons in thin-wire structures. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 10(22) :4785, 1998. [25](#), [183](#)
- [90] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47(11) :2075–2084, Nov 1999. [25](#)
- [91] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :4773–4776, Jun 1996. [25](#)
- [92] Bogdan-Ioan Popa and Steven A Cummer. Non-reciprocal and highly nonlinear active acoustic metamaterials. *Nature communications*, 5 :3398, 2014. [29](#)
- [93] Bogdan-Ioan Popa, Durvesh Shinde, Adam Konneker, and Steven A Cummer. Active acoustic metamaterials reconfigurable in real time. *Physical Review B*, 91(22) :220303, 2015. [29](#)

- [94] Ahmad Rafsanjani and Damiano Pasini. Bistable auxetic mechanical metamaterials inspired by ancient geometric motifs. *Extreme Mechanics Letters*, 9 :291–296, 2016. [33](#)
- [95] Xin Ren, Jianhu Shen, Arash Ghaedizadeh, Hongqi Tian, and Yi Min Xie. Experiments and parametric studies on 3d metallic auxetic metamaterials with tuneable mechanical properties. *Smart Materials and Structures*, 24(9) :095016, 2015. [44](#), [184](#)
- [96] J.-F. Robillard, O. Bou Matar, J. O. Vasseur, P. A. Deymier, M. Stippinger, A.-C. Hladky-Hennion, Y. Pennec, and B. Djafari-Rouhani. Tunable magnetoelastic phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 95(12), 2009. [33](#)
- [97] M Ruzzene and F Scarpa. Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices. *physica status solidi (b)*, 242(3) :665–680, 2005. [35](#), [47](#)
- [98] Massimo Ruzzene, Luca Mazzarella, Panagiotis Tsopelas, and Fabrizio Scarpa. Wave propagation in sandwich plates with periodic auxetic core. *Journal of intelligent material systems and structures*, 13(9) :587–597, 2002. [42](#), [43](#), [184](#)
- [99] Massimo Ruzzene and Fabrizio Scarpa. Control of wave propagation in sandwich beams with auxetic core. *Journal of intelligent material systems and structures*, 14(7) :443–453, 2003. [42](#), [47](#)
- [100] Massimo Ruzzene, Fabrizio Scarpa, and Francesco Soranna. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures. *Smart materials and structures*, 12(3) :363, 2003. [35](#), [47](#)
- [101] Krishna Kumar Saxena, Raj Das, and Emilio P Calius. Three decades of auxetics research- materials with negative poisson’s ratio : a review. *Advanced Engineering Materials*, 18(11) :1847–1870, 2016. [46](#)
- [102] Krishna Kumar Saxena, Raj Das, and Emilio P Calius. 3d printable multimaterial cellular auxetics with tunable stiffness. *arXiv preprint arXiv :1707.04486*, 2017. [35](#)
- [103] F Scarpa and G Tomlinson. Theoretical characteristics of the vibration of sandwich plates with in-plane negative poisson’s ratio values. *Journal of Sound and Vibration*, 230(1) :45–67, 2000. [47](#)
- [104] Mark Schenk and Simon D Guest. Geometry of miura-folded metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(9) :3276–3281, 2013. [45](#), [184](#)
- [105] David Schurig, JJ Mock, BJ Justice, Steven A Cummer, John B Pendry, AF Starr, and DR Smith. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314(5801) :977–980, 2006. [26](#), [183](#)
- [106] JT Seitz and CF Balazs. Application of time-temperature superposition principle to long term engineering properties of plastic materials. *Polymer Engineering & Science*, 8(2) :151–160, 1968. [70](#)
- [107] Sicong Shan, Sung H Kang, Jordan R Raney, Pai Wang, Lichen Fang, Francisco Candido, Jennifer A Lewis, and Katia Bertoldi. Multistable architected materials for trapping elastic strain energy. *Advanced Materials*, 27(29) :4296–4301, 2015. [31](#), [33](#), [183](#)

- [108] AD Shaw, SA Neild, and DJ Wagg. Dynamic analysis of high static low dynamic stiffness vibration isolation mounts. *Journal of Sound and Vibration*, 332(6) :1437–1455, 2013. [30](#)
- [109] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514) :77–79, 2001. [25](#)
- [110] Jongmin Shim, Claude Perdigou, Elizabeth R Chen, Katia Bertoldi, and Pedro M Reis. Buckling-induced encapsulation of structured elastic shells under pressure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(16) :5978–5983, 2012. [45](#), [184](#)
- [111] Jongmin Shim, Sicong Shan, Andrej Košmrlj, Sung H Kang, Elizabeth R Chen, James C Weaver, and Katia Bertoldi. Harnessing instabilities for design of soft reconfigurable auxetic/chiral materials. *Soft Matter*, 9(34) :8198–8202, 2013. [40](#)
- [112] Jongmin Shim, Pai Wang, and Katia Bertoldi. Harnessing instability-induced pattern transformation to design tunable phononic crystals. *International Journal of Solids and Structures*, 58 :52–61, 2015. [40](#), [110](#), [184](#)
- [113] Ole Sigmund. Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20(4) :351–368, 1995. [30](#)
- [114] Ole Sigmund, S Torquato, and Ilhan A Aksay. On the design of 1–3 piezocomposites using topology optimization. *Journal of materials research*, 13(4) :1038–1048, 1998. [36](#), [37](#), [116](#), [184](#)
- [115] Chris W Smith, JN Grima, and KenE Evans. A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams : missing rib foam model. *Acta materialia*, 48(17) :4349–4356, 2000. [38](#)
- [116] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :4184–4187, May 2000. [23](#), [25](#), [183](#)
- [117] PS Theocaris, GE Stavroulakis, and PD Panagiotopoulos. Negative poisson’s ratios in composites with star-shaped inclusions : a numerical homogenization approach. *Archive of applied mechanics*, 67(4) :274–286, 1997. [41](#)
- [118] Konstantin V Tretiakov and Krzysztof W Wojciechowski. Poisson’s ratio of simple planar ‘isotropic’ solids in two dimensions. *physica status solidi (b)*, 244(3) :1038–1046, 2007. [36](#)
- [119] Viktor G Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ? *Soviet physics uspekhi*, 10(4) :509, 1967. [24](#)
- [120] Pai Wang, Filippo Casadei, Sicong Shan, James C Weaver, and Katia Bertoldi. Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials. *Physical review letters*, 113(1) :014301, 2014. [43](#), [44](#), [134](#), [184](#)

