



HAL
open science

Résultats numériques et théoriques sur les équations de Saint-Venant couplées à un modèle d'érosion ou avec force de Coriolis

Noémie Gaveau

► **To cite this version:**

Noémie Gaveau. Résultats numériques et théoriques sur les équations de Saint-Venant couplées à un modèle d'érosion ou avec force de Coriolis. Analyse numérique [math.NA]. Université d'Orléans, 2022. Français. NNT : 2022ORLE1011 . tel-04049741

HAL Id: tel-04049741

<https://theses.hal.science/tel-04049741v1>

Submitted on 28 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE,
PHYSIQUE THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES

Institut Denis Poisson

Thèse présentée par :
Noémie Gaveau

soutenue le : **16 Juin 2022**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

**Résultats numériques et théoriques
sur les équations de Saint-Venant
couplées à un modèle d'érosion ou avec force de Coriolis**

THÈSE DIRIGÉE PAR :

Carine LUCAS

Maîtresse de Conférences, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Enrique Domingo FERNÁNDEZ NIETO
Antoine ROUSSEAU

Full professor, Universidad de Sevilla
Chargé de recherches, INRIA

PRÉSIDENTE DU JURY :

Magali RIBOT Professeure des Universités, Université d'Orléans

JURY :

Emmanuel AUDUSSE
Enrique Domingo FERNÁNDEZ NIETO
François JAMES
Carine LUCAS
Antoine ROUSSEAU
Magali RIBOT

Maître de Conférences, Université Sorbonne Paris Nord
Full professor, Universidad de Sevilla
Professeur des Universités, Université d'Orléans
Maîtresse de Conférences, Université d'Orléans
Chargé de recherches, INRIA
Professeure des Universités, Université d'Orléans

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | v |
| Introduction | 1 |
| 1 Équations de Saint-Venant | 1 |
| 2 Équations de Saint-Venant avec force de Coriolis | 2 |
| 3 Processus de sédimentation en eaux peu profondes | 3 |
| 4 Organisation du manuscrit | 3 |
| 1 Stabilité de solutions pour un modèle de sédimentation | 5 |
| 1.1 Présentation du modèle | 5 |
| 1.2 Égalité d'énergie et estimations <i>a priori</i> | 7 |
| 1.3 Théorème de convergence | 9 |
| 2 Validation d'un modèle d'érosion sédimentation | 13 |
| 2.1 Introduction | 13 |
| 2.2 Présentation des modèles | 13 |
| 2.2.1 Écoulement du fluide | 14 |
| 2.2.2 Système d'érosion-sédimentation | 15 |
| 2.3 Implémentation du modèle dans le logiciel FullSWOF | 17 |
| 2.3.1 Historique de FullSWOF | 17 |
| 2.3.2 Schémas numériques | 18 |
| 2.3.3 Sorties du logiciel et conservation de la masse | 21 |
| 2.4 Validation du modèle sur une expérience de laboratoire | 22 |
| 2.4.1 Description de l'expérience et résultats | 22 |
| 2.4.2 Paramètres de la simulation | 24 |
| 2.4.3 Comparaison des résultats : influence de la vitesse de sédimentation | 25 |
| 2.4.4 Comparaison des résultats : influence de la condition de bord en sortie | 32 |
| 2.4.5 Résultats complets : ajout du frottement au fond du bac | 33 |
| 2.4.6 Améliorations possibles du modèle | 35 |
| 2.5 Conclusion | 36 |
| 3 Schéma pour Saint-Venant avec force de Coriolis | 37 |
| 3.1 Introduction | 37 |
| 3.2 Les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis | 38 |
| 3.2.1 Le système de Saint-Venant avec force de Coriolis | 38 |
| 3.2.2 Quelques propriétés du système | 39 |
| 3.2.3 Non-conservation des états d'équilibre | 41 |
| 3.3 Détermination de premiers schémas | 42 |
| 3.3.1 Buts, réflexions initiales et restrictions | 42 |
| 3.3.2 Écriture générale du schéma et notations | 43 |
| 3.3.3 Détermination des corrections et calcul de l'énergie | 44 |

| | | |
|-------|--|-----------|
| 3.3.4 | Écriture finale du schéma, propriétés et amélioration | 49 |
| 3.3.5 | Tests et résultats numériques | 51 |
| 3.3.6 | Améliorations possibles pour les schémas suivants | 58 |
| 3.4 | Création de schémas par placement de l'équilibre géostrophique | 58 |
| 3.4.1 | Opérateurs et propriétés mimétiques | 59 |
| 3.4.2 | Équilibre sur les sommets | 63 |
| 3.4.3 | Équilibre sur les arêtes | 66 |
| 3.4.4 | Équilibre sur les cellules | 67 |
| 3.4.5 | Résultats numériques | 69 |
| 3.4.6 | Avantages et inconvénients des trois schémas | 77 |
| 3.5 | Schéma final | 78 |
| 3.5.1 | Schéma semi-discret | 78 |
| 3.5.2 | Énergie semi-discrète | 79 |
| 3.5.3 | Préservation de l'équilibre géostrophique | 80 |
| 3.5.4 | Résultats numériques | 81 |
| 3.6 | Conclusion | 83 |
| | Conclusions et perspectives | 85 |
| | A Valeur des concentrations de sédiments en entrée de FullSWOF | 87 |
| | Bibliographie | 88 |

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus infinie reconnaissance à ma directrice de thèse, Carine Lucas, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche en licence, et a continué à m'initier à ce monde tout au long de ma thèse. Cette dernière n'aurait jamais pu exister sans ton soutien et ta patience sans faille, ainsi que ta rigueur et ta passion. Merci d'avoir toujours été disponible pour répondre à mes questions, pour m'avoir poussé à dépasser mes limites et m'avoir permis de développer mes connaissances et mes compétences. Je pense pouvoir dire sans mentir que tu es la meilleure directrice que j'aurais pu espérer avoir, et te remercie donc du fond du cœur pour ces 4 années de travail ensemble!

Je tiens également à remercier tous les membres de l'équipe CRUE pour les réunions régulières me permettant de faire un point sur mon travail et de le garder en mouvement, ainsi que pour leurs conseils et toute l'aide qu'ils ont pu m'apporter, en particulier Frédéric Darboux, François James et Christian Laguerre.

Merci également à Emmanuel Audusse et Yohan Penel de m'avoir permis de poursuivre les travaux commencés lors du CEMRACS 2019, enrichissant ainsi mes connaissances ainsi que mon champ de recherche. Sur ce point, je tiens tout particulièrement à remercier Virgile Dubos, avec qui ce travail a été effectué. Nos discussions quasi-quotidiennes en visio lors des confinements m'ont permis de rester saine et (relativement) productive en ces périodes compliquées, et ce manuscrit serait sûrement très différent sans notre collaboration. Merci également pour ton amitié, et toute la joie, les débats et les rires que la-dite collaboration a pu apporter!

Je tiens également à remercier chaleureusement Antoine Rousseau et Enrique Fernández Nieto pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Merci du temps passé à la lecture de ce mémoire, et de vos remarques ayant permis de l'améliorer. Merci également aux autres membres de mon jury, Emmanuel Audusse, Magali Ribot et François James, d'avoir libéré du temps en cette période chargée pour m'écouter présenter mes travaux.

Le bon déroulement de cette thèse est également due à l'accueil reçu au laboratoire, dont je remercie tous les membres pour leur aide diverse et variée. Merci en particulier aux secrétaires, Marie-Laurence, Marie France, Caroline et Anne de m'avoir aidé à résoudre tous les problèmes administratifs inhérents à une thèse. Merci également à tous les doctorants du laboratoire pour leur convivialité et leur compagnie durant ces années, tout particulièrement à mon co-bureau, Hongwei. Enfin, merci à toi Maxime pour ton soutien et ton amitié, que ce soit lors de nos calculs d'intégrales et de résolutions de problèmes, lors de la préparation et de l'animation de l'escape game, ou lors de nos discussions diverses et nos karaokés endiablés!

Finalement, sur un plan plus personnel, merci à tous mes amis ainsi qu'à ma famille de m'avoir soutenue durant toutes ces années, tout particulièrement merci à mes parents de m'avoir permis de faire ces études, à mon frère et ma sœur pour leur soutien continu, à Chloé et Lætita pour m'avoir poussé à persévérer dans mes moments de désespoir, et à toutes les autres personnes, famille ou amis, trop pour tous les citer, ayant permis à ce manuscrit d'exister. Merci infiniment à tous!

Introduction

L'étude de phénomènes météorologiques et hydrauliques représente de nos jours un enjeu d'étude majeur. En effet, les catastrophes naturelles de plus en plus violentes induisent un besoin croissant de compréhension et de prévision de ces phénomènes, accentué par le fait que près de 40% de la population mondiale vit en zone côtière, d'après les données de l'ONU en 2017 [UN17]. Dans ce travail, nous nous intéresserons ainsi à diverses problématiques concernant des mouvements de fluides en eau peu profonde, associés à des phénomènes d'érosion et de sédimentation, ou bien soumis à la force de Coriolis.

1 Équations de Saint-Venant

Les fluides newtoniens sont régis par les équations de Navier-Stokes. Dans des cas d'études particuliers, il est possible de simplifier ces dernières en des systèmes plus adaptés aux situations étudiées. Ainsi, lorsque l'on considère des cas d'eaux peu profondes, c'est-à-dire des domaines pour lesquels la hauteur d'eau est négligeable par rapport à la longueur du domaine, on s'intéresse en général au système de Saint-Venant, développé en 1871 par Barré de Saint-Venant [SV71], et qui s'écrit, dans sa version la plus simple :

$$\partial_t h + \operatorname{div}_x(h\mathbf{u}) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + g h \nabla h = -gh \nabla b, \quad (1b)$$

avec $h \in \mathbb{R}^+$ la hauteur de l'eau, $\mathbf{u} = {}^t(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sa vitesse horizontale et b la topographie. Ces variables dépendent du temps $t \in [0, T]$ et de la position dans le domaine $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ la position dans le domaine. Par ailleurs, g est l'accélération gravitationnelle.

Ces équations sont obtenues en supposant une eau peu profonde, puis en intégrant le système sur la hauteur d'eau. Cela implique en particulier que la vitesse \mathbf{u} est une vitesse moyennée sur toute la hauteur d'eau. Les équations de Saint-Venant sont particulièrement utilisées dans le cadre de l'hydrodynamique maritime ou fluviale, notamment pour le calcul des marées et des ondes de tempête, les écoulements de rivières, la circulation de courants océaniques, la propagation de tsunamis ou encore l'étude des crues. Plus généralement, ces équations permettent aussi de décrire les mouvements horizontaux de l'atmosphère, où le rapport d'aspect du fluide est faible, mais aussi les avalanches, le trafic routier ou même la circulation sanguine.

2 Équations de Saint-Venant avec force de Coriolis

Le système de Saint-Venant permet ainsi de décrire de multiples situations d'eaux peu profondes. Afin d'étendre ses applications, et de modéliser de plus diverses applications, il est possible d'ajouter au système (1) des termes sources, tels que la pluie, l'infiltration du sol, ou le frottement au fond. Pour de grandes étendues de fluide, telles qu'un océan, un grand lac, ou l'atmosphère terrestre, il devient pertinent de prendre en compte l'action induite par la rotation de la Terre, appelée force de Coriolis. Malgré son appellation de "force", ce n'en est pas une au sens propre (c'est-à-dire l'action d'un corps sur un autre), mais une force fictive, créée par le mouvement non-linéaire du référentiel terrestre. Décrite pour la première fois par Gaspard-Gustave Coriolis dans [Cor32], puis [Cor35], la force de Coriolis s'écrit en fonction de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même Ω_T , et varie selon ϕ , la latitude de l'objet considéré :

$$\mathcal{F}_C = -2\Omega \wedge \mathbf{u} \text{ avec } \Omega = \Omega_T (0, \cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Partant des équations de Navier-Stokes, on peut intégrer cette force aux équations de Saint-Venant (voir par exemple [Mar05]), qui s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0 \quad (2a)$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + g h \nabla h = -\omega h \mathbf{u}^\perp, \quad (2b)$$

où $\omega = 2\Omega_T \sin(\phi)$.

Ce système possède deux propriétés principales que l'on souhaite pouvoir répliquer dans une simulation. Tout d'abord, comme les équations de Saint-Venant sans force de Coriolis (1), il vérifie une égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \partial_t (gh^2 + h\mathbf{u}^2) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gh \right) h\mathbf{u} \right) = 0.$$

Elle est identique à celle vérifiée par le système (1), puisque le seul terme supplémentaire ($-\omega h \mathbf{u}^\perp$) s'annule lors du calcul, où l'on multiplie l'équation des moments (2b) par \mathbf{u} .

Le modèle de Saint-Venant avec force de Coriolis (2) possède également une vaste gamme d'équilibres, appelés équilibres géostrophiques, et s'écrivant comme une égalité entre la force de Coriolis et le gradient de pression : $g \nabla h = -\omega \mathbf{u}^\perp$. Lors de simulations, la préservation des équilibres du système est importante si l'on souhaite reproduire correctement les phénomènes observés, et les équilibres géostrophiques, préservés par les équations (2), sont donc un enjeu majeur dans l'étude de ce système. Un certain nombre d'études traitent ainsi de cette préservation des états d'équilibre, et on pourra citer [Aud+18], [Do17] dans le cas linéaire, [Bou04] qui a adapté la reconstruction hydrostatique au cas avec terme source de Coriolis en introduisant une topographie artificielle, ou encore [Thu+09] et [Rin+10] qui considèrent une grille d'Arakawa de type C, souvent utilisée par les météorologues et océanographes.

3 Processus de sédimentation en eaux peu profondes

Outre l'ajout de termes source, il est également possible d'étudier d'autres situations d'eau peu profondes en couplant les équations de Saint-Venant (1) à un autre système d'équations. Cette technique permet ainsi de modéliser des processus d'érosion et de sédimentation en eaux peu profondes. Ceux-ci surviennent dans une grande variété d'environnements, et peuvent affecter de manière significative les milieux naturels mais également les constructions humaines, telles que les canaux ou les barrages ([AF03], [Ock+15]). L'étude de ces phénomènes est donc primordiale pour prévoir la longévité et la résistance de telles constructions, et ainsi prévenir de potentielles catastrophes [Mou+11], mais aussi pour assurer la qualité de l'eau [Fu+19].

Les phénomènes d'érosion s'opèrent en général de deux manières : la suspension, pour les particules fines qui sont entraînées dans le flux d'eau, ou les écoulements à grande vitesse, et le charriage, pour les particules plus grossières qui restent plus proches du fond, et sont mises en mouvement par roulement, glissement ou saltation (c'est-à-dire par sauts sur de courtes distances). Pour chacun de ces phénomènes, de nombreux modèles permettent de représenter diverses situations. On pourra ainsi citer [HBS02], décrivant l'érosion le long d'une pente, [Laj+13] pour le charriage dans une rivière, [Gao+04] dans le cas de transport chimique.

L'équation d'Exner [Exn25] a été très largement utilisée, par exemple dans le cadre de transport fluvial. Elle traduit la conservation de la masse de sédiments, et s'écrit :

$$\partial_t h_2 + \chi \operatorname{div} q_b = 0$$

où h_2 est la hauteur de la couche de sédiments, χ est donné par $(1 - \Phi_0)^{-1}$, avec Φ_0 la porosité de la couche de sédiments, et q_b le flux de sédiments. De nombreuses études ont été menées pour déterminer empiriquement l'expression de q_b . Citons ainsi les formules de Grass [Gra81], de Meyer-Peter et Müller [MPM48], de Fernández Luque et Van Beek [FLB76], de Nielsen [Nie92] et de Van Rijn [Rij84]. Toutes ces formules ne sont valables que dans certaines gammes de paramètres, pour des conditions expérimentales bien particulières.

4 Organisation du manuscrit

Cette thèse se décompose en trois chapitres indépendants.

Dans le chapitre 1, on s'intéresse au système de Saint-Venant-Exner (1.1) développé dans [FN+17], décrivant des phénomènes de charriage de sédiments dans des rivières, lacs, ou zones côtières. On y considère trois couches superposées : une couche de sédiments fixes, servant d'apport et de zone de dépôt au système, une couche de sédiments mobiles, et enfin une couche d'eau. Ce système possède la particularité d'avoir une énergie associée, grâce à la différence d'échelle prise entre la vitesse de l'eau et celle des sédiments. Après avoir démontré l'égalité d'énergie, nous montrerons la stabilité des solutions faibles du système, sous condition de régularité du gradient de la hauteur d'eau.

Dans le chapitre 2, nous considérons également une situation de dépôt de particules et d'érosion dans un flux d'eau. Basé sur une loi de conservation, le système (2.2) décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs classes de sédiments dans l'eau et dans une couche de dépôt, ainsi que leur interaction via une fonction d'échange G . Par couplage avec les équations de Saint-Venant (2.1), ce modèle permet ainsi de décrire de nombreuses situations d'érosion et de sédimentation par le

choix de G et d'autres paramètres, et réunit donc un certain nombre de modèles de la littérature, tels que ceux de Gao [Gao+04], de Hairsine et Rose [HBS02] ou de Lajeunesse [Laj+13]. Après avoir décrit ce modèle, ainsi que son implémentation dans le logiciel FullSWOF, nous nous intéresserons dans ce chapitre à sa validation sur une expérience de laboratoire. On souhaite ainsi vérifier si l'on est capable de reproduire numériquement la sédimentation de particules entraînées dans un flux d'eau de hauteur et de vitesse constantes. Nous commencerons par ajouter à FullSWOF quelques fonctionnalités supplémentaires afin d'approfondir nos connaissances du comportement de la simulation, notamment en terme de conservation de la masse de sédiments. Puis, à l'aide des données expérimentales, nous vérifierons la solution numérique par rapport aux résultats de laboratoire. Une étude est en particulier faite dans la section 2.4.3 afin de déterminer la répartition des vitesses de sédimentation dans le mélange expérimental d'entrée, non mesurée en laboratoire. La topographie de sortie du domaine (section 2.4.4), ainsi que la friction au fond du bac (section 2.4.5), sont également pris en compte, et permettent d'obtenir des résultats très proches de ceux obtenus en laboratoire comme on peut le voir sur les Figures 2.20 et 2.21, qui comparent respectivement le flux de sédiment en sortie du domaine au cours du temps, et le profil de dépôt de sédiment dans le bac au temps final, pour les résultats expérimentaux et la simulation.

Finalement, dans le chapitre 3, réalisé en collaboration avec Emmanuel Audusse, Virgile Dubos et Yohann Penel, nous développerons un schéma aux volumes finis colocalisé permettant de résoudre numériquement les équations de Saint-Venant non-linéaires avec force de Coriolis (3.1). Les schémas aux volumes finis classiques n'étant pas précis autour de l'équilibre géostrophique, on souhaite que notre schéma préserve lesdits équilibres géostrophiques, en plus de vérifier inégalité d'énergie semi-discrète. Pour ce faire, en nous inspirant de [Aud+18], on ajoute des corrections appropriées s'annulant à l'équilibre. Au cours du travail, nous inventorierons ainsi 6 schémas, obtenus en ajoutant des corrections bien choisies à un schéma aux volumes finis classique, et étudierons leurs propriétés en terme d'énergie et de stabilité à l'équilibre géostrophique. Ces schémas se distinguent en particulier par le placement de l'équilibre géostrophique discret à différents endroits de la maille (centre, arête, sommet), induisant le choix des opérateurs de gradient et de divergence utilisés, et par conséquent l'écriture des corrections appropriées. Pour chacun, nous illustrerons également leur comportement numérique sur quelques cas tests standards, et mettrons en évidence les améliorations apportées en comparant à un schéma aux volumes finis de type Godunov. En présentant nos réflexions, nous commencerons par décrire 5 schémas ((3.13), (3.14), (3.27), (3.23) et (3.15)), fonctionnels, mais présentant tous des défauts : certains ne vérifient pas la préservation des équilibres géostrophiques ou l'inégalité d'énergie, d'autres présentent, lors des simulations, des modes parasites. Le *stencil* du schéma, c'est-à-dire le nombre de cellules intervenant dans le calcul des valeurs des variables au sein d'une cellule donnée, devient également un critère décisif au cours de notre réflexion. Ainsi, un schéma ayant un *stencil* de plus de 9 points, *i.e.* ayant besoin de plus de cellules que les voisines immédiates (adjacentes ou en diagonale) pour le calcul des variables, sera plus compliqué à coder, mais également à intégrer à des codes existants, rendant ce schéma moins attrayant. Finalement, un dernier schéma (3.31) est présenté, possédant un *stencil* de 9 points, préservant les équilibres géostrophiques et vérifiant une inégalité d'énergie semi-discrète.

Chapitre 1

Stabilité de solutions pour un modèle de sédimentation

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous travaillons sur un modèle de sédimentation, qui consiste en un couplage entre les équations de Saint-Venant et un modèle de type Exner. Ce couplage permet de modéliser deux couches dans le domaine : la couche supérieure est composée d'eau, qui se déplace à une certaine vitesse, et la couche inférieure contient des sédiments, qui se déplacent au fond du domaine, à une vitesse plus faible. Le modèle, décrit dans [FN+17], ne repose pas sur des équations empiriques comme la formule de Meyer-Peter et Müller [MPM48] ou la formule de Fernández Luque et Van Beek [FLB76], mais sur une dérivation à partir des équations de Navier-Stokes. Comme le flux de sédiments s'annule lorsque qu'il n'y a plus de sédiments qui bougent au fond, ce modèle satisfait la conservation de la masse, ce qui n'est pas toujours le cas de l'équation d'Exner. Il permet aussi de mieux prendre en compte les fonds qui sont très variables, loin du fond plat.

Nous intéressons ici à un résultat de stabilité sur ce modèle. Pour cela, nous commencerons par établir l'égalité d'énergie satisfaite par le système de Saint-Venant Exner. Nous en déduisons ensuite des estimations *a priori*. Nous serons cependant obligés de rajouter une hypothèse pour pouvoir conclure, les estimations *a priori* n'étant pas suffisantes.

1.1 Présentation du modèle

Revenons tout d'abord sur le modèle décrit dans [FN+17]. Les auteurs considèrent un domaine de \mathbb{R}^3 composé de deux couches immiscibles aux caractéristiques différentes : la couche supérieure est une couche d'eau, et la couche inférieure est une couche de sédiments qui bougent plus lentement que le fluide. Cette couche de sédiments est elle-même décomposée en deux couches, une couche de sédiments mobiles qui est au-dessus d'une couche de sédiments fixes (cf Figure 1.1). Des transferts de sédiments peuvent avoir lieu entre ces couches, des sédiments fixes pouvant devenir mobiles (érosion) et inversement (dépôt).

Les équations de Navier-Stokes sont écrites pour la couche d'eau et pour la couche de sédiments. Les auteurs font alors l'hypothèse d'un rapport d'aspect ε faible (avec $\varepsilon = H/L$ rapport entre la longueur caractéristique L et la hauteur caractéristique H du domaine) : ils obtiennent tout d'abord un modèle de Saint-Venant pour la couche d'eau. Pour les sédiments, ils supposent que la vitesse s'exprime en ε^2 par rapport à la vitesse de l'eau. Les échelles de temps caractéristiques des deux couches sont donc différentes. Par ailleurs, les auteurs choisissent aussi deux types

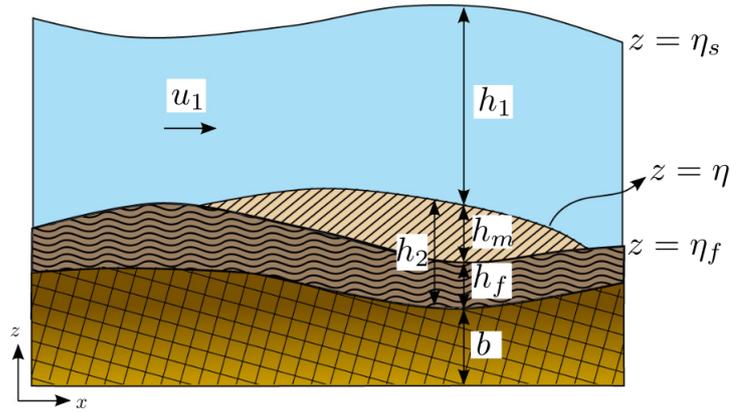


FIGURE 1.1 – Domaine d'étude, constitué d'une couche d'eau et de deux couches de sédiments. Source : [FN+17]

de scalings différents sur la pression dans chacune des couches. Ils obtiennent ainsi une équation de Reynolds pour modéliser le déplacement des sédiments.

Ces équations sont liées par des conditions entre les couches : une condition cinématique à la surface de l'eau (en $z = \eta_s$), une condition cinématique ainsi qu'une loi de frottement à l'interface fluide-sédiments (en $z = \eta$) et une condition de frottement de Coulomb à l'interface entre les sédiments mobiles et les sédiments fixes (en $z = \eta_f$).

Dans le cas d'une loi de frottement linéaire à l'interface fluide-sédiments, les auteurs obtiennent le modèle de Saint-Venant-Exner suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \operatorname{div}_x q_1 = 0 & (1.1a) \\ \partial_t q_1 + \operatorname{div}_x (h_1 u_1 \otimes u_1) + \frac{g}{2} \nabla h_1^2 + g h_1 \nabla (b + h_2) + \frac{g h_m}{r} \mathcal{P} = 0 & (1.1b) \\ \partial_t h_m + \operatorname{div}_x (K h_m v_m) = T_m & (1.1c) \\ \partial_t h_f = -T_m & (1.1d) \\ \partial_t b = 0. & (1.1e) \end{cases}$$

Dans les équations précédentes, l'indice 1 représente les variables liées à la couche d'eau, et l'indice 2 celles liées aux couches de sédiments, divisées en l'indice m pour la couche de particules mobiles, et f pour celle de particules fixes. Ainsi, h_1 , h_m , h_f représentent la hauteur de la couche d'eau, de sédiments mobiles, et de sédiments fixes respectivement, et $h_2 = h_m + h_f$, tandis que u_1 et v_m sont respectivement les vitesses (horizontales) de la couche d'eau et de la couche de sédiments. Le flux d'eau est noté $q_1 = h_1 u_1$. De plus, b représente la topographie (constante en temps), g l'accélération de la gravité, $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ est le ratio de la densité de l'eau ρ_1 et de la densité de sédiments ρ_2 , et $K = \sqrt{g d_s \left(\frac{1}{r} - 1 \right)}$ est une constante, où d_s est le diamètre moyen des particules. Enfin, $T_m = \partial_t z_e - \partial_t z_d$ est le transfert de masse entre les deux couches de sédiments, avec $\partial_t z_e$ le taux d'érosion et $\partial_t z_d$ le taux de dépôt.

D'après la dérivation faite dans [FN+17], on a de plus, pour une loi de friction linéaire, les relations :

$$v_m = \frac{u_1}{K} - \frac{\vartheta}{1-r} \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \operatorname{sgn}(v_m) = \operatorname{sgn} \left(\frac{u_1}{K} - \frac{\vartheta}{1-r} \nabla (r h_1 + h_2 + b) \right)$$

où $\mathcal{P} = \nabla(rh_1 + h_2 + b) + (1 - r)\text{sgn}(v_m)\tan(\delta)$ et $\vartheta = \frac{\theta_c}{\tan\delta}$, θ_c étant le nombre de Shields critique et $\tan\delta$ le coefficient de friction correspondant à l'angle de friction interne du matériau.

On pourra noter que, dans [FN+17], une loi de friction quadratique à l'interface eau-sédiments est également proposée. Par souci de simplicité, nous nous intéressons ici seulement au modèle créé par la loi linéaire. Le choix de friction quadratique change seulement l'expression de la vitesse v_m des sédiments, et donnera probablement les mêmes résultats que ceux présentés ci-après. De plus, comme le font les auteurs dans [FN+17], nous considérerons par la suite que les taux de dépôt et d'érosion se compensent, c'est-à-dire que nous prendrons $T_m = 0$ dans notre étude.

Nous nous intéresserons par la suite aux solutions du modèle (1.1).

1.2 Égalité d'énergie et estimations a priori

Commençons par étudier l'énergie du système (1.1). On se place sur le domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ en espace et entre 0 et $T > 0$ en temps. Par la suite, pour un vecteur v donné, on notera $v^2 = v \cdot v$.

Théorème 1.2.1. *Le système (1.1) vérifie l'égalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h_1 u_1^2 + \frac{g}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |h_1 + h_2 + b|^2 + \frac{K^2}{2d_s} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |h_2 + b|^2 \\ + \frac{gK\vartheta}{r(1-r)} \int_{\Omega} h_m \mathcal{P}^2 + \frac{K^3 \tan\delta}{d_s} \int_{\Omega} h_m \|v_m\|_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Démonstration. On multiplie l'équation (1.1b) par u_1 et on intègre sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_1 \cdot \partial_t q_1 + \int_{\Omega} u_1 \cdot \text{div}_x(q_1 \otimes u_1) + \frac{g}{2} \int_{\Omega} u_1 \cdot \nabla h_1^2 \\ + g \int_{\Omega} h_1 u_1 \cdot \nabla(b + h_2) + \frac{g}{r} \int_{\Omega} h_m u_1 \cdot \mathcal{P} = 0. \end{aligned}$$

Calculons alors séparément les différents termes de cette équation :

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{\Omega} u_1 \cdot \partial_t q_1 + \int_{\Omega} u_1 \cdot \text{div}_x(q_1 \otimes u_1) \\ & \quad = \int_{\Omega} u_1^2 \partial_t h_1 + \int_{\Omega} q_1 \partial_t u_1 + \int_{\Omega} u_1 \text{div}_x(q_1 \otimes u_1) \\ & \quad = \int_{\Omega} q_1 \partial_t u_1 + \int_{\Omega} u_1 \text{div}_x(q_1 \otimes u_1) - \int_{\Omega} u_1^2 \text{div}_x(q_1) \\ & \quad = \int_{\Omega} q_1 \partial_t u_1 + \int_{\Omega} u_1 \cdot (q_1 \cdot \nabla) u_1 \\ & \quad = \int_{\Omega} q_1 \partial_t u_1 + \int_{\Omega} \frac{q_1}{2} \nabla u_1^2 \\ & \quad = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} h_1 \partial_t u_1^2 + u_1^2 \partial_t h_1 \right) \\ & \quad = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h_1 u_1^2, \\ & \bullet \frac{g}{2} \int_{\Omega} u_1 \nabla h_1^2 + g \int_{\Omega} q_1 \nabla(b + h_2) = g \int_{\Omega} q_1 \nabla(h_1 + h_2 + b) \\ & \quad = g \int_{\Omega} (h_1 + h_2 + b) \partial_t h_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{g}{r} \int_{\Omega} h_m u_1 \cdot \mathcal{P} &= \frac{g}{r} \int_{\Omega} h_m \mathcal{P} \cdot (K v_m + \frac{K \vartheta}{1-r} \mathcal{P}) \\
&= \frac{g K \vartheta}{r(1-r)} \int_{\Omega} h_m \mathcal{P}^2 + \frac{g K}{r} \int_{\Omega} h_m v_m \cdot \mathcal{P}, \\
\bullet \int_{\Omega} h_m v_m \cdot \mathcal{P} &= \int_{\Omega} h_m v_m \cdot (\nabla(r h_1 + h_2 + b) + (1-r) \operatorname{sgn}(v_m) \tan \delta) \\
&= \int_{\Omega} h_m v_m \cdot \nabla((r h_1 + h_2 + b)) + (1-r) \tan \delta \int_{\Omega} h_m v_m \cdot \operatorname{sgn} v_m \\
&= - \int_{\Omega} (r h_1 + h_2 + b) \operatorname{div}(h_m v_m) + (1-r) \tan \delta \int_{\Omega} h_m v_m \cdot \operatorname{sgn} v_m \\
&= \frac{1}{K} \int_{\Omega} (r h_1 + h_2 + b) \partial_t h_m + (1-r) \tan \delta \int_{\Omega} h_m \|v_m\|_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, en réunissant ces éléments, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h_1 u_1^2 + g \int_{\Omega} (h_1 + h_2 + b) \partial_t h_1 + \frac{g K \vartheta}{r(1-r)} \int_{\Omega} h_m \mathcal{P}^2 + \frac{g}{r} \int_{\Omega} (r h_1 + h_2 + b) \partial_t h_m \\
+ \frac{K^3 \tan \delta}{d_s} \int_{\Omega} h_m \|v_m\|_1 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient l'égalité d'énergie (1.2) en utilisant le fait que $\partial_t h_m = \partial_t (h_2 + b)$. \square

Théorème 1.2.2. *On a les estimations a priori suivantes :*

- * $\sqrt{h_1} u_1 \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)^2)$
- * $h_1 + h_2 + b \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$
- * $h_2 + b \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$
- * $h_1 \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$
- * $\sqrt{h_m} \mathcal{P} \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$
- * $h_m v_m \in L^1([0, T], L^1(\Omega))$.

Démonstration. Immédiat en intégrant (1.2) par rapport au temps. \square

Remarque 1.2.3. *On pourrait espérer obtenir une inégalité de type "BD entropie", comme présentée dans [BD03] et [BD07], obtenue en dérivant l'équation de masse en espace, puis en multipliant par des quantités appropriées et en intégrant sur le domaine. Cependant ce résultat a initialement été développé pour un système de Saint-Venant visqueux, et repose sur les termes supplémentaires ajoutés par la viscosité du fluide. Le système (1.1) ne possédant pas les termes visqueux adéquats, une telle inégalité d'entropie n'est pas atteignable pour ce système. Le choix de la loi de friction quadratique à l'interface eau-sédiment ne donne pas de terme supplémentaire, mais change seulement l'expression de ceux déjà présents, et ne permet donc pas non plus d'obtenir une BD entropie pour le système.*

1.3 Théorème de convergence

Énonçons maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 1.3.1. Soit (h_1^n, h_m^n, q_1^n) une suite de solutions faibles du système (1.1) satisfaisant l'égalité d'énergie (1.2), de conditions initiales $(h_1^{n_0}, h_m^{n_0}, q_1^{n_0})$ vérifiant :

$$h_1^{n_0} \rightarrow h_1^0 \text{ dans } L^1(\Omega), \quad h_m^{n_0} \rightarrow h_m^0 \text{ dans } L^1(\Omega), \quad q_1^{n_0} \rightarrow q_1^0 \text{ dans } L^1(\Omega)$$

et satisfaisant l'inégalité :

$$\int_{\Omega} h_1^{n_0} (u_1^{n_0})^2 + g \int_{\Omega} (h_1^{n_0} + h_2^{n_0} + b)^2 + \frac{K^2}{d_s} \int_{\Omega} (h_2^{n_0} + b)^2 \leq C.$$

Si de plus $\nabla h_1 \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)^2)$, alors à une sous-suite près, h_1^n , q_1^n et h_m^n convergent fortement vers une solution faible du système (1.1) satisfaisant l'égalité d'énergie (1.2) respectivement dans $\mathcal{C}([0, T], W^{-1,2}(\Omega))$, $\mathcal{C}([0, T], W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega))$ et $L^p([0, T], W^{-1,2}(\Omega))$, pour tout $p \geq 1$.

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons besoin des résultats préliminaires suivants :

Lemme 1.3.2 (Aubin-Lions). Soient $X_0 \subset\subset X \subset X_1$ trois ensembles, avec X_0 inclus compactement dans X , $1 \leq p, q \leq \infty$ ainsi qu'une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in L^p([0, T], X_0)$ et $\partial_t u_n \in L^q([0, T], X_1)$. Alors

- (i) si $p < \infty$, alors il existe une sous-suite de (u_n) qui converge dans $L^p([0, T], X)$.
- (ii) si $p = \infty$ et $q > 1$, alors il existe une sous-suite de (u_n) qui converge dans $\mathcal{C}([0, T], X)$.

Lemme 1.3.3 (cf [FKP16] p.14). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $k > 0$ et $q < \infty$ vérifiant :

- $q > \frac{p^*}{p^* - 1}$ si $kp < n$ (avec $p^* = \frac{np}{n - kp}$)
- $q > 1$ si $kp = n$
- $q \geq 1$ si $kp > n$

Alors $L^q(\Omega) \subset\subset W^{-k, p'}(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme 1.3.4. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ borné et $1 \leq p, q \leq \infty$. Si $p < q$ alors $W^{-1, q} \subset W^{-1, p}$.

Démonstration. D'après [KOF77] (théorème 5.9.2), il y a équivalence entre $u \in W^{-1, p}$ et l'écriture $u = \sum_{|\alpha|=0}^k D^\alpha u_\alpha$ avec $u_\alpha \in L^p$ pour tout multi-indice α . Comme $p < q$ et Ω borné, on a $L^q \subset L^p$ et on obtient donc immédiatement le résultat voulu : $W^{-1, q} \subset W^{-1, p}$. \square

Lemme 1.3.5. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$. L'application

$$\begin{aligned} W^{1, p}(\Omega) \times W^{-1, q}(\Omega) &\rightarrow W^{-1, r}(\Omega) \\ (u, v) &\mapsto uv \end{aligned}$$

où r vérifie $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ est bien définie et continue.

Démonstration. (cf [BF06] p.177) Comme $v \in W^{-1,q}(\Omega)$, on peut écrire ([KOF77] théorème 5.9.2) : $v = v_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$.

Le produit uv s'écrit alors :

$$uv = uv_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial uv_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^2 u \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Étant donné que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $u \in L^p(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)$ pour tout j .

On obtient donc $uv_0 \in L^r(\Omega)$, $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial uv_j}{\partial x_j} \in W^{-1,r}(\Omega)$ et $\sum_{j=1}^2 u \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^r(\Omega)$. Comme $L^r(\Omega) \in W^{-1,r}(\Omega)$, on obtient bien le résultat annoncé. \square

Nous pouvons donc maintenant revenir au résultat énoncé dans le théorème 1.3.1 :

Démonstration. On intègre les équations (1.1a) et (1.1c) sur Ω . En utilisant le lemme de Green-Ostrogradski et la périodicité des conditions de bord, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} h_1 = - \int_{\Omega} \operatorname{div}_x q_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h_m = - \int_{\Omega} \operatorname{div}_x h_m v_m = 0.$$

Ainsi, $h_1^0 \in L^1(\Omega)$ et $h_m^0 \in L^1(\Omega)$ impliquent que

$$\sqrt{h_1} \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \sqrt{h_m} \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)).$$

Comme de plus $h_1 u_1 = \sqrt{h_1}(\sqrt{h_1} u_1)$, on déduit de l'estimation précédente que $h_1 u_1 \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)^2)$. Finalement les égalités

$$\partial_t h_1 = -\operatorname{div}_x q_1 \quad \text{et} \quad \partial_t h_m = -\operatorname{div}_x (K h_m v_m),$$

nous permettent de conclure que

$$\partial_t h_1 \in L^\infty([0, T], W^{-1,1}(\Omega)) \quad \text{et} \quad \partial_t h_m \in L^1([0, T], W^{-1,1}(\Omega)).$$

Grâce aux lemmes 1.3.3 et 1.3.4, on sait que $L^2(\Omega) \subset\subset W^{-1,2}(\Omega) \subset W^{-1,1}(\Omega)$: on peut donc appliquer le lemme d'Aubin-Lions, et déduire la convergence forte, à une sous suite près, de h_1^n dans $\mathcal{C}([0, T], W^{-1,2}(\Omega))$. Par ailleurs, sachant que, pour tout $p \geq 1$, $L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \subset L^p([0, T], L^2(\Omega))$ on déduit par le lemme d'Aubin-Lions la convergence forte, à une sous suite près, de h_m^n dans $L^p([0, T], W^{-1,2}(\Omega))$ pour tout $p \geq 1$.

