



HAL
open science

Partitionnement des paramètres d'entrée pour l'identification de modèles numériques probabilistes de structures dynamiques incertaines

Darwish Al Zeort

► **To cite this version:**

Darwish Al Zeort. Partitionnement des paramètres d'entrée pour l'identification de modèles numériques probabilistes de structures dynamiques incertaines. Mécanique [physics]. Université Gustave Eiffel, 2022. Français. NNT : 2022UEFL2037 . tel-04048707

HAL Id: tel-04048707

<https://theses.hal.science/tel-04048707v1>

Submitted on 28 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL

Année 2022

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL

Discipline : Mécanique

Presentée et soutenue publiquement le 16 décembre 2022, par :

Darwish AL ZEORT

Titre de la thèse :

**Partitionnement des paramètres d'entrée pour l'identification de
modèles numériques probabilistes de structures dynamiques
incertaines**

Devant le jury composé de :

Mohammed HJIAJ

Professeur - INSA de Rennes

François LOUF

Maître de conférences, HDR - ENS Paris-Saclay

Morvan OUISSE

Professeur - ENSMM

Anas BATOU

Professeur - Université Gustave Eiffel

Examineur

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Table des matières

Résumé	4
Abstract	5
Introduction	6
1 Méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d'entrée (RBS)	10
1.1 Séparation des paramètres d'entrée	10
1.2 Calcul du vecteur de coordonnées α_i	11
1.2.1 Indices de Sobol	11
1.2.2 Identification du vecteur de coordonnées α_i	13
1.3 Identification des paramètres d'entrée	15
1.4 Application de l'algorithme RBS	15
1.4.1 Premier modèle	16
1.4.2 Deuxième modèle	21
1.5 Analyse du terme d'erreur de modélisation et du terme de régularisation	27
1.5.1 Impact du terme de régularisation $\lambda[T]$	28
1.5.2 Prise en compte et impact des erreurs de modélisation	30
1.5.3 Observation des réponses recalées	35
1.6 Conclusion	37
2 Extensions de la méthode RBS	38
2.1 Construction de sorties multidimensionnelles	38
2.2 Enrichissement par sélection des sorties du modèle	44
2.3 Traitement des cas où les paramètres d'entrée ne sont pas séparables.	48
2.4 Conclusion	54
3 Recalage des modèles stochastiques basé sur la méthode RBS	55
3.1 Modèle numérique nominal	56
3.2 Présentation du modèle probabiliste	56
3.3 Recalage classique du modèle probabiliste	57
3.4 Recalage en utilisant la méthode RBS	58
3.4.1 Transformation de réponse	58
3.4.2 Identification des vecteurs de coordonnées	58
3.4.3 Identification des hyperparamètres	59
3.5 Applications	60
3.5.1 Modèle stochastique de poutre	60
3.5.2 Modèle stochastique de pont	66
3.6 Conclusion	71

4	Recalage de modèles numériques probabilistes prenant en compte les incertitudes de modélisation	72
4.1	Présentation du modèle probabiliste généralisé	72
4.2	Recalage classique du modèle probabiliste	73
4.3	Recalage en utilisant la méthode RBS	74
4.3.1	Transformation de réponse :	74
4.3.2	Identification des vecteurs de coordonnées :	74
4.3.3	Identification des hyperparamètres :	76
4.4	Application	77
4.4.1	Modèle stochastique à haute fidélité	77
4.4.2	Modèle stochastique à faible fidélité	77
4.4.3	Identification des hyperparamètres	79
4.5	Conclusion	81
5	Recalage bayésien basé sur la méthode RBS	82
5.1	Recalage Bayésien classique	82
5.2	Estimation des distributions de probabilité <i>a posteriori</i> des paramètres du modèle de manière séparée	83
5.2.1	Séparation des paramètres de système	83
5.2.2	Estimation de la distribution de probabilité <i>a posteriori</i> $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$	83
5.3	Identification des paramètres de dispersion pour les incertitudes de modélisation	84
5.4	Méthode itérative d'estimation des distributions de probabilité <i>a posteriori</i> des paramètres du modèle et des valeurs des paramètres de dispersion pour les incertitudes de modélisation	85
5.5	Application	85
5.5.1	Modèle à haute fidélité	85
5.5.2	Modèle stochastique à faible fidélité	86
5.5.3	Estimation des distributions de probabilité <i>a posteriori</i> pour les paramètres d'entrée	87
5.6	Conclusion	90
	Conclusion générale	91
	Annexe A	93

Résumé

Résumé :

Dans le cadre de la validation des modèles numériques, les méthodes de recalage consistent à calibrer les paramètres d'entrée du modèle numérique afin de réduire la distance entre ses réponses calculées et les réponses expérimentales. Lorsque le modèle numérique est probabiliste, les paramètres et hyperparamètres (moyennes, écarts-types, ...) sont recalés en utilisant des données expérimentales recueillies sur une famille de structures nominale-ment identiques. Dans ces méthodes, le nombre de paramètres à identifier est souvent très important, conduisant à la résolution d'un problème inverse probabiliste non convexe en grande dimension. Cette grande dimension interdit l'exploration directe de tout le domaine des paramètres d'entrée, et rend les méthodes d'optimisation globale et les approches proposées dans ce cadre, très coûteuses et difficiles à appliquer. Récemment, dans le contexte du recalage des modèles déterministes, une nouvelle méthode a été proposée pour pallier la difficulté liée à la grande dimension de l'espace des paramètres d'entrée. Cette méthode permet d'identifier séparément les paramètres d'entrée en remplaçant le problème inverse à résoudre par une série de problèmes inverses de petite dimension. Plus précisément, elle construit, pour chaque paramètre d'entrée, une nouvelle sortie de sorte que cette dernière soit uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux autres paramètres d'entrée.

Jusqu'à présent, cette approche a été seulement validée pour le recalage des structures dynamiques déterministes très simples. Ainsi, les travaux de cette thèse se focalisent sur l'objectif d'étendre cette nouvelle méthode, afin de la rendre utilisable sur des structures plus complexes. Dans la première partie, trois méthodologies sont proposées pour améliorer l'efficacité de la nouvelle méthode dans un cadre déterministe. La première méthodologie consiste à introduire du bruit dans le modèle à recaler ou de faire varier la valeur de terme de régularisation de la nouvelle méthode. La deuxième méthodologie consiste à construire pour chaque paramètre d'entrée, plusieurs nouvelles sorties au lieu d'une seule sortie. La troisième méthodologie consiste à décomposer les réponses numériques du modèle à recaler en des sous-groupes de composantes. En outre, une extension est proposée pour rendre cette dernière méthode applicable sur les cas où les paramètres d'entrée ne sont pas totalement séparables. Dans la deuxième partie, la nouvelle méthode est étendue au cadre probabiliste, pour prendre en compte et identifier de manière séparée les incertitudes de paramètres du système et celles liées aux erreurs de modélisation. Enfin dans la dernière partie, nous combinons la méthode proposée dans les parties précédentes et la méthode de recalage Bayésien.

Mots clés : Dynamique des structures, Recalage de modèles numériques, Analyse de sensibilité, Problèmes inverses, Modèle stochastique, Approche bayésienne.

Abstract

Abstract :

In the context of model validation, the model updating methods consist in calibrating the input parameters of the numerical model in order to reduce the distance between the experimental outputs and the numerical outputs. In stochastic numerical model, the parameters and hyperparameters (mean values, standard deviations, ...) are calibrated using experimental data collected on a family of structures nominally identical. In these methods, the number of parameters to be identified is often very large, and the updating of these parameters generally requires the solving of a non-convex probabilistic inverse problem in high dimension. This high dimension prohibits the direct exploration of the entire space of input parameters, and makes the global optimization methods and approaches proposed in this field, very expensive and difficult to be applied. Recently, in the context of deterministic model updating, a new method has been proposed to address the problem of the high dimension in model updating. This method enable to identify separately the input parameters by replacing the original inverse problem to be solved into a sequence of small dimension inverse problems (ideally of dimension one). More precisely, it constructs, for each input parameter, a new output so that this new output is only sensitive to this parameter and insensitive to the other parameters.

Until now, this approach has been only validated on simple deterministic dynamical structures. Therefore, the work of this thesis focuses on the objective of extending this new method, in order to make it applicable on the complex industrial structures. In the first part, three methodologies are proposed to improve the efficiency of the new method in the deterministic field. The first methodology consists of introducing noise into the model to be updated or varying the value of the regularization term of the new method. The second methodology is based on the principle of constructing for each input parameter, several new outputs instead of a single one. The third methodology consists in decomposing the output of the model to be updated into groups of components. In addition, an extension for the new method is presented in this part, to make it applicable for cases where the input parameters are not fully separable. In the second part, the new method is extended on the probabilistic context, to take into account and identify separately the uncertainties of system-parameters and modelling errors. Finally an extension of the Bayesian model updating is proposed by combining it with the separation method developed in this thesis.

Keywords : Structural dynamics, Model updating, Sensitivity analysis, Inverse problem, Stochastic modeling, Bayesian approach.

Introduction

Contexte et analyse bibliographique

Au cours du dernier siècle, beaucoup d'efforts ont été investis dans le domaine de l'ingénierie pour développer des modèles numériques complexes. Ces modèles sont le résultat d'un processus de modélisation mathématique-physique [8, 31, 54] dont le but est de faciliter la conception et l'optimisation d'un système spécifique en remplaçant les tests expérimentaux par des simulations numériques moins coûteuses [28, 34, 56]. Dans la dynamique des structures, ces modèles numériques sont largement utilisés dans de nombreux domaines [22, 30]. Dans l'aérospatiale, pour comprendre la dynamique des véhicules spatiaux et des avions, dans la mécanique pour contrôler les vibrations des machines, dans le génie civil pour étudier le comportement des structures soumises à des chargements dynamiques, . . . Une structure excitée par un chargement harmonique dont la fréquence coïncide avec la fréquence de résonance de la structure, conduit à des grands déplacements et à des contraintes sévères dans la structure, pouvant mener à la rupture de la structure. Donc, l'analyse numérique du comportement dynamiques d'une structure est une d'importance capitale lors de sa conception.

Dans de nombreux cas, un modèle numérique ne vise pas à représenter une structure réelle spécifique, mais une famille des structures réelles nominalement identiques, pour lesquelles leurs réponses expérimentales présentent des fluctuations statistiques liées à des variations des propriétés mécaniques, de la géométrie ou des conditions aux limites [16, 57]. Ces variations peuvent apparaître durant la fabrication des structures ou plus tard au cours de leur cycle de vie. Dans ces cas, un modèle numérique stochastique doit être construit pour représenter la totalité de la famille de structures, permettant ainsi de réaliser des conceptions et des analyses robustes [56]. La force d'excitation de la structure peut être aussi aléatoire [38]. L'aléa provient de différents mécanismes tels que les séismes, les forces mécaniques appliquées sur la structure, les sources acoustiques interne et externe, . . .

Parmi les méthodes de discrétisation utilisées dans le domaine de la dynamique de structure, la méthode d'élément finis est la plus employée [21, 29, 49], notamment grâce à sa capacité à représenter des structures complexes et d'effectuer différents types d'analyses linéaires ou non-linéaires. Cependant, en générale, les modèles éléments finis ne sont que des représentations simplifiées d'une structure réelle, et la comparaison des réponses calculées par ces modèles avec des réponses expérimentales a souvent montré des écarts non-négligeables, surtout pour les hautes fréquences, réduisant le degré de confiance que l'on peut porter à ces modèles [17, 21, 24, 34, 41]. Ces écarts proviennent habituellement d'hypothèses et d'approximations introduites durant la construction du modèle numérique. Ces erreurs sont regroupées en trois familles distinctes [1, 24, 28, 34, 40, 41] : erreurs numériques, erreurs de modèle et erreurs de données. Les erreurs numériques sont les erreurs résultant des méthodes numériques utilisées dans le modèle qui généralement fournissent des solutions approximatives de la solution exacte. Les erreurs de modèle sont des erreurs qui représentent les simplifications mathématiques dans les théories utilisées. Les erreurs de données sont les erreurs qui proviennent du manque de connaissances sur certains paramètres du modèle qui ne peuvent pas être spécifiées avec précision, en raison du manque de données expérimentales disponibles. On peut citer en exemple les connaissances imprécises concernant les propriétés exactes des matériaux, la géométrie de la structure, . . . Donc dans ce cas, un recalage pour le modèle numérique est nécessaire afin de réduire les

écarts entre les réponses numériques et les réponses expérimentales.

Le recalage des modèles éléments finis a été une recherche active au cours des deux dernières décennies, principalement en raison de sa capacité à améliorer la qualité des prédictions fournies par les modèles numériques [7, 10, 17, 21, 40]. Un modèle éléments finis recalé avec succès permet d'analyser les performances d'une structure spécifique dans diverses conditions de chargement, ainsi que de diagnostiquer et évaluer son état [40]. Le moyen couramment utilisé pour recaler un modèle numérique, est de modifier les hypothèses et/ou les paramètres du modèle jusqu'à ce que la corrélation entre les réponses numériques et les résultats expérimentaux soit satisfaisante [35]. Il existe deux types de méthode pour recaler un modèle dynamique : une méthode directe qui consiste à modifier directement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement du modèle, et une méthode indirecte qui consiste à calibrer certains paramètres physiques dans le modèle [4, 14, 15, 17, 18, 24, 46, 61]. Les deux méthodes sont basées sur des données observées expérimentalement, afin de réduire la distance entre les réponses numériques et les réponses expérimentales [1, 17, 34, 40].

Dans le cadre déterministe, plusieurs méthodes et techniques ont été développées pour améliorer la prévisibilité et la robustesse des modèles numériques. Pradhan *et al.* [40] calibrent les matrices de masse et d'amortissement en utilisant la méthode de la fonction de réponse normale. Baruch *et al.* [5] considèrent la matrice de masse comme exacte et ils recalent la matrice de raideur par ses vecteurs propres qui sont à leurs tours recalés en minimisant une norme euclidienne pondérée par la différence entre les vecteurs propres analytiques et ceux mesurés. Friswell et al [18] ont étendu le travail de Baruch *et al.* [5] en recalant les matrices d'amortissement et de raideur. La matrice de masse reste considérée une matrice exacte. Concernant les approches indirectes, Levin *et al.* [2] utilisent un algorithme génétique et de recuit simulé pour calibrer les paramètres de masse et de raideur d'une structure modélisée en élément finis. Sinha *et al.* [49] utilisent la méthode Eigensensitivity pour calibrer les paramètres d'entrée d'une structure aéronautique. Cette méthode consiste à minimiser la somme pondérée des carrés de l'erreur des fréquences propres de la structure en calibrant les paramètres d'entrée d'une façon itérative. Atalla *et al.* [2] propose une approche qui consiste à calibrer les paramètres d'entrée d'un modèle numérique en construisant un métamodèle entre ses réponses fréquentielles et ses paramètres d'entrée grâce un réseau de neurones.

Dans le contexte probabiliste, les incertitudes aléatoires dans un modèle sont dues aux incertitudes de données et aux incertitudes de modèle [15, 56]. Dans un modèle numérique stochastique, il y a deux types d'incertitudes : l'incertitude de paramètres du modèle et l'incertitude d'erreurs du modèle [8, 54]. Pour obtenir des réponses numériques avec une bonne robustesse, ces deux sources d'incertitudes doivent être prises en compte. Plusieurs approches ont été proposées à cette fin, dont la méthode des intervalles [36], les ensembles flous [62] et les approches probabilistes, . . . L'approche probabiliste est parmi les méthodes les plus efficaces pour modéliser les incertitudes dans un modèle stochastique, à cause sa capacité de prendre en compte à la fois les incertitudes des paramètres du système et les incertitudes d'erreurs du modèle [57].

L'approche probabiliste paramétrique consiste de modéliser l'incertitude de paramètres du modèle par des variables aléatoires dans lesquelles leurs distributions de probabilité doivent être estimées en utilisant des données disponibles. Cette estimation se fait par des approches directes ou indirectes [56]. L'approche directe consiste à estimer les distributions des paramètres directement (méthodes des noyaux [60]) s'il y a à disposition suffisamment de données expérimentales, ou par la résolution de problèmes inverses statistiques (méthode des moindres carrés ou la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les hyperparamètres, méthode bayésienne [56] pour estimer la probabilité *a posteriori* des hyperparamètres), . . . L'approche indirecte consiste à représenter les paramètres aléatoires par une application déterministe non linéaire, dans lesquelles les distribution des paramètres d'entrée de cette application est connue. Donc les distributions de probabilité de paramètres du modèle sont la transformation des distributions de probabilité des paramètres d'entrée de l'application. Cette application peut être construite par exemple par la méthode du Chaos Polynomial [37].

Mais, l’approche probabiliste paramétrique n’est pas capable et ni suffisante pour prendre en compte les incertitudes d’erreurs de modèle liées aux choix de modélisation. Deux méthodes principales sont susceptibles de modéliser les incertitudes d’erreurs de modèle. La première consiste d’introduire des bruits dans le modèle stochastique qui représentent la différence entre les réponses de modèle numérique et les réponses du système réel [10]. Dans ce cas, le modèle probabiliste *a posteriori* peut être construit par l’approche bayésienne en utilisant des données expérimentales. Mais en grande dimension, cette méthode demande beaucoup de données expérimentales et elle est inutile lorsque ces données sont indisponibles. La deuxième méthode est basée sur l’approche probabiliste non paramétrique [52] qui consiste à remplacer les matrices généralisées d’un modèle réduit par des matrices aléatoires.

Dans le cadre probabiliste, plusieurs méthodes ont été proposées pour recalibrer des modèles stochastiques, allant des stratégies de régularisation au recalage bayésien [27]. Soize *et al.* [57] considèrent deux méthodes pour recalibrer un modèle probabiliste d’un système dynamique incertain : (i) la méthode des moindres carrés, qui prend en compte la distance entre les réponses numériques et les données expérimentales et (ii) la méthode du maximum de vraisemblance combinée avec des méthodes de réduction statistique. Dans [42], les auteurs appliquent la méthode du maximum de vraisemblance avec des réductions statistiques pour identifier les incertitudes dans un modèle de contact entre le sol et une tête de forage. Batou *et al.* [9] utilisent le maximum de vraisemblance pour identifier un modèle de probabilité *a priori* optimal qui représente une famille de structures. Dans le cadre de l’évaluation des dommages, Simoen *et al.* [48] synthétisent plusieurs techniques de recalage de modèle, parmi elles, les approches floues et bayésiennes.

Problématique de la thèse

Dans un cadre déterministe ou probabiliste, les méthodes de recalage requièrent parfois le calibrage d’un nombre très important de paramètres ou d’hyperparamètres pour les systèmes dynamiques complexes [57]. Dans ce cas, la recherche des valeurs optimales pour ces paramètres passe par la résolution d’un problème inverse non-convexe en grande dimension. La résolution de ce problème inverse n’est pas possible par des méthodes d’exploration complète de l’espace des paramètres de recalage. De même la non-convexité empêche l’utilisation de l’algorithme de Newton-Raphson [3]. Les méthodes d’optimisation globale [32] tels les algorithmes génétiques sont incontournables. Cependant, ces algorithmes peuvent rater l’optimum global lors de l’exploration de l’espace des paramètres de recalage, et donc le recalage ne sera pas optimal [7, 29].

Récemment, dans un cadre purement déterministe, une nouvelle méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d’entrée (paramètres de recalage) a été proposée [7]. Cette méthode, appelée RBS (recalage basé sur la sensibilité) dans ce manuscrit, consiste à identifier indépendamment les valeurs optimales des paramètres d’entrée d’un modèle numérique spécifique afin de réduire les écarts entre ses réponses numériques et les réponses expérimentales [7]. La méthode permet de remplacer le problème inverse initial de grande dimension par une série de problèmes inverses de petite dimension (idéalement de dimension 1) pouvant tous être résolus séparément. Plus précisément, elle construit, pour chaque paramètre d’entrée, une sortie, construite par transformation de la sortie du modèle, de sorte que cette sortie soit uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux autres paramètres. Alors, en faisant subir aux réponses expérimentales les mêmes transformations, chaque paramètre d’entrée peut être identifié indépendamment des autres paramètres d’entrée en résolvant le problème inverse de dimension 1 qui lui est associé.

Jusqu’à présent, cette approche a été appliquée au recalage des structures dynamiques déterministes très simples. Le but de cette thèse est d’étendre cette méthode afin de la rendre applicable dans un contexte industriel avec des structures très complexes pouvant contenir des incertitudes. Les objectifs de cette thèse sont donc :

1. Améliorer l’efficacité de la méthode RBS en proposant des extensions.

2. Étudier l'impact des paramètres intervenant dans l'algorithme de la méthode RBS.
3. Étendre la méthode pour les cas où les paramètres d'entrée ne peuvent pas être clairement séparés.
4. Prendre en compte des incertitudes sur les paramètres et les incertitudes de modélisation.
5. Combiner l'approche RBS avec le recalage Bayésien de modèles numériques.

Plusieurs méthodes et algorithmes ont été développés pour répondre à ces objectifs, avec à chaque fois des validations utilisant des modèles numériques à fidélité variable afin de générer numériquement des réponses expérimentales.

Plan de la thèse

La suite de ce manuscrit de thèse est constitué de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, la méthode RBS est présentée en détail. La méthode est appliquée sur deux exemples. Pour le premier exemple, des données expérimentales sont disponibles, le deuxième exemple est purement numérique. En outre, l'ajout du terme de régularisation de la méthode RBS ou l'introduction de bruit sur les réponses du modèle à recalculer ont été étudiés. Dans le deuxième chapitre, trois méthodologies sont proposées dans un cadre déterministe pour améliorer l'efficacité de la méthode RBS. La première méthodologie consiste à construire, pour chaque paramètre d'entrée, une transformation multi-dimensionnelle, permettant ainsi d'augmenter la richesse des données utilisées pour le recalage de chaque paramètre. La deuxième méthodologie consiste à décomposer les réponses numériques du modèle à recalculer en des groupes de composantes choisis aléatoirement. La troisième méthodologie consiste à traiter les cas où les paramètres d'entrée ne sont pas totalement séparables.

Dans le troisième chapitre, la méthode RBS est étendue au cadre probabiliste, pour prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du système sans prendre en compte les incertitudes liées aux erreurs de modèle. La méthode permet de recalculer le modèle probabiliste en remplaçant le problème inverse probabiliste (maximum de vraisemblance) initial par une série de problèmes inverses de faible dimension plus simples à résoudre.

Le quatrième chapitre intègre un modèle probabiliste des incertitudes de modélisation. La méthode RBS permet, en plus de la séparation des paramètres incertains, de séparer les incertitudes de modélisation du reste des incertitudes du modèle, permettant ainsi de les identifier de manière séparée ou alternativement de manière itérative lorsqu'elles ne sont pas séparables.

Dans le cinquième chapitre, l'approche RBS est incorporée au recalage Bayésien permettant d'estimer la fonction de densité de probabilité *a posteriori* de chaque paramètre aléatoire de manière indépendante facilitant l'estimation de la fonction de vraisemblance ainsi que le stockage des lois de probabilité *a posteriori*. Enfin une conclusion générale des travaux de thèse est présentée.

Chapitre 1

Méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d'entrée (RBS)

Les méthodes de recalage consistent en général à calibrer les paramètres d'entrée d'un modèle numérique spécifique afin de réduire la distance entre les réponses numériques fournies par ce modèle et les réponses expérimentales. Le nombre de paramètres à calibrer peut être très important, conduisant à la résolution d'un problème inverse non convexe en grande dimension. Cette grande dimension interdit l'exploration directe de tout l'espace des paramètres d'entrée car cette approche serait évidemment trop coûteuse. La méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d'entrée (RBS) [7] a été proposée pour pallier la difficulté liée à la grande dimension des paramètres d'entrée. Cette méthode consiste à remplacer le problème inverse initial de grande dimension par une série de problèmes inverses de petite dimension (idéalement de dimension 1) qui peuvent tous être résolus séparément. Plus précisément, pour chaque paramètre d'entrée, une nouvelle sortie est construite en introduisant une transformation des réponses fournies par le modèle numériques, de sorte que cette nouvelle sortie soit uniquement sensible à ce paramètre et donc insensible aux autres paramètres d'entrée. Alors, en faisant subir aux réponses expérimentales les mêmes transformations, chaque paramètre d'entrée peut être identifié indépendamment des autres paramètres en résolvant le problème inverse qui lui est associé.

1.1 Séparation des paramètres d'entrée

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in C_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ le vecteur des n paramètres d'entrée (paramètres de recalage) où $C_{\mathbf{x}}$ est l'espace admissible pour ces paramètres. Soit $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des m sorties d'un modèle numérique à recalage et \mathbf{y}^{exp} le vecteur des sorties expérimentales correspondant. En dynamique des structures, ce vecteur des sorties peut correspondre à des réponses temporelles ou fréquentielles. L'objectif du recalage est de trouver la valeur optimale \mathbf{x}^{opt} du vecteur \mathbf{x} de sorte que le vecteur des réponses numériques $\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt})$ soit très proche du vecteur \mathbf{y}^{exp} . La distance entre les réponses numériques $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} peut être quantifiée par l'erreur aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^{exp}\|$. Donc, le vecteur optimal \mathbf{x}^{opt} correspond à la solution du problème inverse suivant :

$$\mathbf{x}^{opt} = \underset{\mathbf{x} \in C_{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^{exp}\|. \quad (1.1)$$

Lorsque le nombre de paramètres de recalage est important, la résolution de ce problème inverse non convexe nécessite d'avoir recours à des algorithmes d'optimisation globale comme les algorithmes génétiques, l'optimisation par essais particuliers, le recuit simulé, ... [39]. Ces méthodes peuvent explorer efficacement l'espace

des paramètres d'entrée. Cependant cette efficacité se réduit avec l'augmentation du nombre de paramètres d'entrée à recalculer, ce qui ralentit la convergence de ces méthodes. Ces méthodes convergent théoriquement vers le minimum global. Cependant, compte tenu de la restriction des ressources numériques, ces méthodes ne garantissent pas que c'est bien le minimum global (et non pas un minimum local) qui a été trouvé.

La méthode RBS consiste à identifier séparément chaque paramètre d'entrée $x_i, \{i = 1, \dots, n\}$, en transformant les sorties numériques du modèle en une nouvelle sortie, de sorte que cette nouvelle sortie soit uniquement sensible à ce paramètre d'entrée x_i , et surtout insensible aux autres paramètres d'entrée. Cette transformation est définie de la manière suivante :

$$z_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})), \quad (1.2)$$

où $z_i(\mathbf{x})$ est la nouvelle sortie construite pour identifier le i -ème paramètre d'entrée x_i , $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n_g})$ est un vecteur contenant n_g fonctions de base et $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_g})$ est le vecteur de coordonnées dans cette base. Lorsque $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, z_i est juste une combinaison linéaire des sorties numériques du modèle. Des fonctions polynomiales plus riches peuvent être introduites dans la base fonctionnelle également.

1.2 Calcul du vecteur de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}_i$

Le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i$ contient les coordonnées de la sortie transformée z_i , associée au paramètre x_i , dans la base des fonctions $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n_g})$. L'objectif est de construire z_i de sorte qu'elle soit uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres d'entrée, afin d'identifier la valeur optimale de x_i indépendamment des autres paramètres d'entrée en résolvant un problème inverse unidimensionnel. Étant donné que, une fois la base fonctionnelle choisie, z_i est complètement déterminée par le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i$. Ce dernier doit être calculé de sorte que z_i soit uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres. Les indices de Sobol [50] permettent de quantifier la sensibilité d'une fonction à un paramètre d'entrée. C'est donc naturellement que ces indices sont utilisés pour calculer la valeur optimale du vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i$. Dans cette section, la méthodologie pour calculer cette valeur optimale est présentée.

1.2.1 Indices de Sobol

Soit $Z = g(\mathbf{X})$, une fonction scalaire aléatoire d'un modèle numérique spécifique, qui dépend de n variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ considérées comme indépendantes les unes des autres. Alors, si la variable d'entrée X_i est fixée à une valeur x_i , la variance de la fonction Z va diminuer. Cette diminution quantifie la sensibilité de la fonction Z à la variable d'entrée X_i [23]. Et plus la variance $V(Z)$ diminue, plus Z est sensible à la variable d'entrée X_i . Le problème de cet indicateur de sensibilité est le choix de la valeur x_i de variable X_i . Ce problème peut être résolu en prenant l'espérance de la diminution de la variance $V(Z)$. On introduit ainsi la quantité $E_{X_i}(V_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i))$ tel que $\mathbf{X}_{\sim i}$ est un vecteur aléatoire pour lequel les composantes sont les mêmes composantes de \mathbf{X} sauf X_i . Étant donné que $V(Z) = E_{X_i}(V_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i)) + V_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i))$ [33], la quantité $V_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i))$ peut être aussi utilisée comme un indicateur pour quantifier la sensibilité de la fonction Z vis-à-vis du paramètre X_i . Le rapport S_i entre cet indicateur et la variance $V(Z)$ défini par :

$$S_i = \frac{V_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i))}{V(Z)}, \quad (1.3)$$

s'appelle l'indice de sensibilité de premier ordre de X_i et il quantifie la sensibilité de la fonction Z à la variable d'entrée X_i . Donc plus la valeur de S_i est grande, plus la fonction Z_i est sensible à X_i . Selon Sobol [50], si la fonction g est intégrable sur $[0, 1]^n$, Z peut être décomposée sous la forme suivante :

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g_0 + \sum_{i=1}^n g_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{i,j}(X_i, X_j) + \dots + g_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n), \quad (1.4)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} g_0 &= E(Z), \\ g_i(X_i) &= E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i) - E(Z), \\ g_{i,j}(X_i, X_j) &= E_{\mathbf{X}_{\sim ij}}(Z|X_i, X_j) - g_i(X_i) - g_j(X_j) - E(Z), \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les indices plus élevés.

Donc la variance de Z se décompose en :

$$V(Z) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1,\dots,n}, \quad (1.5)$$

tel que :

$$\begin{aligned} V_i &= V_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z|X_i)), \\ V_{i,j} &= V_{X_i, X_j}(E_{\mathbf{X}_{\sim ij}}(Z|X_i, X_j)) - V_i - V_j, \\ V_{i,j,k} &= V_{X_i, X_j, X_k}(E_{\mathbf{X}_{\sim ijk}}(Z|X_i, X_j, X_k)) - V_{i,j} - V_{i,k} - V_{j,k} - V_i - V_j - V_k, \\ &\dots, \\ V_{1,\dots,n} &= V(Z) - \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} V_{i_1 \dots i_{n-1}}. \end{aligned}$$

En divisant l'équation (1.5) par $V(Z)$, on obtient :

$$1 = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_{i,j} + \dots + S_{1\dots n}, \quad (1.6)$$

où S_i est l'indice de sensibilité de premier ordre de X_i , $S_{i,j}$ est l'indice de sensibilité d'ordre deux entre X_i et X_j , ..., $S_{1\dots n}$ est l'indice de sensibilité d'ordre n .

L'indice de sensibilité d'ordre deux $S_{i,j}$, exprime la sensibilité de la fonction Z à l'interaction entre X_i et X_j qui n'est pas prise en compte dans l'effet de la variable X_i ou X_j seule. Et ainsi de suite jusqu'à $S_{1\dots n}$, qui exprime la sensibilité de la fonction Z à l'interaction entre les variables X_1, \dots, X_n .

L'indice de sensibilité total S_{T_i} est un indice qui exprime la sensibilité de la fonction Z à la variable X_i en prenant en compte toutes les interactions entre ce variable et les autres variables. Alors, l'indice de sensibilité total S_{T_i} est la somme de tous les indices de sensibilité relatifs à la variable X_i :

$$S_{T_i} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{i,j} + \dots + S_{1\dots n}. \quad (1.7)$$

Lorsque le nombre de variables n est très grand, le nombre d'indices de sensibilité devient trop important pour espérer pouvoir calculer l'indice de sensibilité total S_{T_i} . Le moyen le plus pratique pour calculer l'indice de sensibilité total S_{T_i} est de considérer $V_{\mathbf{X}_{\sim i}}(E_{X_i}(Z|\mathbf{X}_{\sim i}))/V(Z)$ comme l'indice de sensibilité de premier ordre de $\mathbf{X}_{\sim i}$, alors la quantité $1 - V_{\mathbf{X}_{\sim i}}(E_{X_i}(Z|\mathbf{X}_{\sim i}))/V(Z)$ est la somme de tous les indices de sensibilité relatifs à la variable X_i . Donc l'indice S_{T_i} peut être calculé par la formule suivante :

$$S_{T_i} = 1 - \frac{V_{\mathbf{X}_{\sim i}}(E_{X_i}(Z|\mathbf{X}_{\sim i}))}{V(Z)} = \frac{E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(V_{X_i}(Z|\mathbf{X}_{\sim i}))}{V(Z)}. \quad (1.8)$$

Plusieurs estimateurs ont été proposés dans la littérature pour calculer les indices de sensibilité, parmi eux :

TABLEAU 1.1 – Estimateurs des indices de Sobol.

pour $S_i, V_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Z X_i)) =$	
$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ g(\mathbf{A})_j g(\mathbf{B}_{\mathbf{A}}^i)_j \right\} - g_0^2$	[50]
$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\mathbf{B})_j (g(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^i)_j - g(\mathbf{A})_j)$	[45]
$V(Z) - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (g(\mathbf{B})_j - g(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^i)_j)^2$	[25]
pour $S_{T_i}, E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(V_{X_i}(Z \mathbf{X}_{\sim i})) =$	
$V(Z) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ g(\mathbf{A})_j g(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^i)_j \right\} + g_0^2$	[20]
$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\mathbf{A})_j (g(\mathbf{A})_j - g(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^i)_j)$	[51]
$\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (g(\mathbf{A})_j - g(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^i)_j)^2$	[45]

Dans le tableau 1.1, N est le nombre d'échantillons, $[A]$ et $[B]$ sont des matrices d'échantillons de paramètres de taille $n \times N$, $[A_{\mathbf{B}}^i]$ est une matrice construite de sorte que sa i -ème ligne provient de la matrice $[B]$ et les autres lignes proviennent de la matrice $[A]$ et $[B_{\mathbf{A}}^i]$ est la matrice construite de sorte que sa i -ème ligne provient de la matrice $[A]$ et les autres lignes proviennent de la matrice $[B]$, $(\mathbf{A})_j$ est le vecteur correspondant à la j -ème colonne de la matrice A et $(\mathbf{B}_{\mathbf{A}}^i)_j$ est le vecteur correspondant à la j -ème colonne de la matrice $[B_{\mathbf{A}}^i]$.

1.2.2 Identification du vecteur de coordonnées α_i

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, la nouvelle sortie $z_i(\mathbf{x})$ est construite afin d'identifier le i -ème paramètre entrée x_i indépendamment des autres paramètres en rendant cette nouvelle sortie uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres. D'après la formule d'indice de sensibilité total défini par l'équation (1.8), et en remplaçant le vecteur des paramètres d'entrée \mathbf{x} par un vecteur aléatoire \mathbf{X} , l'indice de sensibilité total $S_{T_{i,j}}$ de $Z_i = z_i(\mathbf{X})$ par rapport à la variable d'entrée X_j est déterminé par la formule suivante :

$$S_{T_{i,j}} = \frac{E_{\mathbf{X}_{\sim j}}(V_{X_j}(Z_i|\mathbf{X}_{\sim j}))}{V(Z_i)}. \quad (1.9)$$

En injectant l'équation (1.2) dans l'équation (1.9), on obtient :

$$S_{T_{i,j}}(\alpha_i) = \frac{\alpha_i^T [C^j] \alpha_i}{\alpha_i^T [C] \alpha_i}, \quad (1.10)$$

où $[C^j] = E_{\mathbf{X}_{\sim j}}(\text{Cov}_{X_j}(\mathbf{F}|\mathbf{X}_{\sim j}))$, $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{X}))$ et $[C] = [\text{Cov}(\mathbf{F})]$.

Pour chaque paramètre x_i , $z_i(\mathbf{x})$ est complètement définie par α_i et doit être uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres d'entrée. Le vecteur optimal α_i^{opt} de α_i doit ainsi satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} S_{T_{i,i}}(\alpha_i^{opt}) &= 1, \\ S_{T_{i,j}}(\alpha_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.11)$$

On peut démontrer aisément que ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_i^{opt}) &= 1, \\ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec $\tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^j] \boldsymbol{\alpha}_i$.

Donc, si les conditions (1.12) sont atteintes, la nouvelle sortie $z_i(\boldsymbol{x})$ est uniquement sensible à x_i avec une variance $V(Z_i) = E_{\mathbf{X} \sim \mathbf{i}}(V_{X_i}(Z_i | \mathbf{X} \sim \mathbf{i})) = (\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})^T [C^i] \boldsymbol{\alpha}_i^{opt} = 1$.

Les deux équations (1.12) sont résolues par moindres carrés. Ainsi $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ est calculé en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{opt} = \underset{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^{n_g}}{\operatorname{argmin}} \Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i), \quad (1.13)$$

où

$$\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i) = (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)^2 + \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i))^2 \right\}. \quad (1.14)$$

Il existe plusieurs algorithmes de minimisation permettant de résoudre ce problème. La méthode de Newton-Raphson est ici bien adaptée car le gradient $\nabla \Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i)$ et le Hessien $[H(\boldsymbol{\alpha}_i)]$ de la fonctionnelle $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i)$ peuvent être calculés explicitement, efficacement et à moindre coût :

$$\nabla \Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i) = 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)[C^i] \boldsymbol{\alpha}_i + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) [C^j] \boldsymbol{\alpha}_i \right\}, \quad (1.15)$$

et

$$[H(\boldsymbol{\alpha}_i)] = 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)[C^i] + 8[C^i] \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^i]^T + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) [C^j] + 2[C^j] \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^j]^T \right\}. \quad (1.16)$$

Ainsi, le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ est calculé de manière itérative de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{k+1} = \boldsymbol{\alpha}_i^k - [H(\boldsymbol{\alpha}_i^k)]^{-1} \nabla \Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i^k). \quad (1.17)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_i^k$ est le vecteur de coordonnées à la k -ème itération.

La matrice hessienne peut être mal conditionnée. Pour pallier ce problème un terme de régularisation est ajouté à la fonctionnelle $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i)$. La régularisation de Tikhonov est l'une des méthodes de régularisation les plus utilisées. La méthode consiste à modifier légèrement le problème de minimisation de départ afin de le rendre plus convexe [12, 59]. Ainsi, les équations (1.14), (1.15) et (1.16) sont remplacées par

$$\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i) = (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)^2 + \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i))^2 \right\} + \lambda \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (1.18)$$

$$\nabla \Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i) = 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)[C^i] \boldsymbol{\alpha}_i + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) [C^j] \boldsymbol{\alpha}_i \right\} + 2\lambda \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (1.19)$$

$$[H(\boldsymbol{\alpha}_i)] = 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)[C^i] + 8[C^i] \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^i]^T + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) [C^j] + 2[C^j] \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^j]^T \right\} + 2\lambda [I], \quad (1.20)$$

où λ est un nombre réel positif qui quantifie le degré de régularisation.

L'indice $\tilde{S}_{T_{i,i}}$ étant toujours plus petit que 1, on a donc $(\tilde{S}_{T_{i,i}} - 1) < 0$. Ainsi la matrice hessienne n'est pas toujours définie positive à moins que λ soit suffisamment grand. Par contre, en s'approchant de la solution optimale $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$, $(\tilde{S}_{T_{i,i}} - 1) \approx 0$, ceci rend la matrice hessienne localement définie positive et par conséquent la fonction $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i)$ convexe. D'où l'importance de choisir un coefficient de régularisation λ suffisamment grand pour garantir la convexité de la fonction $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i)$ mais suffisamment petit pour limiter son impact sur la solution optimale. Pour déterminer la bonne valeur de λ , il est conseillé de donner à λ une très petite valeur, puis de l'augmenter jusqu'à obtenir une convergence de la méthode.

Les matrices $[C^j]$ peuvent être estimées numériquement en utilisant les estimateurs numériques présentés dans la section 1.2.1 :

$$[C^i] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A})_j) (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A})_j) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A}_B^i)_j))^T \quad (1.21)$$

ou

$$[C^i] = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A})_j) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A}_B^i)_j)) (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A})_j) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{A}_B^i)_j))^T. \quad (1.22)$$

Afin de visualiser les solutions optimales $\boldsymbol{\alpha}_1^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_2^{opt}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n^{opt}$, on introduit la matrice de sensibilité $[S]$ dont le terme correspondant à la i -ème ligne et la j -ème colonne est $S_{T_{i,j}}$. Si les paramètres d'entrée sont séparables (les nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, n\}$ sont respectivement sensibles à $x_i, \{i = 1, \dots, n\}$ uniquement) alors la matrice de sensibilité $[S]$ est proche de la matrice de l'identité. Dans le cas contraire, c'est à dire si au moins un paramètre est inséparable, alors des termes extra-diagonaux sont présents et il faut alors enrichir la base fonctionnelle $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ afin de rendre ce paramètre séparable.

1.3 Identification des paramètres d'entrée

Nous rappelons que les valeurs optimales \mathbf{x}^{opt} correspondent aux valeurs des paramètres de recalage pour lesquelles la distance entre $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ et \mathbf{y}^{exp} est minimale (1.1). En exploitant la méthode de séparation présentée précédemment, ces valeurs peuvent être identifiées indépendamment les unes des autres, en transformant les sorties numériques $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ en un ensemble de nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, n\}$, de sorte que chaque z_i soit uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres d'entrée. Après avoir calculé les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_1^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_2^{opt}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n^{opt}$ qui définissent respectivement $z_i, \{i = 1, \dots, n\}$, chaque sortie z_i doit être uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres. Cette condition peut être vérifiée par deux façons : soit par la matrice de sensibilité $[S]$ qui doit être proche de la matrice d'identité, soit par la quantification de $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})$ qui doit être suffisamment petite. Après avoir vérifié cette condition, chaque valeur optimale x_i^{opt} peut être identifiée indépendamment des autres paramètres d'entrée en résolvant le problème inverse de dimension 1 suivant :

$$x_i^{opt} = \underset{x_i \in C_{x_i}}{\operatorname{argmin}} \| (\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - (\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}) \| \quad (1.23)$$

où $(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp})$ est la transformation des réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} . Pour chaque paramètre x_i , les valeurs des autres paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ sont choisies d'une façon aléatoire dans l'espace admissible. Si les paramètres sont bien séparés, les valeurs de ces autres paramètres n'impactent pas la solution.

1.4 Application de l'algorithme RBS

Dans cette section, la méthode RBS qui a été présentée précédemment, est appliquée sur deux modèles numériques différents :

- Le premier est un modèle simple, qui représente une structure de 3 étages.
- Le deuxième est un modèle plus complexe, qui représente un pont.

Le premier modèle utilise des données expérimentales qui ont été utilisées dans [7].

1.4.1 Premier modèle

Dans cette partie, nous recalons un modèle numérique d'un système à trois masses (figure 1.2) en utilisant des réponses mesurées expérimentalement sur une structure métallique de 3 étages (figure 1.1). Le recalage sera réalisé par le calibrage des masses (m_1, m_2, m_3) et des raideurs (k_1, k_2, k_3) du modèle numérique en appliquant la méthode RBS.

1.4.1.1 Modèle expérimental

Le modèle expérimental est une structure de 3 étages, composée de 4 blocs d'aluminium connectés par des fines plaques d'aluminium (figure 1.1). Les blocs ont les dimensions suivantes : 20 cm de longueur, 15 cm de largeur et 2 cm d'épaisseur, tandis que celles des plaques sont : 15 cm de longueur, 1,5 cm de largeur et 1,2 mm d'épaisseur. Le bloc inférieur de la structure est encastré dans le sol. Le bloc supérieur (bloc A) a été excité par un choc au marteau suivant la direction x . L'accélération de chaque bloc a été mesurée par un accéléromètre. Les réponses fréquentielles en accélération (FRF) mesurées suivant la direction x pour le bloc supérieur (bloc A) et celui en dessous (bloc B) sont présentées dans la figure 1.3. La concaténation de ces réponses est notée \mathbf{y}^{exp} . D'après cette figure, on remarque que les réponses expérimentales présentent 3 pics qui correspondent aux 3 modes élastiques de la structure.