- [121] Pai Wang, Jongmin Shim, and Katia Bertoldi. Effects of geometric and material nonlinearities on tunable band gaps and low-frequency directionality of phononic crystals. *Physical Review B*, 88(1) :014304, 2013. [39](#)
- [122] Yi-Ze Wang, Feng-Ming Li, Wen-Hu Huang, Xiaoi Jiang, Yue-Sheng Wang, and Kikuo Kishimoto. Wave band gaps in two-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystals. *International Journal of Solids and Structures*, 45(14–15) :4203 – 4210, 2008. [33](#)
- [123] Zhengyue Wang and Hong Hu. Auxetic materials and their potential applications in textiles. *Textile Research Journal*, 84(15) :1600–1611, 2014. [46](#)
- [124] Malcolm L Williams, Robert F Landel, and John D Ferry. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical society*, 77(14) :3701–3707, 1955. [70](#)
- [125] KW Wojciechowski. Two-dimensional isotropic system with a negative poisson ratio. *Physics Letters A*, 137(1-2) :60–64, 1989. [36](#)
- [126] Ying Wu, Yun Lai, and Zhao-Qing Zhang. Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions. *Physical Review B*, 76(20) :205313, 2007. [31](#), [33](#), [183](#)
- [127] Ying Wu, Yun Lai, and Zhao-Qing Zhang. Elastic metamaterials with simultaneously negative effective shear modulus and mass density. *Physical review letters*, 107(10) :105506, 2011. [33](#)
- [128] CW Zhou, JP Lainé, MN Ichchou, and AM Zine. Wave finite element method based on reduced model for one-dimensional periodic structures. *International Journal of Applied Mechanics*, 7(02) :1550018, 2015. [53](#)
- [129] Xiaoming Zhou and Gengkai Hu. Analytic model of elastic metamaterials with local resonances. *Physical Review B*, 79(19) :195109, 2009. [31](#)

Annexe A

Fiche technique du TPU 95A

Propriétés matériau du TPU 95A, fournies par le fabricant, Ultimaker.

Fiche technique : TPU 95A

Ultimaker

Nom chimique

Polyuréthane thermoplastique

Description

Sa remarquable polyvalence dans les applications industrielles fait du filament TPU 95A la solution de choix pour un large éventail de projets de fabrication exigeant à la fois les qualités du caoutchouc et celles du plastique. Conçu pour une impression 3D homogène, TPU 95A est un filament semi-flexible offrant une résistance chimique et une forte adhérence entre couches. Il permet en outre d'imprimer plus facilement et plus rapidement que les autres filaments en TPU.

Caractéristiques clés

Exceptionnelle résistance à l'usure, haute résistance aux chocs, dureté Shore A de 95, jusqu'à 580 % d'allongement à la rupture et bonne résistance à la corrosion par de nombreuses huiles industrielles et autres agents chimiques courants.

Applications

Prototypage fonctionnel, surfaces de préhension (grips), guides, charnières, manchons, pièces à encliquetage et boîtier de protection.

Non adapté à

Contact avec les denrées alimentaires et applications in vivo. Exposition aux UV et/ou immersion dans l'humidité à long terme et applications dans lesquelles la partie imprimée est exposée à des températures supérieures à 100 °C.

Spécifications du filament

Diamètre

2,90±0,13 mm

Jauge laser 2 axes

Écart de circularité max.

0,07 mm

Jauge laser 2 axes

Poids net du filament

750 g

-

Longueur du filament

~96 m

-

Informations relatives aux couleurs

Couleur

Code couleur

TPU 95A Blanc

RAL 9010

TPU 95A Noir

RAL 9005

TPU 95A Rouge

RAL 3031

TPU 95A Bleu

RAL 5002

Propriétés mécaniques (*)

Moulage par injection

Impression 3D

	<u>Valeur type</u>	<u>Méthode d'essai</u>	<u>Valeur type</u>	<u>Méthode d'essai</u>
Module en traction	-	-	26,0 MPa	ASTM D638
Limite d'élasticité à la traction	-	-	8,6 MPa	ASTM D638
Limite de rupture à la traction	-	-	39,0 MPa	ASTM D638
Allongement à la limite d'élasticité	-	-	55,0 %	ASTM D638
Allongement à la rupture	-	-	580,0 %	ASTM D638
Résistance à la flexion	-	-	4,3 MPa	ISO 178
Module de flexion	-	-	78,7 MPa	ISO 178
Résistance au choc Izod, éprouvette entaillée (à 23 °C)-	-	-	34,4 kJ/m ²	ISO 180
Résistance au choc Charpy (à 23 °C)	-	-	-	-
Dureté	-	-	95 (Shore A) 46 (Shore D)	ASTM D2240 Duromètre
Résistance à l'abrasion	-	-	0,06 g	ASTM D4060 (perte de masse, 10000 cycles)

