



HAL
open science

Analyse mathématique et numérique d'un modèle quasi-cinétique pour la fermeture non-locale des équations de la MHD résistive

Olivier Michel

► **To cite this version:**

Olivier Michel. Analyse mathématique et numérique d'un modèle quasi-cinétique pour la fermeture non-locale des équations de la MHD résistive. Analyse numérique [cs.NA]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. \langle NNT : 2022UPASM036 \rangle . \langle tel-04050973 \rangle

HAL Id: tel-04050973

<https://theses.hal.science/tel-04050973v1>

Submitted on 29 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Analyse mathématique et numérique d'un modèle
quasi-cinétique pour la fermeture non-locale des
équations de la MHD résistive

*Mathematical and numerical analysis of a quasi-kinetic model for the
resistive MHD non-local closure*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH) n° 574
Spécialité de doctorat : Mathématiques aux interfaces
Graduate School : Mathématiques
Référent : CentraleSupélec

Thèse préparée dans l'unité de recherche Mathématiques et Informatique pour la
Complexité et les Systèmes (Université Paris-Saclay, CentraleSupélec), sous la
direction de **Pauline Lafitte**, Professeur, CentraleSupélec, Chercheur à la
Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec et au laboratoire MICS le
co-encadrement de **Cédric Énaux**, Chercheur au CEA, ainsi que le
co-encadrement de **Roland Duclous**, Chercheur au CEA.

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 17/11/2022, par

Olivier MICHEL

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Christophe Chalons

Professeur, Université Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Président

Luc Mieussens

Professeur, Université de Bordeaux

Rapporteur & Examineur

Eric Sonnendrücker

Professeur, Max Planck Institute (Garching)

Rapporteur & Examineur

Anaïs Crestetto

Maître de conférences, Université de Nantes

Examinatrice

Patrick Mora

Professeur, École Polytechnique (Palaiseau)

Examineur

Titre : Analyse mathématique et numérique d'un modèle quasi-cinétique pour la fermeture non-locale des équations de la MHD résistive

Mots clés : MHD, équations cinétiques, analyse numérique

Résumé :

Un modèle quasi-cinétique pour la fermeture non-locale des équations de la MHD résistive est proposé dans le cadre du transport non-local des électrons en FCI (Fusion par Confinement Inertiel). Son objectif est d'améliorer la modélisation du transport non local des électrons dans les simulations de fluides. La construction de ce modèle quasi-cinétique est basée sur l'approximation P1-Diffusion, qui réduit le système cinétique 6D-parabolique-hyperbolique en un ensemble d'équations 4D entièrement paraboliques. Une décomposition micro-macro est ensuite appliquée pour réaliser un couplage avec les équations fluides conservatives. Des schémas préservant l'asymptotique basés sur le micro-macro ont été développés, entre autres, pour le transport des neutrons [M. Lemou et al., SIAM J. Sci. Comput., 2008], et le transport du rayonnement [P.

Anguill et al., soumis à J. Comput. Phys., 2021]. Bien que ces schémas constituent des stratégies numériques efficaces dans leurs propres applications, le transport d'électrons introduit des difficultés spécifiques que nous abordons dans ce travail, comme l'auto-consistance du champ électrique pour la quasi-neutralité, et la présence d'un opérateur de collisions électron-électron intégrodifférentiel. Pour atteindre la stabilité pour des pas de temps fluides (échelle macro), même lorsque le temps de collision (échelle micro) est petit, nous proposons une discrétisation temporelle totalement implicite de ce modèle cinétique réduit. Lors de la réalisation du modèle numérique, un nouveau schéma pour l'opérateur de collision électron-électron a également été développé. Les hypothèses de construction et les propriétés mathématiques du modèle seront présentées, avec des résultats numériques.

Title : Mathematical and numerical analysis of a quasi-kinetic model for the resistive MHD non-local closure

Keywords : MHD, kinetic equations, numerical analysis

Abstract :

A new kinetic model for the non-local closure of fluid equations is proposed in the framework of non-local electron transport in ICF (Inertial Confinement Fusion). Its goal is to improve nonlocal electron transport modeling in fluid simulations. The construction of this new kinetic model is based on the P1-Diffusion approximation, which reduces the 6D-parabolic-hyperbolic kinetic system into a 4D fully parabolic set of equations. A micro-macro decomposition is then applied to achieve a coupling with conservative fluid equations. Micro-macro based asymptotic preserving schemes have been developed, among others, for neutron transport [M. Lemou et al., SIAM J. Sci. Comput., 2008], and radiation transport [P. Anguill et al., submitted

to J. Comput. Phys., 2021]. Although these schemes constitute efficient numerical strategies for their own applications, electron transport introduces specific difficulties that we address in this work, such as auto-consistency of the electric field for quasi-neutrality, and an integrodifferential self-collision operator. To achieve stability for fluid (macro-scale) time steps, even when the collisional time (micro-scale) is small, we propose a fully implicit time discretisation of this reduced kinetic model. In the making of the numerical model, new schemes for collision operators have also been developed. Construction hypotheses and mathematical properties of the model will be presented, with numerical results.



CentraleSupélec



**ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN
MODÈLE QUASICINÉTIQUE POUR LA FERMETURE
NON-LOCALE DES ÉQUATIONS DE LA MHD
RÉSISTIVE**

O. Michel

Remerciements

Je voudrais commencer par adresser mes remerciements les plus respectueux à Luc Mieussens et Eric Sonnendrüker, rapporteurs de cette thèse, à Christophe Chalons, président du jury, ainsi qu'aux examinateurs, Anaïs Crestetto et Patrick Mora. À la lecture de leurs rapports, je suis honoré par l'intérêt qu'ils ont porté à l'étude et à l'évaluation de mes travaux.

L'ensemble de mes travaux ont été supervisés par Pauline Lafitte avec rigueur et intérêt. Je la remercie pour la confiance qu'elle m'a accordée ainsi que pour ses enseignements en mathématiques qui m'ont été précieux. J'espère entretenir ce goût pour la rigueur mathématique tout au long de ma carrière scientifique.

Je remercie Cédric Énaux, qui a été mon principal encadrant durant ces trois ans. Sa façon de faire de la recherche m'a profondément inspiré, et m'a définitivement convaincu de continuer une carrière dans la recherche scientifique. Cédric m'a donné l'opportunité de mener à bien ce travail passionnant, et de le poursuivre en tant que chercheur au CEA. Pour tout cela je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie Roland Duclous. Son soutien appuyé m'a été indispensable, en particulier pour mener avec rigueur les calculs les plus complexes ainsi que pour implémenter les différentes méthodes numériques. Nous sommes désormais collègues, c'est un plaisir de travailler ensemble et j'espère le meilleur pour la poursuite de ce travail.

Je tiens à remercier Paul-Édouard Masson-Laborde, pour les discussions que nous avons tenues et les simulations cinétiques qu'il a réalisées pour compléter cette étude.

Je remercie les équipes du CEA et du laboratoire MICS de CentraleSupélec, qui m'ont accueilli chaleureusement. En particulier les doctorants, stagiaires et postdocs, avec qui j'ai partagé mon quotidien pendant ces trois années.

J'ai enfin une pensée pleine d'émotions pour mes parents et pour ma soeur...

Table des matières

Remerciements		iii
Table des matières		iv
Introduction		1
0.1	Enjeux et principales contributions de la thèse	1
0.2	La Fusion par Confinement Inertiel (FCI)	3
0.3	Introduction à la physique des plasmas chauds	4
0.4	État de l’art des modèles de fermeture	14
0.4.1	Modèles de Spitzer-Härm et de Braginskii	14
0.4.2	Modèles de transport non-locaux	15
0.5	Résumé de la démarche	17
1	Construction d’un nouveau modèle quasi-cinétique MHD compatible	21
1.1	Introduction	21
1.2	Approximation angulaire P1	24
1.2.1	Notations et définitions	25
1.2.2	Développement en harmoniques sphériques de l’opérateur de Vlasov	27
1.2.3	Développement en harmoniques sphériques de l’opérateur de Fokker-Planck-Landau	27
1.2.4	Système VFPL-P1 final	30
1.3	Approximation diffusion	31
1.3.1	Limite et scaling diffusion	31
1.4	Système P1-Diffusion final et propriétés	36
1.4.1	Système aux moments	37
1.4.2	Limite de Spitzer-Härm	38
1.5	Reformulation micro-macro du modèle P1-Diffusion	40
1.6	Conclusion	45
2	Analyse mathématique du modèle P1-diffusion	47
2.1	Introduction	47
2.2	Linéarisation du système P1-diffusion autour d’un équilibre maxwellien	49
2.2.1	Splitting entre contributions locales et non-locales	49
2.2.2	Splitting des contributions non-locales	51
2.2.3	Linéarisation	53
2.3	Analyse variationnelle de l’opérateur de transport P1-diffusion linéaire	55
2.3.1	Formulation variationnelle auto-adjointe de $\mathcal{T}^{(l)}$	55
2.3.2	L’espace H_M^1	57
2.3.3	Étude de la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$	57
2.4	Conclusion	59
3	Discrétisation explicite 1Dx-1Dv du système P1-Diffusion	61

3.1	Introduction	61
3.2	Schéma semi-discret 1D-espace 1D-vitesse	63
3.2.1	Semi-discrétisation en vitesse de la partie Vlasov	64
3.2.2	Semi-discrétisation en espace	67
3.3	Discrétisation conservative de l'opérateur de collisions	70
3.4	Discrétisation temporelle explicite et évaluation des contraintes CFL	73
3.5	Tests élémentaires de vérification	74
3.5.1	Cas-test de Rosenbluth	75
3.5.2	Étude instationnaire de convergence vers la limite de Spitzer-Härm	77
3.6	Conclusion	81
4	Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion	83
4.1	Introduction	83
4.2	Reformulation du système P1-Diffusion Micro-Macro	84
4.2.1	Reformulation des flux cinétiques	85
4.2.2	Reformulation des flux avec projecteurs de courant nul	87
4.3	Discrétisation en Vitesse	89
4.3.1	Écriture sous forme faible	89
4.3.2	Discrétisation multigroupe	89
4.4	Discrétisation Temps-Espace	100
4.4.1	Introduction du schéma implicite itératif sur l'exemple simple d'une équation d'advection diffusion	100
4.4.2	Discrétisation temps-espace des opérateurs de diffusion dans les équations Micro et Macro	108
4.4.3	Schéma implicite contracté pour l'opérateur de collisions de Fokker-Planck-Landau	114
4.5	Tests élémentaires de vérification	116
4.6	Conclusion	118
5	Évaluation physique du modèle P1-Diffusion	121
5.1	Introduction	121
5.2	Présentation du Code OSHUN	121
5.3	Présentation du cas-test Q1D	122
5.3.1	Profils initiaux et conditions aux bords	123
5.3.2	Solution de Spitzer-Härm	123
5.4	Analyse des résultats obtenus avec OSHUN, P1-Diffusion et Spitzer-Härm	124
5.5	Cas-test stationnaire Q1D-C	134
5.6	Conclusion	135
	Conclusions et perspectives	137
	Conclusions	137
	Perspectives	138
	Bibliographie	1
A	Unités et notations	5
A.1	Systèmes d'unités et conversions	5
A.2	Constantes physiques	5
A.3	Symboles et notations	5
A.4	Acronymes	6
B	Développements en harmoniques sphériques	7
B.1	Opérateur de Vlasov	7
B.2	Opérateur de Fokker-Planck-Landau	18
B.3	Propriétés de $C_0^{ee}(f_0, f_0)$	23

Introduction

Dans ce chapitre introductif, le contexte et le positionnement de la thèse sont brièvement présentés au paragraphe 0.1. Les principaux résultats obtenus sont synthétisés et leur originalité est soulignée. Dans un deuxième temps, le contexte est précisé dans les paragraphes 0.2 à 0.4. La méthode suivie est enfin détaillée au paragraphe 0.5, en lien avec l'annonce du plan du manuscrit.

0.1 Enjeux et principales contributions de la thèse

Progresser dans la modélisation physico-numérique des effets liés à la délocalisation du transport électronique au sein des plasmas créés par laser est aujourd'hui un enjeu majeur pour la Fusion par Confinement Inertiel (FCI). Si le choix des modèles existants était cohérent avec la puissance des machines de calculs alors, la montée en puissance des super-calculateurs amène à repousser les limites de ces modèles afin d'améliorer la modélisation des effets liés à la délocalisation du transport dans les simulations FCI.

Le transport "local" désigne l'ensemble des relations reliant les flux de quantités macroscopiques aux gradients locaux des quantités comme les lois de Fick, Fourier, etc. Ces relations sont valables dans la limite où la distribution en vitesse des particules suit une loi normale. Elle est alors appelée distribution de Maxwell-Boltzmann. Nous décrirons plus précisément par la suite le transport local et son rôle dans la fermeture des équations de la MHD résistive. On parle de "délocalisation" du transport ou bien "d'effets non-locaux" les effets nécessitant la prise en compte d'un couplage cinétique entre particules de toutes énergies dans le système. L'écart de la fonction de distribution à l'équilibre de Maxwell-Boltzmann entraîne l'apparition de phénomènes non-locaux : de transport entraînant la violation des lois de fermetures locales classiques, mais également collisionnels, décrivant la relaxation de la distribution vers l'équilibre de Maxwell-Boltzmann. On a donc tendance à confondre par abus "non-local" et "hors-équilibre" ou "cinétique" pour qualifier le transport, nous nous appliquerons dans la mesure du possible à distinguer "non-local" et "hors-équilibre".

L'objectif principal de cette étude est de poser les bases mathématiques et numériques d'un modèle quasi-cinétique, c'est-à-dire décrivant l'évolution de la partie scalaire isotrope de la fonction de distribution électronique et possédant l'avantage de s'appuyer sur des hypothèses peu restrictives et clairement identifiées. Plus globalement, cette étude s'inscrit dans un projet dont l'objectif *in fine* est de mettre à disposition des physiciens du CEA une nouvelle fermeture non-locale des équations de la MHD résistive dont le domaine de validité doit être à la fois bien établi et élargi par rapport aux fermetures actuellement

disponibles. Cette nouvelle fermeture doit également pouvoir être mise en œuvre dans le cadre d'un code MHD lagrangien qui opère sur des maillages 2D/3D non-structurés, comme le code TROLL [34], un code hydro-radiatif multimatériaux 3D ALE bitempératures du CEA.

Les modèles éligibles au couplage avec la MHD dans un code multi-D et multi physique reposent nécessairement sur des réductions de dimension et des simplifications. Parmi les principales contraintes justifiant ces approximations, on peut citer les contraintes de stabilité pour des pas de temps hydrodynamiques, la capture du régime local, le coût de calcul et l'empreinte mémoire. Ainsi, à notre connaissance, seuls les modèles locaux à flux limités et le modèle SNB [47] ont été implémentés dans de tels contextes. L'objectif de ce travail est d'élargir le champ des modèles éligibles avec le modèle P1-diffusion. Ce modèle a été décrit dans la littérature comme un modèle pertinent dans notre contexte [47], en revanche il n'a à notre connaissance, ni été analysé en détail, ni exploité. L'objet de ce travail de thèse est de combler ce manque, sur la base d'une analyse mathématique et numérique approfondie. Celle-ci a permis de proposer une discrétisation pertinente pour les objectifs que nous nous sommes fixés, à savoir stabilité inconditionnelle, capture d'effets cinétiques non perturbatifs, et restitution de la limite asymptotique locale du transport de flux de chaleur sans coût additionnel.

Les contributions originales de ce travail sont les suivantes :

- reformulation Micro-Macro du modèle. A notre connaissance, c'est la première fois que la méthode Micro-Macro est adaptée à des harmoniques sphériques. Pour rendre possible cette adaptation, il a été nécessaire d'introduire un changement de variable approprié pour la dimension de vitesse,
- décomposition de la première harmonique sphérique en contributions à courant nul, par l'introduction de projecteurs, réinterprétation de chacune des contributions en termes d'advection-diffusion généralisée.
- introduction d'un schéma implicite itératif, assurant une stabilité inconditionnelle.

Les résultats de cette analyse ont permis d'obtenir des résultats prometteurs :

- un intérêt de la reformulation Micro-Macro est qu'elle permet de restituer simplement l'asymptotique locale. Ceci a été illustré en 0D sur un cas de relaxation pour l'opérateur de Fokker-Planck-Landau isotrope, avec des propriétés de précision et de stabilité qui se comparent favorablement à celles de la littérature [36, 37, 8],
- une comparaison en 1D, avec un code cinétique de référence (OSHUN¹), a été menée. Elle donne des résultats encourageants pour le modèle P1-diffusion,
- sur la base de ces résultats, une implémentation en 2D/3D sur maillage non-structuré est envisagée à court terme.

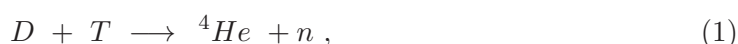
1. OSHUN est un code Vlasov-Fokker-Planck parallèle et relativiste, 2D espace 3D vitesse, développé principalement pour l'étude du transport électronique et des instabilités rencontrées en interaction laser-plasma (ILP), il sera présenté plus en détail dans le chapitre 5.

0.2 La Fusion par Confinement Inertiel (FCI)

Les réactions de fusion nucléaire sont la source d'énergie des étoiles, et l'une des principales sources d'énergie dans l'univers observable. Dans les objets stellaires, c'est la force gravitationnelle qui permet de confiner le "combustible" de fusion, atteignant ainsi les conditions physiques requises pour les réactions nucléaires de fusion. La production contrôlée d'énergie de fusion sur terre suscite un intérêt évident pour la production d'électricité, mais également pour la physique fondamentale, en particulier pour l'enrichissement et la validation de modèles physiques utilisés dans le cadre du programme Simulation du CEA ². Les deux voies privilégiées de production d'énergie de fusion sont [5] :

- la Fusion par Confinement Magnétique. C'est la voie empruntée par exemple par le projet ITER ³ (International Thermonuclear Experimental Reactor),
- la Fusion par Confinement Inertiel. C'est la voie empruntée par exemple au LMJ ⁴ (Laser MégaJoule) ou au NIF ⁵ (National Ignition Facility).

Dans les deux cas, la réaction de fusion ciblée est celle du deutérium et du tritium :



produisant 17.6 MeV de chaleur de réaction, soit $\sim 10^{12}$ J par gramme. La réaction (1) est celle ayant la section efficace la plus élevée parmi les différentes réactions mettant en jeu des isotopes d'hydrogène ou d'hélium. Cela signifie qu'elle a une probabilité plus importante de se produire, pour des conditions plasmas données. Dans la FCI, la cible contenant le mélange de deutérium et de tritium est compressée et chauffée par des impulsions laser intenses, permettant d'atteindre des conditions telles qu'une fraction suffisante des noyaux de deutérium et de tritium fusionnent par la réaction (1) et que ces réactions s'auto-entretiennent. On appelle ce stade "Ignition", les conditions thermodynamiques devant être réunies sont définies par un critère appelé critère de Lawson [5]. Le projet NIF, à Livermore en Californie, a commencé en 1997 et réalisé sa première expérience en 2009, mettant en jeu 192 lasers de puissance amplifiés par une seule source, sur une longueur de cavité de 300 mètres. Les faisceaux sont redirigés vers une chambre d'expérience sphérique, équipée de nombreux diagnostics, puis concentrés vers une cible contenant le combustible, mesurant seulement quelques millimètres. Le LMJ, à Bordeaux, est basé sur le même principe, avec à terme 176 faisceaux (22 lignes de 8 faisceaux), et a été mis en service en 2014 avec 8 faisceaux. La première expérience d'ignition réalisée en 2019 a mis en œuvre 48 faisceaux laser pendant 3 nanosecondes pour chauffer une cible de deutérium, permettant ainsi de détecter les premiers neutrons de fusion au LMJ. Les expériences décrites ci-dessus ont eu lieu dans la configuration appelée "attaque indirecte" (indirect drive), par opposition à l'"attaque directe" (direct drive) [5] :

Attaque directe. Dans cette situation, les faisceaux laser sont dirigés directement vers la cible FCI pour la comprimer et la chauffer (voir figure 0.1). L'avantage est que toute la puissance laser est transmise à la capsule sous forme de chaleur/compression. Cependant,

2. <https://www.cea.fr> Le programme Simulation du CEA consiste en la conception, et en la garantie de fiabilité et de sûreté, des armes nucléaires françaises par la simulation numérique

3. <http://www.iter.org>

4. <http://www-lmj.cea.fr>

5. <http://lasers.llnl.gov>

le chauffage n'est pas uniforme, ce qui a pour conséquence de générer des instabilités rendant l'implosion non symétrique et pouvant aboutir à une perte d'énergie très importante.

Attaque indirecte. Dans cette situation, la capsule de combustible est placée dans une cavité appelée "hohlraum", composée d'un matériau de numéro atomique Z élevé (typiquement de l'or). Les faisceaux lasers ciblent les parois internes de la cavité, le chauffage de la cavité produit une émission importante de rayons X dirigés vers la capsule (voir figure 0.1). L'avantage est que le chauffage de la capsule est plus uniforme, minimisant ainsi les instabilités hydrodynamiques venant perturber l'implosion. De plus, le rayonnement X est mieux absorbé par les parois externes de la capsule. Le principal défaut de cette approche est que dans le processus de chauffage de la cavité, jusqu'à 90% de la puissance laser peut être perdue.

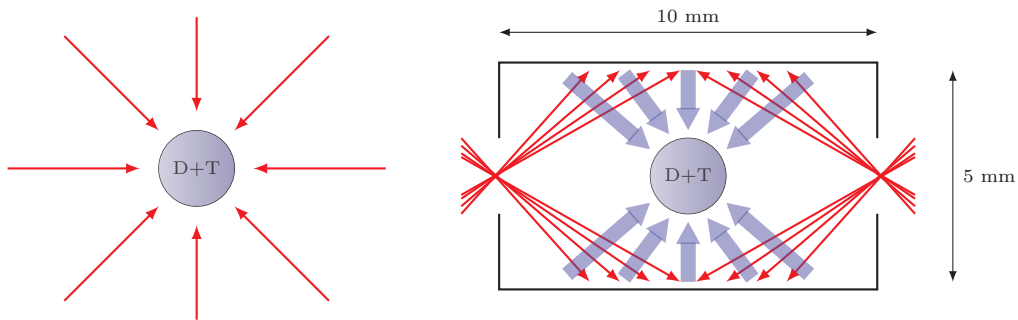


FIGURE 0.1 – Illustration des différents types d'attaque en FCI. À gauche, la configuration en attaque directe. À droite la configuration en attaque indirecte.

La modélisation numérique des expériences de FCI en attaque indirecte met en jeu une physique extrêmement complexe mêlant Interaction Laser Plasmas (ILP), Hydrodynamique turbulente avec instabilités de type Rayleigh-Taylor et Richtmyer-Meshkov, théorie cinétique des plasmas, transfert radiatif, physique nucléaire, etc. Nous allons ici nous concentrer sur les aspects cinétiques du transport électronique dans les plasmas de FCI. La délocalisation du transport électronique altère de façon importante le flux de chaleur dans les régions de la cavité correspondant à une zone de transport, typiquement située entre la zone d'absorption laser et le front d'ablation. Le milieu correspondant à la zone de transport est située aux parois des cavités pour la FCI en attaque indirecte. En attaque directe, elle est typiquement située dans le plasma en détente, provenant de l'ablation des parois externes de la capsule.

La prise en compte de ces effets dans les codes hydrodynamiques implique de réaliser un couplage entre les équations gouvernant la dynamique du fluide (ici les équations de la MHD résistive), et les équations gouvernant la cinétique des particules de plasmas (ici les équations de Vlasov-Fokker-Planck-Landau). Nous allons introduire ces équations et faire quelques rappels de physique des plasmas.

0.3 Introduction à la physique des plasmas chauds

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé, dont la dynamique est caractérisée par des phénomènes collectifs auxquels sont soumis et auxquels participent les particules chargées, électrons et ions. On parle de plasmas chauds quand les électrons et les ions ont des températures proches. L'agitation thermique du milieu suffit alors à maintenir un taux d'ionisation élevé, les plasmas chauds sont donc souvent collisionnels. On parle

de plasmas froids quand la température des ions est faible comparée à la température des électrons. Dans les plasmas froids, souvent peu denses, les électrons accélérés par un champ électro-magnétique externe peuvent acquérir l'énergie pour ioniser en cascade les atomes du milieu. Dans le cas des plasmas de FCI, l'énergie déposée par le laser ($\sim 2e^6 J$) et la durée de l'impulsion ($\sim 10ns$) est suffisante pour chauffer suffisamment le milieu et créer un plasma chaud.

Nous allons présenter dans cette section les équations permettant de décrire la dynamique des plasmas chauds, et illustrer la problématique de la fermeture. Pour cela, nous allons partir de la description cinétique et montrer comment arriver jusqu'à la description monofluide. Le passage de la description particulaire (problème à N corps) à la description cinétique continue (équation de Boltzmann) en passant par les équations de Klimontovitch et Liouville n'est pas traitée ici, on considère qu'aux échelles mésoscopiques, les moyennes spatiales et temporelles fluctuent peu et qu'une description statistique continue du milieu par l'équation de Boltzmann est pertinente.

Nous considérerons également le plasma *classique* et *non-relativiste*. Cela signifie que les effets quantiques ondulatoires et statistiques des électrons (liés à la dualité onde-corpuscule et à la nature fermionique des électrons) ainsi que les effets relativistes sont négligés. Nous précisons sous quelles conditions physiques ces effets peuvent être négligés.

Définition 0.3.1. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur⁶ position, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur vitesse, et $t \in \mathbb{R}_+$ le temps. L'application continue f définie sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{E} \quad \longmapsto \quad \mathbb{R}_+ , \\ (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad \longrightarrow \quad f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) , \end{array} \quad (2)$$

est appelée *fonction de distribution*. Dans un système composé d'un grand nombre de particules et à un temps donné t , la quantité $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ représente le nombre de particules contenues dans le volume élémentaire $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$. Le nombre total de particules N dans le système et la densité $n(t, \mathbf{x})$ sont définis par :

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}', \mathbf{v}') d\mathbf{v}' d\mathbf{x}' \quad \text{et} \quad n(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' . \quad (3)$$

L'évolution de la fonction de distribution dans le temps est décrite par l'équation de Boltzmann [49] :

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \mathcal{C}(f) , \quad (4)$$

où le vecteur \mathbf{a} désigne l'accélération résultant des forces présentes dans le système. L'opérateur $\mathcal{C}(f)$ modélise les variations de la fonction de distribution dues à l'ensemble des collisions dans le système. Quand seule la force de Lorentz intervient, l'équation (4) est renommée *équation de Vlasov* et on, \mathbf{a} en unités CGS⁷ :

$$m\mathbf{a} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) ,$$

avec m et q la masse et la charge électrique d'une particule, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique et c la vitesse de la lumière dans le vide.

6. Dans tout le document, on note les vecteurs avec une police droite, les scalaires en italique, et les tenseurs en police sans empattement (l'ensemble des notations est résumé en Annexe A.3)

7. Le système CSG (pour Centimètre Gramme Seconde) est un système d'unités de mesure des grandeurs physiques utilisant entre autres, les unités de Gauss pour l'électromagnétisme (voir Annexe A.1)

Les moments de la fonction de distribution

Cette description statistique est intéressante car elle permet de définir simplement les quantités macroscopiques observables, telles que la densité n , la vitesse macroscopique locale (ou vitesse moyenne) u et la température cinétique T , de la façon suivante :

$$n(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (5)$$

$$n\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (6)$$

$$\frac{3}{2}nk_B T(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}m \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (7)$$

avec k_B la constante de Boltzmann. $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 . On suppose que les intégrales (5), (6) et (7) sont bien définies. Pour cela, on suppose dans un premier temps que $f \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, pour la variable $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ et que f est exponentiellement décroissante vers 0, lorsque $\|\mathbf{v}\| \rightarrow +\infty$. On définit également le tenseur de pression \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = p(t, \mathbf{x}) \mathbf{Id} + \Pi(t, \mathbf{x}) = m \int_{\mathbb{R}^3} [\mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})] \otimes [\mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (8)$$

avec $p(t, \mathbf{x})\mathbf{Id}$ la partie isotrope et $\Pi(t, \mathbf{x})$ la partie anisotrope du tenseur pression. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, on a $p = nk_B T$. Le flux de chaleur, \mathbf{q} , est défini par :

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}m \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\|^2 [\mathbf{v} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (9)$$

On peut ainsi reformuler le problème en terme de quantités macroscopiques, en intégrant les moments $\left(1, \mathbf{v}, \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2\right)$ de l'équation de Vlasov, dans l'espace des vitesses. Le système d'équations obtenu est appelé système d'équations fluides. Écrivons les trois moments de l'équation de Vlasov pour les électrons :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_e \mathbf{u}_e) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(n_e \mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e + \frac{\mathbf{P}_e}{m_e} \right) + \frac{n_e e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) = \mathbf{R} , \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e \varepsilon_e + \frac{1}{2} n_e u_e^2 \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\left(n_e \varepsilon_e + \frac{1}{2} n_e u_e^2 \right) \mathbf{u}_e + \frac{\mathbf{P}_e \mathbf{u}_e}{m_e} + \frac{\mathbf{q}_e}{m_e} \right) - \frac{n_e e}{m} \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{E} = Q + \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{R} ,$$

avec l'indice e désignant les électrons (voir notations Annexe A.3), $n_e \varepsilon_e = \frac{3}{2}nk_B T_e$ la densité d'énergie électronique interne, \mathbf{R} et Q les échanges collisionnels d'impulsion et d'énergie entre les différentes espèces, définis par :

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x}) = m_e \int_{\mathbb{R}^3} [\mathbf{v} - \mathbf{u}_e(t, \mathbf{x})] \mathcal{C}(f)(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} , \quad (11)$$

$$Q(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}m_e \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_e(t, \mathbf{x})\|^2 \mathcal{C}(f)(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (12)$$

Les moments d'ordre plus élevé font apparaître de nouvelles quantités macroscopiques, comme \mathbf{P}_e et \mathbf{q}_e , ainsi que de nouveaux termes d'échange, \mathbf{R} et Q , si le plasma présente plusieurs espèces. Ainsi, la résolution du système d'équations fluides nécessite de fermer le système en y rajoutant des équations. Des équations supplémentaires sont nécessaires pour fermer le système, elles sont souvent présentées de la façon suivante :

- une équation d'état reliant les quantités p , n et T ;
- des équations de fermeture reliant q , R , Π et Q aux autres quantités fluides.

Les équations classiques du transport peuvent être obtenues en supposant que f suit une distribution de Maxwell-Boltzmann. Une équation d'état quelconque peut être utilisée, mais nous prendrons pour exemple dans ce document celle des gaz parfaits $p_e = n_e k_B T_e$.

Distribution d'équilibre et collisions

En thermodynamique, on sépare les variables dites extensives, proportionnelles aux grandeurs caractéristiques du système (volume, masse, nombre de particules, énergie totale, etc.) des variables intensives, qui n'en dépendent pas (température, pression, etc.). Ces dernières sont définies comme des rapports ou des taux de variation entre variables extensives. On dit que le système est à l'équilibre thermodynamique quand toutes les variables intensives sont uniformes dans le système. La thermodynamique approche l'évolution d'un système comme des enchaînements d'états d'équilibre voisins, avec une évolution continue des différentes grandeurs macroscopiques.

La physique statistique, quant à elle, permet de relier la description macroscopique de la thermodynamique à la description microscopique statistique, en définissant la distribution canonique, f , comme la loi de probabilité des micros-états, $f(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ (exprimée en fonction de $\varepsilon = 1/2m\|\mathbf{v}\|^2$, l'énergie cinétique d'une particule), maximisant l'entropie statistique de Gibbs [32],

$$S(t) = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \ln f(t, \mathbf{x}, \varepsilon) d\varepsilon \right) d\mathbf{x} ,$$

à un temps donné. Cela est fait par minimisation du potentiel thermodynamique, $\Phi = U - TS$, en utilisant le théorème des extrema liés, avec U l'énergie interne du système et T la température :

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon f(t, \mathbf{x}, \varepsilon) d\varepsilon \right) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} .$$

À l'équilibre thermodynamique, la répartition de l'énergie entre particules suit ainsi une loi normale en énergie appelée distribution de Boltzmann [32]. Pour un gaz parfait, l'énergie d'une particule est uniquement fonction de son énergie cinétique. La distribution d'équilibre devient alors une distribution de Maxwell-Boltzmann (ou maxwellienne⁸) :

$$f^M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_{T,n,u}^M(\mathbf{v}) = \frac{n}{(2\pi k_B T_e / m_e)^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{m_e}{k_B T_e} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2 \right) .$$

Le régime d'équilibre thermodynamique local (ETL) peut être alors défini comme suit : les variables intensives peuvent présenter des variations spatiales, tant que les particules suivent localement une distribution de Maxwell-Boltzmann. Seuls les échanges d'impulsion et d'énergie entre particules déterminent le retour à l'équilibre thermodynamique. L'opérateur de collision $\mathcal{C}(f)$ doit donc traduire cette relaxation vers l'ETL. Au niveau macroscopique, sa contribution aux échanges d'énergie peut être exprimée comme une

8. On utilise couramment l'appellation "maxwellienne" en théorie cinétique des gaz, cette loi ayant été établie par Maxwell en 1860, puis confirmée en 1872 par Boltzmann à partir des bases physiques qui fonderont la physique statistique.

relaxation en température entre les différentes espèces. Il existe plusieurs manières d'introduire l'opérateur de collisions dans le cadre des interactions à deux corps :

- une approche cinématique décrivant $\mathcal{C}(f)$ à partir des sections efficaces différentielles, elles-même résultant des potentiels d'interaction entre particules. Dans cette approche $\mathcal{C}(f)$ est appelé opérateur de Boltzmann ;
- une approche statistique décrivant $\mathcal{C}(f)$ sous la forme d'une équation bilan faisant intervenir un taux de probabilité de transition W d'un état $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ vers un état $(t + dt, \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ de l'espace des phases, suite à une ou plusieurs collisions. L'équation d'évolution associée à ce processus est appelée équation maîtresse (ME) et s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^6} \left[W(t, \mathbf{x}', \mathbf{v}' \rightarrow t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}', \mathbf{v}') - W(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} \rightarrow t, \mathbf{x}', \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x}' d\mathbf{v}' . \quad (13)$$

Opérateur de Fokker-Planck non-linéaire

Dans le cadre d'un plasma totalement ionisé, les interactions entre particules se réduisent aux interactions coulombiennes à deux corps, dont la portée est limitée par la longueur de Debye (par l'écrantage du champ électrique). On considère que la dynamique d'une population y est dominée par des collisions fréquentes, qui perturbent faiblement la fonction de distribution. Un développement de Kramer-Moyal de W au deuxième ordre permet d'obtenir une équation de Fokker-Planck [49] :

$$\mathcal{C}^{FP}(f) = -\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} : (f \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle) , \quad (14)$$

où $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle / \|\mathbf{v}\|$ et $\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle$ sont appelés respectivement coefficient de friction dynamique et coefficient de diffusion, conformément aux notations de [49].

Opérateur de Landau

L'opérateur de Landau est souvent considéré comme une approximation de l'opérateur de Boltzmann, pour des collisions coulombiennes "rasantes" (*i.e.* pour des collisions à fort paramètre d'impact) [1] :

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}^{Landau}(f_{\alpha}, f_{\beta}) = \frac{m_{\alpha}}{2} Y_{\alpha\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \int \frac{\mathbf{S}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\beta})}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\beta}\|} \cdot \left[\frac{f_{\beta}}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} - \frac{f_{\alpha}}{m_{\beta}} \nabla_{\mathbf{v}_{\beta}} f_{\beta} \right] d\mathbf{v}_{\beta} , \quad (15)$$

avec, conformément aux notations de [49] :

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{4\pi Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^2 e^4 \ln \Lambda_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \text{Id} - \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (16)$$

avec $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ le logarithme coulombien des collisions entre espèces α et β [1], et Z le numéro atomique. L'opérateur de Landau est valable pour les valeurs élevées du logarithme coulombien $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ (*i.e.* quand il y a beaucoup de particules dans la sphère de Debye). Il est équivalent à une équation de Fokker-Planck non-linéaire, formulée en terme de potentiels de Rosenbluth [49]. Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons à l'évolution

des électrons dans un plasma constitué d'électrons et d'ions. L'équation de référence est l'équation de Vlasov pour les électrons, complétée par un opérateur de collision de Landau (équation de Vlasov-Fokker-Planck-Landau) :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_e - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \mathcal{C}_{ei}^{Landau}(f_e, f_i) + \mathcal{C}_{ee}^{Landau}(f_e, f_e). \quad (17)$$

Construction et fermeture des équations de la MHD résistive bitempérature

Nous allons construire, dans cette section, le système d'équations de la MHD résistive bi-température. Il est possible de fermer ce système à partir de l'équation de Boltzmann ou bien à partir de celle de Vlasov-Fokker-Planck-Landau. La MHD est une théorie monofluide dont nous nous proposons de rappeler la construction. Le système MHD bitempérature est composé d'une équation de continuité, d'une équation du mouvement pour le plasma, d'une équation bilan d'énergie par espèce, d'une loi d'Ohm et d'une loi de Faraday. Ces deux dernières lois assurent le couplage du plasma au champ électromagnétique. Nous verrons que la plupart des approximations concernent le couplage entre champ électromagnétique et matière. Parmi les principales, nous pouvons mentionner la quasi-neutralité, l'absence de courant de déplacement ou d'effets inertiels dus aux électrons. Ces hypothèses permettent de réduire le couplage entre plasma et champ électromagnétique à la détermination du champ électrique par la loi d'Ohm généralisée.

De Boltzmann aux équations monofluides

Les équations bifluides sont obtenues, pour $\alpha = e, i$, par l'intégration du produit des quantités $\left(m_\alpha, m_\alpha v_\alpha, \frac{1}{2} m_\alpha \|v_\alpha\|^2 \right)$ et de l'équation de Boltzmann (ou VFPL), conservative. Les équations bi-fluides sont exprimées en fonction de la densité massique $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$ de l'espèce α , suivant les notations de [1] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\alpha + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha) \\ - e Z_\alpha n_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_\alpha}{c} \times \mathbf{B} \right) = \mathbf{R}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \rho_\alpha k_B T_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha \|u_\alpha\|^2 \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \rho_\alpha k_B T_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha u_\alpha^2 + \mathbf{P}_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha \right) \\ - e Z_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha = Q_{\alpha\beta} + \mathbf{R}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{u}_\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

L'énergie interne spécifique est définie par : $\mathcal{E}_\alpha = \frac{3}{2} \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha}$. Son équation est déduite des équations (19) et (20)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathcal{E}_\alpha) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho_\alpha \mathcal{E}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha) + \text{Tr}(\mathbf{P}_\alpha (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\alpha)^t) = Q_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Les termes d'échange d'impulsion et ceux d'échange d'énergie, $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$, vérifient les relations de conservation suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}_{\beta\alpha} &= 0 & \implies & \mathbf{R}_{\alpha\alpha} = 0, \\ Q_{\alpha\beta} + \mathbf{R}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{u}_\alpha + Q_{\beta\alpha} + \mathbf{R}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{u}_\beta &= 0 & \implies & Q_{\alpha\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Les champs électromagnétiques E et B sont résolus par les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + c \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = 0, \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - c \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J}, \quad (\text{Loi d'Ampère}) \quad (24)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Absence de monopole magnétique libre}) \quad (25)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q, \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (26)$$

avec

$$Q = e \sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = e \sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}.$$

En combinant les équations (18) et (19), on obtient les équations de conservation de la charge et du courant :

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sum_{\alpha} e Z_{\alpha} \left(n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{\mathbf{P}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) - \sum_{\alpha} \frac{e^2 Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_{\alpha}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{e Z_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{R}_{\alpha\beta}. \quad (28)$$

Les équations du fluide moyen sont construites en sommant les équations (18)-(19)-(20) sur toutes les espèces α et en définissant les quantités fluides moyennes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{P}_{\alpha}) \right) - Q \mathbf{E} - \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \left(\frac{3}{2} \rho_{\alpha} k_B T_{\alpha} + \frac{1}{2} \rho_{\alpha} u_{\alpha}^2 \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{\alpha} \left(\frac{3}{2} \rho_{\alpha} \frac{k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{q}_{\alpha} \right) \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (31)$$

L'équation (29) traduit la conservation de la masse totale du système. Les équations (30) et (31) présentent des termes non-conservatifs en présence de champs électromagnétiques. Pour un plasma bi-espèce composé d'électrons et d'ions ($\alpha = e, i$), on définit les quantités fluides moyennes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \rho &= n_i m_i + n_e m_e, \\ \rho \mathbf{u} &= n_i m_i \mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e, \\ Q &= e(Z_i n_i - n_e), \\ \mathbf{J} &= e(Z_i n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e). \end{aligned}$$

Les équations (29) et (30) se réécrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i) = \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}. \quad (33)$$

L'équation (31) traduit la conservation de l'énergie totale du système, déduite des équations d'énergie par espèce.

Loi d'Ohm généralisée et quasi neutralité

La loi d'Ohm généralisée est une équation reliant le champ électrique au courant dans le plasma. Elle permet, dans la limite non-relativiste, de fermer le système monofluide obtenu. Dans la limite non-relativiste, on néglige le courant de déplacement $1/c \partial_t \mathbf{E}$ dans l'équation (24). On obtient la loi d'Ampère :

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}. \quad (34)$$

La conservation de la charge se réécrit en injectant (34) dans (27) :

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = -\frac{c}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) = 0,$$

d'où $Q(t) = Q_0$.

En supposant $m_e \ll m_i$ et en imposant la quasi neutralité, $Q \simeq 0$ on a :

$$n_e = Z_i n_i \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (35)$$

Les expressions des quantités du fluide moyen suivantes peuvent alors être simplifiées :

$$\mathbf{u}_e \simeq \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{n_e e}, \quad \mathbf{u}_i \simeq \mathbf{u}, \quad \rho \simeq n_i m_i, \quad n_e \simeq Z_i n_i. \quad (36)$$

La quasi-neutralité résulte de ce qu'on appelle le phénomène d'*écranage électrique*. Il existe une compétition entre d'une part, l'attraction coulombienne entraînant une accumulation d'électrons autour des ions du plasma, et d'autre part l'agitation thermique, qui tend à lisser ces accumulations de charge. Il en résulte un équilibre où le plasma est de charge globale nulle. La réponse du plasma à une perturbation électrique est une oscillation autour de la neutralité caractérisée par la *fréquence plasma* $\omega_{pe} = \sqrt{n_e e^2 / m_e}$. La longueur caractéristique à partir de laquelle l'écranage électrique est significatif est appelée *longueur de Debye*, notée $\lambda_D = \sqrt{k_B T_e / n_e e^2}$.

En réécrivant l'équation régissant le courant total (28), pour un plasma bi-espèce composé d'électrons et d'ions, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{n_e e^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = & \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{Z_i n_i}{n_e} \right) \mathbf{E} + \left(\left(\mathbf{u}_e + \frac{m_e}{m_i} \frac{Z_i n_i}{n_e} \mathbf{u}_i \right) \times \mathbf{B} \right) + \frac{1}{n_e e} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{P}_e + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{P}_i \right) \\ & + \frac{m_e}{n_e e} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(n_e \mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \frac{Z_i n_i}{n_e} \right) - \frac{\mathbf{R}_{ei}}{n_e e} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les relations (36), on peut réécrire cette expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} + \frac{1}{n_e e} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \frac{1}{n_e e} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_e + \frac{1}{n_e e} \mathbf{R}_{ei} \\ & + \frac{m_e}{n_e e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{J} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}}{n_e e}) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

En négligeant le terme d'inertie des électrons, proportionnel à m_e , on obtient une expression instantanée du champ électrique local en fonction du courant :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n_e e} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_e + \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{J}}{c} + \mathbf{R}_{ei} \right). \quad (\text{Loi d'Ohm généralisée}) \quad (38)$$

Conservation de l'énergie

On introduit $\bar{\mathcal{E}}_e \equiv (\rho_e \mathcal{E}_e) / \rho$ pour lever l'indétermination liée à la limite $\rho_e \simeq 0$. L'équation du bilan de l'énergie interne électronique s'écrit alors, en injectant (22) et (38) dans (21) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\mathcal{E}}_e) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \bar{\mathcal{E}}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{q}_e) + \text{Tr}(\mathbf{P}_e (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_e)^t) = Q_{ei},$$

c'est-à-dire :

$$\rho D_t \bar{\mathcal{E}}_e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_e - \left(\rho \bar{\mathcal{E}}_e \mathbf{I} + \mathbf{P}_e \right) \frac{\mathbf{J}}{n_e e} \right) + \text{Tr}(\mathbf{P}_e (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^t) = -Q_{ie} + \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (39)$$

avec D_t la dérivée lagrangienne définie par $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$, on a utilisé (33) pour éliminer \mathbf{u}_e en écrivant $\partial_t (\rho \bar{\mathcal{E}}_e) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}_e \bar{\mathcal{E}}_e) = \rho D_t \bar{\mathcal{E}}_e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\rho \bar{\mathcal{E}}_e \frac{\mathbf{J}}{n_e e} \right)$. L'équation sur l'énergie interne des ions devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}_i) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{q}_i) + \text{Tr}(\mathbf{P}_i (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_i)^t) = Q_{ie}$$

c'est-à-dire :

$$\rho D_t \mathcal{E}_i + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_i + \text{Tr}(\mathbf{P}_i (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^t) = Q_{ie}. \quad (40)$$

Système d'équations de la MHD résistive et problématique de la fermeture

On peut maintenant écrire le système MHD bitempératures complet, composé des équations suivantes :

Système MHD

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i) = \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \rho D_t \bar{\mathcal{E}}_e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q}_e - \left(\rho \bar{\mathcal{E}}_e \mathbf{ld} + \mathbf{P}_e \right) \cdot \frac{\mathbf{J}}{n_e e} \right) + \text{Tr}(\mathbf{P}_e (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^t) \\ = -Q_{ie} + \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\rho D_t \bar{\mathcal{E}}_i + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_i + \text{Tr}(\mathbf{P}_i (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^t) = Q_{ie}, \quad (44)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n_e e} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_e + \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{J}}{c} + \mathbf{R}_{ei} \right), \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -c \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}, \quad (46)$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}. \quad (47)$$

Le système peut être fermé en se donnant des expressions pour :

- les contraintes visqueuses $\Pi_e = \mathbf{P}_e - p_e \mathbf{ld}$ et $\Pi_i = \mathbf{P}_i - p_i \mathbf{ld}$ (p_e et p_i étant donnés par l'équation d'état);
- les flux de chaleur \mathbf{q}_e et \mathbf{q}_i ;
- les termes de transfert d'énergie et d'impulsion \mathbf{R}_{ei} et Q_{ei} ;

en fonction des quantités fluides : ρ , \mathbf{u} , \mathbf{B} , T_e et T_i .

En thermodynamique hors équilibre, le transport se fait par enchaînement irréversible d'états d'équilibre thermodynamique locaux. Les flux de variables extensives sont exprimés en fonction de gradients de variables intensives, sous la forme générique $\partial_t S = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \Phi$, le signe "moins", accompagnant la linéarité entre flux et gradients, représente ce mécanisme de relaxation local. L'équilibre thermodynamique global est atteint lorsque toutes les variables intensives sont uniformes (densité, température, pression, etc.). Les flux de variables extensives sont par exemple les flux de masse, de charge, d'impulsion et d'enthalpie, tandis que les gradients de variables intensives sont les gradients de densité, de température, de pression et de potentiel électrique.

En physique des plasmas, la fermeture des équations fluides se fait par la définition de *coefficients de transport*, dont la formulation la plus courante est celle introduite par Braginskii [6] :

$$en_e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) = -\nabla_{\mathbf{x}} p_e + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{n_e e} \alpha \mathbf{J} - n_e \beta \nabla_{\mathbf{x}} T_e, \quad (48)$$

$$q_e = -\kappa \nabla_x \cdot T - \beta J T / e . \quad (49)$$

Les paramètres α , β et κ sont les *coefficients de transport*. L'équation (48) vient remplacer l'équation (45) dans le système MHD, tandis que l'équation (49) viens s'injecter dans l'équation (43). La détermination de ces coefficients de transport, dans le cas d'un plasma proche de l'équilibre thermodynamique local (ETL), est effectuée en faisant appel à des théories perturbatives comme le développement de Chapman-Enskog. Dans le cas d'un plasma hors équilibre thermodynamique, les valeurs des coefficients de transport α , β et κ sont déduites des termes échanges d'impulsion R_{ei} et de flux de chaleur q_e , à partir de leurs expressions intégrales (9) et (49), via la résolution de la distribution f_e .