On souhaite maintenant obtenir un résultat similaire pour q_1 . On sait déjà que $q_1 \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)^2)$, il nous faut donc seulement étudier $\partial_t q_1$ afin de pouvoir appliquer le lemme d'Aubin-Lions. Étant donné que

- $\operatorname{div}_x (h_1 u_1 \otimes u_1) = \operatorname{div}_x (\sqrt{h_1} u_1 \otimes \sqrt{h_1} u_1) \in L^\infty([0, T], W^{-1,1}(\Omega)^2)$,
- $\frac{g h_m}{r} \mathcal{P} = \frac{g}{r} \sqrt{h_m} (\sqrt{h_m} \mathcal{P}) \in L^2([0, T], L^1(\Omega)^2) \subset L^2([0, T], W^{-1,1}(\Omega)^2)$ et
- $g h_1 \nabla (h_1 + h_2 + b) \in L^\infty([0, T], W^{-1,1}(\Omega)^2)$,

on a :

$$\partial_t q_1 = -\operatorname{div}_x (h_1 u_1 \otimes u_1) - g h_1 \nabla (h_1 + h_2 + b) - \frac{g h_m}{r} \mathcal{P} \in L^2([0, T], W^{-1,1}(\Omega)^2).$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse que $\nabla h_1 \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega)^2)$ et, sachant grâce à la proposition 1.3.5 que $L^1(\Omega) \subset\subset W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega) \subset W^{-1, 1}(\Omega)$, d'après le lemme d'Aubin-Lions, à une sous suite près, q_1^n converge fortement dans $\mathcal{C}([0, T], W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega))$. \square

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc pu déduire, grâce à l'égalité d'énergie, la stabilité des solutions du système (1.1), sous condition sur le gradient de la hauteur d'eau. Comme nous l'avons signalé, cette condition est due à l'absence de termes visqueux, qui nous auraient permis d'obtenir une équation de BD entropie. Afin d'éliminer cette hypothèse, il faudrait reprendre la dérivation du système à partir des équations de Navier-Stokes faite dans [FN+17], soit en gardant des termes d'ordres plus élevés, soit en changeant certaines des hypothèses. En particulier, un rapport d'échelle de temps est choisi entre la couche de sédiments mobiles et la couche d'eau, dont la modification pourrait mener à un système légèrement différent.

Chapitre 2

Modèle polyvalent d'érosion sédimentation et validation sur une expérience de laboratoire

2.1 Introduction

Lors de sa thèse [NB16] à l'université d'Orléans, Amina Nouhou Bako a présenté un modèle de transfert de sédiments régi par une fonction d'échange, dans un domaine composé d'une couche de sédiments et d'une couche d'eau, ayant pour variables les concentrations de sédiments dans l'eau et dans la couche de sédiments. L'écriture du système au moyen de cette fonction d'échange présente l'avantage de rendre le système polyvalent : différents choix permettent ainsi de reproduire une variété de situations de sédimentation et d'érosion, telles que le charriage, la sédimentation dans les rivières, ou le transport chimique. Pour ce faire, le système de transfert de sédiments est couplé au système de Saint-Venant [SV71], qui modélise le mouvement de la couche d'eau.

Grâce à son implémentation dans le logiciel FullSWOF (Full Shallow Water for Overland Flow), qui permettait déjà la modélisation d'un flux d'eau par les équations de Saint-Venant, ce modèle a pu être validé sur un certain nombre de solutions analytiques et de cas tests issus de la littérature (voir [NB+21]). Afin de s'assurer des capacités de ce modèle à reproduire une situation réelle, nous nous intéressons ici à la simulation d'une expérience de laboratoire présentée dans [NB+22], dans laquelle des sédiments se déposent le long d'un canal dans un flux d'eau peu profonde. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [GLD b].

Dans ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps les équations nous permettant de modéliser la situation, soit les équations de Saint-Venant [SV71] et les équations de transfert de sédiments développées dans [NB16] et [NB+21]. Nous nous intéresserons ensuite à l'implémentation de ces modèles dans le logiciel FullSWOF_1D. Après avoir décrit l'expérience, nous comparerons les résultats numériques obtenus aux mesures. Nous commencerons par un cas simplifié des conditions expérimentales, sur lequel nous étudierons l'influence de différents paramètres. Progressivement, nous ajouterons les éléments permettant de finalement reproduire l'expérience. Enfin, discuterons des limites du modèle et des améliorations possibles.

2.2 Présentation des modèles

On commence par présenter les systèmes nous permettant de modéliser la situation expérimentale que nous voulons reproduire. Celle-ci se compose d'un flux d'eau dans un canal, dans lequel des sédiments en suspension sont entraînés par le

courant, et peuvent se déposer. Nous allons donc utiliser deux systèmes, que nous couplerons afin de décrire la situation dans son ensemble. Le premier permettra de décrire l'écoulement fluide, et le second le transport et le transfert de sédiments. Ces deux systèmes seront couplés, le second utilisant la hauteur et la vitesse d'eau donnée par le premier. L'épaisseur de la couche de sédiments déposés étant négligeable devant celle de la couche d'eau, il n'y a pas de rétroaction des sédiments sur le fluide via la topographie, il est donc possible de résoudre les systèmes l'un après l'autre, d'abord celui de l'eau, puis celui des sédiments, par une méthode dite de *splitting*.

2.2.1 Écoulement du fluide

On s'intéresse à un écoulement d'eau de très faible profondeur, dans un canal homogène en largeur. Ces dispositions vont nous permettre par la suite de faire deux suppositions : tout d'abord, l'eau étant très peu profonde en comparaison à la largeur et à la longueur du domaine considéré, on peut supposer que les variations verticales de vitesse sont négligeables. Ainsi, la vitesse sera considérée comme indépendante de l'altitude, et ne dépendra que du temps et des variables horizontales x et y . Partant des équations de Navier-Stokes, utilisées pour décrire le mouvement des fluides, cette supposition conduit à l'écriture des équations de Saint-Venant [SV71], modélisant un écoulement en eaux dites "peu profondes".

On considère par ailleurs que le canal est homogène en largeur. On peut donc supposer que, pour x constant, la variable y (dont l'axe est dirigé parallèle à la largeur du canal, perpendiculaire à l'écoulement) n'a pas d'influence sur la hauteur et la vitesse de l'eau. Nos variables ne dépendent donc que du temps t et d'une dimension horizontale, x (direction de l'écoulement). On écrit donc les équations de Saint-Venant (en 1D) correspondantes :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(q) & = 0 & (2.1a) \\ \partial_t(q) + \partial_x(h(u^2 + gh/2)) & = -gh(\partial_x b + S_f) & (2.1b) \end{cases}$$

où h est la hauteur d'eau (m), u la vitesse du fluide (m/s), $q = hu$ le flux d'eau (m^2/s), b la topographie (m), g l'accélération de la pesanteur et $S_f = n^2 \frac{|u|}{h^{4/3}}$ le terme de frottement de Manning [CS07], avec n coefficient de Manning (voir Figure 2.1).

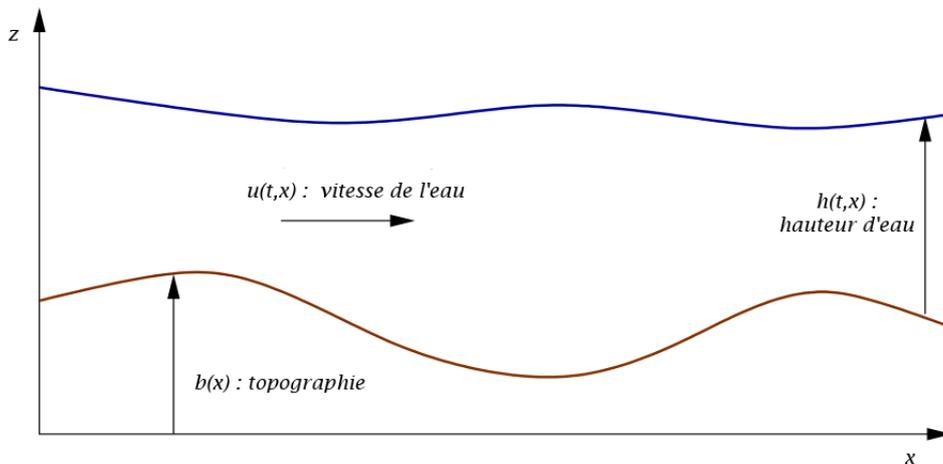


FIGURE 2.1 – Définition des variables hydrodynamiques

Ces équations permettent de modéliser de très nombreuses situations, telles que les crues, les ruptures de barrage et les écoulements fluides, mais également les courants océaniques, les flux atmosphériques ou les avalanches. Les restrictions sur le ratio d'aspect des domaines considérés sont en effet assez larges pour permettre une grande variété d'applications.

2.2.2 Système d'érosion-sédimentation

On présente maintenant le modèle de transfert développé dans [NB16], qui nous permettra de modéliser les déplacements de sédiments lors de notre simulation. Ce modèle présente la particularité intéressante d'unifier un certain nombre de modèles d'érosion, tels que le transport chimique décrit dans [Gao+04], l'érosion le long d'une pente dans [HBS02] ou le charriage dans une rivière de [Laj+13]; nous étudierons plus en détail cette polyvalence dans la deuxième partie de cette section.

2.2.2.1 Présentation du modèle

On se place dans un domaine constitué d'une couche d'eau, contenant des sédiments en suspension, d'une couche d'échange contenant les sédiments déposés, qui peuvent potentiellement s'éroder, et d'une couche de sol initial, qui peut servir de source aux deux autres couches précédentes (voir la Figure 2.2). Notre mélange de sédiments est constitué de différentes classes, dénotées par l'indice i et déterminées par le diamètre des sédiments. Pour chaque classe i , on note c_i la concentration de sédiments dans le fluide (kg/m^2) et M_i la concentration de sédiments dans la couche d'échange (kg/m). On introduit un temps de relaxation t_{s_i} , caractérisant la vitesse du processus d'érosion-sédimentation pour les particules de la classe i , ainsi qu'une fonction d'échange G_i qui décrit les échanges de sédiments entre la couche d'eau et la couche d'échange et qui doit vérifier, à l'équilibre, la relation $G_i(M) = hc_i$. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t(hc_i) + \partial_x(qc_i) &= \frac{1}{t_{s_i}}(G_i(M) - hc_i) + S_i^1 & (2.2a) \\ A\partial_t(M_i) &= -\frac{1}{t_{s_i}}(G_i(M) - hc_i) + S_i^2, & (2.2b) \end{cases}$$

où S_i^1 et S_i^2 sont les termes sources représentant les particules pouvant s'éroder depuis le sol initial, A est un coefficient représentant le poids entre les concentrations c_i et M_i , et M est le vecteur constitué des concentrations M_i .

On peut remarquer que le modèle vérifie alors la loi de conservation

$$\partial_t(hc_i) + \partial_x(qc_i) = -A\partial_t(M_i) + S_i^1 + S_i^2,$$

qui exprime les échanges de particules dus au flux d'eau : les sédiments entrent dans le flot, sont transportés, et peuvent se déposer dans la couche d'échange ou s'en échapper.

On remarquera que la concentration de sédiments dans le fluide n'a pas de dépendance en hauteur, car ce modèle a été pensé pour un couplage avec les équations de Saint-Venant (2.1), qui ont la même particularité. Par ailleurs, on considère que les variations de quantités de sédiments dans la couche d'échange, ainsi que l'apport potentiel de particules depuis le sol initial sont suffisamment négligeables pour ne pas influencer la topographie b dans les équations hydrodynamiques (2.1), ni la

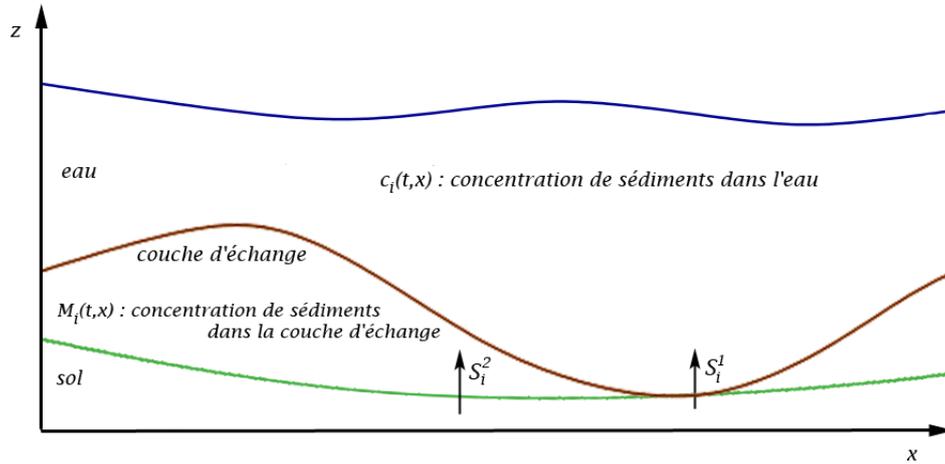


FIGURE 2.2 – Définition des variables de concentration pour une classe i

friction de l'eau avec le sol. Il n'y a donc pas de rétroaction de l'érosion et de la sédimentation sur le mouvement du fluide.

La fonction d'échange G_i , le temps de relaxation t_{s_i} et le coefficient A sont choisis en fonction des cas que l'on cherche à simuler, permettant ainsi de reproduire diverses situations grâce à un même modèle. On étudie par la suite un exemple de cette polyvalence, en reproduisant le modèle développé par Hairsine et Rose dans [HBS02].

2.2.2.2 Comparaison avec le modèle de Hairsine & Rose

Comme nous l'avons signalé précédemment, le modèle (2.2) est particulièrement polyvalent, puisque permettant de reproduire un certain nombre de modèles de la littérature. Plus de détails peuvent être trouvés dans [NB+21], avec des applications au transport chimique et au charriage, mais nous détaillerons ici seulement le cas du modèle de Hairsine & Rose [HBS02], qui nous sera utile par la suite. Ce dernier a pour but de décrire l'érosion d'un sol en pente soumis à de la pluie, et inclut donc des phénomènes d'érosion, et de dépôt. La sédimentation des particules crée une couche de dépôt qui cause aussi un phénomène de ré-entraînement des sédiments. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t(hc_i) + \partial_x(qc_i) & = r_i + r_{ri} + e_i + e_{di} - d_i & (2.3a) \\ \partial_t(M_{di}) & = d_i - r_{ri} - e_{di} . & (2.3b) \end{cases}$$

Dans le système (2.3), les particules sont encore une fois réparties selon leur taille en différentes classes de sédiments indexées par i . Pour chacune de ces classes, c_i est la concentration de sédiments dans le fluide et M_{di} la concentration de sédiments dans la couche de dépôt. Dans la Figure 2.3, r_i et e_i sont les flux de sédiments provenant du sol initial créés respectivement par le ruissellement et la pluie. De même, r_{ri} et e_{di} sont les flux de sédiments en provenance de la couche de dépôt créés respectivement par le ruissellement et la pluie. Enfin, d_i est le taux de dépôt.

Des similarités évidentes sont présentes entre les deux systèmes, et pour retrouver le système (2.2) à partir du modèle de Hairsine & Rose (2.3), il suffit de faire les analogies suivantes :

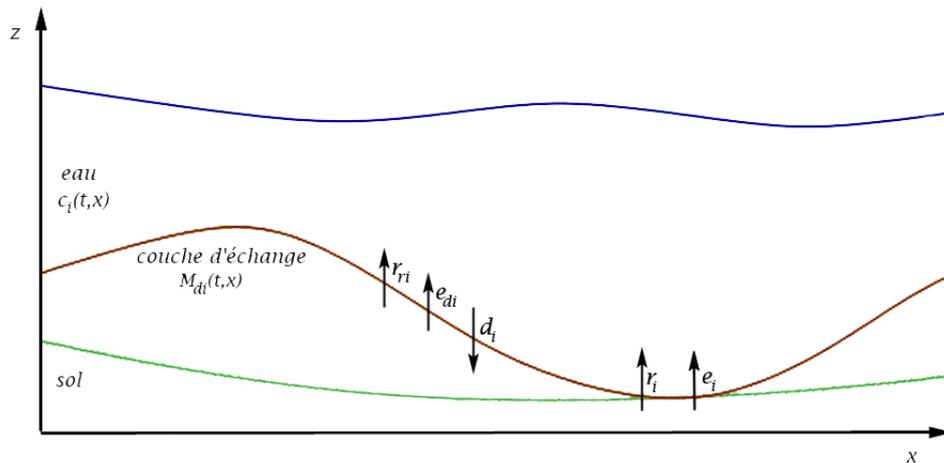


FIGURE 2.3 – Processus d'échange dans le modèle de Hairsine & Rose.

- $M_i = M_{di}$
- $S_i^1 = r_i + e_i$
- $S_i^2 = 0$
- $A = 1$
- $t_{si} = h/v_i$, où v_i est la vitesse de sédimentation des particules de la classe i ,
- $G(M_i) = t_{si}(r_{ri} + e_{di})$.

En prenant ces valeurs, le modèle (2.2) permet de reproduire les résultats de celui de Hairsine & Rose (2.3), et donc de simuler une situation d'érosion-sédimentation avec ré-entraînement. De manière similaire, on pourrait simuler du transport chimique par comparaison avec le modèle de Gao *et al* [Gao+04] ou du charriage dans une rivière suivant le modèle de Lajeunesse *et al* [Laj+13]. Ces exemples sont illustrés dans [NB+21]

2.3 Implémentation du modèle dans le logiciel FullSWOF

Les modèles étant décrits, on s'intéresse maintenant à leur résolution numérique, et à leur implémentation dans le logiciel FullSWOF.

2.3.1 Historique de FullSWOF

Le logiciel FullSWOF (Full Shallow Water equations for Overland Flow) est développé à l'Institut Denis Poisson d'Orléans, en collaboration avec l'INRAE, depuis 2007. Il a débuté dans le cadre de la thèse d'Olivier DELESTRE [Del10], et avait initialement pour but de résoudre les équations de Saint-Venant afin de modéliser différents phénomènes d'écoulement, incluant potentiellement de la pluie ou de l'infiltration. La résolution des équations est faite via une méthode aux volumes finis, et différents choix de flux et de reconstructions sont possibles. Deux versions du logiciel existent selon que l'on souhaite considérer une ou deux dimensions horizontales (FullSWOF_1D et FullSWOF_2D). Les deux sont codés en C++, libres de

droits et disponibles sur <https://sourcesup.renater.fr/projects/fullswof-1d/> (respectivement <https://sourcesup.renater.fr/projects/fullswof-2d/>).

En 2016, lors de sa thèse, Amina Nouou-Bako [NB16] a ajouté à FullSWOF_1D la possibilité de modéliser le transport de sédiments en y intégrant le schéma correspondant aux équations (2.2). Le logiciel a ensuite été vérifié sur une solution analytique composée de deux classes de sédiments dans un flux d'eau, puis sur un certain nombre de cas tests issus de la littérature, pour s'assurer de la validité des résultats obtenus.

Lors de mon travail, visant à vérifier la capacité du logiciel à reproduire une expérience de laboratoire, je me suis rendue compte que certaines informations importantes, permettant de s'assurer de ne pas avoir d'aberrations physiques, manquaient. En particulier, la conservation de la masse de sédiments, que j'ai ajoutée, ainsi qu'un fichier permettant de connaître le flux de sédiments en sortie. Tous ces ajouts ont entraîné la sortie d'une version 2.00.00 du logiciel en mai 2021.

Connaissant le développement du logiciel et le processus d'ajout de la fonction de transfert de sédiments, on s'intéresse maintenant aux schémas numériques utilisés afin de résoudre les équations de Saint-Venant.

2.3.2 Schémas numériques

La résolution numérique des deux systèmes d'équations se fait séparément, mais en utilisant les mêmes étapes. On commence par mailler l'espace $[0, L]$ en N_x cellules $C_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times \Delta t$ centrées en x_j et de taille Δx , et le temps en posant $t^0 = 0$ et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, avec Δt pas de temps (cf Figure 2.4). On initialise ensuite les différentes variables.

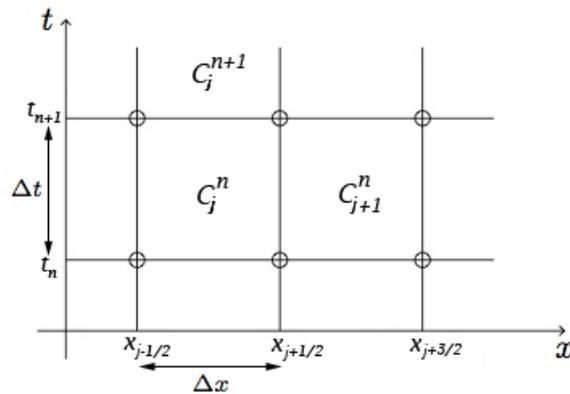


FIGURE 2.4 – Maillage de l'espace et du temps

Afin de simplifier la lecture, les schémas seront écrits pour une unique classe de sédiments, et les variables de transfert seront seulement notées c et M . Toute classe supplémentaire est traitée exactement de la même façon, et l'absence d'interaction entre les sédiments rend cette généralisation possible sans problème.

Chaque pas de temps se déroule comme suit.

2.3.2.1 Reconstruction MUSCL

On commence par appliquer aux variables h , $h + b$, q et $r = hc$ une reconstruction MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law, [Lee79]), afin d'obtenir un schéma d'ordre 2 en espace. Des fonctions affines sont donc appliquées aux différentes variables de manière à obtenir une valeur reconstruite à droite et une à gauche

de chaque interface $j + \frac{1}{2}$. On considère les fonctions *minmod* définies à deux ou trois arguments par :

$$\text{minmod}(v, \mu) = \begin{cases} \min(v, \mu) & \text{si } v, \mu \geq 0 \\ \max(v, \mu) & \text{si } v, \mu \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \text{minmod}(v, \mu, \lambda) = \begin{cases} \min(v, \mu, \lambda) & \text{si } v, \mu, \lambda \geq 0 \\ \max(v, \mu, \lambda) & \text{si } v, \mu, \lambda \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On définit alors les valeurs de h et $h + b$ reconstruites de chaque côté des interfaces en appliquant les transformations (où $s = h$ ou $s = h + b$) :

$$\begin{cases} \tilde{s}_{j-\frac{1}{2},d} = s_j - D(s_j) \\ \tilde{s}_{j-\frac{1}{2},g} = s_{j-1} + D(s_{j-1}) \end{cases}$$

où $D(s_j) = \text{minmod}\left(\frac{s_j - s_{j-1}}{2}, \frac{s_{j+1} - s_j}{2}\right)$. On retrouve ensuite b en calculant $(h + b) - h$.

Afin d'assurer la relation de conservation $q_j = \frac{q_{j-1/2,d} + q_{j+1/2,g}}{2}$, u est reconstruit légèrement différemment :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{j-\frac{1}{2},d} = u_j - \frac{\tilde{h}_{j+\frac{1}{2},g}}{h_j} D(u_j) \\ \tilde{u}_{j+\frac{1}{2},g} = u_j + \frac{\tilde{h}_{j-\frac{1}{2},d}}{h_j} D(u_j) \end{cases} .$$

Enfin, pour la concentration de sédiments dans le fluide, on utilise la fonction *minmod* à trois arguments, en posant

$$\begin{cases} \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},d} = r_j - \tilde{D}(r_j) \\ \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},g} = r_j + \tilde{D}(r_j) \end{cases}$$

où $\tilde{D}(r_j) = \text{minmod}\left(\frac{r_j - r_{j-1}}{2}, \frac{r_{j+1} - r_j}{2}, \frac{r_{j+1} - r_{j-1}}{4}\right)$. On en déduit alors $\tilde{c} = \tilde{r}/\tilde{h}$, si $\tilde{h} > 0$ (et $\tilde{c} = 0$ sinon).

Ces premières reconstructions sur nos variables nous permettent ainsi d'obtenir des schémas d'ordre 2 en espace. Plus de détails sur le choix des différentes reconstructions et leurs propriétés peuvent être trouvés dans [Del10] et [NB16].

2.3.2.2 Reconstruction hydrostatique

La reconstruction hydrostatique concerne en premier lieu les variables hydrodynamiques, et est typique lors de la modélisation des équations de Saint-Venant (voir [Aud04]). Elle permet de préserver la positivité de la hauteur d'eau, ainsi que les états d'équilibre du système, tels que le lac au repos ou les équilibres de la forme $\{h + b = cste ; u = cste\}$. On pose ainsi :

$$\begin{cases} h_{j-\frac{1}{2},d} = (\tilde{h}_{j-\frac{1}{2},d} + b_{j-\frac{1}{2},d} - \max(b_{j-\frac{1}{2},g}, b_{j-\frac{1}{2},d}))_+ \\ h_{j+\frac{1}{2},g} = (\tilde{h}_{j+\frac{1}{2},g} + b_{j+\frac{1}{2},g} - \max(b_{j+\frac{1}{2},g}, b_{j+\frac{1}{2},d}))_+ \end{cases}$$

où $(a)_+ = \max(a, 0)$.

On recalcule alors les variables q et r à partir de ce nouveau h , en écrivant $q = h\tilde{u}$ et $r = h\tilde{r}$.

2.3.2.3 Schéma aux volumes finis avec flux HLL

Maintenant que nous avons reconstruit les différentes variables afin d'avoir un schéma d'ordre 2 préservant les équilibres du système de Saint-Venant, et assurant la positivité de la hauteur d'eau, il est temps de leur appliquer le schéma numérique à proprement parler. Le flux HLL [HLL83] a été choisi, en raison de sa robustesse et de sa simplicité ([NB16], [Del10]). Les variables c et M n'intervenant pas dans le système de Saint-Venant, on utilise une méthode de *splitting*, c'est-à-dire que les systèmes seront résolus séparément. Les écritures de ces derniers vont varier très légèrement, puisque le schéma numérique pour les équations de Saint-Venant sera équilibré par un terme de flux centré.

On note avec un exposant n les variables au temps t_n (ce qui n'avait pas été fait auparavant afin de pas alourdir inutilement l'écriture). Ainsi, partant de h^n , q^n , b^n , r^n et M^n , on commence par écrire un schéma aux volumes finis avec flux HLL afin d'obtenir h , q et b au temps t_{n+1} , en se servant de leur valeur au temps t_n . Un autre schéma aux volumes finis permet ensuite de calculer r au temps t_{n+1} , toujours en se servant des valeurs au temps t_n (on ne souhaite pas impliquer le schéma, par souci de simplicité). Enfin, le calcul de M au temps t_{n+1} se fait directement au vu de l'écriture gouvernant ses variations dans le temps (2.2b), qui ne contient aucun flux.

En notant $w = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}$, on écrit donc :

$$\tilde{w}_j^{n+1} = w_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},g}^n - F_{j-\frac{1}{2},d}^n - F_{j,c}^n)$$

où :

- $F_{j,c}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_j^n \Delta b_j^n \end{pmatrix}$ avec $\Delta b_i^n = b_{j+\frac{1}{2},g} - b_{j-\frac{1}{2},d}$
- $F_{j+\frac{1}{2},g}^n = \mathcal{F}(w_{j+\frac{1}{2},g}^n, w_{j+\frac{1}{2},d}^n) + S_{j+\frac{1}{2},g}$
- $F_{j-\frac{1}{2},d}^n = \mathcal{F}(w_{j-\frac{1}{2},g}^n, w_{j-\frac{1}{2},d}^n) + S_{j-\frac{1}{2},d}$
- $S_{j+\frac{1}{2},g} - S_{j-\frac{1}{2},d} = \frac{g}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_{j+\frac{1}{2},g}^2 - h_{j+\frac{1}{2},g}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_{j-\frac{1}{2},d}^2 - h_{j-\frac{1}{2},d}^2 \end{pmatrix} \right]$

et \mathcal{F} flux HLL donné par :

$$\mathcal{F}(w_g, w_d) = \begin{cases} F(w_g) & \text{si } c_- > 0 \\ F(w_d) & \text{si } c_+ < 0 \\ \frac{c_- F(w_g) - c_+ F(w_d)}{c_+ - c_-} + \frac{c_+ c_- (w_d - w_g)}{c_+ - c_-} & \text{sinon} \end{cases}$$

où c_- et c_+ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre du système (2.1).

On obtient ainsi h et u au temps t_{n+1} . Pour obtenir r (et donc c), on effectue un procédé similaire. Par souci de cohérence, on utilise également un schéma aux volumes finis avec flux HLL et on pose donc :

$$\tilde{r}_j^{n+1} = r_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2},g}^n - F_{j-\frac{1}{2},d}^n) + \frac{\Delta t}{t_s} (G(M_j^n) - r_j^n) + S_j^{1,n}$$

avec $F_{j+\frac{1}{2},g}^n = \mathcal{F}(r_{j+\frac{1}{2},g}^n, r_{j+\frac{1}{2},d}^n)$ et $F_{j-\frac{1}{2},d}^n = \mathcal{F}(r_{j-\frac{1}{2},g}^n, r_{j-\frac{1}{2},d}^n)$. Le flux \mathcal{F} est défini comme précédemment, avec les valeurs propres associées au système (2.1).

Pour finir, on calcule M au temps t_{n+1} :

$$\tilde{M}_j^{n+1} = M_j^n - \frac{\Delta t}{t_s} (G(M_j^n) - r_j^n) + S_j^{2,n}.$$

2.3.2.4 Méthode de Heun

Afin d'obtenir un ordre 2 en temps, on applique finalement une dernière transformation à nos variables. En notant, pour toute variable s^n , \tilde{s}^{n+2} sa valeur au temps t_{n+2} obtenue en effectuant les étapes décrites précédemment, on pose

$$s^{n+1} = \frac{s^n + \tilde{s}^{n+2}}{2}.$$

2.3.3 Sorties du logiciel et conservation de la masse

Tout au long de la simulation, FullSWOF_1D sauvegarde de nombreuses informations et variables. Depuis la première version, la hauteur et de la vitesse de l'eau, ainsi que de la topographie aux temps initial, final, et à des temps intermédiaires sont conservés dans des fichiers. Les volumes de pluie et d'infiltration au cours de la simulation peuvent également être connus.

Suite à l'ajout de la fonction de transfert de sédiments, ont été ajoutés des fichiers contenant, pour chaque classe, la concentration de particules dans l'eau et dans la couche d'échange aux temps initial, final, ainsi qu'à des temps intermédiaires.

Lors de ce travail, j'ai ajouté un fichier sauvegardant le flux incrémental de sédiments sortis au cours de la simulation. Afin de m'assurer de la conservation de la masse de sédiments lors des expériences, j'ai également ajouté un calcul de cette dernière, en erreur absolue \mathcal{E}_a ainsi qu'en erreur relative \mathcal{E}_r . Celles-ci sont calculées comme suit :

$$\mathcal{E}_a = Am_0 + m_i - m_o - m_s - Am_d \text{ et } \mathcal{E}_r = \frac{\mathcal{E}_a}{Am_0 + m_i}$$

où m_0 est la masse de sédiments initialement présente dans le domaine, m_i la masse entrant dans le domaine au cours de la simulation, calculée grâce aux données entrées par l'utilisateur, m_o la masse sortie du domaine au cours de la simulation, et m_s et m_d les masses de sédiments respectivement restés en suspension dans le fluide et dans la couche d'échange au fond du bac à la fin de la simulation. La masse sortie est calculée grâce au flux de sédiments sortant de la dernière cellule physique du domaine à chaque pas de temps. Ces informations sont disponibles pour chaque classe de sédiments, ainsi que sur la masse globale de sédiments, comme on peut l'observer sur la Figure 2.5, qui représente un fichier de sortie de FullSWOF pour une simulation avec deux classes de sédiments. Sur cette figure, on différencie la masse de sédiments initialement dans le domaine, soit l'intégrale de M sur le domaine à $t = 0$, de la masse de sédiments "actifs" initialement dans le domaine, soit l'intégrale de AM sur le domaine à $t = 0$. Cette différence est essentielle, car le modèle (2.2) conserve la quantité $AM + c$. Les masses de sédiments entrantes et sortantes sont calculées comme les intégrales discrètes respectivement sur la première et dernière cellule du flux de sédiments dans l'eau c au cours de l'expérience.

```
#####
# Sediment mass conservation
#####

Sediment class: 0
Mass of sediment initially in the domain: 0
Mass of active sediment initially in the domain: 0
Mass of sediment that entered: 0.0719908
Mass of sediment that exited: 0.00226105
Mass of active deposited sediment: 0.0697298
Mass of transported sediment: 0
Absolute error on the sediment mass conservation: -2.17493e-11
Relative error on the sediment mass conservation: -3.02112e-08%

Sediment class: 1
Mass of sediment initially in the domain: 0
Mass of active sediment initially in the domain: 0
Mass of sediment that entered: 0.00799898
Mass of sediment that exited: 0.00271123
Mass of active deposited sediment: 0.00528775
Mass of transported sediment: 0
Absolute error on the sediment mass conservation: -2.43134e-11
Relative error on the sediment mass conservation: -3.03956e-07%

Sediment total:
Mass of sediment initially in the domain: 0
Mass of active sediment initially in the domain: 0
Mass of sediment that entered: 0.0799898
Mass of sediment that exited: 0.00497228
Mass of active deposited sediment: 0.0750175
Mass of transported sediment: 0
Absolute error on the sediment mass conservation: -4.60627e-11
Relative error on the sediment mass conservation: -5.75857e-08%
```

FIGURE 2.5 – Un exemple de fichier de vérification de conservation de la masse par FullSWOF_1D pour deux classes de sédiments.

2.4 Validation du modèle sur une expérience de laboratoire

Après cette présentation du logiciel permettant de résoudre les équations de Saint-Venant avec transfert, nous poursuivons notre étude en décrivant la situation que l'on tente de reproduire. Partant des paramètres mesurés lors de cette expérience, et en extrapolant ceux qui sont mal connus, on étudie la capacité du modèle à simuler les résultats obtenus en laboratoire.

2.4.1 Description de l'expérience et résultats

On s'intéresse au dépôt de sédiments induit par un écoulement d'eau de flux et hauteur constants, dans un canal horizontal. Le canal mesurait 1.9 m de long et 0.5 m de large, et avait un fond rugueux constitué de grains de sables collés (sauf au niveau de la sortie). L'eau était ajoutée à une vitesse de 73.5 L/min puis disposait d'une zone de stabilisation de 50 cm, au terme de laquelle elle avait une hauteur constante de 26 mm, et une vitesse de 9 cm/s. Des sédiments étaient alors déposés à la surface de l'eau à un débit de 0.23 ± 0.02 g/min/cm, et la zone expérimentale commençait 9 cm plus loin. Celle-ci mesurait 53 cm de long, et était suivie par une zone de 30 cm considérée comme la sortie (cf Figure 2.6).

Sachant que les sédiments avaient une densité de 2.3 g/cm et un diamètre de 100 à 200 μm , leur vitesse de sédimentation est estimée, grâce à la formule de Cheng [Che97], entre 5 et 16 mm/s. Les conditions expérimentales étaient choisies de manière à éviter le détachement des particules déposées, et des tests préliminaires ont confirmé que ce n'était en effet pas le cas. Après stabilisation du flux d'eau, l'alimentation en sédiments était activée pendant 7 minutes. L'apport était arrêté après

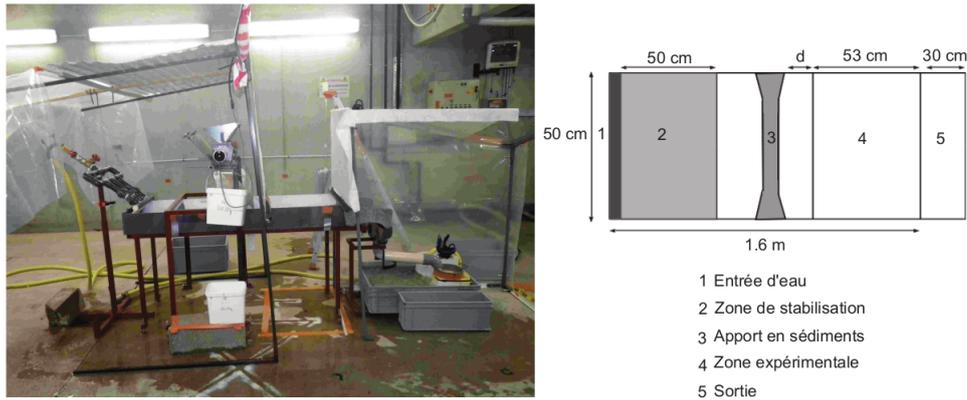


FIGURE 2.6 – Dispositif expérimental. Source : thèse de Amina Nouhou Bako [NB16]

ce temps, et l'expérience poursuivie 3 minutes supplémentaires pour permettre aux sédiments restants de se déposer ou de sortir de la zone expérimentale. Cette expérience a été répétée trois fois, et l'on pourra se reporter à [NB+22] pour plus de détails.

Tout au long de l'expérience, le flux de sédiments en sortie était mesuré, en récupérant chaque minute les sédiments ayant dépassé la zone expérimentale, puis en les séchant et en les pesant. On obtient ainsi la Figure 2.7A, où l'on a tracé le flux de sédiments en sortie dans le domaine pour les trois expériences. On peut constater que le flux de sédiments augmente très légèrement entre la première et la deuxième minute, puis reste constant durant toute la durée de l'apport. Au bout de 7 minutes, lorsque l'apport est coupé, le flux de sédiments en sortie diminue drastiquement, et finit par devenir nul.

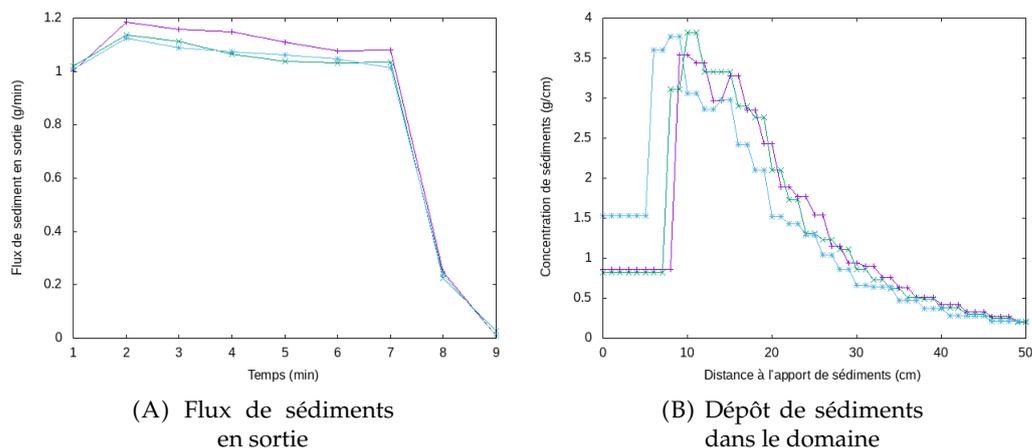


FIGURE 2.7 – Résultats des expériences de laboratoire.

De la même façon, à la fin de l'expérience, les sédiments déposés (cf la photo prise à la fin de l'expérience en Figure 2.8) ont été récoltés en bandes de 2 à 6 cm, puis séchés et pesés. Ces mesures, moyennées sur l'intervalle de prélèvement, ont permis de donner la courbe de dépôt de sédiments présente en Figure 2.7B. On constate tout d'abord une très faible quantité de sédiments déposés, suivie d'un pic vers 10-15 cm, puis d'une lente décroissance de la masse. Ce plateau initial est dû au fait que les particules sont déposées à la surface de l'eau, une certaine distance est donc



FIGURE 2.8 – Dépôt de sédiments (en rouge) au fond du bac expérimental après 10 minutes d'expérience. Source : thèse de Amina Noughou Bako [NB16]

nécessaire aux particules transportées par le flux d'eau pour atteindre le fond du domaine. En moyenne sur les trois expériences, 69.31 g sont déposés au fond du bac et 7.81 g sont sortis à l'exutoire, 96% des sédiments introduits dans le domaine étant recueillis.

2.4.2 Paramètres de la simulation

Afin d'utiliser le logiciel FullSWOF_1D pour résoudre à la fois les équations de transfert et les équations de Saint-Venant, un certain nombre de paramètres doivent être fixés. On soulignera le fait que, dans un premier temps, les paramètres physiques ne sont pas calibrés pour obtenir la meilleure correspondance possible, mais mesurés lors de l'expérience, ou pris dans la littérature. Pour la partie hydrodynamique, il nous suffit, pour reproduire l'expérience, de choisir une condition initiale avec une hauteur d'eau constante $h_0 = 26\text{mm}$ et une vitesse constante $u_0 = 9\text{cm/s}$, et d'imposer la hauteur d'eau sur les bords du domaine.