Propriétés thermiques

Valeur type

Méthode d'essai

Indice de fluidité à chaud (MFR)	15,9 g / 10 min	ISO 1133 (225 °C, 1,2 kg)
Température de fléchissement sous charge (HDT) à 0,455 MPa	74 °C	ASTM D648
Température de fléchissement sous charge (HDT) à 1,82 MPa	49 °C	ASTM D648
Transition vitreuse	-24 °C	DSC
Coefficient de dilatation thermique	100·10 ⁻⁶ °C ⁻¹	ASTM E693
Température de fusion	220 °C	DSC
Retrait thermique	-	-

Propriétés électriques

Valeur type

Méthode d'essai

Résistivité transversale	10 ¹¹ Ω·m	IEC 60093
Résistance superficielle	2·10 ¹⁴ Ω	IEC 60093

(*) Voir notes.

<u>Autres propriétés</u>	<u>Valeur type</u>	<u>Méthode d'essai</u>
Poids spécifique	1,22	ASTM D782
Classification d'inflammabilité	Classe HB	CEI 60695-11-10
Absorption d'humidité	0,18 %	ASTM D570 (24 h)

Notes

Les propriétés indiquées ici représentent les valeurs moyennes d'un lot type. Les éprouvettes d'essai de traction ont été imprimées avec 2 coques, un débit de matériau de 107 % une température de buse de 260 °C, une température du lit de 45 °C, un diamètre de buse de 0,8 mm, une vitesse de remplissage de 40 mm/s, une vitesse d'impression de 30 mm/s et une hauteur de couche de 0,3 mm. Les éprouvettes d'essai de flexion et de choc ont été imprimées dans le plan XY, avec le profil de qualité normal Cura 2.1, une Ultimaker 2+, une buse de 0,4 mm, un remplissage à 90 %, une température de buse de 235 °C et une température de plateau de 70 °C. Les valeurs correspondent à une moyenne obtenue pour 5 éprouvettes blanches et 5 noires lors des essais de flexion et de choc. La dureté Shore D a été mesurée à l'aide d'un carré d'une épaisseur de 7 mm imprimé dans le plan XY, avec le profil de qualité normal Cura 2.5, une Ultimaker 3, un Print Core de 0,4 mm et un remplissage à 100 %. Ultimaker s'efforce d'élargir les données disponibles dans ses fiches techniques.

Clause de non-responsabilité

Vous acceptez à vos risques les informations techniques et l'assistance fournies dans ce document. Ultimaker et ses sociétés affiliées n'offrent aucune garantie à cet égard. Ultimaker et ses sociétés affiliées ne sauraient en aucun cas être tenues responsables des conséquences de l'utilisation de ces informations ou des produits, méthodes ou appareils, dont il vous incombe d'évaluer le caractère adapté et complet en termes d'utilisation, de protection de l'environnement, et de protection de la santé et de la sécurité de vos employés comme des personnes qui achètent vos produits. Nous n'offrons aucune garantie quant à la valeur marchande ou l'adéquation de nos produits à un usage particulier. Aucune disposition ne saurait être interprétée comme une renonciation aux conditions de vente d'Ultimaker. Les spécifications sont soumises à modification sans préavis.

<u>Version</u>	Version 3.010
<u>Date</u>	16/05/2017

Ultimaker

Annexe B

Fiche technique du silicone

Propriétés matériau du silicone Elite Double 32, fournies par le fabricant, Zhermack (figure B.1).

Produit	Rapport de mélange	Temps de mélange manuel (mins)	Temps de mélange mécanique avec mélangeur sous vide (mins)	Temps de travail (mins)	Temps de prise (mins)	Reproduction des détails (µm)	Récupération élastique	Variation dimensionnelle linéaire (après 24 heures)	Durés (Shore A)	Charge de rupture	Allongement à la rupture	Résistance à la laccration
Elite Double 8	1:1	1:00	0:30	10:00	20:00	2	99,95 %	0,05 %	8	2 N/mm ²	380 %	2,5 N/mm ²
Elite Double 16 Fast	1:1	1:00	0:30	5:00	10:00	2	99,95 %	0,05 %	16	2,5 N/mm ²	550 %	5 N/mm ²
Elite Double 22	1:1	1:00	0:30	10:00	20:00	2	99,95 %	0,05 %	22	2,5 N/mm ²	450 %	5 N/mm ²
Elite Double 22 Fast	1:1	1:00	0:30	5:00	10:00	2	99,95 %	0,05 %	22	2,5 N/mm ²	450 %	5 N/mm ²
Elite Double 22 Extra Fast	1:1	Mélangeur automatique	Mélangeur automatique	1:30	5:00	2	99,95 %	0,05 %	22	2,5 N/mm ²	450 %	5 N/mm ²
Elite Double 32	1:1	1:00	0:30	10:00	20:00	2	99,95 %	0,05 %	32	2,5 N/mm ²	350 %	5 N/mm ²
Elite Double 32 Fast	1:1	1:00	0:30	5:00	10:00	2	99,95 %	0,05 %	32	2,5 N/mm ²	350 %	5 N/mm ²

* Les temps indiqués se réfèrent au moment de début de la phase de mélange à une température de 23°C (73°F).