0.4 État de l'art des modèles de fermeture

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les différents modèles permettant le calcul des coefficients de transport dans les plasmas chauds. Nous commencerons par décrire les modèles de transport local, à commencer par les modèles classiques de Spitzer-Härm [50] et de Braginskii [6]. Nous introduirons ensuite les modèles de transport non-locaux dans le cadre du couplage avec l'hydrodynamique. L'évolution des modèles de transport électronique a suivi la montée en puissance des calculateurs et des améliorations des diagnostics expérimentaux, les premiers modèles sont des fermetures algébriques ne nécessitant presque aucune résolution numérique, puis l'évolution des capacités de calcul ont permis la résolution couplée de modèles cinétiques réduits avec l'hydrodynamique. Ces modèles cinétiques vont de la diffusion multigroupe stationnaire à des modèles proches des équations cinétiques de référence.

0.4.1 Modèles de Spitzer-Härm et de Braginskii

Les premiers modèles de fermeture des équations de la MHD à avoir été proposés correspondent aux premiers calculs de conductivité électrique et thermique dans les plasmas proposés par L. Spitzer et R. Härm en 1953 [50]. Ils résolvent numériquement l'équation (17) dans la limite non-magnétisée et pour plusieurs valeurs de charge ionique Z , à l'aide d'un développement en polynômes de Laguerre de la distribution perturbée autour de la Maxwellienne. Ce développement est tronqué à l'ordre $N = 2$ et une méthode de différences finies est utilisée pour calculer la solution. Le flux de chaleur électronique de Spitzer-Härm est donné par la formule classique suivante :

$$q_{SH} = 64 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}} \left(\frac{k_B}{m_e} \right)^{7/2} T_e^{5/2} \nabla_x T_e . \quad (50)$$

Ces coefficients ont ensuite été recalculés par Braginskii en 1965 [6], en présence cette fois d'un champ magnétique, et toujours à l'aide d'un développement en polynômes de Laguerre avec $N = 3$. Les coefficients de transport calculés par Braginskii ont pendant longtemps fait référence, de par leur formulation plus adaptée à la fermeture, exprimés comme des fonctions continues de l'intensité du champ magnétique et ce, pour $Z = 1, 2, 3, 4$ et $+\infty$.

Entre temps, il a été montré que certains coefficients calculés par Braginskii étaient incorrects dans la limite fortement magnétisée (erreur jusqu'à 65%, mauvais comportement

asymptotique, etc.). La source de ces erreurs a été retracée à la troncature du développement en polynômes de Laguerre, le nombre N de termes du développement requis pour la convergence augmentant rapidement avec la magnétisation. Ces coefficients ont été recalculés et corrigés par E. M. Epperlein et M. G. Haines [15], par une nouvelle méthode basée sur le développement de la distribution en tenseurs cartésiens tronqués à l'ordre 1. Ces coefficients corrigés font référence et sont toujours utilisés aujourd'hui, y compris dans les fermetures à limitation de flux.

0.4.2 Modèles de transport non-locaux

Les effets liés à la délocalisation du transport électronique ont été mis en évidence expérimentalement par de nombreuses expériences de diffusion Thomson sur des plasmas créés par laser [18, 23, 24, 7, 27, 28]. Ces expériences consistent à tirer sur une plaque composée d'un matériau de Z élevé (e.g. l'or Au, l'aluminium Al ou le Béryllium Be), à l'aide d'un *laser de puissance*⁹ afin de générer un plasma dans la zone d'ablation laser. Ce plasma est ensuite sondé par un faisceau quadrupolaire dont les composantes diffusées par le plasma sont mesurées. Les mesures de diffusion Thomson permettent de remonter au flux de chaleur, et ont montré des écarts importants avec les modèles de Spitzer-Härm. La FCI met en jeu des gradients raides de température et de densité propices à la délocalisation du transport. Nous allons décrire les principaux modèles existants prenant en compte ces effets.

Modèles à limitation de flux

Les modèles à limitation de flux sont appréciés pour leur simplicité : ils mettent en œuvre une limitation ad hoc du flux local de Spitzer-Härm. En effet, en présence de gradients raides, le modèle de Spitzer-Härm a tendance à surévaluer le flux de chaleur. Les limiteurs de flux consistent à "corriger" le flux de Spitzer-Härm en le réduisant, de 3% à 15%, de sorte que les valeurs "physiques", mesurées expérimentalement ou calculées avec des codes cinétiques, soient retrouvées. La limitation de flux permet de prendre en compte empiriquement la délocalisation du transport.

Modèles de convolution

Les modèles de type convolution expriment le flux de chaleur comme la convolution du flux de Spitzer-Härm q_{SH} et d'un noyau de convolution w :

$$q_e(x) = \int w[x, x', \lambda_d(x')] \otimes q_{SH}(x') dx' , \quad (51)$$

où λ_d représente la longueur de délocalisation, proportionnelle dans [41] à la moyenne en vitesse du libre parcours moyen des électrons $\lambda_{ei}^T = 3(\pi/2)^{1/2} \lambda_{ei}(v_T)$ (notations [6]). Soit $L_T = T_e / \|\nabla_x T_e\|$ la longueur de gradient thermique. Dans la limite locale, $Kn = \lambda_{ei}/L_T \ll 1$, le noyau de convolution $w_{ij}[x, x', \lambda_d(x')]$ doit "tendre" vers la distribution de Dirac $\delta_{ij}\delta(x, x')$. Au contraire, dans la limite $Kn \gg 1$, le flux de chaleur ne doit pas dépasser la limite de free-streaming $n_e v_T k_B T_e$. Cette méthode permet d'adapter plus finement le flux de chaleur que les modèles à limitation de flux, tout en étant peu restrictive, laissant un

9. La dénomination "laser de puissance" désigne une catégorie de laser pulsé à milieu amplificateur solide délivrant typiquement des intensités de l'ordre de 10^{14} W/cm², utilisé dans les expériences d'interaction laser-plasma (ILP) [5].

large choix dans la forme des noyaux de convolution. Le noyau de convolution de le plus simple est le noyau exponentiel [41, 39] :

$$w_1(x, x') = \frac{1}{2\lambda_d(x')} \exp\left(-\frac{X}{\lambda_d(x')}\right) \quad \text{avec} \quad X = \frac{1}{n_e(x')} \left| \int_x^{x'} n_e(x'') dx'' \right|, \quad (52)$$

où la longueur de délocalisation λ_d s'exprime en fonction de la moyenne en vitesse du libre parcours moyen λ_{ei}^T :

$$\lambda_d(x') \simeq 30(Z_i + 1)^{1/2} \lambda_{ei}^T(x') \quad (53)$$

Les équations (51)-(52)-(53) permettent de décrire des effets non-locaux, car la valeur du flux de chaleur en x dépend du profil de température dans une région autour de x bien plus grande que λ_{ei}^T . En effet les électrons participant majoritairement au flux de chaleur ont plusieurs fois la vitesse thermique et font en moyenne $Z + 1$ collisions avant de perdre leur énergie : cela est pris en compte par le facteur $(Z + 1)^{1/2}$ en accord avec la théorie des marches aléatoires [41, 39].

Ce modèle a été proposé pour prendre empiriquement en compte des effets de délocalisation, d'autres noyaux de convolution ont été proposés, basés sur des développement de l'équation de Fokker-Planck en polynômes de Legendre et dans l'approximation diffusion pour prendre en compte des effets de supplémentaires comme la description non-linéaire du champ électrique permettant une condition de courant nul [40] ; ou basés sur des méthodes de resommation des développements de Chapman-Enskog d'ordre élevé [38].

Modèles de type SNB

Le modèle SNB (Schurtz, Nicolai et Busquet [47]) se démarque des modèles précédents en proposant une résolution quasi-cinétique par diffusion multigroupe équivalente à un système d'équations cinétiques réduit. Le modèle est inspiré des méthodes de convolution en écrivant w comme la fonction de Green d'une équation de diffusion en q_e . La longueur de convolution considérée s'écrit comme la moyenne harmonique du libre parcours moyen électronique λ_{ee} et de la distance d'arrêt $k_B T_e / \|eE\|$ associée au champ électrique de Spitzer-Härm. Le système d'équations cinétiques réduit se ramène à une équation de diffusion multigroupe pouvant s'écrire :

$$\left[\frac{1}{\lambda_{ee}} - \nabla_x \cdot \frac{\lambda'_{ei}}{3} \nabla_x \right] h_0 = -\nabla_x \cdot g_1^m, \quad (54)$$

$$h_1 = -\frac{\lambda_{ei}}{3} \nabla_x h_0, \quad (55)$$

où les parties isotrope et anisotrope de la distribution électronique sont respectivement développées à l'ordre 1 autour de l'état d'équilibre avec $f_0 = f_0^M + h_0$ et $f_1 = f_1^M + h_1$. L'effet du champ électrique est pris en compte de façon empirique à travers la réduction du libre parcours moyen électron-ion par la longueur d'arrêt $\frac{1}{\lambda'_{ei}} = \frac{1}{\lambda_{ei}} + \frac{|eE_{sh}|}{m_e k_b T_e}$. Le flux de chaleur électronique est calculé par intégration de $f_1 v^5$:

$$q_e = 2\pi m_e \int_0^\infty (f_1^M + h_1) v^5 dv = q_{e,sh} + q_{e,nl}. \quad (56)$$

La résolution multigroupe de l'équation de diffusion (54) permet de calculer ensuite le flux de chaleur non-local en injectant (55) dans (56). Le modèle SNB permet un calcul quasi-cinétique du flux de chaleur, et ce, dans les trois directions de l'espace. L'ajout d'un

champ magnétique au modèle a été réalisé par Nicolai *et al.* [43]. La forme en diffusion multigroupe du modèle SNB en fait un modèle cinétique réduit, dont la résolution est significativement moins coûteuse en temps de calcul en comparaison à une résolution cinétique complète.

Évolutions récentes des modèles cinétiques réduits

Les avancées récentes en termes de transport non-local concernent principalement l'amélioration du domaine de validité des modèles cinétiques réduits, par l'ajout d'harmoniques d'ordre élevé pour une description plus fine de la composante anisotrope de la distribution, ou par l'amélioration de la modélisation des collisions électron-électron C_{ee} et du champ électrique. Les auteurs de Del Sorbo *et al.*[12] proposent par exemple d'améliorer le modèle SNB par une description plus fine de l'opérateur de collisions C_{ee} et du champ électrique, en remplaçant l'opérateur de collisions de Bhatnagar, Gross et Krook, (BGK) par l'opérateur de Albritton *et al.*, appelée AWBS [30] et en proposant d'intégrer une description auto-consistante du champ électrique.

L'utilisation d'une approximation angulaire alternative de type "M1 entropique", déjà utilisée en transfert radiatif [13], est également étudiée pour le transport électronique [12, 26, 25].

De nombreuses améliorations dans la résolution numérique du modèle SNB ont également été proposées par les différentes équipes ayant implanté ce type de modèle dans des codes hydrodynamiques. Ces améliorations concernent principalement la stabilité numérique dans le cadre du couplage à l'hydrodynamique.

Récemment, des modèles P1 stationnaires avec une description plus fine des termes de collisions anisotropes, jouant un rôle important dans le calcul auto-consistant du champ électrique, ont été proposés [9].

0.5 Résumé de la démarche

Le modèle cinétique réduit que nous proposons d'étudier a été initialement proposé par Albritton [2]. Nous avons retrouvé ce modèle en suivant une démarche de clarification des hypothèses constitutives des modèles de fermeture quasi-cinétiques existants, sans avoir initialement connaissance des travaux d'Albritton. Nous proposons de poursuivre l'étude de ce modèle dans le cadre de la fermeture des équations de la MHD résistive, en justifiant par l'analyse asymptotique sa validité dans les conditions de la FCI, et en proposant une méthode de résolution numérique stable du système couplé fluide / cinétique. Ce modèle réduit est basé sur les approximations classiques P1 et diffusion, il est également non-stationnaire pour certaines variables et non-perturbatif. Nos motivations entraînant ce choix de modèle sont les suivantes :

- Nous ne souhaitons pas faire d'approximations dont le domaine de validité est mal maîtrisé.
- Nous ne souhaitons pas faire d'hypothèse perturbative autour de l'équilibre thermodynamique local, mais le modèle doit capturer cette limite.

On cherchera donc à simplifier au maximum le modèle cinétique basé sur l'équation de Vlasov-Fokker-Planck-Landau dans le cadre strict de ces choix de modélisation, correspon-

dant au cadre d'étude de la MHD résistive. On fera la liste des hypothèses constitutives du modèle, que l'on différenciera des hypothèses simplificatrices qui sont faites dans cette étude, mais sur lesquelles nous pourrions revenir dans des applications futures. Une attention particulière est portée sur le fait que le modèle physico-numérique proposé puisse évoluer pour incorporer ces éléments négligés dans le cadre de cette étude, le but final étant de proposer aux physiciens une fermeture des équations de la MHD résistive dont le domaine de validité est à la fois bien établi et élargi par rapport aux fermetures disponibles.

Dans le chapitre 1, nous construirons les bases du modèle P1-diffusion. Nous rappellerons et préciserons les objectifs de la modélisation, ainsi que les hypothèses constitutives et simplificatrices du modèle. Nous verrons que le modèle proposé possède un domaine de validité bien maîtrisé et que les régimes asymptotiques rencontrés sont bien retrouvés. Nous vérifierons que les équations obtenues sont compatibles avec celles de la MHD résistive, et nous proposerons une réécriture facilitant le couplage cohérent des équations cinétiques avec les équations fluides.

Dans le chapitre 2, nous allons faire l'analyse variationnelle du modèle P1-Diffusion linéarisé autour de l'équilibre maxwellien. Pour cela, nous proposerons une réécriture matricielle compacte de l'opérateur de transport P1-Diffusion noté \mathcal{T} . Une décomposition des flux cinétiques en contributions de courant nul permet de réécrire la limite linéaire, $\mathcal{T}^{(l)}$, de l'opérateur de transport P1-Diffusion en faisant apparaître un projecteur de courant nul. Cette réécriture est adaptée à l'analyse variationnelle, et nous proposerons d'étudier la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$.

Dans le chapitre 3, nous procéderons à la résolution numérique explicite 1D-espace 1D-vitesse du système P1-diffusion dans sa forme canonique. Cette première étude numérique permet de vérifier, d'une part, qu'il est possible de proposer une résolution numérique conservative du modèle P1-diffusion, et d'autre part, que le modèle réponde bien aux objectifs de modélisation. Nous vérifierons en particulier que le modèle P1-diffusion décrit qualitativement la délocalisation du transport électronique, et qu'il capture la limite de Spitzer-Härm dans le régime fortement collisionnel. On proposera un schéma numérique tout explicite permettant de garantir au niveau discret les propriétés de conservation. Le schéma proposé est basé sur une approche volumes finis et une discrétisation conservative des flux numériques en vitesse. Ces flux numériques sont discrétisés sur un maillage plan 1Dx-1Dv. Le terme de collisions est discrétisé d'après un schéma Chang et Cooper [8]. On identifiera enfin les éventuelles contraintes CFL pouvant rendre difficile un couplage effectif avec l'hydrodynamique. Cela nous amènera à considérer l'implicitation totale du modèle, dans le chapitre suivant, étant donné le caractère parabolique du modèle P1-diffusion.

Dans le chapitre 4, nous proposerons un schéma numérique totalement implicite pour résoudre le système couplé fluide/cinétique associé au modèle P1-diffusion. Le schéma numérique choisi est basé sur une discrétisation des équations reformulées selon la méthode micro-macro du modèle P1-Diffusion. Ces équations seront discrétisées en espace et en temps selon une méthode implicite itérative que nous illustrerons à l'aide d'un exemple simple : l'advection-diffusion à coefficients constants. Nous analyserons les propriétés de ce schéma numérique et nous justifierons en quoi il répond aux attentes. Nous appliquerons enfin, ces principes de discrétisation au modèle P1-Diffusion Micro-Macro et nous réaliserons des tests numériques de vérification.

Dans le chapitre 5, nous confronterons les résultats numériques obtenus avec un code d'étude résolvant de façon totalement implicite des équations du modèle P1-Diffusion, par la méthode décrite dans le chapitre 4, avec des résultats obtenus à l'aide du code PN totalement cinétique OSHUN. Nous présenterons d'abord les spécificités du code OSHUN ainsi que les différences de modélisation entre OSHUN et P1D. Nous décrirons ensuite les différents cas-tests choisis pour comparer les solutions issues des calculs PN, P1-Diffusion, et Spitzer-Härm. On proposera enfin une étude stationnaire afin de montrer que le modèle est capable de capturer des états stationnaires non-locaux.

CHAPITRE 1

Construction d'un nouveau modèle quasi-cinétique MHD compatible

Sommaire

1.1	Introduction	21
1.2	Approximation angulaire P1	24
1.2.1	Notations et définitions	25
1.2.2	Développement en harmoniques sphériques de l'opérateur de Vlasov	27
1.2.3	Développement en harmoniques sphériques de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau	27
1.2.4	Système VFPL-P1 final	30
1.3	Approximation diffusion	31
1.3.1	Limite et scaling diffusion	31
1.4	Système P1-Diffusion final et propriétés	36
1.4.1	Système aux moments	37
1.4.2	Limite de Spitzer-Härm	38
1.5	Reformulation micro-macro du modèle P1-Diffusion	40
1.6	Conclusion	45

1.1 Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de détailler la construction du modèle quasi-cinétique qui nous servira de base pour la mise en place d'une fermeture non-locale des équations de la MHD résistive. Ce modèle est appelé *P1-Diffusion* et se base sur deux approximations, l'approximation P1 et l'approximation diffusion. Chacune de ces approximations est réalisée dans un domaine de validité contrôlé, et permet de réduire de façon significative la dimension algébrique du problème initial. Il est important que les hypothèses de construction soient minimales, et cohérentes avec les hypothèses de construction de la MHD résistive. Nous ferons un résumé des propriétés du modèle obtenu ainsi qu'un résumé des hypothèses physiques ayant été faites. Nous finirons par réécrire le modèle final sous une forme micro-macro adaptée à l'étude du couplage fluide/cinétique.

Formulation des objectifs de la modélisation

Nous résumons en quelques points les principales propriétés que le modèle doit satisfaire afin de répondre à la problématique générale de la fermeture non-locale des équations de

la MHD résistive dans le cadre de la simulation des expériences de FCI en attaque directe ou indirecte.

1. Le modèle propose une description cinétique des électrons dans les plasmas de FCI, afin de pouvoir capturer les effets liés à la délocalisation des électrons, en particulier dans le flux de chaleur.
2. Le modèle n'est pas perturbatif et reste valable quand l'écart à l'équilibre est important.
3. Le modèle présente une réduction de la dimension algébrique du problème pour alléger les temps de calcul et l'empreinte mémoire associés à la résolution numérique du système.
4. Le modèle reste compatible avec les hypothèses de construction de la MHD-lagrangienne bitempérature, et permet de garantir la cohérence entre résolution des quantités fluides et fermeture cinétique.
5. Le modèle capture différents régimes asymptotiques identifiés, comme la limite de Spitzer-Härm [50] à l'ETL.
6. Le domaine de validité du modèle est maîtrisé.

Nous voulons construire dans ce chapitre un modèle mésoscopique satisfaisant au mieux ces propriétés, en se restreignant au maximum à des hypothèses associées à la MHD résistive et aux plasmas chauds. Nous ferons une distinction entre les hypothèses constitutives, qui sont au cœur du modèle P1-Diffusion, et les hypothèses de simplification, qui sont faites dans cette étude pour des raisons de simplification mais dont on souhaite que le modèle puisse se passer à terme.

Les hypothèses constitutives sont des hypothèses classiques de la physique des plasmas chauds, et très souvent faites pour décrire les plasmas de FCI. Le plasma étudié est un plasma chaud, totalement ionisé, fortement collisionnel et non-relativiste, composé d'électrons et d'une seule espèce d'ions.

Hypothèse constitutive 1. (*disparité de masses*) On suppose que la masse des ions m_i est très élevée par rapport à la masse des électrons m_e . Ce rapport est le plus faible pour l'hydrogène, composé d'un unique proton (donc de numéro atomique $Z_i = 1$) et vaut $m_i/m_e \simeq 1836.2$.

Hypothèse constitutive 2. (*quasi-neutralité*) La mobilité des électrons dans le plasma induit un écrantage local des charges dans le plasma, on a en conséquence de cela :

$$n_e \simeq Z_i n_i , \tag{1.1}$$

avec n_e la densité électronique et n_i la densité ionique.

Hypothèse constitutive 3. (*plasma totalement ionisé*) On suppose que le plasma est totalement ionisé, cela signifie que toutes les espèces du plasma sont à leur niveau maximum d'ionisation. Cela suppose que la température des électrons T_e est très élevée par rapport à l'énergie d'ionisation des espèces.

Hypothèse constitutive 4. (*plasma chaud / fortement collisionnel*) L'appellation "plasma chaud", en opposition aux plasmas dits "froids", concerne la température des ions. On

considère dans les plasmas chauds que la température des ions est comparable à la température des électrons, celle-ci étant supérieure à la température correspondant à l'énergie d'ionisation des ions d'après l'hypothèse 3. Cette thermalisation est causée par les collisions entre électrons et ions, c'est pour cela qu'elle est également associée à l'hypothèse de plasma fortement collisionnel.

$$T_i \sim T_e \quad (\text{en ordre de grandeur}) \quad (1.2)$$

La fréquence des collisions électron-ion ν_{ei} est néanmoins très grande devant la fréquence de relaxation en température ν_{ei}^T gouvernant la thermalisation entre espèces.

Hypothèse constitutive 5. (*Plasma classique et non-relativiste*) Les effets quantiques ondulatoires et statistiques des électrons qui composent le plasma, ainsi que les effets relativistes comme le courant de déplacement sont négligés.

Les effets quantiques des électrons sont négligeables si la longueur de De Broglie, définie par $\lambda = h/(m_e v_{e,th})$ avec $h = 6.6261 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}$ la constante de Planck, est faible devant la distance inter-particules moyenne $L = n_e^{-1/3}$, on obtient le critère suivant :

$$(k_B T_e)^{3/2} / n_e \ll h^3 / (2m_e)^{3/2} , \quad (1.3)$$

Tandis que les effets relativistes sont négligeables quand la vitesse moyenne des particules est faible devant la célérité de la lumière c :

$$k_B T_e \ll m_e c^2 . \quad (1.4)$$

Ces 5 hypothèses sont très courantes en physique des plasmas, les hypothèses 1 et 2 font partie de la définition d'un plasma [1], tandis que les hypothèses 3 et 4 sont plus spécifiques aux plasmas de fusion [5, 1]. Enfin, nous resterons dans des régimes physiques où les effets quantiques restent négligeables. Au cours de la construction du modèle P1-Diffusion, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires dites de "simplification". Ces hypothèses sont faites dans cette étude pour simplifier l'analyse mais ne sont pas constitutives du modèle P1-Diffusion. Par exemple, nous supposerons que le plasma est non-magnétisé, mais nous ferons attention à ce que le modèle puisse facilement évoluer pour prendre en compte la présence d'un champ magnétique non-nul.

Le premier point nous impose de travailler avec l'équation de Vlasov-Fokker-Planck-Landau électronique

$$\frac{\partial}{\partial t} f_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_e - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \mathcal{Q}_{ee}(f_e, f_e) + \mathcal{Q}_{ei}(f_e, f_i) , \quad (1.5)$$

avec l'opérateur de collisions de Landau :

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \frac{2\pi Z_\alpha^2 Z_\beta^2 e^4 \ln \Lambda_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta)}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} \cdot \left(\frac{1}{m_\alpha} f_\beta \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha - \frac{1}{m_\beta} f_\alpha \nabla_{\mathbf{v}_\beta} f_\beta \right) d\mathbf{v}_\beta , \quad (1.6)$$

où α et β désignent des électrons ou des ions. Cette équation a été présentée en introduction (4)-(15).

L'équation (1.5) est de dimension 7 (3D espace, 3D vitesse, 1D temps). Nous allons proposer une série d'approximations permettant de réduire la dimension algébrique du problème afin que sa résolution numérique dans le cadre d'un couplage avec un code

fluide soit accessible en termes de temps de calcul et de consommation de mémoire. Les différentes étapes de construction du modèle P1-Diffusion sont résumées dans le schéma suivant :

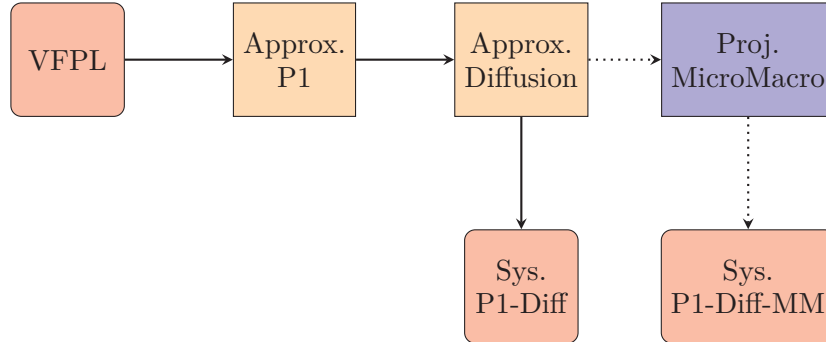


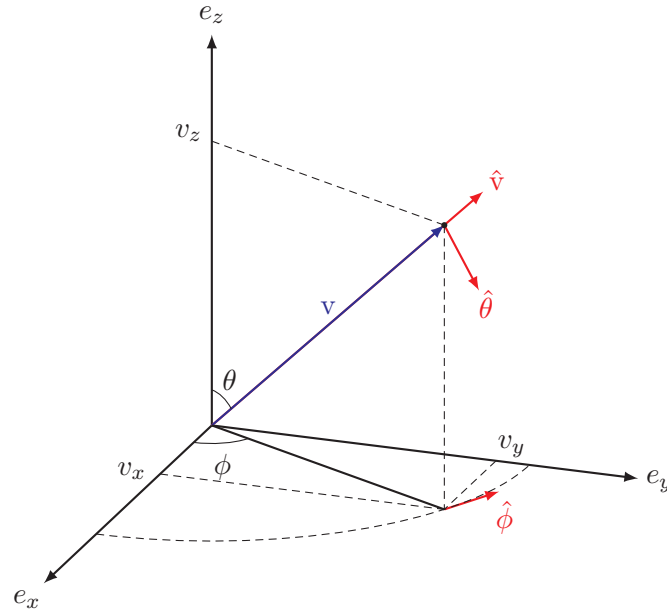
FIGURE 1.1 – Schéma de la construction du modèle P1-Diffusion à partir de l'équation de VFPL. Les flèches en trait plein correspondent aux approximations réalisées, les flèches en trait pointillés ne désignent qu'une réécriture du système.

Chaque étape de construction fera l'objet d'une section, puis nous analyserons les propriétés du modèle avant d'aborder la réécriture du système sous une forme micro-macro, plus adaptée à l'étude du couplage fluide/cinétique.

1.2 Approximation angulaire P1

L'approximation angulaire "P1" consiste à exploiter les symétries de la fonction de distribution dans l'espace des phases afin de réduire la dimension algébrique du problème. Il s'agit d'un développement en harmoniques sphériques de la distribution que nous allons tronquer à l'ordre 1. Dès 1957, Rosenbluth et. al. [45] utilisent les polynômes de Legendre pour représenter les distributions présentant une symétrie cylindrique dans l'espace des phases. Pour les distributions asymétriques, les développements en tenseurs cartésiens ont été étudiés en détail par Shkarovski et. al. [48]. Johnston a ensuite montré [31] que les développements en tenseurs cartésiens et en harmoniques sphériques étaient équivalents jusqu'à l'ordre 3, ce qui s'avère suffisant pour la prise en compte de l'anisotropie du tenseur de pression dans la modélisation. La plupart des modèles ne prennent en compte que les deux premiers termes du développement, on trouve ainsi plus souvent les tenseurs cartésiens dans la littérature, pour des raisons de simplicité. En effet, les tenseurs cartésiens présentent l'avantage de rendre trivial le développement de l'équation de Vlasov. Les deux premiers termes des développements sphériques et cartésiens sont les mêmes, mais la fermeture à imposer pour obtenir des équations équivalentes sont différentes. Cette différence entre fermetures est souvent source de confusion, en plus des différents choix de normalisation pouvant être trouvés dans la littérature.

Nous choisissons de réaliser un développement en harmoniques sphériques de la distribution électronique car la propriété d'orthogonalité permet de tronquer le développement tout en conservant les premiers moments de la distribution. De plus, nous verrons par la suite que la propriété d'être une base de vecteurs propres de l'opérateur Laplacien en vitesse sera utile pour justifier cette troncature.

FIGURE 1.2 – Schéma du repère de coordonnées sphériques (v, θ, ϕ) .

1.2.1 Notations et définitions

Commençons par introduire quelques notations et définitions pour les harmoniques sphériques :

Notation 1.2.1. (Coordonnées sphériques) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ le vecteur vitesse. On note sa norme $v = \|v\|$ et sa direction $\Omega = \frac{v}{v}$. On définit le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times [0, \pi[\times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (v, \theta, \varphi) &\longmapsto \begin{pmatrix} v \sin \theta \cos \varphi \\ v \sin \theta \sin \varphi \\ v \cos \theta \end{pmatrix} = v\Omega \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. (Harmoniques sphériques réelles) Les harmoniques sphériques réelles sont des fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{S}^2)$ et définies sur la sphère unité \mathbb{S}^2 , pour $l \geq 0$ et $-l \leq m \leq l$:

$$\begin{aligned} Y_l^m &: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

et définies de la façon suivante

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{2}(-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\varphi), & \text{si } m < 0, \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta), & \text{si } m = 0, \\ \sqrt{2}(-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cos(|m|\varphi), & \text{si } m > 0, \end{cases}$$

avec P_l^m , les polynômes de Legendre associés :

$$P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

Proposition 1.2.3. *Les harmoniques sphériques forment une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^2)$, la relation d'orthogonalité s'écrit :*

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (1.7)$$

Toute fonction $f \in L^2$ admet donc un développement en harmoniques sphériques unique s'écrivant :

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) f_l^m(v). \quad (1.8)$$

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [22]. ■

Définition 1.2.4. (Fermeture PN) On appelle *fermeture PN* d'un développement en harmoniques sphériques le fait de tronquer le développement à l'ordre $l = N$. On a donc simplement

$$f_{PN}(\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) f_l^m(v). \quad (1.9)$$

La propriété d'orthogonalité des harmoniques sphériques permet de garantir la conservation des moments de la distribution après troncature, ce que ne permettent pas d'autres types de développements comme les développements en tenseurs cartésiens. Cependant, les premiers termes de ces développements étant similaires, on peut retrouver les mêmes résultats en adaptant la fermeture. On montre dans le tableau 1.1 les fermetures P1 équivalentes pour les harmoniques sphériques et les tenseurs cartésiens.

	Harmoniques sphériques	Tenseurs cartésiens
développement angulaire	$f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) f_l^m(v)$	$f = f_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \mathbf{f}_2 + \dots$
fermeture P1	$f_2^m = 0, \quad -2 \leq m \leq 2$	$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} f_0 \text{Id}$

TABLEAU 1.1 – Fermeture P1 pour les développement harmoniques sphériques et cartésiens

Notation 1.2.5. La notation tensorielle est utilisée pour avoir une formulation plus compacte et lisible des projections de f_e sur les harmoniques sphériques, on note :

$$f_0 = f_0^0, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_1^{-1} \\ f_1^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}f_2^2 - \frac{1}{2}f_2^0 & \sqrt{3}f_2^{-2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^1 \\ \sqrt{3}f_2^{-2} & \sqrt{3}f_2^2 - \frac{1}{2}f_2^0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^{-1} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^{-1} & f_2^0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

1.2.2 Développement en harmoniques sphériques de l'opérateur de Vlasov

On commence par projeter la partie Vlasov correspondant au membre de gauche de l'équation (1.5) sur les deux premières composantes du développement en harmoniques sphériques de f_e . On injecte alors le développement en harmoniques sphériques de f_e (1.8) dans le membre de gauche de l'équation (1.5), et on prend les projections par rapport à Y_l^m avec $l = 0, 1$ et $m = -l, \dots, l$, pour obtenir les 4 équations suivantes (calculs en annexe B.1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_0 + v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} - \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{f_1}{\sqrt{3}} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \nabla_x \cdot \frac{f_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0 + \frac{e}{m_e c} \mathbf{B} \times f_1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[v \nabla_x \cdot f_2 - \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^3 f_2 \cdot \frac{eE}{m_e} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

On remarque que chaque équation de (1.11) fait apparaître un terme d'ordre supérieur dans le développement harmoniques sphériques de f_e , d'où la nécessité d'imposer une fermeture en tronquant le développement à un ordre fini afin d'obtenir un système avec autant d'équations que d'inconnues.

1.2.3 Développement en harmoniques sphériques de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau

Dans cette partie nous allons étudier le développement en harmoniques sphériques de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, en commençant par le terme de collisions électrons-ions. D'après l'équation (1.6), il s'écrit :

$$\mathcal{C}_{ei} = m_e \frac{Y_{ei}}{2} \nabla_{v_e} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{S}(v_e - v_i)}{|v_e - v_i|} \cdot \left(\frac{1}{m_e} f_i \nabla_{v_e} f_e - \frac{1}{m_i} f_e \nabla_{v_i} f_i \right) dv_i \quad (1.12)$$

avec (conformément aux notations de [1]) :

$$Y_{ei} = \frac{4\pi Z_e^2 Z_i^2 e^4 \ln \Lambda_{ei}}{m_e^2}, \quad (1.13)$$

et $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ le logarithme coulombien.

Avant de développer en harmoniques sphériques l'opérateur \mathcal{C}_{ei} , nous allons faire un développement asymptotique en $\varepsilon = \sqrt{m_e/m_i}$ similaire à [11]. En effet, il est courant en physique des plasmas d'exploiter la forte disparité de masse entre les ions et les électrons pour faire des développements asymptotiques. En suivant les hypothèses 2 et 4, nous allons adimensionner \mathcal{C}_{ei} . On considère T_0 comme l'échelle de température du plasma, et on définit les échelles de vitesses thermique électronique et ionique :

$$v_{i,th} = \sqrt{k_B T_0 / m_i} \quad \text{et} \quad v_{e,th} = \sqrt{k_B T_0 / m_e}, \quad (1.14)$$

ce qui donne $v_{i,th} = \varepsilon v_{e,th}$. Nous allons utiliser $v_{i,th}$ et $v_{e,th}$ comme échelles de vitesse pour adimensionner l'opérateur \mathcal{C}_{ei} en écrivant $v_i = v_{i,th} \tilde{v}_i$ et $v_e = v_{e,th} \tilde{v}_e$. Les distributions électroniques et ioniques sont également adimensionnées en écrivant $f_e = F_e \tilde{f}_e$ et $f_i = F_i \tilde{f}_i$ avec :

$$F_e = n_e / v_{e,th}^3 \quad \text{et} \quad F_i = n_i / v_{i,th}^3. \quad (1.15)$$

On trouve alors la forme adimensionnée suivante pour \mathcal{C}_{ei} :

$$\mathcal{C}_{ei} = \frac{F_e}{\tau_0} \frac{1}{2} \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}_e} \cdot \int \frac{\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{v}}_e - \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_i)}{\|\tilde{\mathbf{v}}_e - \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_i\|} \cdot \left[\tilde{f}_i \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}_e} \tilde{f}_e - \varepsilon \tilde{f}_e \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}_i} \tilde{f}_i \right] d\tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (1.16)$$

avec $\tau_0 = \frac{Y_{ei} n_i}{v_{e,th}^3}$ le temps caractéristique collisionnel.

Proposition 1.2.6. *Le terme $\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 0}$ d'ordre 0 en ε de l'opérateur \mathcal{C}_{ei} s'écrit :*

$$\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 0} = Y_{ei} \frac{n_i}{2} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\mathbf{S}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e \right). \quad (1.17)$$

On remarque tout d'abord qu'à l'ordre 0, l'opérateur \mathcal{C}_{ei} ne dépend pas de f_i mais uniquement de la densité n_i et qu'il est invariant par changement de référentiel galiléen. De plus, \mathcal{C}_{ei} possède une forme de Laplacien en vitesse. On peut donc facilement développer \mathcal{C}_{ei} en harmoniques sphériques.

Proposition 1.2.7. *Le développement en harmoniques sphériques de \mathcal{C}_{ei} à l'ordre 0 en ε s'écrit :*

$$\mathcal{C}_{ei} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathcal{C}_{ei}^{(l,m)} Y_l^m + O(\varepsilon), \quad (1.18)$$

avec :

$$\mathcal{C}_{ei}^{(l,m)} = -\frac{l(l+1)}{2} \frac{n_i Y_{ei}}{v^3} f_l^m + O(\varepsilon). \quad (1.19)$$

L'équation (1.19) montre que l'opérateur de collision électrons-ions \mathcal{C}_{ei} joue un rôle de rappel des composantes d'ordre $l \geq 1$ du harmoniques sphériques de f_e .

L'amortissement induit par l'opérateur de collision électrons-ions \mathcal{C}_{ei} augmente de façon quadratique en l , on a donc une forte isotropisation de la distribution par l'effet des collisions entre électrons et ions, justifiant ainsi l'approximation P1 consistant à tronquer le développement en harmoniques sphériques à l'ordre 1.

Termes d'ordres élevés en ε

Parmi les termes d'ordre $O(\varepsilon^p)$ avec $p \geq 1$ de l'opérateur de collisions électrons-ions, on trouve le terme d'ordre 1 :

$$\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 1} = n_i \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[\left(\text{Id} \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{v}_e\|^2} + \frac{\mathbf{v}_e \otimes \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_e}{\|\mathbf{v}\|^3} - 3 \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}_i \frac{\mathbf{v}_e \otimes \mathbf{v}_e}{\|\mathbf{v}\|^4} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e \right]. \quad (1.20)$$

On réécrit ce terme sous la forme suivante :

$$\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 1} = n_i \mathbf{u}_i \cdot (-\nabla_{\mathbf{v}} D_0(f_e) + D_0(\nabla_{\mathbf{v}} f_e)), \quad (1.21)$$

avec

$$D_0 = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\mathbf{S}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e \right). \quad (1.22)$$

L'opérateur $\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 1}$ est nul dans la limite des ions figés ($u_i = 0$).

Le terme d'ordre 2 en ε est isotrope et s'écrit :

$$\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 2} = Y_{ei} n_i \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right) + Y_{ei} \frac{p_i}{m_i} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right) \right). \quad (1.23)$$

Ce terme permet de retrouver la relaxation en température entre électrons et ions. Faisant intervenir des moments d'ordre faible, il est peu sensible à la délocalisation du transport comparé au terme de conduction thermique. Il est cependant indispensable pour modéliser la relaxation en température entre électrons et ions.

Hypothèse simplificatrice 1. Dans cette étude, nous considérons les ions figés. Nous ne prenons donc pas en compte les termes $\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 1}$ et $\mathcal{C}_{ei}^{\varepsilon 2}$.

Termes de collisions électron-électron

Le terme de collisions s'écrit, conformément à (1.6) :

$$\mathcal{C}_{ee} = \frac{Y_{ei}}{2} \nabla_{v_e} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S(v_e - v_e)}{|v_e - v_e|} \cdot (f_e \nabla_{v_e} f_e - f_e \nabla_{v_e} f_e) dv_e \quad (1.24)$$

Pour le développement de \mathcal{C}_{ee} en harmoniques sphériques, nous nous référons aux calculs de I.P. Shkarofsky [48], nous développerons le calcul de la partie isotrope $\mathcal{C}_{ee}(f_0, f_0)$ en annexe. Dans le cadre de l'approximation P1, \mathcal{C}_{ee} se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{ee} = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(f_1, f_1) + \frac{v}{v} \cdot \mathcal{C}_1^{ee}(f_0, f_1).$$

Proposition 1.2.8. La partie isotrope principale $\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0)$ s'écrit :

$$\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) = \frac{Y_{ee}}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(f_0 I_0^0 + \frac{v}{3} \frac{\partial f_0}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) \right),$$

avec les intégrales d'Allis suivantes :

$$I_n^l = \frac{4\pi}{v^n} \int_0^v v'^{n+2} f_l(v') dv' \quad \text{et} \quad J_n^l = \frac{4\pi}{v^n} \int_v^\infty v'^{n+2} f_l(v') dv'.$$

La preuve est laissée en annexe B.2.

Le terme de collisions isotrope $\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0)$ est le terme principal car il dirige le retour à l'équilibre maxwellien de la partie isotrope de la distribution. Les termes restants dans le cadre de l'approximation P1 sont donnés par [48] :

- le terme isotrope quadratique en f_1 :

$$\mathcal{C}_0^{ee}(f_1, f_1) = \frac{Y_{ee}}{15} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_1}{v} \right) \cdot (I_3^1 + J_{-2}^1) + 5f_1 \cdot I_1^1 \right),$$

- le terme bilinéaire vectoriel couplant f_0 et f_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^{ee}(f_0, f_1) = & \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} (3vf_1 I_0^0) - 6 \frac{f_1}{v^3} I_0^0 + \frac{3}{5} \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} (I_3^1 + J_{-2}^1) \right) \\ & + \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} (vf_0 (I_1^1 - 2J_{-2}^1)) + 6 \frac{f_0}{v^3} J_{-2}^1. \end{aligned}$$

1.2.4 Système VFPL-P1 final

En appliquant la fermeture P1 à l'équation (1.11), et en rajoutant les termes de collisions \mathcal{C}_0^{ee} , \mathcal{C}_0^{ei} , \mathcal{C}_1^{ei} et \mathcal{C}_1^{ee} , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_0 + v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} - \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{f_1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(f_1, f_1) + \mathcal{C}_0^{ei}(f_0), \\ \frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \nabla_x \frac{f_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0 + \frac{e}{m_e c} \mathbf{B} \times f_1 = \mathcal{C}_1^{ee}(f_1, f_0) - \frac{Y_{ei} n_i}{v^3} f_1, \end{cases} \quad (1.25)$$

Nous choisissons dans cette étude de négliger le termes \mathcal{C}_1^{ee} et $\mathcal{C}_0^{ee}(f_1, f_1)$. Le terme $\mathcal{C}_0^{ee}(f_1, f_1)$ peut être considéré comme faible devant $\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0)$ dans le régime fortement collisionnel, tandis que l'approximation consistant à négliger \mathcal{C}_1^{ee} devant \mathcal{C}_1^{ei} est valable dans l'hypothèse où le numéro atomique ionique est élevé ($Z_i \gg 1$), cette hypothèse est communément appelée hypothèse des plasmas de Lorentz. Nous allons faire cette hypothèse pour illustrer la construction du modèle, mais elle n'est pas constitutive du modèle P1-Diffusion. En pratique [16, 14, 17] le terme de collisions électron-électron vectoriel \mathcal{C}_1^{ee} est souvent négligé, y compris dans la limite Z_i faible, à travers une correction du terme Y_{ei} par un fit en Z_i permettant de retrouver la limite de Spitzer-Härm du coefficient de conduction thermique. On note Y_{ei}^* cette correction sur laquelle on reviendra par la suite.

Hypothèse simplificatrice 2. (*Plasma de Lorentz*) Dans l'hypothèse où le numéro atomique ionique est élevé ($Z_i \gg 1$), on néglige $\mathcal{C}_1^{ee}(f_0, f_1)$ devant $\mathcal{C}_1^{ei}(f_1)$

Nous allons faire par la suite une nouvelle hypothèse simplificatrice en supposant le plasma non-magnétisé ($B = 0$).

Hypothèse simplificatrice 3. (*Plasma non-magnétisé*) On suppose que le champ magnétique B est nul dans le plasma. Cela implique avec l'hypothèse 5 (non-relativiste) et l'équation de Maxwell-Ampère que le courant \mathbf{J} est nul dans le plasma.

Sous les hypothèses simplificatrices 2 et 3, on obtient alors le système suivant qu'on appelle *VFPL-P1 prototype* :

Système VFPL-P1 prototype

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_0 + v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} - \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{f_1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), & (1.26) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \nabla_x \frac{f_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1. & (1.27) \end{cases}$$

Le système VFPL-P1 prototype est composé de deux équations hyperboliques portant sur les composantes isotrope $f_0(t, x, v)$ et anisotrope $f_1(t, x, v)$ de la distribution électronique. On est donc passé d'une équation hyperbolique de dimension 7 à deux équations hyperboliques de dimension 5.

L'approximation P1 entraîne une redéfinition des moments de la distribution, intégrés désormais uniquement en fonction de la coordonnée radiale en vitesse v et avec la mesure $v^2 dv$. On introduit donc la notation suivante pour alléger la notation des moments de la

distribution :

$$\langle \cdot \rangle = \int_0^{\infty} \cdot v^2 dv \quad (1.28)$$

on résume les moments principaux de la distribution :

Moments de l'approximation P1

$$n_e = \sqrt{4\pi} \int_0^{+\infty} f_0 v^2 dv = \sqrt{4\pi} \langle f_0 \rangle, \quad (1.29)$$

$$n_e u_e = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^{+\infty} f_1 v^3 dv = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle v f_1 \rangle, \quad (1.30)$$

$$\frac{3}{2} n_e k_B T_e = \frac{1}{2} m_e \sqrt{4\pi} \int_0^{+\infty} f_0 v^4 dv = \frac{1}{2} m_e \sqrt{4\pi} \langle v^2 f_0 \rangle, \quad (1.31)$$

$$q_e = \frac{1}{2} m_e \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_0^{+\infty} f_1 v^5 dv = \frac{1}{2} m_e \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle v^3 f_1 \rangle. \quad (1.32)$$

La section suivante porte sur une seconde approximation appelée *approximation diffusion*, permettant de réduire encore la dimension du système étudié en passant de deux équations hyperboliques de dimension 5 à une seule équation **parabolique** de dimension 5 portant sur la distribution électronique isotrope f_0 . Nous verrons également que l'approximation diffusion s'accompagne d'une définition du champ électrique E dite "auto-consistante", permettant ainsi de fermer définitivement le système.

1.3 Approximation diffusion

Nous allons présenter dans cette section ce que nous appelons *l'approximation diffusion*. Cette approximation consiste à négliger la dérivée en temps de la partie anisotrope de la distribution f_1 dans l'équation (1.27), tout en gardant la dérivée en temps de la partie isotrope f_0 dans l'équation (1.26). Dans beaucoup de modèles de fermeture utilisés [47, 12, 43] la dérivée en temps de f_0 est négligée. Nous souhaitons illustrer par l'analyse asymptotique dans le scaling diffusion qu'il est nécessaire de conserver $\partial_t f_0$ tandis que $\partial_t f_1$ peut être négligé. Tout comme il est noté dans [25] que l'approximation diffusion n'est pas une preuve mathématique rigoureuse, l'approche retenue pour obtenir le système final appelé P1-Diffusion n'est que formelle.

L'analyse dimensionnelle est un prérequis à tout développement asymptotique. Nous avons déjà traité l'opérateur de collision électron-ion en suivant la démarche de Degond et Lucquin-Desreux [11]. Nous procéderons à l'adimensionnement de la partie transport et de l'opérateur de collision électron-électron, afin d'étudier la limite asymptotique diffusive du modèle P1.

1.3.1 Limite et scaling diffusion

Les variables adimensionnées sont données par les expressions suivantes :

$$\tilde{t} = t/t^*, \quad \tilde{x} = x/x^*, \quad \tilde{v} = v/v_{th}, \quad \tilde{E} = Ex^*/v_{th}^2.$$

Le scaling diffusion est caractérisé par les choix des paramètres t^* et x^* . Ces paramètres sont choisis tels que $\tau_{ei}/t^* = \varepsilon^2$ et $\lambda_{ei}/x^* = \varepsilon$, avec le temps de collisions électrons-ions

1. Construction d'un nouveau modèle quasi-cinétique MHD compatible

donné par $\tau_{ei} = v_{th}^3/Y_{ei}^*n_i$. On ajoute $\tau_{ee}/t^* = \varepsilon$ avec le temps de collisions électrons-électrons $\tau_{ee} = v_{th}^3/Y_{ee}n_e$. On résume ces choix dans le tableau suivant :

Paramètres sans dimension	τ_{ei}/t^*	λ_{ei}/x^*	$E x^*/v_{th}^2$	τ_{ee}/t^*
Scaling	ε^2	ε	ε	ε

TABLEAU 1.2 – Paramètres du scaling diffusion

En appliquant cet adimensionnement au système P1 (1.26)-(1.27), on obtient le système adimensionné suivant (on omet les tildes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_0 + \frac{1}{\varepsilon} v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{f_1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_1 + \frac{1}{\varepsilon} v \nabla_x \frac{f_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0 = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1, \end{array} \right. \quad (1.34)$$

sans perte de généralité et nous réécrivons le système précédent en multipliant par ε l'équation (1.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_0 + \frac{1}{\varepsilon} v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{f_1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), \end{array} \right. \quad (1.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_t f_1 + v \nabla_x \frac{f_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1. \end{array} \right. \quad (1.36)$$

La suite consiste à développer la distribution par un développement de Hilbert en ε et à l'injecter dans le système. Le développement de Hilbert de f_0^ε et f_1^ε s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0^\varepsilon = f_0^0 + \varepsilon f_0^1 + \varepsilon^2 f_0^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{array} \right. \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^\varepsilon = f_1^0 + \varepsilon f_1^1 + \varepsilon^2 f_1^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{array} \right. \quad (1.38)$$

En injectant (1.37) et (1.38) dans (1.35) et (1.36), on obtient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (f_0^0 + \varepsilon f_0^1) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x \cdot (f_1^0 + \varepsilon f_1^1 + \varepsilon^2 f_1^2) \\ \quad - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^0 + \varepsilon f_1^1 + \varepsilon^2 f_1^2) \right] \\ \quad = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^0) + 2\mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^1) + \varepsilon \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^1, f_0^1) + \varepsilon 2\mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{array} \right. \quad (1.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \partial_t (f_1^0 + \varepsilon f_1^1) + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x (f_0^0 + \varepsilon f_0^1 + \varepsilon^2 f_0^2) \\ \quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} (f_0^0 + \varepsilon f_0^1 + \varepsilon^2 f_0^2) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} (f_1^0 + \varepsilon f_1^1 + \varepsilon^2 f_1^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (1.40)$$

La suite consiste à identifier les termes de même exposant en ε , chaque ordre successif en ε correspond à une nouvelle échelle de modélisation, nous allons identifier ces différentes échelles jusqu'à observer des effets cinétiques sur le transport.