Afin de reproduire le fond rugueux de l'expérience, on souhaite également ajouter une loi de frottement au fond du bac. Afin de simplifier l'étude, nous ne considérons pas ce point dans un premier temps. Le fond rugueux ayant pour objectif d'empêcher un arrachement des particules déposées, on surveille à la fin des expériences la quantité de particules ré-entraînées afin de vérifier que les conditions d'études sont similaires. Cette dernière étant nulle dans toutes les simulations, et la loi de frottement n'ayant pas d'influence sur le transfert de sédiments, on considère nos résultats satisfaisants. Dans un second temps, afin d'améliorer la simulation, on place au fond du bac une loi de frottement de Manning (voir section 2.4.5).

Pour les variables de concentration, d'autres paramètres sont nécessaires. Tout d'abord il nous faut choisir le coefficient A , la fonction d'échange G_i et le temps de relaxation t_{s_i} dans les équations (2.2). Le modèle de Hairsine & Rose étant assez proche de la situation que l'on cherche à simuler, on pose $A = 1$, $t_{s_i} = h/v_i$ où v_i est la vitesse de sédimentation, et G_i fonction identiquement nulle. Les termes sources sont également nuls. Ces deux derniers points sont dus au fait que, comme

signalé plus tôt, les paramètres expérimentaux sont choisis spécifiquement pour éviter l'arrachage de particules déposées : dans les équations (2.3), on a donc $r_i = r_{ri} = e_i = e_{di} = 0$. Au vu de leurs écritures respectives en fonction de ces paramètres, les termes sources et la fonction d'échange sont donc naturellement nuls. Il reste alors à connaître la vitesse de sédimentation des particules, qui a été estimée entre 5 et 16 mm/s, comme nous l'avons dit plus haut, ainsi que de leur répartition au sein de cette gamme, qui n'a pas été mesurée et pour laquelle des tests et des ajustements seront nécessaires. Initialement, il n'y a aucun sédiment dans le domaine, que ce soit dans l'eau ou dans la couche d'échange.

Un point important doit maintenant être souligné. Dans les équations de transfert (2.2), la concentration de sédiments dans le fluide est, en tout temps et en tout point du domaine, uniforme sur la hauteur de l'eau. C'est en particulier le cas à l'entrée du domaine, où les sédiments sont introduits de manière homogène sur la hauteur. Dans l'expérience, au contraire, les particules sont déposées à la surface de l'eau, 9 cm avant le début du domaine expérimental. Si cet espace leur a permis de se répartir légèrement dans la hauteur de l'eau, elles n'ont malgré tout, dans le cadre de l'expérience, pas une répartition uniforme. Cela induit un retard dans le début du dépôt expérimental de sédiments, que l'on peut constater en Figure 2.7B (le plateau initial évoqué précédemment) et qui n'est pas présent dans la simulation. Afin de compenser cette différence, une translation des résultats numériques par rapport aux résultats expérimentaux est nécessaire, nous discuterons plus en détail de ce point par la suite.

2.4.3 Comparaison des résultats : influence de la vitesse de sédimentation

Comme nous l'avons expliqué précédemment, notre but est de comparer les simulations numériques aux résultats expérimentaux. Dans les deux cas, il n'y a, à la fin, plus de sédiments dans l'eau : tous se sont déposés au fond, ou sont sortis du domaine. Les données hydrodynamiques ne sont pas présentées ici, puisqu'elles sont exactement conformes à ce que l'ont attendait (*i.e.* la hauteur et la vitesse de l'eau restent constantes en tout temps et en tout point du domaine). De même, les simulations numériques conservent la masse de sédiment avec une erreur relative de l'ordre de 10^{-8} dans toutes nos expériences, et ne sera donc pas précisée à chaque simulation.

On compare donc uniquement ci-dessous les flux de sédiments sortant du domaine au cours du temps (Figures 2.10, 2.12, 2.14, 2.16) ainsi que le profil de dépôt des sédiments dans le domaine à la fin de l'expérience (Figures 2.9, 2.11, 2.13, 2.15). On rappelle que, du fait de la différence dans l'apport de sédiments, une translation des résultats numériques est nécessaire. Celle-ci est choisie arbitrairement pour chaque simulation, selon ce qui semble, à vue d'œil, donner les meilleurs résultats. Par ailleurs, et comme nous l'avons signalé précédemment, la distribution des particules au sein de la gamme de vitesse de sédimentation possible n'est pas connue : il nous faut donc commencer par quelques tests préliminaires afin de choisir cette distribution.

2.4.3.1 Choix de la répartition des vitesses de sédimentation

Les vitesses de sédimentation des particules sont réparties entre 5 et 16 mm/s, pour des particules de diamètre compris entre 100 et 200 μm . On ignore cependant la répartition des sédiments dans cette gamme de diamètres (et donc de vitesses), et on

peut donc choisir cette dernière de multiples façons. Afin de déterminer quelle répartition permet de mieux reproduire les résultats attendus, tant au niveau du dépôt de sédiments que du flux de sortie, on commence par tester séparément différentes vitesses de sédimentation. Plus précisément, on réalise plusieurs expériences pour lesquelles on considère que les sédiments ont tous la même taille, et donc la même vitesse de sédimentation.

On peut commencer par remarquer, sur la Figure 2.9, que le plateau initial lors des expériences n'est pas du tout reproduit par la simulation, ce qui est cohérent étant donné que ce plateau est dû à l'apport de sédiments à la surface de l'eau, phénomène non reproduit dans la simulation. Nous sommes donc incapables de reproduire le comportement des sédiments sur les 15 premiers centimètres du domaine, et sommes obligés de translater les résultats simulés pour compenser ce retard dans le dépôt. On effectue ainsi une translation de 7 cm des résultats de FullSWOF avec transfert, faite a posteriori. Le "bac expérimental" numérique est alors décalé de 7 cm vers la droite par rapport à l'expérience de laboratoire. Les courbes de la simulation sont donc prolongées par rapport aux courbes expérimentales, et il y a un léger manque dans le flux de sortie, le point de mesure étant décalé de 7 cm vers la droite. Cela suffit cependant pour nous donner l'allure générale des courbes.

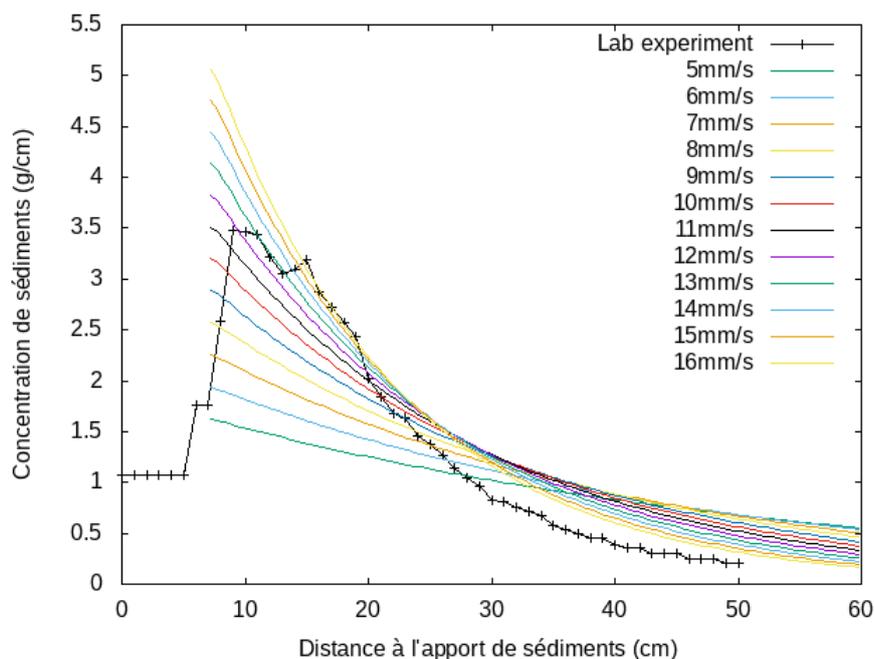


FIGURE 2.9 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min, pour les expériences de laboratoire et pour différentes vitesses de sédimentation entre 5 et 16 mm/s, avec un décalage de 7 cm pour les résultats de FullSWOF avec transfert.

Sur la Figure 2.9, on voit que la vitesse de sédimentation a une grande influence sur la courbure du dépôt, mais qu'aucune ne permet vraiment d'obtenir des résultats satisfaisants : si la pente entre 15 et 20 cm est bien reproduite par les plus grandes vitesses, le reste de la courbe est assez éloigné de l'expérience. En Figure 2.10, on remarque que le flux de sortie a toujours la même allure, très similaire à celui de l'expérience en laboratoire (cf Figure 2.7A), la vitesse de sédimentation influençant seulement la hauteur d'eau. Pour les grandes vitesses, qui donnaient le dépôt le plus

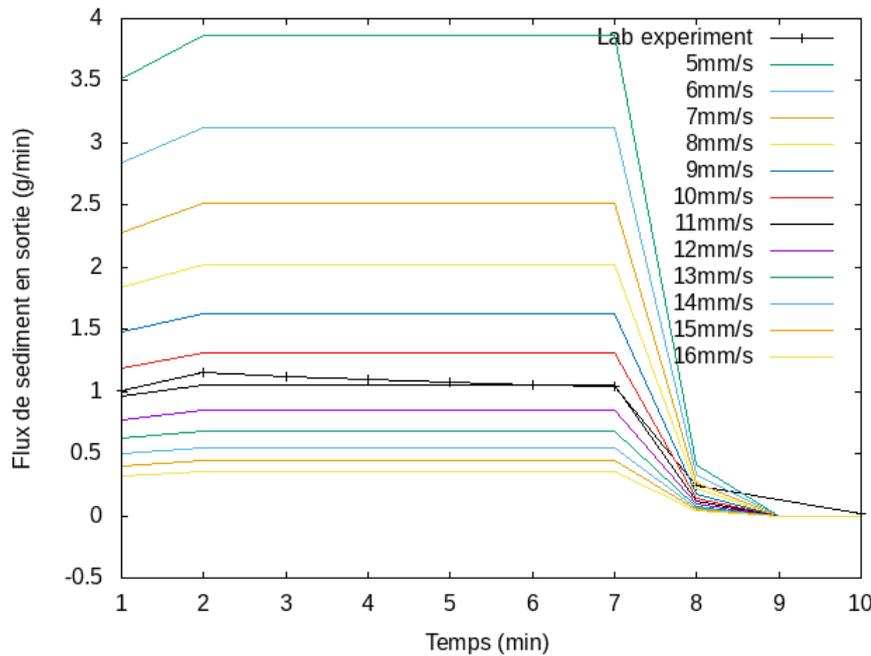


FIGURE 2.10 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps, pour les expériences de laboratoire et pour différentes vitesses de sédimentation entre 5 et 16 mm/s.

proche de l'expérience, on est loin d'avoir des valeurs satisfaisantes du flux de sédiments en sortie (moins de 50% du flux mesuré). Aucune vitesse de sédimentation, donc aucun choix de taille de sédiments, ne permet de reproduire l'expérience.

Les vitesses individuelles ne donnant pas des résultats comparables aux résultats expérimentaux, à la fois pour le dépôt et pour le flux de sortie, on tente différentes distributions de vitesses. On choisit les plus courantes, soit une répartition uniforme et une répartition gaussienne (pour 12 classes équiréparties dans l'intervalle de vitesses 5-16 mm/s), ainsi que des moyennes pondérées des deux vitesses extrêmes, avec différents poids (voir annexe A pour les paramètres d'entrée de FullSWOF). L'étude précédente nous ayant montré que les grandes vitesses reproduisent mieux l'expérience, on place un poids de 1 pour la vitesse minimale de 5 mm/s, et un poids de 2, 5 ou 9 pour la vitesse maximale de 16 mm/s. La translation est ici ajustée pour chaque répartition. On a donc choisi, en Figure 2.11, un décalage de 7 cm pour les ratios 1 pour 5 et 1 pour 9, de 8 cm pour le ratio 1 pour 2, et de 9 cm pour les répartitions gaussiennes et uniformes.

Sur la Figure 2.11, on peut voir que l'allure générale de la courbe expérimentale est assez mal reproduite par les répartitions gaussiennes et uniformes, mais relativement bien approchée par les moyennes pondérées, en particulier celles ayant un rapport de 1 pour 5 et 1 pour 9. En ce qui concerne les flux de sédiments en sortie, tracés en Figure 2.12, ces deux dernières ont aussi des résultats relativement satisfaisants. Il est à noter qu'un très léger manque dans le flux en sortie est créé par le décalage *a posteriori* du bac expérimental numérique (créant un bac plus long que le bac expérimental, et une sortie d'autant plus éloignée). Dans la suite, ce décalage sera pris en compte lors de la simulation, et le bac raccourci d'une distance correspondant au décalage, afin de compenser pour cette différence et faire se correspondre les sorties expérimentales et numériques. Bien que la pente du dépôt soit très légèrement meilleure pour le ratio de 1 pour 9, le rapport de 1 pour 5 semble

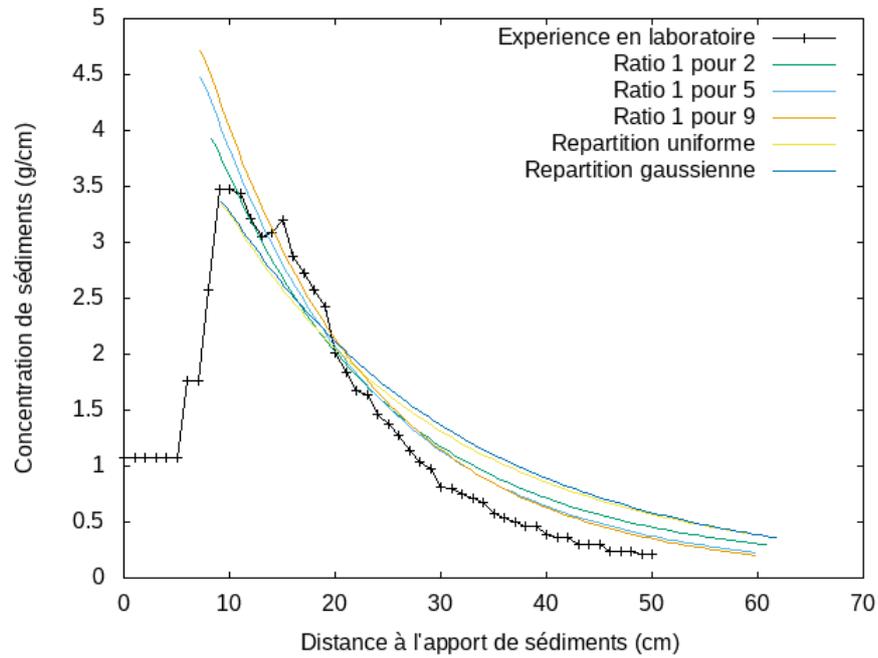


FIGURE 2.11 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min pour les expériences de laboratoire et pour différentes distributions des vitesses de sédimentation entre 5 et 16 mm/s, avec un décalage de 7 cm pour les ratios 1 pour 5 et 1 pour 9, de 8 cm pour le ratio 1 pour 2, et de 9 cm pour les répartitions gaussiennes et uniformes, pour les résultats de FullSWOF avec transfert.

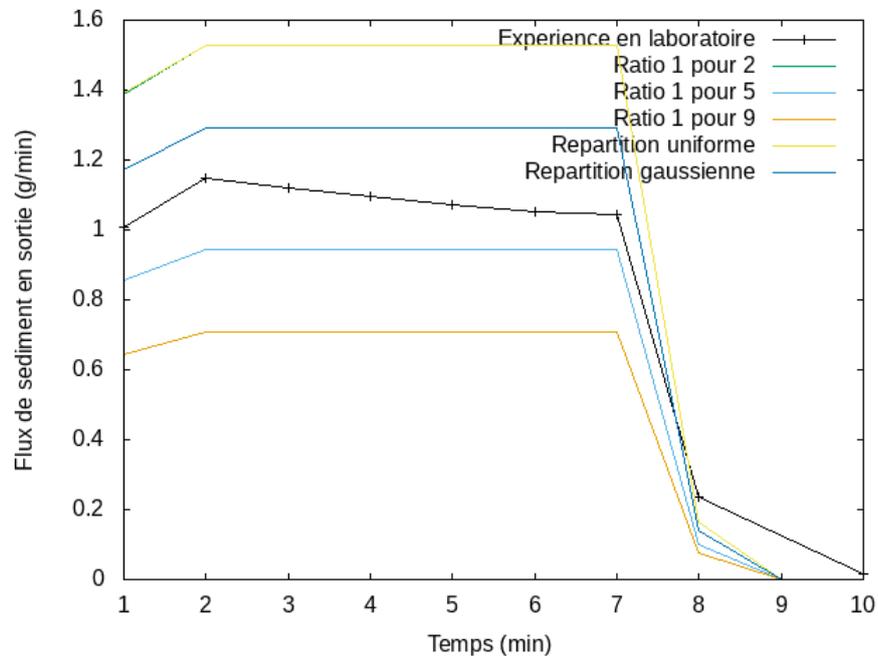


FIGURE 2.12 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps, pour les expériences de laboratoire et pour différentes distributions des vitesses de sédimentation entre 5 et 16 mm/s.

permettre des meilleurs résultats dans l'ensemble, et c'est donc cette répartition que l'on considérera par la suite afin de reproduire l'expérience.

2.4.3.2 Gamme réduite des vitesses de sédimentation

Grâce aux tests préliminaires, nous avons donc pu constater que les résultats semblent être les plus proches des expériences en prenant un ratio de 1 pour 5 des deux vitesses extrêmes, c'est-à-dire en plaçant dans le mélange en entrée un sixième de particules ayant une vitesse de sédimentation de 5 mm/s, et cinq sixièmes de particules ayant une vitesse de sédimentation de 16 mm/s. C'est la configuration utilisée pour obtenir les Figures 2.13 et 2.14. La translation de la courbe est cette fois prévue antérieurement à la simulation, puisque estimée grâce aux tests préliminaires, ce qui permet d'avoir des dépôts se finissant au même point, ainsi qu'un meilleur calcul des flux en sortie. De plus, la translation est ici seulement de 5 cm, car cette valeur semblait correspondre le mieux pour cette courbe. Cela explique en particulier les différences de valeurs entre les Figures 2.12 et 2.14. Nous avons également représenté, sur les Figures 2.13 et 2.14, les résultats des 3 répétitions de l'expérience plutôt que de ne garder que leur moyenne. Cela permet de mieux se rendre compte de la variabilité des résultats.

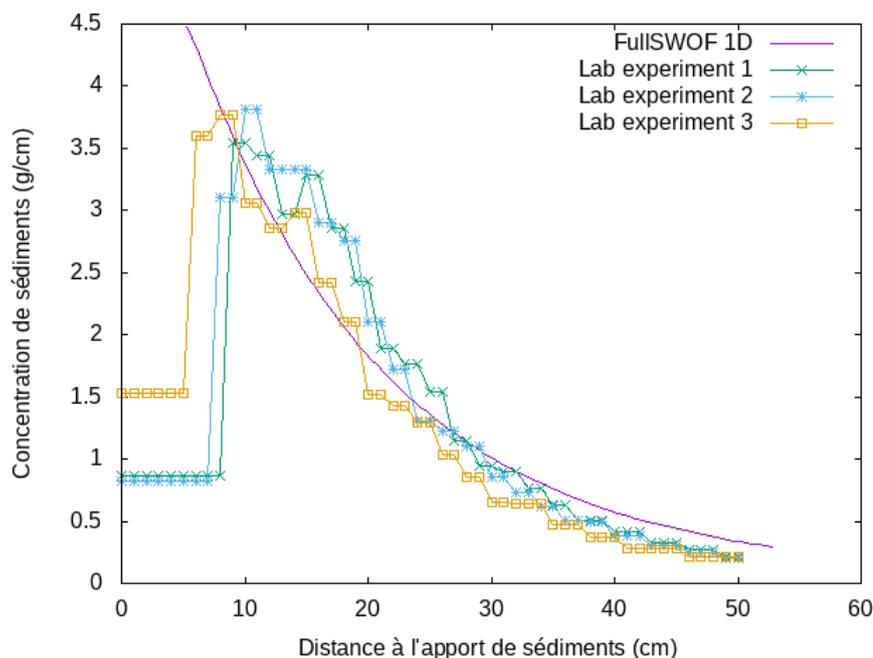


FIGURE 2.13 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min pour les expériences de laboratoire et pour une simulation avec des vitesses de sédimentation de 5 et 16 mm/s et un ratio respectif de 1 pour 5, avec un décalage de 5 cm.

Sur le graphique 2.13, on peut observer le dépôt de sédiments au sein du domaine après 10 minutes, pour les trois expériences ainsi que pour la simulation numérique donnée par FullSWOF_1D. La translation est ici choisie, arbitrairement, avec une valeur de 5 cm (car celle-ci semble permettre les meilleurs résultats sur les deux graphes). Contrairement aux Figures 2.9 et 2.11, on a réduit la longueur du bac expérimental de façon à ce que les sorties expérimentales et numériques coïncident. Une fois ces paramètres pris en compte, on peut constater que l'allure générale des courbes expérimentales est assez bien reproduite par la simulation numérique, même si la courbe du dépôt des sédiments aurait besoin d'être un peu plus creuse afin d'être au plus proche de celle de l'expérience. Finalement, malgré ces différences, la masse totale de sédiments déposés lors de la simulation numérique reste

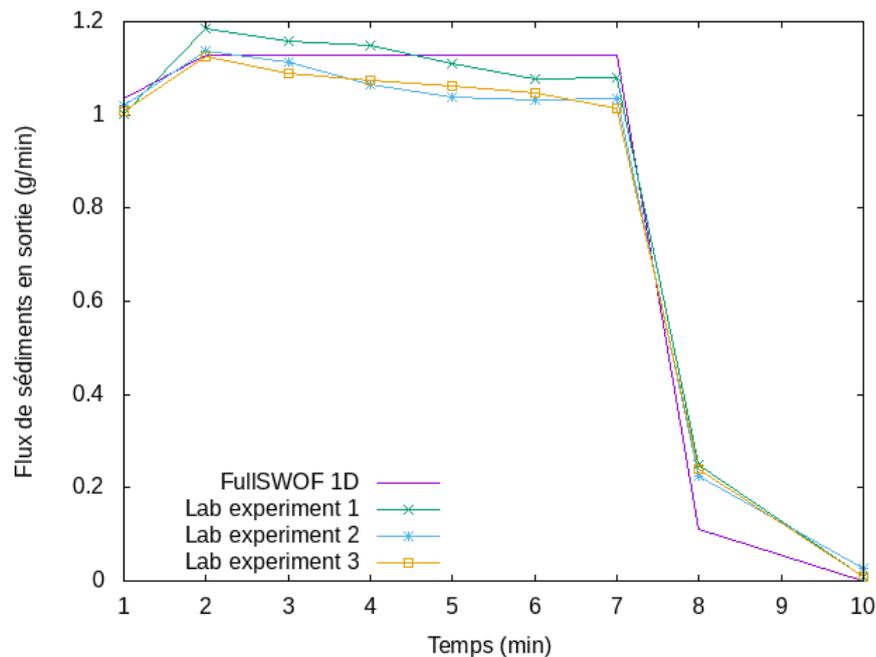


FIGURE 2.14 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps pour les expériences de laboratoire et pour une simulation avec des vitesses de sédimentation de 5 et 16 mm/s et un ratio respectif de 1 pour 5.

cohérente avec celle mesurée lors des expériences, avec 71 g dans le premier cas, et une moyenne de 69,31 g dans le second (avec une perte de 2.8 g dans les mesures).

Sur la Figure 2.14, on peut observer le débit de sédiments sortants du domaine en fonction du temps. Bien que FullSWOF_1D donne des valeurs numériques très légèrement inférieures à celles de l'expérience à la fin du domaine, la forme générale de la courbe est exactement celle attendue. De plus, cette différence de masse est consistante avec le fait qu'un peu plus de sédiments (1 g) sont déposés à l'intérieur du domaine lors de la simulation numérique.

2.4.3.3 Gamme étendue de vitesses de sédimentation

Bien que les résultats précédents soient satisfaisants, il semble naturel de se demander s'ils ne pourraient pas être améliorés en relâchant certaines contraintes, en particulier les vitesses de sédimentation qui n'ont pas été mesurées, mais estimées avec l'aide de la littérature. Dans la suite, on s'autorise donc à considérer une gamme plus étendue de vitesses de sédimentation, mais en utilisant à chaque fois une unique classe de sédiments en entrée. Le dernier paramètre restant à déterminer est alors le décalage spatial des résultats, choisi comme celui donnant, visuellement, les meilleurs résultats parmi différentes valeurs testées. On simule le dépôt et le flux en sortie de particules ayant des vitesses de sédimentation comprises entre 10 et 30 mm/s (Figures 2.15 et 2.16). Afin de ne pas surcharger les figures, les résultats des simulations sont comparés à la moyenne des trois expériences de laboratoire.

Les profils des dépôts et des flux de sorties de sédiments sont conformes à ce que l'on attend. En effet, lorsque la vitesse de sédimentation augmente, la distance parcourue par les sédiments diminue et de plus en plus de sédiments sont déposés près de l'entrée du domaine, ce qui entraîne une pente plus raide en Figure 2.15.

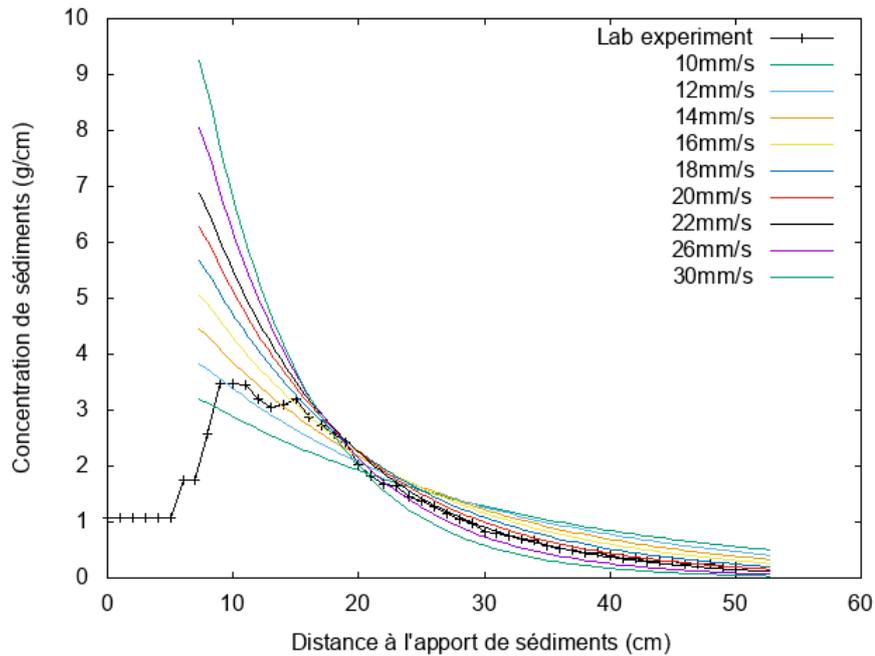


FIGURE 2.15 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min pour les expériences de laboratoire moyennées et pour une simulation avec différentes vitesses de sédimentation, avec un décalage de 6 cm pour les résultats de FullSWOF avec transfert.

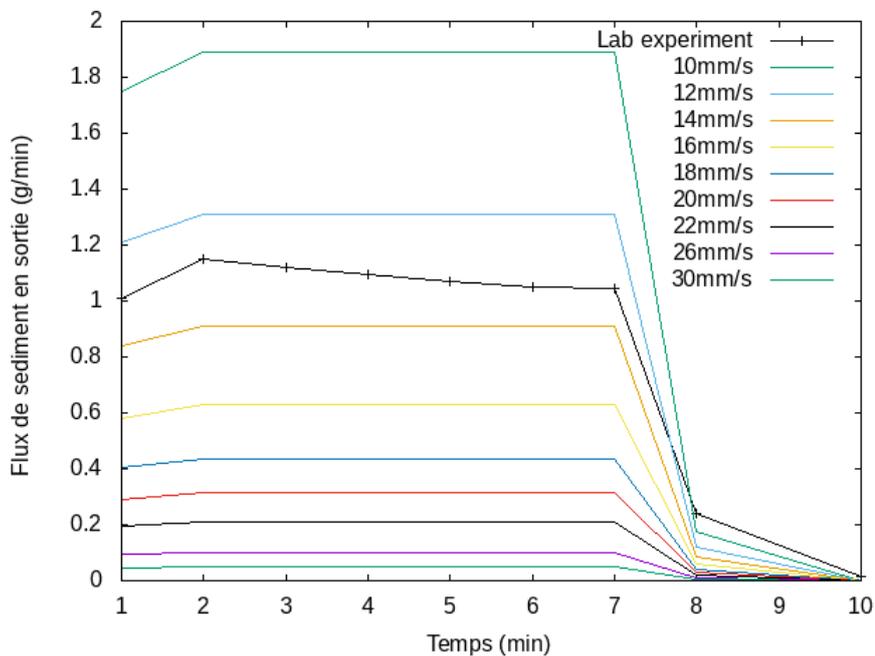


FIGURE 2.16 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps, pour les expériences de laboratoire moyennées et pour des simulation avec différentes vitesses de sédimentation.

Ainsi, de moins en moins de sédiments atteignent la sortie du domaine, ce qui a pour conséquence un flux en sortie moins important en Figure 2.16.

Ces deux graphes illustrent très clairement la nécessité de calibrer la répartition

des différentes vitesses de sédimentation dans le flux d'entrée. Ainsi, une vitesse de sédimentation de 22 mm/s semble être le meilleur choix pour le dépôt en Figure 2.15, tandis que le flux de sortie en Figure 2.16 serait plus proche de l'expérience pour une vitesse plus faible, aux alentours de 13 mm/s. Aucune valeur unique de vitesse de sédimentation, même hors de la gamme théorique et quel que soit le décalage choisi, ne permet de reproduire parfaitement l'expérience. Pour obtenir les meilleurs résultats possibles, il faut donc introduire dans le domaine un mélange de vitesses approprié, permettant de s'approcher au mieux de l'allure générale ainsi que des valeurs des deux graphes.

2.4.4 Comparaison des résultats : influence de la condition de bord en sortie

Dans la section 2.4.3, nous avons présenté des résultats obtenus en imposant la hauteur d'eau en sortie du bac expérimental. La topographie réellement utilisée dans l'expérience forme une bosse à la suite du bac expérimental, comme on peut le voir en Figure 2.17, qui représente une vue schématique du dispositif.

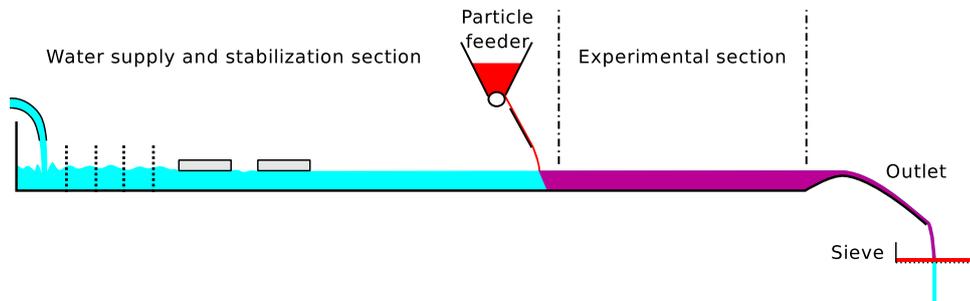


FIGURE 2.17 – Vue schématique du dispositif expérimental.

La zone de sortie, à la fin du bac expérimental, est composée d'une bosse, lisse et ajustable, qui permet de fixer la hauteur d'eau dans le bac à une valeur choisie. Nous allons étudier si cette forme a une influence sur les résultats.

Pour représenter la topographie expérimentale, nous choisissons la fonction :

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 53[\\ (4 - (0.5x - 28.5)^2) \frac{h}{4} & \text{si } x \in [53, 63]. \end{cases}$$

Pour introduire un décalage dec , on utilisera la topographie $b(x - dec)$ en un point x , exprimé en cm.

On choisit une condition de Neumann en sortie du domaine ainsi "agrandi", ce qui correspond à une sortie libre. Enfin, la hauteur de la bosse n'ayant pas été mesurée expérimentalement, nous choisissons la valeur de h permettant de garder une hauteur d'eau et un débit constants dans le domaine : on fixe $h = 12.8196$ cm.

Dans la section 2.4.3, nous avons vu que le ratio de 1 pour 5 avec les vitesses 5 mm/s et 16 mm/s respectivement donnait de bons résultats (Figure 2.13). Nous allons donc reprendre cette expérience et comparer les résultats avec les deux conditions de bord différentes. Ainsi, sur la Figure 2.18, nous avons superposé la concentration de sédiments calculée en imposant la hauteur d'eau à droite, et les valeurs obtenues en ajoutant la zone de sortie expérimentale.

Notons qu'on ne peut pas tracer simplement le flux de sédiments en sortie du bac expérimental à partir des résultats de FullSWOF, puisque seules les valeurs aux

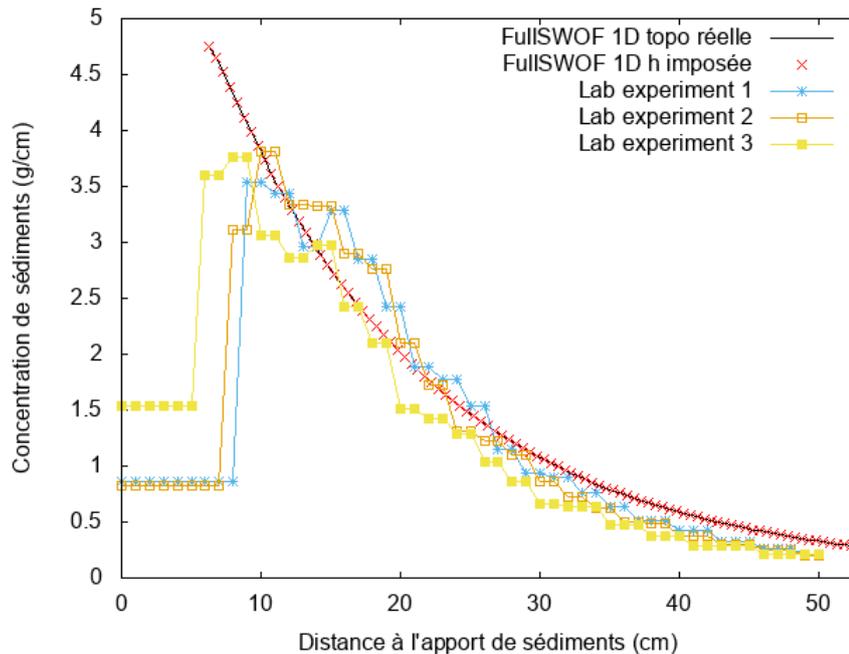


FIGURE 2.18 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min pour des simulations avec et sans zone de sortie expérimentale avec un décalage de 5 cm, et les expériences de laboratoire.

bords du domaine sont sauvegardées. Il est donc nécessaire de modifier le code¹ pour avoir des valeurs au même point (à 53 cm), et obtenir la Figure 2.19.

Nous avons également testé d'autres choix de vitesses : nous constatons, comme sur les Figures 2.18 et 2.19, qu'il n'y a pas de différence entre fixer la hauteur d'eau à droite de la zone expérimentale et utiliser une sortie libre avec la vraie topographie en sortie. Les résultats de la section 2.4.3 restent donc valables dans notre configuration expérimentale.

2.4.5 Résultats complets : ajout du frottement au fond du bac

Pour obtenir les résultats des sections 2.4.3 et 2.4.4, nous avons pris un coefficient de frottement n nul. Cependant, le fond du bac expérimental est rugueux, composé de grains de sables collés pour éviter que les sédiments ne se redétachent. Ainsi, pour vraiment représenter l'expérience, nous devons tenir compte du frottement au fond². Nous avons choisi un coefficient de Manning $n = 0.01$. Avec un tel frottement, l'écoulement n'est plus stationnaire (homogène en espace) mais nous arrivons à reproduire un état d'équilibre assez proche de l'état stationnaire sans frottement.

Nous pouvons à nouveau nous intéresser à la concentration de sédiments au fond du bac (Figure 2.20) et au flux de sédiments à la sortie de la zone expérimentale (Figure 2.21). Nous avons gardé le choix du ratio à 1 pour 5 pour les vitesses de 5 mm/s et 16 mm/s respectivement.

Sur la Figure 2.20, nous avons utilisé un décalage de 4 cm, contre 5 cm pour les expériences sans frottement, et le même choix de vitesses de sédimentation. La

1. Dans le fichier `libtransfer/libschemas_concentrations/scheme_conc.cpp`, on modifie le calcul de `sedmass_out` pour ne pas considérer le flux de sédiments sur la dernière cellule mais sur une cellule choisie.

2. Expérimentalement, la bosse est lisse : nous devrions donc prendre un coefficient de frottement différent. La version 1D de FullSWOF ne permet cependant pas la spatialisation du frottement.

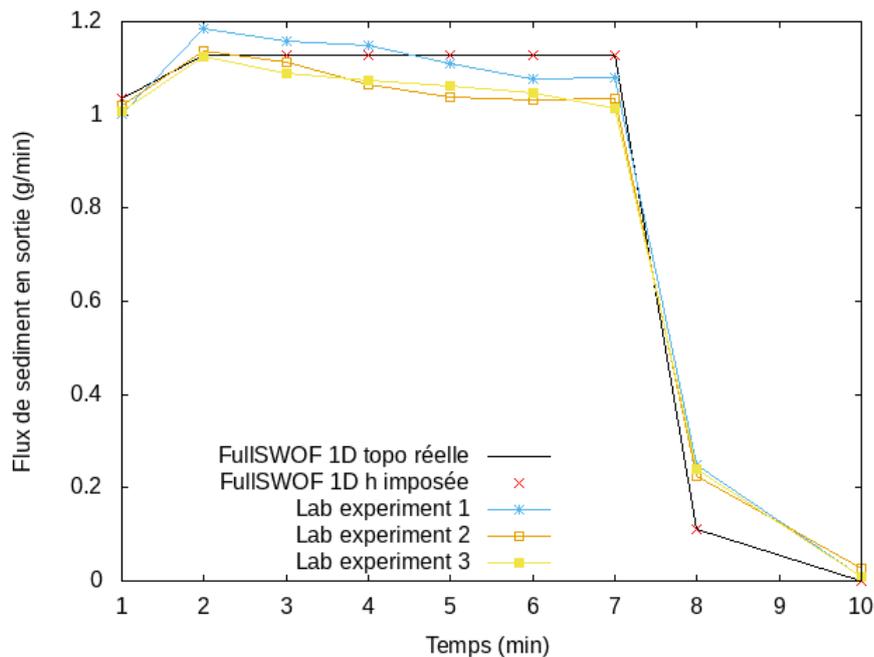


FIGURE 2.19 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps, pour des simulations avec et sans zone de sortie expérimentale, et les expériences de laboratoire.