FIGURE B.1 – Propriétés de différents silicones moulés de la marque Zhermack.

Annexe C

Modèles analytiques de chaînes périodiques 1D

Si une représentation analytique complète d'un métamatériau serait fastidieuse, des cas simples unidimensionnels sont facilement abordables et donnent un aperçu des mécanismes en jeu et des paramètres déterminants le comportement du matériau. Le système considéré ici est infini selon la dimension étudiée.

C.1 Masses identiques

La structure initiale M_0 est une simple chaîne périodique de masses m identiques liées par des ressort de raideur k et des amortisseurs de coefficient c , comme indiquée sur la figure C.1.

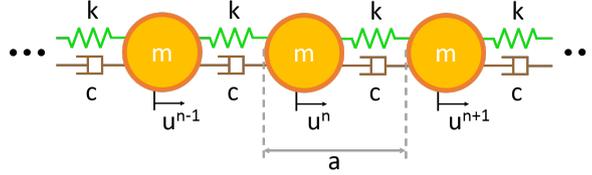


FIGURE C.1 – Représentation schématique d'une chaîne infinie de systèmes masse-ressort-amortisseur de type M_0

L'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{x}$ est appliquée à chaque particule n :

$$m\ddot{u}^n = c(\dot{u}^{n-1} - \dot{u}^n) + c(\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n) + k(u^{n-1} - u^n) + k(u^{n+1} - u^n) \quad (\text{C.1})$$

où u^n est le déplacement de la particule n , et $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Soit

$$m\ddot{u}^n + c(2\dot{u}^n - \dot{u}^{n+1} - \dot{u}^{n-1}) + k(2u^n - u^{n+1} - u^{n-1}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

En considérant des ondes de Bloch de la forme :

$$u^n(x, \kappa, t) = \tilde{U} e^{i\kappa(x+na)+\lambda t} \quad (\text{C.3})$$

où a est la dimension de la cellule périodique, κ désigne le nombre d'onde, \tilde{U} est une fonction de période a , et $\lambda = i\omega$. On injecte l'équation C.3 dans C.2, pour obtenir :

$$\lambda^2 m + \lambda c(2 - e^{i\kappa a} - e^{-i\kappa a}) + k(2 - e^{i\kappa a} - e^{-i\kappa a}) = 0 \quad (\text{C.4})$$

soit

$$\lambda^2 m + 4\lambda c \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) + 4k \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Ce qui peut être ramené à une polynôme du second ordre de la forme :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (\text{C.6})$$

Avec

$$\begin{cases} [l]A = & m \\ B = & c \times 4 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \\ C = & k \times 4 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Le déterminant prend alors la forme :

$$\Delta = B^2 - 4AC = 16 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \times \left(c^2 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) - km\right) \quad (\text{C.8})$$

Et les solutions sont :

$$\lambda = \frac{1}{m} \left[-c \times 2 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \pm 2 \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \sqrt{c^2 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) - km} \right] \quad (\text{C.9})$$

Soit

$$\lambda = -\frac{2}{m} \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \left[c \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \pm \sqrt{c^2 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right) - km} \right] \quad (\text{C.10})$$

Comme $\lambda = i\omega$, l'équation de dispersion donne :

$$\omega = \frac{2}{m} \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \left[ic \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \pm \sqrt{km - c^2 \sin^2\left(\frac{\kappa a}{2}\right)} \right] \quad (\text{C.11})$$

Dans le cas où l'on considère l'amortissement négligeable, c'est-à-dire $c = 0$, et en ne gardant que les fréquences positives, on obtient :

$$\omega = \left| \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right) \right| \times \sqrt{\frac{4k}{m}} = \text{sqrt}2 |S_\kappa| \omega_1 \quad (\text{C.12})$$

Avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, et $S_\kappa = \sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right)$. On en déduit les fréquences limites de cette branche de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$ et $\kappa = \frac{\pi}{a}$:

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa = 0 \\ \sqrt{2}\omega_1 & \text{si } \kappa = \frac{\pi}{a} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

C.2 Masse-et-masse

La structure $M_{\&}$, qu'on nommera "masse-et-masse" (*mass-and-mass* en anglais), est maintenant constituée d'une chaîne périodique de deux systèmes masse-ressort-amortisseur différents en série. Leur comportement est défini par leur masse m_i , raideur k_i , amortissement c_i , et déplacement u_i respectifs, où l'indice $i \in 1, 2$ dépend du système considéré. Le système global est schématisé sur la figure C.2.