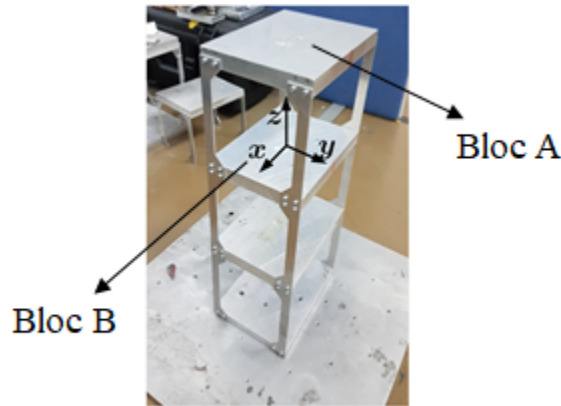


FIGURE 1.1 – Structure expérimentale.

1.4.1.2 Modèle numérique

Le modèle numérique, présenté dans la figure 1.2, est composé de trois masses reliées par des ressorts et des amortisseurs pour représenter d'une façon simplifiée la structure expérimentale (figure 1.1). Les masses sont $m_1 = m_2 = m_3 = 1,63 \text{ kg}$, les raideurs sont $k_1 = k_2 = k_3 = 13,5 \text{ KN/m}$ et les taux d'amortissement sont $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1,4 \times 10^{-3}$ tel que ($\xi_i = \frac{d_i}{2\sqrt{m_i k_i}}, i = 1, 2, 3$). Ces valeurs initiales pour ces paramètres ont été déterminées par des essais statiques et dynamiques sur une structure ne contenant que deux blocs dont l'un est fixé. Une fois les matrices de masse, raideur et amortissement assemblées, les réponses fréquentielles en accélérations (FRF) sont calculées suivant la direction x pour les blocs A et B (dont la concaténation est notée \mathbf{y}^{num}) et sont présentées dans la figure 1.4 avec celles mesurées expérimentalement (\mathbf{y}^{exp}). D'après cette figure, on remarque qu'il existe des écarts entre les réponses numériques et les réponses expérimentales. Ces écarts viennent des erreurs de modélisation et des valeurs choisies pour les paramètres du modèle.

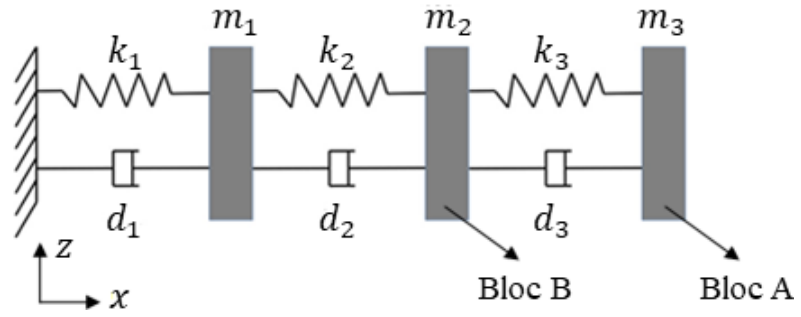


FIGURE 1.2 – Système à trois masses.

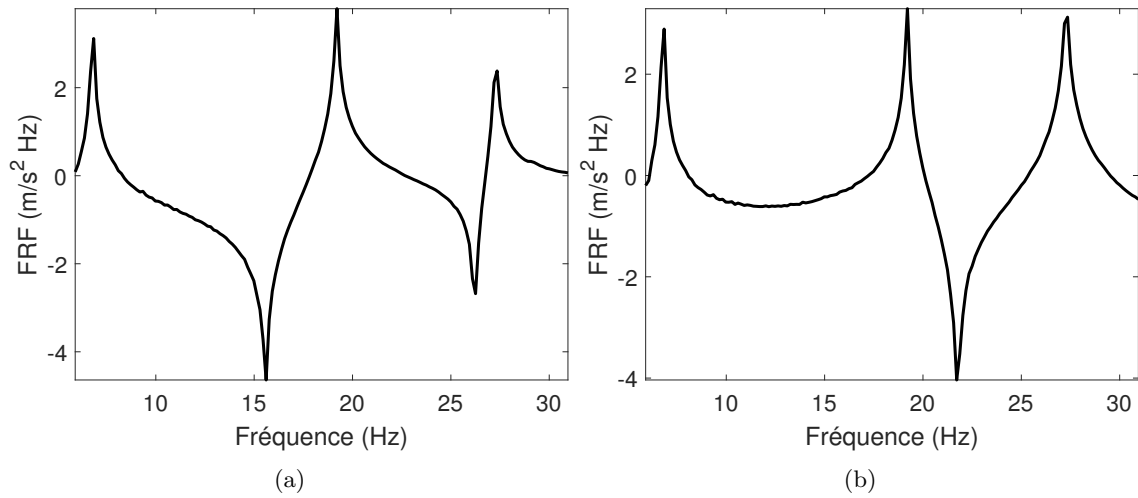


FIGURE 1.3 – Réponses fréquentielles en accélération (FRF) mesurées expérimentalement suivant la direction x pour le bloc A (a) et le bloc B (b).

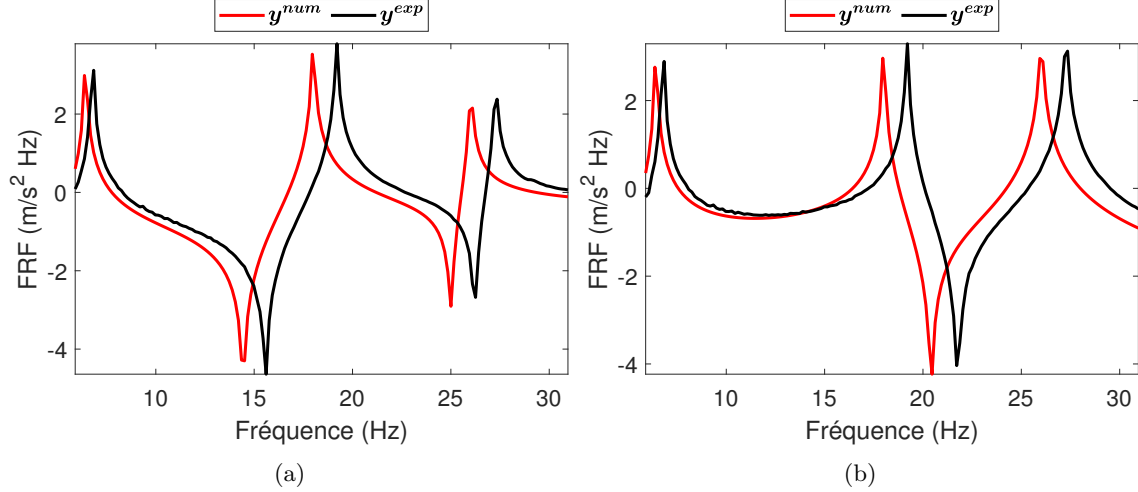


FIGURE 1.4 – Réponses fréquentielles en accélération numérique \mathbf{y}^{num} et expérimentale \mathbf{y}^{exp} suivant la direction \mathbf{x} pour le bloc A (a) et le bloc B (b).

1.4.1.3 Recalage du modèle numérique

Pour recalibrer le modèle numérique, nous avons décidé de calibrer les masses m_1, m_2, m_3 et les raideurs k_1, k_2, k_3 du modèle numérique en utilisant la méthode RBS. Les taux d'amortissement ont été fixés à $1,4 \times 10^{-3}$ à cause de leurs faibles impacts sur les réponses numériques du modèle par comparaison aux paramètres m_1, m_2, m_3, k_1, k_2 et k_3 . On a donc $\mathbf{x} = (m_1; m_2; m_3; k_1; k_2; k_3)$.

Les paramètres d'entrée ont été variés en introduisant des coefficients multiplicatifs variant de manière logarithmique dans l'intervalle $[0,8; 1,1]$. Le vecteur des fonctions de base est choisi de sorte que $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ (fonction identité). La matrice $[C^i]$ pour chaque paramètre d'entrée x_i a été estimée selon l'équation (1.22) avec 5000 échantillons de Monte Carlo. Les vecteurs de coordonnées optimales $\alpha_i^{opt} \{i = 1, \dots, 6\}$ ont été calculés selon la méthode de Newton-Raphson (1.17) en partant de valeurs aléatoires pour $\alpha_i^1 \{i = 1, \dots, 6\}$ et avec $\lambda = 10^{-5}$, pour construire pour chaque paramètre d'entrée x_i , une nouvelle sortie z_i sensible uniquement à x_i et insensible aux autres paramètres.

La matrice de sensibilité $[S]$ pour laquelle nous rappelons que ses termes sont $S_{T_{i,j}}$ et représentent la sensibilité des nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 6\}$ vis-à-vis des paramètres d'entrée $x_j, \{j = 1, \dots, 6\}$, est représentée dans la figure 1.5. Cette matrice est très proche de la matrice d'identité, ce qui indique que les paramètres d'entrée $x_i, \{i = 1, \dots, 6\}$ sont quasiment séparés les uns des autres, et peuvent donc être identifiés indépendamment.

La figure 1.6 représente les valeurs absolues de $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 6\}$ pour chaque paramètre d'entrée. D'après cette figure, on remarque que la plupart des indices des vecteurs $\alpha_i^{opt} \{i = 1, \dots, 6\}$ ont des valeurs non nulles et assez bien réparties. Cela signifie que la majorité des composantes des réponses $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ sont bien prises en compte dans les nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 6\}$ pour être recalées, ce qui indique que beaucoup de données expérimentales seront exploitées lors du recalage.

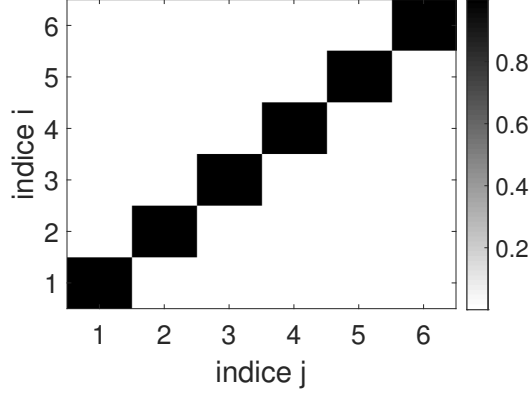


FIGURE 1.5 – Matrice de sensibilité $[S]$.

Après avoir calculé α_i^{opt} , $\{i = 1, \dots, 6\}$, 10 tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale de x_i^{opt} , en donnant aux paramètres x_j , $\{j \neq i\}$ dans l'équation (1.23) des nouvelles valeurs (choisies aléatoirement) pour chaque test réalisé. Dans chaque test et pour chaque paramètre x_i , la valeur optimale x_i^{opt} est identifiée en résolvant le problème inverse de dimension 1 présenté dans l'équation (1.23) en explorant l'intervalle de variation de ce paramètre x_i discrétisé en 101 points. Après avoir réalisé ces 10 tests pour chaque paramètre d'entrée, 10 valeurs de \mathbf{x}^{opt} ont été calculées. Leurs erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ sont présentées dans le tableau 1.2. La différence entre les valeurs obtenues est due au fait que la séparation n'est pas parfaite. Parmi ces valeurs de \mathbf{x}^{opt} calculés, le vecteur \mathbf{x}^{opt} qui a donné la plus faible erreur aux moindres carrés (1,7) est le suivant :

$$\mathbf{x}^{opt} = (1,439; 1,462; 1,529; 1,429 \times 10^4; 1,279 \times 10^4; 1,371 \times 10^4).$$

TABLEAU 1.2 – Erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ pour les 10 tests réalisés.

Test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\ $	2,43	4,45	1,94	4,94	2,45	1,70	2,83	1,80	3,10	4,94

Donc les nouvelles valeurs des paramètres d'entrée du modèle numérique après recalage sont : $m_1 = 1,439 \text{ kg}$, $m_2 = 1,462 \text{ kg}$, $m_3 = 1,529 \text{ kg}$, $k_1 = 14,29 \text{ KN/m}$, $k_2 = 12,79 \text{ KN/m}$ et $k_3 = 13,71 \text{ KN/m}$. L'erreur aux moindres carrés initiale était de 20,91. Après recalage, cette erreur est descendue à 1,7.

La figure 1.7 représente les réponses numériques non recalées (\mathbf{y}^{num}) du modèle, les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) et les réponses numériques après recalage (\mathbf{y}^{rec}). D'après cette figure, nous pouvons clairement constater que le calibrage des masses et des raideurs du modèle numérique par la méthode RBS a considérablement réduit les écarts entre les réponses expérimentales et les réponses numériques.

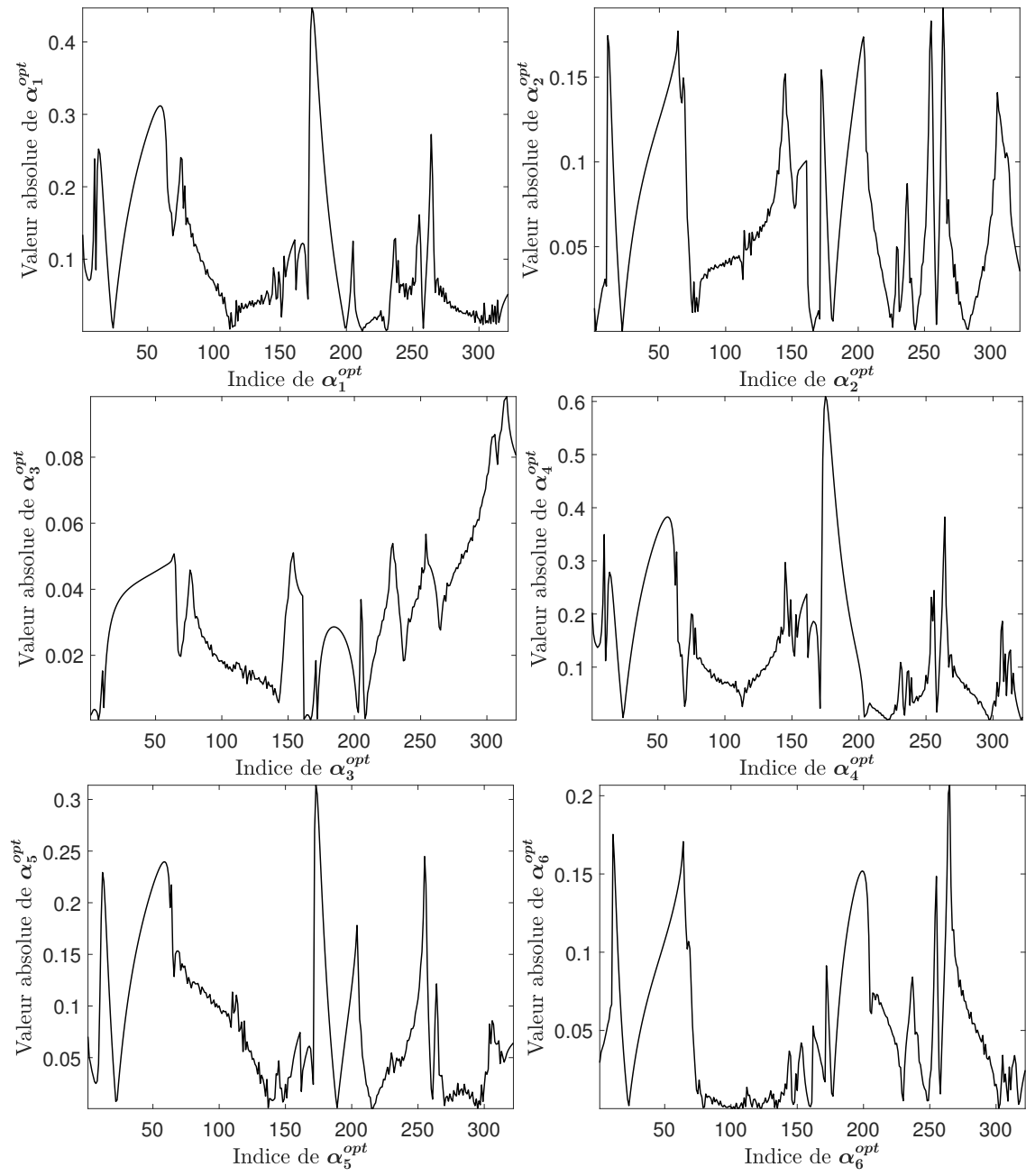


FIGURE 1.6 – Valeurs absolues des composantes de $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 6\}$

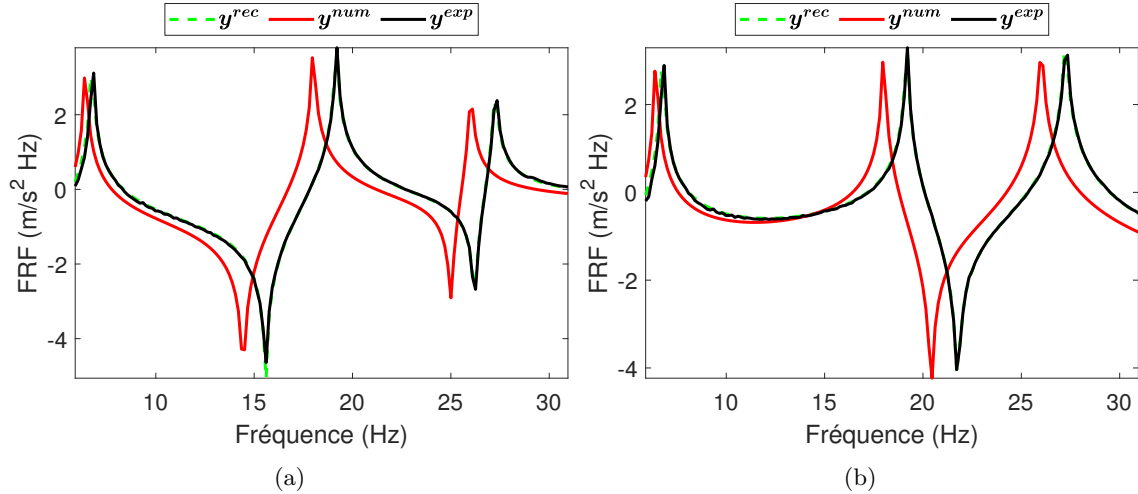


FIGURE 1.7 – Comparaison des réponses fréquentielles en accélération pour le modèle numérique recalé (y^{rec}), le modèle numérique non recalé (y^{num}) et les réponses expérimentales (y^{exp}) pour le bloc A (a) et le bloc B (b).

1.4.2 Deuxième modèle

Dans cette partie, un modèle de pont plus complexe que l'exemple précédent 1.4.1 est analysé et recalé. Pour cette exemple purement numérique, deux modèles seront utilisés. Le premier modèle à haute fidélité est précis et servira à générer numériquement des réponses expérimentales de référence. Le second modèle a une fidélité moindre et sera le modèle à recalé en appliquant la méthode RBS.

1.4.2.1 Modèle de pont à haute fidélité

Le modèle de pont à haute fidélité est une structure numérique modélisée par éléments finis (figure 1.8). Cette structure est composée d'un tablier, de 4 poteaux et de 4 appuis (situés entre les poteaux et le tablier). Les dimensions de ces éléments sont présentées dans le tableau 1.3. La distance entre chaque poteau est 15 m et les appuis sont placés aux milieux des faces supérieures des poteaux. Les faces inférieures des poteaux sont encastées. Le même matériau est choisi pour les poteaux, les appuis et le tablier. Il a les propriétés suivantes : Module d'Young = $6,31 \times 10^{10} \text{ Pa}$, coefficient de poisson = 0,29 et masse volumique = 1800 kg/m^3 . La structure est discrétisée en 138107 éléments tétraédriques. Le modèle réduit a été construit par analyse modale avec 25 modes élastiques allant de 6 Hz à 68,7 Hz. La matrice d'amortissement généralisée est construite en utilisant un modèle de Rayleigh avec un taux d'amortissement de 4% pour le premier et le dernier mode.

TABLEAU 1.3 – Dimensions des éléments du modèle de pont à haute fidélité.

Élément	Longueur (m)	Largeur (m)	Hauteur (m)
Tablier	46,6	9,3	1
Appui	1,2	0,5	1,25
Poteau	3,6	1,6	8

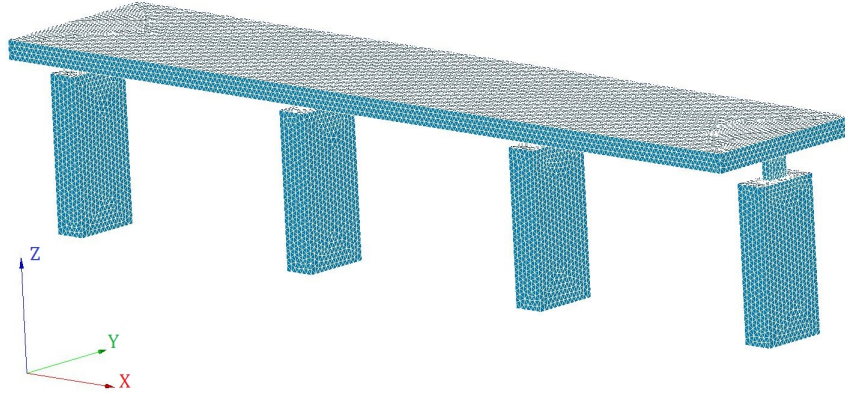


FIGURE 1.8 – Maillage du modèle de pont à haute fidélité.

La structure a été excitée au milieu de la face supérieure de 2-ème appui par trois forces unitaires suivant les directions x , y et z . Les réponses numériques fréquentielles en vitesse observées suivant les directions y et z sur les nœuds P_1 , P_2 et P_3 sont présentées dans les figures 1.9 et 1.10. La concaténation de ces réponses sera notées \mathbf{y}^{exp} .

- Nœud P_1 : situé au milieu de la face supérieure de 2-ème appui (même nœud que celui de l'excitation).
- Nœud P_2 : situé au milieu de la face inférieure de 3-ème appui.
- Nœud P_3 : situé au milieu de la face du poteau et à une hauteur de 6 m.

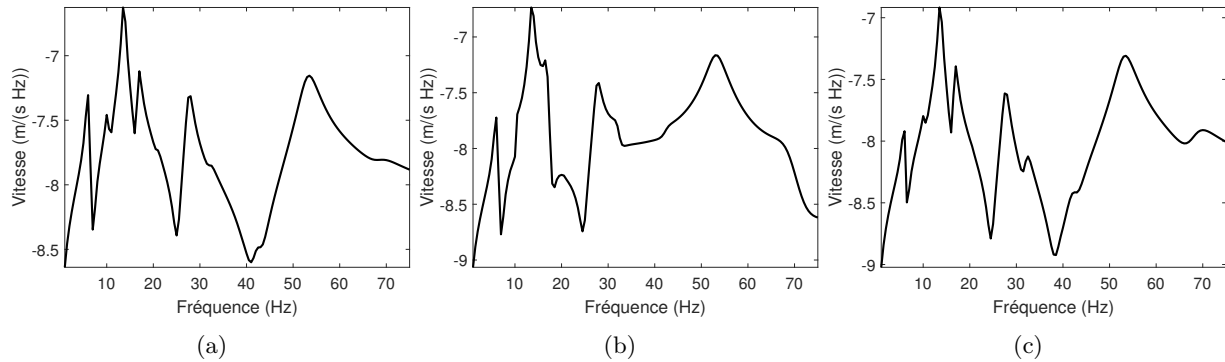


FIGURE 1.9 – Réponses numériques fréquentielles en vitesse du modèle de pont à haute fidélité observées sur les nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction y .

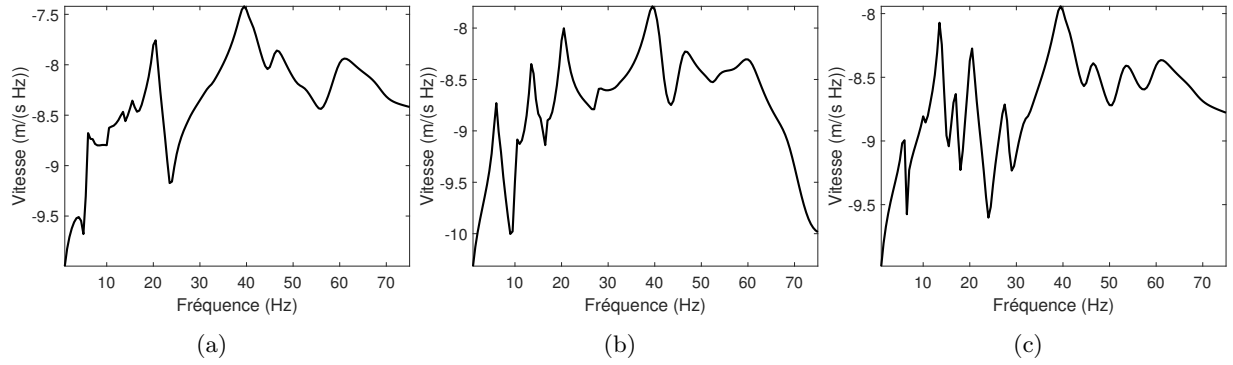


FIGURE 1.10 – Réponses numériques fréquentielles en vitesse du modèle de pont à haute fidélité observées sur les nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction z .

1.4.2.2 Modèle de pont à faible fidélité

Le modèle de pont à faible fidélité est aussi une structure numérique modélisée par éléments finis (figure 1.11). Le tablier, les poteaux et les appuis sont modélisés par des plaques de Reissner-Mindlin avec les mêmes dimensions que celles du modèle de pont à haute fidélité présentées dans le tableau 1.3. Les bords inférieurs des poteaux sont encastrés. La structure est discrétisée par 1335 triangles. Le modèle réduit a été construit par analyse modale avec 25 modes élastiques. La matrice d'amortissement généralisée est construite en utilisant un modèle de Rayleigh avec un taux d'amortissement 4% sur le premier et le dernier mode.

La structure est excitée au même nœud que pour modèle à haute fidélité (nœud P_1) et avec les mêmes forces. Les réponses numériques fréquentielles en vitesse observées sur le modèle à faible fidélité (dont la concaténation est notée \mathbf{y}^{num}), sont présentées dans les figures 1.12 et 1.13, en comparaison avec celles du modèle à haute fidélité. D'après ces figures, on remarque que les réponses du modèle à faible fidélité présentent des écarts par rapport à celles du modèle à haute fidélité. D'où l'importance de recalibrer le modèle à faible fidélité.

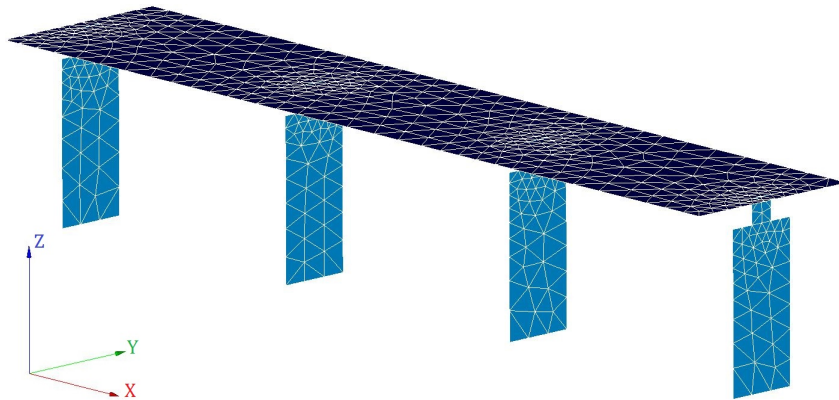


FIGURE 1.11 – Maillage du modèle de pont à faible fidélité.

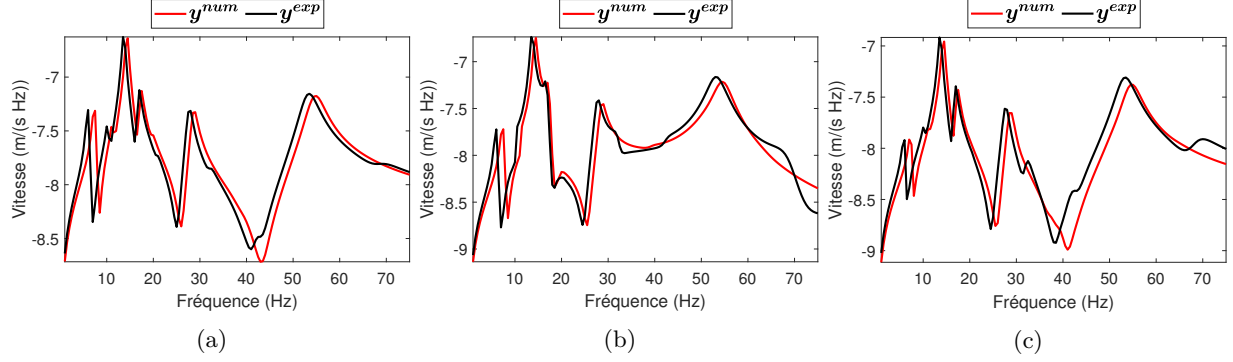


FIGURE 1.12 – Comparaison entre les réponses fréquentielles en vitesse calculées par les modèles à faible fidélité et haute fidélité suivant la direction \mathbf{y} aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

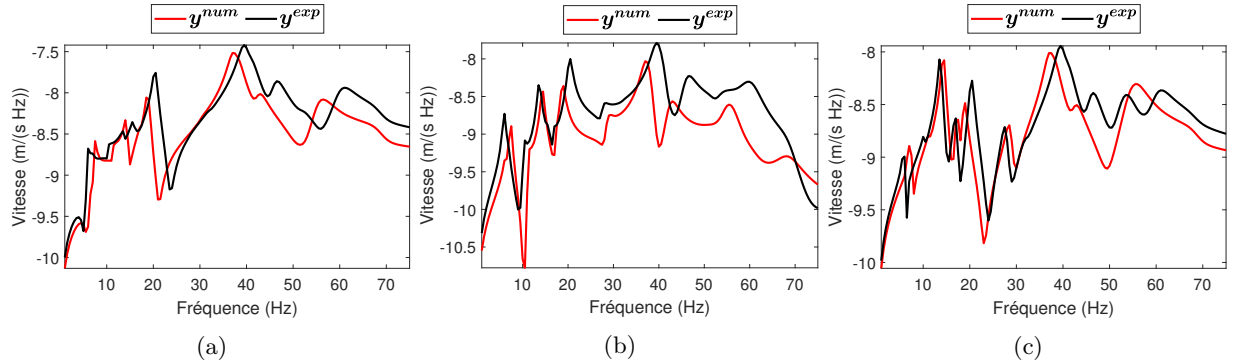


FIGURE 1.13 – Comparaison entre les réponses fréquentielles en vitesse calculées par les modèles à faible fidélité et haute fidélité suivant la direction \mathbf{z} aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

1.4.2.3 Recalage du modèle à faible fidélité

Pour recalibrer le modèle à faible fidélité, les modules d'Young des poteaux (E_1), du tablier (E_2) et des appuis (E_3), ainsi que les masses volumiques des poteaux (ρ_1), du tablier (ρ_2) et des appuis (ρ_3) du modèle à faible fidélité ont été choisis comme des paramètres de recalage à calibrer afin de recalibrer les réponses \mathbf{y}^{num} par rapport à celles de \mathbf{y}^{exp} en utilisant la méthode RBS. Le vecteur des paramètres d'entrée est $\mathbf{x} = [E_1; E_2; E_3; \rho_1; \rho_2; \rho_3]$.

Les paramètres d'entrée ont été variés en introduisant des coefficients multiplicatifs variant de manière logarithmique dans l'intervalle $[0,5; 2]$. Le vecteur des fonctions de base a été choisi de sorte que $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ où $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ est le vecteur des réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité observées sur les nœuds P_1 , P_2 et P_3 suivant les directions \mathbf{y} et \mathbf{z} .

La matrice $[C^i]$ pour chaque paramètre d'entrée x_i , $\{i = 1, \dots, 6\}$ a été estimée avec 2000 échantillons de Monte Carlo. Les vecteurs de coordonnées optimales α_i^{opt} , $\{i = 1, \dots, 6\}$ ont été calculés en partant de valeurs aléatoires pour α_i^1 , $\{i = 1, \dots, 6\}$ avec $\lambda = 10^{-6}$. Pendant l'identification de ces vecteurs, le vecteur α_6^{opt} a été difficile à calculer de sorte que z_6 soit uniquement sensible à $x_6 = \rho_3$. Cette difficulté provient de la faible sensibilité des réponses $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ au paramètre d'entrée ρ_3 en comparaison aux autres paramètres d'entrée. Cette faible sensibilité est mise en évidence dans le tableau 1.4, où la valeur de la trace de $[C^6] \times [C^6]^T$ a

une valeur très faible par rapport aux autres traces.

TABLEAU 1.4 – Valeurs de $\text{Trace}([C^i] \times [C^i]^T)$ pour les paramètres d'entrée $x_i, \{i = 1, \dots, 6\}$.

Pour $i =$	1	2	3	4	5	6
$\text{Trace}([C^i] \times [C^i]^T)$	337,7	1223,3	37,2	68,7	1932,5	0,0032

A cause de cette faible sensibilité vis-à-vis de la masse volumique des appuis, seuls les paramètres d'entrée E_1, E_2, E_3, ρ_1 et ρ_2 ont été retenus comme paramètres de recalage et donc $\mathbf{x} = (E_1; E_2; E_3; \rho_1; \rho_2)$. De nouveau, les matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, 5\}$ ont été estimées dans les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent. Les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ associés à ces matrices ont été calculés selon la méthode de Newton-Raphson en partant de valeurs aléatoires pour $\boldsymbol{\alpha}_i^1, \{i = 1, \dots, 5\}$ avec $\lambda = 10^{-6}$.

La matrice de sensibilité $[S]$ est présentée dans la figure 1.14. Cette matrice est très proche de la matrice d'identité, cela signifie que les paramètres d'entrée $x_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont quasiment séparés les uns des autres et les nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont respectivement sensibles aux paramètres $x_i, \{i = 1, \dots, 5\}$. Les valeurs absolues des composantes des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont présentées dans la figure 1.15. D'après cette figure, on remarque que la plupart des composantes des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ ont des valeurs non nulles mais avec beaucoup d'écart entre elles. Ce qui va probablement donner plus d'importance à certaines composantes qu'à d'autres pour le recalage. Ce problème sera analysé plus en détail dans la section 1.5.

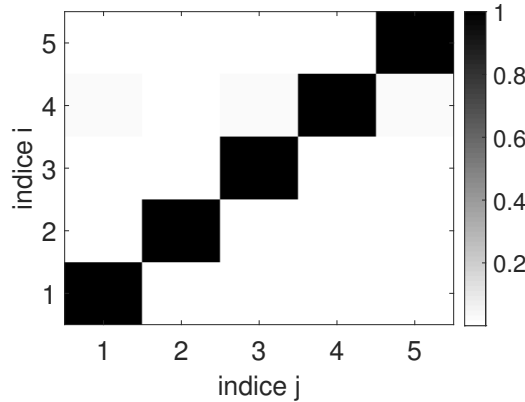


FIGURE 1.14 – Matrice de sensibilité $[S]$.

Après avoir calculé $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$, 5 tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale des paramètres d'entrée x_i^{opt} en donnant aux paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ dans l'équation (1.23) des nouvelles valeurs (choisies aléatoirement) pour chaque nouveau test réalisé. Dans chaque test, chaque x_i^{opt} est identifié en résolvant le problème inverse de dimension 1 présenté dans l'équation (1.23) par exploration d'une grille contenant 101 points de discrétisation. Cinq valeurs de \mathbf{x}^{opt} ont été calculées. Leurs erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ sont présentées dans le tableau 1.5. Parmi les vecteurs optimaux \mathbf{x}^{opt} calculés, celui qui a donné la plus faible erreur aux moindres carrés (9,11) a les valeurs suivantes :

$$\mathbf{x}^{opt} = (5,27 \times 10^{10}; 6,14 \times 10^{10}; 5,13 \times 10^{10}; 2581; 1825).$$

TABLEAU 1.5 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

Test	1	2	3	4	5
$\ \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \ $	9,66	9,75	9,57	9,56	9,11

Donc les nouvelles valeurs des paramètres d'entrée du modèle à faible fidélité après son recalage sont les suivantes : $E_1 = 5,27 \times 10^{10} Pa$, $E_2 = 6,14 \times 10^{10} Pa$, $E_3 = 5,13 \times 10^{10} Pa$, $\rho_1 = 2581 kg/m^3$ et $\rho_2 = 1825 kg/m^3$.

L'erreur aux moindres carrés initiale $\| \mathbf{y}^{num} - \mathbf{y}^{exp} \| = 8,77$. Par comparaison avec les erreurs aux moindres carrés présentées dans le tableau 1.5, on peut conclure que la méthode RBS a augmenté la distance entre les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité et celles du modèle à haute fidélité au lieu de diminuer.

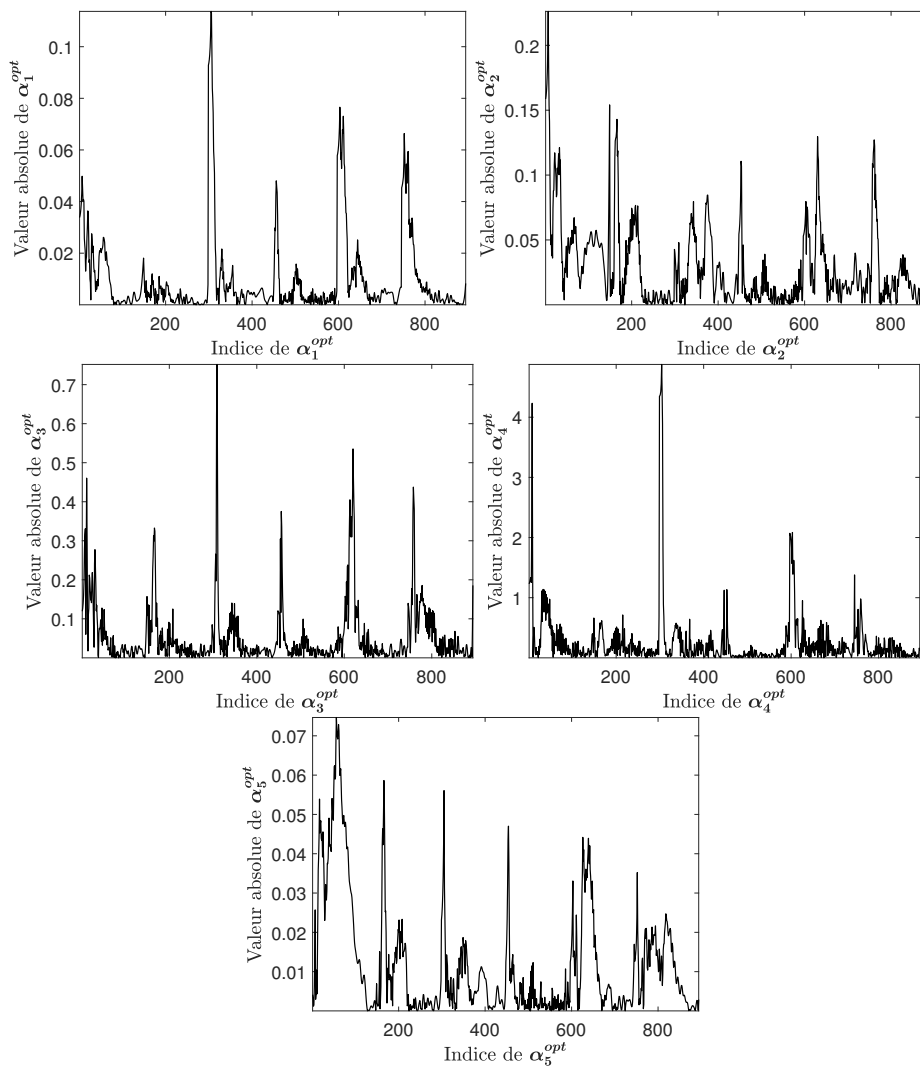


FIGURE 1.15 – Valeurs absolues de α_i^{opt} , $\{i = 1, \dots, 5\}$.

Les figures 1.16 et 1.17 représentent les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} , les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} et les réponses recalées \mathbf{y}^{rec} . D'après ces figures, nous pouvons remarquer que le calibrage de E_1 , E_2 , E_3 , ρ_1 et ρ_2 a bien réduit les écarts entre les réponses \mathbf{y}^{exp} et les réponses \mathbf{y}^{num} à base fréquence [0Hz;15Hz], tandis qu'à haute fréquence [15Hz;75Hz], aucune amélioration n'est constatée. Ce problème sera traité à la section suivante.

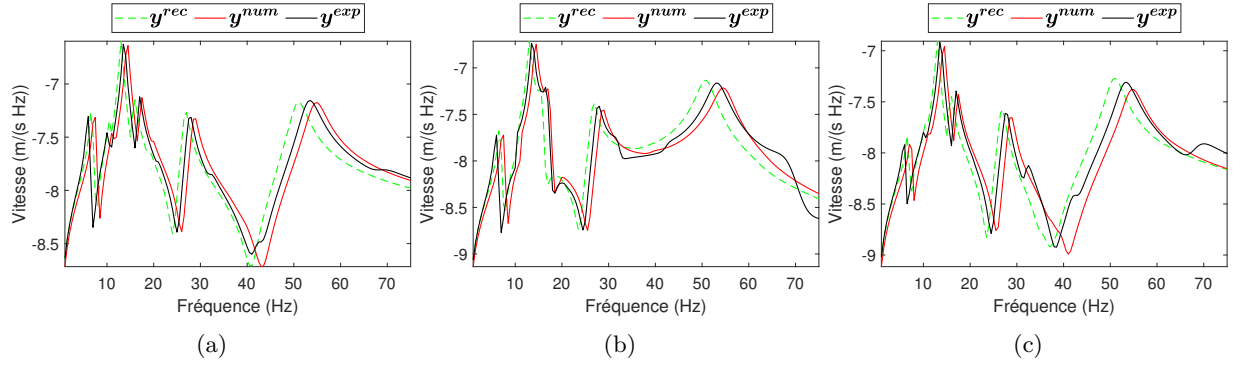


FIGURE 1.16 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse suivant la direction \mathbf{y} pour le modèle recalé \mathbf{y}^{rec} , le modèle non recalé \mathbf{y}^{num} et le modèle à haute fidélité \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

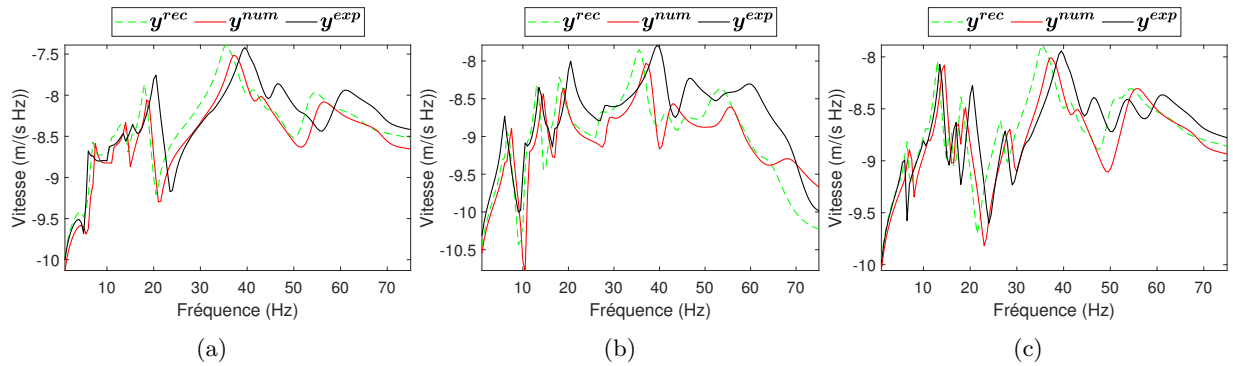


FIGURE 1.17 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse suivant la direction \mathbf{z} pour le modèle recalé \mathbf{y}^{rec} , le modèle non recalé \mathbf{y}^{num} et le modèle à haute fidélité \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

1.5 Analyse du terme d'erreur de modélisation et du terme de régularisation

Le modèle de pont à faible fidélité présenté dans la section 1.4.2.2 est une représentation simplifiée du modèle de pont à haute fidélité présenté dans la section 1.4.2.1. Cette simplification dans la modélisation du modèle a introduit des erreurs dans les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité, ce qui a limité la possibilité de recalibrer le modèle de pont à faible fidélité avec la méthode RBS dans la section 1.4.2.3. D'où l'importance de prendre en compte ces erreurs en introduisant un bruit sur la sortie du modèle ou en jouant sur le terme de régularisation λ pour avoir un bon recalage. Dans cette application, les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité seront recalées de nouveau par rapport aux réponses du

modèle de pont à haute fidélité, en introduisant du bruit dans les réponses du modèle de pont à faible fidélité et en faisant varier le terme de régularisation λ . Dans ce nouveau recalage, les mêmes paramètres d'entrée seront calibrés : $\mathbf{x} = (E_1, E_2, E_3, \rho_1, \rho_2)$.

