



**HAL**  
open science

# Modélisation, analyse et apprentissage statistique du comportement dynamique de structures pour le suivi des conditions aux limites : application au phénomène d'affouillement

Mohamed Belmokhtar

► **To cite this version:**

Mohamed Belmokhtar. Modélisation, analyse et apprentissage statistique du comportement dynamique de structures pour le suivi des conditions aux limites : application au phénomène d'affouillement. Génie civil. Université Gustave Eiffel, 2022. Français. NNT : 2022UEFL2036 . tel-04048711

**HAL Id: tel-04048711**

**<https://theses.hal.science/tel-04048711>**

Submitted on 28 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Gustave Eiffel**  
Spécialité : Génie Civil

par

**Mohamed BELMOKHTAR**

Ecole Doctorale : Sciences, Ingénierie et Environnement

**Modélisation, Analyse et Apprentissage  
statistique du comportement dynamique des  
structures pour le suivi des conditions aux  
limites.**  
*Application au phénomène d'affouillement*

Thèse soutenue le 19/12/2022 devant le jury composé de :

Claude-Henri LAMARQUE	Rapporteur	Université de Lyon, ENTPE
Jean-François SEMBLAT	Rapporteur	ENSTA, Institut Polytechnique de Paris
Denis DUHAMEL	Examinateur	École des Ponts Paristech
Maryam GHANDCHI TEHRANI	Examinatrice	University of Groningen
Véronique LE CORVEC	Examinatrice	OSMOS Group SHM
Christophe CHEVALIER	Co-encadrant	Université Gustave Eiffel
Alireza TURE SAVADKOOHI	Co-encadrant	Université de Lyon, ENTPE
Franziska SCHMIDT	Directrice de thèse	Université Gustave Eiffel



---

## Résumé

Le vieillissement des ouvrages d'art est un phénomène inévitable. Néanmoins leur endommagement au cours du temps dépend de paramètres qu'il faut surveiller de manière fiable pour avoir une connaissance réelle de leur état structurel. De plus, dans un contexte de changement climatique et d'augmentation de la fréquence d'apparition d'évènements extrêmes, les ouvrages peuvent subir des vieillissements accélérés. La maîtrise des paramètres structurels des ouvrages d'art en temps réel devient donc indispensable car elle permet d'introduire de manière rationnelle un suivi de l'état de santé des ouvrages qui jusque-là était pris en compte de manière empirique.

Cette thèse se concentre sur le suivi des conditions aux limites des structures, dont une évolution peut être liée à des actions extérieures. Comme cas d'étude, notre attention s'est portée sur le phénomène d'affouillement. Celui-ci est l'une des principales causes d'effondrement de ponts, par le changement des conditions d'appui de ces ouvrages. Les méthodes classiques de suivi de l'affouillement font appel à des suivis hydrauliques et géophysiques (radar, sonar...). C'est en ce sens que les travaux portés par la thèse sont assez novateurs, et posent la question suivante : comment détecter un changement des conditions aux limites, provoqué par l'affouillement, via des mesures de vibrations ?

Une combinaison des modèles de sols issus du domaine de l'interaction sol-structure (ISS) et de l'analyse modale nous a permis d'établir des relations liant les caractéristiques fréquentielles de la structure et le phénomène d'affouillement. Une fois ces modèles établis, viennent la validation expérimentale et le développement d'une méthode entièrement automatisée de détection d'affouillement. Pour cela, des essais en laboratoire et une instrumentation in situ ont été mis en place : les résultats observés montrent l'intérêt du suivi vibratoire pour le suivi de l'affouillement.

**Mots-clés :** Modélisation, problèmes inverses, affouillement, dynamique des structures, traitement du signal, apprentissage statistique.

---

## Abstract

The aging of engineering structures is an inevitable phenomenon. Nevertheless, their damage over time depends on parameters that must be reliably monitored to have a real knowledge of their structural health. Moreover, in a context of climate change and increased frequency of extreme events, structures can suffer accelerated aging. The control of the structural parameters of the bridges in real time becomes therefore essential because it allows us to introduce in a rational way a follow-up of the state of health of bridges which until now was taken into account in an empirical way.

This thesis focuses on the monitoring of the boundary conditions of structures, whose evolution can be linked to external actions. As a case study, our attention was focused on the scour phenomenon : it is one of the main causes of bridge collapse, due to the change in the foundations conditions. The classical methods of scour monitoring are based on hydraulic and geophysical monitoring (radar, sonar...). In this sense, the work carried out by the thesis is quite innovative, and suggest the following question : how to detect a change of the boundary conditions, caused by scouring, via vibration measurements ?

A combination of soil-structure interaction (SSI) models and modal analysis allowed us to establish relationships linking the frequency characteristics of the structure and the scour phenomenon. Once these models were established, experimental validation and development of a fully automated scour detection method will be carried out. For this purpose, laboratory tests and in situ instrumentation were set up : the observed results show the interest of the vibratory monitoring for the follow-up of the scour.

**Keywords :** Modelling, inverse problem, scour, structural dynamic, signal processing, machine learning.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art relatif au sujet de thèse</b>	<b>5</b>
1.1 Affouillement et méthodes de suivi . . . . .	6
1.1.1 Phénomène d'affouillement . . . . .	6
1.1.2 Méthodes existantes pour le suivi de l'affouillement . . . . .	12
1.2 Suivi vibratoire des structures . . . . .	15
1.2.1 Méthode d'analyse pour le suivi vibratoire . . . . .	15
1.2.2 Modélisation pour les vibrations des piles de pont . . . . .	17
1.3 Méthodes d'apprentissage statistique pour l'aide au suivi vibratoire. . . . .	21
1.3.1 Application de méthodes non supervisées . . . . .	22
1.3.2 Algorithmes de classification ou data clustering . . . . .	22
1.3.3 Partitionnement de données issues de la littérature . . . . .	25
<b>2 Contribution aux modèles vibratoires des piles de pont</b>	<b>35</b>
2.1 Hypothèses de modélisation . . . . .	37
2.1.1 Modélisation du sol . . . . .	37
2.1.2 Modélisation des conditions au point d'ancrage . . . . .	39
2.1.3 Modélisation des comportements vibratoires de la structure . . . . .	39
2.2 Approche par éléments de types poutre . . . . .	41
2.2.1 Formulation du problème et condition aux limites . . . . .	41
2.2.2 Modèles de flexion des poutres affouillées pour des sols de Winkler et Pasternak : Fondations profondes . . . . .	42
2.2.3 Évolution des conditions aux limites . . . . .	48
2.3 Approche par des éléments indéformables . . . . .	52
2.3.1 Formulation du problème . . . . .	52
2.3.2 Sensibilité des paramètres à l'affouillement . . . . .	54
2.3.3 Identification des modes rigides pour le suivi de l'affouillement	57
<b>3 Méthodes d'analyse vibratoire pour le suivi inverse de l'affouillement</b>	<b>61</b>
3.1 Analyse modale par l'expérience et affouillements . . . . .	63
3.1.1 Introduction de la base modale et fonction de transfert associée	64
3.1.2 Effet de l'affouillement sur l'amortissement . . . . .	70
3.2 Analyse modale opérationnelle et affouillements . . . . .	75
3.2.1 Identifications modale avec manque d'observabilité : Décom- position dans le domaine fréquentiel . . . . .	75
3.2.2 Analyse en composante principale et méthode EVD-MAC . . . . .	82

<b>4 Applications au suivi vibratoire de structures affouillées</b>	<b>87</b>
4.1 Modèle de poutre encastrée équivalente . . . . .	89
4.1.1 Protocole expérimental . . . . .	90
4.1.2 Calage du modèle pour le premier mode de poutre encastrée équivalente . . . . .	91
4.2 Identification des modes rigides par analyse modale . . . . .	92
4.2.1 Description des essais . . . . .	92
4.2.2 Identification des paramètres pour le suivi . . . . .	94
4.2.3 Discussion sur l'influence du sol . . . . .	97
4.3 Identification opérationnelle in situ . . . . .	101
4.3.1 Présentation de l'ouvrage et de la chaîne d'acquisition . . . . .	102
4.3.2 Déploiement d'une analyse modale opérationnelle . . . . .	105
4.3.3 Discussion : Détection d'affouillement avec anomalies sur classes lors d'évènements extrêmes . . . . .	111
<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
<b>A Dynamique des poutres en flexion</b>	<b>123</b>
A.1 Dynamique des structures : Vibration des poutres continues . . . . .	123
A.1.1 Formulation Variationnelle : Principe d'Hamilton . . . . .	124
A.1.2 Variation de l'énergie cinétique : . . . . .	124
A.1.3 Variation de l'énergie de déformation : . . . . .	124
A.1.4 Variation de l'énergie potentiel des forces extérieures : . . . . .	124
A.1.5 Décomposition dans une base de modes propres orthogonaux deux à deux . . . . .	125
A.2 Discretisation des modèles pour l'analyse modale . . . . .	126
A.2.1 Hypothèse d'un nombre fini de modes : Méthode de Rayleigh-Ritz : . . . . .	127
<b>B Compléments sur les modes en flexion des piles de pont</b>	<b>129</b>
B.1 Calcul des coefficients des sols de Pasternak . . . . .	129
B.2 Calcul de $C(\mu)$ . . . . .	131
B.2.1 Premier cas, $\mu < 1$ . . . . .	131
B.2.2 Deuxième cas, $\mu = 1$ . . . . .	131
B.2.3 Troisième cas, $\mu > 1$ . . . . .	131
B.3 Modèle de poutre encastrée équivalente . . . . .	132
B.3.1 Fréquences propres d'une poutre encastrée-libre équivalente .	132
B.3.2 Approche asymptotique du modèle de poutre encastrée équi- valente. . . . .	133
<b>C Traitement des signaux</b>	<b>135</b>
C.1 Notions de métrologie pour l'utilisation des accéléromètres . . . . .	135
C.1.1 Conditionnement et conversion analogique/numérique du si- gnal . . . . .	136
C.1.2 Filtrage numérique . . . . .	137
C.2 Outils pour le traitement des signaux vibratoires . . . . .	139
C.2.1 Produit de convolution des signaux . . . . .	139

C.2.2	Fonction de corrélation pour des signaux . . . . .	140
C.2.3	Analyse fréquentielle des signaux . . . . .	141
C.2.4	Analyse fréquentielle des fonctions de corrélation . . . . .	144
C.3	Signaux aléatoires . . . . .	145
C.3.1	Définitions d'un signal aléatoire (ou processus stochastique) . . . . .	145
<b>D</b>	<b>Compléments sur les investigations expérimentales</b>	<b>149</b>
D.1	Fiches techniques des instruments de mesures pour l'expérience sur des corps rigides . . . . .	150
D.1.1	Accéléromètres : G Link 200 8G Lord Microstrain) . . . . .	150
D.1.2	Fibre optique . . . . .	152
D.2	Compléments sur les expériences des corps rigides . . . . .	155
D.2.1	Pile 1, choc selon $x$ . . . . .	155
D.2.2	Pile 2, choc selon $y$ . . . . .	156
D.2.3	Pile 3, choc selon $x$ . . . . .	157
D.3	Compléments sur l'ouvrage instrumenté . . . . .	158
D.3.1	Information sur les systèmes d'acquisitions . . . . .	158
D.3.2	Données récoltées . . . . .	160
D.3.3	Traitement des signaux . . . . .	161
D.3.4	Sensibilité des classes du quatrième espace aux phénomènes environnementaux . . . . .	164
	<b>Références</b>	<b>169</b>



# Table des figures

1	Problème direct vs problème inverse . . . . .	1
2	Cas d'application pour le suivi des conditions aux limites des ouvrages : les affouillements. . . . .	2
1.1	Affouillement autour d'une pile de pont. . . . .	6
1.2	Modes de transport des sédiments [Arneson et al., 2012]. . . . .	6
1.3	Affouillement total des ouvrages [Melville & Chiew, 1999] . . . . .	8
1.4	Photo de l'effondrement du pont Wilson à Tours le 9 Avril 1978 (Source : la Nouvelle République). . . . .	8
1.5	Affouillement par contraction et localisation des zones à risque [Queensland, 2013]). . . . .	9
1.6	Illustration du phénomène d'affouillement local et conséquences du passé . . . . .	9
1.7	Exemple de courbe de tarage (Source : Encyclopédie de l'environnement). . . . .	11
1.8	Comparaison du développement de l'affouillement pour des conditions avec charriage (live-bed) et sans charriage (clear-water) [Arneson et al., 2012]. . . . .	11
1.9	Facteur de forme selon la géométrie de la pile [Chabert et al., 1956, Breusers et al., 1977, Fael et al., 2016]. . . . .	12
1.10	Dispositif de suivi de références pour l'affouillement [Wang et al., 2017]- (a) colliers magnétiques coulissants-(b) flotteurs-(c) "smart rocks" . . . . .	13
1.11	Dispositif de suivi de l'interface fluide-structure pour l'affouillement [Wang et al., 2017]- (a) Sonar-(b)Fibre optique-(c)TDR . . . . .	13
1.12	Principe du suivi vibratoire des structures. . . . .	16
1.13	Réponses temporelles et déformées modales d'un modèle réduit de pile de pont [Boujia et al., 2021]. . . . .	17
1.14	Vibration d'un système poutre : modèle continu vs modèle discret à N degrés de liberté. . . . .	18
1.15	Variation de la première fréquence expérimentale et numérique vis-à-vis de l'affouillement [Prendergast et al., 2013] : en laboratoire et in situ . . . . .	20
1.16	Évolution des trois premières fréquences de la pile avec le temps [Bao et al., 2017] . . . . .	21

1.17	Sensibilité de la première fréquence propre pour différents types d'affouillement [Kariyawasam et al., 2020] : comparaison avec modèles réduits en centrifugeuse. . . . .	21
1.18	Principe de classification de $n_d = 13$ échantillon pour $C = 4$ classes avec $d_k$ l'inertie intra-classe. . . . .	23
1.19	Principe de CAH et représentation en dendogramme de la hiérarchie entre classes pour $n_d = 13$ échantillons. . . . .	24
1.20	Principe de la classification par densité ou DBSCAN. . . . .	25
1.21	Corrélation entre les paramètres décrits dans le Tableau 1.5 et la première fréquence propre identifiée. . . . .	27
1.22	Matrice des corrélations avec tracé de la répartition des points dans la partie triangulaire inférieure de la matrice. . . . .	28
1.23	Projection de chaque paramètre selon les 2 premières composantes principales. . . . .	29
1.24	Représentation des données dans le plan factoriel. . . . .	29
1.25	Silhouettes pour la méthode de K-means avec données de la littérature. . . . .	30
1.26	Classification en 2 catégories des données de la littérature [Prendergast et al., 2013, Bao et al., 2017, Boujia et al., 2019, Boujia et al., 2021]. . . . .	31
1.27	Nombre de voisins selon le rayon considéré pour les données issues de la littérature. . . . .	32
1.28	Classification avec la méthode Dbscan. . . . .	32
2.1	Schéma de modélisation. . . . .	36
2.2	Réaction du sol pour les modèles de Winkler. . . . .	37
2.3	Réaction du sol pour les modèles de Pasternak. . . . .	38
2.4	cas de conditions aux limites : Rotation + translation en $x = D$ . . . . .	39
2.5	Influence des paramètres du modèles sur la première fréquence propre. . . . .	46
2.6	Sensibilité de la fréquence propre par rapport à $\frac{a}{L}$ pour différentes valeurs de $\mu \approx \frac{g}{2\sqrt{kEI}}$ et comparaison avec poutre encastree-libre. . . . .	47
2.7	Distance asymptotique de la longueur équivalente $L_{eq}$ . . . . .	48
2.8	Conjecture de poutre encastree-libre équivalente. . . . .	49
2.9	Déformées modales normalisée du mode 1 pour $\mu = 0,5$ et pour différentes valeurs de $a$ (niveau de $a$ par un trait orange et $1/\phi_1$ par un trait jaune). . . . .	49
2.10	Sensibilité de la première fréquence propre pour différentes condition aux limites. . . . .	51
2.11	Schéma de modélisation d'un comportement rigide d'une pile de pont affouillée. Longueur $L$ et d'apaisseur $2B$ ou $2R$ . . . . .	54
2.12	Propriétés géométriques pour le problème des vibrations rigides. . . . .	55
2.13	Fréquences des modes rigides de piles circulaires pour différents élancements $L/R$ . . . . .	56
2.14	Transformation du problème à un problème à deux noeuds pour l'analyse modale. . . . .	57

2.15	$(\omega_1(D/L), \omega_2(D/L))$ and $(\{\phi_1(D/L)\}, \{\phi_2(D/L)\})$ pour une pile circulaire d'un ratio $R = L/8$ . . . . .	59
2.16	Nouvelle base modale pour les modes rigides $(f_r, x_{cr})$ et sensibilité à l'affouillement. . . . .	60
3.1	Schéma par bloc pour un SLI : fonction de transfert liant les entrées et les sorties dans le domaine de Laplace (variable $p$ ). . . . .	62
3.2	Réponse des sorties $\{w(t)\}$ avec une impulsion aux différents degrés de liberté (noeud) avec un affouillement $D/L = 0, 2$ . . . . .	68
3.3	Module de $[H(f)]_{ij}$ pour $D/L = 0, 2$ . . . . .	68
3.4	Module des transformées de Fourier des sorties $W_1(f), W_2(f)$ . . . . .	69
3.5	Réponse des sorties $\{w(t)\}$ avec une impulsion aux noeud 1 avec un affouillement $D/L = 0, .$ : Prise en compte d'un amortissement faible et d'un amortissement fort. . . . .	72
3.6	Fréquences propres identifiées pour un rapport $D/L = 0.2$ et différents amortissements : Identification des pôles de la fonction de transfert. . . . .	73
3.7	Participation modale totale (équation (3.40)) de chaque mode obtenu après identification des pôles de la fonction de transfert. . . . .	74
3.8	$\{f(t)\}$ suivant des processus de bruit blanc gaussien centré réduit $\{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ . . . . .	79
3.9	Comparaison des densités spectrales de puissance du bruit blanc via la transformée de Fourier des estimateurs d'autocorrélation pour des bruits blancs gaussiens $\{f(t_i)\} \sim \{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ . . . . .	80
3.10	Influence d'un fenêtrage temporel pour la réduction de bruit. . . . .	81
3.11	Influence d'un fenêtrage temporel pour la réduction du bruit dans la décomposition en domaine fréquentiel. . . . .	82
4.1	Poutre affouillée d'une longueur libre $a$ et poutre encastree-libre équivalente de longueur $L_{eq}(a)$ . . . . .	89
4.2	Dispositif expérimental dans [Boujia et al., 2020]. . . . .	90
4.3	Variation à l'affouillement de la première fréquence propre de poutre en flexion : Mode du chapitre 2.2 vs expériences de [Boujia et al., 2020]. . . . .	91
4.4	Descriptif de l'essai d'impact du système de pile réduite affouillée. . . . .	93
4.5	Réponse des sorties $\{w(t)\}$ avec un creusement de $D = 0,15 m$ . . . . .	94
4.6	Décomposition en valeurs singulières dans le domaine fréquentiel de la pile 2 selon $x$ avec $D = 0,15 m$ . . . . .	94
4.7	Comparaison de l'identification des modes expérimentaux avec le modèle à 2 DDL. . . . .	96
4.8	Dispositif d'instrumentation de fibre optique dans le sol et réponse à l'instant $t = 0 s$ (moment de l'impact, pour $D = 5 cm$ ). . . . .	98
4.9	Réponse temporelle pour chaque fibre à $x = 54 cm$ . . . . .	99
4.10	Module de la FFT des réponses temporelles pour chaque fibre à $x = 54 cm$ . . . . .	99
4.11	Analyse modale par éléments finis de la pile 2 pour $D = 0,1 m$ dans des configurations expérimentales (prise en compte du sol). . . . .	100

4.12	Comparaison des différentes approches : Analyse modale pile 2DDL, FRF par élément finis. . . . .	100
4.13	Procédé de traitement et d'analyse du signal développé lors du chapitre 3.2. . . . .	101
4.14	Présentation de l'ouvrage instrumenté. . . . .	102
4.15	Comparaison des surfaces bathymétriques entre 2016 et 2018 (cré-dit : journée de restitution du projet SSHEAR). . . . .	103
4.16	Plan d'instrumentation de l'ouvrage. . . . .	104
4.17	Exemple de réponses réduites et normalisées lors d'une acquisition le 01/03/2020 à 17h16. . . . .	105
4.18	Sorties lors du confinement français (20/03/2020). . . . .	106
4.19	Exemple de PSD lors d'une acquisition le 20/03/2020 à 17h16. . . . .	107
4.20	PSD des sorties via la transformée de Fourier des autocorrélation : Moyennage quotidien du 20/03/2020. . . . .	107
4.21	Comparaison entre SVD et EVD-MAC (20/03/2020). . . . .	108
4.22	Spectrogramme et cartographie du quatrième espace obtenu par EVD MAC. . . . .	109
4.23	Classification du quatrième espace obtenu par EVD MAC issu sur l'ensemble des données d'acquisition. . . . .	110
4.24	Corrélations entre individus de la base de données. . . . .	111
4.25	Impact de la température sur une classe. . . . .	112
4.26	Principe de détection de variation d'affouillement suite à un événement extrême . . . . .	113
4.27	Exemple de couplage pile-tablier et méthode EVD-MAC. . . . .	120
4.28	Radeau embarqué au voisinage de la pile P4 de l'ouvrage de l'A71 pour des mesures de bathymétries et de vitesses de courant. . . . .	121
A.1	Vibration d'une poutre d'Euler Bernoulli . . . . .	123
A.2	Vibration d'un système à N degrés de liberté . . . . .	126
B.1	Schéma de principe pour le modèle de Vlasov en statique . . . . .	129
B.2	Solution de (B.11)) et ses développements de Taylor-Young aux ordres 1,2,3 and 4 (équation (B.13)). . . . .	132
B.3	Poutre affouillée d'une longueur libre $a$ et poutre encastree équivalente de longueur $L_{eq}(a)$ . . . . .	133
C.1	Schéma de la chaîne d'acquisition d'une mesure . . . . .	135
C.2	Exemple d'un schéma électrique d'un amplificateur de charge . . . . .	136
C.3	Schéma de fonctionnement d'une chaîne de mesure pour l'acquisition de données vibratoires . . . . .	138
C.4	(a) Réponse temporelle (b) TFD périodisée (c) TFD recentrée en 0 . . . . .	143
D.1	Armoire électrique pour le monitoring (Data logger en haut à gauche, système d'acquisition en haut à droite, onduleur, transformateurs ...) . . . . .	158
D.2	Radar Valeport VRS20 . . . . .	159
D.3	rotronic Hygroclip pour les mesures de températures . . . . .	159
D.4	Pilotage du système d'acquisition . . . . .	160

D.5 Données quotidiennes sur toute l'acquisition . . . . .	160
D.9 Impact de la température sur une classe . . . . .	164



# Liste des tableaux

1.1	Comparaison des différentes méthodes de suivi de l'affouillement proposées dans la littérature. . . . .	14
1.2	Modes de flexion des poutres d'Euler Bernoulli pour des conditions aux limites "classiques", $\beta_r = \left(\frac{\rho A \omega_r^2}{EI}\right)^{1/4}$ . . . . .	19
1.3	Type d'apprentissage statistique . . . . .	22
1.4	Études relatives à la sensibilité de la première fréquence propre vis-à-vis de l'affouillement dans la littérature . . . . .	26
1.5	Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles de piles soumises aux affouillements . . . . .	26
1.6	Représentativité des sous-espaces (ou composantes principales) . . . . .	28
2.1	Modes rigides associés aux flexions des poutres d'Euler Bernoulli pour des conditions aux limites "classiques" . . . . .	52
3.1	Participation modale des modes aux degrés de liberté : système non amorti . . . . .	67
3.2	Comparaison pour un cas d'étude des fréquences propres non amorties avec celles amorties pour $\alpha_k = 0.001$ et $\alpha_k = 0.01$ . . . . .	72
3.3	Comparaison entre analyse mode expérimentale et analyse modale opérationnelle . . . . .	85
4.1	Données expérimentales de [Boujia et al., 2020] . . . . .	90
4.2	Comparaison entre $\epsilon_{model}$ et $\epsilon_{exp}$ . . . . .	91
4.3	Schémas des piles. La hauteur de sable est représentée pour une profondeur nulle ; les points noirs représentent les accéléromètres. . . . .	92
4.4	Déformées modales, avec la norme $\{\phi\}\{\phi\}^H = 1$ puis régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes. . . . .	95
4.5	Paramètres identifiés pour les piles 1 2 et 3 . . . . .	97
4.6	Statistiques descriptives sur les classes retenues (plus de 200 jours) . . . . .	110
4.7	Base de données de l'ouvrage instrumenté . . . . .	111
4.8	Anomalies détectées pour différents seuils $\epsilon_w$ . . . . .	114
4.9	Comparaison entre l'analyse modale opérationnelle usuelle et l'analyse modale non supervisée de la partie 4.3. . . . .	118
D.1	Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes . . . . .	155

D.2	Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes . . . . .	156
D.3	Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes . . . . .	157

# Nomenclature

## Notations générales

- $\bullet', \bullet''$  : Dérivée première et seconde selon un axe spatial.
- $\bullet^{(i)}$  : Dérivée  $i$ -eme selon un axe spatial.
- $\bullet\dot{\bullet}, \bullet\ddot{\bullet}$  : Dérivée première et seconde selon le temps
- $\bullet * \bullet$  : Produit de convolution, terme à terme pour les vecteurs.
- $\bullet^*$  : Complexe conjugué.
- $\{\bullet\}$  : Vecteur colonne ( $n \times 1$  si cela n'est pas précisé).
- $[\bullet]$  : Matrice ( $n \times n$  si cela n'est pas précisé),  $[I]$  est la matrice identité et  $[0]$  la matrice nulle.
- $[\bullet]^H$  : Matrice transconjuguée ( $([\bullet]^*)^T$ ).
- $[\text{Diag}(\bullet_i)]$  : Matrice diagonale avec  $\bullet_i$  comme termes diagonaux.
- $\det([\bullet])$  : Déterminant d'une matrice.

## Paramètres mécaniques

- $L$  : Longueur totale d'une structure, (m).
- $D$  : Longueur d'une structure en interaction avec le sol, (m).
- $a$  : Longueur libre d'une structure,  $a = L - D$ , (m).
- $E$  : Module d'Young, (Pa).
- $I$  : Moment quadratique, ( $m^4$ ).
- $A$  : Section transversale d'une poutre, ( $m^2$ ).
- $\rho$  : Masse volumique, ( $kg.m^{-3}$ ).
- $k$  : Module de réaction longitudinale du sol, (Pa).
- $c$  : Module d'amortissement visqueux, ( $N.s.m^{-1}$ ).
- $K_h, K_r$  : Ressort horizontal et ressort de torsion d'une structure appuyant sur un sol élastique, ( $N.m^{-1}$ ).
- $\mathcal{L}$  : Opérateur Lagrangien.

- $w(t)$  : Déplacement horizontal d'une structure, (m).  
 $f(t)$  : Force extérieure appliquée à une structure, (N).  
 $[M]$  : Matrice de masse.  
 $[C]$  : Matrice d'amortissement.  
 $[K]$  : Matrice de raideur.  
 $H_w$  : Niveau d'eau,  $m$ .

### Analyse Modale

- $\omega_r$  : Pulsation propre du mode  $r$ , (Hz).  
 $\omega_{0r}$  : Pulsation propre du mode  $r$  non amorti, (Hz).  
 $\beta_r$  : Pulsation spatiale du mode  $r$ , ( $m^{-1}$ ).  
 $\lambda_r$  : Pôle  $r$  de la fonction de transfert, (Hz).  
 $\zeta_r$  : Amortissement réduit du mode  $r$ , %.  
 $[\phi]$  : Matrice des déformées modales.  
 $\{T\}_r$  : Participation modale du mode  $r$ .

### Traitement du signal

- $\mathcal{L}_p[\bullet](p)$  : Transformée de Laplace de  $\bullet$ , s'écrivant aussi par la lettre majuscule de la variable à transformer.  
 $\text{TF}[\bullet](\omega)$  : Transformée de Fourier de  $\bullet$ , on pourra considérer les fréquences avec  $\omega = 2\pi f$   
 $F_s$  : Fréquence d'échantillonnage,  $T_s = 1/F_s$   
 $N$  : Taille d'un échantillon numérique, longueur d'un signal  
 $\Delta T$  : Durée de mesure,  $\Delta T = N \times T_s$   
 $[H(p)]$  : Matrice fonction de transfert d'un système linéaire invariant.  
 $\{h(t)\}$  : Fonction de réponse impulsionnelle.  
 $\mathbb{E}[\bullet]$  : Espérance mathématiques, terme à terme pour un vecteur.  
 $r_{xy}(\tau)$  : Corrélacion temporelle entre  $x(t)$  et  $y(t - \tau)$ . Si  $x(t) = y(t)$  on appellera cela l'auto-corrélacion.  
 $r_{XY}(j\omega)$  : Transformée de Lapalce de la corrélacion des signaux. Si  $x(t) = y(t)$ , on appellera cela densité spectrale de puissance.  
 $\{f(t)\}$  : Vecteur des entrées observées.  
 $\{w(t)\}$  : Vecteur des sorties observées.

**Liste des abréviations**

- ACP : Analyse en composantes principales.
- DDL : Degrés de liberté.
- EVD : Eigen value decomposition (décomposition en valeurs propres).
- FFT : Fast Fourier transform (transformée de Fourier rapide).
- FRF : Frequency response function (fonction de réponse en fréquence).
- ISS : Interaction Sol Structure.
- MAC : Modal assurance criterion (critère d'assurance modale).
- OMA : Operational Modal Analysis (analyse modale opérationnelle).
- PSD : Power spectral density (densité spectrale de puissance).
- SHM : Structural Health Monitoring (suivi de santé des structures).
- SLI : Système linéaire invariant.

"L'esprit cherche et c'est le coeur qui  
trouve."

---

George Sand

# Introduction

Lors de l'écriture d'un modèle dynamique pour un système occupant un volume fini, il est coutume d'en extraire des équations telles que les variables cinématiques en sont solution. Comme le système occupe un espace fini, il est souvent soumis à certaines interactions avec l'extérieur. Ces interactions sont localisées au niveau des bords ou frontières du système. Et c'est en partie grâce aux conditions à ses bords qu'une solution est déterminée. C'est ce que l'on nomme plus communément les conditions aux limites. Tout comme les lois de comportement, celles-ci sont des paramètres des modèles. Ainsi un changement des conditions aux limites modifierait la nature du modèle où plutôt devrions nous dire qu'il affecterait les agissements d'un système dynamique. Car en effet, d'un point de vue expérimental ce sont les agissements d'un système que nous observons.

Les conditions aux limites, quant à elles, sont parfois inapparentes. En toute logique, pour un modélisateur, leur identification s'exerce par le biais d'un procédé inverse.

L'identification des paramètres des modèles telles que les conditions aux limites appartient aux problèmes dits inverses. L'objectif des problèmes inverses est d'identifier les causes d'un effet constaté. Pour constater, il faut que le problème soit bien posé et robuste par rapport aux outils de mesures qui permettent les observations. Dans cette thèse, avec une approche vibratoire, l'objectif est le suivi des conditions aux limites par le biais de signaux temporels.

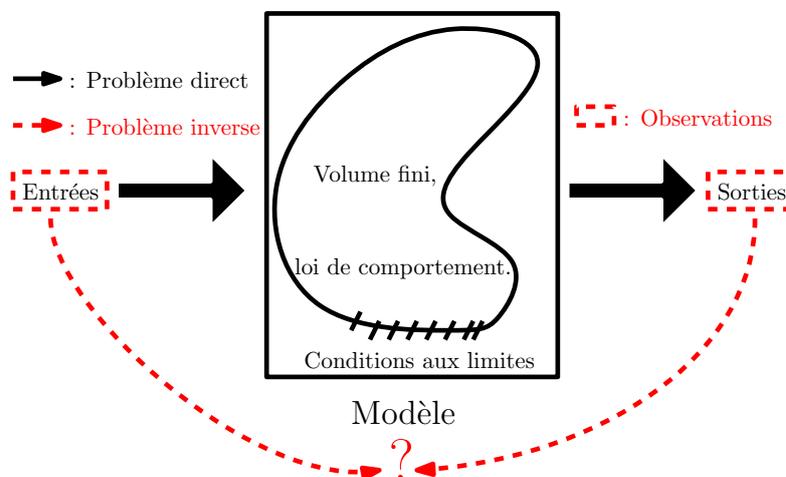


FIGURE 1 – Problème direct vs problème inverse

---

Dans un élan porté par le ministère de la transition écologique, cette thèse s’inscrit dans le domaine du génie civil et particulièrement dans l’amélioration de la sécurité, de l’efficacité et de la résilience des ouvrages d’art face aux enjeux de la transition écologique, climatique et numérique. En conséquence, le suivi des conditions aux limites contribue à un suivi plus global qui est celui de la santé des ouvrages dans leur environnement.

Ces dernières années, les réflexions au sein de l’Université Gustave Eiffel entre les laboratoires MAST/EMGCU<sup>1</sup> et GERS/SRO<sup>2</sup> ont suscité l’intérêt du suivi des conditions aux limites face à un problème concret : les affouillements. L’affouillement est l’abaissement du fond d’un cours d’eau sous l’effet de l’écoulement hydraulique. Pour les gestionnaires d’infrastructures ce phénomène est souvent localisé au niveau des fondations et il est réellement perçu comme une défaillance structurelle. Ainsi, les travaux de cette thèse aspirent à la contribution de la mise en œuvre d’une stratégie de détection et de caractérisation de l’état de santé des structures face au problème d’affouillement.

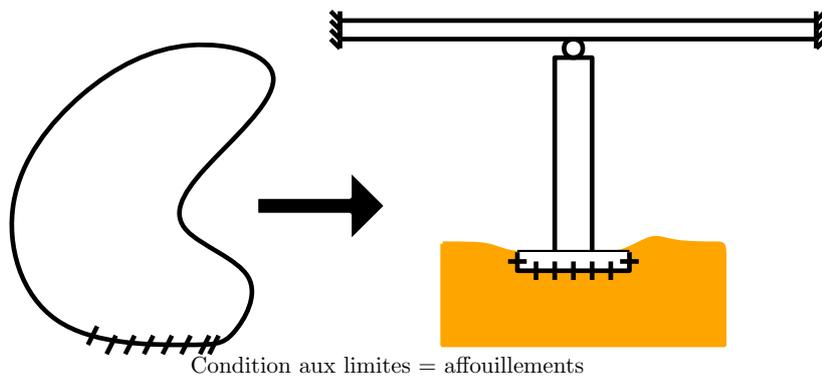


FIGURE 2 – Cas d’application pour le suivi des conditions aux limites des ouvrages : les affouillements.

Pour rapprocher l’affouillement d’un problème de changements de conditions aux limites, il faut tout d’abord décider du modèle vibratoire à envisager. Pour cela, de récents travaux issus de la littérature serviront de base d’étude. Néanmoins les enjeux de suivi réel ne sont encore que des pistes. Une attention particulière aux méthodes de suivi et d’analyse pour traduire les observations aux modèles nous a donc semblé importante lors des travaux de cette thèse. En effet, pour s’assurer du problème bien posé, l’identification des paramètres des modèles à partir de mesures se doit d’être robuste et fiable. Le problème est réel donc le suivi se doit d’être applicable à des conditions d’ouvrages réels. Il faut bien admettre que, contrairement aux essais en laboratoire, in situ, les hypothèses des modèles sont incertaines voir déficientes. C’est alors que pour avoir un regard critique, une vision aléatoire est plus appropriée. De ce fait, dans ce manuscrit, pour combler les lacunes dues aux modèles et aux observations nous porterons notre réflexion sur l’alternative proposée par les outils de l’apprentissage statistique.

---

1. Expérimentation et modélisation pour le génie civil et urbain

2. Sols, Roches et Ouvrages

---

Ainsi, dans un contexte sociétal, la question de recherche qui a motivé mes travaux de thèse est la suivante :

Comment suivre l'affouillement à partir de données vibratoires ?

En ce sens, des réflexions et démarches scientifiques autour de cette question sont proposées dans ce manuscrit de thèse. Dans un premier temps, un état de l'art autour du phénomène d'affouillement, des méthodes de suivi vibratoire et d'apprentissage statistique non supervisé seront présentées dans le Chapitre 1. Ensuite, par des contributions aux modèles dynamiques de piles de pont, nous montrerons la sensibilité à l'affouillement des paramètres des modèles lors du Chapitre 2. Avec ces sensibilités, le Chapitre 3 proposera les outils et méthodes d'analyse pour le problème inverse. Enfin, dans le Chapitre 4, des applications en laboratoire et in-situ permettront de valider les méthodes d'analyse des modèles de pile de pont affouillée. Alors, certaines observations expérimentales ouvriront la voie à des discussions. Elles permettront d'offrir des ouvertures scientifiques lors de la conclusion de la thèse.



# Chapitre 1

## État de l'art

---

1.1	Affouillement et méthodes de suivi . . . . .	6
1.1.1	Phénomène d'affouillement . . . . .	6
1.1.2	Méthodes existantes pour le suivi de l'affouillement . . . . .	12
1.2	Suivi vibratoire des structures . . . . .	15
1.2.1	Méthode d'analyse pour le suivi vibratoire . . . . .	15
1.2.2	Modélisation pour les vibrations des piles de pont . . . . .	17
1.3	Méthodes d'apprentissage statistique pour l'aide au suivi vibratoire. . . . .	21
1.3.1	Application de méthodes non supervisées . . . . .	22
1.3.2	Algorithmes de classification ou data clustering . . . . .	22
1.3.3	Partitionnement de données issues de la littérature . . . . .	25

---

## 1.1 Contexte : Affouillement et méthodes de suivi

Une récente étude sur le parc des ouvrages aux États-Unis a montré que les cas d'effondrement étaient liés à des phénomènes hydrauliques dans près de la moitié des cas [Wardhana & Hadipriono, 2003]. Parmi ces risques, on recense l'affouillement. L'affouillement est l'abaissement accru du fond d'un cours d'eau au voisinage des ouvrages [Melville & Chiew, 1999] (Figure 1.1). Pour les gestionnaires d'infrastructures ce phénomène est réellement perçu comme une défaillance structurelle [Lagasse et al., 1995].



FIGURE 1.1 – Affouillement autour d'une pile de pont.

### 1.1.1 Phénomène d'affouillement

L'affouillement est un phénomène de transport de sédiments qui composent les fonds du lit et des berges des rivières (Figure 1.2). Il est important de constater que l'affouillement est une catégorie sous-jacente du processus d'érosion dès lors que des constructions humaines telles que berges, digues ou ouvrages d'art se trouvent à proximité : c'est un terme du génie civil.

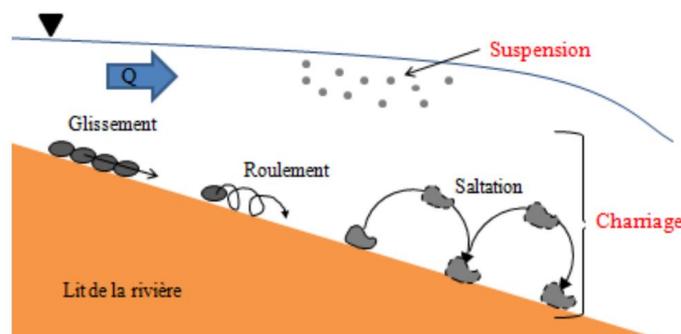


FIGURE 1.2 – Modes de transport des sédiments [Arneson et al., 2012].

C'est pourquoi il convient d'introduire en premier lieu ce phénomène d'érosion. En effet, celui-ci résulte des actions à l'interface sol-fluide. Comme la Figure 1.2 l'indique, différents transports de sédiments sont observables. Ces différents modes de transports ont permis d'établir des régimes d'affouillement liés à une

vitesse critique de mise en mouvement des grains  $V_c$  définie empiriquement par [Chabert et al., 1956] comme :

$$V_c = 6.19 \times h_0^{1/6} \times d_{50}^{1/3}. \quad (1.1)$$

avec  $h_0$  la hauteur d'eau et  $d_{50}$  le diamètre moyen des grains (passant à 50%). Ainsi, selon la vitesse moyenne d'approche hydraulique  $V$ , deux régimes d'affouillement sont possibles :

- Affouillement sans charriage,  $V < V_c$  favorisé par une granulométrie grossière ou un fond plat.
- Affouillement avec charriage,  $V > V_c$  favorisé par une granulométrie fine ou un fond avec relief.

Ensuite, l'affouillement se traduit en un creusement au droit des appuis en site aquatique des structures. Ce phénomène fait intervenir trois disciplines du génie civil : la mécanique des sols, la mécanique des fluides et la mécanique des structures. Si on considère  $D$ , la profondeur de sol affouillé, la littérature sur le sujet fait ressortir différentes catégories d'affouillement et différents paramètres influençant son mécanisme.

$$D = D \left( \begin{array}{l} \text{sol :} \quad (d_{50}, \sigma_g, \rho_s) \\ \text{fluide :} \quad (\rho_{eau}, V, V_c, h_0, g) \\ \text{structure :} \quad (b, L, \theta) \end{array} \right), \quad (1.2)$$

où des paramètres de sol sont introduits :  $\sigma_g$  est la dispersion des grains et  $\rho_s$  la masse volumique du sol ( $kg.m^{-3}$ ). Avec les paramètres hydrauliques,  $\rho_{eau}$  la masse volumique de l'eau ( $kg.m^{-3}$ ),  $h_0$  la hauteur d'eau ( $m$ ) et  $g$  la constante de gravité ( $kg.m.s^{-2}$ ). Et les paramètres de la structure  $b$ ,  $L$  et  $\theta$  sont respectivement le diamètre de la pile, la longueur de la pile et  $\theta$  l'angle de la forme de la pile (angle d'attaque).

De par son risque structurel et afin de déterminer des indicateurs de suivi d'affouillement, l'étude de ces paramètres est en pleine expansion [Richardson et al., 2001, Briaud et al., 1999, Lin et al., 2014, Fael et al., 2016]. Plusieurs auteurs [Froehlich, 1988, Melville & Chiew, 1999, Sheppard & Miller, 2006, Arneson et al., 2012] ont établi des formules empiriques en laboratoire relatives aux divers paramètres influençant l'affouillement (relation (1.2)). Néanmoins, la complexité des ouvrages ne permet pas de déterminer de manière succincte l'état d'affouillement à partir de formules empiriques. Plusieurs auteurs [Johnson, 1995, Landers & Mueller, 1996, Sheppard & Miller, 2006] ont mis en évidence le biais des formules empiriques une fois appliquées à différents cas d'études. D'une part, cela provient de la singularité de chaque structure (terrain, géométrie et environnement). Mais d'autre part, les configurations des plans des ouvrages associés aux régimes hydrauliques environnants favorisent ou non différents types d'affouillement.

### Typologies des affouillements.

Trois types d'affouillements sont à dissocier : l'affouillement général, l'affouillement de contraction et l'affouillement local [Melville & Chiew, 1999]. De par leur nature et l'échelle d'application, ceux-ci peuvent être indépendants les uns des

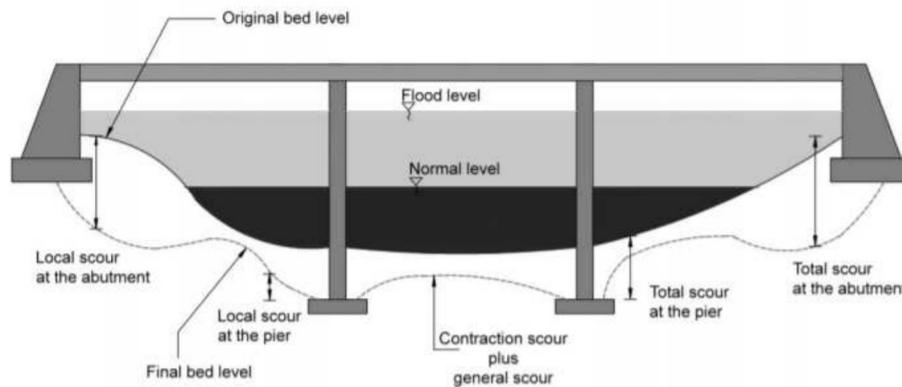


FIGURE 1.3 – Affouillement total des ouvrages [Melville & Chiew, 1999]

autres mais on parle d'affouillement total lorsque les trois types d'affouillement sont provoqués (Figure 1.3). Dans les faits les types d'affouillement se succèdent chronologiquement : du global résultant de forces hydrauliques importantes jusqu'au local résultant de zones de turbulences en présence d'obstacles.

- **Affouillement général** : Cette catégorie d'affouillement ne dépend pas de la présence de la structure. C'est tout simplement un risque naturel. Néanmoins, il se manifeste souvent lors de grandes crues et se trouve tout de même amplifié par les activités anthropiques. Par exemple, c'est l'une des causes de l'effondrement du pont Wilson à Tours en 1978 (Figure 1.4).



FIGURE 1.4 – Photo de l'effondrement du pont Wilson à Tours le 9 Avril 1978 (Source : la Nouvelle République).

- **Affouillement de contraction** : Cette catégorie, quant à elle, est provoquée par le rétrécissement d'un cours d'eau. En effet, par conservation du débit, la vitesse d'écoulement augmente et implique par conséquent une action hydraulique plus importante à l'interface sol-fluide. Cela pourra donc potentiellement provoquer un dépassement de seuil de la vitesse critique  $V_c$  (Figure 1.5) et donc une érosion plus importante.
- **Affouillement local** : C'est le type d'affouillement qui dépend le plus de la

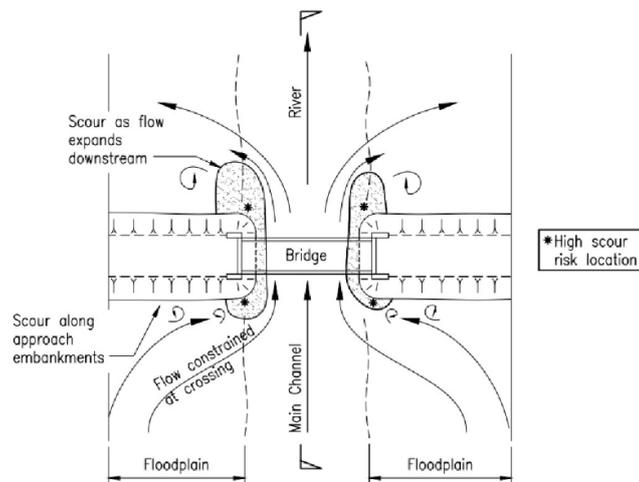
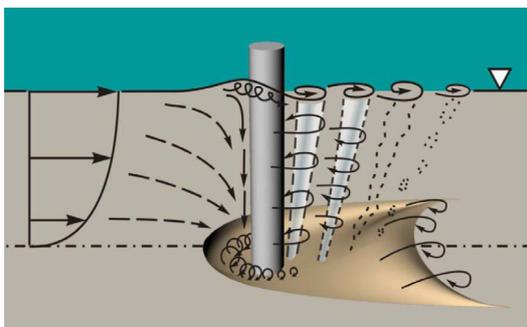


FIGURE 1.5 – Affouillement par contraction et localisation des zones à risque [Queensland, 2013]).

présence d'une structure. En effet, la présence d'obstacles peut entraîner des turbulences. Ces turbulences sont le fruit de fortes sollicitations hydrauliques qui viendront perturber le régime d'érosion. Cette étape d'affouillement est la plus visible car elle se traduit en un creusement au niveau de cet obstacle (Figure 1.6a). Ce type d'affouillements est intrinsèquement lié aux propriétés géométriques et mécaniques de la structure mais aussi à la nature des sols. Par exemple, c'est l'une des principales causes de l'effondrement du pont de la rivière Saint-Etienne sur l'île de la Réunion en 2007 (Figure 1.4).



(a) Affouillement local au droit d'une pile cylindrique [Arneson et al., 2012]



(b) Photo de l'effondrement du pont de la rivière Saint-Etienne le 25 Février 2007.

FIGURE 1.6 – Illustration du phénomène d'affouillement local et conséquences du passé

Tenant compte de la définition des types d'affouillement, nous devons souligner plus en détails les paramètres influençant l'affouillement énoncés dans l'équation (1.2). En effet, en plus des paramètres ayant un rôle dans le processus d'érosion, la présence de la structure dans son environnement fait intervenir de nouvelles variables.

### Paramètres influents.

■ Paramètres liés au sol : De par le caractère érosif de l'affouillement, le changement de l'état du sol est la conséquence directe de ce processus. C'est pourquoi il est important de souligner la nature du sol comme paramètre le plus important. En effet, la nature cohésive du sol entre en premier lieu dans les paramètres influençant le processus d'affouillement. Pour les sols non cohésifs (sables, graviers, etc.), l'érosion est plus "facile" et dépend essentiellement des forces gravitationnelles. En d'autres termes, c'est le diamètre moyen des grains et leur masse volumique qui est à prendre en compte [Ariathurai & Arulanandan, 1978]. Pour les sols cohésifs tels que les sols argileux, le phénomène devient plus complexe. D'un point de vue macroscopique, de par leur caractère cohésif et peu perméable, nous pouvons douter de leur capacité à s'éroder. Mais en réalité, c'est la nature chimique du sol qui est le paramètre à prendre en compte : d'un point de vue microscopique, les interactions de Van der Waals lient les particules très fines constituant ces sols. Ces interactions rendent les sols peu impactés par les affouillements dans les faits [Briaud et al., 1999, Ansari et al., 2002].

■ Paramètres liés au fluide : Dans un second temps, les paramètres d'interaction fluide-structure sont à prendre en compte et on fait l'objet de nombreuses études pour les sols non-cohésifs [Chabert et al., 1956, Raudkivi & Ettema, 1983, Melville & Chiew, 1999, Sheppard & Miller, 2006]. Même si la profondeur d'affouillement à son état d'équilibre dépend faiblement du régime d'affouillement, sa cinétique dépend du charriage qui a un effet catalyseur dans le processus de l'affouillement (Figure 1.8).

Outre les paramètres de granulométrie, la hauteur d'eau entre en jeu dans le processus d'affouillement. En effet, dans l'équation (1.1) on peut constater la sensibilité à cette hauteur d'eau  $h_0$ . [Arneson et al., 2012] a confirmé cette cinétique en remarquant les limites au modèle établie par (1.1). D'une part, on constate qu'à partir d'une certaine hauteur d'eau,  $h_0 = 2b$  avec  $b$  la largeur de la pile, la profondeur n'influence plus sur l'affouillement. Puis pour des hauteurs d'eau faibles, la cinétique d'affouillement s'accélère. Cela provient du fait que la profondeur d'affouillement à l'équilibre  $y_s$  est plus faible pour les hauteurs d'eau peu profondes (Figure 1.8) et par conséquent, la fosse d'affouillement se développe avec un charriage difficilement observable.

■ Paramètres liés à la structure : Pour les cas d'affouillement local, une attention particulière est à porter aux paramètres structurels en interaction avec le sol. Il convient de remarquer que les dimensions et les formes des piles et des fondations sont des paramètres influençant la profondeur de l'affouillement local  $d_s$ . En effet, selon la géométrie, des facteurs de formes ont été déterminés en ayant pour référence le cas circulaire [Breusers et al., 1977, Fael et al., 2016]. Sur la Figure 1.9, on observe que ce facteur de forme diminue quand la surface qui tient lieu d'obstacle à l'écoulement est "plate". En fait, l'affouillement est de plus en plus profond lorsque l'angle d'attaque  $\theta$  de la pile diminue. Pour une pile de longueur  $L$ , de largeur  $b$ , si  $\theta > 5$  et  $2 < \frac{L}{b} < 16$ , [Richardson et al., 2001] a défini un facteur de correction dû à

l'angle d'attaque  $K_\theta$  :

$$K_\theta = (\cos(\theta) + \frac{L}{b} \sin(\theta))^{0.62}$$

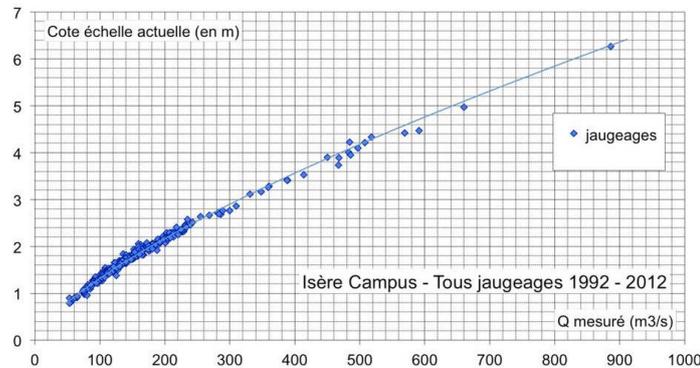


FIGURE 1.7 – Exemple de courbe de tarage (Source : Encyclopédie de l'environnement).

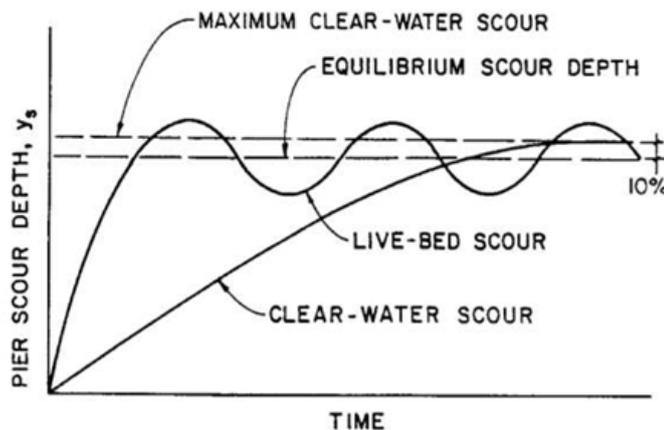


FIGURE 1.8 – Comparaison du développement de l'affouillement pour des conditions avec charriage (live-bed) et sans charriage (clear-water) [Arneson et al., 2012].

Néanmoins, pour le suivi du phénomène d'affouillement, ces paramètres deviennent difficiles d'accès, et même impossibles à déterminer dans certains cas. L'accès aux fondations demanderait des essais destructifs pouvant être dangereux. Même en supposant une connaissance totale des divers phénomènes physiques, l'application de ces modèles empiriques atteindrait ses limites. Cela est le cas lorsqu'il s'agit de déployer un suivi sur un parc d'ouvrages conséquent. Les gestionnaires d'ouvrages considèrent l'affouillement comme un risque. L'analyse des dangers et l'identification de différents types de danger ont mené les recherches dans le domaine du génie civil à proposer des guides pour les ingénieurs [Lagasse et al., 1995, Takayanagi et al., 2019, Giordano et al., 2023, Giordano et al., 2022]. Ces guides reposent sur l'évaluation des risques face à l'affouillement considéré comme un aléa. Alors pour juger de la criticité des risques, on

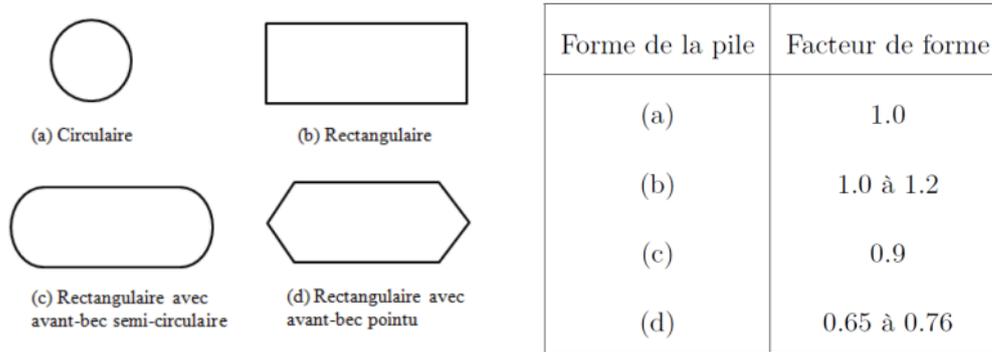


FIGURE 1.9 – Facteur de forme selon la géométrie de la pile [Chabert et al., 1956, Breusers et al., 1977, Fael et al., 2016].

combine en général la vulnérabilité de l'ouvrage face aux aléas. On peut citer les travaux du FWA aux États-Unis [Lagasse et al., 1995], mais aussi des travaux d'analyse des risques en France (CEREMA), au Japon (RTRI), en Italie et au Royaume-Uni [Takayanagi et al., 2019, Giordano et al., 2023, Giordano et al., 2022]. Dans la plupart des méthodes d'analyses des risques, les paramètres influant sont pris en compte en y ajoutant des critères qualitatifs pour simplifier la méthode d'évaluation. Malgré cet aspect pratique, l'évaluation est qualitative voir semi-qualitative et laisse place à la subjectivité de l'opérateur. Derrière ces remarques, on observe une émergence de méthodes dites opérationnelles. Le caractère opérationnel provient de leur robustesse ainsi que de leur simplicité d'exécution. Il s'agit de surveiller des quantités, les analyser et en tirer un diagnostic.

### 1.1.2 Méthodes existantes pour le suivi de l'affouillement

Bien qu'il n'existe pas de "capteur d'affouillement" à proprement parler, plusieurs méthodes de suivi existent. Bien entendu, les études sur la sensibilité de certains paramètres offrent une multitude de types de suivi utilisant divers instruments de mesures [Wang et al., 2017].

- **Suivi d'une référence dans le sol :** Ce type d'instrumentation est une application directe du suivi de l'érosion autour d'un obstacle. Comme il est assez compliqué de suivre l'évolution à l'échelle du grain, ces méthodes suivent l'évolution du niveau du sol grâce à des références enfouies. La première idée de suivi de référence fut celle introduite par [Yankielun & Zabilansky, 1999, Briaud et al., 2011]. L'idée est la suivante : un anneau magnétique coulissant enfoui sur un support encastré au sol qui coulisse lorsque son attraction magnétique est supérieure à sa capacité d'encastrement dans le sol. Dans cet élan de suivi de références, des systèmes de flotteurs enterrés et des "smarts rocks" ont été proposés par [Chen et al., 2015]. Dans ce cas précis, ces dispositifs se libèrent dès que le niveau de sol le leur permet. La Figure 1.10 en montre les principes.
- **Suivi de l'interface sol-fluide :** Ce type de suivi utilise le domaine de la physique des ondes pour suivre en continu la variation de l'interface sol-fluide.

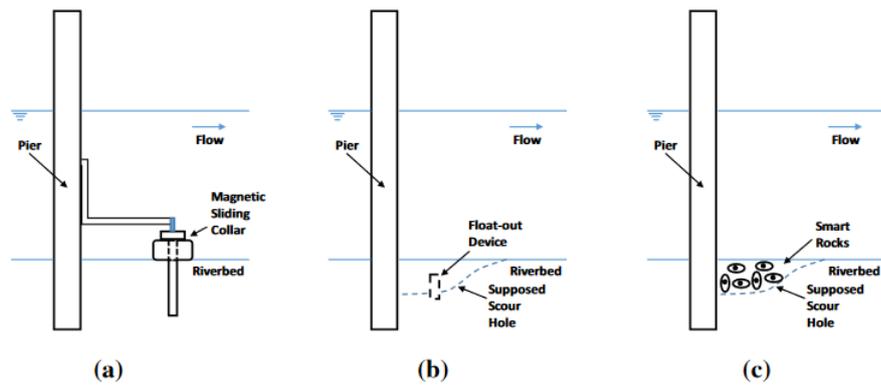


FIGURE 1.10 – Dispositif de suivi de références pour l'affouillement [Wang et al., 2017]- (a) colliers magnétiques coulissants-(b) flotteurs-(c) "smart rocks"

Tout d'abord, nous pouvons citer les instrumentations reposant sur l'émission d'une onde réfléchiée. Différentes natures d'ondes ont été proposées dans la littérature : onde électromagnétique (réflectométrie [Yu et al., 2013]) et ondes sonores (sonar [De Falco & Mele, 2002, Briaud et al., 2011]). De plus, avec l'émergence de la fibre optique, [Lin et al., 2005] se sont intéressés à la déformation de celle-ci au niveau de l'interface fluide-structure.

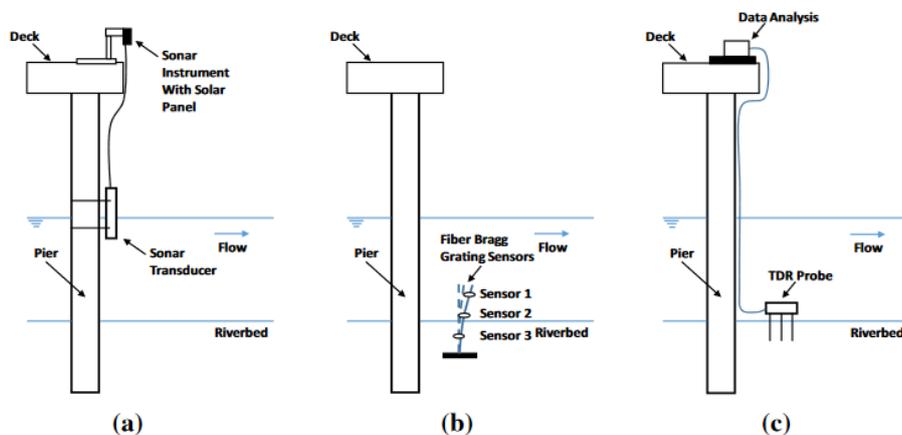


FIGURE 1.11 – Dispositif de suivi de l'interface fluide-structure pour l'affouillement [Wang et al., 2017]- (a) Sonar-(b)Fibre optique-(c)TDR

- Structural Health Monitoring (SHM)** : Ce domaine très connu pour le suivi d'endommagement a suscité l'intérêt de certains chercheurs ces dernières années. L'analyse des caractéristiques modales (fréquences propres [Watanabe et al., 2020, Shinoda et al., 2008, Zarafshan et al., 2012, Boujia et al., 2019, Prendergast et al., 2016, Prendergast et al., 2013], et déformées modales [Foti & Sabia, 2011]) permet de suivre l'affouillement. Ces méthodes présentent l'intérêt d'avoir une information plus globale sur l'état de santé de la structure.

## 1.1. AFFOUILLEMENT ET MÉTHODES DE SUIVI

---

Dans le Tableau 1.1 nous présentons les intérêts et inconvénients de chacune des méthodes. Ce Tableau souligne notamment l'intérêt à suivre l'affouillement vis-à-vis de la réponse vibratoire de notre structure : c'est ce que motivera nos travaux de recherche.