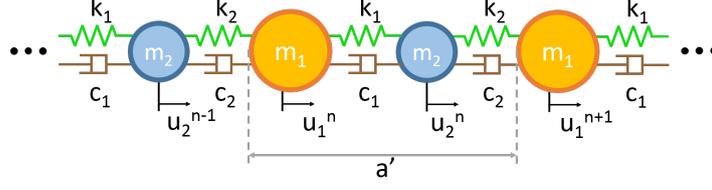


FIGURE C.2 – Représentation schématique d'une chaîne infinie de type $M\&$

L'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{x}$ est appliquée à chaque système :

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1^n = c_1(\dot{u}_2^n - \dot{u}_1^n) + c_2(\dot{u}_2^{n-1} - \dot{u}_1^n) + k_1(u_2^n - u_1^n) + k_2(u_2^{n-1} - u_1^n) \\ m_2\ddot{u}_2^n = c_1(\dot{u}_1^n - \dot{u}_2^n) + c_2(\dot{u}_1^{n+1} - \dot{u}_2^n) + k_1(u_1^n - u_2^n) + k_2(u_1^{n+1} - u_2^n) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Soit

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1^n + \dot{u}_1^n(c_1 + c_2) - c_1\dot{u}_2^n - c_2\dot{u}_2^{n-1} + u_1^n(k_1 + k_2) - k_1u_2^n - k_2u_2^{n-1} = 0 \\ m_2\ddot{u}_2^n + \dot{u}_2^n(c_1 + c_2) - c_1\dot{u}_1^n - c_2\dot{u}_1^{n+1} + u_2^n(k_1 + k_2) - k_1u_1^n - k_2u_1^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

En considérant des ondes de Bloch de la forme :

$$u_\alpha^n(x, \kappa, t) = \tilde{U}_\alpha e^{i\kappa(x+na)+\lambda t} \quad (\text{C.16})$$

On injecte l'équation C.16 dans C.15, pour obtenir :

$$\begin{cases} \lambda^2 m_1 \tilde{U}_1 + \lambda (\tilde{U}_1(c_1 + c_2) - c_1 \tilde{U}_2 - c_2 \tilde{U}_2 e^{-i\kappa a}) + \tilde{U}_1(k_1 + k_2) - k_1 \tilde{U}_2 - k_2 \tilde{U}_2 e^{-i\kappa a} = 0 \\ \lambda^2 m_2 \tilde{U}_2 + \lambda (\tilde{U}_2(c_1 + c_2) - c_1 \tilde{U}_1 - c_2 \tilde{U}_1 e^{i\kappa a}) + \tilde{U}_2(k_1 + k_2) - k_1 \tilde{U}_1 - k_2 \tilde{U}_1 e^{i\kappa a} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

En isolant \tilde{U}_2 dans la deuxième équation pour l'injecter dans la première on trouve :

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 m_1 + \lambda(c_1 + c_2) + k_1 + k_2) (\lambda^2 m_2 + \lambda(c_1 + c_2) + k_1 + k_2) \\ & = (\lambda(c_1 + c_2 e^{-i\kappa a}) + k_1 + k_2 e^{-i\kappa a}) (\lambda(c_1 + c_2 e^{i\kappa a}) + k_1 + k_2 e^{i\kappa a}) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Soit une équation de la forme :

$$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0 \quad (\text{C.19})$$

Avec les coefficients :

$$\begin{cases} [l]a = & m_1 m_2 \\ b = & (m_1 + m_2)(c_1 + c_2) \\ c = & (m_1 + m_2)(k_1 + k_2) + 4c_1 c_2 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \\ d = & 4(c_1 k_2 + c_2 k_1) \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \\ e = & 4k_1 k_2 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Si on retire les amortisseurs, c'est-à-dire $c_1 = c_2 = 0$, alors $b = d = 0$, et l'équation C.19 peut s'exprimer comme un polynôme d'ordre 2 :

$$A\Lambda^2 + B\Lambda + C = 0 \quad (\text{C.21})$$

avec $\Lambda = \lambda^2$, $A = m_1 m_2$, $B = (m_1 + m_2)(k_1 + k_2)$, et $C = 4k_1 k_2 \sin^2(\frac{\kappa a}{2})$.

On a alors

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (\text{C.22})$$

Et

$$\Lambda = -\frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (\text{C.23})$$

En définissant les paramètres $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m_2}}$, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$ et

$$S_\kappa = \sin \frac{\kappa a}{2},$$

on en déduit :

$$\omega = \sqrt{-\Lambda} = \sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}} \quad (\text{C.24})$$

À partir de cette équation on peut en tirer des cas simples en fonction des valeurs de m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , ainsi que valeurs limites des branches de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$ et $\kappa = \frac{\pi}{a}$

	Équation générale		$\kappa = 0$	$\kappa = \pi/a$	
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\frac{2K}{M}}$	$\sqrt{\frac{K}{M} \pm \sqrt{\frac{K^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2}}$	
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{M^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$	ω_1	ω_2
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m_1} \pm \sqrt{\frac{4K^2}{m_1^2} - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$	0	$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$	ω_1	ω_2
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \omega_1 \sqrt{1 \pm \cos \kappa a}$	0	$\sqrt{2}\omega_1$	ω_1	ω_1

TABLE C.1 – Synthèse analytique de structures masse-et-masse sans amortissement

C.3 Masse-en-masse

La structure est maintenant constituée d'une chaîne périodique de deux systèmes masse-ressort-amortisseur différents en parallèle. Autrement dit, chaque cellule de la chaîne est un système à deux degrés de liberté. Cette structure M_ϵ sera nommé masse-en-masse (*mass-in-mass* en anglais), par comparaison à la structure précédente. Le comportement des deux systèmes est défini par leur masse m_i , raideur k_i , amortissement c_i , et déplacement u_i respectifs, où l'indice $i \in 1, 2$ dépend du système considéré. Le système global est schématisé sur la figure C.3.