Échelle collisionnelle ε^{-1}

À l'ordre le plus bas en ε , la dynamique des électrons est dominée par les collisions, modélisées par les termes des membres de droite des équations (1.39) et (1.40). On obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}v\nabla_x \cdot f_1^0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^0) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^0), & (1.41) \\ 0 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1^0. & (1.42) \end{cases}$$

En injectant (1.42) dans (1.41), (1.41) devient :

$$\mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^0) = 0. \quad (1.43)$$

Une solution de l'équation (1.43) (preuve dans [1]) est la Maxwellienne M donnée par :

$$M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e(t, \mathbf{x})}{v_{th}(t, \mathbf{x})} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2(t, \mathbf{x})}\right). \quad (1.44)$$

Des solutions du système (1.41) (1.42) sont donc données par :

$$\begin{cases} f_0^0(t, \mathbf{x}, v) = M \\ f_1^0(t, \mathbf{x}, v) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e(t, \mathbf{x})}{v_{th}(t, \mathbf{x})} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2(t, \mathbf{x})}\right), \quad (1.45)$$

et caractérisent l'équilibre thermodynamique local du système.

Échelle diffusive locale ε^0

À l'ordre ε^0 , la distribution est perturbée par une contribution anisotrope permettant une description de la conduction thermique proche de l'ETL, permettant de retrouver la diffusion en température classique.

$$\begin{cases} \partial_t f_0^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}v\nabla_x \cdot f_1^0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^0) \right] = 2 \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^0), & (1.46) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v\nabla_x f_0^0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} (f_0^0) = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1^0. & (1.47) \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut injecter (1.47) dans (1.46) pour obtenir une équation de diffusion sur f_0^0 . Le modèle contient ainsi tous les termes permettant de retrouver le modèle classique de Spitzer-Härm, en effet en injectant (1.45) dans (1.47) et (1.46), et en négligeant f_0^1 , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t M + \frac{1}{\sqrt{3}}v\nabla_x \cdot f_1^M - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^M) \right] = 0, & (1.48) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v\nabla_x M - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} M = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1^M. & (1.49) \end{cases}$$

Nous verrons par la suite que ce système permet de retrouver la loi de conduction en température classique de Spitzer-Härm.

Échelle diffusive hors-équilibre ε^1

À l'ordre ε^1 , les effets cinétiques sur le transport apparaissent à travers les variables f_0^1 et f_1^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x \cdot f_1^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^2) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^1, f_0^1) + 2 \mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^2), \\ \partial_t f_1^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x f_0^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0^1 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1^2. \end{array} \right. \quad (1.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_1^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x f_0^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} f_0^1 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1^2. \end{array} \right. \quad (1.51)$$

Tandis que, toujours avec (1.45), la dérivée en temps de composante anisotrope de la distribution $\partial_t f_1^0$ est toujours nulle. On obtient donc une équation de diffusion sur f_0^1 , correspondant à la partie hors équilibre de la distribution isotrope. On peut écrire, en posant $g_0 = f_0^1$ et $g_1 = f_1^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t g_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x \cdot g_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 g_1) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x g_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} g_0 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} g_1. \end{array} \right. \quad (1.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x g_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} g_0 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} g_1. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

On résume dans le tableau suivant les principaux effets de la dynamique des électrons à chaque échelle étudiée :

Ordre en ε	Dynamique des électrons
ε^{-1}	distribution à l'équilibre thermodynamique
ε^0	transport local (diffusion en M)
ε^1	transport hors-équilibre (diffusion en g_0)

TABLEAU 1.3 – Dynamique des électrons aux différentes échelles

Troncature du développement et approximation diffusion

Si nous souhaitons conserver les propriétés des sous-systèmes obtenus comme la structure diffusive, nous ne souhaitons pas résoudre la diffusion locale et non-locale de façon indépendante car nous nous intéressons justement au couplage entre équations fluides et équations cinétiques. Nous voulons donc regrouper les systèmes d'ordre ε^0 et ε^1 afin d'exprimer une équation diffusive portant uniquement sur f_0 . Cette étape revient à additionner les systèmes (1.46)-(1.47) et (1.52)-(1.53) puis à tronquer le développement de Hilbert de f_0 à l'ordre 1. On fait donc l'hypothèse que le terme $\mathcal{C}_0^{ee}(f_0^0, f_0^2)$ est négligeable en tronquant le terme f_0^2 du développement de Hilbert. On obtient alors le système suivant :

$$\partial_t f_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x \cdot f_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), \quad (1.54)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} v \nabla_x f_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial}{\partial v} g_0 = -\frac{Y_{ei}^* n_i}{v^3} f_1, \quad (1.55)$$

La conséquence principale de l'application du scaling diffusion est la disparition du terme $\partial_t f_1$ dans l'équation (1.55). Cette nouvelle équation vectorielle implique une loi d'Ohm, qui avec la condition de courant nul dans la limite non-magnétisée nous permet d'obtenir une expression auto-consistante du champ électrique.

Dans la limite non-magnétisée, la loi d'Ampère (47) implique propriété de courant nul suivante :

$$J = \frac{c}{4\pi} \nabla_x \times B = 0 .$$

Dans la limite des ions figés on a donc $J = -en_e u_e = 0$, d'après l'équation (1.30) on a :

$$\int_0^\infty f_1 v^3 dv = 0 . \quad (1.56)$$

En injectant f_1 issu de (1.55) dans (1.56) on obtient alors une formule auto-consistante suivante du champs électrique E :

$$E = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \int_0^\infty f_0 v^7 dv}{6 \int_0^\infty f_0 v^5 dv} \quad (1.57)$$

On parle ici d'"auto-consistance" au sens de la *physique statistique* et des descriptions dites de "champs moyen". Au lieu de ressentir des forces d'interaction avec un grand nombre d'autres particules, par exemple en calculant le champ électrique à partir de l'équation de Maxwell-Gauss (26), on calcule le champ électrique en considérant un effet "moyen" comme ici l'annulation courant J. Cette approche fait souvent intervenir une équation dite auto-consistante, où la quantité interagit avec elle même, et dont la résolution permet d'obtenir des informations sur le système.

Remarque 1.3.1. Dans le cas magnétisé, l'idée est de réaliser l'approximation P1 dans le repère en vitesse des électrons afin d'avoir par construction $\langle v f_1 \rangle = 0$, et avoir une propriété équivalente de courant effectif nul permettant de calculer un champ électrique effectif auto-consistant.

Le système formé par les équations (1.54)-(1.55)-(1.57) est appelé "P1-Diffusion", et se présente sous la forme d'une équation d'évolution portant uniquement sur la partie scalaire isotrope de la fonction de distribution électronique f_0 . Nous avons effectivement réduit de façon importante la dimension algébrique du problème, puisque le système P1-Diffusion est de dimension 5 (temps, 3D espace, 1D vitesse) par rapport à l'équation de VFPL de dimension 7 (temps, 3D espace, 3D vitesse).

Nous allons désormais donner quelques propriétés du modèle P1-Diffusion afin d'évaluer s'il répond aux attentes énumérées en début de chapitre.

1.4 Système P1-Diffusion final et propriétés

Désormais et ce jusqu'à la fin du manuscrit, nous laissons de côté la notation normalisée des composantes harmoniques sphériques de la distribution :

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} f_0(v) + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{v}{v} \cdot f_1(v) \quad (1.58)$$

pour la notation non-normalisée suivante pour alléger les notations futures :

$$f(v) = \frac{1}{4\pi} f_0(v) + \frac{3}{4\pi} \frac{v}{v} \cdot f_1(v) \quad (1.59)$$

On écrit les nouvelles relations aux moments :

Moments de l'approximation P1 (normalisation bis)

$$n_e = \int_0^{+\infty} f_0 v^2 dv = \langle f_0 \rangle, \quad (1.60)$$

$$n_e u_e = \int_0^{+\infty} f_1 v^3 dv = \langle v f_1 \rangle, \quad (1.61)$$

$$\frac{3}{2} n_e k_B T_e = \frac{1}{2} m_e \int_0^{+\infty} f_0 v^4 dv = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) f_0 \right\rangle, \quad (1.62)$$

$$q_e = \frac{1}{2} m_e \int_0^{+\infty} f_1 v^5 dv = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v f_1 \right\rangle. \quad (1.63)$$

On appelle *système P1-Diffusion* le système d'équations suivant :

Système P1-Diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), \end{array} \right. \quad (1.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{v^3}{n_e} \left(v \nabla_x f_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right), \end{array} \right. \quad (1.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{6 \langle f_0 v^3 \rangle}. \end{array} \right. \quad (1.66)$$

avec l'opérateur de collisions isotrope de Fokker-Planck-Landau :

$$\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) = Y_{ee} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty g(v, v') \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) v' dv', \quad (1.67)$$

$$\text{avec } g(v, v') = \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \quad \text{et} \quad \langle \cdot \rangle = \int_0^\infty \cdot v^2 dv$$

C'est le système que nous étudierons tout au long de ce manuscrit. Nous nous intéresserons aux propriétés physiques et mathématiques de ce modèle, dans ce chapitre et

dans le suivant. Nous étudierons ensuite sa discrétisation et sa résolution numérique en géométrie 1D-espace 1D-vitesse dans les chapitres 3, 4 et 5. En particulier, nous allons vérifier dans la suite de ce chapitre qu'il capture la limite asymptotique de Spitzer-Härm, et qu'on retrouve par la prise aux moments les équations de la MHD résistive.

1.4.1 Système aux moments

Dans cette partie nous allons analyser les équations aux moments du système P1-Diffusion afin de vérifier qu'elles sont bien compatibles avec les équations de la MHD résistive. Sous les mêmes hypothèses simplificatrices 1, 2 et 3 (impliquant $u = 0$, $J = 0$ et $B = 0$), réécrivons le système MHD (41)-(47) :

Système MHD prototype

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n_e = 0, & (1.68) \\ \frac{3n_e k_b}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot q_e = 0, & (1.69) \\ E = -\frac{1}{n_e e} (\nabla_x \cdot P_e + R_{ei}). & (1.70) \end{cases}$$

Proposition 1.4.1. (*Compatibilité de la densité n_e et de la température T_e avec le système MHD prototype*). La prise aux moments de l'équation (1.64) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e = 0 \quad (1.71)$$

$$\frac{3k_B n_e}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot q_e = 0 \quad (1.72)$$

avec $q_e = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v f_1 \right\rangle$ le flux de chaleur électronique, $n_e = \langle f_0 \rangle$ la densité électronique et $T_e = \frac{1}{3k_B n_e} \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 f_0 \right\rangle$ la température électronique.

Preuve. On trouve ce résultat directement par la prise des moments d'ordre 0 et 2 : $\langle \cdot \rangle$ et $\left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 \cdot \right\rangle$ de l'équation (1.64) et par définition des moments (1.60) à (1.63). ■

Proposition 1.4.2. (*Compatibilité du champs électrique E avec le système MHD prototype*). La prise aux moments de l'équation (1.65) permet d'obtenir la loi d'Ohm suivante :

$$en_e E + \nabla_x P_e = R_{ei}, \quad (1.73)$$

$$\text{avec } R_{ei} = -\frac{3Y_{ei} n_e m_e}{Z_i} \left\langle \frac{f_1}{v^2} \right\rangle \text{ et } P_e = \frac{3}{2} \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 f_0 \right\rangle$$

Preuve. On trouve ce résultat directement par la prise au moment d'ordre 1 : $\langle v \cdot \rangle$ de l'équation (1.65) divisée par v^3 , et par définition des moments (1.60) à (1.63). ■

1.4.2 Limite de Spitzer-Härm

Une propriété importante que doit vérifier le modèle P1-Diffusion est la capture du régime asymptotique de Spitzer-Härm, correspondant au régime fortement collisionnel, quand la distribution f_0 tend vers l'équilibre local maxwellien M .

Proposition 1.4.3. (*Conduction thermique de Spitzer-Härm*). *La conduction thermique de Spitzer-Härm est retrouvée dans le modèle P1-Diffusion, dans la limite de l'ETL. En prenant $f_0 = M$ dans l'équation (1.65), et en prenant le moment d'ordre 2 sur vf_1 , on trouve alors :*

$$q_{SH} = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v f_1^M \right\rangle = 64 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}} \left(\frac{k_B}{m_e} \right)^{7/2} T_e^{5/2} \nabla_x T_e \quad (1.74)$$

Démonstration. Nous allons injecter $f_0 = M$ dans les équations (1.65) et (1.66) pour calculer f_1^M . Ensuite, on calculera directement le flux de chaleur q_e avec sa définition : $q_e = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v f_1 \right\rangle$. Commençons par calculer le champ électrique E^M . Soit M la maxwellienne exprimée en fonction de la vitesse thermique $v_{e,th} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{e,th}^2}\right), \quad (1.75)$$

on a d'une part :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^7 M v \, dv &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{v}{v_{e,th}}\right)^2 / 2\right) v^7 \, dv \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} (-v_{e,th}^2)^2 \int_0^\infty 6v^5 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_{e,th}}\right)^2 / 2\right) \, dv \\ &= 6v_{e,th}^2 \int_0^\infty v^5 M \, dv, \end{aligned} \quad (1.76)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^5 M \, dv &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} \int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{v}{v_{e,th}}\right)^2 / 2\right) v^5 \, dv \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} (-v_{e,th}^2)^2 \int_0^\infty 4v^3 \exp\left(-\left(\frac{v}{v_{e,th}}\right)^2 / 2\right) \, dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{v_{e,th}^3} (-v_{e,th}^2)^3 \int_0^\infty 8v \exp\left(-\left(\frac{v}{v_{e,th}}\right)^2 / 2\right) \, dv \\ &= 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} n_e v_{e,th}^3. \end{aligned} \quad (1.77)$$

D'où l'expression du champ électrique de Spitzer-Härm :

$$E^M = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle v^5 M \rangle}{6 \langle v^3 M \rangle}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{m_e}{e} \left(\nabla_x v_{e,th}^2 + v_{e,th}^2 \frac{\nabla_x \langle v^3 M \rangle}{\langle v^3 M \rangle} \right) \\
 &= -\frac{m_e}{e} \left(\nabla_x v_{e,th}^2 + v_{e,th}^2 \frac{\nabla_x (n_e v_{e,th}^3)}{n_e v_{e,th}^3} \right) \\
 &= -\frac{m_e}{e} v_{e,th}^2 \left(\frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} + \frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{\nabla_x v_{e,th}^3}{v_{e,th}^3} \right) \\
 &= -\frac{m_e}{e} v_{e,th}^2 \left(\frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{5}{2} \frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} \right).
 \end{aligned}$$

On injecte ensuite E^M dans f_1 :

$$\begin{aligned}
 f_1^M &= -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{1}{n_e} \left[v_{e,th}^2 \left(\frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{5}{2} \frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} \right) v^3 \partial_v M + v^4 \nabla_x M \right] \\
 &= -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{1}{n_e} \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^4}{v_{e,th}^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x n_e - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^4}{v_{e,th}^5} n_e \frac{5}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^6}{v_{e,th}^7} n_e \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2 \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^4}{v_{e,th}^5} n_e \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^4}{v_{e,th}^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x n_e \right] \\
 &= -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{1}{n_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}} n_e \frac{1}{v_{e,th}} \left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^4 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^2 - 8 \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2 \\
 &= -\frac{Z_i}{6Y_{ei}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{v_{e,th}} \left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^4 \left[\left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^2 - 8 \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2.
 \end{aligned}$$

Remarquons que les termes en $\nabla_x n_e$ se compensent dans l'expression de f_1 , ce qui a une conséquence importante : les gradients de densité du plasma ne génèrent aucun flux dans la limite locale.

On calcule le flux de chaleur électronique, q_e^M , en prenant le moment d'ordre 5 de f_1^M :

$$\begin{aligned}
 q_e^M &= \frac{1}{2} m_e \int_0^\infty v^5 f_1^M dv \\
 &= -\frac{Z_i m_e}{12Y_{ei}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{v^5}{v_{e,th}} \left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^4 \left[\left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^2 - 8 \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) \nabla_x v_{e,th}^2 dv \\
 &= -\frac{Z_i m_e}{12Y_{ei}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^9 \left[\left(\frac{v}{v_{e,th}} \right)^2 - 8 \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2}\right) v_{e,th}^4 \nabla_x v_{e,th}^2 dv.
 \end{aligned}$$

On pose : $h(x) = x^9(x^2 - 8)e^{-x^2/2}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(x)dx &= \int_0^\infty x^{11}e^{-x^2/2}dx - 8 \int_0^\infty x^9e^{-x^2/2}dx \\ &= (-1)^5(-1)^6 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 - 8 \times (-1)^4(-1)^5 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \\ &= 768, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e^M &= -\frac{Z_i m_e}{12 Y_{ei}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(v/v_{e,th}) d(v/v_{e,th}) v_{e,th}^5 \nabla_x v_{e,th}^2 \\ &= -\frac{768}{12} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{e,th}^5 \nabla_x v_{e,th}^2. \end{aligned}$$

On retrouve bien la conductivité thermique de Spitzer-Härm :

$$\mathbf{q}_e^M = -\kappa_{SH} \nabla_x T \quad \text{avec} \quad \kappa_{SH} = 64 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}} \left(\frac{k_B}{m_e} \right)^{7/2} T^{5/2}, \quad (1.78)$$

où κ_{SH} est appelé coefficient de conductivité thermique. La loi reliant le flux de chaleur au gradient de température, $q = -\kappa \nabla_x T$, est appelée *Loi de Fourier*. ■

1.5 Reformulation micro-macro du modèle P1-Diffusion

Dans cette section, nous allons présenter la reformulation micro-macro du système P1-Diffusion. La reformulation micro-macro, basée sur [35], repose sur une décomposition classique de la fonction de distribution en ses composantes microscopique et macroscopique. Cette décomposition est réalisée par une technique de projection permettant de reformuler l'équation cinétique en un système couplant des équations d'évolution pour la partie macroscopique fluide et pour la partie microscopique cinétique hors-équilibre. La méthode de décomposition micro-macro a été notamment utilisée en transport neutronique [35] et en transfert radiatif [4], dans des problèmes présentant des aspects multiéchelles importants. Lorsque le libre parcours moyen des particules est grand devant l'échelle macroscopique, le système est décrit au niveau microscopique par la théorie cinétique. Les équations cinétiques mettant en jeu un grand nombre d'inconnues et de variables, l'usage de super-calculateurs et de méthodes de parallélisme (comme la décomposition de domaine) est souvent nécessaire pour permettre la résolution numérique d'un problème physique. Lorsque le libre parcours moyen des particules est petit devant l'échelle macroscopique, une description macroscopique, diffusive ou fluide est souvent suffisante pour modéliser la dynamique et permet une résolution numérique plus rapide ; cet aspect multiéchelles est caractérisé par un paramètre sans dimension, ici le nombre de Knudsen. On définit le nombre de Knudsen par le rapport entre la longueur de gradient L^T (échelle macroscopique) et le libre parcours moyen λ_{ei}^T (échelle microscopique) :

$$Kn = L^T / \lambda_{ei}^T$$

Les méthodes micro-macro permettent de construire des schémas numériques permettant de résoudre ces problèmes multiéchelles en proposant des schémas traitant les termes

raides à travers cette décomposition. Ainsi, les schémas obtenus permettent de capturer les limites asymptotiques, comme la limite fluide/diffusive quand le nombre de Knudsen tend vers 0, sans générer de surcoût algorithmique, voire en le diminuant.

La décomposition micro-macro du modèle P1-Diffusion n'implique aucune hypothèse perturbative, ni de linéarisation : le nouveau système obtenu est équivalent et la distribution électronique peut donc s'écarter arbitrairement de l'équilibre.

Construction des projecteurs micro-macro

La décomposition micro-macro du système P1-Diffusion se fait nécessairement à partir de l'équilibre local défini par le noyau de l'opérateur de collisions. Dans notre cas, il s'agit de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau. Commençons par rappeler quelques-unes de ses propriétés :

Proposition 1.5.1. (*Conservativité*) *L'opérateur de collisions électron-électron isotrope \mathcal{C}_0^{ee} est un opérateur bilinéaire, conservant la densité et l'énergie.*

$$\int_0^\infty \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) v^2 dv = \int_0^\infty \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) v^4 dv = 0 \quad (1.79)$$

la preuve de cette proposition peut être trouvée en Annexe B.3.

Proposition 1.5.2. (*Théorème H de Boltzmann*) *L'opérateur de collisions électron-électron isotrope \mathcal{C}_0^{ee} dissipe l'entropie définie par :*

$$S = \int_0^\infty \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) \ln f_0 v^2 dv \leq 0. \quad (1.80)$$

De plus, on a :

$$S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_0 = M, \quad (1.81)$$

avec :

$$M(v) = n_e \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{k_B T_e}\right), \quad (1.82)$$

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [1].

Avant de construire les projecteurs micro-macro, nous devons définir les espaces fonctionnels sur lesquels ils agissent.

Définition 1.5.3. Soit l'espace de Hilbert suivant :

$$L_M^2 = L^2([0, \infty[; M^{-1}v^2 dv)$$

muni du produit scalaire :

$$(\phi, \psi) = \left\langle \phi \psi (M/n_e)^{-1} \right\rangle$$

Proposition 1.5.4. *L'espace $L_M^2(\mathbb{R}_+)$ est inclus dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. Plus généralement, on a :*

$$\varphi \in L_M^2(\mathbb{R}_+) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty |\varphi(v)| v^\alpha dv < +\infty \quad \forall \alpha > 1/2 \quad (1.83)$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+, v^\alpha dv)} &= \int_0^\infty f_0 v^\alpha dv = \int_0^\infty f_0 \frac{v}{\sqrt{M}} v^{\alpha-1} \sqrt{M} dv, \\ &\leq \left(\int_0^\infty f_0^2 \frac{v^2}{M} dv \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty M v^{2(\alpha-1)} dv \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

- L'intégrale $\int_0^\infty f_0^2 \frac{v^2}{M} dv$ est définie si $f_0 \in L_M^2(\mathbb{R}_+)$.
- L'intégrale $\int_0^\infty M v^{2(\alpha-1)} dv$ est définie si $\alpha > 1/2$, en effet $M v^{2(\alpha-1)}$ n'est pas intégrable en 0 pour $\alpha \leq 1/2$.

On a donc $L_M^2(\mathbb{R}_+) \subset L^1(\mathbb{R}_+, v^\alpha dv)$ pour tout $\alpha > 1/2$. ■

L'opérateur Π_0 est construit comme une projection sur une base orthogonale du noyau de l'opérateur de collisions électron-électron linéarisé. On note ce noyau $\mathcal{H}_0 \subset L_M^2$ et on a : $\mathcal{H}_0 = \text{Span}(M, v^2 M)$

Proposition 1.5.5. *On note \mathcal{L}_0^{ee} le linéarisé de l'opérateur de collisions autour de l'équilibre M et \mathcal{H}_0 son noyau. L'opérateur \mathcal{L}_0^{ee} est semi-défini négatif et auto-adjoint sur L_M^2 et*

$$\mathcal{H}_0 = \text{Span}(M, v^2 M) \subset L_M^2 .$$

Démonstration. Le linéarisé de l'opérateur de Landau s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{ee}(g_0) &= \frac{1}{v^2} \partial_v \int_0^\infty g(v, v') \left(g_0(v') \frac{1}{v} \partial_v M(v) - g_0(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} M(v') \right) v' dv' \\ &\quad + \frac{1}{v^2} \partial_v \int_0^\infty g(v, v') \left(M(v') \frac{1}{v} \partial_v g_0(v) - M(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} g_0(v') \right) v' dv' , \\ &= \frac{1}{v^2} \partial_v \int_0^\infty g(v, v') M M' \left(\frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{g_0}{M} \right) - \frac{1}{v'} \partial_{v'} \left(\frac{g'_0}{M'} \right) \right) v' dv' . \end{aligned}$$

On écrit la forme variationnelle de $\mathcal{L}_0^{ee}(g_0)$ sous sa forme symétrique :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0^{ee}(g_0), \phi \rangle_{L_M^2} &= \int_0^\infty \frac{1}{v^2} \partial_v \int_0^\infty g(v, v') M M' \left(\frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{g_0}{M} \right) - \frac{1}{v'} \partial_{v'} \left(\frac{g'_0}{M'} \right) \right) v' dv' \phi M^{-1} v^2 dv , \\ &= - \int_0^\infty \int_0^\infty g(v, v') M M' \left(\frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{g_0}{M} \right) - \frac{1}{v'} \partial_{v'} \left(\frac{g'_0}{M'} \right) \right) \frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{\phi}{M} \right) v' dv' v dv , \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty g(v, v') M M' \left(\frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{g_0}{M} \right) - \frac{1}{v'} \partial_{v'} \left(\frac{g'_0}{M'} \right) \right) \left(\frac{1}{v} \partial_v \left(\frac{\phi}{M} \right) - \frac{1}{v'} \partial_{v'} \left(\frac{\phi'}{M'} \right) \right) v' dv' v dv . \end{aligned}$$

On a bien :

$$\langle \mathcal{L}_0^{ee}(g_0), \phi \rangle_{L_M^2} = \langle \mathcal{L}_0^{ee}(\phi), g_0 \rangle_{L_M^2} , \quad \langle \mathcal{L}_0^{ee}(g_0), g_0 \rangle_{L_M^2} \leq 0 ,$$

ainsi que

$$\langle \mathcal{L}_0^{ee}(M), M \rangle_{L_M^2} = \langle \mathcal{L}_0^{ee}(v^2 M), v^2 M \rangle_{L_M^2} = 0 .$$
■

Proposition 1.5.6. *La base $\mathcal{B} = \left\{ M/n_e, \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e \right\}$ est une base orthogonale de \mathcal{H}_0 , avec les relations suivantes :*

$$(M/n_e, M/n_e) = 1, \tag{1.84}$$

$$\left(\left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e, \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e \right) = \frac{3}{2}, \tag{1.85}$$

$$\left(\left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e, M/n_e \right) = 0 . \tag{1.86}$$

Démonstration. On vérifie les équations (1.84)-(1.85)-(1.86) :

$$(M/n_e, M/n_e) = \langle M \rangle / n_e = 1 ,$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e, \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e \right) &= \frac{9}{4} \frac{\langle M \rangle}{n_e} + \langle v^4 M \rangle n_e v_{e,th}^4 - 3 \langle v^2 M \rangle n_e v_{e,th}^2 , \\ &= \frac{9}{4} + \frac{5}{2} \langle v^2 M \rangle n_e v_{e,th}^2 - \frac{9}{2} \langle M \rangle n_e , \\ &= \frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{18}{4} = \frac{3}{2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e, M/n_e \right) &= -\frac{3}{2} \frac{\langle M \rangle}{n_e} + \langle v^2 M \rangle n_e v_{e,th}^2 , \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 . \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.7. *Le projecteur orthogonal Π_0 sur \mathcal{B}_0 peut s'écrire, pour tout $\phi \in L_M^2$, comme :*

$$\Pi_0(\varphi) = \langle \varphi \rangle M/n_e + \left\langle \varphi \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) \right\rangle T_e K , \quad (1.87)$$

$$\text{avec } K = \frac{2}{3T_e} \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e .$$

Démonstration. On utilise la formule classique de projection sur la base \mathcal{B} pour écrire le projecteur Π_0 à l'aide du produit scalaire défini plus tôt :

$$\begin{aligned} \Pi_0(\varphi) &= \frac{(\varphi, M/n_e)}{(M/n_e, M/n_e)} M/n_e \\ &\quad + \frac{(\varphi, \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e)}{\left(\left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e, \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e \right)} M/n_e \times \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e . \end{aligned}$$

En utilisant les formules (1.84), (1.85) et (1.86), on obtient :

$$\Pi_0(\varphi) = \langle \varphi \rangle M/n_e + \left\langle \varphi \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) \right\rangle \frac{2}{3} \left(\frac{m_e v^2}{k_b T_e} - \frac{3}{2} \right) M/n_e .$$

■

Proposition 1.5.8. *L'opérateur micro-macro Π_0 est une projection, il décompose la partie isotrope de la fonction de distribution électronique en $f_0 = M + g_0$ avec $M = \Pi_0(f_0)$ la contribution locale, et $g_0 = (\mathbb{I} - \Pi_0)(f_0)$ la contribution non-locale. L'opérateur Π_0 satisfait également la propriété $\Pi_0(\partial M) = \partial M$, où ∂ est une dérivée en espace ou en temps.*

Démonstration. Soit $M = \frac{n_e}{v_{e,th}^3} \exp -\frac{v^2}{v_{e,th}^2}$, prenons $\partial = \nabla_x$, on a :

$$\begin{aligned}\nabla_x M &= M \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{\nabla_x v_{e,th}^{-3}}{v_{e,th}^{-3}} - \nabla_x \left(\frac{v^2}{v_{e,th}^2} \right) \right], \\ &= M \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} - \frac{3}{2} \frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} - v^2 \left(\frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^4} \right) \right], \\ &= M \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} \left(\frac{v^2}{v_{e,th}^2} - \frac{3}{2} \right) \right].\end{aligned}$$

C'est la décomposition de $\nabla_x M$ dans la base \mathcal{B} , d'après (1.84)-(1.85)-(1.86) on a donc :

$$\Pi_0(\nabla_x M) = M \left[\frac{\nabla_x n_e}{n_e} + \frac{\nabla_x v_{e,th}^2}{v_{e,th}^2} \left(\frac{v^2}{v_{e,th}^2} - \frac{3}{2} \right) \right]$$

■

Proposition 1.5.9. (*Système micro-macro P1-Diffusion*) Les projecteurs Π_0 et $(\mathbb{I} - \Pi_0)$ peuvent désormais être appliqués aux équations du système P1-Diffusion afin de le reformuler sous la forme suivante :

Système P1-Diffusion Micro-Macro

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} n_e = 0, \end{array} \right. \quad (1.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3k_B n_e}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e = 0, \end{array} \right. \quad (1.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} g_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \bar{K} \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] \\ \qquad \qquad \qquad = \mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0), \end{array} \right. \quad (1.90)$$

avec

$$n_e = \int_0^\infty f_0 v^2 dv, \quad \mathbf{q}_e = \frac{1}{2} m_e \int_0^\infty f_1 v^5 dv, \quad \bar{K} = \frac{2}{3k_B T_e} \left(\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} - \frac{3}{2} \right) \frac{M}{n_e},$$

$$f_1 = -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{v^3}{n_e} \left(v \nabla_x f_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{6 \langle f_0 v^3 \rangle}.$$

Démonstration. D'après la propriété de courant nul $\langle v f_1 \rangle = 0$, on a d'une part :

$$\Pi_0 \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot f_1) \right) = 0 - 2 \langle v f_1 \rangle = 0,$$

et d'autre part :

$$\Pi_0 \left(\nabla_x \cdot (v f_1) \right) = 0 - \left(\frac{m_e v^2}{k_B T_e} - \frac{3}{2} \right) \left\langle \frac{3}{2} \frac{m_e v^3}{k_B T_e} f_1 \right\rangle = -\bar{K} \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e.$$

On a également $\Pi_0 \left(\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right) = 0$ d'après la proposition 1.5.5, on en déduit l'équation projetée sur Π_0 et sur $(\mathbb{I} - \Pi_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M + \bar{K} \nabla_x \cdot q_e &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} g_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \bar{K} \nabla_x \cdot q_e - \frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] &= \mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \end{aligned}$$

■

Le système (1.88)-(1.89)-(1.90) est la reformulation Micro-Macro du système P1-Diffusion.

Proposition 1.5.10 (Équivalence entre les systèmes P1-Diffusion Micro-Macro et P1-Diffusion canonique). *Supposons que les conditions initiales vérifient la décomposition suivante, $f_0 = M + g_0$, avec*

$$n_e = \langle M \rangle = \langle f_0 \rangle \quad , \quad \frac{3}{2} n_e T_e = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) M \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) f_0 \right\rangle \quad ,$$

alors les solutions du système P1-Diffusion (1.64)-(1.65) sont par construction solution du système (1.88)-(1.89)-(1.90).

Démonstration. La reformulation Micro-Macro (1.88)-(1.89)-(1.90) est une reformulation équivalente du système P1-Diffusion (1.64)-(1.65) puisque le projecteurs $(\Pi_0, \text{Id} - \Pi_0)$ sont des projecteurs sur la base orthonormée \mathcal{B}_0 d'après la proposition 1.5.7. ■

Corollaire 1.5.11 (Préservation des invariants micro). *La densité Micro ainsi que l'énergie interne Micro $\langle g_0 \rangle$ et $\left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) g_0 \right\rangle$, sont conservées.*

Preuve du Corollaire 1.5.11. L'équation Micro (4.4) peut se reformuler comme les équations (4.28) et (4.30) à partir de la condition de courant nul, et à partir des relations suivantes : $\langle \Pi_N(\varphi) \rangle = \langle \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in L_M^2$ et $\langle \Pi_T(\varphi) \rangle = 0$, $\forall \varphi \in L_M^2$, on obtient alors $\frac{\partial}{\partial t} \langle g_0 \rangle = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) g_0 \right] = 0$. ■

1.6 Conclusion

Nous avons construit le système P1-Diffusion, à partir de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck-Landau et avec des hypothèses constitutives compatibles avec la MHD résistive, afin d'obtenir un modèle cinétique simplifié, dont la dimension passe de 7D à 5D. On qualifie un tel modèle de "quasi-cinétique". Cela fait du modèle P1-Diffusion un bon candidat pour étudier la fermeture non-locale des équations de la MHD résistive et pour le couplage fluide/cinétique. On résume les hypothèses faites dans le tableau 1.4 :

Nous avons ensuite analysé les propriétés physiques de ce nouveau modèle pour vérifier qu'il répond bien aux objectifs de modélisation énumérés en début de chapitre. Nous avons enfin reformulé le système sous forme micro-macro, adaptée à la problématique du couplage entre les équations fluides et les équations cinétiques. Dans la section suivante, nous allons faire l'analyse variationnelle de la partie transport du système P1-Diffusion, linéarisée autour de l'équilibre local.

Hypothèses constitutives	Hypothèses simplificatrices
<ul style="list-style-type: none"> • $m_i \gg m_e$ • $T_i \sim T_e$ • plasma classique et non-relativiste • quasi-neutralité • plasma totalement ionisé 	<ul style="list-style-type: none"> • $B = 0$ • $Z_i \gg 1$ ou fit de Y_{ei} • ions figés

TABLEAU 1.4 – Résumé des hypothèses constitutives du modèle P1-diffusion et des hypothèses simplificatrices faites dans cette étude

CHAPITRE 2

Analyse mathématique du modèle P1-diffusion

Sommaire

2.1	Introduction	47
2.2	Linéarisation du système P1-diffusion autour d'un équilibre maxwellien	49
2.2.1	Splitting entre contributions locales et non-locales	49
2.2.2	Splitting des contributions non-locales	51
2.2.3	Linéarisation	53
2.3	Analyse variationnelle de l'opérateur de transport P1-diffusion linéaire	55
2.3.1	Formulation variationnelle auto-adjointe de $\mathcal{T}^{(l)}$	55
2.3.2	L'espace H_M^1	57
2.3.3	Étude de la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$	57
2.4	Conclusion	59

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire l'analyse variationnelle du modèle P1-Diffusion construit au chapitre précédent, et linéarisé autour de l'équilibre maxwellien. Pour cela, nous proposons une réécriture matricielle compacte de l'opérateur de transport P1-Diffusion noté \mathcal{T} . Une décomposition des flux cinétiques en contributions de courant nul permet de réécrire le linéarisé, $\mathcal{T}^{(l)}$, de l'opérateur de transport P1-Diffusion en faisant apparaître un projecteur de courant nul. Cette réécriture est plus adaptée à l'analyse variationnelle, nous proposons alors d'étudier la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$.

Réécriture du système P1-diffusion

Repartons du système P1-diffusion dans sa forme conservative générale :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] = \mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0), \quad (2.1)$$

$$f_1 = -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{v^3}{n_e} \left(v \nabla_x f_0 - \frac{e}{m_e} E \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right), \quad (2.2)$$

$$E = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{6 \langle f_0 v^3 \rangle}. \quad (2.3)$$

On peut le réécrire sous une forme développée, qui permet d'identifier le rôle des différents termes :

$$\begin{aligned}
 \partial_t f_0 - \underbrace{\nabla_x \cdot \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \nabla_x f_0 \right)}_{\text{Diffusion spatiale}} + \underbrace{\nabla_x \cdot \left(\frac{\alpha v^4}{n_e} \partial_v f_0 \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right) + \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \cdot \frac{1}{v^2} \partial_v \left(\frac{\alpha v^6}{n_e} \nabla_x f_0 \right)}_{\text{Termes croisés}} \\
 - \underbrace{\left(\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \cdot \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right) \frac{1}{v^2} \partial_v \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \partial_v f_0 \right)}_{\text{Diffusion en vitesse}} = \underbrace{C_{ee,0}(f_0)}_{\text{Diffusion integro-diff en vitesse}} .
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mais les termes croisés sont délicats à traiter. Une autre forme apporte un éclairage nouveau sur cette équation :

Proposition 2.1.1. (*Forme parabolique du transport P1-diffusion*) L'opérateur de transport du modèle P1-diffusion s'écrit sous la forme matricielle parabolique suivante en exprimant les flux dans l'espace des phases $\Omega = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty[$:

$$\partial_t f = \nabla_\eta^t (\mathbf{D} \nabla_\eta f) , \tag{2.5}$$

avec :

$$\nabla_\eta = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \frac{1}{v^2} \partial \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \frac{\alpha v^5}{n_e} \begin{pmatrix} Id_3 & -v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ -v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} & \|v \frac{e\mathbf{E}}{m_e}\|^2 \end{pmatrix} . \tag{2.6}$$

Démonstration. En développant l'équation (2.5) on retrouve bien l'équation (2.4). ■

Sous cette forme, on voit bien le caractère parabolique de l'opérateur de transport P1-Diffusion

Proposition 2.1.2. Soit $\bar{\mathbf{D}} = \frac{n_e}{\alpha v^5} \mathbf{D}$. La matrice $\bar{\mathbf{D}}$ est semi-définie positive et ses valeurs propres sont données par :

$$Sp(\bar{\mathbf{D}}) = \left\{ 0, 1, 1 + \|v \frac{e\mathbf{E}}{m_e}\|^2 \right\} , \tag{2.7}$$

Démonstration. L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$(\bar{\mathbf{D}} - \lambda \text{Id}) \mathbf{X} = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} (1 - \lambda) X_i + v \frac{e\mathbf{E}_i}{m_e} = 0 & i \in \{1, 2, 3\} \\ \sum_{i=1}^3 v \frac{eX_i \mathbf{E}_i}{m_e} - \left(\|v \frac{e\mathbf{E}}{m_e}\|^2 - \lambda \right) X_4 = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

(i) cas $\lambda = 1$.

D'après (2.8) on a

$$X_4 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{E}_i = 0 .$$

On en déduit

$$\ker(\bar{\mathbf{D}} - \text{Id}) = \text{Vect} \left\langle \left(\begin{pmatrix} -v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle^\perp \tag{2.9}$$

(ii) cas $\lambda \neq 1$.

D'après (2.8) on a :

$$\lambda \left(1 + \left\| v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right\|^2 - \lambda = 0 \right) \quad (2.10)$$

les solutions de (2.10) sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 1 + \left\| v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right\|^2$, leur espaces propres sont donnés respectivement par :

$$\ker \bar{D} = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} -v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \ker \left(\bar{D} - \left(1 + \left\| v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right\|^2 \right) \text{Id} \right) = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ \left\| v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \right\|^2 \end{array} \right) \quad (2.11)$$

■

Lemme 2.1.3. *La matrice D se décompose en $A^t A$ avec :*

$$D = A^t A \quad , \quad A = \sqrt{\frac{\alpha v^5}{n_e}} \begin{pmatrix} Id_3 & -v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Les valeurs propres de A sont 0 et $\sqrt{\alpha v^5 / n_e}$:

$$E_0 = \ker A = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} v \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \\ 1 \end{array} \right), \quad E_1 = \ker(A - \text{Id}) = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} X \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad X \in \mathbb{R}^3. \quad (2.13)$$

2.2 Linéarisation du système P1-diffusion autour d'un équilibre maxwellien

Dans cette section nous allons linéariser le système autour d'un équilibre local maxwellien afin de réaliser l'analyse mathématique linéaire de l'opérateur de transport T associé au modèle P1-diffusion. Nous procéderons dans un premier temps à la séparation des contributions locales et non-locales des flux cinétiques f_1 et du champ électrique $\frac{e\mathbf{E}}{m_e}$, dans un second temps nous allons montrer qu'on peut encore séparer ces contributions en contributions de courant nul à dominance diffusive ou advective. Nous procéderons enfin à la linéarisation du système P1-Diffusion, en remarquant qu'une factorisation de toutes les composantes est possible en faisant apparaître une projection de courant nul \mathcal{P} .

2.2.1 Splitting entre contributions locales et non-locales

On veut séparer les contributions locales et non-locales du flux f_1 . Soit le flux cinétique local (vf_1^M) :

$$vf_1^M = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x M - \frac{e\mathbf{E}^M}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v M \right), \quad (2.14)$$

où $\frac{e\mathbf{E}^M}{m_e}$ est le champ électrique de Spitzer-Härm normalisé donné par :

$$\frac{e\mathbf{E}^M}{m_e} = -\frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle M v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle}. \quad (2.15)$$

Le flux de chaleur local (vf_1^M) s'écrit également de façon matricielle :

$$vf_1^M = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_\eta M . \quad (2.16)$$

Un simple calcul permet alors de montrer que :

$$\nabla_\eta M = - \left(\frac{eE^M}{m_e} \right) \frac{M}{T_e} - \left(\frac{\nabla_x T_e}{T_e} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2} - 4 \right) \right) M ,$$

d'où :

$$vf_1^M = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2} - 4 \right) \frac{\nabla_x T_e}{T_e} .$$

Le flux de chaleur de Spitzer-Härm $q_{sh} = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) vf_1^M \right\rangle$ s'écrit alors (calculs proposition 1.4.3) :

$$q_{sh} = \frac{1}{2} m_e \left\langle \frac{\alpha v^7}{n_e T_e} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{e,th}^2} - 4 \right) \right\rangle \frac{\nabla_x T_e}{T_e} , \quad (2.17)$$

$$= 64 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}} \left(\frac{k_B}{m_e} \right)^{7/2} T_e^{5/2} \nabla_x T_e , \quad (2.18)$$

Nous allons réaliser une décomposition complète du flux cinétique (vf_1). On commence par séparer les contributions locales et non-locales, puis on décompose les flux restants en contributions de courant nul à dominance advective ou diffusive. Cette décomposition permet de préparer la discrétisation implicite du modèle et permet également de mettre en lumière une linéarisation intéressante du système.

On commence par calculer la partie non-locale au flux cinétique en retranchant f_1^M à f_1 :

$$\begin{aligned} vg_1 &= vf_1 - vf_1^M , \\ &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x f_0 - \nabla_x M - \frac{eE}{m_e v} \partial_v f_0 + \frac{eE^M}{m_e v} \partial_v M \right) , \\ &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x g_0 - \left(\frac{eE}{m_e} - \frac{eE^M}{m_e} \right) \frac{1}{v} \partial_v M - \frac{eE}{m_e v} \partial_v g_0 \right) . \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1.

Le flux (vg_1) satisfait par construction la condition de courant nul $\langle vg_1 \rangle = 0$.

Le flux (vg_1) contient un terme en gradient d'espace $-\frac{\alpha v^5}{n_e} \nabla_x g_0$, un terme en gradient de vitesse $\frac{\alpha v^5}{n_e} \frac{eE}{m_e v} \partial_v g_0$ et un terme intégral-différentiel $-\left(\frac{eE}{m_e} - \frac{eE^M}{m_e} \right) \frac{1}{v} \partial_v M$ faisant intervenir la composante non-locale du champ électrique. Ce dernier terme permet entre autres de garantir la propriété de courant nul. Nous allons procéder à deux décompositions différentes de (vg_1). L'une va consister à isoler le terme en gradient d'espace $\nabla_x g_0$ pour écrire $\nabla_x \cdot (vg_1)$ comme la somme d'un opérateur de diffusion généralisée en espace et d'un

opérateur d'advection généralisée, et l'autre va consister à isoler le terme en gradient en vitesse $\frac{eE}{m_e} \partial_v g_0$ pour écrire $\frac{eE}{m_e} \frac{1}{v^2} \partial_v (v^2 g_1)$ comme la somme d'un opérateur de diffusion généralisée en vitesse et d'un opérateur d'advection généralisée.