<b>Instruments</b>	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<i>Suivi d'une référence</i>		
Collier magnétique, Flotteurs, "Smart rock"	Simple à l'installation et à l'utilisation, autonome et peu coûteux	Région limitée, vannes leurs seuils à dépasser
<i>Suivi de l'interface sol-fluide</i>		
Sonar, Fibre optique, Reflectometrie	Simple à l'installation, suivi en temps réel et précis.	Très sensibles à l'environnement, usure et dégradation.
<i>Surveillance inversée</i>		
Accéléromètres	Simple à l'installation, précis et information sur l'état de santé de la structure	Pas encore opérationnel et sensible aux facteurs environnementaux

TABLE 1.1 – Comparaison des différentes méthodes de suivi de l'affouillement proposées dans la littérature.

## 1.2 Vibration des structures, analyse modale et traitement des signaux

Le Structural Health Monitoring (SHM ou surveillance des structures en français) est un processus d'implémentation et de mise en œuvre d'une stratégie de détection et de caractérisation de l'état de santé des structures du génie civil. Via une analyse des changements apportés aux propriétés physiques et / ou géométriques d'un système tels que les changements de conditions aux limites, les performances d'un ouvrage peuvent être affectées. Le SHM est un domaine assez large comprenant différentes grandeurs mesurées telles que les déformations, la température, les vibrations, etc. Pour notre cas d'étude où l'affouillement peut être considéré comme un changement de conditions aux limites assez "éloignées" de la structure (par "éloignées", nous entendons un phénomène extérieur difficilement localisable d'un point de vue structurel). Ainsi, les vibrations sont celles qui se prêtent le mieux au suivi du phénomène, car elles sont relativement sensibles aux conditions aux limites. En effet, bien que l'affouillement soit localisé au niveaux des fondations, le suivi des vibrations semble être la meilleure solution de suivi du phénomène 1.1.

### 1.2.1 Méthode d'analyse pour le suivi vibratoire

Le développement du suivi vibratoire a été une conséquence du progrès scientifique dans certains domaines de l'ingénierie tel que le génie électronique, informatique et industriel. Le suivi vibratoire des structures a pris son essor à la fin du 20<sup>ème</sup> siècle dans un contexte d'automatisation des processus de contrôle des systèmes mécaniques. Le développement d'algorithmes du traitement des signaux de plus en plus efficaces et celui de capteurs de plus en plus précis ont été perçus comme une évolution dans l'analyse modale par l'expérience [Heylen et al., 1997]. Plusieurs recherches en laboratoire avec de véritables chaînes d'acquisition ont vu le jour [Shih et al., 1989, Fritzen, 1986, Doebling et al., 1996]. Ensuite, vinrent de nouvelles problématiques au début du 21<sup>ème</sup> siècle : les systèmes mécaniques ont vieilli, et il est important d'en suivre les divers défauts. Le suivi de santé des systèmes (SHM) a fait l'objet de travaux de recherches dans le domaine du génie civil [Seo et al., 2016, Carden & Fanning, 2004]. L'idée principale est de suivre des paramètres en complément des vibrations pour en tirer une analyse poussant à un diagnostic sur l'état de santé de l'ouvrage. En ce qui nous intéresse, pour rendre le suivi opérationnel, dans le domaine du génie civil, de nouvelles problématiques de filtrage et d'analyse ont été utilisées [C.Cremona, 2009].

- Analyse Modale : Elle repose sur la décomposition des signaux dans une base de modes propres associés à des fréquences propres. La transformation la plus utilisée pour cette approche est la transformée de Fourier rapide (FFT). Celle-ci permet une décomposition dans le domaine fréquentiel en identifiant les modes [Brincker & Ventura, 2015, Brincker et al., 2001]. Les problématiques du SHM mènent parfois à l'appellation d'analyse modale opérationnelle où les entrées sont inconnues et la fonction de réponse en fréquence (FRF) est inaccessible [Heylen et al., 1997, Fritzen, 1986, C.Cremona, 2009]. Dans la continuité de l'analyse en fréquence, des méthodes de transforma-

tion dans le plan temps-fréquence ont été développées : transformée de Fourier à fenêtre (STFT) et transformée en ondelettes (WT). Elles permettent d'analyser les paramètres modaux dans le temps en y ajoutant des critères de fréquences instantanées et de variation dans le temps et/ou de l'amplitude pour les réponses libres [Lamarque et al., 2000, Hans et al., 2000]. Ceci permet alors de filtrer certaines non linéarités non stationnaires [Rankine et al., 2007, Delprat et al., 1992].

- Séries temporelles : Dans l'hypothèse des signaux stationnaires, une vision stochastique des signaux temporels a été introduite. On y suppose alors une notion d'aléatoire et notamment pour les composantes d'entrées relativement bruitées. La méthode du domaine temporel d'Ibrahim est la plus célèbre, avec notamment des identifications en sous-espaces stochastiques. A l'inverse de l'analyse modale, le signal est filtré dans le domaine temporel. On y trouve aussi les méthodes paramétriques telles que les méthodes autorégressives (AR) [Gul & Necati Catbas, 2009, Nair et al., 2006, Sohn & Farrar, 2001] mais aussi à moyenne mobile (ARMA) [Datteo et al., 2018] et avec entrée eXogène (ARMAX). Des méthodes non paramétriques telles que les transformées d'Hilbert sont aussi très utilisées avec des notions de fonction de mode intrinsèque [Yang et al., 2004, Xu & Chen, 2004].

Ainsi, l'appropriation de la méthode d'analyse vibratoire se bâtit avec la modélisation choisie pour représenter l'état de santé de la structure. Rytter [Rytter, 1993] a proposé quatre niveaux pour le SHM : -1/ l'existence du défaut, -2/ La localisation du défaut, -3/ la quantification du défaut, -4/ La prédiction de la durée de vie résiduelle de l'ouvrage. Ces niveaux croissent selon la précision des modèles et des instrumentations. En ce sens, les modèles de la dynamique associés aux méthodes d'analyse permettent le diagnostic vibratoire de l'ouvrage.

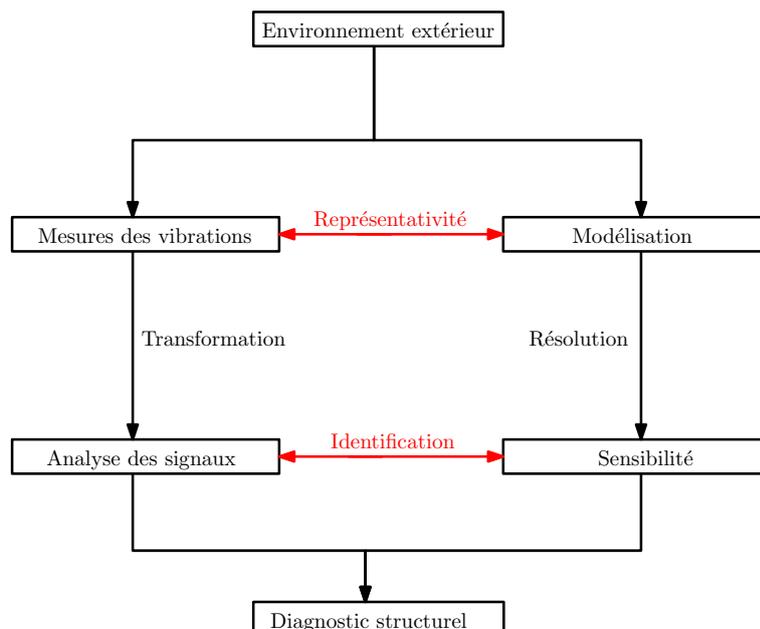


FIGURE 1.12 – Principe du suivi vibratoire des structures.

### 1.2.2 Modélisation pour les vibrations des piles de pont

Pour pouvoir suivre les vibrations d'une structure, il est nécessaire de poser les bases de la modélisation et d'analyses.

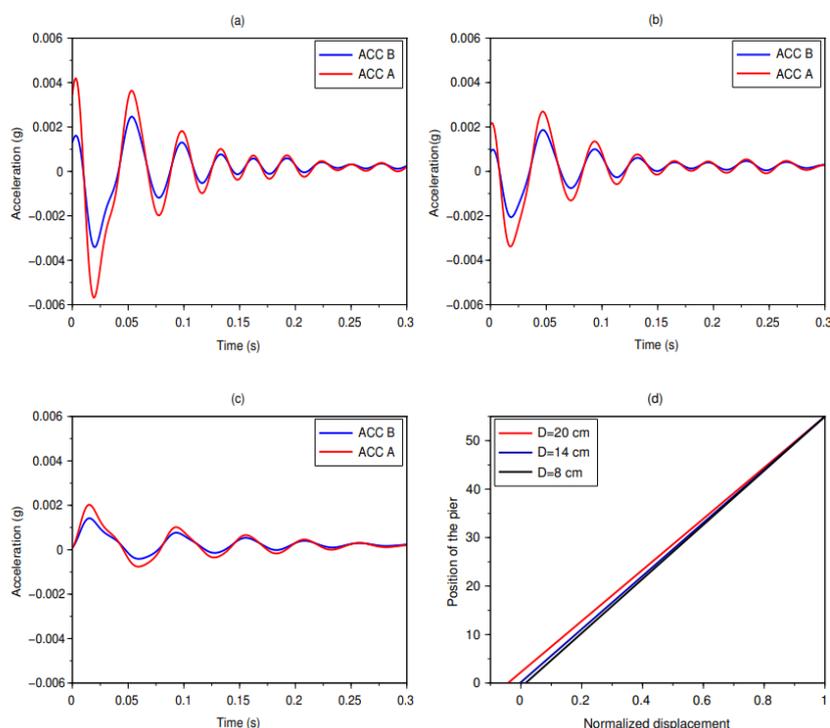


FIGURE 1.13 – Réponses temporelles et déformées modales d'un modèle réduit de pile de pont [Boujia et al., 2021].

#### Paramètres modaux pour le suivi vibratoire.

Le suivi vibratoire pour les structures affouillées est un domaine assez récent. Les études issues de la littérature se sont essentiellement focalisées sur l'analyse modale des piles sujettes aux affouillements [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019, Boujia et al., 2021, Zarafshan et al., 2012]. Pour le suivi basé sur l'analyse modale, la détection de changement des paramètres modaux est opérée selon divers outils. Pour les changements de fréquences propres, on les identifie essentiellement par des méthodes de "peak picking" (PP) et de régressions non linéaires (LSCF, LSCE) sur les graphes de densité spectrale de puissance (PSD) [Heylen et al., 1997, Peeters & De roeck, 1999]. La sensibilité des fréquences est fortement liée à l'environnement et l'observation d'un changement s'effectue difficilement lorsque le dommage est localisé [Güemes et al., 2020]. Pour augmenter de niveau sur l'échelle d'identification de Rytter [Rytter, 1993], des études ont montré la sensibilité des déformées modales que ce soit directement avec le critère d'assurance (MAC) [Heylen et al., 1997, Koh et al., 2005] ou bien avec la courbure modale qui est la dérivée seconde de la déformée modale. Cette dernière est liée à la

souplesse de l'ouvrage [C.Cremona, 2009, Pandey et al., 1991]. Néanmoins, les déformées modales nécessitent une instrumentation plus conséquente et une étude au préalable sur les positionnements des capteurs. Ces études font référence à la dynamique des structures qui s'énonce tout d'abord pour des structures continues puis pour des structures discrètes qui sont essentielles aux outils numériques et expérimentaux.

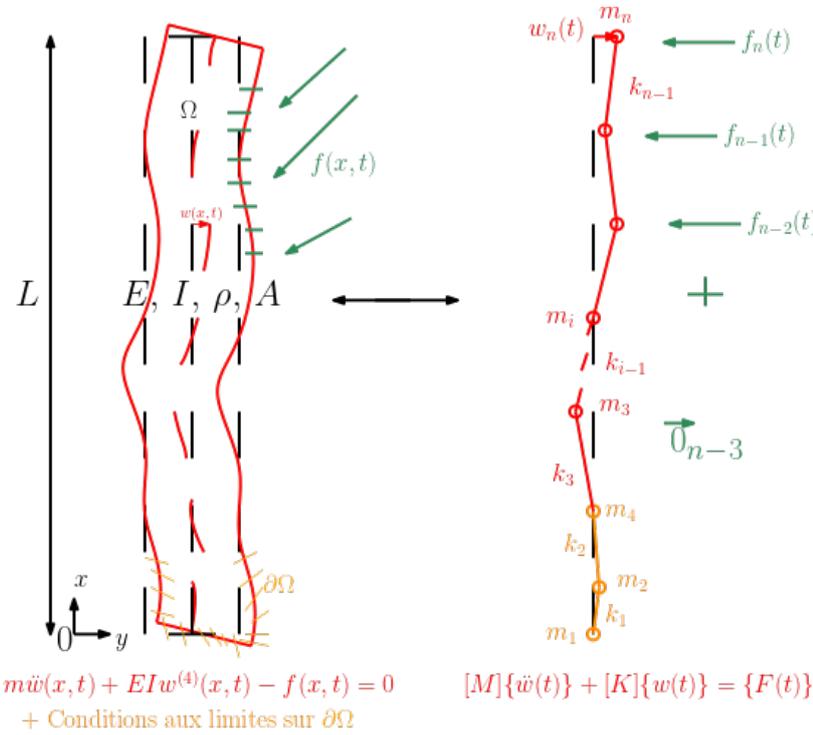


FIGURE 1.14 – Vibration d'un système poutre : modèle continu vs modèle discret à N degrés de liberté.

### Dynamique des structures continues.

Les systèmes continus sont modélisés par le biais du principe d'Hamilton liant l'énergie cinétique  $E_c$ , l'énergie de déformation  $V$  et l'énergie potentielle des forces extérieures  $U$  [Timoshenko et al., 1959, Leissa, 2005]. Le principe d'Hamilton entre l'instant  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit pour un système non-amorti :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta V + \delta U) dt = 0. \quad (1.3)$$

L'introduction de la base modale se fait par une vision "ondes". Tout d'abord par une séparation des variables qui permet d'écrire le déplacement en flexion  $w(x,t)$  de la façon suivante :

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{+\infty} W_r(x) e^{i\omega_r t} \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Où  $W_r(x)$  et  $\omega_r$  sont respectivement la déformée modale et la fréquence propre associées au mode  $r$ . La base modale  $(W_r(x), \omega_r)$  est alors solution du déterminant

d'un système linéaire  $D$  qui découle du principe d'Hamilton (équation 1.3), de la séparation des variables (équation 1.4) et des conditions aux limites (Annexe A.1).

$$Det([D(\omega_r)]) = 0, \quad (1.5)$$

où  $Det([D(\omega_r)])$  est appelée fonction transcendante. Pour des conditions aux limites dites classiques de poutres d'Euler-Bernoulli, le Tableau 1.2 montre les diverses formes de ces fonctions transcendentes.

Conditions aux limites	Fonction transcendante associée
Libre-Libre	$\cos(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) - 1 = 0$
Encastrée-Libre	$\cos(\beta_r L) \cosh(\beta_r L) + 1 = 0$
Appuyée-Libre	$\tan(\beta_r L) - \tanh(\beta_r L) = 0$
Rotule-Libre	$\tan(\beta_r L) + \tanh(\beta_r L) = 0$

TABLE 1.2 – Modes de flexion des poutres d'Euler Bernoulli pour des conditions aux limites "classiques",  $\beta_r = \left(\frac{\rho A \omega_r^2}{EI}\right)^{1/4}$

### Dynamique des systèmes discrets.

De nos jours, les méthodes de discrétisation permettent d'introduire l'analyse modale expérimentale pour les outils numériques et expérimentaux. En effet, les paramètres d'entrée du modèle (nombres de modes et les nombres de degrés de liberté (DDL)) sont finis et dénombrables. Pour cela deux physiciens, Lord Rayleigh et Walther Ritz ont développé une méthode de discrétisation dite méthode de Rayleigh-Ritz pour approcher les valeurs propres et les vecteurs propres d'un système mécanique [Leissa, 2005, Ilanko, 2009]. Elle trouve son origine dans le contexte de la résolution de problèmes aux limites et aux équations aux dérivées partielles. Pour la dynamique, la conséquence est un nombre fini de modes  $n$  dans l'équation 1.4,

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Avec,  $q_i(t)$  la coordonnée généralisée de la variable temps et  $\phi_i(x)$ , la fonction de forme satisfaisant les conditions aux limites. Et si maintenant nous appliquons le principe d'Hamilton à l'équation 1.6, il vient,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \implies [M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur de Lagrange,  $[M]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse et de rigidité (Annexe A.1). Ainsi l'équation 1.7 permet d'écrire un système linéaire discret de valeurs propres où la variable espace disparaît. Les fréquences propres et les déformées modales du système sont alors solution de polynôme caractéristique suivant :

$$Det([K] - \omega_r^2 [M]) = 0, \quad (1.8)$$

où les valeurs propres sont les fréquences au carré  $\omega_r^2$ .

### Suivi des paramètres modaux de structures affouillées.

En ce qui concerne le suivi vibratoire du phénomène d'affouillement, l'objet étudié est généralement une pile de pont. Le problème de dynamique associé concerne les variations des fréquences propres d'éléments de type poutres [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019, Foti & Sabia, 2011, Boujia et al., 2021, Zarafshan et al., 2012, Azhari & Loh, 2017].

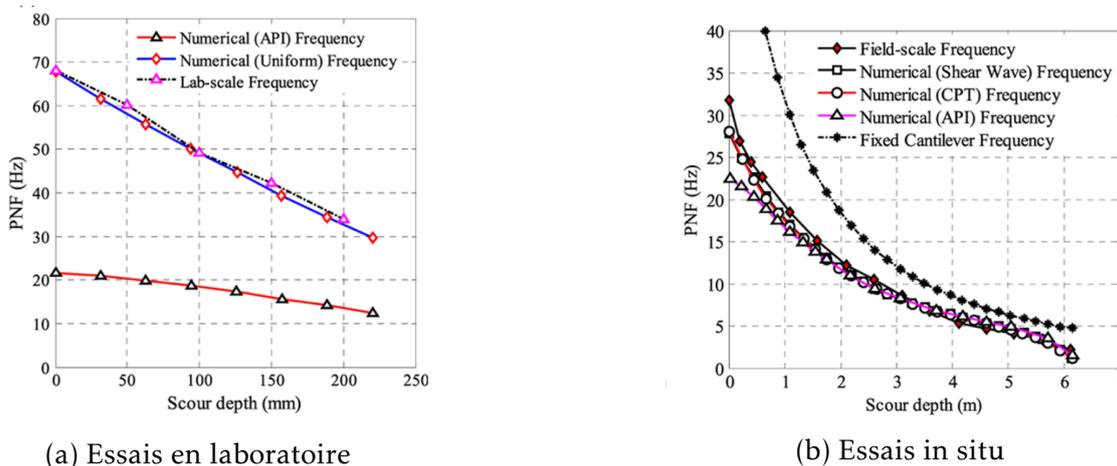


FIGURE 1.15 – Variation de la première fréquence expérimentale et numérique vis-à-vis de l'affouillement [Prendergast et al., 2013] : en laboratoire et in situ

Aussi, certaines approches concernent les modes de vibrations rigides ou non déformables [Bao et al., 2017, Boujia et al., 2021, Shinoda et al., 2008, Lin et al., 2014, Foti & Sabia, 2011, Azhari & Loh, 2017]. Pour les vibrations d'éléments de types poutres, des modèles de poutre encastree-libre équivalente ont été présentés dans [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019].

Des conditions de non encastrement avec des ressorts de rotation au niveau de l'ancrage de la pile avec le sol ont été considérées afin d'interpréter certains résultats expérimentaux dans [Lin et al., 2014, Boujia et al., 2021]. Aujourd'hui il n'existe pas de modèle opérationnel et les premiers constats in situ concernent la première fréquence propre observable (PNF). Pour l'instant des formules empiriques permettent de vérifier si la pile est affouillée [Shinoda et al., 2008, Lin et al., 2014] en considérant les actions hydrauliques comme un phénomène de masse ajoutée [Ju, 2013]. Alors, très récemment des modèles réduits en centrifugeuse [Kariyawasam et al., 2020] et des simulations par élément finis [Antonopoulos et al., 2022] permettent d'approcher les solutions dans des conditions réelles de service.

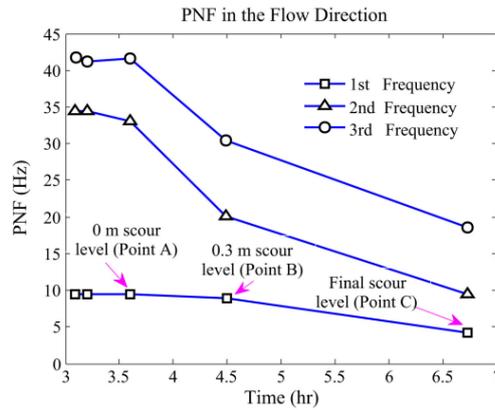


FIGURE 1.16 – Évolution des trois premières fréquences de la pile avec le temps [Bao et al., 2017]

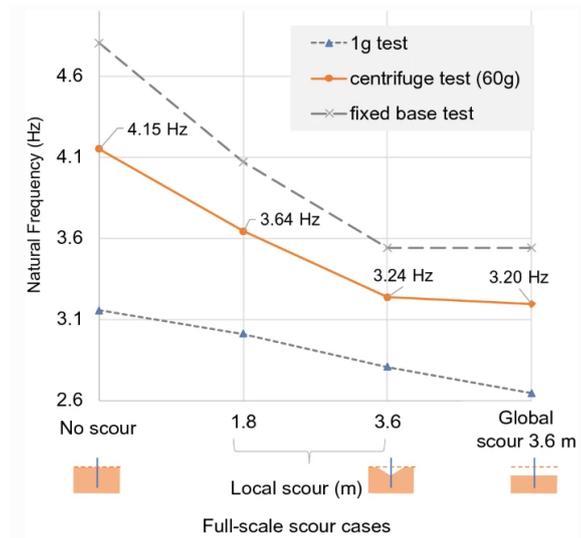


FIGURE 1.17 – Sensibilité de la première fréquence propre pour différents types d'affouillement [Kariyawasam et al., 2020] : comparaison avec modèles réduits en centrifugeuse.

### 1.3 Méthodes d'apprentissage statistique pour l'aide au suivi vibratoire.

D'une part, les techniques d'apprentissage statistique ont permis d'automatiser des tâches de plus en plus complexes. D'autre part, elles ont permis d'apprendre à partir d'exemples les rendant "intelligentes". Appliqués à l'ingénierie, ces outils permettent de faciliter et de simplifier des problème complexes. Deux catégories d'apprentissage statistique existent : les méthodes supervisées consistant à apprendre une fonction de prédiction à partir d'exemples annotés. Pour le SHM, elles ont été développées pour l'apprentissage de modèles [Avci et al., 2021]. Les méthodes d'apprentissage non supervisées quant à elles, consistent à apprendre

et prédire sans étiquetage des données au préalable. Cette dernière catégorie concerne des problèmes où l'objet d'étude est plus confus. Dans ce cas l'utilisateur n'attend pas une prédiction au préalable [Avci et al., 2021, Liu et al., 2021, Saxena et al., 2017]. Le Tableau 1.3 présente les différentes méthodes de l'apprentissage statistique.

Méthodes	Caractéristiques
<i>Supervisées</i>	
Régressions Classement Réseaux de neurones artificiels	Méthode paramétrique Hiérarchisation Principe de couches de neurones
<i>Non Supervisées</i>	
Analyse factorielle Typologies	Géométrie, réduction de modèle Regroupement

TABLE 1.3 – Type d'apprentissage statistique

### 1.3.1 Application de méthodes non supervisées

Dans un contexte du suivi vibratoire des affouillements, les travaux de la littérature ont montré un intérêt à suivre les fréquences propres [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019, Boujia et al., 2021, Zarafshan et al., 2012]. Ces études ont souligné différents comportements vibratoires : comportements élastiques en flexion et comportements rigides. De plus, l'affouillement est un phénomène environnemental difficilement localisable avec les réponses vibratoires des ouvrages [Rytter, 1993, Güemes et al., 2020]. Mais si certains comportements peuvent être considérés comme défectueux, l'approche non supervisée est la plus adaptée pour les problèmes de détection d'anomalies. Dans cette approche, les différents algorithmes tentent de distinguer les observations aberrantes en apprenant sur l'ensemble des données. Il n'existe pas d'ensemble d'observations identifié, a priori, comme anomalies.

### 1.3.2 Algorithmes de classification ou data clustering

Le partitionnement des données ou "data clustering" en anglais est une discipline particulière de l'apprentissage statistique non-supervisé (cf 1.3). Celle-ci a pour objectif de séparer des individus en groupes homogènes selon un critère métrique. Et c'est grâce à une mesure de "ressemblance" entre individus que l'affiliation aux classes devient possible. Il existe une multitude d'algorithmes de classification. La littérature à ce sujet [Arthur & Vassilvitskii, 2007, Murtagh & Contreras, 2012, Ester et al., 1996] permet de définir trois méthodes de classification.

- Les méthodes descendantes ou de plus proches voisins (K-means) [Saxena et al., 2017, Arthur & Vassilvitskii, 2007].

- Les méthodes de classification ascendantes et hiérarchique (CAH) [Saxena et al., 2017, Murtagh & Contreras, 2012].
- Les méthodes basées sur la densité du voisinage des classes (DBSCAN) [Saxena et al., 2017, Ester et al., 1996].

### Classification avec les plus proches voisins ("K-means")

La méthode des plus proches voisins ou "K-means" en anglais [Arthur & Vassilvitskii, 2007] sépare un jeu de données de  $n_d$  échantillons  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_d})$  en  $C$  classes  $(c_1, \dots, c_C)$  avec la meilleure configuration possible selon un critère minimisant l'inertie inter-classes  $(m_1, \dots, m_C)$  et l'inertie intra-classe  $(d_1, \dots, d_{n_d})$ . Ainsi, la fonction coût à optimiser est la suivante,

$$\operatorname{argmin} \sum_{h=1}^C \sum_{\alpha_j \in c_h} |\alpha_j - m_h|^2 = \operatorname{armin} \sum_{k=1}^{n_d} d_k^2. \quad (1.9)$$

Avec  $m_k$  le barycentre de la classe  $k$  et  $d_k$  la distance de l'individu  $\alpha_k$  à son barycentre de classe. La Figure 1.18 décrit ce principe pour  $n_d = 13$  et  $C = 4$ .

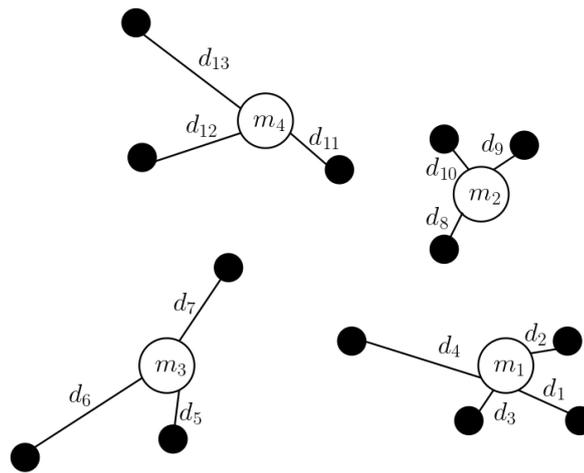


FIGURE 1.18 – Principe de classification de  $n_d = 13$  échantillon pour  $C = 4$  classes avec  $d_k$  l'inertie intra-classe.

### Classification ascendante hiérarchique (CAH)

Cette méthode de classification (CAH) est dite ascendante [Murtagh & Contreras, 2012]. En effet, contrairement à la méthode des k-means qui part d'une solution générale vers une plus spécifique, CAH part d'une solution où tous les individus représentent leur propre classe. Puis ces individus sont regroupés en classes plus hautes dans la hiérarchie. Le terme hiérarchique fait intervenir une vision d'ensemble de classes incluses dans des classes plus hautes dans la hiérarchie. Si on appelle  $A$  l'ensemble des échantillons  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_d})$ , celui-ci est la classe qui se trouve au sommet de la hiérarchie. Les ensembles  $\{\alpha_i\}$  sont des classes situées en bas de la hiérarchie. Et quant aux classes intermédiaires, soit elles

n'ont pas d'individus en commun, ou bien une classe est incluse dans l'autre. Ainsi, avec la CAH, on peut déterminer entre 1 et  $n_d$  groupes d'individus selon leur degré de similitude qui est imposé par le nombre de classes souhaité. Cette méthode est souvent représentée par des dendrogrammes comme sur la Figure 1.19.

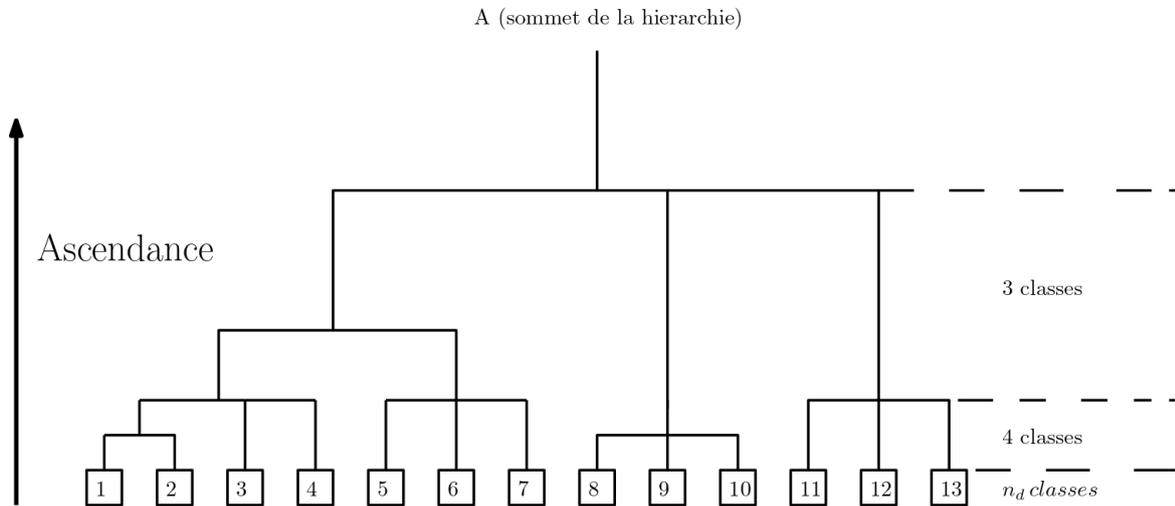


FIGURE 1.19 – Principe de CAH et représentation en dendrogramme de la hiérarchie entre classes pour  $n_d = 13$  échantillons.

Pour les espaces euclidiens, la distance entre individus est souvent l'outil de mesure utilisé. Entre les classes, cet outil de mesure se généralise avec différentes méthodes qu'on nomme dissimilarités inter-classes "dissim( $C_i, C_j$ )" :

- Minimum de distance entre les classes,  $\text{dissim}(C_i, C_j) = \min(\text{dissim}(\alpha_i, \alpha_j))$ .
- Maximum de distance entre les classes,  $\text{dissim}(C_i, C_j) = \max(\text{dissim}(\alpha_i, \alpha_j))$ .
- Le lien moyen,  $\text{dissim}(C_i, C_j) = \frac{1}{2^{n_d}} \sum \sum |\alpha_i - \alpha_j|$ .
- Méthode de Ward,  $\text{dissim}(C_i, C_j) = \frac{n_i n_j}{n_i + n_j} |m_i - m_j|$ . où  $n_i$  est le nombre d'individus de la classe  $C_i$

### Classification par densité spatiale (DBSCAN)

Contrairement aux deux premières méthodes de classification, cette méthode se différencie de par son caractère de voisinage entre individus [Ester et al., 1996]. En effet, le premier paramètre d'entrée est le rayon  $\epsilon$  de la boule ouverte des individus  $\alpha_i$ . Cet aspect topologique permet d'ajouter une notion de voisinage entre chaque individu,

$$V_{\alpha_i, \epsilon} = \{\alpha_j \in A \text{ tel que, } |\alpha_i - \alpha_j| < \epsilon\}. \quad (1.10)$$

Le second paramètre d'entrée est le nombre minimal de points *minpoints* du cardinal de  $V_{\alpha_i, \epsilon}$ . Le voisinage du point sera pris en compte dans l'élaboration des classes si et seulement si  $\text{card}(V_{\alpha_i, \epsilon}) > \text{MinPoint}$ , on dira que ce voisinage est dense. Ainsi, les algorithmes de voisinages par densité tel que DBSCAN [Ester et al., 1996] se basent sur des méthodes d'identification d'individus  $\alpha_i$  &  $\alpha_j$  appartenant à une classe selon les critères suivants,

- Deux point sont directement connectés :  $\alpha_j \in V_{\alpha_i, \epsilon}$ .

- Deux points sont connectés par densité : Il existe une série d'individus directement connectés deux à deux ( $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ ) tel que  $\alpha_i$  est directement lié à  $\alpha_1$ .

La Figure 1.20 en résume son principe. Ici, on peut observer que l'un des atouts de cette méthode est l'identification du bruit ou individus sans classe.

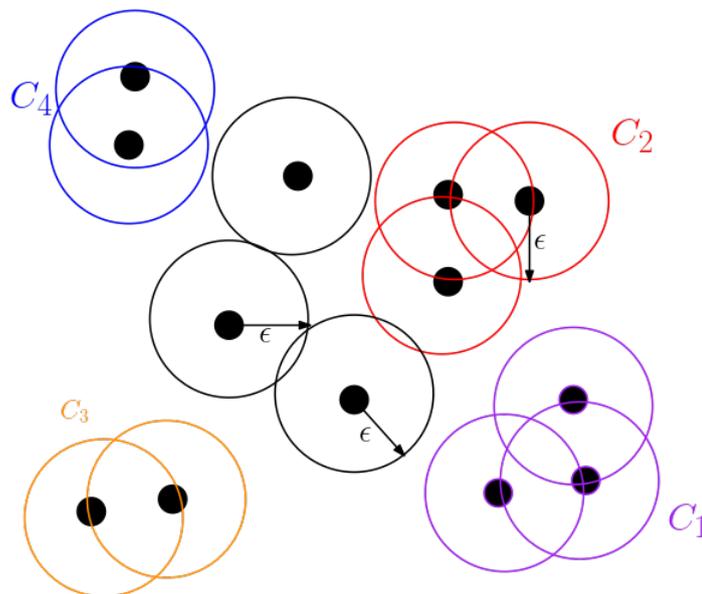


FIGURE 1.20 – Principe de la classification par densité ou DBSCAN.

### 1.3.3 Partitionnement de données issues de la littérature

Dans cette partie nous allons nous intéresser à des cas d'études issus de la littérature [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019, Boujia et al., 2021, Bao & Liu, 2021]. Dans ces cas d'études, des expériences en laboratoire ont été mises en place afin de déterminer l'évolution de la première fréquence de résonance observable en fonction de l'affouillement. Pour cela, ces articles utilisent le même protocole expérimental : analyser la réponse libre d'une structure de type poutre partiellement enfouie dans un sol via sa première fréquence propre. Ici la première fréquence propre n'est rien d'autre que le premier "pic" en fréquence observable dans l'analyse en fréquence de la réponse du signal. Dans le Tableau 1.4 les différents dispositifs expérimentaux sont présentés. De plus, les hypothèses de modèles associés à la fréquence propre sont mis en évidence. Dans [Prendergast et al., 2013, Boujia et al., 2019], le mode propre identifié correspond au premier mode en flexion de la poutre. Dans [Boujia et al., 2021], le mode identifié est un mode de vibration de solide rigide ou indéformable. Dans [Bao et al., 2017], aucune hypothèse n'est émise, c'est le premier pic en fréquence. Pour se prêter au jeu de la classification des données, nous allons constituer une base de données en considérant 118 individus décrits par les 7 paramètres suivants,

- $E$  : Le module d'Young ( $GPa$ ),
- $\rho$  : la masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ),
- $A$  : la section transversale ( $m^2$ ),

### 1.3. MÉTHODES D'APPRENTISSAGE STATISTIQUE POUR L'AIDE AU SUIVI VIBRATOIRE.

Références	Dispositif expérimental	Modèles
[Prendergast et al., 2013]	Pile creuse en acier dans sable	Mode de vibration en flexion
[Bao et al., 2017]	Pile en acier/béton/bois dans du sable	Non renseigné
[Boujia et al., 2019]	Tiges en PVC/aluminium dans sable et argile	Mode de vibration en flexion
[Boujia et al., 2021]	Pile en béton dans sable	Mode rigide de vibration

TABLE 1.4 – Études relatives à la sensibilité de la première fréquence propre vis-à-vis de l'affouillement dans la littérature

- $I$  : le moment d'inertie ( $m^4$ ),
- $L$  : la longueur totale de la pile ( $m$ ),
- $a$  : la longueur libre de la pile (non enfouie) ( $m$ ),
- $f_1$  : la première fréquence propre identifiée expérimentalement ( $Hz$ ).

$E$ ( $GPa$ )	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$I$ ( $cm^4$ )	$A$ ( $cm^2$ )	$L$ ( $m$ )	$a$ ( $m$ )
[Prendergast et al., 2013]					
200	7800	418	29,4	1.26	[0,492 :0.342]
[Bao et al., 2017]					
200	7800	1,92	4,9	1,35	[0,445 :0.325]
10	800	0.8	3,14	1,22	[0.39 :0.24]
20	2400	380	77	0,394	[0.27 :0.12]
200	2400	2690	184	0.306	[0.22 :0.07]
[Boujia et al., 2019]					
59	2700	0.00127	0.38	0.6/0.8	[0.5 :0.15]
59	2700	0.03	0.181	0.6/0.8	[0.5 :0.15]
3.5	1425	0.27	0.6	0.8	[0.5 :0.15]
40	2700	719	95	0.55	[0.45 :0.35]

TABLE 1.5 – Caractéristiques géométriques et mécaniques des modèles de piles soumises aux affouillements

#### Statistiques descriptives de la base de données

Pour l'analyse de la base de données du Tableau 1.4, il est essentiel d'effectuer une analyse statistique des paramètres. Sur la Figure 1.21 nous observons que les paramètres propres aux matériaux ( $E$  et  $\rho$ ) sont très corrélés. Il en est de même

entre les paramètres géométriques ( $A$ ,  $L$  et  $a$ ) et inertiels ( $I$ ). En un sens cela est concevable pour la plupart des matériaux. Néanmoins, de par les configurations expérimentales, la base de données offre tout de même un biais avec notamment un élancement des structures qui impactera la nature de ces configurations. Cela explique également une forte corrélation sur la Figure 1.21 (matrice des corrélations) entre l'affouillement  $a$  et la longueur totale de la poutre  $L$ .

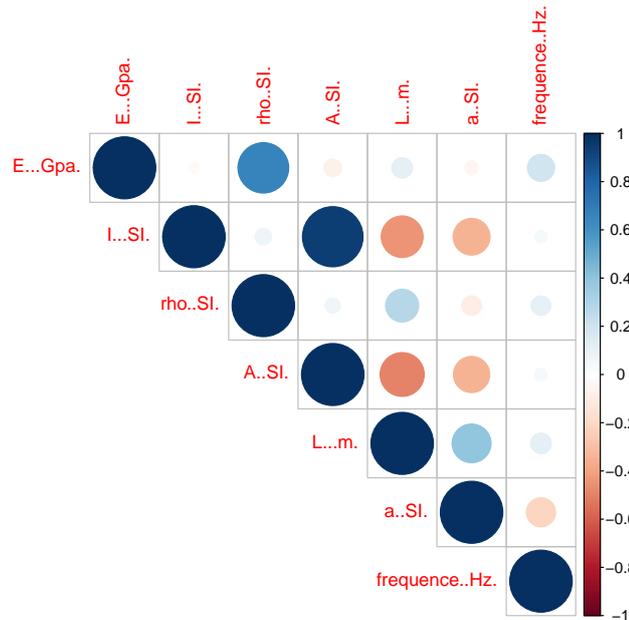


FIGURE 1.21 – Corrélation entre les paramètres décrits dans le Tableau 1.5 et la première fréquence propre identifiée.

Pour réduire la corrélation intrinsèquement liée à la physique des individus, introduisons une nouvelle quantité "ratio",

$$\text{ratio} = \left( \frac{EI}{\rho A} \right). \quad (1.11)$$

Cette quantité est liée à la longueur d'onde des poutres en flexions  $\frac{EI}{\rho A \omega_1^2}$ . Où  $\omega_1^2 = 2\pi f_1$ . Sur la Figure 1.22 les nouveaux paramètres de la base de données sont moins dépendants entre eux. Nous observons tout de même une forte corrélation entre la première fréquence propre  $f_1$  et la quantité "ratio".

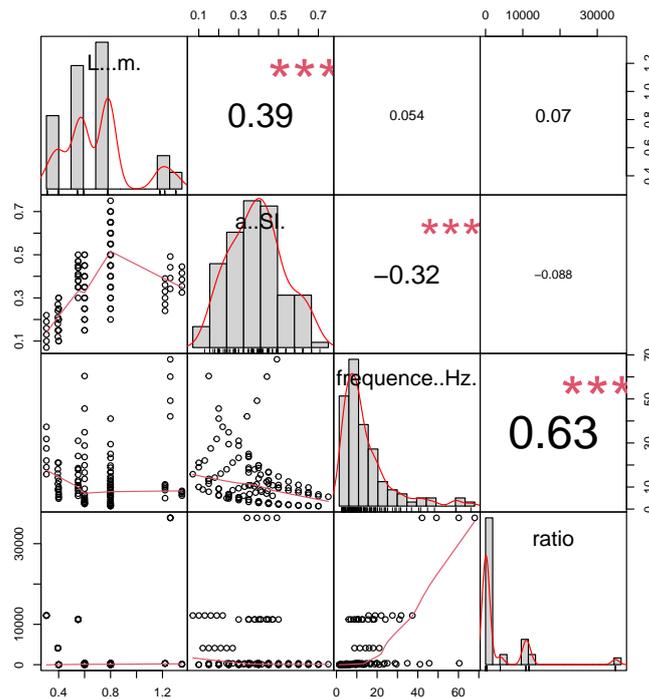


FIGURE 1.22 – Matrice des corrélations avec tracé de la répartition des points dans la partie triangulaire inférieure de la matrice.

### Analyse en composantes principales (ACP)

Pour une meilleure interprétation des classes, l'analyse en composantes principales permet de représenter les données dans des plans factoriels où les espaces sont totalement décorrélés. C'est-à-dire que la matrice de corrélation des paramètres est décomposée en espaces propre orthogonaux [Roweis, 1997, Ilin & Raiko, 2010]. Le Tableau 1.6 résume la représentativité de chaque composante principale déterminée pour la nouvelle base de données à 4 dimensions ( $L, a, f_1$  et ratio). De plus, sur la Figure 1.23, le cosinus au carré entre chaque paramètre et

Composante principale	% de l'information représentée
1	43.8
2	33.8
3	14.8
4	7.6

TABLE 1.6 – Représentativité des sous-espaces (ou composantes principales)

les composantes principales est représenté. Cette quantité de cosinus correspond au degré de corrélation entre les paramètres et les axes de l'ACP.

L'ACP permet une meilleure représentation géométrique de la base de données issue de la littérature. Si nous choisissons de représenter les différentes données expérimentales selon les deux premiers axes sur la Figure 1.24, nous remarquons

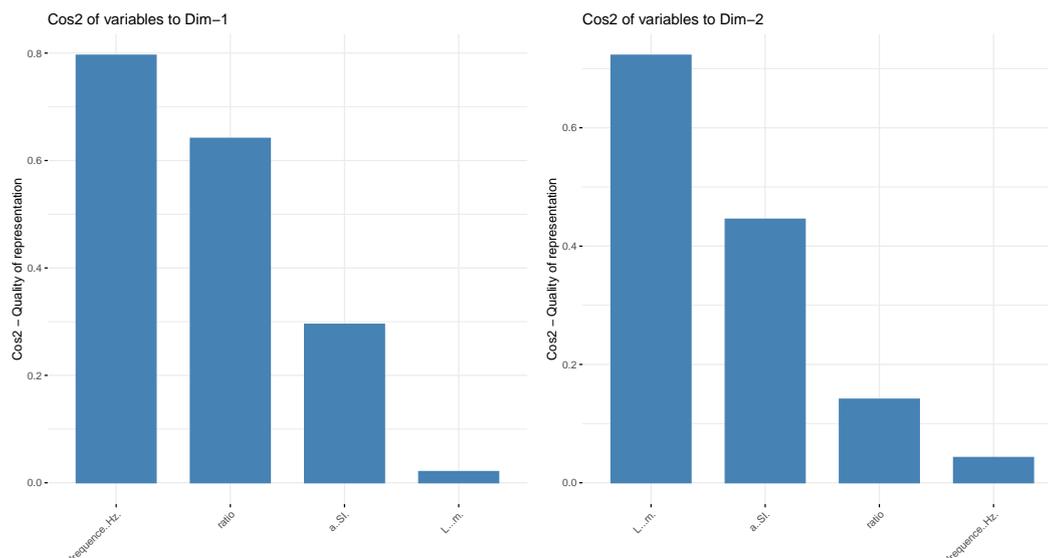


FIGURE 1.23 – Projection de chaque paramètre selon les 2 premières composantes principales.

que certaines données telles que celles de [Boujia et al., 2019] et des données de [Bao et al., 2017] sont proches géométriquement.

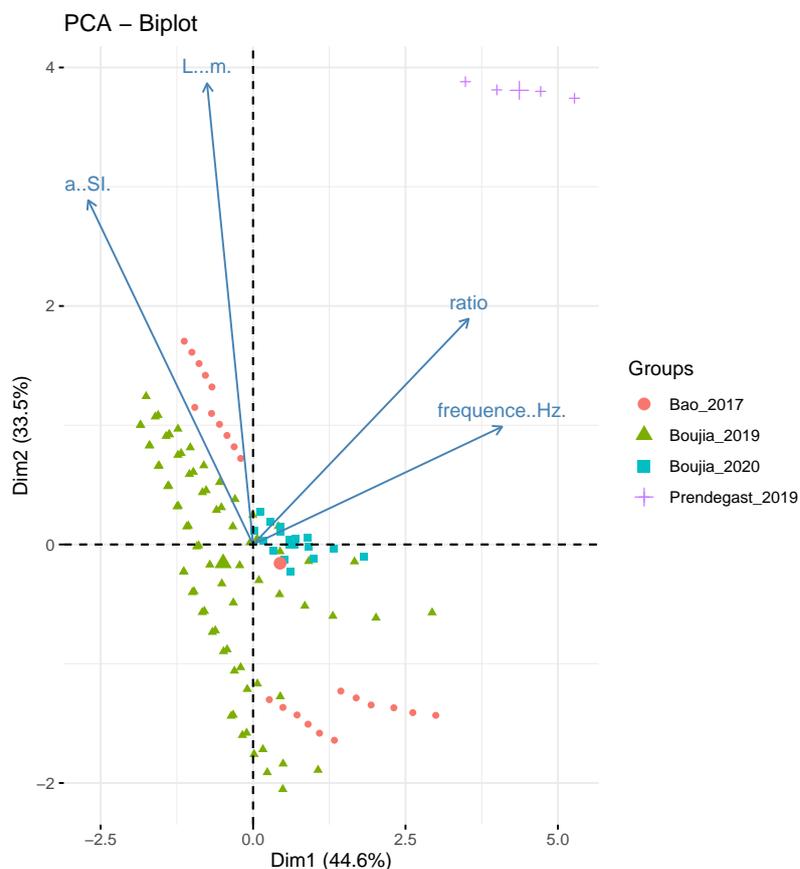


FIGURE 1.24 – Représentation des données dans le plan factoriel.

### Classification des données issues de la littérature

Comme indiqué dans le Tableau 1.4, les premières fréquences propres identifiées sont issues de deux modèles : modes en flexion et modes rigides. L'idée de cette partie est qu'à partir de l'état de l'art effectué sur les différentes méthodes de classification, nous voulons identifier les modes associés aux fréquences propres. Les méthodes de K-means et CAH comprennent comme paramètre d'entrée le nombre de classes. Ainsi la première étape est de trouver le nombre optimal de classes. Pour cela, le coefficient de silhouette,  $s_{sil}$  s'y prête bien [Rousseeuw, 1987, Batool & Hennig, 2021]. Cette mesure indique la qualité de la partition et a pour une classe  $c_k$  l'expression suivante :

$$s_{sil}(c_k) = \frac{b(c_k) - a(c_k)}{\max(a(c_k), b(c_k))}. \quad (1.12)$$

Avec  $a(c_k)$  représentant la distance moyenne des points à leur barycentre de classe et  $b(c_k)$  la distance moyenne à son groupe voisin. Pour déterminer le nombre optimal de classes, on calcule généralement une moyenne des silhouettes selon le nombre de classes. Pour la base de données, le nombre optimal de classes est de 2 (voir Figure 1.25).

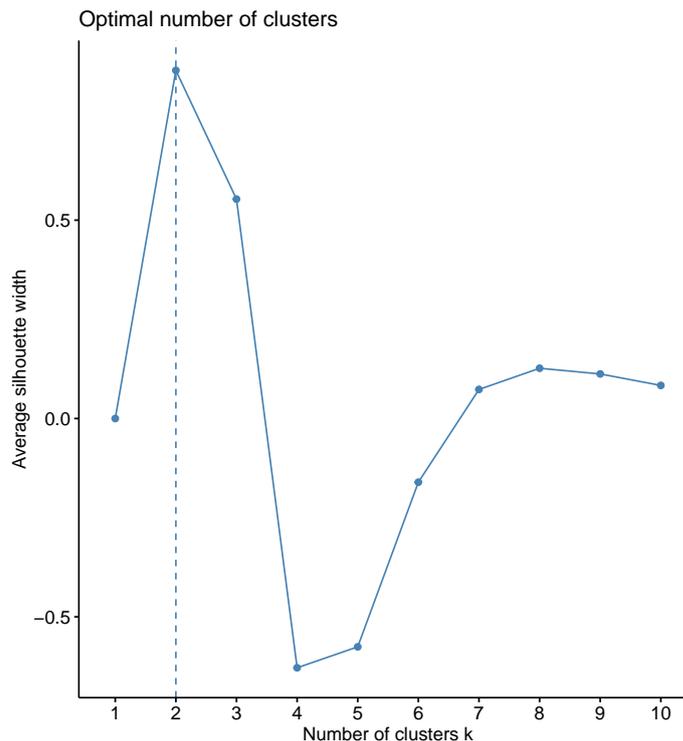


FIGURE 1.25 – Silhouettes pour la méthode de K-means avec données de la littérature.

Ainsi, comme on peut l'observer sur la Figure 1.26 on a identifié pour ces deux méthodes les deux mêmes classes : la classe 1 qui correspond aux modes rigides et la classe 2 qui correspond aux modes en flexion.

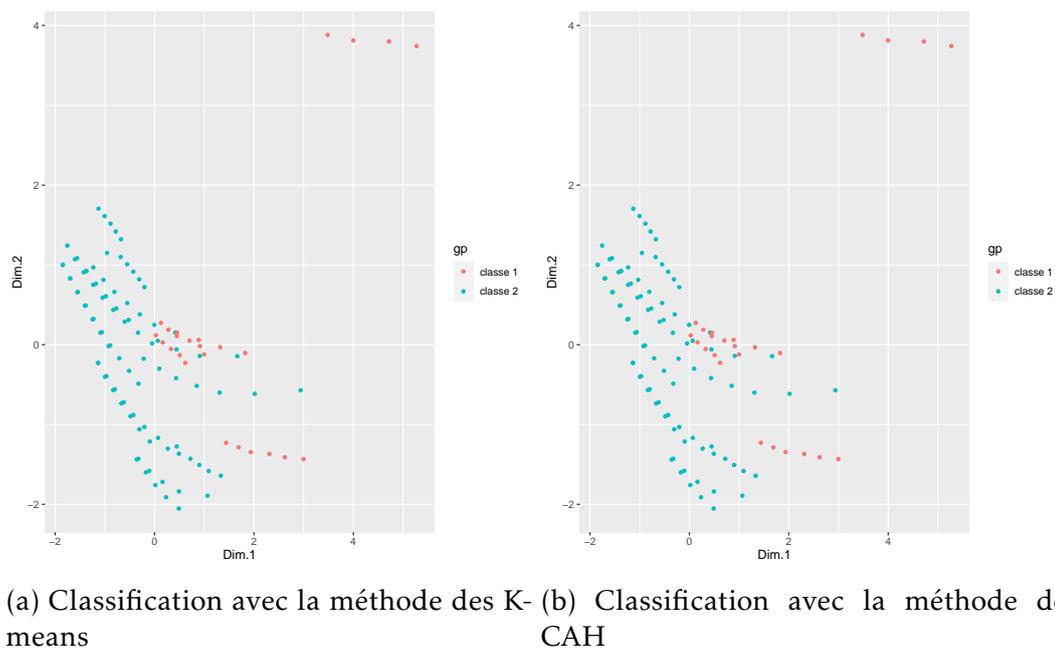


FIGURE 1.26 – Classification en 2 catégories des données de la littérature [Prendergast et al., 2013, Bao et al., 2017, Boujia et al., 2019, Boujia et al., 2021].

Une erreur issue de ces deux méthodes est quand même à souligner lorsque l'on compare la Figure 1.24 à la Figure 1.26. La classification est fautive pour les données issues de [Prendergast et al., 2013]. Pour la méthode de DBSCAN [Ester et al., 1996] qui comprend la gestion du bruit cette erreur peut être évitée en considérant ce facteur. Pour cela, le paramètre d'entrée est cette fois-ci un rayon de boule ouverte (Figure 1.20). Ce rayon peut être déterminé en observant sa sensibilité au nombre d'individus par classe. La Figure 1.27 montre qu'à partir d'un rayon de 5000 environ, le nombre d'individus dans le voisinage considéré n'évolue plus. Ainsi, en définissant un rayon de 5000 pour la méthode de DBSCAN nous parvenons à trouver deux classes (modes rigides et en flexion) tout en considérant les données de [Prendergast et al., 2013] comme du bruit (Figure 1.28). Enfin, notons que par cette étude nous avons réussi à classer les comportements vibratoires dans [Bao et al., 2017] : d'un point de vue vibratoire les piles en béton sont rigides et les autres élastiques.

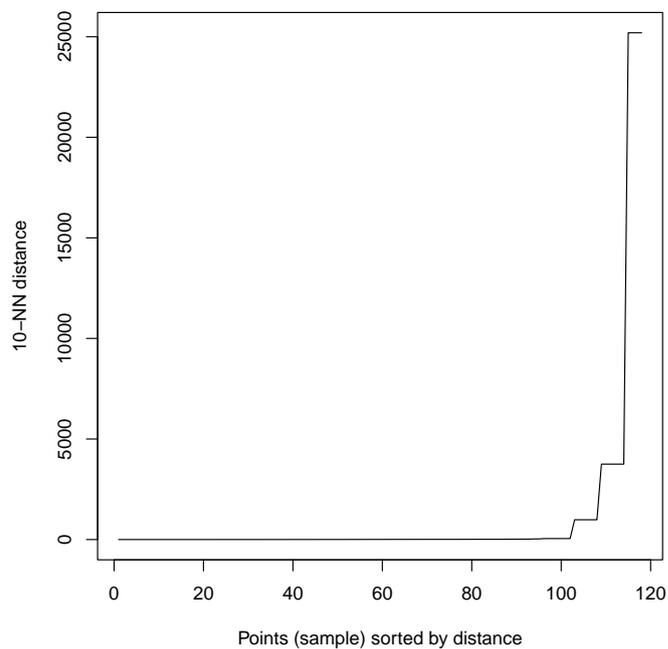


FIGURE 1.27 – Nombre de voisins selon le rayon considéré pour les données issues de la littérature.

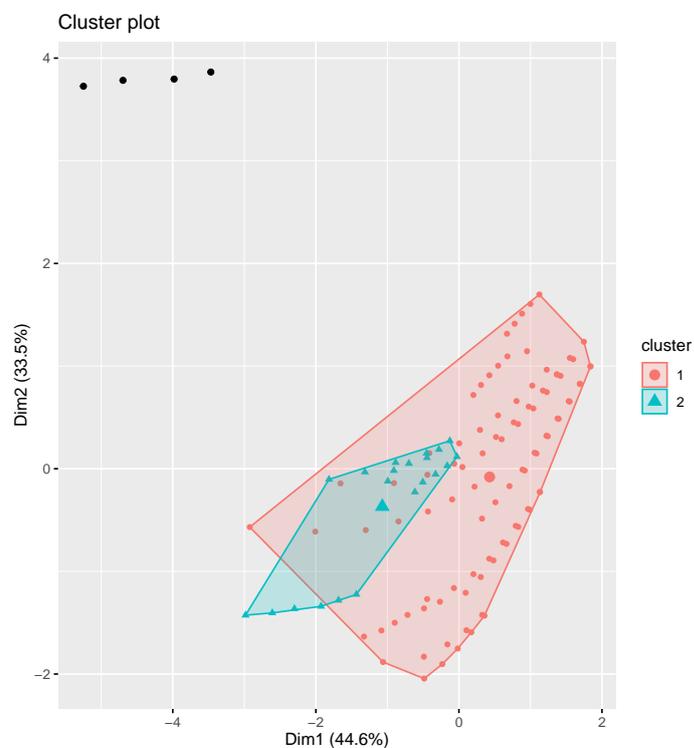


FIGURE 1.28 – Classification avec la méthode Dbscan.

## Conclusion

L'état de l'art relatif au sujet de thèse a relevé les problématiques générales de l'affouillement dans le domaine du génie civil. En particulier, on a présenté le processus d'affouillement, sa cinétique et sa caractérisation lors de la partie 1.1. En ce sens, le suivi de l'affouillement peut se faire par des méthodes directes dont le suivi concerne les paramètres influençant l'affouillement. En présentant les différentes méthodes de suivi existantes dans la partie 1.2, l'état de l'art a mis l'accent sur l'intérêt que présentent les méthodes inverses. Pour le suivi par méthodes inverses, l'objet étudié est la réponse vibratoire de l'ouvrage et de nombreuses méthodes d'analyse pour suivi vibratoire sont disponibles. Mais les premières études du comportement vibratoire des piles de pont sujettes aux affouillements ont souligné la sensibilité des paramètres modaux d'un système linéaire. En particulier, les fréquences propres.

Sur ces divers constats, nous avons présenté les algorithmes de classification pour l'aide à la décision au cours de la partie 1.3. Ces méthodes issues de l'apprentissage statistique permettent de classer un jeu de données. À cet égard, on recense deux classes de comportement vibratoire dans cette partie : les comportements rigides et les comportements flexibles. Ainsi, les perspectives offertes par cette partie, nous permettront en premier lieu de contribuer aux modélisations de ces comportements (Chapitre 2).

Ensuite, puisque le suivi vibratoire pour l'affouillement a souligné l'intérêt de l'identification inverse des paramètres des systèmes linéaires invariants, notamment par l'analyse modale. Nous allons porter une attention particulière sur cette méthode d'analyse tout en la confrontant aux problématiques d'instrumentation sur ouvrage au cours du Chapitre 3.



# Chapitre 2

## Contribution aux modèles vibratoires des piles de pont

---

2.1	Hypothèses de modélisation . . . . .	37
2.1.1	Modélisation du sol . . . . .	37
2.1.2	Modélisation des conditions au point d’ancrage . . . . .	39
2.1.3	Modélisation des comportements vibratoires de la structure . . . . .	39
2.2	Approche par éléments de types poutre . . . . .	41
2.2.1	Formulation du problème et condition aux limites . . . . .	41
2.2.2	Modèles de flexion des poutres affouillées pour des sols de Winkler et Pasternak : Fondations profondes . . . . .	42
2.2.3	Évolution des conditions aux limites . . . . .	48
2.3	Approche par des éléments indéformables . . . . .	52
2.3.1	Formulation du problème . . . . .	52
2.3.2	Sensibilité des paramètres à l’affouillement . . . . .	54
2.3.3	Identification des modes rigides pour le suivi de l’affouillement . . . . .	57

---

## Introduction

Ce chapitre aborde l'aspect dit "modèles" de la thèse et en particulier, les modélisations possibles des phénomènes vibratoires concernant les piles de ponts. Lors de l'état de l'art, il a été souligné une certaine préoccupation du suivi vibratoire pour les modèles 1.2 dans la mesure où le diagnostique du système instrumenté est une association de modèles et d'analyse de données réelles.

Ainsi, reprenons notre problème initial qui est la réponse vibratoire d'une pile de pont sujette aux affouillements. Ce phénomène résultant d'actions complexes mélangeant des paramètres hydrauliques, géotechniques et structurels, le formalisme et l'exercice de la modélisation nous amène à émettre certaines hypothèses. On partira du constat que l'effet direct (et visible) de l'affouillement est une variation du niveau du sol et on s'affranchira de l'effet de l'eau sur la structure. Cette hypothèse est envisageable dans le cas où son influence sur la structure peut être considérée comme une masse ajoutée. Nous définirons comme objet principal d'étude une pile de pont en la considérant comme une structure de type poutre de longueur  $L$ . Les déplacements dans le plan  $xy$  de cet objet provoqueront une réaction du sol modélisée par des forces linéaires  $p(x, t)$ . Ce modèle est décrit sur la Figure 2.1. Ici, l'affouillement modifiera la profondeur d'enfouissement  $D$ , ce qui résulte d'une modification des interactions entre le sol et la structure  $p(x, t)$ . En outre, les paramètres de l'interaction sol-structure permettront d'observer l'évolution des conditions aux limites en  $x = 0$ . Naturellement la signature vibratoire de la structure sera sensible à ces deux effets provoqués par le modèle d'affouillement. Pour cela, nous étudierons les paramètres modaux en supposant la réponse libre de la pile de pont et en négligeant l'amortissement.

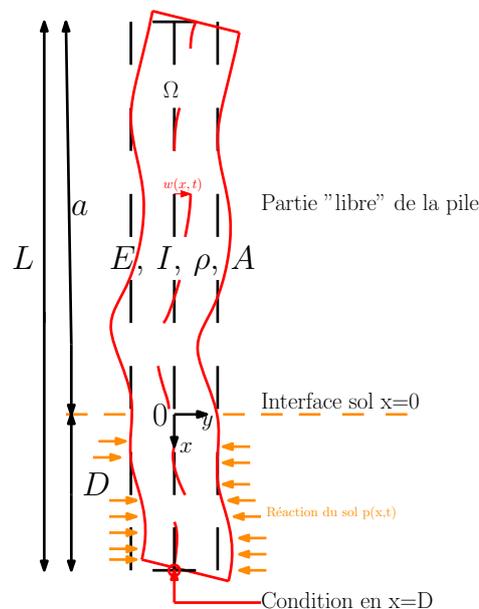


FIGURE 2.1 – Schéma de modélisation.