L'équation de mouvement $\sum F = m\ddot{x}$ est appliquée à chaque système :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1^n = c_1(\dot{u}_1^{n+1} - \dot{u}_1^n) + c_1(\dot{u}_1^{n-1} - \dot{u}_1^n) + c_2(\dot{u}_2^n - \dot{u}_1^n) + k_1(u_1^{n+1} - u_1^n) + k_1(u_1^{n-1} - u_1^n) + k_2(u_2^n - u_1^n) \\ m_2 \ddot{u}_2^n = c_2(\dot{u}_1^n - \dot{u}_2^n) + k_2(u_1^n - u_2^n) \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

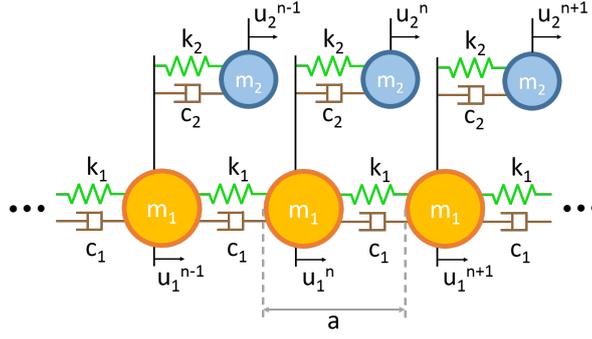


FIGURE C.3 – Représentation schématique d'une chaîne infinie de type M_E .

Soit

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1^n + c_1(2\dot{u}_1^n - \dot{u}_1^{n+1} - \dot{u}_1^{n-1}) - c_2(\dot{u}_2^n - \dot{u}_1^n) + k_1(2u_1^n - u_1^{n+1} - u_1^{n-1}) - k_2(u_2^n - u_1^n) = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2^n + c_2\dot{u}_2^n - c_2\dot{u}_1^n + k_2u_2^n - k_2u_1^n = 0 \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

En considérant des ondes de Bloch de la forme :

$$u_\alpha^n(x, \kappa, t) = \tilde{U}_\alpha e^{i\kappa(x+na)+\lambda t} \quad (\text{C.27})$$

où $\lambda = i\omega$.

On injecte l'équation C.27 dans C.15, pour obtenir :

$$\begin{cases} \lambda^2 m_1 \tilde{U}_1 + \lambda (\tilde{U}_1(2c_1 + c_2 - c_1 e^{i\kappa a} - c_1 e^{-i\kappa a}) - c_2 \tilde{U}_2) + \tilde{U}_1(2k_1 + k_2 - k_1 e^{i\kappa a} - k_1 e^{-i\kappa a}) - k_2 \tilde{U}_2 = 0 \\ \lambda^2 m_2 \tilde{U}_2 + \lambda c_2 (\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1) + k_2 (\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{cases} \lambda^2 m_1 \tilde{U}_1 + \lambda \left(\tilde{U}_1 \left(4c_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} + c_2 \right) - c_2 \tilde{U}_2 \right) + \tilde{U}_1 \left(4k_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} + k_2 \right) - k_2 \tilde{U}_2 = 0 \\ (\lambda^2 m_2 + \lambda c_2 + k_2) \tilde{U}_2 = (\lambda c_2 + k_2) \tilde{U}_1 \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

En isolant \tilde{U}_2 dans la deuxième équation pour l'injecter dans la première on trouve :

$$\left(\lambda^2 m_1 + \lambda \left(4c_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} + c_2 \right) + 4k_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} + k_2 \right) (\lambda^2 m_2 + \lambda c_2 + k_2) = (\lambda c_2 + k_2)^2 \quad (\text{C.30})$$

Soit une équation de la forme :

$$a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0 \quad (\text{C.31})$$

Avec les coefficients :

$$\begin{cases} [l]a = & m_1 m_2 \\ b = & c_2(m_1 + m_2) + 4m_2 c_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \\ c = & k_2(m_1 + m_2) + 4(m_2 k_1 - c_1 c_2) \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \\ d = & 4(c_1 k_2 + c_2 k_1) \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \\ e = & 4k_1 k_2 \sin^2 \frac{\kappa a}{2} \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

Cas non amorti Si on retire les amortisseurs, c'est-à-dire $c_1 = c_2 = 0$, alors $b = d = 0$, et l'équation C.19 peut s'exprimer comme un polynôme d'ordre 2 :

$$A\Lambda^2 + B\Lambda + C = 0 \quad (\text{C.33})$$

avec $\Lambda = \lambda^2$, $A = m_1 m_2$, $B = k_2(m_1 + m_2) + 4m_2 k_1 \sin^2 \frac{\kappa a}{2}$, et $C = 4k_1 k_2 \sin^2 \frac{\kappa a}{2}$.