Commençons par réaliser la décomposition du champ électrique :

$$\begin{aligned}
 \frac{eE}{m_e} - \frac{eE^M}{m_e} &= -\frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} + \frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle M v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle}, \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle} \frac{\langle M v^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} + \frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle M v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle}, \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\langle M v^3 \rangle} \left[\nabla_x \langle M v^5 \rangle \left(\frac{\langle M v^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} - 1 \right) + \nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle \frac{\langle M v^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} \right], \\
 &= -\frac{\langle g_0 v^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} \frac{eE^M}{m_e} - \frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle}, \\
 &= \frac{eE^{M,m}}{m_e} + \frac{eE^{m,m}}{m_e},
 \end{aligned}$$

avec

$$\frac{eE^{M,m}}{m_e} = -\frac{\langle g_0 v^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} \frac{eE^M}{m_e} \quad \text{et} \quad \frac{eE^{m,m}}{m_e} = -\frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle}. \quad (2.19)$$

2.2.2 Splitting des contributions non-locales

Séparation de la contribution en gradient spatial de g_0

Soit vh_1 le terme contenant la contribution en gradient spatial de g_0 , et satisfaisant la condition de courant nul :

$$\boxed{vh_1 = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,m}}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v f_0 \right)}. \quad (2.20)$$

On définit ensuite le terme vl_1 comme le flux restant $vg_1 - vh_1$:

$$\begin{aligned}
 vl_1 &= vg_1 - vh_1, \\
 &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(-\left(\frac{eE^{M,m}}{m_e} + \frac{eE^{m,m}}{m_e} \right) \frac{1}{v} \partial_v M \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{eE^M}{m_e} + \frac{eE^{M,m}}{m_e} + \frac{eE^{m,m}}{m_e} \right) \frac{1}{v} \partial_v g_0 + \frac{eE^{m,m}}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v f_0 \right), \\
 &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(-\frac{eE^{M,m}}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v f_0 - \frac{eE^M}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v g_0 \right).
 \end{aligned}$$

Le flux vl_1 se réécrit de la façon suivante :

$$\boxed{vl_1 = \frac{\alpha}{6n_e} \frac{eE^M}{m_e} \frac{1}{\langle f_0 v^3 \rangle} \left(\langle v^4 \partial_v g_0 \rangle v^4 \partial_v M - \langle v^4 \partial_v M \rangle v^4 \partial_v g_0 \right)}. \quad (2.21)$$

Le terme de divergence en espace final se décompose de la façon suivante :

$$\nabla_x \cdot (vf_1) = \nabla_x \cdot (vf_1^M + vh_1 + vl_1) \quad (2.22)$$

Séparation de la contribution en gradient de vitesse de g_0

On commence par réécrire le terme de gradient de vitesse de g_0 :

$$\frac{\alpha v^5}{n_e} \frac{eE}{m_e v} \partial_v g_0 = -\frac{\alpha}{6n_e} \frac{1}{\langle v^3 f_0 \rangle} \left(\langle v^5 \nabla_x g_0 \rangle + \frac{eE^M}{m_e} \langle v^4 \partial_v M \rangle \right) v^4 \partial_v g_0 . \quad (2.23)$$

Pour annuler le courant généré par ce terme il faut ajouter le terme suivant :

$$\frac{\alpha}{6n_e} \frac{1}{\langle v^3 f_0 \rangle} \left(v^5 \nabla_x g_0 + \frac{eE^M}{m_e} v^4 \partial_v M \right) \langle v^4 \partial_v g_0 \rangle = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\frac{\langle v^3 g_0 \rangle}{\langle v^3 f_0 \rangle} v^5 \nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,M}}{m_e} v^4 \partial_v M \right) \quad (2.24)$$

On obtient alors le flux vb_1 en sommant ces deux termes :

$$vb_1 = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\frac{\langle v^3 g_0 \rangle}{\langle v^3 f_0 \rangle} v^5 \nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,M}}{m_e} v^4 \partial_v M - \frac{eE}{m_e v} \partial_v g_0 \right) \quad (2.25)$$

Comme précédemment, on définit le flux restant $vd_1 = vg_1 - vb_1$:

$$\begin{aligned} vd_1 &= vg_1 - vb_1 \\ &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\frac{\langle v^3 M \rangle}{\langle v^3 f_0 \rangle} \nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,m}}{m_e} v^4 \partial_v M \right) \end{aligned}$$

Le flux vd_1 se réécrit également :

$$vd_1 = \frac{\alpha}{6n_e} \frac{1}{\langle f_0 v^3 \rangle} \left(\langle v^4 \partial_v M \rangle v^5 \nabla_x g_0 - \nabla_x \langle v^5 g_0 \rangle v^4 \partial_v M \right) \quad (2.26)$$

Le terme final de divergence en vitesse se décompose de la façon suivante :

$$\frac{1}{v^2} \partial_v \left(v \frac{eE}{m_e} \cdot (vf_1) \right) = \frac{1}{v^2} \partial_v \left(v \frac{eE}{m_e} \cdot (vf_1^M + vb_1 + vd_1) \right) \quad (2.27)$$

Résumé de la décomposition

Les flux cinétiques associés au transport se décomposent de la manière suivante :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (vf_1^M + vh_1 + vl_1) - \frac{1}{v^2} \partial_v \left(v \frac{eE}{m_e} (vf_1^M + vb_1 + vd_1) \right) = 0 , \quad (2.28)$$

avec :

$$vh_1 = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,m}}{m_e} \frac{1}{v} \partial_v f_0 \right) , \quad (2.29)$$

$$vl_1 = \frac{\alpha}{6n_e} \frac{eE^M}{m_e} \frac{1}{\langle f_0 v^3 \rangle} \left(\langle v^4 \partial_v g_0 \rangle v^4 \partial_v M - \langle v^4 \partial_v M \rangle v^4 \partial_v g_0 \right) , \quad (2.30)$$

$$vb_1 = -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\frac{\langle v^3 g_0 \rangle}{\langle v^3 f_0 \rangle} v^5 \nabla_x g_0 - \frac{eE^{m,M}}{m_e} v^4 \partial_v M - \frac{eE}{m_e v} \partial_v g_0 \right) , \quad (2.31)$$

$$vd_1 = \frac{\alpha}{6n_e} \frac{1}{\langle f_0 v^3 \rangle} \left(\langle v^4 \partial_v M \rangle v^5 \nabla_x g_0 - \nabla_x \langle v^5 g_0 \rangle v^4 \partial_v M \right) . \quad (2.32)$$

où $E^{m,m}$ et $E^{m,M}$ sont donnés par (2.19).

2.2.3 Linéarisation

Dans cette partie nous allons nous servir directement de la décomposition des flux pour linéariser le système et faire apparaître un opérateur de projection des flux sur une variété de courant nul.

$$\begin{aligned} vh_1 &= -\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(\nabla_x g_0 + \frac{1}{6} \frac{\nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} (v^4 \partial_v f_0) \right), \\ &= -\frac{\alpha}{n_e} \left(v^5 \nabla_x g_0 - \frac{v^4 \partial_v f_0}{\langle v^4 \partial_v f_0 \rangle} \nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle \right). \end{aligned}$$

Le linéarisé de vh_1 s'écrit :

$$vh_1^{(l)} = -\frac{\alpha}{n_e} \left(v^5 \nabla_x g_0 - \frac{v^4 \partial_v M}{\langle v^4 \partial_v M \rangle} \nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle \right) \quad (2.33)$$

En reprenant l'écriture de (2.21), on trouve immédiatement :

$$vl_1^{(l)} = \frac{\alpha}{6n_e} \frac{e}{m_e} E^M \frac{1}{\langle M v^3 \rangle} \left(\langle v^4 \partial_v g_0 \rangle v^4 \partial_v M - \langle v^4 \partial_v M \rangle v^4 \partial_v g_0 \right),$$

ou encore :

$$vl_1^{(l)} = \frac{\alpha}{n_e} \frac{e}{m_e} E^M \left(v^4 \partial_v g_0 - \frac{v^4 \partial_v M}{\langle v^4 \partial_v M \rangle} \langle v^4 \partial_v g_0 \rangle \right). \quad (2.34)$$

On procède de la même manière à la linéarisation de vb_1 et vd_1 , en remarquant qu'on a simplement :

$$vb_1^{(l)} = vh_1^{(l)} \quad \text{et} \quad vd_1^{(l)} = vl_1^{(l)}. \quad (2.35)$$

Nous allons maintenant ré-exprimer les flux linéarisés en fonction du projecteur \mathcal{P} défini ci-dessous, et en faisant intervenir la formulation matricielle.

Définition 2.2.2. On définit la projection \mathcal{P} suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^1(\Omega, v^2 dv) &\longrightarrow L^1(\Omega, v^2 dv) \\ \phi &\longmapsto \phi - \frac{v^4 \partial_v M}{\langle v^4 \partial_v M \rangle} \langle \phi \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

On peut réécrire \mathcal{P} sous la forme antisymétrique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\phi) &= \phi - \frac{v^5 M}{\langle v^5 M \rangle} \langle \phi \rangle \\ &= \frac{1}{\langle v^5 M \rangle} \int_{\mathbb{R}_+} \left(M(v') v'^5 \phi(v) - M(v) v^5 \phi(v') \right) v'^2 dv', \\ &= \frac{1}{\langle v^5 M \rangle} \int_{\mathbb{R}_+} M(v) M(v') v^5 v'^5 \left(\frac{\phi(v)}{v^5 M(v)} - \frac{\phi(v')}{v'^5 M(v')} \right) v'^2 dv'. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Les flux linéarisés (2.33) et (2.34) se réécrivent avec (2.36) :

$$vh_1^{(l)} = vb_1^{(l)} = -\mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \nabla_x g_0\right), \quad (2.38)$$

$$vl_1^{(l)} = vd_1^{(l)} = \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \left(-v \frac{e}{m_e} E^M\right) \frac{1}{v^2} \partial_v g_0\right). \quad (2.39)$$

On ajoute (2.38) et (2.39) pour obtenir la forme factorisée de $vg_1^{(l)}$:

$$vg_1^{(l)} = vh_1^{(l)} + vl_1^{(l)} = -\mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} A_M \nabla_\eta g_0\right) \quad (2.40)$$

Le flux de Spitzer-Härm vf_1^M étant de courant nul, on a : $\mathcal{P}(vf_1^M) = vf_1^M$. On obtient alors la forme factorisée de $vf_1^{(l)}$ en ajoutant (2.16) et (2.40) :

$$vf_1^{(l)} = vg_1^{(l)} + vf_1^M = -\mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} A_M \nabla_\eta f_0\right). \quad (2.41)$$

Le système parabolique linéarisé complet s'écrit en injectant (2.41) dans (2.28), et en réécrivant les divergences en espace et en vitesse sous forme matricielle :

$$\nabla_\eta^t A_M^t \cdot = \nabla_x \cdot \quad -v^{-2} \partial_v \left(v \frac{e}{m_e} E^M \cdot \right)$$

Système transport P1-Diffusion linéarisé

$$\partial_t f_0 - \nabla_\eta^t A_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} A_M \nabla_\eta f_0\right) = 0, \quad (2.42)$$

$$\text{avec } \nabla_\eta = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ et } A_M = \begin{pmatrix} Id_3 & -v \frac{e E^M}{m_e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{T}^{(l)}$ le linéarisé de l'opérateur P1-diffusion autour de l'équilibre M :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(l)} : H_M^1(\Omega) &\longrightarrow L_M^2(\Omega), \\ g_0 &\longmapsto \nabla_\eta^t A_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} A_M \nabla_\eta g_0\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Proposition 2.2.3. *L'opérateur de transport P1-diffusion linéarisé conserve les propriétés de l'opérateur de transport P1-diffusion telles que la condition de courant nul impliquant la conservation de la masse.*

La conservation de la masse est donné par :

$$\partial_t n_e = \left\langle \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} A_M \nabla_\eta g_0\right) \right\rangle = 0.$$

Démonstration. Cette proposition est satisfaite par définition du projecteur \mathcal{P} , $\langle \mathcal{P}(\phi) \rangle = 0 \quad \forall \phi \in L^1(\Omega)$. ■

2.3 Analyse variationnelle de l'opérateur de transport P1-diffusion linéaire

Maintenant que nous avons linéarisé l'opérateur de transport P1-diffusion autour de l'équilibre maxwellien, nous allons pouvoir commencer à en faire l'analyse variationnelle. Dans un premier temps, nous allons montrer que dans la limite où l'équilibre maxwellien est homogène en température, $\mathcal{T}^{(l)}$ est auto-adjoint par rapport au produit scalaire $\langle \cdot \rangle_{L_M^2}$. Ensuite nous montrerons que la forme bilinéaire auto-adjointe associée est définie positive, puis nous conclurons sur la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$.

Jusqu'ici, nous avons linéarisé f autour de la distribution maxwellienne M sans faire plus d'hypothèses sur M . Nous allons désormais supposer que l'équilibre est à température homogène $T_0 = 1$. On a alors :

$$f = M + h \quad \text{avec} \quad M(x, v) = n_e(x) \exp\left(-v^2/2\right). \quad (2.44)$$

L'équation (2.42) devient équivalente à :

$$\partial_t h - \nabla_\eta^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_\eta h\right) = 0. \quad (2.45)$$

En effet, d'après la condition de courant nul, on a $\partial_t n_e = 0 \Rightarrow \partial_t M = 0$, et on a $\mathbf{A}_M \nabla_\eta M = 0$. Nous allons écrire respectivement les problèmes aux conditions de bords de Dirichlet et de Neumann associés à l'équation (2.45)

Problème 1. (*P1-diffusion / Condition Limite (CL) de Dirichlet*) Soit le problème de Cauchy associé au transport P1-diffusion linéarisé avec condition aux bords de Dirichlet :

$$\begin{cases} \partial_t h - \nabla_\eta^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_\eta h\right) = 0, & \forall (x, v) \in \Omega, \\ h(t, x, v)|_{(x,v) \in \partial\Omega} = 0, \\ h(t = 0, x, v) = h_0(x, v). \end{cases} \quad (2.46)$$

Problème 2. (*P1-diffusion / CL de Neumann*) Soit le problème de Cauchy associé au transport P1-diffusion linéarisé avec condition aux bords de Neumann :

$$\begin{cases} \partial_t h - \nabla_\eta^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_\eta h\right) = 0, & \forall (x, v) \in \Omega, \\ \mathbf{A}_M \nabla_\eta h(t, x, v)|_{x \in \partial I} = 0 \\ h(t, x, v)|_{v \in \{0, +\infty\}} = 0 = 0, \\ h(t = 0, x, v) = h_0(x, v). \end{cases} \quad (2.47)$$

Nous allons nous intéresser à l'existence et l'unicité de solutions stationnaires à ces deux problèmes par l'analyse variationnelle de l'opérateur de transport P1-diffusion linéarisé $\mathcal{T}^{(l)}$.

2.3.1 Formulation variationnelle auto-adjointe de $\mathcal{T}^{(l)}$

La forme variationnelle associée à $\mathcal{T}^{(l)}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla_\eta^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P}\left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_\eta h\right) \frac{\psi}{M} v^2 dv dx. \quad (2.48)$$

2. Analyse mathématique du modèle P1-diffusion

Nous allons dans un premier temps supposer que ψ et h sont suffisamment régulières pour appliquer les transformations nécessaires à l'écriture sous forme symétrique de $\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2(\Omega)}$. Nous verrons ensuite comment définir ces espaces fonctionnels. Par intégration par partie de l'équation (2.48) on trouve :

$$\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2} = \int_{\Omega} \mathcal{P} \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} h \right) \cdot \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \frac{\psi}{M} v^2 dv dx + \mathcal{R}$$

avec le terme de bord \mathcal{R} suivant :

$$\mathcal{R} = \left[\mathcal{P} \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} h \right) \cdot \mathbf{A}_M \hat{n}_{\partial\Omega} \frac{\psi}{M} v^2 \right]_{\partial\Omega}.$$

Les conditions de Dirichlet (h et ψ valent 0 sur les bords) ou de Neumann ($\mathbf{A}_M \nabla_{\eta} h$ et $\mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \psi$ valent 0 sur les bords) annulent de terme de bord \mathcal{R} .

On remplace \mathcal{P} par son expression antisymétrique (2.37) pour obtenir

$$\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2} = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} h \right]_{\delta} \cdot \frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \psi \frac{v^2 dv}{M} \frac{v'^2 dv'}{M'} dx$$

avec

$$G(x, v, v') = \frac{\alpha}{n_e} \frac{M^2 M'^2 v^5 v'^5}{\langle v^5 M \rangle} \quad \text{et} \quad [\psi]_{\delta}(x, v, v') = \psi(x, v) - \psi(x, v'). \quad (2.49)$$

La fonction $G(x, v, v')$ est positive et symétrique par permutation de v et v' tandis que $[\psi]_{\delta}(x, v, v')$ est antisymétrique et linéaire en ψ . On utilise l'antisymétrie pour écrire :

$$\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}_+} G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} h \right]_{\delta} \cdot \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \psi \right]_{\delta} \frac{v^2 dv}{M} \frac{v'^2 dv'}{M'} dx. \quad (2.50)$$

Ainsi, on peut réécrire :

$$\langle \mathcal{T}^{(l)} h, \psi \rangle_{L_M^2} = \int_{\mathbb{R}_+} \langle \mathbb{A} \psi, \mathbb{A} h \rangle_{L_M^2} (v') v'^2 dv' = \langle \mathbb{A} \psi, \mathbb{A} h \rangle_{L_M^2(\Omega^*)}$$

avec

$$\mathbb{A} : \begin{cases} L_M^2(\Omega) \longrightarrow L_M^2(\Omega^*) \\ \psi(x, v) \longmapsto \sqrt{G(x, v, v')} \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \psi \right]_{\delta}(x, v, v') \end{cases} \quad (2.51)$$

et l'espace $L_M^2(\Omega^*)$ défini par :

$$L_M^2(\Omega^*) = L^2 \left(\Omega \times \mathbb{R}_+, \frac{v^2 dv}{M} \frac{v'^2 dv'}{M'} dx \right). \quad (2.52)$$

Par symétrie, on a $\mathbb{A}[h](v, v'_0) \in L_M^2(\Omega)$ pour tout $v'_0 \in \mathbb{R}_+$

2.3.2 L'espace H_M^1

On cherche à définir l'espace H tel que $\psi(v) \in L_M^2$, $(\mathbb{A}\psi)(v, \cdot) \in L_M^2$, on sait que $\mathbb{A}\psi$ est antisymétrique par permutation de v et v' et donné par :

$$\mathbb{A}[\psi](x, v, v') = \frac{\alpha}{n_e} \frac{v^{5/2} v'^{5/2} M M'}{\langle v^5 M \rangle} \left(\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_\eta \psi - \frac{1}{M'} \mathbf{A}'_M \nabla'_\eta \psi' \right)$$

Par symétrie, et d'après le théorème de Fubini, il faut que les intégrales suivantes soient définies pour que $\mathbb{A}[\psi] \in L_M^2(\Omega^*)$:

$$(i) \int_{\mathbb{R}_+} (v^5 M) v^2 dv, \quad (ii) \int_{\mathbb{R}_+} v^5 (\mathbf{A}_M \nabla_\eta h)^2 \frac{1}{M} v^2 dv \quad \text{et} \quad (iii) \int_{\mathbb{R}_+} v^5 \mathbf{A}_M \nabla_\eta h v^2 dv$$

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}_+, v^\alpha dv) \subset L_M^2(\mathbb{R}_+) \quad \forall \alpha > 1/2$. Il suffit donc d'avoir $v^{5/2} \mathbf{A}_M \nabla_\eta \psi \in L_M^2(\Omega)$. On définit donc l'espace H_M^1 .

Définition 2.3.1. Soit H_M^1 l'espace suivant :

$$H_M^1 = \left\{ \psi \in L_M^2 \mid v^{5/2} \mathbf{A}_M \nabla_\eta \psi \in L_M^2 \right\}$$

2.3.3 Étude de la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$

Maintenant que nous avons linéarisé et réécrit l'opérateur de transport sous forme variationnelle, nous allons pouvoir étudier la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$.

Dans cette section nous allons montrer que la forme quadratique $\mathcal{D}(h) = \langle h, Th \rangle_{L_M^2}$ est définie et positive, soit :

$$(i) \mathcal{D}(h) \geq 0,$$

$$(ii) \mathcal{D}(h) = 0 \implies h = 0.$$

Cela ne suffit cependant pas à avoir la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$, une inégalité de type Poincaré permettrait de montrer la coercivité. Nous n'avons pas pu faire la démonstration d'une telle inégalité, nous continuons quand même l'analyse des propriétés de $\mathcal{T}^{(l)}$. Commençons par étudier les propriétés de $\mathcal{D}(h) = \langle h, Th \rangle_{L_M^2}$.

Définition 2.3.2. (Coercivité) On dit que l'opérateur $T : L_M^2 \rightarrow L_M^2$ est coercif si $\exists C > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{L_M^2} \geq C \|h\|_{L_M^2}, \quad \forall h \in L_M^2. \quad (2.53)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\langle h, Th \rangle_{L_M^2} = \mathcal{D}(h) \leq \|h\|_{L_M^2} \|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{L_M^2}.$$

Proposition 2.3.3. La forme quadratique $\mathcal{D} : L_M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est positive. Pour toute fonction $h \in L_M^2$, on a : $\mathcal{D}[h] \geq 0$.

Démonstration. (Positivité (2.3.3 - i))

Il suffit d'écrire $\mathcal{D}[h]$ à partir de la forme symétrique de $\langle \mathcal{T}^{(l)} h, h \rangle$.

$$\mathcal{D}[h] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^*} G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_\eta h \right]_\delta^2 d\mu(\Omega^*) \geq 0. \quad (2.54)$$

avec $G(v, v') = \frac{\alpha}{n_e \langle v^5 M \rangle} M^2 M'^2 v^5 v'^5 > 0$. On a donc bien \mathcal{D} positive. ■

En vue de montrer le caractère positif de \mathcal{D} , et plus encore sa coercivité, nous faisons la conjecture suivante :

Conjecture 2.3.4. (Coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$)

L'opérateur de transport P1-diffusion linéarisé $\mathcal{T}^{(l)}$ est coercif sur H_M^1 . i.e. :

$$\exists C > 0, \quad \|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{H_M^1} > C \|h\|_{H_M^1}, \quad \forall h \in H_M^1.$$

Proposition 2.3.5. (Entropie et théorème H)

La forme quadratique $\mathcal{D}[h]$ définit une entropie pour le problème. Il existe $C > 0$ tel que $\mathcal{D}[h]$ soit exponentiellement décroissante :

$$\partial_t \mathcal{D} + C \mathcal{D} \leq 0.$$

avec :

$$\partial_t \mathcal{D} < 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} > 0$$

l'unique solution de $\mathcal{D}[h] = 0$ est $h = 0$. D'où $f = M$ unique solution du problème.

Démonstration. La dérivée temporelle de \mathcal{D} est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} G(v, v') \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} g \right]_{\delta}^2 v^2 v'^2 dv' dv dx \\ &= \iint_{\Omega'} G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} g \right]_{\delta} \cdot \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} \frac{\partial}{\partial t} g \right]_{\delta} v^2 v'^2 dv' dv dx \\ &= -2 \iint_{\Omega'} \nabla_{\eta}^t \mathbf{A}_M^t G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} g \right]_{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial t} g \frac{1}{M} v^2 v'^2 dv' dv dx \\ &= -2 \iint_{\Omega'} \nabla_{\eta}^t \mathbf{A}_M^t G(v, v') \left[\frac{1}{M} \mathbf{A}_M \nabla_{\eta} g \right]_{\delta} \cdot \nabla_{\eta}^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P} \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M^t \nabla_{\eta} g \right) \frac{1}{M} v^2 v'^2 dv' dv dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[\nabla_{\eta}^t \mathbf{A}_M^t \mathcal{P} \left(\frac{\alpha v^5}{n_e} \mathbf{A}_M^t \nabla_{\eta} g \right) \right]^2 \frac{1}{M} v^2 dv dx \\ &= - \|Tg\|_{L_M^2(\Omega)}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathcal{D}[h] \leq \|h\|_{L_M^2} \|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{L_M^2},$$

En multipliant par $\|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{L_M^2} / \|h\|_{L_M^2}$, on obtient

$$\mathcal{D}[h] \frac{\|\mathcal{T}^{(l)} h\|_{L_M^2}}{\|h\|_{L_M^2}} \leq -\partial_t \mathcal{D},$$

D'après la définition de la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + C \mathcal{D} \leq 0,$$

La résolution de cette inéquation différentielle donne

$$\mathcal{D}(t) \leq K \exp C(t_0 - t)$$

On en déduit que \mathcal{D} converge exponentiellement vers 0. ■

2.4 Conclusion

Nous avons commencé par montrer dans ce chapitre que le modèle P1-diffusion se récrivait sous une forme matricielle compacte pouvant être linéarisée avec l'introduction d'un projecteur sur les composantes de courant nul. Cette forme linéarisée et compacte permet l'analyse variationnelle du modèle. Nous avons cherché à étudier la coercivité de l'opérateur de transport dans la limite non-collisionnelle. Nous ensuite montré que l'opérateur de transport P1-diffusion linéarisé, autour de la maxwellienne de température homogène, et sous l'hypothèse de coercivité, vérifie une loi entropique de type théorème H. Dans le prochain chapitre, nous étudierons la discrétisation explicite du modèle P1-Diffusion afin de réaliser une première étude numérique de vérification des propriétés du modèle, comme la capture de la limite de Spitzer-Härm, ou la conservativité.

CHAPITRE 3

Discrétisation explicite 1Dx-1Dv du système P1-Diffusion

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Schéma semi-discret 1D-espace 1D-vitesse	63
3.2.1	Semi-discrétisation en vitesse de la partie Vlasov	64
3.2.2	Semi-discrétisation en espace	67
3.3	Discrétisation conservative de l'opérateur de collisions	70
3.4	Discrétisation temporelle explicite et évaluation des contraintes CFL .	73
3.5	Tests élémentaires de vérification	74
3.5.1	Cas-test de Rosenbluth	75
3.5.2	Étude instationnaire de convergence vers la limite de Spitzer-Härm	77
3.6	Conclusion	81

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons réaliser une première étude numérique permettant de vérifier que le modèle réponde bien aux objectifs de modélisation donné dans le chapitre 1, comme la prise en compte des effets de délocalisation du transport, ou la capture du régime de Spitzer-Härm dans le régime fortement collisionnel. Pour cela, nous allons proposer dans un premier temps, pour des raisons de simplicité, une discrétisation explicite 1Dx-1Dv du modèle P1-Diffusion de type Volumes Finis. Cette discrétisation permet de garantir au niveau discret les lois de conservations. Nous procéderons à la résolution numérique explicite du modèle P1-Diffusion et à l'analyse de la capture du régime de Spitzer-Härm dans le régime fortement collisionnel. Nous identifierons les éventuelles contraintes CFL pouvant rendre difficile un couplage effectif avec l'hydrodynamique Lagrangienne. Cela nous amènera à considérer l'implicitation totale du modèle, étant donné le caractère parabolique du modèle P1-diffusion.

Nous allons nous intéresser à la résolution du système P1-diffusion dans sa forme canonique suivante :

$$\partial_t f_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] = C_0^{ee}(f_0, f_0) \quad (3.1)$$

$$f_1 = -\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{v^3}{n_e} \left(v \nabla_x f_0 - \frac{e}{m_e} E \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle f_0 v^5 \rangle}{6 \langle f_0 v^3 \rangle} \quad (3.3)$$

avec l'opérateur de collisions électron-électron isotrope de Landau :

$$\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0) = Y_{ee} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty g(v, v') \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) v' dv' .$$

La discrétisation de l'opérateur de collisions électron-électron isotrope de Landau sera également abordée, on utilisera un schéma de type Chang et Cooper [8]. Afin de préparer la discrétisation en vitesse, on écrit sous une forme faible l'équation (3.1) pour $\phi(v)$ une fonction test suffisamment régulière :

$$\int_0^\infty \left(\partial_t f_0 + \partial_x(vf_1) - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \frac{1}{v^2} \partial_v(v^2 f_1) \right) \phi(v) v^2 dv = \int_0^\infty \mathcal{C}_0^{ee} \phi(v) v^2 dv ,$$

et on réécrit le terme suivant par une intégration par partie :

$$\int_0^\infty -\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \frac{1}{v^2} \partial_v(v^2 f_1) \phi(v) v^2 dv = \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \int_0^\infty (v^2 f_1) \frac{1}{v} \partial_v \phi(v) v dv .$$

Ainsi, on écrit l'opérateur de Fokker-Planck isotrope sous la forme faible et symétrique suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathcal{C}_0^{ee} \phi(v) v^2 dv = & -\frac{2\pi}{3} 8\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{1}{v} \partial_v \phi + \frac{1}{v'} \partial_{v'} \phi \right) \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \\ & \left(f_0(v') \frac{1}{v} \partial_v f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} f_0(v') \right) v' dv' v dv . \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que la conservation de l'énergie de l'opérateur de collisions est garantie par l'antisymétrie de l'opérateur par permutation des voies d'entrée et de sortie v et v' . On doit donc faire attention à la discrétisation du terme $v^{-1} \partial_v \phi$ pour que le schéma respecte la conservation de l'énergie au niveau discret. Dans la pratique, le domaine d'intégration est borné dans la variable $v \in [0, \mathcal{V}]$, on considère donc le problème approché suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^\mathcal{V} (\partial_t f_0 + \partial_x(vf_1)) \phi(v) v^2 dv + \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \int_0^\mathcal{V} (v^2 f_1) \frac{1}{v} \partial_v \phi(v) v dv = \\ -\frac{2\pi}{3} 8\pi \int_0^\mathcal{V} \int_0^\mathcal{V} \left(\frac{1}{v} \partial_v \phi(v) + \frac{1}{v'} \partial_{v'} \phi(v') \right) \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \\ \left(f_0(v') \frac{1}{v} \partial_v f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} f_0(v') \right) v' dv' v dv \end{aligned} \quad (3.4)$$

La discrétisation en vitesse se fera par l'utilisation d'une quadrature adaptée pour les intégrales en vitesse, puis par identification des ϕ_j qui en résultent. Cette reformulation sous forme faible permet ainsi, par construction, de respecter les invariants de masse et d'énergie, au niveau discret, à la fois pour l'opérateur de transport (membre de gauche de l'équation (3.4)) et pour l'opérateur de collisions (membre de droite de l'équation (3.4)).

3.2 Schéma semi-discret 1D-espace 1D-vitesse

Maillage 1D en espace de $(0, \mathcal{L})$

On commence par définir le maillage admissible en espace de $(0, \mathcal{L})$, donné par la famille $(x_j)_{j=0, \dots, N+1}$ telle que :

$$x_0 = x_{\frac{1}{2}} = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{j-\frac{1}{2}} < x_j < x_{j+\frac{1}{2}} < \dots < x_N < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = L$$

On note $\Delta x_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$.

Les mailles fantômes x_0 et x_{N+1} permettent de définir les conditions aux bords en y imposant la valeur des inconnues discrètes (ici f_0).

Maillage 1D en vitesse de $(0, \mathcal{V})$

On définit le maillage admissible en vitesse de $(0, \mathcal{V})$, donné par la famille $(v_g)_{g=1, \dots, N}$ telle que :

$$v_{\frac{1}{2}} = 0 < v_1 < v_{\frac{3}{2}} < \dots < v_{g-\frac{1}{2}} < v_j < v_{g+\frac{1}{2}} < \dots < v_G < v_{G+\frac{1}{2}} = \mathcal{V}$$

On note $\Delta v_g = v_{g+\frac{1}{2}} - v_{g-\frac{1}{2}}$ et on définit les quantités suivantes :

$$(v^p \Delta v)_g = \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} v^p dv \quad \text{et} \quad (v^p \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = \int_{v_g}^{v_{g+1}} v^p dv \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

En particulier on utilisera $(v^2 \Delta v)_g = \frac{1}{3}(v_{g+\frac{1}{2}}^3 - v_{g-\frac{1}{2}}^3)$ et $(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{g+1}^2 - v_g^2)$.

On définit les opérateurs de moyenne sur les mailles suivants :

$$\langle \cdot \rangle_g = \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} \cdot v^2 dv \quad \text{et} \quad (\cdot)_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \cdot dx$$

et on introduit la vitesse du groupe g , $v_g = \sqrt{(v^2 \Delta v)_g / \Delta v_g}$, de façon cohérente avec la mesure discrète $(v^2 \Delta v)_g$, de sorte à ce que la formule :

$$\sum_{g=0}^G \langle \phi \rangle_g v_g^2 \Delta v_g = \int_0^{\mathcal{V}} \phi(v) v^2 dv$$

soit exacte pour toute fonction ϕ .

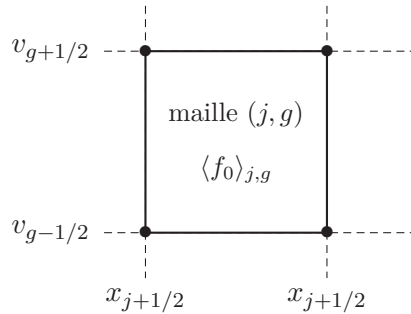


FIGURE 3.1 – Grille orthogonale de l'espace des phases, j allant de 1 à N et g allant de 1 à G .

Les équations du système P1-diffusion discrétisées en espace et en vitesse auront pour inconnues discrètes les $\langle f_0 \rangle_{j,g}$ avec j allant de 1 à N et g allant de 1 à G , qui représentent les valeurs moyennes de f_0 dans les différentes mailles de l'espace des phases.

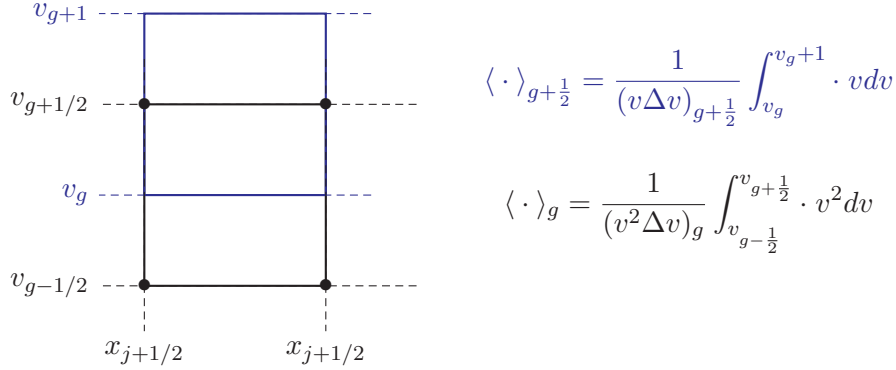


FIGURE 3.2 – Schéma des maillages primal et dual en coordonnée de vitesse. À chaque moyenne est associée une mesure spécifique.

La résolution numérique de certains opérateurs paraboliques fait intervenir un maillage dual, permettant d'obtenir des propriétés de conservation au niveau discret. C'est le cas notamment pour l'opérateur de collision électron-électron et sa résolution numérique dans [8]. Nous procédons par analogie et introduisons le maillage dual de la figure 3.2. Dans le cas du système P1-Diffusion, nous allons voir que la propriété de courant nul doit aussi être vérifiée sur le maillage dual.

3.2.1 Semi-discrétisation en vitesse de la partie Vlasov

Commençons par discrétiser les trois termes de gauche de l'équation (3.4) qui représentent la partie transport du modèle. Si on suppose $\phi(v)$ constante par morceaux sur le maillage primal, alors les deux premiers termes s'écrivent de façon exacte :

$$\int_0^v \frac{\partial}{\partial t} f_0 \phi(v) v^2 dv = \sum_{g=1}^G \phi_g \frac{\partial}{\partial t} \langle f_0 \rangle_g (v^2 \Delta v)_g \quad (3.5)$$

$$\int_0^v \frac{\partial}{\partial x} (v f_1) \phi(v) v^2 dv = \sum_{g=1}^G \phi_g \frac{\partial}{\partial x} \langle v f_1 \rangle_g (v^2 \Delta v)_g \quad (3.6)$$

où ϕ_g représente la valeur de $\phi(v)$ dans la maille d'indice g du maillage primal.

En revanche le troisième terme de l'équation (3.4), présente une dérivée en vitesse : celle-ci est traitée de manière analogue à l'opérateur de collision électron-électron dans [8]. Après intégration par partie du troisième terme de l'équation (3.4), la fonction $\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \phi\right)$ est discrétisée comme dans [8],

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \phi(v)\right)_{g+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{g+1} - \phi_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \quad (3.7)$$

Il vient la formule de quadrature suivante, correspondant au pavage du domaine sur le maillage dual $\{v_g\}_{1 \leq g \leq G}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{eE}{m_e} \int_0^{\mathcal{V}} (v^2 f_1) \frac{1}{v} \partial_v \phi(v) v dv &\simeq \frac{eE}{m_e} \sum_{g=1}^{G-1} \langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{v} \partial_v \phi(v) \right]_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{eE}{m_e} \sum_{g=1}^G \left[\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} - \langle v^2 f_1 \rangle_{g-\frac{1}{2}} \right] \phi_g \\
 &\quad - \langle v^2 f_1 \rangle_{\frac{1}{2}} \phi_0 + \langle v^2 f_1 \rangle_{G-\frac{1}{2}} \phi_{G+1}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par identification des contributions associées à chacun des éléments de l'ensemble $\{\phi_g\}_{0 \leq g \leq G+1}$, le schéma semi-discret en vitesse pour la partie Vlasov va s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f_0 \rangle_g + \frac{\partial}{\partial x} \langle v f_1 \rangle_g - \frac{eE}{m_e} \frac{\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} - \langle v^2 f_1 \rangle_{g-\frac{1}{2}}}{(v^2 \Delta v)_g} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G, \tag{3.9}$$

et avec $\langle v^2 f_1 \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle v^2 f_1 \rangle_{G+\frac{1}{2}} = 0$. Les flux numériques $\langle v f_1 \rangle_g$ et $E \langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}}$ seront discrétisés de sorte que la conservation de la masse soit satisfaite au niveau discret.

Proposition 3.2.1. (*Lois de conservation semi-discrètes*)

De l'équation discrète (3.9), on déduit les lois de conservations semi-discrètes suivantes :

Équation de bilan de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_g (v^2 \Delta v)_g \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{g=1}^G \langle v f_1 \rangle_g (v^2 \Delta v)_g \right] = 0, \tag{3.10}$$

Équation de bilan de l'énergie interne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_g \frac{v_g^2}{2} (v^2 \Delta v)_g \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{g=1}^G \langle v f_1 \rangle_g \frac{v_g^2}{2} (v^2 \Delta v)_g \right] \\
 + \frac{eE}{m_e} \left[\sum_{g=1}^{G-1} \langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce qui est équivalent à exprimer les équations discrétisées sous forme faible en remplaçant ϕ_g respectivement par 1 et par $\frac{1}{2} v_g^2$.

Preuve. On trouve les équation (3.10) et (3.11) par prise directe aux moments de l'équation (3.9). ■

Remarque 3.2.2. Les lois de conservations semi-discrètes de la masse (3.10) et de l'énergie (3.11) font apparaître la condition de courant nul calculée sur les deux maillages en vitesse, $\sum_{g=1}^G \langle v f_1 \rangle_g (v^2 \Delta v)_g = 0$ et $\sum_{g=1}^{G-1} \langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0$. Elles sont les analogues semi-discrètes des équations continues (1.71) et (1.72), faisant apparaître $\nabla_x \cdot \mathbf{J}$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$.

Nous allons proposer une semi-discrétisation en vitesse de l'équation pour f_1 , sur chacun des maillages primal et dual, permettant d'introduire la condition de courant nul dans les lois de conservation discrètes (Proposition 3.2.1).

Semi-discrétisation en vitesse des flux numériques

Nous allons désormais exprimer les flux cinétiques $\langle vf_1 \rangle_g$ et $\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}}$ correspondant respectivement aux flux numériques en espace et en vitesse. Nous allons reconstruire ces termes par intégration de l'équation (3.2) respectivement sur la maille primale d'indice $g \in [1, G]$ et la maille duale d'indice $g + \frac{1}{2}$ avec $g \in [0, G]$. Commençons par le premier terme, intervenant dans $\frac{\partial}{\partial x} \langle vf_1 \rangle_g$. On obtient de manière exacte en intégrant le flux cinétique vf_1 sur l'intervalle $[v_{g-\frac{1}{2}}, v_{g+\frac{1}{2}}]$ l'expression suivante :

$$\langle vf_1 \rangle_g = -\frac{\alpha}{n_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \langle v^5 f_0 \rangle_g - \frac{eE}{m_e} \langle v^4 \partial_v f_0 \rangle_g \right) \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G. \quad (3.12)$$

Il n'y a pas d'ambiguïté pour la discrétisation en vitesse du premier terme $\partial_x \langle v^5 f_0 \rangle_g$ contrôlant la diffusion en espace, on l'approche simplement par $v_g^5 \partial_x \langle f_0 \rangle_g$. Le second terme $E \langle v^4 \partial_v f_0 \rangle_g$, en revanche, fait intervenir des dérivées croisées espace-vitesse. Ce terme intervient dans $\frac{\partial}{\partial x} E \left(v^4 \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right)$ et est à mettre en parallèle avec le terme $\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} E \left(v^6 \frac{\partial}{\partial x} f_0 \right)$ rencontré dans $E \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1)$. Dans ces termes de dérivées croisées espace-vitesse, il apparaît la quantité $\langle v^4 \partial_v f_0 \rangle_g$, qui peut être exprimée de manière exacte, après intégration par parties :

$$\langle v^4 \partial_v f_0 \rangle_g = -6 \langle v^3 f_0 \rangle_g + \left[(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)_{g-\frac{1}{2}} \right] / (v^2 \Delta v)_g. \quad (3.13)$$

Le terme $\langle v^3 f_0 \rangle_g$ est approché par $v_g^3 \langle f_0 \rangle_g$, $\langle f_0 \rangle_g$ étant la variable discrète du problème. La discrétisation des $(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}}$ sera abordée en section 3.2.2 car elle concerne également la discrétisation en espace. On obtient finalement, en injectant (3.13) dans (3.12) et pour $1 \leq g \leq G$:

$$\langle vf_1 \rangle_g = -\frac{\alpha}{n_e} \left(v_g^5 \frac{\partial}{\partial x} \langle f_0 \rangle_g + 6 \frac{eE}{m_e} v_g^3 \langle f_0 \rangle_g - \frac{eE}{m_e} \frac{(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)_{g-\frac{1}{2}}}{(v^2 \Delta v)_g} \right). \quad (3.14)$$

On fait la même chose sur le maillage dual en intégrant le flux cinétique $v^2 f_1$ sur l'intervalle $[v_g, v_{g+1}]$ et la mesure $v dv$. On obtient l'expression suivante :

$$\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{n_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}} - \frac{eE}{m_e} \langle v^5 \partial_v f_0 \rangle_{g+\frac{1}{2}} \right) \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G-1. \quad (3.15)$$

Le terme $\langle v^5 \partial_v f_0 \rangle_{g+\frac{1}{2}}$ correspond au terme de diffusion en vitesse. On choisit donc, de le discrétiser de façon centrée comme suit :

$$\langle v^5 \partial_v f_0 \rangle_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \int_{v_g}^{v_{g+1}} v^5 \partial_v f_0 v dv \simeq \frac{v_{g+\frac{1}{2}}^6}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} (\langle f_0 \rangle_{g+1} - \langle f_0 \rangle_g) .$$

Le terme $(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}}$ de l'équation (3.14) sera traité comme un terme croisé, tout comme ceux de l'équation (3.14). On a finalement le terme de flux $\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}}$ pour $1 \leq g \leq G-1$ donné par :

$$\langle v^2 f_1 \rangle_{g+\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{n_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}} - \frac{eE}{m_e} v_{g+\frac{1}{2}}^6 \frac{\langle f_0 \rangle_{g+1} - \langle f_0 \rangle_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \right) . \quad (3.16)$$

Il ne reste plus qu'à discrétiser en vitesse les termes $(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}}$ ainsi que le champ électrique E. Comme la discrétisation de ces termes concernent également la discrétisation en espace, nous la réservons pour la sous-section suivante, où nous abordons la discrétisation en espace du système P1-diffusion.

3.2.2 Semi-discrétisation en espace

L'équation (3.9) peut être discrétisée en espace de la façon suivante pour $1 \leq g \leq G$ et $1 \leq i \leq N$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle (f_0)_j \rangle_g + \frac{\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} - \langle v f_1 \rangle_{j-\frac{1}{2},g}}{\Delta x_j} - \frac{eE_j}{m_e} \frac{\langle v^2 f_1 \rangle_{j,g+\frac{1}{2}} - \langle v^2 f_1 \rangle_{j,g-\frac{1}{2}}}{(v^2 \Delta v)_g} = 0 . \quad (3.17)$$

Par abus, on note $\langle f_0 \rangle_{j,g} = \langle (f_0)_j \rangle_g$ dans la suite du document. On discrétise en espace le terme $\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}$ en intégrant dans la maille duale d'indice $j + \frac{1}{2}$, l'équation (3.14). Ici le premier terme $\left[\partial_x v_g^5 \langle f_0 \rangle_g \right]_{j+\frac{1}{2}}$ correspond à de la diffusion spatiale : on choisit donc la discrétisation centrée suivante

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} v_g^5 \langle f_0 \rangle_g \right]_{j+\frac{1}{2}} = v_g^5 \frac{\langle f_0 \rangle_{j+1,g} - \langle f_0 \rangle_{j,g}}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} .$$

Le second terme $\left[6 \frac{eE}{m_e} v_g^3 \langle f_0 \rangle_g \right]_{j+\frac{1}{2}}$, correspond à de l'advection spatiale, on choisit donc,

pour des raisons de stabilité, une discrétisation décentrée amont selon le signe de $\frac{eE_{j+\frac{1}{2}}}{m_e}$:

$$\left[6 \frac{eE}{m_e} v_g^3 \langle f_0 \rangle_g \right]_{j+\frac{1}{2}} = 6 \frac{eE}{m_e} v_g^3 \langle f_0 \rangle_g^{up} \quad \text{avec} \quad \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^{up} = \begin{cases} \langle f_0 \rangle_{j,g} & \text{si } \frac{eE}{m_e} < 0 , \\ \langle f_0 \rangle_{j+1,g} & \text{si } \frac{eE}{m_e} > 0 . \end{cases}$$

On note alors :

$$\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} = -\frac{\alpha}{M_{2,j+\frac{1}{2}}} \left(v_g^5 \frac{\langle f_0 \rangle_{j+1,g} - \langle f_0 \rangle_{j,g}}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} + 6 \frac{eE_{j+\frac{1}{2}}}{m_e} v_g^3 \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^{up} - \frac{eE_{j+\frac{1}{2}}}{m_e} \frac{(v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}^* - (v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g-\frac{1}{2}}^*}{(v^2 \Delta v)_g} \right) , \quad (3.18)$$

avec $M_{2,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(M_{2,i+1} + M_{2,i})$, $M_{2,i} = \sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j,g} (v^2 \Delta v)_g$.

Les termes $(v^6 f_0)^*$ sont appelés *termes croisés* et sont à discrétiser sur les arêtes des mailles d'espace et de vitesse. On discrétise en espace le terme $\langle v^2 f_1 \rangle_{j,g+\frac{1}{2}}$ en intégrant dans la maille primale d'indice j , l'équation (3.16) .

$$\langle v^2 f_1 \rangle_{j,g+\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{M_{2,i}} \left(\frac{(v^6 f_0)^*_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)^*_{j-\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}}{\Delta x_j} - \frac{e E_j}{m_e} v_{g+\frac{1}{2}}^6 \frac{\langle f_0 \rangle_{j,g+1} - \langle f_0 \rangle_{j,g}}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \right) \quad (3.19)$$

Discrétisation du champ électrique auto-consistant et des termes croisés

Au niveau continu, le fait d'imposer la neutralité avec la contrainte du courant nul $\langle v f_1 \rangle = 0$ dans le cas non-magnétisé permet d'obtenir une expression auto-consistante du champ électrique $\frac{e E}{m_e} = -\frac{\partial_x \langle v^5 f_0 \rangle}{6 \langle v^3 f_0 \rangle}$. Par analogie, nous obtenons, à partir des contraintes de courant nul discrètes, des expressions pour le champ électrique sur le maillage primal et dual en espace.

Proposition 3.2.3. (Condition de courant nul discrète)

Supposons $(v^6 f_0)^*_{j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = (v^6 f_0)^*_{j+\frac{1}{2},G+\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall i \in [0, N]$. Les champs électriques discrets définis sur les maillages primal et dual :

$$\frac{e E_{j+\frac{1}{2}}}{m_e} = -\frac{1}{\Delta x_j} \frac{\sum_{g=1}^G (\langle f_0 \rangle_{j+1,g} - \langle f_0 \rangle_{j,g}) v_g^5 (v^2 \Delta v)_g}{\left(6 \sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^{up} v_g^3 (v^2 \Delta v)_g \right)} \quad \forall i \in [0, N] , \quad (3.20)$$

$$\frac{e E_j}{m_e} = -\frac{1}{\Delta x_j} \frac{\sum_{g=1}^{G-1} \left((v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)_{j-\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} \right) (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}{\left(6 \sum_{g=1}^{G-1} \langle f_0 \rangle_{j,g} (v^5 \Delta v)_g + v_{G-\frac{1}{2}}^6 f_G \right)} \quad \forall i \in [1, N] \quad (3.21)$$

satisfont respectivement les contraintes de courant nul :

$$\sum_{g=1}^G \langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} (v^2 \Delta v)_g = 0 , \quad (3.22)$$

$$\sum_{g=1}^{G-1} \langle v^2 f_1 \rangle_{j,g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0 . \quad (3.23)$$

Démonstration. En injectant et dans (3.18) et (3.19) on obtient directement les relations et par la prise aux moments. ■

On propose une discrétisation centrée pour les termes croisés $(v^6 f_0)^*_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}$:

$$(v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} = (v^6)_{g+\frac{1}{2}}^* \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} \quad \forall i \in [0, N] \quad \text{et} \quad \forall g \in [0, G] \quad (3.24)$$

avec les $\{(v^6)_{g+\frac{1}{2}}^*\}$ donnés par la suite récurrente $(v^6)_{g+\frac{1}{2}}^* = (v^6)_{g-\frac{1}{2}}^* + 6v_g^3(v^2 \Delta v)_g$ et avec $(v^6)_{\frac{1}{2}}^* = 0$. De sorte que la relation :

$$v^4 \frac{\partial}{\partial v} f_0 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^6 f_0) - 6v^3 f_0 ,$$

soit satisfaite au niveau discret, La quantité $\langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}$ est ensuite discrétisée de façon centrée en espace et en vitesse.

Lois de conservations discrètes

La schéma numérique proposé permet de garantir au niveau discret les lois de conservations suivantes :

Proposition 3.2.4. (Conservation de la densité)

La densité discrète est conservée :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j,g} (v^2 \Delta v)_g \right] = 0 \quad (3.25)$$

avec la densité discrète $n_{e,i} = \sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j,g} (v^2 \Delta v)_g := \int_0^{\mathcal{V}} f_0(x_j, v) v^2 dv$.