1.5.1 Impact du terme de régularisation $\lambda[I]$

Dans la méthode RBS, le terme de régularisation de Tikhonov $\lambda[I]$ a été introduit dans l'équation (1.20) pour éviter que la matrice hessienne $[H(\boldsymbol{\alpha}_i)]$ soit mal conditionnée et que les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ soient mal identifiés. Nous étudions ici l'effet de la variation de terme de régularisation sur le recalage du modèle à faible fidélité. Pour cela, nous avons choisi les valeurs suivantes de λ : $10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 0, 5$. Les matrices de sobol $[C^j], \{j = 1, \dots, 5\}$ ont déjà été estimées dans la section 1.4.2.3. Des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{i\lambda}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ seront calculés pour chaque valeur de λ . Les matrices de sensibilité présentées ci-dessous, représentent pour chaque valeur de λ , la sensibilité des sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ vis-à-vis des paramètres d'entrée $x_j, \{j = 1, \dots, 5\}$. Ces matrices de sensibilité sont proches de l'identité jusqu'à $\lambda = 10^{-3}$, cela signifie que les paramètres d'entrée ont été bien séparés les uns des autres et que les sorties z_i sont uniquement sensibles à x_i . A partir de $\lambda = 10^{-2}$, les matrices de sensibilité ne sont plus proches de la matrice d'identité, cela signifie que la recherche des vecteurs de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}_{i\lambda}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ qui séparent les paramètres d'entrée les uns des autres avec cette valeur de λ est devenue difficile, surtout pour le paramètre d'entrée x_4 , et que les réponses construites z_i sont devenues sensibles aux paramètres $x_j, \{j \neq i\}$.

$$\begin{aligned}
[S_{10^{-7}}] &= \begin{bmatrix} 1,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,99 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,96 & 0,00 & 0,00 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & 1,00 & 0,02 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} & [S_{10^{-6}}] &= \begin{bmatrix} 1,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,99 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,96 & 0,00 & 0,00 \\ 0,02 & 0,01 & 0,02 & 1,00 & 0,02 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} \\
[S_{10^{-5}}] &= \begin{bmatrix} 1,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,99 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,96 & 0,00 & 0,00 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 1,00 & 0,02 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} & [S_{10^{-4}}] &= \begin{bmatrix} 1,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,98 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,96 & 0,00 & 0,00 \\ 0,04 & 0,02 & 0,02 & 1,00 & 0,03 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} \\
[S_{10^{-3}}] &= \begin{bmatrix} 1,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,98 & 0,00 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,96 & 0,00 & 0,01 \\ 0,04 & 0,04 & 0,03 & 0,99 & 0,03 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,01 \end{bmatrix} & [S_{10^{-2}}] &= \begin{bmatrix} 1,01 & 0,00 & 0,01 & 0,01 & 0,00 \\ 0,01 & 0,96 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,95 & 0,01 & 0,01 \\ 0,06 & 0,07 & 0,04 & 0,96 & 0,05 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \\
[S_{10^{-1}}] &= \begin{bmatrix} 1,00 & 0,01 & 0,02 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,93 & 0,03 & 0,03 & 0,03 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 & 0,01 & 0,03 \\ 0,12 & 0,19 & 0,07 & 0,90 & 0,15 \\ 0,01 & 0,02 & 0,01 & 0,01 & 0,99 \end{bmatrix} & [S_{0,5}] &= \begin{bmatrix} 0,97 & 0,03 & 0,03 & 0,02 & 0,02 \\ 0,04 & 0,88 & 0,06 & 0,04 & 0,06 \\ 0,09 & 0,10 & 0,82 & 0,01 & 0,06 \\ 0,32 & 0,49 & 0,19 & 0,83 & 0,48 \\ 0,02 & 0,05 & 0,02 & 0,01 & 0,97 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La figure 1.18 représente les valeurs absolues des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-6}}}^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-4}}}^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-2}}}^{opt}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{i_{0,5}}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ normalisées de sorte que la valeur maximale soit unitaire. D'après cette figure, on remarque que les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-6}}}^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-4}}}^{opt}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{10^{-2}}}^{opt}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{i_{0,5}}^{opt}$ sont totalement différents les uns des autres. On remarque aussi que plus la valeur de λ augmente, $\boldsymbol{\alpha}_{i\lambda}^{opt}$ donne plus d'importance à certains composantes de $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ en diminuant en même temps l'importance donnée à certaines autres composantes (qui avaient avant beaucoup d'importance). L'augmentation de valeur de λ a, donc, permis d'ajuster les écarts entre les valeurs des composantes de vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{i\lambda}^{opt}$.

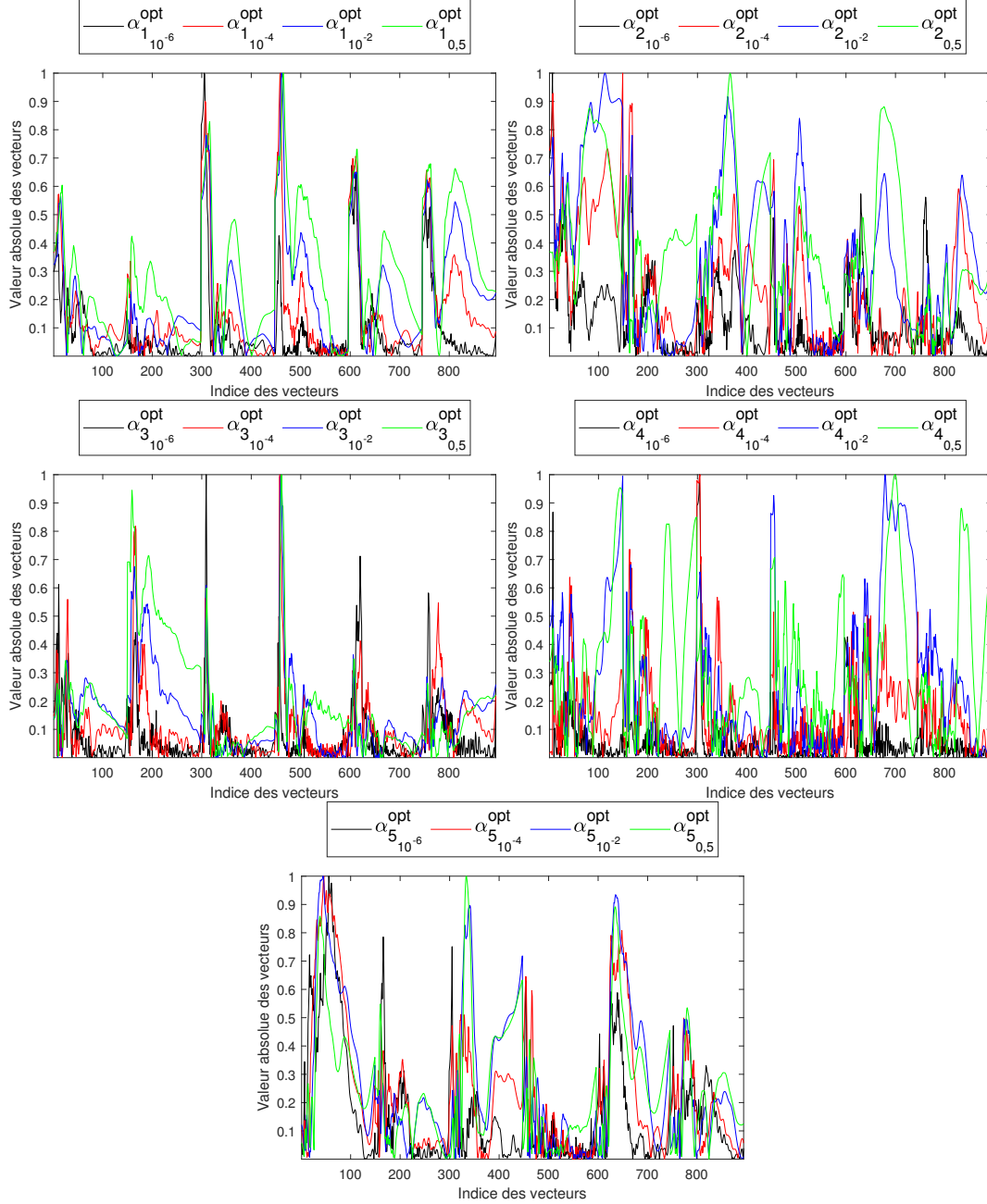


FIGURE 1.18 – Valeurs absolues des vecteurs $\alpha_{i_{10^{-6}}}^{opt}$, $\alpha_{i_{10^{-4}}}^{opt}$, $\alpha_{i_{10^{-2}}}^{opt}$ et $\alpha_{i_{0.5}}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$.

Après avoir calculé pour chaque valeur de λ , les vecteurs $\alpha_{i_{\lambda}}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$, 5 tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale du paramètre d'entrée x_i^{opt} , en donnant aux paramètres x_j $\{j \neq i\}$ dans l'équation (1.23) les mêmes valeurs que celles choisies dans la section 1.4.2.3 dans chaque test. L'intérêt de choisir les mêmes valeurs pour x_j $\{j \neq i\}$ est pour comparer l'amélioration du recalage de modèle avec l'augmentation de valeur de terme de régularisation $\lambda[I]$. Après avoir réalisé ces 5 tests, 5 valeurs pour x^{opt} ont été calculées pour chaque valeur de λ . Leurs erreurs aux moindres carrés $\|y(x^{opt}) - y^{exp}\|$ sont présentées dans le tableau 1.6.

TABLEAU 1.6 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

λ	test 1	test 2	test 3	test 4	test 5
10^{-7}	13,06	13,04	13,18	12,62	12,56
10^{-6}	9,66	9,75	9,57	9,56	9,11
10^{-5}	7,33	7,23	7,10	7,67	7,37
10^{-4}	7,04	7,00	6,65	6,92	6,77
10^{-3}	6,82	6,96	6,42	6,72	6,51
10^{-2}	6,50	6,78	6,58	6,61	6,53
10^{-1}	7,03	9,13	10,17	7,11	7,78
0,5	7,35	6,05	10,08	11,49	7,61

D'après ce tableau, on remarque que dans les tests 1, 2 et 4, l'erreur aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ a diminué respectivement de 13,06 à 6,5, de 13,04 à 6,78 et de 12,62 à 6,61 avec l'augmentation de valeur de λ jusqu'à 10^{-2} . Ces valeurs d'erreur aux moindres carrés ont commencé à augmenter à partir de $\lambda = 10^{-1}$ dans les tests 1 et 4 tandis que dans le test 2 cette valeur a augmenté jusqu'à 9,13 puis a diminué jusqu'à 6,05. La même variation a été observée dans les test 3 et 5 sauf que pour ces tests l'erreur aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ a eu ses plus faibles valeurs pour $\lambda = 10^{-3}$. Cette augmentation de l'erreur aux moindres carrés à partir de $\lambda = 10^{-2}$ vient du fait que, comme observé sur les matrices de sensibilité, les vecteurs $\alpha_{i_{10^{-2}}}^{opt}$, $\alpha_{i_{10^{-1}}}^{opt}$ et $\alpha_{i_{10^{-5}}}^{opt} \{i = 1, \dots, 5\}$ n'ont pas pu bien séparer les paramètres d'entrée les uns des autres.

1.5.2 Prise en compte et impact des erreurs de modélisation

Durant le processus de modélisation d'un modèle numérique, plusieurs simplifications sont introduites dans ce modèle : géométrie, équations d'équilibre, conditions limites, ... Ces simplifications induisent des erreurs dans ses réponses numériques calculées, et rendent donc le modèle moins fiable. De plus, les réponses expérimentales peuvent aussi contenir des erreurs liées à des bruits de mesure. Ces erreurs dans les réponses numériques et les réponses expérimentales rendent le recalage d'un modèle numérique par la méthode RBS plus compliqué. Dans le cas où aucune erreur existe dans les réponses numériques $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} , chaque composante $(\alpha_i^{opt})_g^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))_g$ de l'équation (1.23) est rendue au plus proche de zéro par la même valeur de x_i (si cette composante est totalement insensible aux $x_j \{j \neq i\}$).

Cette valeur sera par conséquent la valeur de x_i^{opt} qui minimise la valeur absolue de $\sum_{g=1}^{n_g} \left\{ (\alpha_i^{opt})_g^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))_g \right\}$. Cependant, dans le cas où le vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ et/ou le vecteur \mathbf{y}^{exp} contiennent des erreurs, chaque composante $(\alpha_i^{opt})_g^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))_g$, a une valeur de x_i qui la rend au proche de zéro, différente de celles qui rendent les autres composantes proches de zéro. Comme les composantes de α_i peuvent présenter d'importants écarts, l'identification de la valeur de x_i^{opt} peut être imprécise. D'où l'importance de prendre en compte ces erreurs dans la méthode RBS.

Pour prendre en compte ces erreurs dans la méthode RBS, il existe plusieurs approches. Parmi celles-ci, on peut ajouter un vecteur de bruit aléatoire \mathbf{N} sur les réponses numériques du modèle de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}. \quad (1.24)$$

Les matrices $[C^j] = E_{\mathbf{X} \sim j} (\text{Cov}_{X_j}(\mathbf{F} | \mathbf{X} \sim j))$ sont alors remplacées par $[\bar{C}^j] = E_{\mathbf{X} \sim j} (\text{Cov}_{X_j, \mathbf{N}}(\bar{\mathbf{F}} | \mathbf{X} \sim j))$ avec $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}))$. Le reste de la méthode RBS reste inchangé.

Lors de l'introduction d'un bruit sur les réponses numériques d'un modèle, la variance des réponses du modèle $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ va augmenter, rendant ainsi la recherche d'une matrice de sensibilité $[S]$ proche de la matrice de l'identité difficile. Par conséquent, la méthode de Newton-Raphson qui calcule les valeurs de $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ va automatiquement diminuer l'importance des composantes des réponses qui sont fortement impactées par le bruit et rendre les vecteurs $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ plus concentrés sur les autres composantes.

Dans le cas où $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, les matrices $[\bar{C}^j]$ peuvent être directement déduites des matrices $[C^j]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [\bar{C}^j] &= E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_{X_j, N}(\bar{\mathbf{F}}|\mathbf{X} \sim j)) \\ &= E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_{X_j, N}(\bar{\mathbf{Y}}|\mathbf{X} \sim j)) \\ &= E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_{X_j, N}(\mathbf{Y}|\mathbf{X} \sim j) + \text{Cov}_{X_j, N}(\mathbf{N}|\mathbf{X} \sim j) + 2\text{Cov}_{X_j, N}(\mathbf{Y}, \mathbf{N}|\mathbf{X} \sim j)) \quad (\mathbf{Y} \text{ et } \mathbf{N} \text{ sont indépendants}) \\ &= E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_{X_j}(\mathbf{Y}|\mathbf{X} \sim j) + \text{Cov}_N(\mathbf{N}|\mathbf{X} \sim j)) \\ &= E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_{X_j}(\mathbf{Y}|\mathbf{X} \sim j)) + E_{\mathbf{X} \sim j}(\text{Cov}_N(\mathbf{N}|\mathbf{X} \sim j)) \\ &= [C^j] + [\text{Cov}(\mathbf{N})]. \end{aligned}$$

alors :

$$[\bar{C}^j] = [C^j] + [\text{Cov}(\mathbf{N})]. \quad (1.25)$$

Exemple simple :

Soit $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (x_1; x_2 + x_3; 4x_1; x_3; 3)$ avec $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in [1, 2]^3$. Les fonctions de base $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, donc $z_i = \alpha_i^T \mathbf{y}(\mathbf{x}), \{i = 1, 2, 3\}$. Dans cet exemple, deux tests seront réalisés pour calculer $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, 2, 3\}$, le premier sans aucun bruit ajouté sur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ et le deuxième avec bruit. 40000 échantillons de Monte-Carlo ont été générés pour calculer les matrices $[C^i], \{i = 1, 2, 3\}$ en variant $X_i, \{i = 1, 2, 3\}$ selon une loi uniforme dans $[1, 2]^3$. Dans le premier test, les vecteurs $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, 2, 3\}$ ont été calculés à partir des $[C^i], \{i = 1, 2, 3\}$ par la méthode de Newton-Raphson avec $\lambda = 5 \times 10^{-10}$. Les valeurs initiales de $\alpha_i^1, \{i = 1, 2, 3\}$ ont été générées aléatoirement. Les valeurs de $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, 2, 3\}$ calculées sans bruit sont les suivantes :

$$\alpha_1^{opt} = (0, 2; 0; 0, 8; 0; 0),$$

$$\alpha_2^{opt} = (0; 3, 4; 0; -3, 4; 0),$$

$$\alpha_3^{opt} = (0; 0; 0; 3, 4; 0).$$

La matrice de sensibilité associée à ces vecteurs est exactement la matrice d'identité. Pour x_1 , on peut constater que la méthode choisit naturellement une combinaison de la première et de la troisième composantes (qui sont uniquement sensibles à x_1). Pour x_2 , la combinaison consiste en une soustraction de la quatrième composante à la deuxième, la rendant ainsi uniquement sensible à x_2 . Enfin pour x_3 , seule la quatrième composante est sélectionnée.

Ensuite, du bruit a été ajouté sur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = (x_1 + N_1; x_2 + x_3; 4x_1 + 3N_2; x_3; 3),$$

où N_1 et N_2 sont des variables aléatoires qui suivent une loi normale avec une moyenne nulle et un écart-type de 0,05. Nous avons donc inclus un bruit faible sur la première composante mais un bruit important sur la troisième.

A partir des $[\bar{C}^i], \{i = 1, \dots, 3\}$ et en suivant la même démarche que précédemment, les nouvelles valeurs de $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, 2, 3\}$ calculées avec bruit sont les suivantes :

$$\alpha_1^{opt} = (1, 25; 0; 0, 56; 0; 0),$$

$$\begin{aligned}\alpha_2^{opt} &= (0; 3, 4; 0; -3, 4; 0), \\ \alpha_3^{opt} &= (0; 0; 0; 3, 4; 0).\end{aligned}$$

tel que la matrice de sensibilité associée à ces vecteurs est la matrice d'identité.

Par comparaison entre les valeurs de α_1^{opt} calculées avec bruit et celles calculées sans bruit, on remarque que la troisième composante de $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ a moins d'importance qu'avant (nouvelle valeur 0,56) et que la première composante a eu plus d'importance (nouvelle valeur 1,25). Ceci indique que le vecteur α_1^{opt} est devenu plus concentré sur la première composante que la troisième composante car celle-ci contient plus de bruit. La méthode permet donc de donner automatiquement moins d'importance aux composantes de sortie fortement impactées par du bruit ou des erreurs.

Modèle de pont :

Comme expliqué précédemment, pour réaliser un bon recalage du modèle de pont les vecteurs $\alpha_i^{opt} \{i = 1, \dots, 5\}$ doivent être plus concentrés sur les zones des pics. D'où l'importance d'ajouter moins des bruits sur ces zones des réponses par rapport aux autres zones. Alors, pour ajouter moins des bruits sur les zones des pics, le vecteur aléatoire de bruit \mathbf{N} est construit de sorte que chaque composante N_i soit égale à :

$$N_i = \left| \frac{\epsilon \times y_i^{exp}}{\max(|\mathbf{y}^{exp}|)} U_i \right|, \quad (1.26)$$

où ϵ est le ratio d'erreur souhaité, U_i est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle et un écart type de 0,29.

Les valeurs de ϵ sélectionnées pour étudier son impact sont les suivantes : 5%, 10%, 15%, 30%, 60%, 90%, 120% et 160%. Le terme de régularisation est choisi égal à zéro pour éliminer ses effets.

Les matrices de sensibilité obtenues pour chaque valeur de ϵ sont présentées ci-dessous. D'après ces matrices, on remarque que les matrices $[S_{5\%}]$ et $[S_{10\%}]$ sont quasiment proches de la matrice d'identité, cela signifie que pour $\epsilon = 5\%$ ou 10% , tous les paramètres d'entrée ont été bien séparés les uns des autres et chaque sortie z_i est uniquement sensible à x_i . A partir de $\epsilon = 15\%$, les matrices de sensibilité ne sont plus proches de la matrice d'identité. On peut notamment constater que x_4 est devenu inséparable des autres paramètres, et la construction de sa sortie z_4 est devenue compliquée de sorte qu'elle soit uniquement sensible à x_4 . Nous pouvons faire la même remarque pour x_3 à partir de $\epsilon = 90\%$.

$$\begin{aligned}[S_{5\%}] &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.02 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} & [S_{10\%}] &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \\ [S_{15\%}] &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.24 & 0.21 & 0.10 & 0.71 & 0.16 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} & [S_{30\%}] &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.00 \\ 0.23 & 0.23 & 0.08 & 0.63 & 0.17 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \\ [S_{60\%}] &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.01 & 0.98 & 0.00 & 0.01 \\ 0.05 & 0.06 & 0.04 & 0.87 & 0.05 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} & [S_{90\%}] &= \begin{bmatrix} 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.96 & 0.00 & 0.01 \\ 0.05 & 0.08 & 0.04 & 0.75 & 0.06 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$[S_{120\%}] = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.03 & 0.02 & 0.94 & 0.00 & 0.01 \\ 0.05 & 0.09 & 0.03 & 0.63 & 0.06 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.99 \end{bmatrix} \quad [S_{160\%}] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 \\ 0.01 & 0.97 & 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.04 & 0.03 & 0.90 & 0.00 & 0.01 \\ 0.08 & 0.22 & 0.04 & 0.35 & 0.23 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Pour rendre ces matrices proches de la matrice d'identité, on a décidé de remplacer les vecteurs $\alpha_{415\%}^{opt}$, $\alpha_{430\%}^{opt}$, $\alpha_{460\%}^{opt}$, $\alpha_{490\%}^{opt}$, $\alpha_{4120\%}^{opt}$ et $\alpha_{4160\%}^{opt}$ par $\alpha_{410\%}^{opt}$, et de remplacer aussi $\alpha_{390\%}^{opt}$, $\alpha_{3120\%}^{opt}$ et $\alpha_{3160\%}^{opt}$ par $\alpha_{360\%}^{opt}$. Par cette approche, les matrices de sensibilité deviennent :

$$S_{5\%} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.02 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \quad S_{10\%} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$S_{15\%} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \quad S_{30\%} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.00 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$S_{60\%} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.01 & 0.98 & 0.00 & 0.01 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \quad S_{90\%} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.99 & 0.00 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.98 & 0.00 & 0.01 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$S_{120\%} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.98 & 0.00 & 0.01 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.99 \end{bmatrix} \quad S_{160\%} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 \\ 0.01 & 0.97 & 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.98 & 0.00 & 0.01 \\ 0.04 & 0.02 & 0.02 & 0.99 & 0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Les valeurs absolues des vecteurs $\alpha_{i5\%}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$, $\alpha_{i30\%}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$ et $\alpha_{i160\%}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$ sont représentées dans la figure 1.19. D'après cette figure, on remarque que pour chaque paramètre d'entrée x_i , $\alpha_{i5\%}^{opt}$, $\alpha_{i30\%}^{opt}$ et $\alpha_{i160\%}^{opt}$ sont des vecteurs totalement différents les uns des autres (sauf $\alpha_{4160\%}^{opt} = \alpha_{430\%}^{opt} = \alpha_{410\%}^{opt}$). En outre, on remarque que plus la quantité de bruit ajoutée sur les réponses \mathbf{y}^{num} augmente, plus α_i^{opt} donne d'importance à certaines composantes de $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ en diminuant en même temps l'importance donnée à d'autres composantes (qui avaient avant beaucoup d'importance).

Après avoir calculé pour chaque valeur de ϵ , les vecteurs $\alpha_{i\epsilon}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$, 5 tests ont été réalisés de nouveau pour identifier la valeur optimale du paramètre d'entrée x_i^{opt} , en donnant aux paramètres x_j , $\{j \neq i\}$ dans l'équation (1.23) les mêmes valeurs que celles qui ont été choisies dans la section 1.4.2.3 dans chaque test. Après avoir réalisé ces tests, pour chaque valeur de ϵ , 5 valeurs pour \mathbf{x}^{opt} ont été calculées. Leurs erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ sont présentées dans le tableau 1.7.

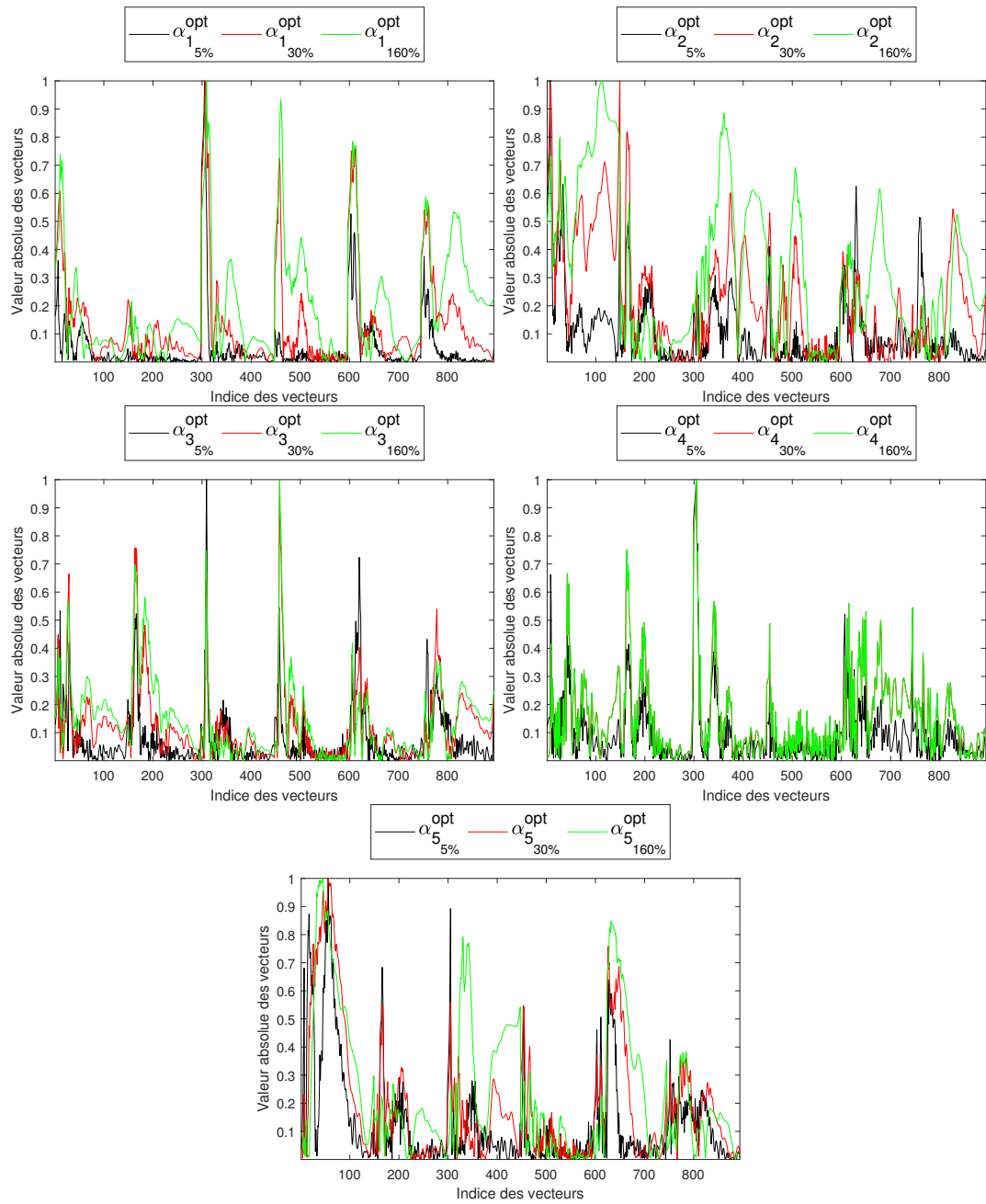


FIGURE 1.19 – Valeurs absolues des vecteurs $\alpha_{i5\%}^{opt}$, $\alpha_{i30\%}^{opt}$ et $\alpha_{i160\%}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5\}$.

TABLEAU 1.7 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

ϵ	test 1	test 2	test 3	test 4	test 5
5%	9,79	9,69	9,86	9,96	9,74
10%	8,54	8,20	8,38	8,72	8,00
15%	7,94	7,75	7,76	7,92	7,71
30%	7,07	7,07	6,58	7,15	6,76
60%	6,73	7,00	6,40	6,71	6,47
90%	6,63	6,82	6,44	6,67	6,57
120%	6,63	6,78	6,42	6,72	6,72
160%	6,63	6,59	6,36	6,79	7,32

D'après ce tableau, on remarque que dans les tests 2 et 3, l'erreur aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ a diminué respectivement de 9,69 à 6,59 et de 9,86 à 6,36 avec l'augmentation de la quantité de bruit. Tandis que dans le test 1, elle a diminué jusqu'à 6,63 lorsque ϵ a augmenté jusqu'à 90%, puis elle est restée constante (6,63) lorsque les valeurs de ϵ sont supérieures à 90%. Dans les tests 4 et 5, l'erreur aux moindres carrés a diminué respectivement de 9,96 à 6,67 et de 9,74 à 6,47 avec l'augmentation de la quantité de bruit, puis elle a commencé à augmenter respectivement à partir de $\epsilon = 120\%$ et $\epsilon = 90\%$. Cette différence de variation dans les valeurs de l'erreur aux moindres carrés dans les tests réalisés à partir de ϵ supérieur à 90% revient aux deux raisons suivantes : (1) les sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont devenues plus impactées par les valeurs des paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ (tests 4 et 5). (2) les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ ont commencé à donner plus ou moins d'importance à certaines composantes de $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ d'une façon non satisfaisante.

1.5.3 Observation des réponses recalées

Soit \mathbf{y}^{rec1} les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité recalées dans la section 1.4.2.3 (recalage initial), \mathbf{y}^{rec2} les réponses numériques recalées en utilisant les valeurs optimales des paramètres d'entrée trouvées dans le test 2 pour $\lambda = 0.5$ (correspondant à l'erreur aux moindres carrés minimale dans le tableau 1.6) dans la section 1.5.1 ($\epsilon = 0$) et \mathbf{y}^{rec3} les réponses numériques recalées en utilisant les valeurs optimales des paramètres d'entrée trouvées dans le test 3 pour $\epsilon = 160\%$ (correspondant à l'erreur aux moindres carrés minimale dans le tableau 1.7) dans la section 1.5.2 ($\lambda = 0$). Les figures 1.20 et 1.21 représentent les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} , les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} , et les réponses numériques recalées \mathbf{y}^{rec1} , \mathbf{y}^{rec2} et \mathbf{y}^{rec3} . D'après ces figures, on remarque que les réponses recalées \mathbf{y}^{rec2} et \mathbf{y}^{rec3} sont plus proches des réponses \mathbf{y}^{exp} que celles correspondant au recalage initial \mathbf{y}^{rec1} surtout à haute fréquence [20 Hz ; 75 Hz].

On peut donc conclure que l'augmentation de la valeur de terme de régularisation λ ou l'introduction du bruit ont bien réduit la distance entre les réponses du modèle de pont à faible fidélité \mathbf{y}^{num} et les réponses du modèle de pont à haute fidélité \mathbf{y}^{exp} , en diminuant les écarts entre les valeurs de composantes des vecteurs de coordonnées. Mais plus la valeur de terme de régularisation ou la quantité de bruit introduite augmentent, plus la séparation des paramètres d'entrée devient difficile.

La plus petite valeur d'erreur aux moindres carrés trouvée est 6,05 pour $\lambda = 0,5$ dans le test 2 (tableau 1.6). La valeur d'erreur aux moindres carrés initial est $\| \mathbf{y}^{num} - \mathbf{y}^{exp} \| = 8,77$. Cela signifie que la méthode RBS a bien permis de diminuer la distance entre les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité et celles du modèle de pont à haute fidélité. On peut se demander si cette distance (6,05) est la distance minimale. En utilisant l'algorithme recuit simulé, nous avons trouvé que cette distance peut être encore réduite jusqu'à 5,1 (au prix d'un temps de calcul très élevé). Donc l'introduction du bruit sur les réponses du modèle de pont à faible fidélité ou l'augmentation de la valeur de terme de régularisation λ ont bien diminué la distance entre les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité et celles du modèle de pont à haute fidélité mais sans atteindre le minimum global.

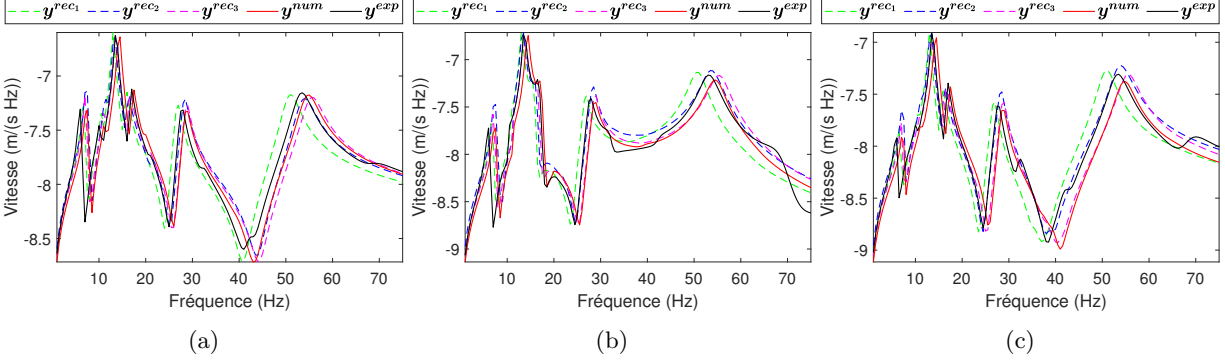


FIGURE 1.20 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec_1} , \mathbf{y}^{rec_2} et \mathbf{y}^{rec_3} calculées suivant la direction \mathbf{y} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

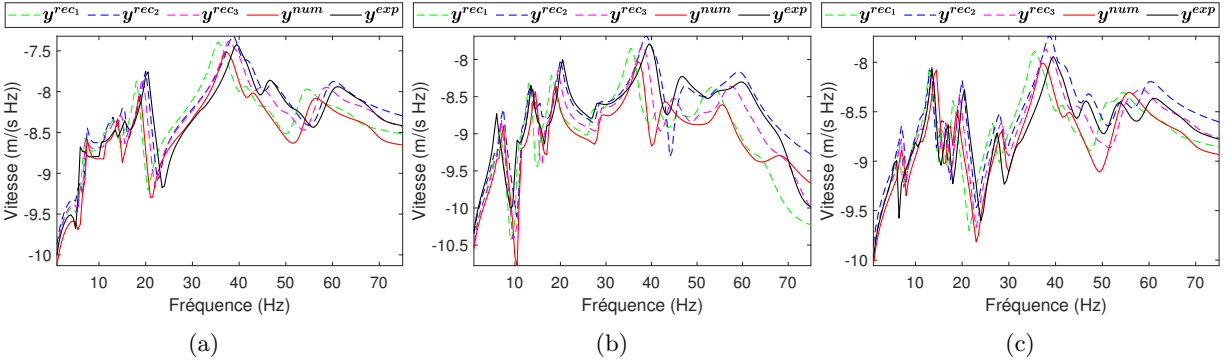


FIGURE 1.21 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec_1} , \mathbf{y}^{rec_2} et \mathbf{y}^{rec_3} calculées suivant la direction \mathbf{z} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

En conclusion de cette partie, on peut conclure que l'introduction du bruit ou l'augmentation de la valeur de terme de régularisation ont bien permis de diminuer la distance entre les réponses du modèle de pont à faible fidélité et celles du modèle de pont à haute fidélité. A partir de certaines quantités de bruit ou certaines valeurs de λ , la variation de l'erreur aux moindres carrés se remet à augmenter ou se stabilise. Deux hypothèses ont été proposées : (1) les nouvelles sorties $z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont devenues plus impactées par les valeurs de $x_j, \{j \neq i\}$, (2) les vecteurs $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ ont commencé à donner plus ou moins d'importances à certaines composantes de $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ d'une façon insatisfaisante.

Bien que l'introduction de bruits ou d'un terme de régularisation permet d'améliorer le recalage, on constate que le minimum global n'est pas atteint. Ceci est dû au fait que la méthode RBS n'utilise pas l'ensemble des données expérimentales pour le recalage mais utilise n projections de ces réponses. Cette perte de richesse se traduit par une perte de précision au niveau du recalage. Dans le chapitre suivant, des extensions de la méthode RBS seront introduites afin d'enrichir la quantité de données utilisées pour le recalage.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d'entrée (RBS) a été présentée. Cette méthode consiste à identifier indépendamment les valeurs optimales des paramètres d'entrée pour réduire la distance entre les réponses expérimentales et les réponses numériques d'un modèle spécifique. Chaque paramètre d'entrée est identifié indépendamment des autres paramètres, en construisant pour chaque paramètre une nouvelle sortie de sorte que cette sortie soit uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux autres paramètres.

La méthode présentée a été appliquée sur deux modèles. Dans le premier modèle, la méthode RBS a permis de bien recalibrer le modèle en diminuant la distance entre les réponses numériques et les réponses expérimentales. Tandis que, dans le deuxième modèle, la méthode RBS n'a pas permis de bien recalibrer les réponses du modèle de pont à faible fidélité par rapport aux réponses du modèle de pont à haute fidélité, surtout à haute fréquence. Cette défaillance de la méthode RBS sur le modèle de pont, semble résulter des valeurs obtenues pour les vecteurs de coordonnées optimales α_i^{opt} , pour lesquels les composantes présentaient beaucoup d'écart les unes par rapport aux autres. L'ajout d'un terme de régularisation ou l'introduction du bruit permet d'améliorer le recalage sans pour autant garantir d'atteindre le minimum global du problème inverse initial. Le chapitre suivant propose des extensions de la méthode RBS permettant d'enrichir la quantité de données utilisées lors du recalage par cette méthode.

Chapitre 2

Extensions de la méthode RBS

Dans ce chapitre des nouvelles extensions de la méthode RBS sont présentées afin (1) d'enrichir la quantité d'information utilisée dans les problèmes inverses indépendants et (2) de traiter les cas où les paramètres d'entrée ne sont pas séparables. La première extension consiste en augmentant le nombre de sortie introduite dans chaque problème inverse en remplaçant le scalaire z_i associé à chaque paramètre x_i par un vecteur. La deuxième extension consiste à sélectionner aléatoirement des composantes de la sortie du modèle afin d'éviter que certaines composantes de cette sortie ne soit omises, permettant ainsi d'obtenir un recalage large bande. Enfin la troisième extension consiste, pour les cas où d'entrée ne sont pas séparables, en un algorithme permettant non pas de recalculer les paramètres un par un mais de les recalculer par groupes indépendants les uns des autres, ce qui reviendra à résoudre des problèmes inverses de petite dimension dans une séquence judicieusement et automatiquement définie.

2.1 Construction de sorties multidimensionnelles

Le vecteur de coordonnées optimal $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ est un vecteur qui joue un rôle essentiel dans l'identification de la valeur optimale de x_i . Ce vecteur est calculé de sorte que la nouvelle sortie z_i soit uniquement sensible au paramètre d'entrée x_i et insensible aux autres paramètres d'entrée. L'exploitation d'une seule sortie z_i pour identifier la valeur de x_i^{opt} peut être insuffisante pour obtenir un bon recalage (voir section 1.5), notamment lorsque le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ est de mauvaise qualité.

Afin de pallier ce problème, et pour améliorer le recalage des modèles, nous proposons d'étendre la méthode RBS afin de pouvoir utiliser, pour chaque variable x_i plusieurs sorties z_i pour enrichir l'observable utilisée lors du recalage. On note s le nombre des sorties construites pour chaque paramètre d'entrée x_i (pour simplifier la présentation, on suppose que le nombre des sorties est le même pour chaque paramètre). On note $z_{\ell,i}, \{\ell = 1, \dots, s\}$ les s sorties, et $\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt}, \{\ell = 1, \dots, s\}$ les s vecteurs de coordonnées correspondant, de sorte que ces nouvelles sorties soient uniquement sensibles à x_i et insensibles aux autres paramètres :

$$z_{\ell,i}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt})^T \times \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \text{ avec } \{\ell = 1, \dots, s\}, \quad (2.1)$$

avec

$$\begin{aligned} S_{T_{i,i}}(z_{\ell,i}(\mathbf{x})) &= 1, \\ S_{T_{i,j}}(z_{\ell,i}(\mathbf{x})) &= 0, \text{ pour } i \neq j. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Les vecteurs optimaux $\alpha_{\ell,i}^{opt}, \{\ell = 1, \dots, s\}$, satisfaisant les conditions (2.2), sont là aussi calculés au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'ils sont solutions du problème inverse suivant :

$$\tilde{\alpha}_i^{opt} = \underset{\alpha_{\ell,i} \in \mathbb{R}^{n_g}}{\operatorname{argmin}} \Gamma(\tilde{\alpha}_i) \text{ tel que } \tilde{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{s,i} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où

$$\Gamma(\tilde{\alpha}_i) = \sum_{\ell=1}^s \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) - 1)^2 \right\} + \sum_{\ell=1}^s \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}))^2 \right\} + \sum_{\ell=1}^s \left\{ \lambda \alpha_{\ell,i}^T \alpha_{\ell,i} \right\}, \quad (2.4)$$

avec $\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) = \alpha_{\ell,i}^T [C^j] \alpha_{\ell,i}$.

Cependant les solutions de ce problème inverse $\alpha_{i,\ell}^{opt}, \{\ell = 1, \dots, s\}$ peuvent être colinéaires. Donc, pour éviter ce problème de colinéarité, une nouvelle condition doit être ajoutée sur les conditions (2.2) pour que $\alpha_{i,\ell}^{opt}, \{\ell = 1, \dots, s\}$ soient orthogonaux les uns par rapport aux autres :

$$\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{u,i}) = 0 \text{ pour } u \neq \ell, \quad (2.5)$$

où $\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{u,i}) = \alpha_{\ell,i}^T [C^j] \alpha_{u,i}$.