## 2.1 Système mécanique et hypothèses pour l'interaction entre le sol et la structure

Maintenant que le schéma de principe pour la modélisation a été introduit (Figure 2.1), nous allons poser le cadre d'étude. Tout d'abord nous regarderons le choix du sol pour la modélisation de la réaction latérale  $p(x, t)$  ou paramètres de l'interaction entre le sol et la structure (ISS). En particulier quel comportement adopter lors de l'évolution de la longueur  $D$  caractéristique de l'affouillement ?

### 2.1.1 Modélisation du sol

Le choix de modélisation de sol dépend de la nature de celui-ci. Les cas d'étude concernés sont des sols avec une taille de grain assez faible pour que l'hypothèse des milieux continus soit acceptable. Ainsi, nous modéliserons les réactions élastiques du sol par des ressorts. Ces ressorts prennent leur racine dans les modèles proposés par Winkler [Winker, 1867].

#### Modèle de Winkler.

Ce modèle est le plus classique, d'après [Houlsby & Byrne, 2005]], les modèles de Winkler sont simples et efficaces car ils se combinent bien avec les modélisations des structures. En effet, Winkler a proposé en 1867 [Winker, 1867] un modèle de sol qui effectue une force  $p$  proportionnelle au déplacement  $w$  en chaque point de la fondation. En définissant  $k_w$  le coefficient de réaction du sol en  $Pa$ , Winkler a posé la relation suivante :

$$p(x) = k_w w(x). \quad (2.1)$$

Sur la Figure 2.2, un schéma de la réaction du sol modélisée par des ressorts représentant la nature des sols de Winkler.

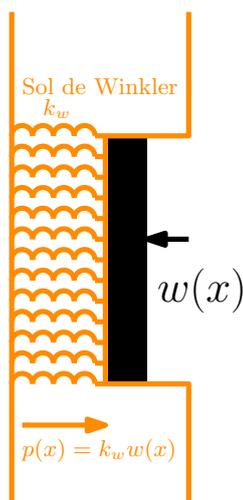


FIGURE 2.2 – Réaction du sol pour les modèles de Winkler.

Actuellement, il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer la valeur du coefficient  $k_w$ . Elles sont généralement basées sur des tests en laboratoire ou in-situ

(test de consolidation, etc.) ou bien par des relations empiriques. Cependant on lui reproche certains inconvénients.

- L'interaction entre les ressorts n'est pas pris en compte. Cela revient à négliger dans le sol un certain cisaillement dans la direction perpendiculaire à l'effort.
- Il provoque une discontinuité dans le sol entre la zone en contact avec les sollicitations et le reste du sol.

### Modèle de Pasternak.

Pasternak [Pasternak, 1954] est un modèle de Winkler modifié en introduisant une interaction entre les ressorts. Selon Pasternak, entre la pression de contact  $p$  et le mouvement du sol, il existe une relation faisant intervenir deux paramètres  $k_p$  (en  $Pa$ ) et  $g_p$  (en  $N$ ) tel que :

$$p(x) = k_p w(x) - g_p w''(x), \quad (2.2)$$

où  $w''$  est la dérivée seconde selon  $x$ . Ici, le terme faisant intervenir la dérivée seconde du déplacement du sol est un coefficient de cisaillement perpendiculaire à la surface de contact sollicitée. Cela est dû au fait que les ressorts sont reliés à une couche peu déformable. Pour des sollicitations horizontales, la Figure 2.3 en explique le principe. Ce modèle d'interaction sol-structure permet de supprimer la discontinuité présentée dans le modèle de Winkler. Dans le cas d'une pression uniforme appliquée au sol le déplacement sera nul en dehors de la zone de l'application pour le modèle de Winkler (Figure 2.2) alors que dans le cas du modèle de Pasternak, le déplacement du sol est continu (Figure 2.3).

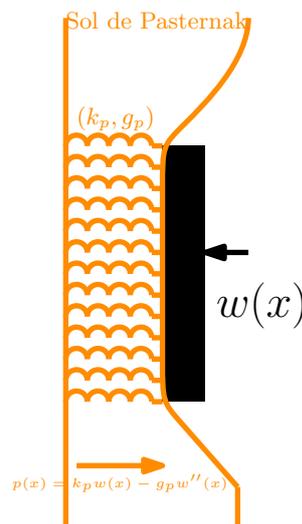


FIGURE 2.3 – Réaction du sol pour les modèles de Pasternak.

Cependant sa difficulté réside en la détermination du couple  $(k, g)$ . Vlasov [Vlasov, 1966] en a proposé un modèle analytique dont la résolution est compliquée voire impossible dans certains cas [Girija Vallabhan & Das, 1988]. Puis le module de cisaillement de Pasternak  $g_p$  est, pour des sols homogènes, négligeable

devant  $k_p$ . Enfin, on remarquera que lorsque le module  $g_p$  est nul,  $k_p = k_w$ . Sinon cela n'est pas nécessairement vérifié (Annexe B.1).

### 2.1.2 Modélisation des conditions au point d'ancrage

Les conditions au point d'ancrage de la poutre dépendent le plus souvent du comportement modal étudié. Paradoxalement, le changement de conditions aux limites modifie le comportement modal des structures. Nous allons cependant considérer deux cas extrêmes dont la valeur seuil est la longueur  $L_r$  introduite par Randolph pour le calcul des pieux en 1984 [Randolph, 1981]. Cette longueur s'écrit comme,

$$L_r = \left( \frac{4EI}{k} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.3)$$

Cette valeur fut introduite pour les cas statiques et elle permet de dissocier les deux cas qui suivent :

- Fondations profondes,  $D \gg L_r$  :  $\begin{cases} w(D, t) \approx 0, \\ w'(D, t) \approx 0. \end{cases}$
- Fondations superficielles  $D \ll L_r$  :  $\begin{cases} F_d(t) = K_h w(D, t), \\ M_d(t) = K_r \theta(D, t), \end{cases}$

où  $F_D$  et  $M_D$  sont respectivement la force et le moment provoqués par une rotation rigide en  $x = D$ .

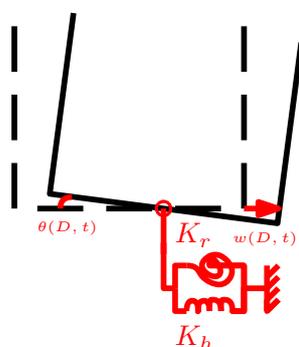


FIGURE 2.4 – cas de conditions aux limites : Rotation + translation en  $x = D$ .

En conséquence, un changement de conditions aux limites pourra intervenir lors de la modélisation. Mais l'idée principale reste tout de même une étude de la sensibilité pour les différents cas.

### 2.1.3 Modélisation des comportements vibratoires de la structure

La définition de ces conditions aux limites sous-entend en réalité des comportements de piles totalement différents avec notamment un passage d'un état isostatique vers un état hypostatique. Le cas des fondations profondes avec des conditions d'encastrement permettra d'étudier des comportements en flexion selon l'évolution de la longueur  $D$ . Puis dans le second état nous étudierons également les modes en

flexion en suivant la même démarche scientifique. Mais aussi, nous porterons une attention particulière aux modes dits rigides. En somme, la visualisation des différents comportements est étroitement liée aux conditions aux limites. Nous étudierons 3 cas :

- Encastrement : synonymes des comportements avec fondations profondes qui seront principalement des modes en flexion avec conditions d'encastrement. Cela sous-entend des relations de rigidité entre le sol et la structure.
- Semi-rigide : des profondeurs d'encastrement insuffisantes pour supposer un encastrement. Nous resterons dans l'étude des modes en flexion mais cette fois-ci avec une rotation rigide en  $x = D$ .
- Rigide : avec des fondations peu profondes ou superficielles pour des piles massives. Nous étudierons alors les modes rigides de solides indéformables.

## 2.2 Approche continue avec éléments de type poutre pour la vibration des piles de ponts

Cette partie propose un développement analytique des modes en flexion de poutres ayant emprise dans un sol continu. Derrière les hypothèses de flexion des poutres se cache une flexibilité de la structure par rapport au sol :  $EI \ll kL^4$ . La projection modale des équations permettra d'introduire les fréquences propres comme solutions d'une fonction transcendante. Pour cela, considérons une poutre d'Euler Bernoulli [Timoshenko et al., 1959] partiellement encastrée dans un sol élastique [Winker, 1867, Pasternak, 1954, Gazetas & Tassoulas, 1987] (Figure 2.1) où  $E, I, \rho$  et  $A$  sont respectivement le module d'Young, le moment quadratique, la masse volumique et la section transversale.

### 2.2.1 Formulation du problème et condition aux limites

**Principe énergétique du système considéré.**

En raison de la présence de deux milieux (parties enterrées et non enterrées dans le sol), ce problème présente des conditions aux limites spécifiques. Par conséquent, l'approche variationnelle est établie en utilisant le principe de Hamilton entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  qui s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta E + \delta U) dt = 0, \quad (2.4)$$

avec  $\delta T$  et  $\delta E$  sont respectivement la variation d'énergie cinétique et d'énergie élastique de déformation (Annexe A.1). En ce qui concerne la variation d'énergie induite par les forces extérieures  $\delta U$ , la réaction du sol  $p(x, t)$  est le principal protagoniste de la formulation :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{-a}^D p(x, t) H_0(x) \delta w(x, t) dx \right) dt, \quad (2.5)$$

où  $H_0$  est la fonction Heaviside. L'équation (2.5) contient d'une part les conditions aux limites à définir au préalable mais aussi le changement de milieu avec l'interface du sol en  $x = 0$ . En combinant les équations (2.4) et (2.5) il vient,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{-a}^D \{EI w^{(4)}(x, t) + \rho A \ddot{w}(x, t) + p(x, t) H_0(x)\} \delta w(x, t) dx \right) dt = 0. \quad (2.6)$$

Du fait du changement de milieux, cette modélisation représente une non-linéarité. Celle-ci est traduite par la fonction spatiale heaviside. Par la suite nous linéarisons ce problème en traduisant cette non-linéarité spatiale par des conditions aux limites à l'interface  $x = 1$ .

### Linéarisation du problème et conditions aux limites.

Pour la résolution du problème posé lors de (2.6), nous avons fait le choix de le diviser en deux sous-problèmes linéaires distingués dans deux espaces :

- L'espace dit "libre" où  $x \in [-a, 0[$  (l'indice "1" sera descriptif de ce domaine).
- L'espace enfoui dans un sol élastique où  $x \in ]0, D]$  (l'indice "2" sera descriptif de ce domaine).

Ainsi, il découle de l'équation (2.6) un comportement vibratoire du système en flexion décrit par,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^{(4)}(x, t) + \frac{\rho A}{EI} \ddot{w}_1(x, t) = 0 \quad , \text{ si } x \in [-a, 0[, \\ w_2^{(4)}(x, t) - \frac{1}{EI} p(x, t) + \frac{\rho A}{EI} \ddot{w}_2(x, t) = 0 \quad , \text{ si } x \in ]0, D]. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Les conditions en  $x = 0$  permettent de gérer le comportement à l'interface pour lier les deux sous-problèmes linéaires. Les conditions en  $x = -a$  pour la partie libre sont essentiels pour la résolution des systèmes :

- extrémité libre en  $x = -a$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1'''(-a, t) = 0, \\ w_1''(-a, t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

- continuité cinématique en  $x = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1'''(0, t) = w_2'''(0, t), \\ w_1''(0, t) = w_2''(0, t), \\ w_1'(0, t) = w_2'(0, t), \\ w_1(0, t) = w_2(0, t), \end{array} \right. \quad (2.9)$$

- les deux conditions aux limites en  $x = D$  sont des questions centrales car nous verrons qu'ils sont en réalité changeantes avec l'affouillement. De ce fait, les différents cas de la section 2.1.2 seront étudiés.

### 2.2.2 Modèles de flexion des poutres affouillées pour des sols de Winkler et Pasternak : Fondations profondes

Pour l'instant nous supposons que les déplacements sont négligeables en  $x = D$ , c'est-à-dire que nous sommes dans des conditions d'encastrement.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2(D, t) \approx 0, \\ w_2'(D, t) \approx 0. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

#### Développements analytiques.

Tout d'abord, considérons une poutre d'Euler Bernoulli partiellement enfouie dans un sol de Pasternak [Pasternak, 1954]. Ici, le coefficient de réaction prend la

forme  $p(x, t) = kw(x, t) - gw''(x, t)$  (équation (2.2)). Ce type de sol, très peu connu de la dynamique des structures (car plus complexe à la différence de Winkler) présente des intérêts dans la mise en place des équations.

$$\begin{cases} EIw_1^{(4)}(x, t) + \rho A \ddot{w}_1(x, t) = 0, \\ EIw_2^{(4)}(x, t) - gw_2''(x, t) + kw_2(x, t) + \rho A \ddot{w}_2(x, t) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Dès lors, on considère une séparation des variables dans une base de modes en écrivant le déplacement en flexion de la structure par :

$$w(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(t) W_r(x).$$

Pour un mode  $r$  considéré, la solution du problème (2.11) sera écrite sous une forme d'onde complexe spatio-temporelle :

$$w(x, t) = e^{\lambda_r x} e^{i\omega_r t}.$$

L'équation (2.11) devient alors,

$$\begin{cases} \lambda_r^4 e^{\lambda_r x} - \frac{\rho A \omega_r^2}{EI} e^{\lambda_r x} = 0, \\ \lambda_r^4 e^{\lambda_r x} - \frac{g}{EI} \lambda_r^2 e^{\lambda_r x} + \frac{(k - \rho A \omega_r^2)}{E_b I_b} e^{\lambda_r x} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Les polynomes caractéristique de l'équation (2.12) mettent en évidence une relation classique pour la partie libre et une relation de dispersion pour la partie enfouie. On définit alors des grandeurs caractéristiques issus de l'interaction entre le sol et le mode de la structure,

$$\begin{cases} \omega_r^2 = -\frac{\ddot{q}_r(t)}{q_r(t)}, \\ \beta_r^4 = \frac{\rho A \omega_r^2}{EI}, \\ \delta_r^4 = \frac{(k - \rho A \omega_r^2)}{4EI} = \frac{k}{4EI} - \frac{\beta_r^4}{4}, \\ \gamma_r^2 = \frac{(k - \rho A \omega_r^2)}{g}, \\ \mu_r = \frac{\frac{g}{\delta_r^2}}{\gamma_r^2} = \frac{g}{2\sqrt{(k - \rho A \omega_r^2)} EI}. \end{cases} \quad (2.13)$$

$\omega_r$  est la pulsation du système ( $s^{-1}$ ).  $\beta_r$  et  $\delta_r$  sont associées à des longueurs caractéristique (en  $m^{-1}$ ). Quant à  $\mu_r$  et  $\gamma_r$ , ce sont des grandeurs qui prennent en compte l'effet du cisaillement dans le caractère dispersif du sol. Pour la suite nous supposons préalablement que la quantité " $k - \rho A \omega^2$ " est positive. Cette hypothèse est acceptable pour une poutre où  $\rho A \omega^2$  est négligeable devant  $k$ . Pour les premières fréquences propres on admet que cette hypothèse est vérifiée.

**Caractérisation des fréquences propres.**

La caractérisation des fréquences propres du problème se fait par une étude de l'évolution de celles-ci vis-à-vis des grandeurs caractéristiques du système. Nous avons redéfini, par conséquent, les paramètres obtenus dans l'équation (2.13) sous une forme adimensionalisée,

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{W}_r = \frac{W_r}{L}, \quad \tilde{\beta}_r^4 = \beta_r^4 L^4, \quad \tilde{\delta}_r^4 = \delta_r^4 L^4. \quad (2.14)$$

En effet, comme la solution de l'équation (2.11) prend une forme d'onde spatio-temporelle, nous mettrons en évidence l'étude des nombres d'ondes de l'équation 2.13. Par conséquent l'étude de la fréquence propre  $\omega_r$  est dépendante de l'étude de la pulsation spatiale  $\beta_r$ . Pour  $\tilde{x} \in [-a/L, 0]$ ,  $\lambda_r = \tilde{\beta}_r$  une solution triviale issue des poutres en flexion dans le vide :

$$\tilde{W}_r(\tilde{x}) = A_1 \cos(\tilde{\beta}_r \tilde{x}) + A_2 \sin(\tilde{\beta}_r \tilde{x}) + A_3 \cosh(\tilde{\beta}_r \tilde{x}) + A_4 \sinh(\tilde{\beta}_r \tilde{x}). \quad (2.15)$$

Quant au domaine  $\tilde{x} \in [0, D/L]$ ,  $\lambda_r$  est solution du polynôme suivant :

$$\lambda_r^4 - 4\tilde{\delta}_r^2 \mu_r \lambda_r^2 + 4\tilde{\delta}_r^4 = 0. \quad (2.16)$$

D'après l'équation (2.16)  $\lambda_r$  admet quatre solutions :

$$\lambda_r = \pm \tilde{\delta}_r \sqrt{2(\mu_r \pm \sqrt{\mu_r^2 - 1})}.$$

Donc, dans la partie enfouie  $\tilde{x} \in [0, D/L]$ , cette pulsation spatiale  $\lambda_r$  va dépendre de la valeur de la quantité  $\mu_r^2 - 1$ .

**Premier cas :  $\mu_r < 1$**

$$\lambda_r = \pm \phi_1 \pm j \phi_2.$$

Avec,  $\phi_1 = \tilde{\delta}_r \sqrt{1 + \mu_r}$  et  $\phi_2 = \tilde{\delta}_r \sqrt{1 - \mu_r}$ .

D'où,

$$\tilde{W}_r(\tilde{x}) = \exp(\phi_1 \tilde{x})(B_1 \cos(\phi_2 \tilde{x}) + B_2 \sin(\phi_2 \tilde{x})) + \exp(-\phi_1 \tilde{x})(B_3 \cos(\phi_2 \tilde{x}) + B_4 \sin(\phi_2 \tilde{x})). \quad (2.17)$$

**Deuxième cas :  $\mu_r = 1$**

$\lambda$  admet deux racines doubles,

$$\lambda_r = \pm \sqrt{2} \tilde{\delta}_r = \pm \phi,$$

D'où,

$$\tilde{W}_r(x) = \exp(\phi \tilde{x})(B_1 + B_2 \tilde{x}) + \exp(-\phi \tilde{x})(B_3 + B_4 \tilde{x}). \quad (2.18)$$

**Troisième cas :**  $\mu_r > 1$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\phi_1 \pm \phi_2.$$

Avec,  $\phi_1 = \tilde{\delta}_r \sqrt{1 + \mu_r}$  et  $\phi_2 = \tilde{\delta}_r \sqrt{\mu_r - 1}$

D'où,

$$\tilde{W}_r(x) = \exp(\phi_1 \tilde{x})(B_1 \cosh(\phi_2 \tilde{x}) + B_2 \sinh(\phi_2 \tilde{x})) + \exp(-\phi_1 \tilde{x})(B_3 \cosh(\phi_2 \tilde{x}) + B_4 \sinh(\phi_2 \tilde{x})) \quad (2.19)$$

En combinant ces solutions de déplacements selon le cas (équations (2.17), (2.18), (2.19)) avec l'équation (2.15) et les conditions aux limites de (2.10) on obtient le système suivant,

$$C(\mu_r) \begin{pmatrix} -\cos(\beta_r a) & \sin(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_r a) & -\cos(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta_r & 0 & \beta_r & & & & \\ -\beta_r^2 & 0 & \beta_r^2 & 0 & & & & \\ 0 & -\beta_r^3 & 0 & \beta_r^3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Avec  $C(\mu_r)$ , une sous-matrice dépendante du coefficient  $\mu_r$  (Annexe B.2). Les fréquences propres du système  $\omega_r$  (par le biais de  $\beta_r$ ) sont solutions d'une fonction transcendante  $F(\beta_r, \mu_r)$  qui provient du problème aux valeurs propres imposé par les conditions aux limites, soit,

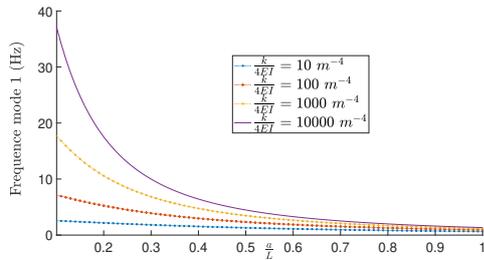
$$F(\beta_r, \mu_r) = \begin{vmatrix} -\cos(\beta_r a) & \sin(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_r a) & -\cos(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta_r & 0 & \beta_r & & & & \\ -\beta_r^2 & 0 & \beta_r^2 & 0 & & & & \\ 0 & -\beta_r^3 & 0 & \beta_r^3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} C(\mu_r) = 0. \quad (2.21)$$

Les racines de cette fonction sont non-triviales et par conséquent, la résolution se doit d'être numérique et approchée. Nous avons mis au point une méthode itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson avec comme point initial la solution pour une poutre encastree-libre de longueur  $a$ . En effet, les hypothèses de cette section permettent de conjecturer que la solution sera fortement proche d'une poutre encastree-libre. sur la Figure (2.5), nous avons tracé la première fréquence propre comme solution de l'équation (2.21) où l'on considère la première racine  $\beta_1$  intrinsèquement liée à  $\omega_1 = 2\pi f_1$  dans l'équation (2.13). Pour résoudre l'équation (2.21), nous avons en réalité un couple de solution  $(\beta_1, \mu_1)$ . Premièrement sur la Figure

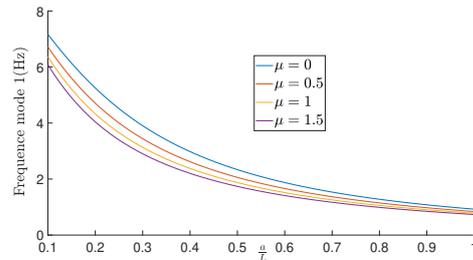
2.5a, nous avons fixé  $\mu_1 = 0$ . C'est-à-dire que nous nous plaçons dans le cas des sols de Winkler. Avec ce cas d'étude il est intéressant d'observer l'influence du rapport entre le rigidité en flexion de la poutre et celle du sol, c'est-à-dire  $\frac{k}{4EI}$ . Plus la rigidité du sol est importante et plus nous remarquons une décroissance proche de ce que nous avons pour une poutre encastree-libre. En effet, la fréquence propre d'une poutre encastree-libre est proportionnelle en  $1/L^3$  d'après le Tableau 1.2.

Sur la Figure 2.5b, notre étude s'est portée sur l'influence du paramètre  $\mu_1$  par rapport à la variation de la première fréquence propre relativement à l'affouillement. Pour  $\mu_1 \neq 0$ , les solutions de l'équation (2.21) deviennent difficiles à estimer. Cependant, dans la littérature [Basmaji, 2017] le coefficient  $g$  est relativement faible lorsqu'on le compare au coefficient  $k$ . C'est pourquoi une linéarisation au première ordre du paramètre  $\mu_1$  dans l'équation (2.13) a été effectuée en supposant,

$$\mu_1 = \mu = \frac{g}{2\sqrt{kEI}}. \quad (2.22)$$



(a) Influence du rapport  $k/4EI$  sur la sensibilité de la première fréquence propre à l'affouillement ( $\mu = 0$ ).



(b) Influence du coefficient  $\mu$  sur la sensibilité de la première fréquence propre à l'affouillement ( $\frac{k}{4EI} = 1000 \text{ m}^{-4}$ ).

FIGURE 2.5 – Influence des paramètres du modèles sur la première fréquence propre.

Cette hypothèse revient à transformer ce coefficient dynamique en coefficient statique. Ce qui se réécrit sous la forme suivante,

$$k \gg \rho A \omega_r^2. \quad (2.23)$$

Donc, dans ce cadre d'étude, la Figure 2.5b permet d'observer que, dans une moindre mesure, le paramètre  $\mu_1$  n'influence pas le caractère encastree du mode 1 du système à fondations profondes. En d'autres termes, l'augmentation du coefficient de cisaillement de Pasternak  $g$  augmente la fréquence sans pour autant changer la nature de la courbure de l'évolution de la fréquence propre du système affouillé que nous traitons dans cette partie. En conséquence, les analyses présentées sur la Figure 2.5 permettent de considérer une sensibilité de  $f_1 \left( \frac{a}{L} \right)$  avec notamment une décroissance de la première fréquence propre en augmentant la longueur libre  $a$ . D'autre part, nous pouvons observer une certaine courbure se rapprochant du comportement de poutre encastree-libre lorsque le rapport  $\frac{k}{4EI}$  augmente ( pour plus

de  $1000 m^{-4}$  environ).

### Encastrement équivalent pour le premier mode.

Lorsque nous étudions le cas des poutres relativement souples ( $\frac{k}{4EI} \gg 100 m^{-4}$ ), la question d'un encastrement équivalent semble assez judicieuse. Appelons  $L_{eq}(a)$  la longueur d'une poutre encastree-libre ayant la même fréquence propre que le système de longueur  $L = a + D$  peu importe le coefficient de Pasternak  $g$  (Figure 2.5b). Comme le souligne la Figure 2.6 où  $\frac{k}{4EI} = 100 m^{-4}$ ,  $L_{eq}(a)$  se définit par une projection parallèlement à l'axe des longueurs de la courbe de la première fréquence propre sur la courbe de la fréquence propre d'une poutre encastree-libre. En outre, la distance euclidienne entre un point de la courbe solution de l'équation (2.21) et sa projection sur la courbe de la poutre encastree-libre  $\frac{L_{eq}(a) - a}{L}$  peut être supposée constante.

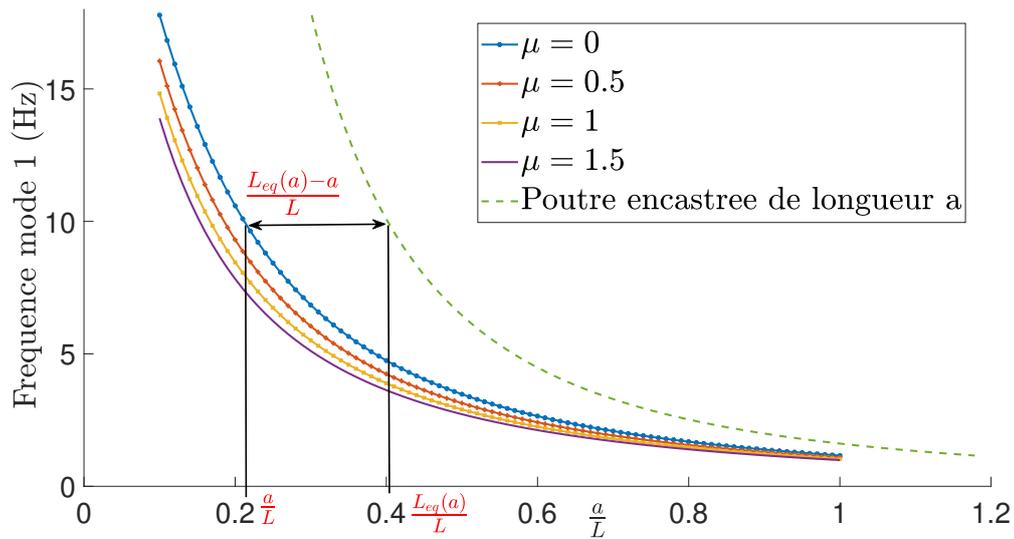
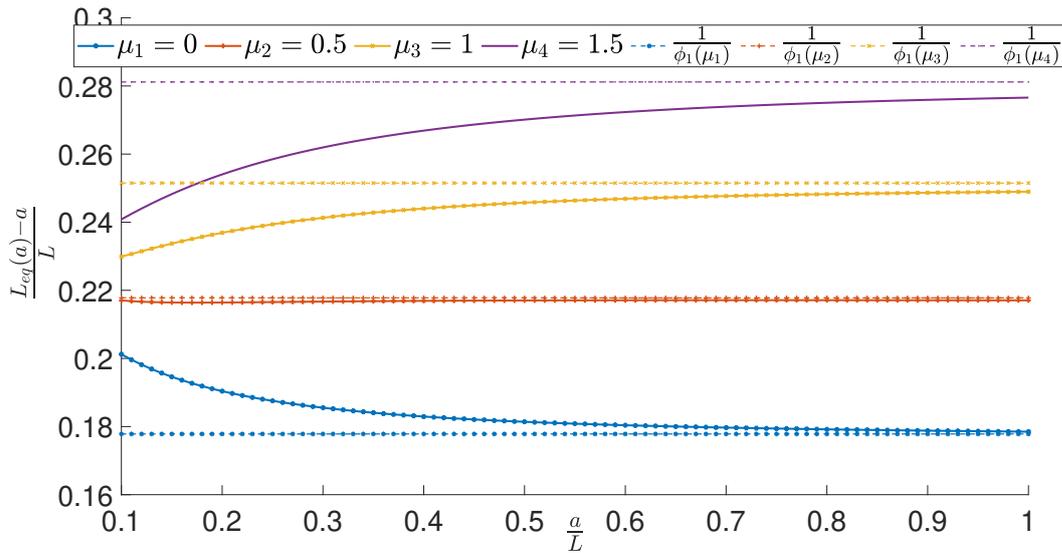


FIGURE 2.6 – Sensibilité de la fréquence propre par rapport à  $\frac{a}{L}$  pour différentes valeurs de  $\mu \approx \frac{g}{2\sqrt{kEI}}$  et comparaison avec poutre encastree-libre.

En fait, lorsque l'on regarde de plus près sur la Figure 2.7, on peut observer que la quantité  $\frac{L_{eq}(a) - a}{L}$  tend vers une constante lorsque  $a/L$  augmente. On a trouvé un candidat pour cette constante : le nombre d'onde  $1/\phi_1$ .

On observe l'asymptote quand  $a \rightarrow L$  qui peut être expliquée physiquement par une longueur libre suffisante pour que sa contribution énergétique ne soit plus négligée. En effet, si l'on considère l'énergie  $E_a$  induite par les vibrations de la partie libre  $W_1(x)$ ,  $x \in [-a, 0]$  et  $E_{equivalent}$  l'énergie totale des vibrations du mode 1 d'une


 FIGURE 2.7 – Distance asymptotique de la longueur équivalente  $L_{eq}$ .

poutre encastree-libre de longueur  $L_{eq}(a)$ , leur rapport rapport tend vers 1,

$$\lim_{a \rightarrow L} \left( \frac{E_a}{E_{equivalent}} \right) = 1.$$

C'est pourquoi l'idée d'encastrement équivalent se doit d'être applicable dès lors que la longueur  $a$  est suffisamment élevée pour que sa contribution à l'énergie totale ne soit plus négligeable. L'idée est alors que pour des fondations profondes  $D \gg L_R$  ([Randolph, 1981]) et pour une longueur libre suffisamment conséquente  $a \gg \frac{1}{\phi_1}$ , on établit la relation suivante,

$$L_{eq}(a) \approx a + \frac{1}{\phi_1}. \quad (2.24)$$

Cette idée d'encastrement équivalent est assez pratique d'un point de vue ingénieur. En effet, comme le montre le schéma décrit sur la Figure 2.8, la détermination de la longueur libre donc de l'évolution de l'affouillement pourra s'effectuer par un calibrage sur un modèle de poutre encastree-libre équivalente.

### 2.2.3 Évolution des conditions aux limites avec l'affouillement

Les conjectures lors de la section 2.2.1 avec plus particulièrement l'hypothèse d'encastrement équivalent restent valables sous certaines conditions ( $EI \ll kl^4$ ,  $k \gg \rho A \omega_r^2$ ,  $a \gg \frac{1}{\phi_1}$  et  $D \gg L_R$ ). Cependant lors d'un processus d'affouillement, par l'évolution de  $D$  la condition,  $D \gg L_R$  n'est plus respectée et de nouvelles conditions aux limites doivent être imposées.

#### Seuil d'activation pour de nouvelles conditions aux limites.

La longueur caractéristique  $1/\phi_1$  introduit dans la section 2.2.2 peut être interprété comme une profondeur de peau. On peut constater un effet de peau

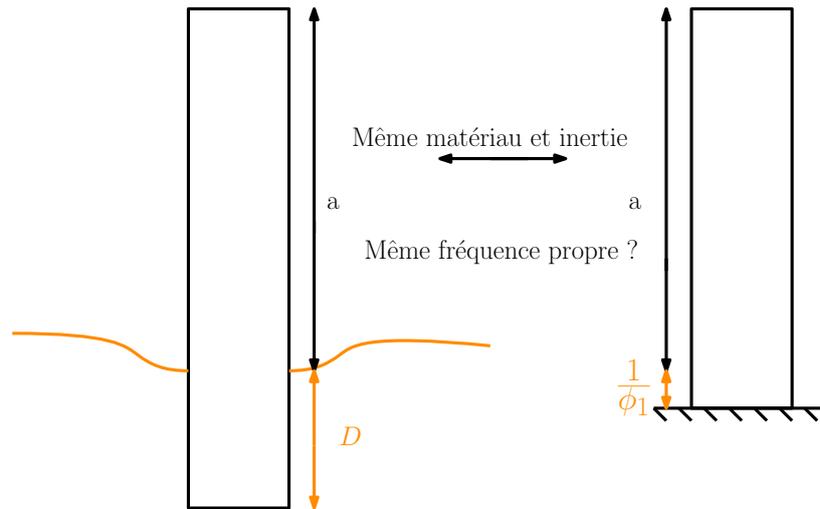


FIGURE 2.8 – Conjecture de poutre encasté-libre équivalente.

pour le déplacement modal  $W(x)$  qui concerne la partie pénétrant le sol. Autrement dit l'onde de flexion du mode est localisée non loin de l'interface sol-libre  $x = 0$ . Les déplacements sont en fait très vite atténués jusqu'à atteindre un pseudo-encastrement. Le tracé des déformées en Figure 2.9 peut en illustrer ce phénomène.

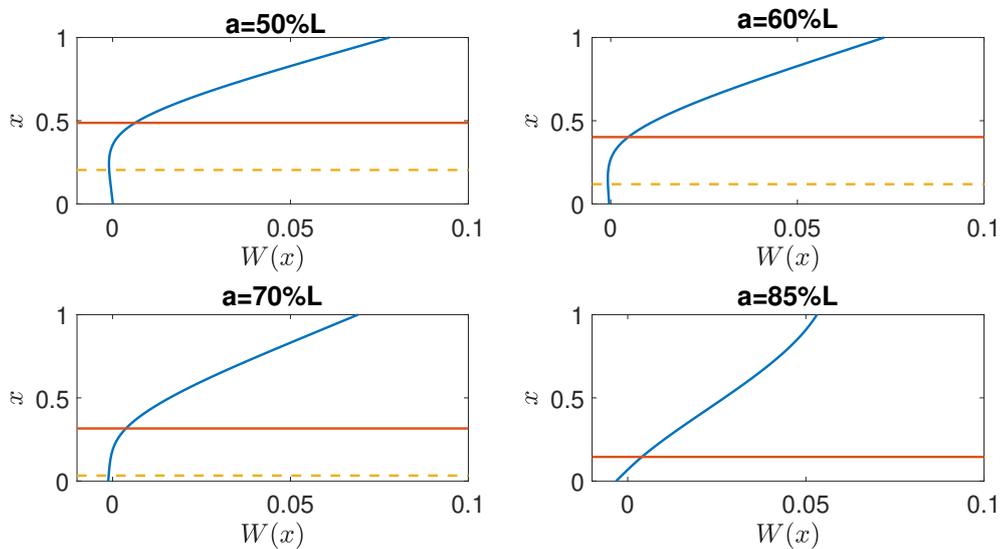


FIGURE 2.9 – Déformées modales normalisée du mode 1 pour  $\mu = 0,5$  et pour différentes valeurs de  $a$  (niveau de  $a$  par un trait orange et  $1/\phi_1$  par un trait jaune).

Avec cette approche de la physique du phénomène, nous commencerons par redéfinir la longueur critique pour le changement de conditions aux limites. La longueur critique  $L_r$  introduite pour le cas statique est désormais remplacée par une longueur "active" dynamique,  $L_a$  dépendant des déplacements à l'interface du sol  $x = 0$  ( $W_r(0) = W_{r0}$  and  $W_r'(0) = W_{r'0}$ ) pour le cas des sols de Winkler ( $g = 0$ ).

$$L_a(W_{r0}, W'_{r0}, \omega_r) = \alpha(W_{r0}, W'_{r0}) \frac{1}{\phi_1} = \frac{\alpha(W_{r0}, W'_{r0})}{\delta_r}, \quad (2.25)$$

où  $\alpha(W_{r0}, W'_{r0})$  est un seuil dépendant du couple  $(B_3, B_4)$  de l'équation (2.17) (on néglige les terme de l'exponentielle positive  $B_1$  et  $B_2$  car cinématiquement proche de 0),

$$B_3 = W_{r0} \quad \text{et} \quad B_4 = \frac{W'_{r0}}{\delta_r},$$

car,

$$|W_r(x)| \leq \exp(-\delta_r x) \left( |W_{r0}| + \left| \frac{W'_{r0}}{\delta_r} \right| \right). \quad (2.26)$$

Avec cette nouvelle longueur active  $L_a$ , par exemple nous pouvons définir les seuils suivants,

- Si on néglige les déplacements en  $x = D$  en dessous de  $15\% \times \left( |W_{r0}| + \left| \frac{W'_{r0}}{\delta_r} \right| \right)$ ,  
i.e on veut  $W_r(d) \leq 15\% \times \left( |W_{r0}| + \left| \frac{W'_{r0}}{\delta_r} \right| \right)$ ,  $\alpha(W_{r0}, W'_{r0}) = 2$ ,
- Si on néglige les déplacements en  $x = D$  en dessous de  $5\% \times \left( |W_{r0}| + \left| \frac{W'_{r0}}{\delta_r} \right| \right)$ ,  
 $\alpha(W_{r0}, W'_{r0}) = 3$ ,
- Si on néglige les déplacements en  $x = D$  en dessous de  $1\% \times \left( |W_{r0}| + \left| \frac{W'_{r0}}{\delta_r} \right| \right)$ ,  
 $\alpha(W_{r0}, W'_{r0}) = 5$ ,

Naturellement, l'hypothèse (2.10) se doit d'être remise en question pour  $D < 1/\phi_1$ . L'effet de peau n'est plus applicable, ou bien l'exponentielle positive dans les équations (2.17),(2.18),(2.19) n'est plus négligeable.

### Fréquences propres avec d'autres conditions aux limites.

La première fréquence propre est solution d'un nouveau problème à 8 dimensions cette fois-ci. Par analogie avec la section 2.2.2, nous avons une fréquence  $\omega_r$  solution d'une nouvelle fonction transcendante,

$$F_{CL}(\beta_r, \mu_r) = \begin{vmatrix} -\cos(\beta_r a) & \sin(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_r a) & -\cos(\beta_r a) & -\sinh(\beta_r a) & \cosh(\beta_r a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta_r & 0 & \beta_r & & & & \\ -\beta^2 & 0 & \beta_r^2 & 0 & & & & \\ 0 & -\beta_r^3 & 0 & \beta_r^3 & & & C_{CL}(\mu_r) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{vmatrix}.$$

Avec,  $C_{CL}$  a 5 lignes et 4 colonnes dépendantes d'une valeur critique de  $\mu_r$ . Sur la Figure 2.10, différentes conditions aux limites en  $x = D$  sont supposées en gardant l'hypothèse de comportement en flexion de la pile de pont :

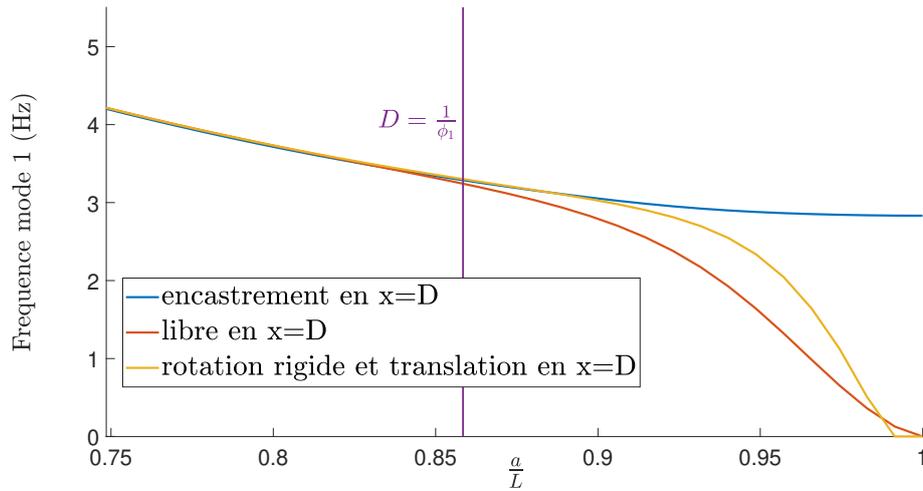


FIGURE 2.10 – Sensibilité de la première fréquence propre pour différentes conditions aux limites.

— Rotation rigide comme abordée dans la section 2.1,

$$\begin{cases} K_r w_2'(D, t) = EI w_2''(D, t), \\ K_h w_2(D, t) = EI w_2^{(3)}(D, t). \end{cases} \quad (2.27)$$

— Libre, on suppose qu'il n'y a pas d'efforts localisés en  $x = D$ ,

$$\begin{cases} w_2''(D, t) = 0, \\ w_2^{(3)}(D, t) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Il est pertinent de remarquer que dès lors que  $D$  est inférieur à la profondeur de peau, la fréquence propre n'est plus du tout similaire pour les différentes conditions d'ancrages envisagées : la sensibilité à l'affouillement n'est plus la même.

## 2.3 Approche par des éléments indéformables au comportement vibratoire rigide

Les modèles de flexion de piles de pont ont permis d'observer un changement de conditions aux limites selon la profondeur d'affouillement  $D$  ou du moins, une "activation" d'une possible rotation rigide à partir de la profondeur  $D \ll 1/\phi_1$ . Ce modèle de rotation rigide tend vers une fréquence nulle et dès lors on parle de mode rigide.

### 2.3.1 Formulation du problème

Par définition, un mode rigide est un mode de solide indéformable. Pour les solides de types poutres, les notions de champs de déformations et de contraintes perdent leur sens. Néanmoins, grâce aux conditions aux limites, nous savons que les modes rigides décrivent les mécanismes des structures hypostatiques. En effet, pour les poutres de degré isostatique supérieurs à 0, les modes rigides associés seront de déplacements nuls car ils sont à l'état d'équilibre global avec les forces extérieures. Mais pour le cas statique, le problème devient dès lors mal posé car hypostatique (plus d'inconnues que d'équations) et une infinité de solutions peuvent exister dont des mécanismes. Dès lors, c'est la dynamique de la structure qui pourra apporter une solution unique au problème, l'inertie de la structure propose une solution de fréquence nulle pour les solutions des fonctions transcendentes. On appelle cela le mode 0. Prenons pour exemple les conditions aux limites dites classiques. L'équation régie par ce mode 0 peut s'écrire,

$$W^{(4)}(x) = 0. \quad (2.29)$$

Avec  $W^{(4)}(x)$ , la coordonnée spatiale du déplacement du mode rigide. Pour les conditions aux limites usuelles, le Tableau 2.1 présente les comportements rigides adoptés. En somme, le déplacement libéré par la condition aux limites se traduit par un déplacement rigide. Dans la configuration de la Figure 2.1, nous avons des

Conditions aux limites " $x = -a$ — $x = D$ "	Mode(s) rigide(s) associé(s)
Libre-Libre	Mode de translation : $W(x) = A$ Mode de rotation : $W(x) = Ax + B$
Encastrée-Libre	Aucun modes
Appuyé-Libre	Mode de rotation : $W(x) = Ax + B$
Rotule-Libre	Mode de translation : $W(x) = A$

TABLE 2.1 – Modes rigides associés aux flexions des poutres d'Euler Bernoulli pour des conditions aux limites "classiques"

formes d'équations différentes :

$$\begin{aligned} W_1(x) &= 0, \\ W_2^{(4)}(x) + \frac{g}{EI} W_2^{(4)}(x) + \frac{k}{EI} W_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Une solution à l'équation (2.31) peut prendre la forme suivante,

$$\begin{cases} W_1^{(4)}(x) = A_0 + A_1 x, \\ W_2^{(4)}(x) = \exp(-x\phi_{1_0}) \left( B_1 \cos(x\phi_{2_0}) + B_2 \sin(x\phi_{2_0}) \right) \\ \quad + \exp(x\phi_{1_0}) \left( B_3 \cos(x\phi_{2_0}) + B_4 \sin(x\phi_{2_0}) \right). \end{cases} \quad (2.31)$$

Avec  $(\phi_{1_0}, \phi_{2_0})$ , les solutions de l'équation (2.17) pour des pulsations nulles et  $\mu < 1$  (sol moins rigide que la structure). Or, nous avons supposé que ce mode rigide apparaît lorsque  $D \ll 1/\phi_{1_0}$ . On peut approcher une solution de déplacement au premier ordre selon  $x$ .

$$W_2(x) = B_1 + (B_1 + B_2)x. \quad (2.32)$$

Avec,

$$\begin{cases} B_1 = \frac{F}{K_H}, \\ B_2 = \frac{M}{K_r} - \frac{F \times M}{K_H \times K_r}, \\ A_0 = B_1, \\ A_1 = B_2. \end{cases}$$

Où  $F$  et  $M$  sont respectivement la force et le moment en  $x = 0$ . Au final nous avons des modes rigides sous une forme d'une rotation et d'une translation. On peut concevoir que la présence du sol crée un "déséquilibre" de la pile qui résulte d'une rotation et d'un glissement à l'ancrage de la pile.

### Modélisation.

sur la Figure 2.11, le mode rigide est décrit par deux degrés de liberté (DDL)  $\theta(t), w(x, t)$  où,

$$w(x, t) = \sin(\theta(t))x + w_b(t) = \sin(\theta(t)) \left( x - \frac{L}{2} \right) + w_g(t). \quad (2.33)$$

Avec,  $w_b(t)$  et  $w_g(t)$  sont respectivement les déplacements à la base et à son centre de gravité. L'état d'équilibre de ce système s'écrit alors sous la forme suivante,

$$\begin{cases} m\ddot{w}_g(t) + \left( \int_0^D kw(x, t) dx \right) + K_h w_b(t) = 0, \\ J\ddot{\theta}(t) - \left( \int_0^D kw(x, t) \left( x - \frac{L}{2} \right) dx \right) - \frac{K_h L}{2} w_b(t) + K_r \theta(t) = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $m$  et  $J$  sont respectivement la masse totale de la pile et son moment d'inertie.

### Linéarisation du problème.

L'équation (2.34) est non-linéaire mais dans l'approximation des petits angles,

$$\theta(t) \ll 1,$$

alors les équations du système sont régies par le système linéaire suivant,

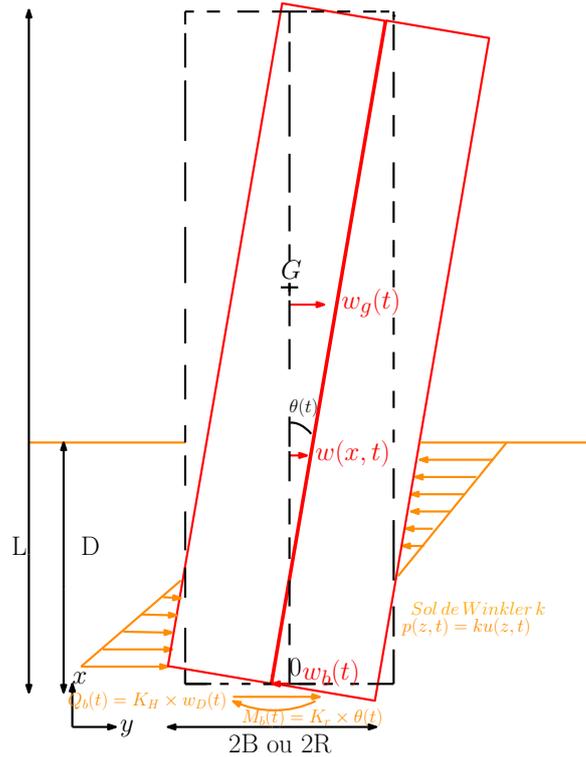


FIGURE 2.11 – Schéma de modélisation d'un comportement rigide d'une pile de pont affouillée. Longueur  $L$  et d'épaisseur  $2B$  ou  $2R$ .

$$[M] \begin{pmatrix} \ddot{w}_g(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} + [K(D)] \begin{pmatrix} w_g(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.35)$$

avec la matrice des masses,

$$[M] = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

et la matrice de raideur,

$$[K(D)] = \begin{pmatrix} kD + K_h & \frac{kD}{2}(D-L) - \frac{K_h L}{2} \\ \frac{kD}{2}(D-L) - \frac{K_h L}{2} & \frac{kD}{2} \left( \frac{2}{3} D^2 - LD + \frac{L^2}{2} \right) - \frac{K_h L^2}{4} + K_r \end{pmatrix}.$$

La linéarisation du problème initial introduit dans (2.34) permet de conceptualiser l'affouillement comme un endommagement de la matrice de rigidité  $K(D)$ . Il y a donc changement d'angle d'attaque par rapport à la section 2.2 : cette fois-ci l'affouillement ne sera pas modélisé comme une variation de longueur caractéristique mais par une dégradation de la rigidité structurale.

### 2.3.2 Sensibilité des paramètres à l'affouillement

Pour cette configuration d'affouillement où la hauteur de sol est faible, la première étape est d'étudier la sensibilité d'une variation de hauteur de sol pour la matrice de rigidité. Par conséquent, cela changera les caractéristiques modales.

**Paramètre d'interaction-sol structure.**

Tout d'abord, un changement de modèle de sol est judicieux. En effet, Gazetas [Gazetas & Tassoulas, 1987, Gazetas, 1991] propose des modèles fondations dites rigides qui sont très sensibles à la variation de sol. De plus, la géométrie influe sur la réaction du sol [Gerolymos & Gazetas, 2006, Varun et al., 2009]. Relativement à l'épaisseur de la structure, plus la longueur de sol est faible, plus le coefficient de rigidité  $k$  est sensible.

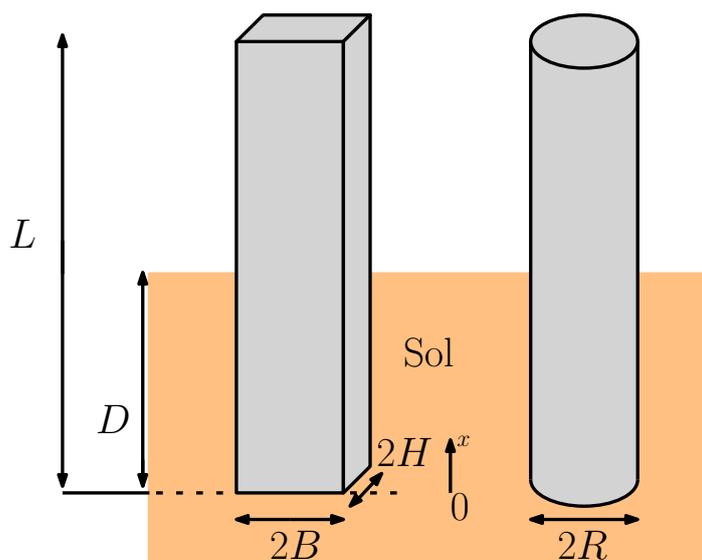


FIGURE 2.12 – Propriétés géométriques pour le problème des vibrations rigides.

Selon la géométrie (circulaire ou rectangulaire, Figure 2.12) et le module d'Young du sol  $E_s$ , [Gazetas, 1991] a proposé des expressions pour les rigidités des sols.

- Pile circulaire de diamètre  $2R$ .
- Pile rectangulaire de section  $2B \times 2H$ , où  $2B$  est orientée selon l'axe  $y$ .

Pour les ressorts de réaction du sol ( $k, K_r, K_h$ ) de l'équation (2.34) nous considérons les relations suivantes [Gerolymos & Gazetas, 2006, Varun et al., 2009],

- pile circulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = k(D, R) \approx 1.75 \left( \frac{D}{R} \right)^{-0.13} E_s, \\ K_r = K_r(R) = \frac{2GR}{2 - \nu'}, \\ K_h = K_h(R) = \frac{8GR^3}{3(1 - \nu')}, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

— pile rectangulaire :

$$\begin{cases} k &= k(D, B) \approx 2.18 \left(\frac{D}{B}\right)^{-0.13} E_s, \\ K_r &= K_r(R_0) = \frac{2GR_0}{2-\nu}, \\ K_h &= K_h(R_{0r}) = \frac{8GR_{0r}^3}{3(1-\nu)}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Avec  $(R_0, R_{0r})$  les rayons équivalents  $(K, K_r)$  :

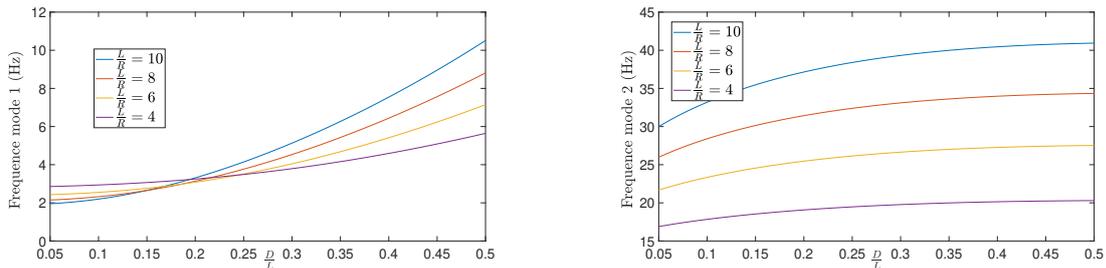
$$\begin{cases} R_0 &= \sqrt{\frac{2B \times 2H}{\pi}}, \\ R_{0r} &= \left(\frac{16HB^3}{3\pi}\right)^{1/4}. \end{cases} \quad (2.38)$$

**Sensibilité de la fréquence propre aux divers paramètres.**

Les paramètres géométriques prennent de nouveaux aspects pour l'influence des phénomènes vibratoires. Regardons en toute logique l'influence de ces paramètres sur la variation de la fréquence propre par rapport à l'affouillement. Tout d'abord le système à deux degrés de liberté implique 2 modes. Les fréquences propres de ce système correspondent à un problèmes aux valeurs propre qui s'écrit cette fois-ci,

$$P(\omega_0, D) = \det([K(D)] - \omega_0^2[M]) = 0. \quad (2.39)$$

Sur la Figure 2.13, l'équation (2.39) est résolue numériquement pour un cas de pile circulaire et différents rapports  $D/R$ . On peut dores et déjà constater la sensibilité des modes à l'affouillement.



(a) Première fréquence rigide pour différents élancements.

(b) Deuxième fréquence rigide pour différents élancements.

FIGURE 2.13 – Fréquences des modes rigides de piles circulaires pour différents élancements  $L/R$ .

sur la Figure 2.13a, plus l'élancement est important et plus la sensibilité de l'affouillement est forte pour le mode 1. Alors que sur la Figure 2.13b, l'élancement ne semble par rendre le phénomène plus sensible pour le mode 2.

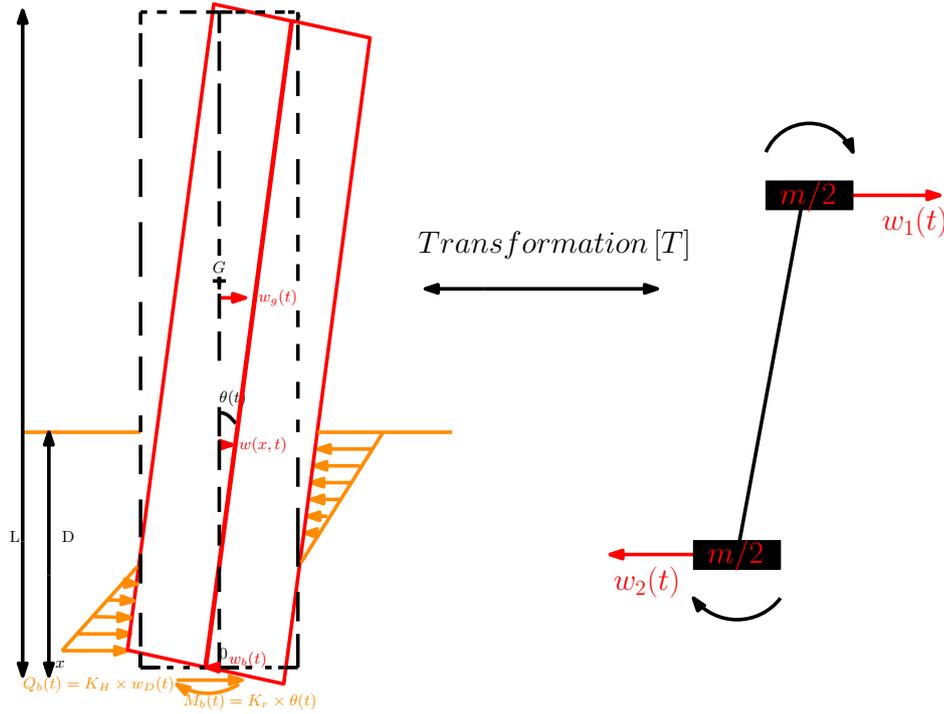


FIGURE 2.14 – Transformation du problème à un problème à deux noeuds pour l'analyse modale.

### 2.3.3 Identification des modes rigides pour le suivi de l'affouillement

Tout d'abord, nous devons réécrire d'une manière plus appropriée les équations de (2.35) pour l'identification des modes rigides dans l'approximation des petit angles  $\theta \ll 1$ . En effet, dans la relation (2.35) chaque inconnue cinématique n'a pas la même unité. L'une est un déplacement  $W_{gr}(D)$  et l'autre un angle  $\Theta_r(D)$ . On a choisi d'introduire un système à deux degrés de liberté équivalent avec comme noeuds les déplacements en haut de piles  $w_1(t)$  et en bas de pile  $w_2(t)$ . Pour des questions de normes et de représentation, l'idée est d'analyser un système discret afin d'être en conformité avec des observations expérimentales. La Figure 2.14 en présente son principe.

$$(w_1(t), w_2(t)) = (w(0, t), w(L, t)). \quad (2.40)$$

L'équation (2.40) correspond à une transformation des coordonnées par le biais de la matrice  $[T]$  telle que,

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} w_g(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Avec,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{L}{2} \\ 1 & \frac{L}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette transformation permet de réécrire les équations du mouvement en introduisant de nouvelles matrices de masses et de rigidité (toujours symétriques définies

positives),

$$\begin{cases} [M'] &= [P]^T[M][P], \\ [K'(D)] &= [P]^T[K(D)][P]. \end{cases} \quad (2.42)$$

Avec  $[P] = [T]^{-1}$ . La nouvelle formulation du problème devient,

$$[M'] \begin{pmatrix} \ddot{w}_1(t) \\ \ddot{w}_2(t) \end{pmatrix} + [K'(D)] \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.43)$$

La base modale ( $\{\phi_r(D)\}, \omega_r^2$ ) du système rigide à 2 DDL et 2 modes ( $r = \{1, 2\}$ ) conserve la fréquence  $\omega_r$  définie par,

$$([M']^{-1}[K'(D)])\{\phi_r(D)\} = \omega_r(D)^2\{\phi_r(D)\}. \quad (2.44)$$

Avec,

$$\{\phi_r(D)\} = \begin{pmatrix} W_{1r}(D) = W_{gr}(D) - \Theta_r(D)\frac{L}{2} \\ W_{2r}(D) = W_{gr}(D) + \Theta_r(D)\frac{L}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Sur la Figure 2.15, la décomposition modale issu de l'équation (2.44) est tracée pour un rapport  $L/R = 8$  selon deux représentation. La norme euclidienne,

$$\{\phi_r(D)\}^T \{\phi_r(D)\} = 1,$$

Et la représentation suivante,

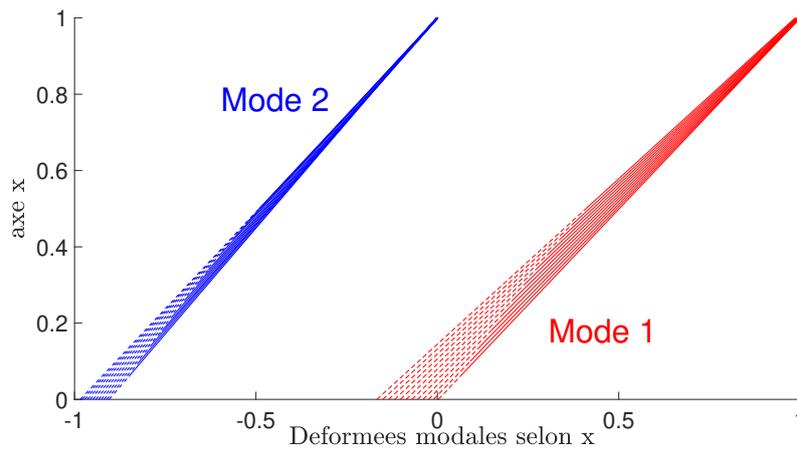
$$W_{2r}(D) - W_{1r}(D) = 1 \Leftrightarrow \Theta_r(D) = \frac{1}{L}. \quad (2.46)$$

La partie en pointillés "- - -" des Figures 2.15b correspond à la partie de la pile enfouie. Pour la norme euclidienne (Figure 2.15a), la représentation nous permet d'observer que le premier mode à des rotations plus importante par rapport au second mode. Et sur la Figure 2.15b, en conservant l'angle on peut voir une variation plus importante du déplacement à la base pour le second mode. Ces observations ont attiré notre attention car elle nous ont permis de définir un hyper-paramètre  $x_{cr}$  qui est le centre de rotation de la déformée modal du mode  $r$ . En effet, il en découle des conclusions tirées sur la Figure 2.15 que l'identification des modes peut se faire au travers de cet hyper-paramètre.