On a alors

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (\text{C.34})$$

Et

$$\Lambda = -\frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (\text{C.35})$$

En définissant les paramètres $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m_2}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_2}{2M}}$, $S_\kappa = \sin \frac{\kappa a}{2}$, $R_k = \frac{k_1}{k_2}$, et $R_m = \frac{m_2}{m_1}$, on en déduit :

$$\omega = \sqrt{-\Lambda} = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2 \pm \sqrt{(\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}} \quad (\text{C.36})$$

À partir de cette équation on peut en tirer des cas simples en fonction des valeurs de m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , ainsi que valeurs limites des branches de la courbe de dispersion, c'est-à-dire quand $\kappa = 0$ et $\kappa = \frac{\pi}{a}$

	Équation générale
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2 \pm \sqrt{(\omega_3^2 + \omega_1^2 S_\kappa^2)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 S_\kappa^2}}$
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{2} \sqrt{1 + R_m + 4R_m S_\kappa^2 \pm \sqrt{(1 + R_m + 4R_m S_\kappa^2)^2 - 16R_m S_\kappa^2}}$
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2R_k S_\kappa^2 \pm \sqrt{1 + 4R_k^2 S_\kappa^4}}$
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	$\omega = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2S_\kappa^2 \pm \sqrt{1 + 4S_\kappa^4}}$

TABLE C.2 – Synthèse analytique de structures masse-en-masse sans amortissement : équations générales

	$\kappa = 0$	$\kappa = \pi/2a$
$m_1 \neq m_2, k_1 \neq k_2$	0	$\sqrt{2}\omega_3$
$m_1 \neq m_2, k_1 = k_2$	0	$\sqrt{2}\omega_3$
$m_1 = m_2, k_1 \neq k_2$	0	ω_2
$m_1 = m_2, k_1 = k_2$	0	ω_2

TABLE C.3 – Synthèse analytique de structures masse-en-masse sans amortissement : fréquences limites

Annexe D

Définition des dimensions de la cellule réentrante

Cette annexe détaille les relations entre les dimensions caractéristiques de la cellule réentrante étudiée au chapitre 3. En fonction de l'étude paramétrique, les paramètres d'entrée varient ce qui modifie certaines définitions géométriques. Cette annexe est donc composée de deux sections, une pour chaque comparaison.

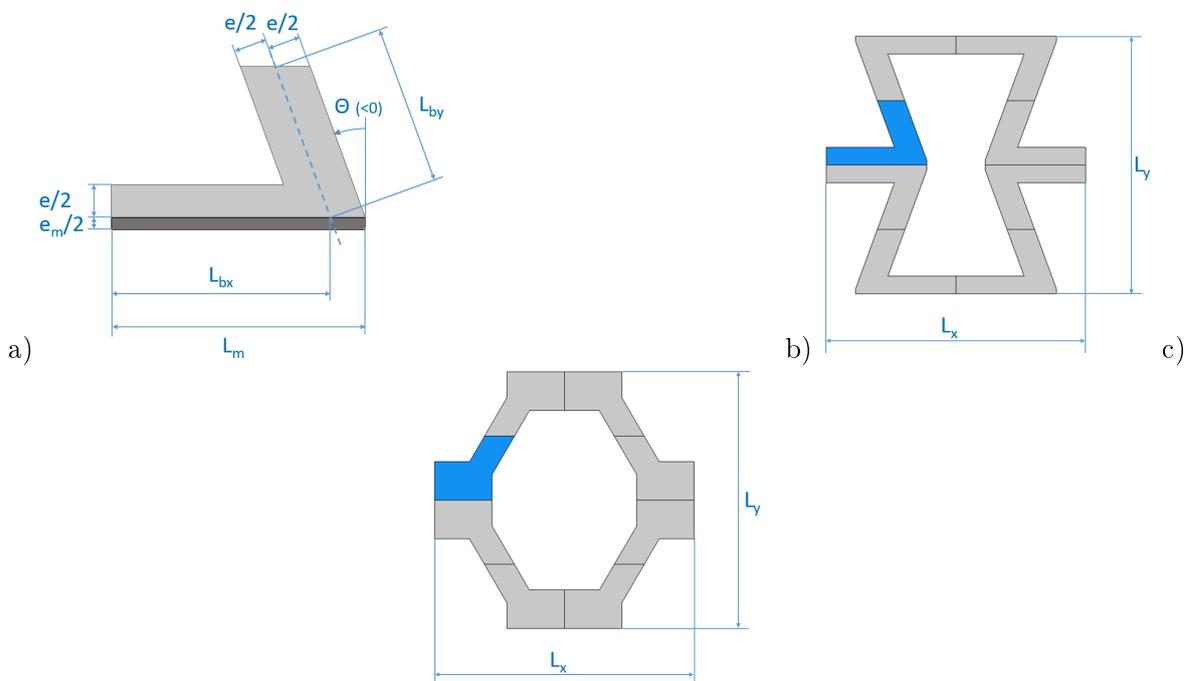


FIGURE D.1 – Dimensions caractéristiques a) du motif élémentaire choisi (ici $\theta = -20^\circ$), b) d'une cellule réentrante auxétique ($\theta = -20^\circ$) et c) d'une cellule hexagonale ($\theta = 30^\circ$). Les surfaces bleues correspondent à l'aire d'un motif élémentaire.

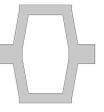
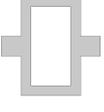
θ	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
Géométrie Initiale							
Géométrie Déformée							
$S/S_{\theta=0^\circ}$	1.31	1.18	1.08	1	0.93	0.88	0.83

TABLE D.1 – Géométries réentrantes à épaisseur constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent à $\varepsilon = 10\%$.

D.1 Épaisseur e_m constante

Pour toute l'étude, $L_x = L_y = 10mm$ et $e = 1mm$ sont fixés. Ces paramètres sont donc connus, de même que θ dont on souhaite étudier l'effet. L'épaisseur e_m est arbitrairement fixée à $e_m = 0.5mm$.