Ainsi l'équation (2.4) est remplacée par l'équation suivante :

$$\Gamma(\tilde{\alpha}_i) = \sum_{\ell=1}^s \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) - 1)^2 \right\} + \sum_{\ell=1}^s \sum_{u=\ell+1}^s \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{u,i}))^2 \right\} + \sum_{\ell=1}^s \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}))^2 \right\} + \sum_{\ell=1}^s \left\{ \lambda \alpha_{\ell,i}^T \alpha_{\ell,i} \right\}. \quad (2.6)$$

La méthode de Newton-Raphson est une nouvelle fois utilisée pour résoudre le problème aux moindres carrés présenté dans l'équation (2.3) avec la règle d'itération suivante :

$$\tilde{\alpha}_i^{k+1} = \tilde{\alpha}_i^k - [H(\tilde{\alpha}_i^k)]^{-1} \nabla \Gamma(\tilde{\alpha}_i^k), \quad (2.7)$$

où

$$\nabla \Gamma(\tilde{\alpha}_i) = \begin{pmatrix} \nabla \Gamma(\alpha_{1,i}) \\ \nabla \Gamma(\alpha_{2,i}) \\ \vdots \\ \nabla \Gamma(\alpha_{s,i}) \end{pmatrix}$$

avec

$$\nabla \Gamma(\alpha_{\ell,i}) = 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) - 1)[C^i] \alpha_{\ell,i} + 2 \sum_{u \neq \ell} \left\{ [C^i] \alpha_{u,i} \tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{u,i}) \right\} + 4 \sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) [C^j] \alpha_{\ell,i} \right\} + 2\lambda \alpha_{\ell,i}. \quad (2.8)$$

et

$$[H(\tilde{\alpha}_i)] = \begin{bmatrix} [H_{1,1}] & [H_{1,2}] & \cdots & [H_{1,u}] & \cdots & [H_{1,s}] \\ [H_{2,1}] & [H_{2,2}] & \cdots & [H_{2,u}] & \cdots & [H_{2,s}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [H_{\ell,1}] & [H_{\ell,2}] & \cdots & [H_{\ell,u}] & \cdots & [H_{\ell,s}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [H_{s,1}] & [H_{s,2}] & \cdots & [H_{s,u}] & \cdots & [H_{s,s}] \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} [H_{\ell,\ell}] &= 4(\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i}) - 1)[C^i] + 8[C^i]\alpha_{\ell,i}\alpha_{\ell,i}^T[C^i]^T + 2\sum_{u \neq \ell} \left\{ [C^i]\alpha_{u,i}\alpha_{u,i}^T[C^i]^T \right\} \\ &\quad + 4\sum_{j \neq i} \left\{ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_{\ell,i}, \alpha_{\ell,i})[C^j] + 2[C^j]\alpha_{\ell,i}\alpha_{\ell,i}^T[C^j]^T \right\} + 2\lambda[I]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$[H_{\ell,u}] = 2[C^i]\alpha_{u,i}\alpha_{\ell,i}^T[C^i]^T + 2[C^i]\alpha_{\ell,i}^T[C^i]\alpha_{u,i}, \quad \text{si } \ell \neq u. \quad (2.10)$$

Soit $[S]$ la matrice de sensibilité des nouvelles sorties $z_{\ell,i}$, $\{i = 1, \dots, n\}$ sur les paramètres d'entrée x_i , $\{i = 1, \dots, n\}$, dans lequel ses termes sont divisés sous la forme suivante :

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{1,1}] & [S_{1,2}] & \cdots & [S_{1,j}] & \cdots & [S_{1,n}] \\ [S_{2,1}] & [S_{2,2}] & \cdots & [S_{2,j}] & \cdots & [S_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [S_{i,1}] & [S_{i,2}] & \cdots & [S_{i,j}] & \cdots & [S_{i,n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S_{n,1}] & [S_{n,2}] & \cdots & [S_{n,j}] & \cdots & [S_{n,n}] \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } [S_{i,j}] = [\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{s,i}]^T [C^j] [\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{s,i}].$$

Après avoir calculé les vecteurs optimaux $\alpha_{\ell,1}^{opt}, \alpha_{\ell,2}^{opt}, \dots, \alpha_{\ell,n}^{opt}$, $\{\ell = 1, \dots, s\}$, si la matrice $[S]$ est proche de la matrice d'identité, cela signifie que les nouvelles sorties $z_{\ell,i}$ sont uniquement sensibles à x_i et insensibles aux autres paramètres de façon que le vecteur $\alpha_{\ell,i}^{opt}$ est orthogonal à $\alpha_{u,i}^{opt}$, $\{u \neq \ell\}$.

Après avoir vérifié la séparation des paramètres d'entrée les uns des autres, la valeur optimale x_i^{opt} peut être identifiée indépendamment des autres paramètres d'entrée en résolvant le problème inverse de dimension 1 qui lui est associé dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x_i^{opt} &= \underset{x_i \in C_{x_i}}{\operatorname{argmin}} (\|z_{1,i} - z_{1,i}^{exp}\|^2 + \dots + \|z_{\ell,i} - z_{\ell,i}^{exp}\|^2 + \dots + \|z_{s,i} - z_{s,i}^{exp}\|^2) \\ &= \underset{x_i \in C_{x_i}}{\operatorname{argmin}} (\|(\alpha_{1,i}^{opt})^T (\mathbf{f}(y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(y^{exp}))\|^2 + \dots + \\ &\quad \|(\alpha_{\ell,i}^{opt})^T (\mathbf{f}(y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(y^{exp}))\|^2 + \dots + \|(\alpha_{s,i}^{opt})^T (\mathbf{f}(y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(y^{exp}))\|^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $z_{\ell,i}^{exp}$ est la transformation des réponses expérimentales y^{exp} . Les paramètres x_j , $\{j \neq i\}$ sont choisis d'une façon aléatoire dans l'espace admissible.

Application :

Pour cette application, nous allons reprendre le recalage du modèle de pont à faible fidélité. Dans ce recalage, les mêmes paramètres d'entrée seront calibrés : les modules d'Young des poteaux (E_1), des appuis (E_2) et du tablier (E_3), ainsi que les masses volumiques des poteaux (ρ_1) et du tablier (ρ_2) tel que $\mathbf{x} = (E_1, E_2, E_3, \rho_1, \rho_2)$.

Nous avons décidé tout d'abord de recalculer le modèle de pont à faible fidélité en construisant pour chaque paramètre d'entrée x_i , deux nouvelles sorties $z_{\ell,i}, \{\ell = 1, 2\}$ (au lieu d'une seule comme précédemment) de sorte qu'elles soient uniquement sensibles à x_i et insensible aux autres paramètres d'entrée. A partir des matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, 5\}$ que nous avons été déjà estimées dans la section 1.4.2.3, les vecteurs de coordonnées optimales $\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5 \text{ et } \ell = 1, 2\}$ ont été calculés par la méthode de Newton-Raphson (2.7)

en partant des valeurs aléatoires pour $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^1, \{i = 1, \dots, 5\}$ avec $\lambda = 10^{-3}$. Aucun bruit n'a été ajouté sur les réponses $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ pour ne rendre pas la séparation des paramètres d'entrée compliquée.

La matrice de sensibilité $[S_1]$ présentée ci-dessous, représente la sensibilité des nouvelles sorties $z_{\ell,i}, \{\ell = 1, 2 \text{ et } i = 1, \dots, 5\}$ sur les paramètres d'entrée $x_j, \{j = 1, \dots, 5\}$. La matrice $[S_1]$ n'est pas très proche de la matrice d'identité, cela signifie que les nouvelles sorties $z_{\ell,i}, \{\ell = 1, 2\}$ sont faiblement impactées par les paramètres d'entrée $x_j, \{j \neq i\}$, et les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt}, \{\ell = 1, 2\}$ sont quasiment orthogonaux les uns par rapport aux autres. Les valeurs absolues des $\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5 \text{ et } \ell = 1, 2\}$ sont représentées dans la figure 2.1 . D'après cette figure, on remarque que pour chaque paramètre d'entrée x_i , les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{1i}^{opt}$ et $\boldsymbol{\alpha}_{2i}^{opt}$ sont très peu différents les uns des autres, et leurs valeurs présentent de légers écarts les uns par rapport aux autres.

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.06 & 0.07 & -0.07 & 0.06 & -0.06 & 0.05 & -0.05 & 0.10 & -0.10 \\ 0.06 & 0.97 & -0.07 & 0.07 & -0.06 & 0.06 & -0.05 & 0.05 & -0.10 & 0.10 \\ 0.08 & -0.08 & 0.97 & 0.06 & 0.07 & -0.06 & 0.04 & -0.04 & 0.11 & -0.11 \\ -0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.97 & -0.06 & 0.06 & -0.04 & 0.04 & -0.11 & 0.11 \\ 0.12 & -0.12 & 0.09 & -0.08 & 0.93 & 0.14 & 0.03 & -0.03 & 0.16 & -0.16 \\ -0.12 & 0.13 & -0.08 & 0.07 & 0.14 & 0.93 & -0.03 & 0.02 & -0.16 & 0.17 \\ 0.13 & 0.11 & 0.16 & 0.11 & 0.06 & 0.04 & 0.92 & -0.13 & 0.12 & 0.08 \\ 0.11 & 0.18 & 0.11 & 0.12 & 0.04 & 0.08 & -0.13 & 0.91 & 0.08 & 0.10 \\ 0.07 & -0.07 & 0.08 & -0.08 & 0.07 & -0.07 & 0.03 & -0.03 & 0.98 & 0.04 \\ -0.07 & 0.07 & -0.08 & 0.08 & -0.07 & 0.07 & -0.03 & 0.03 & 0.04 & 0.98 \end{bmatrix}$$

Après avoir calculé $\boldsymbol{\alpha}_{\ell,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5 \text{ et } \ell = 1, 2\}$, cinq tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale de x_i^{opt} , en donnant aux paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ dans l'équation (2.11), les mêmes valeurs que celles qui ont été choisies dans la section 1.5.1 pour chaque test. L'objectif de choisir les mêmes valeurs pour $x_j, \{j \neq i\}$ est de comparer l'amélioration du recalage de modèle avec l'augmentation de nombre des nouvelles sorties. Après avoir réalisé ces 5 tests , 5 valeurs pour \mathbf{x}^{opt} ont été calculées. Leurs erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ sont présentées dans le tableau 2.1 en comparaison avec celles calculées dans la section 1.5.1 pour $\lambda = 10^{-3}$. Dans ce tableau, on remarque que la construction d'une seule nouvelle sortie (s=1) a mieux diminué l'erreur aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ que la construction de deux sorties (s=2). Ce résultat inattendu est peut-être dû à l'impact des paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ sur $z_{\ell,i}, \{\ell = 1, 2\}$, en effet, comme on peut l'observer sur la matrice de sensibilité, l'ajout d'une sortie a pour impact d'augmenter la sensibilité aux autres paramètres et donc rend les problèmes inverses à résoudre moins indépendants les uns des autres.

TABLEAU 2.1 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

$\lambda = 10^{-3}$	test 1	test 2	test 3	test 4	test 5
Pour $s = 1$	6,82	6,96	6,42	6,72	6,51
Pour $s = 2$	7,48	8,88	8,42	7,50	7,41

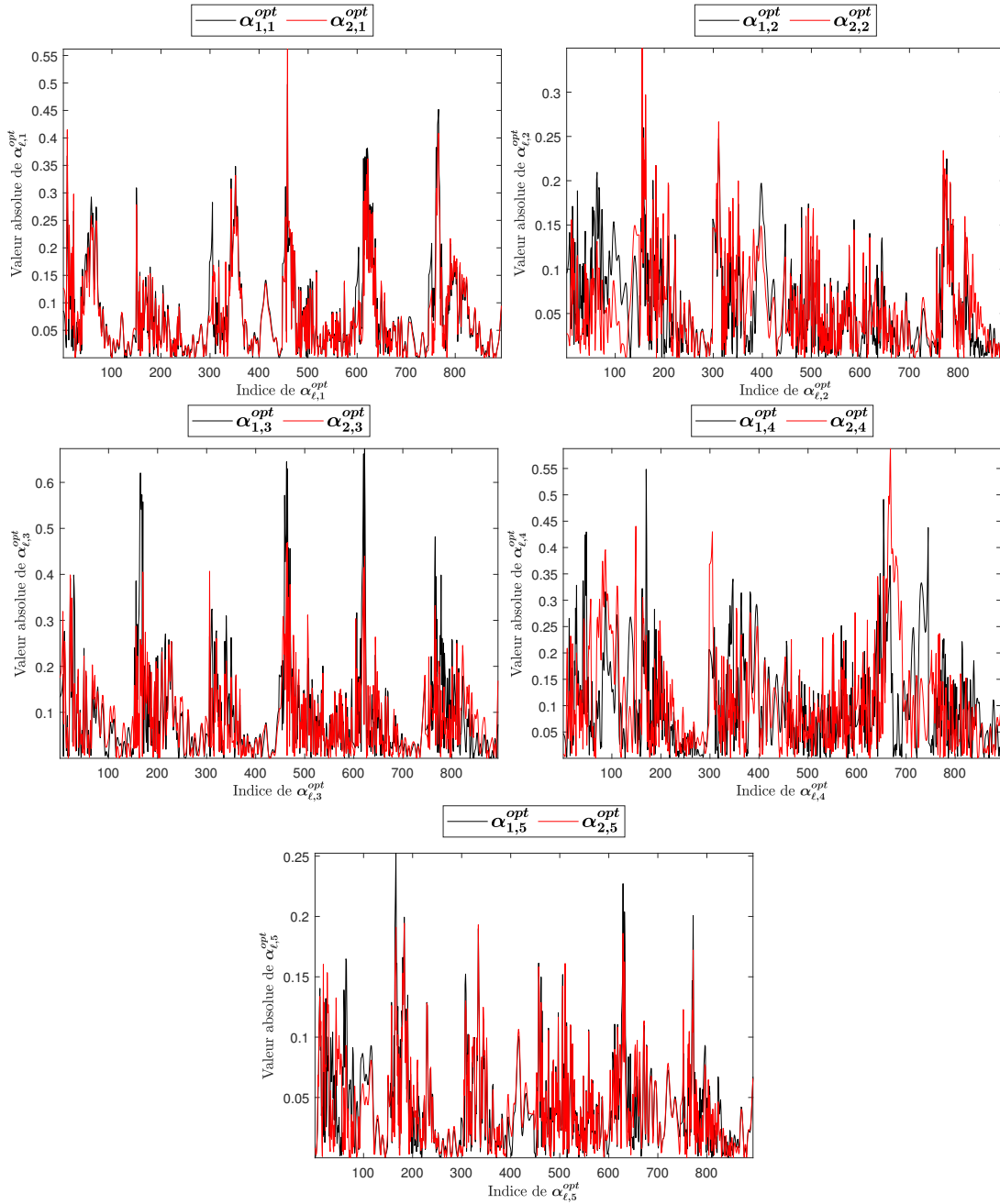


FIGURE 2.1 – Valeurs absolues de α_{1i}^{opt} et α_{2i}^{opt} , $\{i = 1, \dots, 5\}$.

Soit \mathbf{y}^{rec1} et \mathbf{y}^{rec2} les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité recalées par les valeurs optimales des paramètres d'entrée trouvées respectivement dans le test 3 pour $s = 1$ et dans le test 5 pour $s = 2$. Les figures 2.2 et 2.3 représentent les réponses \mathbf{y}^{rec1} et \mathbf{y}^{rec2} en comparaison avec les réponses numériques non recalées du modèle de pont à faible fidélité \mathbf{y}^{num} et les réponses du modèle de pont à haute fidélité \mathbf{y}^{exp} . D'après ces figures, on remarque que les réponses recalées \mathbf{y}^{rec1} sont légèrement plus proches des réponses du modèle de pont à haute fidélité \mathbf{y}^{exp} que celles de \mathbf{y}^{rec2} .

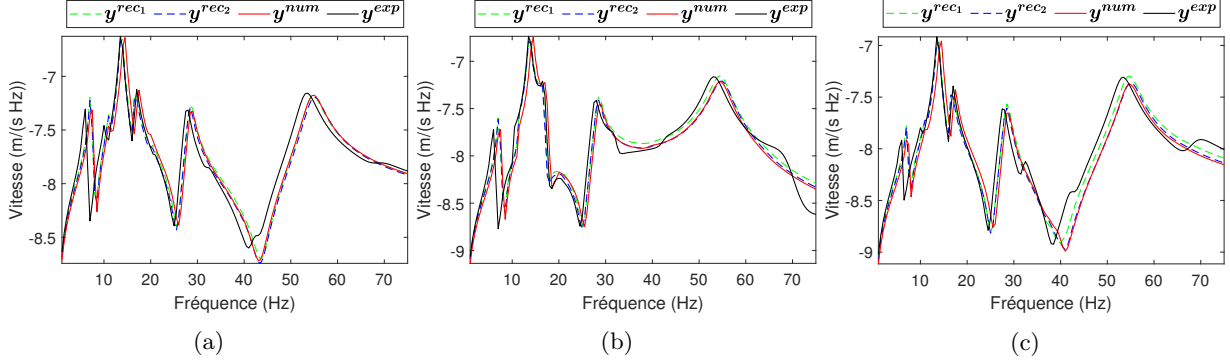


FIGURE 2.2 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec1} et \mathbf{y}^{rec2} calculées suivant la direction \mathbf{y} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

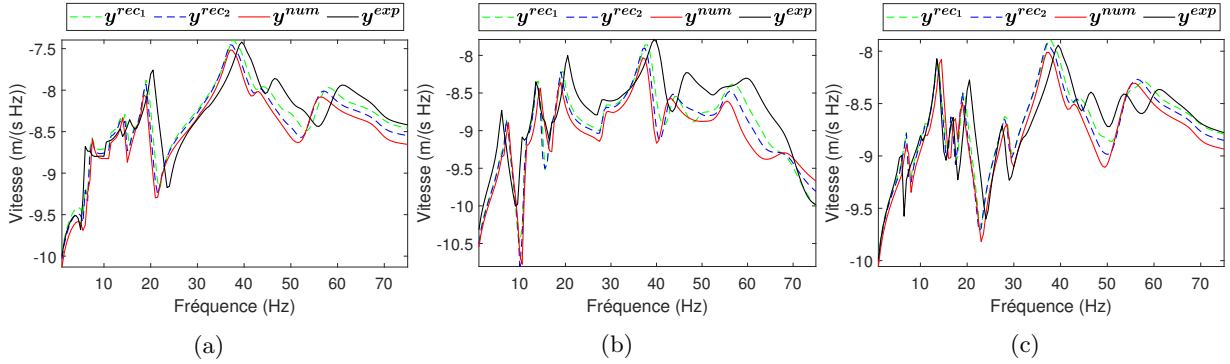


FIGURE 2.3 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec1} et \mathbf{y}^{rec2} calculées suivant la direction \mathbf{z} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

Après, nous avons décidé de recalculer de nouveau le modèle en construisant pour chaque paramètre d'entrée x_i , trois nouvelles sorties $z_{\ell,i}$, $\{\ell = 1, 2, 3\}$ cette fois-ci. A partir des matrices $[C^i]$, $\{i = 1, \dots, 5\}$, les vecteurs de coordonnées optimales $\alpha_{\ell,i}^{opt}$, $\{i = 1, \dots, 5$ et $\ell = 1, 2, 3\}$ ont été aussi calculés par la méthode de Newton-Raphson (2.7) avec $\lambda = 10^{-3}$.

La matrice de sensibilité $[S_2]$ présentée ci-dessous, représente la sensibilité des nouvelles sorties $z_{\ell,i}$, $\{\ell = 1, 2, 3$ et $i = 1, \dots, 5\}$ vis-à-vis les paramètres d'entrée x_j , $\{j = 1, \dots, 5\}$. Cette matrice est assez loin de la matrice d'identité. Cela signifie que les nouvelles sorties $z_{\ell,i}$, $\{\ell = 1, 2, 3\}$ sont impactées par les paramètres d'entrée x_j , $\{j \neq i\}$, et que les vecteurs optimaux $\alpha_{\ell,i}^{opt}$, $\{\ell = 1, 2, 3\}$ ne sont pas totalement orthogonaux les uns par rapport aux autres.

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.04 & 0.11 & 0.09 & 0.02 & -0.09 & 0.09 & 0.03 & -0.10 & 0.05 & -0.04 & -0.03 & 0.17 & -0.10 & -0.14 \\ 0.04 & 0.92 & 0.04 & 0.02 & 0.12 & -0.07 & 0.03 & 0.11 & -0.07 & -0.04 & 0.08 & -0.01 & -0.10 & 0.17 & 0.03 \\ 0.11 & 0.04 & 0.94 & -0.09 & -0.07 & 0.11 & -0.10 & -0.07 & 0.12 & -0.03 & -0.01 & 0.04 & -0.14 & 0.03 & 0.14 \\ 0.12 & 0.03 & -0.09 & 0.92 & 0.06 & 0.03 & 0.10 & 0.02 & -0.07 & 0.08 & -0.05 & 0.00 & 0.19 & -0.12 & 0.01 \\ 0.03 & 0.09 & -0.10 & 0.06 & 0.93 & 0.10 & 0.02 & 0.06 & -0.06 & -0.05 & 0.06 & -0.03 & -0.12 & 0.18 & -0.14 \\ -0.09 & -0.10 & 0.13 & 0.03 & 0.10 & 0.94 & -0.07 & -0.06 & 0.09 & 0.00 & -0.03 & 0.03 & 0.01 & -0.14 & 0.15 \\ 0.18 & -0.13 & -0.12 & 0.10 & -0.03 & -0.06 & 0.89 & 0.11 & 0.13 & 0.05 & -0.02 & -0.03 & 0.18 & -0.07 & -0.09 \\ -0.13 & 0.15 & 0.04 & -0.03 & 0.10 & -0.06 & 0.11 & 0.87 & 0.12 & -0.02 & 0.03 & -0.01 & -0.07 & 0.23 & -0.15 \\ -0.12 & 0.04 & 0.14 & -0.06 & -0.06 & 0.11 & 0.13 & 0.12 & 0.87 & -0.03 & -0.01 & 0.04 & -0.09 & -0.15 & 0.23 \\ 0.20 & -0.14 & -0.08 & 0.16 & -0.02 & -0.08 & 0.08 & -0.04 & -0.01 & 0.87 & 0.13 & 0.08 & 0.11 & -0.02 & -0.03 \\ -0.14 & 0.17 & 0.03 & -0.02 & 0.13 & -0.09 & -0.04 & 0.08 & -0.03 & 0.13 & 0.84 & 0.16 & -0.02 & 0.22 & -0.17 \\ -0.08 & 0.03 & 0.15 & -0.08 & -0.09 & 0.16 & -0.01 & -0.03 & 0.11 & 0.08 & 0.16 & 0.85 & -0.03 & -0.17 & 0.20 \\ 0.11 & -0.05 & -0.02 & 0.13 & -0.06 & -0.02 & 0.11 & -0.05 & -0.03 & 0.05 & 0.00 & -0.03 & 0.95 & 0.05 & 0.02 \\ -0.05 & 0.11 & -0.08 & -0.06 & 0.13 & -0.10 & -0.05 & 0.11 & -0.08 & 0.00 & 0.03 & -0.03 & 0.05 & 0.95 & 0.08 \\ -0.02 & -0.08 & 0.10 & -0.02 & -0.10 & 0.13 & -0.03 & -0.08 & 0.11 & -0.03 & -0.03 & 0.06 & 0.02 & 0.08 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Après avoir calculé $\alpha_{\ell,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$, cinq tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale de paramètre d'entrée x_i^{opt} de même façon pour le cas $s = 2$. Dans le tableau 2.2, on remarque que pour $s = 3$, l'erreur aux moindres carrés a augmenté dans certains tests et a diminué dans certains autres tests par comparaison à $s = 2$. Par contre, les valeurs d'erreurs aux moindres carrés pour $s = 1$ sont toujours restées les plus faibles valeurs. Cette variation dans les valeurs des erreurs aux moindres carrés pour $s = 3$ par comparaison à $s = 2$ vient de la dégradation de la matrice de sensibilité.

TABLEAU 2.2 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

$\lambda = 10^{-3}$	test 1	test 2	test 3	test 4	test 5
Pour $s = 1$	6,82	6,96	6,42	6,72	6,51
Pour $s = 2$	7,48	8,88	8,42	7,50	7,41
Pour $s = 3$	15,72	7,27	12,59	7,37	9,18

Au vu des résultats obtenus pour cette application, on peut conclure que l'augmentation de nombre des nouvelles sorties z_i n'a pas suffisamment diminué la distance entre les réponses numériques de modèle de pont à faible fidélité et les réponses numériques de modèle de pont à haute fidélité. Ce résultat vient du fait que l'ajout de sortie ajoute des contraintes aux calculs des vecteurs de coordonnées et nuit à la séparation des paramètres d'entrée. En outre, on a remarqué que plus le nombre des nouvelles sorties construites augmente, plus la séparation des paramètres d'entrée devient difficile.

2.2 Enrichissement par sélection des sorties du modèle

Dans le chapitre 1, nous avons mis en évidence le fait que la distribution des composantes des vecteurs de coordonnées $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ joue un grand rôle sur la qualité du recalage de modèle. Lorsque ces vecteurs privilégient certaines composantes au détriment d'autres composantes, certaines portions des données d'entrée sont négligées pour le recalage. Dans cette section, nous présentons une extension de la méthode RBS qui consiste à décomposer d'une façon aléatoire les réponses numériques $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ d'un modèle à recalcer en des groupes des composantes. L'objectif de cette décomposition est de permettre d'obtenir des vecteurs de coordonnées $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ dont les composantes permettent de recalcer le modèle sur une plage d'observation plus large et éviter ainsi que les composantes à valeur élevée se concentrent sur des plages restreintes ou non intéressantes pour le recalage global.

La méthode consiste à générer aléatoirement des n_b sous-ensembles du vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$. Chaque sous-ensemble noté $G_t, \{t = 1, \dots, n_b\}$ forme un groupe de taille \tilde{n}_g , de sorte que $\tilde{n}_g < n_g$. Pour chaque groupe, des vecteurs de coordonnées $\alpha_{t,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ lui seront associés. Ces vecteurs de coordonnées seront donc

concentrés uniquement sur les composantes de groupe G_t .

Cette méthode de décomposition est simple et très rapide à être mis en œuvre. Elle consiste tout d'abord à estimer les matrices $[C^j], \{j = 1, \dots, n\}$ de chaque paramètre d'entrée en prenant tous les composantes du vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, puis de choisir aléatoirement les n_b groupes. Pour chaque groupe G_t , des nouvelles matrices $[C_t^j], \{j = 1, \dots, n\}$ lui sont associées et à partir desquelles les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$ seront calculés.

Les nouvelles matrices $[C_t^j], \{j = 1, \dots, n\}$ sont très facile à calculer. Pour les déterminer, il faut partir des matrices $[C^j], \{j = 1, \dots, n\}$ et ne conserver que les lignes et colonnes correspondant aux indices du groupe G_t .

Pour chaque groupe G_t , les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}$ seront calculés à partir les matrices $[C_t^j], \{j = 1, \dots, n\}$. Puis, ces vecteurs seront transformés de sorte qu'ils aient la même taille que le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, en mettant des valeurs nulles aux composantes qui ne font pas partie du groupe G_t .

Après d'avoir transformé $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}$, n_b valeurs optimales de \mathbf{x} seront respectivement identifiées en utilisant les n_b vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, n\}$, en résolvant le problème inverse de dimension 1 suivant :

$$x_{t,i}^{opt} = \underset{x_i \in C_{x_i}}{\operatorname{argmin}} \| \boldsymbol{\alpha}_{t,i}^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp})) \| . \quad (2.12)$$

Parmi les valeurs de $x_{t,i}^{opt}$ calculées, le vecteur \mathbf{x}_t^{opt} qui donne la plus faible erreur aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ sera noté \mathbf{x}^{opt} et correspond à la valeur recalée du vecteur \mathbf{x} . Dans le cas où l'approche de l'exploration directe de tout l'espace des paramètres d'entrée est utilisée pour résoudre le problème inverse présenté dans l'équation (2.12), afin de minimiser le nombre de calculs de la sortie du modèle, les réalisations du vecteur $(\mathbf{f}(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))$ ne seront calculées qu'une seule fois pour chaque valeur de x_i pour identifier les t valeurs optimales de x_i .

Application :

Dans cette partie, nous allons reprendre le recalage des réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité en appliquant la méthode de sélection présentée ci-dessus pour améliorer le recalage. Les mêmes paramètres d'entrée seront calibrés, ainsi $\mathbf{x} = (E_1; E_2; E_3; \rho_1; \rho_2)$.

Les réponses $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ du modèle de pont à faible fidélité ont été décomposées en 50 groupes $G_t, \{t = 1, \dots, 50\}$. Le vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ contient $n_g = 894$ composantes. Chaque groupe G_t contient $\tilde{n}_g = 112$ composantes du vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ choisies aléatoirement. Un bruit additif de 10% de \mathbf{y}^{exp} a été introduit dans les réponses numériques du modèle. Pour chaque groupe G_t , les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}, \{i = 1, \dots, 5\}$ ont été calculés par la méthode de

Newton-Raphson (1.17) avec $\lambda = 0$ et à partir des matrices $[C^j], \{j = 1, \dots, 5\}$ après avoir été transformées afin qu'elles soient associées au groupe G_t . La figure 2.6, représente les valeurs absolues des composantes de $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5 \text{ et } t = 1, \dots, 50\}$ normalisées au maximum unitaire. D'après cette figure, on remarque que la décomposition du vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ en sous-groupes a permis d'obtenir des vecteurs de composantes différents les uns par rapport aux autres, et que chacune de ces solutions se concentre uniquement sur son groupe de composantes. Nous avons vérifié que chacune des matrices de sensibilité (au nombre de 50) associées à chaque groupe $G_t, \{t = 1, \dots, 50\}$ sont très proches de la matrice de l'identité.

Après avoir calculé $\boldsymbol{\alpha}_{t,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 5 \text{ et } t = 1, \dots, 50\}$, cinq tests ont été réalisés pour identifier la valeur optimale \mathbf{x}^{opt} des paramètres d'entrée, en donnant aux paramètres $x_j, \{j \neq i\}$ dans l'équation (2.12) les mêmes valeurs que celles qui ont été choisies dans la section 1.4.2.3. Dans chaque test, nous avons calculé 50 valeurs pour $x_{t,i}^{opt}$ en variant t de 1 jusqu'à 50 dans l'équation (2.12), et en explorant l'intervalle de variation de paramètre x_i discrétisé en 101 points. Les valeurs du vecteur $(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_5) - \mathbf{y}^{exp})$ ont été calculés une seule fois pour chaque point de x_i . Au total, nous avons calculé pour les 5 tests, 250 valeurs pour

\mathbf{x}^{opt} .

Parmi ces \mathbf{x}_i^{opt} calculés, nous avons trouvé que le \mathbf{x}^{opt} ci-dessous a donné la plus faible erreur aux moindres carrés ($\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\| = 5,38$) :

$$\mathbf{x}^{opt} = (5,418 \times 10^{10}; 6,67 \times 10^{10}; 5,197 \times 10^{10}; 2924,1; 1679,5).$$

Donc, les nouvelles valeurs des paramètres d'entrée du modèle à faible fidélité après son recalage par la méthode de sélection sont : $E1 = 5,418 \times 10^{10} Pa$, $E2 = 6,67 \times 10^{10} Pa$, $E3 = 5,197 \times 10^{10} Pa$, $\rho_1 = 2924,1 kg/m^3$ et $\rho_2 = 1679,5 kg/m^3$.

Les figures 2.4 et 2.5 représentent les réponses numériques non recalées du modèle de pont à faible fidélité (\mathbf{y}^{num}), les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) et les réponses numériques recalées (\mathbf{y}^{rec_1} , (\mathbf{y}^{rec_2}) respectivement par \mathbf{x}^{opt} (calculé dans la section 1.4.2.3) et \mathbf{x}^{opt} (calculé dans cette section). D'après ces figures, nous pouvons remarquer que le calibrage des paramètres d'entrée par la méthode de sélection a nettement réduit les écarts, entre les réponses expérimentales et les réponses numériques, comparés à la version initiale de la méthode RBS.

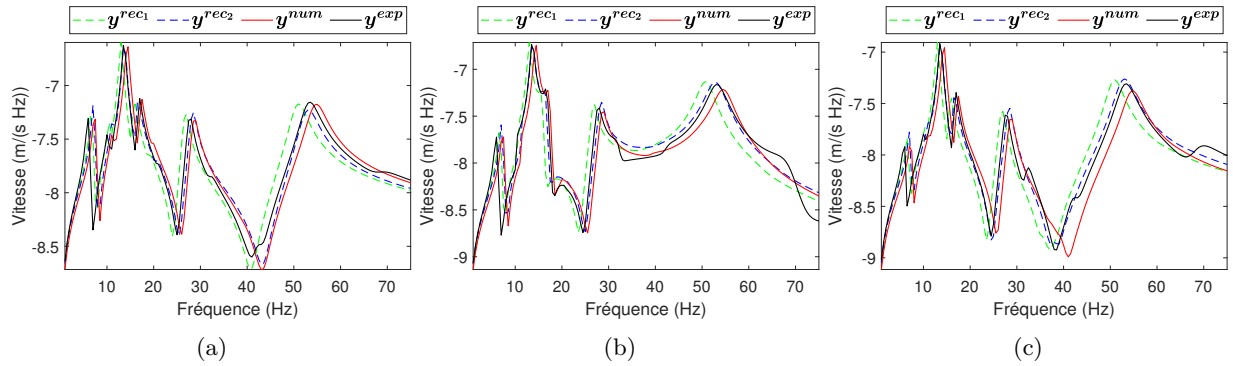


FIGURE 2.4 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec_1} et \mathbf{y}^{rec_2} calculées suivant la direction \mathbf{y} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

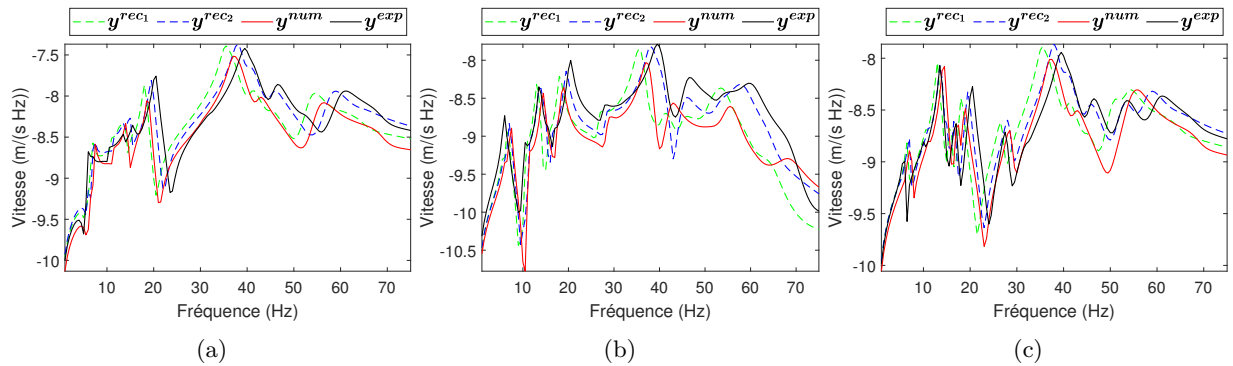


FIGURE 2.5 – Comparaison des courbes de réponses fréquentielles en vitesse \mathbf{y}^{rec_1} et \mathbf{y}^{rec_2} calculées suivant la direction \mathbf{z} , avec les réponses numériques non recalées \mathbf{y}^{num} et les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} aux nœuds P_1 (a) , P_2 (b) et P_3 (c).

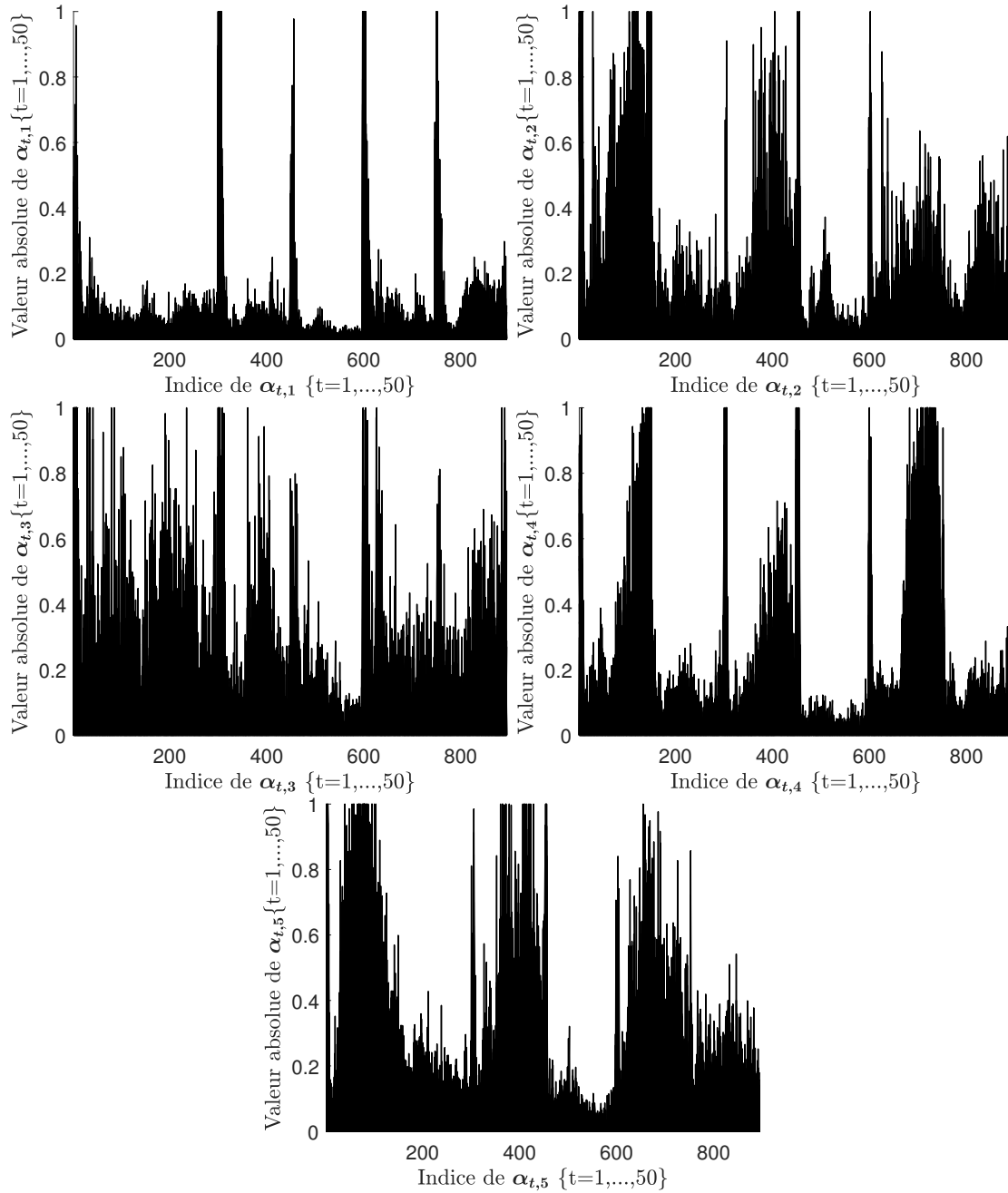


FIGURE 2.6 – Valeurs absolues des composantes des vecteurs $\alpha_{t,i}^{opt}$ $\{i = 1, \dots, 5 \text{ et } t = 1, \dots, 50\}$.

Dans cette application, on peut conclure que la décomposition des réponses $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ en des groupes de composantes a permis de fortement réduire les écarts entre les réponses numériques et les réponses expérimentales. Cette décomposition a permis de diminuer la distance entre les réponses numériques du modèle de pont à faible fidélité et celles du modèle de pont à haute fidélité jusqu'à une distance de 5,38 qu'est très proche de la distance minimale (5,1) trouvée par l'algorithme recuit simulé dans la section 1.5.3 mais bien sûr avec beaucoup moins de temps de calcul.

2.3 Traitement des cas où les paramètres d'entrée ne sont pas séparables.

Dans les sections précédentes, la méthode RBS a été appliquée sur deux modèles numériques différents : le premier représente un système à trois masses et le deuxième est un modèle de pont à faible fidélité. Pour ces deux modèles, les paramètres d'entrée pouvaient clairement être séparés les uns des autres, et les nouvelles sorties construites z_i étaient uniquement sensibles aux paramètres associés, comme on a pu l'observer sur les matrices de sensibilité estimées. Cependant, dans certains cas, certains paramètres d'entrée sont inséparables des autres paramètres, rendant compliquée l'identification des valeurs optimales de ces paramètres indépendamment des autres paramètres. Le but de cette section est de proposer une extension pour la méthode RBS pour pallier ce problème et de pouvoir identifier les valeurs optimales des paramètres qui ne sont pas séparables des autres paramètres.

Nous rappelons que la méthode RBS de base consiste à construire pour chaque paramètre x_i , une nouvelle sortie z_i de sorte qu'elle soit uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres. Cette sensibilité peut être quantifiée par la matrice de sensibilité $[S]$ qui représente la sensibilité des nouvelles sorties construites $z_i, \{i = 1, \dots, n\}$ vis-à-vis des paramètres d'entrée $x_j, \{j = 1, \dots, n\}$, et pour laquelle ses termes sont $S_{T_{i,j}}$ (1.9). Donc si la matrice $[S]$ est très proche de la matrice de l'identité, cela signifie que tous les paramètres $x_i, \{i = 1, \dots, n\}$ ont été bien séparés les uns des autres. Si ce n'était pas le cas, au moins un des paramètres $x_i, \{i = 1, \dots, n\}$ est inséparable des autres paramètres et sa nouvelle sortie z_i est sensible aux paramètres, ce qui rend l'identification de la valeur optimale de ce paramètre indépendamment des autres paramètres impossible. L'extension de la méthode RBS présentée dans cette section, permet de traiter ces cas en construisant une séquence de problèmes inverses de petite dimension avec des étapes d'identification spécifiques. Cette extension de la méthode RBS sera dénommée RBSX dans la suite du manuscrit.

Jusqu'au calcul de la matrice de sensibilité, la méthode RBSX est identique à la méthode RBS. La différence tient dans la manière dont les sous-problèmes inverses sont résolus. Tout d'abord, nous introduisons un critère de séparabilité utilisant la matrice de sensibilité : si $S_{T_{i,j}} > Cr$, où Cr est un seuil prédéfini, alors la nouvelle sortie z_i est sensible au paramètre x_j , par contre si $S_{i,j} \leq Cr$, la nouvelle sortie z_i est supposée insensible au paramètre x_j . L'analyse de la sensibilité de chaque sortie z_i vis-à-vis des paramètres $x_j, \{j = 1, \dots, n\}$, permet alors d'associer à chaque sortie z_i non pas un paramètre comme précédemment mais un groupe de paramètres. Pour les paramètres séparables la taille de ce groupe vaut 1. La méthode RBSX permet alors d'identifier les valeurs optimales des paramètres d'entrée en suivant les étapes suivantes :

1. La première étape consiste à identifier les valeurs optimales uniquement des paramètres séparables vis-à-vis du critère de séparabilité défini ci-dessus. Ces paramètres sont alors fixés à leurs valeurs optimales dans les étapes suivantes. Dans le cas, où aucun paramètre n'est séparable, cette étape n'est pas prise en compte.
2. La deuxième étape consiste à identifier les paramètres correspondant au groupe de plus petite taille (en fixant les valeurs des paramètres du groupe qui ont déjà été identifiées à l'étape précédente). L'identification des paramètres se fait en résolvant le problème inverse de petite dimension suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^{opt} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_d \in C_{\mathbf{x}_d}} \sum_{i \in d} \|z_i - z_i^{exp}\|^2 \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_d \in C_{\mathbf{x}_d}} \sum_{i \in d} \|(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt})^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))\|^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où \mathbf{x}_d^{opt} est la valeur optimale du vecteur des paramètres à identifier et d est l'ensemble des indices de ces paramètres. Les paramètres $x_j, \{j \notin d\}$ sont fixés à leurs valeurs optimales s'ils ont déjà été

identifiées précédemment, sinon ils sont choisis d'une façon aléatoire dans l'espace admissible. Les paramètres identifiés en résolvant ce problème inverse sont alors fixés à leurs valeurs optimales

3. La deuxième étape est répétée jusqu'à l'identification de tous les paramètres.

Dans le cas, où il existe plusieurs groupes de paramètres à identifier dans la deuxième étape, il faut tout d'abord identifier les paramètres du groupe pour lesquels le problème inverse est le moins sensible aux autres paramètres du groupe. La classification de cette sensibilité est réalisée en sommant les lignes de la matrice de sensibilité (en excluant au préalable les termes correspondant aux paramètres du groupe).

Application

Soit $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_1(\mathbf{x}); \mathbf{y}_2(\mathbf{x}); \mathbf{y}_3(\mathbf{x}))$ tel que :

$$\mathbf{y}_p(\mathbf{x}) = \ln \left| \sum_{f=1}^{10} \left\{ \frac{a_{p,f}}{-w^2 \times m_f + iw \times c + k_f} \right\} \right|, p = 1, 2, 3.$$

où $\mathbf{x} = (m_1, m_2, \dots, m_{10}, k_1, k_2, \dots, k_{10})$, $c = 0,09$, w est la pulsation de la fonction $\mathbf{y}_p(\mathbf{x})$ et variant dans l'intervalle $[1; 50]$ rad/s avec un pas de 0,5 rad/s, et $a_{p,f}$ sont des constantes dont les valeurs sont présentées dans le tableau 2.3.

TABLEAU 2.3 – Valeurs des constantes $a_{p,f}$.

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{1,f}$	0,14	0,16	0,14	0,14	0	0	0	0,18	0	0
$a_{2,f}$	0,08	0,18	0	0	0	0,1	0,1	0	0	0
$a_{3,f}$	0,16	0,08	0	0	0,18	0	0	0	0,14	0,14

Soit \mathbf{y}^{exp} des réponses expérimentales de référence générées numériquement par la fonction $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, et \mathbf{y}^{num} des réponses numériques de la fonction $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ générées lorsque les valeurs du vecteur \mathbf{x} correspondent aux valeurs des paramètres présentées dans le tableau 2.4. Les réponses \mathbf{y}^{num} et \mathbf{y}^{exp} sont représentées dans la figure 2.7.