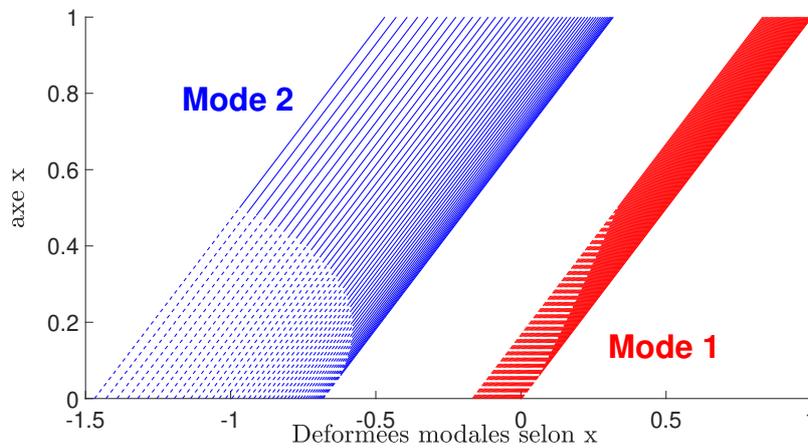
L'identification modale classique des piles rigides présente trois paramètres, la fréquence propre et les déformées aux deux noeuds. Dès lors, le centre de rotation du mode  $r$ ,  $x_{cr}$ , réduit le problème d'analyse à deux paramètres : fréquence propre et centre de rotation. De plus, la représentativité des modes devient plus allégé car  $x_{cr}$  ne dépend pas de la norme choisie :

$$x_{cr}(D) = \frac{L}{2} - \frac{W_{gr}(D)}{\theta_r(D)} = L \frac{W_{1r}(D)}{W_{1r}(D) - W_{2r}(D)}. \quad (2.47)$$

Sur la Figure 2.16, nous observons les conjectures issues de l'identification modal des modes rigides. Notamment, la sensibilité est inversée pour chaque mode (Figure 2.16) : une croissance pour le mode 1 et une décroissance pour le mode 2.



(a) Déformée modale avec pour normalisation euclidienne  $\{\phi_r(D)\}^T \{\phi_r(D)\} = 1$ .

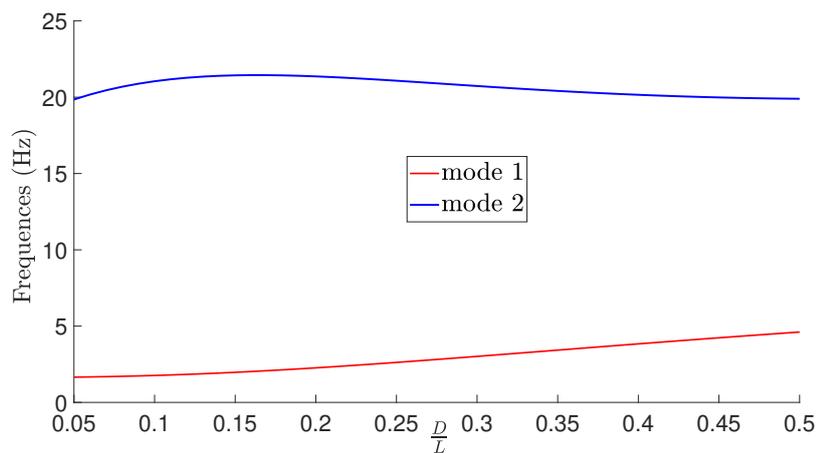


(b) Déformée modale avec pour représentation  $W_{2r}(D/L) - W_{1r}(D/L) = 1$ .

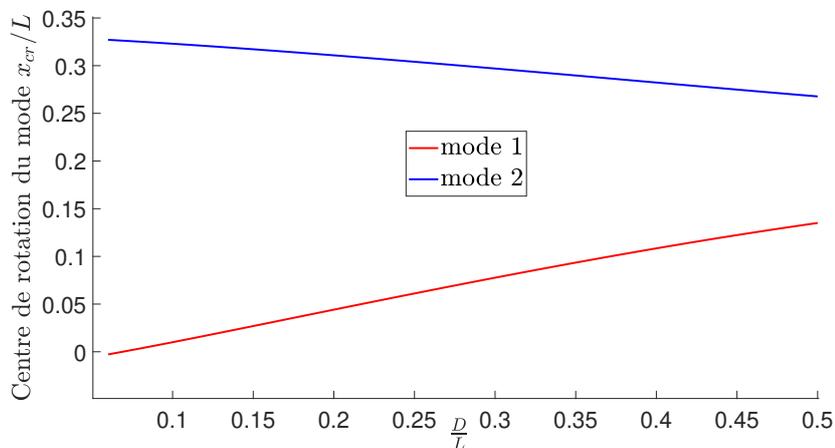
FIGURE 2.15 –  $(\omega_1(D/L), \omega_2(D/L))$  and  $(\{\phi_1(D/L)\}, \{\phi_2(D/L)\})$  pour une pile circulaire d'un ratio  $R = L/8$

## Conclusion

En somme, ce chapitre est celui qui concerne les modèles de la dynamique des structures. Il permet de définir l'objet centrale pour la problématique du sujet de thèse : une pile de pont affouillée. D'une part, le cadre d'étude a été proposé lors de la partie 2.1. Puis dans la partie 2.2, nous avons mené des formulations analytiques au problème de poutre en flexion. Notamment par une approche ondulatoire de la base modale. Il en résulte des grandeurs caractéristiques sensibles aux affouillements. Pour des éléments de types poutres, un effet de peau sur les déplacements dans le sol a été souligné durant la partie 2.2. Cette profondeur de peau a permis de conjecturer un encastrement équivalent pour les fondations profondes. Par conséquent, les limites de critère de profondeur de peau implique des changements pour les conditions au point d'ancrage de la pile. Ces nouvelles conditions aux limites sont une conséquence de l'évolution de l'affouillement. Alors, il a été



(a) Sensibilité des fréquences propres à l'affouillement.



(b) Sensibilité des centres de rotations des modes à l'affouillement.

FIGURE 2.16 – Nouvelle base modale pour les modes rigides ( $f_r, x_{cr}$ ) et sensibilité à l'affouillement.

introduit dans la partie 2.3, un système hypostatique avec des rotations et translations à son ancrage. Des solutions dynamiques de modes rigides sont proposée et nous avons identifié deux : un mode de rotation que se prête à un mouvement pendulaire à 1 DDL et un mode à 2 DDL libérant le mouvement de translation.

# Chapitre 3

## Méthodes d'analyse vibratoire pour le suivi inverse de l'affouillement

---

3.1	Analyse modale par l'expérience et affouillements . . . . .	63
3.1.1	Introduction de la base modale et fonction de transfert associée	64
3.1.2	Effet de l'affouillement sur l'amortissement . . . . .	70
3.2	Analyse modale opérationnelle et affouillements . . . . .	75
3.2.1	Identifications modale avec manque d'observabilité : Décom- position dans le domaine fréquentiel . . . . .	75
3.2.2	Analyse en composante principale et méthode EVD-MAC . . .	82

---

---

## Introduction

Sans introduire la théorie sur laquelle s'appuie les indicateurs qui sont les fréquences propres et déformées modales, nous avons mis en évidence la sensibilité des caractéristiques vibratoires des piles de ponts à l'affouillement. Cette théorie est l'analyse modale et comme toute théorie, en voici ses fondements :

- **Linéarité du comportement dynamique de la structure** : La réponse à une combinaison linéaire de sollicitations est égale la combinaison linéaire des réponses de chacune.
- **Invariance par rapport au temps** : Les caractéristiques mécaniques de la structure ne changent pas lors de la durée d'observation du phénomène dynamique.
- **Observabilité** : Les données nécessaires à la détermination du système sont mesurables.
- **Principe de réciprocité de Maxwell** : La réponse à un point  $p$  due à une sollicitation à un point  $q$  est égale à la réponse au point  $q$  due à la même sollicitation au point  $p$ .

Pour le phénomène d'affouillement, celui-ci est relativement long à l'échelle d'une acquisition. Ces fréquences seront donc considérer comme des valeurs stables, et n'évoluant que selon l'échelle de temps des affouillements (heure, journée et mois). Par conséquent, la linéarité et l'invariance par rapport au temps seront admis. De par nos modèles, le principe de Maxwell est aussi respecté. Nous verrons plus tard que dans une moindre mesure, le critère d'observabilité pourra être approché. L'objet de ce chapitre traite de l'analyse modale des systèmes linéaires invariants (SLI) de piles de ponts au travers de leur fonction de transfert.

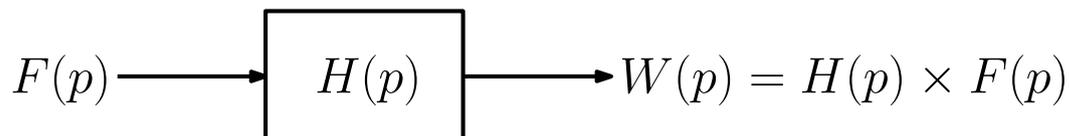


FIGURE 3.1 – Schéma par bloc pour un SLI : fonction de transfert liant les entrées et les sorties dans le domaine de Laplace (variable  $p$ ).

### 3.1 Suivi de l'affouillement contrôlé : Analyse modale par l'expérience

L'analyse modale par l'expérience fait référence à des conditions d'observabilité parfaites : les entrées et les sorties sont connues. Par hypothèses, cette théorie s'applique aux systèmes linéaires invariants (SLI) que l'on caractérise par leur fonction de transfert  $[H(p)]$ . Cette fonction de transfert se définit de la manière suivante,

$$\{W(p)\} = [H(p)]\{f(p)\}, \quad (3.1)$$

où  $\{F(p)\}$  et  $\{W(p)\}$  sont respectivement les transformées de Laplace de  $\{f(t)\}$  et  $\{w(t)\}$ . Pour le traitement des signaux, cette fonction s'adapte bien à l'analyse modale car en un sens, elle crée le lien dans le domaine de Laplace entre les entrées et les sorties. Pour mieux comprendre cette idée de fonction de transfert, nous porterons un regard sur le domaine temporel où sont issus les signaux d'entrées et de sorties. Dans l'espace des temps, cette caractérisation des SLI se retrouve avec qu'on appelle la réponse impulsionnelle  $[h(t)]$ . Cette fonction est introduite de la manière suivante,

$$\{w(t)\} = \{h(t)\} * \{f(t)\}, \quad \& \quad [H(p)] = \mathcal{L}_p[[h(t)]], \quad (3.2)$$

où  $\bullet * \bullet$  est le produit de convolution et  $\mathcal{L}_p[\bullet]$  la transformée de Laplace. Le terme impulsionnelle provient que  $(\{h(t)\})_{ij}$  est la réponse  $\{w(t)\}_i$  si  $\{f(t)\}_j = \delta(t)$ .<sup>1</sup> Pour revenir aux concepts de base modale qui étaient définis jusque là dans le domaine fréquentiel, on introduira la fonction de réponse en fréquence des SLI (FRF). Cette fonction caractérise la réponse des SLI dans une gamme de fréquence étudiée. En pratique, cette FRF sera une estimation de la fonction de transfert par la transformée de Fourier de  $[h(t)]$ ,

$$[H(p = j\omega)] \approx TF[[h(t)]] = [H(\omega)], \quad (3.3)$$

où  $TF[\bullet]$  est l'opérateur transformée de Fourier. Dans l'Annexe C.2, les diverses transformées sont présentées de manière continue et discrète. Dès lors, nos réflexions porteront sur des modèles à variables continues relatives aux notions de fonctions de transfert. Ces notions seront estimées par des FRF discrètes et finis. Pour combler les erreurs issues de la discrétisations des transformées, des fenêtrages, filtrages et conditions d'acquisitions adéquates (durée et fréquences d'échantillonnage) seront proposées.

1. D'où la symétrie de la matrice avec le principe de réciprocité de Maxwell-Betty.

### 3.1.1 Introduction de la base modale et fonction de transfert associée

Les méthodes de Rayleigh-Ritz et de Galerkin (équation (1.7)) permettent d'approcher un problème aux valeurs propres d'une fonctionnelle en un problème aux valeurs propres discrètes sous forme matricielle. L'ordre du modèle, " $n$ " fait référence au nombre de modes. Pour l'analyse modale, l'ordre du modèle sera confondu avec le nombre de degré de liberté (DDL). Partons alors des équations de la dynamique des structures propres à un système à  $n$  degrés de liberté,

$$[M]\{\ddot{w}(t)\} + [C]\{\dot{w}(t)\} + [K]\{w(t)\} = \{f(t)\}. \quad (3.4)$$

Où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masses, d'amortissements et de rigidités, symétriques et de dimension  $n \times n$ . Pour les amortissements faibles, la base modale se rapporte à un problème aux valeurs propres où la dynamique du système se décompose en une série de modes pseudo-périodiques. L'objet d'étude de cette première section concerne alors les liens conjoints entre la fonction de transfert du système et sa base modale.

#### Matrice de flexibilité dynamique $[Z(p)]$ et matrice de transfert associée $[H(p)]$ .

Dans le domaine de Laplace, l'équation (3.4) s'écrit :

$$([M]p^2 + [C]p + [K])\{W(p)\} = [Z(p)]\{W(p)\} = \{F(p)\}, \quad (3.5)$$

où  $[Z(p)]$  est la matrice de flexibilité dynamique qui admet  $2n$  valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ , donc pour  $p \neq (\lambda_r)_n$  on peut écrire,

$$\{W(p)\} = [Z(p)]^{-1}\{F(p)\} = [H(p)]\{F(p)\}. \quad (3.6)$$

On peut aussi réécrire  $[H(p)]$  sous une forme faisant intervenir les  $(\lambda_r)_n$  comme pôles (et non comme racines) :  $\forall p \neq (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$

$$[H(p)] = \frac{\text{com}([Z(p)])^T}{\det([Z(p)])} = \frac{\text{com}([Z(p)])^T}{\prod_{s=1}^{2n} \xi(p - \lambda_s)}, \quad (3.7)$$

où  $\text{com}([\bullet])$  est la comatrice (ou matrice adjointe), c'est-à-dire la matrice des cofacteurs de  $[\bullet]$ . " $\xi$ " est une constante.

#### Identification de la base modale avec la fonction de transfert.

L'expression de  $[H(p)]$  dans (3.7) peut être décomposée en éléments simples :

$$[H(p)] = \sum_{r=1}^n \frac{[A]_r}{p - \lambda_r} + \frac{[A]_r^*}{p - \lambda_r^*}. \quad (3.8)$$

Avec la relation établie dans (3.7) on a,

$$[A]_r = \frac{\text{com}([Z(\lambda_r)])^T}{\prod_{q=1, q \neq r}^{2n} \xi(\lambda_r - \lambda_q)} = P_r \text{com}([Z(\lambda_r)])^T. \quad (3.9)$$

$P_r = \frac{1}{\prod_{q=1 \neq r}^{2n} \xi(\lambda_r - \lambda_q)}$  est une quantité dépendant de l'interaction des autres pôles par rapport au pôle  $\lambda_r$ .

Ce concept de pôles va de paire avec les vecteurs propres associés  $\{\phi\}_r$  ou plus communément appelés les vecteurs de déplacements modaux. Ces vecteurs satisfont l'équation suivante :

$$([M]\lambda_r^2 + [C]\lambda_r + [K])\{\phi\}_r = \{0\}. \quad (3.10)$$

Avec ces notions de vecteurs propres et de valeurs propres associées introduites dans les équations (3.7) et (3.9) nous pouvons récrire  $com([Z(\lambda_r)])^T$  sous une forme plus intéressante pour la suite. En effet en réécrivant les équations (3.6) et (3.7) il vient,

$$[Z(p)]com([Z(p)]^T = det([Z(p)])[I].$$

C'est-à-dire que par définition de  $\lambda_r$ ,

$$[Z(\lambda_r)]com([Z(\lambda_r)]^T = [0]. \quad (3.11)$$

Cela signifie que d'une part,  $com([Z(\lambda_r)]^T$  est de rang 1 et que ses colonnes sont proportionnelles à  $\{\phi\}_r$  par définition dans (3.9). D'autre part, comme les matrices de masses, d'amortissements et de rigidités sont symétriques d'après la réciprocité de Maxwell,  $[Z(p)]$  et  $com([Z(p)]^T$  le sont aussi, et donc on peut écrire :

$$com([Z(\lambda_r)]^T = R_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T, \quad (3.12)$$

où  $R_r$  est un facteur de normalisation.

Ainsi en posant  $Q_r = P_r R_r$  comme facteur d'échelle qui sera d'autant plus grand que les pôles sont proches de  $\lambda_r$ , on a,

$$[A]_r = Q_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T = \{\phi\}_r\{T\}_r^T. \quad (3.13)$$

Avec  $\{T\}_r = Q_r\{\phi\}_r$  le vecteur des participations modales.

### Cas pour les systèmes non-amortis et identification de paramètres de modèles.

Les systèmes non-amortis aident à la compréhension de certains phénomènes dans le cas où l'amortissement est très faible et/ou proportionnel. En effet, la simplification des équations à valeurs réelles permet de définir la base modale en bonne et due forme. Reprenons l'équation (3.4) dans le domaine de Laplace avec amortissement nul ( $[C] = 0$ ). La matrice de flexibilité dynamique s'écrit :

$$[Z(p)] = p^2[M] + [K]. \quad (3.14)$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de l'équation (3.14) admet comme racines de la matrice  $[Z(p)]$  (ou pôle de la fonction de transfert  $[H(p)]$ ) des complexes imaginaires purs, soit,

$$\lambda_r = j\omega_r,$$

où  $j^2 = -1$ . Il découle des équations (3.10) et (3.12),

$$\begin{cases} \lambda_r^* = -\lambda_r, \\ \{\phi\}_r^* = -\{\phi\}_r, \\ Q_r^* = -Q_r. \end{cases} \quad (3.15)$$

Si l'on pose  $p = j\omega$ , l'équation (3.7) s'écrit pour les cas non-amortis :

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^n \frac{2j\omega_r [A]_r}{(\omega_r^2 - \omega^2)}. \quad (3.16)$$

De plus, il convient de noter une propriété fondamentale car intrinsèquement liée au concept de valeurs propres modales et vecteurs propres associés : l'orthogonalité des modes. Réécrivons l'équation (3.10) pour les systèmes non-amortis,

$$\{\phi\}_s^T (\lambda_r^2 [M] + [K]) \{\phi\}_r = \{0\}, \quad (3.17)$$

on peut écrire pour deux pôles  $\lambda_r \neq \lambda_s$ ,

$$(\lambda_s^2 - \lambda_r^2) \{\phi\}_s^T [M] \{\phi\}_r = \{0\} \Leftrightarrow \{\phi\}_s^T [M] \{\phi\}_r = \{0\} \quad \forall r \neq s \quad (3.18)$$

D'où,

$$\begin{aligned} [\phi]^T [M] [\phi] &= [M_{mod}], \\ [\phi]^T [K] [\phi] &= [K_{mod}], \end{aligned} \quad (3.19)$$

où les  $[M_{mod}]$  et  $[K_{mod}]$  sont les matrices de masses modales et de rigidités modales. Pour les coordonnées généralisées  $\{w(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\phi_r\} q_r(t) = [\phi] \{q(t)\}$ , avec  $\{\phi_r\} = ([\phi])_r$  et  $q_r(t) = (\{q(t)\})_r$  la coordonnée modale régie par l'équation projetée sur un mode :

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_r^2 = \frac{([K_{mod}])_{rr}}{([M_{mod}])_{rr}}. \quad (3.20)$$

Il convient donc de noter que "l'influence d'un mode" est liée à la localisation de l'excitation. C'est pourquoi nous définirons désormais la quantité  $MP_{ij}$  illustrant l'influence d'une impulsion à l'entrée  $i$  sur le mode  $j$  tel que,

$$MP_{ij} = \sum_{k=1}^n |([A]_k)_{ij}| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2m_k \omega_k} |(\{\phi\}_k)_i (\{\phi\}_k)_j|. \quad (3.21)$$

### Cas d'étude : FRF d'une pile de pont rigide non-amortie.

Reprenons le modèle de la Figure 2.14 décrivant deux degrés de liberté pour une poutre rigide affouillée. La particularité de ce système réside dans la matrice de rigidité représentant les conditions aux limites imposées par les interactions entre le sol et la structure. Dans ce cas d'étude nous choisissons de simuler une configuration possible en prenant par exemple un sol de type "sable" avec un module d'Young du sol  $E_s = 1MPa$ , un coefficient de Poisson du sol  $\nu = 0.3$ , une masse volumique du sol  $\rho_s = 1400 kg.m^{-3}$ . L'élément structurel considéré est une poutre circulaire en béton de masse volumique  $\rho_b = 2400 kg.m^{-3}$  et de rapport d'élancement  $R/L = 0.08$ . Les paramètres de l'ISS sont des ressorts de Winkler calculés à partir de l'équation (2.36). D'après les équations (2.39) et (2.47) les fréquences et centres de rotation des modes attendus pour  $D/L = 0,2$  sont,

$$\begin{cases} f_1 = 2,3 \text{ Hz} & , \quad x_{c1}/L = -0,06 \text{ m}, \\ f_2 = 28 \text{ Hz} & , \quad x_{c1}/L = 0.8 \text{ m}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour pouvoir calculer la FRF, nous avons effectué des simulations numériques suivant un modèle d'état [Peeters & De roeck, 1999, Cara et al., 2013]. Celui-ci consiste à définir le vecteur d'état ("state vector"),  $\{\bar{w}(t)\} = (\{w(t)\}^T, \{\dot{w}(t)\}^T)^T$  tel que,

$$\{\dot{\bar{w}}(t)\} = [A_c]\{\bar{w}(t)\} + [B_c]\{f(t)\}, \quad (3.23)$$

où,

$$[A_c] = \begin{pmatrix} [0_n] & [I_n] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{pmatrix}, \quad [B_c] = \begin{pmatrix} [0_n] \\ [M]^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Pour la résolution du schéma numérique, on discrétise le temps selon une fréquence d'échantillonnage  $F_s$  et un nombre total d'échantillons  $N$ . Alors, pour  $\Delta T = \frac{N}{F_s}$ , on a  $\forall t_k \in [1 : \frac{1}{F_s} : \Delta T]$  le schéma explicite suivant,

$$\{\dot{\bar{w}}(t_k)\} = [A]\{\bar{w}(t_k)\} + [B]\{f(t_k)\}, \quad (3.25)$$

avec, l'exponentielle d'une matrice définie comme l'exponentielle terme à terme, on a,

$$[A] = e^{\frac{[A_c]}{F_s}} \quad [B] = ([A] - [I_{2n}])[A_c]^{-1}[B_c]. \quad (3.26)$$

Pour les simulations qui suivent nous poserons  $F_s = 100 \text{ Hz}$ ,  $\delta T = 2,5 \text{ s}$  et des conditions initiales nulles. Sur la Figure 3.2 nous avons tracé les réponses libres du système à deux degrés de liberté avec un dirac au premier et au deuxième degré respectivement dans les Figures 3.2a et Figure 3.2b.

L'analyse de la FRF en fréquence  $[H(f = \omega/2\pi)]$  permet d'approcher la fonction de transfert  $H_{ij}(p = j\omega)$  correspondant à la transformée de Fourier de la réponse  $w_i(t)$  sous un impact (dirac) de la forme  $f_j(t) = \delta(t)$ . Il vient alors la Figure 3.3 correspondant au module de la FRF  $||H(f)||$  du système de pile rigide à deux degrés de liberté. Sur la Figure 3.3 on peut constater l'importance du mode 2 sur la réponse libre, ce qui est conforme avec l'opposition de phase visible sur la Figure 3.2 et attendue par le centre de rotation de l'équation (2.47).

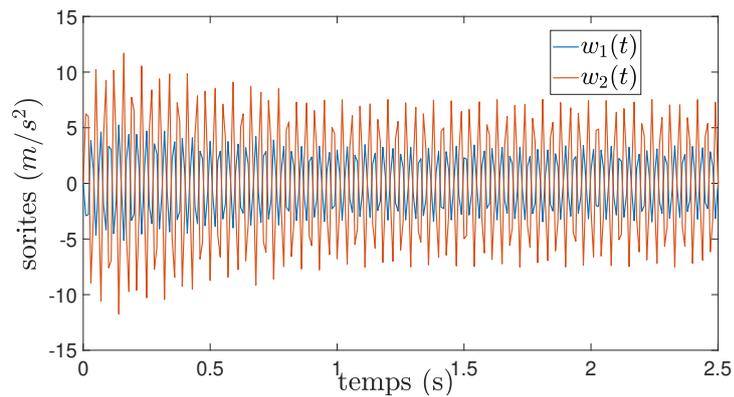
De plus, l'identification des modes via la FRF (équation (3.13) et (3.16)) est conforme aux résultats espérés car,

$$\begin{cases} f_{1,FRF} = 2,7 \text{ Hz} & , & x_{c1,FRF}/L = -0,05, \\ f_{2,FRF} = 27.3 \text{ Hz} & , & x_{c2,FRF}/L = 0,84. \end{cases} \quad (3.27)$$

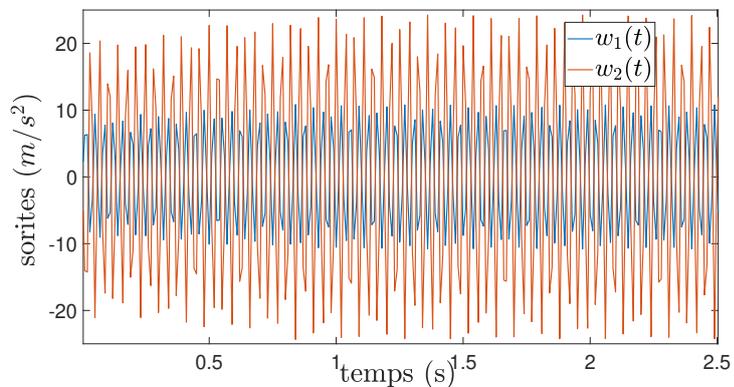
La participation modale (équation (3.21)) quantifie la participation de chaque mode, avec en particulier sa participation pour chaque degré de liberté comme le souligne le Tableau 3.1.

	Participation DDL 1	Participation DDL 2	Participation totale
Mode 1	0,05	0,09	0,14
Mode 2	0,19	0,19	0,38

TABLE 3.1 – Participation modale des modes aux degrés de liberté : système non amorti



(a) Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion au noeud 1 :  $\{f(t)\} = (\delta_0(t), 0)$ .



(b) Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion au noeud 2 :  $\{f(t)\} = (0, \delta_0(t))$ .

FIGURE 3.2 – Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion aux différents degrés de liberté (noeud) avec un affouillement  $D/L = 0, 2$ .

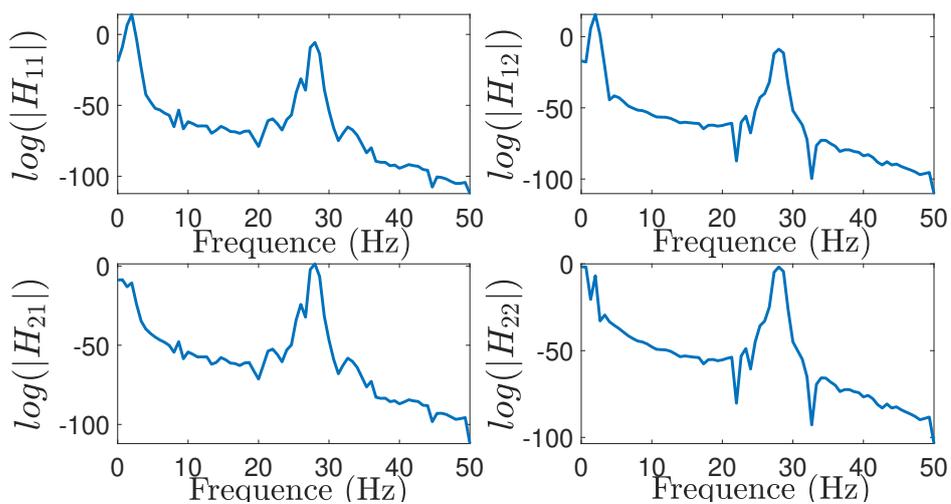


FIGURE 3.3 – Module de  $[H(f)]_{ij}$  pour  $D/L = 0, 2$ .

C'est ce que l'on constate dès lors que nous n'avons pas d'information sur les entrées et en analysant la réponse fréquentielle des sorties (ou capteurs) directement. Sur la Figure 3.4, les modules des transformées de Fourier des réponses sont tracés. Conformément aux participation modales du Tableau 3.1, le mode 1 est peu existant pour la deuxième sortie  $W_2(f)$ .

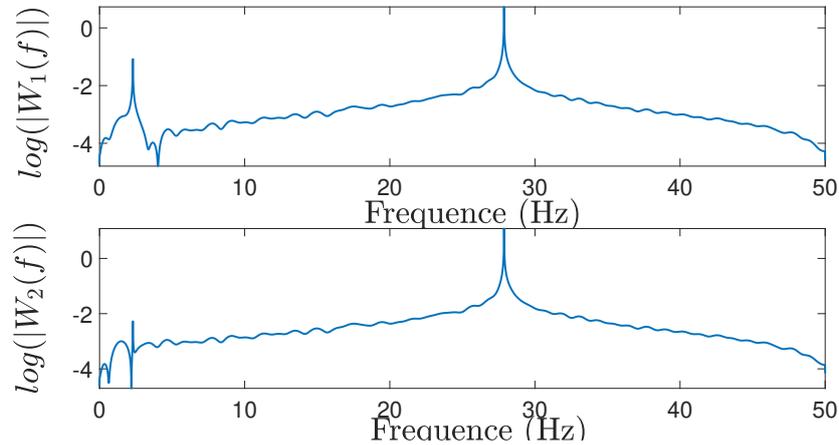


FIGURE 3.4 – Module des transformées de Fourier des sorties  $W_1(f)$ ,  $W_2(f)$ .

### 3.1.2 Effet de l'affouillement sur l'amortissement

La prédominance du deuxième mode remet en question les observations expérimentales de l'état de l'art [Boujia et al., 2021, Bao et al., 2017, Shinoda et al., 2008] : Un mode de pendule (rotation d'angle) est constaté. Alors, l'analyse modale en régime non amorti pourrait apporter un biais sur l'analyse réelle des piles de ponts. En effet, on peut deviner que l'amortissement du sol est un paramètre dépendant lui aussi de l'affouillement  $D$ . La présence d'amortissement présente certains inconvénients,

1. les pôles de la fonction de transfert présentent des parties réelles et la partie imaginaire ( fréquence propre) en est modifiée,
2. les déformées deviennent complexes,
3. les concepts de base modale et d'orthogonalité des modes (au sens de la masse) perdent leur sens.

Or, l'intérêt de l'analyse modale réside en la projection des réponses sur des modes propres. En ce sens, nous avons ajouté des hypothèses sur la matrice d'amortissements de type visqueux  $[C]$  afin de conserver les préceptes de l'analyse modale et d'étudier la sensibilité des piles de pont via les paramètres modaux fréquentiels estimés par la FRF.

#### Hypothèse d'amortissement de Rayleigh ou amortissement proportionnel.

Lorsque l'on parle d'amortissement proportionnel, il est sous-entendu que la matrice d'amortissement  $[C]$  s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices de masses  $[M]$  et de rigidités  $[K]$ . Ce qui peut s'écrire comme,

$$[C] = \alpha_m[M] + \alpha_k[K], \quad (3.28)$$

où  $\alpha_k, \alpha_m$  sont des constantes réelles. En reprenant l'équation 3.14 de flexibilité dynamique, on peut écrire le problème aux valeurs propres suivant (domaine de Laplace),

$$\frac{p^2 + p\alpha_m}{p\alpha_k + 1} [I_n] = -[K][M]^{-1}. \quad (3.29)$$

Pour le pôle du mode  $r$  associé aux systèmes avec amortissement de Rayleigh  $\lambda_r$ , l'amortissement proportionnel conserve les mêmes déformées modales réelles que le système non amorti (équation (3.20)) avec cette fois-ci des pôles complexes. Il découle de l'équation (3.29),

$$\frac{\lambda_r^2 + \lambda_r\alpha_m}{\lambda_r\alpha_k + 1} = -\omega_{0r}^2, \quad (3.30)$$

où  $\omega_{0r}$  est la pulsation non amortie définie par les matrices de masses et de rigidité dans l'équation (3.20). En particulier, l'orthogonalité des modes est conservée,

$$\{\phi\}_s^T \left( \frac{\lambda_r^2 + \lambda_r\alpha_m}{\lambda_r\alpha_k + 1} [M] + [K] \right) \{\phi\}_r = \{0\}. \quad (3.31)$$

Si on définit par  $\omega_r$  la pulsation du système amorti, par analogie avec l'équation (3.8), la fonction de transfert s'écrit :

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^n \frac{2j\omega_r[A]_r}{(\sigma_r^2 + \omega_r^2 - \omega^2) - 2j\sigma_r\omega_r} \quad (3.32)$$

Avec,

$$\begin{cases} \omega_r = [Im](\lambda_r) = \frac{1}{2}\sqrt{-((\alpha_k\omega_{0r}^2 + \alpha_m)^2 - 4\omega_{0r}^2)} \\ \sigma_r = [Re](\lambda_r) = -\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k\omega_{0r}^2) \end{cases} \quad (3.33)$$

Sous réserve d'avoir un régime pseudo périodique,

$$(\alpha_k\omega_r^2 + \alpha_m)^2 - 4\omega_r^2 < 0 \quad (3.34)$$

De plus,

$$[C_{mod}] = [\phi]^T [C] [\phi] = \alpha_m [M_{mod}] + \alpha_k [K_{mod}]. \quad (3.35)$$

Ainsi, l'amortissement proportionnel est un compromis entre l'amortissement visqueux en général (déformées complexes) et les systèmes non-amortis. L'étude de l'amortissement proportionnel apporte des informations sur la variations des pôles, donc, des fréquences propres pour les piles de pont affouillées.

#### Cas d'étude : FRF d'une pile rigide amortie.

Reprenons le cas d'une pile rigide modélisée par deux degrés de liberté lors du chapitre 2.3.3. Bien que de l'amortissement structural existe nous le négligerons. En effet il nous a semblé judicieux que celui-ci soit relativement inférieur lorsque l'on le compare au caractère dissipatif du sol. De plus, les modèles de la partie 2.3 font intervenir une variation de la matrice de rigidité  $[K]$  sur l'affouillement contrairement à la matrice de masse qui elle, est indépendante de l'affouillement. C'est pourquoi, nous supposons que l'amortissement est proportionnel seulement à la rigidité. Soit  $\alpha_m = 0$  et,

$$[C] = \alpha_k [K] \quad (3.36)$$

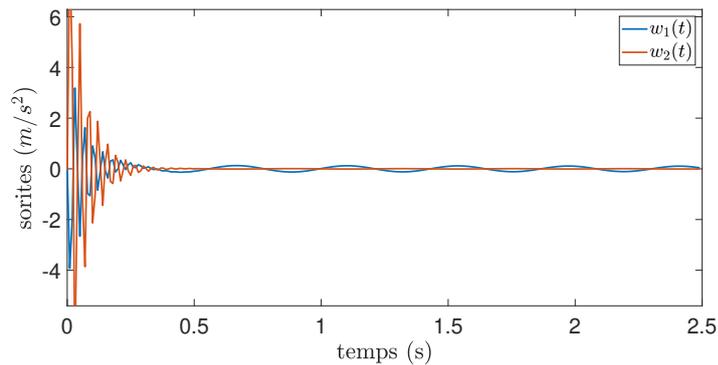
Alors, le comportement global des piles de pont dépend d'un nouveau paramètre  $\alpha_k$ . Par exemple, sur la Figure 3.5 sont tracées les réponses temporelles de  $\{w(t)\}$  pour les mêmes configurations que la section 3.1.2 qui précède. Pour  $\alpha_k = 0.01$ , la Figure trace les réponses du système à 2DDL avec un deuxième mode rapidement amorti. Dans la la Figure 3.5b le même procédé est effectué avec  $\alpha_k = 0.01$ , donc avec plus d'amortissement : on observe une quasi-disparition du mode 2.

En fait, le deuxième mode est beaucoup plus affecté par l'amortissement que le premier mode. Les coordonnées modales du système amorti sont régies par les équations suivantes ;

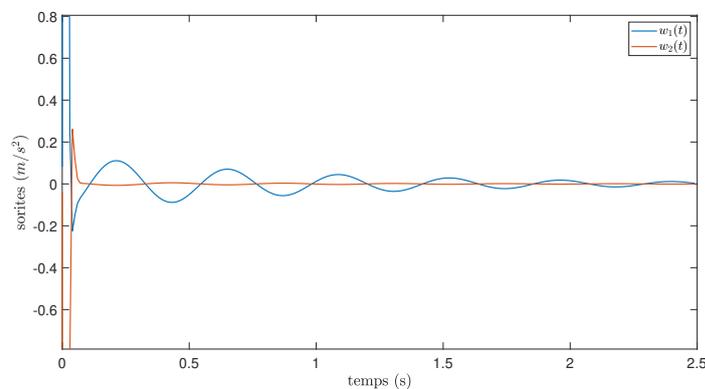
$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 2\zeta_1\omega_{01}\dot{q}_1(t) + \omega_{01}q_1(t) = 0, \\ \ddot{q}_2(t) + 2\zeta_2\omega_{02}\dot{q}_2(t) + \omega_{02}q_2(t) = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

où,

$$\begin{cases} \zeta_r = \frac{\alpha_k\omega_{0r}}{2}, \\ \omega_r = \omega_{0r}\sqrt{1 - \zeta_r^2} \end{cases} \quad (3.38)$$



(a) Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion au noeud 1 :  $\{f(t)\} = (\delta_0(t), 0)$  et un coefficient d'amortissement  $\alpha_k = 0,001$ .



(b) Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion au noeud 1 :  $\{f(t)\} = (\delta_0(t), 0)$  et un coefficient d'amortissement  $\alpha_k = 0,01$ .

FIGURE 3.5 – Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec une impulsion aux noeud 1 avec un affouillement  $D/L = 0.$ , : Prise en compte d'un amortissement faible et d'un amortissement fort.

Il convient de noter que que  $\omega_{01} < \omega_{02}$  pour les modélisations du chapitre 2.3. Alors, il découle de la relation (3.38),

$$\zeta_1 < \zeta_2 \Rightarrow \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_k} < \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_k}. \quad (3.39)$$

Par exemple pour les deux dernières simulations ( $\alpha_k = 0.01$ ,  $\alpha_k = 0.001$  et  $D/L = 0.2$ ), les fréquences propres identifiées par les FRF sont présentées dans le Tableau 3.2.

	$\alpha_k = 0$ (Non amortie)	$\alpha_k = 0.001$	$\alpha_k = 0.01$
fréquence mode 1 (Hz)	2.3	2.3	2.3
fréquence mode 2 (Hz)	28	27.7	13.4

TABLE 3.2 – Comparaison pour un cas d'étude des fréquences propres non amorties avec celles amorties pour  $\alpha_k = 0.001$  et  $\alpha_k = 0.01$

Si la fréquence du deuxième mode est plus affectée par l'amortissement, il devient très important de regarder sa sensibilité à l'affouillement  $D$ . Les conséquences des relations (3.38) et (3.39) nous permettent d'envisager trois cas.

1. Des amortissements faibles pour les deux modes où deux régimes pseudo-périodiques coexistent. Les modèles du chapitre 2.3 permettent alors l'étude des fréquences propres en fonction de l'affouillement :  $\zeta_1 < \zeta_2$  &  $\omega_1 < \omega_2$ .
2. Un amortissement plus fort pour le second mode menant à un croisement de fréquences :  $\zeta_1 < \zeta_2$  &  $\omega_1 > \omega_2$ .
3. Des amortissement très forts pouvant mener à l'existence d'un seul mode pseudo-périodique (voir aucun) :  $\zeta_1 < 1 < \zeta_2$  &  $\omega_1$ .

Sur la Figure 3.6, l'identification des pôles de la fonction de transfert de (3.32) a permis de tracer pour différents amortissements les fréquences du système. On observe une forte sensibilité de la deuxième fréquence propre face à l'affouillement. Cela entre en conformité avec l'équation 3.39.

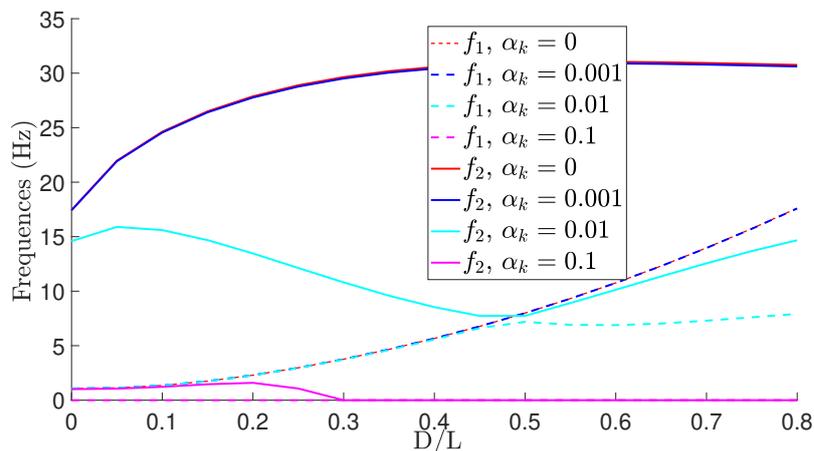


FIGURE 3.6 – Fréquences propres identifiées pour un rapport  $D/L = 0.2$  et différents amortissements : Identification des pôles de la fonction de transfert.

Lors de l'identification des pôles, ceux-ci sont ordonnés. On appelle fréquence propre 1 la plus petite fréquence identifiée par les FRF sur la Figure 3.6. Mais cette identification se fait par un tri de valeur propre sans pour autant savoir la déformée modale associée. Pour juger du croisement ou non des modes, l'un des outils est la participation totale des modes. Soit pour un mode  $r$ , d'après l'équation 3.21, la participation totale du mode  $r$ ,  $MP_r$  s'écrit

$$MP_r = \frac{\sum_{i=1}^n MP_{ir}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n MP_{ij}} \quad (3.40)$$

Sur la Figure 3.7 sont tracées les participations totales des modes pour différentes valeurs d'amortissements  $\alpha_k$ . On observe bien un saut de participation qui conforte bien l'hypothèse des croisements de modes pour des amortissements forts. Ainsi, l'analyse modale par l'expérience et la connaissance des participations modales à

chaque degré de liberté ont permis d'une part, d'analyser la réponse réelle des systèmes de piles de pont considérées comme linéaires invariants. D'autre part, le modèle de pile de pont a été complété avec l'introduction d'un amortissement proportionnel à la rigidité. Or le problème inverse de caractérisation de l'affouillement  $D$  revient en une variation de la matrice de rigidité. De ce fait, l'amortissement modal est sensible aux affouillements et un potentiel croisement de modes peut apparaître.

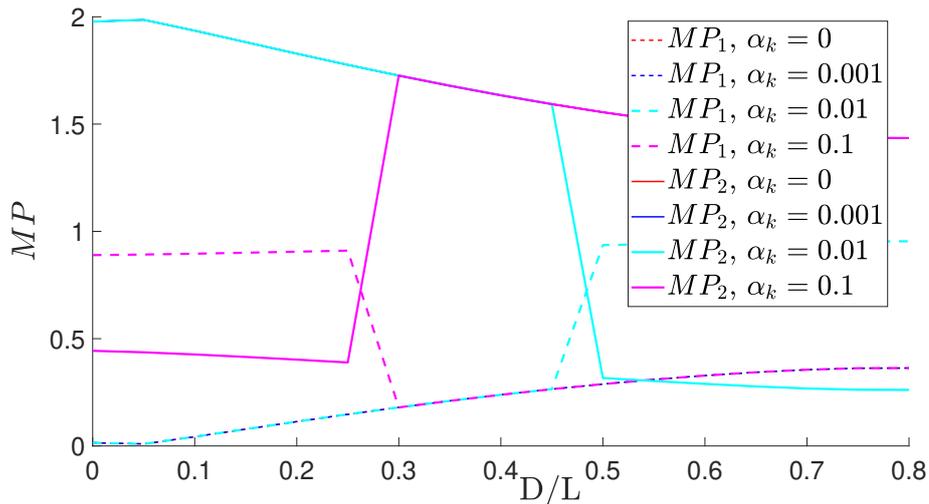


FIGURE 3.7 – Participation modale totale (équation (3.40)) de chaque mode obtenu après identification des pôles de la fonction de transfert.

## 3.2 Suivi de l'affouillement non contrôlé : Analyse modale opérationnelle

Partant du principe que le suivi en temps réel d'un SLI dans son environnement ne rend pas possible la connaissance complète des entrées, cette partie s'essaie à introduire les notions de l'analyse modale dans cette situation. In situ par exemple, le manque d'observabilité se traduit par une multitude de phénomènes extérieurs générés pas la nature elle-même (vent, forces hydrauliques...) et par des actions anthropiques (trafic routier et poids lourds essentiellement). Pour faire face à ces problèmes, l'introduction de nouveaux outils stochastiques rend tout de même possible l'analyse modale des signaux vibratoires. C'est l'analyse modale opérationnelle dont le terme "opérationnelle" prend un sens dans l'émancipation des concepts usuels de fonctions de transfert tout en gardant des indicateurs de suivi estimés par des fonctions stochastiques.

### 3.2.1 Identifications modale avec manque d'observabilité : Décomposition dans le domaine fréquentiel

#### Hypothèses et outils.

Lorsque l'excitation n'est pas effectuée par un expérimentateur, on recense trois grands phénomènes qui excitent les ouvrages d'art : le vent [C.Cremona, 2009], le courant hydraulique pour les piles [Chakrabarti & McBride, 2005] et le trafic des poids lourds [Frýba, 1999]. Pour le vent et le courant hydraulique, l'énergie apporté au SLI est suffisante pour excité une gamme de fréquence compris entre 0 et 20 Hz [C.Cremona, 2009, Chakrabarti & McBride, 2005]. Pour le trafic de poids lourds, les recherches de [Ditlevsen, 1994] nous mène à supposer sa distribution comme un bruit blanc à basse fréquence.

Dès lors, il devient important d'introduire l'outil de corrélation de signaux temporels. Cet outil de traitement des signaux est détaillé en Annexe C.2 où sont présentées les définitions succinctes des produits de convolutions, transformées de Fourier, corrélation des signaux ainsi que les diverses propriétés liants ces définitions. Rappelons tout de même le nouvel objet introduit : la corrélation des signaux. Soient deux signaux  $x(t)$ ,  $y(t)$  dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et  $\tau$  un retard. La fonction de corrélation  $r_{xy}(\tau)$  entre  $x(t)$  et  $y(t)$  s'écrit dans l'hypothèse des signaux ergodiques et stationnaires (Annexe C.3),

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \mathbb{E}[x(y)y^*(t-\tau)], \quad (3.41)$$

où  $\bullet^*$  est le complexe conjugué et  $\mathbb{E}[\bullet]$  est l'opérateur d'espérance mathématique appliqué terme à terme aux composantes du vecteur. Lorsque  $x(t) \neq y(t)$  cette fonction s'appelle "l'intercorrélation" entre les signaux  $x$  et  $y$ . Et si  $x(t) = y(t)$  on appellera la fonction "autocorrélation" du signal  $x$ . En fait, cette fonction mesure le degré de vraisemblance d'un signal avec un autre signal retardé d'une durée  $\tau$ , d'où le terme corrélation. Cette fonction présente des propriétés mathématiques intéressantes,

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau). \quad (3.42)$$

Donc si l'on reprend l'équation (3.2),

$$w_k(t) = \sum_{e=1}^n h_{ke}(t) * f_e(t), \quad (3.43)$$

avec  $\bullet * \bullet$  est le produit de convolution. Avec les propriétés commutatives du produit de convolution et la symétrie hermtienne (Annexe C.2), les équations (3.41) et (3.43) nous amènent aux relations qui suivent,

$$\begin{cases} r_{w_s w_k}(\tau) &= \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^n h_{sj}(\tau) * h_{ke}^*(-\tau) * r_{f_j f_e}(\tau), \\ R_{W_s W_k}(j\omega) &= \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^n H_{sj}(j\omega) H_{ke}^*(j\omega) R_{F_j F_e}(j\omega), \end{cases} \quad (3.44)$$

où  $R_{W_s W_k}(j\omega) = \mathcal{L}_p[r_{w_s w_k}](j\omega)$  (transformée de Laplace). En posant  $[R_{WW}(j\omega)]$  la matrice des  $(R_{y_k y_s}(j\omega))_{i,j \in [0,n]}$ , celle-ci est d'après la relation établie dans (3.44) :

$$[R_{WW}(j\omega)] = [H(j\omega)][R_{FF}(j\omega)][H(j\omega)]^H, \quad (3.45)$$

où  $[\bullet]^H = [\bullet^*]^T$  la matrice transconjuguée et  $[R_{WW}(j\omega)]$ ,  $[R_{FF}(j\omega)]$  respectivement les matrices de densité spectrale de puissance ("PSD matrix") des sorties et des entrées. En particulier, dans l'hypothèse des bruits blancs d'entrées, on supposera par la suite,  $[R_{FF}(j\omega)] = [R_{FF}]$ , diagonale à coefficients constants dans  $\mathbb{R}$ . En substituant l'expression de  $[H(j\omega)]$  avec l'équation (3.8),

$$[R_{WW}(j\omega)] = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left( \frac{[A]_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{[A]_k^*}{j\omega - \lambda_k^*} \right) [R_{FF}] \left( \frac{[A]_s^H}{-j\omega - \lambda_s^*} + \frac{[A]_s^T}{-j\omega - \lambda_s} \right). \quad (3.46)$$

Cette matrice contient les pôles de la fonction de transfert. La trace est invariante par changement de base donc l'information de la PSD des signaux (transformée de Fourier des autocorrélations) est conservée et nous pouvons alors nous intéresser aux paramètres modaux identifiables. D'après [Brincker & Ventura, 2015, Brincker et al., 2001], l'équation (3.46) peut être approchée si l'on néglige l'effet entre modes et dans l'hypothèse des amortissements faibles, la section qui suit en fait l'objet.

### Décomposition dans le domaine fréquentiel.

Une décomposition en éléments simples de l'équation (3.46) nous mène à établir la relation suivante,

$$[R_{WW}(j\omega)] = \sum_{k=1}^n \frac{[B]_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{[B]_k^H}{-j\omega - \lambda_k^*} + \frac{[B]_k^*}{j\omega - \lambda_k^*} + \frac{[B]_k^T}{-j\omega - \lambda_k}, \quad (3.47)$$

où  $[B]_k$  est la matrice des résidus de  $[R_{WW}(j\omega)]$  correspondant au  $k$ -ième pôle tel que,

$$[B]_k = [A]_k [R_{FF}] \left( \sum_{s=1}^n \frac{[A]_s^T}{-\lambda_k - \lambda_s} + \frac{[A]_s^H}{-\lambda_k - \lambda_s^*} \right) \quad (3.48)$$

La matrice  $[B]_k$  est une matrice hermitienne. [Brincker & Ventura, 2015, Brincker et al., 2001] ont souligné qu'il était possible d'estimer les paramètres de la fonction de transfert  $[H(j\omega)]$  pour les amortissements faibles où,

$$\lambda_k = -\zeta_k \omega_{0k} + j\omega_k \approx -\zeta_k \omega_{0k} + j\omega_{0k} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_k - \lambda_k & = 2(\zeta_k \omega_{0k} - j\omega_{0k}), \\ -\lambda_k - \lambda_k^* & = 2\zeta_k \omega_{0k}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Avec  $\omega_{0k}$ , la pulsation du  $k$ -ième mode non amorti et  $\omega_k = \omega_{0k} \sqrt{1 - \zeta_k^2}$  la pulsation du  $k$ -ième mode amorti. En effet, si on suppose des pôles assez éloignés pour que la matrice  $[B]_k$  soit dominée par les paramètres du mode  $k$ , l'hypothèse des amortissements faibles de (3.49) permet d'approcher l'équation (3.48) par,

$$\begin{aligned} [B]_k &\approx [A]_k [R_{FF}] \left( \frac{[A]_k^T}{2(\zeta_k \omega_{0k} - i\omega_{0k})} + \frac{[A]_k^H}{2\zeta_k \omega_{0k}} \right), \\ &\approx [A]_k [R_{FF}] \frac{[A]_k^H}{2\zeta_k \omega_{0k}}, \\ &\approx \frac{\{\phi\}_k \{T\}_r^T [R_{FF}] \{T\}_r^* \{\phi\}_k^H}{2\zeta_k \omega_{0k}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Avec  $[A]_r = \{\phi\}_r \{T\}_r^T$  défini à partir des participations modales de la fonction de transfert dans (3.13). Posons  $d_k$  un scalaire tel que,

$$d_k = \frac{\{T\}_r^T [R_{FF}] \{T\}_r}{2\zeta_k \omega_{0k}}.$$

Au voisinage de  $\omega_k$ , on peut négliger l'effet des fréquences des pôles conjugués aux pôles de résonance (au dénominateur) dans l'équation (3.47),

$$[R_{WW}(j\omega)]_{j\omega \rightarrow j\omega_k} \approx \sum_{k=1}^n \frac{d_k \{\phi\}_k \{\phi\}_k^H}{j\omega - \lambda_k} + \frac{d_k \{\phi\}_k \{\phi\}_k^H}{-j\omega - \lambda_k^*}. \quad (3.51)$$

Les relations précédentes peuvent être écrites sous une forme matricielle mettant en évidence la diagonalisation à valeurs réelles de la matrice de densité spectrale de puissance  $[R_{WW}(j\omega)]$ ,

$$[R_{WW}(j\omega)]_{j\omega \rightarrow j\omega_k} \approx [\Phi] \left[ \text{Diag} \left( \frac{2d_k \zeta_k \omega_{0k}}{(\zeta_k \omega_{0k})^2 + (\omega - \omega_{0k})^2} \right) \right] [\Phi]^H, \quad (3.52)$$

où  $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_r\}, \dots, \{\phi_n\}]$  est de dimension  $n \times n$ . Ces calculs sont dans l'hypothèse où nous avons des matrices de dimension  $n \times n$ .  $\frac{2d_k \zeta_k \omega_{0k}}{(\zeta_k \omega_{0k})^2 + (\omega - \omega_{0k})^2} = \mathcal{R}e \left( \frac{d_k}{i\omega - \lambda_k} \right) \in \mathbb{R}$  est réel. La relation (3.52) permet donc de décomposer dans une base de modes la transformée de Laplace de la matrice des corrélations des sorties. Bien entendu, sous réserve d'amortissements faibles et d'un bruit en entrée suivant un processus aléatoire. Cependant, la fonction de transfert estimé par la FRF est à valeurs complexes. En pratique, pour avoir une estimation plus précise on supposera seulement

les retards positifs, c'est-à-dire que la transformée de Fourier de l'autocorrélation considérant  $\tau > 0$  néglige le pôle en  $-j\omega - \lambda_k^*$  de l'équation (3.51),

$$\text{TF}[[r_{ww}(\tau_{\tau>0})]](\omega) \underset{\omega \rightarrow \omega_k}{\approx} [\Phi][\text{Diag}(\frac{d_k}{j\omega - \lambda_k})][\Phi]^H. \quad (3.53)$$

Ce qui devient très semblable à la FRF d'un système à un degré de liberté au voisinage du mode. L'équation (3.53) est paramétrisée et on peut obtenir les paramètres modaux à partir des parties réelles et imaginaires. Quant à la notion de voisinage du mode pour la décomposition dans le domaine fréquentiel on supposera un problème de rang 1 dans une bande de fréquence. Soit, en pratique une décomposition en valeurs singulières où les valeurs singulières sont triées par ordre croissant,

$$\begin{cases} [R_{ww}(\omega)] & = [U(\omega)][S(\omega)][U(\omega)]^H, \\ ([U(\omega_k)]_1) & \underset{\omega \rightarrow \omega_k}{\approx} \{\Phi_k\} \text{ pour le mode } k. \end{cases} \quad (3.54)$$

Avec  $[U(\omega)]$  une matrice unitaire et les espaces associés autres que la première valeur singulière seront supposés associés à un bruit non descriptif du comportement vibratoire.

### Estimation des corrélations avec fenêtre temporelle.

Pour discerner des problèmes de la décomposition dans le domaine fréquentiel en pratique (transformée de Fourier des autocorrélation avec retard positifs (3.53)). Nous allons supposer ici des entrées connues : des bruits blancs  $\{f(t)\}$ . Pour faciliter les démarches, on impose que les entrées sont de moyennes nulles (données centrées) et de variance  $\{V\}$  tel que  $\forall t_i \in [0 : 1/f_s : \Delta T]$

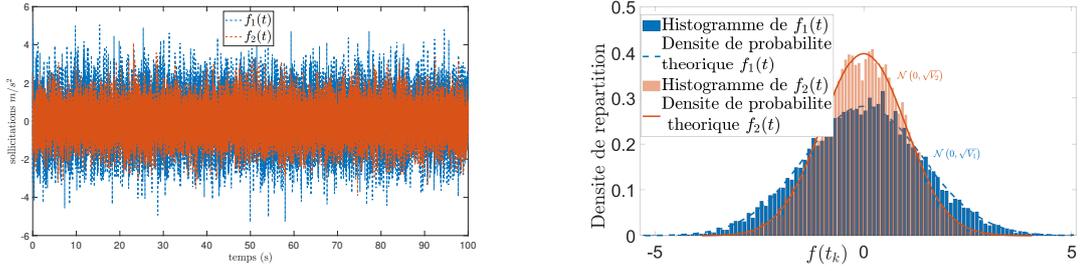
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\{f(t_i)\}] &= \{0\}, \\ \mathbb{E}[\{f(t_i)^2\}] &= \{V\}, \\ \mathbb{E}[\{f(t_i)f(t_k)\}] &= \{0\} \text{ si } i \neq k. \end{aligned} \quad (3.55)$$

On suppose par la suite que  $\{f(t)\}$  suit un processus gaussien, c'est-à-dire que  $\{f(t_i)\}$  est une variable aléatoire suivant une loi normale  $\{\mathcal{N}(0, \sqrt{V})\}$  centrée et d'écart-type  $\{\sqrt{V}\}$ ,

$$\{f(t_i)\} \sim \{\mathcal{N}(0, \sqrt{V})\} \quad (3.56)$$

Sur la Figure 3.8, voici les caractéristiques correspondant aux hypothèses de bruit blanc gaussien des équations (3.55) et (3.56) : deux entrées  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  avec comme variance respectives  $V_1 = 1$  et  $V_2 = 2$ . La Figure 3.8a montre l'allure d'un signal de type bruit blanc pour un échantillonnage à  $F_s = 100 \text{ Hz}$  et une durée d'acquisition  $\Delta T = 100 \text{ s}$ . La Figure 3.8b présente quant à elle, la distribution normale des tirages de cette simulation à l'aide d'un histogramme. Pour des signaux centrés, la corrélation des signaux représente la covariance temporelle de ceux-ci décalés dans le temps (équation (3.41)). Entre autre, la corrélation d'un bruit blanc est nulle  $\forall \tau \neq 0$ . C'est-à-dire que d'après l'équation (3.55), le signal n'a pas de lien statistique pour deux instants différents et,

$$[r_{ff}(\tau)] = [\text{Diag}(V_i \delta(\tau))] \quad \& \quad [R_{FF}(f)] = [R_{FF}] = [\text{Diag}(V_i)]. \quad (3.57)$$



(a) Réponses temporelles des entrées  $\{f(t)\}$  suivant des processus de bruit blanc gaussien centrée réduit  $\{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ .

(b) Densité de probabilité des entrées  $\{f(t)\}$  suivant des processus de bruit blanc gaussien centrée réduit  $\{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ .

FIGURE 3.8 –  $\{f(t)\}$  suivant des processus de bruit blanc gaussien centré réduit  $\{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ .

Cependant, lorsque l'on considère un instant échantillonné  $\tau_m = m \times T_s$  d'un signal fini, la corrélation des signaux de la relation (3.41) est estimée.

Soit  $[\hat{r}_{ff}(\tau)]$  un estimateur de  $[r_{ff}(\tau)]$ , tel que pour un signal de longueur  $N$  et échantillonné à la fréquence  $F_s = \frac{1}{T_s}$ ,

$$[\hat{r}_{ff}(\tau_m)] = \frac{1}{N} \sum_{k=m}^{N-1} \{f(kT_s)\} \{f((k-m)T_s)\}^T \quad \text{si } m \geq 0, \quad (3.58)$$

$$[\hat{r}_{ff}(-\tau_m)] = [\hat{r}_{ff}(\tau_m)] \quad \text{sinon.}$$

L'estimation des corrélations par la formule (3.57) introduit un biais statistique qui se traduit par du bruit additif non désiré et ne permettant pas d'affirmer la relation (3.58). Ce biais est quantifiable par la variable  $b$  introduite ci-dessous. Bien que sa variance soit difficilement calculable, on peut montrer que sa variance est moins importante que celle d'un estimateur non biaisé  $[\hat{r}_{ff, b=0}]$ . C'est le dilemme entre le biais et variance,

$$[\hat{r}_{ff, b=0}(\tau_m)] = \frac{1}{N-m} \sum_{k=m}^{N-1} \{f(kT_s)\} \{f((k-m)T_s)\}^T,$$

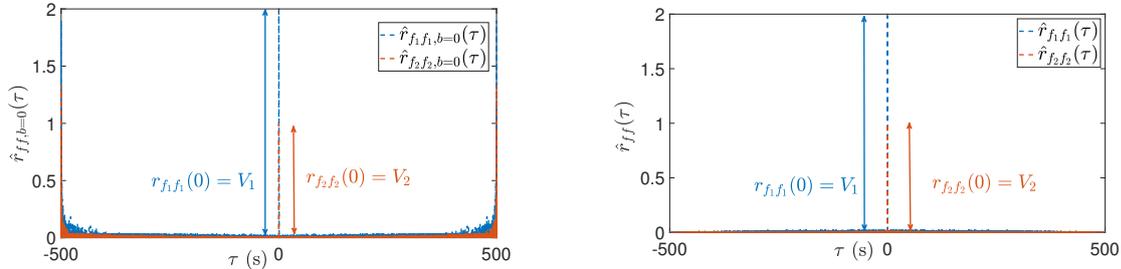
$$\mathbb{E}[[\hat{r}_{ff}(\tau_m)]] = \frac{N-|m|}{N} [r_{ff}(\tau_m)], \quad (3.59)$$

$$\text{Var}([[ \hat{r}_{ff}(\tau_m) ]]) = \left( \frac{N-|m|}{N} \right)^2 \text{Var}([\hat{r}_{ff, b=0}(\tau_m)]),$$

$$b = \mathbb{E}[[\hat{r}_{ff}(\tau_m)]] - [r_{ff}(\tau_m)] = -\frac{|m|}{N}.$$

Face à ce dilemme, nous faisons le choix de réduire la variance pour des questions de densité spectrale de puissance qui font l'objet de la décomposition dans le domaine fréquentiel. Et pour réduire les effets indésirés par l'introduction d'un biais, l'estimateur biaisé sera fenêtré. Conformément à l'équation (3.57), la Figure 3.9

compare l'estimateur non biaisé (Figure 3.9a) à l'estimateur biaisé (Figure 3.9b). On observe la notion de variance introduite dans l'équation (3.59) comme un "bruit" dans l'autocorrélation des signaux et s'amplifiant pour l'estimateur non biaisé quand  $\tau_m \rightarrow N \times T_s$ .