Démonstration. Cette propriété découle de la condition de courant nul discrète (3.2.2), garantie par la discrétisation du champ électrique auto-consistant $\frac{e}{m_e} E_{j+\frac{1}{2}}$. L'équation de conservation de la masse (3.10) devient donc l'équation (3.25) . \blacksquare

Proposition 3.2.5. (Conservation de l'énergie)

L'énergie discrète est conservée :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{2} n_{e,i} k_B T_{e,i} \right] + [q_{e,j+\frac{1}{2}} - q_{e,j-\frac{1}{2}}] / \Delta x_j = 0 , \quad (3.26)$$

avec l'énergie interne électronique discrète, donnée par :

$$\frac{3}{2} n_{e,i} k_B T_{e,i} = \sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j,g} \frac{v_g^2}{2} (v^2 \Delta v)_g , \quad (3.27)$$

et le flux de chaleur électronique discret, donné par :

$$q_{e,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{m_e} \sum_{g=1}^G \langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} \frac{v_g^2}{2} (v^2 \Delta v)_g . \quad (3.28)$$

Démonstration. Comme précédemment, la propriété découle de la condition de courant nul discrète (3.2.2), garantie par la discrétisation du champ électrique auto-consistant $\frac{e}{m_e} E_j$. L'équation de conservation de la masse (3.11) devient donc l'équation (3.26) . \blacksquare

On résume alors ainsi le système d'équations aux moments discrets :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n_{e,i} = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3 k_B n_{e,i} T_{e,i}}{m_e} \right) + \partial_x q_{e,i} = 0 . \end{cases} \quad (3.29)$$

La densité électronique étant stationnaire, on peut écrire l'équation de la chaleur discrète suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{e,i} + \frac{1}{\frac{3 k_B n_{e,i}}{2 m_e}} \frac{q_{e,j+\frac{1}{2}} - q_{e,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x_j} = 0 \quad (3.30)$$

On souhaite que la discrétisation permette de retrouver les résultats du modèle de Spitzer-Härm dans la limite fortement collisionnelle. Nous allons donc nous intéresser à cette limite. Dans un premier temps, nous allons discrétiser l'opérateur de collisions de Fokker-Planck isotrope. Puis dans un second temps, nous étudierons la convergence en maillage du flux de chaleur q_e vers le flux de Spitzer-Härm q_{SH} dans la limite locale.

3.3 Discrétisation conservative de l'opérateur de collisions

Pour discrétiser l'opérateur de Fokker-Planck isotrope, on utilise le schéma \mathcal{S}_1 de C. Buet et K.C. Le Thanh basé sur la méthode de Chang et Cooper [8]. Repartons de la forme faible symétrique de l'opérateur de collisions, celle du terme de droite de l'équation (3.4) :

$$\begin{aligned} (r.h.s) = & -\frac{2\pi}{3} 8\pi \int_0^{\mathcal{V}} \int_0^{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{v} \partial_v \phi(v) + \frac{1}{v'} \partial_{v'} \phi(v') \right) \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \\ & \left(f_0(v') \frac{1}{v} \partial_v f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} f_0(v') \right) v' dv' v dv \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sous cette forme symétrique la conservation de la masse et de l'énergie ($\phi = 1, v^2$) est explicite. Mais pour la discrétisation, on part de la forme antisymétrique suivante :

$$\begin{aligned} (r.h.s) = & -\frac{4\pi}{3} 8\pi \int_0^{\mathcal{V}} \frac{1}{v} \partial_v \phi \int_0^{\mathcal{V}} \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \\ & \left(f_0(v') \frac{1}{v} \partial_v f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \partial_{v'} f_0(v') \right) v' dv' v dv . \end{aligned} \quad (3.32)$$

De façon analogue au terme de diffusion en vitesse, on applique la quadrature suivante :

$$\begin{aligned} (r.h.s) \simeq & -\frac{4\pi}{3} 8\pi \sum_{g=1}^{G-1} \left[\frac{1}{v} \partial_v \phi \right]_{g+\frac{1}{2}} \sum_{g'=1}^{G-1} \inf \left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3} \right) v^3 v'^3 \\ & \left(f_{g'+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{v} \partial_v f_0 \right]_{g+\frac{1}{2}} - f_{g+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{v} \partial_v f_0 \right]_{g'+\frac{1}{2}} \right) (v \Delta v)_g (v' \Delta v')_{g'} , \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\text{avec } \left[\frac{1}{v} \partial_v \phi \right]_{g+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{g+1} - \phi_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{v} \partial_v f_0 \right]_{g+\frac{1}{2}} = \frac{f_{0,g+1} - f_{0,g}}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} .$$

On pose ensuite :

$$K_{g+\frac{1}{2}} = \sum_{g'=1}^{G-1} \inf(v_{g+\frac{1}{2}}^3, v_{g'+\frac{1}{2}}^3) \left(f_{g'+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{v} \partial_v f_0 \right]_{g+\frac{1}{2}} - f_{g+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{v} \partial_v f_0 \right]_{g'+\frac{1}{2}} \right) (v' \Delta v')_{g'} .$$

On peut réécrire $K_{g+\frac{1}{2}}$ de la façon suivante :

$$K_{g+\frac{1}{2}} = E_{g+\frac{1}{2}} f_{g+\frac{1}{2}} + D_{g+\frac{1}{2}} \frac{\langle f_0 \rangle_{g+1} - \langle f_0 \rangle_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \quad \text{avec } g = 1, \dots, G-1 \quad (3.34)$$

où $E_{g+\frac{1}{2}}$ et $D_{g+\frac{1}{2}}$ sont des approximations consistantes des potentiels de Rosenbluth [8] et sont données par :

$$E_{g+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^g 3(v^2 \Delta v)_j \langle f_0 \rangle_j - v_{g-\frac{1}{2}} f_G, \quad g = 1, \dots, G-1 \quad (3.35)$$

$$D_{g+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^g v_{j+\frac{1}{2}}^3 \sum_{k=j}^{G-1} f_{k+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{k+\frac{1}{2}}, \quad g = 1, \dots, G-1 \quad (3.36)$$

Par identification des ϕ_g , comme précédemment, on écrit la partie collision du schéma numérique :

$$\partial_t \langle f_0 \rangle_{j,g} = \frac{K_{g+\frac{1}{2}} - K_{g-\frac{1}{2}}}{(v^2 \Delta v)_g} \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G,$$

avec $K_{\frac{1}{2}} = K_{G+\frac{1}{2}} = 0$.

Discrétisation de $K_{g+\frac{1}{2}}$ par la méthode de Chang et Cooper

La méthode de Chang et Cooper [8] consiste à interpoler $f_{g+\frac{1}{2}}$ dans l'expression de $K_{g+\frac{1}{2}}$ tel que les états d'équilibres soient préservés au niveau discret. $f_{g+\frac{1}{2}}$ est une combinaison convexe de $\langle f_0 \rangle_{g+1}$ et $\langle f_0 \rangle_g$, appelé interpolé de Chang et Cooper :

$$f_{g+\frac{1}{2}} = \delta_{g+\frac{1}{2}} \langle f_0 \rangle_g + (1 - \delta_{g+\frac{1}{2}}) \langle f_0 \rangle_{g+1}, \quad (3.37)$$

avec :

$$\delta_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha_{g+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\exp \alpha_{g+\frac{1}{2}} - 1}, \quad \alpha_{g+\frac{1}{2}} = \frac{E_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}{D_{g+\frac{1}{2}}}. \quad (3.38)$$

Il faut donc résoudre un système non-linéaire en $f_{g+\frac{1}{2}}$ pour calculer $\delta_{g+\frac{1}{2}}$. Dans le cas coulombien, en exprimant le système en $D_{g+\frac{1}{2}}$, on montre que le système est tridiagonal. L'interpolé de Chang et Cooper se calcule en résolvant le système $MD = f^\delta$ où M est une matrice tridiagonale, symétrique et définie positive; et f^δ est un vecteur dépendant non-linéairement des $D_{g+\frac{1}{2}}$. On résout le système par une méthode du point fixe.

Les composantes de la matrice M s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \frac{1}{3(v^2\Delta v)_2}, & M_{1,1} &= -M_{1,2} + \frac{1}{3(v^2\Delta v)_1}, \\ M_{g,g-1} &= \frac{1}{3(v^2\Delta v)_g}, & M_{g,g+1} &= \frac{1}{3(v^2\Delta v)_{g+1}}, & M_{g,g} &= -(M_{g,g-1} - M_{g,g+1}), \\ M_{G-1,G-2} &= \frac{1}{3(v^2\Delta v)_{G-1}}, & M_{G-1,G-1} &= -M_{G-1,G-2}. \end{aligned}$$

La décomposition LL^t de M est donnée par :

$$L_{g,g} = \sqrt{\delta_g} \quad \text{et} \quad L_{g,g-1} = M_{g,g-1}/\sqrt{\delta_g},$$

avec $\delta_{g+1} = M_{g+1,g+1} - M_{g+1,g}^2/\delta_g$ et $\delta_0 = M_{1,1}$.

L'algorithme du point fixe s'écrit :

$$MD^{n+1} = f^\delta(D^n), \quad D^0 = \beta E, \quad \beta > 0,$$

ou encore :

$$\begin{cases} L^t D^{n+1} = y \\ Ly = f^\delta(D^n) \end{cases}$$

Résumé du schéma semi-discret

Le schéma semi-discret complet s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \langle f_0 \rangle_{j,g} + \frac{\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} - \langle v f_1 \rangle_{j-\frac{1}{2},g}}{\Delta x_j} - \frac{e E_j (v^2 f_1)_{j,g+\frac{1}{2}} - (v^2 f_1)_{j,g-\frac{1}{2}}}{m_e (v^2 \Delta v)_g} \\ = \frac{K_{g+\frac{1}{2}} - K_{g-\frac{1}{2}}}{(v^2 \Delta v)_g} \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G, \end{aligned}$$

avec les conditions aux bords en vitesse $(v^2 f_1)_{j,\frac{1}{2}} = (v^2 f_1)_{j,G+\frac{1}{2}} = K_{\frac{1}{2}} = K_{G+\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall j$ et les flux numériques suivants :

$$\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g} = -\frac{\alpha}{M_{2,j+\frac{1}{2}}} \left(v_g^5 \frac{\langle f_0 \rangle_{j+1,g} - \langle f_0 \rangle_{j,g}}{x_{j+1} - x_j} + 6 \frac{e E_{j+\frac{1}{2}} v_g^3 \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^{up}}{m_e} - \frac{e E_{j+\frac{1}{2}} (v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}^* - (v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g-\frac{1}{2}}^*}{m_e (v^2 \Delta v)_g} \right),$$

$$\langle v^2 f_1 \rangle_{j,g+\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{M_{2,i}} \left(\frac{(v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}^* - (v^6 f_0)_{j-\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x_j} - \frac{e E_j v_{g+\frac{1}{2}}^6 \langle f_0 \rangle_{j,g+1} - \langle f_0 \rangle_{j,g}}{m_e (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \right),$$

$$K_{g+\frac{1}{2}} = E_{g+\frac{1}{2}} f_{g+\frac{1}{2}} + D_{g+\frac{1}{2}} \frac{\langle f_0 \rangle_{g+1} - \langle f_0 \rangle_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}, \quad g = 1, \dots, G-1. \quad (3.39)$$

Les expressions auto-consistantes du champ électrique garantissant la condition de courant nul :

$$\frac{eE_{j+\frac{1}{2}}}{m_e} = -\frac{1}{\Delta x_j} \sum_{g=1}^G \left(\langle f_0 \rangle_{j+1,g} - \langle f_0 \rangle_{j,g} \right) v_g^5 (v^2 \Delta v)_g \Big/ \left(6 \sum_{g=1}^G \langle f_0 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^{up} v_g^3 (v^2 \Delta v)_g \right),$$

et :

$$\frac{eE_j}{m_e} = -\frac{1}{\Delta x_j} \sum_{g=1}^{G-1} \left((v^6 f_0)_{j+\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)_{j-\frac{1}{2},g+\frac{1}{2}} \right) (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} \Big/ \left(6 \sum_{g=1}^{G-1} \langle f_0 \rangle_{j,g} (v^5 \Delta v)_g + v_{G-\frac{1}{2}}^6 f_G \right).$$

Les expressions des potentiels de Rosenbluth sont :

$$E_{g+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^g 3(v^2 \Delta v)_j \langle f_0 \rangle_j - v_{g-\frac{1}{2}} f_G, \quad g = 1, \dots, G-1, \quad (3.40)$$

$$D_{g+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^g v_{j+\frac{1}{2}}^3 \sum_{k=j}^{G-1} f_{k+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{k+\frac{1}{2}}, \quad g = 1, \dots, G-1, \quad (3.41)$$

$$f_{g+\frac{1}{2}} = \delta_{g+\frac{1}{2}} \langle f_0 \rangle_g + (1 - \delta_{g+\frac{1}{2}}) \langle f_0 \rangle_{g+1}, \quad (3.42)$$

avec :

$$\delta_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha_{g+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\exp \alpha_{g+\frac{1}{2}} - 1}, \quad \alpha_{g+\frac{1}{2}} = \frac{E_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}{D_{g+\frac{1}{2}}} \quad (3.43)$$

L'interpolé de Chang et Cooper $f_{g+\frac{1}{2}}$ se calcule en résolvant le système $MD = f^\delta$ où M est une matrice tridiagonale, symétrique et définie positive ; et f^δ est un vecteur dépendant non-linéairement des $D_{g+\frac{1}{2}}$. On résout le système par une méthode du point fixe.

3.4 Discrétisation temporelle explicite et évaluation des contraintes CFL

Nous allons désormais traiter la discrétisation temporelle du système P1-diffusion. Nous présenterons le schéma explicite en temps et nous proposerons un critère de stabilité de type CFL sous la forme d'une contrainte sur le pas de temps. Nous ferons des simulations instationnaires pour vérifier si la limite Spitzer-Härm du modèle est bien retrouvée.

Le schéma explicite en temps s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\langle f_0 \rangle_{j,g}^{n+1} - \langle f_0 \rangle_{j,g}^n}{\Delta t} + \frac{\langle v f_1 \rangle_{j+\frac{1}{2},g}^n - \langle v f_1 \rangle_{j-\frac{1}{2},g}^n}{\Delta x_j} - \mathcal{E}_j^n \frac{(v^2 f_1)_{j,g+\frac{1}{2}}^n - (v^2 f_1)_{j,g-\frac{1}{2}}^n}{(v^2 \Delta v)_g} \\ = \frac{K_{g+\frac{1}{2}}^n - K_{g-\frac{1}{2}}^n}{(v^2 \Delta v)_g} \quad \text{pour } 1 \leq g \leq G, \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec $(v^2 f_1)_{j,\frac{1}{2}} = (v^2 f_1)_{j,G+\frac{1}{2}} = K_{\frac{1}{2}} = K_{G+\frac{1}{2}} = 0$.

Analyse de stabilité

Le modèle P1-diffusion étant non-linéaire et faisant intervenir de façon couplée tous les groupes de vitesses, cela rend l'analyse de stabilité difficile. Dans la limite où le champ électrique E est très faible, on peut se ramener à un problème de diffusion en espace, où le schéma s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} \langle f_0 \rangle_{j,g}^{n+1} &= \langle f_0 \rangle_{j,g} \left[1 - \frac{\alpha v_g^5 \Delta t}{\Delta x_j} \left(\frac{1}{(n_e)_{j+\frac{1}{2}} \Delta x_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(n_e)_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_{j-\frac{1}{2}}} \right) \right] \\ &+ \langle f_0 \rangle_{j+1,g} \left[\frac{\alpha \Delta t}{(n_e)_{j+\frac{1}{2}} \Delta x_j} \frac{v_g^5}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \right] \\ &+ \langle f_0 \rangle_{j-1,g} \left[\frac{\alpha \Delta t}{(n_e)_{j-\frac{1}{2}} \Delta x_j} \frac{v_g^5}{\Delta x_{j-\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Si on suppose le maillage uniforme $\Delta x_j = \Delta x_{j+\frac{1}{2}} = \Delta x$ et la densité homogène $(n_e)_j = (n_e)_{j+\frac{1}{2}} = n_e$, le schéma est linéaire et à coefficients constants. L'analyse de Von-Neumann donne alors le coefficient d'amplification suivant :

$$\frac{\langle f_0 \rangle_{j,g}^{n+1}}{\langle f_0 \rangle_{j,g}^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D_g [1 - \cos(\Delta x)] \quad \text{avec} \quad D_g = \frac{\alpha v_g^5}{n_e} > 0.$$

On en déduit que $\langle f_0 \rangle_{j,g}^n$ est L^2 -stable si :

$$\left| \frac{\langle f_0 \rangle_{j,g}^{n+1}}{\langle f_0 \rangle_{j,g}^n} \right| < 1 \quad \iff \quad D_g \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 1.$$

Le coefficient D_g croît en v_g^5 . Le pas de temps CFL est donc contraint par le groupe de vitesse maximal D_G . Il faut que $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{D_G}$ pour que f_0 soit uniformément L_2 -stable pour tous les groupes de vitesse dans la limite $E = 0$. Le caractère parabolique de cette condition CFL rend ce critère de stabilité très contraignant sur le pas de temps. À cela on ajoute la dépendance en v^5 , rendant le critère encore plus contraignant pour les groupes de vitesse élevée. La situation physique où le plasma est dit "sous-critique" dans la zone d'ablation de la cavité FCI risque de rendre impraticable les simulations avec schéma temporel explicite, puisque le plasma y est peu dense (n_e faible) et chaud (v_G élevé pour modéliser la distribution). Pour cette raison, nous allons étudier l'implicitation totale du schéma dans le chapitre suivant. Mais avant cela, nous allons réaliser des tests élémentaires de vérification du schéma explicite dans le présent chapitre.

3.5 Tests élémentaires de vérification

Bien que le schéma explicite du modèle P1-diffusion ne remplisse pas tous les objectifs demandés, il permet de vérifier numériquement si le modèle P1-diffusion capture bien la limite de Spitzer-Härm correspondant au régime fortement collisionnel. Nous avons donc implémenté le schéma numérique dans un code d'étude 1D espace et 1D vitesse, écrit en C++, afin de réaliser quelques tests numériques de vérification, ainsi que des observations physiques qualitatives. Nous réservons l'étude de validation physique au chapitre 5, où nous évaluerons le schéma implicite du modèle P1-Diffusion.

3.5.1 Cas-test de Rosenbluth

Dans un premier temps, nous allons tester le schéma de discrétisation de l'opérateur de collisions \mathcal{C}_{ee} . Cet opérateur contrôle le retour à l'équilibre local de la distribution : le test classique "0D" (indépendant de x) de Rosenbluth permet de mesurer ce retour à l'équilibre. Ce test est extrait des travaux de Rosenbluth, MacDonald et Chuck [45], il est également réalisé par C. Buet et K-C. Le Thanh dans [8] dont nous reproduisons certains résultats. La distribution initiale est une gaussienne centrée en $v = 0.3 v_{th}$ donnée par la formule suivante :

$$\bar{f}_0(t' = 0, \xi) = 0.01 \exp \left[-10 \left(\frac{\xi - 0.3}{0.3} \right)^2 \right], \quad (3.45)$$

La distribution \bar{f}_0 est sans dimension. En effet le test se fait sous forme adimensionnée, avec, conformément à [48] l'adimensionnement suivant :

$$\bar{f}_0(t, v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_e}{u_e^3 \mathcal{F}_2} \left[\frac{\mathcal{F}_4}{\mathcal{F}_2} \right]^{3/2} f_0(t', \xi), \quad (3.46)$$

$$v = \left[\frac{\mathcal{F}_4}{\mathcal{F}_2} \right]^{1/2} \xi \quad \text{et} \quad t = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\mathcal{F}_2} \left(\frac{\mathcal{F}_4}{\mathcal{F}_2} \right)^{\frac{3}{2}} t', \quad (3.47)$$

$$\mathcal{F}_2 = \int_0^\infty f_0(t=0, \xi) \xi^2 d\xi, \quad \mathcal{F}_4 = \int_0^\infty f_0(t=0, \xi) \xi^4 d\xi. \quad (3.48)$$

On trace ensuite le profil de la distribution aux temps respectifs $t = \tau_{ee}$, $t = 2\tau_{ee}$ et $t = 10\tau_{ee}$, τ_{ee} (figure 3.3) étant le temps caractéristique collisionnel, donné par :

$$\tau_{ee} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\mathcal{F}_2} \left(\frac{\mathcal{F}_4}{\mathcal{F}_2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.49)$$

On retrouve bien les résultats de C. Buet et K-C. Le Thanh dans [8] sur les schémas \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_3 . On trace également l'entropie et le moment d'ordre 4 de la distribution en fonction du temps figure 3.4. On retrouve encore bien les résultats attendus.

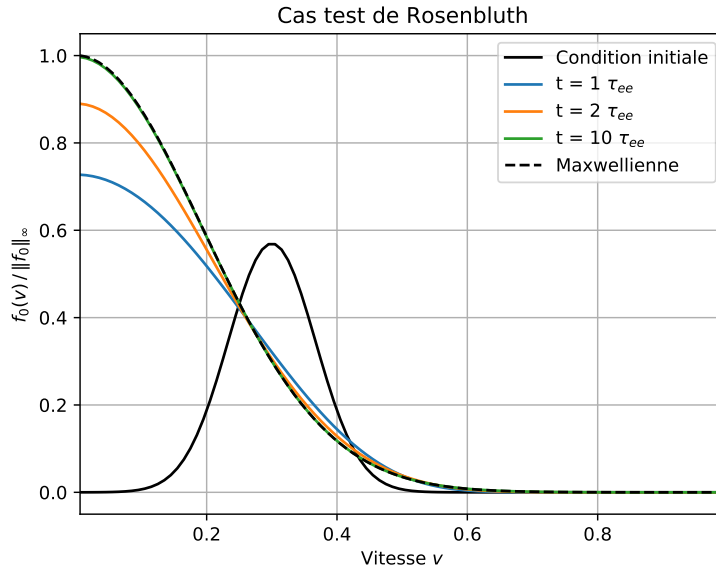


FIGURE 3.3 – Cas-test de Rosenbluth, profils de la distribution électronique à $t = \tau_{ee}$ (bleu), $t = 2\tau_{ee}$ (orange) et $t = 10\tau_{ee}$ (vert). Profil initial de Rosenbluth à $t = 0$ (noir). Équilibre maxwellien (pointillés noirs).

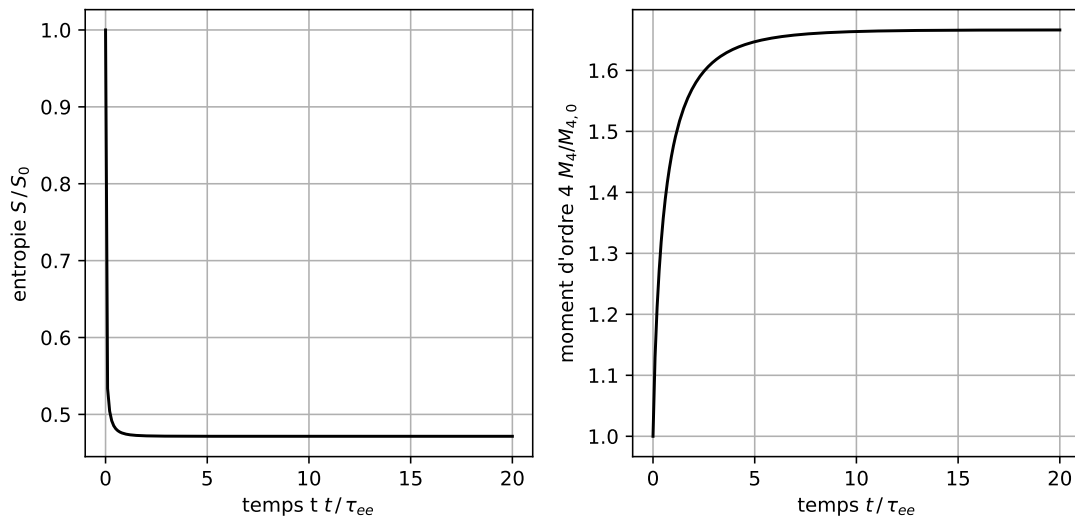


FIGURE 3.4 – Cas-test de Rosenbluth. À gauche, Entropie adimensionnée en fonction du temps t exprimé en temps collisionnels τ_{ee} donné par (3.49). À droite Moment d'ordre 4 de f_0 adimensionné en fonction du temps t exprimé en temps collisionnels τ_{ee} donné par (3.49).

On montre dans le tableau 3.1 que la masse et l'énergie sont bien conservées tout au long de la simulation :

Dans les chapitres suivants, nous testerons des variantes implicites de ce schéma numérique, notamment le schéma implicite contracté, ainsi qu'une variante micro-macro avec l'implicitation totale du terme linéaire. Maintenant que nous avons discrétisé et testé le

temps t/τ_{ee}	$t = 1$	$t = 2$	$t = 10$
mom0	0.0001589084943277	0.000158908495926	0.0001589085225957
err. rel.	$7.47541023881e - 08$	$8.48178981843e - 08$	$2.52642503745e - 07$
mom2	$1.78089767642e - 05$	$1.780898165855e - 05$	$1.780897790576e - 05$
err. rel.	$2.748247542774e - 07$	$3.72957153340e - 07$	$6.41004759865e - 08$

TABLEAU 3.1 – conservation de la masse et de l'énergie

terme de collisions, nous allons pouvoir tester la limite fortement collisionnelle du modèle P1-diffusion.

3.5.2 Étude instationnaire de convergence vers la limite de Spitzer-Härm

Commençons par présenter la condition initiale du cas test "Q1D", le but étant de calculer un flux de chaleur, la condition initiale consiste en un gradient de température. Ce gradient est donné par un profil en tangente hyperbolique de la température, dont la raideur est paramétrable. Les températures sont données en Kelvins (K) et les distances en centimètres (cm). La densité électronique est homogène et égale à $n_e = 5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, et la valeur du logarithme coulombien est prise constante : pour $Z = 2$, on a $\ln \Lambda_{ei} = 7.09433$. Le profil initial de T_e est :

$$T_{e,0}(x) = \left[0.575 - 0.425 \tanh \left(\frac{x - 0.045}{0.005} \right) \right] \times 1.16045 \cdot 10^{+7} \text{ K} .$$

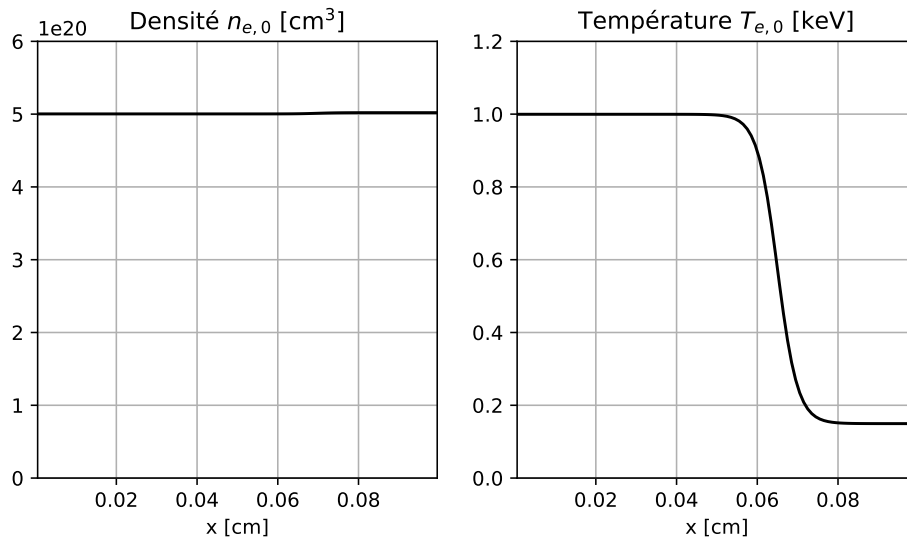


FIGURE 3.5 – Profils initiaux de densité et de température du cas test Q1D

Dans la limite locale, f_0 est une maxwellienne et le modèle P1-diffusion doit converger vers le modèle de transport local de chaleur de Spitzer-Härm. On peut directement résoudre numériquement ce problème de diffusion non-linéaire en température pour réaliser des vérifications. Les résultats sont montrés Figure 3.6.

On voit que le profil de température converge vers l'unique solution stationnaire du problème de Cauchy avec conditions aux limites de Dirichlet. Cette solution servira de référence par la suite pour l'analyse du système P1-diffusion dans la limite fortement collisionnelle.

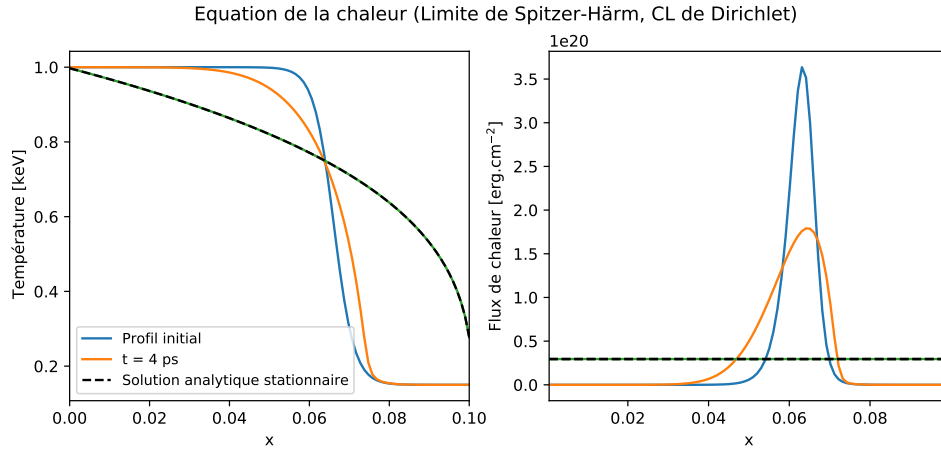


FIGURE 3.6 – Résolution numérique de l'équation de la chaleur avec flux de Spitzer-Härm, solveur "Radau" de la librairie Scipy, discrétisation centrée, 100 mailles en espace.

Présentation des simulations

On réalise deux simulations ne différant que dans la fréquence de collision entre électrons, paramétrée ici par le logarithme coulombien que l'on fixe arbitrairement. La première simulation est non-collisionnelle avec $\ln \Lambda_{ee} = 0$ et la seconde est fortement collisionnelle avec $\ln \Lambda_{ee} = 1000$. Pour chaque simulation, on a fait le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre $t = 3 ps$, résumé dans le tableau 3.2.

Simulation	r0	r1
log coulombien $\ln \Lambda_{ee}$	0	1000
Nombre d'itérations	4123	2040645

TABLEAU 3.2 – log coulombien et nombre d'itérations des simulations r0 et r1

Les quantités extensives discrètes suivantes sont calculées pour vérifier les propriétés de conservation :

$$N_s [cm^{-2}] = \sum_{j=0}^N \sum_{g=0}^G \Delta x_j (v^2 \Delta v)_g \langle f_0 \rangle_{j,g} ,$$

$$E_s [erg.cm^{-2}] = \frac{1}{2} m_e \sum_{j=0}^N \sum_{g=0}^G \Delta x_j (v^2 \Delta v)_g \langle f_0 \rangle_{j,g} .$$

On résume dans les tableaux 3.3 et 3.4 les évaluations numériques des quantités conservatives :

La simulation fortement collisionnelle a nécessité beaucoup plus d'itérations pour arriver à $t = 3 ps$: en effet, l'augmentation de la fréquence de collision électron-électron entraîne l'augmentation de la contrainte CFL sur le pas de temps explicite.

Comparaison des données

Si on compare dans un premier temps les profils de température issus d'un calcul cinétique (système P1-diffusion) dans la limite collisionnelle et non collisionnelle, avec le

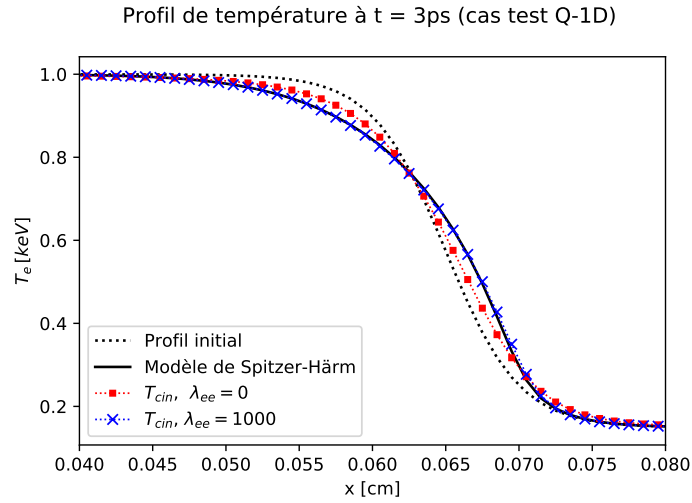
temps t (ps)	0	1	2	3
itérations	0	1395	2766	4123
N_s [cm^{-2}]	$5.0081948e + 19$	$5.0081951e + 19$	$5.0081946e + 19$	$5.0081946e + 19$
écart relatif	$0.00000000e + 00$	$5.99018232e - 08$	$3.99345490e - 08$	$3.99345490e - 08$
E_s [$erg.cm^{-2}$]	$8.44358512e + 10$	$8.44357901e + 10$	$8.44353219e + 10$	$8.44344643e + 10$
écart relatif	$0.00000000e + 00$	$7.22832531e - 07$	$6.26814478e - 06$	$1.64255601e - 05$

TABLEAU 3.3 – conservation de N et E dans la simulation r0

temps t (ps)	0	1	2	3
Itérations	0	682508	1362908	2040645
N_s [cm^{-2}]	$5.0081948e + 19$	$5.0081947e + 19$	$5.0081952e + 19$	$5.0081948e + 19$
Écart relatif	$0.00000000e + 00$	$1.99672745e - 08$	$7.98690975e - 08$	$0.00000000e + 00$
E_s [$erg.cm^{-2}$]	$8.44358512e + 10$	$8.44358348e + 10$	$8.44357195e + 10$	$8.44356827e + 10$
Écart relatif	$0.00000000e + 00$	$1.94193814e - 07$	$1.55894479e - 06$	$1.99588087e - 06$

TABLEAU 3.4 – conservation de N et E dans la simulation r1

profil de température donné par le calcul de Spitzer-Härm au temps $t = 3$ ps (figure 3.7), on constate que d'une part le profil de température a significativement évolué dans tous les cas et que d'autre part, la limite fortement collisionnelle correspond bien au calcul de Spitzer-Härm.

FIGURE 3.7 – Profils de température à $t = 3$ ps, en carrés rouge sans collisions électroniques, en croix bleues dans la limite fortement collisionnelle, et en noir le profil de température donné par un calcul Spitzer-Härm

À partir de la solution f_0 de la simulation cinétique, on compare maintenant, figure 3.8, le flux de chaleur cinétique $q_e = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) v f_1 v^2 dv$, et sa contribution de Spitzer-Härm $q_e^M = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) v f_1^M v^2 dv$. Cette comparaison est encore réalisée à $t = 3$ ps.

On constate d'abord que dans le cas non-collisionnel, le profil de flux de chaleur cinétique est très éloigné du profil du flux de Spitzer-Härm (nous verrons que la distribution est en effet très éloignée de la maxwellienne dans ce cas-là). Dans la limite fortement collisionnelle, les flux de chaleur cinétiques et Spitzer-Härm sont plus proches mais un écart significatif subsiste entre les deux. Nous allons chercher l'origine de l'écart constaté figure

3.8, dans la limite fortement collisionnelle, entre le flux de chaleur cinétique et le flux de chaleur de Spitzer-Härm.

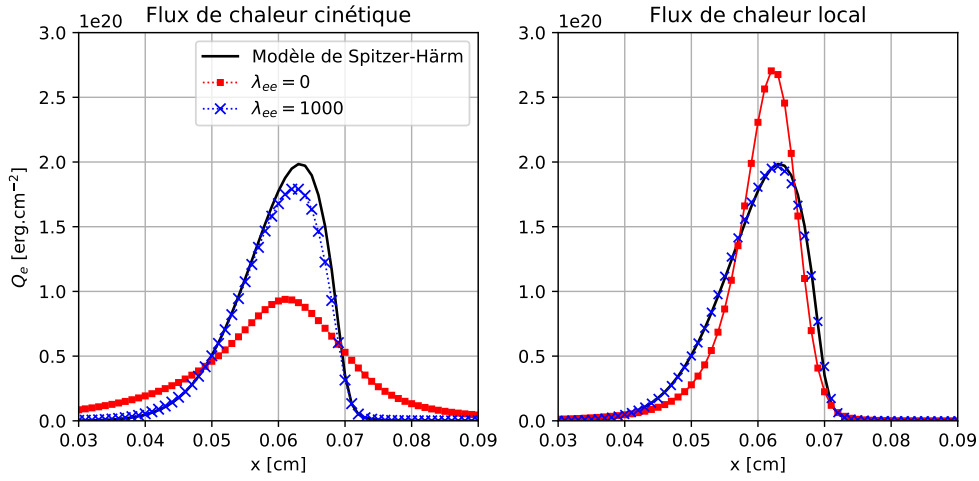


FIGURE 3.8 – Profils de flux de chaleur cinétique (à gauche) et de flux de chaleur de Spitzer-Härm (à droite), à $t = 3 ps$ Comparés à la solution de Spitzer-Härm.

Nous allons étudier les effets liés à la discrétisation spatiale des termes décentrés amont, à travers l'analyse du champ électrique. En effet, pour que le flux de chaleur cinétique converge vers la limite de Spitzer-Härm, il faut nécessairement que le champ électrique auto-consistant converge également vers la limite de Spitzer-Härm. On trace alors le champ électrique cinétique ainsi que sa limite théorique dans le modèle de Spitzer-Härm (figure 3.9). On constate, comme pour le flux de chaleur, que dans la limite fortement collisionnelle, un écart s'observe au niveau du "pic" du champ électrique, mais que la limite Spitzer-Härm est bien retrouvée dans tout le reste du domaine.

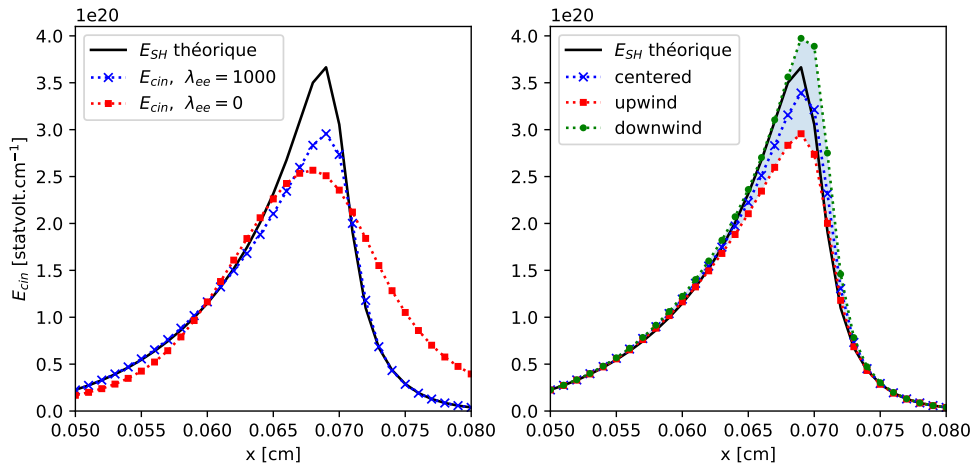


FIGURE 3.9 – (à gauche) Profils de champ électrique à $t = 3 ps$, en trait noir le profil théorique de Spitzer-Härm, en carrés rouges le profil calculé par le code P1diff dans le cas non-collisionnel, et en croix bleues dans la limite fortement collisionnelle. (à droite) Profils de champ électrique à $t = 3 ps$ et limite fortement collisionnelle pour différentes discrétisations spatiales de E_{cin} pour $\lambda = 1000$.

Afin de mettre en évidence les effets de la discrétisation spatiale décentrée, on calcule

à partir des moments d'ordre 5 et 7 de la fonction de distribution, le champ électrique centré, décentré amont et aval. On constate une forte sensibilité du champ électrique au type de schéma spatial. Pour rendre compte de l'équilibre local, l'ensemble des vitesses doit restituer la solution d'équilibre, or il existe des ordres de grandeur entre les valeurs de distribution les plus hautes et les plus basses. La sensibilité au choix de décentrement est localisée aux vitesses les plus hautes. Nous proposerons une solution pour s'affranchir de ce problème au chapitre suivant, avec une reformulation Micro-Macro du modèle P1-Diffusion, qui permet, par construction, de capturer la solution en régime d'équilibre local (ETL).

3.6 Conclusion

On a montré que le modèle P1-diffusion capture bien la limite Spitzer-Härm dans le cas fortement collisionnel, mais que la précision numérique du flux de chaleur cinétique dans la limite locale, est sensible à la discrétisation spatiale, et devrait être améliorée, via une discrétisation capturant l'équilibre. De plus, le calcul dans la limite fortement collisionnelle s'est heurté à une forte contrainte CFL (parabolique) sur le pas de temps, ce qui nous conduit à étudier l'implication du schéma numérique. Nous avons vu que les écarts à la limite de Spitzer-Härm peuvent être dûs à l'erreur de troncature liée à la discrétisation spatiale. Cet aspect pourra être amélioré avec une reformulation Micro-Macro pour une meilleure capture de ce régime limite, notamment dans l'optique de diminuer le nombre de mailles. Nous aborderons dans le chapitre suivant le couplage du modèle P1-Diffusion avec les équations fluides et sa discrétisation implicite inconditionnellement stable.

CHAPITRE 4

Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion

Sommaire

4.1	Introduction	83
4.2	Reformulation du système P1-Diffusion Micro-Macro	84
	4.2.1 Reformulation des flux cinétiques	85
	4.2.2 Reformulation des flux avec projecteurs de courant nul	87
4.3	Discrétisation en Vitesse	89
	4.3.1 Écriture sous forme faible	89
	4.3.2 Discrétisation multigroupe	89
4.4	Discrétisation Temps-Espace	100
	4.4.1 Introduction du schéma implicite itératif sur l'exemple simple d'une équation d'advection diffusion	100
	4.4.2 Discrétisation temps-espace des opérateurs de diffusion dans les équations Micro et Macro	108
	4.4.3 Schéma implicite contracté pour l'opérateur de collisions de Fokker-Planck-Landau	114
4.5	Tests élémentaires de vérification	116
4.6	Conclusion	118

4.1 Introduction

Le schéma explicite présenté au chapitre précédent souffre d'une contrainte de stabilité trop contraignante, rendant certains calculs impraticables (notamment en limite stationnaire). Pour cette raison, dans ce chapitre, nous allons proposer un schéma numérique totalement implicite pour résoudre le système couplé fluide/cinétique associé au modèle P1-diffusion. Dans un premier temps, les objectifs de la discrétisation sont définis. On résume en quelques points les principales contraintes que l'on se donne pour la discrétisation de la fermeture non-locale :

- le schéma numérique doit préserver au niveau discret les propriétés de conservation,
- le schéma numérique doit être inconditionnellement stable,
- le schéma numérique doit préserver le régime asymptotique de Spitzer-Härm sans générer de surcoût algorithmique dans cette limite,

- le schéma doit permettre un couplage fluide/cinétique consistant, avec un calcul cohérent des quantités fluides et des moments de la distribution,
- le schéma numérique doit pouvoir être appliqués à des configurations 2D-3D espace sur des maillages non-structurés.

Le schéma numérique choisi est basé sur une discrétisation des équations micro-macro SM(??), et une discrétisation implicite itérative en espace et en temps que nous illustrerons, dans un premier temps et par souci de pédagogie, à l'aide d'un exemple simple : l'advection-diffusion à coefficients constants. La discrétisation implicite itérative est inspirée du transfert radiatif [4], où la méthode est appliquée à des maillages 2D non-structurés. La capacité du schéma à pouvoir fonctionner sur des maillages non-structurés nous intéresse particulièrement dans le cadre du couplage aux équations de la MHD Lagrangienne, souvent discrétisées sur maillages non-structurés. La méthode implicite itérative choisie consiste à discrétiser :

- en espace, la diffusion de façon centrée et l'advection de façon décentrée amont,
- en temps, les composantes diagonales de façon implicite, et les composantes extradiagonales de façon explicite.

Un algorithme de point fixe est mis en place afin de converger vers la limite totalement implicite et consistante du schéma. Pour le modèle P1-diffusion, la discrétisation implicite itérative consiste dans un premier temps à discrétiser les composantes diffusives de façon centrée. Les composantes restantes, dont le signe est contrôlé par le champ électrique E , sont assimilées à de l'advection spatiale et sont discrétisées de façon décentrée amont. Dans un second temps, les termes diagonaux en espace sont implicités et une méthode itérative de type point fixe est mise en place afin de converger vers un schéma totalement implicite. Nous devons opérer un travail de réécriture des flux cinétiques afin d'appliquer cette stratégie de discrétisation. L'implication de l'opérateur de collisions par un schéma implicite contracté [8] sera également abordée. L'originalité de la discrétisation choisie pour l'opérateur de collision (et des propriétés de stabilité constatées) réside dans le choix des variables de discrétisation : les variables choisies étant celles de la décomposition Micro-Macro.

4.2 Reformulation du système P1-Diffusion Micro-Macro

On rappelle la reformulation Micro-Macro du système P1-Diffusion faite en Chapitre 1, consistant à exprimer, les équations d'évolution des quantités Macro et Micro, définies à partir du noyau de l'opérateur de collision. L'état d'équilibre de l'opérateur de collisions électron-électron (1.67) est une Maxwellienne d'expression :

$$M(v) = n_e \left(\frac{2\pi k_B T_e}{m_e} \right)^{-3/2} \exp \left(- \frac{m_e v^2}{k_B T_e} \right), \quad (4.1)$$

Cette expression représente la partie isotrope d'une distribution maxwellienne centrée en 0, (car exprimée dans le repère des électrons). Elle s'exprime à partir de la densité électronique n_e , la température T_e et doit être compatible avec les moments de f_0 : $n_e = \langle f_0 \rangle$ et $3n_e k_B T_e / m_e = \langle v^2 f_0 \rangle$.

Remarque 4.2.1. Dans cette étude, on suppose la vitesse des ions et le champ magnétique nuls. On a donc équivalence entre les différents repères de vitesse des électrons, des ions et du laboratoire. Mais dans la perspective d'ajouter l'hydrodynamique et le champ magnétique, le repère de choix est celui des électrons puisqu'il permet de réduire la méthode Micro-Macro à la partie isotrope de la distribution en exprimant un état d'équilibre isotrope (4.1), sans faire appel à des harmoniques sphériques d'ordre supérieur [37].

Les projections Π_0 et $\mathbb{I} - \Pi_0$ définies en Chapitre 1, sont appliquées à l'équation (1.64). Le modèle P1-Diffusion Micro-Macro est donné en termes des variables de température T_e et de composante non-locale de la distribution anisotrope g_0 :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{3n_e k_B}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_0 + \nabla_x \cdot (v f_1) - \bar{K} \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1) \right] = \mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \quad (4.4)$$

$$-\frac{Z_i}{3Y_{ei}} \frac{v^3}{n_e} \left(v \nabla_x f_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right) = f_1, \quad (4.5)$$

avec le linéarisé de l'opérateur de collisions électron-électron :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) &= Y_{ee} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty dv' v' g(v, v') \left(M(v') \frac{1}{v} \frac{\partial g_0(v)}{\partial v} - M(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial g_0(v')}{\partial v'} \right) \\ &+ Y_{ee} \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty dv' v' g(v, v') \left(g_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial M(v)}{\partial v} - g_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial M(v')}{\partial v'} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2.1 Reformulation des flux cinétiques

Dans le chapitre 2, nous avons reformulé les flux cinétiques en séparant les contributions locales et non-locales, puis en exprimant les contributions non-locales en flux d'advection et de diffusion généralisées à courant nul. La contribution locale du flux cinétique f_1 est donnée par :

$$f_1^M = - \left[\frac{n_e}{3Y_{ei}n_i} \right] \left[-\frac{3}{2} + \left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \right] v^4 \frac{M}{n_e} \frac{\nabla_x T_e}{T_e}. \quad (4.7)$$

La composante restante $g_1 = f_1 - f_1^M$, vérifie les relations :

$$\begin{cases} v \nabla_x g_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}^m \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial g_0}{\partial v} = -\frac{3Y_{ei}n_i}{v^3} g_1, \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^M + \mathbf{E}^m, \\ \mathbf{E}^m = -\mathbf{E}^M \left[\frac{\langle g_0 v^3 \rangle}{\langle M v^3 \rangle + \langle g_0 v^3 \rangle} \right] - \frac{1}{6} \frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle + \langle g_0 v^3 \rangle}, \end{cases} \quad (4.8)$$

où le champ électrique à été décomposé en une contribution Macro (Spitzer-Härm) et une contribution Micro, donnée ici par la condition de courant nul $\langle v g_1 \rangle = 0$. Le champ électrique Micro, \mathbf{E}^m , et le flux cinétique non-local g_1 sont ensuite encore décomposés pour exprimer les flux d'advection et de diffusion généralisées en espace et à courant nul.