TABLEAU 2.4 – Valeurs des paramètres d'entrée m_f et k_f .

$f=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_f	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k_f	2 ²	5 ²	14 ²	15 ²	20 ²	29 ²	30 ²	35 ²	44 ²	45 ²

Le but est de recalculer les réponses \mathbf{y}^{num} par rapport aux réponses \mathbf{y}^{exp} en calibrant les paramètres d'entrée. Les matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, 20\}$ ont été estimées selon l'équation (1.22). Ces matrices sont estimées avec 1000 échantillons. Les paramètres d'entrée sont multipliés par des coefficients variant de manière logarithmique et avec une distribution uniforme dans l'intervalle $[-0,097; 0,0792]$. Cette paramétrisation permet aux coefficients multiplicatifs de varier dans l'intervalle $[0,8; 1,2]$. Le vecteur des fonctions de base est tel que $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. Les vecteurs de coordonnées optimales $\alpha_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 20\}$ ont été calculés selon la méthode de Newton-Raphson en partant de valeurs aléatoires pour $\alpha_i^1, \{i = 1, \dots, 20\}$ et avec $\lambda = 0$, de façon à tenter de construire pour chaque paramètre d'entrée x_i , une nouvelle sortie z_i sensible uniquement à x_i et insensible aux autres paramètres. Un bruit de 5% du vecteur \mathbf{y}^{exp} a été ajouté sur les matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, 20\}$ selon l'équation (1.26).

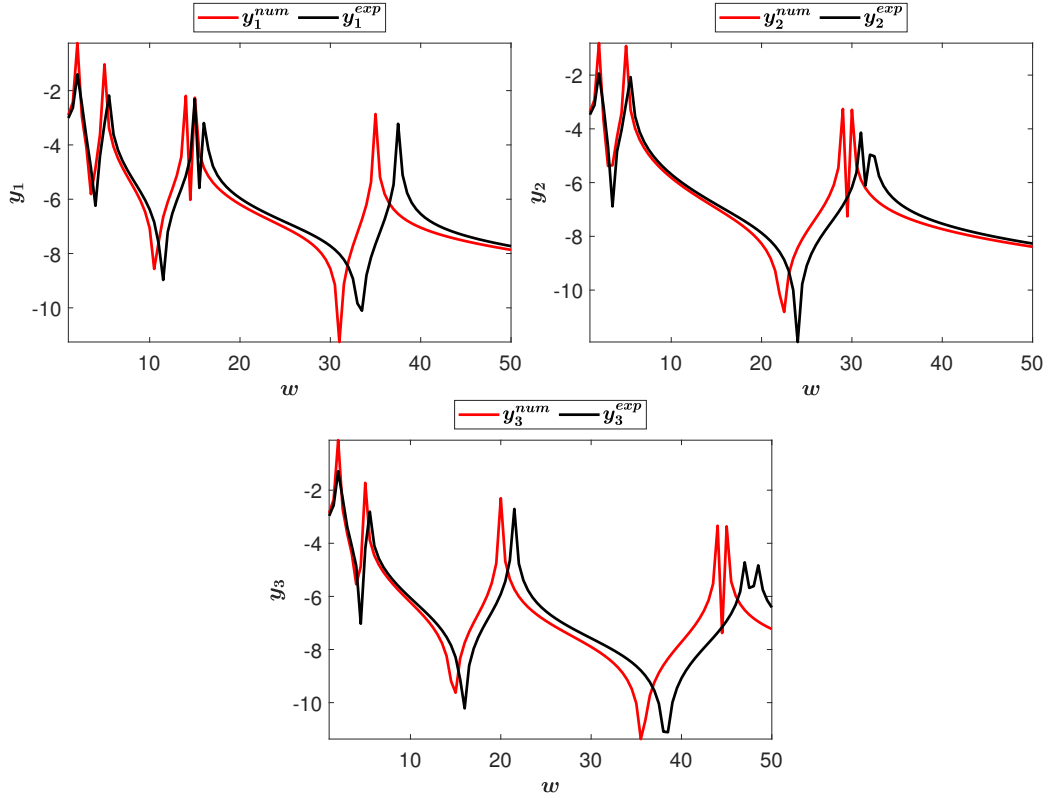


FIGURE 2.7 – Réponses y^{num} et y^{exp} en fonction de w .

La matrice de sensibilité $[S]$ est représentée sur la figure 2.8. Nous remarquons que la matrice de sensibilité n'est pas proche de la matrice d'identité. Cela signifie que certains paramètres d'entrée de vecteur \mathbf{x} sont inséparables des autres paramètres. En prenant $Cr = 0,05$, on déduit que :

- z_1 est uniquement sensible à x_1 .
- z_2 est uniquement sensible à x_2 .
- z_3 est sensible à x_3, x_4, x_{13} et x_{14} .
- z_4 est sensible à x_3, x_4, x_{13} et x_{14} .
- z_5 est uniquement sensible à x_5 .
- z_6 est sensible à x_6, x_7, x_{16} et x_{17} .
- z_7 est sensible à x_6, x_7 et x_{17} .
- z_8 est uniquement sensible à x_8 .
- z_9 est sensible à $x_5, x_9, x_{10}, x_{15}, x_{19}$ et x_{20} .
- z_{10} est sensible à $x_1, x_5, x_9, x_{10}, x_{19}$ et x_{20} .
- z_{11} est uniquement sensible à x_{11} .
- z_{12} est uniquement sensible à x_{12} .
- z_{13} est sensible à $x_1, x_2, x_3, x_4, x_{13}$ et x_{14} .
- z_{14} est sensible à x_3, x_4, x_{13} et x_{14} .
- z_{15} est uniquement sensible à x_{15} .
- z_{16} est sensible à x_6, x_7, x_{16} et x_{17} .
- z_{17} est sensible à x_6, x_7, x_{16} et x_{17} .
- z_{18} est uniquement sensible à x_{18} .
- z_{19} est sensible à x_5, x_9, x_{10}, x_{19} et x_{20} .
- z_{20} est sensible à x_9, x_{10}, x_{19} et x_{20} .

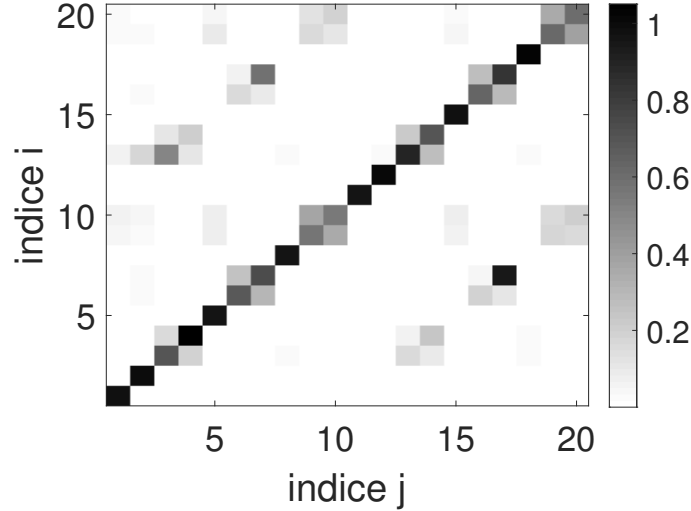


FIGURE 2.8 – Matrice de sensibilité $[S]$.

En suivant la méthode RBSX présentée ci-dessus, l'identification des valeurs optimales des paramètres d'entrée est alors réalisée selon les étapes suivantes :

- Étape 1 : identification de paramètre d'entrée x_{11} .
- Étape 2 : identification de paramètre d'entrée x_1
- Étape 3 : identification de paramètre d'entrée x_2
- Étape 4 : identification de paramètre d'entrée x_{12}
- Étape 5 : identification de paramètre d'entrée x_8
- Étape 6 : identification de paramètre d'entrée x_5
- Étape 7 : identification de paramètre d'entrée x_{15}
- Étape 8 : identification de paramètre d'entrée x_{18}
- Étape 9 : identification des paramètres d'entrée x_3, x_4, x_{13} et x_{14} .
- Étape 10 : identification des paramètres d'entrée x_9, x_{10}, x_{19} et x_{20} .
- Étape 11 : identification des paramètres d'entrée x_6, x_7, x_{16} et x_{17} .

Cinq tests ont été réalisés pour identifier les valeurs optimales des paramètres d'entrée. Les problèmes inverses de unidimensionnel ont été résolus parcourant l'intervalle des paramètres. Les problèmes inverses multidimensionnels ont été résolus en utilisant un algorithme génétique (GA) ou un algorithme recuit simulé (SA). Les erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ sont présentées dans le tableau 2.5.

TABLEAU 2.5 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$.

Test	1	2	3	4	5
GA	4,47	4,49	4,39	7,13	7,08
SA	8,53	5,34	10,77	8,31	12,01

L'erreur aux moindres carrés initiale est $\| \mathbf{y}^{num} - \mathbf{y}^{exp} \| = 19,12$. D'après le tableau 2.5, on remarque que la méthode RBSX a bien diminué l'erreur $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ jusqu'à 4,39 correspondant au test 3.

Le nombre d'appels total à la fonction $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ pour calculer les valeurs optimales des paramètres d'entrée est de 22083 appels. En comparaison, le calibrage global direct des paramètres d'entrée, sans utiliser la méthode RBSX et en utilisant l'algorithme GA nécessite 22100 appels pour atteindre une erreur aux moindres carrés

de 2,39 et l'utilisation directe de l'algorithme SA nécessite 23963 appels pour atteindre une erreur aux moindres carrés de 3,87. Cela signifie que la méthode RBSX a été moins efficace, pour le même nombre d'appels, en comparaison avec les algorithmes GA et SA utilisés directement.

Pour améliorer la performance de la méthode RBSX, nous l'avons combiné avec la méthode de sélection présentée dans la section 2.2. Ainsi pour chaque paramètre d'entrée x_i , $nb = 8$ sous-ensemble de réponses ont été sélectionnés, de sorte que chaque $z_{t,i}$, $\{t = 1, \dots, 8\}$ soit uniquement sensible à x_i et insensible aux autres paramètres. Les dimensions des sous-ensembles sont :

- 285 composantes pour le paramètre d'entrée x_9 .
- 280 composantes pour le paramètre d'entrée x_{10} .
- 270 composantes pour le paramètre d'entrée x_{19} .
- 270 composantes pour le paramètre d'entrée x_{20} .
- 225 composantes pour les paramètres d'entrée qui restent.

Les matrices de sensibilité $[S_1], [S_2], \dots, [S_8]$ associées respectivement à $\alpha_{1,i}^{opt}, \alpha_{2,i}^{opt}, \dots, \alpha_{8,i}^{opt}, \{i = 1, \dots, 20\}$, représentent les sensibilités des nouvelles réponses $z_{t,i}$ vis-à-vis des paramètres d'entrée $x_j, \{j = 1, \dots, 20\}$.

Soit $[\bar{S}]$, la matrice de sensibilité moyenne des matrices $[S_1], [S_2], \dots, [S_8]$ ($[\bar{S}] = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 [S_t]$). Cette matrice moyenne est utilisée pour construire les étapes d'identification de la méthode RBSX. La matrice $[\bar{S}]$ n'est pas proche de la matrice de l'identité, signifiant que certains paramètres d'entrée ne sont toujours inséparables des autres paramètres.

En prenant $Cr = 0,05$, l'identification des valeurs optimales des paramètres d'entrée est réalisée selon les étapes suivantes :

- Étape 1 : identification de paramètre d'entrée x_{11} .
- Étape 2 : identification de paramètre d'entrée x_1
- Étape 3 : identification de paramètre d'entrée x_2
- Étape 4 : identification de paramètre d'entrée x_{12}
- Étape 5 : identification de paramètre d'entrée x_5
- Étape 6 : identification de paramètre d'entrée x_{15}
- Étape 7 : identification de paramètre d'entrée x_8
- Étape 8 : identification de paramètre d'entrée x_{18}
- Étape 9 : identification des paramètres d'entrée x_3, x_4, x_{13} et x_{14} .
- Étape 10 : identification des paramètres d'entrée x_9, x_{10}, x_{19} et x_{20} .
- Étape 11 : identification des paramètres d'entrée x_6, x_7, x_{16} et x_{17} .

Les problèmes inverses multidimensionnels sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^{opt} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_d \in C_{\mathbf{x}_d}} \sum_{i \in d} \sum_{t=1}^8 \|z_{t,i} - z_{t,i}^{exp}\|^2 \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_d \in C_{\mathbf{x}_d}} \sum_{i \in d} \sum_{t=1}^8 \|(\alpha_{t,i}^{opt})^T (\mathbf{f}(\mathbf{y}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{exp}))\|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

où \mathbf{x}_d^{opt} est le vecteur des paramètres d'entrée à identifier et d est l'ensemble des indices de ces paramètres. Ces problèmes inverses sont résolus par les algorithmes GA ou SA.

Cinq tests ont de nouveau été réalisés pour identifier les valeurs optimales des paramètres d'entrée. Leurs erreurs aux moindres carrés $\|\mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp}\|$ sont présentées dans les tableaux 2.6 et 2.7.

TABLEAU 2.6 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ en utilisant GA.

Test	1	2	3	4	5
RBSX	4,47	4,49	4,39	7,13	7,08
RBSX + sélection	2,78	4,38	3,12	3,39	3,04

TABLEAU 2.7 – Erreurs aux moindres carrés $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}^{opt}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ en utilisant SA.

Test	1	2	3	4	5
RBSX	8,53	5,34	10,77	8,31	12,01
RBSX + sélection	1,81	8,47	2,13	3,54	2,34

D'après les tableaux 2.6 et 2.7, on remarque que la combinaison de RBSX avec la méthode de sélection a permis de diminuer les erreurs aux moindres carrés dans tous les tests sauf dans le test 2 dans le tableau 2.7. La distance minimale $\| \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^{exp} \|$ est égale à 1,81. Les nombres d'appels étant les mêmes que précédemment, la RBSX combinée à la méthode de sélection a donc permis d'obtenir un meilleur recalage que les algorithmes GA et SA.

La figure 2.9 représente les réponses numériques non recalées (\mathbf{y}^{num}) de la fonction $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) et les réponses numériques \mathbf{y}^{rec1} et \mathbf{y}^{rec2} recalées utilisant RBSX seul et RBSX combinée à la méthode de sélection. D'après cette figure, nous pouvons clairement remarquer que cette dernière méthode a permis un meilleur recalage (surtout au niveau des pics).

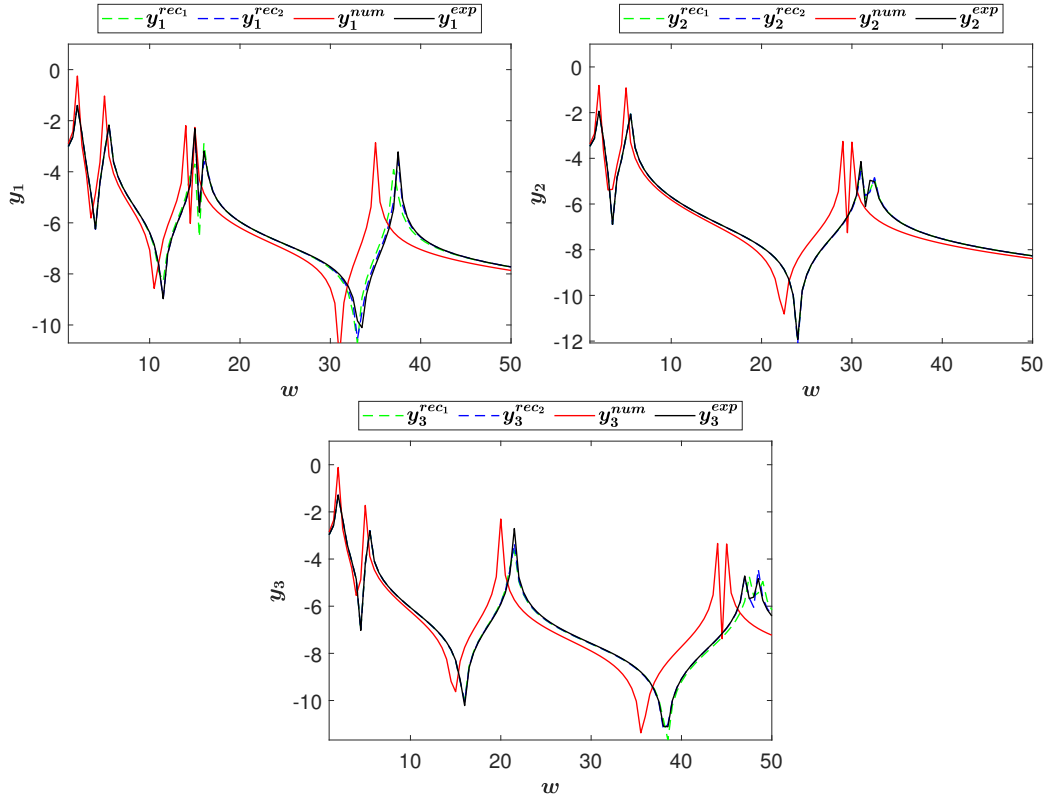


FIGURE 2.9 – Comparaison des courbes de recalage des réponses (\mathbf{y}^{rec1}) et (\mathbf{y}^{rec2}) avec les réponses numériques non recalées (\mathbf{y}^{num}) et les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}).

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, trois méthodologies ont été proposées pour améliorer l'efficacité de la méthode RBS pour le recalage des modèles numériques :

- La première méthodologie consiste à construire pour chaque paramètre d'entrée plusieurs nouvelles sorties au lieu qu'une seule sortie. L'objectif de ces nouvelles sorties est de donner plus des importances à certaines composantes des réponses numériques qui ne peuvent pas être représentées par un seul vecteur de coordonnées. Cette méthodologie a été appliquée sur le modèle de pont à faible fidélité. Dans ce modèle, la méthodologie n'a pas très bien fonctionné. La séparation des paramètres d'entrée est devenue plus difficile avec l'augmentation de nombre de sorties utilisées pour l'identification de chaque paramètre.
- La deuxième méthodologie consiste à sélectionner aléatoirement des sous-ensembles de composantes des réponses numériques du modèle à recaler . L'objectif de cette décomposition est de permettre aux vecteurs de coordonnées optimales de se concentrer seulement sur certaines composantes des réponses numériques. Cette méthodologie a été appliquée sur le modèle de pont à faible fidélité, en décomposant les réponses numériques en 50 groupes. La méthodologie a bien diminué la distance entre les réponses numériques et les réponses expérimentales de 8,77 jusqu'à 5,38.
- Enfin, une nouvelle extension pour la méthode RBS a été présentée pour résoudre les cas où les paramètres d'entrée ne sont pas totalement séparables. Cette extension consiste à identifier les paramètres d'entrée qui sont inséparables, en construisant une séquence de problèmes inverses de petite dimension sensibles uniquement à ces paramètres et insensibles aux autres paramètres. L'extension a été appliquée sur une fonction numérique pour laquelle 12 paramètres d'entrée ont été inséparables. Tous les paramètres de la fonction ont été identifiés en utilisant cette extension et les réponses numériques ont été bien recalées par rapport aux réponses expérimentales.

Chapitre 3

Recalage des modèles stochastiques basé sur la méthode RBS

Les chapitres précédents concernaient le recalage de modèles déterministes. Bien qu'un terme prenant en compte les erreurs de modélisation et le bruit expérimental a été introduit dans la formulation, le modèle à recalage est quand à lui bien déterministe. Dans ce chapitre, la méthode RBS est étendue au recalage de modèles numériques probabilistes en dynamique des structures. Un modèle numérique probabiliste permet de prendre en compte les variabilités naturelles des paramètres du modèle (incertitudes aléatoires) mais aussi les incertitudes liées au manque d'information sur le modèle et ses paramètres (incertitudes épistémiques). Ainsi ce modèle peut représenter une famille de structures nominale ment identiques mais dont la réponse varie d'un spécimen à l'autre ou dont le manque de données expérimentales ne permet pas de caractériser la structure complètement. Un tel modèle probabiliste peut ainsi être utilisé pour réaliser des conceptions et analyses robustes [56].

En dynamique des structures, une première approche pour prendre en compte les incertitudes consiste à rendre les paramètres du modèle (module d'Young, masse volumique ...) aléatoires. Cette approche sera dénommée approche paramétrique des incertitudes et sera l'approche utilisée dans ce chapitre. La prise en compte des incertitudes de modélisation sera abordée au chapitre suivant.

Le recalage d'un modèle numérique probabiliste consiste à déterminer des valeurs optimales d'hyperparamètres (moyennes, écarts-type, paramètres de dispersion, ...). Une méthode couramment utilisée pour déterminer ces valeurs optimales est la méthode du maximum de vraisemblance [56] qui consiste à résoudre un problème inverse probabiliste complexe, souvent en grande dimension. Cette résolution pose deux difficultés : (1) l'exploration de l'espace des hyperparamètres, et (2) l'estimation statistique de la densité de probabilité multivariée.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle méthode de recalage de modèle numérique probabiliste paramétrique, basée sur la méthode RBS et permettant de séparer les hyperparamètres du modèle probabiliste en l'absence d'incertitudes de modélisation. Cette nouvelle approche permet de faciliter le calibrage du modèle numérique probabiliste en remplaçant le problème inverse probabiliste initial par une série de problèmes inverses probabilistes dont le nombre d'hyperparamètres à identifier est très faible, éliminant ainsi les difficultés mentionnées précédemment.

3.1 Modèle numérique nominal

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse dynamique de structures linéaires dans le domaine fréquentiel. Le modèle numérique est construit par la méthode des éléments finis. La bande d'analyse est notée $[0, w_{max}] \subset \mathbb{R}^+$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ le vecteur des paramètres d'entrée, et $\mathbf{r}(w, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}^p$, le vecteur déplacement de taille p (nombre de degrés de liberté). Alors pour tout $w \in [0, w_{max}]$, $\mathbf{r}(w, \mathbf{x})$ est solution de l'équation dynamique linéaire suivante :

$$(-w^2[M(\mathbf{x})] + iw[D(\mathbf{x})] + [K(\mathbf{x})])\mathbf{r}(w, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(w). \quad (3.1)$$

où $[M(\mathbf{x})]$, $[D(\mathbf{x})]$ et $[K(\mathbf{x})]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du modèle numérique de dimension $p \times p$ et $\mathbf{f}(w) \in \mathbb{C}^p$ est le vecteur des forces extérieures.

Le modèle nominal réduit est construit par analyse modale. Les p pulsations propres $0 \leq w_0^1(\mathbf{x}) \leq w_0^2(\mathbf{x}) \leq \dots \leq w_0^p(\mathbf{x})$ associées aux modes propres élastiques $\{\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_p(\mathbf{x})\}$ sont solutions de l'équation suivante :

$$[K(\mathbf{x})]\phi_i(\mathbf{x}) = w_0^i(\mathbf{x})[M(\mathbf{x})]\phi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.2)$$

Soit $[\Phi(\mathbf{x})]$ la matrice modale de dimension $p \times k$ dont les colonnes sont les k premiers modes élastiques du modèle (troncature modale). Les matrices généralisées de masse $[\tilde{M}(\mathbf{x})]$, d'amortissement $[\tilde{D}(\mathbf{x})]$ et de raideur $[\tilde{K}(\mathbf{x})]$ sont définies sous la forme suivante (A désignant M, D ou K) :

$$[\tilde{A}(\mathbf{x})] = [\Phi(\mathbf{x})]^T [A(\mathbf{x})] [\Phi(\mathbf{x})]. \quad (3.3)$$

Le modèle réduit est construit en projetant la réponse du modèle numérique sur le sous-espace généré par les k premiers modes propres. L'approximation $\mathbf{r}^k(w, \mathbf{x})$ de $\mathbf{r}(w, \mathbf{x})$ est ainsi construite de sorte que :

$$\mathbf{r}^k(w, \mathbf{x}) = [\Phi(\mathbf{x})]\mathbf{q}(w, \mathbf{x}), \quad (3.4)$$

où $\mathbf{q}(w, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}^k$ est le vecteur des k coordonnées généralisées. Soit $[\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, w)] = [\Phi(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(w) \in \mathbb{C}^k$ le vecteur des forces généralisées. Le vecteur $\mathbf{q}(w, \mathbf{x})$ est la solution de l'équation suivante :

$$(-w^2[\tilde{M}(\mathbf{x})] + iw[\tilde{D}(\mathbf{x})] + [\tilde{K}(\mathbf{x})])\mathbf{q}(w, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, w). \quad (3.5)$$

La bande d'analyse est discrétisée en m pulsations $w_i, \{i = 1, \dots, m\}$. Soit $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\log_{10}(|\mathbf{r}^k(w_1, \mathbf{x})|), \log_{10}(|\mathbf{r}^k(w_2, \mathbf{x})|), \dots, \log_{10}(|\mathbf{r}^k(w_m, \mathbf{x})|)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ le vecteur des observations qui sera utilisé pour le recalage du modèle.

3.2 Présentation du modèle probabiliste

Dans ce chapitre, seules les incertitudes sur les paramètres sont prises en compte. Par simplicité, nous supposons que tous les paramètres d'entrée sont incertains et sont donc remplacés par des variables aléatoires. L'extension aux cas où certains paramètres d'entrée sont déterministes ne pose pas de difficulté. Soit $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, un espace probabilisé, et $\mathbf{X} = \{\theta \mapsto \mathbf{X}(\theta)\}$ le vecteur aléatoire à valeurs dans $C_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ représentant les paramètres d'entrée incertains du modèle, modélisé par le vecteur des paramètres aléatoires. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n composant \mathbf{X} sont indépendantes. La fonction de densité de probabilité associée à \mathbf{X} est notée $p_{\mathbf{X}}$. La fonction de densité de probabilité associée à chaque variable aléatoire $X_i, \{i = 1, \dots, n\}$ est notée p_{X_i} et paramétrée par le vecteur des hyperparamètres $\delta_i \in C_{\delta_i}$.

qui peut contenir par exemple la valeur moyenne, le coefficient de variation, . . . Soit $\boldsymbol{\delta}^{par} = (\boldsymbol{\delta}_1, \dots, \boldsymbol{\delta}_n)$, le vecteur total des hyperparamètres des fonctions de densité de probabilité des paramètres du modèle. Ainsi, le calibrage du modèle numérique aléatoire consiste à trouver la valeur optimal du vecteur $\boldsymbol{\delta}^{par}$. Ce recalage est détaillé dans la section suivante.

Les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur dans l'équation (3.5) deviennent des matrices aléatoires définies par (A désignant M, D ou K) :

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{par}(\theta)] = [\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}(\theta))]. \quad (3.6)$$

Puisque $\mathbf{X} \in C_{\mathbf{x}}$, les matrices aléatoires $[\tilde{\mathbf{M}}_{par}(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{K}}_{par}(\theta)]$, $[\tilde{\mathbf{D}}_{par}(\theta)]$ sont définies positives presque sur-ement.

La réponse stochastique du modèle réduit $\mathbf{R}^k(w, \theta) = \mathbf{r}^k(w, \mathbf{X}(\theta))$ est alors calculée de sorte que :

$$\mathbf{R}^k(w, \theta) = [\Phi(\theta)]\mathbf{Q}(w, \theta), \quad (3.7)$$

où le vecteur aléatoire $\mathbf{Q}(w, \theta)$ est solution de l'équation :

$$(-w^2[\tilde{\mathbf{M}}(\theta)] + iw[\tilde{\mathbf{D}}(\theta)] + [\tilde{\mathbf{K}}(\theta)])\mathbf{Q}(w, \theta) = \tilde{\mathbf{f}}(\theta, w). \quad (3.8)$$

Les statistiques sur la réponse $\mathbf{R}^k(w, \theta)$ peuvent alors être estimées par la méthode de simulation de Monte Carlo.

3.3 Recalage classique du modèle probabiliste

L'objectif ici est de recalibrer le modèle numérique stochastique présenté dans la section précédente de sorte que les réponses aléatoires de ce modèle soit au plus proche statistiquement de réponses expérimentales aléatoires disponibles. Le but est ainsi d'identifier le vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}^{par}$ en utilisant : (1) n_s réalisations du vecteur aléatoire \mathbf{Y} calculées en utilisant le modèle stochastique, et (2) n_{exp} réalisations expérimentales \mathbf{Y}^{exp} mesurées sur une famille de structures nominale-ment identiques. Nous utiliserons ici la méthode du maximum de vraisemblance [19, 47, 56, 58] pour identifier les hyperparamètres. Ainsi la valeur optimale $\boldsymbol{\delta}^{par, opt}$ est déterminée en résolvant le problème inverse aléatoire suivant :

$$\boldsymbol{\delta}^{par, opt} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}^{par} \in C_{\boldsymbol{\delta}^{par}}} \sum_{j=1}^{n_{exp}} \log(p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}^{exp, j}; \boldsymbol{\delta}^{par})), \quad (3.9)$$

où $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\delta}^{par})$ est la densité de probabilité jointe des réponses aléatoires \mathbf{Y} qui dépend donc de $\boldsymbol{\delta}^{par}$ et $C_{\boldsymbol{\delta}^{par}}$ est le support du vecteur des hyperparamètres. Cette densité de probabilité est généralement estimée par la méthode de Monte Carlo [44] combinée avec un estimateur à noyau multi-dimensionnel [60].

La résolution du problème inverse multivarié (3.9) présente trois difficultés principales :

- Il nécessite généralement l'utilisation d'algorithmes d'optimisation globale, comme l'algorithme génétique, l'algorithme recuit simulé ou l'optimisation par essais particuliers, pour explorer efficacement l'espace des hyperparamètres [39]. Mais, l'efficacité de ces méthodes dépendent d'un réglage correct des paramètres de l'algorithme qui dépendent du problème inverse. Un mauvais réglage de ces paramètres peut conduire à une lente convergence de l'algorithme et à un éventuel piège dans un minimum local. En plus, la difficulté d'explorer efficacement l'espace des hyperparamètres augmente avec le nombre d'hyperparamètres à identifier.
- L'estimation de la densité de probabilité jointe devient très difficile si le nombre de sortie est important. L'utilisation de l'estimateur par noyau converge lentement en grande dimension, et l'application d'une réduction statistique [57] peut conduire à une perte d'informations si on restreint le nombre de composantes principales.

- Le calibrage de toutes les variables aléatoires en même temps peut conduire à des problèmes de compensation où par exemple la sous-estimation de la variance d'une variable aléatoire est compensée par la sur-estimation de la variance d'une autre variable aléatoire.

3.4 Recalage en utilisant la méthode RBS

Dans cette section, la méthode RBS est étendue au cadre probabiliste pour recaler un modèle stochastique en identifiant indépendamment le vecteur des hyperparamètres de chaque paramètre d'entrée X_i .

3.4.1 Transformation de réponse

Le problème inverse présenté dans l'équation (3.9) serait plus facile à résoudre si (1) le nombre d'hyperparamètres à identifier dans le vecteur $\boldsymbol{\delta}^{par}$ était faible et (2) si la taille du vecteur des réponses \mathbf{Y} était réduite. La méthode RBS est utilisée ici pour identifier chaque vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}_i$ associé à la variable aléatoire d'entrée X_i indépendamment des autres hyperparamètres, en construisant une sortie Z_i de faible dimension de sorte qu'elle soit uniquement sensible à X_i et insensible aux autres paramètres du modèle, réduisant au passage la taille du problème inverse à résoudre. Ainsi le problème inverse probabiliste initial en grande dimension est remplacé par une série de problèmes inverses de faible dimension où chaque paramètre incertain est recalé séparément.

Pour chaque paramètre aléatoire $X_i, \{i = 1, \dots, n\}$, les réponses stochastiques \mathbf{Y} sont transformées en une nouvelle sortie stochastique $Z_i \in \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Z_i = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{Y}, \quad (3.10)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m \times p})$ est le vecteur de coordonnées qui définit la sortie Z_i .

3.4.2 Identification des vecteurs de coordonnées

Pour chaque paramètre d'entrée X_i , le vecteur de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}_i$ doit être identifié. Puisque l'objectif de chaque sortie $Z_i(\mathbf{X})$ est d'identifier le vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}_i$ indépendamment des autres vecteurs, le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_i$ doit être calculé de sorte que la sortie $Z_i(\mathbf{X})$ soit uniquement sensible à X_i , et insensible aux autres paramètres. Pour évaluer la sensibilité et calculer les indices de Sobol, le vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}_i$ doit être remplacé par un vecteur aléatoire qui couvre toute l'intervalle de variation des hyperparamètres. La variable aléatoire X_i , pour laquelle son vecteur des hyperparamètres est aléatoire, est notée \bar{X}_i . Donc $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$.

Pour chaque sortie Z_i , et pour chaque variable \bar{X}_i , l'indice de sensibilité total $S_{T_{i,j}}$ est défini par :

$$S_{T_{i,j}} = \frac{E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}} \left(\text{Var}_{\bar{X}_j} (Z_i | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}) \right)}{\text{Var}(Z_i)}, \quad (3.11)$$

où $\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont les mêmes composantes que pour $\bar{\mathbf{X}}$ sauf \bar{X}_j . Donc, en utilisant l'équation (3.10), on obtient :

$$S_{T_{i,j}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}} (\text{Cov}_{\bar{X}_j}(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}))] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [\text{Cov}(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\alpha}_i}. \quad (3.12)$$

Soit $[C] = [\text{Cov}(\mathbf{Y})]$ et $[C^j] = [E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}} (\text{Cov}_{\bar{X}_j}(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}))]$, l'équation (3.12) devient :

$$S_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C^j] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C] \boldsymbol{\alpha}_i}. \quad (3.13)$$

Comme précédemment, pour chaque variable aléatoire X_i , la sortie Z_i est définie par le vecteur α_i . Donc α_i doit être calculé de sorte que la sortie Z_i soit uniquement sensible à X_i et insensible aux autres paramètres. Donc, le vecteur optimal α_i^{opt} doit respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} S_{T_{i,i}}(\alpha_i^{opt}) &= 1, \\ S_{T_{i,j}}(\alpha_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j, \end{aligned} \quad (3.14)$$

qui peuvent être remplacées par :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_i^{opt}) &= 1, \\ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_i) = \alpha_i^T [C^j] \alpha_i$.

Pour déterminer α_i^{opt} , il suffit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_i^{opt} = \arg \min_{\alpha_i \in \mathbb{R}^{m \times p}} \Gamma(\alpha_i), \quad (3.16)$$

où

$$\Gamma(\alpha_i) = (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\alpha_i) - 1)^2 + \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\alpha_i))^2 \right\} + \lambda \alpha_i^T \alpha_i. \quad (3.17)$$

Ce problème d'optimisation peut être résolu en utilisant la méthode de Newton Raphson comme expliqué dans la section 1.2.2.

3.4.3 Identification des hyperparamètres

La séparabilité du paramètre X_i par rapport aux autres paramètres (ou de manière équivalente la séparabilité du vecteur des hyperparamètres δ_i par rapport aux autres vecteurs des hyperparamètres) est directement quantifiée par la valeur de $\Gamma(\alpha_i^{opt})$, qui doit être la plus proche possible de zéro. Si cette valeur de $\Gamma(\alpha_i^{opt})$ est suffisamment petite, alors la valeur optimale δ_i^{opt} du vecteur des hyperparamètres δ_i associé au paramètre d'entrée X_i , peut être indépendamment identifiée des autres hyperparamètres du modèle en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance sur la sortie Z_i :

$$\delta_i^{opt} = \arg \max_{\delta_i \in C_{\delta_i}} \sum_{j=1}^{n_{exp}} \log(p_{Z_i}(Z_i^{exp,j}; \delta_i)), \quad (3.18)$$

avec $Z_i^{exp,j} = \alpha_i^T \mathbf{Y}^{exp,j}$ est la sortie aléatoire expérimentale transformée.

Dans ce problème inverse (3.18), les valeurs des hyperparamètres $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n$ peuvent être aléatoirement choisies dans leur espace admissible. En effet, la sortie aléatoire Z_i est construite indépendante des valeurs de ces hyperparamètres.

Alors les hyperparamètres peuvent être identifiés séquentiellement de la façon suivante :

1. Classer les paramètres du modèle par rapport aux valeurs $\Gamma(\alpha_i^{opt})$. Les indices des paramètres du modèle classés sont notés r_1, \dots, r_n .
2. Garder que les n_ϵ paramètres du modèle $X_{r_1}, \dots, X_{r_{n_\epsilon}}$ pour lesquels $\Gamma(\alpha_i^{opt}) < \epsilon$, où ϵ est un seuil à définir.
3. Initialiser les vecteurs des hyperparamètres $\delta_i = \delta_{0,i}, \{i = 1, \dots, n\}$.

4. Identifier $\delta_{r_1}^{opt}$ en résolvant l'équation (3.18) et remplacer $\delta_{r_1} = \delta_{r_1}^{opt}$.
5. Identifier itérativement $\delta_{r_2}, \dots, \delta_{r_{n_\epsilon}}$ avec la même méthode.

Une fois tous les hyperparamètres $\delta_{r_1}, \dots, \delta_{r_{n_\epsilon}}$ identifiés, on peut recalculer les vecteurs $\alpha_{r_{n_\epsilon+1}}, \dots, \alpha_{r_n}$ des hyperparamètres restants et procéder avec le même algorithme, les autres hyperparamètres sont fixés à leurs valeurs identifiées. L'algorithme doit être répété jusqu'à ce que tous les hyperparamètres soient identifiés ou jusqu'à ce que tous les $\Gamma(\alpha_{r_i}^{opt}) > \epsilon$, ce qui signifierait que les hyperparamètres restants ne peuvent pas être identifiés séparément.

La méthode de calibration des hyperparamètres est résumée dans l'algorithme 1.

Algorithme 1: Algorithme de calibration des hyperparamètres

```

tant que  $n > 0$  faire
  Estimer  $[C], [C_1], \dots, [C_n]$ .
  Calculer  $\alpha_1^{opt}, \dots, \alpha_n^{opt}$ .
  Classer les paramètres du modèle tel que  $\Gamma(\alpha_{r_1}^{opt}) < \dots < \Gamma(\alpha_{r_n}^{opt})$ .
  Garder que les  $n_\epsilon$  paramètres du modèle pour lesquels  $\Gamma(\alpha_{r_i}^{opt}) < \epsilon$ .
  Initialiser les vecteurs des hyperparamètres  $\delta_i, \{i = 1, \dots, n\}$ .
  pour  $\ell = 1, \dots, n_\epsilon$  faire
    Identifier  $\delta_{r_\ell}^{opt}$  en résolvant l'équation (3.18).
    Calibrer  $\delta_{r_\ell}$  par  $\delta_{r_\ell}^{opt}$ .
  fin
   $\delta^{par} \leftarrow (\delta_{n_\epsilon+1}, \dots, \delta_n)$ 
   $n \leftarrow n - n_\epsilon$ 
fin

```

3.5 Applications

Dans cette section, la méthode présentée dans ce chapitre est illustrée par deux applications différentes. La première application est une poutre avec une section variable et la seconde est le modèle du pont présenté dans la section 1.4.2. Pour les deux applications, les données expérimentales sont générées numériquement par des modèles à haute fidélité.

3.5.1 Modèle stochastique de poutre

3.5.1.1 Modèle à haute fidélité

Le modèle à haute fidélité présenté dans la figure 3.1 est un modèle éléments finis d'une structure de poutre. Ce modèle est utilisé pour générer des réponses expérimentales. La structure est composée de deux poutres (nommées Poutre 1 et Poutre 2) des sections circulaires différentes. Les dimensions et les propriétés mécaniques des poutres sont décrites dans le tableau 3.1. La structure est élastique linéaire et discrétisée par 34729 éléments tétraédriques. Les deux extrémités de la poutre sont encastées. Le modèle réduit a été construit par une analyse modale avec 19 modes élastiques. La matrice d'amortissement généralisée est construite diagonalisée en utilisant un modèle de Rayleigh avec un taux d'amortissement 4% sur le premier et le dernier mode.

Dans ce modèle, quatre paramètres sont supposés variables et sont donc modélisés comme des variables aléatoires : le module d'Young E_1 de la poutre 1, le module d'Young E_2 de la poutre 2, la masse volumique ρ_1 de la poutre 1 et la masse volumique ρ_2 de la poutre 2. Ces quatre variables aléatoires ont des distributions Gamma avec des moyennes égales à leurs valeurs nominales présentées dans le tableau 3.1 et des coefficients de variation (rapport entre l'écart-type et la moyenne) valant 0,1. Nous nous intéressons à la réponse fréquentielle en vitesse de la structure dans l'intervalle [100, 7300] Hz lorsqu'une force unitaire dans

la direction y est appliquée au nœud P situé au milieu de la section de poutre à 0,194 m de l'extrémité gauche. Le modèle stochastique à haute fidélité est utilisé pour générer 50 réponses expérimentales qui sont représentées dans la figure 3.2. Ces réponses correspondent à la vitesse fréquentielle suivant la direction y des nœuds P_1 et P_2 situés respectivement au milieu de la section de poutre à 0,098 m et 0,266 m de l'extrémité gauche.

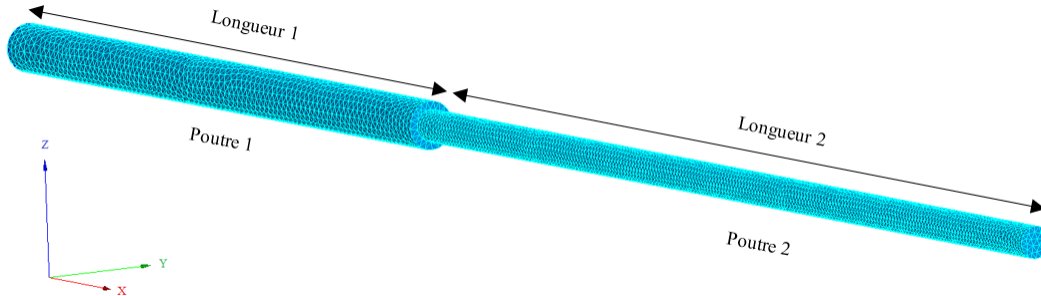


FIGURE 3.1 – Maillage du modèle à haute fidélité.

TABLEAU 3.1 – Caractéristiques des poutres.

	Poutre 1	Poutre 2
Longueur [m]	0,12	0,18
Diamètre [mm]	7,5	5
Module d'Young [GPa]	150	70
Masse volumique [kg/m ³]	5800	2800

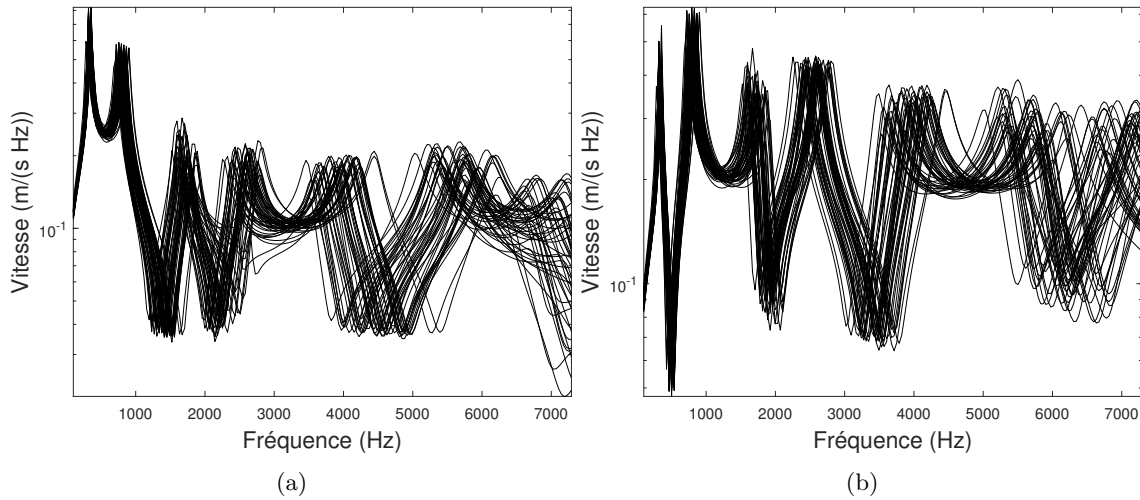


FIGURE 3.2 – Réponses expérimentales générées par le modèle stochastique à haute fidélité aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b).