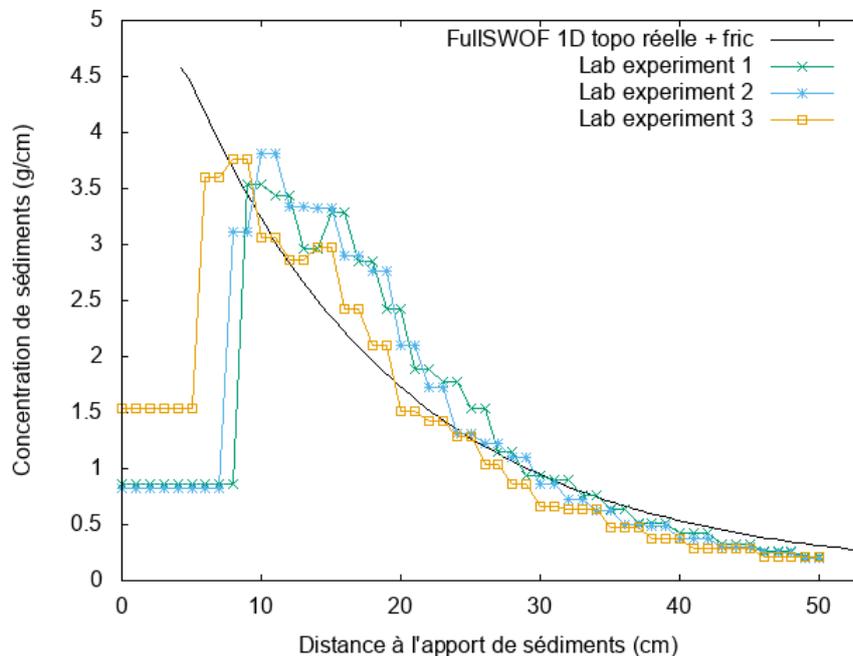


FIGURE 2.20 – Dépôt de sédiments dans le domaine à $t = 10$ min pour les expériences de laboratoire et les simulations avec frottement de Manning au fond, avec un décalage de 4 cm et un ratio à 1 pour 5 pour les vitesses de 5 mm/s et 16 mm/s respectivement.

rugosité agit en effet comme un frein et les particules se déposent un peu moins loin que sur un fond lisse.

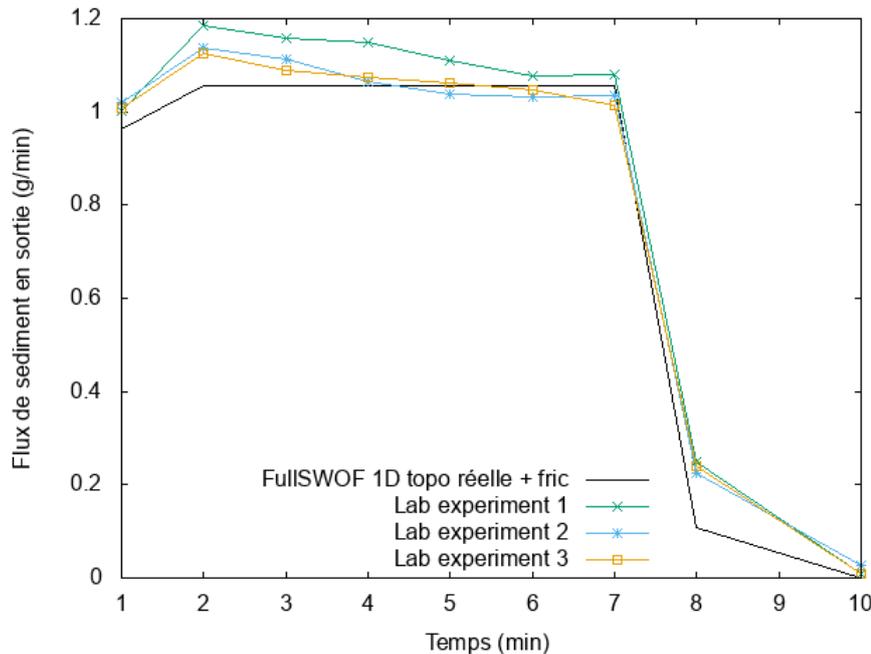


FIGURE 2.21 – Flux de sédiments en sortie en fonction du temps, pour les expériences de laboratoire et les simulations avec frottement de Manning au fond et un ratio à 1 pour 5 pour les vitesses de 5 mm/s et 16 mm/s respectivement.

Sur les Figures 2.20 et 2.21, nous constatons que l'expérience est assez bien reproduite. L'ajout du frottement a tendance à changer légèrement la pente sur la concentration au fond du bac et fait diminuer la quantité de sédiments en sortie de la zone expérimentale.

Ce choix des valeurs des paramètres permettent de bien coller aux expériences de laboratoire en utilisant la résolution numérique programmée dans FullSWOF.

2.4.6 Améliorations possibles du modèle

Le choix d'écrire la concentration de sédiments dans l'eau comme une fonction ne dépendant que de la distance horizontale, et non de la hauteur, montre ici des limites et induit la nécessité d'ajustements. En effet, et comme nous en avons parlé précédemment, la concentration de particules n'est pas homogène sur la hauteur de la lame d'eau, dans les expériences de laboratoire. La conséquence de cette distinction est très visible sur les figures, puisque les pics de dépôts ne sont pas superposés, et donc difficilement comparables, sans la translation d'un des deux graphes.

Pour améliorer le modèle et représenter correctement le pic de dépôt sans recourir à un décalage de courbe, il serait possible d'introduire une dépendance verticale de la concentration de sédiments dans l'eau c . En connaissant simplement le profil de répartition a priori des sédiments, une telle dépendance pourrait être obtenue à partir des valeurs moyennes déjà obtenues par la simulation.

Une autre approche serait de revoir entièrement la modélisation du flux, soit en utilisant les équations de Navier-Stokes [Sto51], soit en utilisant un modèle de Saint-Venant multicouche [Aud+11]. Ainsi, la vitesse de l'eau varierait avec l'altitude, et, en modifiant le système (2.2), la concentration de sédiments pourrait faire de même, de manière à mieux correspondre à la situation expérimentale.

2.5 Conclusion

En utilisant le modèle de transfert couplé aux équations de Saint-Venant, et le logiciel FullSWOF_1D, nous avons donc été capables de reproduire les résultats obtenus lors des expériences de laboratoire. Les dépôts au fond du bac à la fin de l'expérience et les flux de sédiments en sortie au cours du temps coïncident avec leurs homologues expérimentaux en utilisant uniquement les données expérimentales, presque sans aucune calibration. Cependant, l'utilisation d'un modèle de Saint-Venant monocouche induit la nécessité d'un léger ajustement spatial pour améliorer l'adéquation des résultats ; ceci est dû à la non-homogénéité de la répartition des sédiments en hauteur dans les expériences, et qui ne peut pas être prise en compte ou reproduite par les simulations.

Afin d'améliorer les résultats, il semblerait donc nécessaire d'introduire une dépendance en z de la concentration c de sédiments dans l'eau, et d'utiliser éventuellement un autre modèle que Saint-Venant pour simuler la partie hydrodynamique, telles que les équations de Navier-Stokes [Sto51], comme dans le logiciel Gerris [Pop09], ou en considérant un modèle de Saint-Venant multicouche [Aud+11]. Une rétroaction du dépôt de sédiments sur le flux d'eau, via la prise en compte de l'épaisseur de la couche d'échange dans la topographie des équations de Saint-Venant (2.1) pourrait aussi permettre d'améliorer les simulations, surtout dans le cas où le dépôt n'aurait pas une hauteur négligeable. L'étude de cas tests supplémentaires serait également très intéressante, car cela permettrait de mieux comprendre les capacités et les limites du modèle dans le cadre de la prédiction de phénomènes naturels. Enfin, l'extension de ce modèle en deux dimensions horizontales, et son implémentation dans FullSWOF_2D permettrait d'augmenter la plage d'utilisations possibles.

Chapitre 3

Détermination d'un schéma entropique et préservant l'équilibre géostrophique pour les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis

3.1 Introduction

Dans le cadre d'études d'eaux peu profondes, beaucoup de travaux ont été dédiés à l'amélioration de schémas numériques autour de l'équilibre du lac au repos, comme on peut le voir dans [Ber+20]. Ces travaux sont la continuation d'études, durant les 20 dernières années, de l'exactitude de schémas numériques pour des systèmes hyperboliques avec termes sources autour de solutions stationnaires ou de régimes asymptotiques. On pourra par exemple citer les travaux de [BVC94], [GL96] et [Jin99] dans les années 90, et les livres [Bou04] et [Gos13] quelques années plus tard. Dans le cas du système de Saint-Venant avec force de Coriolis (voir [Cor32] et [Cor35]), les états stationnaires d'intérêt sont les équilibres géostrophiques, et les schémas aux volumes finis classiques (tels que ceux de type Godunov, voir par exemple [God59]) ne sont pas exacts autour de telles solutions, comme montré dans [Aud+18] et [Do17]. Les premières recherches concernant l'exactitude de schémas numériques autour des équilibres géostrophiques ont été conduites, à notre connaissance, par Bouchut, Le Sommer et Zeitlin [Bou04] (voir aussi [CALP08] et [Che+18]), mais ces schémas n'étaient entièrement exacts que pour des flux unidimensionnels, comme on peut le voir dans [Aud+18]. Récemment, deux travaux, [PV16] et [Zak17], ont proposé des schémas implicites-explicites exacts pour les équilibres géostrophiques, mais nécessitant, du fait de la partie implicite, la résolution d'une équation de Laplace à chaque pas de temps. On notera qu'il existe également de nombreux travaux traitant de l'approximation du terme de Coriolis dans des schémas sur grilles décalées, tels que [Thu+09] dans le cas linéaire, et [Rin+10] pour le non-linéaire.

On s'intéresse dans ce chapitre au développement d'un schéma numérique aux volumes finis colocalisé permettant de préserver au mieux ces équilibres géostrophiques, tout en préservant une inégalité d'énergie semi-discrète. Les idées présentées dans [Aud+18] ont servi de base pour notre travail, puisqu'un tel schéma était développé pour le cas du système de Saint-Venant linéarisé avec force de Coriolis. Cependant, comme nous allons le voir par la suite, le passage au système non-linéaire nécessite de nombreux changements.

Ce travail a été initié dans le cadre du CEMRACS 2019, en collaboration avec Virgile Dubos et Youssouf Nasser, sur un sujet proposé par Emmanuel Audusse, Arnaud Duran et Yohan Pennel. Après une présentation générale des équations étudiées et des difficultés rencontrées avec les schémas aux volumes finis classiques, nous commencerons notre étude, et aboutirons à deux schémas préliminaires. Cette partie présentera ainsi le travail fait durant la session de recherche du CEMRACS, au cours de laquelle une approche sur grille décalée, que nous ne présenterons pas ici, avait aussi été étudiée (cf [Aud+21]). Ces premières réflexions nous ont permis de mieux comprendre le processus de création des schémas, menant ainsi à trois nouveaux schémas, présentant de bonnes propriétés, mais également quelques inconvénients, que nous verrons dans la troisième partie. Finalement, ces derniers travaux nous ayant offert un recul supplémentaire sur la situation, un dernier schéma, vérifiant toutes les propriétés voulues, a finalement été trouvé et est présenté dans la dernière partie. Quelques-uns des schémas présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans [Aud+22].

3.2 Les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis

3.2.1 Le système de Saint-Venant avec force de Coriolis

Du fait de la rotation de la Terre sur elle-même, tous les corps sur la planète subissent une force inertielle appelée force de Coriolis. Elle est caractérisée par Ω_T , la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, et varie selon ϕ , la latitude de l'objet considéré :

$$\mathcal{F}_C = -2\Omega \wedge \mathbf{u} \text{ avec } \Omega = \Omega_T (0, \cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Cette force est un sujet d'étude majeur dans le cadre de l'océanographie et de la météorologie, puisque affectant les courants marins ainsi que les flux d'air dans l'atmosphère. Ainsi, en prenant en compte cet effet, les équations de Navier-Stokes 3D pour un fluide homogène s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \operatorname{div} \sigma - 2\Omega \wedge \mathbf{u} - \mathbf{g} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

où \mathbf{u} est la vitesse de l'objet par rapport au référentiel terrestre, σ le tenseur des contraintes et $\mathbf{g} = {}^t(0, 0, g)$ la force de la gravité. Dans ces équations, ainsi que partout par la suite, les quantités en gras sont des vecteurs.

Les océans pouvant être considérés comme des eaux peu profondes, leur profondeur moyenne (de l'ordre de 4 km pour les océans Atlantique et Pacifique par exemple) étant faible relativement à leur largeur (comprise entre 3000 et 10000 km), il est usuel de les modéliser au moyen des équations de Saint-Venant. Une dérivation classique (voir par exemple [Luc07]) permet ainsi d'obtenir une expression plus simple du terme créé par la force de Coriolis :

$$\tilde{\mathcal{F}}_C = -\omega \mathbf{u}^\perp \text{ avec } \omega = 2\Omega_T \sin(\phi).$$

Au premier ordre, on obtient ainsi l'écriture suivante des équations de Saint-Venant à fond plat avec force de Coriolis :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0 \tag{3.1a}$$

$$\partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla h = -\omega h \mathbf{u}^\perp, \tag{3.1b}$$

avec $h \in \mathbb{R}^+$ la hauteur d'eau, $\mathbf{u} = {}^t(u, v) \in \mathbb{R}^2$ la vitesse horizontale de l'eau, g l'accélération gravitationnelle et $t \in [0, T]$ et $x \in \Omega$.

Afin de simplifier les calculs, on supposera par la suite la force de Coriolis constante sur la surface du domaine considéré, c'est-à-dire que l'on néglige les potentielles variations de latitude au sein du domaine. Un travail supplémentaire pourrait permettre d'étendre les schémas développés ici afin de considérer une variation de la force de Coriolis dans le domaine.

3.2.2 Quelques propriétés du système

Dans cette section, nous allons présenter deux types de propriétés vérifiées par les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis. Dans un premier temps, nous démontrerons une égalité d'énergie satisfaite par ce système. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux équilibres satisfaits par ces équations. L'objectif sera ensuite d'écrire des schémas numériques vérifiant une version discrétisée de ces propriétés.

3.2.2.1 Conservation de l'énergie

Le système (3.1) vérifie l'égalité d'énergie suivante :

$$\frac{1}{2} \partial_t (gh^2 + h\mathbf{u}^2) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gh \right) h\mathbf{u} \right) = 0. \quad (3.2)$$

En effet, en multipliant l'équation de masse (3.1a) par gh et celle des moments (3.1b) par \mathbf{u} , le terme de Coriolis s'annule immédiatement, et des calculs rapides mènent aux relations :

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \partial_t h^2 + gh \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \left(\frac{h\mathbf{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{h\mathbf{u}^3}{2} \right) + g \operatorname{div}(h^2\mathbf{u}) - gh \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0. \end{aligned}$$

L'égalité (3.2) est alors obtenue en sommant ces deux relations.

3.2.2.2 Équilibres du système et cas du vortex stationnaire

Les équilibres traditionnellement étudiés dans le cadre du système de Saint-Venant avec terme de Coriolis sont en fait les équilibres du linéarisé du système (3.1) autour de $(h_0, 0)$:

$$\partial_t h + h_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\partial_t(\mathbf{u}) + g \nabla h = -\omega \mathbf{u}^\perp. \quad (3.3b)$$

Cet ensemble d'équilibres, nommés équilibres géostrophiques, vérifient donc l'équation $g \nabla h = -\omega \mathbf{u}^\perp$. On remarquera que cette unique condition est suffisante caractériser les équilibres du système (3.3), puisqu'elle implique que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. En effet,

$$g \nabla h = -\omega \mathbf{u}^\perp \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \left(-\frac{g}{\omega} (\nabla h)^\perp \right) = 0.$$

Le vortex stationnaire est un des exemples classiques d'équilibre géostrophique. Il consiste, ainsi que son nom l'indique, en un tourbillon d'eau au milieu d'un lac au

repos, cf Figure 3.1. On le définit (cf [Do17]), en coordonnées polaires dans le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, par une vitesse initiale :

$$\mathbf{u}_0(r, \theta) = v(r)\mathbf{e}_\theta \text{ avec } v(r) = \epsilon \left(5r \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{5}[}(r) + (2 - 5r) \mathbb{1}_{[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}[}(r) \right).$$

où ϵ est un petit paramètre influant sur la profondeur initiale du vortex (ainsi que sa vitesse). La hauteur d'eau est ensuite obtenue comme solution de l'équation différentielle $g\partial_r h_0 = \omega v(r)$. Elle s'écrit donc :

$$h_0(r) = \begin{cases} 1 + \frac{5\epsilon\omega}{2g}r^2 & \text{si } 0 \leq r < \frac{1}{5}, \\ 1 + \frac{\epsilon\omega}{10g} + \frac{\epsilon\omega}{10g}(-25r^2 + 20r - 3) & \text{si } \frac{1}{5} \leq r < \frac{2}{5}, \\ 1 + \frac{\epsilon\omega}{5g} & \text{si } r \geq \frac{2}{5}. \end{cases}$$

On l'associe usuellement à des conditions de bord périodiques, et on a choisi un domaine de taille 1×1 afin de tracer la Figure 3.1.

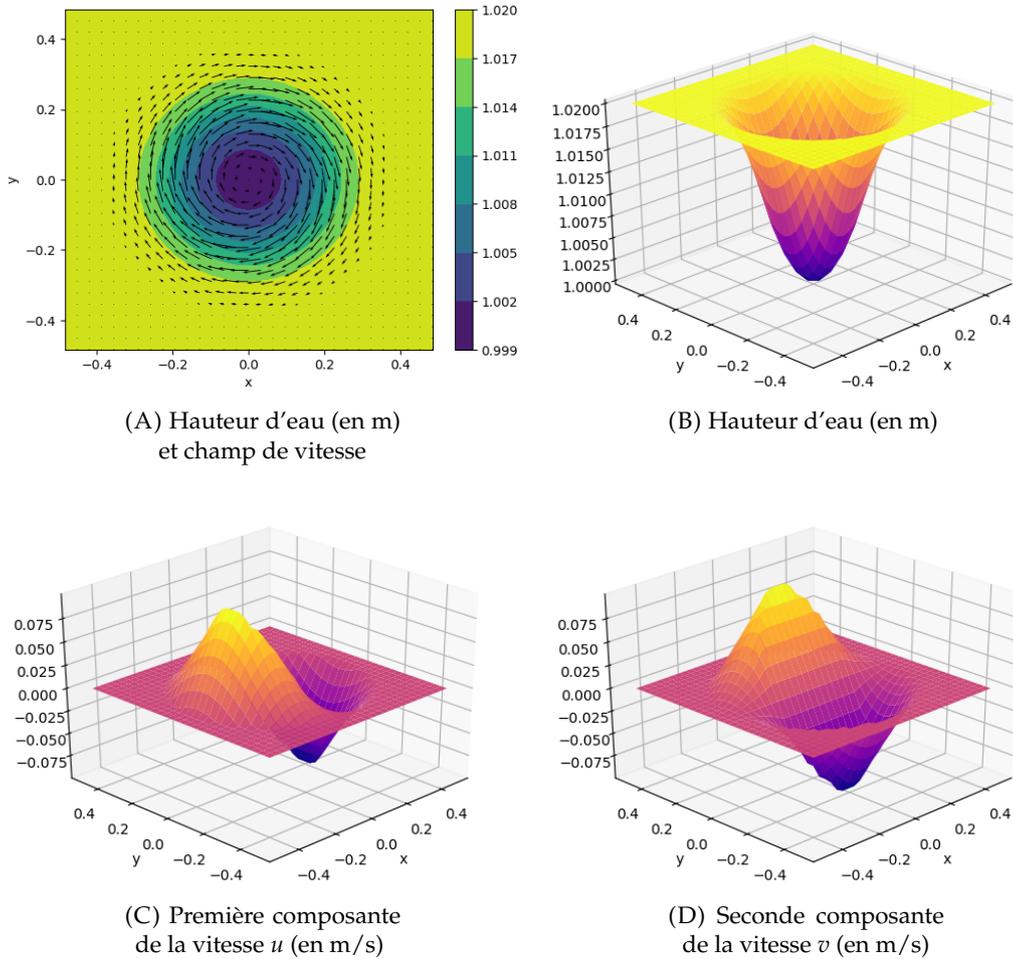


FIGURE 3.1 – Equilibre géostrophique du vortex stationnaire pour $\epsilon = 0.1$.

3.2.3 Non-conservation des états d'équilibre

Afin de résoudre numériquement le système (3.1), on peut penser, en premier lieu, à simplement utiliser un schéma aux volumes finis de type Godunov (voir [God59]) avec flux HLLC ([HLL83], [TSS94]) de la forme :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - F(Q_{i-1}^n, Q_i^n)), \quad (3.4)$$

avec F le flux HLLC. L'une des principales caractéristiques que l'on souhaite préserver étant les états d'équilibre, on commence par vérifier le comportement de ce schéma sur l'équilibre du vortex stationnaire présenté en section 3.2.2.2.

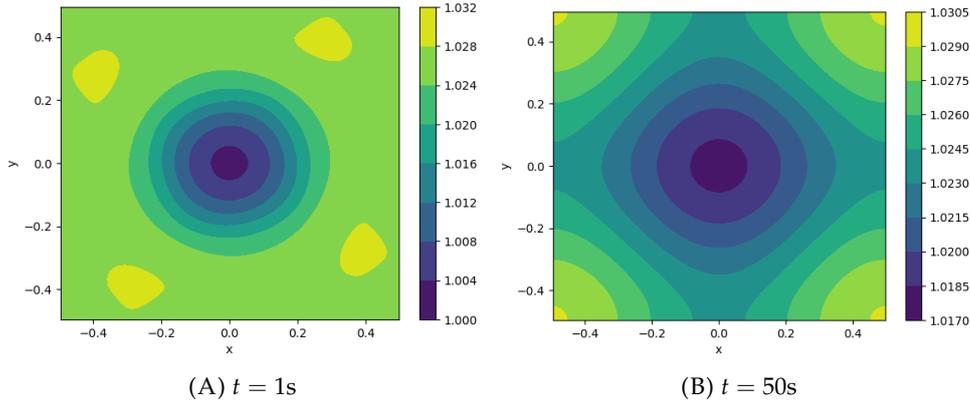


FIGURE 3.2 – Hauteur d'eau (en m) à différents instants pour le schéma HLLC et l'équilibre du vortex stationnaire.

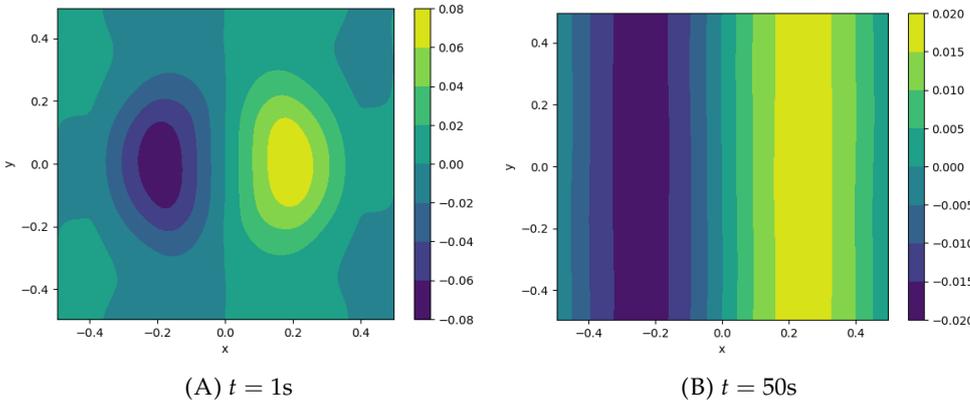


FIGURE 3.3 – Vitesse v (en m/s) à différents instants pour le schéma HLLC et l'équilibre du vortex stationnaire.

Les résultats obtenus en appliquant le schéma aux volumes finis avec flux HLLC aux équations de Saint-Venant avec force de Coriolis sont tracés sur les Figures 3.2, 3.3 et 3.4. Partant de l'état initial présenté en Figure 3.1 avec $\epsilon = 0.1$, on remarque que, dès la première seconde, le schéma (3.4) préserve mal le vortex stationnaire. Les vitesses s'étalent, tout comme la hauteur d'eau. Au bout de 50 secondes, l'invariance rotationnelle de la hauteur d'eau est complètement perdue et le vortex s'affaisse, tandis que les vitesses se polarisent. En temps long, le schéma finit par atteindre l'équilibre du lac au repos, comme on peut le voir sur la Figure 3.4.

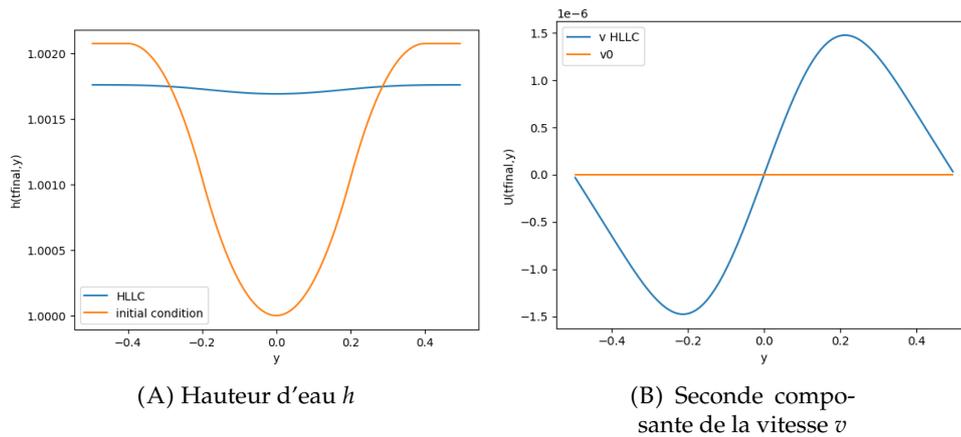


FIGURE 3.4 – Coupes en $x = 0$ du schéma HLLC pour l'équilibre du vortex stationnaire à $t = 500s$, avec état initial.

Cette non-préservation de l'équilibre géostrophique par le schéma (3.4) a déjà été soulevée par [Aud+18]. Dans le cadre linéaire, les auteurs résolvent ce problème par l'ajout de corrections spécifiquement choisies pour le système. Différentes possibilités sont présentées et comparées, ce qui nous permet d'obtenir des informations précieuses que nous allons utiliser pour le passage au non linéaire.

3.3 Détermination de premiers schémas

Cette section présente le travail effectué au CIRM lors du CEMRACS 2019. Une étude supplémentaire, concernant un schéma sur grille décalée, réalisée principalement par Youssouf Nasser et Arnaud Duran, peut être trouvée dans le proceeding ayant suivi ce travail [Aud+21]. Un premier schéma est développé ici, et celui-ci a, par la suite, servi de base pour la création d'autres, plus performants ou possédant de meilleures propriétés.

3.3.1 Buts, réflexions initiales et restrictions

Ainsi qu'expliqué précédemment, nous souhaitons créer un schéma pouvant résoudre le système de Saint-Venant avec force de Coriolis (3.1) et possédant deux propriétés spécifiques. Tout d'abord, de la même manière que dans la version continue, le schéma devait vérifier une inégalité d'énergie idéalement discrète, sinon semi-discrète en temps, afin d'obtenir une forme de stabilité au sens de l'énergie. Ensuite, il était important que le noyau du linéarisé du schéma corresponde au noyau du système de Saint-Venant linéarisé (3.3) : autrement dit, on souhaitait que le schéma linéarisé possède pour ensemble d'équilibres exactement les équilibres géostrophiques discrets.

Deux articles ont servi de sources principales : [Aud+18] et [CDV17]. Le premier s'intéressait au même problème que celui que nous venons de présenter, mais dans un cadre linéaire. Après avoir démontré l'inefficacité d'un schéma de Godunov afin de résoudre numériquement ce problème, les auteurs étudient l'impact de différentes corrections dans le schéma numérique, tant du point de vue théorique que numérique, et en déduisent un schéma satisfaisant leurs conditions. Partant de ce travail, nous souhaitons donc ajouter le terme non linéaire des équations de Saint-Venant. Les corrections, écrites comme termes de diffusion sur le flux, apparaissent

lors de cet ajout et nécessitent donc une attention particulière : elles doivent, en particulier, apporter suffisamment de diffusion pour que le schéma soit stable, mais s'annuler quand l'équilibre géostrophique est réalisé. On s'aide de [CDV17] pour écrire la version discrétisée du terme non linéaire du système de Saint-Venant.

Assez rapidement, quelques restrictions propres à notre problème nous sont apparues. Ainsi, le terme de Coriolis nous impose, dans un premier temps, un maillage cartésien. En effet, la présence de l'orthogonal de la vitesse rend tout maillage quelconque extrêmement difficile à écrire théoriquement, puis à coder, si le maillage n'est pas cartésien. Comme dans [Aud+18], on se place donc sur un tel maillage.

3.3.2 Écriture générale du schéma et notations

On se place sur un espace Ω , muni d'une base orthonormée (e_x, e_y) , décomposé en $N_x \times N_y$ cellules $K_{i,j}$ de dimension $\Delta x \times \Delta y$ (voir Figure 3.5). Afin de simplifier le travail pour commencer, on ne discrétise pas le temps et on écrit nos schémas sous une forme "semi-discrète", avec une dérivée en temps. On approxime nos variables par des fonctions constantes par maille, et, pour toute variable a , on note $a_{i,j}$ sa valeur dans la maille $K_{i,j}$. Pour faciliter la lecture, on notera $a_K = a_{i,j}$, la maille K étant, sauf indication contraire, celle d'indice (i, j) . On se munit également d'une divergence et d'un gradient discrets définis, pour tout vecteur \mathcal{F} et tout scalaire h , par :

$$\operatorname{div}_{i,j}(\mathcal{F}) = \frac{(\mathcal{F}_{i+1,j} - \mathcal{F}_{i-1,j}) \cdot e_x}{2\Delta x} + \frac{(\mathcal{F}_{i,j+1} - \mathcal{F}_{i,j-1}) \cdot e_y}{2\Delta y},$$

$$\nabla_{i,j}h = \begin{pmatrix} \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix}.$$

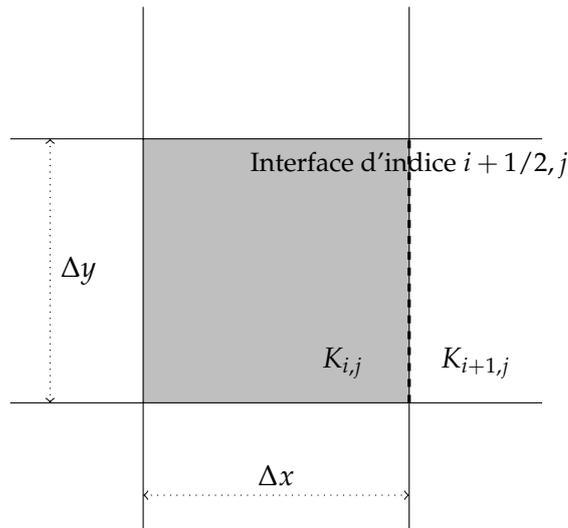


FIGURE 3.5 – Notations géométriques.

Pour traiter le terme non linéaire, par analogie avec le schéma HLLC vu précédemment, on utilise un flux upwind. Suivant [DVB20], on écrit donc la discrétisation

d'un terme de la forme $\text{div}(U \otimes \mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} \text{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2\Delta x} \left(U_{(i,i+1),j}^{up} (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i+1,j}) \cdot e_x + U_{(i-1,i),j}^{up} (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i-1,j}) \cdot e_x \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} \left(U_{i,(j,j+1)}^{up} (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i,j+1}) \cdot e_y + U_{i,(j-1,j)}^{up} (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i,j-1}) \cdot e_y \right), \end{aligned}$$

$$\text{où } U_{(i,k),j}^{up} = U_{(i,k),j}^{up}(\mathcal{F}_{i,j}, \mathcal{F}_{k,j}) = \begin{cases} U_{i,j} & \text{si } (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{k,j}) \cdot e_x \geq 0 \\ U_{k,j} & \text{si } (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{k,j}) \cdot e_x < 0 \end{cases}$$

$$\text{et } U_{i,(j,k)}^{up} = U_{i,(j,k)}^{up}(\mathcal{F}_{i,j}, \mathcal{F}_{i,k}) = \begin{cases} U_{i,j} & \text{si } (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i,k}) \cdot e_y \geq 0 \\ U_{i,k} & \text{si } (\mathcal{F}_{i,j} + \mathcal{F}_{i,k}) \cdot e_y < 0 \end{cases}.$$

Toujours suivant l'exemple de [Aud+18], on souhaite, pour préserver les équilibres géostrophiques, ajouter deux corrections : une sur le flux de masse Π et une autre sur l'équation de quantité de mouvement Λ . On ne détaille pour l'instant pas ces corrections. Le schéma ainsi obtenu s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{dh_K}{dt} + \text{div}_K \mathcal{F} = 0 & (3.5a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d(h_K U_K)}{dt} + \text{div}_K^{up}(U, \mathcal{F}) + h_K \nabla_K \Phi = -\omega(h_K U_K - \Pi_K)^\perp, & (3.5b) \end{cases}$$

avec : $\mathcal{F}_K = h_K U_K - \Pi_K$ et $\Phi_K = gh_K - \Lambda_K$.

Les corrections sont ici placées au même endroit que les différentes variables, soit au centre de chaque maille.

3.3.3 Détermination des corrections et calcul de l'énergie

Afin d'étudier en détail le schéma (3.5), commençons par calculer l'énergie dans le cas, plus simple, du schéma semi-discret :

$$\begin{cases} \frac{dh_{i,j}}{dt} = -\text{div}_{i,j} \mathcal{F}, & (3.6a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d(h_{i,j} U_{i,j})}{dt} = -\text{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) - h_{i,j} \nabla_{i,j} \Phi - \omega h_{i,j} U_{i,j}^\perp + \omega \Pi_{i,j}^\perp. & (3.6b) \end{cases}$$

Ce calcul d'énergie nous servira par la suite à déterminer la forme des corrections Π et Λ à appliquer.

3.3.3.1 Énergie potentielle

Pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle, on multiplie l'équation de conservation de la masse (3.6a) par $gh_{i,j}$ et on remplace \mathcal{F} par sa valeur :

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \frac{dh_{i,j}^2}{dt} &= -gh_{i,j} \left(\frac{(h_{i+1,j} U_{i+1,j} - h_{i-1,j} U_{i-1,j}) \cdot e_x}{2\Delta x} + \frac{(h_{i,j+1} U_{i,j+1} - h_{i,j-1} U_{i,j-1}) \cdot e_y}{2\Delta y} \right) \\ &\quad + gh_{i,j} \left(\frac{(\Pi_{i+1,j} - \Pi_{i-1,j}) \cdot e_x}{2\Delta x} + \frac{(\Pi_{i,j+1} - \Pi_{i,j-1}) \cdot e_y}{2\Delta y} \right), \\ &= -gh_{i,j} \left(\frac{(h_{i+1,j} U_{i+1,j} - h_{i-1,j} U_{i-1,j}) \cdot e_x}{2\Delta x} + \frac{(h_{i,j+1} U_{i,j+1} - h_{i,j-1} U_{i,j-1}) \cdot e_y}{2\Delta y} \right) \\ &\quad + gh_{i,j} \text{div}_{i,j}(\Pi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sachant que l'on souhaite, par la suite, sommer cette égalité pour tous les couples (i, j) , afin d'obtenir une égalité globale sur l'espace, nous allons réécrire l'expression ci-dessus de manière à faciliter ladite somme. Pour cela, on sépare les variables en une partie symétrique et une partie antisymétrique à travers chacune des interfaces. Autrement dit, pour une variable $w_{i,j}$, à l'interface entre les cellules $K_{i,j}$ et $K_{i+1,j}$, on écrit :

$$w_{i,j} = \underline{w}_{i+1,j} + \overline{w}_{i+1,j} \text{ avec } \overline{w}_{i+1,j} = \frac{w_{i,j} + w_{i+1,j}}{2} \text{ et } \underline{w}_{i+1,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{2},$$

$\overline{w}_{i+1,j}$ étant la partie symétrique et $\underline{w}_{i+1,j}$ la partie antisymétrique à travers l'interface considérée. De même, à l'interface entre $K_{i,j}$ et $K_{i-1,j}$, on a :

$$w_{i,j} = \underline{w}_{i-1,j} + \overline{w}_{i-1,j} \text{ avec } \overline{w}_{i-1,j} = \frac{w_{i,j} + w_{i-1,j}}{2} \text{ et } \underline{w}_{i-1,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{2}.$$

On remarque alors que $\overline{w}_{i+1,j} = \overline{w}_{(i+1)-j}$ et $\underline{w}_{i+1,j} = -\underline{w}_{(i+1)-j}$, et ces égalités nous permettront des simplifications lorsque l'on sommerá sur tout l'espace. On traite de même les interfaces horizontales, en échangeant les rôles de i et j .