Expression du flux de diffusion généralisée en espace

Le flux spatial vf_1 de l'équation (4.4) possède une composante diffusive, pouvant être explicitement exprimée, $vf_1 = -\frac{v^5}{33Y_{ei}n_i}\nabla_x g_0 + \dots$. Cependant, tel quel, ce flux ne satisfait pas la condition de courant nul. Une projection de ce flux sur une contribution de courant nul est réalisée avec une décomposition appropriée du champ électrique micro E^m . Ces contributions au flux non-local sont notées $g_1 = h_1 + l_1$, où h_1 contribue à la diffusion généralisée :

$$v\nabla_x g_0 - \frac{e}{m_e} E^{m,m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\frac{3Y_{ei}n_i}{v^3} h_1, \quad (4.9)$$

avec :

$$E^{m,m} = -\frac{1}{6} \frac{m_e}{e} \frac{\nabla_x \langle g_0 v^5 \rangle}{\langle M v^3 \rangle + \langle g_0 v^3 \rangle}. \quad (4.10)$$

La condition de courant nul $\langle v h_1 \rangle = 0$ permet d'exprimer une contribution Micro spécifique du champ électrique, $E^{m,m}$. Le flux complémentaire s'écrit :

$$-\frac{e}{m_e} E^{m,M} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{e}{m_e} E^M \frac{\partial g_0}{\partial v} = -\frac{3Y_{ei}n_i}{v^3} l_1, \quad (4.11)$$

avec :

$$E^{m,M} = -E^M \left[\frac{\langle g_0 v^3 \rangle}{\langle M v^3 \rangle + \langle g_0 v^3 \rangle} \right], \quad (4.12)$$

et la condition de courant nul $\langle v l_1 \rangle = 0$, exprimant une contribution au champ électrique $E^{m,M} = E^m - E^{m,m}$.

On demande aux flux vh_1 et vl_1 de vérifier la condition de courant nul afin de préparer une discrétisation permettant de conserver cette propriété en faisant apparaître des projections que nous expliciterons par la suite.

Expression du flux de diffusion généralisée en vitesse

De manière similaire, le flux en vitesse $v^2 f_1$ de l'équation (4.4) comprend une contribution diffusive, exprimée de façon explicite par $v^2 f_1 = \frac{v^5}{33Y_{ei}n_i} \frac{eE}{m_e} \frac{\partial g_0}{\partial v} + \dots$. La projection de cette contribution sur les flux de courant nul est réalisée par la décomposition suivante $g_1 = b_1 + d_1$, où b_1 contribue à la diffusion généralisée en vitesse :

$$\left[-\frac{e}{m_e} E \frac{\partial g_0}{\partial v} + \frac{\langle g_0 v^3 \rangle}{\langle g_0 v^3 \rangle + \langle M v^3 \rangle} v \nabla_x g_0 - \frac{e}{m_e} E^{m,M} \frac{\partial M}{\partial v} \right] = -3Y_{ei} \frac{n_i}{v^3} b_1. \quad (4.13)$$

Le flux complémentaire s'écrit

$$\left[\frac{\langle M v^3 \rangle}{\langle g_0 v^3 \rangle + \langle M v^3 \rangle} v \nabla_x g_0 - \frac{e}{m_e} E^{m,m} \frac{\partial M}{\partial v} \right] = -3Y_{ei} \frac{n_i}{v^3} d_1. \quad (4.14)$$

Les deux flux vérifient la condition de courant nul $\langle v b_1 \rangle = 0$, $\langle v d_1 \rangle = 0$.

Ré-interprétation des flux restants en advection généralisée en espace

La contribution en divergence spatiale $\nabla_x \cdot (v l_1)$, dans l'équation (4.4), est interprétée comme un flux d'advection généralisée en espace. La partie "explicite" de cette contribution d'advection s'écrit $\frac{18}{3Y_{ei}n_i} \frac{eE^M}{m_e} v^4 \nabla_x g_0$.

Remarque 4.2.2. On a utilisé la relation suivante $v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} = -6v^3 g_0 + \frac{1}{v^2} \frac{\partial (v^6 g_0)}{\partial v}$ pour rendre la contribution d'advection explicite (en opposition aux termes de dérivées en coordonnées d'espace et de vitesse croisées).

De façon similaire, la contribution en divergence en vitesse $\frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 d_1) \right]$, de l'équation (4.4), est également interprétée comme un flux d'advection généralisée en espace. La partie explicite de cette contribution d'advection s'écrit $-\frac{15}{3Y_{ei}n_i} \frac{\langle Mv^3 \rangle}{\langle g_0 v^3 \rangle + \langle Mv^3 \rangle} v^4 \nabla_x g_0$.

4.2.2 Reformulation des flux avec projecteurs de courant nul

On définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \Pi_{f_0} : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \frac{v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\left\langle v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right\rangle} \langle \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Pi_M : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \frac{v^4 \frac{\partial M}{\partial v}}{\left\langle v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle} \langle \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_M : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \frac{v \left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)}{\left\langle v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle} \left\langle \frac{\varphi}{v} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{g_0} : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \frac{v \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)}{\left\langle v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right\rangle} \left\langle \frac{\varphi}{v} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les flux cinétiques, exprimés par les harmoniques d'ordre 1 f_1 dans le système Micro-Macro (4.3)-(4.4)-(4.5) sont décomposés en somme de contributions à courant nul $f_1 = f_1^M + g_1$, $g_1 = h_1 + l_1 = b_1 + d_1$:

$$v f_1^M = -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \Pi_M \left(v^5 \nabla_x M \right), \quad (4.19)$$

$$v h_1 = -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \Pi_{f_0} \left(v^5 \nabla_x g_0 \right), \quad (4.20)$$

$$v l_1 = \frac{1}{3Y_{ei}n_i} \left[\frac{e}{m_e} E^M \right] \frac{\langle Mv^3 \rangle}{\langle Mv^3 \rangle + \langle g_0 v^3 \rangle} \Pi_M \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right), \quad (4.21)$$

$$v^2 f_1^M = -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \hat{\Pi}_M \left(v^6 \nabla_x M \right), \quad (4.22)$$

$$v^2 b_1 = \frac{6}{3Y_{ei}n_i} \langle g_0 v^3 \rangle \hat{\Pi}_{g_0} \left(v \frac{e \delta E}{m_e} \right), \quad (4.23)$$

$$v^2 d_1 = -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \frac{\langle Mv^3 \rangle}{\langle Mv^3 \rangle + \langle g_0v^3 \rangle} \hat{\Pi}_M \left(v^6 \nabla_x g_0 \right) . \quad (4.24)$$

où chaque contribution de g_1 permet de générer un terme d'advection généralisée (l_1 and d_1) ou de diffusion généralisée (h_1 et b_1) dans l'équation Micro (4.4). Ici, δE est une contribution cinétique au champ électrique, satisfaisant $E = \langle \delta E \rangle$. Elle est définie par :

$$\frac{e\delta E}{m_e} = \frac{v^5 \nabla_x g_0 + \left[\frac{eE^M}{m_e} \right] v^4 \frac{\partial M}{\partial v}}{\left\langle v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle + \left\langle v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right\rangle} . \quad (4.25)$$

Proposition 4.2.3. *Les opérateurs Π_M et Π_{f_0} , définis dans (4.15) et (4.16), sont des projecteurs et vérifient les relations de courant nul $\langle \Pi_{f_0}(\varphi) \rangle = \langle \Pi_M(\varphi) \rangle = 0$, $\forall \varphi \in L_M^2$. De la même manière, les opérateurs $\hat{\Pi}_M$ et $\hat{\Pi}_{g_0}$, définis dans (4.17) et (4.18), respectivement, sont des projecteurs et vérifient les relations de courant nul $\left\langle \frac{\hat{\Pi}_{f_0}(\varphi)}{v} \right\rangle = \left\langle \frac{\hat{\Pi}_M(\varphi)}{v} \right\rangle = 0$, $\forall \varphi \in L_M^2$.*

Démonstration. Les relations $\Pi_{f_0}^2 = \Pi_{f_0}$, $\Pi_M^2 = \Pi_M$, $\hat{\Pi}_M^2 = \hat{\Pi}_M$ et $\hat{\Pi}_{g_0}^2 = \hat{\Pi}_{g_0}$ sont vérifiées. ■

Le système Micro-Macro peut alors être reformulé comme

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e = 0 , \quad (4.26)$$

$$\frac{3n_e}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v \left(f_1^M + h_1 + l_1 \right) \right\rangle = 0 , \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_0 + \Pi_N \left(\nabla_x \cdot \left[v \left(f_1^M + h_1 + l_1 \right) \right] \right) \\ - \frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \left(f_1^M + b_1 + d_1 \right) \right) \right] \\ = \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right] . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nous avons introduit l'opérateur

$$\begin{aligned} \Pi_N : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \bar{K} \left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) \varphi \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Remarque 4.2.4. Seules les contributions h_1 et l_1 contribuent au flux de chaleur non-local. Il est important de le prendre en compte pour la cohérence de la discrétisation des termes de couplage.

Remarque 4.2.5. L'équation (4.28) peut également être réécrite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) g_0 \right] + \Pi_T \left(\nabla_x \cdot \left[\left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) v \left(f_1^M + h_1 + l_1 \right) \right] \right) \\ - \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) \frac{e}{m_e} E \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \left(f_1^M + b_1 + d_1 \right) \right) \right] \\ = \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right] , \end{aligned} \quad (4.30)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_T : L_M^2 &\rightarrow L_M^2 \\ \varphi &\mapsto \varphi - \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) \overline{K} \langle \varphi \rangle . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Proposition 4.2.6. *L'opérateur Π_N est un projecteur.*

Démonstration. Comme $\langle \overline{K} \rangle = 0$ et $\langle \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) \overline{K} \rangle = 1$, on a $\Pi_N^2 = \Pi_N$. \blacksquare

4.3 Discrétisation en Vitesse

Dans cette section nous allons étudier la discrétisation en vitesse du système P1-Diffusion Micro-Macro. Tout comme dans le chapitre 2 pour la discrétisation explicite du système P1-Diffusion, nous allons commencer par la semi-discrétisation en vitesse en réécrivant les équations sous forme faible.

4.3.1 Écriture sous forme faible

Proposition 4.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction test suffisamment régulière pour que les équations qui suivent puissent être définies. L'équation Micro (4.28) peut être réécrite, après intégration par partie, de la façon suivante*

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} g_0 \right] \varphi v^2 dv + \int_0^{+\infty} \nabla_x \cdot \left[v \left(f_1^M + h_1 + l_1 \right) \right] \Pi_N^*(\varphi) v^2 dv \\ &= -\frac{eE}{m_e} \cdot \int_0^{+\infty} \left[v^2 \left(f_1^M + b_1 + d_1 \right) \right] \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} \right) v dv \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right] \varphi v^2 dv , \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_N^* : L^2([0, \infty[; Mv^2 dv) &\rightarrow L^2([0, \infty[; Mv^2 dv) \\ \varphi &\mapsto \varphi - \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right) \langle \overline{K} \varphi \rangle , \end{aligned} \quad (4.33)$$

le projecteur adjoint de Π_N .

La contribution isotrope des collisions électron-électron se réécrit également sous la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right] \varphi v^2 dv = \\ &-\frac{2\pi}{3} Y_{ee} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} - \frac{1}{v'} \frac{\partial \varphi(v')}{\partial v'} \right) g(v, v') \left(g_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial g_0(v)}{\partial v} - g_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial g_0(v')}{\partial v'} \right) v' dv' v dv \\ &-\frac{2\pi}{3} Y_{ee} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} - \frac{1}{v'} \frac{\partial \varphi(v')}{\partial v'} \right) g(v, v') \left(M(v') \frac{1}{v} \frac{\partial g_0(v)}{\partial v} - M(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial g_0(v')}{\partial v'} \right) v' dv' v dv \\ &-\frac{2\pi}{3} Y_{ee} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} - \frac{1}{v'} \frac{\partial \varphi(v')}{\partial v'} \right) g(v, v') \left(g_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial M(v)}{\partial v} - g_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial M(v')}{\partial v'} \right) v' dv' v dv . \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3.2 Discrétisation multigroupe

Notations multigroupes 1D

On reprend le même maillage en vitesse 1D que dans le chapitre 3, avec un maillage primal et un maillage dual. On rappelle ici quelques notations :

$$v_{\frac{1}{2}} = 0 < v_1 < v_{\frac{3}{2}} < \dots < v_{g-\frac{1}{2}} < v_i < v_{g+\frac{1}{2}} < \dots < v_G < v_{G+\frac{1}{2}} = \mathcal{V} ,$$

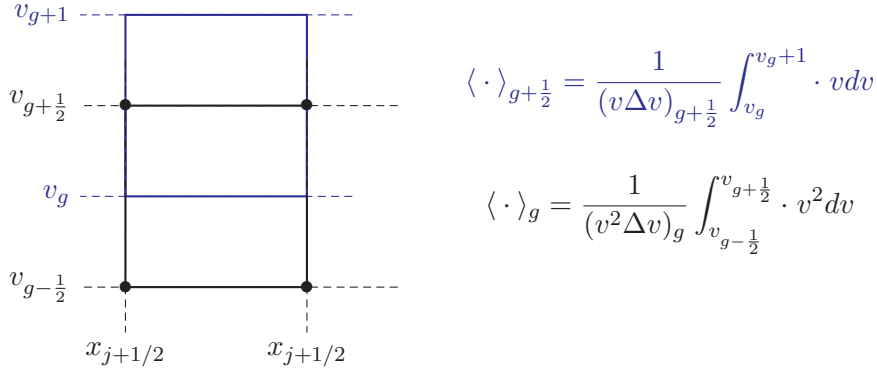


FIGURE 4.1 – Schéma du maillage dual en vitesse, avec moyenne spécifique à la mesure en énergie

L'espace des vitesses est discrétisé tel que les vitesses de groupe $(v_g)_{g=1..G}$ forment un ensemble de G groupes pavant le domaine $[0, \mathcal{V}]$, et qu'on appelle maillage primal. On introduit également $(v_{g+\frac{1}{2}})_{g=0..G}$ l'ensemble des vitesses aux "bords" des groupes de vitesses, et qu'on appelle maillage dual. Les bords du domaine en vitesse sont définis par $v_{1/2} = 0$ et $v_{G+\frac{1}{2}} = \mathcal{V}$. Par convention on note $v_0 = v_{1/2} = 0$, $v_{G+1} = v_{G+\frac{1}{2}} = \mathcal{V}$.

$$(v^p \Delta v)_g = \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} v^p dv \quad , \quad (v^p \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = \int_{v_g}^{v_{g+1}} v^p dv \quad , \quad (4.35)$$

On a en particulier $(v^2 \Delta v)_g = (v_{g+\frac{1}{2}}^3 - v_{g-\frac{1}{2}}^3)$ et $(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{g+1}^2 - v_g^2)$. On introduit également l'ensemble $\{(v^6)_{g+\frac{1}{2}}\}_{g=0..G}$, défini par récurrence tel que :

$$(v^6)_{g+\frac{1}{2}} - (v^6)_{g-\frac{1}{2}} = 6v_g^3(v^2 \Delta v)_g \quad \text{et} \quad (v^6)_{1/2} = 0 \quad (4.36)$$

La densité et la température, n_e et T_e , sont des variables du système Micro-Macro. Des approximations multigroupes de ces quantités peuvent être construites à partir de l'expression multigroupe de l'état d'équilibre suivant :

$$M_g = M(v_g) = n_e \left(\frac{2\pi k_B T_e}{m_e} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{m_e v_g^2}{k_B T_e} \right) . \quad (4.37)$$

On définit ainsi les différentes approximations suivantes de n_e et T_e :

$$n_e^o = \sum_{g=1}^G M_g (v^2 \Delta v)_g , \quad (4.38)$$

$$k_B T_e^o = \frac{2}{3} \sum_{g=1}^G \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) \frac{M_g}{n_e^o} (v^2 \Delta v)_g , \quad (4.39)$$

$$k_B T_e^\circ = \frac{2}{3} \sum_{g=1}^G \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) \left(\frac{m_e v_g^2}{2k_B T_e^o} - \frac{3}{2} \right) \frac{M_{g,i}}{n_e^o} (v^2 \Delta v)_g , \quad (4.40)$$

$$k_B T_e^* = \frac{m_e \sum_{g=1}^G v_g^7 M_g (v^2 \Delta v)_g}{8 \sum_{g=1}^G v_g^5 M_g (v^2 \Delta v)_g}, \quad (4.41)$$

$$k_B T_e^\dagger = \frac{m_e \sum_{g=0}^G v_{g+\frac{1}{2}}^8 M_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}{8 \sum_{g=0}^G v_{g+\frac{1}{2}}^6 M_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}. \quad (4.42)$$

Ces différentes expressions sont choisies afin de permettre de discrétiser les projecteurs Micro-Macro de sorte que le respect des lois de conservation soit garanti à travers la conservation des invariants Micro.

Discrétisation multigroupe des projecteurs Micro

Nous allons définir à l'aide des approximations de n_e et de T_e , de (4.38) à (4.42), une discrétisation multigroupe conservative des projecteurs Micro.

Proposition 4.3.2. *Soit $g \in [1, G]$. Si la fonction \bar{K} est semi-discrétisée de la façon suivante :*

$$\bar{K}_g = \frac{2}{3k_B T_e^\circ} \left(\frac{m_e v_g^2}{2k_B T_e^\circ} - \frac{3}{2} \right) \frac{M_g}{n_e^\circ}, \quad (4.43)$$

alors les discrétisations multigroupes suivantes des projecteurs Π_N , Π_N^* et Π_T :

$$\Pi_{N,g}(\varphi) = \varphi_g - \bar{K}_g \sum_{g'=1}^G \left(\frac{1}{2} m_e v_{g'}^2 \right) \varphi_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.44)$$

$$\Pi_{N,g}^*(\varphi) = \varphi_g - \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) \sum_{g'=1}^G \bar{K}_{g'} \varphi_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.45)$$

$$\Pi_{T,g}(\varphi) = \varphi_g - \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) \bar{K}_g \sum_{g'=1}^G \varphi_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.46)$$

satisfont les relations de projection discrètes $(\Pi_{N,g})^2 = \Pi_{N,g}$, $(\Pi_{N,g}^*)^2 = \Pi_{N,g}^*$, $(\Pi_{T,g})^2 = \Pi_{T,g}$,

ainsi que les relations :

$$\sum_{g=1}^G \Pi_{N,g}(\varphi) (v^2 \Delta v)_g = \sum_{g=1}^G \varphi_g (v^2 \Delta v)_g, \quad (4.47)$$

$$\sum_{g=1}^G \Pi_{T,g}(\varphi) (v^2 \Delta v)_g = 0, \quad (4.48)$$

$$\Pi_{N,g}^*(1) = 1, \quad (4.49)$$

$$\Pi_{N,g}^*(v^2) = 0. \quad (4.50)$$

Démonstration. Les résultats sont déduits des relations discrètes :

$$\sum_{g=1}^G \bar{K}_g (v^2 \Delta v)_g = 0, \quad (4.51)$$

$$\sum_{g=1}^G \bar{K}_g \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g = 1, \quad (4.52)$$

étant données les expressions multigroupes T_e^\diamond et T_e^o par (4.39) et (4.40). \blacksquare

Discrétisation de la forme faible

Nous allons discrétiser le terme de gauche de l'équation (4.32) sur le domaine en vitesse $[0, \mathcal{V}]$ suivant une approche Volumes Finis.

Proposition 4.3.3. Soient $g_{0,g} = \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} g_0 v^2 dv$ et $(vf_1)_g = \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} (vf_1) v^2 dv$, avec $g \in [1, G]$. Les formules suivantes de quadrature sur le maillage primal :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} g_0 \varphi + \nabla_x \cdot \left(\frac{vf_1}{3} \right) \Pi_N^*(\varphi) \right] v^2 dv \\ & \simeq \sum_{g=1}^G \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{0,g} \varphi_g + \nabla_x \cdot \left[(vf_1)_g \Pi_{N,g}^*(\varphi) \right] \right) (v^2 \Delta v)_g, \end{aligned} \quad (4.53)$$

sont exactes pour $\varphi_g = 1, v_g^2$.

Démonstration. La relation $\int_0^{\mathcal{V}} (vf_1) v^2 dv = \sum_{g=1}^G (vf_1)_g (v^2 \Delta v)_g$ est exacte. \blacksquare

On considère désormais la discrétisation du RHS de l'équation (4.32) sur le domaine en vitesse $[0, \mathcal{V}]$. Cette contribution admet une dérivée en vitesse de la fonction-test φ , on propose alors une formule de quadrature sur le maillage dual, conformément à [33, 8].

Proposition 4.3.4. Soit $[v \Delta v]_{g+\frac{1}{2}}$ une mesure discrète et $(v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}}$ défini par

$$(v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \int_{v_g}^{v_{g+1}} (v^2 f_1) v dv,$$

avec $g \in [0, G]$. La formule de quadrature suivante sur le maillage dual :

$$\begin{aligned} & -\frac{eE}{m_e} \cdot \int_0^{\mathcal{V}} \left[v^2 (f_1) \right] \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} \right) v dv + \int_0^{\mathcal{V}} \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right] \varphi v^2 dv \\ & \simeq -\frac{eE}{m_e} \cdot \sum_{g=0}^G (v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{2\pi}{3} Y_{ee} \sum_{g=0}^G \sum_{g'=0}^G \left(\frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi_{g'+1} - \varphi_{g'}}{(v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \left(g_{0,g'+\frac{1}{2}} \frac{g_{0,g+1} - g_{0,g}}{[v \Delta v]_{g+\frac{1}{2}}} - g_{0,g+\frac{1}{2}} \frac{g_{0,g'+1} - g_{0,g'}}{[v \Delta v]_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \\ & \quad \times [v \Delta v]_{g+\frac{1}{2}} [v \Delta v]_{g'+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{2\pi}{3} Y_{ee} \sum_{g=0}^G \sum_{g'=0}^G \left(\frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi_{g'+1} - \varphi_{g'}}{(v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \left(M_{0,g'+\frac{1}{2}} \frac{g_{0,g+1} - g_{0,g}}{[v \Delta v]_{g+\frac{1}{2}}} - M_{0,g+\frac{1}{2}} \frac{g_{0,g'+1} - g_{0,g'}}{[v \Delta v]_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
 & \times [v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}} [v\Delta v]_{g'+\frac{1}{2}} \\
 & - \frac{2\pi}{3} Y_{ee} \sum_{g=0}^G \sum_{g'=0}^G \left(\frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi_{g'+1} - \varphi_{g'}}{(v\Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \left(g_{0,g'+\frac{1}{2}} \frac{M_{0,g+1} - M_{0,g}}{[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}}} - g_{0,g+\frac{1}{2}} \frac{M_{0,g'+1} - M_{0,g'}}{[v\Delta v]_{g'+\frac{1}{2}}} \right) \\
 & \times [v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}} [v\Delta v]_{g'+\frac{1}{2}} ,
 \end{aligned}$$

est exacte pour $\varphi(v) = 1, v^2$.

Démonstration.

Pour $\varphi = 1$, on a :

$$\frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - 1}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} = 0 . \quad (4.55)$$

Pour $\varphi = v^2$, on a :

$$\frac{\varphi_{g+1} - \varphi_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} = \frac{v_{g+1}^2 - v_g^2}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} = 2 . \quad (4.56)$$

La relation $\int_0^{\mathcal{V}} (v^2 f_1) v dv = \sum_{g=0}^G (v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}} (v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}$ étant exacte exacte, la formule de quadrature (4.54) est également exacte. \blacksquare

Remarque 4.3.5. La mesure discrète $[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}}$, $g \in [0, G]$, sera précisée en Section (4.3.2).

Ensuite, les équations (4.53) et (4.54) sont rassemblées en une seule équation discrète et chaque contribution de la fonction-test discrète φ_g , est identifiée. Soit $g \in [1, G]$, le schéma résultant s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} g_{0,g} + \Pi_{N,g} (\nabla_x \cdot (v f_1)) & - \frac{e}{m_e} E \cdot \left[(v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}} - (v^2 f_1)_{g-\frac{1}{2}} \right] / (v^2 \Delta v)_g \\
 & = \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right]_g , \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

avec les conditions aux bords $(v^2 f_1)_{1/2} = (v^2 f_1)_{g+\frac{1}{2}} = 0$.

Le terme de droite prend la forme discrète suivante :

$$\left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right]_g = \left(K_{g+\frac{1}{2}} - K_{g-\frac{1}{2}} \right) / (v^2 \Delta v)_g , \quad (4.58)$$

où les flux en vitesse sont discrétisés selon le schéma d'équilibre [33, 8]

$$\begin{aligned}
 K_{g+\frac{1}{2}} & = E_{g+\frac{1}{2}}(M) g_{0,g+1} + D_{g+\frac{1}{2}}(g_0) \frac{M_{g+1} - M_g}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \\
 & + E_{g+\frac{1}{2}}(g_0) M_{g+1} + D_{g+\frac{1}{2}}(M) \frac{g_{0,g+1} - g_{0,g}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \\
 & + E_{g+\frac{1}{2}}(g_0) g_{0,g+1} + D_{g+\frac{1}{2}}(g_0) \frac{g_{0,g+1} - g_{0,g}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} , \quad g \in [1, G-1] \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

$$K_{1/2} = K_{g+\frac{1}{2}} = 0 , \quad (4.60)$$

sont réécrits comme des fonctions des discrétisations des potentiels de Rosenbluth :

$$E_{g+\frac{1}{2}}(f) = \frac{[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \left[3 \sum_{g'=1}^{G-1} (v^2\Delta v)_{g'} f_{g'} - v_{g-\frac{1}{2}} f_G \right], \quad (4.61)$$

$$D_{g+\frac{1}{2}}(f) = 3 \sum_{g'=1}^g (v^2\Delta v)_{g'} \sum_{g''=g'}^{G-1} f_{g''+1} [v\Delta v]_{g''+1/2}. \quad (4.62)$$

Conformément à [33, 8], la mesure discrète $[v\Delta v]_{g+1/2}$ est définie par :

$$[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}} = -\frac{(\Delta M)_{g+\frac{1}{2}}}{\beta M_{g+1}} = \frac{\exp(\beta(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}) - 1}{\beta}, \quad (4.63)$$

avec $\beta = -1/(2v_{e,th}^2)$.

Discrétisation multigroupe des projecteurs de courant nul

Proposition 4.3.6 (Une classe de projecteurs multigroupes pour la discrétisation de h_1 et l_1). *Soit $g \in [1, G]$. La discrétisation multigroupe suivante pour les projecteurs (4.15) et (4.16),*

$$\Pi_{f_0,g}(\varphi) = \varphi_g - \frac{(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v})_g}{\sum_{g'=1}^G (v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v})_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}} \sum_{g'=1}^G \varphi_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.64)$$

$$\Pi_{M,g}(\varphi) = \varphi_g - \frac{(v^4 \frac{\partial M}{\partial v})_g}{\sum_{g'=1}^G (v^4 \frac{\partial M}{\partial v})_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}} \sum_{g'=1}^G \varphi_{g'} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.65)$$

satisfont les relations de projection discrètes $(\Pi_{f_0,g})^2 = \Pi_{f_0,g}$, $(\Pi_{M,g})^2 = \Pi_{M,g}$. De plus, elles satisfont par construction les conditions de courant nul discrètes :

$$\sum_{g=1}^G \Pi_{f_0,g}(\varphi) (v^2 \Delta v)_g = 0, \quad (4.66)$$

$$\sum_{g=1}^G \Pi_{M,g}(\varphi) (v^2 \Delta v)_g = 0. \quad (4.67)$$

Démonstration. Ces relations sont vérifiées par construction, d'après les équations (4.64) et (4.65). ■

Proposition 4.3.7 (Une classe de projecteurs multigroupes pour la discrétisation de b_1 and d_1). *Soit $g \in [0, G]$. La discrétisation multigroupe suivante pour les projecteurs (4.17) et (4.18),*

$$\hat{\Pi}_{M,g+\frac{1}{2}}(\varphi) = \varphi_{g+\frac{1}{2}} - \frac{v_{g+\frac{1}{2}} (v^4 \frac{\partial M}{\partial v})_{g+\frac{1}{2}}}{\sum_{g'=0}^G (v^4 \frac{\partial M}{\partial v})_{g'+\frac{1}{2}} v_{g'+\frac{1}{2}} (v\Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}}$$

$$\times \sum_{g'=0}^G \varphi_{g'+\frac{1}{2}} (v\Delta v)_{g'+\frac{1}{2}} , \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}}(\varphi) &= \varphi_{g+\frac{1}{2}} - \frac{v_{g+\frac{1}{2}} \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}}}{\sum_{g'=0}^G \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)_{g'+\frac{1}{2}} v_{g'+\frac{1}{2}} (v\Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \\ &\times \sum_{g'=0}^G \varphi_{g'+\frac{1}{2}} (v\Delta v)_{g'+\frac{1}{2}} , \end{aligned} \quad (4.69)$$

satisfait les relations de projection discrètes $(\hat{\Pi}_{M, g+\frac{1}{2}})^2 = \hat{\Pi}_{M, g+\frac{1}{2}}$, $(\hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}})^2 = \hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}}$. De plus, elles satisfont par construction les conditions de courant nul discrètes :

$$\sum_{g=0}^G \hat{\Pi}_{M, g+\frac{1}{2}}(\varphi) (v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0 , \quad (4.70)$$

$$\sum_{g=0}^G \hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}}(\varphi) (v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0 . \quad (4.71)$$

Démonstration. Ces relations sont vérifiées par construction, d'après les équations (4.68) et (4.69). ■

On discrétise sur le maillage primal les expressions $(v^4 \partial_v M)$ et $(v^4 \partial_v f_0)$. Le terme $(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v})_g$ est discrétisé à l'aide de la formule exacte suivante :

$$\begin{aligned} \left(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_g &= \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} \left(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) v^2 dv , \\ &= \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \left[(v^6 f_0)_{g+\frac{1}{2}} - (v^6 f_0)_{g-\frac{1}{2}} - 6 \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} v^3 f_0 v^2 dv \right] , \end{aligned} \quad (4.72)$$

Puis une approximation d'ordre 2 sur maillage uniforme est proposée :

$$\left(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_g \simeq \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \left[(v^6)_{g+\frac{1}{2}} f_{0, g+\frac{1}{2}} - (v^6)_{g-\frac{1}{2}} f_{0, g-\frac{1}{2}} - 6 v_g^3 f_{0, g} (v^2 \Delta v)_g \right] \quad (4.73)$$

où

$$f_{0, g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{0, g+1} + f_{0, g}) \quad (4.74)$$

Le terme $(v^4 \frac{\partial M}{\partial v})_g$ est discrétisé de la façon suivante :

$$\left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_g \simeq - \frac{m_e}{k_B T_e} v_g^5 M_g , \quad (4.75)$$

4. Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion

On discrétise désormais sur le maillage dual les expressions $(v^4 \partial_v M)$ et $(v^4 \partial_v g_0)$ en définissant :

$$\left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}} = -\frac{m_e}{k_B T_e} v_{g+\frac{1}{2}}^5 M_{g+\frac{1}{2}}, \quad g \in [0, G] \quad (4.76)$$

$$\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}} = v_{g+\frac{1}{2}}^5 \frac{g_{0,g+1} - g_{0,g}}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}, \quad g \in [0, G-1] \quad (4.77)$$

$$\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}} = 0, \quad (4.78)$$

où $M_{G+\frac{1}{2}} = 0$.

Contributions Spitzer-Härm multigroupes

Proposition 4.3.8. *Les discrétisations multigroupes de l'équation (4.7) :*

$$\left(v f_1^M \right)_g = -\left[\frac{n_e}{3Y_{ei}n_i} \right] v_g^5 \frac{M_g}{n_e} \left[-\frac{3}{2} + \left(\frac{m_e v_g^2}{2k_B T_e^*} - \frac{5}{2} \right) \right] \left[\frac{\nabla_x T_e}{T_e} \right], \quad g \in [1, G], \quad (4.79)$$

$$\left(v^2 f_1^M \right)_{g+\frac{1}{2}} = -\left[\frac{n_e}{3Y_{ei}n_i} \right] v_{g+\frac{1}{2}}^6 \frac{M_{g+\frac{1}{2}}}{n_e} \left[-\frac{3}{2} + \left(\frac{m_e v_{g+\frac{1}{2}}^2}{2k_B T_e^\dagger} - \frac{5}{2} \right) \right] \left[\frac{\nabla_x T_e}{T_e} \right], \quad (4.80)$$

$g \in [0, G],$

où $M_{G+\frac{1}{2}} = 0$, satisfont les conditions de courant nul discrètes

$$\sum_{g=1}^G \left(v f_1^M \right)_g (v^2 \Delta v)_g = 0, \quad (4.81)$$

$$\sum_{g=0}^G \left(v^2 f_1^M \right)_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0, \quad (4.82)$$

et la condition limite (nécessaire au respect des lois de conservations) :

$$\left(v^2 f_1^M \right)_{1/2} = \left(v^2 f_1^M \right)_{G+\frac{1}{2}} = 0.$$

Démonstration. Ces relations sont vérifiées par construction, d'après les équations (4.41) et (4.42). ■

Contribution multigroupes pour la diffusion généralisée en espace

Une discrétisation du flux cinétique h_1 , contribuant à une diffusion généralisée en espace, est construite à partir de la définition :

$$\begin{aligned} (v h_1)_{g \in [1, G]} &= \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} (v h_1) v^2 dv, \\ &= -\frac{1}{3Y_{ei}n_i (v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} \Pi_{f_0} \left(v^5 \nabla_x g_0 \right) v^2 dv. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Proposition 4.3.9. Soit $g \in [1, G]$. La discrétisation multigroupes suivante :

$$(vh_1)_g = -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \Pi_{f_0,g} \left(v^5 \nabla_x g_0 \right) , \quad (4.84)$$

où $(v^5 g_0)_g = v_g^5 g_{0,g}$, satisfait la condition de courant nul :

$$\sum_{g=1}^G (vh_1)_g (v^2 \Delta v)_g = 0 . \quad (4.85)$$

Démonstration. La condition de courant nul est satisfaite par définition du projecteur $\Pi_{f_0,g}$ (voir proposition 4.3.6). \blacksquare

Discrétisation multigroupes pour l'advection généralisée en espace

La discrétisation multigroupe des flux cinétiques v_1 et vd_1 contribuant à l'advection généralisée en espace est construite à partir de la définition :

$$\begin{aligned} (v_1)_g &= \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} (v_1) v^2 dv , \quad g \in [1, G] , \\ &= \frac{1}{3Y_{ei}n_i} \left[\frac{eEM}{m_e} \right] \frac{\langle Mv^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \int_{v_{g-\frac{1}{2}}}^{v_{g+\frac{1}{2}}} \Pi_M \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right) v^2 dv , \quad (4.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v^2 d_1)_{g+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \int_{v_g}^{v_{g+1}} (v^2 d_1) v dv , \quad g \in [0, G] , \\ &= -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \frac{\langle Mv^3 \rangle}{\langle f_0 v^3 \rangle} \frac{1}{(v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \int_{v_g}^{v_{g+1}} \hat{\Pi}_M \left(v^6 \nabla_x g_0 \right) v dv . \quad (4.87) \end{aligned}$$

Proposition 4.3.10. Les discrétisations multigroupes suivantes :

$$\begin{aligned} (v_1)_g &= \frac{1}{3Y_{ei}n_i} \left[\frac{eEM}{m_e} \right] \left[\frac{\sum_{g'=1}^G M_{g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'}}{\sum_{g'=1}^G f_{0,g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'}} \right] \Pi_{M,g} \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right) , \quad g \in [1, G] , \quad (4.88) \\ (v^2 d_1)_{g+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \left[\frac{\sum_{g'=1}^G M_{g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'}}{\sum_{g'=1}^G f_{0,g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'}} \right] \hat{\Pi}_{M,g+\frac{1}{2}} \left(v^6 \nabla_x g_0 \right) , \quad g \in [0, G] , \quad (4.89) \end{aligned}$$

où $\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right)_g = \frac{1}{(v^2 \Delta v)_g} \left[(v^6)_{g+\frac{1}{2}} g_{0,g+\frac{1}{2}} - (v^6)_{g-\frac{1}{2}} g_{0,g-\frac{1}{2}} - 6v_g^3 g_{0,g} (v^2 \Delta v)_g \right]$,
et $(v^6 g_0)_{g+\frac{1}{2}} = v_{g+\frac{1}{2}}^6 g_{0,g+\frac{1}{2}}$, faisant intervenir l'approximation d'ordre 2 sur maillage uniforme

$$g_{0,g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (g_{0,g+1} + g_{0,g}) \quad \text{si } g \in [0, G-1] , \quad (4.90)$$

$$g_{0,G+\frac{1}{2}} = 0 , \quad (4.91)$$

satisfont les relations de courant nul :

$$\sum_{g=1}^G (v_1)_g (v^2 \Delta v)_g = 0, \quad (4.92)$$

$$\sum_{g=0}^G (v^2 d_1)_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0, \quad (4.93)$$

avec les conditions aux bords $(v^2 d_1)_{1/2} = (v^2 d_1)_{G+\frac{1}{2}} = 0$.

Démonstration. La condition de courant nul est satisfaite par définition des projecteurs $\Pi_{M,g}$ et $\hat{\Pi}_{M,g}$ par définition des projecteurs discrets donnés équations (4.65) et (4.68) ■

Discrétisation multigroupes pour la diffusion généralisée en vitesse

On rappelle que vb_1 correspond à la contribution de diffusion en vitesse du flux cinétique total vf_1 .

Proposition 4.3.11. *Soit $g \in [0, G]$. La discrétisation multigroupes suivante pour le produit scalaire $E \cdot (v^2 b_1)$:*

$$E = \sum_{g=0}^G \delta E_{g+\frac{1}{2}} v_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}, \quad (4.94)$$

$$(v^2 b_1)_{g+\frac{1}{2}} = \frac{6}{3Y_{ei} n_i} \left[\sum_{g'=1}^G g_{0,g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'} \right] \hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}} \left(v \frac{e \delta E}{m_e} \right), \quad (4.95)$$

avec :

$$\left[\frac{e \delta E}{m_e} \right]_{g+\frac{1}{2}} = \frac{v_{g+\frac{1}{2}}^5 \nabla_x g_{0, g+\frac{1}{2}} + \left[\frac{e E^M}{m_e} \right] \left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}}}{\left[\sum_{g'=0}^G \left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g'+\frac{1}{2}} v_{g'+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}} \right] - 6 \left[\sum_{g'=1}^G g_{0, g'} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'} \right]}, \quad (4.96)$$

$$\left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2}} = - \frac{m_e}{k_B T_e} v_{g+\frac{1}{2}}^5 M_{g+\frac{1}{2}}, \quad (4.97)$$

$g_{0, g+\frac{1}{2}} = M_{G+\frac{1}{2}} = 0$, and $g_{0, g+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(g_{0, g+1} + g_{0, g})$ (approximation d'ordre 2 sur maillage uniforme), satisfait la condition de courant nul :

$$\sum_{g=0}^G (v^2 b_1)_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = 0, \quad (4.98)$$

et la condition de bord requise $(v^2 b_1)_{1/2} = (v^2 b_1)_{G+\frac{1}{2}} = 0$.

Démonstration. La condition de courant nul est satisfaite par définition du projecteur $\hat{\Pi}_{g_0, g+\frac{1}{2}}$ donné équation (4.69) ■

Remarque 4.3.12. Considérons un plasma à l'équilibre thermodynamique local, où la contribution Micro g_0 et sa dérivée partielle en vitesse s'annulent. La discrétisation multigroupes (4.96) donne alors :

$$\sum_{g=0}^G \delta E_{g+\frac{1}{2}} v_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}} = E^M. \quad (4.99)$$

Discrétisation équilibre de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau Micro

Un schéma d'équilibre est construit à partir de l'équation de Fokker-Planck-Landau, suivant [33, 8], en remarquant que $\frac{\partial}{v\partial v} = -\frac{m_e}{k_B T_e} M \frac{\partial}{\partial M}$. Dans ce schéma, la propriété de conservation impose d'adopter la mesure discrète, $[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}}$, $g \in [1, G-1]$, dans l'expression des potentiels de Rosenbluth discrets.

Proposition 4.3.13. *Supposons le flux de vitesse discret (4.59), les potentiels de Rosenbluth (4.61) et (4.62) sont discrétisés avec $[v\Delta v]_{g+\frac{1}{2}} = \frac{m_e}{k_B T_e} \frac{M_g - M_{g+1}}{M_{g+1}}$, $g_{0,g+\frac{1}{2}} = g_{0,g+1}$ et $M_{g+\frac{1}{2}} = M_{g+1}$, avec $g \in [1, G-1]$.*

Alors, l'opérateur de Fokker-Planck-Landau préserve les états d'équilibre discrets, qui sont les distributions maxwelliennes discrètes.

Démonstration. La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [8]. ■

Conservation des invariants Micro multigroupes

Proposition 4.3.14 (Conservation des invariants Micro multigroupes). *L'équation multigroupe (4.57), faisant intervenir les flux cinétiques discrets donnés propositions 4.3.9, 4.3.10 et 4.3.11, satisfait les relations discrètes suivantes pour les invariants Micro :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{g=1}^G g_{0,g} (v^2 \Delta v)_g \right] = 0, \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{g=1}^G g_{0,g} \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \right] = 0. \quad (4.101)$$

Démonstration. les invariants micro $\sum_{g=1}^G g_{0,g} (v^2 \Delta v)_g$ et $\sum_{g=1}^G g_{0,g} \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g$ sont conservés au niveau discret par définition des projecteurs discrets (4.64) (4.65) (4.69) (4.68) et (4.44). ■

Discrétisation multigroupe cohérente des flux non-locaux dans l'équation Macro

L'équation Macro (4.27) est discrétisée dans le domaine en vitesse en toute cohérence vis-à-vis de la discrétisation des flux cinétiques dans l'équation Micro, donnée dans les Sections suivantes

Le schéma résultant s'écrit alors :

$$\frac{3k_B n_e}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \mathbf{q}_e^M + \nabla_x \cdot \left[\sum_{g=1}^G [(v h_1)_g + (v l_1)_g] \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \right] = 0, \quad (4.102)$$

avec le flux de Spitzer-Härm semi-discret

$$\mathbf{q}_e^M = \sum_{g=1}^G (v f_1^M)_g \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g, \quad (4.103)$$

qui peut se réécrire avec une expression semi-discrète du coefficient de diffusion de Spitzer-Härm :

$$q_e^M = -\kappa_{SH} \nabla_x T_e, \quad (4.104)$$

$$\kappa_{SH} = \frac{1}{3Y_{ei}k_B n_i T_e} \sum_{g=1}^G v_g^5 M_g \left[-\frac{3}{2} + \left(\frac{m_e v_g^2}{2k_B T_e^*} - \frac{5}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \quad (4.105)$$

4.4 Discrétisation Temps-Espace

Dans cette section, nous allons traiter de la discrétisation temps-espace du système P1-Diffusion Micro-Macro. L'objectif étant de proposer une discrétisation totalement implicite permettant de répondre aux objectifs de discrétisation énumérés en début de chapitre. La discrétisation temps-espace proposée est basée sur une méthode implicite itérative que nous illustrerons dans un premier temps et par souci de pédagogie, sur l'exemple simple de l'advection-diffusion scalaire à coefficients constants. Dans un second temps, nous appliquerons les mêmes principes de discrétisation sur le problème plus complexe du système P1-Diffusion Micro-Macro.

Commençons par rappeler les équations du système P1-diffusion Micro-Macro :

$$\begin{aligned} \frac{3k_B n_e}{2} \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 (v f_1^M + v h_1 + v l_1) \right\rangle &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} g_0 + \Pi_N \left[\nabla_x \cdot (v f_1^M + v h_1 + v l_1) \right] \\ - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \cdot \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^M + v^2 d_1 + v^2 b_1) \right] &= \mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0). \end{aligned}$$

Dans chaque équation, il y a une contribution correspondant à de la diffusion en espace. Il s'agit de $\nabla_x \cdot \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 (v f_1^M) \right\rangle$ dans l'équation Macro, et $\nabla_x \cdot (v h_1)$ dans l'équation Micro. Il est courant de discrétiser de façon centrée la diffusion et de l'impliquer totalement. C'est ce que nous ferons pour l'équation Macro, dans le cadre d'une méthode itérative qui permettra également le couplage entre les deux équations. Le terme $\nabla_x \cdot (v h_1)$, en revanche, fait intervenir l'ensemble des groupes de vitesse dans la diffusion. Le discrétiser de façon totalement implicite demanderait d'inverser un système de taille $N \times N \times G \times G$ avec une matrice pleine dans les coordonnées de vitesse. Cette méthode ne serait pas envisageable dans des géométries 2D/3D espace. Nous allons donc proposer une seconde méthode permettant une implémentation totale, tout en rendant accessible une généralisation aux maillages quelconques en géométries 2D/3D espace.

4.4.1 Introduction du schéma implicite itératif sur l'exemple simple d'une équation d'advection diffusion

Nous allons introduire dans cette section la méthode de discrétisation temps-espace que nous appliquerons par la suite au système P1-diffusion Micro-Macro. Mais avant cela, nous allons illustrer les principes de la méthode sur un exemple simple : l'advection-diffusion 1D à coefficients constants, écrite ici dans la variable u , avec $a, D > 0$:

Définition 4.4.1. Soit $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $u \in L^2(I)$ et $a, D > 0$. On définit l'équation d'advection-diffusion à coefficients constants, avec conditions aux bords périodique :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + a \frac{\partial}{\partial x} u - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0, & x \in I = [0, 1], \\ u(t, x = 0) = u(t, x = 1). \end{cases} \quad (4.106)$$

La méthode choisie, dite Implicite Itérative, est inspirée de travaux sur le transfert radiatif [4], où les auteurs ont appliqué la méthode au transfert radiatif linéaire sur des maillages 2D non-structurés. Le transport électronique présente des différences majeures avec le transfert radiatif comme la modélisation du champ électrique auto-consistant impliquant un couplage non-linéaire entre tous les groupes de vitesse. Cette nouvelle difficulté est en partie surmontée par la décomposition astucieuse du flux f_1 , en termes d'advection et de diffusion généralisée. Le fait que cette méthode ait fait ses preuves sur des maillages 2D non-structurés [4] présente un avantage majeur pour notre étude, les derniers mois de la thèse étant dédiés à l'adaptation du schéma sur maillage 2D non-structuré. La méthode Implicite Itérative est basée sur une implicitation locale en espace des opérateurs d'advection et de diffusion. Une méthode itérative de type point fixe permet ensuite de converger vers la limite totalement implicite du schéma. Une discrétisation en espace centrée pour la diffusion et décentrée upwind pour l'advection permet d'assurer au schéma une structure sous forme de combinaisons convexes, et donc d'assurer stabilité inconditionnelle et convergence.

Construction du schéma implicite itératif

Commençons par la discrétisation en espace. On discrétise la diffusion de façon centrée et l'advection de façon décentrée upwind. On implimente ensuite localement en espace pour obtenir le schéma un schéma semi-implicite.

Proposition 4.4.2. Soit un maillage 1D en espace, les mailles sont indicées par $j \in [1, N]$ et ont pour volume Δx_j . On définit le schéma localement implicite suivant :

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{\Delta t} + a \frac{u_j^{(n+1)} - u_{j-1}^{(n)}}{\Delta x} - D \frac{u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2} = 0. \quad (4.107)$$

Le schéma (4.107) est non-conservatif, non-consistant et inconditionnellement stable, pour toutes les normes L^p . Il se réécrit sous forme de combinaisons convexes de la manière suivante :

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} \frac{1}{1 + \mu + \nu} + u_{i-1}^n \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} + u_{i+1}^n \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu} \quad (4.108)$$

avec $\mu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ et $\nu = 2\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$.

Démonstration. On peut réécrire le schéma, en faisant apparaître ν et μ :

$$\begin{aligned} & u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)} + \mu(u_i^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n)}) - \nu(1/2u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n+1)} + 1/2u_{i-1}^{(n)}) = 0, \\ \iff & u_i^{(n+1)}(1 + \mu + \nu) - u_i^{(n)} - \mu u_{i-1}^{(n)} - 1/2\nu(u_{i+1}^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}) = 0, \\ \iff & u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} \frac{1}{1 + \mu + \nu} + u_{i-1}^n \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} + u_{i+1}^n \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu}. \end{aligned}$$

4. Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion

On a bien des combinaisons convexes car les coefficients sont tous strictement positifs et leur somme vaut 1 :

$$\frac{1}{1 + \mu + \nu} + \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} + \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu} = 1 \quad \text{avec } \nu > 0, \quad \mu > 0. \quad (4.109)$$

Cela implique que le schéma semi-implicite est inconditionnellement stable pour toutes les normes L^p .

Le schéma n'est pas consistant. En effet, si on calcule l'erreur de troncature du schéma, on obtient une erreur en $\Delta t/\Delta x$ pour l'advection et en $\Delta t/\Delta x^2$ pour la diffusion. Si on reprend l'équation (4.107) et que l'on injecte la solution exacte u , on trouve :

$$\partial_t u + a \partial_x u + O\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) - D \partial_{xx}^2 u + O\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) = 0. \quad (4.110)$$

Le schéma n'est donc pas consistant. ■

Le caractère non-consistant et non-conservatif du schéma (4.107) le rend évidemment inutilisable. Pour retrouver la consistance et la conservativité, nous allons utiliser une méthode itérative de Jacobi, convergeant vers la limite totalement implicite consistante et conservative du schéma.