3.5.1.2 Modèle stochastique à faible fidélité

Le modèle nominal à faible fidélité est représenté dans la figure 3.3. Ce modèle est construit en utilisant des poutres d'Euler et en utilisant les mêmes paramètres que ceux utilisés pour le modèle nominal à haute fidélité (voir tableau 3.1).

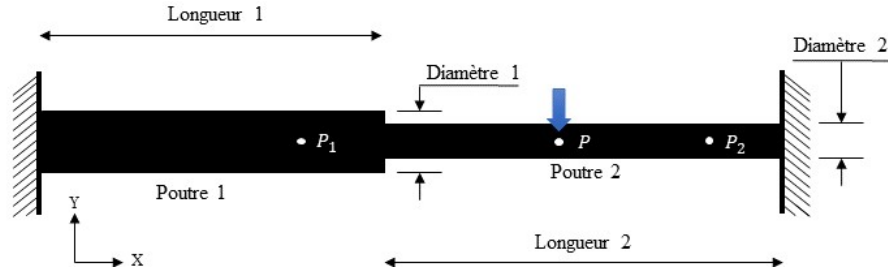


FIGURE 3.3 – Modèle à faible fidélité.

Chaque poutre est discrétisée par 100 éléments de poutres d'Euler. Le modèle réduit a été construit par une analyse modale avec 8 modes élastiques. La matrice d'amortissement généralisée est construite diagonalisée en utilisant un modèle de Rayleigh avec un taux d'amortissement 4% sur le premier et le dernier mode. Les réponses du modèle nominal à faible fidélité sont représentées sur la figure 3.4.

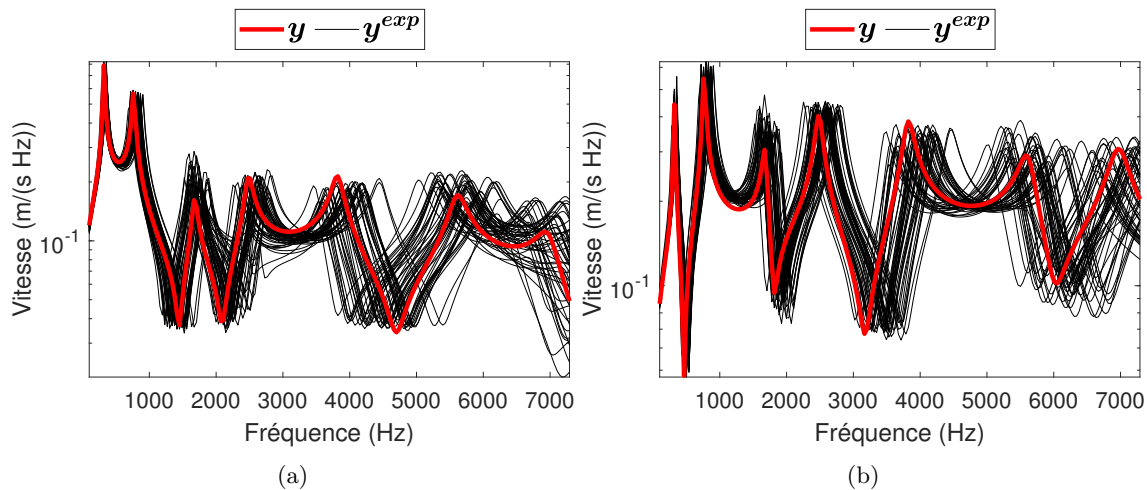


FIGURE 3.4 – Comparaison entre les réponses fréquentielles du modèle nominal à faible fidélité (y) et les réponses expérimentales du modèle stochastique à haute fidélité aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b).

Le modèle stochastique du modèle à faible fidélité est construit en remplaçant le module d'Young E_1 de la poutre 1, le module d'Young E_2 de la poutre 2, la masse volumique ρ_1 de la poutre 1 et la masse volumique ρ_2 de la poutre 2 par des variables aléatoires qui suivent des distributions de probabilité Gamma dont les moyennes et les coefficients de variation doivent être identifiés.

3.5.1.3 Recalage du modèle à faible fidélité

Dans cette application, nous voulons identifier les hyperparamètres associés aux quatre variables aléatoires E_1 , E_2 , ρ_1 et ρ_2 . Donc $\mathbf{X} = (E_1, E_2, \rho_1, \rho_2)$. Les 4 vecteurs des hyperparamètres (moyenne et coefficient

de variation) pour les variables aléatoires sont $\delta_1 = (m_{X_1}, \gamma_{X_1})$, $\delta_2 = (m_{X_2}, \gamma_{X_2})$, $\delta_3 = (m_{X_3}, \gamma_{X_3})$ et $\delta_4 = (m_{X_4}, \gamma_{X_4})$. Avant de calculer les indices de Sobol, les hyperparamètres sont remplacés par des variables aléatoires uniformes dans $[0, 5; 1, 5] \times m_{x_i}$ pour les 4 valeurs des moyennes et $[0, 5; 1, 5] \times 0, 1$ pour les 4 coefficients de variation. m_{x_i} est la valeur nominale du paramètre x_i présentée dans le tableau 3.1. Les réponses $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ correspondent au logarithme de la réponse fréquentielle (module) présentée dans la figure 3.4. Un vecteur aléatoire de bruit a été ajouté aux réponses $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$, ses composantes sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale avec un écart type de 0,19 et une valeur moyenne nulle.

Avant de calculer les indices de sensibilité, une analyse de convergence des matrices de Sobol est menée. La figure 3.6 représente, pour chaque paramètre X_i , la fonction $Conv_i(n_s) = \text{trace}([C^i](n_s) \times [C^i]^T(n_s)) / \text{trace}([C^i](5000) \times [C^i]^T(5000))$ où n_s est le nombre de réalisations utilisées pour estimer les matrices $[C^i]$. D'après cette figure, on peut remarquer que l'estimation des matrices $[C^i]$, $\{i = 1, \dots, 4\}$ peut être considérée convergée à partir 2000 échantillons. Pour construire les sorties transformées Z_i , $\{i = 1, \dots, 4\}$ afin d'identifier les hyperparamètres, les vecteurs de coordonnées α_i^{opt} , $\{i = 1, \dots, 4\}$ sont calculés par la méthode de Newton-Raphson

à partir des matrices $[C^i]$ estimées avec 2000 réalisations. Les valeurs initiales de α_i , $\{i = 1, \dots, 4\}$ ont été aléatoirement choisies avec $\lambda = 0$. La matrice de sensibilité $[S]$ obtenue est représentée dans la figure 3.5. D'après cette figure, on remarque que cette matrice $[S]$ est très proche de la matrice d'identité en une seule itération. Donc, les variables aléatoires X_i , $\{i = 1, \dots, 4\}$ sont totalement séparées les unes des autres, et les quatre vecteurs des hyperparamètres peuvent être identifiés indépendamment en résolvant les problèmes inverses bi-variés (moyenne et coefficient de variation) présentés dans l'équation (3.18).

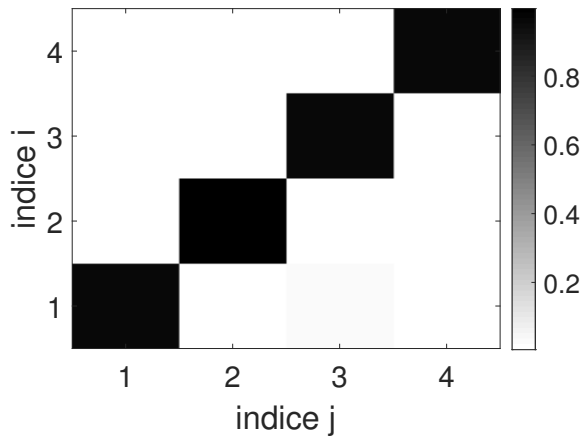


FIGURE 3.5 – Matrice de sensibilité $[S]$.

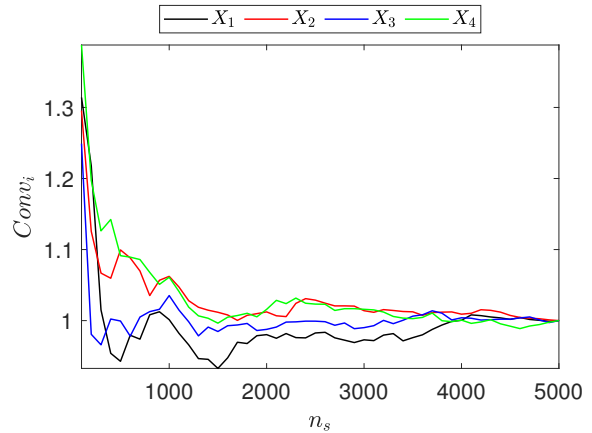


FIGURE 3.6 – Fonction $Conv_i(n_s)$ en fonction du nombre d'échantillons (n_s).

3.5.1.3.1 Pré-validation de la procédure de recalage

Dans cette section, la méthode de recalage proposée est d'abord validée en utilisant des réponses stochastiques générées par le modèle à faible fidélité comme des réponses expérimentales. L'objectif est de vérifier que la méthode proposée fonctionne bien lorsqu'il n'y a aucune erreur de modélisation. Pour réaliser cette validation, les réponses expérimentales correspondront aux réponses stochastiques générées lorsque les quatre variables aléatoires (E_1 , E_2 , ρ_1 et ρ_2) ont des distributions Gamma avec des moyennes égales aux valeurs nominales présentées dans le tableau 3.1 et des coefficients de variation valant 0,1 (1000 réalisations ont été générées). En utilisant le problème inverse présenté dans l'équation (3.18), figure 3.7 représente les fonctions de vraisemblance pour les 4 sorties Z_i , $\{i = 1, \dots, 4\}$. Pour chaque problème inverse, la densité de probabilité est estimée en utilisant 1000 réalisations. Les valeurs optimales des hyperparamètres $m_{X_i}^{opt}$ et $\gamma_{X_i}^{opt}$, pour

chaque paramètre X_i , correspondent aux valeurs de m_{X_i} et γ_{X_i} pour lesquelles la fonction de vraisemblance de Z_i est maximale. A partir la figure 3.7, comme prévu, on remarque que pour chaque Z_i , le maximum de fonction de vraisemblance correspond aux valeurs des hyperparamètres qui ont été utilisées pour générer les réponses expérimentales.

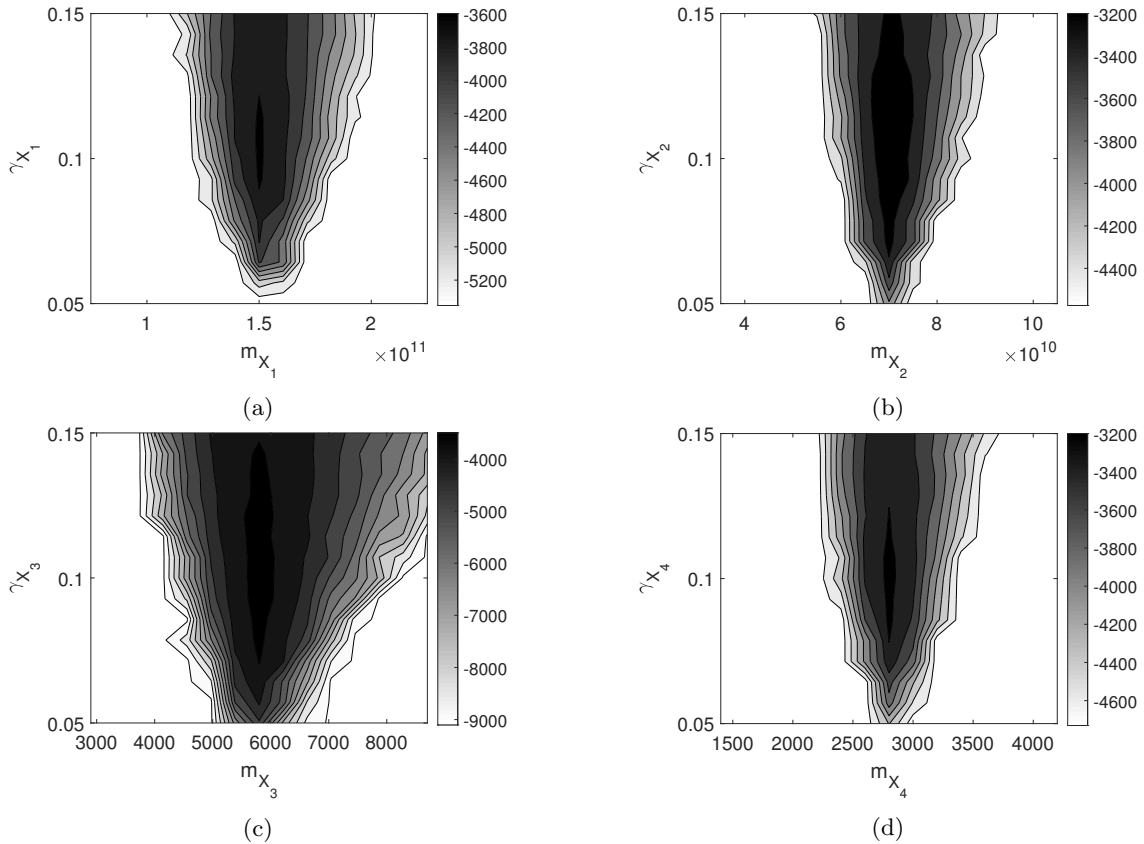


FIGURE 3.7 – Fonctions de vraisemblance de Z_1 (a), Z_2 (b), Z_3 (c), Z_4 (d) correspondant respectivement à X_1 , X_2 , X_3 et X_4 .

3.5.1.3.2 Recalage du modèle stochastique à faible fidélité en utilisant les réponses expérimentales

Dans cette section, nous voulons recalibrer le modèle stochastique à faible fidélité en identifiant les hyperparamètres associés aux quatre variables aléatoires E_1 , E_2 , ρ_1 et ρ_2 en utilisant les réponses expérimentales du modèle à haute fidélité. Les réponses expérimentales correspondent à celles générées dans la section 3.5.1.1. Après résolution du problème inverse présenté dans l'équation (3.18), la figure 3.8 représente les fonctions de vraisemblance pour les 4 sorties $Z_i, \{i = 1, \dots, 4\}$. Les valeurs optimales identifiées pour les hyperparamètres du modèle à faible fidélité et les valeurs des hyperparamètres utilisées pour générer les données expérimentales (par le modèle à haute fidélité) sont représentées dans le tableau 3.2. Comme le modèle à haute-fidélité et le modèle à faible-fidélité sont des modèles différents, nous n'obtenons pas exactement les mêmes valeurs à cause des erreurs de modélisation dans le modèle à faible fidélité.

TABLEAU 3.2 – Valeurs optimales des hyperparamètres identifiées.

hyperparamètres	X_1	X_2	X_3	X_4
m_{X_i} (haute fidélité)	150 <i>GPa</i>	70 <i>GPa</i>	5800 <i>Kg/m³</i>	2800 <i>Kg/m³</i>
$m_{X_i}^{opt}$ (faible fidélité)	171,43 <i>GPa</i>	65 <i>GPa</i>	5800 <i>Kg/m³</i>	2600 <i>Kg/m³</i>
γ_{X_i} (haute fidélité)	0,1	0,1	0,1	0,1
$\gamma_{X_i}^{opt}$ (faible fidélité)	0,107	0,121	0,121	0,093

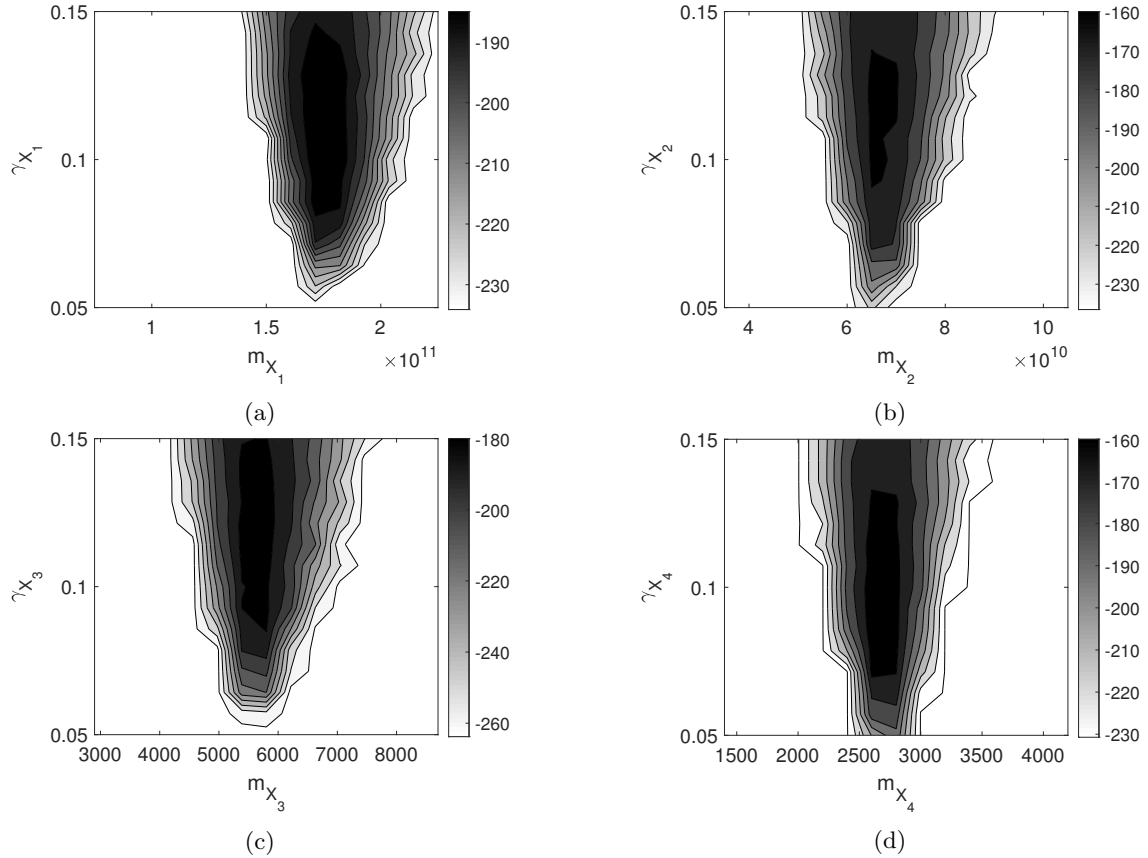


FIGURE 3.8 – Fonctions de vraisemblance de Z_1 (a), Z_2 (b), Z_3 (c), Z_4 (d) correspondant respectivement à X_1 , X_2 , X_3 et X_4 .

La figure 3.9 représente la région de confiance des réponses stochastiques du modèle à faible fidélité recalé (\mathbf{y}) en comparaison avec les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}). Dans ces figures, nous pouvons clairement remarquer que le modèle stochastique prédit correctement les réponses expérimentales.

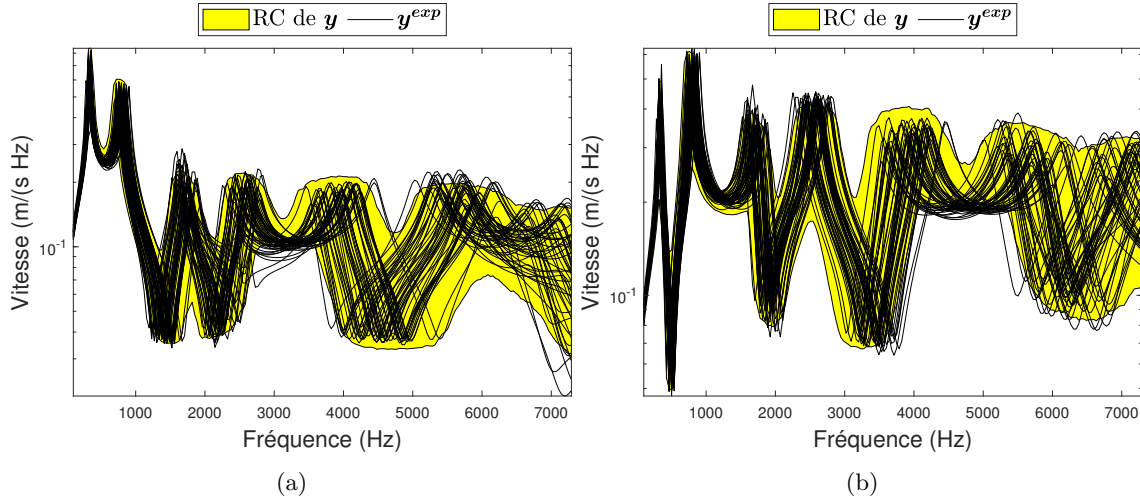


FIGURE 3.9 – Comparaison entre les réponses stochastiques du modèle à faible fidélité recalé (y) et les réponses expérimentales (y^{exp}) aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b). La région jaune représente la région de confiance avec un niveau de probabilité de 95%.

3.5.2 Modèle stochastique de pont

Dans cette partie, nous recalons le modèle stochastique de pont à faible fidélité présenté dans le chapitre 1 par rapport à des réponses stochastiques générées par le modèle de pont à haute fidélité.

3.5.2.1 Modèle stochastique de pont à haute fidélité

Le modèle stochastique à haute-fidélité est le modèle nominal présenté dans la section 1.4.2.1 mais en remplaçant les paramètres d'entrée E_1 , E_2 , E_3 , ρ_1 et ρ_2 par des variables aléatoires. Ces cinq variables aléatoires ont des distributions Gamma avec des valeurs moyennes égales aux valeurs nominales rapportées dans la section 1.4.2.1 et des coefficients de variation valant 0,1. Ce modèle stochastique à haute fidélité est ensuite utilisé pour générer 50 réponses expérimentales qui sont représentées dans les figures 3.10 et 3.11. Ces réponses correspondent aux réponses fréquentielles (logarithme du module) en vitesse observées suivant les directions y et z aux nœuds P_1 , P_2 et P_3 .

3.5.2.2 Modèle stochastique de pont à faible fidélité

Le modèle stochastique à faible-fidélité est le modèle nominal à faible fidélité présenté dans la section 1.4.2.2 mais pour lequel les modules d'Young E_1 , E_2 , E_3 et les masses volumiques ρ_1 et ρ_2 du modèle sont remplacés par des variables aléatoires. Ces variables aléatoires suivent une loi de probabilité Gamma avec des valeurs moyennes et des coefficients de variation à identifier. Les réponses nominales du modèle à faible fidélité sont représentées dans les figures 3.12 et 3.13.

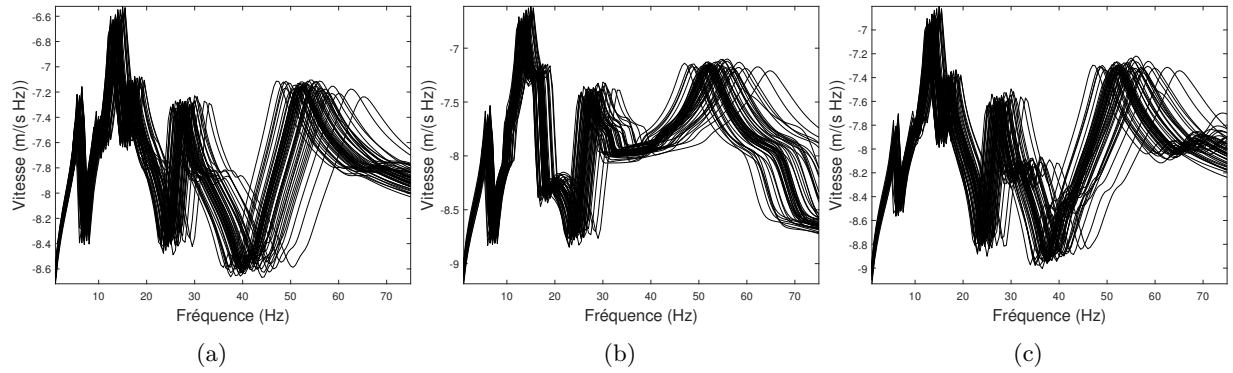


FIGURE 3.10 – Réponses expérimentales générées par le modèle stochastique à haute fidélité suivant la direction y aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

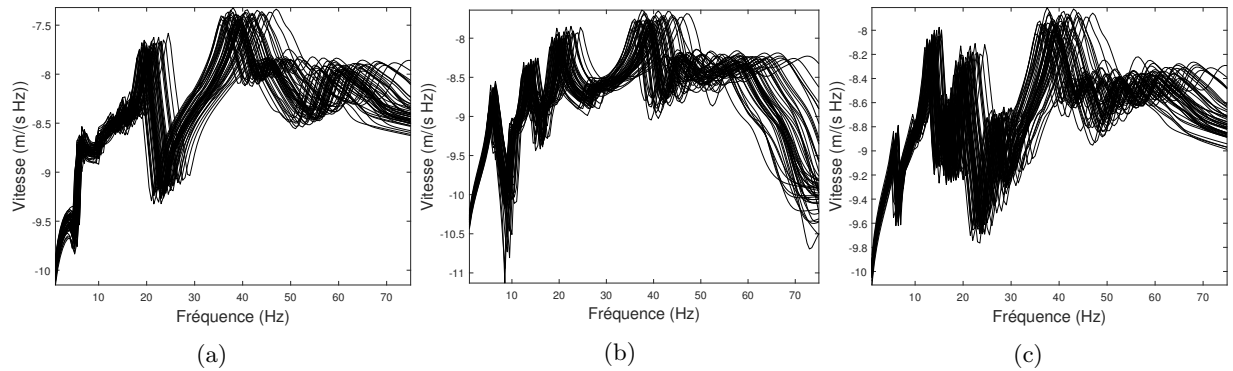


FIGURE 3.11 – Réponses expérimentales générées par le modèle stochastique à haute fidélité suivant la direction z aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c).

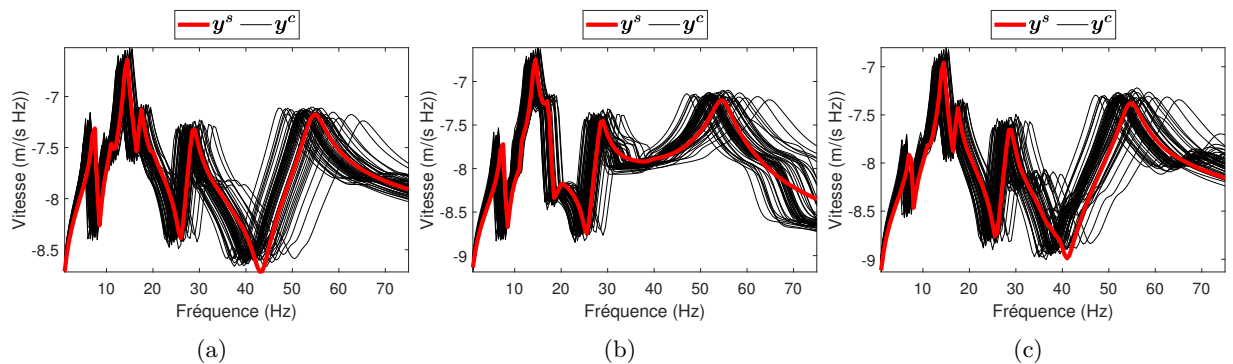


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les réponses fréquentielles de modèle nominal à faible-fidélité (y^s) et les réponses expérimentales de modèle à haute-fidélité (y^c) aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction y .

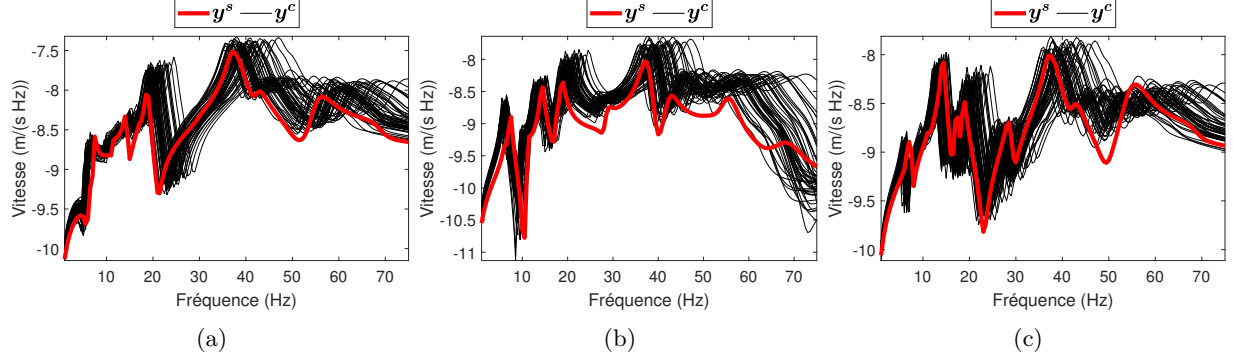


FIGURE 3.13 – Comparaison entre les réponses fréquentielles de modèle nominal à faible-fidélité (\mathbf{y}^s) et les réponses expérimentales de modèle à haute-fidélité (\mathbf{y}^c) aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction \mathbf{z} .

3.5.2.3 Identification des hyperparamètres

Dans cette application, nous voulons identifier les valeurs optimales des hyperparamètres associés aux cinq variables aléatoires E_1, E_2, E_3, ρ_1 et ρ_2 du modèle stochastique à faible fidélité, en utilisant les réponses expérimentales générées par le modèle à haute fidélité dans la section 3.5.2.1. Donc, $\mathbf{X} = (E_1, E_2, E_3, \rho_1, \rho_2)$. Les 5 vecteurs des hyperparamètres (valeur moyenne et coefficient de variation), pour les variables aléatoires sont $\boldsymbol{\delta}_1 = (m_{X_1}, \gamma_{X_1})$, $\boldsymbol{\delta}_2 = (m_{X_2}, \gamma_{X_2})$, $\boldsymbol{\delta}_3 = (m_{X_3}, \gamma_{X_3})$, $\boldsymbol{\delta}_4 = (m_{X_4}, \gamma_{X_4})$ et $\boldsymbol{\delta}_5 = (m_{X_5}, \gamma_{X_5})$. Avant de calculer les indices de Sobol, les hyperparamètres sont remplacés par des variables aléatoires uniformes dans les intervalles $[0, 5; 2] \times m_{x_i}$ pour les 5 valeurs moyennes et $[0, 5; 2] \times 0, 1$ pour les 5 coefficients de variation, où m_{x_i} est la valeur nominale du paramètre x_i de modèle à haute fidélité.

La figure 3.15 représente, pour chaque variable X_i , la fonction $Conv_i(n_s)$. Sur cette figure, on peut remarquer que l'estimation des matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, 5\}$ converge à partir de 2000 réalisations. Donc, pour construire les sorties transformées $Z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$, les vecteurs de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}, \{i = 1, \dots, 5\}$ sont calculés par la méthode de Newton-Raphson à partir des matrices $[\bar{C}^i]$ estimées avec 2000 échantillons. Les valeurs initiales de $\boldsymbol{\alpha}_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ ont été aléatoirement choisies avec $\lambda = 0$. Un vecteur aléatoire de bruit a été introduit dans les réponses du modèle $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ dont les composantes sont indépendantes et suivent une loi normale avec une moyenne nulle et un écart-type de 0,15 pour calculer les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ et 0,03 pour calculer $\boldsymbol{\alpha}_4$.

La matrice de sensibilité $[S]$ obtenue est représentée sur la figure 3.14. D'après cette figure, on remarque que la matrice $[S]$ est proche de l'identité, donc les valeurs optimales des cinq vecteurs des hyperparamètres peuvent être identifiées indépendamment en résolvant les problèmes inverses bi-variés (valeur moyenne et coefficient de variation) de l'équation (3.18). Pour explorer les intervalles de variation des hyperparamètres, 13 points équidistants ont été choisis pour chaque hyperparamètre dans l'intervalle $[0,087;0,1475]$ pour $\gamma_{X_i}, \{i = 1, \dots, 5\}$, $[3,94;8,49] \times 10^{10}$ pour $m_{X_1}, m_{X_2}, m_{X_3}$ et $[1125;2421]$ pour m_{X_4}, m_{X_5} . Les réponses expérimentales stochastiques utilisées correspondent à celles générées dans la section 3.5.2.1. Pour chaque problème inverse, la densité de probabilité a été estimée en utilisant 1000 réalisation de la réponse stochastique (la convergence de l'estimateur a été vérifiée). La figure 3.18 représente la fonction de vraisemblance pour les 5 sorties $Z_i, \{i = 1, \dots, 5\}$. Les valeurs optimales identifiées pour les hyperparamètres du modèle à faible fidélité et les valeurs des hyperparamètres qui ont été utilisées pour générer les données expérimentales par le modèle à haute fidélité sont présentées dans le tableau 3.3.

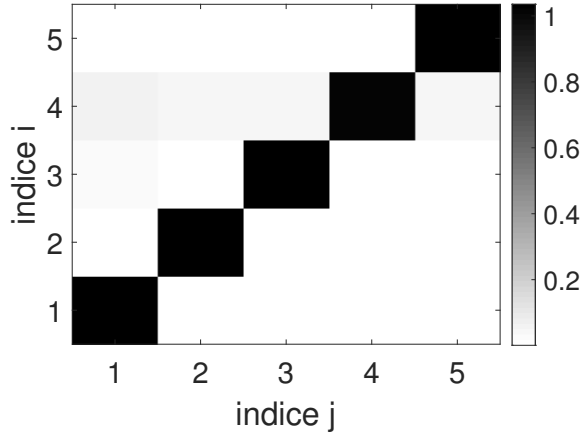


FIGURE 3.14 – Matrice de sensibilité $[S]$.

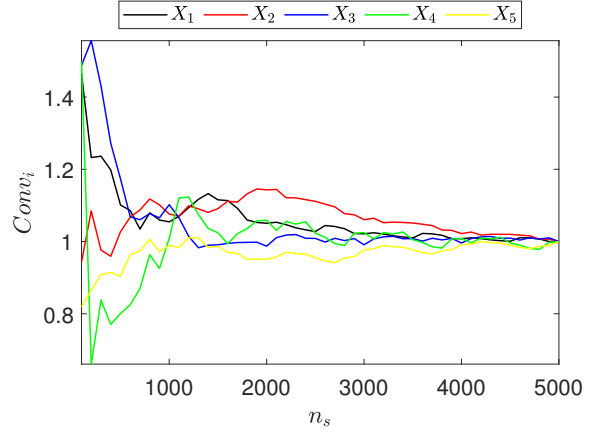


FIGURE 3.15 – $Conv_i(n_s)$ en fonction du nombre d'échantillons (n_s).

TABLEAU 3.3 – Valeurs des hyperparamètres identifiées.

hyperparamètres	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
m_{X_i} (haute fidélité)	63,1 <i>GPa</i>	63,1 <i>GPa</i>	63,1 <i>GPa</i>	1800 <i>Kg/m³</i>	1800 <i>Kg/m³</i>
$m_{X_i}^{opt}$ (faible fidélité)	50,8 <i>GPa</i>	62,2 <i>GPa</i>	50,8 <i>GPa</i>	2205 <i>Kg/m³</i>	1665 <i>Kg/m³</i>
γ_{X_i} (haute fidélité)	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$\gamma_{X_i}^{opt}$ (faible fidélité)	0,1025	0,0875	0,1125	0,1375	0,1225

Les figures 3.16 et 3.17 représentent les réponses expérimentales (\mathbf{y}^c) comparées avec la région de confiance (niveau de probabilité de 0,95) du modèle stochastique à faible fidélité recalé. Dans ces figures, nous pouvons remarquer une bonne corrélation entre les réponses du modèle stochastique recalé et les réponses expérimentales.

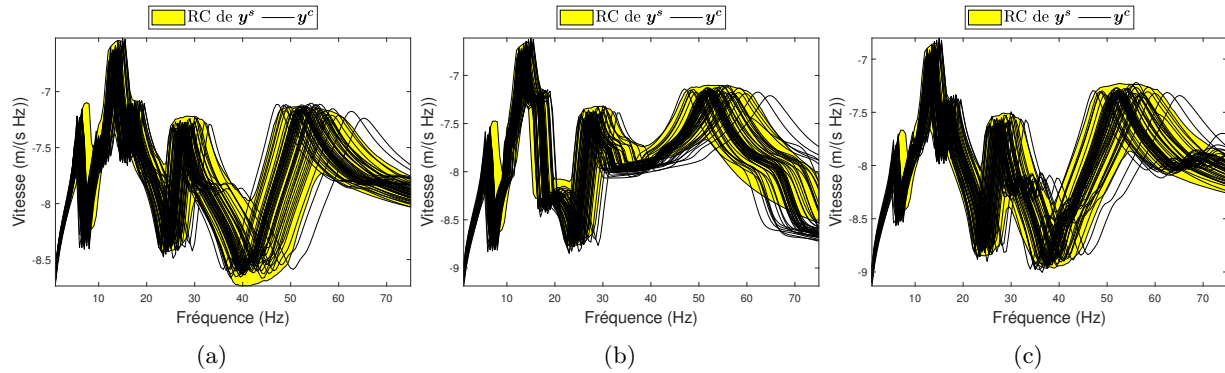


FIGURE 3.16 – Comparaison entre les réponses stochastiques du modèle à faible fidélité recalé et les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction \mathbf{y} . La région jaune représente la région de confiance avec un niveau de probabilité de 95%.

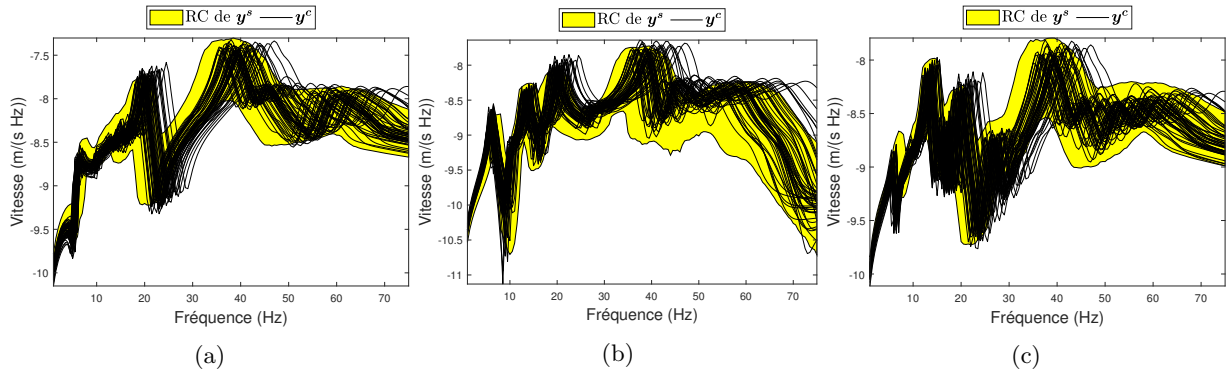
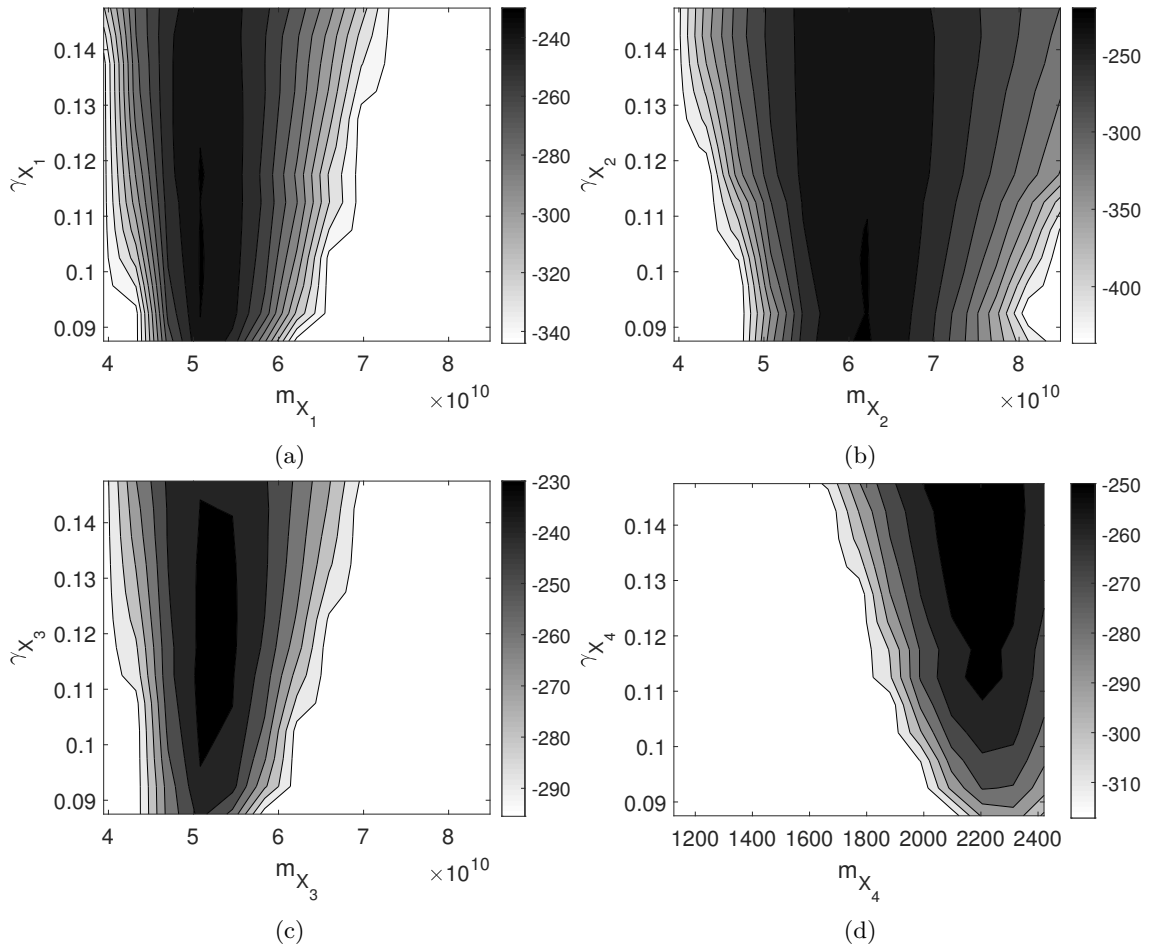


FIGURE 3.17 – Comparaison entre les réponses stochastiques du modèle à faible fidélité recalé et les réponses expérimentales (y^{exp}) aux nœuds P_1 (a), P_2 (b) et P_3 (c) suivant la direction z . La région jaune représente la région de confiance avec un niveau de probabilité de 95%.



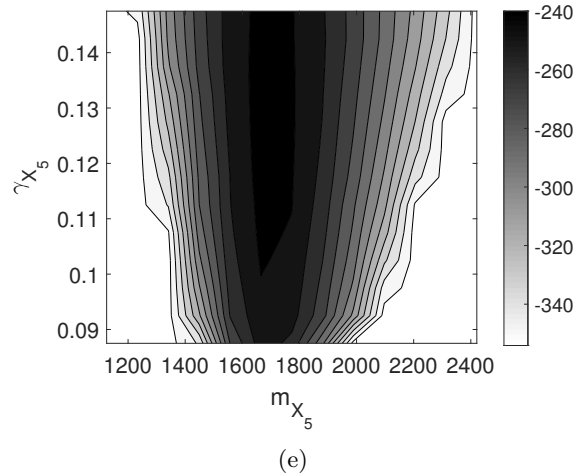


FIGURE 3.18 – Fonctions de vraisemblance de Z_1 (a), Z_2 (b), Z_3 (c), Z_4 (d) et Z_5 (e) correspondant à X_1 , X_2 , X_3 , X_4 et X_5 .

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche paramétrique des incertitudes pour les modèles numériques stochastiques a été présentée. Cette approche consiste à rendre les paramètres du modèle aléatoires. Ces paramètres sont distribués selon des densités de probabilité qui dépendent des hyperparamètres. ces hyperparamètres doivent être identifiés pour recaler le modèle stochastique.

Pour identifier ces hyperparamètres, une nouvelle méthodologie basée sur le principe de séparation de la méthode RBS, a été proposée. Elle consiste à identifier séparément les hyperparamètres des paramètres du modèle en construisant pour chaque paramètre, une nouvelle sortie aléatoire qui est uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux autres paramètres. Les valeurs optimales des hyperparamètres sont identifiées directement et indépendamment en résolvant une série de problèmes inverses (maximum de vraisemblance) en faible dimension. La faible dimension des sorties construites permet d'estimer facilement leurs distributions de probabilité.