Avec ces nouvelles notations, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{i,j}(\mathcal{F}) &= \frac{(\mathcal{F}_{i+1,j} - \mathcal{F}_{i-1,j}) \cdot e_x}{2\Delta x} + \frac{(\mathcal{F}_{i,j+1} - \mathcal{F}_{i,j-1}) \cdot e_y}{2\Delta y} \\ &= \frac{(\overline{\mathcal{F}}_{i+1,j} - \overline{\mathcal{F}}_{i-1,j}) \cdot e_x}{\Delta x} + \frac{(\overline{\mathcal{F}}_{i,j+1} - \overline{\mathcal{F}}_{i,j-1}) \cdot e_y}{\Delta y}, \end{aligned}$$

$$\nabla_{i,j}h = \begin{pmatrix} \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{h}_{i+1,j} - \overline{h}_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \frac{\overline{h}_{i,j+1} - \overline{h}_{i,j-1}}{\Delta y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{et } \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) &= \frac{1}{\Delta x} \left(U_{(i,i+1),j}^{up} \overline{\mathcal{F}}_{i+1,j} \cdot e_x + U_{(i-1,i),j}^{up} \overline{\mathcal{F}}_{i-1,j} \cdot e_x \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y} \left(U_{i,(j,j+1)}^{up} \overline{\mathcal{F}}_{i,j+1} \cdot e_y + U_{i,(j-1,j)}^{up} \overline{\mathcal{F}}_{i,j-1} \cdot e_y \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en sommant et soustrayant $h_{i,j}U_{i,j}$ dans chacune des fractions de l'égalité (3.7), on peut faire apparaître les quantités définies précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \frac{dh_{i,j}^2}{dt} &= -gh_{i,j} \left(\frac{(\overline{(hu)_{i+1,j}} - \overline{(hu)_{i-1,j}})}{\Delta x} + \frac{(\overline{(hv)_{i,j+1}} - \overline{(hv)_{i,j-1}})}{\Delta y} \right) + gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) \\ &= -\frac{g}{\Delta x} \sum_{\delta=\pm} \delta (\overline{h_{i\delta,j}} + \underline{h_{i\delta,j}}) \overline{(hu)_{i\delta,j}} - \frac{g}{\Delta y} \sum_{\delta=\pm} \delta (\overline{h_{i,j\delta}} + \underline{h_{i,j\delta}}) \overline{(hv)_{i,j\delta}} + gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) \\ &= -\frac{g}{\Delta x} \sum_{\delta=\pm} \delta \left(\overline{h_{i\delta,j}} \overline{(hu)_{i\delta,j}} + h_{i,j} u_{i,j} \underline{h_{i\delta,j}} - \underline{h_{i\delta,j}} \overline{(hu)_{i\delta,j}} \right) \\ &\quad - \frac{g}{\Delta y} \sum_{\delta=\pm} \delta \left(\overline{h_{i,j\delta}} \overline{(hv)_{i,j\delta}} + h_{i,j} v_{i,j} \underline{h_{i,j\delta}} - \underline{h_{i,j\delta}} \overline{(hv)_{i,j\delta}} \right) + gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression de l'énergie potentielle sur une cellule :

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \frac{dh_{i,j}^2}{dt} &= gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) - \frac{g}{\Delta x} \sum_{\delta=\pm} \delta \left(\overline{h_{i\delta,j}} \overline{(hu)_{i\delta,j}} + h_{i,j} u_{i,j} \underline{h_{i\delta,j}} - \underline{h_{i\delta,j}} \overline{(hu)_{i\delta,j}} \right) \\ &\quad - \frac{g}{\Delta y} \sum_{\delta=\pm} \left(\delta \overline{h_{i,j\delta}} \overline{(hv)_{i,j\delta}} + h_{i,j} v_{i,j} \underline{h_{i,j\delta}} - \underline{h_{i,j\delta}} \overline{(hv)_{i,j\delta}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette écriture permet de mettre en évidence les termes symétriques, qui se simplifieront lorsque l'on sommera sur toutes les mailles

3.3.3.2 Énergie cinétique

On poursuit en multipliant l'équation des moments (3.6b) par $U_{i,j}$, afin de trouver l'expression de l'énergie cinétique :

$$U_{i,j} \cdot \frac{d}{dt} (h_{i,j} U_{i,j}) = -U_{i,j} \cdot \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) - h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Phi - \omega h_{i,j} U_{i,j} \cdot U_{i,j}^\perp + \omega U_{i,j} \cdot \Pi_{i,j}^\perp.$$

Détaillons chacun des termes de cette équation :

- $U_{i,j} \cdot \frac{d}{dt} (h_{i,j} U_{i,j}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} (h_{i,j} U_{i,j}^2) + U_{i,j}^2 \frac{d}{dt} (h_{i,j}) \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} (h_{i,j} U_{i,j}^2) - U_{i,j}^2 \operatorname{div}_{i,j} \mathcal{F} \right)$
 en utilisant (3.6a),
- $-\omega h_{i,j} U_{i,j} \cdot U_{i,j}^\perp = 0,$
- $-h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Phi = -h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} (gh - \Lambda)$
 $= -gh_{i,j} u_{i,j} \frac{\overline{h_{i+,j}} - \overline{h_{i-,j}}}{\Delta x} - gh_{i,j} v_{i,j} \frac{\overline{h_{i,j+}} - \overline{h_{i,j-}}}{\Delta y} + h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda$
 $= gh_{i,j} u_{i,j} \frac{h_{i+,j} - h_{i-,j}}{\Delta x} + gh_{i,j} v_{i,j} \frac{h_{i,j+} - h_{i,j-}}{\Delta y} + h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda$
 $= \frac{g}{\Delta x} \sum_{\delta=\pm} \delta h_{i,j} u_{i,j} \underline{h_{i\delta,j}} + \frac{g}{\Delta y} \sum_{\delta=\pm 1} \delta h_{i,j} v_{i,j} \underline{h_{i,j\delta}} + h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda.$

Pour un scalaire a , on note par la suite

$$a = a^+ - a^- \text{ avec } a^+ = \frac{|a| + a}{2} \text{ et } a^- = \frac{|a| - a}{2}$$

a^+ et a^- étant respectivement les parties positive et négative de a . De plus, afin d'améliorer la lisibilité pour le terme non linéaire, on fait les calculs uniquement à l'interface $i + \frac{1}{2}, j$ (voir Figure 3.5), puis on les généralise aux autres interfaces. Cela

nous permet d'écrire le flux *upwind* $-U_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F})$ sous une forme plus manipulable pour les calculs :

$$\begin{aligned}
-U_{i,j} \cdot \frac{1}{\Delta x} U_{(i,i+1),j}^{up} \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x &= -\frac{1}{\Delta x} U_{i,j} \cdot (U_{i,j} (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^+ - U_{i+1,j} (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^-) \\
&= \frac{1}{\Delta x} (-\|U_{i,j}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x + U_{i,j} \cdot (U_{i+1,j} - U_{i,j}) (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^-) \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left(-\|U_{i,j}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x + \frac{1}{2} (\|U_{i+1,j}\|^2 - \|U_{i,j}\|^2 \right. \\
&\quad \left. - \|U_{i+1,j} - U_{i,j}\|^2) (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^- \right) \\
&= \frac{1}{2\Delta x} (-\|U_{i,j}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x - \|U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^+ \\
&\quad + (\|U_{i+1,j}\|^2 - \|U_{i+1,j} - U_{i,j}\|^2) (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^-) \\
&= -\frac{1}{2\Delta x} \|U_{i,j}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x - \frac{1}{2\Delta x} \|U_{i+1,j} - U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^- \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta x} (\|U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^+ - \|U_{i+1,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^-) \\
&= -\frac{1}{2\Delta x} \|U_{i,j}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x - \frac{1}{2\Delta x} \|U_{i+1,j} - U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x)^- \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta x} \|U_{(i,i+1),j}^{up}\|^2 \overline{\mathcal{F}_{i+j}} \cdot e_x.
\end{aligned}$$

En généralisant ce terme aux autres interfaces, on obtient l'écriture suivante pour le flux *upwind* :

$$\begin{aligned}
-U_{i,j} \cdot \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) &= -\frac{\|U_{i,j}\|^2}{2} \operatorname{div}_{i,j} \mathcal{F} - \frac{1}{2} \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U^2, \mathcal{F}) \\
&\quad - \sum_{\delta=\pm} \left(\frac{1}{2\Delta x} \|U_{i,\delta 1,j} - U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i,\delta j}} \cdot e_x)^- + \frac{1}{2\Delta y} \|U_{i,j,\delta 1} - U_{i,j}\|^2 (\overline{\mathcal{F}_{i,j,\delta}} \cdot e_y)^- \right).
\end{aligned}$$

La partie négative étant, par définition, positive, la somme dans l'égalité précédente est positive. On a donc

$$-U_{i,j} \cdot \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U, \mathcal{F}) \leq -\frac{\|U_{i,j}\|^2}{2} \operatorname{div}_{i,j} \mathcal{F} - \frac{1}{2} \operatorname{div}_{i,j}^{up}(\|U\|^2, \mathcal{F}).$$

En combinant les termes précédemment calculés, on peut finalement écrire l'inégalité d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h_{i,j} U_{i,j}^2) &\leq g \sum_{\delta=\pm} \delta h_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta x} u_{i,j} h_{i,\delta j} + \frac{1}{\Delta y} v_{i,j} h_{i,j,\delta} \right) + h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda \\
&\quad + \omega U_{i,j} \cdot \Pi_{i,j}^\perp - \frac{1}{2} \operatorname{div}_{i,j}^{up}(\|U\|^2, \mathcal{F}). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

3.3.3.3 Énergie totale

En sommant les énergies potentielle (3.8) et cinétique (3.9), on obtient l'inégalité vérifiée par l'énergie totale sur une cellule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(h_{i,j} \|U_{i,j}\|^2 + gh_{i,j}^2 \right) &\leq h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda + \omega U_{i,j} \cdot \Pi_{i,j}^\perp + gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) - \frac{1}{2} \operatorname{div}_{i,j}^{up}(U^2, \mathcal{F}) \\ &- \sum_{\delta=\pm} g\delta \left(\frac{1}{\Delta x} \left(\overline{h_{i,\delta,j}} \overline{(hu)_{i,\delta,j}} - \underline{h_{i,\delta,j}} \underline{(hu)_{i,\delta,j}} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\overline{h_{i,j,\delta}} \overline{(hv)_{i,j,\delta}} - \underline{h_{i,j,\delta}} \underline{(hv)_{i,j,\delta}} \right) \right). \end{aligned}$$

Dans cette dernière somme, on peut remarquer que tous les termes sont symétriques aux interfaces, mais orientés vers l'extérieur de la cellule (de par la multiplication par δ). Par conséquent, en sommant ces quantités sur toutes les cellules, chaque terme sera sommé à son opposé, et la somme sera nulle, grâce aux conditions périodiques placées sur les bords du domaine. Par un raisonnement identique, le terme $\operatorname{div}_{i,j}^{up}(\|U\|^2, \mathcal{F})$ s'annulera également lors de la somme sur tout l'espace. Ainsi, l'énergie totale sur Ω s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} \left(h_{i,j} \|U_{i,j}\|^2 + gh_{i,j}^2 \right) \leq \sum_{i,j} \left(h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda + \omega U_{i,j} \cdot \Pi_{i,j}^\perp + gh_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) \right). \quad (3.10)$$

3.3.3.4 Détermination de la forme des corrections

Afin d'obtenir, comme nous le souhaitons, une décroissance de l'énergie, il nous faut contrôler le signe de chacun des termes à droite de l'inégalité, en les imposant négatifs ou nuls. Ce contrôle déterminera ainsi l'écriture des différentes corrections. On sait que

$$h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda = h_{i,j} u_{i,j} \frac{\Lambda_{i+1,j} - \Lambda_{i-1,j}}{2\Delta x} + h_{i,j} v_{i,j} \frac{\Lambda_{i,j+1} - \Lambda_{i,j-1}}{2\Delta y}.$$

Afin de connaître l'écriture de $\Lambda_{i,j}$, observons les différentes contributions de ce dernier lorsque l'on somme l'expression pour toutes les valeurs de i et j . Ce terme intervient quatre fois, dans les quatre cellules adjacentes à $K_{i,j}$. Par un changement d'indice dans la somme, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} h_{i,j} U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda &= \sum_{i,j} \Lambda_{i,j} \left(\frac{h_{i-1,j} u_{i-1,j} - h_{i+1,j} u_{i+1,j}}{2\Delta x} + \frac{h_{i,j-1} v_{i,j-1} - h_{i,j+1} v_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) \\ &= - \sum_{i,j} \Lambda_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(hU). \end{aligned} \quad (3.11)$$

En choisissant

$$\Lambda_{i,j} = \gamma \operatorname{div}_{i,j}(hU), \quad (3.12)$$

avec γ positif, on s'assure du signe de cette partie de l'expression.

Le choix (3.12) ne présente aucun problème au premier abord, mais, suivant l'exemple de [Aud+18], on préférerait que la correction soit nulle sur un équilibre géostrophique. La hauteur d'eau h étant positive, on remarque que le raisonnement précédent n'est pas modifié en l'appliquant seulement à $U_{i,j} \cdot \nabla_{i,j} \Lambda$, et (3.11) reste positif. On choisit donc d'écrire $\Lambda_{i,j} = \gamma \operatorname{div}_{i,j}(U)$. Cette formulation est plus satisfaisante puisque, ainsi, à l'équilibre géostrophique, $\operatorname{div}_{i,j} U = 0$. La constante γ sera

déterminée par la suite, grâce à des considérations de dimensions, ainsi qu'à des calages sur des cas tests.

En faisant une étude similaire sur Π , on constate que :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left(\omega U_{i,j} \cdot \Pi_{i,j}^\perp + g h_{i,j} \operatorname{div}_{i,j}(\Pi) \right) \\ = \sum_{i,j} \Pi_{i,j} \cdot \left(-\omega U_{i,j}^\perp + \frac{g(h_{i-1,j} - h_{i+1,j})}{2\Delta x} e_x + \frac{g(h_{i,j-1} - h_{i,j+1})}{2\Delta y} e_y \right) \\ = \sum_{i,j} -\Pi_{i,j} \cdot \left(\omega U_{i,j}^\perp + g \nabla_{i,j} h \right). \end{aligned}$$

On choisit donc $\Pi_{i,j} = \nu \left(\omega U_{i,j}^\perp + g \nabla_{i,j} h \right)$, avec ν positif. Cette correction est bien nulle à l'équilibre géostrophique, et la constante ν sera déterminée de la même manière que γ .

3.3.4 Écriture finale du schéma, propriétés et amélioration

Le schéma obtenu grâce aux calculs précédents s'écrit donc :

$$\begin{cases} h_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n - \Delta t (\operatorname{div}_{i,j} \mathcal{F}^n) \\ h_{i,j}^{n+1} U_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n U_{i,j}^n \\ &+ \Delta t \left(-\operatorname{div}_{i,j}^{up}(U^n, \mathcal{F}^n) - h_{i,j}^n \nabla_{i,j} \Phi^n - \omega h_{i,j}^n (U_{i,j}^n)^\perp + \omega (\Pi_{i,j}^n)^\perp \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,j}^n &= h_{i,j}^n U_{i,j}^n - \Pi_{i,j}^n \text{ et } \Pi_{i,j} = \nu \left(\omega U_{i,j}^\perp + g \nabla_{i,j} h \right), \\ \Phi_{i,j}^n &= g h_{i,j}^n - \Lambda_{i,j}^n \text{ et } \Lambda_{i,j} = \gamma h \operatorname{div}_{i,j}(U), \end{aligned}$$

et où γ et ν sont des constantes positives qui restent à déterminer, et où le schéma discret est obtenu à partir de son équivalent semi-discret par une méthode d'Euler explicite.

Par le choix des corrections, ce schéma possède une énergie semi-discrète décroissante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} \left(h_{i,j} \|U_{i,j}\|^2 + g h_{i,j}^2 \right) \leq 0.$$

Vérifions maintenant que la version linéarisée du schéma (3.13) préserve également les équilibres géostrophiques. Autour de l'équilibre $(h_0, 0)$, le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} h_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n - \Delta t (\operatorname{div}_{i,j} \mathcal{F}^n) \\ h_0 U_{i,j}^{n+1} &= h_0 U_{i,j}^n + \Delta t \left(-h_0 \nabla_{i,j} \Phi^n - \omega h_0 (U_{i,j}^n)^\perp + \omega (\Pi_{i,j}^n)^\perp \right) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,j}^n &= h_0 U_{i,j}^n - \Pi_{i,j}^n, \\ \Pi_{i,j} &= \nu \left(\omega U_{i,j}^\perp + g \nabla_{i,j} h \right), \\ \Phi_{i,j}^n &= g h_{i,j}^n - \Lambda_{i,j}^n, \\ \Lambda_{i,j} &= \kappa h_0 \operatorname{div}_{i,j}(U). \end{aligned}$$

A l'équilibre géostrophique, *i.e.* quand $\omega U_{i,j}^\perp + g \nabla_{i,j} h = 0$, on a $\text{div}_{i,j} U = 0$, les deux corrections Π et Λ s'annulent et le schéma est, comme on le souhaite, à l'équilibre :

$$\begin{cases} h_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n \\ U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n. \end{cases}$$

L'inclusion dans le sens inverse, c'est-à-dire vérifier que les seuls états d'équilibre du schéma (3.13) sont les équilibres géostrophiques, est plus compliquée à étudier. Des tests sur machines pour diverses conditions initiales seront donc nécessaires afin de vérifier le comportement du schéma (3.13).

Le schéma (3.13) semble donc, dans un premier temps, satisfaire les objectifs que nous souhaitons remplir : il possède une inégalité d'énergie semi-discrète et préserve linéairement les équilibres géostrophiques. Il comporte cependant un désagrément significatif : afin de calculer les valeurs de U et h au temps $n + 1$ en une cellule $K_{i,j}$, on a besoin de leurs valeurs au temps n dans chaque cellule constituant le carré de 5×5 entourant $K_{i,j}$. Le schéma (3.13) possède ainsi un *stencil* de 25 points, dû à l'application successive de divergence et de gradient causés par les corrections, et à l'écriture de ces opérateurs en fonction des cellules adjacentes à celle d'étude. Un tel *stencil* est contraignant en terme de codage, puisque nécessitant deux rangées de cellules fantômes, et des écritures spécifiques pour les conditions de bord : le schéma (3.13) risque donc de ne pouvoir être ajouté dans des codes déjà existants, réduisant ainsi son usage pratique.

Il est cependant assez aisé de transformer ce schéma afin de réduire le nombre de points dans son *stencil*. Le problème venant en effet en partie du placement des corrections au centre des cellules : la correction Π par exemple, lors de son apparition dans le schéma, contient un gradient de h , qui subit ensuite une divergence. Le gradient et la divergence transformant tous deux des quantités sur les cellules en quantité sur les cellules, ils demandent plus de points que s'ils transformaient des quantités sur les cellules en des quantités sur les arêtes, par exemple. En plaçant les corrections ailleurs, sur les sommets ou les arêtes, on peut donc espérer réduire la taille du *stencil* du schéma. On écrit donc le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + \text{div}_K^a \mathcal{F}_a = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + \mathbf{div}_K^{a,up} (\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_a) + h_K f_K^a (\nabla_a^K \phi_K) - \nabla_K^s \Lambda_s \\ \quad = -\omega h_K \mathbf{u}_K^\perp + \omega (f_K^a (\mathbf{\Pi}_a))^\perp, \end{cases} \quad (3.14)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a &= f_a^K (h_K \mathbf{u}_K) - \mathbf{\Pi}_a, \\ \mathbf{\Pi}_a &= \nu f_a^K (h_K) (\omega f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K), \\ \Lambda_s &= \gamma f_s^K (h_K) \text{div}_s^K \mathbf{u}_K. \end{aligned}$$

Dans cette version, la graphie est simplifiée par la création d'opérateurs dédiés pour chaque reconstruction, qui étaient auparavant utilisés sans être nommés ni formellement identifiées comme tels. Ainsi, $\overline{w_{i,j}} = \frac{w_{i,j} + w_{i+1,j}}{2}$ défini précédemment

transforme deux variables définies au centre des cellules ($w_{i,j}$ et $w_{i+1,j}$) en une variable définie sur l'arête $i + 1/2, j$, et est donc, par définition, un opérateur reconstruction allant du centre des cellules vers les arêtes. Dans l'équation (3.14), on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_K^a \boldsymbol{\varphi}_a &= \frac{1}{m_K} \sum_{a \in \partial K} m_a \boldsymbol{\varphi}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K} \\ f_a^K(\varphi_K) &= \frac{1}{2}(\varphi_{Ka} + \varphi_K) \\ f_a^K(\boldsymbol{\varphi}_K) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_{Ka} + \boldsymbol{\varphi}_K) \cdot \mathbf{n}_{a,K} \mathbf{n}_{a,K} \\ (\nabla_K^s \varphi_s)_{i,j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1/2,j+1/2} - \varphi_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1/2,j-1/2} - \varphi_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_{i+1/2,j+1/2} - \varphi_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i-1/2,j+1/2} - \varphi_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right) \\ (\operatorname{div}_s^K \boldsymbol{\varphi}_K)_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j+1}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta y} \right). \end{aligned}$$

Ces opérateurs seront très utilisés par la suite, et nous détaillerons toutes les notations nécessaires à la section 3.4.1 et sur la Figure 3.16.

Ainsi écrit, le schéma (3.14) vérifie encore l'inégalité d'énergie (3.10), et possède un *stencil* de 9 points. Il perd cependant son caractère équilibré. En effet, dans l'écriture du schéma, l'équilibre géostrophique apparaît à deux endroits différents de la cellule : aux arêtes dans la correction Π , aux centres dans l'équation de quantité de mouvement. Pour que le schéma soit équilibré, il faudrait que, en imposant l'équilibre géostrophique à un endroit, il s'annule aussi à l'autre, ce qui n'est malheureusement pas le cas et explique la perte de cette propriété. Ce problème est mis en évidence sur les tests numériques suivants, qui nous permettront de juger des performances de nos deux schémas, mais également de les comparer au schéma HLLC.

3.3.5 Tests et résultats numériques

On effectue maintenant des simulations sur différents cas tests afin de voir le comportement des schémas (3.5) et (3.14) précédemment écrits. On souhaite en particulier vérifier s'ils préservent les équilibres géostrophiques : on comparera les résultats obtenus à ceux d'un schéma aux volumes finis avec flux HLLC, pour voir si cette propriété a été améliorée. On souhaite également s'assurer, dans la mesure du possible, qu'ils ne préservent pas d'autres équilibres que ceux voulus, c'est-à-dire les équilibres géostrophiques. Dans la suite, on prend, sans perte de généralité, $\omega = g = 1$, et on fixe, suite à des tests préliminaires, $\gamma = \nu = 0.5$ et la CFL à 0.5. Sauf mention contraire, les simulations sont effectuées dans un domaine de taille 101×101 . De plus, on légèrera u la première composante de la vitesse, et v la seconde.

Dans toute la suite, lorsque l'axe des ordonnées d'un graphique affiche une échelle du type " $1e - a + b$ ", avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{R}$, on lit la valeur sur l'axe correspondant en multipliant la valeur lue par 10^a , puis en ajoutant b .

3.3.5.1 Vortex stationnaire

On commence par tester nos schémas sur la solution du vortex stationnaire non-linéaire. Ce dernier est très similaire à l'équilibre géostrophique présenté en Figure 3.1, mais présente l'avantage d'être une solution exacte du système de Saint-Venant avec force de Coriolis, et donc est censé être préservé de manière exacte par nos schémas. Pour rappel, le vortex stationnaire vu en Figure 3.1, que l'on appellera par la suite "vortex stationnaire linéaire", est un équilibre géostrophique, c'est-à-dire, par définition, une solution du linéarisé du système de Saint-Venant avec force de Coriolis. Ce n'est donc pas exactement un équilibre du système (3.1).

En coordonnées polaires, on définit le vortex stationnaire non-linéaire avec, comme pour le linéaire, la vitesse :

$$\mathbf{u}_0(r, \theta) = v(r)\mathbf{e}_\theta \text{ et } v(r) = \epsilon \left(5r \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{5}[}(r) + (2 - 5r) \mathbb{1}_{[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}[}(r) \right).$$

La hauteur d'eau est ensuite obtenue comme solution de l'équation différentielle

$$g\partial_r h_0 = \omega v(r) + \frac{v(r)^2}{r}.$$

La différence avec le vortex stationnaire linéaire se trouve dans la présence du terme non-linéaire $\frac{v(r)^2}{r}$, provenant du terme non-linéaire des équations de Saint-Venant. Des termes en ϵ^2 sont ajoutés par rapport à l'écriture du linéaire, et la hauteur d'eau s'écrit donc, dans ce cas :

$$h_0(r) = \begin{cases} 1 + \frac{5\epsilon\omega}{2g}r^2 & \text{si } 0 \leq r < \frac{1}{5}, \\ 1 + \frac{\epsilon\omega}{10g} + \frac{\epsilon\omega}{10g}(-25r^2 + 20r - 3) \\ \quad + \frac{\epsilon^2}{g}(3.5 - 20r + 12.5r^2 + 4\ln(5r)) & \text{si } \frac{1}{5} \leq r < \frac{2}{5}, \\ 1 + \frac{\epsilon\omega}{5g} + \frac{\epsilon^2}{g}(4\ln(2) - 2.5) & \text{si } r \geq \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Comme dans le cas linéaire, ϵ est un petit paramètre influençant la profondeur du vortex, et donc également la vitesse, à cause du lien créé entre ces quantités par l'équilibre géostrophique. On remarquera également que, lorsque ϵ est petit, le terme non linéaire dans la définition de la hauteur d'eau est très petit comparé au terme linéaire, et le vortex stationnaire non-linéaire est ainsi très proche de l'équilibre géostrophique du vortex stationnaire linéaire.

On se place sur un domaine avec des conditions périodiques sur les bords, pour une durée de simulation de 200 secondes et on choisit $\epsilon = 0.01$.

Sur les Figures 3.6, 3.7 et 3.8, on représente les résultats numériques ainsi obtenus, que l'on compare à la solution initiale et au schéma HLLC. Sur ces figures, ainsi que les suivantes, "Edge-based Entropic" correspond au schéma (3.14) et "Cell-based (vertex version)" au schéma (3.13).

On peut tout d'abord constater, en observant les Figures 3.6 et 3.7 que les résultats sont très similaires pour les schémas (3.13) et (3.14), qui, comme on le souhaitait, restent très proches de la condition initiale, et d'autant plus près que le maillage en espace est raffiné. Au début de la simulation, la profondeur diminue légèrement, puis se stabilise et reste constante et telle que vue en Figure 3.6.

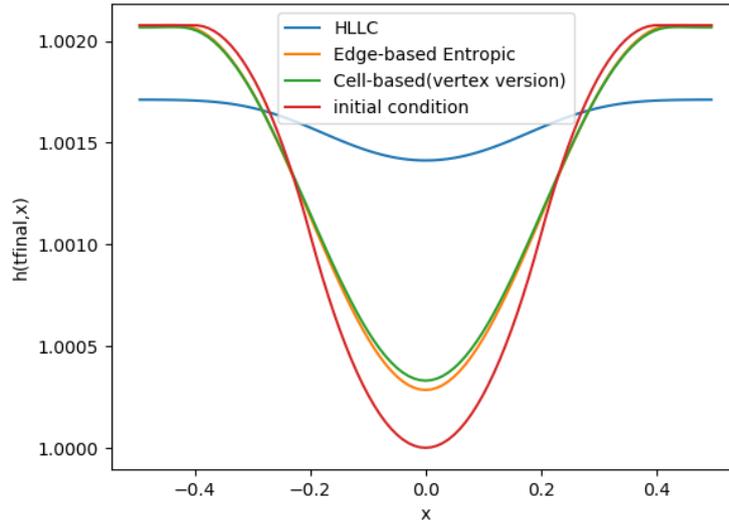


FIGURE 3.6 – Coupe en $y = 0$ des hauteurs d'eau pour les schémas (3.5), (3.13) et (3.14) à $t = 200s$ pour $\epsilon = 0.01$ pour le cas test du vortex stationnaire.

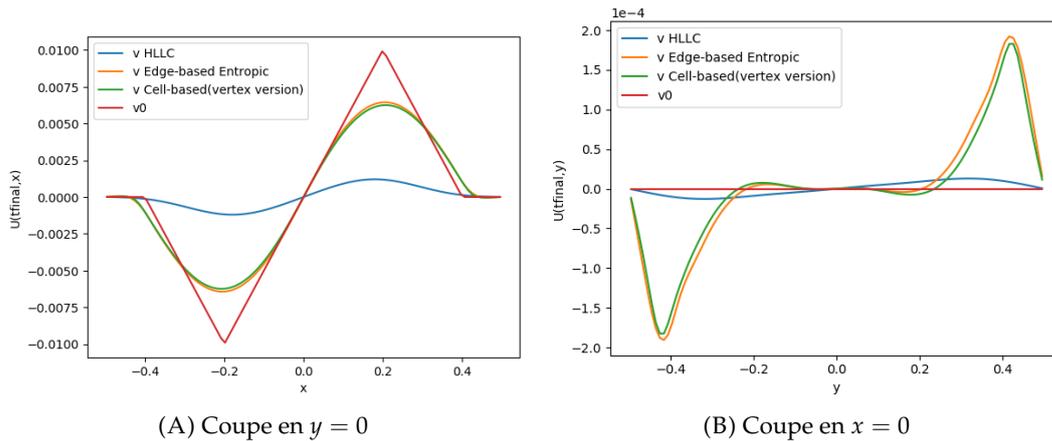


FIGURE 3.7 – Coupes de la vitesse v pour les schémas (3.5), (3.13) et (3.14) à $t = 200s$ pour $\epsilon = 0.01$ dans le cas du vortex stationnaire.

On peut aussi confirmer, grâce à la Figure 3.8, que l'énergie de nos schémas durant cette simulation est bien décroissante, ce qui est l'une des propriétés primordiales que l'on souhaitait satisfaire. Elle semble décroître moins rapidement que pour le schéma HLLC, mais cette comparaison n'est pas vraiment significative puisque les schémas ont des comportements très différents, et ne se dirigent pas vers le même équilibre : comme signalé précédemment, le schéma HLLC va tendre vers l'équilibre du lac au repos, tandis que nos schémas préservent le vortex stationnaire.

3.3.5.2 Rivière

Le vortex stationnaire présentant des résultats satisfaisants, on s'intéresse maintenant à un autre équilibre, qui est l'équivalent du lac au repos pour le système de Saint-Venant avec force de Coriolis. Il consiste en un flux d'eau parcourant un canal, avec une surface libre inclinée, satisfaisant l'équilibre géostrophique $g\nabla h + \omega \mathbf{u}^\perp =$

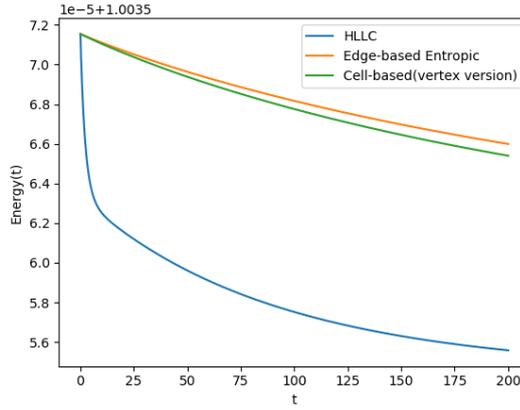


FIGURE 3.8 – Énergie des schémas (3.5), (3.13) et (3.14) pour $\epsilon = 0.01$ dans le cas du vortex stationnaire.

0. On place des conditions de bord de type mur en $x = -0.5$ et $x = 0.5$, et des conditions périodiques en $y = -0.5$ et $y = 0.5$, ces conditions permettant de reproduire une rivière. Une des particularités intéressantes de ce cas test est qu'il est à la fois un équilibre géostrophique et une solution stationnaire des équations de Saint-Venant non-linéaires avec force de Coriolis. On espère donc que notre schéma numérique préserve exactement cette solution.

La condition initiale s'écrit :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon}{\omega} \end{pmatrix} \text{ et } \nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{8} \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $\epsilon \in \mathbb{R}_*^+$ paramètre caractérisant la pente de la rivière.

Comme précédemment, sur les Figures 3.9 et 3.11, on compare nos résultats à ceux du schéma HLLC, afin de juger des améliorations obtenues grâce aux corrections, et on affiche également la solution initiale, qui est censée être préservée. Les coupes sont prises en $x = 0$ et $y = 0$, mais sont identiques dans tout le domaine.

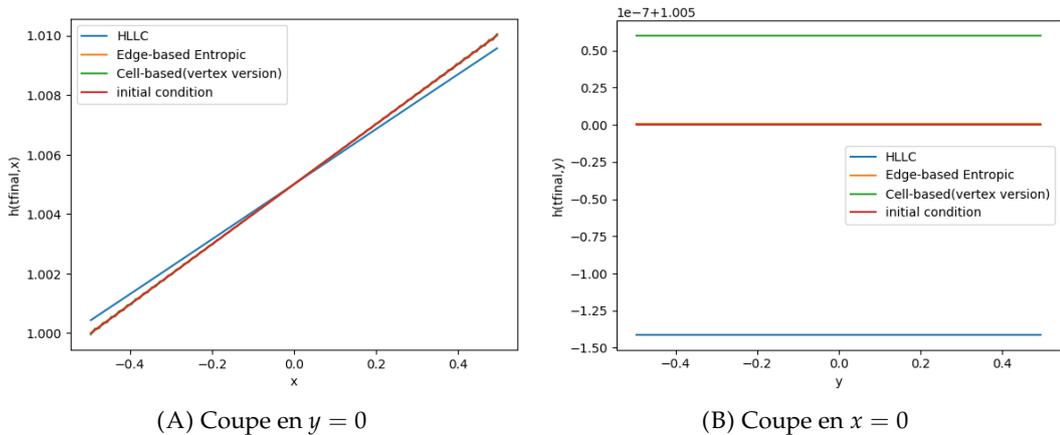


FIGURE 3.9 – Hauteurs d'eau pour les schémas (3.5), (3.13) et (3.14) à $t = 20s$, pour $\epsilon = 0.01$ et le cas test de la rivière.

Sur la Figure 3.9, on peut remarquer une différence de comportement entre nos deux schémas : le schéma (3.13), à 25 points, préserve bien la forme générale de la

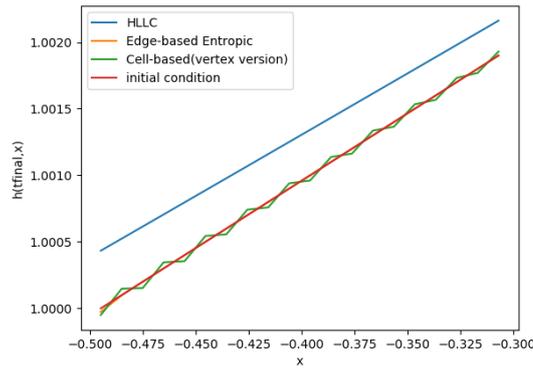


FIGURE 3.10 – Zoom de la coupe en $y = 0$ des hauteurs d'eau pour les schémas (3.5), (3.13) et (3.14) à $t = 20s$, pour $\epsilon = 0.01$ et le cas test de la rivière.

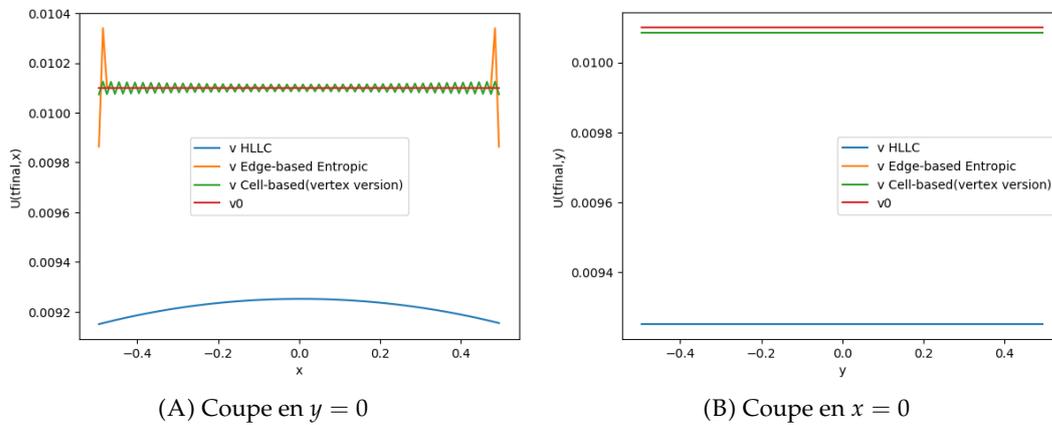


FIGURE 3.11 – Coupe de vitesse v pour les schémas (3.5), (3.13) et (3.14) à $t = 20s$, pour $\epsilon = 0.01$ et le cas test de la rivière.

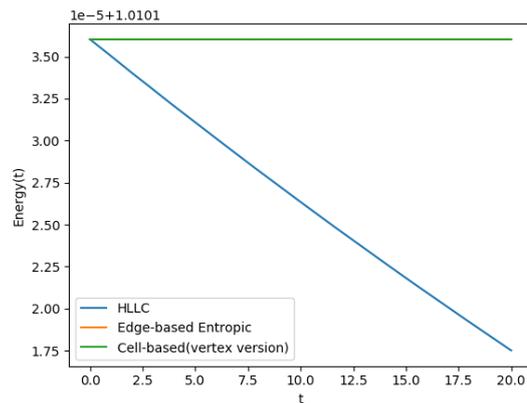


FIGURE 3.12 – Énergie des schémas (3.5), (3.13) et (3.14) pour $\epsilon = 0.01$ et le cas test de la rivière.

rivière, mais des oscillations se créent sur la coupe en $y = 0$, et trouvent leur équivalent sur la vitesse v en Figure 3.11A (les deux quantités étant liées par l'équilibre géostrophique). Le schéma (3.14), à 9 points, semble préserver exactement la solution initiale, bien que l'on puisse noter des instabilités aux bords du domaine sur la

coupe de vitesse (mieux visibles sur le zoom de la Figure 3.10). Dans les deux cas, les résultats sont meilleurs que ceux du schéma HLLC, qui a tendance à revenir au lac au repos. Cependant, bien que l'allure, à la fois de la hauteur d'eau et de la vitesse, soit relativement bien conservée, les oscillations semblent assez problématiques, en particulier si elles sont préservées. Cela tendrait à indiquer que nos schémas préservent des équilibres autres que les équilibres géostrophiques.

3.3.5.3 Dents de scie

Afin de confirmer les observations précédentes, on crée des cas tests permettant spécifiquement de vérifier le comportement de notre schéma lors de la présence d'oscillations, afin d'étudier la préservation potentielle de modes parasites par nos schémas. On construit donc deux cas tests "artificiels", en plaçant des dents de scie sur la hauteur pour le premier :

$$h(i, j) = \begin{cases} h_0 + ip & \text{si } i \text{ pair} \\ h_1 + ip \sin \alpha & \text{sinon,} \end{cases}$$

et l'une des composantes de la vitesse sur le deuxième :

$$v(i, j) = v_0(-1)^i,$$

puis en choisissant l'autre variable de manière à satisfaire l'équilibre géostrophique $g\nabla h + \omega u^\perp = 0$. Ci-dessus, h_0, h_1 et v_1 sont des constantes arbitraires, et p représente la pente moyenne de la hauteur d'eau.

On place les mêmes conditions aux bords que dans le cas test précédent, soit des conditions de type mur en $x = -0.5$ et $x = 0.5$, et des conditions périodiques en $y = -0.5$ et $y = 0.5$.

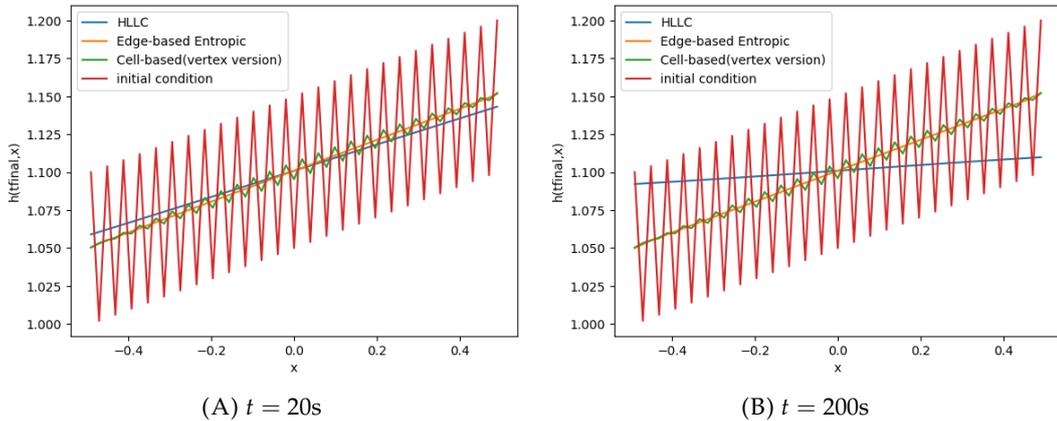


FIGURE 3.13 – Coupe en $y = 0$ de la hauteur d'eau de la solution initiale et des schémas (3.13) et (3.14) pour le premier cas test d'oscillations.

On considère pour le premier cas test, représenté sur les Figures 3.13 et 3.14, une hauteur d'eau initiale en dents de scie. On remarque, pour le schéma à 25 points, que la condition initiale n'est pas exactement préservée : la hauteur des dents diminue au cours du temps, comme on peut le voir en Figure 3.13, mais celles-ci ne disparaissent pas, même au bout d'un temps assez long. Par ailleurs, comme le montre la Figure 3.14, ces oscillations sont également transmises sur la vitesse et augmentent

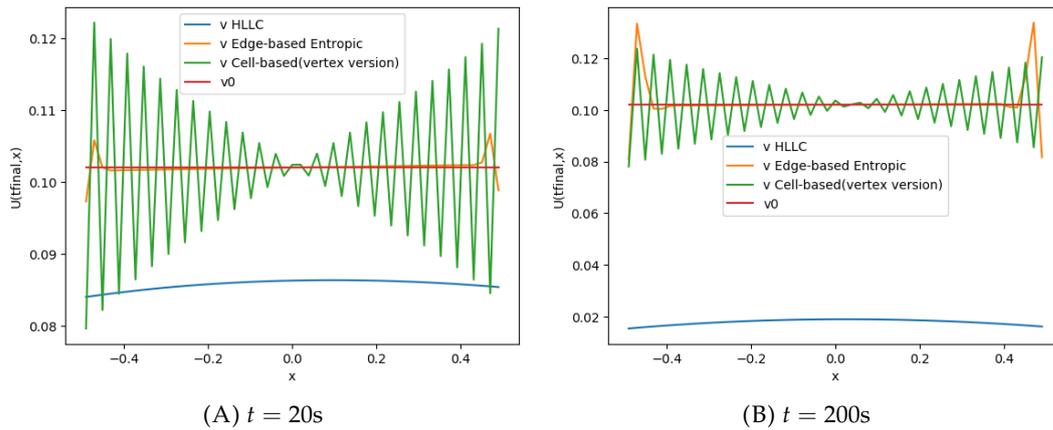


FIGURE 3.14 – Coupe en $y = 0$ de la vitesse u de la solution initiale et des schémas (3.13) et (3.14) pour le premier cas test d'oscillations.

légèrement au cours du temps. Dans le cas du schéma (3.14) à 9 points en revanche, ces oscillations disparaissent immédiatement, bien que des instabilités apparaissent à nouveau sur les bords de type mur du domaine.