(a) Estimateur non biaisé  $[\hat{r}_{ff}(\tau)]$  de l'équation (3.57).

(b) Estimateur biaisé  $[\hat{r}_{ff,b=0}(\tau)]$  de l'équation (3.57).

FIGURE 3.9 – Comparaison des densités spectrales de puissance du bruit blanc via la transformée de Fourier des estimateurs d'autocorrélation pour des bruits blancs gaussiens  $\{f(t_i)\} \sim \{\mathcal{N}(0, \sqrt{2}), \mathcal{N}(0, \sqrt{1})\}$ .

En effet, dans l'équation (3.59), le biais est faible lorsque  $m \ll M$ . Ainsi, on supposera l'estimateur de la densité spectrale des signaux,

$$[\hat{R}_{FF}(f)] \approx TF \left[ [\hat{r}_{ff}(\tau) \times \Pi(N_w)] \right] \quad \text{avec, } N_w \ll N, \quad (3.60)$$

où,  $\Pi(N_w)$  est une fenêtre centrée de largeur  $N_w$ . Plusieurs fenêtres existent (exponentielle, "Hanning", "Haming", rectangulaire) et elles présentent chacune des avantages par rapports aux autres [Heylen et al., 1997]. Sur la Figure 3.10 nous avons présenté l'effet d'un fenêtrage sur l'estimation de l'autocorrélation et particulièrement l'estimation de la densité spectrale de puissance (PSD) d'un bruit blanc. Néanmoins, c'est une méthode qui présente le désavantage de perdre en résolution fréquentielle qui est proportionnelle à la taille de l'échantillon à transformer. Ainsi, pour l'analyse modale opérationnelle nous préconiserons des durées d'échantillonnage longues.

### Cas d'étude : Décomposition dans le domaine fréquentiel d'une pile rigide amortie

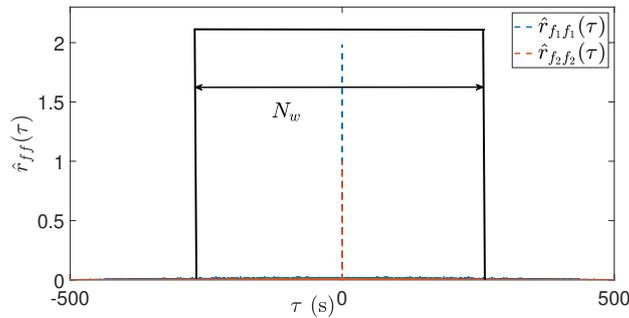
Pour un système de pile de pont à deux degrés de liberté avec amortissement (section 3.1.2), la méthode d'identification par espace propre de l'équation (3.52) permettrait d'avoir accès non seulement aux fréquences propres, mais aussi aux déformées modales. Et force est de constater que l'analyse modale opérationnelle apporte une notion de bruit avec une vision stochastique des données de sorties : nous avons accès seulement à leurs espérances contrairement à l'analyse modale par l'expérience de la partie 3.1, En d'autres termes, nous estimerons par le même procédé de fenêtrage de l'équation (3.60) la corrélation des sorties dans l'optique

d'atténuation du bruit ;

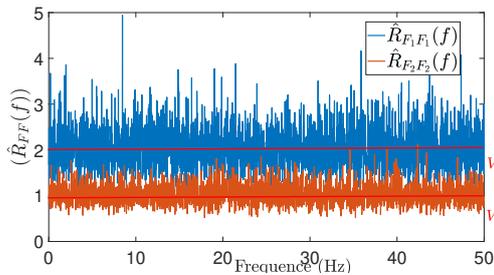
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r}_{w_s w_k}(\tau_m) \approx \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^n h_{sj}(\tau_m) * h_{ke}^*(-\tau_m) * r_{f_j f_e}(\tau_m) \text{ pour } m \ll N \\ \hat{R}_{W_s W_k}(j\omega) = TF[\hat{r}_{w_s w_k}(\tau) \times \Pi(N_w)] \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Pour illustrer l'estimateur de densité spectrale de puissance (en matrice) de l'équation (3.61), la Figure 3.11 en présente l'intérêt pour la décomposition en sous espace dans le domaine fréquentiel d'une pile rigide avec pour paramètre ceux des exemples de la section 3.1.1 pour  $D/L = 0,2$  et  $\alpha_k = 0,01$ .

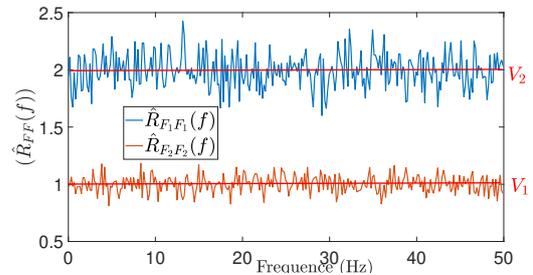
Ce cas d'étude met en évidence les problèmes issus des aspects aléatoires des signaux. L'objectif est de supposer que la matrice  $[R_{FF}(j\omega)]$  est diagonale et constante afin d'approcher au mieux la solution analytique de la décomposition dans le domaine fréquentiel (équation (3.52)) par un procédé de fenêtrage temporel.



(a) Estimateur biaisé  $[\hat{R}_{ff}(\tau)]$  fenêtré d'une longueur  $N_w$ .



(b)  $[\hat{R}_{FF}(f)]$  pour  $N_w = \frac{N}{10}$ .



(c)  $[\hat{r}_{FF}(f)]$  pour  $N_w = \frac{N}{100}$ .

FIGURE 3.10 – Influence d'un fenêtrage temporel pour la réduction de bruit.

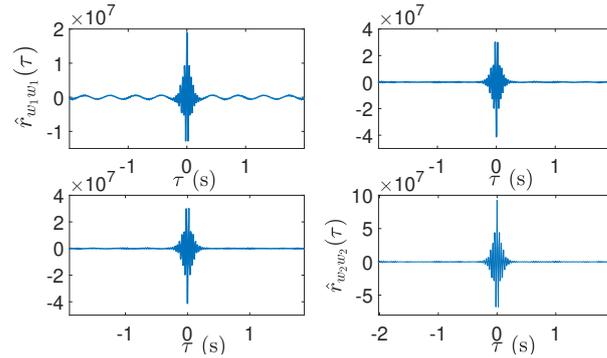
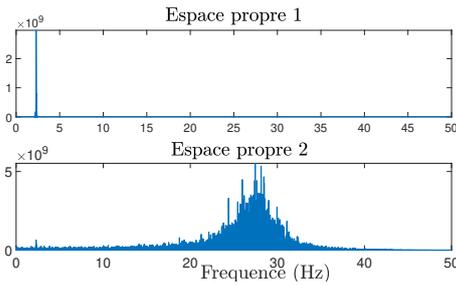
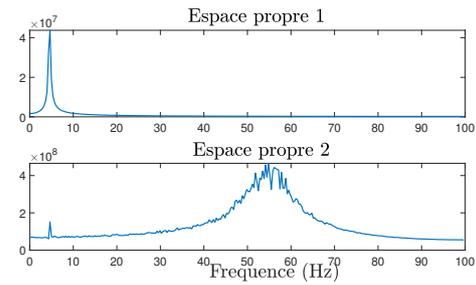

 (a) Estimateur biaisé  $[\hat{R}_{ww}(\tau)]$ .

 (b) Décomposition dans le domaine fréquentiel (eq.(3.52)) pour un fenêtrage  $N_w = \frac{N}{10}$ .

 (c) Décomposition dans le domaine fréquentiel (eq.(3.52)) pour un fenêtrage  $N_w = \frac{N}{100}$ .

FIGURE 3.11 – Influence d'un fenêtrage temporel pour la réduction du bruit dans la décomposition en domaine fréquentiel.

### 3.2.2 Analyse en composante principale et méthode EVD-MAC

Afin d'analyser les comportements vibratoires d'un système avec une connaissance des sorties seulement, cette partie propose une analyse en composante principale (ACP) dans le domaine fréquentiel. Les techniques d'analyse en composantes principales sont des techniques non supervisées et par conséquent non paramétriques. Cependant, dans l'équation (3.53) on a montré qu'il était possible, sous certaines hypothèses, au voisinage du mode, d'identifier les paramètres du système.

#### Vision stochastique de la décomposition dans le domaine fréquentiel

Ici, la participation  $d_k$  dans l'équation (3.52) est supposée égale à 1 (bruit identique à chaque DDL). Donc  $[R_{FF}]$  est proportionnelle à la matrice identité. Donc d'après l'équation (3.43), on peut supposer que les sorties s'écrivent,

$$\{w(t)\} = [\phi]\{q(t)\}.$$

Alors,

$$[r_{ww}(\tau)] = [\phi]\mathbb{E}[\{q(t)\}\{q^*(t-\tau)\}][(\Phi)]^H = [\phi][r_q(\tau)][\Phi]^H. \quad (3.62)$$



thèses de modes décorrelés (3.66), il vient,

$$\forall \omega \in \Omega, [R_q(j\omega)] = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} Q_1(j\omega)Q_1^*(j\omega) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & Q_i(j\omega)Q_i^*(j\omega) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & Q_m(j\omega)Q_m^*(j\omega) \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{array} \right| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{m \times (n-m)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0_{(n-m) \times n} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.68)$$

On remarque que pour une bande en fréquence très mince autour d'un mode  $k$  et pour  $m = 1$ , nous retrouvons la relation (3.53). Ainsi, pour un signal filtré par un passe bande de largeur  $\Omega$ , i.e une porte en fréquence  $\pi_{\Omega}(\omega)$ , on supposera en pratique,

$$\{w(t)\} * \text{TF}^{-1}[\pi_{\Omega_k}](t) = [B_{\Omega}]\{z(t)\}, \quad (3.69)$$

Avec  $[B_{\Omega_k}] = [\{\phi\}_1, \dots, \{\phi\}_m]$  une matrice rectangulaire  $n \times m$  et  $\{z(t)\} = \{q_1(t), \dots, q_m(t)\}^T$  le vecteurs des coordonnées généralisées des  $m$  modes ou composantes principales.

En pratique, la fenêtre  $\Omega$  sera localisée grâce à une décomposition en valeurs singulières comme dans l'équation (3.54). Nous jugerons alors du rang du problème lorsque les distances entre valeurs singulières sont proches et l'ACP se fait par une méthode que nous avons nommé EVD-MAC (eigen value decomposition using MAC value) dont le procédé algorithmique est le suivant,

- **Domaine de définition** :  $\Omega = [\omega_k, \dots, \omega_N]$ , l'espace de fréquences échantillonnées à  $F_s$  où le rang est supérieur à 1.
- **Initialisation** : Soit,  $\omega_k \in \Omega$ ,  $[R_{WW}(\omega_k)]$  est une matrice hermitienne qui admet la décomposition suivante :  $[R_{WW}(\omega_k)] = [B(\omega_k)][D(\omega_k)][B(\omega_k)]^H$ . Avec,  $[B(\omega_k)]$ , une matrice unitaire de dimension  $n \times n$  et  $[D(\omega_k)]$ , une matrice diagonale réelle de dimension  $n \times n$ .
- **Itération** : Pour  $\omega_{k+1}$ , on effectue la même diagonalisation et on calcule la corrélation suivante,

$$\text{MAC}(\{B(\omega_k)\}_l, \{B(\omega_{k+1})\}_s), \forall l, s \leq n.$$

- **Réorganisation** : On trie les valeurs de  $[D(\omega_{k+1})]$  selon le critère MAC sur les espaces propres associés, c'est-à-dire que pour chaque espace propre  $\{B(\omega_{k+1})\}_s$ , on associe l'espace le plus corrélé lors de l'itération  $k$ . Le procédé est alors répété ( $k \rightarrow k+1$ ,  $k+1 \rightarrow k+2$ ) jusqu'à l'itération  $\omega_N$  afin que  $[B(\omega)]$  ait une évolution cohérente dans  $\Omega$ .

Cette méthode EVD-MAC se dit d'analyse modale opérationnelle non supervisée car elle ne met pas en évidence la base modale. Les hypothèses de modes décorrelés sont fortes et elles permettent un suivi en espaces propres cohérents entre eux. Les fréquences identifiées sont alors associées à des "pseudo-modes" présentant des composantes principales fréquentielles : cette méthode présente des intérêts pour automatiser un suivi de fréquences propres par sous espaces décorrelés entre eux.

## Conclusion

Pour conclure ce chapitre centré sur les méthodes d'identification des paramètres par méthodes inverse, nous avons tout d'abord présenté l'objet d'étude : la fonction de transfert d'un système linéaire invariant. Avec les méthodes de l'analyse modale conventionnelle où les conditions d'observabilité sont respectées, l'évolution de paramètres modaux pour le suivi de l'affouillement a pu être identifiée, notamment, par l'analyse modale expérimentale via une analyse des FRF. Ensuite, lorsque nous avons introduit des systèmes pour l'analyse réelle sur ouvrage en continu ou analyse modale opérationnelle, il a fallu introduire des concepts stochastiques faisant place à de l'incertitude et se traduisant par du bruit lors des observations. Tout en supposant une connaissance partielle des informations (sorties et hypothèse de bruit blanc en entrée), les notions stochastiques ont été présentées par des opérateurs tel que l'espérance et la variance des signaux. Ainsi, un choix d'estimateur statistique a été proposé dans ce chapitre afin d'approcher la décomposition dans le domaine fréquentiel. Cette décomposition a ensuite été abordée par une notion en analyse en composantes principales qui impose un critère de corrélation entre vecteurs de la base de décomposition : la méthode EVD-MAC. Le Tableau 3.3 répertorie les critères des différentes méthodes étudiées dans ce chapitre.

Critère	Excitation contrôlée	Excitation non contrôlée
<i>Identification des paramètres modaux</i>		
Fréquences	Pôles de $[H(p)]$ PSD	PSD
Déformées	Vecteur de participation modale Espace propre de $[H(p)]$	Amortissement faible au voisinage du mode
Amortissements	Facteur de qualité Enveloppe de la réponse libre	Identification pour des modes éloignés
<i>Conditions sur l'entrée</i>		
Excitation basse fréquence	Déclenchement d'un essai	Bruit blanc
Excitation haute fréquence	Déclenchement d'un essai	–
Contrôle périodique	Déclenchement d'un essai	Sollicitation ambiante
Contrôle continu	–	Sollicitation ambiante

TABLE 3.3 – Comparaison entre analyse mode expérimentale et analyse modale opérationnelle



# Chapitre 4

## Applications au suivi vibratoire de structures affouillées

---

4.1	Modèle de poutre encastrée équivalente . . . . .	89
4.1.1	Protocole expérimental . . . . .	90
4.1.2	Calage du modèle pour le premier mode de poutre encastrée équivalente . . . . .	91
4.2	Identification des modes rigides par analyse modale . . . . .	92
4.2.1	Description des essais . . . . .	92
4.2.2	Identification des paramètres pour le suivi . . . . .	94
4.2.3	Discussion sur l'influence du sol . . . . .	97
4.3	Identification opérationnelle in situ . . . . .	101
4.3.1	Présentation de l'ouvrage et de la chaîne d'acquisition . . . . .	102
4.3.2	Déploiement d'une analyse modale opérationnelle . . . . .	105
4.3.3	Discussion : Détection d'affouillement avec anomalies sur classes lors d'évènements extrêmes . . . . .	111

---

---

## Introduction

Les modèles du chapitre 2 ont fait émerger deux comportements vibratoires succincts. Les comportements élastiques vibratoires associés aux modes de flexion des poutres et les comportements rigides associés aux modes vibratoires des solides indéformables. Ensuite, lors du chapitre 3, les problématiques autour de l'analyse modale ont été considérées. En particulier, les notions de fonctions de transfert pour l'identification des paramètres modaux et les estimations de celles-ci au travers des signaux. Dans ce chapitre nous allons valider les concepts introduits lors des modélisations par l'analyse concrète de signaux. Nous commencerons par un cas expérimental issu de la littérature et permettant de constater un comportement semblable à celui d'une poutre encastree. Ensuite, une campagne expérimentale faisant lieu à l'étude des modes rigides de vibration pour des modèles de piles réduites sera étudiée. Pour ce cas d'étude nous porterons un regard critique sur les résultats obtenus par estimation des FRFs et des modèles. Enfin, un cas in-situ fera l'objet de la dernière partie de ce chapitre. Nous aborderons une approche non supervisée quant à l'analyse des données et nous utiliserons des données en grande quantité pour détecter les affouillements.

## 4.1 Modèle de poutre encastrée équivalente pour les modes de flexion

Pour valider expérimentalement le modèle de poutre encastrée équivalente du chapitre 2.2, le rapport entre la rigidité de la pile et celle du sol élastique  $\left(\frac{EI}{k}\right)^{1/4}$  (homogène à une longueur) permet de définir une longueur active  $L_a$  selon laquelle une fondation peut être supposée profonde (relation (2.25)). En conséquence, si on considère  $\omega_r(\varepsilon)$  la pulsation du mode  $r$  d'une pile de longueur libre  $a$  avec  $\varepsilon$  un paramètre de l'ISS issu de la relation (2.13). Cette pile a une longueur d'enfouissement infinie relativement à l'équation (2.25) qui permet de supposer des déplacements nuls en son ancrage. De plus, on définit  $\Omega_r$  la pulsation d'une poutre encastrée libre de longueur  $L_{eq}(a) = a + \varepsilon$ , on a,

$$\omega_r(\varepsilon) = \Omega_r(\varepsilon) + \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0^+}(\varepsilon^2), \quad (4.1)$$

avec,  $\varepsilon = \frac{1}{\delta_r}$ , la profondeur de peau définie dans la relation (2.13) pour les sols de Winkler. La preuve pour la relation (4.1) est proposée en annexe B.3. Sur la Figure 4.1, cette relation est schématisée avec la confrontation de deux modèles : le système réel où  $\varepsilon$  est un paramètre caractérisant l'ISS et le modèle équivalent où  $\varepsilon$  est une longueur additive. De plus, les configurations expérimentales de [Boujia et al., 2020] permettent de supposer une valeur théorique pour le premier mode en flexion,

$$\varepsilon_{model} \approx \left(\frac{4EI}{k}\right)^{1/4}.$$

De ce fait, l'expérience proposée par [Boujia et al., 2020] sera utilisée pour juger du modèle de poutre encastrée libre équivalente.

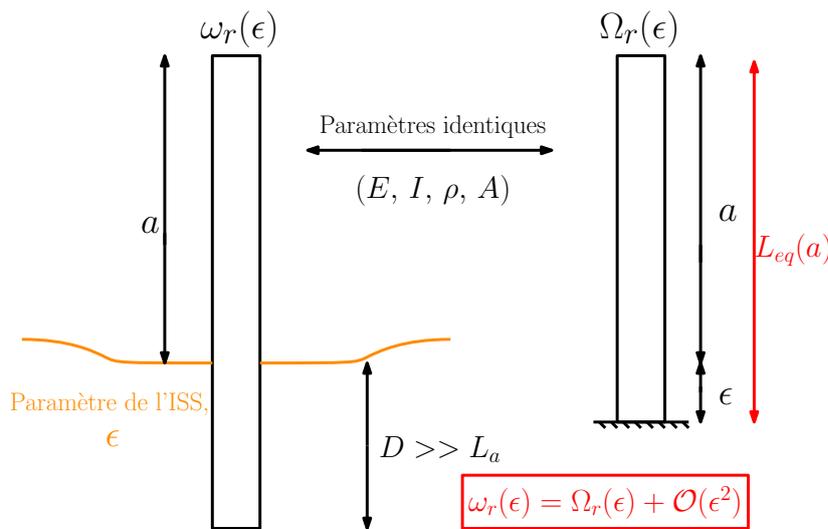


FIGURE 4.1 – Poutre affouillée d'une longueur libre  $a$  et poutre encastrée-libre équivalente de longueur  $L_{eq}(a)$ .

### 4.1.1 Protocole expérimental

Dans [Boujia et al., 2020], les essais consistent à étudier la réponse libre d'une poutre mince en aluminium qui est partiellement enfouie dans du sable de Fontainebleau. Les divers paramètres du problème sont répertoriés dans le Tableau 4.1.

Paramètres	Valeurs
$\rho$	$2700 \text{ kg/m}^3$
$A$	$1,25 \text{ E-04 m}^2$
$E$	$62,2 \text{ E+09 Pa}$
$k$	$1,4 \text{ E+06 Pa}$
$I$	$2,6042 \text{ E-10 m}^4$
$L$	$1,17\text{m}$
$D_{50}$	$0,70 \text{ mm}$

TABLE 4.1 – Données expérimentales de [Boujia et al., 2020]

Le protocole expérimental consiste alors à la détection de la première fréquence propre du système via une transformée de Fourier de la réponse libre. La Figure 4.2 présente ce dispositif. On remarque que la longueur  $a$  de notre modèle est ici la longueur  $H$ .

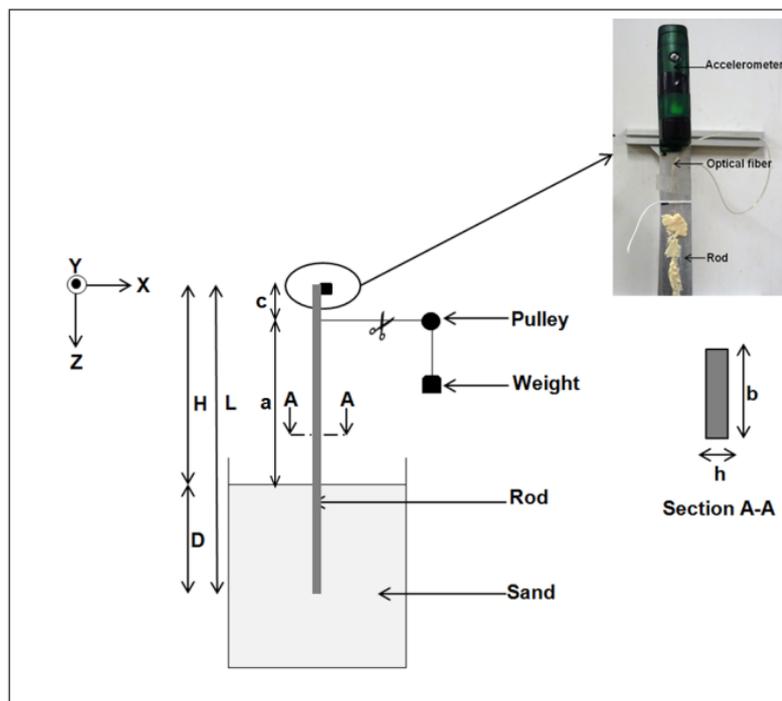


FIGURE 4.2 – Dispositif expérimental dans [Boujia et al., 2020].

### 4.1.2 Calage du modèle pour le premier mode de poutre encastrée équivalente

Tout d'abord, l'accéléromètre utilisé est un GCDC-X series d'une masse  $m_{\text{capteur}} = 0,041 \text{ kg}$  soit près de 50% de la masse totale du système. Cette masse est prise en compte avec un changement des conditions aux limites en  $x = -a$  dans l'équation (2.4) en considérant l'inertie de la masse ponctuellement : la pile n'est plus libre.

$$\begin{aligned} \tilde{W}_r''\left(\frac{-a}{L}\right) &= 0, \\ \tilde{W}_r^{(3)}\left(\frac{-a}{L}\right) &= -m_{\text{capteur}}\omega_r^2 \tilde{W}_r\left(\frac{-a}{L}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Alors, on introduit  $\epsilon_{\text{exp}}$  expérimental qui est déterminé par la distance moyenne  $L_{\text{eq}}(a) - a$  (équation (2.24)). La Figure 4.3 compare le modèle du chapitre 2.2 avec les expériences de [Boujia et al., 2019] en présentant  $\epsilon_{\text{exp}}$  conformément aux hypothèses choisies.

Ce modèle permet de suivre la variation de fréquences propres d'une structure affouillée comme une variation de longueur d'une poutre encastrée libre de longueur  $a + \epsilon$ .

$\epsilon_{\text{model}}$	8,24 cm
$\epsilon_{\text{exp}}$	8,67 cm

TABLE 4.2 – Comparaison entre  $\epsilon_{\text{model}}$  et  $\epsilon_{\text{exp}}$

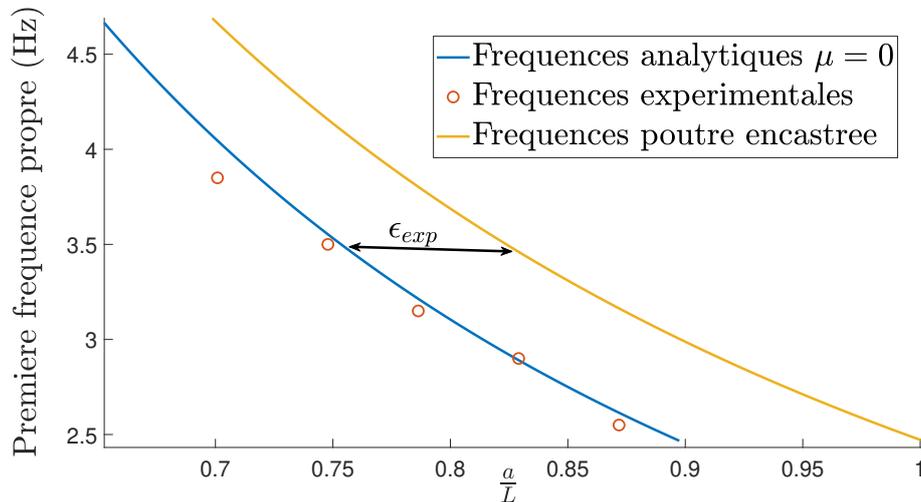


FIGURE 4.3 – Variation à l'affouillement de la première fréquence propre de poutre en flexion : Mode du chapitre 2.2 vs expériences de [Boujia et al., 2020].

## 4.2 Validation des modèles de vibration de corps rigides en utilisant l'analyse modale

### 4.2.1 Description des essais

Le comportement rigide des structures a fait l'objet de modélisation et d'analyse lors des parties 2.3 et 3.1. La littérature à ce sujet répertorie deux nombres sans dimensions pour observer ce phénomène [Gazetas, 1991, Boujia et al., 2021] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{E_s} > 10^3 \quad \text{Le rapport entre module d'Young de la structure et du sol.} \\ \frac{2B}{L} \quad \quad \quad \text{Le rapport d'élançement.} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

#### Corps d'épreuve étudiés

Conformément à l'équation (4.3) nous avons engagé une campagne expérimentale sur trois corps d'essais de différentes géométries et de différents moments d'inertie. Ces corps d'épreuve sont présentés sur la Figure 4.3 où la référence  $D = 0$  est représentée par une surface.

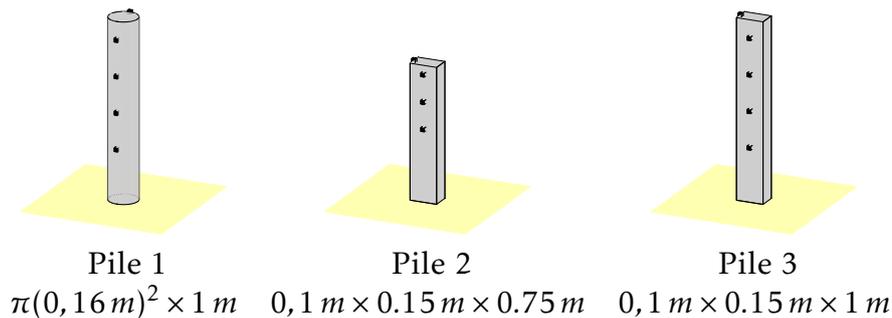


TABLE 4.3 – Schémas des piles. La hauteur de sable est représentée pour une profondeur nulle; les points noirs représentent les accéléromètres.

#### Protocole expérimental

Ces essais font l'objet de l'étude de la réponse libre des modes rigides et leur sensibilité au paramètre  $D$  représentant un creusement.

1. Sur ces corps d'épreuves nous avons placé des accéléromètres numérotés par ordre croissant en partant du haut de pile (de 1 à 4 pour les piles de 0,75 m et de 1 à 5 pour les piles de 1 m). Ces capteurs sont marqués par des points noirs sur la Figure 4.3. Par convention, la face où les accéléromètres sont fixés (Figure 4.3) est normale à l'axe  $x$  et la plus petite face est normale à l'axe  $y$  (trièdre direct avec  $z$ , l'axe vertical).
2. Par soucis de répétabilité et représentativité des résultats, la réponse libre est simulée par un essai d'impact par le biais d'un système de type "pendule". Une masse fixée au pendule vient solliciter la structure au niveau du

capteur 2 (face opposée). Le système d'essai d'impact est un pendule constitué d'une masse de  $0,153\text{ kg}$  accrochée à un fil de drisse d'une longueur de  $1,2\text{ m}$ . La condition initiale de l'essai est un angle de  $20^\circ$  à vitesse nulle (lâché de masse). Cet angle a été dimensionné pour conserver un système linéaire invariant relatif aux petits déplacements du modèle de corps rigide du chapitre 2.3.

3. La préparation du corps d'épreuve débute par un remplissage de sable compacté d'une hauteur de  $10\text{ cm}$ . Ensuite, le corps d'épreuve est placé sur sur ce lit de sol de référence  $D = 0\text{ cm}$ . Le bac est rempli au fur et à mesure de sable par un processus de pluviation afin de s'assurer de l'homogénéité du sol.

En somme, la pile instrumentée est partiellement enfouie d'une longueur  $D_{max}$  et repose sur un lit de sol de  $10\text{ cm}$ . La Figure 4.4 décrit le dispositif d'essai d'impact.

Alors, le protocole expérimental consiste en l'étude de la réponse du corps d'épreuve de  $D_{max}$  jusqu'à  $D_{min}$  par pas de  $5\text{ cm}$ .

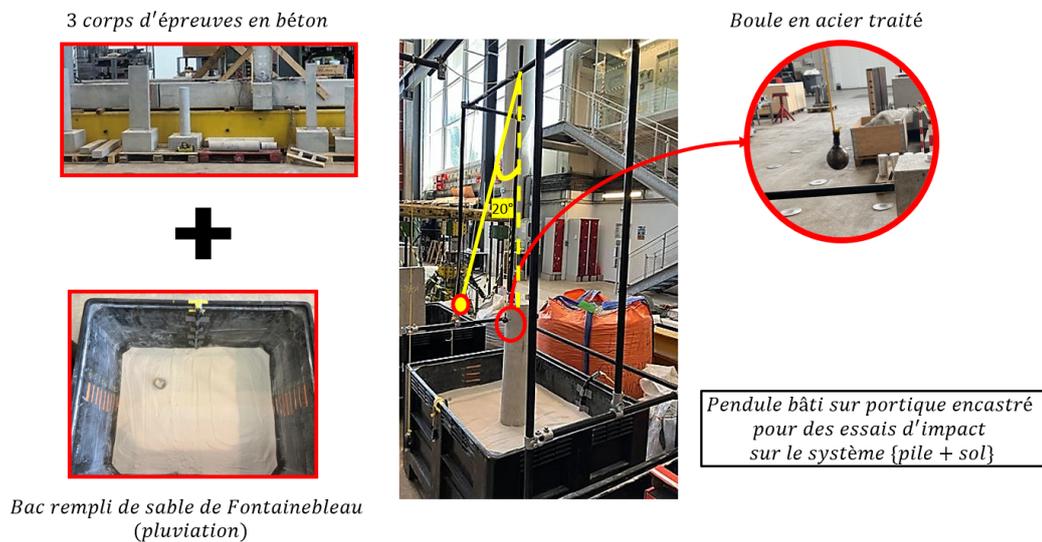
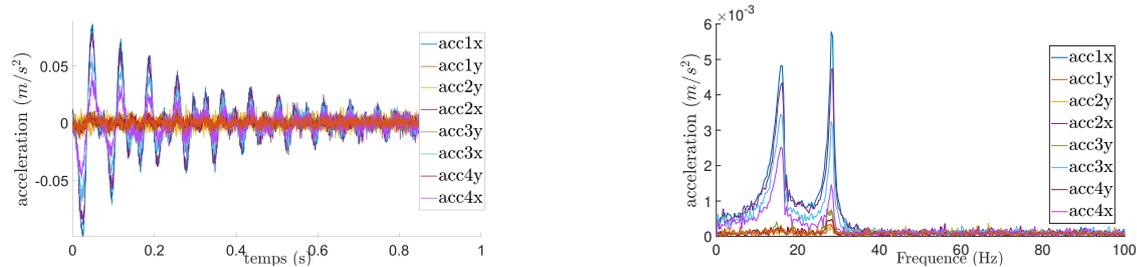


FIGURE 4.4 – Descriptif de l'essai d'impact du système de pile réduite affouillée.

### 4.2.2 Identification des paramètres pour le suivi

#### Méthode

Sur la Figure 4.5 est tracée la réponse libre de la pile 2 sous une sollicitation selon l'axe  $x$  et pour  $D = 0,15 m$ . De plus, le module de la transformée de Fourier associée aux capteur bi-axiaux est présenté. On peut constater que le mode selon  $y$  est légèrement excité. Tout de même, on considère que l'excitation selon un axe permet d'analyser les modes rigides dans le plan de la sollicitation.



(a) Réponse libre (centrée) de la pile 2 selon  $x$  pour  $D = 0,15 m$ .

(b) Transformée de Fourier de la réponse libre de la pile 2 selon  $x$  pour  $D = 0,15 m$ .

FIGURE 4.5 – Réponse des sorties  $\{w(t)\}$  avec un creusement de  $D = 0,15 m$ .

#### Identification expérimentale des paramètres modaux

Les fréquences propres, déformées modales et amortissements sont les paramètres du modèle à identifier pour le suivi de l'affouillement (parties 2.3 et 3.1). Nous utiliserons la méthode de décomposition dans le domaine fréquentiel (3.52) avec une décomposition en valeurs singulières (équation (3.54)). La Figure 4.6 est une application de la relation (3.54) pour la pile 2 selon  $x$  avec  $D = 0,15 m$ . Le

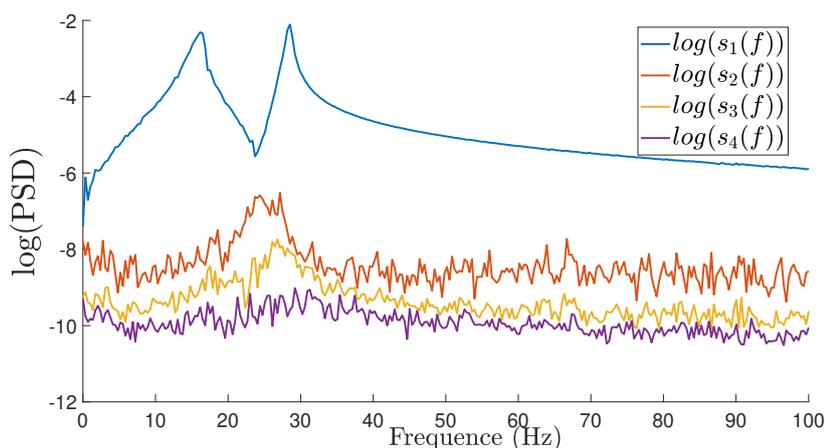


FIGURE 4.6 – Décomposition en valeurs singulières dans le domaine fréquentiel de la pile 2 selon  $x$  avec  $D = 0,15 m$

procédé d'identification de la relation (3.54) est réitéré pour chaque valeur de  $D$  :

les fréquences propres et les déformées modales sont alors identifiées. Dans le Tableau 4.4, nous avons répertorié les modes identifiés. Les déformées modales sont représentées selon la norme euclidienne,

$$\{\phi\}^H\{\phi\} = 1$$

L'utilisation de plusieurs capteurs permet de vérifier le comportement rigide de la structure. En effet, dans le tableau 4.4 une régression linéaire est tracée entre chaque valeur de déplacement modal associé aux capteurs : le premier mode est un mode de "pendule" rigide à 1 DLL et le second est un mode rigide à 2 DDL (prise en compte de la translation).

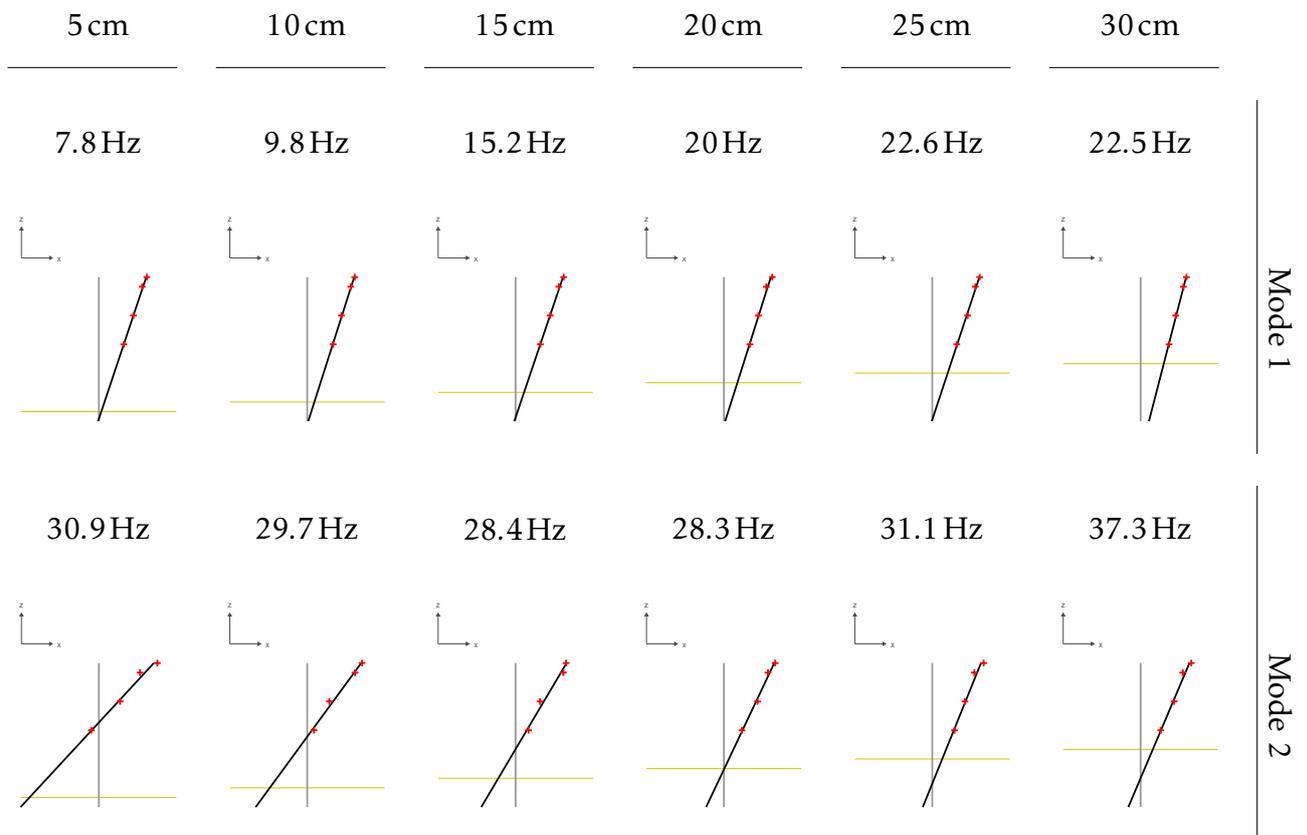


TABLE 4.4 – Déformées modales, avec la norme  $\{\phi\}\{\phi\}^H = 1$  puis régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes.

### Résultats et comparaison avec modèles

Les paramètres du modèle de corps rigide dépendent des paramètres suivants [Gazetas, 1991, Boujia et al., 2021] :

- Paramètres de structure : masse volumique  $\rho_s = 2500(km/m^{-3})$ , longueur  $L(m)$ , largeur  $2B$  ou  $2R(m)$  et moment d'inertie  $J(kg.m^2)$
- Paramètres du sol : module d'Young  $E = 2,5(Mpa)$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0,33$  et masse volumique  $\rho_s = 1400(km/m^{-3})$ .
- Amortissement de Rayleigh proportionnel à la matrice de rigidité  $\alpha_k$  (équation (3.28)).

Le paramètre d'amortissement  $\alpha_k$  est déterminé à partir de l'amortissement réduit  $\zeta_r$  où,

$$\alpha_k = \frac{2\zeta_r}{\omega_{0r}}.$$

Dans le Tableau 4.5 sont présentés les divers paramètres identifiés. On a tracé la comparaison des fréquences identifiées avec celles des modélisations des chapitres 2.3 et 3.1 tenant compte d'un amortissement proportionnel à la matrice de rigidité. On observe que le premier mode correspond aux attentes des modèles. Néanmoins, pour le second mode les résultats espérés ne sont pas conformes à la réalité observée. En effet, les fréquences propres des seconds modes observées expérimentalement sont plus bas que celles attendues par le modèle de pile rigide à deux degrés de liberté.

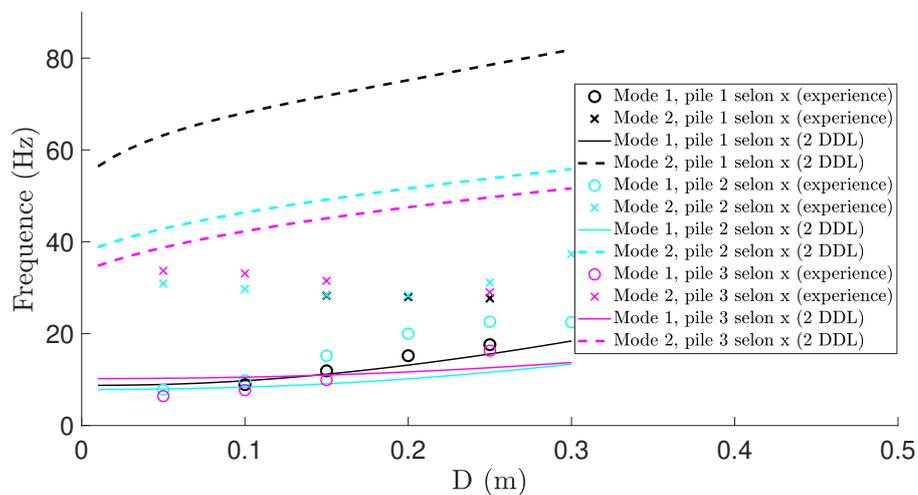


FIGURE 4.7 – Comparaison de l'identification des modes expérimentaux avec le modèle à 2 DDL.

$D(cm)$	$f_1(Hz)$	$\zeta_1$	$f_2(Hz)$	$\zeta_2$
Pile 1 selon x				
10	8,9	-	-	-
15	11,9	-	28,3	4%
20	15,2	5%	28	2%
25	17,6	3%	27,7	2%
Pile 2 selon x				
5	7,8	5%	30,9	2%
10	9,8	5%	29,7	2%
15	15,2	5%	28,4	2%
20	20	5%	28,3	3%
25	22,6	3%	31,1	4%
30	22,5	2%	37,3	4%
Pile 2 selon y				
10	13,2	1%	27,3	1%
15	16,7	1%	26,6	2%
20	19,7	3%	27,7	7%
25	20,3	2%	32,3	5%
30	19,2	2%	-	-
Pile 3 selon x				
5	6,4	4%	33,7	3%
10	7,7	-	33,1	2%
15	9,9	-	31,5	2%
25	16,3	4%	29	2%

TABLE 4.5 – Paramètres identifiés pour les piles 1 2 et 3

### 4.2.3 Discussion sur l'influence du sol

#### Suivi dynamique par fibre optique

La première source d'erreur provient de la minimisation de la contribution du sol aux modèles notamment pour le second mode. En effet, le modèle de pile à 2 DDL est essentiellement structurel dans l'hypothèse de ressorts élastiques pour l'interaction entre le sol et la structure. Nous avons alors placé de la fibre optique dynamique mesurant les déformations longitudinales à la fréquence d'échantillonnage de  $160 Hz$  dans le sol situé à  $z = -5 cm$  (sous la pile) pour la pile 2 (Figure 4.3). Les détails techniques de cet instrument de mesure sont présentés dans l'annexe D.1.2.

- Fibre 1, sous le centre de la pile ( $y = 0 cm$ ).
- Fibre 2, en bord de pile ( $y = 0.75 cm$ ).
- Fibre 3, en dehors de la zone de compression du sol engendrée par la rotation de la pile ( $y = 14 cm$ ).

La Figure 4.8 représente le dispositif d'instrumentation par fibre optique avec les déformations à l'instant du choc. Cette figure met en évidence la rotation de la pile rigide autour de l'axe neutre de la pile.

D'un point de vue structurel, nous avons tout d'abord analysé la dynamique des points de mesure à la position  $x = 54\text{ cm}$  pour chaque fibre (Figure 4.8). Cette abscisse correspond au maximum de déformation à l'instant de l'impact. La Figure 4.9 trace la réponse temporelle pour les points de chaque fibre à cette abscisse. On peut observer l'atténuation spatiale des déformations du sol : le phénomène reste localisé autour de la pile. De plus, les modes observés via l'analyse des vibrations de la structure sont aussi mis en évidence dans les déformations du sol. Sur la Figure 4.10, nous avons représenté les modules des transformées de Fourier des fibres optiques pour  $x = 0,54\text{ m}$ . Cela permet alors de constater l'importance du sol dans le phénomène car la détection de pics en fréquence correspondrait à un système plus complexe. Alors les notions de SLI du chapitre 3 sont à considérer pour un système combinant le système linéaire invariant de la pile rigide avec celui du sol. D'ailleurs, on remarquera que le sol a tendance à se comporter comme un filtre passe bas lorsque  $D$  augmente (Figure 4.10b).

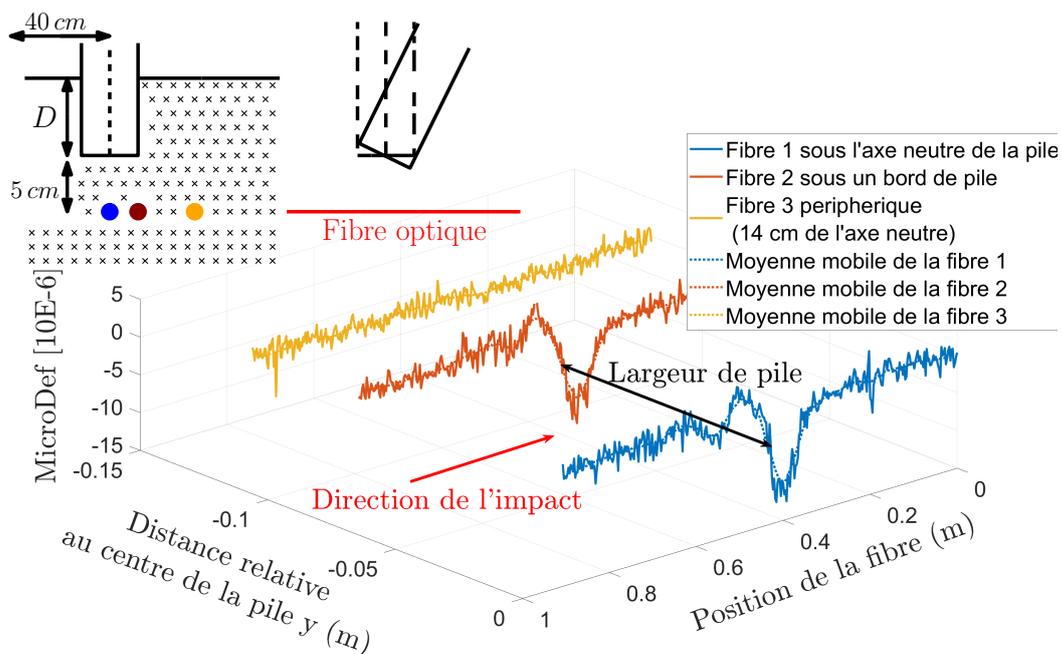


FIGURE 4.8 – Dispositif d'instrumentation de fibre optique dans le sol et réponse à l'instant  $t = 0\text{ s}$  (moment de l'impact, pour  $D = 5\text{ cm}$ ).

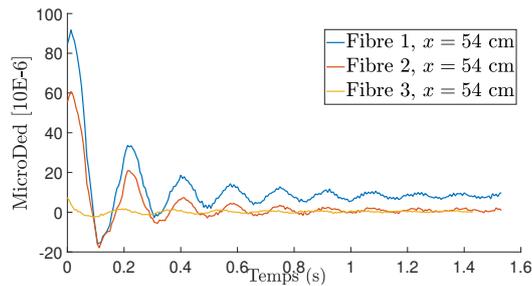


FIGURE 4.9 – Réponse temporelle pour chaque fibre à  $x = 54 \text{ cm}$ .

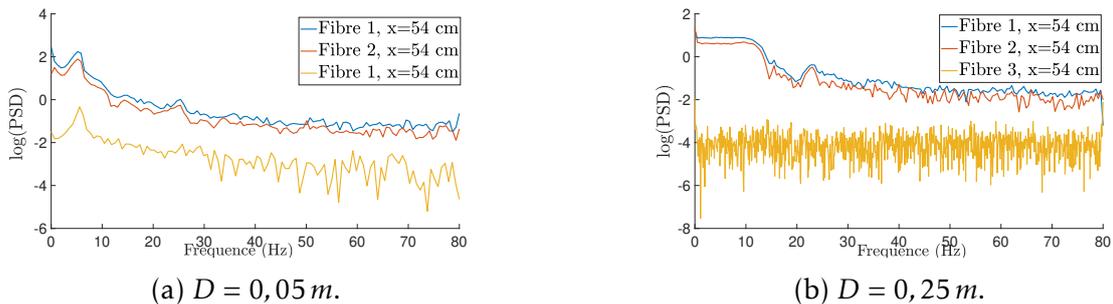


FIGURE 4.10 – Module de la FFT des réponses temporelles pour chaque fibre à  $x = 54 \text{ cm}$

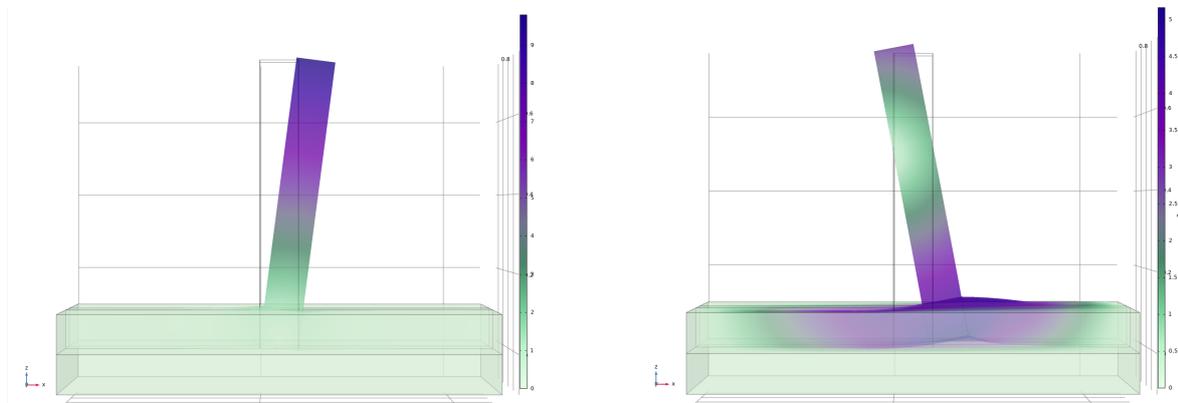
### Modélisation par éléments finis

Pour appuyer ces observations, nous avons effectué des simulations par éléments finis sur la pile 2 en considérant le système {sol + pile} : les deux entités sont considérées comme élastiques linéaires isotropes avec un contact lisse à leur interface. Les déplacements du sable aux frontières avec le bac sont, quant à eux, bloqués. Premièrement, avec un calcul de base modale  $Det([K] - \omega^2[M]) = 0$  nous avons conjecturé les hypothèses suivantes :

- Le premier mode est un mode rigide de pile en rotation autour de sa base (mouvement pendulaire). Ceci est en accord avec le modèle de la partie 2.3.
- Le second mode est difficile à définir comme un mode de pile seulement. On observe un mode de sol avec une pile rigide.

La Figure 4.11 montre les résultats de l'analyse modale pour les configurations de l'expérience de la section 4.3. Du fait de la prise en compte de l'inertie du sol, nous avons un mode de sol couplé avec la structure. En somme, l'essai de réponse libre de la pile permet l'identification modale d'un système linéaire invariant. Néanmoins, l'identification de ce mode n'est pas attendu par le modèle du Chapitre 2. L'instrumentation par fibre optique nous a apporté un regard porté vers le sol mettant en valeur alors sa contribution aux vibration de la pile. De ce fait, une caractérisation numérique de ce pseudo mode de {sol + pile} est plus judicieuse. Sur la Figure 4.12, nous avons comparé les fréquences propres de ce système obtenues par éléments finis avec celles obtenues par le modèle de corps rigide à 2 DDL et celles identifiées expérimentalement. On observe l'effet inertiel du sol dans la contribution du mode 2 avec une décroissance de la fréquence propre lorsque  $D$  augmente. Il nous faut

alors reconsidérer l'amortissement de Rayleigh de la partie 3.1 avec un terme proportionnel à la masse. De plus, lorsque  $D$  est faible, le modèle par éléments finis est proche du modèle à 2 DDL. Au premier abord, cela semble cohérent car la masse du sol devient négligeable. Néanmoins, la précision des modèles numériques n'estime pas de manière précise le comportement vibratoire réel pour un rapport  $D/L$  faible. Aussi, le sol est ici contenu dans un bac de sable et les questions de milieu infini ou de milieu par couche doivent faire l'objet de prochaines études. Ainsi, les techniques d'identification du chapitre 3 ont mis en évidence la sensibilité des modes rigides au paramètre  $D$ . Cette sensibilité se traduit par un changement de paramètres modaux que nous souhaitons détecter. On peut alors faire abstraction du modèle et concevoir une approche essentiellement fondée sur la science de données.



(a) Déplacements modaux du premier mode de la pile 2 pour  $D = 0,1 m$  : 7,7 Hz.

(b) Déplacements modaux du premier mode de la pile 2 pour  $D = 0,1 m$  : 38,6 Hz.

FIGURE 4.11 – Analyse modale par éléments finis de la pile 2 pour  $D = 0,1 m$  dans des configurations expérimentales (prise en compte du sol).

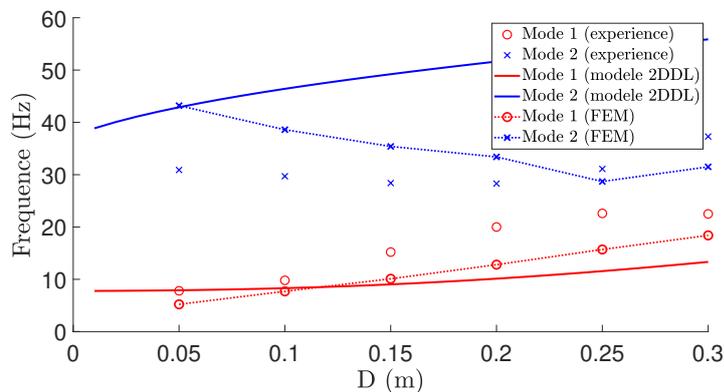


FIGURE 4.12 – Comparaison des différentes approches : Analyse modale pile 2DDL, FRF par élément finis.

### 4.3 Suivi vibratoire sur un ouvrage autoroutier : Développement de méthode d'analyse modale opérationnelle

Cette partie traite de l'application des méthodes d'analyse modale opérationnelle établies lors du chapitre 3.2. L'objectif est la mise en place d'un suivi en temps réel des fréquences propres des piles de pont. Ces méthodes seront l'association de la méthode EVD-MAC 3.2 et d'une classification des données basée sur l'algorithme DBSCAN [Ester et al., 1996]. Dans une problématique d'atténuation du bruit, le procédé est décrit sur la Figure 4.13 :

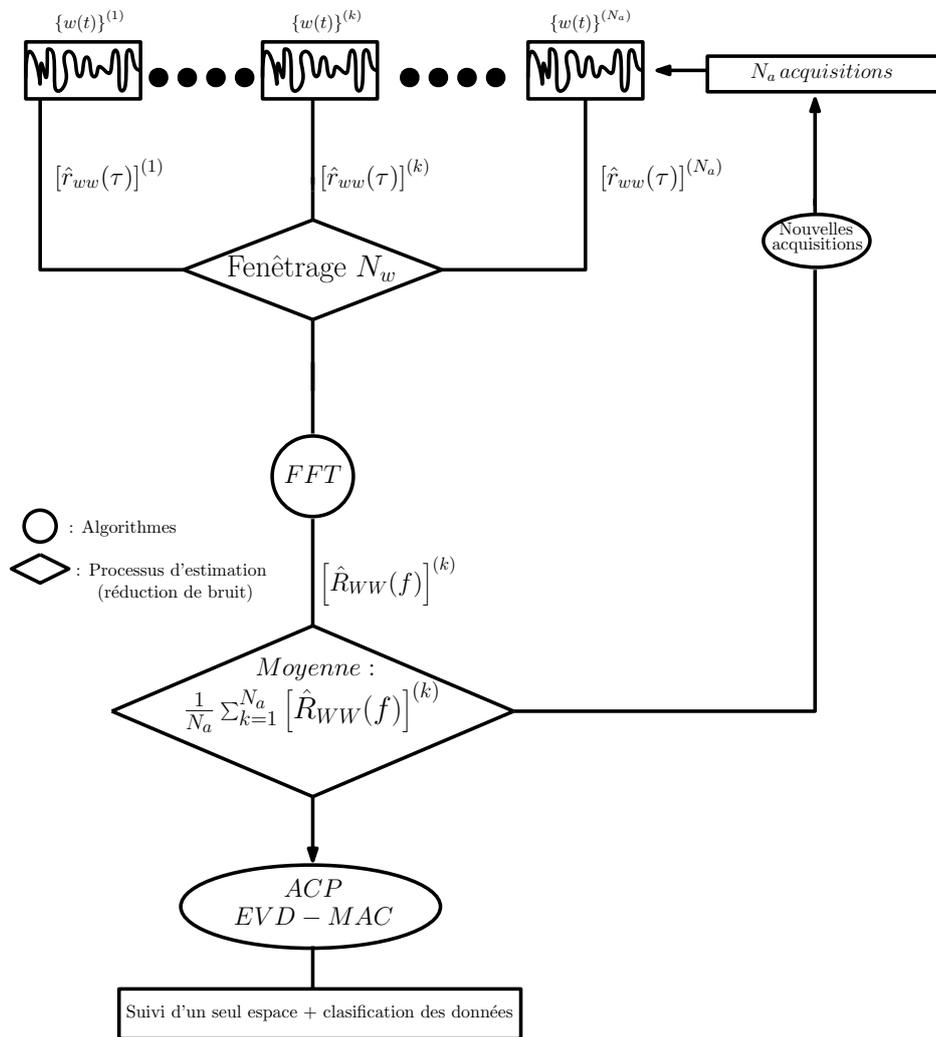


FIGURE 4.13 – Procédé de traitement et d'analyse du signal développé lors du chapitre 3.2.

### 4.3.1 Présentation de l'ouvrage et de la chaîne d'acquisition

L'ouvrage choisi est un pont autoroutier français de l'A71 enjambant la Loire près d'Orléans (ense Sud>Nord). C'est un pont en béton précontraint construit par encorbellements successifs et d'une longueur totale de 400 mètres (5 travées : une de 50 m, deux de 75 m et deux de 100 m). Il comporte trois voies de circulation et une bande d'arrêt d'urgence. La vitesse y est limitée à 110 km/h et ce pont est muni d'un radar de contrôle routier.

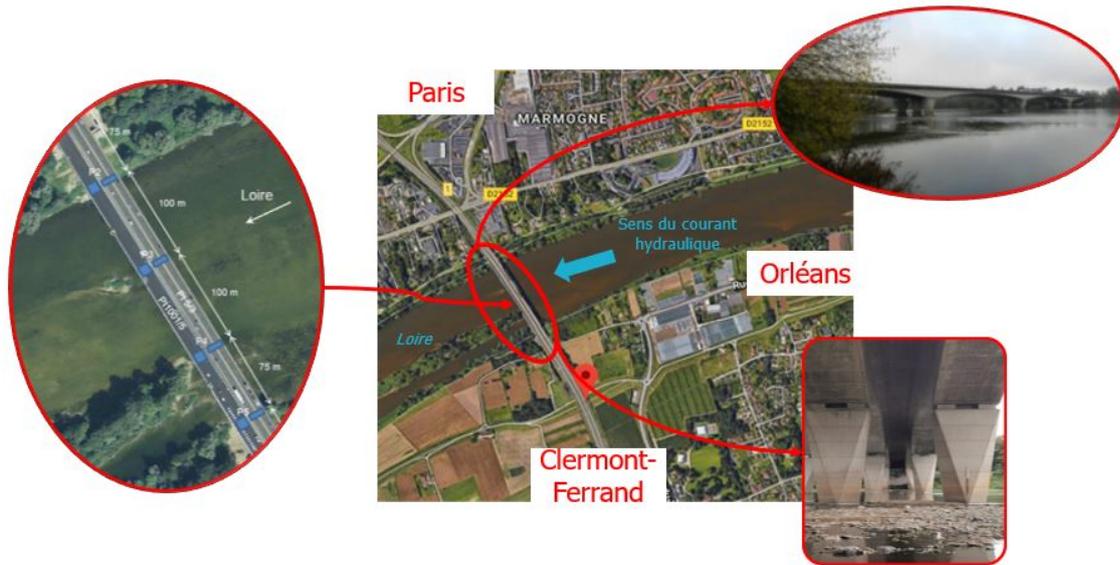


FIGURE 4.14 – Présentation de l'ouvrage instrumenté.