La méthodologie a été illustrée par deux modèles numériques : le premier est une poutre encastree et le second est un modèle éléments finis d'un pont. Dans les deux modèles, tous les paramètres ont été séparés les uns des autres et les hyperparamètres associés à ces paramètres ont été bien identifiés pour recaler les deux modèles stochastiques. Pour la seconde application, les résultats obtenus sont moins bons car le modèle à faible fidélité contient des erreurs de modélisation liées aux simplifications introduites lors de la construction de ce modèle. Dans le chapitre suivant, les erreurs de modélisation seront prises en compte pour la construction du modèle stochastique et donc la méthode présentée dans ce présent chapitre devra être adaptée.

Chapitre 4

Recalage de modèles numériques probabilistes prenant en compte les incertitudes de modélisation

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés au recalage de modèle numérique probabiliste en présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle. Les résultats obtenus pour la première application (poutre) étaient très bons car le modèle à faible fidélité était tout de même une bonne représentation du modèle à haute fidélité utilisé pour générer les réponses expérimentales. Pour la seconde application (pont), les résultats étaient moins convaincants à cause des erreurs de modélisation non prises en compte dans la construction du modèle à faible fidélité. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au recalage de modèle probabiliste prenant en compte les incertitudes de modélisation. L'approche que nous proposons permet de recalculer séparément le modèle probabiliste lié aux incertitudes sur les paramètres et le modèle probabiliste lié aux incertitudes de modélisation.

4.1 Présentation du modèle probabiliste généralisé

Dans ces travaux de thèse, les incertitudes de modélisation sont prises en compte par l'approche probabiliste non paramétrique qui consiste à remplacer les matrices de masse, amortissement et raideurs du modèle par des matrices aléatoires [55]. Plus précisément, nous utilisons l'approche probabiliste dite généralisée [53] qui consiste à introduire deux couches d'aléas. La première couche est liée aux incertitudes sur les paramètres, rendant, par propagation, les matrices du modèle réduit aléatoires. La seconde couche est liée aux incertitudes de modélisation et est implémentée directement sur les matrices du modèle réduit qui sont déjà aléatoires dû à la première couche d'incertitudes.

Soit $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$, un nouvel espace probabilisé, tel que les deux espaces $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ et $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$ sont statistiquement indépendants. Les incertitudes d'erreurs de modélisation peuvent être prises en compte par l'approche probabiliste généralisée des incertitudes qui consiste d'abord à factoriser (Cholesky) les matrices aléatoires du modèle réduit introduites au chapitre précédent dans l'équation (3.6) :

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{par}(\theta)] = [\mathbf{L}_A(\theta)]^T [\mathbf{L}_A(\theta)], \quad (4.1)$$

où $[\mathbf{L}_A(\theta)] \in \mathbb{R}^{p \times p}$, une matrice triangulaire inférieure (A désignant M, D ou K). Puis les matrices aléatoires germes $[\mathbf{G}_M(\theta')]$, $[\mathbf{G}_K(\theta')]$ et $[\mathbf{G}_D(\theta')]$ (voir annexe A pour leur construction) définies dans l'espace de probabilité $(\Theta', \mathcal{T}', \mathcal{P}')$ [8,53] sont insérées dans la factorisation afin d'obtenir les nouvelles matrices aléatoires

généralisées $[\tilde{\mathbf{M}}(\theta, \theta')]$, $[\tilde{\mathbf{D}}(\theta, \theta')]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}(\theta, \theta')]$ définies ainsi, pour A désignant M, D ou K, par :

$$[\tilde{\mathbf{A}}(\theta, \theta')] = [\mathbf{L}_A(\theta)]^T [\mathbf{G}_A(\theta')] [\mathbf{L}_A(\theta)]. \quad (4.2)$$

Les matrices aléatoires généralisées $[\tilde{\mathbf{M}}(\theta, \theta')]$, $[\tilde{\mathbf{K}}(\theta, \theta')]$ et $[\tilde{\mathbf{D}}(\theta, \theta')]$ sont définies sur l'espace probabilisé $(\Theta \times \Theta', \mathcal{T} \times \mathcal{T}', \mathcal{P} \times \mathcal{P}')$, et remplacent les matrices déterministes généralisées $[\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x})]$, $[\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x})]$ et $[\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x})]$ dans l'équation (3.5) :

$$(-w^2[\tilde{\mathbf{M}}(\theta, \theta')] + iw[\tilde{\mathbf{D}}(\theta, \theta')] + [\tilde{\mathbf{K}}(\theta, \theta')])\mathbf{Q}(w, \theta, \theta') = \tilde{\mathbf{f}}(\theta, w), \quad (4.3)$$

où le vecteur $\mathbf{Q}(w, \theta, \theta')$ est la solution de l'équation.

Donc la réponse stochastique du modèle réduit est définie par :

$$\mathbf{R}^k(w, \theta, \theta') = [\Phi(\theta)]\mathbf{Q}(w, \theta, \theta'). \quad (4.4)$$

Les fonctions de la densité de probabilité des matrices aléatoires $p_{[\mathbf{G}_M]}$, $p_{[\mathbf{G}_D]}$ et $p_{[\mathbf{G}_K]}$ sont respectivement paramétrées par les paramètres de dispersion δ_M , δ_D et δ_K . Soit $\boldsymbol{\delta}^{mod} = (\delta_M, \delta_D, \delta_K)$, le vecteur total des hyperparamètres liés aux incertitudes de modélisation. Donc, le recalage du modèle numérique aléatoire est entièrement défini par les vecteurs $\boldsymbol{\delta}^{par}$ et $\boldsymbol{\delta}^{mod}$ qui doivent être identifiés en utilisant les données expérimentales.

4.2 Recalage classique du modèle probabiliste

Comme expliqué dans la section précédente et dans le chapitre précédent, les incertitudes des paramètres du modèle et les incertitudes d'erreurs de modélisation peuvent être prises en compte dans un modèle stochastique en construisant une loi de probabilité pour les incertitudes des paramètres du modèle $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}^{par})$ qui dépend du vecteur $\boldsymbol{\delta}^{par} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et une loi de probabilité pour les incertitudes d'erreurs de modélisation qui dépend du vecteur $\boldsymbol{\delta}^{mod} = (\delta_M, \delta_D, \delta_K)$. Les valeurs optimales de ces deux vecteurs d'hyperparamètres doivent être identifiées pour recaler le modèle stochastique. Donc, l'objectif de cette section est d'identifier les vecteurs des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}^{par}$ et $\boldsymbol{\delta}^{mod}$ en utilisant : (1) n_s réalisations du vecteur aléatoire \mathbf{Y} calculées en utilisant le modèle stochastique, et (2) n_{exp} réalisations expérimentales \mathbf{Y}^{exp} mesurées sur une famille de structures nominalemeent identiques. Cette identification peut être réalisé en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance [19, 47, 56, 58] comme au chapitre précédent. Soit $\boldsymbol{\delta}^{tot} = \{\boldsymbol{\delta}^{par}, \boldsymbol{\delta}^{mod}\}$, alors la valeur optimale de vecteur $\boldsymbol{\delta}^{tot, opt}$ est la solution du problème inverse suivant :

$$\boldsymbol{\delta}^{tot, opt} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}^{tot} \in C_{\boldsymbol{\delta}^{tot}}} \sum_{j=1}^{n_{exp}} \log(p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}^{exp, j}; \boldsymbol{\delta}^{tot})), \quad (4.5)$$

où $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\delta}^{tot})$ est la fonction de densité de probabilité jointe des réponses aléatoires \mathbf{Y} qui dépend de $\boldsymbol{\delta}^{tot}$ et $C_{\boldsymbol{\delta}^{tot}}$ est le support du vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}^{tot}$.

Le problème inverse présenté dans l'équation (4.5) est très compliqué à résoudre pour les mêmes raisons que celles mentionnées au chapitre précédent. De plus, les incertitudes de modélisation étant de nature différentes que les incertitudes de paramètres, celles-ci doivent faire l'objet d'un traitement à part lors de l'identification. L'objectif de la méthode de recalage présentée dans la section suivante est de pallier ces difficultés en utilisant l'approche RBS.

4.3 Recalage en utilisant la méthode RBS

Dans cette section, la méthode RBS est étendue pour recalage les modèles stochastiques en identifiant indépendamment les vecteurs des hyperparamètres associés à chaque paramètre du modèle, ainsi que les vecteurs des hyperparamètres associés aux erreurs de modélisation.

4.3.1 Transformation de réponse :

L'objectif ici est d'identifier séparément les vecteurs des hyperparamètres $\delta_i, \{i = 1, \dots, n\}$ associés aux variables aléatoires $X_i, \{i = 1, \dots, n\}$, ainsi que les vecteurs δ_A (A désignant M, D ou K) en construisant pour chaque variable aléatoire X_i , une sortie Z_i de faible dimension de sorte qu'elle soit uniquement sensible à X_i et insensible aux autres variables aléatoires et aux matrices aléatoires $[\mathbf{G}_A]$, et pour chaque matrice aléatoire $[\mathbf{G}_A]$, une sortie Z_A de faible dimension de sorte qu'elle soit uniquement sensible à $[\mathbf{G}_A]$ et insensible aux autres matrices aléatoires et variables aléatoires.

Pour chaque variable aléatoire $X_i, \{i = 1, \dots, n\}$, les réponses \mathbf{Y} sont transformées en une nouvelle sortie aléatoire $Z_i \in \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Z_i = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{Y}, \quad (4.6)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m \times p})$ est le vecteur de coordonnées qui définit la sortie Z_i .

Et pour chaque matrice aléatoire $[\mathbf{G}_A]$, (A désignant M, D ou K), les réponses \mathbf{Y} sont transformées en une nouvelle sortie $Z_A \in \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Z_A = \boldsymbol{\beta}_A^T \mathbf{Y}, \quad (4.7)$$

où $\boldsymbol{\beta}_A = (\beta_{A,1}, \dots, \beta_{A,m \times p})$ est le vecteur de coordonnées qui définit la sortie Z_A .

4.3.2 Identification des vecteurs de coordonnées :

Les nouvelles sorties Z_i et Z_A sont respectivement définies par les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ et $\boldsymbol{\beta}_A$. Donc les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ et $\boldsymbol{\beta}_A$ doivent être identifiés de sorte que Z_i soit uniquement sensible à X_i , et Z_A soit uniquement sensible à $[\mathbf{G}_A]$. Dans ce chapitre, le but est d'identifier séparément les hyperparamètres δ_i et δ_A . Donc, pour évaluer la sensibilité, les vecteurs des hyperparamètres δ_i et δ_A doivent être remplacés par des vecteurs aléatoires pour calculer les indices de Sobol pour couvrir toute l'intervalle de variation des hyperparamètres. Lorsque les hyperparamètres des variables aléatoires X_i et des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_A]$ sont aléatoires, les variables aléatoires X_i et les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_A]$ sont respectivement notées par \bar{X}_i et $[\bar{\mathbf{G}}_A]$. Soit $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ et $\bar{\mathbf{G}} = \{[\bar{\mathbf{G}}_M], [\bar{\mathbf{G}}_D], [\bar{\mathbf{G}}_K]\}$.

Pour chaque sortie Z_i , variable aléatoire X_j et matrice aléatoire $[\mathbf{G}_B]$, l'indice de sensibilité total $S_{T_{i,j}}$ quantifie la sensibilité de Z_i vis-à-vis à X_j et l'indice $S_{T_{i,B}}$ quantifie la sensibilité de Z_i vis-à-vis à $[\mathbf{G}_B]$ et sont définis par :

$$S_{T_{i,j}} = \frac{E_{\bar{\mathbf{X}} \sim_j, \bar{\mathbf{G}}} \left(\text{Var}_{\bar{X}_j} (Z_i \mid \bar{\mathbf{X}} \sim_j, \bar{\mathbf{G}}) \right)}{\text{Var}(Z_i)}, \quad (4.8)$$

$$S_{T_{i,B}} = \frac{E_{\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}} \sim_B} \left(\text{Var}_{[\bar{\mathbf{G}}_B]} (Z_i \mid \bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}} \sim_B) \right)}{\text{Var}(Z_i)}, \quad (4.9)$$

où $\bar{\mathbf{X}} \sim_j$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont les mêmes composantes que pour $\bar{\mathbf{X}}$ sauf \bar{X}_j , et $\bar{\mathbf{G}} \sim_B$ est un ensemble des matrices aléatoires dont les composantes sont les mêmes composantes que pour $\bar{\mathbf{G}}$

sauf $[\bar{\mathbf{G}}_B]$.

Et pour chaque sortie Z_A , variable aléatoire X_j et matrice aléatoire $[\mathbf{G}_B]$, les indices de sensibilité total $S_{T_{A,j}}$ et $S_{T_{A,B}}$ sont définis par :

$$S_{T_{A,j}} = \frac{E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}} \left(\text{Var}_{\bar{\mathbf{X}}_j} (Z_A | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}) \right)}{\text{Var}(Z_A)}, \quad (4.10)$$

$$S_{T_{A,B}} = \frac{E_{\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}} \left(\text{Var}_{[\bar{\mathbf{G}}_B]} (Z_A | \bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}) \right)}{\text{Var}(Z_A)}, \quad (4.11)$$

Donc en utilisant les équations (4.6) et (4.7) :

$$S_{T_{i,j}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}} \left(\text{Cov}_{\bar{\mathbf{X}}_j} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}) \right)] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [\text{Cov}(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\alpha}_i} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C^j] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C] \boldsymbol{\alpha}_i}, \quad (4.12)$$

$$S_{T_{i,B}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [E_{\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}} \left(\text{Cov}_{[\bar{\mathbf{G}}_B]} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}) \right)] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [\text{Cov}(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\alpha}_i} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C^B] \boldsymbol{\alpha}_i}{\boldsymbol{\alpha}_i^T [C] \boldsymbol{\alpha}_i}, \quad (4.13)$$

$$S_{T_{A,j}} = \frac{\boldsymbol{\beta}_A^T [E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}} \left(\text{Cov}_{\bar{\mathbf{X}}_j} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}) \right)] \boldsymbol{\beta}_A}{\boldsymbol{\beta}_A^T [\text{Cov}(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\beta}_A} = \frac{\boldsymbol{\beta}_A^T [C^j] \boldsymbol{\beta}_A}{\boldsymbol{\beta}_A^T [C] \boldsymbol{\beta}_A}, \quad (4.14)$$

$$S_{T_{A,B}} = \frac{\boldsymbol{\beta}_A^T [E_{\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}} \left(\text{Cov}_{[\bar{\mathbf{G}}_B]} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}) \right)] \boldsymbol{\beta}_A}{\boldsymbol{\beta}_A^T [\text{Cov}(\mathbf{Y})] \boldsymbol{\beta}_A} = \frac{\boldsymbol{\beta}_A^T [C^B] \boldsymbol{\beta}_A}{\boldsymbol{\beta}_A^T [C] \boldsymbol{\beta}_A}, \quad (4.15)$$

où $[C] = [\text{Cov}(\mathbf{Y})]$, $[C^j] = [E_{\bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}} \left(\text{Cov}_{\bar{\mathbf{X}}_j} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}_{\sim j}, \bar{\mathbf{G}}) \right)]$ et $[C^B] = [E_{\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}} \left(\text{Cov}_{[\bar{\mathbf{G}}_B]} (\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{G}}_{\sim B}) \right)]$.

Comme expliqué précédemment, l'objectif est de construire pour chaque variable aléatoire X_i , une sortie Z_i définie par $\boldsymbol{\alpha}_i$, de sorte qu'elle soit sensible uniquement à X_i , et pour chaque matrice aléatoire $[\mathbf{G}_A]$, une sortie Z_A définie par $\boldsymbol{\beta}_A$, de sorte qu'elle soit uniquement sensible à $[\mathbf{G}_A]$. Donc, les vecteurs optimaux $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ et $\boldsymbol{\beta}_A^{opt}$ doivent être calculés en respectant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} S_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 1, \\ S_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j, \\ S_{T_{i,B}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 0, \forall B, \end{aligned} \quad (4.16)$$

et

$$\begin{aligned} S_{T_{A,A}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 1, \\ S_{T_{A,B}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 0, \text{ pour } A \neq B, \\ S_{T_{A,j}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 0, \forall j, \end{aligned} \quad (4.17)$$

ce qui est équivalent à résoudre :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 1, \\ \tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 0, \text{ pour } i \neq j, \\ \tilde{S}_{T_{i,B}}(\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}) &= 0, \forall B, \end{aligned} \quad (4.18)$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{T_{A,A}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 1, \\ \tilde{S}_{T_{A,B}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 0, \text{ pour } A \neq B, \\ \tilde{S}_{T_{A,j}}(\boldsymbol{\beta}_A^{opt}) &= 0, \forall j,\end{aligned}\tag{4.19}$$

où $\tilde{S}_{T_{i,B}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i^T [C^B] \boldsymbol{\alpha}_i$ et $\tilde{S}_{T_{A,j}}(\boldsymbol{\beta}_A) = \boldsymbol{\beta}_A^T [C^j] \boldsymbol{\beta}_A$.

Ainsi $\boldsymbol{\alpha}_i^{opt}$ et $\boldsymbol{\beta}_A^{opt}$ sont les solutions des problèmes d'optimisation suivants :

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{opt} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^{p \times m}} \Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_i).\tag{4.20}$$

et

$$\boldsymbol{\beta}_A^{opt} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_A \in \mathbb{R}^{p \times m}} \Gamma_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_A).\tag{4.21}$$

où

$$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_i) = (\tilde{S}_{T_{i,i}}(\boldsymbol{\alpha}_i) - 1)^2 + \sum_{j \neq i} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,j}}(\boldsymbol{\alpha}_i))^2 \right\} + \sum_{\forall B} \left\{ (\tilde{S}_{T_{i,B}}(\boldsymbol{\alpha}_i))^2 \right\} + \lambda \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i.\tag{4.22}$$

et

$$\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_A) = (\tilde{S}_{T_{A,A}}(\boldsymbol{\beta}_A) - 1)^2 + \sum_{B \neq A} \left\{ (\tilde{S}_{T_{A,B}}(\boldsymbol{\beta}_A))^2 \right\} + \sum_{\forall j} \left\{ (\tilde{S}_{T_{A,j}}(\boldsymbol{\beta}_A))^2 \right\} + \lambda \boldsymbol{\beta}_A^T \boldsymbol{\beta}_A.\tag{4.23}$$

Ces problèmes d'optimisation peuvent être facilement résolus en utilisant la méthode de Newton Raphson comme expliqué dans la section 1.2.2.

Soit $[S]$, la matrice de sensibilité de dimension $(n+3) \times (n+3)$, dont les termes $S_{T_{i,j}}$, $\{i = 1, \dots, n, M, K, D \text{ et } j = 1, \dots, n, M, K, D\}$. Après avoir calculé les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_1^{opt}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n^{opt}$, $\boldsymbol{\beta}_M^{opt}$, $\boldsymbol{\beta}_K^{opt}$ et $\boldsymbol{\beta}_D^{opt}$, si la matrice $[S]$ est proche de l'identité, cela signifie que tous les paramètres aléatoires et les matrices aléatoires ont été bien séparés. Aussi, la séparabilité des paramètres aléatoires X_i et des matrices aléatoires $[G_A]$ peut être respectivement quantifiée par les fonctionnelles $\Gamma_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ et $\Gamma_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}_A)$ qui doivent ainsi être proches de zéro.

4.3.3 Identification des hyperparamètres :

Si le paramètre X_i a été bien séparé, la valeur optimale de vecteur des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}_i^{opt}$ associé à X_i peut être identifiée séparément des autres vecteurs des hyperparamètres du modèle en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance sur la sortie Z_i de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\delta}_i^{opt} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}_i \in C_{\boldsymbol{\delta}_i}} \sum_{j=1}^{n_{exp}} \log(p_{Z_i}(Z_i^{exp,j}, \boldsymbol{\delta}_i)),\tag{4.24}$$

où $Z_i^{exp,j} = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{Y}^{exp,j}$ est la transformation des réponses expérimentales. Les valeurs des hyperparamètres $\boldsymbol{\delta}_1, \dots, \boldsymbol{\delta}_{i-1}, \boldsymbol{\delta}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{\delta}_n, \boldsymbol{\delta}_M, \boldsymbol{\delta}_K, \boldsymbol{\delta}_D$ peuvent être arbitrairement fixées dans leur espace admissible.

Aussi si la matrice aléatoire $[G_A]$ a été bien séparée, la valeur optimale de paramètre de dispersion δ_A^{opt}

peut être identifiée indépendamment des autres hyperparamètres du modèle en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance sur la sortie Z_A de la façon suivante :

$$\delta_A^{opt} = \arg \max_{\delta_A \in C_{\delta_A}} \sum_{j=1}^{n_{exp}} \log(p_{Z_A}(Z_A^{exp,j}; \delta_A)), \quad (4.25)$$

où $Z_A^{exp,j} = \beta_A^T \mathbf{Y}^{exp,j}$ est la transformation des réponses expérimentales. Les valeurs des autres vecteurs des hyperparamètres dans l'équation (4.25) peuvent être fixées arbitrairement dans leur espace admissible.

Pour les cas où une des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_A]$ n'est pas séparable, alors nous suggérons d'identifier les hyperparamètres de la manière itérative suivante :

1. Les paramètres de dispersion $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ liés aux erreurs de modélisation sont fixés à des valeurs initiales. Nous identifions alors les hyperparamètres $\delta_1, \dots, \delta_n$ en résolvant le problème inverse (4.24).
2. En fixant les vecteurs des hyperparamètres $\delta_1, \dots, \delta_n$ aux valeurs optimales identifiées précédemment, $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ sont recalés en résolvant le problème inverse (4.25).
3. En fixant les paramètres de dispersion $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ aux valeurs optimales identifiées précédemment, les hyperparamètres $\delta_1, \dots, \delta_n$ sont recalés de nouveau en résolvant le problème inverse (4.24).
4. Les étapes 2 et 3 sont répétées plusieurs fois jusqu'à stabilisation de la valeur des hyperparamètres.

4.4 Application

Dans cette application, on reprend le recalage du modèle stochastique de poutre présenté dans la section 3.5.1 (en réduisant l'éclatement des poutres afin d'augmenter les erreurs de modélisation dans le modèle) en identifiant les hyperparamètres liées aux incertitudes des paramètres du modèle, ainsi que celles liées aux incertitudes de modélisation grâce à la méthodologie présentée dans ce chapitre. Comme dans le chapitre précédent, les réponses expérimentales sont générées numériquement par le modèle stochastique à haute fidélité.

4.4.1 Modèle stochastique à haute fidélité

Le modèle stochastique à haute fidélité considéré dans cette application est le même modèle stochastique que celui présenté dans la section 3.5.1.1 avec certaines modifications dans sa modélisation afin d'augmenter les erreurs de modélisation. Les modifications sont les suivantes :

- Les diamètres des poutres sont triplés : 2,25 cm pour la poutre 1 et 1,5 cm pour la poutre 2.
- le modèle réduit a été construit par une analyse modale avec 21 modes au lieu de 19 modes.
- Les quatre variables aléatoires E_1, E_2, ρ_1 et ρ_2 ont des distributions Gamma avec des moyennes égales à leurs valeurs nominales présentées dans le tableau 3.1 et des coefficients de variation valant 0,2 au lieu de 0,1.

La structure est excitée par une force unitaire dans la direction \mathbf{y} au nœud P . Les réponses fréquentielles en vitesse de la structure observées suivant la direction \mathbf{y} aux nœuds P_1 et P_2 dans l'intervalle [100 ; 2000] Hz sont présentées dans la figure 4.1. 50 réponses ont été générées afin de les utiliser comme des données expérimentales.

4.4.2 Modèle stochastique à faible fidélité

Le modèle stochastique à faible fidélité considéré ici est le même modèle stochastique présenté dans la section 3.5.1.2 mais en introduisant respectivement dans les matrices aléatoires généralisées $[\tilde{\mathbf{M}}_{par}]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_{par}]$,

des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_M]$ et $[\mathbf{G}_K] \in SG^+$ (voir annexe A). Les diamètres des poutres ont été triplés : 2,25 cm pour la poutre 1 et 1,5 cm pour la poutre 2. Les réponses du modèle nominal à faible fidélité sont représentées dans la figure 4.2.

Les valeurs optimales des hyperparamètres des variables E_1 , E_2 , ρ_1 et ρ_2 du modèle doivent être identifiées, ainsi que les valeurs optimales des paramètres de dispersion δ_M et δ_K des matrices $[\mathbf{G}_M]$ et $[\mathbf{G}_K]$ en utilisant les réponses expérimentales \mathbf{y}^{exp} générées par le modèle stochastique à haute fidélité dans la section 4.4.1.

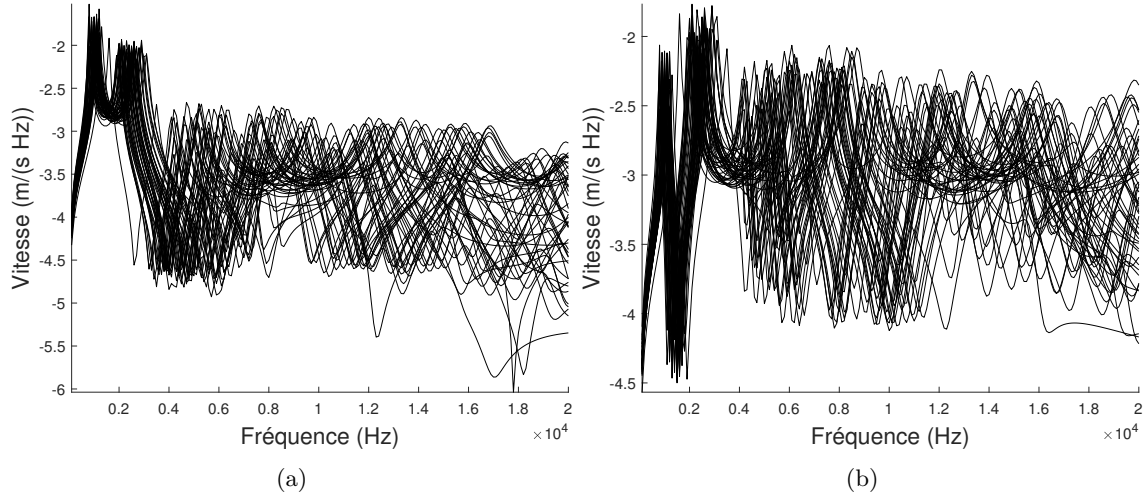


FIGURE 4.1 – Réponses expérimentales générées par le modèle stochastique à haute fidélité suivant la direction \mathbf{y} aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b).

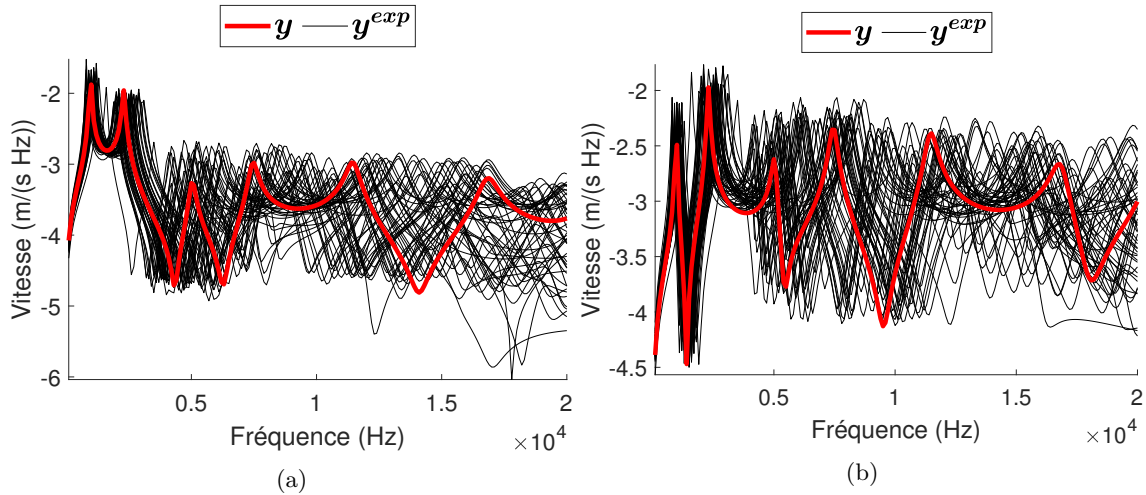


FIGURE 4.2 – Comparaison entre les réponses fréquentielles nominales du modèle à faible fidélité (\mathbf{y}) et les réponses expérimentales du modèle stochastique à haute fidélité aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b).

4.4.3 Identification des hyperparamètres

Dans cette application, nous voulons identifier séparément les valeurs optimales des hyperparamètres d'incertitudes des paramètres du modèle et d'erreurs de modélisation en utilisant la méthodologie présentée dans ce chapitre. Soit $\mathbf{X} = (E_1, E_2, \rho_1, \rho_2)$, le vecteur de paramètres aléatoires, et $\boldsymbol{\delta}_{X_1} = (m_{X_1}, \gamma_{X_1})$, $\boldsymbol{\delta}_{X_2} = (m_{X_2}, \gamma_{X_2})$, $\boldsymbol{\delta}_{X_3} = (m_{X_3}, \gamma_{X_3})$ et $\boldsymbol{\delta}_{X_4} = (m_{X_4}, \gamma_{X_4})$, les 4 vecteurs des hyperparamètres (valeur moyenne et coefficient de variation) associés aux variables aléatoires $X_i, \{i = 1, \dots, 4\}$. Donc $\boldsymbol{\delta}^{par} = (\boldsymbol{\delta}_{X_1}, \boldsymbol{\delta}_{X_2}, \boldsymbol{\delta}_{X_3}, \boldsymbol{\delta}_{X_4})$ et $\boldsymbol{\delta}^{mod} = (\delta_M, \delta_K)$. Avant de calculer les indices de sensibilité, les hyperparamètres des paramètres aléatoires sont remplacés par des variables aléatoires uniformes dans l'intervalle $[0, 5; 1, 5] \times m_{x_i}$ (m_{x_i} est la valeur nominale de X_i) pour les 4 valeurs moyennes et $[0, 1; 0, 3]$ pour les 4 coefficients de variation. Les paramètres de dispersion δ_M et δ_K sont aussi remplacés par des paramètres aléatoires uniformes dans l'intervalle $[2 \times 10^{-5}; 0, 3]$. Un bruit aléatoire a été ajouté aux réponses numériques du modèle $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ dont les composantes sont indépendantes et suivent une loi normale avec une valeur moyenne nulle et un écart-type de 0,014. La figure 4.4 représente, pour chaque paramètre d'entrée X_i et matrice $[\mathbf{G}_i]$, la fonction $Conv_i(n_s)$ en fonction du nombre de réalisations (n_s) sachant que $Conv_i(n_s) = \text{trace}([C^i](n_s) \times [C^i]^T(n_s)) / \text{trace}([C^i](5000) \times [C^i]^T(5000)), \{i = 1, 2, 3, 4, M \text{ ou } K\}$. D'après cette figure, on remarque que les estimations des matrices $[C^i]$ ont commencé à converger à partir de 2000 échantillons.

Pour construire les sorties transformées pour l'identification des hyperparamètres, 4000 réalisations ont été utilisées pour estimer les matrices $[C^i]$, $\{i = 1, 2, 3, 4, M \text{ ou } K\}$. Les vecteurs de coordonnées sont estimés avec $\lambda = 0$. La matrice de sensibilité $[S]$ obtenue est représentée dans la figure 4.3. D'après cette figure, on remarque que les paramètres $X_i, \{i = 1, \dots, 4\}$ sont quasiment séparés, tandis que les matrices $[\mathbf{G}_M]$ et $[\mathbf{G}_K]$ ne sont pas bien séparées.

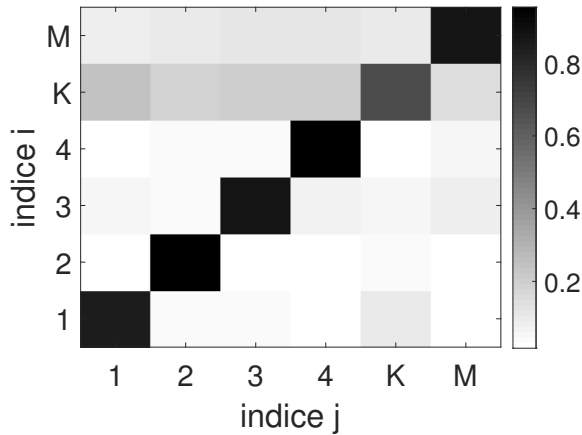


FIGURE 4.3 – Matrice de sensibilité $[S]$.

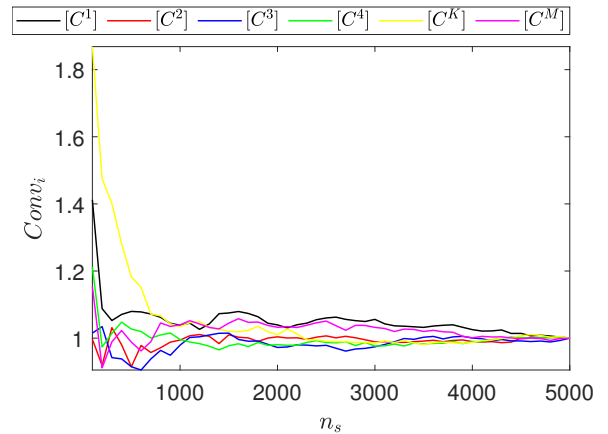


FIGURE 4.4 – Fonction $Conv_i(n_s)$ en fonction du nombre d'échantillons (n_s).

4.4.3.1 Pré-validation de la procédure d'identification

Dans cette section, on va valider dans un premier temps la méthodologie proposée en utilisant des réponses stochastiques générées par le modèle à faible fidélité comme des réponses expérimentales. Pour réaliser cette validation, les réponses expérimentales correspondront aux réponses stochastiques générées lorsque les quatre variables aléatoires E_1, E_2, ρ_1 et ρ_2 ont des distributions Gamma avec des valeurs moyennes égales aux valeurs nominales rapportées dans le tableau 3.1 et des coefficients de variation valant 0,2, et aussi lorsque les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_M]$ et $[\mathbf{G}_K] \in SG^+$ sont définies par les fonctions de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}_M]}([\mathbf{G}_M])$ et $p_{[\mathbf{G}_K]}([\mathbf{G}_K])$ (voir annexe A) avec δ_M et δ_K valant 0,1 (5000 réponses expérimentales ont été générées).

Puisque, les paramètres $X_i, \{i = 1, \dots, 4\}$ et les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_M]$ et $[\mathbf{G}_K]$ ne sont pas totalement

séparés, on a décidé d'identifier les hyperparamètres du modèle d'une façon itérative (voir section 4.3.3) en partant de la valeur 0,02 pour δ_M et δ_K .

Les fonctions de densité de probabilité ont été estimées par la méthode à noyau avec 1000 réalisations. Les valeurs optimales des hyperparamètres identifiées sont présentées dans le tableau 4.1. D'après ce tableau, on peut remarquer que les valeurs optimales des hyperparamètres ont été stabilisées depuis la première itération et leurs valeurs correspondent presque aux valeurs des hyperparamètres qui ont été utilisées pour générer les réponses expérimentales.

TABLEAU 4.1 – Valeurs optimales des hyperparamètres.

Hyperparamètres	$m_{X_1}^{opt}$ (GPa)	$\gamma_{X_1}^{opt}$	$m_{X_2}^{opt}$ (GPa)	$\gamma_{X_2}^{opt}$	$m_{X_3}^{opt}$ (Kg/m ³)	$\gamma_{X_3}^{opt}$	$m_{X_4}^{opt}$ (Kg/m ³)	$\gamma_{X_4}^{opt}$	δ_K^{opt}	δ_M^{opt}
itération 1	150	0,2	70	0,2	5800	0,19	2800	0,2	0,1	0,1
itération 2	150	0,2	70	0,2	5800	0,19	2800	0,19	0,1	0,1
itération 3	150	0,2	70	0,2	5800	0,19	2800	0,2	0,1	0,1
itération 4	150	0,19	70	0,2	5800	0,19	2800	0,2	0,1	0,1

4.4.3.2 Recalage du modèle stochastique à faible fidélité par les réponses expérimentales

Dans cette section, nous voulons recalibrer le modèle stochastique à faible fidélité en identifiant les hyperparamètres associés aux variables aléatoires E_1 , E_2 , ρ_1 et ρ_2 , et les paramètres de dispersion δ_M et δ_K en utilisant les réponses expérimentales du modèle à haute fidélité qui ont été générées dans la section 4.4.1. Les valeurs optimales des hyperparamètres du modèle à faible fidélité ont été identifiées de la même manière que celle utilisée dans la section précédente. Leurs valeurs sont présentées dans le tableau 4.2. D'après ce tableau, on peut remarquer que les valeurs optimales des hyperparamètres ont été quasiment stabilisées dès la première itération. Les valeurs optimales de la deuxième itération ont été choisies pour calibrer le modèle stochastique à faible fidélité.

TABLEAU 4.2 – Valeurs optimales des hyperparamètres.

hyperparamètres	$m_{X_1}^{opt}$ (GPa)	$\gamma_{X_1}^{opt}$	$m_{X_2}^{opt}$ (GPa)	$\gamma_{X_2}^{opt}$	$m_{X_3}^{opt}$ (Kg/m ³)	$\gamma_{X_3}^{opt}$	$m_{X_4}^{opt}$ (Kg/m ³)	$\gamma_{X_4}^{opt}$	δ_K^{opt}	δ_M^{opt}
itération 1	182,14	0,26	60	0,24	5800	0,14	2400	0,2	0,147	0,025
itération 2	182,14	0,21	65	0,21	5800	0,14	2400	0,23	0,141	0,037
itération 3	192,86	0,23	65	0,24	5800	0,13	2400	0,21	0,171	0,043
itération 4	192,86	0,21	65	0,23	5800	0,16	2400	0,23	0,159	0,037

La figure 4.5 représente les réponses stochastiques du modèle à faible fidélité calibré (\mathbf{y}) avec les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}). D'après cette figure, on remarque que les réponses expérimentales ont été bien prédites par le modèle à faible fidélité calibré.

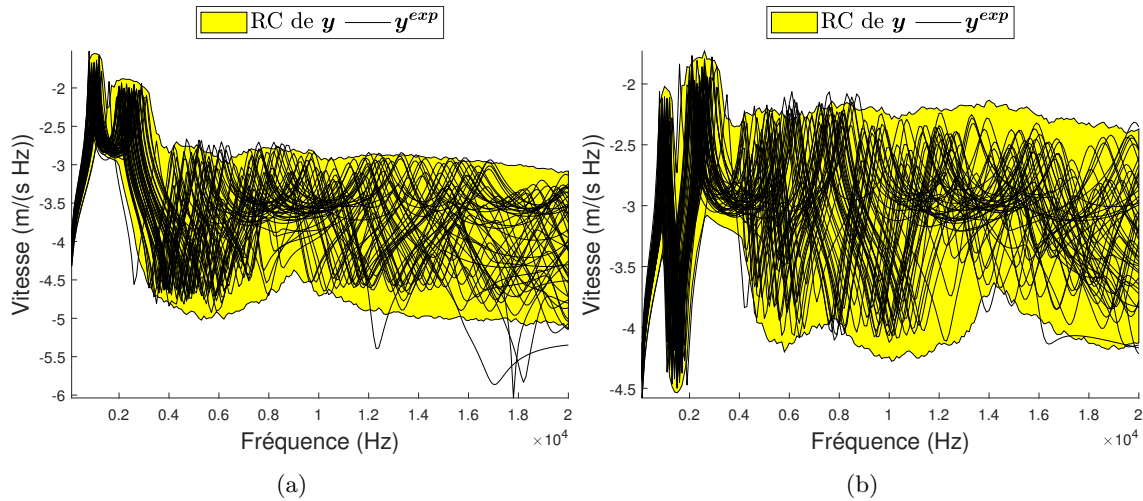


FIGURE 4.5 – Comparaison entre les réponses stochastiques (\mathbf{y}) du modèle à faible fidélité calibré et les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) aux nœuds P_1 (a) et P_2 (b). La région jaune représente la région de confiance des réponses stochastiques \mathbf{y} avec un niveau de probabilité 99%.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche probabiliste généralisée pour les modèles numériques stochastiques a été utilisée pour prendre en compte les incertitudes de modélisation. Cette approche consiste à représenter les incertitudes liées aux paramètres du modèle, ainsi que les incertitudes liées aux erreurs de modélisation. Les fonctions de densité de probabilité associées aux deux aléas introduits dépendent des hyperparamètres qui doivent être identifiés pour recaler le modèle stochastique.

Une méthodologie pour identifier ces hyperparamètres a été proposée. La méthodologie consiste à identifier séparément les hyperparamètres des paramètres aléatoires du modèle, ainsi que les paramètres de dispersion des matrices aléatoires introduites dans le modèle. Cette identification se fait par la construction, pour chaque variable ou matrice aléatoire, une nouvelle sortie sensible uniquement à cette variable ou cette matrice. La valeur optimale de chaque vecteur des hyperparamètres est identifiée directement et indépendamment des autres vecteurs des hyperparamètres en résolvant un problème inverse probabiliste en faible dimension.

La méthodologie a été appliquée sur un modèle de poutre encastree. Les paramètres du modèle et les matrices aléatoires n'ont pas été totalement séparés les uns des autres. Les valeurs optimales des hyperparamètres ont été identifiées d'une façon itérative. Les réponses aléatoires fournies par le modèle stochastique recalé sont statistiquement proches des réponses expérimentales.

Chapitre 5

Recalage bayésien basé sur la méthode RBS

Comme nous l'avons expliqué précédemment, un modèle numérique est généralement une représentation simplifiée d'un système réel. L'objectif de ce modèle est de prévoir numériquement les réponses du système réel. Les erreurs de modélisation liées aux simplifications entraînent des erreurs dans les réponses calculées et donc des erreurs lors du recalage du modèle. En effet, ce recalage utilise les réponses calculées par le modèle. Le chapitre 2 était consacré au recalage de modèles déterministes. Un terme d'erreur de modélisation avait été introduit mais le recalage lui-même était bien déterministe dans le sens où les valeurs optimales des paramètres étaient déterministes et étaient obtenues en minimisant l'erreur entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales. Les chapitres 3 et 4 traitent quant à eux du recalage de modèles probabilistes où les paramètres du modèle sont intrinsèquement aléatoires.

Ce chapitre est consacré au recalage de modèle déterministe en présence d'erreurs de modélisation par une approche Bayésienne. Les erreurs de modélisation sont prises en compte par une approche probabiliste. Les paramètres du modèle sont aléatoires mais, contrairement aux deux chapitres précédents, cet aléa est dû à la présence d'erreurs de modélisation ainsi qu'au cadre Bayésien utilisé et correspondent donc à des incertitudes épistémiques.

5.1 Recalage Bayésien classique

La méthode de recalage Bayésien consiste tout d'abord à modéliser les paramètres (composantes du vecteur \mathbf{x}) à recaler par des variables aléatoires (composantes du vecteur \mathbf{X}) qui ont une fonction de densité de probabilité *a priori* $p_{\mathbf{X}}^{\text{prior}}(\mathbf{x})$ traduisant le manque d'information initial sur les paramètres à recaler. La fonction de densité de probabilité *a posteriori* $p_{\mathbf{X}}^{\text{post}}(\mathbf{x})$ de \mathbf{X} est alors construite en utilisant une observation expérimentale \mathbf{y}^{exp} de la sortie du modèle et le théorème Bayésien [10, 11]

$$p_{\mathbf{X}}^{\text{post}}(\mathbf{x}) = c \times L(\mathbf{x}) \times p_{\mathbf{X}}^{\text{prior}}(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

où c est une constante de normalisation définie par :

$$1/c = \int_{C_{\mathbf{x}}} L(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}^{\text{prior}}(\mathbf{x}) dx, \quad (5.2)$$

et $L(\mathbf{x})$ est la fonction de vraisemblance définie sur $C_{\mathbf{x}} \subset R^n$, avec des valeurs dans R^+ , telle que :

$$L(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{Y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{\text{exp}} | \mathbf{x}), \quad (5.3)$$

où $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}^{\text{exp}} | \mathbf{x})$ est la fonction de densité de probabilité conditionnelle des réponses aléatoires \mathbf{Y} du modèle numérique pour $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Les réponses du modèle sont aléatoires à cause des incertitudes de modélisation qui peuvent être prises compte, dans le cadre de la dynamique des structures, (1) en introduisant un bruit additif sur les sorties du modèle, ou (2) en remplaçant les matrices généralisées de masse, d'amortissement et de raideur par des matrices aléatoires (voir section 4.1). Cette deuxième approche sera retenue dans ce chapitre.