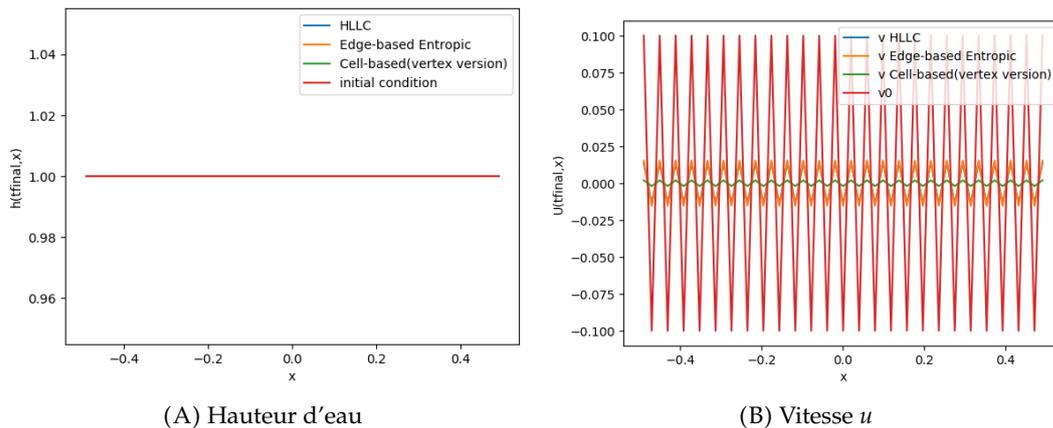


FIGURE 3.15 – Coupe en $y = 0$ de la hauteur d'eau et de la vitesse pour le second cas test d'oscillations, à $t = 200s$.

On trace en Figure 3.15 le cas du second cas test, pour lequel les oscillations sont placées sur la vitesse. Les constatations sont relativement similaires au cas avec oscillations sur la hauteur, bien que les résultats numériques des deux schémas soient cette fois impactés. On voit ainsi en Figure 3.15B que, au bout de 200 secondes, les solutions numériques gardent la même forme que la solution initiale, bien qu'atténuée en amplitude.

En regardant de plus près les opérateurs choisis pour le schéma à 25 points, la présence d'oscillations telles que celles vues ici n'est en fait pas surprenante. En effet, nos opérateurs de gradient et de divergence lient les cellules paires entre elles, et les cellules impaires entre elles, sans lien entre ces deux groupes. Des dents de scie telles que créées dans nos cas tests d'oscillations ne sont donc pas "vues" par les opérateurs, et donc peuvent être préservées. Dans le cas du schéma (3.14) à 9 points, même si son comportement semble quelque peu meilleur, il ne préserve théoriquement pas les équilibres géostrophiques discrets.

3.3.6 Améliorations possibles pour les schémas suivants

Ces deux premiers schémas nous ont permis de tirer un certain nombre de leçons, dont nous allons pouvoir tirer parti par la suite afin de créer, plus facilement, des schémas avec les propriétés recherchées. Ils restent tous deux acceptables, et donnent de meilleurs résultats qu'un schéma HLLC classique en préservant les équilibres géostrophiques, mais peuvent certainement être améliorés.

En premier lieu, la démonstration de l'inégalité d'énergie, bien que correcte telle que présentée en section 3.3.3, est assez lourde. On peut la réécrire de manière plus simple, en s'assurant au préalable que les opérateurs vérifient certaines propriétés dites mimétiques, c'est-à-dire similaires à leur équivalent continu. On peut par exemple citer l'annulation du gradient de la divergence, ou le lien entre ces deux opérateurs via le produit scalaire. Ce point est également souligné, dans le cas continu, dans l'article [Aud+18], et sera très utilisé par la suite.

Ensuite, il semble que l'écriture des opérateurs, sous forme centrée, soit l'un des principaux problèmes du schéma à 25 points. C'est un sujet connu concernant ces opérateurs, et auquel nous devons faire attention par la suite en nous dirigeant vers des opérateurs décentrés. Ainsi, afin d'éviter le même souci, créé par le fait que les opérateurs prenaient des variables définies au centre de la cellule, et renvoyaient des variables également définies au centre de la cellule, on s'intéressera donc à des opérateurs ayant pour destination un sommet ou une arête. Les schémas resteront cependant colocalisés, c'est-à-dire que toutes les variables restent définies au centre de la cellule. Pour ce faire, des opérateurs de reconstruction devront également être créés, comme cela a été fait pour le schéma à 9 points.

Enfin, un autre point que nous prendrons en compte lors de l'écriture de nos schémas, sera relatif à la cohérence du placement de l'équilibre géostrophique dans le schéma. C'est un problème mis en évidence dans le schéma à 9 points, et qu'il nous sera utile de garder en tête, lorsqu'on utilisera par la suite des opérateurs ayant pour destination les sommets ou les arêtes des cellules. En effet, dans le schéma (3.14), l'équilibre est écrit de deux manières différentes, une fois sur les arêtes et une fois au centre des cellules. Ainsi, même si l'on a l'équilibre sur l'un de ces groupes, l'autre n'est pas nécessairement soumis à la même restriction, ce qui crée des problèmes dans le schéma. Tirant leçon de cette restriction, on s'assurera par la suite de toujours écrire, dans toutes ses apparitions au sein d'un même schéma, l'équilibre géostrophique au même endroit dans la cellule.

3.4 Création de schémas par placement de l'équilibre géostrophique

Afin de résoudre les problèmes posés par les schémas précédents, il est donc nécessaire de changer les opérateurs utilisés. Ceux-ci sont cependant en partie garants des propriétés d'un schéma, et un changement n'est pas aisé. Afin de contourner le problème, on tente de placer l'équilibre géostrophique discret à différents emplacements dans la cellule et on étudie les schémas qui en découlent, ainsi que leurs différentes propriétés. Sachant que l'on souhaite garder un schéma colocalisé, c'est-à-dire que la hauteur et la vitesse d'eau sont définies dans la cellule, il existe ainsi

trois possibilités pour l'équilibre géostrophique :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_K &= \omega \mathbf{u}_K^\perp + g \nabla_K^K h_K \\ \mathcal{S}_s &= \omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + g \nabla_s^K h_K \\ \mathcal{S}_a &= \omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + g \nabla_a^K h_K\end{aligned}$$

où K , a , et s correspondent respectivement aux centre, arête et sommet de la cellule. Les opérateurs portent en exposant la position de la variable de départ et en indice celle de la variable d'arrivée, et f_*^* est une reconstruction d'un endroit à un autre, avec la même convention de notation que les opérateurs. Ainsi, ∇_K^K est un opérateur de gradient prenant une variable définie au centre de la cellule et renvoyant une variable définie de même, et f_a^K est un opérateur de reconstruction transformant une variable définie au centre d'une cellule en une variable définie sur une arête.

3.4.1 Opérateurs et propriétés mimétiques

Comme nous venons de le voir, afin de déplacer l'équilibre, il est nécessaire de définir un certain nombre de nouveaux opérateurs. Ceux-ci sont choisis de manière à être consistants avec leurs équivalents continus, et, ainsi que nous l'avons vu plus haut, en s'assurant du respect de certaines propriétés mimétiques. Pour chaque ensemble d'opérateurs, on aura besoin de deux divergences et de deux gradients (l'un allant dans un sens, par exemple des arêtes aux sommets, et l'autre dans le sens inverse), des reconstructions associées, ainsi que de la divergence *upwind* qui intervient dans le flux. Les produits scalaires sur les différents ensembles de positions (*i.e.* cellule, arête ou sommet) doivent aussi être définis.

On utilisera dans la suite les numérotations et identifications de variables présentées en Figure 3.16. Dans la cellule K , de taille $\Delta x \times \Delta y$ et d'aire m_K , on note a (de longueur $m_a = \Delta x$ ou Δy) l'arête commune avec la cellule voisine K_a et $n_{a,K}$ la normale à cette arête dirigée vers l'extérieur de K . Dans cette cellule, on notera par (i, j) les variables centrées, et par $(i \pm \frac{1}{2}, j)$ ou $(i, j \pm \frac{1}{2})$ les variables sur les arêtes. Enfin, les variables aux sommets sont désignées par $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$. Selon les situations, au sein d'une cellule K , et pour une arête $a \in \partial K$, on notera aussi parfois φ_K (ou juste φ_K si on considère une variable scalaire) la variable considérée au centre de la cellule et φ_{K_a} (ou respectivement φ_{K_a}) la valeur de la variable dans la cellule adjacente à K via l'arête a .

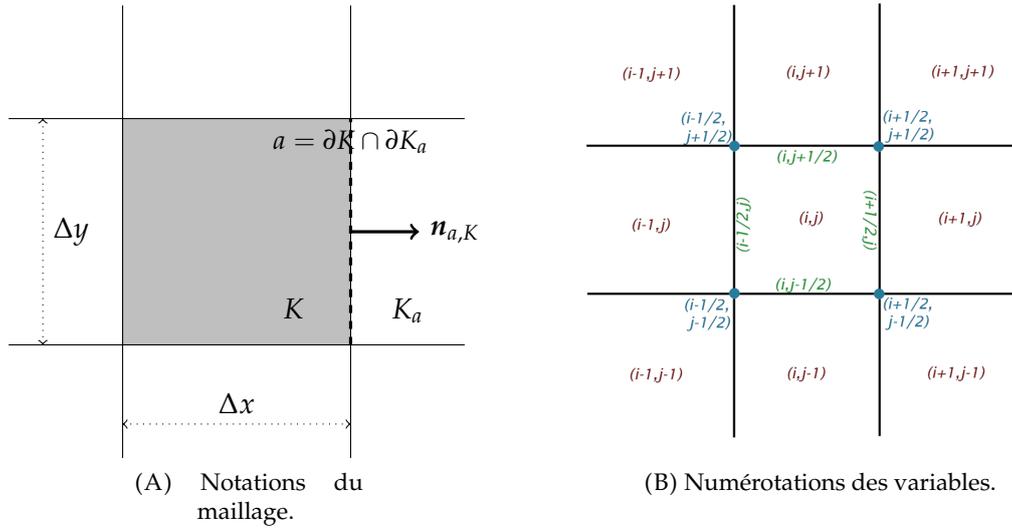


FIGURE 3.16 – Notations géométriques.

3.4.1.1 Opérateurs et reconstructions

Pour une variable $\boldsymbol{\varphi}_K = (\varphi_K, \psi_K) \in \mathbb{R}^2$ définie au centre de la cellule (i, j) , on définit les opérateurs suivants aux sommets, déjà définis en section 3.3.4 :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_s^K \boldsymbol{\varphi}_K)_{i+1/2, j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i+1, j}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i, j+1} - \varphi_{i, j}}{\Delta y} \right) \\
 (\operatorname{div}_s^K \boldsymbol{\varphi}_K)_{i+1/2, j+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i, j+1}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j}}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1, j+1} - \varphi_{i+1, j}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i, j+1} - \varphi_{i, j}}{\Delta y} \right) \\
 (f_s^K(\boldsymbol{\varphi}_K))_{i+1/2, j+1/2} &= \frac{1}{4} (\boldsymbol{\varphi}_{i+1, j+1} + \boldsymbol{\varphi}_{i, j+1} + \boldsymbol{\varphi}_{i+1, j} + \boldsymbol{\varphi}_{i, j}).
 \end{aligned}$$

Pour $\boldsymbol{\varphi}_s = (\varphi_s, \psi_s)$ défini aux sommets, on définit également les opérateurs duaux nous permettant de passer des sommets aux centres des cellules :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_K^s \boldsymbol{\varphi}_s)_{i, j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1/2, j-1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i+1/2, j-1/2}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i-1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta y} \right) \\
 (\operatorname{div}_K^s \boldsymbol{\varphi}_s)_{i, j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1/2, j+1/2} - \varphi_{i-1/2, j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1/2, j-1/2} - \varphi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta x} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_{i+1/2, j+1/2} - \psi_{i+1/2, j-1/2}}{\Delta y} + \frac{\psi_{i-1/2, j+1/2} - \psi_{i-1/2, j-1/2}}{\Delta y} \right) \\
 (f_K^s(\boldsymbol{\varphi}_s))_{i, j} &= \frac{1}{4} (\boldsymbol{\varphi}_{i+1/2, j+1/2} + \boldsymbol{\varphi}_{i-1/2, j+1/2} + \boldsymbol{\varphi}_{i+1/2, j-1/2} + \boldsymbol{\varphi}_{i-1/2, j-1/2}).
 \end{aligned}$$

On définit également la divergence *upwind* :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_K^{s,up}(\mathbf{u}_K, \mathcal{F}_s)_{i,j} = & \frac{1}{2\Delta x} \left(\mathbf{u}_{i,j} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i+1/2,j-1/2}) \cdot \mathbf{e}_x \right)^+ \right. \\ & + \mathbf{u}_{i+1,j} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i+1/2,j-1/2}) \cdot \mathbf{e}_x \right)^- \\ & + \mathbf{u}_{i,j} \left((\mathcal{F}_{i-1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j-1/2}) \cdot (-\mathbf{e}_x) \right)^+ \\ & \left. + \mathbf{u}_{i-1,j} \left((\mathcal{F}_{i-1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j-1/2}) \cdot (-\mathbf{e}_x) \right)^- \right) \\ & + \frac{1}{2\Delta y} \left(\mathbf{u}_{i,j} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j+1/2}) \cdot \mathbf{e}_y \right)^+ \right. \\ & + \mathbf{u}_{i,j+1} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j+1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j+1/2}) \cdot \mathbf{e}_y \right)^- \\ & + \mathbf{u}_{i,j} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j-1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j-1/2}) \cdot (-\mathbf{e}_y) \right)^+ \\ & \left. + \mathbf{u}_{i,j-1} \left((\mathcal{F}_{i+1/2,j-1/2} + \mathcal{F}_{i-1/2,j-1/2}) \cdot (-\mathbf{e}_y) \right)^- \right). \end{aligned}$$

On fait un travail similaire pour les opérateurs et reconstructions entre arêtes et cellules. On peut ainsi définir les opérateurs cellules vers arêtes, ainsi que leurs duaux :

$$\begin{aligned} \nabla_a^K \varphi_K &= \frac{m_a}{m_K} (\varphi_{Ka} - \varphi_K) \mathbf{n}_{a,K} & \nabla_K^a \varphi_a &= \frac{1}{m_K} \sum_{a \subset \partial K} m_a \varphi_a \mathbf{n}_{a,K} \\ \mathbf{div}_a^K \boldsymbol{\varphi}_K &= \frac{m_a}{m_K} (\boldsymbol{\varphi}_{Ka} - \boldsymbol{\varphi}_K) \cdot \mathbf{n}_{a,K} & \mathbf{div}_K^a \boldsymbol{\varphi}_a &= \frac{1}{m_K} \sum_{a \subset \partial K} m_a \boldsymbol{\varphi}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K} \\ f_a^K(\varphi_K) &= \frac{1}{2} (\varphi_{Ka} + \varphi_K) & f_K^a(\varphi_a) &= \frac{1}{2} \sum_{a \subset \partial K} \varphi_a \cdot \mathbf{n}_{a,K} \mathbf{n}_{a,K} \\ f_a^K(\boldsymbol{\varphi}_K) &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}_{Ka} + \boldsymbol{\varphi}_K) \cdot \mathbf{n}_{a,K} \mathbf{n}_{a,K} & & \end{aligned}$$

On définit également la divergence *upwind* arête vers cellule :

$$\mathbf{div}_K^{a,up}(\boldsymbol{\psi}_K \otimes \boldsymbol{\varphi}_a) = \frac{1}{m_K} \sum_{a \subset \partial K} m_a (\boldsymbol{\psi}_K (\boldsymbol{\varphi}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K})^+ + \boldsymbol{\psi}_{Ka} (\boldsymbol{\varphi}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K})^-).$$

On aura aussi besoin de définir la divergence arête vers sommet suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{div}_s^a \boldsymbol{\Phi}_a)_{i+1/2,j+1/2} = & \frac{1}{\Delta x} (\boldsymbol{\Phi}_{i+1,j+1/2} - \boldsymbol{\Phi}_{i,j+1/2}) \cdot \mathbf{e}_x \\ & + \frac{1}{\Delta y} (\boldsymbol{\Phi}_{i+1/2,j+1} - \boldsymbol{\Phi}_{i+1/2,j}) \cdot \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

3.4.1.2 Produits scalaires

Afin d'étudier nos opérateurs, et de vérifier les propriétés qu'ils possèdent, nous aurons besoin de produits scalaires sur nos différents ensembles. On note \mathbb{T} l'ensemble des cellules K du domaine, où K correspond à la cellule d'indice (i, j) (on ne note pas $K_{i,j}$ pour éviter d'alourdir les notations) et \mathcal{I}, \mathcal{J} les ensembles d'indices i et j respectivement. On note également \mathbb{S} l'ensemble des sommets s et \mathbb{A} celui des arêtes a du domaine. Ainsi, pour des variables vectorielles $(\boldsymbol{\Phi}_K)_{K \in \mathbb{T}}$ et $(\boldsymbol{\Psi}_K)_{K \in \mathbb{T}}$ définies aux cellules, $(\boldsymbol{\Phi}_s)_{s \in \mathbb{S}}$ et $(\boldsymbol{\Psi}_s)_{s \in \mathbb{S}}$ définies aux sommets, et $(\boldsymbol{\Phi}_a)_{a \in \mathbb{A}}$ et $(\boldsymbol{\Psi}_a)_{a \in \mathbb{A}}$ définies aux arêtes, on définit les produits scalaires sur tout le domaine :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_K, \Psi_K \rangle &= \sum_{K \in \mathbb{T}} \Phi_K \cdot \Psi_K = \sum_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} (\Phi_{i,j} \cdot \Psi_{i,j}) \\
\langle \Phi_s, \Psi_s \rangle &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \Phi_s \cdot \Psi_s \\
\langle \Phi_a, \Psi_a \rangle &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} (\Phi_{i+1/2,j} \cdot e_x \Psi_{i+1/2,j} \cdot e_x + \Phi_{i,j+1/2} \cdot e_y \Psi_{i,j+1/2} \cdot e_y).
\end{aligned}$$

3.4.1.3 Propriétés mimétiques

On considère séparément nos deux ensembles d'opérateurs (soit ceux sur les arêtes et ceux sur les sommets), et on vérifie qu'ils possèdent bien les propriétés dont on aura besoin pour satisfaire l'inégalité d'énergie ainsi que les états d'équilibre du schéma. Les démonstrations ne sont pas écrites en détail puisque nécessitant seulement, en général, l'écriture des opérateurs avec quelques réarrangement de sommes. Elles ont également été revérifiées par du calcul formel, grâce au logiciel Matlab.

Lemme 3.4.1. *On a les propriétés suivantes pour les opérateurs sommets-cellules :*

- i) $f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) = (f_s^K(\mathbf{u}_K))^\perp$ et $f_K^s(\mathbf{u}_K^\perp) = (f_K^s(\mathbf{u}_K))^\perp$
- ii) $\langle f_K^s(\nabla_s^K h_K), \mathbf{u}_K \rangle = -\langle h_K, f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K) \rangle$
- iii) $\operatorname{div}_K^s(f_s^K \mathbf{u}_K) = f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K)$
- iv) $\langle f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp)), \mathbf{u}_K \rangle = 0$
- v) $\langle \mathbf{u}_K, f_K^s(q_s^\perp) \rangle = -\langle f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp), q_s \rangle$ et $\langle \phi_K, \operatorname{div}_K^s q_s \rangle = -\langle \nabla_s^K \phi_K, q_s \rangle$.

Démonstration. **i)** et **iii)** : Des calculs simples permettent d'obtenir immédiatement le résultat.

ii) et **iv)** : Le réarrangement permet d'obtenir le résultat, à la condition d'avoir des conditions de bord périodiques sur h_K et \mathbf{u}_K .

v) : Comme précédemment, on réarrange la somme afin d'obtenir le résultat. En plus des conditions de bord périodiques, il faut aussi imposer $q_s = 0$ sur les sommets des bords intérieurs du domaine afin d'assurer l'élimination des termes de bords. \square

Lemme 3.4.2. *On a les propriétés suivantes pour les opérateurs arêtes-cellules :*

- i) $\langle f_K^a(\nabla_a^K \phi_K), h_K \mathbf{u}_K \rangle = -\langle \phi_K, \operatorname{div}_K^a(f_a^K(h_K \mathbf{u}_K)) \rangle$
- ii) $\langle f_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp)), \mathbf{u}_K \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} - u_{i,j} \frac{v_{i+1,j} + v_{i-1,j}}{2} \right)$
- iii) $\langle \omega \mathbf{u}_K, (f_K^a(q_a))^\perp \rangle = -\langle \omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp), q_a \rangle$ et $\langle \phi_K, \operatorname{div}_K^a q_a \rangle = -\langle \nabla_a^K \phi_K, q_a \rangle$
- iv) $\langle \pi_s, \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K \rangle = -\langle \nabla_K^s \pi_s, \mathbf{u}_K \rangle$
- v) $\operatorname{div}_s^a((f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp))^\perp) = -\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K$.

Démonstration. **i)**, **ii)** et **v)** : un réarrangement de sommes et des conditions de bord périodiques sur h_K et u_k permettent d'obtenir le résultat de manière immédiate.

iii) : comme précédemment, on réarrange les sommes. Il faut alors placer des conditions de bord périodiques et imposer $q_a = 0$ sur les arêtes du bord (respectivement $\pi_s = 0$ aux sommets du bord). \square

Remarque 3.4.3. *Contrairement au lemme 3.4.1 iv), l'expression du point ii) n'est pas nulle. Ceci est dû au choix de f_K^a et f_a^K , sous forme unidirectionnelle, qui a pour conséquence la non-commutativité des reconstructions et l'opérateur orthogonal.*

3.4.2 Équilibre sur les sommets

Comme nous l'avons vu précédemment, on tente de créer un schéma en plaçant l'équilibre ailleurs qu'au centre des cellules. Ici, on le place sur les sommets du domaine, et on utilise les opérateurs sommets-cellules. Le schéma reste cependant colocalisé, c'est-à-dire que les inconnues sont situées au centre des cellules. Ce schéma peut être vu comme la version 2D non linéaire du schéma (4.26) de la thèse de M-H Do [Do17].

3.4.2.1 Schéma semi-discret

Grâce aux opérateurs définis en section 3.4.1.1, on peut écrire le schéma semi-discret :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + \operatorname{div}_K^s \mathcal{F}_s = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + \mathbf{div}_K^{s,\mu p}(\mathbf{u}_K, \mathcal{F}_s) + h_K f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) - f_K^s(\nabla_s^K \pi_K) \\ = -\omega (h_K f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K)) - f_K^s(\mathbf{q}_s))^\perp, \end{cases} \quad (3.15)$$

où

$$\mathcal{F}_s = f_s^K(h_K \mathbf{u}_K) - \mathbf{q}_s \text{ et } \phi_K = gh_K, \quad (3.16)$$

avec les corrections

$$\mathbf{q}_s = \gamma \frac{\lambda}{g} \max(\Delta x, \Delta y) (\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K), \quad (3.17)$$

et

$$\pi_K = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) h_K f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K), \quad (3.18)$$

où γ et ν sont des constantes positives adimensionnées, et λ est une vitesse caractéristique positive. Usuellement, et suivant l'exemple de [Aud+18], on prend

$$\lambda = \max_K (\|\mathbf{u}_K\| + \sqrt{gh_K}).$$

Remarque 3.4.4. Le terme $f_K^s(\nabla_s^K \pi_K)$ force le schéma à nécessiter un stencil à 25 points, sans cela, 9 points seraient suffisants. Comme pour le schéma (3.13), ce stencil est particulièrement gênant pour la modélisation et l'intégration dans des codes pré-existants.

Les équations modifiées associées au schéma (3.15) sont :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u} - \mathbf{q}) = 0, \\ \partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes (h\mathbf{u} - \mathbf{q})) + gh\nabla h - \nabla\pi + \omega(h\mathbf{u} - \mathbf{q})^\perp = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

En effet, le terme $f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K))$ est une moyenne pondérée de \mathbf{u}_K dans les 9 cellules entourant la cellule K , et est donc bien consistant avec \mathbf{u} . Les autres termes sont clairement consistants avec leur équivalent continu, grâce à la définition de nos opérateurs discrets.

On souhaite maintenant étudier les propriétés de ce schéma, en particulier la décroissance de son énergie, ainsi que ses états d'équilibre.

3.4.2.2 Énergie semi-discrète

Lemme 3.4.5 (Énergie potentielle). *On pose $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}g(h_K)^2$ pour tout $K \in \mathbb{T}$. Alors :*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_K + \phi_K \operatorname{div}_K^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) - \phi_K \operatorname{div}_K^s \mathbf{q}_s = 0. \quad (3.20)$$

Lemme 3.4.6 (Énergie cinétique). *On pose $\mathcal{K}_K = \frac{1}{2}h_K \|\mathbf{u}_K\|^2$ pour tout $K \in \mathbb{T}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{K}_K + \frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{s,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \otimes \mathcal{F}_s) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) \\ \leq -\omega(h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp))) - \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\mathbf{q}_s^\perp) + \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \pi_K). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Démonstration. En utilisant **i)** du lemme 3.4.1 ainsi que (3.15), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} h_K \|\mathbf{u}_K\|^2 \right) &= \mathbf{u}_K \cdot \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \frac{d}{dt} h_K \\ &= -h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) - \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{div}_K^{s,up} (\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_s) + \omega \mathbf{u}_K \cdot (f_K^s(\mathbf{q}_s))^\perp \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \operatorname{div}_K^s(\mathcal{F}_s) + \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \pi_K) - \omega h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp)). \end{aligned}$$

Quelques calculs nous permettent alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \operatorname{div}_K^s(\mathcal{F}_s) - \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{div}_K^{s,up} (\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_s) \\ = -\frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{s,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \otimes \mathcal{F}_s) + \frac{1}{2m_K} \sum_{e \subset \partial K} \|\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_{Ke}\|^2 (f_a^s(\mathcal{F}_s) \cdot \mathbf{n}_{e,k})^-. \end{aligned}$$

Le deuxième terme à droite de l'égalité étant positif, on obtient l'inégalité (3.20). \square

On réunit les relations (3.20) et (3.21) afin d'obtenir les estimations suivantes sur l'énergie $E_K = \mathcal{E}_K + \mathcal{K}_K$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_K + \frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{s,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \otimes \mathcal{F}_s) + \phi_K \operatorname{div}_K^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) \\ \leq -\omega(h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp))) - \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\mathbf{q}_s^\perp) + \phi_K \operatorname{div}_K^s \mathbf{q}_s + \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \pi_K). \end{aligned}$$

Par télescopage, et grâce aux conditions de bord périodiques, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} (\mathbf{div}_K^{s,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \otimes \mathcal{F}_s)) = 0.$$

Les points **ii)** et **iii)** du lemme 3.4.1, puis le **iv)** du lemme 3.4.1 nous permettent alors d'écrire :

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(\phi_K \operatorname{div}_K^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) \right) = 0,$$

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp)) \right) = 0.$$

Finalement, les points **v)** et **ii)** du lemme 3.4.1 conduisent à l'inégalité d'énergie semi-discrète suivante :

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \frac{d}{dt} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} E_K \right) \\ \leq -\Delta x \Delta y \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(\pi_K f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K) \right) + \sum_{s \in \mathbb{S}} \left(\mathbf{q}_s \cdot (\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K(\phi_K)) \right) \right). \end{aligned}$$

Avec nos choix de corrections (3.17) et (3.18), nous avons ainsi bien obtenu un équivalent semi-discrète de l'égalité d'énergie continue (3.2).

3.4.2.3 États d'équilibre

Comme nous l'avons signalé en section 3.2.2.2, les équilibres géostrophiques sont définis comme les solutions stationnaires de la version linéarisée du système de Saint-Venant avec force de Coriolis. Afin d'étudier le comportement du schéma (3.15) dans ce cas, il nous faut donc considérer son linéarisé, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + h_0 \operatorname{div}_K^s \left(f_s^K(\mathbf{u}_K) \right) - h_0 \operatorname{div}_K^s \tilde{\mathbf{q}}_s = 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_K + f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) - f_K^s(\nabla_s^K \tilde{\pi}_K) = -\omega \left(f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K)) - f_K^s(\tilde{\mathbf{q}}_s) \right)^\perp, \end{cases} \quad (3.22)$$

où

$$\tilde{\mathbf{q}}_s = \gamma \frac{\lambda}{g h_0} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K \right) \text{ et } \tilde{\pi}_K = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K).$$

Cette écriture nous permet de voir immédiatement que l'ensemble des équilibres géostrophiques exprimés aux sommets des cellules est inclus dans le noyau discret du schéma :

$$\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K = 0 \implies f_K^s(\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K) = 0.$$

Le schéma linéarisé n'assure par contre pas que $\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K = 0$ lorsque l'on se place à l'équilibre géostrophique. L'écriture de π_K (3.18) permet cependant de contourner ce problème, puisque l'on a bien $f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K) = 0$ à l'équilibre.

$$\begin{aligned} \text{Démonstration. } \omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K = 0 &\implies f_s^K(\mathbf{u}_K) = \frac{(\nabla_s^K \phi_K)^\perp}{\omega} \\ &\implies \operatorname{div}_K^s \left(f_s^K(\mathbf{u}_K) \right) = \operatorname{div}_K^s \left(\frac{(\nabla_s^K \phi_K)^\perp}{\omega} \right) = 0 \end{aligned}$$

puis, en utilisant le **iii)** du lemme 3.4.1 : $f_K^s(\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K) = 0$. \square

Les corrections \mathbf{q}_s et π_K sont donc bien nulles lorsque l'équilibre géostrophique est maintenu sur les sommets, et le schéma linéarisé (3.22) préserve alors cet équilibre.

On a ainsi obtenu un schéma dans lequel l'équilibre géostrophique s'écrit sur les sommets du domaine, qui vérifie une inégalité d'énergie et qui préserve les états d'équilibre, mais dont le *stencil* comporte une fois encore 25 points. Comme précédemment, des tests seront nécessaires pour vérifier le comportement du schéma, ainsi que s'assurer que son noyau ne contient pas de modes parasites, comme c'était

le cas pour le schéma (3.14). Ces tests sont effectués après l'obtention des deux autres schémas, qui reposent sur l'équilibre écrit sur les arêtes et les cellules respectivement.

3.4.3 Équilibre sur les arêtes

Le placement de l'équilibre sur les sommets ne semblant pas poser de problème, on effectue le même travail en plaçant cette fois l'équilibre sur les arêtes. Cela nous permettra de voir les différences induites par ce choix de placement, et ainsi d'obtenir le meilleur schéma possible. On rappelle que les inconnues restent placées au centre des cellules.

3.4.3.1 Schéma semi-discret

A l'aide des opérateurs sommets-arêtes définis en section 3.4.1.1, on peut écrire le schéma semi-discret :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + \operatorname{div}_K^a \mathcal{F}_a = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + \mathbf{div}_K^{a,up} (\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_a) + h_K f_K^a (\nabla_a^K \phi_K) \\ \quad - \nabla_K^s \pi_s = -\omega h_K f_K^a (f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp)) + \omega (f_K^a (\mathbf{q}_a))^\perp, \end{cases} \quad (3.23)$$

où le flux d'interface est défini par :

$$\mathcal{F}_a = f_a^K (h_K \mathbf{u}_K) - \mathbf{q}_a, \quad (3.24)$$

avec

$$\mathbf{q}_a = \gamma \frac{\lambda}{g} \max(\Delta x, \Delta y) (\omega f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K), \quad (3.25)$$

et

$$\pi_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) f_s^K (h_K) \operatorname{div}_s^K (\mathbf{u}_K), \quad (3.26)$$

où γ et ν sont des constantes positives adimensionnées, et λ est une vitesse caractéristique positive donnée, comme précédemment, par $\lambda = \max_K (\|\mathbf{u}_K\| + \sqrt{gh_K})$.

3.4.3.2 Énergie semi-discrète

En utilisant le lemme 3.4.2, les calculs sont similaires à ceux du schéma avec équilibre sur les sommets (3.13), et nous permettent d'obtenir l'expression de π et q . Cependant, contrairement au schéma (3.15), l'un des termes ne s'annule pas et cause une création d'énergie : c'est le point ii) du lemme 3.4.2. Les tests tendent à prouver que ce terme ne cause pas d'aberrations dans les simulations, sauf en temps très long.

On notera que ce schéma est comparable au schéma à 9 points (3.14) présenté dans la partie 3.3. Ainsi, ce dernier possédait aussi un équilibre écrit (entre autres) sur les arêtes, et conservait, contrairement au schéma (3.23), une inégalité d'énergie mais pas les états d'équilibre.

3.4.3.3 États d'équilibre

Le linéarisé du schéma (3.23) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + h_0 \operatorname{div}_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K)) - h_0 \operatorname{div}_K^a \tilde{\mathbf{q}}_a = 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_K + f_K^a(\nabla_a^K \phi_K) - \nabla_K^s \tilde{\pi}_s = -\omega f_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp)) + \omega (f_K^a(\tilde{\mathbf{q}}_a))^\perp, \end{cases}$$

où $\tilde{\mathbf{q}}_a = \gamma \frac{\lambda}{gh_0} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K \right)$ et $\tilde{\pi}_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K$.

Lorsque l'on place les arêtes à l'équilibre géostrophique, c'est-à-dire quand $\omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K = 0$, on a :

- $f_K^a(\nabla_a^K \phi_K) + \omega f_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp)) = f_K^a(\nabla_a^K \phi_K + \omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp)) = 0$ en utilisant le lemme 3.4.2 v),
- $\operatorname{div}_s^a((f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp))^\perp) = -\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K = \operatorname{div}_K^a \left(-\frac{(\nabla_a^K \phi_K)^\perp}{\omega} \right) = 0$,

On souhaiterait finalement annuler le terme $\operatorname{div}_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K))$ afin d'avoir stabilité des états d'équilibre. En se plaçant à l'équilibre géostrophique sur toutes les arêtes du domaine, on parvient à exprimer l'exprimer dans la cellule (i, j) , en utilisant seulement les vitesses dans les cellules d'indices $(i \pm 2, j)$ et $(i, j \pm 2)$. De proche en proche, nous pensons qu'il sera alors possible d'exprimer ce terme en utilisant seulement les vitesses dans les cellules d'indices $(i \pm k, j)$ et $(i, j \pm k)$, avec k arbitrairement grand, ce qui permettrait ainsi de l'annuler en se servant des conditions de bord. La complexité des calculs requis nous a cependant empêchés de démontrer formellement ce résultat. Les cas tests numériques semblent néanmoins indiquer que le schéma (3.23) a le même comportement que les autres schémas préservant les équilibres géostrophiques : nous considérerons donc par la suite que le schéma (3.23) vérifie bien cette propriété, même si nous sommes actuellement incapables de le prouver, et dirons, afin de faire la distinction, qu'il pseudo-préserve les équilibres géostrophiques.

3.4.4 Équilibre sur les cellules

Le problème du schéma (3.13) étant dû à l'écriture des opérateurs, et non au placement de l'équilibre géostrophique, on le revisite en utilisant des opérateurs arêtes-cellules et sommets-cellules, mais en gardant l'équilibre au centre des cellules.

3.4.4.1 Schéma semi-discret

Le schéma semi-discret s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + \operatorname{div}_K^a(f_a^K(\mathcal{F}_K)) = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + \operatorname{div}_K^{a,up}(\mathbf{u}_K \otimes f_a^K(\mathcal{F}_K)) + h_K \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) \\ \quad - \nabla_K^s \pi_s = -\omega (h_K \mathbf{u}_K - \mathbf{q}_K)^\perp, \end{cases} \quad (3.27)$$

où le flux d'interface \mathcal{F}_K est défini par :

$$\mathcal{F}_K = h_K \mathbf{u}_K - \mathbf{q}_K, \quad (3.28)$$

avec

$$\mathbf{q}_K = \gamma \frac{\lambda}{g} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) \right), \quad (3.29)$$

et

$$\pi_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) f_s^K(h_K) \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K, \quad (3.30)$$

où, comme précédemment, γ et ν sont des constantes positives adimensionnées, et λ est une vitesse caractéristique positive donnée par $\lambda = \max_K \left(\|\mathbf{u}_K\| + \sqrt{gh_K} \right)$.

On peut commencer par remarquer que ce schéma possède un *stencil* à 13 points, qui nécessite à nouveau deux rangées de cellules fantômes. Ceci sera probablement rédhibitoire, mais étudions quand même les propriétés de ce schéma en terme d'énergie et d'états d'équilibre.

3.4.4.2 Énergie semi-discrète

En utilisant **iv)** du lemme 3.4.2 et **v)** du lemme 3.4.1, les calculs sont extrêmement similaires à ceux du schéma (3.15) et nous permettent de déterminer l'expression des corrections π et q . On obtient ainsi une inégalité d'énergie pour le schéma :

$$\Delta x \Delta y \frac{d}{dt} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} E_K \right) \leq -\Delta x \Delta y \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(\pi_s f_s^K(h_K) \right) + \sum_{v \in \mathbb{V}} \left(\mathbf{q}_K \cdot \left(\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) \right) \right) \right).$$

3.4.4.3 États d'équilibre

Le linéarisé du schéma (3.27) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + h_0 \operatorname{div}_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K)) - h_0 \operatorname{div}_K^a(f_a^K(\tilde{\mathbf{q}}_K)) = 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_K + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) - \nabla_K^s \tilde{\pi}_s = -\omega(\mathbf{u}_K - \tilde{\mathbf{q}}_K)^\perp, \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_K = \gamma \frac{\lambda}{gh_0} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K.$$

Lorsque l'équilibre géostrophique est conservé dans les cellules, c'est-à-dire quand $\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) = 0$, on a :

- $\operatorname{div}_K^a(f_a^K(\mathbf{u}_K)) = \frac{1}{\omega} \operatorname{div}_K^a \left(f_a^K \left((\nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)))^\perp \right) \right) = 0,$
- $\tilde{\mathbf{q}}_K = \gamma \frac{\lambda}{gh_0} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)) \right) = 0,$
- $\operatorname{div}_s^K(\mathbf{u}_K) = \frac{1}{\omega} \operatorname{div}_s^K \left((\nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)))^\perp \right) = 0$ d'où $\tilde{\pi}_s = 0$.

On voit ainsi immédiatement que l'équilibre géostrophique sur les arêtes est inclus dans le noyau discret du système.

Remarque 3.4.7. Comme $\operatorname{div}_a^K \left((\nabla_K^a(f_a^K(\phi_K)))^\perp \right) \neq 0$, la localisation de la correction π sur les arêtes n'est pas naturelle, et ne donnera pas les propriétés d'énergie et d'équilibres voulues. Il est cependant impossible de placer π dans les cellules sans changer le *stencil* du schéma, d'où son placement sur les sommets.

Remarque 3.4.8. Le schéma (3.27) repose sur une expression de l'équilibre géostrophique dans les cellules, en passant par un opérateur sur les arêtes : $\omega \mathbf{u}_K^\perp + \nabla_K^a(f_a^K(\phi_K))$. Il est cependant également possible de passer par des opérateurs sur les sommets : $\omega \mathbf{u}_K^\perp + f_K^s(\nabla_s^K(\phi_K))$.

Ce choix conduirait à une version différente du schéma en cellules avec un stencil à 25 points, et des propriétés similaires au schéma précédent. Cependant, cette version préserve des équilibres autres que les géostrophiques, qui mènent à des oscillations similaires à celles du schéma (3.23). On ne détaillera donc pas plus cette version.

3.4.5 Résultats numériques

On étudie maintenant sur différents cas tests les comportements des schémas (3.15), (3.23) et (3.27), que l'on compare entre eux, ainsi qu'avec un schéma aux volumes finis avec flux HLLC. On étudie à chaque fois la hauteur d'eau h , la vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$, ainsi que l'énergie des schémas. Pour ces expériences, on considère un domaine constitué de 101×101 cellules, dont les conditions de bord changeront en fonction des cas tests. On prend $g = \omega = 1$, et les coefficients de diffusion, déterminés par des tests préliminaires, sont choisis tels que $\gamma = \nu = 0.5$.

3.4.5.1 Vortex stationnaire

Comme pour les premiers schémas présentés, on commence par le cas test du vortex stationnaire non-linéaire. Des conditions de bord périodiques sont placées sur le domaine, et on prend une profondeur de vortex $\epsilon = 0.01$ et un temps de simulation de 200 secondes. Pour ce cas test, les schémas (3.15), (3.23) et (3.27) donnent les mêmes résultats. On choisit donc de n'en présenter qu'un, celui avec équilibre sur les sommets (de manière arbitraire), ainsi que le schéma HLLC pour comparaison. Sur les Figures 3.17, 3.18 et 3.19, on représente les hauteurs et vitesses d'eau obtenues à la fin de la simulation. Sur les Figures 3.20 et 3.21, on représente l'évolution, au cours de la simulation, de l'énergie et de l'erreur de profondeur du vortex.