### Caractéristiques générales sur l'ouvrage

Cet ouvrage a fait l'objet d'une étude de relevés bathymétriques ces dernières années dans le cadre de l'ANR SSHEAR<sup>1</sup> (terminé en 2019). Les diverses études sur site effectuées par l'unité bathymétrie du Laboratoire Régional du CEREMA de Blois ont relevé une variation importante du niveau du sol autour de la pile P4 ces dernières années (Figure 4.15).

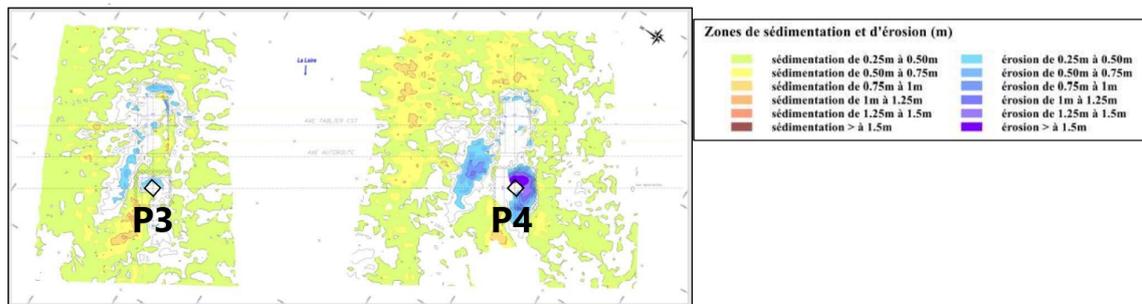


FIGURE 4.15 – Comparaison des surfaces bathymétriques entre 2016 et 2018 (crédit : journée de restitution du projet SSHEAR).

Pour détecter un potentiel affouillement, nous y avons alors placé des accéléromètres en deux localisations différentes : deux sous le tablier en tiers de travée et deux en haut de la pile P4. Au total nous avons 4 capteurs, deux mesurant selon la direction du champ de pesanteur terrestre (actions du trafic automobile) et deux mesurant selon la direction du courant fluvial (actions hydrauliques). La Figure 4.16 en résume l'instrumentation. Certaines données sont manquantes entre avril 2020-Octobre 2020, novembre 2020-février 2021, septembre 2021-octobre 2021, février 2022-mars 2022. Ces interruptions sont dues à diverses raisons mais au total nous dénombrons plus de 500 jours d'acquisition. La période d'acquisition la plus longue sans interruption dure 232 jours (entre février 2021 et octobre 2021).

### Données vibratoires récoltées "brutes"

Cette instrumentation est pilotée par un système d'acquisition mesurant des données vibratoires en temps réel depuis le 14 Février 2020 et jusqu'au 5 Mai 2022 (toute les 20 minutes). Les mesures vibratoires sont prélevées à la fréquence d'échantillonnage  $F_s = 200 \text{ Hz}$  pendant 5 minutes soit d'une longueur  $N = 300 \times F_s = 60000$ . En accord avec la Figure 4.16, le vecteur des sorties  $\{w(t)\}$  est ordonné de la manière suivante :

- $w_1(t)$  : Localisation 2 selon l'axe z (Pile de pont),
- $w_2(t)$  : Localisation 2 selon l'axe x (Pile de pont),
- $w_3(t)$  : Localisation 1 selon l'axe x (Tablier du pont),
- $w_4(t)$  : Localisation 1 selon l'axe z (Tablier du pont).

Pour atténuer la dérive des capteurs dans le temps, les signaux sont centrés (réduction de la moyenne). Afin de comparer les signaux lors d'une acquisition

1. Consortium composé de l'IFSTTAR, le CEREMA, l'UMR FAST, la SNCF, Cofiroute et Railenium

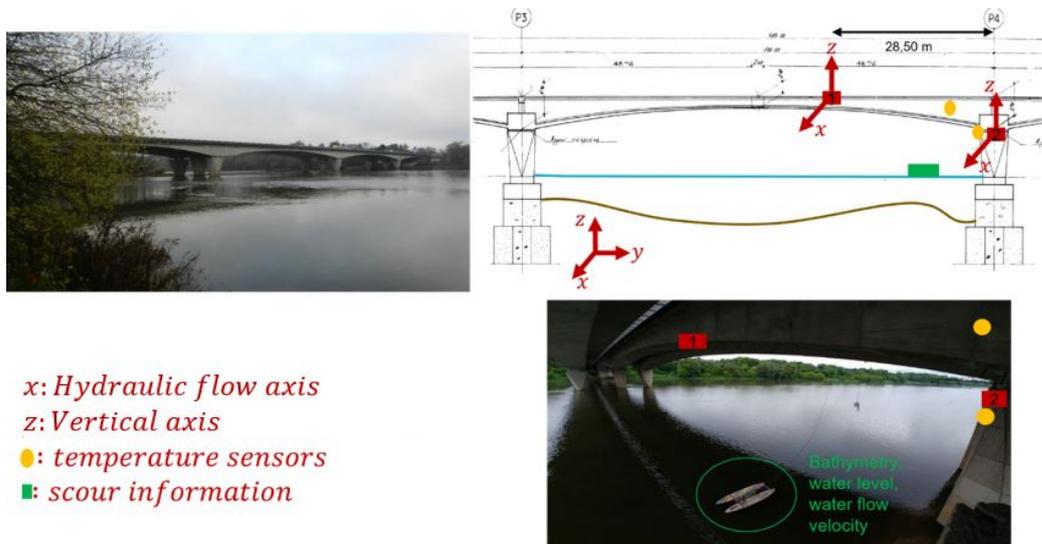


FIGURE 4.16 – Plan d'instrumentation de l'ouvrage.

entre eux, ceux-ci sont normalisés en les divisant par leur valeur maximale. La figure 4.17 présente les réponses temporelles des sorties  $\{w\}$  pour une acquisition le 01/03/2020 à 17h16.

Les capteurs utilisés n'ont pas la même précision de mesure (annexe D.3) et du bruit additif de mesure est observable pour les capteurs mesurant les vibrations du tablier. Pour étudier la signature vibratoire de l'ouvrage, les données issues du premier confinement imposé par le gouvernement ont suscité notre intérêt car ils permettent une analyse moins sensible au bruit. Par exemple, sur la Figure 4.18a, les réponses temporelles des sorties pour le 20/03/2020 à 17h16 sont tracées. A cette date les données sont comparables à celle de la Figure 4.17 et on observe la conséquence de la réduction de l'activité humaine en constatant des signaux plus "propres". En effet, cette réduction du bruit est visible via une réduction de la variance des signaux. Conformément à cette remarque, la Figure 4.18b trace la comparaison des tirages journaliers des vibrations entre une période d'activité usuelle (01/03/2020) et une période de confinement (20/03/2020). Néanmoins, la densité spectrale de puissance de chaque capteur reste bruitée (Figure 4.19). L'identification des modes via la PSD du capteur  $w_2(t)$  devient alors assez illisible pour l'identification des paramètres : un processus de traitement du signal est nécessaire.

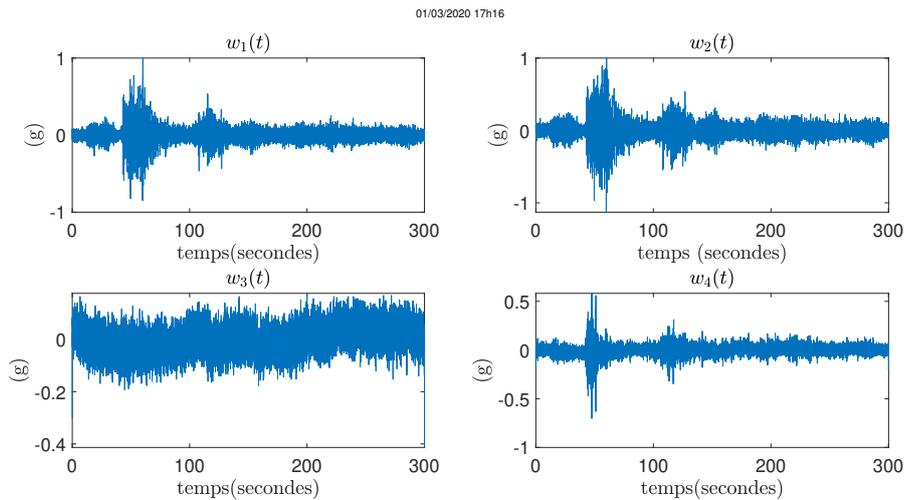


FIGURE 4.17 – Exemple de réponses réduites et normalisées lors d’une acquisition le 01/03/2020 à 17h16.

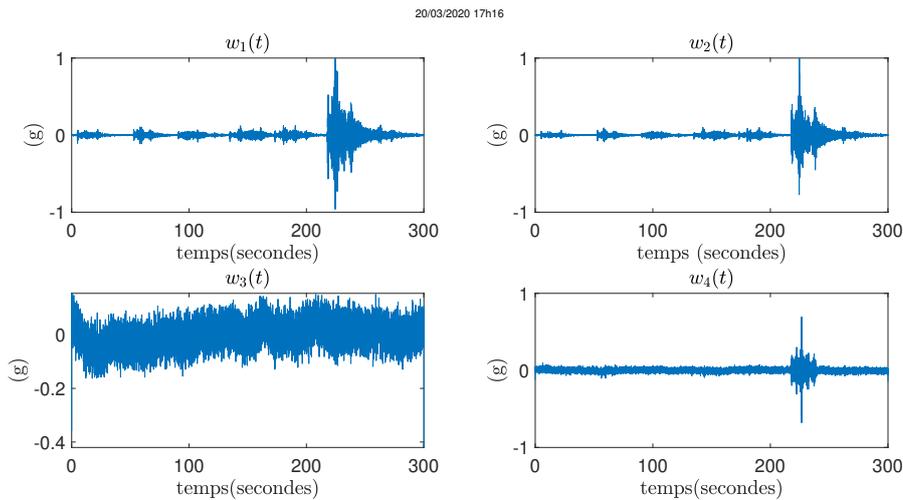
### 4.3.2 Déploiement d’une analyse modale opérationnelle

#### Analyse en composantes principales : Méthode EVD MAC

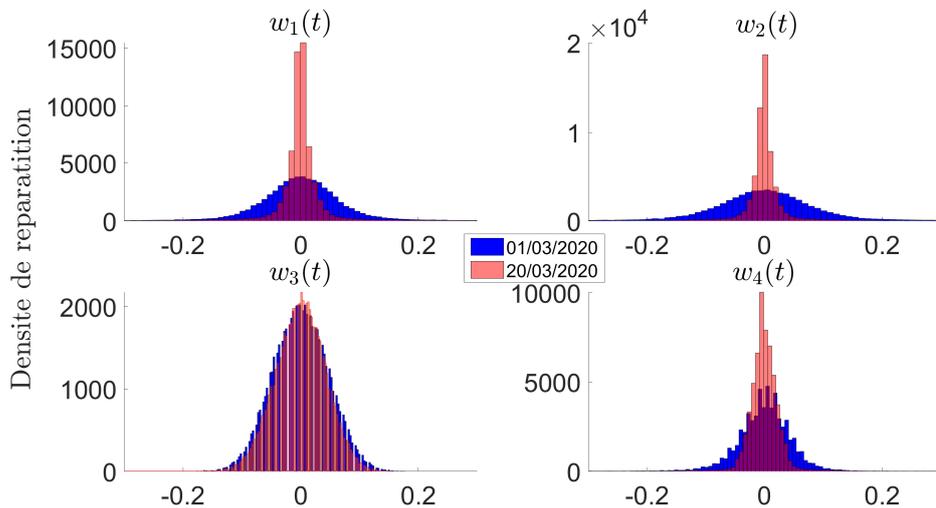
Dans une optique de réduction de bruit, nous avons souligné lors du chapitre 3.2 l’aspect aléatoire des signaux et les biais que cet aspect peut générer lors d’une estimation de la PSD. Conformément à la Figure 4.13, la matrice d’autocorrélation  $[r_{ww}(\tau)]$  est fenêtrée d’une taille  $N_w = N/4$ , soit 75 secondes de retard conservées lors de l’estimation de la corrélation des signaux. De plus, toujours dans l’optique de réduction du bruit, les transformées de Fourier des autocorrélations sont moyennées quotidiennement et nous étudierons les comportement pour des fréquences inférieures à 20 Hz. Sur la Figure 4.20, on constate que les PSD quotidiennes sont plus nettes que les signaux bruts.

Supposons alors que le problème est de rang 1, localement dans le domaine fréquentiel. Une décomposition en valeurs singulières est effectuée sur cette même date (20/03/2020) sur la Figure 4.21a). Dans cette figure, les valeurs singulières sont proches et on suppose même de possibles croisements. En y appliquant la méthode EVD-MAC (définie dans la partie 3.2), certains croisements sont obtenus dans les zones de rang supérieur à 1 de la figure 4.21a. Il en reste tout de même certaines zones où le critère MAC ne suffit pas à discriminer le choix de la composante principale.

On constate que pour un jour, les "pics" de la troisième composante principale sont presque tous aux mêmes fréquences que celles du tablier selon  $z$  (Figure 4.20, PSD  $W_4$ ), de même pour la quatrième composante principale qui est fortement liée à la pile de pont selon  $x$  (Figure 4.20, PSD  $W_2$ ).



(a) Exemple de réponses réduites et normalisées lors d’une acquisition le 20/03/2020 à 17h16.



(b) Comparaison sur la répartition journalière des données entre la période du confinement (lundi 20/03/2020) et en temps normal (mercredi 01/03/2020).

FIGURE 4.18 – Sorties lors du confinement français (20/03/2020).

### Méthode d’apprentissage statistique pour le suivi des affouillements

Pour justifier de la robustesse de la méthode non supervisée EVD-MAC, il faut se fixer une composante principale à suivre au fil des jours. Pour cela, nos premières observations ont permis de cibler le quatrième espace comme statistiquement proche des modes de piles dans la direction hydraulique. Le spectrogramme de la quatrième composante principale durant le mois d’avril 2020 est représenté sur la Figure 4.22a. Certains pics quotidiens sont détectés localement dans le temps mais nous pouvons juger de la robustesse de la méthode EVD-MAC avec une reproductibilité dans le temps de l’espace ciblé. En outre, la carte topographique de la Figure 4.22b peut suggérer des crêtes continues dans le temps. Ces notions de crête

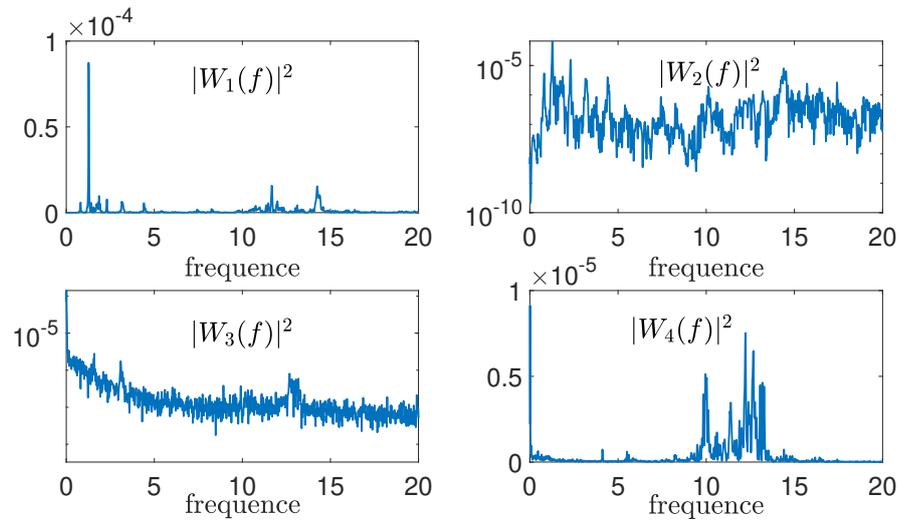


FIGURE 4.19 – Exemple de PSD lors d’une acquisition le 20/03/2020 à 17h16.

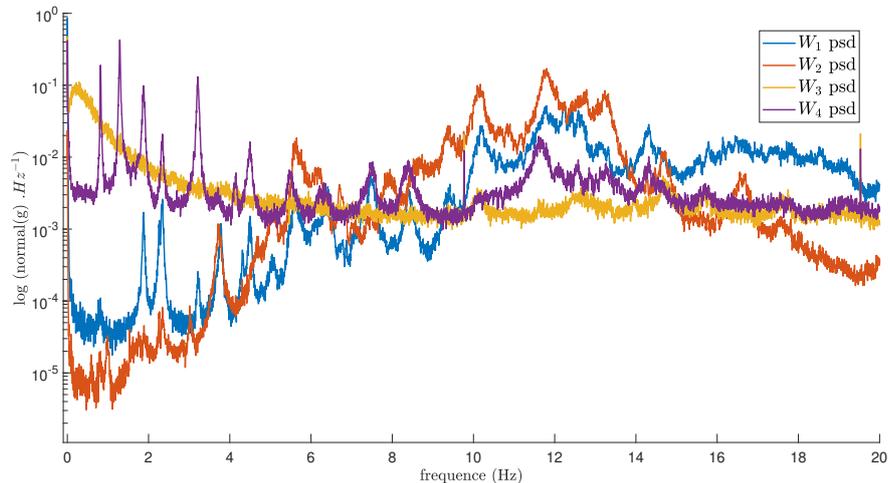
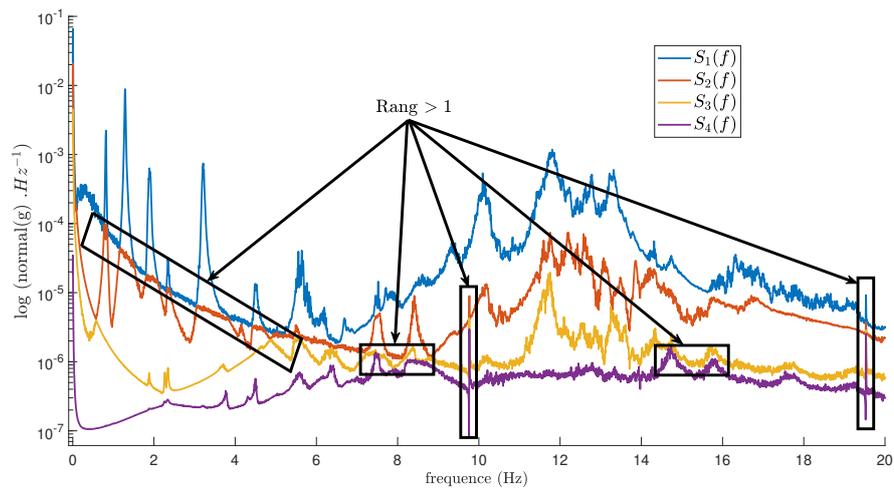


FIGURE 4.20 – PSD des sorties via la transformée de Fourier des autocorrélation : Moyennage quotidien du 20/03/2020.

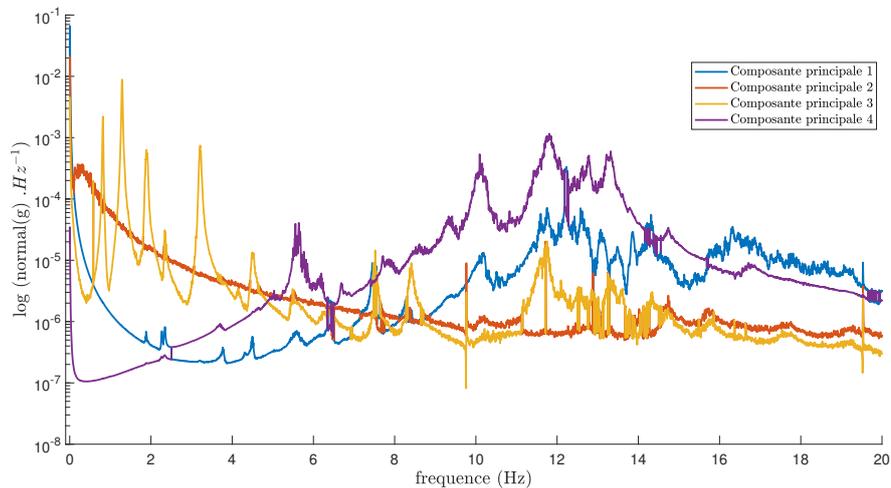
sont les éléments que nous avons souhaité suivre dans le temps. Pour cela, nous avons développé un algorithme de "peak picking" quotidien détectant les maximums locaux.

Dès lors, la question de continuité des pics dans le temps est séparée de l’intensité des pics observables et en utilisant les algorithmes d’apprentissage non supervisés, une classification des fréquences peut être effectuée. La Figure 4.23 présente la classification des fréquences détectées par peak-picking en utilisant l’algorithme DBSCAN [Ester et al., 1996] implémentée sur Matlab<sup>2</sup>. Nous avons choisi cet algorithme de classification de par sa gestion du bruit. Le paramètre d’entrée est un voisinage de boule ouverte qui à la différence des autres algorithmes de classification ne requiert pas d’imposer le nombre de classes. Au total, sur toute la période

2. <https://www.mathworks.com/help/stats/dbscan.html>



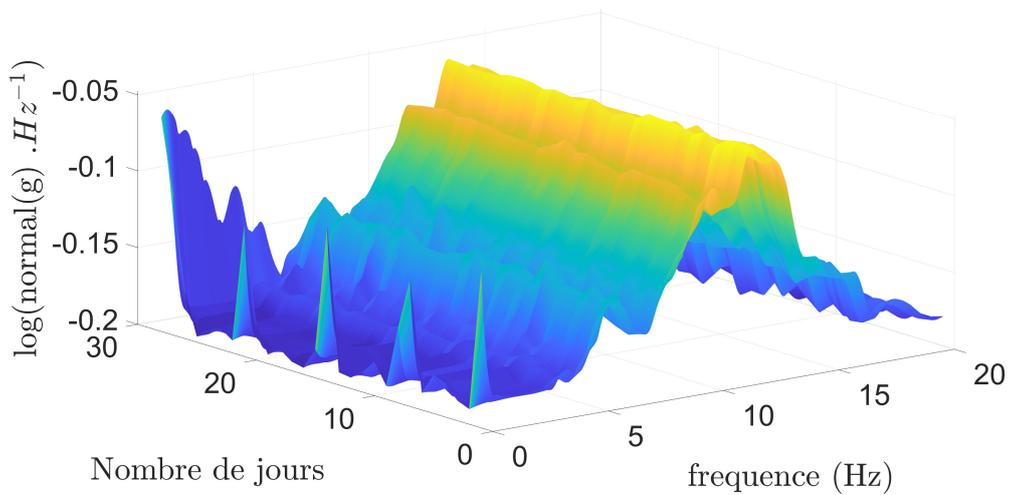
(a) Décomposition en valeurs singulières dans le domaine fréquentiel : Moyennage quotidien du 20/03/2020.



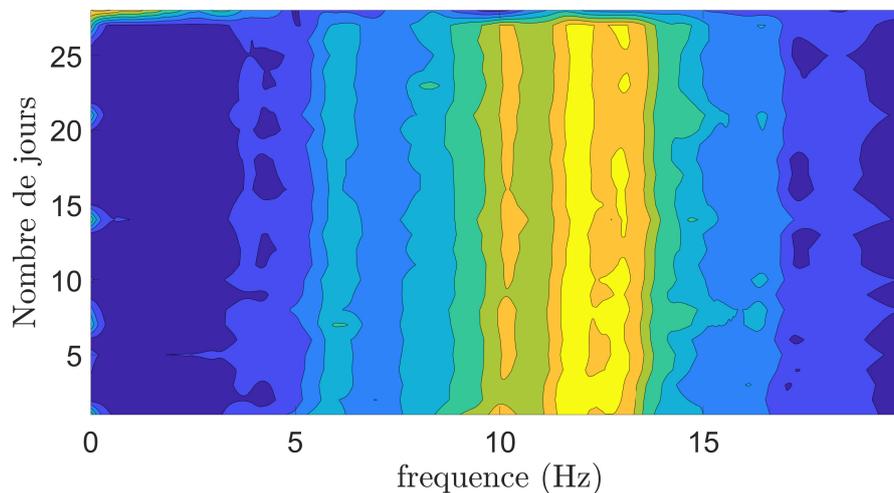
(b) Décomposition dans le domaine fréquentiel avec EVD-MAC : Moyennage quotidien du 20/03/2020.

FIGURE 4.21 – Comparaison entre SVD et EVD-MAC (20/03/2020).

d'instrumentation on dénombre 9 classes. Lorsqu'on compare certaines classes en période de confinement, leur détection est moins évidente. Nous avons supposé que les classes peu présentes lors du premier confinement sont en fait des modes excités par les activités humaines. L'idée est d'étudier les variations de ces classes dans le temps. Notamment avec l'évolution des paramètres environnementaux tel que la température et le niveau d'eau (seules données accessibles).



(a) Spectrogramme de la quatrième composante principale.



(b) Carte topographique : Plan temps-fréquence avec altitude des PSD la quatrième composante principale.

FIGURE 4.22 – Spectrogramme et cartographie du quatrième espace obtenu par EVD MAC.

### Évolution des fréquences propres et décorrélation de l'effet de la température

La base de données comprend des périodes d'acquisition entre avril 2020-octobre 2020, novembre 2020-février 2021, septembre 2021-octobre 2021, février 2022-mars 2022. Au total plus de 500 jours d'acquisition sont étudiés avec la durée d'acquisition la plus longue sans interruption de 232 jours (entre février 2021 et octobre 2021). Pour entreprendre les analyses, nous avons sélectionné des classes sur un critère de suivi de plus de 200 jours sur l'ensemble de l'acquisition. Six classes sont retenues avec  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  qui sont respectivement le premier quartile (25 % de la population en dessous), la médiane (50 %) et le troisième quartile (75%).

Afin de mieux comparer les valeurs tout en gardant la corrélation entre para-

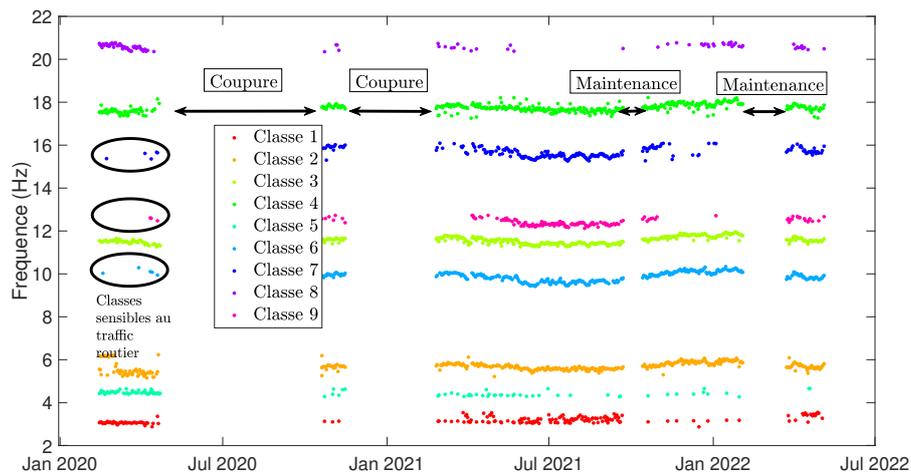


FIGURE 4.23 – Classification du quatrième espace obtenu par EVD MAC issu sur l’ensemble des données d’acquisition.

Classe	Moyenne	$\sigma$	Min	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Max
1	3,38 Hz	0,29 Hz	2,87 Hz	3,14 Hz	3,38 Hz	3,7 Hz	3,91 Hz
2	5,70 Hz	0,16 Hz	5,21 Hz	5,58 Hz	5,69 Hz	5,86 Hz	6,07 Hz
3	9,86 Hz	0,24 Hz	9,42 Hz	9,64 Hz	9,87 Hz	10,34 Hz	9,42 Hz
4	11,57 Hz	0,19 Hz	11,26 Hz	11,41 Hz	11,56 Hz	11,74 Hz	11,26 Hz
5	15,61 Hz	0,22 Hz	15,26 Hz	15,46 Hz	15,56 Hz	15,72 Hz	16,2 Hz
6	17,76 Hz	0,18 Hz	17,64 Hz	17,64 Hz	17,74 Hz	17,92 Hz	18,2 Hz

TABLE 4.6 – Statistiques descriptives sur les classes retenues (plus de 200 jours)

mètres, nous avons centré-réduit toutes ces classes. Sur la Figure, 4.24, la corrélation entre les classes et les données environnementales est donnée sous forme d’une matrice de corrélation. On observe d’une part une forte corrélation des classes avec la température quotidienne.

En effet, sous l’effet de la température, des champs de contraintes additifs et une dilatation modifient particulièrement les paramètres géométriques et les conditions aux limites de l’ouvrage [C.Cremona, 2009]. Par exemple, un effet linéaire et décroissant de la température sur les fréquences propres des ouvrages a été montré dans [Peeters et al., 2001]. Dans cet élan, nous confrontons la variation des classes (fréquences centrées-réduites) aux effets de la température sur la Figure 4.25a. On observe également un effet inverse de la température sur les classes. De plus, lorsque nous avons effectué une régression linéaire sur les classes (Figure 4.25b) les coefficients de détermination  $R^2$  sont supérieurs  $r^2$  à 0,7 pour chaque classe (sauf pour la classe 4, Figure 4.24 et Annexe D.3.4).

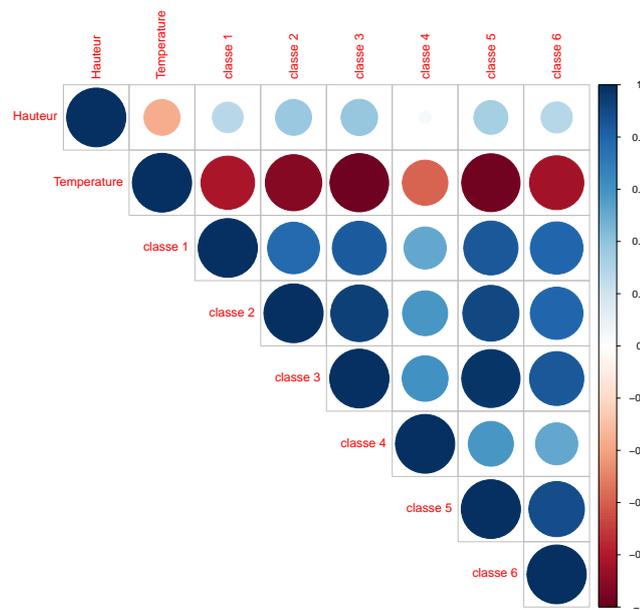


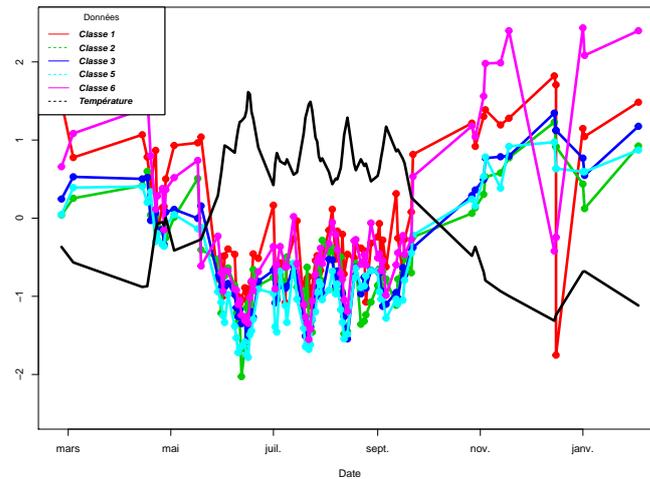
FIGURE 4.24 – Corrélations entre individus de la base de données.

### 4.3.3 Discussion : Détection d’affouillement avec anomalies sur classes lors d’évènements extrêmes

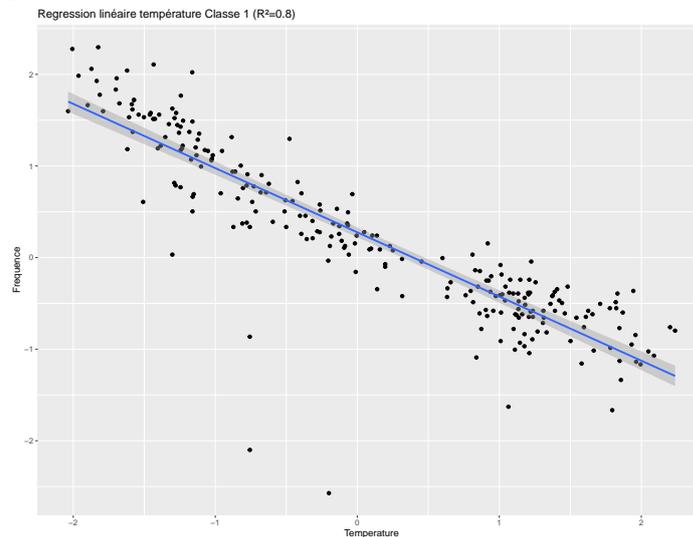
Certes, nous aurions pu faire le choix de faire face à un problème à 3 dimensions où la classe de fréquences  $c$  est considérée comme donnée de sortie d’après le Tableau 4.7. Cependant, suite aux effets de la température observés pour chaque classe (Figure 4.24 et Annexe D.3.4), nous avons choisi de décorréliser celles-ci de la température en leur soustrayant les équations de droites issues des régressions linéaires.

Dates	Classe "c" centrée réduite $c \in \{1 : 6\}$	Hauteur d’eau centrée réduite $H_w$	Température centrée réduite
25/02/2021	Fréquences	Hauteur d’eau	Température
⋮	quotidiennes	quotidienne	quotidienne
03/02/2022	(une mesure toute les 20 minutes)	(une mesure toute les 5 minutes)	(une mesure toute les 20 minutes)

TABLE 4.7 – Base de données de l’ouvrage instrumenté



(a) Variation du premier cluster en fonction de la température.



(b) Régression linéaire sur la classe 1 en fonction de la température ( $R^2 = 0,8$ ).

FIGURE 4.25 – Impact de la température sur une classe.

Dès lors, le problème est à deux dimensions : celle de la date et celle de la hauteur d'eau  $H_w$ . Leur lien n'est pas évident (Figure 4.24) et au contraire, en ce qui concerne la hauteur d'eau, celle-ci provoque un effet de masse ajoutée sur l'ouvrage [Yeung, 1981]. Cet exercice de réflexion sur un problème mal posé nous a mené à rajouter une variable au problème : les événements extrêmes comme les inondations et les crues par exemple. En effet, les références bibliographiques de la partie 1.1 de l'état de l'art ont proposé un lien entre la hauteur d'eau et le débit d'un courant avec notamment les courbes de tarages (Figure 1.7). Ensuite, au travers de l'équation (1.2), les cycles d'érosion sont des paramètres dépendant de la vitesse d'écoulement. De ce fait, l'objectif est de trouver un lien entre hauteur d'eau et les

fréquences identifiées tout en jugeant si celui-ci est lié à un phénomène d'affouillement.

Définissons tout d'abord évènement extrême. Soit  $Q_3$  le troisième quartile de hauteur d'eau du bassin étudié pour une période entre février 2021 et octobre 2021. Soit  $(d_1, d_2, \dots, d_j)$  une liste de jours consécutifs de la base de données. On note  $H_w(d_k)$  la hauteur d'eau associée au jour  $d_k$ . On appelle un évènement extrême d'inondation, une durée de  $j$  jours telle que pour un rayon  $\varepsilon_w$

$$\begin{aligned} |H_w(d_1) - H_w(d_j)| &< \varepsilon_w \times H_w(d_1), \\ H_w(d_k) &> Q_3, \quad 1 < k < j. \end{aligned}$$

Ainsi les paramètres d'entrée sont le nombre de jours jugeant de la cinétique de l'inondation et donc de l'évènement. Le troisième quartile du niveau d'eau  $Q_3$  représente l'effet minoritaire de l'évènement extrême et  $\varepsilon_w$  un rayon de boule ouverte pour comparer des hauteurs d'eau semblables. Effectivement, nous voulons juger de l'effet non réversible de l'évènement sur la structure avec la variation de la classe de fréquence observée pour deux états de hauteurs d'eau similaires et proches dans le temps. La Figure 4.26 présente le principe de la détection d'une variation de classe suite à un évènement extrême.

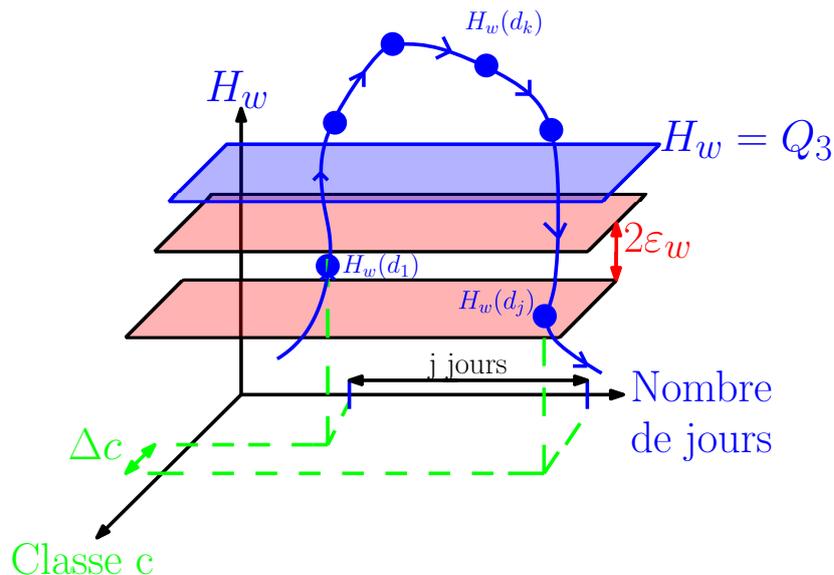


FIGURE 4.26 – Principe de détection de variation d'affouillement suite à un évènement extrême

Dans le Tableau 4.8 nous avons répertorié les anomalies détectées pour 3 et 4 jours. Afin d'éviter les doublons, nous n'avons pas réécrit les anomalies détectées pour  $\varepsilon_w = 10\%$  lorsqu'elles sont détectées pour  $\varepsilon_w = 1\%$ . On notera que le changement de fréquence le plus important est de  $0,517\text{ Hz}$  le 26/04/2021 affectant la classe 2 qui est un pseudo mode à  $5,70\text{ Hz}$ . Néanmoins, cette classe a visiblement subi une variation négative le 26/08/2021 de  $0,226\text{ Hz}$ . Pour juger des anomalies détectées, il faut vérifier si, au niveau de la pile de pont, il s'est réellement produit un changement au niveau du sol.

classe $c$	Date	$\Delta f$ (Hz)
$\varepsilon_w = 1, \% j = 3$ jours		
2	26/08/2021	-0,226
$\varepsilon_w = 1, \% j = 4$ jours		
6	25/04/2021	0,280
$\varepsilon_w = 10, \% j = 3$ jours		
1	02/09/2021	-0,189
2	26/04/2021	0,517
$\varepsilon_w = 10, \% j = 4$ jours		
1	03/09/2021	-0,189
2	26/04/2021	0,517
6	09/09/2021	-0,145

TABLE 4.8 – Anomalies détectées pour différents seuils  $\varepsilon_w$ .

## Conclusion

Pour conclure ce dernier et quatrième chapitre, les cas d'application donnent une finalité aux démarches scientifiques entamée lors des trois premiers chapitres. En effet, ces cas ont d'abord permis de vérifier les modèles vibratoires des piles de ponts du chapitre 2 ainsi que leur sensibilité aux affouillements. Puis, en se basant sur la partie 3.1, ce chapitre a établi la mise en place d'une méthodologie d'essais contrôlés rendant possible l'identification inverse de l'affouillement par analyse modale de la réponse vibratoire des piles. Enfin, ce chapitre propose une méthodologie pour un suivi en temps réel originale car elle combine l'analyse en composante principales de la partie 3.2 et des méthodes d'apprentissage non supervisées pour l'identification des modes. Ainsi, ces cas d'application ont permis de valoriser les travaux de cette thèse au travers de communication.

### Journaux internationaux :

1. Belmokhtar et al., "Scour monitoring of a bridge pier through eigenfrequencies analysis", SN Applied Sciences, Springer, 2021, 3, pp.303.

### Conférences internationales :

1. Belmokhtar et al., "Revisited frequency domain decomposition for vibration monitoring of a bridge subjected to scour", ISMA-USD 2022.
2. Belmokhtar et al, "Towards a simple calibration of a scour-depth sensor", ENOC2022.
3. Belmokhtar et al., "Features detection using vibration analysis :Monitoring of a French Bridge", ICONHIC 2022.
4. Belmokhtar et al, "Vibration-Based method for structural health monitoring of a bridge subjected to environmental loads", EVACES2021, Springer (2022)

### Rencontres nationales

1. Belmokhtar et al , "Piles de ponts soumis aux affouillements : Vibrations rigides des structures en interaction avec des sols élastiques", CSMA2022.
2. Belmokhtar et al , "Instrumentation d'un viaduc soumis aux affouillements et analyse vibratoire", JROA2021.



# Conclusion

## Conclusion générale

Les travaux proposés lors de cette thèse partent d'un constat. Ce constat provient de l'état de l'art du Chapitre 1 où l'on a exposé l'intérêt du suivi vibratoire des structures affouillées. En effet, les méthodes existantes rencontrent parfois des difficultés d'installation. Elles ne fournissent surtout pas d'informations complémentaires sur l'état de santé de l'ouvrage. L'affouillement est un risque pour l'ouvrage. C'est en ce sens que nous avons porté une attention particulière sur les différentes méthodes de suivi vibratoire au cours de la partie 1.2. Ces méthodes s'inscrivent dans un domaine plus général qui est le suivi de santé des ouvrages ou "structural health monitoring". Compte tenu des différentes études relatives au suivi vibratoire des ouvrages affouillés et de la sensibilité des paramètres modaux vis-à-vis du phénomène, la thèse s'est orientée vers une branche spécifique en ce qui concerne l'analyse du problème : c'est l'analyse modale. Les modes vibratoires, au travers des fréquences propres, des déformées modales et des amortissements, définissent les paramètres des modèles du suivi. Selon les configurations et les cas d'étude, la littérature a mis en évidence des comportements vibratoires rigides et élastiques. Afin de décider du choix de modélisation, une première approche par des méthodes d'apprentissage statistique non supervisées a été envisagée, notamment des méthodes de classification et d'analyse en composantes principales.

Les méthodes non supervisées sont des démarches essentiellement basées sur les données statistiques, et ce, au détriment des modélisations mécaniques. Le diagnostic sur l'état de santé d'un ouvrage laisse place à l'expertise de l'ingénierie et de la recherche dans le but de juger si une situation est critique. En conséquence, nous avons jugé que la modélisation est une question centrale du suivi vibratoire des ouvrages affouillés. En ce sens, une contribution aux modèles vibratoires de piles de pont affouillées a été proposée au cours du Chapitre 2. Les hypothèses de ces modèles se basent sur l'interaction entre le sol supposé élastique et la structure considérée comme un élément de type poutre. De nouveaux paramètres de modèles, homogènes à des longueurs, ont permis de définir des comportements d'encastrement, des comportements semi-rigide et des comportements totalement rigide. Plus particulièrement, les paramètres modaux ont fait l'objet d'études concernant les limites des modèles et leur sensibilité par rapport à un changement de conditions aux limites.

Les modélisations du Chapitre 2 sont implicitement des études de réponses libres de systèmes linéaires invariants non-amortis. Dans une démarche d'identification par une méthode inverse, le Chapitre 3 a redéfini les concepts de bases modales par le biais de fonctions de transfert. Ces fonctions de transfert permettent l'identification de ces paramètres des modèles grâce aux notions de pôles et de réponses du système en fréquence (FRF). Dans cette optique, nous avons introduit l'amortissement par ce procédé inverse lors du Chapitre 3.1. Toutefois, les problématiques de suivi en continu sur ouvrage ont relevé de nouvelles questions autour des aléas de mesures. Pour pouvoir rendre l'analyse modale possible dans des conditions partielles d'observation, nous avons introduit les concepts d'analyse modale opérationnelle dans la partie 3.2 avec en particulier la décomposition dans le domaine fréquentiel avec pour hypothèse, un bruit blanc en entrée.

Cette décomposition concerne la corrélation des signaux stationnaires et ergodiques. Or, la définition de la corrélation des signaux est une espérance mathématique approchée en pratique par des estimateurs statistiques. Envisagé de cette manière, un procédé de fenêtrage pour régulariser les problèmes de biais et variance a été proposé dans la partie 3.2. Dans ce contexte, nous avons défini une méthode d'analyse modale non supervisée qui est une analyse modale opérationnelle où le suivi concerne des composantes principales. Pour ce faire, nous avons présenté un procédé algorithmique en supposant des modes fortement décorrélés : la méthode EVD-MAC. Comparé à l'analyse modale opérationnelle usuelle, les intérêts de cette méthode sont présentés dans le Tableau 4.9. Bien que celle-ci soit non-paramétrique et qu'elle ne permet pas d'avoir une connaissance de la base modale complète, nous avons constaté que l'analyse modale non-supervisée est un outil robuste et fiable quant au suivi des événements climatiques par le biais de classes de fréquences propres.

Critères	Analyse modale opérationnelle	Analyse modale non supervisée
Hypothèses	Bruit blanc en entrée, modes faiblement amortis et problème de rang 1	Bruit blanc en entrée et modes décorrélés
Instrumentation	Échantillonnage spatial par les capteurs	Données en quantité et en continu dans le temps
Paramètres identifiable	Déformées modales, amortissements et fréquences propres	Classes d'une composante principale

TABLE 4.9 – Comparaison entre l'analyse modale opérationnelle usuelle et l'analyse modale non supervisée de la partie 4.3.

---

## Perspectives

Dans le Chapitre 4 nous avons proposé trois cas d'étude afin de vérifier les modèles du Chapitre 2 par le biais des méthodes d'identification du Chapitre 3. Le premier cas d'étude est issu de la littérature. Les configurations expérimentales de celui-ci (poutre très flexible relativement au sol) ont justifié la légitimité des hypothèses de poutre encastree-libre équivalente au cours de la partie 4.3.1. Par la suite, nous nous sommes intéressés à deux autres cas d'étude plus délicats lors des parties 4.2 et 4.3 ; ces derniers ont ouvert la discussion sur de nouvelles perspectives.

### Comportements rigides

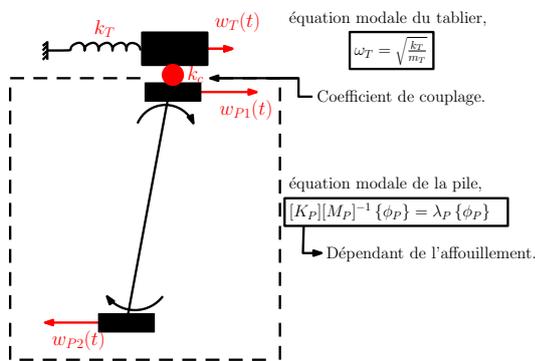
La prise en compte d'un mode de vibration rigide où les translations sont possibles au niveau de l'ancrage de la pile représente un aspect novateur de la thèse. En revanche, suite au choix de la modélisation initiale qui consiste à considérer l'effet du sol comme une réaction élastique, les expériences de la section 4.2 ont souligné les limites de cette hypothèse pour le second mode. En un sens, ce mode concerne l'ensemble {sol + pile} et l'affouillement qui, par hypothèse, change les conditions aux limites d'une pile de pont, serait, avec la prise en considération de l'effet du sol, un phénomène interne. D'une part, dans la continuité des modélisations du Chapitre 2, nous envisageons de prendre en considération l'inertie du sol et l'amortissement proportionnel à la masse de celui-ci. D'autre part, il faut porter un oeil critique sur la notion de modes de {sol + pile} et en particulier envers le sol quand celui-ci est infini. Certaines études peuvent aiguiller nos réflexions, car par exemple, [Semblat et al., 2003a, Semblat et al., 2003b] présentent des approches permettant d'estimer les modes de sols formés de couches sédimentaires.

L'interaction sol-structure devient alors un couplage entre le sol et la structure. Il faut toutefois juger de l'importance de ce couplage car si celui-ci est faible nous pourrions peut-être regarder la combinaison de deux fonctions de transfert : l'une pour le sol et l'autre pour la structure. Pour cela, nous pensons compléter le modèle en prenant en compte des fondations réelles des ouvrages. Cela remplacerait les conditions d'ancrage des modèles,  $K_r$  et  $K_h$ . La sensibilité du second mode par rapport aux fondations est une perspective d'étude. En effet, pour appréhender le problème réel, nous envisageons d'intégrer des résolutions numériques par des éléments finis ou par des éléments de frontières.

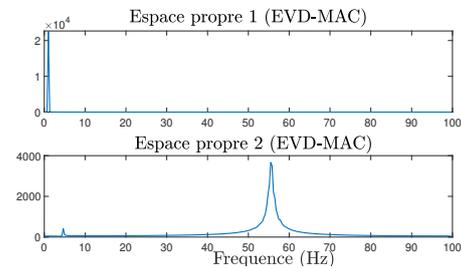
## Suivi vibratoire non supervisé

Cette thèse a contribué au domaine de l'analyse modale opérationnelle. Pour combler une instrumentation conséquente en termes de capteurs nous avons proposé une méthode avec peu de capteurs et une base de données volumineuse. L'analyse en composantes principales de la partie 3.2 avec une classification des données pour l'instrumentation de la partie 4.3 a permis de suivre des classes que nous considérerons en tant que modes présumés.

La méthode EVD-MAC décorrèle des espaces sans pour autant donner de valeur seuil à optimiser pour la décomposition. Nous avons tout de même observé que les espaces sont fortement liés à des composantes mécaniques du système au cours de la partie 4.3. Considérons par exemple une pile de pont couplée avec un système masse ressort de masse  $m_T$  et de rigidité  $k_T = \omega_T^2 m_T$ . Ce système représente un mode de tablier couplé avec le noeud supérieur de la pile par l'intermédiaire de la rigidité  $k_c$ . Sur la Figure 4.27a, un schéma du couplage est présenté. La Figure 4.27b présente le procédé EVD-MAC appliqué à un tablier de masse  $m_T = 10m_p$ , de fréquence  $\omega_T = 1,5 \text{ Hz}$  et pour une rigidité de couplage  $k_c = 0,001k_T$ . On considère de plus dans cet exemple une pile de pont de masse totale  $m_p$  ayant des fréquences propres autour de  $2 \text{ Hz}$  et  $27 \text{ Hz}$ . Pour ce système nous imposons le même bruit blanc à chaque degré de liberté de la Figure 4.27a. Les résultats observés nous encourageant à étudier la possibilité d'un découplage de phénomènes physiques en considérant la corrélation entre modes.



(a) Couplage d'une pile de pont avec un mode de tablier



(b) Méthode EVD MAC appliqué au système

FIGURE 4.27 – Exemple de couplage pile-tablier et méthode EVD-MAC.

Enfin, la classification des données discrimine des modes automatiquement en se basant sur l'algorithme dbscan [Ester et al., 1996] qui juge de la vraisemblance des données (densité) et de la répétabilité de celles-ci (minimum de points). Il n'en est pas moins vrai qu'une détection de changement de classes ne permet pas d'en déduire des conclusions. En effet, en vue de futurs travaux, nous projetons de vérifier si les fréquences identifiées correspondent réellement aux modes par des modèles numériques de la pile de pont étudiée. Cela permettra de juger de la fiabilité de la méthode. Nous avons, en outre, mis en place un relevé bathymétrique et des mesures de la vitesse du courant hydraulique autour de la pile de l'ouvrage instrumentée (Figure 4.28). En perspective, nous voudrions savoir si la détection d'anomalies lors d'évènements extrêmes correspond à une variation du sol. De plus, pour certaines variations de classes, nous avons remarqué des changements de signes selon la date de l'évènement. Alors, nous pourrions dès lors savoir si les processus hydrauliques peuvent déposer des sédiments et étudier si des phénomènes irréversibles apparaissent dans les cycles d'érosion (affouillements, dépôt de sédiments).

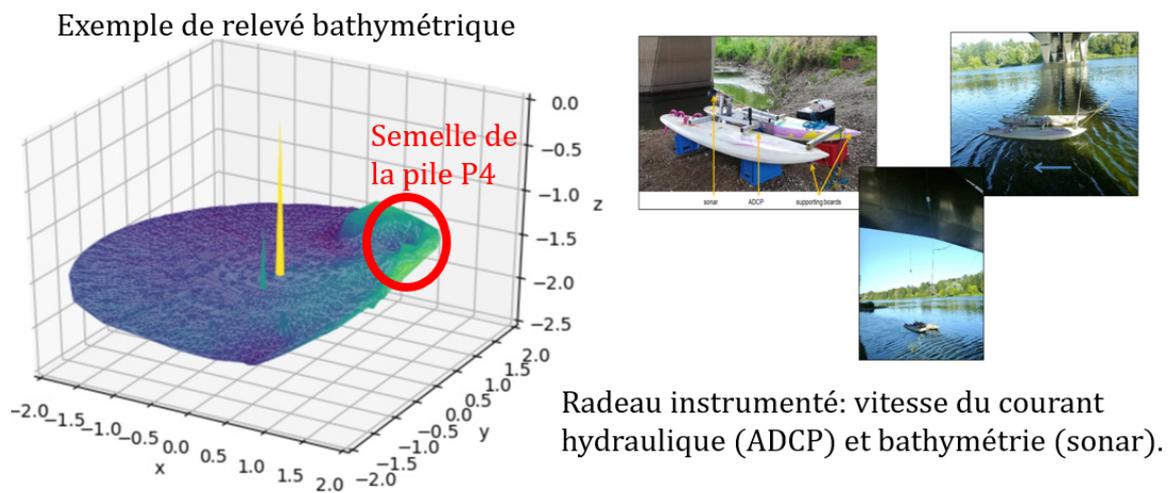


FIGURE 4.28 – Radeau embarqué au voisinage de la pile P4 de l'ouvrage de l'A71 pour des mesures de bathymétries et de vitesses de courant.



# Annexe A

## Dynamique des poutres en flexion

### A.1 Dynamique des structures : Vibration des poutres continues

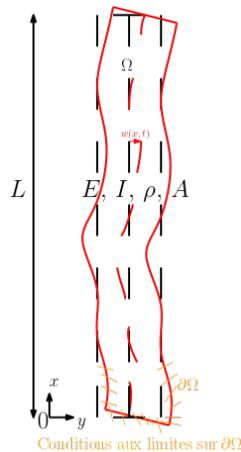


FIGURE A.1 – Vibration d'une poutre d'Euler Bernoulli

En ce qui concerne le suivi du phénomène d'affouillement, l'objet étudié est généralement une pile de pont. Cette structure est souvent élancée (on suppose que sa longueur " $L$ " est très grande devant les autres paramètres géométriques), ainsi le problème de dynamique étudié est celui décrit sur la figure A.1 qui est un problème plan : on considère seulement l'axe neutre de la poutre. On s'intéressera donc aux modes en flexion de cette pile : la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est en adéquation avec notre problème.

De ce fait, considérons  $w$  le déplacement selon  $y$  de la poutre et  $\gamma$  sa rotation dans le plan  $xy$  on a les relations suivantes (A.1) :

$$\begin{cases} w = w(x, t) \\ \gamma = \gamma(x, t) \end{cases}$$

Avec l'hypothèse des poutres d'Euler Bernoulli est la suivante : les sections droites restent droites, i.e,

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$$

Avec  $\sigma$  et  $\epsilon$ , respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations associés à un point de la poutre, on a :

- Hypothèse de Saint-Venant, on néglige les efforts tranchants  $\rightarrow \sigma_{ij} = 0 \forall i \neq j$ ,
- La poutre est supposée élastique linéaire donc  $\exists C$ , un tenseur d'ordre 2 tel que  $\sigma = C\epsilon$  On peut poser les relations suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = 0 \\ \epsilon_{xx} = -y\gamma \\ \sigma_{xx} = -Ey\gamma \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Ainsi le moment et l'effort tranchant s'écrit d'après A.1 :

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) T(x, t) = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x, t) \quad (\text{A.2})$$

Où  $I = \iint_A y^2 dx dy$  l'inertie de la poutre.

### A.1.1 Formulation Variationnelle : Principe d'Hamilton

Soit maintenant,  $E_c$  l'énergie cinétique du système,  $V$  l'énergie de déformation et  $U$  l'énergie potentiel des forces extérieures, le principe d'Hamilton entre l'instant  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit pour un système non-amorti :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta V + \delta U) dt = 0 \quad (\text{A.3})$$

### A.1.2 Variation de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dt dx \quad (\text{A.4})$$

### A.1.3 Variation de l'énergie de déformation :

Nous avons montré qu'avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli les tenseurs des déformations et des contraintes d'une poutre élastiques sont simplifiées. Par conséquent :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dt dx \quad (\text{A.5})$$

### A.1.4 Variation de l'énergie potentiel des forces extérieures :

Soit  $f(x, t)$  continue par morceau sur  $[0, L] \times [t_1, t_2]$ , on écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f(x, t) dx dt$$

Ainsi, pour des conditions aux limites de poutres dites "classiques" ( i.e encadrée, libre, rotule et appui) et en prenant  $\dot{w}$  nulle en  $t_1$  et  $t_2$  ( ce qui est légitime car ils ne sont pas fixé) le principe d'Hamilton s'écrit donc  $\forall \delta w$  cinématiquement admissible :

$$a(u, \delta w) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L ((\rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) - f(x, t)) \delta w(x, t)) dx dt = 0$$

Où  $a(\bullet, \bullet)$  est une forme bilinéaire continue, symétrique et coercive avec  $u = m \ddot{w}(x, t) - EI w^{(4)}(x, t) - f(x, t)$ .

Donc avec le théorème de Lax-Milgramm,

$$\rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) - f(x, t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Maintenant pour résoudre l'équation A.6 effectuons une séparation des variables tel que :

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} W_j(x) e^{i\omega_j t} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.7})$$

### A.1.5 Décomposition dans une base de modes propres orthogonaux deux à deux

Ici, plaçons-nous en régime libre, i.e  $f(x, t) = 0$ . L'équation de la poutre s'écrit donc :

$$\rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Alors pour le mode "r" on a :

$$EI W_r^{(4)}(x) - \rho A \omega_r^2 W_r(x) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Soit maintenant  $W_s$  un mode quelconque, on a :

$$\int_0^L W_s(x) EI W_r^{(4)}(x) dx = \int_0^L W_s(x) \rho A \omega_r^2 W_r(x) dx \quad (\text{A.10})$$

Pour des conditions aux limites dites "classiques" cela permet d'écrire l'orthogonalité pour  $r \neq s$  :

$$\begin{aligned} \int_0^L W_s(x) \rho A W_r(x) dx &= 0 \\ \int_0^L W_s''(x) EI W_r''(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Si nous reprenons l'équation A.9, i.e on s'intéresse aux modes indépendamment les uns des autres.  $W_r(x)$  satisfait l'équation suivante :

$$W_r^{(4)}(x) - \beta_r^4 W_r(x) = 0 \quad (\text{A.12})$$

où

$$\beta_r = \left( \frac{\rho A \omega_r^2}{EI} \right)^{1/4} \quad (\text{A.13})$$

Supposons maintenant que  $W_r(x) = \sum_{j=1}^4 A e^{\beta_j x}$  (où  $\beta_j$  est racine quatrième de  $\beta^4$ , réelle ou complexe), la solution de l'équation A.12 s'écrit pour la déformée modale :

$$W_r(x) = A_1 \cos(\beta_r x) + A_2 \sin(\beta_r x) + A_3 \cosh(\beta_r x) + A_4 \sinh(\beta_r x) \quad (A.14)$$

La détermination de  $(W_r(x), \omega_r)$  associé au mode "r" se détermine grâce aux conditions au limites. En effet, pour que notre système soit bien posé l'équation A.14 fournies 4 inconnues à déterminer. Pour cela 4 conditions cinématiques aux limites sont à imposer. Appelons-les  $W^{(C)}(x_L)$  avec  $(C, L) \in [1, 4]$ . Celle-ci permet de poser un système linéaire dépendant de  $\omega_r$  tel que,

$$[D(\omega_r)] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (A.15)$$

Ce qui revient à résoudre

$$\text{Det}([D(\omega_r)]) = 0 \quad (A.16)$$

Où  $\text{Det}([D(\omega_r)])$  est appelé fonction transcendante. Donc, les fréquences propres sont solutions de fonctions transcendante issus de l'équation A.15 et des conditions aux limites. Pour des conditions aux limites dites classiques, le tableau 1.2 montre les diverses formes de ces fonctions transcendentes.

## A.2 Discretisation des modèles pour l'analyse modale

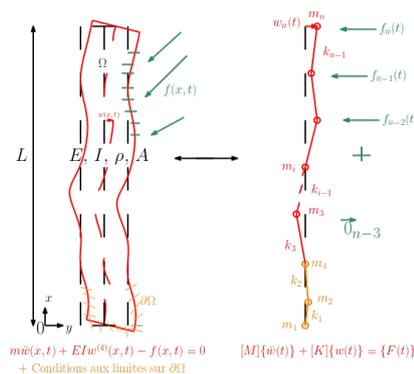


FIGURE A.2 – Vibration d'un système à N degrés de liberté

Dès lors que l'équation A.6 a été posé nous voulons dans cette partie poser les méthodes pour d'une part discrétiser le nombre de modes et d'autre part le nombre de degré de liberté. Pour cela deux physiciens, Lord Rayleigh et Walther Ritz [] ont développé une méthode numérique dites méthodes de Rayleigh-Ritz.

### A.2.1 Hypothèse d'un nombre fini de modes : Méthode de Rayleigh-Ritz :

La méthode Rayleigh-Ritz est une méthode numérique de calcul approché des valeurs propres et vecteurs propres d'un système linéaire. Elle trouve son origine dans le contexte de la résolution de problèmes aux limites. Cette méthode consiste en l'hypothèse d'un nombre fini de modes  $n$  dans l'équation 1.4,

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)q_i(t) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.17})$$

Avec,  $q_i(t)$  la coordonnée généralisée de la variable temps et  $\phi_i(x)$ , la fonction de forme satisfaisant les conditions aux limites. Et si maintenant nous appliquons le principe d'Hamilton à l'équation 1.6, il vient,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \sum_{i=1}^n \phi_i''(x)q_i(t) \right) \left( \sum_{j=1}^n \phi_j''(x)q_j(t) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \right) q_i(t) q_j(t) \\ &= \frac{1}{2} \{q(t)\}^T [K] \{q(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Où  $\{q(t)\} = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  et  $[K]$  la matrice de rigidité associé au système discrétisé, tel que,

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \quad (\text{A.19})$$

De même pour l'énergie cinétique on obtient la relation suivante,

$$T = \frac{1}{2} \{q(t)\}^T [M] \{q(t)\} \quad (\text{A.20})$$

Avec,  $[M]$  la matrice de masse du système discrétisée associée,

$$M_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (\text{A.21})$$

Et,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \implies [M] \{\ddot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Ainsi l'équation 1.7 permet d'écrire un système linéaire discret de valeurs propres où la variable espace disparaît. Par la suite on peut déterminer les fréquences propres du système et les déformée qui sont solutions du polynôme caractéristique suivant ;

$$\text{Det}([K] - \omega_r^2 [M]) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Où les valeurs propres sont les fréquences au carré  $\omega_r^2$ .