Proposition 4.4.3. *Soit \mathcal{M} un maillage uniforme 1D en espace, avec l'indice de maille $j \in [1, J]$, et le volume de maille Δx . Soit la discrétisation localement implicite et itérative suivante, avec k l'indice des sous-itérations.*

$$u_j^{(n+1),k+1} = u_j^{(n)} \frac{1}{1 + \mu + \nu} + u_{j-1}^{(n+1),k} \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} + u_{j+1}^{(n+1),k} \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu}. \quad (4.111)$$

Le processus itératif de Jacobi $k = 0, 1, \dots$, initialisé par $u_j^{(n+1),k=0} = u_j^n$, converge uniformément vers la limite totalement implicite, consistante et conservative :

$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} \frac{1}{1 + \mu + \nu} + u_{j-1}^{(n+1)} \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} + u_{j+1}^{(n+1)} \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu}, \quad (4.112)$$

avec $\lim_{k \rightarrow \infty} u_j^{(n+1),k} = u_j^{(n+1)}$.

Démonstration. Pour prouver la convergence inconditionnelle du processus itératif de Jacobi, nous allons utiliser le théorème de Gershgorin [3].

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on nomme

$$D_i = \text{b}\left(a_{ii}, \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\right) = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad |a_{ii} - z| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\} \quad (4.113)$$

le i ème disque de Gershgorin de M . D'après le théorème de Gershgorin, L'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans la réunion des disques de Gershgorin, c'est-à-dire :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } M \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

on utilise ensuite le lemme suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [3]

Lemme 4.4.4. (Convergence de la méthode itérative) Soit \mathbb{M} une matrice réelle inversible de taille $J \times J$. Soit également \mathbb{N} une matrice réelle. La méthode itérative définie par :

$$\begin{cases} U^0 \in \mathbb{R}^J, \\ \mathbb{M}U^{m+1} = \mathbb{N}U^m + B, \quad m \geq 0, \end{cases} \quad (4.114)$$

est convergente si et seulement si $\rho(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}) < 1$, avec ρ désignant le rayon spectral.

L'inconnue discrète u_j , $J \in [1, J]$, dans la discrétisation (4.111), est rassemblée dans un vecteur $U \in \mathbb{R}^J$. Le schéma prend alors la forme vectorielle du lemme 4.4.4. L'analyse spectrale peut être conduite à l'aide du théorème de Gershgorin, ce qui donne $\rho(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}) < 1$. En effet d'après (4.111), on a :

$$\mathbb{M} = \text{Id}_J, \quad \mathbb{N} = \begin{pmatrix} 0 & k_d & 0 & \cdots & 0 \\ k_g & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k_d \\ 0 & \cdots & 0 & k_g & 0 \end{pmatrix}, \quad B = k_c U^0 \quad (4.115)$$

avec :

$$k_c = \frac{1}{1 + \mu + \nu}, \quad k_g = \frac{\mu + 1/2\nu}{1 + \mu + \nu} \quad \text{et} \quad k_d = \frac{1/2\nu}{1 + \mu + \nu}. \quad (4.116)$$

On a k_c, k_g et $k_d > 0$ ainsi que $k_c + k_g + k_d = 1$, on en déduit par le théorème de Gershgorin que le rayon spectral de \mathbb{N} est inférieur à 1. La méthode converge donc de façon inconditionnelle d'après le lemme 4.4.4. ■

Illustrations numériques du schéma implicite itératif pour l'advection-diffusion

Nous allons tester ce schéma numérique sur un cas-test simple d'advection-diffusion d'un pic de dirac avec conditions aux bords périodiques. On peut voir Figure 4.2 et Figure 4.3 la solution $u(t, x)$ à des temps différents et pour deux valeurs de Δt . La solution converge vers une limite stationnaire homogène. La convergence des sous-itérations est illustrée Figure 4.4 où l'on a tracé tous les sous-itérés entre la seconde et la troisième itérations temporelles.

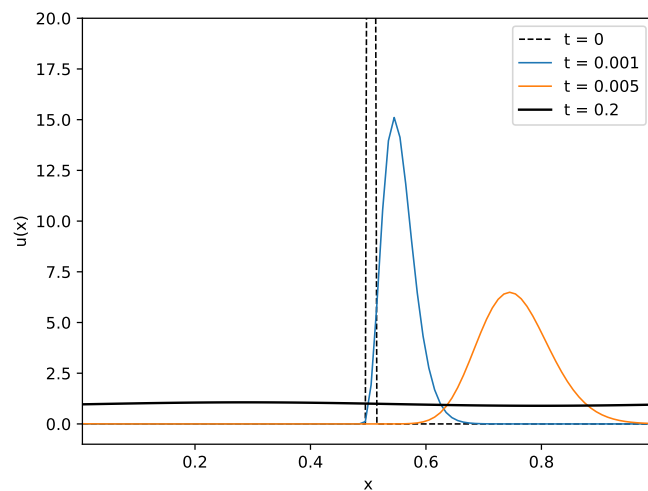


FIGURE 4.2 – Illustration de la solution $u(x)$ tracée à plusieurs temps de la simulation, pour un pas de temps $\Delta t = 1e - 4$.

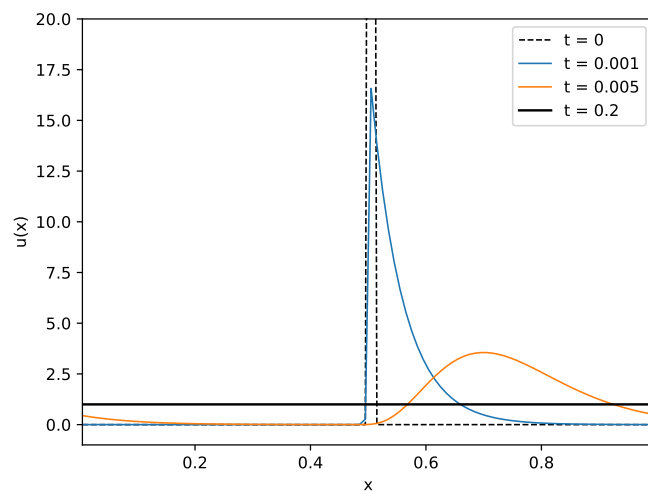
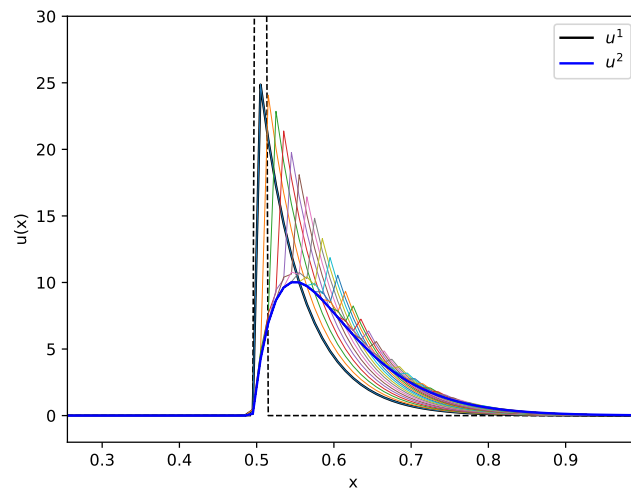


FIGURE 4.3 – Illustration de la solution $u(x)$ tracée à plusieurs temps de la simulation, pour un pas de temps $\Delta t = 1e - 3$.

FIGURE 4.4 – Illustration des sous-itérations pour passer de u^1 à u^2 .

On retrouve numériquement les ordres de convergence en maillage, Figure 4.5 et Figure 4.6, dans des régimes dominés par l'advection ou par la diffusion.

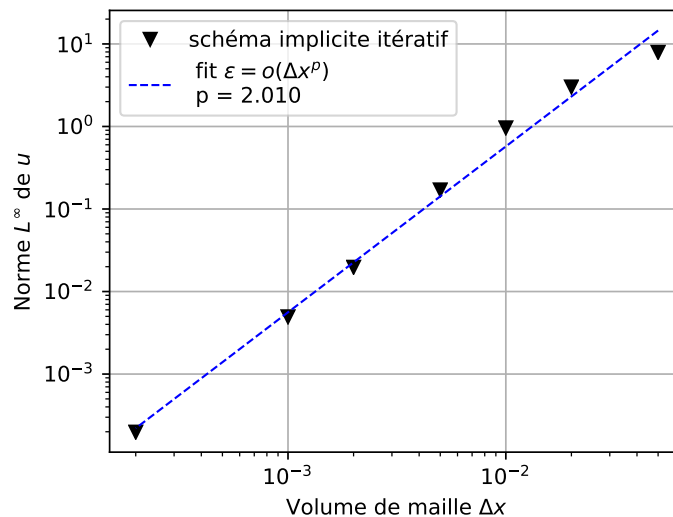


FIGURE 4.5 – Convergence en maillage du schéma implicite itératif en régime dominé par la diffusion. On retrouve bien l'ordre de convergence classique de la diffusion discrétisée de façon centrée en espace : $p = 2$.

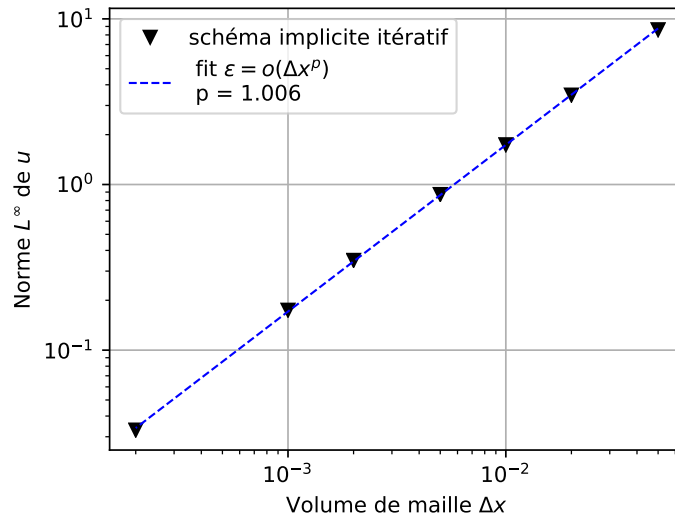


FIGURE 4.6 – Convergence en maillage du schéma implicite itératif en régime dominé par l’advection. On retrouve bien l’ordre de convergence classique de l’advection discrétisée de façon upwind en espace : $p = 1$.

Nous avons testé la stabilité du schéma en traçant, Figure 4.7, l’évolution de la norme L^2 de la solution en fonction du temps, pour des valeurs croissantes de Δt .

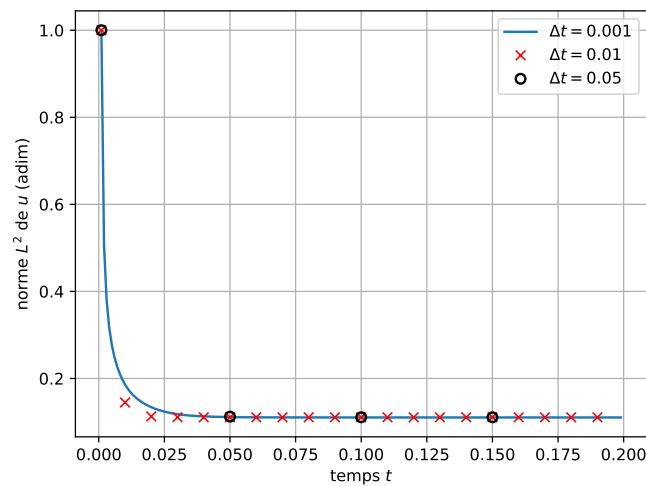


FIGURE 4.7 – Évolution de la norme L^2 de la solution en fonction du temps, pour des pas de temps différents. La norme L^2 correspond à l’entropie mathématique de l’équation d’advection-diffusion, on peut voir ici qu’elle décroît vers sa valeur stationnaire quelque soit le pas de temps, témoignant de la stabilité du schéma.

Enfin, on mesure, Figure 4.8 et dans le tableau ci-dessous 4.1, la conservation de la norme L^1 , à convergence ou non, du processus sous-itératif. Ceci est réalisé en modifiant la valeur du seuil de convergence relative en norme L^2 , η , du processus sous-itératif, défini par :

$$\eta = \frac{\left| \|u^{k+1}\|_{L^1} - \|u^k\|_{L^1} \right|}{\|u^k\|_{L^1}}. \quad (4.117)$$

Tolérance	1e-1	1e-2	1e-3	1e-4	1e-5	1e-10
Erreur de conservation	0.2561	0.06288	0.007241	0.001174	0.0001582	6.987e-09

TABLEAU 4.1 – conservation de la norme L^1 en fonction de la tolérance du critère de convergence relative

On retrouve bien les propriétés de conservation présentées par les propositions 4.4.2 et 4.4.3 : le schéma n'est pas conservatif lorsque les sous-itérations ne convergent pas, ceci étant illustré par les tests avec un critère de convergence relative à tolérance η très faible. On retrouve la propriété de conservation de la norme L^1 de u à convergence des sous-itérations, avec une précision qui suit bien la tolérance du critère.

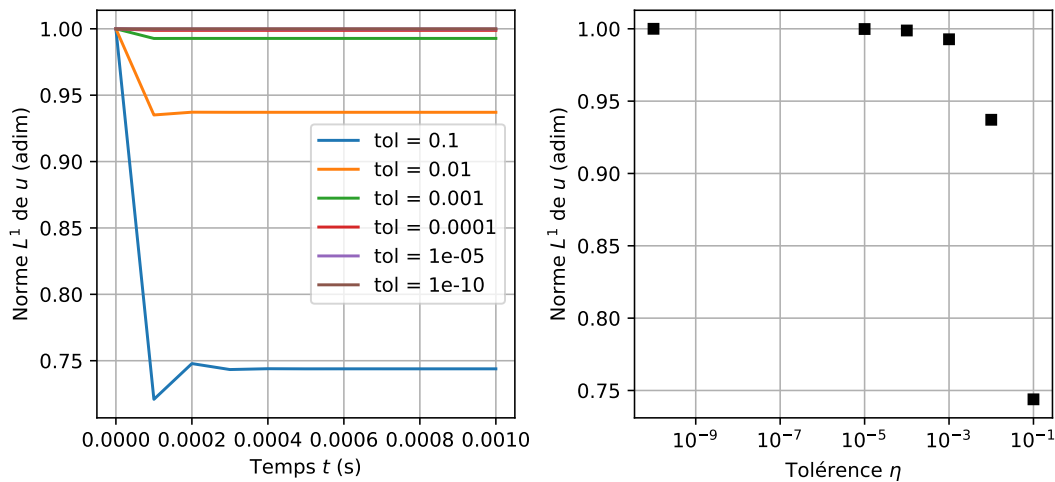


FIGURE 4.8 – À gauche, évolution de la norme L^1 de la solution u en fonction du temps, pour des critères de convergence différents. À droite, norme L^1 de la solution u au temps final, en fonction de la tolérance du critère de convergence relative.

Nous avons vérifié numériquement les principales propriétés du schéma numérique Implicite-Itératif pour l'exemple simple de l'advection diffusion à coefficients constant. En particulier, le schéma implicite itératif pour l'advection-diffusion est numériquement :

- inconditionnellement stable,
- consistant à l'ordre 2 en régime dominé par la diffusion et à l'ordre 1 en régime dominé par l'advection,
- conservatif à convergence des sous-itérés $k = 0, 1, \dots$

De plus, ce schéma a fait ses preuves sur des problèmes plus complexes comme le transfert radiatif linéaire sur maillage 2D non-structuré [4]. Nous souhaitons appliquer cette méthode à la discrétisation en espace et en temps du système P1-Diffusion Micro-Macro, dans l'objectif d'obtenir un schéma totalement implicite inconditionnellement stable et conservatif, pouvant être généralisé à des maillages 2D non-structurés.

L'ajout d'une dimension en vitesse dans l'équation Micro et du champ électrique auto-consistant couplant non-linéairement tous les groupes de vitesse introduit cependant des difficultés que nous adressons dans la section suivante.

4.4.2 Discrétisation temps-espace des opérateurs de diffusion dans les équations Micro et Macro

Nous allons étudier dans cette Section la discrétisation des opérateurs de diffusion dans les équations Micro et Macro. Nous traiterons les termes restants dans les sections suivantes. Reprenons la discussion du début de la section 4.4, on a choisi d'impliciter les équations Micro par une méthode implicite itérative, permettant de se ramener à la résolution de sous-systèmes de taille $G \times G$. Prenons le modèle réduit suivant où les flux non-locaux Micro se réduisent à leur composante diffusive spatiale vh_1 :

$$\frac{3}{2}k_B n_e \frac{\partial}{\partial t} T_e + \nabla_x \cdot \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 (vf_1^M) \right\rangle = -\nabla_x \cdot \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 (vh_1) \right\rangle, \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_0 + \Pi_N \left[\nabla_x \cdot (vh_1) \right] = -\Pi_N \left[\nabla_x \cdot (vf_1^M) \right]. \quad (4.119)$$

Dans les équations (4.118) et (4.119), on a un opérateur de diffusion non-linéaire dans le terme de gauche et un terme de couplage dans le terme de droite. Laissons de côté le couplage pour le moment et intéressons-nous d'abord à l'opérateur de diffusion du terme de gauche. Les deux équations s'écrivent sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u, x) \frac{\partial}{\partial x} u \right) = 0, \quad D(u, x) > 0, \quad (4.120)$$

avec un coefficient de diffusion $D(u, x)$, dépendant de la position x et de l'inconnue u . C'est le cas de la diffusion de Spitzer-Härm dans l'équation Macro, avec $u = T_e$ et $D(T_e, x) = K_{SH}$. Par ailleurs, le coefficient de diffusion de l'équation Micro contient deux contributions : une première, dépendant uniquement des variables d'espace x et de vitesse v , avec $u = g_0$ et $D(x) = v^5 / (33Y_{ei}n_i)$; et une seconde, faisant intervenir le champ électrique, via un projecteur de courant nul, introduisant une non-linéarité et couplant tout les groupes de vitesse entre eux. On propose la semi-discrétisation 1D en espace et conservative suivante :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{D_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} - u_j}{(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)/2} - D_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j - u_{j-1}}{(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2}}{\Delta x_j} = 0, \quad (4.121)$$

où $j \in [1, J]$ est l'indice de maille, avec Δx_j le volume de maille.

De sorte à réduire la sensibilité de la discrétisation au volume des mailles, il est courant de considérer un schéma d'équilibre, permettant de capturer les solutions stationnaires, et ainsi assurer la continuité des flux aux interfaces des mailles. On pose :

$$D_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} - u_j}{(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)/2} = D_{j+1} \frac{u_{j+1} - u_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{j+1}/2} = D_j \frac{u_{j+\frac{1}{2}} - u_j}{\Delta x_j/2}, \quad (4.122)$$

ce qui donne :

$$u_{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_j D_j / \Delta x_j + u_{j+1} D_{j+1} / \Delta x_{j+1}}{D_j / \Delta x_j + D_{j+1} / \Delta x_{j+1}}, \quad (4.123)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{\Delta x_j \Delta x_{j+1}} \frac{D_j D_{j+1}}{D_j/\Delta x_j + D_{j+1}/\Delta x_{j+1}}. \quad (4.124)$$

Concernant la discrétisation en temps, il est également courant de considérer une discrétisation implicite, avec une procédure itérative. Nous aurons deux procédures itératives distinctes pour l'équation Macro et l'équation Micro. D'une part, la discrétisation choisie pour l'équation Macro est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{(n+1),M+1} - u_j^{(n)}}{\Delta t} - D_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \frac{u_{j+1}^{(n+1),M+1} - u_j^{(n+1),M+1}}{\Delta x_j(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)/2} \\ + D_{j-\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \frac{u_j^{(n+1),M+1} - u_{j-1}^{(n+1),M+1}}{\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} = 0, \end{aligned} \quad (4.125)$$

où M désigne l'indice des sous-itérés de l'équation Macro. Pour l'équation Micro la semi-discrétisation spatiale et temporelle choisie est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,g}^{(n+1),m+1} - u_{j,g}^{(n)}}{\Delta t} - \sum_{g'} \left[D_{j+\frac{1}{2},g'}^{(n+1),m} \frac{u_{j+1,g'}^{(n+1),m} - u_{j,g'}^{(n+1),m+1}}{\Delta x_j(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)/2} \right. \\ \left. + D_{j-\frac{1}{2},g'}^{(n+1),m} \frac{u_{j,g'}^{(n+1),m+1} - u_{j-1,g'}^{(n+1),m}}{\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

où m désigne l'indice des itérations de l'équation Micro, et avec u et D donnés par :

$$u = g_0 \quad \text{et} \quad D_{j+\frac{1}{2},g'}^{(n+1),m} = \frac{Z_i v_{g'}^5}{3Y_{ei} n_e} \left(\delta_{g,g'} - \left[\frac{\frac{1}{v} \partial_v f_0}{6 \langle v^5 f_0 \rangle} \right]_{i,g'}^m \right).$$

Le stencil des deux schémas respectifs pour les équations de diffusion Micro (4.126) et Macro (4.125) sont représentés sur la Figure 4.9. La résolution de chacune de ces équations implique l'inversion d'un ou de plusieurs systèmes linéaires :

- l'itération Macro, consistant à calculer l'ensemble des u_i^{M+1} pour $i \in [1, N]$, repose sur l'inversion d'un système tri-diagonal de taille $N \times N$, requérant seulement $O(N)$ opérations. Le stencil du schéma implicite étant de trois points en espace comme le montre la Figure 4.9
- l'itération Micro, consistant à calculer l'ensemble des u_i^{m+1} pour $i \in [1, N]$, repose sur l'inversion de N systèmes de taille $G \times G$. Le stencil du schéma implicite fait intervenir tous les groupes de vitesse associés à la maille d'espace d'indice j comme le montre la Figure 4.9

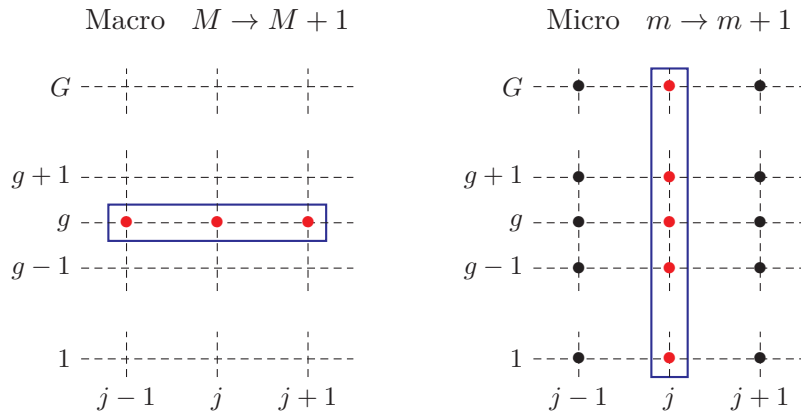


FIGURE 4.9 – Illustration du stencil du schéma pour l'équation de diffusion Macro (4.125) (à gauche) et pour l'équation de diffusion Micro (4.126) (à droite). Les points rouges représentent les mailles où la variable discrète est implicitée au sens du processus itératif (pris en $m + 1$ ou en $M + 1$), les points noirs représentent les mailles où la variable discrète est explicitee.

Remarque 4.4.5. L'implicitation locale en espace des itérations Micro permet, d'une part, de réduire la dimension des systèmes linéaires à la taille $G \times G$; et d'autre part, d'ouvrir la possibilité de paralléliser cette étape de l'algorithme puisque l'inversion des N systèmes linéaires peuvent se faire de façon totalement indépendante. Ceci est un argument important pour la capacité du schéma à s'adapter à des géométries d'espace 2D/3D, où la multiplication des systèmes $G \times G$ à résoudre peut être rendue plus abordable en termes de temps de calcul par une parallélisation massive de type décomposition de domaine.

Remarque 4.4.6. Deux procédures itératives distinctes ont été proposées, avec pour indices respectifs m et M . Nous avons vu que chacune de ces équations présente un terme de couplage en RHS, rendant les processus itératifs Micro et Macro dépendants l'un de l'autre. Cela signifie que les processus itératifs doivent être imbriqués l'un dans l'autre.

Nous allons faire le choix d'imbriquer la boucle des itérations Micro dans la boucle des itérations Macro. Ce choix est naturel dans le cadre d'un couplage fluide/cinétique puisqu'on cherche d'abord à fermer le système d'équations fluides. C'est également le caractère multi-échelle du système P1-diffusion qui nous encourage à imbriquer la boucle de résolution des processus rapides dans la boucle de résolution des processus lents.

Structure de l'algorithme

En suivant les considérations développées en Section 4.4.2, on propose l'algorithme de résolution suivant pour le système P1-diffusion Micro-Macro :

BOUCLE MACRO EXTERNE - indice d'itération M à $M + 1$

Résolution implicite de l'équation Macro (4.102), comme un système linéaire dans les coordonnées d'espace, résultant de la diffusion de Spitzer-Härm. Les contributions non-locales Micro sont supposées nulles ou déjà calculées implicitement.

BOUCLE MICRO INTERNE - indice d'itération m à $m + 1$

BOUCLE SUR LES MAILLES EN ESPACE - j allant de 1 à N

Localement implicite, discrétisation itérative de l'équation Micro (4.57), comme un système linéaire dans les coordonnées de vitesse. (résolution d'un système de taille $G \times G$)

TEST DE CONVERGENCE - FIN DE LA BOUCLE MICRO

TEST DE CONVERGENCE - FIN DE LA BOUCLE MACRO

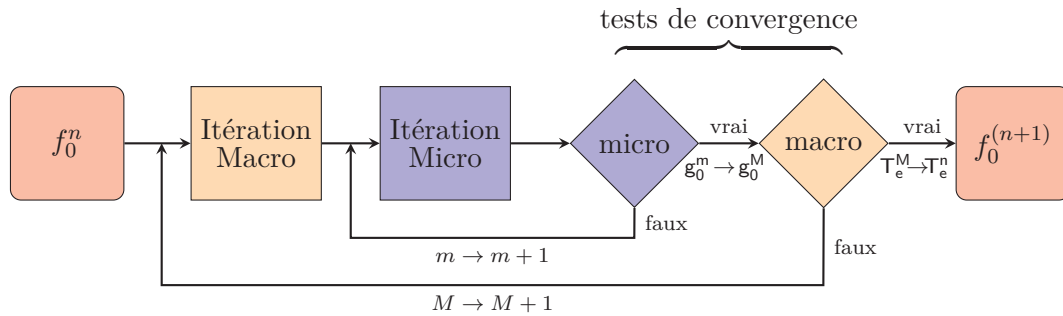


FIGURE 4.10 – Illustration de la structure algorithmique d'une itération temporelle dans le cadre de la méthode Implicite Itérative Micro Macro.

Chaque étape de cet algorithme sera détaillée dans les sous-sections suivantes.

Remarque 4.4.7. L'algorithme proposé repose sur la convergence des sous-itérations Micro et Macro. Nous n'avons pas de résultat théorique garantissant de telles propriétés. En revanche, les tests numériques que nous avons réalisés et que nous présenterons en Section 4.5 montrent des calculs qui convergent sans difficulté. Pour y arriver, nous imposons, dans les sections 4.4.3 et 4.4.3, d'une part, la cohérence entre les flux discrets Micro et Macro, et d'autre part, la cohérence entre les critères de convergence des équations Micro et Macro.

Discrétisation complète de l'équation Micro

Considérons ici et par la suite, une discrétisation 1D en espace similaire à celle proposée dans le Chapitre 3. Le domaine est pavé par J mailles de taille Δx_j avec $j \in [1, J]$ pour indice de maille. On introduit également $\Delta x_0 = \Delta x_{J+1} = 0$ et on note $\Delta x_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(\Delta x_j + \Delta x_{j\pm 1})$ les tailles des mailles duales pour la diffusion spatiale. On suppose également, en suivant l'algorithme proposé en Section 4.4.2, que la température est calculée à l'itération Macro M , précédent les itérations Micro internes. L'équation Micro s'écrit

4. Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion

donc, à une sous-itération m donnée et un groupe de vitesse $g \in [1, G]$ donné :

$$\begin{aligned}
& \frac{g_{0,g,j}^{(n+1),m+1} - g_{0,g,j}^{(n)}}{\Delta t} + [\Pi_N]_{j,g}^{(n+1),m,m+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} (vg_{1,x}) \right) \\
& - \frac{e}{m_e} E_{x,j}^{(n+1),m} \cdot \left[(v^2 g_{1,x})_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} - (v^2 g_{1,x})_{g-\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} \right] / (v^2 \Delta v)_g \\
& - \left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right]_{g,j}^{(n+1),m,m+1} \\
& = - [\Pi_N]_{j,g}^{(n+1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} (vf_{1,x}^M) \right) \\
& + \frac{e}{m_e} E_{x,j}^{(n+1),m} \cdot \left[(v^2 f_{1,x}^M)_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} - (v^2 f_{1,x}^M)_{g-\frac{1}{2},j}^{(n+1)} \right] / (v^2 \Delta v)_g, \quad (4.127)
\end{aligned}$$

où les indices M des itérés Macro ont été omis sans ambiguïté et :

$$[\Pi_N]_{j,g}^{(n+1),m,m+1}(\varphi) = \varphi_{g,j}^{(n+1),m,m+1} - \bar{K}_{g,j}^{(n+1)} \sum_{g'=1}^G \left(\frac{1}{2} m_e v_{g'}^2 \right) \varphi_{g',j}^{(n+1),m,m+1} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.128)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (vg_{1,x}) \right]_{g,j}^{(n+1),m,m+1} = \left[(vg_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} - (vg_{1,x})_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} \right] / \Delta x_j, \quad (4.129)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (vf_{1,x}^M) \right]_{g,j}^{(n+1)} = \left[(vf_{1,x}^M)_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} - (vf_{1,x}^M)_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} \right] / \Delta x_j, \quad (4.130)$$

$$E_{x,j}^{(n+1),m} = \sum_{g=1}^G \delta E_{x,g,j}^{(n+1),m} (v^2 \Delta v)_g. \quad (4.131)$$

Les expressions discrètes de l'opérateur de collisions $\left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right]_{g,j}^{(n+1),m,m+1}$, du champ électrique $\delta E_{x,g,j}^{(n+1),m}$ et aussi de celles associées aux flux $g_{1,x}$ et $f_{1,x}^M$, seront données dans les Sections 4.4.2 à 4.4.3.

Flux localement implicites de diffusion généralisée en espace

La discrétisation du terme de flux de diffusion généralisée en espace, contenu dans la contribution h_1 , est choisie localement implicite, suivant l'analyse de la Section 4.4.1. Elle s'écrit, pour un groupe de vitesse $g \in [1, G]$ donné comme :

$$(vh_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = - \left[\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \right]_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} [\Pi_{f_0}]_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} \left(v^5 \frac{\partial}{\partial x} g_0 \right), \quad (4.132)$$

avec :

$$\begin{aligned}
[\Pi_{f_0}]_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1}(\varphi) &= \varphi_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} - \frac{\left(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m}}{\sum_{g'=1}^G \left(v^4 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_{g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m} (v^2 \Delta v)_{g'}} \\
&\quad \times \sum_{g'=1}^G \varphi_{g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} (v^2 \Delta v)_{g'}, \quad (4.133)
\end{aligned}$$

et avec les flux spatiaux non-conservatifs et localement implicites :

$$\left[v^5 \frac{\partial}{\partial x} g_0 \right]_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = v_g^5 \frac{g_{0,g,j+1}^{(n+1),m} - g_{0,g,j}^{(n+1),m+1}}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}}, \quad (4.134)$$

$$\left[v^5 \frac{\partial}{\partial x} g_0 \right]_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = v_g^5 \frac{g_{0,g,j}^{(n+1),m+1} - g_{0,g,j-1}^{(n+1),m}}{\Delta x_{j-\frac{1}{2}}}. \quad (4.135)$$

Flux localement implicites d'advection généralisée en espace

La discrétisation des flux d'advection généralisée en espace, correspondant aux contributions l_1 et d_1 du flux cinétique non-local, est localement implicite, suivant l'analyse de la Section 4.4.1. Elle s'écrit, pour un groupe de vitesse $g \in [1, G]$ donné comme :

$$\begin{aligned} (vl_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} &= \left[\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \right]_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} \left[\frac{eE_x^M}{m_e} \right]_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} \left[\frac{\sum_{g'=1}^G M_{g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} (v^2 \Delta v)_{g'}}{\sum_{g'=1}^G f_{0,g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m} (v^2 \Delta v)_{g'}} \right] \\ &\times [\Pi_M]_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v} \right), \quad g \in [1, G], \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned} (v^2 d_{1,x})_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} &= - \left[\frac{1}{3Y_{ei}n_i} \right]_j^{(n)} \left[\frac{\sum_{g'=1}^G M_{g',j}^{(n+1)} (v^2 \Delta v)_{g'}}{\sum_{g'=1}^G f_{0,g',j}^{(n+1),m} (v^2 \Delta v)_{g'}} \right] \\ &\times [\hat{\Pi}_M]_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} \left(v^6 \frac{\partial}{\partial x} g_0 \right), \quad g \in [0, G], \end{aligned} \quad (4.137)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\Pi_M]_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} (\varphi) &= \varphi_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} - \frac{\left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1)}}{\sum_{g'=1}^G \left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} (v^2 \Delta v)_{g'}} \\ &\times \sum_{g'=1}^G \varphi_{g',j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} (v^2 \Delta v)_{g'}, \end{aligned} \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\Pi}_M]_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} (\varphi) &= \varphi_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} - \frac{\left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} v_{g+\frac{1}{2}}}{\sum_{g'=0}^G \left(v^4 \frac{\partial M}{\partial v} \right)_{g'+\frac{1}{2},j}^{(n+1)} v_{g'+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \\ &\times \sum_{g'=0}^G \varphi_{g'+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} (v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$\left(v^6 \frac{\partial}{\partial x} g_0 \right)_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} = v_{g+\frac{1}{2}}^6 \left[g_{0,g+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} - g_{0,g+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} \right] / \Delta x_j. \quad (4.140)$$

4. Discrétisation implicite d'un couplage fluide/cinétique micro-macro du modèle P1-Diffusion

La discrétisation upwind, localement implicite de l'advection généralisée des flux en espace, s'exprime à l'aide des relations suivantes :

$$\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = \begin{cases} \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1} & \text{si } E_x^M \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} \leq 0, \\ \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j+1}^{(n+1),m} & \text{si } E_x^M \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} \geq 0, \end{cases} \quad (4.141)$$

$$\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = \begin{cases} \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1} & \text{si } E_x^M \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} \geq 0, \\ \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g,j-1}^{(n+1),m} & \text{si } E_x^M \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} \leq 0, \end{cases} \quad (4.142)$$

$$g_{0,g+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = \begin{cases} g_{0,g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m+1} & \text{si } E_x \Big|_j^{(n+1)} \geq 0, \\ g_{0,g+\frac{1}{2},j+1}^{(n+1),m} & \text{si } E_x \Big|_j^{(n+1)} \leq 0, \end{cases} \quad (4.143)$$

$$g_{0,g+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1} = \begin{cases} g_{0,g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m+1} & \text{si } E_x \Big|_j^{(n+1)} \leq 0, \\ g_{0,g+\frac{1}{2},j-1}^{(n+1),m} & \text{si } E_x \Big|_j^{(n+1)} \geq 0. \end{cases} \quad (4.144)$$

Discrétisation implicite des flux de diffusion généralisée en vitesse

La discrétisation des flux d'avection généralisée en espace, correspondant à la contribution b_1 du flux cinétique non-local, est implicite et conservative. Elle s'écrit, pour un groupe de vitesse $g \in [1, G]$ donné comme le produit de :

$$E_{x,j}^{(n+1),m} = \sum_{g=0}^G \delta E_{x,g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m} v_{g+\frac{1}{2}} (v \Delta v)_{g+\frac{1}{2}}, \quad (4.145)$$

et de :

$$\left(v^2 b_{1,x}\right)_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m,m+1} = \frac{6}{[3Y_{ei} n_i]_j^{(n)}} \left[\sum_{g'=1}^G g_{0,g',j}^{(n+1),m} v_{g'}^3 (v^2 \Delta v)_{g'} \right] \hat{\Pi}_{g_0,g+\frac{1}{2}} \left(v \frac{e \delta E_x}{m_e} \right), \quad (4.146)$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{g_0,g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m,m+1}(\varphi) &= \varphi_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m} - \frac{\left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m+1} v_{g+\frac{1}{2}}}{\sum_{g'=0}^G \left(v^4 \frac{\partial g_0}{\partial v}\right)_{g'+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1} v_{g'+\frac{1}{2},j} (v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \sum_{g'=0}^G \varphi_{g'+\frac{1}{2},j}^{(n+1),m} (v \Delta v)_{g'+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

4.4.3 Schéma implicite contracté pour l'opérateur de collisions de Fokker-Planck-Landau

L'opérateur de collisions de Fokker-Planck-Landau Micro-Macro, dans l'équation (4.127), est implicite en temps en s'inspirant de la méthode implicite contractée proposée par M.

Lemou et L. Mieussens [37], et également étudiée par C. Buet et K.C. Le Thanh [8] dans sa variante \mathcal{S}_3 où le terme $g_{0,g+\frac{1}{2}}$ est décentré, aussi appelé "schéma d'équilibre" et tiré des travaux de E.W. Larsen [33]. Soit $g \in [1; G]$; on omet le l'indice j de maille en espace. L'opérateur de collision totalement discrétisé s'écrit de la façon suivante :

$$\left[\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0) + \mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0) \right]_g^{(n+1),m+\frac{1}{2}} = \left(K_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+\frac{1}{2}} - K_{g-\frac{1}{2}}^{(n+1),m+\frac{1}{2}} \right) / (v^2 \Delta v)_g, \quad (4.148)$$

avec les flux conservatifs en vitesse exprimés à l'aide des potentiels de Rosenbluth et implicites de façon à conserver la symétrie globale de l'opérateur de collisions :

$$\begin{aligned} K_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+\frac{1}{2}} &= E_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1)}(M)g_{0,g+1}^{(n+1),m+1} + D_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1}(g_0) \frac{M_{g+1}^{(n+1)} - M_g^{(n+1)}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \\ &+ E_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1}(g_0)M_{g+1}^{(n+1)} + D_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1)}(M) \frac{g_{0,g+1}^{(n+1),m+1} - g_{0,g}^{(n+1),m+1}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}} \\ &+ E_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+1}(g_0)g_{0,g+1}^{(n+1),m} + D_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m}(g_0) \frac{g_{0,g+1}^{(n+1),m+1} - g_{0,g}^{(n+1),m+1}}{(v\Delta v)_{g+\frac{1}{2}}}, \\ &\text{avec } g \in [1, G-1], \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$K_{1/2}^{(n+1),m+\frac{1}{2}} = K_{g+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.150)$$

La partie quadratique $\mathcal{C}_0^{ee}(g_0, g_0)$ est discrétisée de façon analogue au schéma \mathcal{S}_3 implicite contracté [8], tandis que la partie linéaire $\mathcal{L}_{0,M}^{ee}(g_0)$, est totalement implicite. Dans la Section 4.5 dédiée aux tests numériques, nous réaliserons les tests classiques de Rosenbluth et monoénergétique, et nous comparerons le schéma implicite contracté Micro-Macro avec le schéma implicite contracté classique.

Discrétisation complète de l'équation Macro

On admet, suivant l'algorithme de résolution proposé en Section 4.4.2, que la distribution Micro a été calculée suite à la convergence de la boucle itérative Micro. On omet donc sans ambiguïté l'indice m des itérés Micro. L'équation Macro discrète, conservative et implicite, s'écrit donc à l'itération M de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{3n_{e,j}^{(n)} T_{e,j}^{(n+1),M+1} - T_{e,j}^{(n)}}{2 \Delta t} - \frac{1}{\Delta x_i} \left[\kappa_{SH,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \frac{T_{e,j+1}^{(n+1),M+1} - T_{e,j}^{(n+1),M+1}}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \kappa_{SH,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \frac{T_{e,j}^{(n+1),M+1} - T_{e,j-1}^{(n+1),M+1}}{\Delta x_{j-\frac{1}{2}}} \right] \\ &= -\frac{1}{3\Delta x_i} \left[\sum_{g=1}^G (vg_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \right. \\ &\quad \left. - \sum_{g=1}^G (vg_{1,x})_{g,j-\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \right], \end{aligned} \quad (4.151)$$

où le coefficient de Spitzer-Härm multigroupe est discrétisé avec une moyenne harmonique aux interfaces des mailles, comme dans l'équation (4.124), à partir de leurs expressions discrètes sur le maillage primal :

$$[\kappa_{SH}]_j^{(n+1),M} = \frac{1}{3 [3Y_{ei}n_i]_j^{(n)} T_{e,j}^{(n+1),M}} \times \sum_{g=1}^G v_g^5 M_{g,j}^{(n+1),M} \left[-\frac{3}{2} + \left(\frac{m_e v_g^2}{2k_B T_{e,j}^{*(n+1),M}} - \frac{5}{2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g. \quad (4.152)$$

Le flux de chaleur non-local dans le terme de droite de l'équation (4.151) :

$$\sum_{g=1}^G (v g_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),M} \left(\frac{1}{2} m_e v_g^2 \right) (v^2 \Delta v)_g \quad \text{avec} \quad g_{1,x} = h_{1,x} + l_{1,x},$$

est discrétisé de façon consistante avec l'équation Micro. C'est possible car, à convergence des itérations Micro, la discrétisation de $(v g_{1,x})_{g,j+\frac{1}{2}}^{(n+1),m+\frac{1}{2}}$ devient conservative au niveau discret.

Critère de convergence cohérent entre les itérations Micro et Macro

Le flux de chaleur non-local dans l'équation Macro a été discrétisé de façon cohérente avec le flux de chaleur correspondant dans l'équation Micro, comme décrit dans la Section 4.4.3. Cela nous amène à choisir un critère de convergence des boucles itératives imbriquées Micro et Macro, qui est cohérent du point de vue du couplage. Le critère calcule la norme $L^2(I)$ de la différence relative entre les états itérés, pour la température T_e , et le flux de chaleur non-local associé $\left\langle \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) (v h_{1,x} + v l_{1,x}) \right\rangle$.

4.5 Tests élémentaires de vérification

Dans cette section, nous allons présenter les tests de vérification du bon fonctionnement du schéma numérique. Mais avant cela, nous allons décrire en quelques lignes l'implantation du schéma dans le code d'étude ainsi que le solveur algébrique utilisé.

Le code d'étude implantant le schéma Implicite Itératif Micro-Macro du modèle P1-Diffusion a été entièrement écrit en C++ au cours de la thèse et utilise pour la résolution des systèmes linéaires Micro et Macro une librairie C++ du CEA/DAM appelée LIBALGEBRA. L'algorithme mis en oeuvre pour la résolution des systèmes linéaires est une méthode BiCGstab (de gradient bi-conjugué stabilisé).

Convergence des itérations Micro et Macro

Nous avons mesuré la convergence des sous-itérations Micro et Macro en norme $L^2(\Omega)$ lors de la première itération temporelle (voir Figure 4.12). Nous avons illustré Figure 4.11 l'effet des sous-itérations sur la distribution f_0 (à gauche) et sur l'intégrand du flux de chaleur $f_1 v^5$ (à droite) dans la zone froide en $x = 0.14$ cm. La distribution est initialement maxwellienne et le flux de chaleur est initialement quasi-nul. On observe alors la délocalisation de la distribution au cours des sous itérations Micro (traits pleins), puis au cours des itérations Macro (traits pointillés). On rappelle que les sous-itérations Micro et Macro sont

imbriquées et qu'entre deux itérations Macro on refait converger la boucle Micro. Nous n'avons tracé ici que la première boucle d'itérations Micro ($n = 1, M = 1, m \in [1, 1120]$) et la première boucle d'itérations Macro ($n = 1, M \in [1, 16]$), jusqu'à l'itéré $n = 2$ (en trait noir plein).

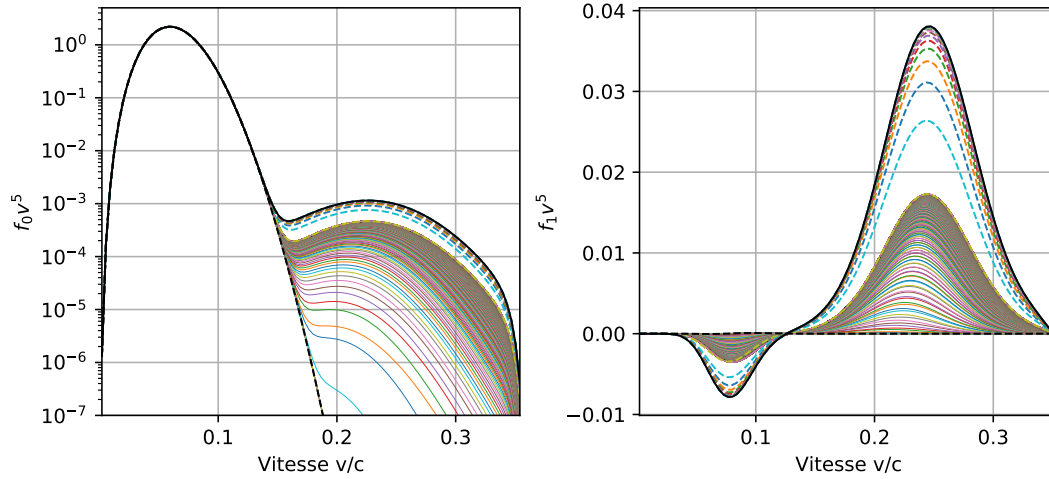


FIGURE 4.11 – Illustration des sous-itérations Micro (en traits pleins fin) et des sous-itérations Macro (en traits pointillés) de la première itération temporelle (en trait plein noir). Pour $f_0 v^5$ (à gauche) et $f_1 v^5$ (à droite) en $x = 0.14$ cm.

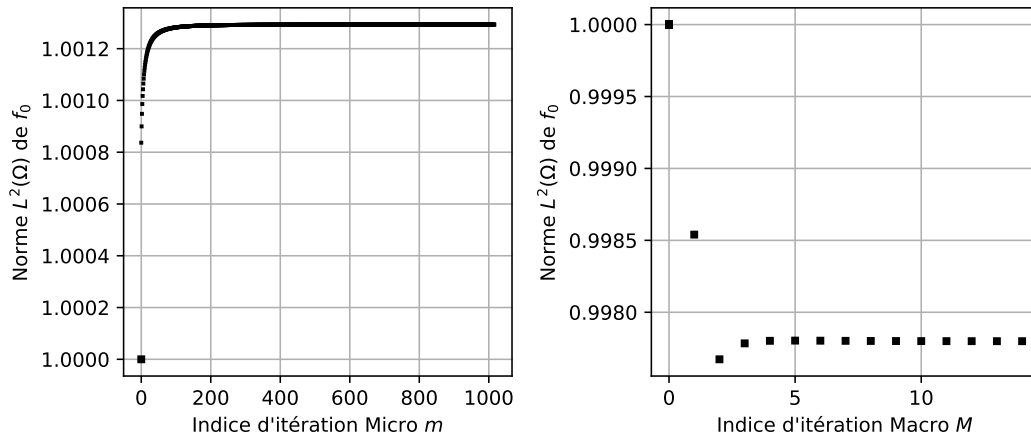


FIGURE 4.12 – Convergence en norme $L^2(\Omega)$ des itérations Micro (à gauche) et Macro (à droite) avec $\Omega = I \times \mathbb{R}_+$.

Analyse de stabilité de l'opérateur de collisions

Nous avons proposé en Section 4.4.3 une discrétisation de l'opérateur de collisions électron-électron isotrope avec une adaptation du schéma d'équilibre implicite contracté

[36, 37] pour la décomposition Micro-Macro. On ne considère pas les itérations Micro dans ce cas-test, car elles ont été présentées dans le cadre du traitement de la discrétisation spatio-temporelle, or nous présentons ici un cas-test 0D sans description spatiale. La décomposition Micro-Macro nous fait considérer g_0 comme variable discrète, devant relaxer vers zéro pour toutes les vitesses, par rapport à f_0 relaxant vers la maxwellienne. Cette réécriture nous permet d'impliciter totalement la partie linéaire de l'opérateur de collisions, ce qui permet d'améliorer substantiellement la stabilité et la précision du schéma. Rappelons que parmi les schémas implicites testés par C. Buet et K.-C. Le Thanh [8], le schéma implicite contracté est le plus rapide, mais se présente moins robuste. Afin d'étudier la stabilité et la précision du schéma implicite contracté Micro-Macro (ICMM), nous allons reproduire le test 0D monoénergétique, se présentant comme une version plus raide du cas-test classique de Rosenbluth [8, 45, 49]. Pour reproduire les résultats de C. Buet et K.-C. Le Thanh [8], on introduit le même adimensionnement, basé sur le temps collisionnel suivant :

$$\tau_{ee} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\langle f_0 \rangle} \left(\frac{\langle v^2 f_0 \rangle}{\langle f_0 \rangle} \right)^{3/2},$$

construit au temps initial $t = 0$ à partir de la distribution initiale du cas-test monoénergétique, qui est une distribution de Dirac centrée en $v = 0.3$ $f_0(t = 0, v) = \delta(v - 0.3)/v^2$. Nous choisissons une répartition uniforme des G groupes de vitesse, avec la vitesse maximale $v_G = 1$. Sur les figures 4.13-4.15, on reproduit les résultats de C. Buet et K.-C. Le Thanh [8] pour le schéma implicite contracté (CI). La fonction de distribution $f_0 = M + g_0$ est tracée Figure 4.13 à plusieurs temps pour illustrer la relaxation de la distribution vers la maxwellienne, considérant un pas de temps constant $\Delta t = \tau_{ee}$. L'évolution de l'entropie $\langle f_0 \ln f_0 \rangle$ et du moment d'ordre quatre, $\langle v^4 f_0 \rangle$, sont montrées sur les figures 4.14-4.15 pour différents pas de temps et comparées à la résolution explicite, celle-ci souffrant d'une contrainte CFL importante sur le pas de temps : $\Delta t = 0.001\tau_{ee}$, tandis que le schéma implicite contracté est stable pour des pas de temps de l'ordre de τ_{ee} . Cependant, le schéma implicite contracté devient instable pour des pas de temps atteignant $\Delta t = 10\tau_{ee}$, avec un taux de relaxation de l'entropie incorrect et un moment d'ordre quatre qui ne semble pas converger. Le schéma implicite contracté Micro-Macro (noté MM), est stable et précis pour des pas de temps de l'ordre de $\Delta t = 10\tau_{ee}$. L'empreinte de la discontinuité initiale de la distribution est également moins marquée sur les premières itérations en regardant la figure 4.13.