Cette approche Bayésienne classique présente deux difficultés. (1) La fonction de vraisemblance requière l'estimation d'une fonction de densité de probabilité jointe de la sortie \mathbf{Y} qui peut être en très grande dimension, et (2) le stockage de la fonction de densité de probabilité jointe $p_{\mathbf{X}}^{\text{post}}(\mathbf{x})$ de \mathbf{X} , en vue de calculs robustes ultérieurs, est impossible lorsque le nombre de paramètres de recalage est important, nécessitant alors une double boucle de Monte Carlo pour éviter le stockage. La méthode RBS sera donc utilisée ici pour séparer les paramètres d'entrée et réduire la dimension des sorties utilisées pour le calcul des fonctions de vraisemblance, palliant ainsi les deux difficultés énoncées.

5.2 Estimation des distributions de probabilité *a posteriori* des paramètres du modèle de manière séparée

Dans cette section, nous supposons que le modèle probabiliste des incertitudes liées aux erreurs de modélisation est donné et n'a donc pas besoin d'être calibré.

5.2.1 Séparation des paramètres de système

L'objectif ici est d'estimer séparément la distribution de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$ de chaque paramètre d'entrée X_i , en construisant pour chaque paramètre d'entrée X_i , une sortie Z_i de dimension 1 de sorte qu'elle soit uniquement sensible à X_i et insensible aux autres paramètres du modèle.

Une fois encore, pour chaque paramètre $X_i, \{i = 1, \dots, n\}$, la sortie $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ est transformée à une nouvelle sortie $Z_i \in \mathbb{R}$, de sorte que :

$$Z_i = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{Y}, \quad (5.4)$$

avec $\boldsymbol{\alpha}_i$ est le vecteur de coordonnées à identifier.

Le vecteur de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}_i$ peut être identifié en résolvant le problème inverse présenté dans l'équation (3.16) en variant les paramètres du modèle selon leurs distributions de probabilité *a priori* pour estimer les matrices $[C^i], \{i = 1, \dots, n\}$.

5.2.2 Estimation de la distribution de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$

La séparabilité du paramètre X_i par rapport aux autres paramètres est directement quantifiée par la valeur de $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i^{\text{opt}})$ qui doit être aussi proche que possible de zéro. Si la valeur de $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_i^{\text{opt}})$ est suffisamment petite, alors $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$ associée à X_i peut être indépendamment estimée en utilisant la méthode bayésienne sur la sortie Z_i de la façon suivante :

$$p_{X_i}^{\text{post}}(x_i) = c_i \times L(x_i) \times p_{X_i}^{\text{prior}}(x_i), \quad (5.5)$$

où $L(x_i)$ est la fonction de vraisemblance définie sur $C_{x_i} \subset \mathbb{R}$, telle que :

$$L(x_i) = p_{z_i|x_i}(z_i^{\text{exp}} | x_i), \quad (5.6)$$

où $Z_i^{\text{exp}} = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{Y}^{\text{exp}}$ est la transformation des réponses aléatoires expérimentales.

c_i est une constante de normalisation définie par :

$$1/c_i = \int_{C_{x_i}} L(x_i) p_{\mathbf{X}_i}^{\text{prior}}(x_i) dx_i. \quad (5.7)$$

Dans l'équation (5.6), les valeurs des paramètres $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ peuvent être définies arbitrairement dans leur espace admissible. En effet, la sortie aléatoire Z_i est, par construction, indépendante des valeurs de ces paramètres.

5.3 Identification des paramètres de dispersion pour les incertitudes de modélisation

Dans cette section, nous supposons que les paramètres de recalage ont une distribution de probabilité donnée. Comme expliqué précédemment dans la section 5.1, les erreurs de modélisation dans le modèle sont prises en compte par une approche probabiliste non paramétrique en introduisant des matrices germes aléatoires $[\mathbf{G}_M(\theta')]$, $[\mathbf{G}_K(\theta')]$ et $[\mathbf{G}_D(\theta')]$ dans les matrices généralisées de masse, de raideur, et d'amortissement du modèle. Ces matrices aléatoires dépendent du vecteur de dispersion $\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}} = (\delta_M, \delta_K, \delta_D)$ qui doit être identifié. Dans cette section, la valeur optimale de $\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}$ est identifiée par la méthode du maximum de vraisemblance [19, 47, 56, 58] :

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{mod,opt}} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}} \in C_{\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}}} \log(p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}^{\text{exp}}; \boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})), \quad (5.8)$$

L'estimation de la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})$ est très difficile lorsque la dimension du vecteur de sortie est grande. Alors, la méthode de décomposition en composantes principales [26] permet de réduire cette dimension et d'introduire des sorties non corrélées. Pour $\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}$ fixé, $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})$ est un vecteur aléatoire, pour lequel $\mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})$ est sa valeur moyenne et $[C(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})]$ sa matrice de covariance de dimension $(m \times m)$ définie par :

$$[C(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})] = E((\mathbf{Y}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}) - \mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}))(\mathbf{Y}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}) - \mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}))^T), \quad (5.9)$$

En résolvant le problème aux valeurs propres :

$$[C(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})]\mathbf{v}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}) = \lambda\mathbf{v}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}), \quad (5.10)$$

on peut calculer m valeurs propres positives $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ correspondent aux vecteurs propres $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$.

Soit N , un entier tel que $1 \leq N \leq m$, et U_1, U_2, \dots, U_N sont N variables aléatoires définies par :

$$U_i(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})}} (\mathbf{Y}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}) - \mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})) \times \mathbf{v}_i, \forall i = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Par construction, les variables aléatoires $U_i, \{i = 1, \dots, N\}$, sont centrées et non corrélées. En négligeant la faible dépendance entre ces variables aléatoires, l'équation (5.8) peut alors être remplacée par l'équation (5.12) pour estimer $\boldsymbol{\delta}^{\text{mod,opt}}$:

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{mod,opt}} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}} \in C_{\boldsymbol{\delta}^{\text{mod}}}} \sum_{i=1}^N \log(p_{U_i}(U_i^{\text{exp}}; \boldsymbol{\delta}^{\text{mod}})), \quad (5.12)$$

où la réalisation expérimentale U_i^{exp} est donnée par :

$$U_i^{exp}(\boldsymbol{\delta}^{mod}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(\boldsymbol{\delta}^{mod})}} (\mathbf{Y}^{exp} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}^{mod})) \times \mathbf{v}_i, \forall i = 1, \dots, N. \quad (5.13)$$

L'ordre N de la réduction statistique est choisi de sorte à obtenir une erreur inférieure à seuil ϵ fixé :

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i(\boldsymbol{\delta}^{mod})}{tr[C(\boldsymbol{\delta}^{mod})]} \leq \epsilon. \quad (5.14)$$

5.4 Méthode itérative d'estimation des distributions de probabilité *a posteriori* des paramètres du modèle et des valeurs des paramètres de dispersion pour les incertitudes de modélisation

L'identification des distributions de probabilité *a posteriori* des paramètres du modèle requiert un modèle probabiliste des incertitudes de modélisation qui lui même doit être calibré. Nous proposons la procédure itérative suivante pour calibrer à la fois les distributions de probabilité *a posteriori* des paramètres du modèle et les paramètres de dispersion relatives aux incertitudes de modélisation :

1. Les paramètres de dispersion $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ liés aux erreurs de modélisation sont identifiés en résolvant le problème inverse (5.12). Les paramètres de recalage ont pour fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}^{prior}(\boldsymbol{x})$ (fonction de densité de probabilité *a priori*).
2. En fixant les vecteurs des hyperparamètres $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ aux valeurs optimales identifiées précédemment, les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{post}(x_i)$ des paramètres de recalage sont estimées par l'équation (5.5).
3. Les paramètres de dispersion $\delta_M, \delta_K, \delta_D$ liés aux erreurs de modélisation sont identifiés à nouveau en résolvant le problème inverse (5.12). Les paramètres de recalage ont pour fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{X}}^{post}(\boldsymbol{x})$ (fonction de densité de probabilité *a posteriori*).
4. Les étapes 2 et 3 sont répétées plusieurs fois jusqu'à stabilisation de la valeur des paramètres de dispersion et des fonctions de densité de probabilité *a posteriori* des paramètres à recalier.

5.5 Application

Dans cette section, la méthodologie présentée dans ce chapitre est appliquée pour recalier une structure de 3 étages en estimant la distribution de probabilité *a posteriori* pour chaque paramètre d'entrée.

5.5.1 Modèle à haute fidélité

Le modèle à haute fidélité est un modèle éléments finis d'une structure de 3 étages dont le maillage est représenté sur la figure 5.1. Ce modèle est utilisé pour générer des réponses expérimentales. Les étages ont une longueur 20 cm, largeur 20 cm et épaisseur 2 cm. Les colonnes ont une hauteur de 15 cm, longueur 1,25 cm et largeur 1,25 cm. Les colonnes plus basses sont fixées au sol. La structure est linéaire élastique avec un module d'Young 69 *GPa*, un coefficient de poisson 0,29 et une masse volumique 2700 *Kg/m*³. La structure est discrétisée par 28778 éléments solides tétraédriques. Le modèle réduit est ensuite construit par une analyse modale utilisant 9 modes élastiques. La matrice d'amortissement généralisée est construite en utilisant un modèle de Rayleigh avec un coefficient d'amortissement 0,5 %.

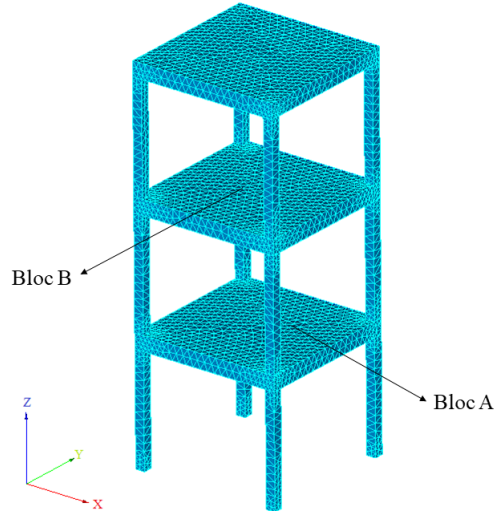


FIGURE 5.1 – Maillage du modèle à haute-fidélité.

La structure a été excitée par une force unitaire suivant la direction x à un nœud situé dans le milieu de seconde étage (Bloc B). Les fonctions de réponse fréquentielle (FRF) en accélération suivant la direction x du premier étage (Bloc A) et du deuxième étage (Bloc B) sont présentées dans la figure 5.2 dans l'intervalle $[1, 400]$ Hz. Ces réponses sont observées au niveau du nœud P_1 situé au milieu du premier étage et nœud P_2 situé au milieu du deuxième étage. La concaténation de ces réponses sera notée \mathbf{y}^{exp} .

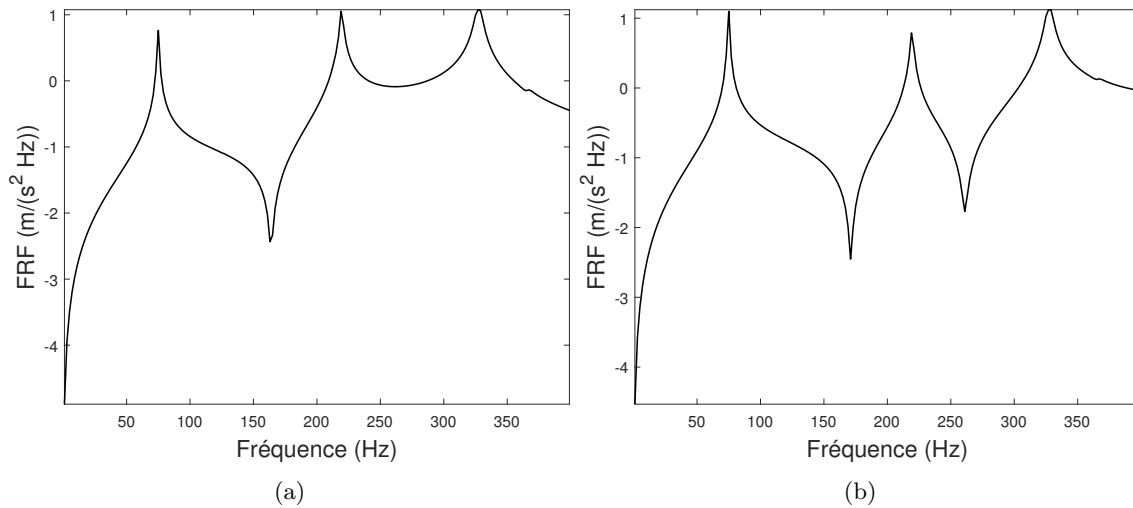


FIGURE 5.2 – Réponses expérimentales générées pour le modèle à haute fidélité pour le premier étage (a) et deuxième étage (b).

5.5.2 Modèle stochastique à faible fidélité

Le modèle nominal à faible fidélité est un système à trois masses connectées par des raideurs et des amortisseurs pour représenter le modèle à haute fidélité de manière simplifiée. Ce modèle à faible fidélité est représenté sur la figure 5.3. Les masses sont $m_1 = m_2 = 2,41 \text{ Kg}$ et $m_3 = 2,29 \text{ Kg}$, les raideurs sont

$k_1 = k_2 = k_3 = 2000 \text{ KN/m}$. La matrice d'amortissement est construite en utilisant un modèle de Rayleigh avec un coefficient d'amortissement égal à 0,5%. Les réponses nominales du modèle à faible fidélité sont représentées sur la figure 5.4. D'après cette figure, on peut clairement remarquer que les réponses nominales du modèle à faible fidélité présentent beaucoup d'écarts par rapport aux réponses expérimentales. D'où l'importance de recalibrer le modèle afin de bien représenter les réponses expérimentales.

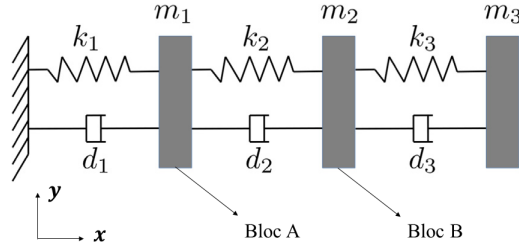


FIGURE 5.3 – Modèle à faible fidélité.

Les masses m_1, m_2, m_3 et les raideurs k_1, k_2, k_3 sont remplacés par des variables aléatoires pour lesquelles les distributions de probabilité *a posteriori* doivent être estimées. Pour prendre en compte les incertitudes d'erreurs de modélisation et estimer les distributions de probabilité *a posteriori*, les matrices de masse et de raideur généralisées ont été remplacées par des matrices aléatoires. Les paramètres de dispersion δ_M et δ_K des matrices $[G_M]$ et $[G_K]$ doivent aussi être identifiés.

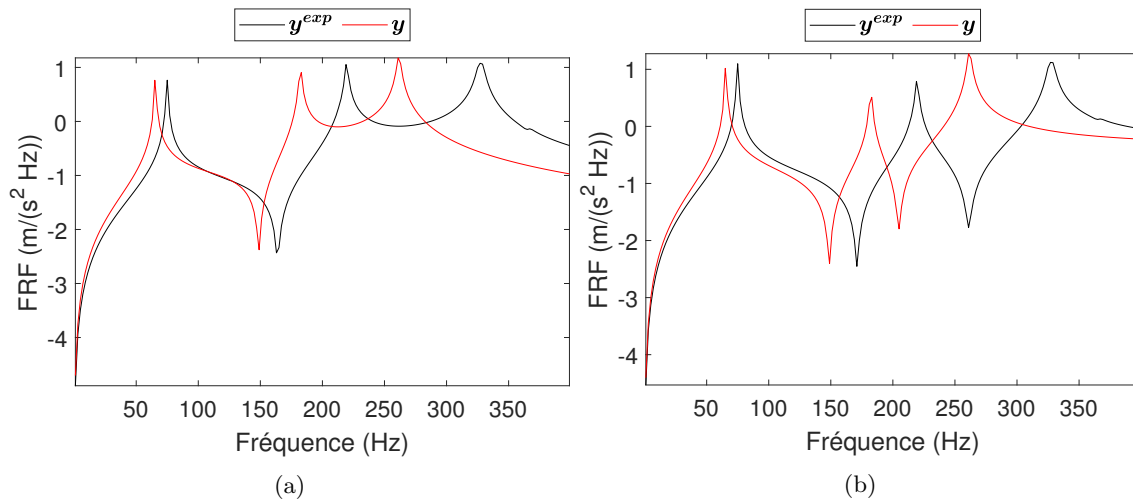


FIGURE 5.4 – Comparaison entre les réponses nominales du modèle à faible fidélité (\mathbf{y}) avec les réponses expérimentales du modèle à haute fidélité (\mathbf{y}^{exp}) pour le premier étage (a) et le deuxième étage (b).

5.5.3 Estimation des distributions de probabilité *a posteriori* pour les paramètres d'entrée

Dans cette application, nous voulons estimer les distributions de probabilité *a posteriori* pour les paramètres d'entrée m_1, m_2, m_3, k_1, k_2 et k_3 , ainsi que les valeurs optimales des paramètres de dispersion δ_K et δ_M . Soit $\mathbf{X} = (M_1, M_2, M_3, K_1, K_2, K_3)$, le vecteur de variables aléatoires, et $\boldsymbol{\delta}^{mod} = (\delta_K, \delta_M)$, le vecteur de paramètres de dispersion des incertitudes d'erreurs de modélisation. Les variables X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 ont une distribution de probabilité *a priori* uniforme dans l'intervalle $[1,69 \text{ kg}; 3,13 \text{ kg}]$ pour X_1 et X_2 ,

[1,92 kg ; 3,57 kg] pour X_3 , [2376 KN/m ; 4412 KN/m] pour X_4 et X_6 , [1677 KN/m ; 3115 KN/m] pour X_5 .

Avant d'estimer la distribution de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$ pour chaque paramètre d'entrée, les valeurs optimales des paramètres de dispersion δ_K et δ_M doivent être identifiées. Alors, nous avons dans un premier temps tenté d'estimer les valeurs optimales de δ_K et δ_M indépendamment grâce à la méthodologie présentée dans la section 4.3. Mais cette méthodologie n'a bien pas fonctionné dans ce cas, parce que les matrices $[G_M]$ et $[G_K]$ sont inséparables, et même après plusieurs itérations d'identification, les valeurs optimales de δ_K et δ_M n'ont pas été bien stabilisées. Nous avons donc décidé d'estimer la valeur optimale de δ^{mod} en utilisant la méthode présentée dans ce chapitre. La matrice de covariance $[C] = \text{Cov}(\mathbf{Y})$ a été estimée en utilisant 10000 réalisations où δ_K et δ_M ont été variés en les remplaçant par des variables aléatoires ayant une distribution uniforme dans l'intervalle $[0,01 ; 0,1]$. La fonction de densité de probabilité de $U_i(\delta^{mod}) \{i = 1, \dots, 33\}$ avec $N=33$, a été supposée suivant une loi normale. La fonction de densité de probabilité de $U_i(\delta^{mod})$ a été estimée par 10000 réalisations. Les valeurs optimales de $\delta_1^{mod,opt}$ correspondant à l'étape 1 sont $\delta_1^{mod,opt} = (0,085; 0,025)$.

Après cette première étape, les paramètres de dispersion $\delta^{mod,opt}$ et les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i), \{i = 1, \dots, 6\}$, peuvent maintenant être estimés de manière itérative. Pour construire les sorties aléatoires transformées pour séparer les paramètres $X_i, \{i = 1, \dots, 6\}$, nous avons utilisé $\lambda = 0$ et 5000 réalisations pour estimer les matrices d'indice de Sobol. Les valeurs initiales de $\alpha_i, \{i = 1, \dots, 6\}$ sont générées aléatoirement. En outre, un vecteur aléatoire de bruit a été ajouté aux réponses du modèle, ses composantes sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale avec un écart type de 0,068 et une valeur moyenne nulle. En utilisant le problème inverse présenté dans l'équation (5.5), la fonction de densité de probabilité *a posteriori* $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$ pour chaque paramètre d'entrée X_i a été indépendamment estimée. La fonction de vraisemblance $L(x_i)$ a été estimée par l'estimateur à noyau avec 10000 réalisations. 51 points équidistants de x_i ont été sélectionnés pour estimer $p_{X_i}^{\text{post}}(x_i)$.

Le tableau 5.1 représente les valeurs optimales des paramètres de dispersion calculées pour 5 itérations. A travers ce tableau, on peut remarquer que les valeurs optimales des paramètres de dispersion ont été approximativement stabilisées à partir de la seconde itération. Les fonctions $P_{X_i}^{post}$ estimées à la 5ème itération sont présentées sur la figure 5.5.

TABLEAU 5.1 – Valeurs optimales des paramètres de dispersion.

Itération t	1	2	3	4	5
$(\delta_K^{opt})_t$	0,085	0,0625	0,07	0,0625	0,0625
$(\delta_M^{opt})_t$	0,025	0,0175	0,0175	0,0175	0,025

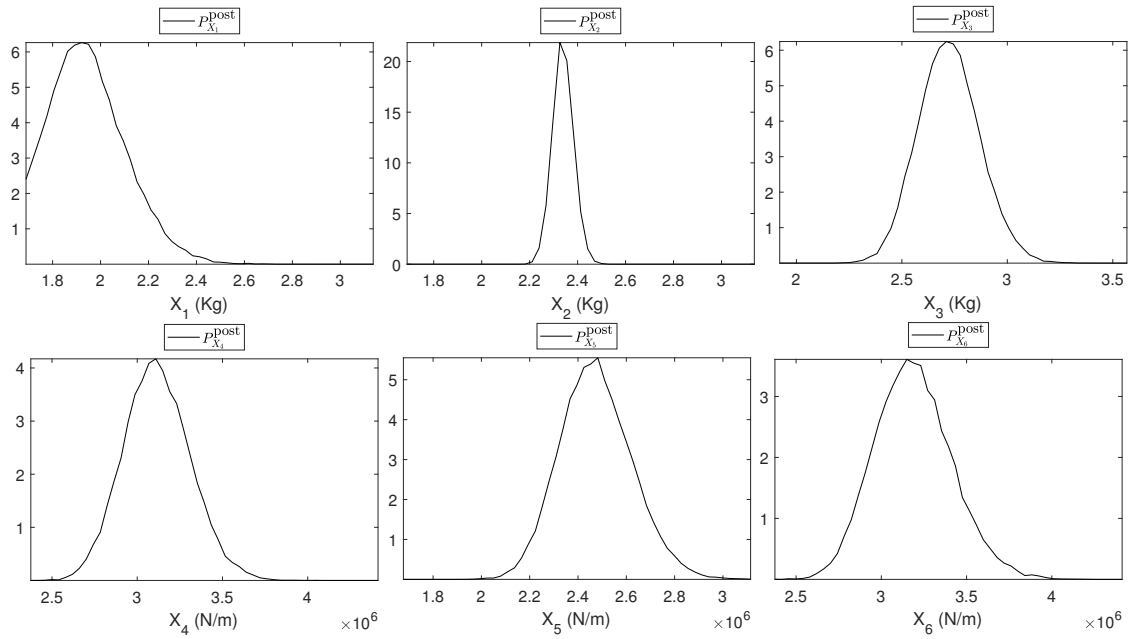


FIGURE 5.5 – Distributions de probabilité *a posteriori* des variables aléatoires X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 et X_6 .

La figure 5.6 représente les réponses aléatoires du modèle à faible fidélité calibré. Dans ces figures, nous pouvons remarquer que les réponses expérimentales ont été bien prédites par le modèle stochastique calibré. Pour ces figures, 10 000 réalisations de la réponse ont été générées. Les réalisations des paramètres d'entrée ont été générées par l'algorithme de Metropolis Hastings [43] à partir des fonctions de densité *a posteriori* estimées.

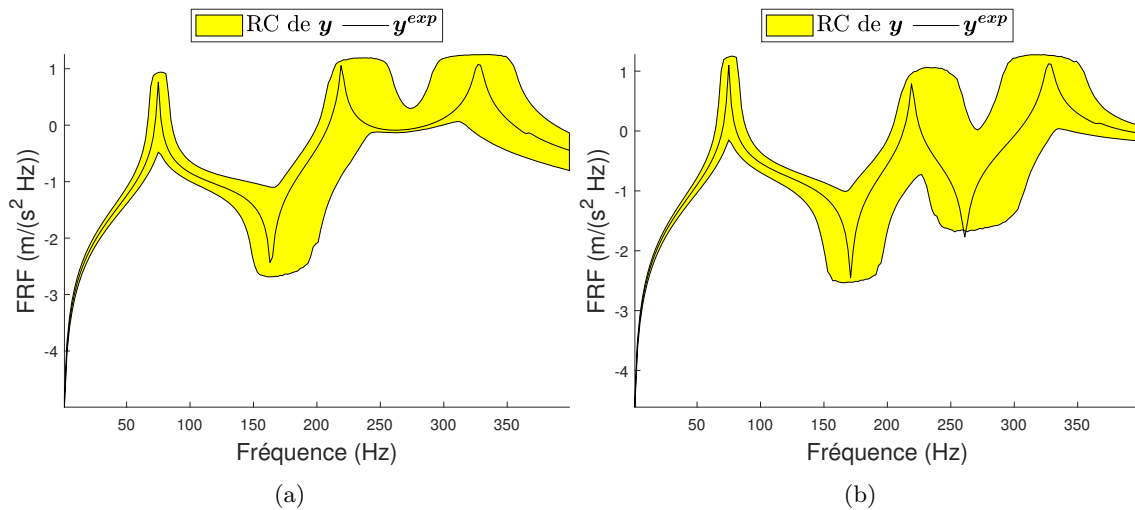


FIGURE 5.6 – Comparaison entre les réponses stochastiques du modèle à faible fidélité calibré (\mathbf{y}) avec les réponses expérimentales (\mathbf{y}^{exp}) du premier étage (a) et deuxième étage (b). La région jaune représente la région de confiance de (\mathbf{y}) avec un niveau de probabilité de 99%.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de recalage Bayésien a été présentée. Cette méthode combine la méthode bayésienne classique avec le principe de séparation des paramètres de la méthode RBS. Elle consiste à estimer indépendamment la fonction de densité de probabilité *a posteriori* de chaque paramètre d'entrée. La méthode est fondée sur la construction, pour chaque paramètre d'entrée, une nouvelle sortie aléatoire de sorte qu'elle soit uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux paramètres.

La méthode a été illustrée sur un modèle numérique d'une structure de 3 étages. Cinq itérations ont été réalisées pour estimer les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* pour les paramètres d'entrée et les paramètres de dispersion relatives aux incertitudes de modélisation. Les réponses expérimentales ont été bien prédites par le modèle stochastique recalé.

Conclusion générale

La méthode de recalage de modèles basée sur la sensibilité des paramètres d'entrée (RBS) est une nouvelle approche proposée dans le contexte du recalage des modèles déterministes. Cette méthode consiste à calibrer indépendamment les paramètres d'entrée d'un modèle déterministe afin de réduire la distance entre les réponses numériques et les réponses expérimentales. Elle permet de remplacer le problème inverse de grande dimension à résoudre par une série de problèmes inverses de petite dimension (idéalement de dimension 1), pouvant tous être facilement résolus en parcourant l'espace des paramètres à recalculer.

Dans cette thèse des améliorations et extensions ont été apportées à cette méthode dans le cadre (1) d'un recalage de modèle déterministe, (2) d'un recalage de modèle probabiliste et (3) d'un recalage Bayésien. Dans le premier chapitre de cette thèse, les avantages et les limites de la méthode RBS dans sa forme ont été mis en évidence et illustrés sur deux modèles numériques différents : le premier modèle était un système à trois masses et le deuxième était un modèle complexe de pont à base fidélité. Dans la première application, le recalage a été réalisé avec succès, tandis que dans la deuxième application, la méthode RBS n'a pas pu bien recalculer le modèle complexe de pont à base fidélité, surtout à haute fréquence. Donc le but de cette thèse était, tout d'abord, d'étendre la méthode RBS pour la rendre applicable sur des structures complexes rencontrées dans l'industrie. Quatre objectifs ont été fixés : (i) améliorer l'efficacité de la méthode RBS, (ii) traiter les cas où les paramètres d'entrée ne sont pas séparables, (iii) prendre compte les incertitudes sur les paramètres du système et celles liées aux erreurs de modélisation dans le recalage de modèles stochastiques et (iv) étendre la méthode RBS au cas d'un recalage Bayésien.

En outre, l'ajout du terme de régularisation de la méthode RBS ou l'introduction des bruits sur les réponses du modèle à recalculer ont été étudiés dans le chapitre 1. Ces deux techniques permettent aux vecteurs de coordonnées de se concentrer plus sur certaines zones des réponses numériques pour mieux recalculer le modèle. Les analyses menées au premier chapitre ont permis de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le vecteur de coordonnées dans la méthode RBS sur la qualité du recalage obtenu. A partir de ces analyses, trois extensions ont été proposées dans le cadre déterministe et ont été présentées dans le chapitre 2. La première extension est basée sur l'augmentation de la dimension de nouvelle sortie construite pour identifier chaque paramètre. Le but de cette extension est d'augmenter la quantité de données utilisée lors de la phase de recalage. Cette extension n'a pas permis d'améliorer nettement le recalage. La deuxième extension consiste à décomposer les réponses numériques du modèle à recalculer en des sous-groupes des composantes choisis aléatoirement. L'objectif de cette décomposition est de permettre aux vecteurs de coordonnées d'aller chercher toutes les composantes du vecteur de sortie et d'éviter par exemple de se concentrer sur les basses fréquences en dynamique des structures. Cette méthode a clairement permis d'améliorer la qualité du recalage. La troisième extension consiste à rendre la méthode RBS applicable aux cas où les paramètres d'entrée ne sont pas totalement séparables.

Dans le cadre probabiliste, la méthode RBS a été étendue pour prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du système et les erreurs de modélisation. Dans ce cadre, deux méthodologies ont été présentées dans les chapitres 3 et 4. La première méthodologie, présentée dans le chapitre 3, consiste à identifier séparément les valeurs optimales des hyperparamètres des paramètres aléatoires du système, sans prendre

en compte les incertitudes des erreurs de modélisation, en construisant pour chaque paramètre aléatoire, une nouvelle sortie aléatoire de faible dimension uniquement sensible à ce paramètre et insensible aux autres paramètres. Dans le chapitre 4, les incertitudes liées aux erreurs de modélisation sont prises en compte et correspondent au modèle probabiliste qui, représenté par des paramètres de dispersion, leur est associé et calibré. Si les incertitudes de modélisation sont séparables des paramètres de recalage alors celles-ci peuvent être identifiées de manière séparée. Dans le cas contraire, une méthode itérative a été proposée pour calibrer les paramètres de dispersion en même temps que les hyperparamètres des paramètres de recalage incertain. Cette méthode a été appliquée avec succès sur l'exemple d'une poutre pour laquelle la séparation des deux sources d'incertitude n'était pas possible.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette thèse, la méthode RBS a été combinée à la méthode de recalage Bayésien classique. L'ajout de l'ingrédient RBS permet d'estimer les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* des paramètres à recaler de manière séparée et donc de manière plus efficace, évitant notamment l'estimation d'une fonction de vraisemblance en grande dimension. Nous avons aussi proposé une méthode permet de calibrer de manière itérative le modèle probabiliste des incertitudes de modélisation présent lors d'un recalage Bayésien. La méthode a été appliquée avec succès à un exemple numérique représentant une structure à 3 étages.

Perspectives

Ces travaux de thèse ont permis d'étendre la méthode RBS à un cadre beaucoup plus large d'utilisation. Cependant plusieurs améliorations peuvent être envisagées.

Tout d'abord, concernant les coûts du calcul, l'estimation des indices de sensibilité est très coûteuse et nécessite des milliers de réalisations de la réponse numérique, ce qui peut constituer un frein pour l'application à des exemples industriels. Des méthodes d'estimation plus rapides des indices de sensibilité, comme la méthode FAST [13] peuvent être explorées pour réduire ces temps de calculs.

Jusqu'à présent la méthode proposée n'a été appliquée qu'au recalage des paramètres du système. Cette méthode pourrait aussi être appliquée à l'optimisation de structures. La sortie serait alors un vecteur de quantité d'intérêts et les entrées seraient les paramètres de dimensionnement. L'approche proposée permettrait de trouver les valeurs optimales des paramètres de dimensionnement de manière séparée et les extensions proposées dans cette thèse permettrait de réaliser une optimisation robuste en présence d'incertitudes dans le modèle.

Le placement de capteur est une étape importante pour la construction de données expérimentales en vue de recalage un modèle [6]. La méthode RBS pourrait être utilisée pour choisir un placement de capteur permettant de mesurer des sorties sensibles à un ou quelques paramètres de recalage uniquement.

Enfin il serait intéressant d'appliquer la méthode RBS sur une vraie structure industrielle avec des mesures expérimentales. La méthode RBS permettrait de recalage un modèle numérique de cette structure dans un cadre déterministe ou probabiliste.

Annexe A : Générateur de matrices aléatoires définies positives

Soit $[\mathbf{G}]$, une matrice aléatoire de dimension $k \times k$, définie sur l'espace de probabilité $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, avec des valeurs dans $\mathbb{M}_k^+(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives de taille $k \times k$. Soit SG^+ , l'ensemble des matrices aléatoires définies positives avec une valeur moyenne la matrice d'identité. La matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ appartenant à SG^+ est construite en utilisant la méthode du maximum d'entropie avec l'information disponible suivante :

1. $[\mathbf{G}]$ est une matrice symétrique réelle définie positive.
2. $[\mathbf{G}]$ a une valeur moyenne la matrice d'identité.
3. $|E\{\log(\det[\mathbf{G}])\}| < +\infty$ pour être une variable aléatoire de second ordre.

Les fluctuations statistiques de $[\mathbf{G}]$ sont contrôlées par le paramètre de dispersion δ_G défini par :

$$\delta = \left\{ \frac{E\{\|[\mathbf{G}] - E\{[\mathbf{G}]\}\|_F^2\}}{\|E\{[\mathbf{G}]\}\|_F^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{k} E\{\|[\mathbf{G}] - [I_k]\|_F^2\} \right\}^{1/2},$$

où δ doit être choisi tel que $0 < \delta < \sqrt{(k+1)/(k+5)}$.

La fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ de la matrice $[\mathbf{G}]$ est définie par [56] :

$$p_{[\mathbf{G}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_k^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_G \times (\det[G])^{(k+1)\frac{(1-\delta^2)}{2\delta^2}} \exp\left\{-\frac{k+1}{2\delta^2} \text{tr}[G]\right\}.$$

Où C_G est une constante positive telle que :

$$C_G = (2\pi)^{-k(k-1)/4} \left(\frac{k+1}{2\delta^2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2\delta^2}} \left\{ \prod_{j=1}^k \Gamma\left(\frac{k+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right) \right\}^{-1},$$

avec $\Gamma(z)$ est la fonction gamma, et pour $z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

La génération d'une réalisation de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}] \in SG^+$ avec une fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ (définie dans l'équation ci-dessus) est réalisée de la façon suivante [56] :

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}]^T [\mathbf{L}]$$

avec $[\mathbf{L}]$ une matrice triangulaire supérieure telle que :

1. Les variables aléatoires $\{L_{jj'}, 1 \leq j \leq j' \leq k\}$ sont indépendantes.
2. Pour $1 \leq j < j' \leq k$, la variable aléatoire à valeur réelle $L_{jj'}$ est définie par $L_{jj'} = \sigma U_{jj'}$ où $\sigma = \delta/\sqrt{k+1}$ et $U_{jj'}$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et variance 1.
3. Pour $j = j'$, $L_{jj} = \sigma\sqrt{2V_j}$ où V_j est une variable aléatoire gamma dont la fonction de densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ est définie par :

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} v^{\frac{k+1}{2\delta^2} - \frac{1+j}{2}} e^{-v},$$

où δ est le paramètre de dispersion défini dans l'équation ci-dessus.

Bibliographie

- [1] M. Aghagholizadeh and F. N. Catbas. A review of model updating methods for civil infrastructure systems. *Computational techniques for civil and structural engineering. Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire*, pages 83–99, 2015.
- [2] M. J. Atalla and D. J. Inman. On model updating using neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1) :135–161, 1998.
- [3] K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John wiley & sons, 2008.
- [4] M. Baruch. Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests. *AIAA journal*, 16(11) :1208–1210, 1978.
- [5] M. Baruch and I. Y. Bar Itzhack. Optimal weighted orttiogonalization of measured modes. *AIAA journal*, 16(4) :346–351, 1978.
- [6] A. Batou. Model updating in structural dynamics—uncertainties on the position and orientation of sensors and actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 354 :47–64, 2015.
- [7] A. Batou. A sensitivity-based one-parameter-at-a-time model updating method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 122 :247–255, 2019.
- [8] A. Batou and C. Soize. Stochastic modeling and identification of an uncertain computational dynamical model with random fields properties and model uncertainties. *Archive of Applied Mechanics*, 83(6) :831–848, 2013.
- [9] A. Batou, C. Soize, and M. Corus. Experimental identification of an uncertain computational dynamical model representing a family of structures. *Computers and Structures*, 89(13-14) :1440–1448, 2011.
- [10] J. L. Beck, L. S. Katafygiotis, et al. Updating models and their uncertainties. i : Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics-Proceedings of the ASCE*, 124(4) :455–462, 1998.
- [11] J. L. Beck and K. V. Yuen. Model selection using response measurements : Bayesian probabilistic approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(2) :192–203, 2004.
- [12] D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel, and F. Sgallari. Tikhonov regularization and the l-curve for large discrete ill-posed problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 123(1-2) :423–446, 2000.
- [13] K. Chan, A. Saltelli, and S. Tarantola. Sensitivity analysis of model output : variance-based methods make the difference. In *Proceedings of the 29th conference on Winter simulation*, pages 261–268, 1997.
- [14] S. Cogan, D. Lenoir, G. Lallement, and J. N. Bricout. An improved frequency response residual for model correction. In *PROCEEDINGS-SPIE THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING*, pages 568–568. SPIE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL, 1996.
- [15] S. Daouk, F. Louf, O. Dorival, L. Champaney, and S. Audebert. Uncertainties in structural dynamics : overview and comparative analysis of methods. *Mechanics & Industry*, 16(4) :404, 2015.
- [16] A. Der Kiureghian. *Computational methods in stochastic mechanics*. 1997.
- [17] M. Friswell and J. E. Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] M. I. Friswell, D. J. Inman, and D. F. Pilkey. Direct updating of damping and stiffness matrices. *AIAA journal*, 36(3) :491–493, 1998.

- [19] K. Godfrey. Identification of parametric models from experimental data [book review]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2321–2322, 1999.
- [20] T. Homma and A. Saltelli. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliability Engineering & System Safety*, 52(1) :1–17, 1996.
- [21] Y. Hong, Q. Pu, Y. Wang, L. Chen, H. Gou, and X. Li. Model-updating with experimental frequency response function considering general damping. *Advances in Structural Engineering*, 21(1) :82–92, 2018.
- [22] J. Humar. *Dynamics of structures*. CRC press, 2012.
- [23] J. Jacques. Pratique de l’analyse de sensibilité : comment évaluer l’impact des entrées aléatoires sur la sortie d’un modèle mathématique. *Lille : sn*, 2011.
- [24] B. Jaishi and W. X. Ren. Structural finite element model updating using ambient vibration test results. *Journal of structural engineering*, 131(4) :617–628, 2005.
- [25] M. J. Jansen. Analysis of variance designs for model output. *Computer Physics Communications*, 117(1-2) :35–43, 1999.
- [26] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [27] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer, 2010.
- [28] O. Le Maître and O. M. Knio. *Spectral methods for uncertainty quantification : with applications to computational fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [29] R. I. Levin and N. A. J. Lieven. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical systems and signal processing*, 12(1) :91–120, 1998.
- [30] J. Li and J. Chen. *Stochastic dynamics of structures*. John Wiley & Sons, 2009.
- [31] R. M. Lin and D. J. Ewins. Analytical model improvement using frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(4) :437–458, 1994.
- [32] T. Marwala. Finite-element-model updating using computational intelligence techniques : Applications to structural dynamics. 2010.
- [33] A. M. Mood, F. A. Graybill, and D. C. Boes. Special parametric families of univariate distributions. *Introduction to the theory of statistics, 3rd ed. McGraw-Hill, New York*, pages 119–120, 1974.
- [34] J. E. Mottershead and M. I. Friswell. Model updating in structural dynamics : a survey. *Journal of sound and vibration*, 167(2) :347–375, 1993.
- [35] J. E. Mottershead, M. Link, and M. I. Friswell. The sensitivity method in finite element model updating : A tutorial. *Mechanical systems and signal processing*, 25(7) :2275–2296, 2011.
- [36] R. L. Muhanna and R. L. Mullen. Uncertainty in mechanics problems—interval-based approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(6) :557–566, 2001.
- [37] H. N. Najm. Uncertainty quantification and polynomial chaos techniques in computational fluid dynamics. *Annual review of fluid mechanics*, 41 :35–52, 2009.
- [38] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration : Mechanical models, variational formulations and discretization*. Elsevier, 1997.
- [39] P. M. Pardalos and H. E. Romeijn. *Handbook of Global Optimization : Volume 2*, volume 62. Springer Science & Business Media, 2013.
- [40] S. Pradhan and S. V. Modak. Normal response function method for mass and stiffness matrix updating using complex frfs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32 :232–250, 2012.
- [41] W. Ren and H. Chen. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method. *Engineering structures*, 32(8) :2455–2465, 2010.
- [42] T.G. Ritto, C. Soize, and R. Sampaio. Probabilistic model identification of the bit-rock-interaction-model uncertainties in nonlinear dynamics of a drill-string. *Mechanics Research Communications*, 37(6) :584–589, 2010.

- [43] C. P. Robert and G. Casella. The metropolis—hastings algorithm. In *Monte Carlo statistical methods*, pages 231–283. Springer, 1999.
- [44] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 10. John Wiley & Sons, 2016.
- [45] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, and S. Tarantola. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer physics communications*, 181(2) :259–270, 2010.
- [46] M. J. Schulz and D. J. Inman. Model updating using constrained eigenstructure assignment. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1) :113–130, 1994.
- [47] R. J. Serfling. *Approximation theorems of mathematical statistics*, volume 162. John Wiley & Sons, 2009.
- [48] E. Simoen, G. De Roeck, and G. Lombaert. Dealing with uncertainty in model updating for damage assessment : A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 56 :123–149, 2015.
- [49] J. K. Sinha, M. I. Friswell, et al. Model updating : a tool for reliable modeling, design modification and diagnosis. *The Shock and Vibration Digest*, 34(1) :27–35, 2002.
- [50] I. M. Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3) :271–280, 2001.
- [51] I.M. Sobol. Global sensitivity analysis indices for the investigation of nonlinear mathematical models. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 19(11) :23–24, 2007.
- [52] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic engineering mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.
- [53] C. Soize. Generalized probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(8) :939–970, 2010.
- [54] C. Soize. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics—recent theoretical advances. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10) :2379–2395, 2013.
- [55] C. Soize. Random matrix models and nonparametric method for uncertainty quantification. *Handbook of uncertainty quantification*, 1 :219–287, 2016.
- [56] C. Soize. *Uncertainty quantification*. Springer, 2017.
- [57] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J. F. Durand, C. Fernandez, and L. Glagliardini. Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :150–163, 2008.
- [58] J. C. Spall. *Introduction to stochastic search and optimization : estimation, simulation, and control*, volume 65. John Wiley & Sons, 2005.
- [59] A. N. Tikhonov and V. Y Arsenin. Solutions of ill-posed problems. *New York*, 1 :30, 1977.
- [60] M. P. Wand and M. C. Jones. *Kernel smoothing*. CRC press, 1994.
- [61] D. C. Zimmerman and T. Simmermacher. Model correlation using multiple static load and vibration tests. *AIAA journal*, 33(11) :2182–2188, 1995.
- [62] H. J. Zimmermann. *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media, 2011.