Les dimensions caractéristiques restantes de la figure D.1 sont facilement déduites des paramètres imposés :

- $L_{by} = \frac{L_y/4 - e_m}{\cos \theta}$
- $L_{bx} = L_x/4 - L_{by} \sin \theta$
- $L_m = L_{bx} + e/(2 \cos \theta)$

Les géométries obtenues et leurs surfaces S respectives, normalisées par rapport à $S_{\theta=0^\circ} = 36mm^2$ sont présentées sur la table D.1.

D.2 Masse m constante

Pour toute l'étude, $L_x = L_y = 10mm$ et $e = 1mm$ sont fixés. Ces paramètres sont donc connus, de même que θ dont on souhaite étudier l'effet. Comme le matériau et l'épaisseur hors plan $h_z = 40mm$ sont fixés, la masse m est imposée via la surface $S = m/(\rho h_z)$ de la cellule. Une valeur arbitraire $S_{ref} = 3.6383m^2$ est choisie.

Les dimensions caractéristiques restantes de la figure D.1 sont déduites des paramètres imposés. Typiquement :

- $L_{bx} = L_x/4 - L_{by} \sin \theta$
- $L_m = L_{bx} + e/(2 \cos \theta)$
- $e_m = L_y/4 - L_{by} \cos \theta$

La principale difficulté est de trouver la valeur de L_{by} telle que $S = S_{ref}$. Pour simplifier le développement des relations, la surface du motif est divisée en une partie "base" (en gris clair sur la figure D.1a)) de valeur $S_b = \frac{e}{8} (4L_{by} + 2L_{bx} + e \tan \theta - 2/\cos \theta)$, et une partie "masse" (en gris foncé sur la figure D.1a)) de valeur $S_m = L_m e_m$. La surface totale est alors $S = 8(S_b + S_m)$.

L'analyse géométrique de ces surfaces donne :

$$8S_b = 8L_{by}e + 4L_{bx}e + e^2 \left(\tan \theta - \frac{2}{\cos \theta} \right)$$

$$8S_m = \frac{L_y e}{\cos \theta} + 2L_{bx}L_y - 8L_{bx}L_{by} \cos \theta - 4L_{by}e$$

Soit

$$S = 4e(L_{bx} + L_{by}) + e^2 \left(\tan \theta - \frac{2}{\cos \theta} \right) + L_y \left(2L_{bx} + \frac{e}{\cos \theta} \right) - 8L_{bx}L_{by} \cos \theta$$

On en déduit :

$$L_{bx} = \frac{S - e^2 \left(\tan \theta - \frac{2}{\cos \theta} \right) - \frac{L_y e}{\cos \theta} - 4eL_{by}}{4e + L_y - 8L_{by} \cos \theta}$$

Cette expression est introduite dans la relation $L_{bx} = L_x/4 - L_{by} \sin \theta$ ce qui donne :

$$AL_{by}^2 + BL_{by} + C = 0$$

Avec

$$\begin{cases} A = -8 \cos \theta \sin \theta \\ B = 2 \sin \theta (2e + L_y) + 2L_x \cos \theta - 4e \\ C = S - e^2 \left(\tan \theta - \frac{2}{\cos \theta} \right) - \frac{L_y e}{\cos \theta} - L_x \left(e + \frac{L_y}{2} \right) \end{cases}$$

Si $\theta = 0$, $A = 0$ soit :

$$L_{by} = \frac{-C}{B} = \frac{S + 2e^2 + L_x L_y / 2 - (L_x + L_y)e}{4e - 2L_x}$$

Si $\theta \neq 0$, alors

$$L_{by} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

où $\Delta = B^2 - 4AC$. Il existe alors deux solutions $L_{by,1}$ et $L_{by,2}$, mais seule $L_{by} = \min(|L_{by,1}|, |L_{by,2}|)$ est acceptable, l'autre aboutissant à une valeur de S_b ou S_m négative.

Les géométries obtenues sont présentées sur la table D.2.

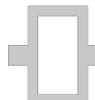
θ	-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
Géométrie Initiale							
Géométrie Déformée							

TABLE D.2 – Géométries réentrantes à masse constante pour des angles θ différents. Les déformées affichées correspondent à $\varepsilon = 10\%$.

Annexe E

Paramètres d'impression du TPU 95A

Le tableau [E.1](#) synthétise les paramètres utilisés pour l'impression du TPU par fabrication additive sur Ultimaker 3. Ces paramètres sont également valables sur Ultimaker 2. En particulier, les valeurs de vitesses, de températures, et de nombre de lignes de paroi sont prépondérantes pour obtenir un état de surface final satisfaisant. Cependant, ces valeurs sont empiriques et ne prétendent pas être optimales.

Paramètre	Valeur
Paramètres Cura	
Hauteur de couche	0.15 mm
Epaisseur de paroi	0.4 mm
Nombre de lignes de paroi	1
Compensation chevauchement de paroi	On
Remplissage espace interpariétal	On
Densité de remplissage	100%
Motif de remplissage	octaédrique
Pourcentage de chevauchement du remplissage	0%
Pourcentage de chevauchement de la couche extérieure	0%
Chevauchement de la couche extérieure	0
Étapes de remplissage progressif	0
Température d'impression	225°C
Température du plateau	70°C
Débit	100%
Vitesse d'impression	30 mm/s
Vitesse de déplacement	300 mm/s
Paramètres de l'imprimante	
Ventilation	30%
Débit matériau	100%
Vitesse imprimante	100%
Température	+0°C

TABLE E.1 – Paramètres recommandés d'impression 3D du TPU.