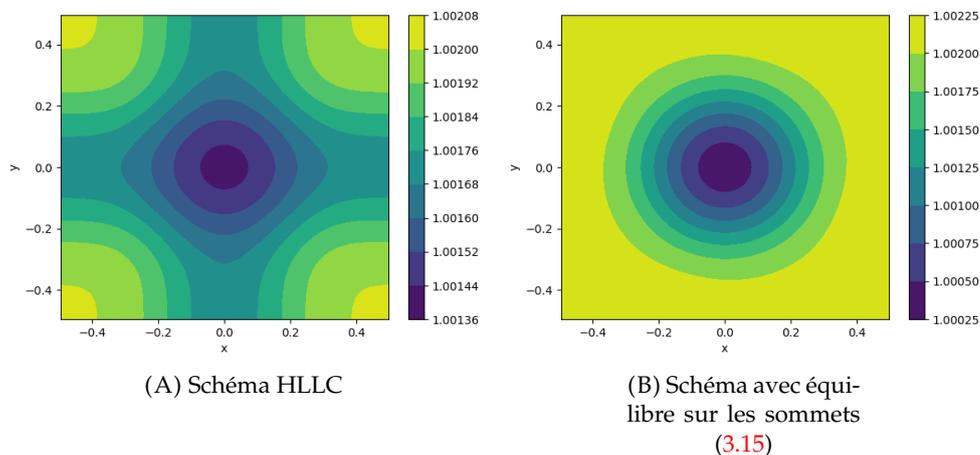


FIGURE 3.17 – Hauteur d'eau au temps final $t = 200$ s pour le cas test du vortex stationnaire.

Après 200 secondes, on remarque sur les Figures 3.17, 3.18 et 3.19 que le vortex est essentiellement préservé par le schéma avec équilibre sur les sommets. Durant ce laps de temps, la profondeur du vortex diminue légèrement, et les vitesses se lissent et s'étalent un peu, mais la forme générale du vortex reste la même. Le schéma HLLC, comme on a déjà pu le voir précédemment, ne préserve pour sa part pas du tout cette allure, tendant vers un lac au repos. On remarque cependant sur la Figure 3.20 que, pour les deux schémas, l'énergie décroît bien, ainsi que l'on s'y attendait. On ne peut cependant pas tirer de conclusion de la différence de vitesse

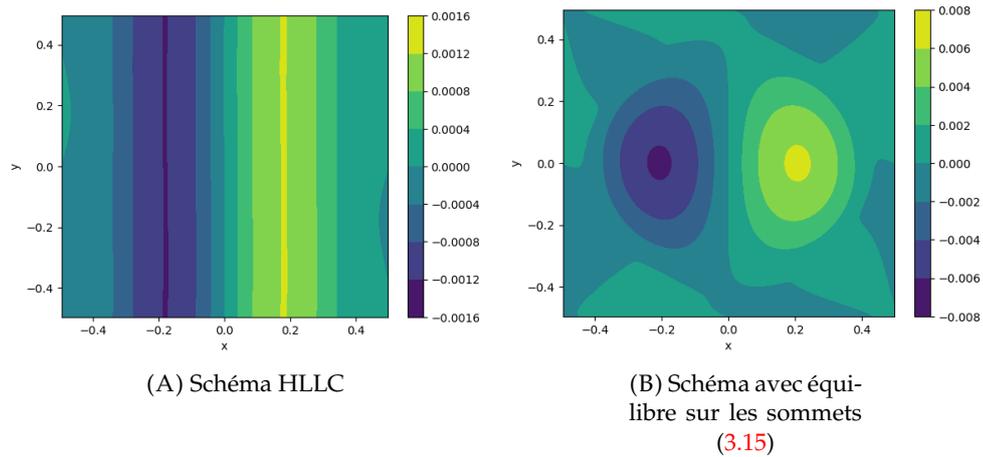


FIGURE 3.18 – Vitesse v au temps final $t = 200s$ pour le cas test du vortex stationnaire.

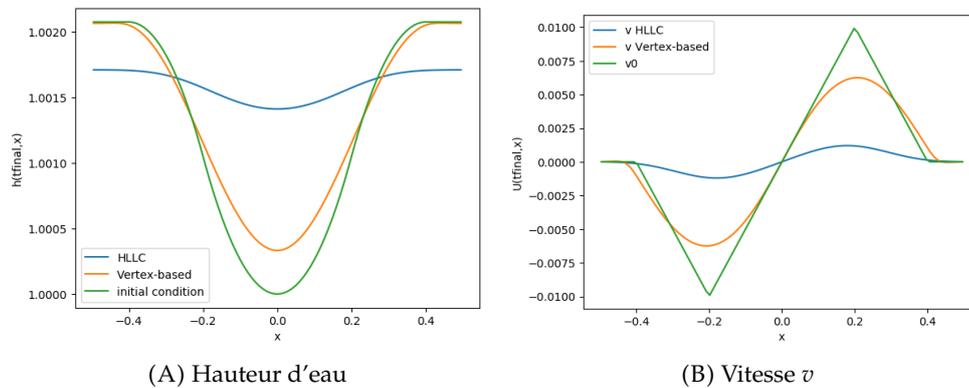


FIGURE 3.19 – Coupe en $y = 0$ des différents schémas au temps final $t = 200s$ pour le cas test du vortex stationnaire.

de décroissance, puisque les schémas ont des comportements trop différents pour permettre une comparaison significative des énergies.

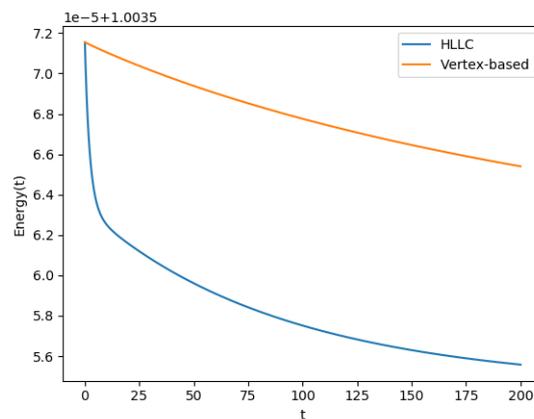


FIGURE 3.20 – Energie du système en fonction du temps pour le cas test du vortex stationnaire.

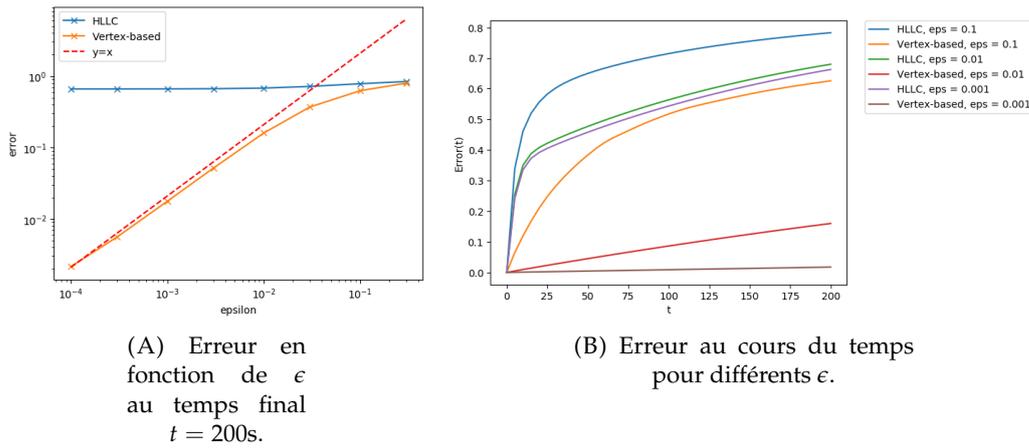


FIGURE 3.21 – Erreur relative de la profondeur par rapport à l'état initial pour différentes valeurs de ϵ pour le cas test du vortex stationnaire.

Afin de quantifier la préservation de l'équilibre géostrophique, on introduit l'erreur relative suivante, qui compare la profondeur du vortex aux temps initial et final :

$$e = \frac{|\min(h_{final}) - \min(h_{initial})|}{\max(h_{initial}) - \min(h_{initial})}.$$

On remarque ainsi sur la Figure 3.21A que l'erreur relative du schéma HLLC reste constante quel que soit le ϵ considéré, tandis qu'elle est décroissante pour le schéma avec équilibre sur les sommets. On rappelle que ϵ est lié à la profondeur initiale du vortex : plus ϵ est petit, moins le vortex est donc profond initialement, et plus le terme non-linéaire devient négligeable. Ainsi, le schéma HLLC a le même comportement quelle que soit la valeur du coefficient ϵ : le vortex stationnaire n'étant pas un équilibre pour ce schéma, ce dernier tente de rejoindre son équilibre le plus proche, *i.e.* le lac au repos, sans que l'état initial ne fasse grande différence. Pour le schéma avec équilibre sur les sommets (3.15), au contraire, le vortex stationnaire est un quasi-équilibre, d'autant plus proche d'un équilibre géostrophique que ϵ (et donc le terme non-linéaire) est petit. Ainsi, lorsque ϵ diminue, la préservation de l'état initial s'améliore et l'erreur relative diminue. Cette interprétation du comportement des schémas semble d'ailleurs confirmée par la Figure 3.21B. On voit ainsi que l'erreur relative du schéma HLLC augmente drastiquement au début, avant de se stabiliser, alors que celle du schéma (3.15) croît de manière plus ou moins linéaire, la pente étant de moins en moins importante à mesure que ϵ diminue. Le schéma HLLC s'éloigne ainsi immédiatement de l'état initial pour tenter de retourner vers le lac au repos, tandis que le schéma (3.15) reste proche de son état initial, l'erreur augmentant lentement au fur et à mesure des approximations de calculs.

3.4.5.2 Rivière

Pour rappel, ce cas test est un équilibre géostrophique qui peut être vu comme l'équivalent du lac au repos, et qui consiste en un flux d'eau dans un canal, avec une surface libre inclinée de manière à satisfaire $g\nabla h + \omega \mathbf{u}^\perp = 0$. On place des conditions de type mur en $x = -0.5$ et $x = 0.5$, et des conditions de bord périodiques en $y = -0.5$ et $y = 0.5$. Les schémas ayant des comportements différents, on représente

sur la Figure 3.22 la hauteur et la vitesse de l'eau de nos trois schémas, ainsi que du schéma HLLC pour comparaison, après 20s de simulation.

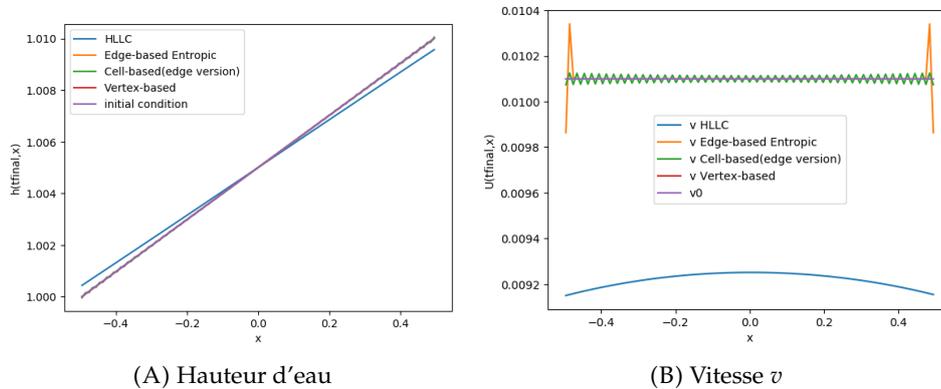


FIGURE 3.22 – Coupe en $y = 0$ des solutions à $t = 20s$ pour les différents schémas pour le cas test de la rivière.

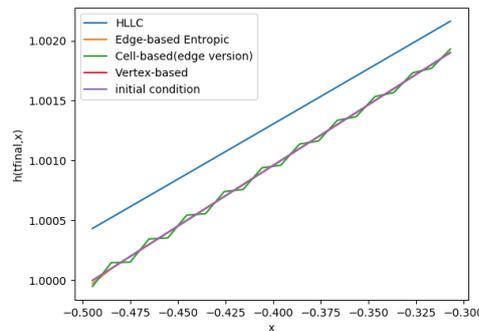


FIGURE 3.23 – Coupe en $y = 0$ des hauteurs d'eau à $t = 20s$ pour les différents schémas pour le cas test de la rivière.

Sur les Figures 3.22A et 3.22B, on peut ainsi constater que les schémas avec équilibre sur les arêtes (3.23) et les sommets (3.15) préservent la condition initiale, mais que le schéma avec équilibre au centre de la cellule (3.27) crée des oscillations comme le premier schéma que nous avons étudié, qui sont mieux visibles sur le zoom des hauteurs d'eau présenté en Figure 3.23. Celles-ci sont dues à la condition de type mur, ainsi qu'au terme $\nabla_K^a(f_a^K(\cdot))$. On remarquera en section 3.4.5.4 que ces oscillations apparaissent aussi naturellement dans le test de la colonne d'eau, et sont ensuite préservées, ce qui tend à prouver que ces oscillations sont dans le noyaux du schéma. Comme précédemment, c'est un désavantage du schéma, même si on peut noter que les valeurs moyennes de h et u correspondent à la solution stationnaire. La décroissance d'énergie attendue pour nos schémas est confirmée par la Figure 3.24.

3.4.5.3 Vortex translaté

On combine maintenant les deux cas tests précédents : en sommant le cas test de la rivière et celui du vortex stationnaire linéaire, qui sont tous deux des solutions stationnaires du système de Saint-Venant linéaire avec force de Coriolis, on obtient un vortex translaté qui devrait également être une solution stationnaire pour le linéarisé. On s'intéresse donc au comportement des schémas (3.15), (3.23) et (3.27) avec une telle condition initiale, en espérant que cette dernière soit préservée. Comme

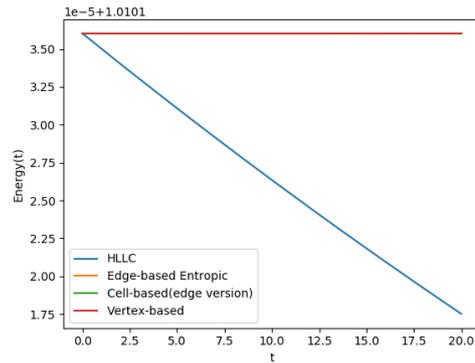
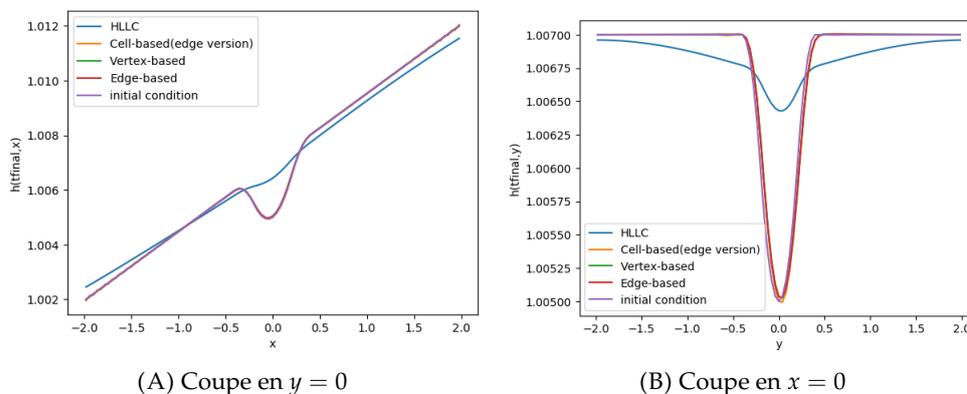


FIGURE 3.24 – Energie du système en fonction du temps pour le cas test de la rivière.

pour la rivière, on place des conditions de bord de type mur $x = -0.5$ et $x = 0.5$, et des conditions périodiques en $y = -0.5$ et $y = 0.5$. La pente de la rivière ainsi que la profondeur du vortex sont toutes deux dictées par le paramètre ϵ , ici choisi à $\epsilon = 0.01$.

Après 10 secondes, on constate sur la Figure 3.25 que le schéma HLLC ne préserve pas du tout l'état initial : le vortex s'aplatit, et la pente de la hauteur d'eau diminue. Après 500 secondes, ce schéma retourne au lac au repos. Les autres schémas ont un comportement cohérent avec ce qu'on espérait, et consistant avec les résultats des deux cas tests précédents : la profondeur du vortex diminue légèrement, mais ce dernier est globalement préservé, et la pente de la hauteur d'eau reste constante, bien que des oscillations fassent leur apparition en Figure 3.25A pour le schéma avec équilibre au centre des cellules (3.27), comme on peut le voir sur le zoom présenté en Figure 3.26. De plus, la rivière induit une translation du vortex le long de l'axe y , comme mis en évidence sur la Figure 3.27, qui représente la coupe en $x = 0$ de la hauteur d'eau pour une simulation de 25s.

Sur la Figure 3.28, on remarque que l'énergie est également celle à laquelle on s'attendrait pour cette superposition de solutions : elle est presque constante (et décroissante) pour nos trois schémas, et décroît de manière abrupte pour le schéma HLLC.



(A) Coupe en $y = 0$

(B) Coupe en $x = 0$

FIGURE 3.25 – Coupe de la hauteur d'eau à l'état initial et en $t = 10$ s pour le cas test du vortex translaté.

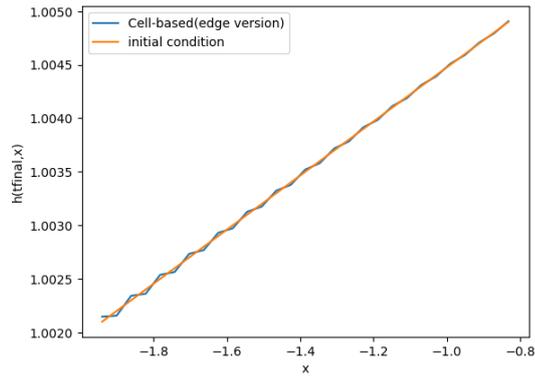


FIGURE 3.26 – Zoom de la coupe en $y = 0$ de la hauteur d'eau à l'état initial et en $t = 10$ s pour le cas test du vortex translaté.

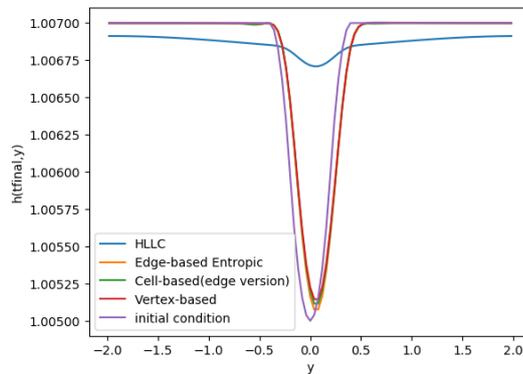


FIGURE 3.27 – Coupe en $x = 0$ de la hauteur d'eau à l'état initial et en $t = 25$ s pour le cas test du vortex translaté.

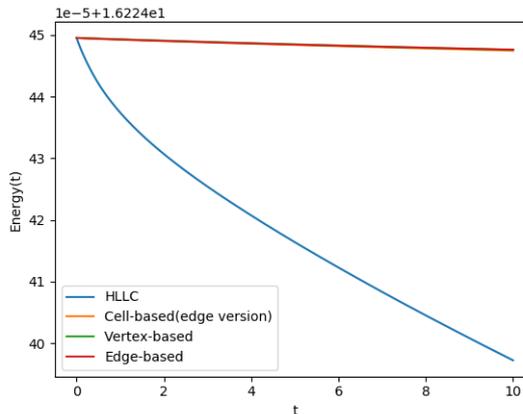


FIGURE 3.28 – Energie du système en fonction du temps pour le cas test du vortex translaté.

3.4.5.4 Colonne d'eau

Pour finir, on considère une rupture de barrage circulaire, avec des conditions périodiques au bord du domaine. A $t = 0$, la vitesse est nulle dans tout le domaine, et la hauteur d'eau est de 1m, sauf pour la colonne d'eau qui a une hauteur de 2m. Cette condition est très loin d'un équilibre géostrophique, et l'on s'intéresse donc au comportement de nos schémas avec un tel état initial.

Sur la Figure 3.29, on peut voir que tous les schémas ont le même comportement au début de la simulation : la colonne d'eau s'écroute et des vagues se propagent à travers le domaine. On remarque également l'apparition d'oscillations sur les schémas avec équilibre sur les sommets (3.15) et dans les cellules (3.27), qui disparaissent progressivement quand le système se rapproche d'un équilibre. Il est également évident sur cette simulation que nos trois schémas se dirigent vers un équilibre différent de celui atteint par le schéma HLLC. En effet, ce dernier retrouve l'équilibre du lac au repos après une centaine de secondes de simulation, alors que les autres semblent se rapprocher ce que l'on pourrait comparer à un vortex stationnaire inversé (cf Figure 3.30).

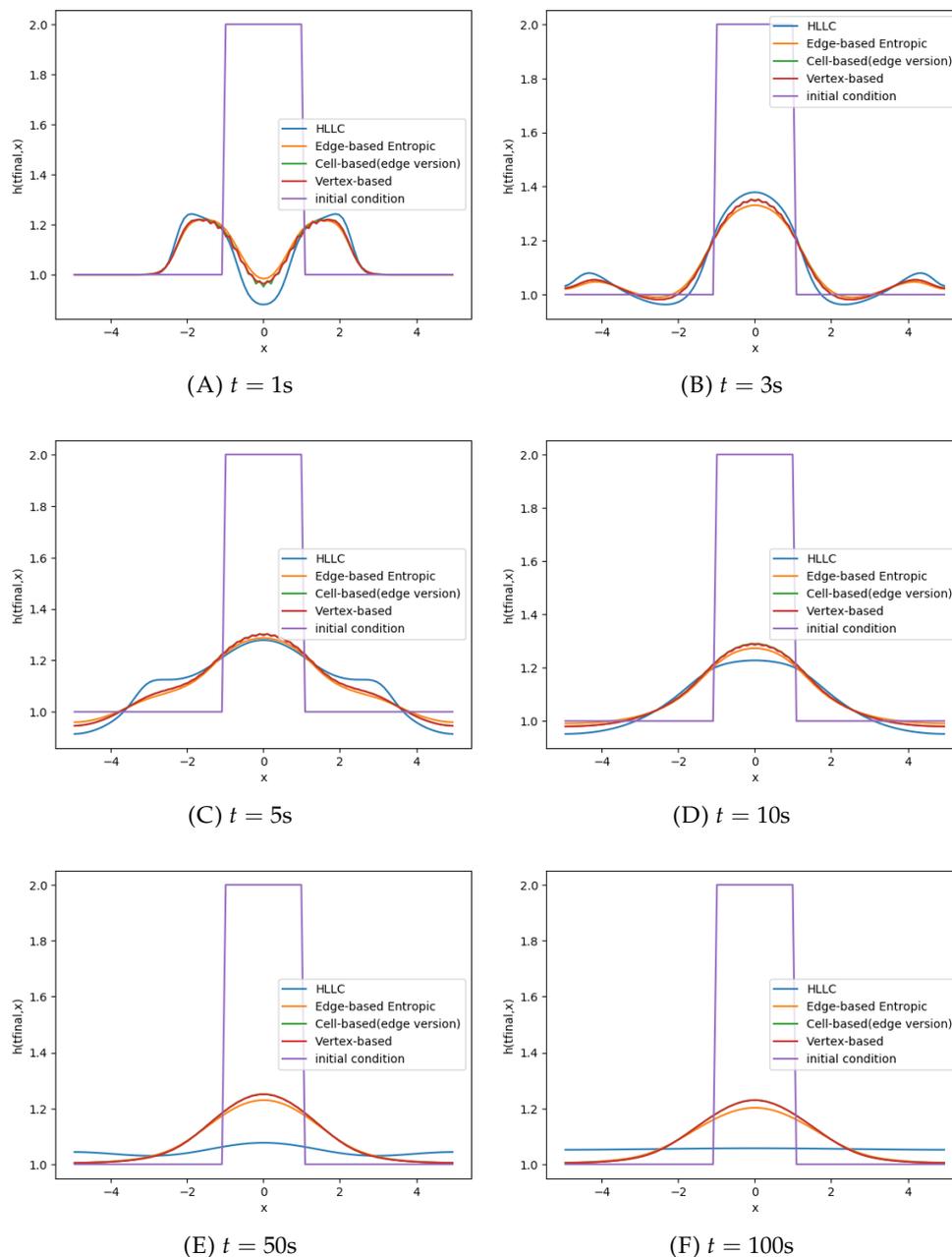


FIGURE 3.29 – Coupe en $y = 0$ et en différents instants des résultats numériques et de la solution initiale pour le cas test de la colonne d'eau.

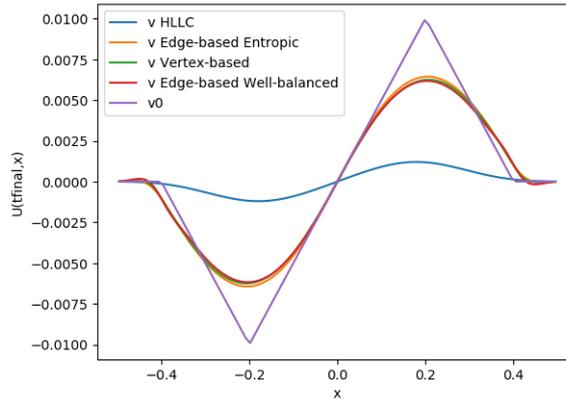


FIGURE 3.30 – Coupe en $y = 0$ de la vitesse u à $t = 100s$ pour le cas test de la colonne d'eau.

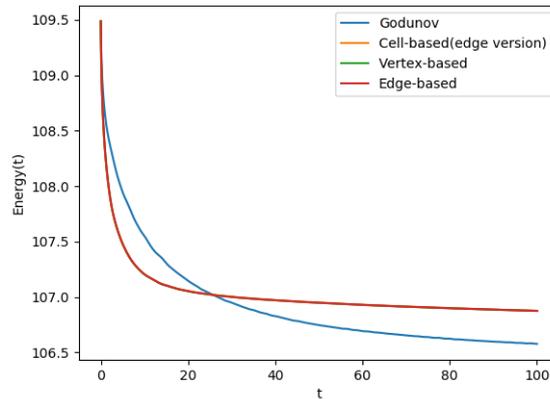


FIGURE 3.31 – Énergie du système au cours du temps pour le cas test de la colonne d'eau.

Sur la Figure 3.31, on peut également noter que tous les schémas ont une énergie décroissante au cours de la simulation. Ces observations semblent montrer que, pour ce cas test, le schéma avec équilibre sur les arêtes (3.15) a le meilleur comportement (il ne crée pas d'oscillations), bien que ne possédant pas toutes les propriétés voulues.

Pour mieux voir l'évolution en temps long, nous considérons une colonne d'eau de hauteur 1.1. L'absence de décroissance de l'énergie du schéma (3.23) vue mathématiquement plus haut peut alors s'observer sur ce cas test, comme on peut le voir en Figure 3.32. En temps très long, on peut ainsi constater que l'énergie évolue en un pic et que la vitesse connaît des oscillations.

Ainsi, sur ce cas test de la colonne d'eau, tous nos schémas présentent des défauts, qui peuvent être esquivés selon l'étude que l'on souhaite faire de la situation. On choisira donc plutôt le schéma (3.23) avec équilibre sur les arêtes pour observer le comportement dynamique en temps court, et l'un des deux autres schémas, (3.15) ou (3.27), afin d'étudier les équilibres en temps long. Malgré ces défauts, nos schémas restent plus performants qu'un schéma HLLC classique dans la capture des équilibres géostrophiques.

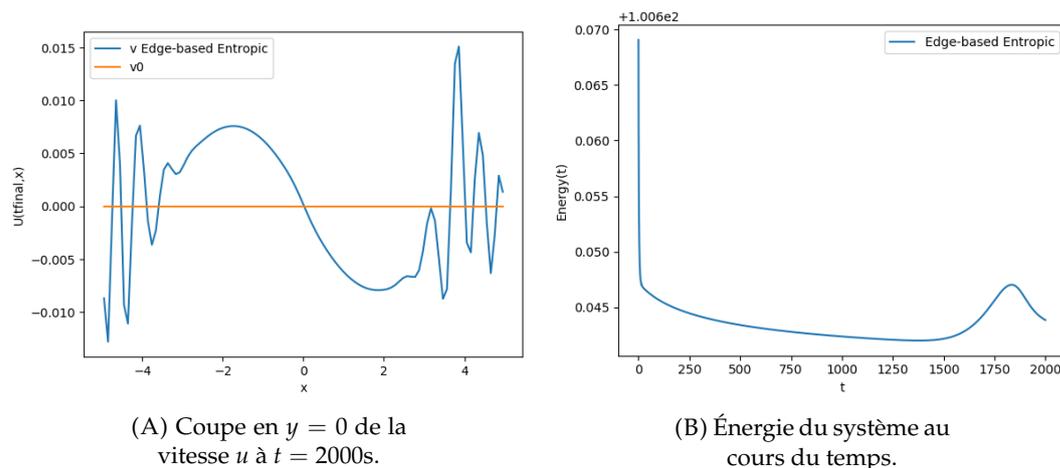


FIGURE 3.32 – Instabilité du schéma avec équilibre sur les arêtes en temps long, pour une colonne d'eau de hauteur 1.1.

3.4.6 Avantages et inconvénients des trois schémas

Les trois schémas présentés dans cette section sont intéressants, puisque meilleurs que les schémas classiques, comme le schéma HLLC auquel nous les avons comparés, mais présentent tout de même chacun quelques désagréments. Ainsi, le schéma avec équilibre sur les arêtes (3.23) a l'avantage d'avoir un *stencil* à 9 points et pseudo-préserve les équilibres géostrophiques, mais on ne peut assurer la préservation de l'énergie semi-discrète. Même si cela ne semble pas poser de problème sur des simulations courtes, on a pu voir en temps long que l'énergie peut augmenter. Le schéma (3.27) avec équilibre au centre des cellules préserve également les équilibres géostrophiques et assure la décroissance de l'énergie semi-discrète. Cependant, le noyau du schéma est trop gros et contient des équilibres autres que les géostrophiques, notamment certaines oscillations. De plus, son *stencil* à 13 points impose deux rangées de cellules de fantômes et limite son intégration à des codes déjà existants. Enfin, le schéma avec équilibre sur les sommets (3.15) possède les mêmes propriétés d'énergie semi-discrète et d'états d'équilibre, mais aussi les mêmes inconvénients : des modes parasites apparaissent, moins fréquemment que pour l'autre schéma, et son *stencil* à 25 points limite son utilisation.

En étudiant les 5 schémas présentés jusqu'à présent, on constate ainsi que les schémas sur les arêtes semblent permettre un *stencil* plus réduit, les opérateurs différentiels y étant naturellement plus simples. Cependant, ce placement de l'équilibre géostrophique ne permet pas de créer des schémas possédant les deux propriétés voulues. Par ailleurs, les schémas semblent accepter des modes parasites, à l'exception du schéma (3.14) à 9 points présenté en partie 3.3. La robustesse de ce dernier face à ce type de solution s'explique par la dualité d'écriture de l'équilibre géostrophique, une fois sur les arêtes et une fois au centre des cellules, qui a également pour conséquence malvenue d'empêcher la préservation de certains équilibres géostrophiques.

Au vu de toutes ces informations, il semble donc que, pour obtenir le meilleur schéma possible, il nous faudrait créer un schéma dans lequel deux écritures de l'équilibre géostrophique (parmi les trois possibles), liées entre elles, apparaissent. Ceci permettrait à la fois de limiter les modes parasites, mais aussi, par le lien entre les écritures, de préserver les états d'équilibre.

3.5 Schéma final

Partant de cette idée, on étudie les différentes écritures de l'équilibre géostrophique. On peut ainsi constater que l'équilibre sur les sommets est une reconstruction de celui sur les arêtes :

$$\mathcal{S}_s = f_s^a(\mathcal{S}_a).$$

On écrit alors un schéma dans lequel l'équilibre géostrophique est reconstruit parfois sur les sommets et parfois sur les arêtes. Avant cela, de nouveaux opérateurs et reconstructions, liant sommets et arêtes, doivent être définis. Pour une variable φ , et en notant ∂a l'ensemble des sommets incidents à une arête a , et ∂s l'ensemble des arêtes incidentes à un sommet s , on a ainsi :

$$f_a^s(\varphi_s) = \frac{1}{2} \sum_{s \in \partial a} \varphi_s \cdot \mathbf{n}_{a,K} \mathbf{n}_{a,K}$$

$$f_s^a(\varphi_a) = \frac{1}{2} \sum_{a \in \partial s} \varphi_a$$

$$(\operatorname{div}_s^a \varphi_a)_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} (\varphi_{i+1, j+1/2} - \varphi_{i, j+1/2}) \cdot \mathbf{e}_x + \frac{1}{\Delta y} (\varphi_{i+1/2, j+1} - \varphi_{i+1/2, j}) \cdot \mathbf{e}_y.$$

3.5.1 Schéma semi-discret

On écrit ainsi le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + \operatorname{div}_K^a(\mathcal{F}_a) = 0, \\ \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) + \mathbf{div}_K^{a, up}(\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_a) + h_K f_K^s(\nabla_s^K \phi_K) - \nabla_K^s \pi_s \\ \quad = -\omega (h_K f_K^s(f_s^K \mathbf{u}_K) - f_K^a(q_a))^\perp, \end{cases} \quad (3.31)$$

où le flux à l'interface a est défini par :

$$\mathcal{F}_a = f_a^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) - q_a, \quad (3.32)$$

et les corrections s'écrivent :

$$q_a = \gamma \frac{\lambda}{g} \max(\Delta x, \Delta y) (\omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K) \text{ et } \pi_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) f_s^K(h_K) \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K,$$

avec, comme précédemment, γ et ν des constantes positives adimensionnées et $\lambda = \max_{K \in \mathbb{T}} (\|\mathbf{u}_K\| + \sqrt{gh_K})$.

On pourra remarquer que, comme on l'espérait, ce schéma a un *stencil* de 9 points. Il est de plus très proche du schéma (3.23), avec quelques différences dans les opérateurs, mais des corrections identiques. Étudions à présent ses propriétés théoriques, puis les résultats numériques obtenus sur quelques exemples.

3.5.2 Énergie semi-discrète

Commençons par montrer que le schéma (3.31) vérifie une inégalité d'énergie semi-discrète. Celle-ci se démontre de façon très similaire à celle des schémas précédents, et repose sur les mêmes propriétés mimétiques, présentées dans les lemmes 3.4.1 et 3.4.2, mais auxquelles on doit ajouter la propriété suivante, qui nous permet de calculer l'énergie cinétique :

Lemme 3.5.1. *On a la relation suivante : $\operatorname{div}_K^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) = \operatorname{div}_K^a(f_a^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)))$.*

Démonstration. Un réarrangement de sommes et des conditions périodiques sur h et u permettent d'obtenir le résultat de manière immédiate. \square

On commence par l'étude des énergies potentielle et cinétique discrètes.

Lemme 3.5.2 (Énergie potentielle). *En posant $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}g(h_K)^2$, pour K quelconque dans \mathbb{T} , on a :*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_K + \phi_K \operatorname{div}_K^s(f_s^K(h_K \mathbf{u}_K)) - \phi_K \operatorname{div}_K^a \mathbf{q}_a = 0. \quad (3.33)$$

Lemme 3.5.3 (Énergie cinétique). *En posant $\mathcal{K}_K = \frac{1}{2}h_K \|\mathbf{u}_K\|^2$, pour K quelconque dans \mathbb{T} , on a :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{K}_K + \frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{a,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (\nabla_s^K \phi_K) \\ \leq -\omega (h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp)) - \mathbf{u}_K \cdot (f_K^a \mathbf{q}_a)^\perp) + \mathbf{u}_K \cdot \nabla_K^s \pi_s. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Démonstration. La première équation de (3.31) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} h_K \|\mathbf{u}_K\|^2 \right) &= \mathbf{u}_K \cdot \frac{d}{dt} (h_K \mathbf{u}_K) - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \frac{d}{dt} h_K \\ &= -h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (\nabla_s^K \phi_K) - \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{div}_K^{a,up} (\mathbf{u}_K \otimes \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) + \omega \mathbf{u}_K \cdot (f_K^a \mathbf{q}_a)^\perp \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \operatorname{div}_K^a \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K} + \mathbf{u}_K \cdot \nabla_K^s \pi_s - \omega h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s(f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp)). \end{aligned}$$

Après quelques calculs, on obtient donc la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_K\|^2 \operatorname{div}_K^a (\mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) - \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{div}_K^{a,up} (\mathbf{u}_K, \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) \\ = -\frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{a,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) + \frac{1}{2\Delta x \Delta y} \sum_{e \subset \partial K} m_e \|\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_{Ke}\|^2 (\mathcal{F}_e \cdot \mathbf{n}_{e,K})^- . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le dernier terme de cette équation étant positif, on obtient le résultat annoncé. \square

Proposition 3.5.4 (Décroissance de l'énergie semi-discrète). *On définit l'énergie totale $E_K = \mathcal{E}_K + \mathcal{K}_K$ et on obtient alors l'équivalent semi-discrète de (3.2).*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} \Delta x \Delta y E_K \right) &\leq -\Delta x \Delta y \max(\Delta x, \Delta y) \left(\sum_{s \in \mathbb{S}} (v \lambda f_s^K(h_K) (\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K)^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a \in \mathbb{A}} \left(\gamma \frac{\lambda}{g} \|\omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K\|^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Démonstration. En sommant les relations (3.33) et (3.34), on obtient l'estimation suivante pour l'énergie totale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_K + \frac{1}{2} \mathbf{div}_K^{a,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) + \phi_K \operatorname{div}_K^s (f_s^K (h_K \mathbf{u}_K)) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (\nabla_s^K \phi_K) \\ \leq -\omega \left(h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (f_s^K (\mathbf{u}_K^\perp)) - \mathbf{u}_K \cdot (f_K^a q_a)^\perp \right) + \phi_K \operatorname{div}_K^a q_a + \mathbf{u}_K \cdot \nabla_K^s \pi_s. \end{aligned}$$

Par télescopage et en utilisant les conditions de bord périodiques, on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} \mathbf{div}_K^{a,up} (\|\mathbf{u}_K\|^2 \mathcal{F}_a \cdot \mathbf{n}_{a,K}) = 0.$$

En utilisant ii) et iii) du lemme 3.4.1, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(\phi_K \operatorname{div}_K^s (f_s^K (h_K \mathbf{u}_K)) + h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (\nabla_s^K \phi_K) \right) = 0.$$

Puis, avec le iv) du lemme 3.4.1, on peut écrire :

$$\sum_{K \in \mathbb{T}} \left(h_K \mathbf{u}_K \cdot f_K^s (f_s^K (\mathbf{u}_K^\perp)) \right) = 0.$$

Enfin, les points iii) et iv) du lemme 3.4.2 nous amènent à l'inégalité semi-discrète suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}} \Delta x \Delta y E_K \right) \leq -\Delta x \Delta y \left(\sum_{s \in \mathbb{S}_s} \left(\pi_s \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K \right) + \sum_{a \in \mathbb{S}_a} \left(q_a \cdot \left(\omega f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K \right) \right) \right).$$

Les choix de corrections q et π nous permettent ainsi d'obtenir le résultat. \square

Le schéma vérifiant bien une inégalité d'énergie semi-discrète, vérifions que son linéarisé préserve également les équilibres géostrophiques.