## Annexe B

# Compléments sur les modes en flexion des piles de pont

### B.1 Calcul des coefficients des sols de Pasternak

Ces travaux sont issus de [Vlasov, 1966, Girija Vallabhan & Das, 1988] qui ont proposé un modèle analytique pour le calcul des coefficients  $(k_p, g_p)$  des sols de Pasternak [Pasternak, 1954]. Dans un premier temps considérons le système

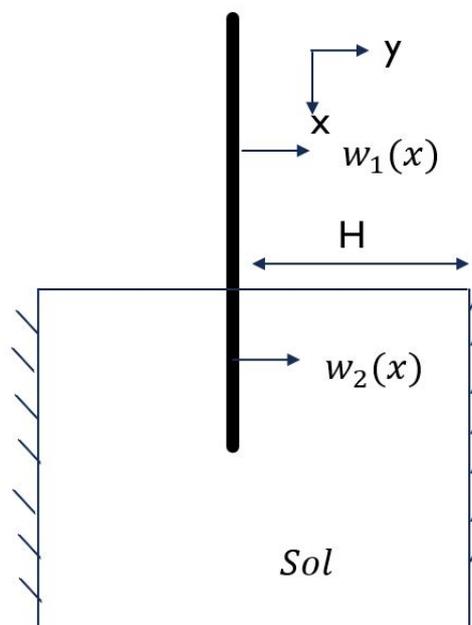


FIGURE B.1 – Schéma de principe pour le modèle de Vlasov en statique

(sol+poutre) où le sol est supposé fini selon l'axe  $y$ . L'énergie élastique du système  $\Pi$  s'écrit comme la somme de l'énergie élastique de la poutre  $\Pi_b$  et celle du sol  $\Pi_s$ . Soit :

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_s \quad (\text{B.1})$$

Sous les hypothèses des poutres d'Euler-Bernoulli, on écrit, avec  $w(x)$  le déplacement de la poutre selon  $x$  (l'origine étant au niveau du sol) :

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^D E_b I_b w''(x)^2 dx \quad (B.2)$$

Avec  $E_b$  le module d'Young de la poutre supposé constant et  $i_b$  l'inertie selon  $y$  du même système. Quant au sol, il est supposé continu et se déplace que selon l'axe  $y$  :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{-H}^H \int_0^{+\infty} (\sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (B.3)$$

L'hypothèse forte du modèle proposé par Vlasov [Vlasov, 1966] est d'effectuer une séparation des variables entre  $x$  et  $y$  dans le déplacement du sol  $w_s$ , tel que :

$$w_s(x, y) = w(x) \times \xi(y)$$

Où la fonction  $\xi$  respecte les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \xi(0) = 1 \\ \xi(-H) = \xi(H) = 0 \end{cases} \quad (B.4)$$

Maintenant, en supposant le sol élastique (avec pour module d'Young et de Cisaillement  $E_s$  et  $G_s$ ) et dans l'hypothèse des petites déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = w(x)\xi'(y) & \text{et} & \gamma_{xy} = w'(x)\xi(y) \\ \sigma_{yy} = E_s \varepsilon_{yy} & \text{et} & \tau_{xy} = G_s \gamma_{xy} \end{cases} \quad (B.5)$$

Ainsi, les équations B.3 et B.5 nous mènent à réécrire l'expression de  $\Pi$  :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^D (E_b I_b w''(x)^2 + k w(x)^2 + g w'(x)^2) dx \quad (B.6)$$

Les coefficients  $k$  et  $g$  sont obtenus lors du calcul de  $\Pi_s$ , ie :

$$\begin{aligned} k &= \int_{-H}^H E_s \left( \frac{\partial \xi}{\partial y}(y) \right)^2 dy \\ g &= \int_{-H}^H G_s \xi(y)^2 dy \end{aligned} \quad (B.7)$$

Après une double intégration par parties le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta \Pi = \int_0^D (E_b I_b w^4(x) - g w''(x) + k w(x)) \delta w dx + \int_{-H}^H (-m \xi''(y) + n \xi(y)) \delta \xi dy + C.L \quad (B.8)$$

Avec :

$$\begin{cases} m = \int_0^D E_s w(x)^2 dx \\ n = \int_0^D G_s w''(x)^2 dx \end{cases} \quad (B.9)$$

Le principe de minimisation  $\delta \Pi = 0$  fait découler de l'équation B.7 deux équations différentielles fondamentales pour notre système [Girija Vallabhan & Das, 1988] :

$$\begin{cases} E_b I_b w^{(4)}(x) - g w''(x) + k w(x) = 0 \\ -m \xi''(y) + n \xi(y) = 0 \end{cases} \quad (B.10)$$

## B.2 Calcul de $C(\mu)$ de l'équation (2.21)

### B.2.1 Premier cas, $\mu < 1$

Pulsation spatiale,

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\phi_1 \pm i\phi_2.$$

Avec,  $\phi_1 = \delta\sqrt{1+\mu}$  et  $\phi_2 = \delta\sqrt{1-\mu}$ .

→  $W_2(x) = \exp(\phi_1 x)(B_1 \cos(\phi_2 x) + B_2 \sin(\phi_2 x)) + \exp(-\phi_1 x)(B_3 \cos(\phi_2 x) + B_4 \sin(\phi_2 x))$ .

Et  $C(\mu) =$

$$\begin{array}{cccc} -\phi_1 & -\phi_2 & \phi_1 & -\phi_2 \\ -(\phi_1^2 - \phi_2^2) & -2\phi_1 \phi_2 & -(\phi_1^2 - \phi_2^2) & 2\phi_1 \phi_2 \\ -(\phi_1^3 - 3\phi_1 \phi_2^2) & (\phi_2^3 - 3\phi_1^2 \phi_2) & (\phi_1^3 - 3\phi_1 \phi_2^2) & (\phi_2^3 - 3\phi_1^2 \phi_2) \\ e^{D\phi_1 \cos(D\phi_2)} & e^{D\phi_1 \sin(D\phi_2)} & e^{-D\phi_1 \cos(D\phi_2)} & e^{-D\phi_1 \sin(D\phi_2)} \\ e^{D\phi_1 (\phi_1 \cos(D\phi_2) - \phi_2 \sin(D\phi_2))} & e^{D\phi_1 (\phi_1 \sin(D\phi_2) + \phi_2 \cos(D\phi_2))} & e^{-D\phi_1 (\phi_1 \cos(D\phi_2) + \phi_2 \sin(D\phi_2))} & e^{-D\phi_1 (-\phi_1 \sin(D\phi_2) + \phi_2 \cos(D\phi_2))} \end{array}$$

### B.2.2 Deuxième cas, $\mu = 1$

Pulsation spatiale,  $\lambda$  admet deux racines doubles,

$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2}\delta = \pm\phi$ .

→  $W_2(x) = \exp(\phi x)(B_1 + B_2 x) + \exp(-\phi x)(B_3 + B_4 x)$ .

Et;

$$C(\mu) = \begin{array}{cccc} -\phi & -1 & \phi & -1 \\ -\phi^2 & -2\phi & -\phi^2 & 2\phi \\ -\phi^3 & -3\phi^2 & \phi^3 & -3\phi^2 \\ e^{D\phi} & e^{D\phi D} & e^{-D\phi} & e^{-D\phi D} \\ \phi e^{D\phi} & e^{D\phi}(\phi D + 1) & -\phi e^{-D\phi} & -e^{-D\phi}(\phi D - 1) \end{array}$$

### B.2.3 Troisième cas, $\mu > 1$

Pulsation spatiale,

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\phi_1 \pm \phi_2.$$

Avec,  $\phi_1 = \delta\sqrt{1+\mu}$  et  $\phi_2 = \delta\sqrt{\mu-1}$ .

→  $W_2(x) = \exp(\phi_1 x)(B_1 \cosh(\phi_2 x) + B_2 \sinh(\phi_2 x)) + \exp(-\phi_1 x)(B_3 \cosh(\phi_2 x) + B_4 \sinh(\phi_2 x))$ .

Et,  $C(\mu) =$

$$\begin{array}{cccc} -\phi_1 & -\phi_2 & \phi_1 & -\phi_2 \\ -(\phi_1^2 + \phi_2^2) & -2\phi_1 \phi_2 & -(\phi_1^2 + \phi_2^2) & 2\phi_1 \phi_2 \\ -(\phi_1^3 + 3\phi_1 \phi_2^2) & -(\phi_2^3 + 3\phi_1^2 \phi_2) & (\phi_1^3 + 3\phi_1 \phi_2^2) & (\phi_2^3 + 3\phi_1^2 \phi_2) \\ e^{D\phi_1 \cosh(D\phi_2)} & e^{D\phi_1 \sinh(D\phi_2)} & e^{-D\phi_1 \cosh(D\phi_2)} & e^{-D\phi_1 \sinh(D\phi_2)} \\ e^{D\phi_1 (\phi_1 \cosh(D\phi_2) + \phi_2 \sinh(D\phi_2))} & e^{D\phi_1 (\phi_1 \sinh(D\phi_2) + \phi_2 \cosh(D\phi_2))} & e^{-D\phi_1 (-\phi_1 \cosh(D\phi_2) + \phi_2 \sinh(D\phi_2))} & e^{-D\phi_1 (-\phi_1 \sinh(D\phi_2) + \phi_2 \cosh(D\phi_2))} \end{array}$$

## B.3 Modèle de poutre encastree équivalente

### B.3.1 Fréquences propres d'une poutre encastree-libre équivalente

Considérons une poutre encastree libre d'une longueur libre  $L_{eq} = a + \varepsilon$  avec les mêmes paramètres que le système de pile affouillée ( $E, I, \rho, A$ ). La fonction transcendante du mode  $r$  est tel que,

$$1 + \cos(\tilde{\beta}_r) \cosh(\tilde{\beta}_r) = 0, \quad (\text{B.11})$$

où  $\tilde{\beta}_r$  est le paramètre définie dans (2.13) et (2.14) et il peut être ici approché numériquement par,

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = \alpha_1 \approx 1.8751, \\ \tilde{\beta}_n = \alpha_n \approx (2n-1)\frac{\pi}{2}, \forall n > 1. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Ce qui permet de définir la pulsation propre du système  $\Omega_r$  comme une fonction de la longueur :

$$\begin{aligned} \Omega_r(L_{eq}) &= \frac{c_r}{L_{eq}^2}, \\ \Omega_r^{(i)}(L_{eq}) &= (-1)^i \frac{(i+1)! \Omega(L_{eq})}{L_{eq}^i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Avec  $\Omega_r^{(i)}$  la  $i$ -ième dérivée par rapport à la longueur et,

$$c_r = \alpha_r^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.14})$$

L'équation (B.13) permet alors un développement de Taylor lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (Figure B.2).

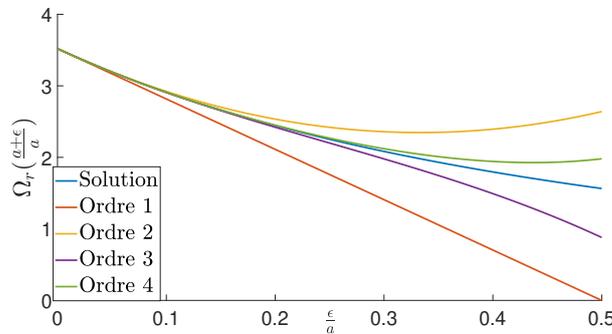


FIGURE B.2 – Solution de (B.11) et ses développements de Taylor-Young aux ordres 1,2,3 and 4 (équation (B.13)).

### B.3.2 Approche asymptotique du modèle de poutre encastrée équivalente.

Dans cette partie, le preuve de l'équation (4.1) est présentée pour  $\omega_r(\varepsilon)$  la pulsation du mode  $r$  d'une pile affouillée de longueur libre  $a$ ,  $\Omega_r$  la pulsation d'une poutre encastrée libre de longueur  $L_{eq}(a) = a + \varepsilon$ , On considère dans cette étude un

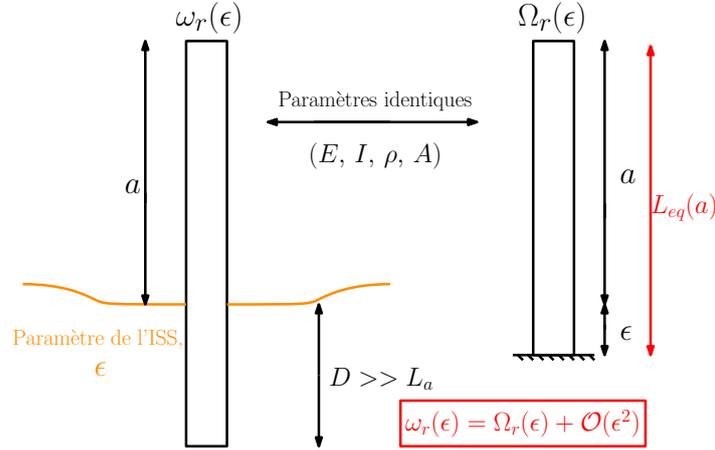


FIGURE B.3 – Poutre affouillée d'une longueur libre  $a$  et poutre encastrée équivalente de longueur  $L_{eq}(a)$

sol de Winkler  $\mu_r = 0$  et  $D \gg L_a$  (équation (2.25)) avec (Figure B.3),

— la fréquence  $\Omega_r(\varepsilon)$  de la poutre encastrée de longueur  $a + \varepsilon$  est solution de

$$\forall \varepsilon, \quad 1 + \cos\left(\frac{\rho A}{EI} \sqrt{\Omega_r(\varepsilon)} a\right) \cosh\left(\frac{\rho A}{EI} \sqrt{\Omega_r(\varepsilon)} a\right) = 0, \quad (\text{B.15})$$

— la fréquence  $\omega_r(\varepsilon)$  de la poutre partiellement enfouie d'une longueur  $D$  et de longueur libre " $a$ ". Le paramètre  $\varepsilon$  est la pulsation spatiale du système donc un paramètre de l'ISS (équation (2.13)) :

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta_r}. \quad (\text{B.16})$$

Dès lors, on supposera que les fréquence sont des fonction de  $\varepsilon$  qui sont  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^+$ . De plus, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cela signifiera que pour la longueur totale de la poutre est de  $a$ . Pour le système de la pile affouillée de  $a$ , cela signifiera une rigidité infinie dans le sol. Soit,

$$\omega_r(\varepsilon = 0) = \Omega_r(\varepsilon = 0) = \Omega_{r0} \quad (\text{B.17})$$

Cela permet alors d'écrire pour  $\varepsilon \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} \omega_r(\varepsilon) &= \Omega_{r0} + \theta \frac{\Omega_{r0}}{a} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \sqrt{\omega_r(\varepsilon)} &= \sqrt{\Omega_{r0}} \left(1 + \frac{\theta}{2a} \varepsilon\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Avec,

$$\theta = \frac{a}{\Omega_{r0}} \frac{d\omega_r}{d\varepsilon}(\varepsilon = 0) \quad (\text{B.19})$$

Par définition de la fréquence propre  $\omega_r(\varepsilon)$ , celle-ci est une racine non triviale de la fonction transcendante (2.21). Soit,

$$\forall \varepsilon \geq 0, F(\omega_r(\varepsilon)) = 0, \quad (\text{B.20})$$

Avec,

$$F(\omega_r(\varepsilon)) = \begin{vmatrix} -\cos(\beta_r(\varepsilon)a) & \sin(\beta_r(\varepsilon)a) & \cosh(\beta_r(\varepsilon)a) & -\sinh(\beta_r(\varepsilon)a) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_r(\varepsilon)a) & -\cos(\beta_r(\varepsilon)a) & -\sinh(\beta_r(\varepsilon)a) & \cosh(\beta_r(\varepsilon)a) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta_r(\varepsilon) & 0 & \beta_r(\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ -\beta_r(\varepsilon)^2 & 0 & \beta_r(\varepsilon)^2 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \\ 0 & -\beta_r(\varepsilon)^3 & 0 & \beta_r(\varepsilon)^3 & -2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3 & -2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3 \end{vmatrix}$$

$F(\varepsilon)$  est la fonction nulle constante  $\forall \varepsilon \geq 0$ ,

$$\forall \varepsilon \geq 0, \frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon) = 0 = \frac{\partial \omega_r}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \frac{\partial F}{\partial \omega_r}(\varepsilon) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon), \quad (\text{B.21})$$

c'est à dire,

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \varepsilon}(\varepsilon = 0) = \frac{d\omega_r}{d\varepsilon}(\varepsilon = 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)}{\frac{\partial F}{\partial \omega_r}(\varepsilon)} \quad (\text{B.22})$$

Finalement, on obtient,

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) &= \mathcal{A}(\Omega_{r0}) \frac{1}{\varepsilon^5} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-4}), \\ \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial F}{\partial \omega_r}(\varepsilon) &= \mathcal{B}(\Omega_{r0}) \frac{1}{\varepsilon^5} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-4}). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Omega_{r0}) &= (20\Omega_{r0}\theta + 32\Omega_{r0}) \left( \cos\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \sinh\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) - \cosh\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \sin\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \right) \\ \mathcal{B}(\Omega_{r0}) &= 4a \left( \cos\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \sinh\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) - \cosh\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \sin\left(\frac{\rho A}{EI}\Omega_{r0}a\right) \right) \end{aligned}$$

On peut alors évaluer  $\theta$  définie par la relation (B.19)) en utilisant l'équation ((B.22)),

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{20\Omega_{r0}\theta + 32\Omega_{r0}}{4a} = \theta \frac{\Omega_{r0}}{a} \quad (\text{B.24})$$

i.e,

$$\theta = -2 \quad (\text{B.25})$$

et,

$$\frac{d\omega_r}{d\varepsilon}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)}{\frac{\partial F}{\partial \omega_r}(\varepsilon)} = -2 \frac{\Omega_{r0}}{a} \quad (\text{B.26})$$

Ce résultat est légitime dans l'hypothèse de la continuité des fréquences par rapport à  $\varepsilon$ . On peut alors écrire en utilisant l'équation (B.13), l'égalité à l'ordre 1 des dérivées,

$$\omega_r(\varepsilon) = \Omega_r(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{B.27})$$

# Annexe C

## Traitement des signaux

### C.1 Notions de métrologie pour l'utilisation des accéléromètres

Les accéléromètres sont des éléments sensibles aux vibrations qu'ils transforment en une tension électrique (on parle de capteur actif). La grandeur mesurée ou mesurande (ici l'accélération notée  $m$ ) est conditionnée par un chaîne d'acquisition afin que le signal de sortie ou mesure sous forme numérique (ici  $s$ ) donne une observation précise du mesurande.

Les accéléromètres sont les capteurs de référence pour mesurer les vibrations. Étant donnée que nos études portent sur l'analyse en basses fréquences du comportement dynamique des structures, nous utilisons des accéléromètres à réponse continue. Il existe des capteurs où l'élément transducteur est un potentiomètre associé à une masse. Néanmoins celui-ci est très peu utilisé (gamme de fréquences très restreinte). Ainsi tout les accéléromètres utilisés pour nos mesures utiliserons la piézoélectricité comme élément transducteurs : C'est la technologie la plus répandue.

Plus généralement le choix de la technologie utilisée dépendra des performances visées (un exemple es montré en annexe) :

1. **Etendue de mesure** : Différence entre la valeur minimale et maximal du mesurande à obtenir
2. **Résolution** : Plus petite valeur que le capteur est en mesure d'identifier. La résolution est dépendante du niveau de bruit dont la densité spectrale dépend du capteur.
3. **Sensibilité** : Facteur de proportionnalité entre le signal de sortie du capteur

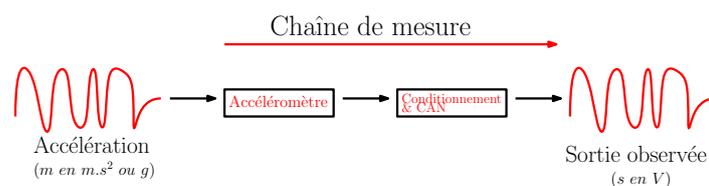


FIGURE C.1 – Schéma de la chaîne d'acquisition d'une mesure

$s$  (en volt) et la grandeur mesurée. Pour une valeur donnée  $m$  du mesurande (en g ou  $m.s^{-2}$ ), la sensibilité  $S(m)$  du capteur est égale au rapport entre la variation de la sortie électrique et la variation du mesurande :

$$S(m) = \frac{\Delta s}{\Delta m}$$

Si  $S(m)$  est une fonction linéaire, on parle de capteur linéaire.

4. **Précision** : L'incertitude sur chaque résultat de mesure  $M$  doit être quantifiée par une estimation de l'erreur possible exprimée par  $\pm \delta M$ . On sait alors que  $m = M \pm \delta M$ . On ramène souvent cette erreur de précision relativement à l'étendue de mesure.
5. **Bande passante** : Gamme de fréquence pour laquelle le capteur fonctionne. Elle est caractéristique de la rapidité du capteur. La rapidité est la capacité de réponses aux variations du mesurande dans le temps.
6. **Paramètres d'influence** : Autres paramètres physique que la mesurande susceptibles d'influencer la mesure. Les fabricants citent souvent la température.

### C.1.1 Conditionnement et conversion analogique/numérique du signal

C'est le conditionnement qui permet de mettre en forme le signal mesuré de manière analogique. Par la suite ce signal sera converti en données numériques transmissibles. Les accéléromètres utilisant des matériaux piézoélectriques comme transducteurs sont des capteurs dits actifs, c'est-à-dire que le capteur est un générateur de courant ( $q_m$ ). Ce générateur présente une capacité interne ( $C_m$ ) pouvant se décharger de manière très rapide en empêchant toutes mesures. Le conditionnement utilisé pour les accéléromètres de ce type est un montage amplificateur de charge permettant d'obtenir la mesure sous forme de tension  $V_m$  (cf figure C.2). La

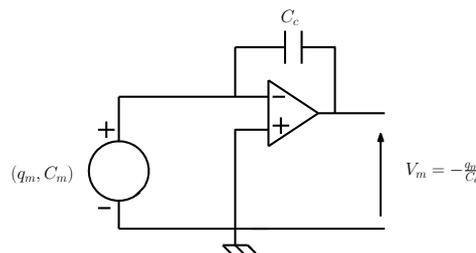


FIGURE C.2 – Exemple d'un schéma électrique d'un amplificateur de charge

CAN transforme le signal analogique pouvant prendre une infinité de valeurs en un signal numérique discontinu étant représenté par des données binaires. La CAN comporte deux étapes, l'échantillonnage à la fréquence  $f_e$  et la conversion proprement dite. L'échantillonnage est une opération qui doit représenter au mieux les phénomènes à observer tout en étant en adéquation avec les capacités d'écriture de la mesure. Avant l'échantillonnage le signal se doit d'être filtré de manière analogique. Et ce, pour éviter le phénomène de repliement, en d'autres termes un filtre

passé-bas (par exemple R-C) est appliqué pour la mesurande  $m$  à la fréquence de coupure  $f_e/2$  afin de réduire le bruit à haute fréquence et produire un effet de lissage. Quant à la précision du codage, celle-ci dépend du nombre de bits sur lequel s'effectue le codage ( $n$  bits implique  $2^n$  valeurs)

### C.1.2 Filtrage numérique

Pour que les capteurs et autres outils nécessaires à la chaîne de mesure puissent communiquer entre elles. Une base d'horloge doit être défini. Typiquement l'élément qui enregistre les signaux engendrés par la sortie  $s$  du capteur. Pour cela des protocoles de communication ont été élaborés (par exemple I2C et SPI) permettant de synchroniser les éléments de la chaîne de transmission des données. Cela implique une gamme discrète de fréquences d'échantillonnages possibles. Hélas, sa borne inférieure  $(f_e)_{min}$  est souvent très élevée (donc une précision inutile prenant de l'espace de stockage) vis à vis des phénomènes mécaniques que nous voulons observer (i.e à basse fréquence). Le signal numérique doit ainsi être rééchantillonné de manière numérique. Considérons  $s(t)$  mesuré à la période d'échantillonnage  $T_e = 1/f_e$ . Le signal est numérisé et donc discret, il peut être décrit par la suite suivante,

$$s_n = s(nT_e) \quad (C.1)$$

Un filtre linéaire causal  $(a_k, b_k)_{0 \leq k < N}$  se définit par la relation suivante ;

$$a_0 \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k s_{n-k} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \tilde{s}_{n-k} \quad (C.2)$$

Où  $\tilde{s}_n$  est le signal correspondant à la mesure filtrée à l'instant  $n$  dépendant de son état antérieur et aux signaux mesurés aux instants antérieurs. De plus, la transformée en "Z" ( $TZ[\bullet]$ ) du signal  $(f_n)_n$  s'écrit,

$$TZ[(f_n)_n](Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n Z^{-n}$$

Et,

$$TZ[(f_{n-k})_n](Z) = Z^{-k} TZ[(f_n)_n](Z)$$

Et la relation de récurrence du filtre C.2 permet de définir la fonction de transfert en Z,  $H(Z)$

$$H(Z) = \frac{\tilde{S}(Z)}{S(Z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k Z^{-k}} \quad (C.3)$$

De plus lorsque les  $(a_k)_{0 \leq k < N}$  sont tous nuls, ce filtre est dit à réponse impulsionnelle finie (FIR). Cette catégorie de filtre numérique à l'avantage d'être stable contrairement aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (FII), qui présente des pôles dont nous devons nous assurer de leur stabilité. Nous choisissons d'utiliser

les filtre FIR pour éviter d'abord toute questions de stabilité, malgré le temps de calcul parfois excessif. On peut dès lors écrire,

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k Z^{-k} \quad (C.4)$$

Le terme impulsionnelle lui, vient du fait que pour une impulsion en entrée  $\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_n = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$  le système linéaire fournit en sortie  $b_n = \tilde{s}_n$ .

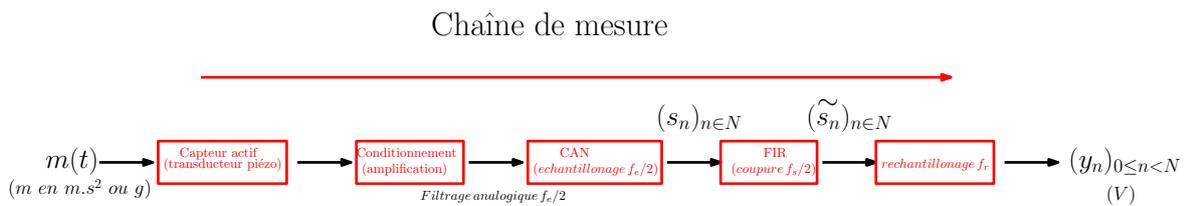


FIGURE C.3 – Schéma de fonctionnement d'une chaîne de mesure pour l'acquisition de données vibratoires

## C.2 Outils pour le traitement des signaux vibratoires

De par leur nature numérique/discret, les signaux peuvent engendrer certains phénomènes menant à des problèmes de représentation de la grandeur physique. Dans cette section nous considérerons que pour un signal analogique  $y(t), \forall t \in \mathbb{R}$ , son signal discret virtuel s'écrit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et est de rang dénombrable, ce qui permettra de définir le signal  $(y_n)_{0 \leq n < N} \in \mathbb{R}$  échantillonné à la fréquence  $f_s$  lors d'une durée d'acquisition  $\Delta T = \frac{N}{f_s} = NT_s$ . De plus ce dernier signal est d'énergie finie (variable de  $\mathcal{L}^2$ )

### C.2.1 Produit de convolution des signaux

#### Produit de convolution pour des signaux analogiques (ou continues)

Soient deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  dans  $\mathcal{L}^2$ . Le produit de convolution  $\bullet * \bullet$  entre  $x(t)$  et  $y(t)$  s'écrit :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (\text{C.5})$$

D'un point de vue physique, l'équation C.5 revient à conserver le premier signal, trouver le symétrique du second par rapport à l'axe des temps et le décaler d'un temps  $t$  puis intégrer le produit de ces deux signaux.

#### Produit de convolution pour des signaux numériques (ou discrets)

Désormais considérons les signaux numériques de  $x(t)$  et  $y(t)$  définis par les suites  $(x_n)_{0 \leq n < N}$  et  $(y_n)_{0 \leq n < N}$  qui sont des signaux de dimensions  $N$ . Ces signaux étant discrets, le produit de convolution s'écrit sous forme d'une somme définie comme :

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k} \quad (\text{C.6})$$

Dans l'équation C.6, il est important de relever un certain problème. En effet, les signaux  $x_n$  et  $y_n$  sont définis pour  $n \in [0, N-1]$ . Or, pour  $n$  fixé  $y_{n-k}$  parcourt l'intervalle  $[-(N-1), N-1]$ . En fait, la dimension du produit de convolution est de dimension  $2N-1$  ( $n \in [0, N-1]$  &  $k \in [0, N-1]$ ) : Il est donc important de considérer certaines règles de calculs.

1. Soit nous supposons que les échantillons ayant un indice en dehors de  $[0, N-1]$  sont nuls
2. Soit nous périodisons le signal à une période  $N$  pour que le signal soit égale à lui même dans les intervalles non définis dans la réalité mais définis pour le produit de convolution.

En pratique nous utiliserons la deuxième règle.

#### Propriétés du produit de convolution

Avec les règles de calculs choisies, les propriétés suivantes restent valables pour le cas numérique.

- Commutativité :  $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Linéarité :  $x(t) * (\lambda y(t) + z(t)) = \lambda(x(t) * y(t)) + x(t) * z(t)$
- Élément neutre (dirac) :  $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t)$

### Réécriture du produit de convolution

Avec les propriétés précédentes, il devient intéressant d'un point de vue pratique de définir des règles de calculs pour l'écriture du produit de convolution :

1. On pose tout d'abord l'écriture généralisée tel que,

$$y(-t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t')x(t + t')dt'$$

La dernière égalité provient du changement de variable  $t' = -\tau$ . Ce produit reste bien entendu commutatif,

$$y(-t) * x(t) = x(t) * y(-t)$$

2. Avec l'introduction du dirac comme élément neutre, une convolution généralisée avec un dirac décaler permet de translater le signal :

$$x(t) * \delta(t - \lambda) = x(t - \lambda)$$

## C.2.2 Fonction de corrélation pour des signaux

### Fonction de corrélation pour des signaux analogiques (ou continues)

Soient deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  dans  $\mathcal{L}^2$ . La fonction de corrélation  $r_{xy}(\tau)$  entre  $x(t)$  et  $y(t)$  s'écrit,

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt \tag{C.7}$$

Dans l'équation C.7  $\bullet^*$  signifie le complexe conjuguée. Lorsque  $x(t) \neq y(t)$  cette fonction s'appelle l'intercorrélation entre les signaux  $x$  et  $y$ . Et si  $x(t) = y(t)$  on appellera la fonction autocorrélation du signal  $x$ .

### Fonction de corrélation pour des signaux numériques (ou discrets)

Pour les suites  $(x_n)_{0 \leq n < N}$  et  $(y_n)_{0 \leq n < N}$  qui sont des signaux numériques donc réels. On écrit la fonction de corrélation comme :

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{k-n} \tag{C.8}$$

Dans l'équation C.8 nous rencontrons les mêmes problèmes que lorsque nous avons établie l'équation C.6. Ainsi les solutions aux problèmes seront les mêmes.

### Liens entre convolution et corrélation

Autant qu'on peut en juger par la lecture seule, le produit de convolution et la fonction de corrélation semblent être proches. Et ce, que ce soit entre les équations C.5 et C.7 (cas continu) ou entre les équations C.6 et C.8 (cas discret). Ainsi, nous nous contenterons de définir la relation mathématiques entre ces deux outils pour le cas continu. Celles-ci restant valables pour le cas discret. Commençons donc par réécrire l'équation C.7 :

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(-(\tau-t))dt \\ &= x(\tau) * y^*(-\tau) \end{aligned} \quad (C.9)$$

Il en découle la non-commutativité de la fonction de corrélation, néanmoins une propriété importante reste à souligner :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau) \quad (C.10)$$

### C.2.3 Analyse fréquentielle des signaux

#### Transformées de Fourier continue (TF[•]) et discrète (TFD[•])

Considérons  $Y(f)$  la transformation de Fourier du signal  $y(t)$  qui s'écrit :

$$Y(f) = TF[y](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\exp(-j2\pi ft)dt \quad (C.11)$$

Avec  $j^2 = -1$ . La transformée de Fourier présente des propriétés intéressantes telle que sa transformée inverse, la linéarité, la conservation de l'énergie et la symétrie hermitienne.

#### Repliement du spectre du signal numérique

Lors de la partie traitant la conversion analogique-numérique 1.C.1.1, nous avons souligné l'importance d'utiliser un filtre passe-bas analogique avant la conversion du signal. D'un point de vue mathématique, échantillonner le signal  $y(t)$  à la fréquence d'échantillonnage  $f_s = \frac{1}{T_s}$  revient à le multiplier par la fonction peigne  $\delta_{T_s}(t)$  définie par :

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (C.12)$$

L'équation C.12 permet d'écrire le signal numérisé de  $y(t)$  précédemment introduit comme une suite  $(y_n)_n$  sous la forme d'une distribution,

$$y_n = \delta_{T_s}(t) \times y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (C.13)$$

Et (équation C.11),

$$TF[\delta_{T_s} \times y](f) = TF[\delta_{T_s}](f) * TF[y](f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} TF[y](f - nf_s) \quad (C.14)$$

La relation précédente (équation C.14) permet de mettre en évidence d'une manière analytique le repliement de spectre. En effet, lors de l'analyse de nos signaux nous souhaitons que le signal numérique reproduise au mieux l'information contenue dans le signal réel ou analogique (en effet, le fenêtrage fausse l'information). Il faudra donc que  $TF[\delta_{T_s} \times y](f) = TF[y](f)$  ce qui revient en d'autres termes à ce que,

$$\forall f \in ]-\infty, -\frac{f}{2}[U\frac{f}{2}, +\infty[, \quad TF[y](f) = 0 \quad (C.15)$$

i.e l'utilisation d'un filtrage est nécessaire pour réduire les termes de fréquences au delà de  $f/2$  en valeur absolue : c'est le critère de Shannon.

De plus, un signal analogique  $y(t)$  est limité dans le temps. Cela revient à multiplier le signal par une fonction porte  $\Pi_{\Delta T}$  tel que,

$$\Pi_{\Delta T}(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } -\frac{\Delta T}{2} < t < \frac{\Delta T}{2} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est,

$$TF[\Pi_{\Delta T}](f) = \Delta T \text{sinc}(\pi f \Delta T)$$

Enfin, l'échantillon fini du signal numérisé  $(y_n)_{0 \leq n < N}$  s'écrit,

$$y_n = \Pi_{\Delta T}(t) \times \delta_{T_s}(t) \times y(t) \quad (C.16)$$

Cela peut poser certains problème notamment de "leakage", mais retenons que pour une durée d'acquisition assez grande :

$$TF[\Pi_{\Delta T}(t) \times \delta_{T_s} \times y](f) = \Delta T \text{sinc}(\pi f \Delta T) * TF[\delta_{T_s}](f) * TF[y](f) \xrightarrow{\Delta T \rightarrow +\infty} TF[\delta_{T_s}](f) * TF[y](f) \quad (C.17)$$

### Transformée de Fourier discrète

Les outils numériques utilisés lors du traitement du signal sont bien entendu discrets. L'idée de cette partie est d'introduire l'analogie de la transformée de Fourier pour la suite numérique  $y_n = y(nT_s)$ . Cette transformée de Fourier discrète  $TFD[\bullet]$  devra conserver les propriétés évoquées lors de l'écriture de l'équation C.11. Avant d'introduire la  $TFD$ , il faut tout d'abord reproduire le signal pour qu'il soit périodique de période  $N$  (ou  $\Delta T = N \times T_s$  d'un point de vue temporelle). Pour  $k \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ ,

$$TFD[(y_n)_{0 \leq n < N}](k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \exp(-i2\pi k \frac{n}{N}) \quad (C.18)$$

tel que,

$$\text{Pour } k \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right] \quad Y\left(\frac{k}{NT_s}\right) = TF[y]\left(\frac{k}{NT_s}\right) \approx TFD[(y_n)_{0 \leq n < N}](k)$$

Ainsi, l'équation C.18 n'est rien d'autres que la décomposition en série Fourier d'un signal de période  $N$ . Néanmoins, nous avons introduit des fréquences négatives, ce qui n'as pas vraiment de sens d'un point de vue physique. En pratique nous considérerons l'intervalle  $k \in [0, N]$  que nous recentrerons en 0. Au vue de la périodicité du signal sur  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  cela donnera une symétrie par rapport à l'origine des fréquences d'un nouveau signal définie sur  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  voir figure C.4.

De plus on montre aisément les propriétés suivantes ;

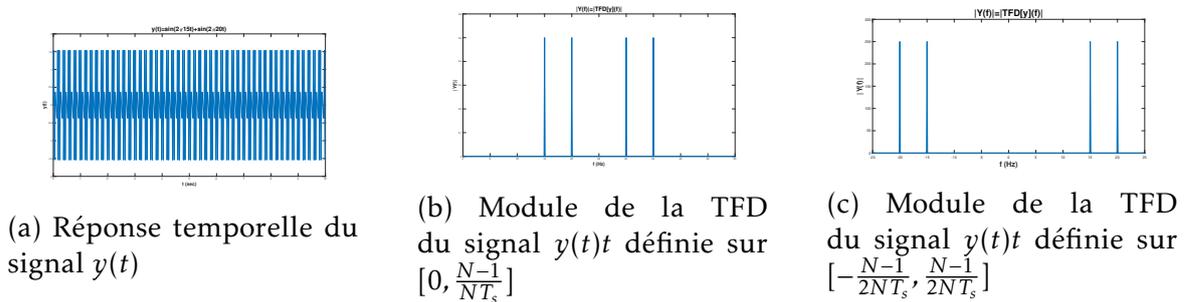


FIGURE C.4 – (a) Réponse temporelle (b) TFD périodisée (c) TFD recentrée en 0

1. Transformée inverse :

$$TFD^{-1}[TFD[(y_n)_n]](n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} TFD[(y_n)_n](k) \exp(i2\pi k \frac{n}{N}) = y_n$$

2. Linéarité :  $TFD[\lambda(y_n)_n + (x_n)_n] = \lambda TFD[(y_n)_n] + TFD[(x_n)_n]$

3. Théorème du retard :  $TFD[(y_{n-n_0})_n](k) = TFD[(y_n)_n](k) \times \exp(-i2\pi \frac{kn_0}{N})$

4. Théorème de Parseval (conservation de l'énergie) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |TFD[(y_n)_n](k)|^2$$

5. Symétrie Hermitienne :  $TFD[(y_n)_n](k) = TFD[(y_{-n})_n](k)^*$

6. Convolution :

$$TFD[(x_n)_n * (y_n)_n] = TFD[(x_n)_n] \times TFD[(y_n)_n]$$

$$\text{et } TFD[(x_n \times y_n)_n] = TFD[(x_n)_n] * TFD[(y_n)_n]$$

Par exemple le célèbre algorithme de la Fast-Fourier Transform (FFT) est l'un des outils numérique le plus utilisé pour l'évaluation de la TFD. En effet, évaluer les coefficient de Frouier "à la main" coûte  $(N-1)^2$  produits et  $N(N-1)$  sommes alors qu'avec la FFT cela revient à  $\frac{N}{2}(\log_2(N)-2)$  produits et  $N \log_2(N)$  sommes.

### C.2.4 Analyse fréquentielle des fonctions de corrélation

Cette partie sera important lors de l'analyse des signaux croisées afin d'un extraire les pôles des fonctions de transfert. De plus nous nous limiterons aux démonstrations pour le cas continue en supposant que l'analogue pour la cas discret est admis ( en redéfinissant le produit de convolution (C.6) et (C.18)). Soit  $R_{XY}(f)$  la transformée de Fourier de la fonction de corrélation  $r_{xy}$  tel que,

$$R_{XY}(f) = TF[r_{xy}(\tau)](f) = TF[x(\tau) * y^*(-\tau)] = X(f) \times Y^*(f) \quad (C.19)$$

#### Densité spectrale de puissance

Pour le cas particulier de l'autocorrelation, l'équation C.19 nous permet d'écrire,

$$R_{XX}(f) = TF[r_{xx}(\tau)](f) = X(f) \times X(f)^* = |X(f)|^2 \quad (C.20)$$

Force est de constater que l'équation C.20 permet d'affirmer que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation d'un signal est la densité spectrale de d'énergie de celui-ci et d'après le théorème de Parseval,

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (C.21)$$

Il en découle la relation suivante ,

$$\forall \tau \neq 0, , r_{xx}(\tau) \leq r_{xx}(0) \quad (C.22)$$

Considérons maintenant l'exemple d'un bruit blanc  $x(t)$  de bande passante de fréquence  $[-f_s/2, f_s/2]$  et d'amplitude de densité spectrale  $B_0$ . On a ,

$$r_{xx}(\tau) = TF^{-1}\left[\frac{B_0}{2}\Pi_f(f)\right] = B_0 f_s \frac{\sin(\pi f_s \tau)}{\pi f_s \tau} \quad (C.23)$$

Sa forme discrétisée s'écrit dès lors,

$$r_{xx}(n) = B_0 f_s \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} \quad (C.24)$$

Ainsi,  $r_{xx}(n)$  est nulle  $\forall n \neq 0$  et ,

$$r_{xx}(0) = B_0 f_s$$

Ce qu'on notera aussi,

$$r_{xx}(n) = B_0 f_s \delta(n) \quad (C.25)$$

Ce qui sera intéressant par la suite est de considérer un bruit blanc entrée comme sollicitation extérieure et  $h(t)$  la fonction de transfert du système mécanique tel que,

$$y(t) = (h * x)(t) \quad (C.26)$$

Il vient,

$$r_{yy}(\tau) = (r_{hh} * r_{xx})(\tau) \quad (C.27)$$

Et,

$$|Y(f)|^2 = (TF[r_{hh}(\tau)] \times TF[r_{xx}(\tau)])(f) \quad (C.28)$$

Pour savoir si un signal  $y$  reste corrélé avec un signal  $x$  après un décalage de  $\tau$ , nous introduisons la notion de cohérence d'un signal  $\gamma$  tel que,

$$\gamma = \frac{r_{xy}(\tau)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}} \quad (C.29)$$

### C.3 Signaux aléatoires

Il est important pour nous d'introduire la notion de signal aléatoire et d'en formuler ces concepts. Cette notion est vraiment centrale pour la suite. L'objet de notre étude portera sur une analyse statistique des vibrations des structure. Cette analyse se devra d'être complémentaire avec l'analyse modale déterministe développé lors de la dernière partie.

Les preuves de cette partie se feront essentiellement dans la cas de signaux continue. Ils resteront extensible au cas discret (numérique) en trouver le meilleur estimateur de l'opérateur statistique en question.

#### C.3.1 Définitions d'un signal aléatoire (ou processus stochastique)

Premièrement, comme son nom l'indique, un signal aléatoire n'est rien d'autres qu'un signal. Donc c'est un ensemble de valeurs réelles (ou entière pour le cas discret) qui est relié à l'espace des temps  $T$  par un opérateur. Puis, la notion aléatoire quant à elle, introduit la notion de loi de probabilité associé à chaque valeur du signal prise à l'instant  $t$  d'une part. En d'autres termes,

**Un signal aléatoire  $\mathcal{Y} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est une variable aléatoires défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  indexé par  $t \in T$  et à valeurs réelles**

$$t \mapsto \mathcal{Y}(t) \quad (C.30)$$

Avec,  $\Omega$ , l'univers.  $\mathcal{A}$  les évènements et  $P$  la mesure de probabilité. Et  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  un borélien réel. Notons que nous pouvons étendre cette définition à "processus stochastique en remplaçant l'espace d'arriver du signal par un espace quelconque métrique.

**Réalisation d'un signal aléatoire :**

Soit  $o \in \Omega$ , l'application,

$$t \mapsto \mathcal{Y}(t, o). \quad (C.31)$$

s'appelle réalisation (ou trajectoire) du signal aléatoire.

**Loi, distribution et densité de Probabilité d'un signal aléatoire :**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  un espace mesurable. Pour tout élément  $B$  de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , la loi de probabilité  $P_{\mathcal{Y}(t)}$  de la variable aléatoire  $\mathcal{Y}(t)$  est définie comme :

$$P_{\mathcal{Y}(t)}(B) = P(\mathcal{Y}(t)^{-1}(B)) = P(\{o \in \Omega \ ; \ \mathcal{Y}(t, o) \in B\}) = P(\mathcal{Y}(t) \in B). \quad (C.32)$$

L'équation C.32 peut être réécrite sous forme d'intégrale avec la mesure  $P_{\mathcal{Y}(t)}(dy(t))$  tel que

$$P(\mathcal{Y}(t) \in B) = \int_B P_{\mathcal{Y}(t)}(dy(t)). \quad (\text{C.33})$$

Il s'en suit la fonction de distribution  $F_{\mathcal{Y}(t)}$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{\mathcal{Y}(t)}(y(t)) = P(\mathcal{Y}(t) \leq x) = \int_{y(t) \in ]-\infty, x]} P_{\mathcal{Y}(t)}(dy(t)). \quad (\text{C.34})$$

Enfin la densité de probabilité  $p_{\mathcal{Y}(t)}(y(t))$  s'écrit,

$$p_{\mathcal{Y}(t)}(y(t)) \times dy(t) = P_{\mathcal{Y}(t)}(dy(t)) \quad (\text{C.35})$$

**Moments :**

On note moment d'ordre  $h$ ,  $m_h(\mathcal{Y}(t))$  tel que (sous réserve d'existence) :

$$m_h(\mathcal{Y}(t)) = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{Y}(t, a)^h dP(a) = \int_{\mathbb{R}} y(t)^h P_{\mathcal{Y}(t)}(dy(t)). \quad (\text{C.36})$$

L'espérance quant à elle n'est rien d'autre que le moment d'ordre 1.

**Loi conjointe et lois marginales**

Soit  $(\mathcal{Y}(t_k))_{k \in [0, K]}$  une famille de signaux aléatoires. On appelle loi conjointe de  $(\mathcal{Y}(t_k))_{k \in [0, K]}$ , la probabilité définie sur  $\mathbb{R}^K$  par :

$$P_{\mathcal{Y}(t_1), \dots, \mathcal{Y}(t_K)}(B_1, \dots, B_K) = P(\{\mathcal{Y}(t_k) \in B_k, \quad \forall k \in [0, K]\}). \quad (\text{C.37})$$

Les lois des  $\mathcal{Y}_k$  s'appellent lois marginales. En fait, pour avoir connaissance de la loi conjointe il est nécessaire de connaître toute les loi marginales. Cependant, cela n'est pas suffisant si les variables ne sont pas indépendantes et cela peut devenir rapidement complexe. Néanmoins, nous pouvons avoir une connaissance partielle de la loi conjointe en reliant ses variables aléatoires marginales par des liens statistiques : C'est là où intervient la notion de covariance. Avant d'entrer plus en détails, il est essentiel tout d'abord d'effectuer certaines hypothèse comme la stationnarité et l'ergodisme d'un signal aléatoire.

**Stationnarité**

Par définition un signal aléatoire est dit stationnaire si il est invariant par translation par rapport au temps. Donc  $\forall \tau \in T$ ,

$$P_{\mathcal{Y}(t_1), \dots, \mathcal{Y}(t_K)} = P_{\mathcal{Y}(t_1 - \tau), \dots, \mathcal{Y}(t_K - \tau)}. \quad (\text{C.38})$$

Avec la définition de la loi conjointe dans C.37, une stationnarité de loi conjointe implique une stationnarité des lois marginales. De plus cela réduit la dimension du problème de connaissance de la loi marginal  $K - 1$  (il suffit de remplacer  $\tau$  par  $t_K$  dans l'équation C.38 pour s'en apercevoir).

**Moyenne temporelle d'un signal :**

La moyenne temporelle d'un signal aléatoire  $\mathcal{Y}(t)$  se formule de la manière suivante :

$$\langle \mathcal{Y}(t)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathcal{Y}(t)^n dt. \quad (\text{C.39})$$

**Ergodisme :**

Le signal aléatoire  $\mathcal{Y}(t)$  est dit ergodique si ces moments sont indépendants du temps.

**Signaux stationnaires et ergodiques :**

D'une part, si les signaux sont stationnaires et ergodiques, on a,

$$\langle \{\mathcal{Y}(t)\}^p \rangle = m_p(\mathcal{Y}(t)), \quad (\text{C.40})$$

En particulier pour le moment d'ordre 1 et la moyenne temporelle,

$$\langle \mathcal{Y}(t) \rangle = \mathbb{E}[\mathcal{Y}(t)]. \quad (\text{C.41})$$

Les équations (C.36),(C.38) et (C.41) permettent d'établir la relation pour le moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}\{\mathcal{Y}(t_1) \times \mathcal{Y}(t_2)\} = \mathbb{E}\{\mathcal{Y}(t) \times \mathcal{Y}(t - \tau)\}. \quad (\text{C.42})$$

C'est en ce sens que l'on peut étendre la corrélation des signaux de l'équation (C.7) à une vision stochastique avec une hypothèse de signaux stationnaires et ergodiques,

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt = \mathbb{E}[x(y)y(t - \tau)]. \quad (\text{C.43})$$



## **Annexe D**

# **Compléments sur les investigations expérimentales**

## D.1 Fiches techniques des instruments de mesures pour l'expérience sur des corps rigides (partie 4.2)

### D.1.1 Accéléromètres : G Link 200 8G Lord Microstrain)

#### G-Link®-200-R

#### ASTM F2137 Compliant Wireless Accelerometer Node



The G-Link-200-R is specifically designed to monitor the dynamic characteristics of amusement rides and roller coasters. The wireless sensor is ASTM F2137-18 compliant. An onboard triaxial accelerometer reports high-resolution waveform data with extremely low noise and drift.

LORD Sensing Wireless Sensor Networks enable simultaneous, high-speed sensing and data aggregation from scalable sensor networks. Our wireless sensing systems are ideal for test and measurement, remote monitoring, system performance analysis, and embedded applications.

Users can easily program nodes for continuous, or event-triggered sampling with the SensorConnect software. The optional web-based SensorCloud interface optimizes data aggregation, analysis, presentation, and alerts for sensor data from remote networks.



#### HIGH PERFORMANCE SENSING

- ASTM F2137-18 Compliant
- $\pm 20$  g triaxial measurement range
- Extremely low noise on all axes:  $80 \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$
- On-board temperature sensor
- Configurable low-pass filter for CFC10, CFC21, or CFC60

#### RUGGED AND WEATHERPROOF

- IP-67 weatherproof enclosure
- $-40$  to  $+85^\circ\text{C}$  operating temperature
- Stainless steel base
- Bolt or magnetic mount

#### RELIABLE DATA COLLECTION

- Lossless, synchronized, and scalable networks using LXRS or LXRS+ protocol
- Remotely configure nodes and view sensor data with SensorConnect (PC), SensorCloud (web), or MSCL (API library)

#### CONFIGURE FOR MANY APPLICATIONS

- 128-1024 Hz sampling
- Transmit data real-time and/or save to onboard memory

#### APPLICATIONS

- Acceleration and Vibration monitoring
- Standardized Amusement Ride Characterization Test (SARC Test)
- Impact and Event Monitoring
- Condition Based Maintenance (CBM)



ENGINEERING YOUR SUCCESS.

©2020 Parker Hannifin MicroStrain Sensing. | Document XXXX-XXXX. Revision ~. | Subject to change without notice.

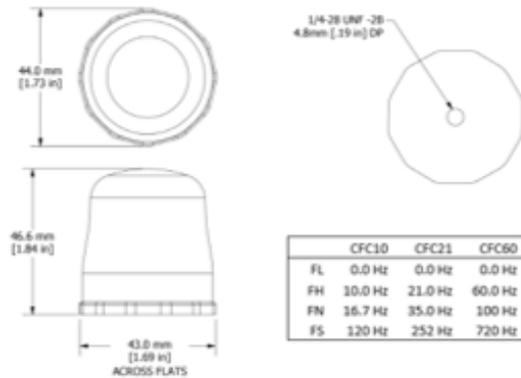
## ASTM F2137 Wireless Accelerometer Node

### Specifications

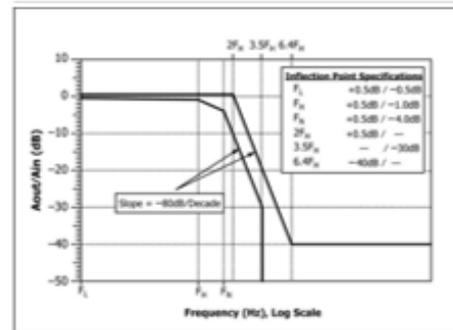
Analog Input Channels	
Measurement range	±20 g
Noise density	80 µg/√Hz
0 g offset	±50 mg
0 g offset vs temperature	±0.5 mg/°C (typical), ±0.75 mg/°C (maximum)
Integrated sensors	Triaxial MEMS accelerometer, 3 channels
Accelerometer bandwidth	DC to 1 kHz
Resolution	20 bit
Scale factor error	< 1%
Cross axis sensitivity	1% typical
Sensitivity change (temperature)	±0.01%/°C typical
Anti-aliasing filter	1.5 kHz (-6 dB attenuation)
Low-pass digital filter	User configurable, CFC10, CFC21, CFC60
Integrated Temperature Channel	
Measurement range	-40°C to 85°C
Accuracy	±0.25°C (over full range)
Sampling	
Sampling modes	Continuous, event triggered
Sampling rates	128 to 1024Hz
Sample rate stability	±5 ppm
Network capacity	Up to 128 nodes per RF channel Bandwidth calculator: <a href="http://www.microstrain.com/configure-your-system">http://www.microstrain.com/configure-your-system</a>
Node synchronization	±50 µsec
Data storage capacity	16 M Bytes (up to 8,000,000 data points)
Operating Parameters	
Wireless communication range	Outdoor/line-of-sight: 2 km (ideal)*, 800 m (typical)** Indoor/obstructions: 50 m (typical)**
Radio frequency (RF) transceiver carrier	License-free 2.405 to 2.480 GHz with 16 channels
RF transmit power	Adjustable from 0 dBm to 20 dBm. Power output restricted regionally to operate within legal limits
Power source	3 x 3.6 V, 1/2 AA batteries (Safte LS 14250 recommended)
Battery input range	0.8 V to 5.5 V
Battery lifetime	<a href="https://microstrain.com/wireless-g-link-200">https://microstrain.com/wireless-g-link-200</a>
Operating temperature	-40°C to +85°C
Mechanical shock limit	1000g / 1.5ms
Physical Specifications	
Dimensions	46.6 mm x 43 mm x 44 mm
Mounting	1/4 - 28 UNF - 2B 4.8 mm [0.19 in] DP or magnet purchased separately.
Weight	Batteries installed: 122 grams
Environmental rating	IP67
Enclosure material	300 series stainless steel with polycarbonate cover

\* Actual range varies with conditions  
\*\* Measured with antennas elevated, no obstructions, no RF interferers.

Integration	
Compatible gateways	All WSDA gateways
Software	SensorCloud, SensorConnect, Windows 7, 8 & 10 compatible
Software development kit	<a href="http://www.microstrain.com/software/mscd">http://www.microstrain.com/software/mscd</a>
Regulatory compliance	FCC (USA), IC (Canada), CE (European Union, includes RoHS), MIC (Japan), ASTM F2137-18



	CFC10	CFC21	CFC60
FL	0.0 Hz	0.0 Hz	0.0 Hz
FH	10.0 Hz	21.0 Hz	60.0 Hz
FN	16.7 Hz	35.0 Hz	100 Hz
FS	120 Hz	252 Hz	720 Hz



ASTM F2137 Frequency Response Envelope



Parker Hannifin Corporation  
MicroStrain Sensing  
459 Hurricane Lane  
Williston, VT 05495 - USA

phone: +1.802.862.6629  
email: [sensing\\_sales@LORD.com](mailto:sensing_sales@LORD.com)  
[sensing\\_support@LORD.com](mailto:sensing_support@LORD.com)  
[www.microstrain.com](http://www.microstrain.com)  
[www.parker.com](http://www.parker.com)

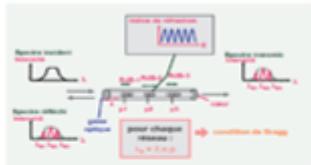
## D.1.2 Fibre optique

MÉTHODES D'AUSCULTATION  
DE LA STRUCTURE  
MESURES LOCALES DE FONCTIONNEMENT

C3-11



### MESURE DE DÉFORMATION PAR FIBRE OPTIQUE (extensomètre à réseaux de Bragg)

PRINCIPE ET DESCRIPTION SOMMAIRE	
OBJECTIF	Mesurer la déformation locale d'un élément de structure à l'aide d'un capteur à fibre optique.
PRINCIPE	<p>Un réseau de Bragg est une microstructure gravée dans le cœur d'une fibre monomode par exposition de la fibre placée dans un champ d'interférences de deux faisceaux issus d'un laser UV. L'alternance de franges sombres et brillantes ainsi produite modifie les caractéristiques optiques du guide de lumière en créant une variation périodique de l'indice de réfraction du cœur de la fibre. Cette variation d'indice se comporte comme un réflecteur très sélectif accordé sur la longueur d'onde selon la loi de Bragg :</p> $\lambda_b = 2 n p$ <p>où <math>\lambda_b</math> est la longueur d'onde de Bragg  <math>n</math> est l'indice optique (environ 1,5 pour la silice)  <math>p</math> est le pas de la période des franges.</p> <p>Lorsque la fibre optique subit une déformation, le pas du réseau change et la réflexion de la lumière s'en trouve modifiée.</p>  <p>Schéma de principe (IFSTTAR)</p> <p>L'inscription d'une série de réseaux (1,...,N) sur une même fibre optique présentant des accords en longueurs d'onde différents (<math>\lambda_{b1}, \dots, \lambda_{bN}</math>) est possible. Cela permet alors d'effectuer une série de mesures en plusieurs points du guide optique qui peuvent être multiplexés et démultiplexés aisément. Le gravage de réseaux de pas différents le long de la fibre permet de mesurer plusieurs déformations locales le long d'une même fibre.</p> <p>Le pas du réseau peut être modifié par les déformations longitudinales, la température et la pression. Il convient donc de décorréler ces variables lorsque celles-ci sont toutes actives. Généralement, pour ce faire, des réseaux « témoin » sont gravés sur la même fibre et localisés sur des zones de la fibre non sollicitées.</p> <p>La même fibre optique effectue les mesures ponctuelles et assure la liaison avec le système d'acquisition.</p> <p>Ce type de technologie est adapté aux mesures de déformations ponctuelles en différents lieux de la fibre sur des longueurs assez grandes, typiquement 10 points de mesure sur 50 m, soit un point de mesure tous les 5 m. Néanmoins, le nombre de points de mesure peut être nettement supérieur (bien que non courantes, des expériences à 100 points de mesure par fibre ont déjà été réalisées). De même, la distance qui sépare deux réseaux successifs gravés sur une même fibre qui est variable selon les fabricants et le besoin de l'utilisateur, présente une limite inférieure de l'ordre de 50 cm.</p> <p>Elle offre des possibilités de multiplexage des voies de mesure.</p> <p>L'étendue de mesure est variable en fonction du type de capteur et vaut +/- 1 500 micro-déformations (<math>\mu\text{def}</math>) pour une base de mesure de 10 à 20 cm pour les capteurs à fibre collée, et à +/- 5 000 <math>\mu\text{def}</math> pour les capteurs à fibre tendue.</p> <p>L'étendue de mesure est variable en fonction du type de capteur et vaut +/- 1 500 micro-déformations (<math>\mu\text{def}</math>) pour une base de mesure de 10 à 20 cm pour les capteurs à fibre collée, et à +/- 5 000 <math>\mu\text{def}</math> pour les capteurs à fibre tendue. Elle dépend du nombre de réseaux gravés et peut atteindre jusqu'à 20 000 <math>\mu\text{def}</math> pour des capteurs de base 50 cm.</p> <p><i>Nota : il est cependant utile d'apporter une précision sur ce que l'on entend par base de mesure : en effet, la longueur des réseaux gravés excède rarement le centimètre et est plutôt de quelques millimètres ; en revanche, la base de mesure est déterminée par la distance entre deux points consécutifs d'ancrage de la fibre. Mais si la fibre est continuellement fixée à la structure et s'il y a plusieurs points de mesure le long de la fibre, alors la base de mesure est constituée par la distance entre deux réseaux de bragg successifs.</i></p>



## D.1. FICHES TECHNIQUES DES INSTRUMENTS DE MESURES POUR L'EXPÉRIENCE SUR DES CORPS RIGIDES

PRINCIPE	L'appareil peut être compensé ou non en température, selon le type de capteur (le capteur de température est désolidarisé mécaniquement de la structure). A noter que ce principe est également utilisé pour fabriquer des capteurs de pression et de température.
CARACTÈRE DESTRUCTIF DE LA MÉTHODE	Non destructif
MATURITÉ	Méthode de mesure éprouvée depuis seulement quelques années.
MATÉRIEL SPÉCIFIQUE EMPLOYÉ	<p>Les capteurs actuels ont besoin d'être connectés à un conditionneur de signal adapté à la technologie du capteur.</p> <p>Les capteurs à fibre optique à réseau de Bragg peuvent être interrogés en transmission ou en réflexion. Cette dernière sera en général préférée car les signaux sont plus facilement identifiables. Ces matériels ne sont vendus que par quelques fabricants spécialisés.</p>  <p>Capteurs MicroLux M60 (en haut) et MicroLux M110T (en bas) de la société CEMENTYS</p> <p>(10 capteurs de ce type peuvent être placés le long d'un seul câble). L'étendue de mesure en déformation des capteurs ci-dessus est de +/- 5 000 10<sup>-6</sup>, avec une étendue de mesure en température de -20 °C / +80 °C ; ces étendues sont réglables en fonction du multiplexage.</p>
<b>MODALITÉS D'APPLICATIONS</b>	
DOMAINE D'APPLICATION	<p>Ces capteurs peuvent être noyés dans le béton, ou fixés sur le parement de structures en béton, en maçonnerie, en bois, en métal (dans ce dernier cas, le soudage est souvent interdit et il convient d'utiliser des boulons ou éventuellement de la colle, etc.).</p> <p>Ils permettent de :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- mesurer le comportement sous chargement et de surveiller les structures sur de grandes longueurs, en mesurant des déformations ponctuelles distribuées sur une grande longueur ;</li> <li>- de vérifier le fonctionnement de sections critiques (sous charges contrôlées ou sous trafic) ;</li> <li>- de détecter des fissurations.</li> </ul>
SUJÉTIONS PRATIQUES D'INTERVENTION	<p>La fixation de ces capteurs optiques se fait par collage le long de la fibre ou par fixations intermédiaires, etc.</p> <p>Ils peuvent être mis à l'intérieur des coffrages (de préférence collés sur les armatures), en prenant les précautions nécessaires pour qu'ils ne bougent pas lors du bétonnage et qu'ils ne soient pas endommagés par la vibration du béton.</p> <p>Il convient d'éviter les rayons de courbure inférieurs à 20 mm.</p>
LIMITES D'UTILISATION	Néant
PRÉCISION ET/OU SENSIBILITÉ	La résolution peut atteindre +/- 0,5 10 <sup>-6</sup> Précision de l'ordre de la micro-déformation.
PERSONNEL ET COMPÉTENCES	Un chargé d'investigation avec une équipe d'intervention constituée de personnel ayant reçu une formation sur l'instrumentation des ouvrages d'art.
<b>CARACTÉRISTIQUES OPÉRATOIRES</b>	
ACCÈS À 1 OU 2 FACES	Dépend du type d'ouvrage
COUPURES OU RESTRICTIONS DE CIRCULATION NÉCESSAIRES	Non

## D.1. FICHES TECHNIQUES DES INSTRUMENTS DE MESURES POUR L'EXPÉRIENCE SUR DES CORPS RIGIDES

RENDEMENT ET/OU ÉCHANTILLONNAGE	Dépend du nombre points de mesures sur une même fibre et du nombre de voies de la centrale d'acquisition.
DÉLAIS DE DISPONIBILITÉ DES RÉSULTATS	Immédiat sur l'écran de l'ordinateur portable relié à la centrale d'acquisition
PERTURBATIONS DU TRAFIC SUR LES MESURES	Néant
PERTURBATIONS DE L'ENVIRONNEMENT SUR LES MESURES	Il faut tenir compte des corrections thermiques.
RISQUES POUR LES UTILISATEURS OU LE PUBLIC	Aucune précaution particulière
ENCOMBREMENT – POIDS	Dépend essentiellement du câblage et du convertisseur Poids du capteur très faible
<b>AVANTAGES – INCONVÉNIENTS</b>	
AVANTAGES	Grand nombre de points de mesures localisés sur un même capteur. Robuste, étanche à l'eau, et a priori fiable sur le long terme. Insensible aux perturbations électromagnétiques. Mesure absolue ne nécessitant aucun calibrage. Insensible à la variation de longueur du câble optique de raccordement (celui-ci peut faire plusieurs km). Fonctionne en dynamique (fréquence d'échantillonnage pouvant aller jusqu'à 1 kHz).
INCONVÉNIENTS	Manque de recul sur la longévité. Produits ne figurant pas sur étagère (capteurs fabriqués à la demande, etc.).
<b>DISPONIBILITÉ – COÛT</b>	
DISPONIBILITÉ	Assez courante (on passe progressivement au stade industriel)
COÛT	Élevé (surtout à cause du conditionneur opto-électronique)
<b>RÉFÉRENCES</b>	
NORMES – MODES OPÉRATOIRES – ARTICLES	Dupont J. - Comportements de Capteurs à Fibres Optiques, noyés ou fixés en surface d'ouvrages en béton. - Thèse ENPC, 27 mars 2002. FERDINAND P. (1992), Capteurs à fibres optiques et réseaux associés, Technique & Documentation – Lavoisier, Paris, ISBN 2-85206-781-1, 251 p. FERDINAND P. (1999), Capteurs à fibres optiques à réseaux de Bragg, Techniques de l'Ingénieur – Traité Mesures et Contrôle – Volume R7 : Optique : Optique – Référence R6735, 28 p.

Nota : Il s'agit de fiches informatives dont le contenu relève d'éléments recueillis auprès des constructeurs de matériel. L'Ifsttar dégage donc toute responsabilité sur la validité ou non de ces informations.

## D.2 Compléments sur les expériences des corps rigides (partie 4.2)

### D.2.1 Pile 1, choc selon $x$

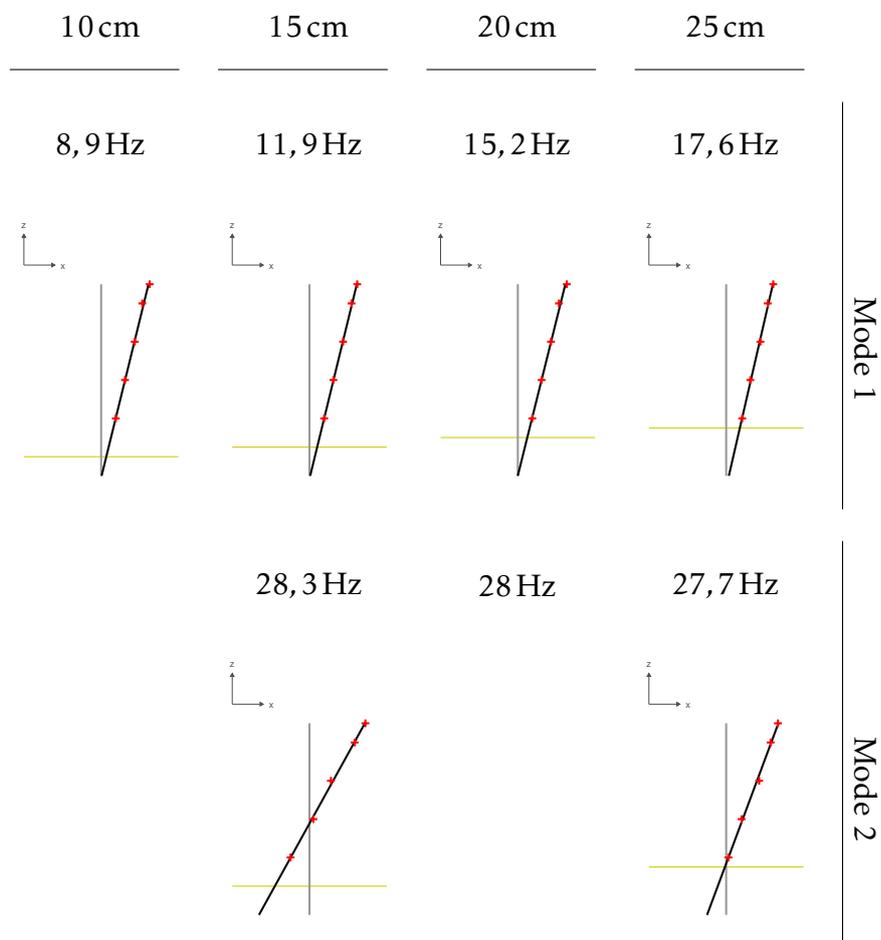


TABLE D.1 – Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes

D.2.2 Pile 2, choc selon  $y$

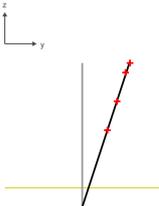
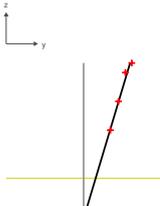
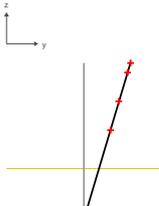
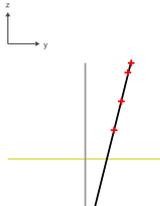
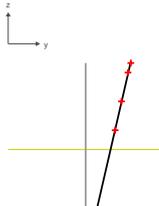
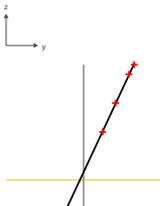
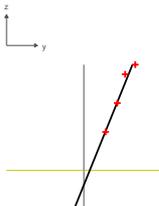
10 cm	15 cm	20 cm	25 cm	30 cm	
13,2 Hz	16,7 Hz	19,7 Hz	20,3 Hz	19,2 Hz	Mode 1
					
27,3 Hz	26,6 Hz	27,7 Hz	32,3 Hz		
					

TABLE D.2 – Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes

D.2.3 Pile 3, choc selon  $x$

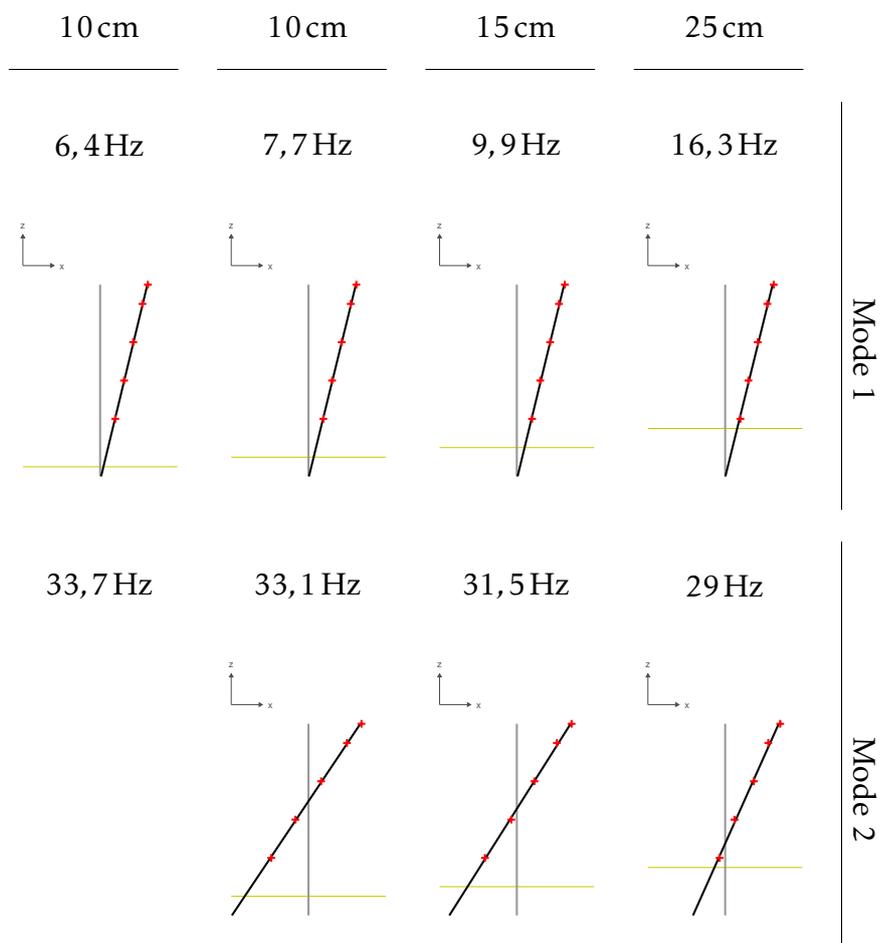


TABLE D.3 – Déformées modales, avec régression linéaire sur le déplacement de la pile, censée être quasiment rigide pour ces modes

## D.3 Compléments sur l'ouvrage instrumenté (partie 4.3)

Lors de cette annexe, des informations sur le monitoring complet de l'ouvrages sont présenté pour compléter la partie 4.3.

### D.3.1 Information sur les systèmes d'acquisitions

L'instrumentation a fait l'objet de trois mesures : les accélérations, les températures et les niveaux de l'eau. Avec le moyennage quotidien effectué à posteriori, l'évolution des phénomènes physiques observés n'ont pas requis une synchronisation des échantillonnages. De ce fait, nous avons les échantillonnages suivant :

Mesurande	Fréquence d'échantillonnage
Niveau d'eau	1/5 minutes
Température	1/20 minutes
Vibrations	1/300 secondes

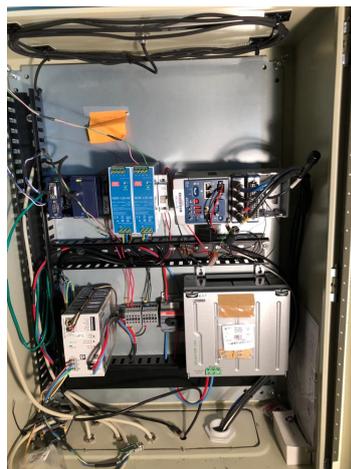


FIGURE D.1 – Armoire électrique pour le monitoring (Data logger en haut à gauche, système d'acquisition en haut à droite, onduleur, transformateurs ...)

#### Mesure du niveau d'eau avec Datalogger

Pour le niveau d'eau nous avons utilisé un radar Valeport VRS20 d'une précision de  $\pm 10$  mm. Sa distance maximale de mesure est de 20 mètres. Ce radar est placé en haut de la pile P4 de hauteur 11 mètre. Avec un débit de mesure assez faible nous avons connecté ce radar à un data logger pour l'acquisition des données.

#### Mesure des vibrations et températures avec une centrale d'acquisition

Les mesures de températures et de vibrations sont piloté par une centrale d'acquisition (NI Cdaq 9132 et carte NI 9234). Les capteurs de température sont des



FIGURE D.2 – Radar Valeport VRS20

rotronic Hydroclip (température et humidité). Ces capteurs ont l'avantage d'une



FIGURE D.3 – rotronic Hydroclip pour les mesures de températures

longévité de mesure tout en étant protégé aux intempéries (étanchéité HydroClip). Les étendues de mesures sont de  $-40\text{ °C}$  à  $60\text{ °C}$ . Les accéléromètres utilisés dépendent de la localisation (voir tableau ci-dessous). Un accéléromètre PCB 629A11 triaxial est utilisé sous le tablier et deux PCB 393B31 pour la pile. Nous observons bien un bruit de mesure plus conséquent pour le triaxial. Enfin, tout ce système est piloté grâce au logiciel Labview avec des boucles d'échantillonnage, de synchronisation et de déclenchement.

Localisation	1 (Tablier)	2 (Pile)
Modèle	PCB 629A11	PCB 393B31
Sensibilité	$10,2\text{ V}/(\text{m}/\text{s}^2)$	$1,02\text{ V}/(\text{m}/\text{s}^2)$
Résolution	$0,0031\text{ m}/\text{s}^2$	$0,000009\text{ m}/\text{s}^2$
Bruit de mesure (10Hz)	$2.8\ \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$	$0.01\ \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$
Gamme de fréquence	1,7 à 5000 Hz	0,07 à 300 Hz



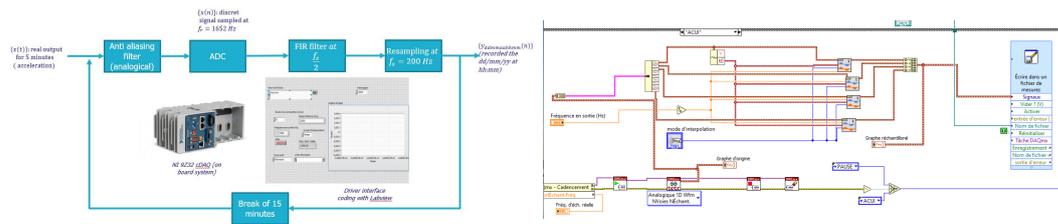
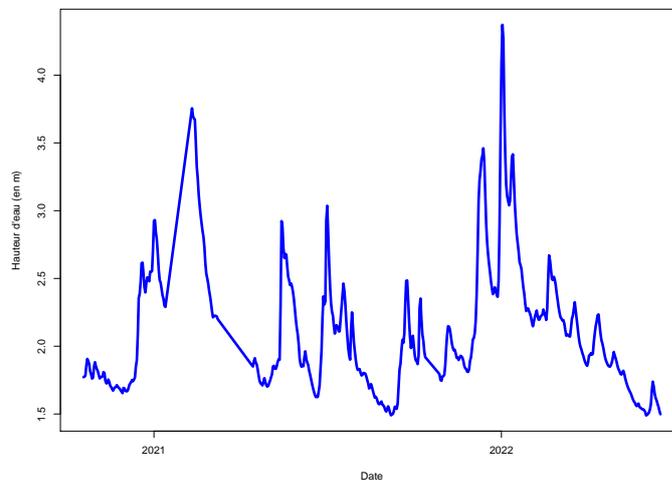


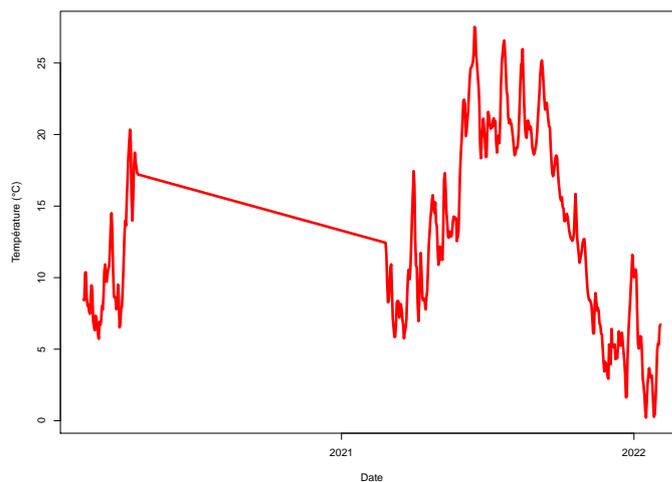
FIGURE D.4 – Pilotage du système d'acquisition

#### D.3.2 Données récoltées

Les hauteurs d'eau quotidiennes et les températures sont présentées sur la figure D.5



(a) Niveau d'eau

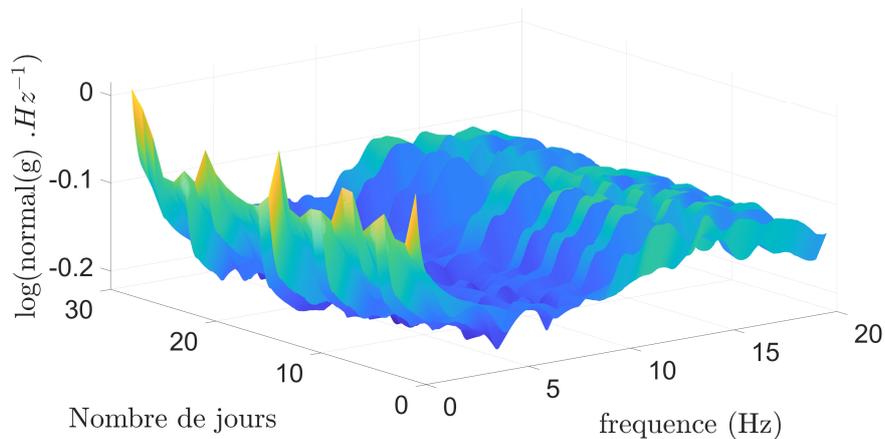


(b) Température

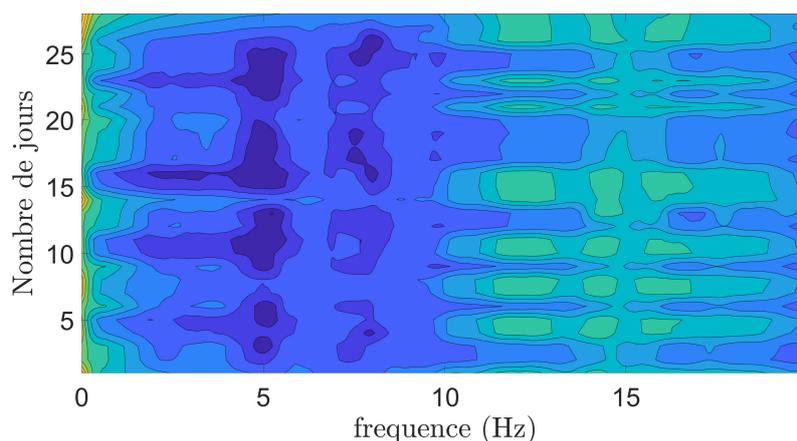
FIGURE D.5 – Données quotidiennes sur toute l'acquisition

### D.3.3 Traitement des signaux

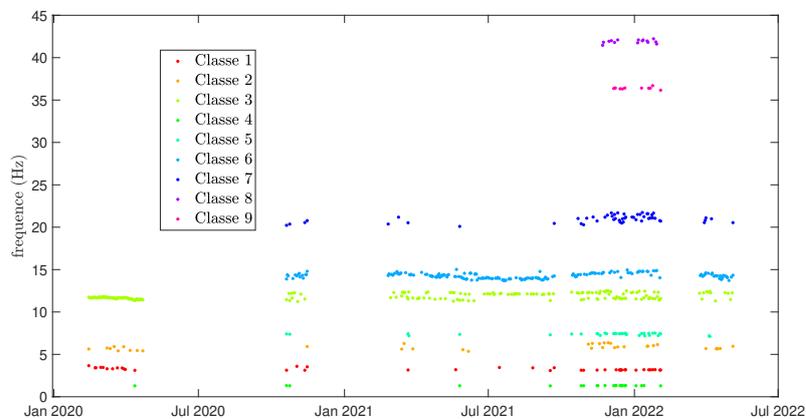
#### Autres composante principales pour le mois de mars 2020



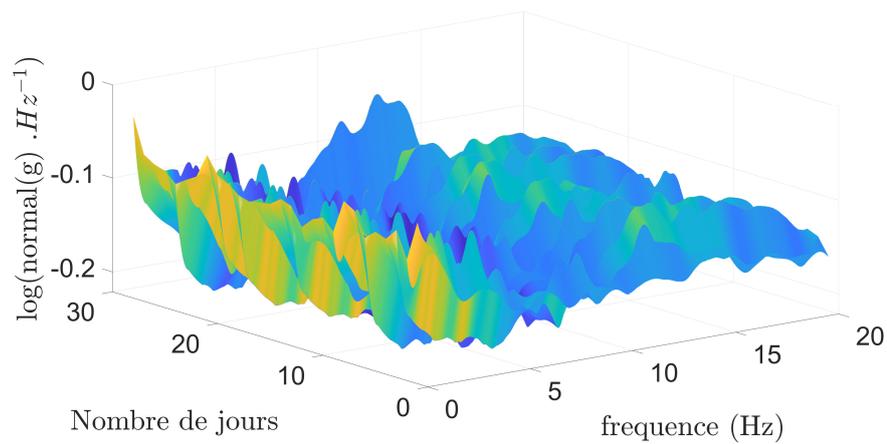
(a) Spectrogramme de la première composante principale



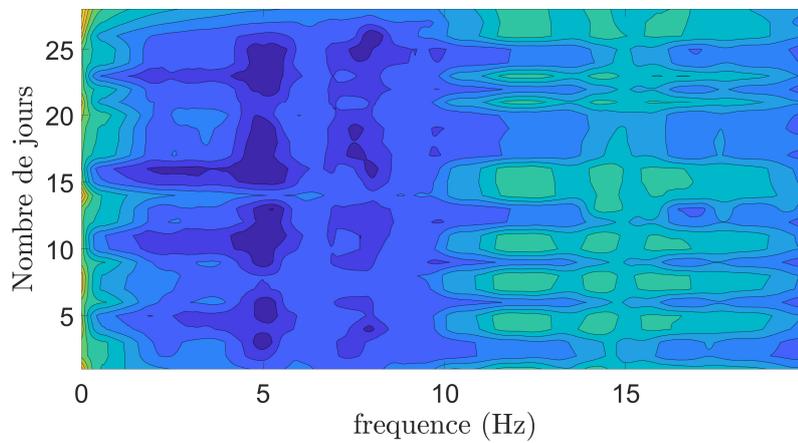
(b) Carte topographique : Plan temps-fréquence avec altitude des PSD la première composante principale



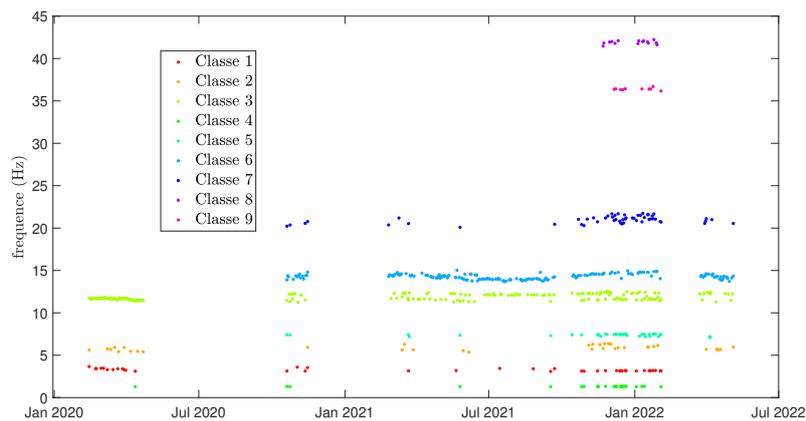
(c) Classification du spectrogramme



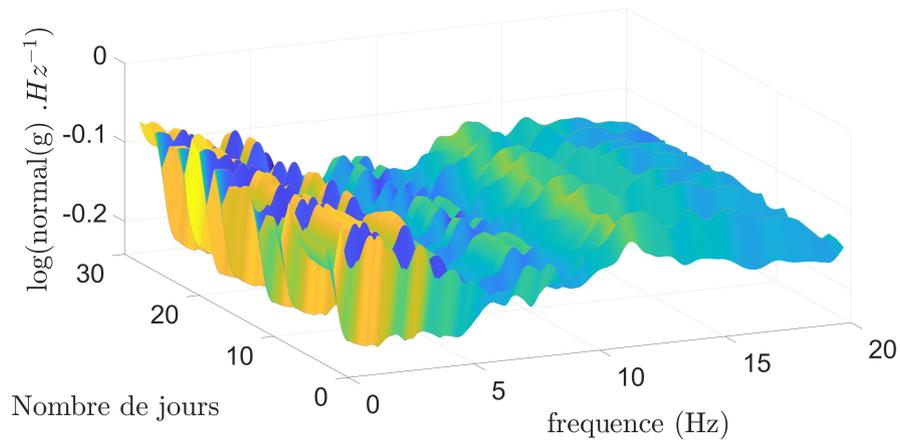
(a) Spectrogramme de la première composante principale



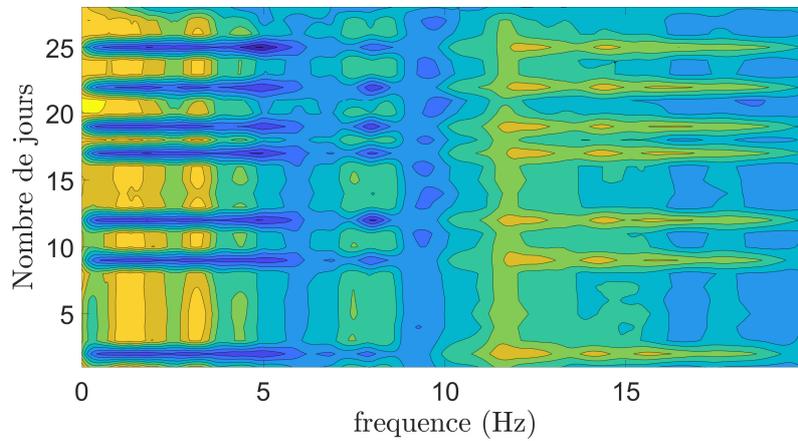
(b) Carte topographique : Plan temps-fréquence avec altitude des PSD la première composante principale



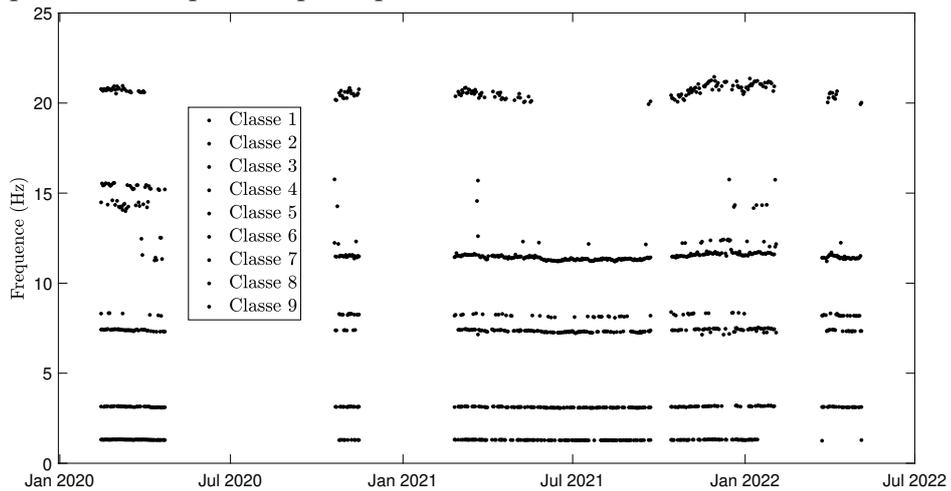
(c) Classification du spectrogramme



(a) Spectrogramme de la première composante principale



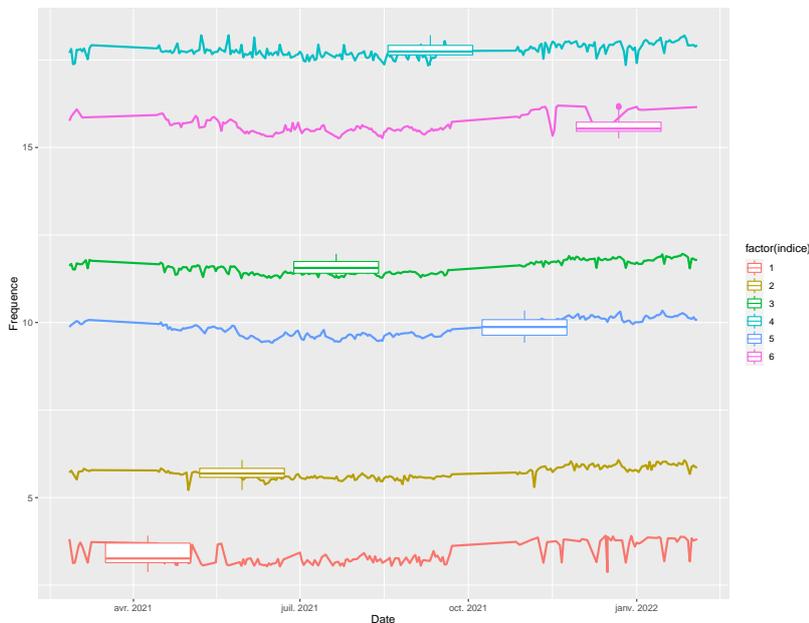
(b) Carte topographique : Plan temps-fréquence avec altitude des PSD la première composante principale



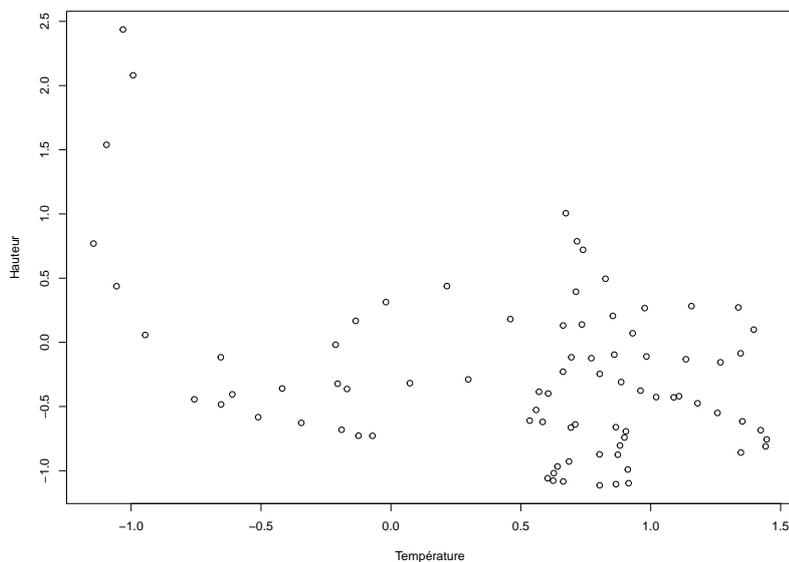
(c) Classification du spectrogramme

### D.3.4 Sensibilité des classes du quatrième espace aux phénomènes environnementaux

Les classes retenues ont fait l'objet d'une sélection, d'un centrage et d'une réduction (Tableau 4.7). Il n'y a pas de lien linéaire à décorréler entre la hauteur et la température mais pour les classes celle-ci est indispensable.



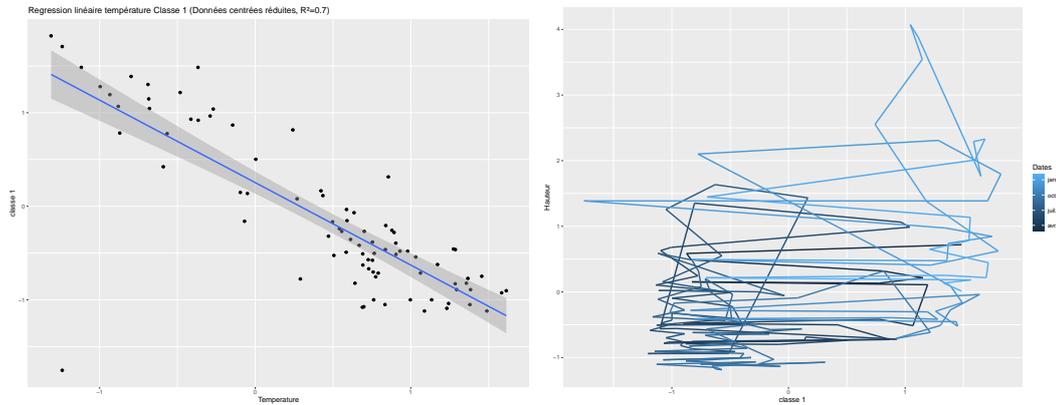
(a) Classe sélectionnées et diagrammes de boite à moustache associés



(b) Hauteur d'eau en fonction de la température : pas de lien apparent

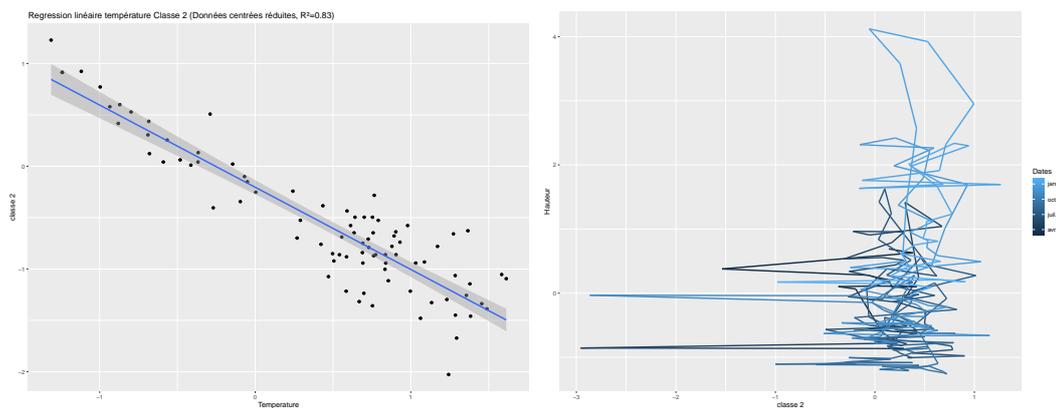
FIGURE D.9 – Impact de la température sur une classe

### Sensibilité de la classe 1 à la température puis à la hauteur d'eau



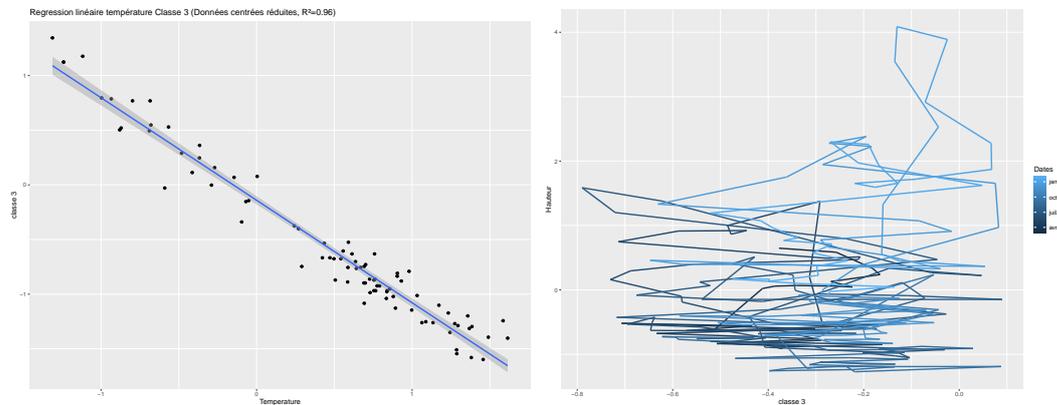
(a) Régression linéaire sur la classe 1 en fonction de la température ( $R^2 = 0,7$ ) (b) Chemin temporel de la classe 1 décomposé de la température en fonction de la hauteur d'eau.

### Sensibilité de la classe 2 à la température puis à la hauteur d'eau



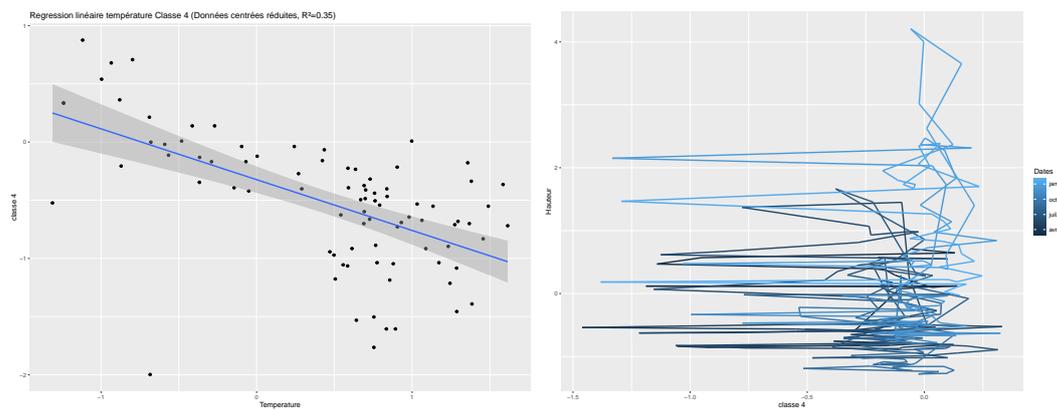
(a) Régression linéaire sur la classe 2 en fonction de la température ( $R^2 = 0,83$ ) (b) Chemin temporel de la classe 2 décomposé de la température en fonction de la hauteur d'eau.

#### Sensibilité de la classe 3 à la température puis à la hauteur d'eau



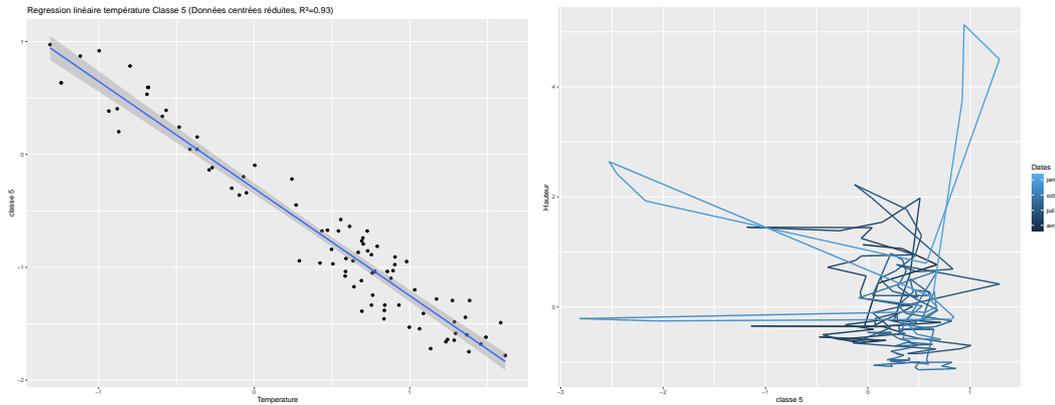
(a) Régression linéaire sur la classe 3 en fonction de la température ( $R^2 = 0,96$ ) (b) Chemin temporel de la classe 3 décorrélée de la température en fonction de la hauteur d'eau.

#### Sensibilité de la classe 4 à la température puis à la hauteur d'eau



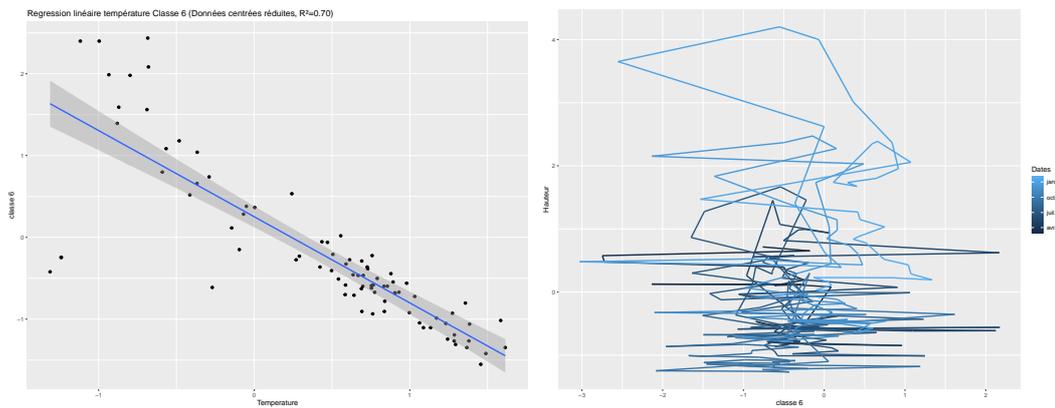
(a) Régression linéaire sur la classe 4 en fonction de la température ( $R^2 = 0,35$ ) (b) Chemin temporel de la classe 4 décorrélée de la température en fonction de la hauteur d'eau.

**Sensibilité de la classe 5 à la température puis à la hauteur d'eau**



(a) Régression linéaire sur la classe 5 en fonction de la température ( $R^2 = 0,93$ ) (b) Chemin temporel de la classe 5 décomposé de la température en fonction de la hauteur d'eau.

**Sensibilité de la classe 6 à la température puis à la hauteur d'eau**



(a) Régression linéaire sur la classe 6 en fonction de la température ( $R^2 = 0,6$ ) (b) Chemin temporel de la classe 6 décomposé de la température en fonction de la hauteur d'eau.



# Références



# Bibliographie

- [Ansari et al., 2002] Ansari, S. A., Kothiyari, U. C., & Raju, K. G. R. (2002). Influence of cohesion on scour around bridge piers. *Journal of Hydraulic Research*, 40(6), 717–729.
- [Antonopoulos et al., 2022] Antonopoulos, C., Tubaldi, E., Carbonari, S., Gara, F., & Dezi, F. (2022). Dynamic behavior of soil-foundation-structure systems subjected to scour. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 152, 106969.
- [Ariathurai & Arulanandan, 1978] Ariathurai, R. & Arulanandan, K. (1978). Erosion rates of cohesive soils. *Journal of the Hydraulics Division*, 104(2), 279–283.
- [Arneson et al., 2012] Arneson, L., Zevenbergen, L., Lagasse, P., & Clopper, P. (2012). Hydraulic engineering circular no. 18 evaluating scour at bridges fifth edition.
- [Arthur & Vassilvitskii, 2007] Arthur, D. & Vassilvitskii, S. (2007). K-means++ : The advantages of careful seeding. In *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA '07* (pp. 1027–1035). USA : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Avcı et al., 2021] Avcı, O., Abdeljaber, O., Kiranyaz, S., Hussein, M., Gabbouj, M., & Inman, D. J. (2021). A review of vibration-based damage detection in civil structures : From traditional methods to Machine Learning and Deep Learning applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147, 107077.
- [Azhari & Loh, 2017] Azhari, F. & Loh, K. J. (2017). Laboratory validation of buried piezoelectric scour sensing rods. *Structural Control and Health Monitoring*, 24(9), e1969.
- [Bao et al., 2017] Bao, T., Andrew Swartz, R., Vitton, S., Sun, Y., Zhang, C., & Liu, Z. (2017). Critical insights for advanced bridge scour detection using the natural frequency. *Journal of Sound and Vibration*, 386, 116–133.
- [Bao & Liu, 2021] Bao, T. & Liu, Z. L. (2021). Bridge scour characteristic curve for natural frequency-based bridge scour monitoring using simulation-based optimization. *Structural Control and Health Monitoring*, 28(8), e2773.
- [Basmaji, 2017] Basmaji, B. (2017). *Développement d'un modèle analytique d'interaction sol-structure pour l'étude du comportement mécanique des structures soumises à un mouvement de terrain : influence des déformations de cisaillement et de la plasticité*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Batool & Hennig, 2021] Batool, F. & Hennig, C. (2021). Clustering with the average silhouette width. *Computational Statistics & Data Analysis*, 158, 107190.

- [Boujia et al., 2019] Boujia, N., Schmidt, F., Chevalier, C., Siegert, D., & Pham van Bang, D. (2019). Effect of Scour on the Natural Frequency Responses of Bridge Piers : Development of a Scour Depth Sensor. *Infrastructures*, 4(2), 21.
- [Boujia et al., 2020] Boujia, N., Schmidt, F., Chevalier, C., Siegert, D., & Pham Van Bang, D. (2020). Distributed optical fiber-based approach for soil–structure interaction. *Sensors*, 20(1).
- [Boujia et al., 2021] Boujia, N., Schmidt, F., Chevalier, C., Siegert, D., & Pham Van Bang, D. (2021). Using Rocking Frequencies of Bridge Piers for Scour Monitoring. *Structural Engineering International*, 31(2), 286–294.
- [Breusers et al., 1977] Breusers, H. N. C., Nicollet, G., & Shen, H. (1977). Local scour around cylindrical piers. *Journal of Hydraulic Research*, 15(3), 211–252.
- [Briaud et al., 2011] Briaud, J., Hurlebaus, S., Chang, K., Yao, C., Sharma, H., Yu, O., Darby, C., B.E, & Hunt (2011). Realtime Monitoring of Bridge Scour Using Remote Monitoring Technology.
- [Briaud et al., 1999] Briaud, J.-L., Ting, F. C. K., Chen, H. C., Gudavalli, R., Philogene, B., Han, S.-W., Perugu, S., Wei, G., Nurtjahyo, P., Cao, Y., & Li, Y. (1999). SRICOS : Prediction of Scour Rate at Bridge Piers. *Texas A&M Transportation Institute*, (pp.4).
- [Brincker & Ventura, 2015] Brincker, R. & Ventura, C. (2015). *Introduction to Operational Modal Analysis*. John Wiley & Sons, Ltd.
- [Brincker et al., 2001] Brincker, R., Zhang, L., & Andersen, P. (2001). Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. *Smart Materials and Structures*, 10(3), 441–445.
- [Cara et al., 2013] Cara, F. J., Juan, J., Alarcón, E., Reynders, E., & De Roeck, G. (2013). Modal contribution and state space order selection in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2), 276–298.
- [Carden & Fanning, 2004] Carden, E. P. & Fanning, P. (2004). Vibration based condition monitoring : A review. *Structural Health Monitoring*, 3(4), 355–377.
- [C.Cremona, 2009] C.Cremona (2009). *Investigations et évaluations dynamiques des ponts*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- [Chabert et al., 1956] Chabert, J., Engeldinger, P., & Laboratoire National d’Hydraulique (Chatou, F. (1956). *Etude des affouillements autour des piles de ponts*. Laboratoire National d’Hydraulique.
- [Chakrabarti & McBride, 2005] Chakrabarti, S. K. & McBride, M. (2005). Model Tests on Current Forces on a Large Bridge Pier Near an Existing Pier. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 127(3), 212–219.
- [Chen et al., 2015] Chen, G., Schafer, B. P., Lin, Z., Huang, Y., Suaznabar, O., Shen, J., & Kerenyi, K. (2015). Maximum scour depth based on magnetic field change in smart rocks for foundation stability evaluation of bridges. *Structural Health Monitoring*, 14(1), 86–99.
- [Datteo et al., 2018] Datteo, A., Busca, G., Quattromani, G., & Cigada, A. (2018). On the use of ar models for shm : A global sensitivity and uncertainty analysis framework. *Reliability Engineering & System Safety*, 170, 99–115.

- [De Falco & Mele, 2002] De Falco, F. & Mele, R. (2002). The monitoring of bridges for scour by sonar and sediment. *NDT & E International*, 35(2), 117–123.
- [Delprat et al., 1992] Delprat, N., Escudie, B., Guillemain, P., Kronland-Martinet, R., Tchamitchian, P., & Torresani, B. (1992). Asymptotic wavelet and gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2), 644–664.
- [Ditlevsen, 1994] Ditlevsen, O. (1994). Traffic loads on large bridges modeled as white noise fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(4), 681–694.
- [Doebbling et al., 1996] Doebbling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., & Shevitz, D. W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : A literature review. *Los Alamos National Lab*.
- [Ester et al., 1996] Ester, M., Kriegel, H.-P., Sander, J., & Xu, X. (1996). A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In *KDD*.
- [Fael et al., 2016] Fael, C., Lança, R., & Cardoso, A. (2016). Effect of pier shape and pier alignment on the equilibrium scour depth at single piers. *International Journal of Sediment Research*, 31(3), 244–250.
- [Foti & Sabia, 2011] Foti, S. & Sabia, D. (2011). Influence of Foundation Scour on the Dynamic Response of an Existing Bridge. *Journal of Bridge Engineering*, 16(2), 295–304.
- [Fritzen, 1986] Fritzen, C.-P. (1986). Identification of Mass, Damping, and Stiffness Matrices of Mechanical Systems. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 108(1), 9–16.
- [Froehlich, 1988] Froehlich, D. C. (1988). Analysis of onsite measurements of scour at piers. *Hydraulic Engineering : Proceedings of the 1988 National Conference on Hydraulic Engineering*, (pp. 534–539).
- [Fryba, 1999] Fryba, L. (1999). *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Monographs and textbooks on mechanics of solids and fluids. Thomas Telford.
- [Gazetas, 1991] Gazetas, G. (1991). Formulas and Charts for Impedances of Surface and Embedded Foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9), 1363–1381.
- [Gazetas & Tassoulas, 1987] Gazetas, G. & Tassoulas, J. L. (1987). Horizontal Stiffness of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 113(5), 440–457.
- [Gerolymos & Gazetas, 2006] Gerolymos, N. & Gazetas, G. (2006). Winkler model for lateral response of rigid caisson foundations in linear soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(5), 347–361.
- [Giordano et al., 2022] Giordano, P., Turksezer, Z., & Limongelli, M. (2022). Risk-based scour assessment of bridges : Italian vs french guidelines. In *Bridge Safety, Maintenance, Management, Life-Cycle, Resilience and Sustainability* (pp. 1393–1399). CRC Press.

- [Giordano et al., 2023] Giordano, P. F., Prendergast, L. J., & Limongelli, M. P. (2023). The value of different monitoring systems in the management of scoured bridges. In S. I. Publishing (Ed.), *Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures* (pp. 109–121).
- [Girija Vallabhan & Das, 1988] Girija Vallabhan, C. & Das, Y. (1988). Parametric study of beams on elastic foundations. *J. Eng. Mech. Division*, 114(12), 2072–2082.
- [Gul & Necati Catbas, 2009] Gul, M. & Necati Catbas, F. (2009). Statistical pattern recognition for structural health monitoring using time series modeling : Theory and experimental verifications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(7), 2192–2204.
- [Güemes et al., 2020] Güemes, A., Fernandez-Lopez, A., Pozo, A. R., & Sierra-Pérez, J. (2020). Structural health monitoring for advanced composite structures : A review. *Journal of Composites Science*, 4(1).
- [Hans et al., 2000] Hans, S., Ibraim, E., Pernot, S., Boutin, C., & Lamarque, C.-H. (2000). Damping identification in multi-degree-of-freedom system via a wavelet-logarithmic decrement—part 2 : Study of a civil engineering building. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3), 375–403.
- [Heylen et al., 1997] Heylen, W., Lammens, S., & Sas, P. (1997). *Modal Analysis Theory and Testing*. Leuven, Belgium : Katholieke Universiteit Leuven, Departement Werktuigkunde.
- [Houlsby & Byrne, 2005] Houlsby, G. T. & Byrne, B. W. (2005). Design procedures for installation of suction caissons in clay and other materials. *Proc. ICE Geotechnical Eng*, 158, 75–82.
- [Ilanko, 2009] Ilanko, S. (2009). Comments on the historical bases of the rayleigh and ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2), 731–733.
- [Ilin & Raiko, 2010] Ilin, A. & Raiko, T. (2010). Practical approaches to principal component analysis in the presence of missing values. *The Journal of Machine Learning Research*, 11, 1957–2000.
- [Johnson, 1995] Johnson, P. A. (1995). Comparison of pier-scour equations using field data. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(8), 626–629.
- [Ju, 2013] Ju, S. H. (2013). Determination of scoured bridge natural frequencies with soil–structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 55, 247–254.
- [Kariyawasam et al., 2020] Kariyawasam, K. D., Middleton, C. R., Madabhushi, G., Haigh, S. K., & Talbot, J. P. (2020). Assessment of bridge natural frequency as an indicator of scour using centrifuge modelling. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*.
- [Koh et al., 2005] Koh, B. H., Dharap, P., Nagarajaiah, S., & Phan, M. Q. (2005). Real-time structural damage monitoring by input error function. *AIAA Journal*, 43(8), 1808–1814.
- [Lagasse et al., 1995] Lagasse, P., Schall, J., Johnson, F., Richardson, E., & Chang, F. (1995). Stream stability at highway structures. *U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration*.

- [Lamarque et al., 2000] Lamarque, C.-H., Pernot, S., & Cuer, A. (2000). Damping identification in multi-degree-of-freedom systems via a wavelet-logarithmic decrement—part 1 : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3), 361–374.
- [Landers & Mueller, 1996] Landers, M. N. & Mueller, D. S. (1996). Evaluation of selected pier-scour equations using field data. *Transportation Research Record*, 1523(1), 186–195.
- [Leissa, 2005] Leissa, A. W. (2005). The historical bases of the rayleigh and ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 287(4-5), 961–978.
- [Lin et al., 2014] Lin, C., Han, J., Bennett, C., & Parsons, R. L. (2014). *Case History Analysis of Bridge Failures due to Scour*, (pp. 204–216). International Symposium of Climatic Effects on Pavement and Geotechnical Infrastructure 2013.
- [Lin et al., 2005] Lin, Y.-B., Chen, J.-C., Chang, K.-C., Chern, J.-C., & Lai, J.-S. (2005). Real-time monitoring of local scour by using fiber bragg grating sensors. *Smart Materials and Structures*, 14(4), 664–670.
- [Liu et al., 2021] Liu, D., Tang, Z., Bao, Y., & Li, H. (2021). Machine-learning-based methods for output-only structural modal identification. *Structural Control and Health Monitoring*, 28(12).
- [Melville & Chiew, 1999] Melville, B. W. & Chiew, Y.-M. (1999). Time scale for local scour at bridge piers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(1), 59–65.
- [Murtagh & Contreras, 2012] Murtagh, F. & Contreras, P. (2012). Algorithms for hierarchical clustering : an overview. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, 2(1), 86–97.
- [Nair et al., 2006] Nair, K. K., Kiremidjian, A. S., & Law, K. H. (2006). Time series-based damage detection and localization algorithm with application to the asce benchmark structure. *Journal of Sound and Vibration*, 291(1), 349–368.
- [Pandey et al., 1991] Pandey, A., Biswas, M., & Samman, M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2), 321–332.
- [Pasternak, 1954] Pasternak, P. L. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two constants. *osudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow (URSS)*.
- [Peeters & De roeck, 1999] Peeters, B. & De roeck, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6), 855–878.
- [Peeters et al., 2001] Peeters, B., Maeck, J., & Roeck, G. D. (2001). Vibration-based damage detection in civil engineering : excitation sources and temperature effects. *Smart Materials and Structures*, 10(3), 518–527.
- [Prendergast et al., 2016] Prendergast, L. J., Hester, D., & Gavin, K. (2016). Determining the Presence of Scour around Bridge Foundations Using Vehicle-Induced Vibrations. *Journal of Bridge Engineering*, 21(10), 04016065.
- [Prendergast et al., 2013] Prendergast, L. J., Hester, D., Gavin, K., & O’Sullivan, J. J. (2013). An investigation of the changes in the natural frequency of a pile affected by scour. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25), 6685–6702.

- [Queensland, 2013] Queensland, T. a. M. R. (2013). Bridge scour manual, department of transport and main roads queensland.
- [Randolph, 1981] Randolph, M. F. (1981). The response of flexible piles to lateral loading. *Géotechnique*, 31(2), 247–259.
- [Rankine et al., 2007] Rankine, L., Mesbah, M., & Boashash, B. (2007). If estimation for multicomponent signals using image processing techniques in the time–frequency domain. *Signal Processing*, 87(6), 1234–1250.
- [Raudkivi & Ettema, 1983] Raudkivi, A. J. & Ettema, R. (1983). Clear water scour at cylindrical piers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(3), 338–350.
- [Richardson et al., 2001] Richardson, E. V., Davis, S. R., et al. (2001). *Evaluating scour at bridges*. Technical report, United States. Federal Highway Administration. Office of Bridge Technology.
- [Rousseeuw, 1987] Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes : A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20, 53–65.
- [Roweis, 1997] Roweis, S. (1997). Em algorithms for pca and spca. In M. Jordan, M. Kearns, & S. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 10 : MIT Press.
- [Rytter, 1993] Rytter, A. (1993). *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. PhD thesis, University of Aalborg, Denmark.
- [Saxena et al., 2017] Saxena, A., Prasad, M., Gupta, A., Bharill, N., Patel, O. P., Tiwari, A., Er, M. J., Ding, W., & Lin, C.-T. (2017). A review of clustering techniques and developments. *Neurocomputing*, 267, 664–681.
- [Semblat et al., 2003a] Semblat, J.-F., Duval, A.-M., & Dangla, P. (2003a). Modal superposition method for the analysis of seismic-wave amplification. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(3), 1144–1153.
- [Semblat et al., 2003b] Semblat, J.-F., Paolucci, R., & Duval, A.-M. (2003b). Simplified vibratory characterization of alluvial basins. *Comptes Rendus Geoscience*, 335(4), 365–370.
- [Seo et al., 2016] Seo, J., Hu, J. W., & Lee, J. (2016). Summary review of structural health monitoring applications for highway bridges. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 30(4), 04015072.
- [Sheppard & Miller, 2006] Sheppard, D. M. & Miller, W. (2006). Live-bed local pier scour experiments. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(7), 635–642.
- [Shih et al., 1989] Shih, C. Y., Tsuei, Y., Allemang, R., & Brown, D. (1989). Modal parameter estimation based on complex mode indicator functions. *IMAC VII*, (pp.7).
- [Shinoda et al., 2008] Shinoda, M., Haya, H., & Murata, S. (2008). Nondestructive evaluation of railway bridge substructures by percussion test. In *Fourth International Conference on Scour and Erosion 2008*.
- [Sohn & Farrar, 2001] Sohn, H. & Farrar, C. R. (2001). Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals. *Smart Materials and Structures*, 10(3), 446–451.

- [Takayanagi et al., 2019] Takayanagi, T., Durand, E., Davi, D., Chevalier, C., Cheetham, M., Naito, N., Sanagawa, T., & Watanabe, K. (2019). Scour risk management at bridges - A comparison of Japanese and French scoring methodologies. In *WCR2019, 12th World Congress on Railway Research* (pp. 6p). Tokyo, Japan.
- [Timoshenko et al., 1959] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., et al. (1959). *Theory of plates and shells*, volume 2. McGraw-hill New York.
- [Varun et al., 2009] Varun, Assimaki, D., & Gazetas, G. (2009). A simplified model for lateral response of large diameter caisson foundations—Linear elastic formulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(2), 268–291. Number : 2.
- [Vlasov, 1966] Vlasov, V. Z. (1966). Beams, plates and shells on elastic foundations. *Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem*.
- [Wang et al., 2017] Wang, C., Yu, X., & Liang, F. (2017). A review of bridge scour : mechanism, estimation, monitoring and countermeasures. *Natural Hazards*, 87(3).
- [Wardhana & Hadipriono, 2003] Wardhana, K. & Hadipriono, F. C. (2003). Analysis of Recent Bridge Failures in the United States. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 17(3), 144–150.
- [Watanabe et al., 2020] Watanabe, S., Keyaki, T., Naito, N., & Yuasa, T. (2020). Automatic identification method for natural frequency of bridge piers by microtremor measurement at both sides on top of pier. *Quarterly Report of RTRI*, 61(2), 103–108.
- [Winker, 1867] Winker, E. (1867). Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit (on elasticity and fixity) dominicus.
- [Xu & Chen, 2004] Xu, Y. & Chen, J. (2004). Structural damage detection using empirical mode decomposition : Experimental investigation. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 130, 1279–1288.
- [Yang et al., 2004] Yang, J. N., Lei, Y., Lin, S., & Huang, N. (2004). Hilbert-huang based approach for structural damage detection. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(1), 85–95.
- [Yankielun & Zabilansky, 1999] Yankielun, N. E. & Zabilansky, L. (1999). Laboratory Investigation of Time-Domain Reflectometry System for Monitoring Bridge Scour. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(12), 1279–1284.
- [Yeung, 1981] Yeung, R. W. (1981). Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters. *Applied Ocean Research*, 3(3), 119–133.
- [Yu et al., 2013] Yu, X., Zhang, B., Tao, J., & Yu, X. (2013). A new time-domain reflectometry bridge scour sensor. *Structural Health Monitoring : An International Journal*, 12(2), 99–113.
- [Zarafshan et al., 2012] Zarafshan, A., Iranmanesh, A., & Ansari, F. (2012). Vibration-Based Method and Sensor for Monitoring of Bridge Scour. *Journal of Bridge Engineering*, 17(6), 829–838.