3.5.3 Préservation de l'équilibre géostrophique

Le linéarisé du schéma (3.31) autour de l'équilibre $(h_0, 0)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_K + h_0 \operatorname{div}_K^s (f_s^K \mathbf{u}_K) - h_0 \operatorname{div}_K^a \tilde{q}_a = 0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_K + f_K^s (\nabla_s^K \phi_K) - \nabla_K^s \tilde{\pi}_s = -\omega \left(f_K^s (f_s^K \mathbf{u}_K) - f_K^a \tilde{q}_a \right)^\perp, \end{cases} \quad (3.37)$$

où

$$\tilde{q}_a = \gamma \frac{\lambda}{g h_0} \max(\Delta x, \Delta y) \left(\omega f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}_s = \nu \lambda \max(\Delta x, \Delta y) \operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K.$$

Proposition 3.5.5. *Le schéma linéarisé (3.37) préserve l'équilibre géostrophique discret.*

Démonstration. Par construction des opérateurs, on a :

$$\omega f_s^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K = f_s^a \left(\omega f_a^K (\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K \right).$$

Ainsi, si on impose l'équilibre géostrophique sur les arêtes, c'est-à-dire si $\omega f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_a^K \phi_K = 0$, on obtient :

$$f_s^K(\omega f_s^K(\mathbf{u}_K^\perp) + \nabla_s^K \phi_K) = 0$$

puis en utilisant la propriété **v)** du lemme 3.4.2 :

$$\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K = -\operatorname{div}_s^a((f_a^K(\mathbf{u}_K^\perp))^\perp) = \operatorname{div}_s^a\left(\frac{(\nabla_a^K \phi_K)^\perp}{\omega}\right).$$

Des calculs simples nous permettent ensuite de déduire que $\operatorname{div}_s^K \mathbf{u}_K = 0$. En utilisant **iii)** du lemme 3.4.1, on obtient $\operatorname{div}_K^s(f_s^K \mathbf{u}_K) = 0$, et donc que $\tilde{\pi}_s$ vaut zéro quand l'équilibre géostrophique est vérifié sur les arêtes. Le schéma (3.37) préserve donc cet équilibre. \square

Les équilibres géostrophiques étant préservés, nous avons donc bien écrit un schéma possédant les deux propriétés que nous souhaitions initialement. Intéressons-nous maintenant à ses résultats numériques sur différents cas tests.

3.5.4 Résultats numériques

Afin d'étudier les performances de ce schéma (3.31), on le compare à celui avec équilibre sur les sommets (3.15). Ayant déjà établi que les résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec un schéma à flux HLLC, on tente ici de voir si on arrive à égaler ou améliorer les résultats précédents, en particulier en terme de modes parasites. On étudie donc les mêmes cas tests que précédemment, exactement dans les mêmes conditions. Dans les légendes qui suivent, "Vertex-based" est le schéma (3.15) et "Mixed Edge-Vertex" est le schéma (3.31).

3.5.4.1 Vortex stationnaire, rivière et vortex translaté

Sur les Figures 3.33, 3.34 et 3.35, on représente les résultats obtenus avec une condition initiale, respectivement, de vortex stationnaire, de rivière, et de vortex translaté, pour des temps de simulation précisés en légende. Pour chacun, on compare la condition initiale aux résultats des schémas (3.15) et (3.31), sur la hauteur d'eau ainsi que la seconde composante de la vitesse. Comme on peut le voir sur les Figures 3.33, 3.34 et 3.35, le schéma (3.31) donne des résultats similaires au schéma avec équilibre sur les sommets (3.15) pour les cas tests du vortex stationnaire, de la rivière ainsi que du vortex translaté. On ne présente pas des équivalents à toutes les figures vues à la section précédente, les évolutions des variables étant exactement identiques pour les deux schémas. Ceci nous satisfait pleinement, le schéma (3.15) ayant exactement le comportement attendu sur ces cas tests, comme nous l'avons expliqué précédemment.

Remarque 3.5.6. Sur la Figure 3.36, on a représenté la solution du vortex stationnaire à $t = 20s$ pour deux tailles de mailles différentes, sur un domaine de taille constante $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. On peut ainsi constater, ainsi que nous en avons parlé précédemment, que la solution numérique s'améliore lorsque l'on raffine le maillage.

3.5.4.2 Colonne d'eau

Le cas test de la colonne d'eau est le principal point pouvant être amélioré (numériquement parlant) par ce nouveau schéma. On espère en effet éviter les oscillations créées par les schémas précédents. Au vu de la Figure 3.37, sur laquelle on a

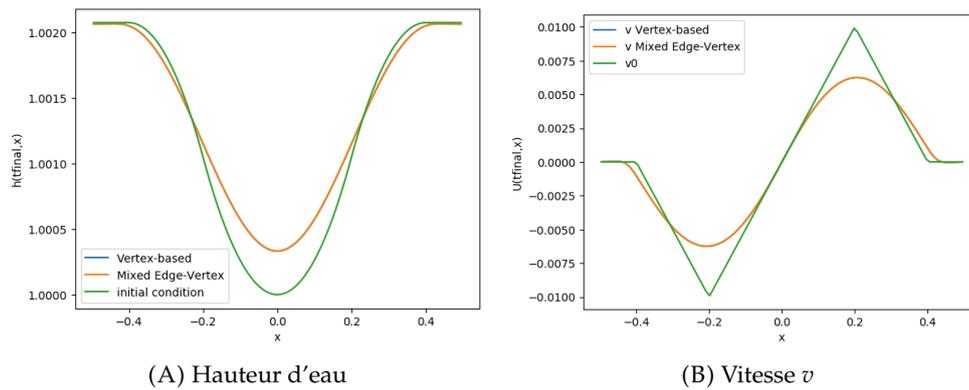


FIGURE 3.33 – Coupe en $y = 0$ des différents schémas à $t = 200s$ pour le cas test du vortex stationnaire.

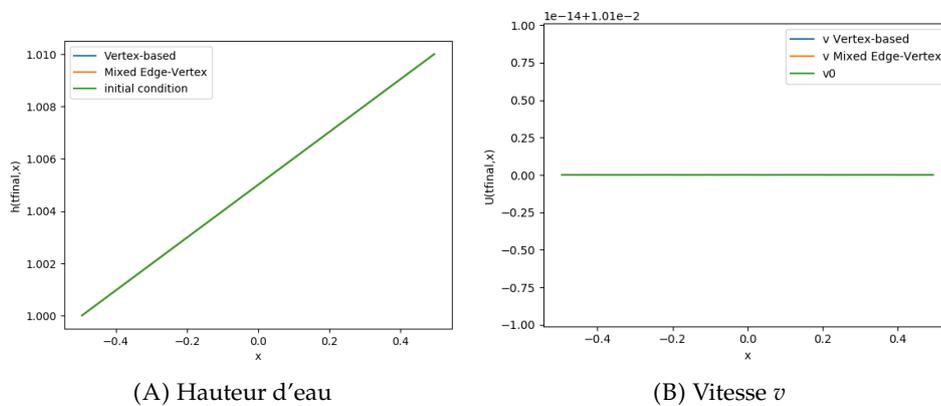


FIGURE 3.34 – Coupe en $y = 0$ des solutions à $t = 20s$ pour le cas test de la rivière.

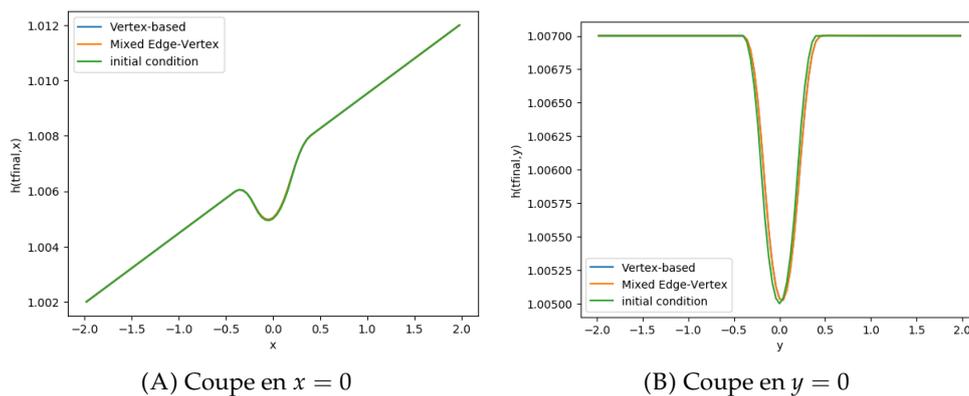


FIGURE 3.35 – Coupe de la hauteur d'eau à l'état initial et en $t = 10s$ pour le cas test du vortex translaté.

tracé une coupe de la hauteur d'eau à différents instants, il semble que l'écriture de l'équilibre géostrophique sous deux formes a en effet permis de régler ce problème, puisque la hauteur d'eau (ainsi que la vitesse) ne présente aucune oscillation dans ce cas test.

Remarque 3.5.7. Bien qu'on ait réussi à empêcher la création spontanée de modes parasites,

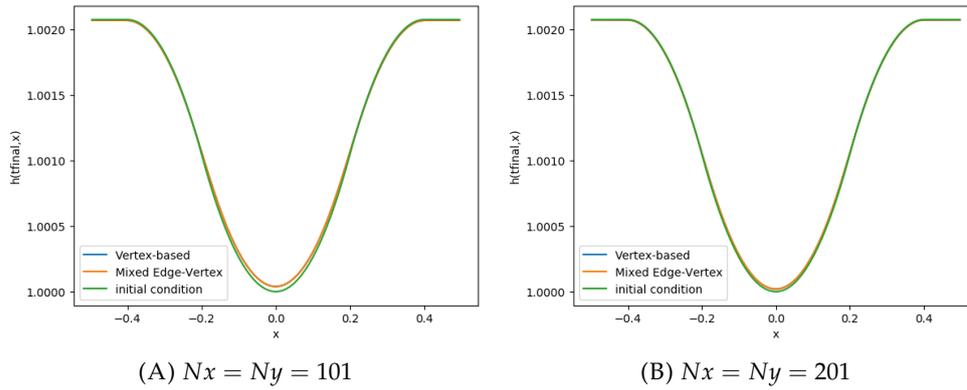


FIGURE 3.36 – Coupe en $y = 0$ de la hauteur d'eau à l'état initial et en $t = 20$ s pour le cas test du vortex stationnaire.

certaines restent malgré tout présents dans le noyau du schéma. Ainsi, une solution de la forme :

$$\forall (i, j), \quad \phi_{i,j} = cst \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{i,j} = \left((-1)^i a_j, (-1)^j b_i \right)^T,$$

avec $a_j, b_i \in \mathbb{R}^*$, est conservée par le schéma (3.31) du fait de la reconstruction sur la vitesse.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc pu dériver six schémas permettant de modéliser les équations de Saint-Venant non linéaires avec force de Coriolis. Le premier schéma (3.13) semblait avoir de bonnes propriétés théoriques, puisqu'il préservait l'équilibre et possédait une énergie semi-discrète décroissante, mais l'écriture des opérateurs induisait la présence de modes parasites, ainsi que leur apparition spontanée dans certains cas tests. De plus, son *stencil* de 25 était rédhibitoire à son utilisation dans un code déjà existant. Même si ce critère n'était initialement pas décisif dans la création d'un schéma, un *stencil* compact semble grandement préférable. La tentative de réduction du *stencil* a ainsi mené à un nouveau schéma (3.14), à seulement 9 points, mais ne présentant pas toutes les propriétés voulues.

Tirant leçon de ces schémas, nous avons pu ensuite en développer trois autres, en changeant les opérateurs ou en déplaçant le lieu de l'équilibre géostrophique. Le schéma avec équilibre sur les arêtes (3.23) a un *stencil* à 9 points et pseudo-préserve les équilibres géostrophiques, mais on ne peut assurer la préservation semi-discrète de l'énergie. Même si cela ne semble pas poser de problème sur des simulations courtes, on a pu voir en temps long que l'énergie peut augmenter. Le schéma avec équilibre au centre des cellules (3.27) préserve également les équilibres géostrophiques et assure la décroissance de l'énergie semi-discrète. Cependant, le noyau du schéma est trop gros et contient des équilibres autres que les équilibres géostrophiques, notamment certaines oscillations. Il possède de plus un *stencil* à 13 points. Finalement, le schéma avec équilibre sur les sommets (3.15) possède les mêmes propriétés que celui au centre des cellules, mais semble posséder un noyau un peu plus restreint, et les modes parasites semblent apparaître moins fréquemment dans nos simulations. De plus, le *stencil* à 25 points est encore une fois rédhibitoire.

Enfin, en utilisant le lien entre la discrétisation de l'équilibre géostrophique sur les arêtes et sur les sommets, nous avons pu créer un schéma à 9 points, préservant à la fois les équilibres géostrophiques et une inégalité d'énergie semi-discrète. Des

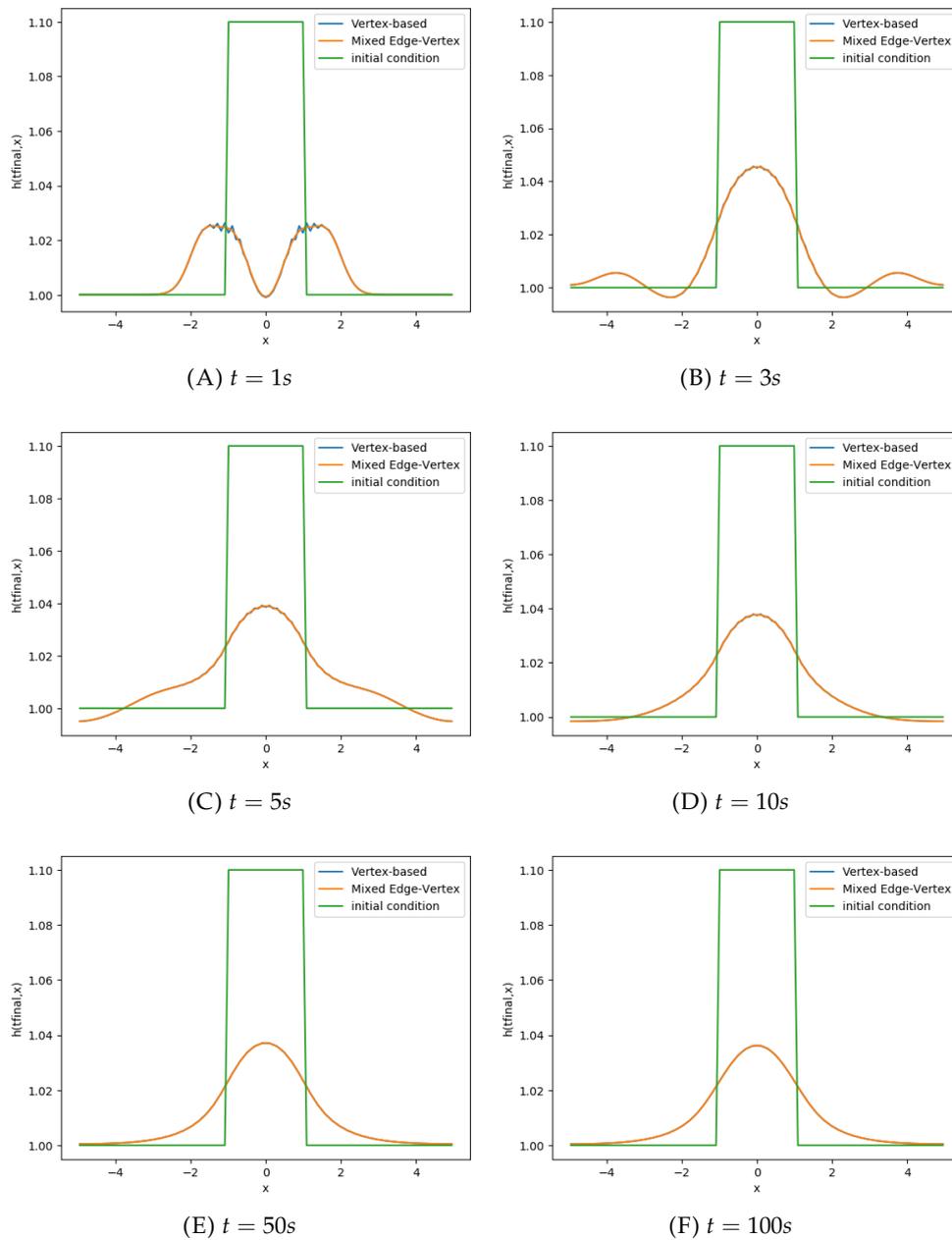


FIGURE 3.37 – Coupe en $y = 0$ et en différents instants des résultats numériques et de la solution initiale.

modes parasites théoriques peuvent être trouvés pour ce dernier, suggérant qu'une amélioration est encore possible, mais ceux-ci ne semblent pas apparaître naturellement dans les cas tests que nous avons étudiés.

Afin de poursuivre ce travail, il serait intéressant d'aller au-delà de l'énergie semi-discrète des schémas et d'étudier l'évolution de leur énergie totalement discrète afin d'obtenir un résultat de stabilité entropique. Par ailleurs, plus de cas tests, potentiellement tirés d'expériences en laboratoire afin de pouvoir comparer les résultats à la réalité, serait intéressants, puisque permettant de mieux comprendre les capacités et les limites du schéma.

Conclusions et perspectives

Nous avons présenté, dans ce travail, des résultats obtenus autour des équations de Saint-Venant. D'une part, nous avons étudié les couplages avec des modèles de sédimentation. Pour le premier, nous avons prouvé la stabilité de solutions, sous une hypothèse de régularité sur le gradient de la hauteur d'eau. Le second modèle, programmé dans le logiciel FullSWOF, nous a permis de reproduire une expérience de laboratoire. D'autre part, nous avons considéré les équations de Saint-Venant avec force de Coriolis, et trouvé un schéma colocalisé vérifiant une inégalité d'énergie et préservant les équilibres géostrophiques.

Lors de ce travail, nous avons noté quelques perspectives qui permettraient de pousser plus loin les résultats obtenus ici, afin d'améliorer leur précision ou leur application dans d'autres domaines.

Dans le chapitre 1, afin d'éviter la condition de contrôle sur le gradient de la hauteur d'eau, il serait intéressant de reprendre la dérivation du système à partir des équations de Navier-Stokes, et de voir si des termes supplémentaires, apparaissant à des ordres plus élevés, ne permettraient pas de lever cette condition. Alternativement, il serait également possible de tenter de changer le rapport d'échelle des vitesses entre la couche de sédiments mobiles et la couche d'eau, ainsi que les adimensionnements, afin de décrire la couche de sédiments, non pas par un modèle de Reynolds avec lequel le travail a été fait ici, mais par un modèle de Stokes :

$$\mu \Delta \mathbf{u} = \nabla h - \rho \mathbf{f}$$

avec \mathbf{f} la force massique exercée sur la couche de sédiments par la gravité ainsi que la couche d'eau. Nous pourrions ainsi constater si des termes supplémentaires apparaissent dans l'inégalité d'énergie, apportant des estimations *a priori* supplémentaires, qui permettraient de conclure sur la stabilité de solutions sans hypothèse.

Dans le chapitre 2, nous avons déjà mentionné la possibilité de faire varier la concentration de sédiments dans l'eau en fonction de la hauteur d'eau, afin d'améliorer les résultats du modèle lors de situations inhomogènes. Il pourrait par ailleurs être intéressant de prendre en compte la rétroaction du dépôt de sédiments sur la topographie et la friction au sein du domaine. Ainsi, à partir de la concentration de sédiments dans la couche d'échange, il faudrait déduire la hauteur de cette dernière, et ajouter cette valeur à la topographie, puis réintroduire cette valeur dans les équations de Saint-Venant. Un tel changement nécessiterait probablement de changer le schéma numérique associé, et de considérer un schéma couplé, plutôt que la méthode de *splitting* présentée ici. Par ailleurs, dans [NB16], les expériences présentées ont aussi été réalisées avec de la pluie. Il serait alors intéressant d'écrire la vitesse de sédimentation v_s comme une fonction de la pluie P ($v_s = f(P)$), avec f croissante d'après l'étude faite dans [NB16], à déterminer. En particulier, des expériences supplémentaires pourraient permettre de déterminer quelle(s) caractéristique(s) de la pluie (intensité, taille des gouttes, moment des gouttes) impacte la vitesse de sédimentation des particules. Une fois f déterminée expérimentalement, nous pourrions alors regarder si le logiciel FullSWOF est capable de reproduire les expériences avec

pluie.

Enfin, dans le chapitre 3, l'étude de l'énergie discrète du schéma, ainsi que la nécessité d'études sur plus de cas tests ont déjà été mentionnées. Afin d'aller plus loin, il serait intéressant de voir s'il est possible d'adapter les schémas pour un terme de Coriolis non constant, ce dernier variant nécessairement lors de l'étude de grandes étendues d'eau. Par ailleurs, il pourrait être pertinent de considérer une dérivation des équations de Saint-Venant à un ordre plus élevé, permettant de préserver quelques termes en cosinus de la latitude dans la force de Coriolis :

$$\tilde{\mathcal{F}}_C = -2\Omega_T \sin(\phi) \mathbf{u}^\perp + \Omega_T \cos(\phi) (\nabla_x(uh^2) + h^2 \operatorname{div}_x(\mathbf{u}) \mathbf{e}_1).$$

d'après [Luc07], pour un domaine à fond plat. Une étude pourrait ainsi être menée, dans ce cas, pour tracer, tout le long des calculs, l'influence de cette nouvelle écriture de la force de Coriolis et les schémas résultants, ainsi que leurs propriétés.

Annexe A

Valeur des concentrations de sédiments en entrée de FullSWOF

On note C_{in} la quantité de sédiments qui arrivent à l'amont de la zone expérimentale.

Dans l'expérience de laboratoire, le débit de sédiments est de 0.23 ± 0.02 g/min/cm, et le bac a une largeur de 50 cm. On a donc un débit de sédiment en entrée de 11.5 ± 1 g/min, soit 0.19167 ± 0.0167 g/s, ou encore environ 0.00019 kg/s.

Dans FullSWOF, deux stratégies sont possibles :

- soit on veut savoir ce qu'il se passe lorsqu'il n'y a qu'une seule classe de sédiments utilisée pour toute l'expérience. Dans ce cas, on prend $C_{in} = 0.00019$ kg/s. Comme il n'y a pas d'interaction entre les classes et que les résultats sont renvoyés pour chaque classe séparément, il est possible de tester plusieurs valeurs de vitesses de sédimentation en même temps, en mettant plusieurs classes, chacune avec un C_{in} à 0.00019 kg/s.
- soit on veut faire une expérience où plusieurs classes de sédiments composent le mélange entrant. Dans ce cas, la somme des C_{in} doit faire 0.00019 kg/s. Ainsi,
 - pour un ratio de 1 pour 9, on prend 0.00019 et 0.000171 kg/s
 - pour un ratio de 1 pour 5, on prend 0.0000317 et 0.000158 kg/s
 - pour un ratio de 1 pour 2, on prend 0.000063 et 0.000127 kg/s
 - pour une répartition uniforme avec N classes, on prends $C_{in} = \frac{0.00019}{N}$
 - pour une répartition gaussienne en 12 classes les concentrations sont données dans le tableau A.1, où v_s est la vitesse de sédimentation en m/s et C_{in} la concentration de sédiment en entrée du domaine, en kg/s.

| v_s | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---------------------|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $10^7 \cdot C_{in}$ | 9.5 | 32.3 | 83.6 | 175 | 287 | 363 | 363 | 287 | 175 | 83.6 | 32.3 | 9.5 |

TABLE A.1 – Concentration de sédiments en entrée pour les différentes vitesses de sédimentation pour une répartition gaussienne.

Bibliographie

- [AF03] Gilles ARNAUD-FASSETTA. "River channel changes in the Rhone Delta (France) since the end of the Little Ice Age : geomorphological adjustment to hydroclimatic change and natural resource management." In : *Catena* 51.2 (2003), p. 141-172. DOI : [10.1016/S0341-8162\(02\)00093-0](https://doi.org/10.1016/S0341-8162(02)00093-0). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0341816202000930>.
- [Aud+11] Emmanuel AUDUSSE et al. "A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for Shallow Water flows. Derivation and numerical validation". In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 45 (2011), p. 169-200. DOI : [10.1051/m2an/2010036](https://doi.org/10.1051/m2an/2010036).
- [Aud+18] Emmanuel AUDUSSE et al. "Analysis of modified Godunov type schemes for the two-dimensional linear wave equation with Coriolis source term on cartesian meshes". In : *Journal of Computational Physics* 373 (2018), p. 91-129. DOI : [10.1016/j.jcp.2018.05.015](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.05.015). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999118303073>.
- [Aud+21] Emmanuel AUDUSSE et al. "Numerical approximation of the shallow water equations with Coriolis source term". In : *ESAIM : ProcS* 70 (2021), p. 31-44. DOI : [10.1051/proc/202107003](https://doi.org/10.1051/proc/202107003). URL : <https://doi.org/10.1051/proc/202107003>.
- [Aud+22] Emmanuel AUDUSSE et al. *Energy stable and linearly well-balanced numerical schemes for the non-linear Shallow Water equations with Coriolis force*. À soumettre. 2022. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03509990>.
- [Aud04] Emmanuel AUDUSSE. "Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes". Thèse de doct. Université Paris VI, Pierre et Marie Curie, 2004.
- [BD03] Didier BRESCH et Benoît DESJARDINS. "Existence of global weak solutions for a 2D viscous Shallow Water equations and convergenceto the quasi-geostrophic model". In : *Communications in Mathematical Physics* (2003), p. 211-223. DOI : [10.1007/s00220-003-0859-8](https://doi.org/10.1007/s00220-003-0859-8).
- [BD07] Didier BRESCH et Benoît DESJARDINS. "On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids". In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* (2007), p. 57-90. DOI : [10.1016/j.matpur.2006.11.001](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2006.11.001).
- [Ber+20] Christophe BERTHON et al. "A well-defined moving steady states capturing Godunov-type scheme for Shallow-water model". In : *International Journal on Finite Volumes* 15 (2020). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03192954>.
- [BF06] Franck BOYER et Pierre FABRIE. *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*. T. 52. Mathématiques et Applications, 2006.

- [Bou04] François BOUCHUT. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2004. DOI : [10.1007/b93802](https://doi.org/10.1007/b93802).
- [BVC94] Alfredo BERMUDEZ et Ma Elena VAZQUEZ-CENDON. "Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms". In : *Computers and Fluids* 23.8 (1994), p. 1049-1071. DOI : [10.1016/0045-7930\(94\)90004-3](https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)90004-3). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045793094900043>.
- [CALP08] Manuel CASTRO, Juan ANTONIO LÓPEZ et Carlos PARES. "Finite Volume Simulation of the Geostrophic Adjustment in a Rotating Shallow-Water System". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 31 (2008), p. 444-477. DOI : [10.1137/070707166](https://doi.org/10.1137/070707166).
- [CDV17] Frédéric COUDERC, Arnaud DURAN et Jean-Paul VILA. "An explicit asymptotic preserving low Froude scheme for the multilayer shallow water model with density stratification". In : *Journal of Computational Physics* 343 (2017), p. 235-270. DOI : [10.1016/j.jcp.2017.04.018](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.04.018). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117302899>.
- [Che+18] Alina CHERTOCK et al. "Well-balanced schemes for the Shallow Water equations with Coriolis forces". In : *Numerische Mathematik* 138 (2018), p. 939-973. DOI : [10.1007/s00211-017-0928-0](https://doi.org/10.1007/s00211-017-0928-0).
- [Che97] Nian-Sheng CHENG. "Simplified settling velocity formula for sediment particle." In : *Journal of Hydraulic Engineering-ASCE* 123 (1997), p. 149-152. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:2\(149\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:2(149)).
- [Cor32] Gaspard-Gustave CORIOLIS. "Mémoire sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines." In : *Journal de l'Ecole Polytechnique* 13 (1832), p. 268-302. URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336778/f270.image>.
- [Cor35] Gaspard-Gustave CORIOLIS. "Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps." In : *Journal de l'Ecole Polytechnique* 15 (1835), p. 142-154. URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433680z/f144.image>.
- [CS07] Mary CIALONE et Jane SMITH. "Wave transformation modeling with bottom friction applied to southern Oahu reefs". In : *10th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting and Coastal Hazard Assessment* (2007).
- [Del10] Olivier DELESTRE. "Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles". Thèse de doct. Université d'Orléans, 2010.
- [Do17] Min Hieu DO. "Mathematical analysis of finite volume schemes for the simulation of quasi-geostrophic flows at low Froude number". Thèse de doct. Paris 13 University, 2017.
- [DVB20] Arnaud DURAN, Jean-Paul VILA et Remy BARAILLE. "Energy-stable staggered schemes for the Shallow Water equations". In : *Journal of computational Physics* 401 (2020). DOI : [10.1016/j.jcp.2019.109051](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109051). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119307569>.
- [Exn25] Felix EXNER. "Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen". In : *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 134.2a (1925), p. 165-203.

- [FKP16] Eduard FEIREISL, Trygve KARPER et Milan POKORNÝ. *Mathematical Theory of Compressible Viscous Fluids : Analysis and Numerics*. Lecture Notes in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhauser, 2016. DOI : [10.1007/978-3-319-44835-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-44835-0).
- [FLB76] Rafael FERNANDEZ LUQUE et R. van BEEK. "Erosion and transport of bed-load sediment". In : *Journal of Hydraulic Research* 14.2 (1976), p. 127-144. DOI : [10.1080/00221687609499677](https://doi.org/10.1080/00221687609499677).
- [FN+17] Enrique FENÁNDEZ-NIETO et al. "Formal deduction of the Saint-Venant-Exner model including arbitrary sloping sediment beds and associated energy". In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51 (2017), p. 115-145. DOI : [10.1051/m2an/2016018](https://doi.org/10.1051/m2an/2016018).
- [Fu+19] Baihua FU et al. "A review of catchment-scale water quality and erosion models and a synthesis of future prospects." In : *Environmental Modelling and Software* 114 (2019), p. 75-97. DOI : [10.1016/j.envsoft.2018.12.008](https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2018.12.008). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364815218307461>.
- [Gao+04] Bin GAO et al. "Rainfall induced chemical transport from soil to runoff : Theory and experiments". In : *Journal of Hydrology* 295.1 (2004), p. 291-304. DOI : [10.1016/j.jhydrol.2004.03.026](https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2004.03.026). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216940400174X>.
- [GL96] James GREENBERG et Alain-Yves LEROUX. "A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 33.1 (1996), p. 1-16. DOI : [10.1137/0733001](https://doi.org/10.1137/0733001).
- [GLD b] Noémie GAVEAU, Carine LUCAS et Frédéric DARBOUX. "Validation of a general-purpose erosion-sedimentation model on a laboratory experiment." In : *Advances in Hydroinformatics, SimHydro 2021, Models for complex and global water issues* (to be published).
- [God59] Serguei GODUNOV. "A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics". In : *Math. Sbornik* 47 (1959), p. 271-306. URL : <http://mi.mathnet.ru/eng/msb4873>.
- [Gos13] Laurent GOSSE. *Computing qualitatively correct approximations of balance laws*. T. 2. Springer, 2013. DOI : [10.1007/978-88-470-2892-0](https://doi.org/10.1007/978-88-470-2892-0).
- [Gra81] A. J. GRASS. *Sediment transport by waves and currents*. Rapp. tech. FL29. SERC London Centre for Marine Technology, 1981.
- [HBS02] Peter B. HAIRSINE, Laurent BEUSELINCK et Graham C. SANDER. "Sediment transport through an area of net deposition". In : *Water Resources Research* 38.6 (2002), p. 22-1-22-7. DOI : [10.1029/2001WR000265](https://doi.org/10.1029/2001WR000265).
- [HLL83] Amiram HARTEN, Peter D. LAX et Bram van LEER. "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws". In : *SIAM Review* 25.1 (1983), p. 35-61. DOI : [10.1137/1025002](https://doi.org/10.1137/1025002).
- [Jin99] Shi JIN. "Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.2 (1999), p. 441-454. DOI : [10.1137/S1064827598334599](https://doi.org/10.1137/S1064827598334599).
- [KOF77] Alois KUFNER, John OLDŘICH et Svatopluk FUČIK. *Function Spaces*. Mechanics : Analysis. Springer, 1977.

- [Laj+13] Eric LAJEUNESSE et al. "Tracer dispersion in bedload transport". In : *Advances in Geosciences* 37 (2013), p. 1-6. DOI : [10.5194/adgeo-37-1-2013](https://doi.org/10.5194/adgeo-37-1-2013). URL : <https://adgeo.copernicus.org/articles/37/1/2013/>.
- [Lee79] Bram van LEER. "Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method." In : *Journal of Computational Physics* 32.1 (1979), p. 101-136. DOI : [10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999179901451>.
- [Luc07] Carine LUCAS. "Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant". Thèse de doct. Université de Grenoble, 2007.
- [Mar05] Fabien MARCHE. "Theoretical and numerical study of shallow water models; applications to nearshore hydrodynamics". PHD. Université Bordeaux 1, 2005.
- [Mou+11] Goro MOURI et al. "Modeling reservoir sedimentation associated with an extreme flood and sediment flux in a mountainous granitoid catchment, Japan." In : *Geomorphology* 125.2 (2011), p. 263-270. DOI : [10.1016/j.geomorph.2010.09.026](https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2010.09.026). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169555X10004289>.
- [MPM48] Eugen MEYER-PETER et Robert MÜLLER. "Formulas for bed-load transport". In : *Hydraulic Engineering Reports*. International Association for Hydraulic Structures Research, second meeting, 1948, p. 39-64. URL : <http://resolver.tudelft.nl/uuid:4fda9b61-be28-4703-ab06-43cdc2a21bd7>.
- [NB+21] Amina NOUHOU BAKO et al. "A unifying model framework for soil erosion, river bedload and chemical transport". In : *Journal of Hydrology X* 12 (2021), p. 100082. DOI : [10.1016/j.hydroa.2021.100082](https://doi.org/10.1016/j.hydroa.2021.100082). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2589915521000092>.
- [NB+22] Amina NOUHOU BAKO et al. "Impacts of raindrops increase particle sedimentation in a sheet flow". In : *Earth Surface Processes and Landforms* 47.5 (2022), p. 1322-1332. DOI : <https://doi.org/10.1002/esp.5319>.
- [NB16] Amina NOUHOU BAKO. "Modélisation numérique de l'érosion diffuse des sols. Interaction gouttes-ruissellement". Thèse de doct. Université d'Orléans, 2016.
- [Nie92] P. NIELSEN. *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*. WORLD SCIENTIFIC, 1992. DOI : [10.1142/1269](https://doi.org/10.1142/1269). URL : <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/1269>.
- [Ock+15] Giyoung OCK et al. "Ecological functions of restored gravel bars, the Trinity River, California". In : *California. Ecol. Eng.* 83 (2015), p. 49-60. DOI : [10.1016/j.ecoleng.2015.06.005](https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2015.06.005). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925857415300756>.
- [Pop09] Stéphane POPINET. "An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows". In : *Journal of Computational Physics* 228.16 (2009), p. 5838-5866. DOI : [10.1016/j.jcp.2009.04.042](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.04.042). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910900240X>.
- [PV16] Martin PARISOT et Jean-Paul VILA. "Centered-potential regularization for the advection upstream splitting method". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 54.5 (2016), p. 3083-3104. DOI : [10.1137/15M1021817](https://doi.org/10.1137/15M1021817).

- [Rij84] Leo C. van RIJN. "Sediment Transport, Part I : Bed Load Transport". In : *Journal of Hydraulic Engineering* 110.10 (1984), p. 1431-1456. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1984\)110:10\(1431\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:10(1431)).
- [Rin+10] Todd RINGLER et al. "A unified approach to energy conservation and potential vorticity dynamics for arbitrarily-structured C-grids". In : *Journal of Computational Physics* 229.9 (2010), p. 3065-3090. ISSN : 0021-9991. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.12.007>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109006780>.
- [Sto51] George Gabriel STOKES. "On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums". In : *Trans. Cambridge Phil. Soc.* (1851).
- [SV71] Adhémar Barré de SAINT-VENANT. "Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit". In : *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 73 (1871), p. 147-154. URL : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3030d/f147n8.capture>.
- [Thu+09] John THUBURN et al. "Numerical representation of geostrophic modes on arbitrarily structured C-grids". In : *Journal of Computational Physics* 228.22 (2009), p. 8321-8335. ISSN : 0021-9991. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.08.006>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109004434>.
- [TSS94] Eleuterio TORO, M. SPRUCE et W. SPEARES. "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver". In : *Shock Waves* 4 (1994), p. 25-34. DOI : [10.1007/BF01414629](https://doi.org/10.1007/BF01414629).
- [UN17] UN. *Ocean fact sheet - The Ocean Conference*. Jour d'accès : 20/04/2022. 2017. URL : <https://www.un.org/sustainabledevelopment/wp-content/uploads/2017/05/Ocean-fact-sheet-package.pdf>.
- [Zak17] Hamed ZAKERZADEH. "The RS-IMEX scheme for the rotating shallow water equations with the Coriolis force". In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Hyperbolic, Elliptic and Parabolic Problems*. Springer International Publishing, 2017, p. 199-207. DOI : [10.1007/978-3-319-57394-6_22](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57394-6_22).

Résultats numériques et théoriques sur les équations de Saint-Venant, couplées à un modèle d'érosion ou avec force de Coriolis

Résumé :

Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux problématiques liées à l'étude et la simulation numérique de flux d'eaux peu profondes : le couplage avec un modèle de sédimentation et la prise en compte de la force de Coriolis.

Dans une première partie, nous considérons un modèle de Saint-Venant-Exner pour le transport de sédiments. Via une étude d'énergie, nous montrons, sous condition de régularité du gradient de la hauteur d'eau, la stabilité des solutions faibles du système.

On s'intéresse ensuite à un autre système d'équations, basé sur une loi de conservation, couplé aux équations de Saint-Venant. Afin de valider ce modèle de transport et dépôt de sédiments, on reproduit une expérience de laboratoire, consistant en des sédiments entraînés dans un canal. On utilise le logiciel FullSWOF, qui résout numériquement les équations de Saint-Venant avec transport de sédiments, modifié pour vérifier la conservation de la masse de sédiments. Une étude est menée pour déterminer la répartition des vitesses de sédimentation dans le mélange expérimental d'entrée, non mesurée en laboratoire.

Dans une dernière partie, on cherche à écrire un schéma pour la résolution numérique des équations de Saint-Venant non-linéaires avec force de Coriolis, préservant les équilibres géostrophiques et vérifiant une inégalité d'énergie semi-discrète. Nous proposons six schémas, dérivés d'un schéma aux volumes finis classique, et étudions leur énergie et la stabilité de l'équilibre géostrophique. Nous les testons également sur des cas tests standards et mettons en évidence les améliorations apportées par rapport à un schéma aux volumes finis de type Godunov.

Mots clés :

équations de Saint-Venant, modélisation, schémas numériques, sédimentation, force de Coriolis

Numerical and theoretical results on Shallow-Water equations, coupled with an erosion model or with Coriolis force

Abstract :

In this work, we are interested in two issues related to the study and the numerical simulation of shallow water flows : the coupling with a sedimentation model and taking the Coriolis force into consideration.

In a first part, we consider a Saint-Venant-Exner model for sediment transport. Thanks to the study of the energy of the system, we show the stability of the weak solutions under a smoothness condition on the gradient of the water height.

Then we are interested in another set of equations, based on a conservation law and coupled to the Shallow-Water equations. To validate this model which describes the transport and sedimentation of particles, we reproduce a laboratory experiment, consisting in sediments flowed in a channel. We use the FullSWOF software, solving the Shallow-Water equations with transport of sediments numerically, modified to check the mass conservation of sediments. A study is lead in order to determine the distribution of sedimentation velocities in the experimental input, distribution which was not measured experimentally.

In the last part, we aim at designing a scheme for the numerical resolution of the non-linear Shallow-Water equations with Coriolis force, stable around the geostrophic equilibrium and verifying a semi-discrete energy inequality. We propose six schemes, derived from a classical finite volumes scheme, and we study their energy and the stability of the geostrophic equilibrium. We also test them against standard benchmarks, and we highlight the improvements they bring comparatively to a Godunov-type finite volumes scheme.

Keywords :

Shallow-Water equations, modelisation, numerical schemes, sedimentation, Coriolis force