Les pas de temps choisis sont constants, valant $0.1\tau_{ee}$, τ_{ee} , ou $10\tau_{ee}$.

4.6 Conclusion

Nous avons construit dans ce chapitre un schéma totalement implicite pour le système P1-Diffusion Micro-Macro. Ce schéma est basé sur une méthode itérative localement implicite inspirée de travaux récents appliqués au transfert radiatif [4], et que nous avons illustrée sur l'exemple simple de l'advection-diffusion. Ce schéma possède des propriétés importantes dans le cadre de l'advection-diffusion comme la stabilité inconditionnelle (de chaque sous-itération) et la conservativité (à convergence). Le schéma est basé sur un processus itératif dont les étapes indépendantes sont facilement parallélisables. Le schéma implicite itératif proposé pour le système P1-Diffusion Micro-Macro permet d'obtenir un schéma totalement implicite dont la résolution se ramène à des opérations simples et indépendantes (inversion de systèmes $G \times G$) pouvant être parallélisées par une méthode de décomposition de domaine par exemple. Ce type de schéma ayant fait ses preuves dans des géométries 2D non-structurées [4], nous pensons qu'il est un bon candidat pour la

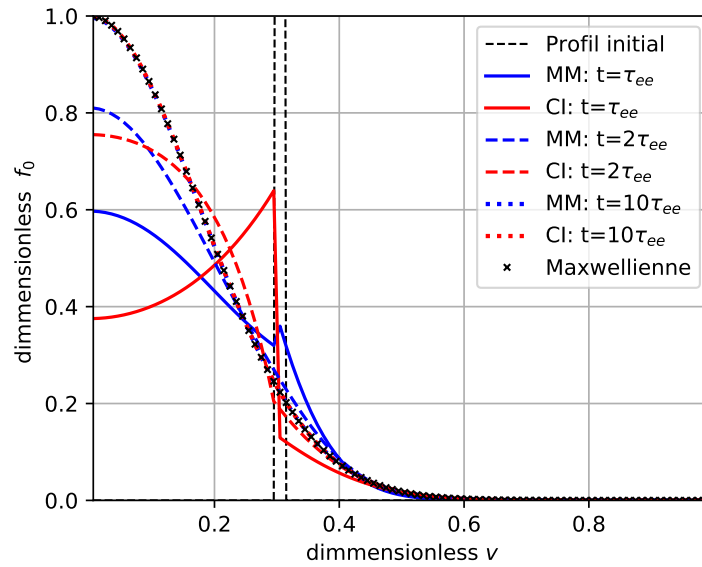


FIGURE 4.13 – Distribution normalisée $f_0/\|f_0\|_\infty$ en fonction de la vitesse adimensionnée v . Une comparaison des solutions obtenues à partir des schémas implicite contracté [36, 37, 8] (IC en rouge) et notre adaptation Micro-Macro (MM en bleu). Pour un pas de temps constant : $\Delta t = \tau_{ee}$.

discrétisation toute implicite du modèle P1-Diffusion Micro-Macro dans le cadre de la fermeture des équations de la MHD résistive. Nous allons confronter ce schéma à des références cinétiques sur des cas-tests représentatifs des configurations rencontrées en FCI dans le chapitre suivant.

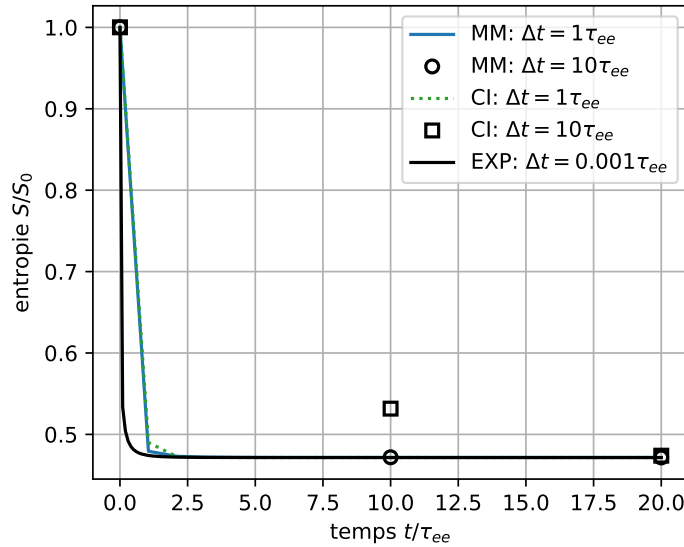


FIGURE 4.14 – Entropie $\langle f_0 \ln f_0 \rangle$, en fonction du temps adimensionné t/τ_{ee} . Les schémas explicite (EXP), implicite contracté (CI), et implicite contracté Micro-Macro (MM), sont comparés pour des pas de temps différents.

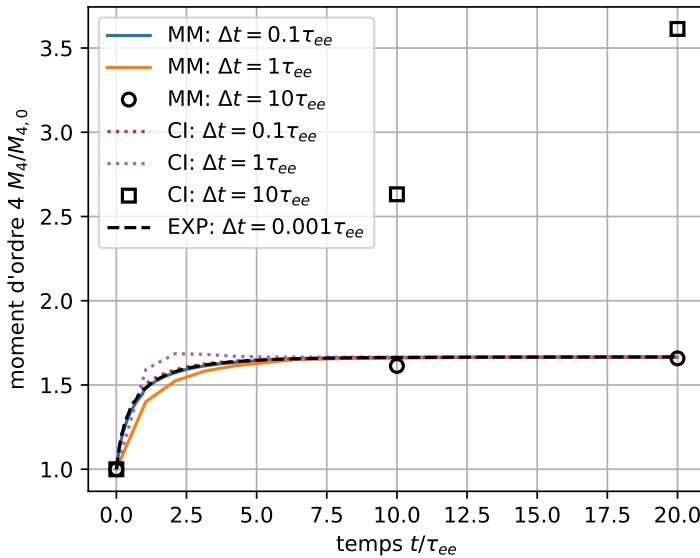


FIGURE 4.15 – Moment d'ordre quatre $\langle f_0 v^4 \rangle$, en fonction du temps adimensionné t/τ_{ee} . Les schémas explicite (EXP), implicite contracté (CI), et implicite contracté Micro-Macro (MM), sont comparés pour des pas de temps différents.

CHAPITRE 5

Évaluation physique du modèle P1-Diffusion

Sommaire

5.1	Introduction	121
5.2	Présentation du Code OSHUN	121
5.3	Présentation du cas-test Q1D	122
5.3.1	Profils initiaux et conditions aux bords	123
5.3.2	Solution de Spitzer-Härm	123
5.4	Analyse des résultats obtenus avec OSHUN, P1-Diffusion et Spitzer-Härm	124
5.5	Cas-test stationnaire Q1D-C	134
5.6	Conclusion	135

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les résultats numériques obtenus à l'aide du schéma développé dans le chapitre précédent. Un code d'étude 1D x -1D v implémente ce schéma dans cet objectif. Nous allons confronter le modèle physico-numérique à un cas-test proposé par A. Chrisment et al. dans [9], représentatif des plasmas de FCI. Ce cas-test sera adapté pour capturer des solutions stationnaires. Nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus avec le code PN totalement cinétique OSHUN [51]. Paul-Edouard Masson-Laborde (CEA) a réalisé les simulations OSHUN avec lesquelles nous nous comparons ici.

5.2 Présentation du Code OSHUN

OSHUN [51] est un code Vlasov-Fokker-Planck parallèle et relativiste, 2D espace 3D vitesse, développé principalement pour l'étude du transport électronique et des instabilités rencontrées en interaction laser-plasma (ILP). Le code résout les équations de VFP développées en harmoniques sphériques, couplées aux équations de Maxwell, et avec un opérateur de collisions de Fokker-Planck linéarisé. Le code OSHUN permet la résolution convergée en harmoniques sphériques de problèmes de transport électronique en présence de gradients raides, il est beaucoup utilisé pour la validation de modèles [10] [19] [42] [46].

Différences entre OSHUN et P1-Diffusion

Le modèle P1-Diffusion étant basé sur un développement harmonique sphérique de l'équation de VFPL, on peut considérer qu'il est un modèle réduit des équations résolues

par le code OSHUN. Nous allons donc énumérer toutes les différences entre OSHUN et P1-Diffusion.

Harmoniques d'ordre élevé et approximation diffusion

Le modèle P1-Diffusion est basé sur l'approximation P1, consistant à tronquer le développement en harmoniques sphériques de la distribution à l'ordre 1. Contrairement à OSHUN pouvant converger en harmoniques sphériques. L'approximation diffusion dans le modèle P1-Diffusion consiste à négliger la dérivée temporelle $\frac{\partial}{\partial t}f_1$ de la partie anisotrope de la distribution, cette approximation n'est pas faite dans OSHUN.

Collisions électron-électron

Les termes de collisions électron-électron isotropes sont traités de la même manière dans OSHUN et P1-Diffusion, en discrétisant l'opérateur de Fokker-Planck-Landau isotrope complet. Cependant, les termes anisotropes, linéarisés et intégrés dans la résolution des équations dans OSHUN, sont négligés dans P1-Diffusion, avec un fit du libre parcours moyen en Z pour récupérer le flux de Spitzer-Härm dans la limite Z faible. Cela se fait au détriment du champ électrique de Spitzer-Härm non retrouvé dans cette limite. Cette approximation cause dans la limite Z faible, un décalage systématique du profil des harmoniques d'ordre 1, $f_1(v)$, vers la droite (hautes vitesses) [9].

Remarque 5.2.1. Des extensions au modèle P1-Diffusion de base peuvent être envisagées pour inclure l'effet des contributions anisotropes de l'opérateur de collision [9]. Cette direction n'a pas été explorée dans ce manuscrit.

5.3 Présentation du cas-test Q1D

Nous allons présenter dans cette section le cas-test Q1D. C'est le cas-test présenté par A. Chrisment et al. [9], avec des paramètres identiques, décliné en deux variantes, iso-densité et isobare. Il s'agit d'un gradient de température initial de profil tangente hyperbolique, avec conditions aux bords à flux nul. La première variante du cas-test, Q1D-A, est à densité homogène, tandis que la seconde variante, Q1D-B, est à densité variable avec un profil tangente hyperbolique croisant le gradient de température de sorte à avoir une pression thermique $\frac{3}{2}n_e k_B T_e$ homogène. La dernière variante du cas test, Q1D-C est une étude stationnaire avec gradient de température et puits de densité.

Choix des paramètres physiques

Nous choisissons des paramètres physiques permettant de reproduire des conditions rencontrées en Fusion par Confinement Inertiel. On prend une charge constante $Z = 1$, correspondant à la charge des isotopes de l'hydrogène utilisés en FCI. Pour des raisons de simplicité et de reproductibilité, on prend une valeur unique et constante de logarithme coulombien, $\log \Lambda = 6.35$, pour les collisions électron-électron et électron-ion. La vitesse thermique de référence, $v_{the}^0 = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$, est prise en $T_e = 1$ keV. Le domaine 1D en espace est compris entre $x = 0$ et $x = 2017 \mu m$, et le domaine 1D en vitesse est compris entre $v = 0$ et $v = 6v_{the}^0$. Le temps final des simulations est $t = 22$ ps.

5.3.1 Profils initiaux et conditions aux bords

Le profil initial en température est identique pour les cas-tests Q1D-A et Q1D-B et est donné, en keV, par

$$T_e(x) = T_H - \frac{T_H - T_C}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0} \right) \right], \quad (5.1)$$

avec x exprimé en cm . Les profils de densité sont donnés, en cm^{-3} , par

$$(Q1D-A) : n_e(x) = 1.e21 \text{ cm}^{-3}, \quad (5.2)$$

$$(Q1D-B) : n_e(x)T_e(x) = n_H T_H, \quad n_H = 1.e21 \text{ cm}^{-3}. \quad (5.3)$$

La distribution initiale est la distribution Maxwellienne donnée par

$$M(t, x, v) = n_e(x) \left(\frac{2\pi k_B T_e(t, x)}{m_e} \right)^{-3/2} \exp \left(-v^2 \frac{m_e}{2k_B T_e(t, x)} \right). \quad (5.4)$$

Les profils initiaux de température, densité, flux chaleur, des composantes isotropes et anisotropes de distribution, pour les cas-tests Q1D-A et Q1D-B sont donnés respectivement Figure 5.1 et Figure 5.2. Initialement pour les cas-tests Q1D-A et Q1D-B, les flux de chaleurs sont identiques puisque le flux de chaleur de Spitzer-Härm ne dépend pas de la densité. Les conditions aux bords imposées sont des conditions de Neumann en T_e et g_0 , imposant un flux de chaleur nul aux bords.

5.3.2 Solution de Spitzer-Härm

Nous allons commencer par calculer la solution de Spitzer-Härm correspondant à ce problème. Le modèle de Spitzer-Härm a été retrouvé dans le chapitre 1 en injectant la distribution Maxwellienne (5.4) dans les équations (1.65) et (1.66), puis dans (1.64), et en intégrant en vitesse par rapport à $\frac{1}{2}m_e v^4 dv$. On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} T_e + \frac{3k_B n_e}{2} \nabla_x \cdot \mathbf{q}_{e,sh} = 0, \quad (5.5)$$

avec

$$\mathbf{q}_{e,sh} = 64 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Z_i m_e}{Y_{ei}^*} \left(\frac{k_B}{m_e} \right)^{7/2} T_e^{5/2} \nabla_x T_e. \quad (5.6)$$

On résout numériquement l'équation (5.5) discrétisée en espace de façon centrée, implicitement avec le solveur "Radau" de *Scipy*. On obtient, à $t = 22$ ps, les profils de température, de flux de chaleur de distribution isotrope et anisotrope tracés en Figure 5.3 et Figure 5.4.

Les profils de température et de flux de chaleur sont très asymétriques du fait de la forte dépendance en température du flux de chaleur $\mathbf{q}_{e,sh}$. La diffusion en température est donc plus forte dans la partie chaude que dans la partie froide. Les profils des contributions isotropes à la fonction de distribution, f_0 , sont maxwelliens, tandis que les profils de $f_1 v^5$, contribuant à la partie anisotrope de la distribution, semblent homothétiques, avec une amplitude maximale plus élevée dans la zone de gradient, et avec une translation vers les hautes vitesses dans la partie chaude du plasma et vers les basses vitesses dans la partie froide du plasma. Entre les cas-tests Q1D-A et Q1D-A, la seule différence est que la densité plus élevée dans la partie froide ralentit la diffusion en température dans cette zone.

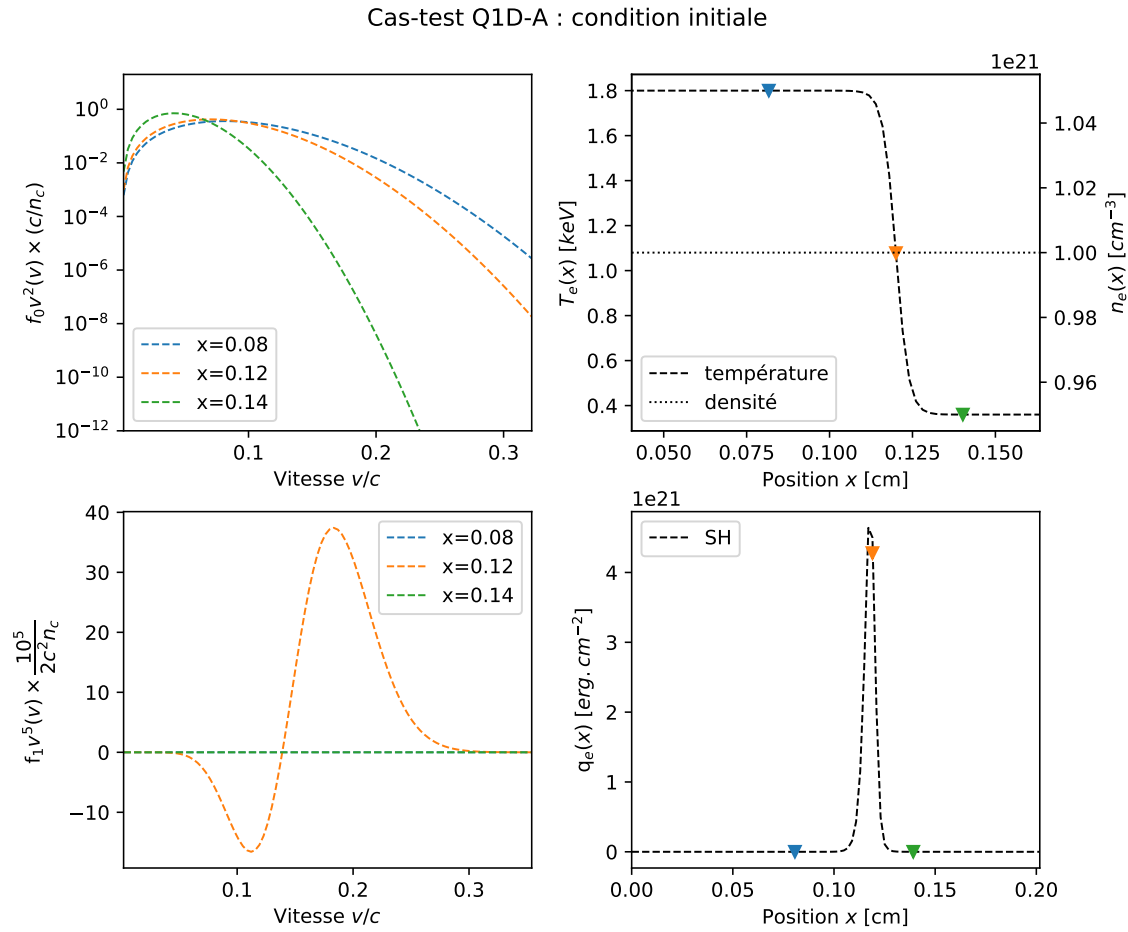


FIGURE 5.1 – Profils initiaux du cas-test A, Les profils de distribution anisotrope $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en trois points choisis (côté froid en $x = 0.14$, côté chaud en $x = 0.08$ et zone de transition $x = 0.12$) de la température T_e , tracée en haut à droite. Les profils de distribution anisotrope $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e tracés en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

5.4 Analyse des résultats obtenus avec OSHUN, P1-Diffusion et Spitzer-Härm

Nous avons choisi de comparer les simulations OSHUN, P1-Diffusion et SH sur le cas-test Q1D décrit dans la section précédente sur quatre grandeurs : la température T_e , le flux de chaleur q_e , et les quantités cinétiques $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ correspondant respectivement aux intégrants de T_e et q_e . Ces quantités seront comparées au temps final de la simulation $t = 22$ ps, et les quantités cinétiques sont prises en 3 points du domaine :

1. en $x = 0.08$ cm, dans la partie **chaude** du plasma
2. en $x = 0.12$ cm, dans la zone de **gradient raide** du plasma

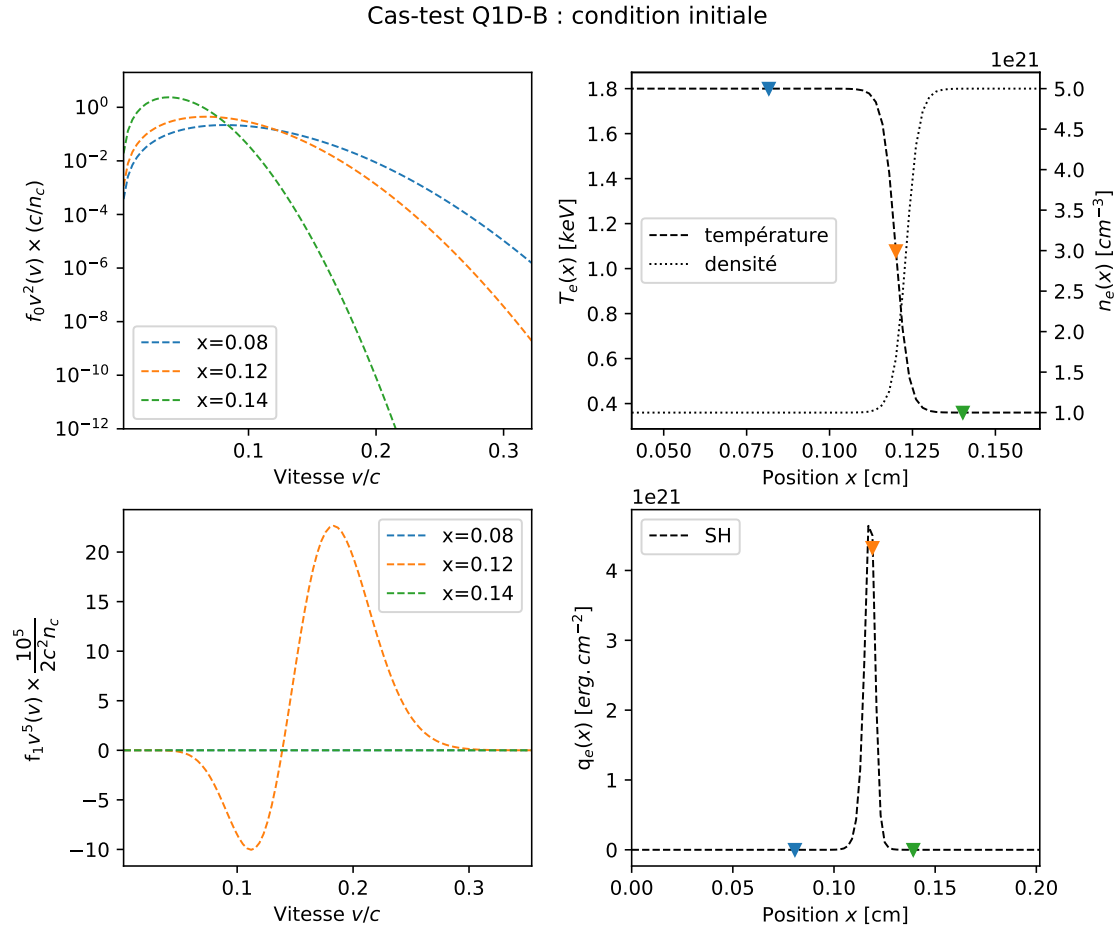


FIGURE 5.2 – Profils initiaux du cas-test B, Les profils de distribution anisotrope $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en trois points choisis (côté froid en $x = 0.14$, côté chaud en $x = 0.08$ et zone de transition $x = 0.12$) de la température T_e , tracée en haut à droite. Les profils de distribution anisotrope $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e tracés en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

3. en $x = 0.14$ cm, dans la partie **froide** du plasma

Les simulations P1-Diffusion sont réalisées sur un maillage uniforme en espace et en vitesse avec 100×100 mailles, et un pas de temps $\Delta t = 1$ ps. Les résultats de ces simulations sont montrés à $t = 22$ ps sur les figures 5.5 à 5.10. Sur chaque figure, les profils des composantes isotropes, $f_0 v^2$, et anisotrope, $f_1 v^5$, de la distribution sont tracés en certains points choisis du domaine. Nous allons comparer les résultats des simulation des cas-tests Q1D-A et Q1D-B obtenues avec P1-Diffusion, OSHUN, et Spitzer-Härm.

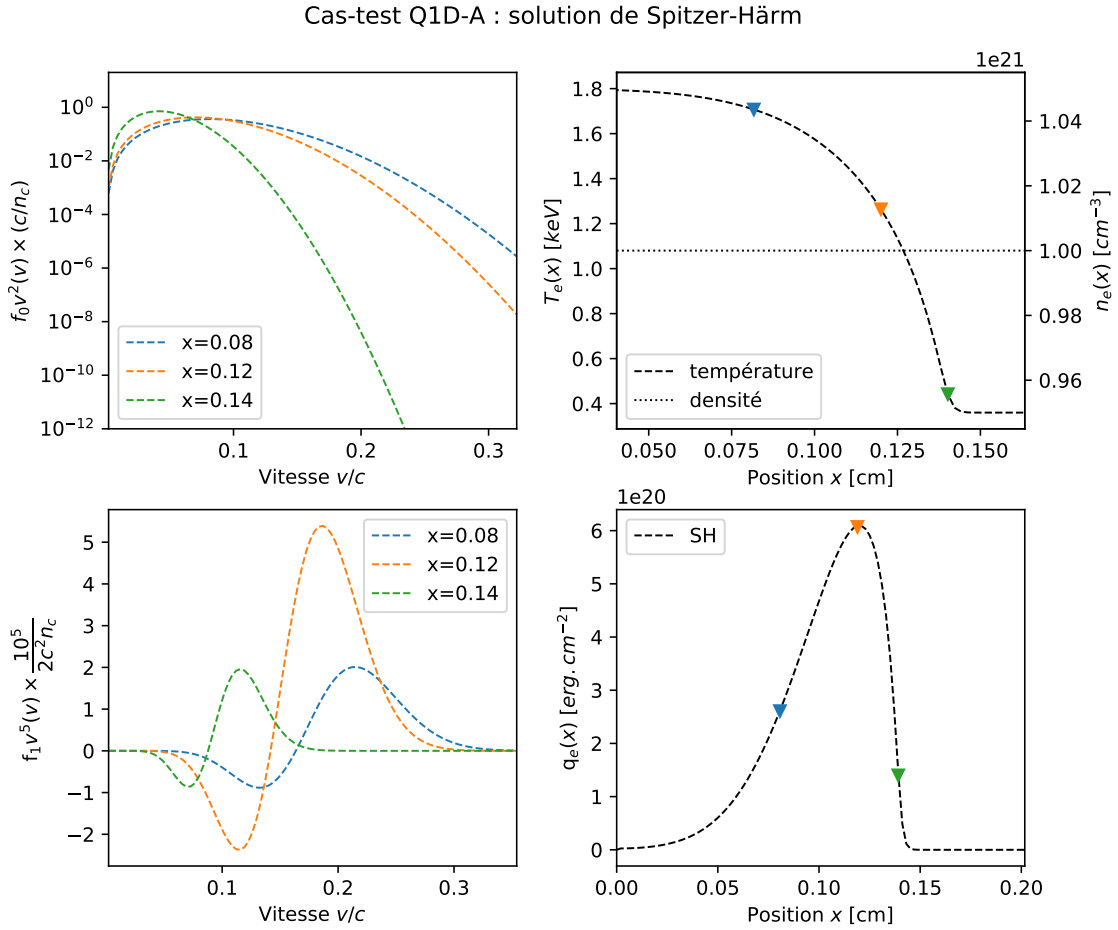


FIGURE 5.3 – Solution de Spitzer-Härm à $t = 22$ ps du cas-test A. Les profils de distribution anisotrope $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en trois points choisis (côté froid en $x = 0.14$, côté chaud en $x = 0.08$ et zone de transition $x = 0.12$) de la température T_e , tracée en haut à droite. Les profils de distribution anisotrope $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e tracés en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

Analyse des effets non-locaux

La première chose que l'on peut dire des figures 5.5 à 5.10 est qu'il y a un écart très important entre les profils donnés par Spitzer-Härm et ceux donnés par P1-Diffusion et OSHUN, témoignant d'une forte influence des effets non-locaux sur la dynamique du transport électronique, et que cet écart n'est pas uniformément réparti.

Commençons par exemple par analyser les figures 5.5, 5.6 et 5.7 correspondant au cas-test Q1D-A. Les simulations OSHUN et P1-Diffusion montrent un flux de chaleur beaucoup plus élevé que pour la simulation Spitzer-Härm dans la partie froide du plasma, pour $x > 0.14$ cm. En revanche, le flux de chaleur issu des simulations cinétiques est plus faible que dans la simulation Spitzer-Härm pour $x < 1000 \mu\text{m}$. Cela rend les profils de flux de chaleur et de température plus symétriques, comme si un phénomène non-local

Cas-test Q1D-B : solution de Spitzer-Härm

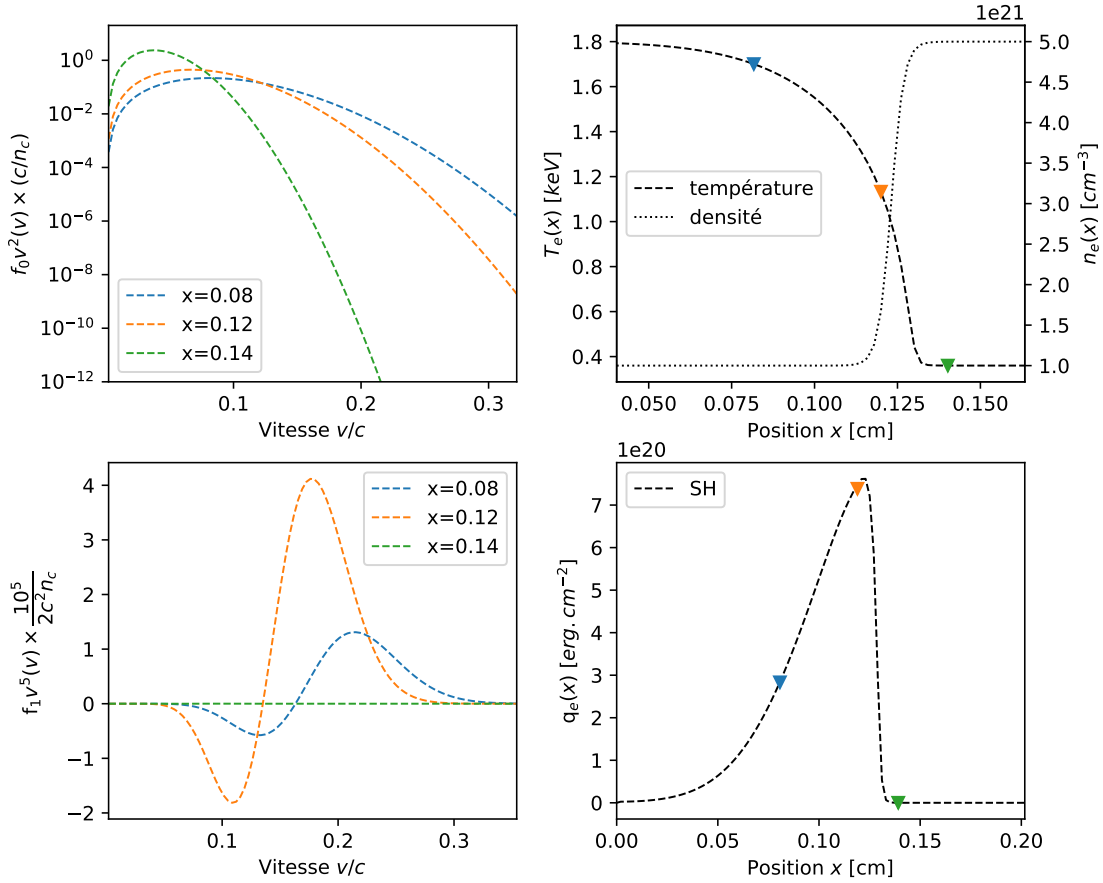


FIGURE 5.4 – Solution de Spitzer-Härm à $t=22$ ps du cas-test B. Les profils de distribution anisotrope $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en trois points choisis (côté froid en $x = 0.14$, côté chaud en $x = 0.08$ et zone de transition $x = 0.12$) de la température T_e , tracée en haut à droite. Les profils de distribution anisotrope $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e tracés en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

de convection de chaleur venait compenser l'asymétrie de la diffusion locale. En observant les profils de distribution en Figure 5.5, on constate une accumulation d'électrons de haute énergie ($v/c > 0.12$) par rapport à l'équilibre local dans la partie isotrope f_0 , et une sur-représentation de ces électrons dans l'intégrant du plus chaleur $f_1 v^5$. On observe également une légère déplétion de ces électrons en Figure 5.6. Ce phénomène est d'origine cinématique, en effet dans le cadre des interactions coulombiennes, le libre parcours moyen des électrons augmente avec leur énergie cinétique [20], les électrons de haute énergie sont donc moins collisionnels; cela est caractéristique des interactions longue portée, car plus les particules sont rapides, moins elles sont soumises longtemps au potentiel des autres particules. Du point de vue macroscopique, pour la température électronique, cela se traduit par un effet de préchauffage, car cette dynamique est plus rapide que la diffusion de Spitzer-Härm et vient "chauffer" le plasma au pied du gradient de température, dans la zone froide. Dans la zone chaude du plasma Figure 5.7, la délocalisation est moins forte,

avec des écarts à la maxwellienne plus faibles, on observe tout de même une part moins élevée des électrons chauds dans le flux de chaleur.

Dans le cas-test Q1D-B avec gradient de densité, illustré en figures 5.8, 5.9 et 5.10. Les phénomènes de transport non-local peuvent être aussi observés. La densité, cinq fois plus élevée dans la partie froide, ralentit beaucoup la diffusion de Spitzer-Härm et augmente la fréquence des collisions électron-électron forçant le retour à la maxwellienne. Malgré cela, le phénomène de préchauffage persiste, et le flux de chaleur montré en Figure 5.8 fortement dominé par les électrons chauds ($v/c \sim 0.2$). La déplétion des électrons chauds au flux de chaleur dans la zone chaude Figure 5.10 est également très visible.

Comparaison des profils cinétiques OSHUN et P1-Diffusion

Les profils obtenus avec OSHUN et P1-Diffusion montrent tout d'abord un très bon accord général des profils de température, de flux de chaleur et des distributions. Cela nous conforte dans les choix de constructions et hypothèses faites au chapitre 1 pour le modèle P1-Diffusion. Des écarts légers, mais systématiques, sont tout de même observés entre OSHUN et P1-Diffusion, nous allons les analyser dans cette section. On constate, sur l'ensemble des profils de $f_1 v^5$, un décalage vers la droite dans l'axe des vitesses de P1-Diffusion par rapport à OSHUN. Ce décalage en vitesse de f_1 , plus marqué dans la zone la plus raide du gradient, est typique de l'approximation de l'opérateur de collisions \mathcal{C}_{ee}^1 dans le RHS de l'équation vectorielle VFPL-P1 (1.25).

$$\mathcal{C}_{ee}^1 + \mathcal{C}_{ei}^1 \simeq -\zeta(Z)\nu_{ei}f_1 \quad (5.7)$$

Nous avons vu dans le chapitre 1 que cette approximation était largement utilisée, e.g [47, 21] car elle simplifie grandement l'implantation numérique. Elle est justifiée dans la limite des plasmas de Z élevé, appelée régime de plasmas de Lorentz. Cette limite est rencontrée dans les expériences FCI dans la zone d'ablation de la cavité ($Z=79$ pour l'or). Dans la limite Z faible, que l'on rencontre dans le plasma de fusion ($Z=1$ pour l'hydrogène et $Z=2$ pour l'hélium), il est courant d'utiliser un fit en Z , $\zeta(Z)$ dans l'équation (5.7), permettant de retrouver le flux de chaleur de Spitzer-Härm théorique dans la limite locale. Cependant, le champ électrique de Spitzer-Härm théorique n'est plus retrouvé. D'une manière générale, le fit mentionné permet de retrouver de façon exacte la conductivité thermique de Spitzer-Härm au détriment des autres coefficients de transports, incluant les coefficients thermo-électriques rencontrés dans le calcul du champ électrique E par la loi d'Ohm généralisée. Ces effets ont été explorés par A. Chrisment et al. [9], et il est possible d'envisager une extension du modèle P1-diffusion pour les prendre en compte.

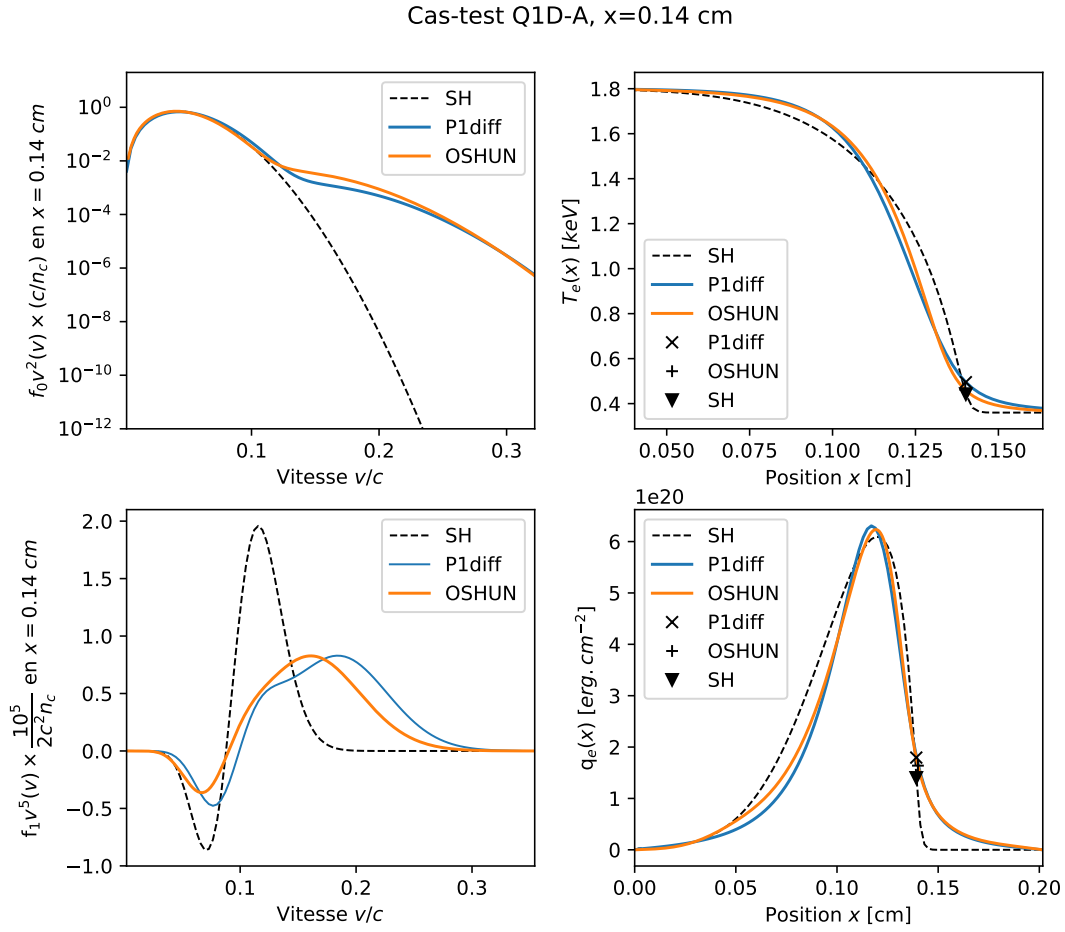


FIGURE 5.5 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.14$ cm pour le cas test Q1D-A, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

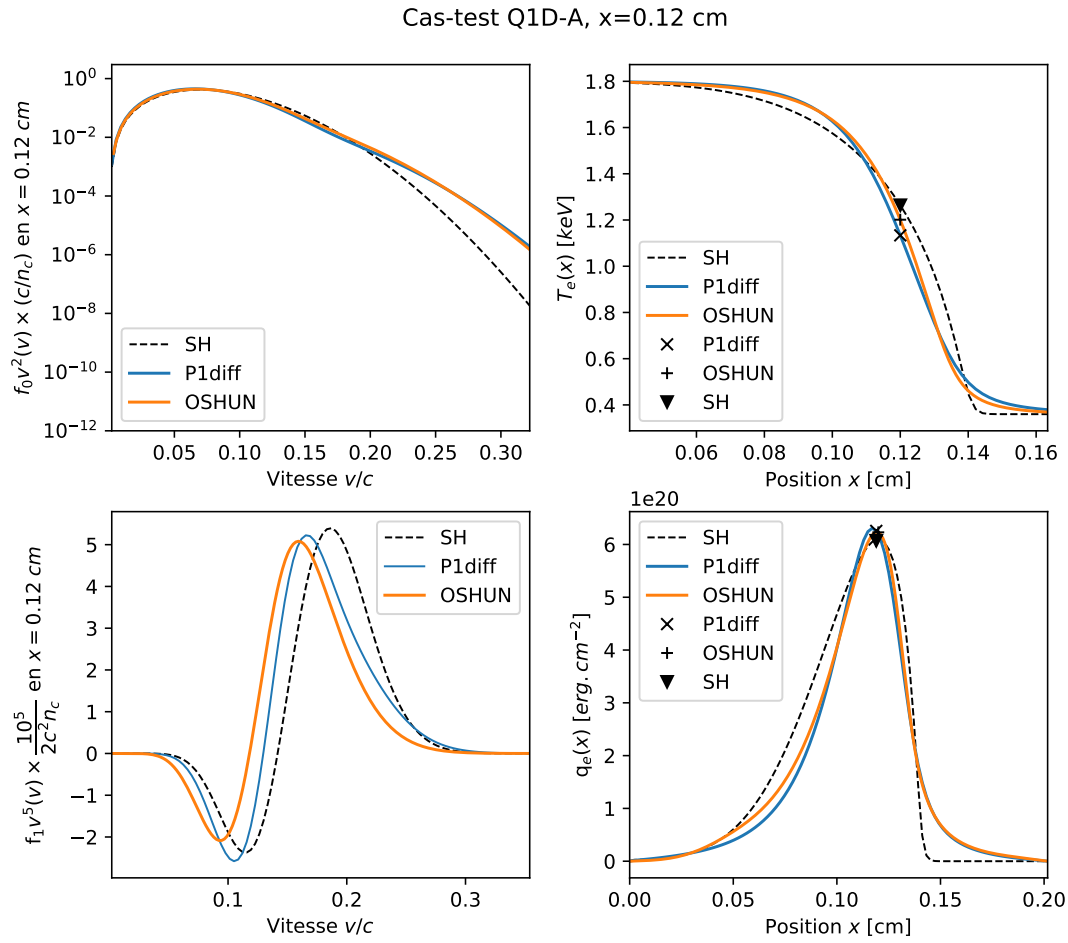


FIGURE 5.6 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.12$ cm pour le cas test Q1D-A, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

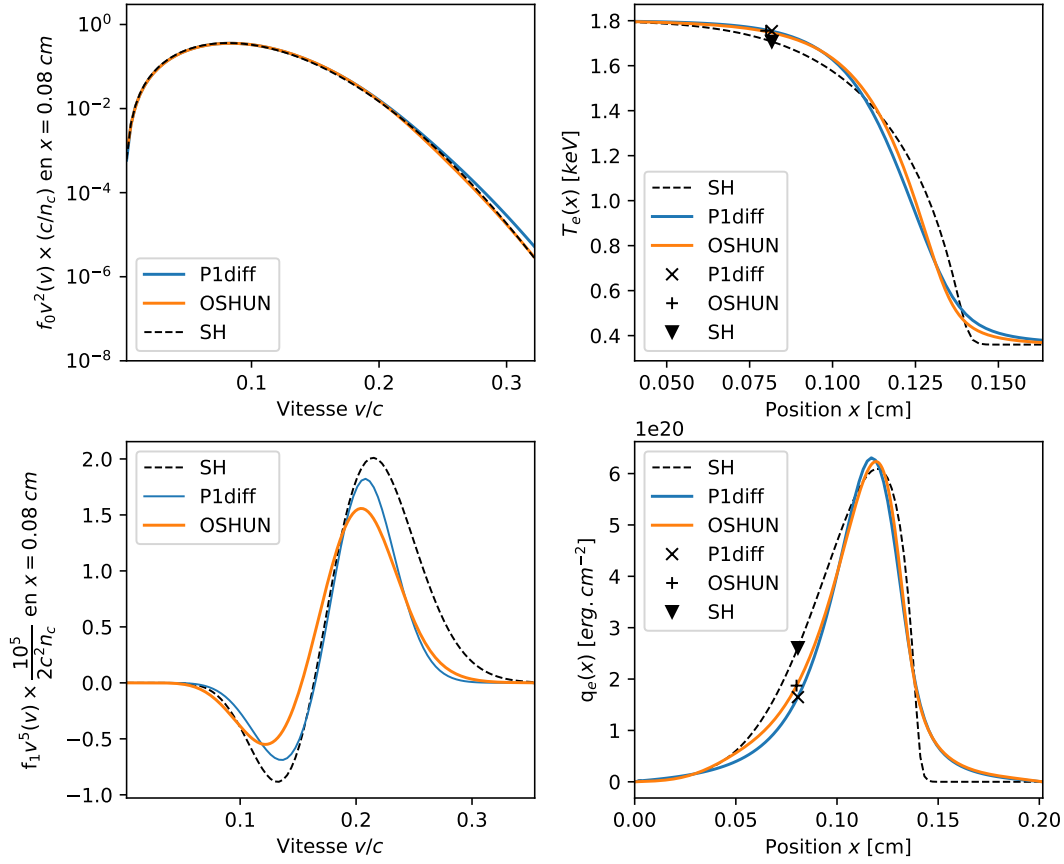
Cas-test Q1D-A, $x=0.08$ cm

FIGURE 5.7 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.08$ cm pour le cas test Q1D-A, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

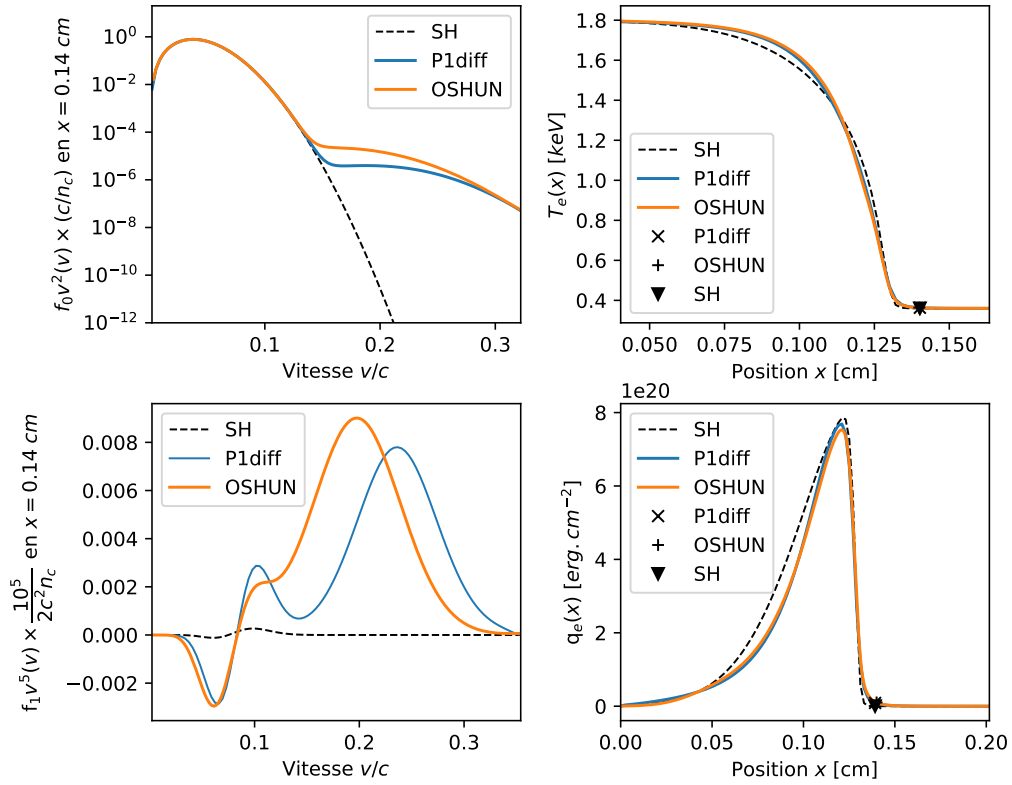
Cas-test Q1D-B, $x=0.14$ cm


FIGURE 5.8 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.14$ cm pour le cas test Q1D-B, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

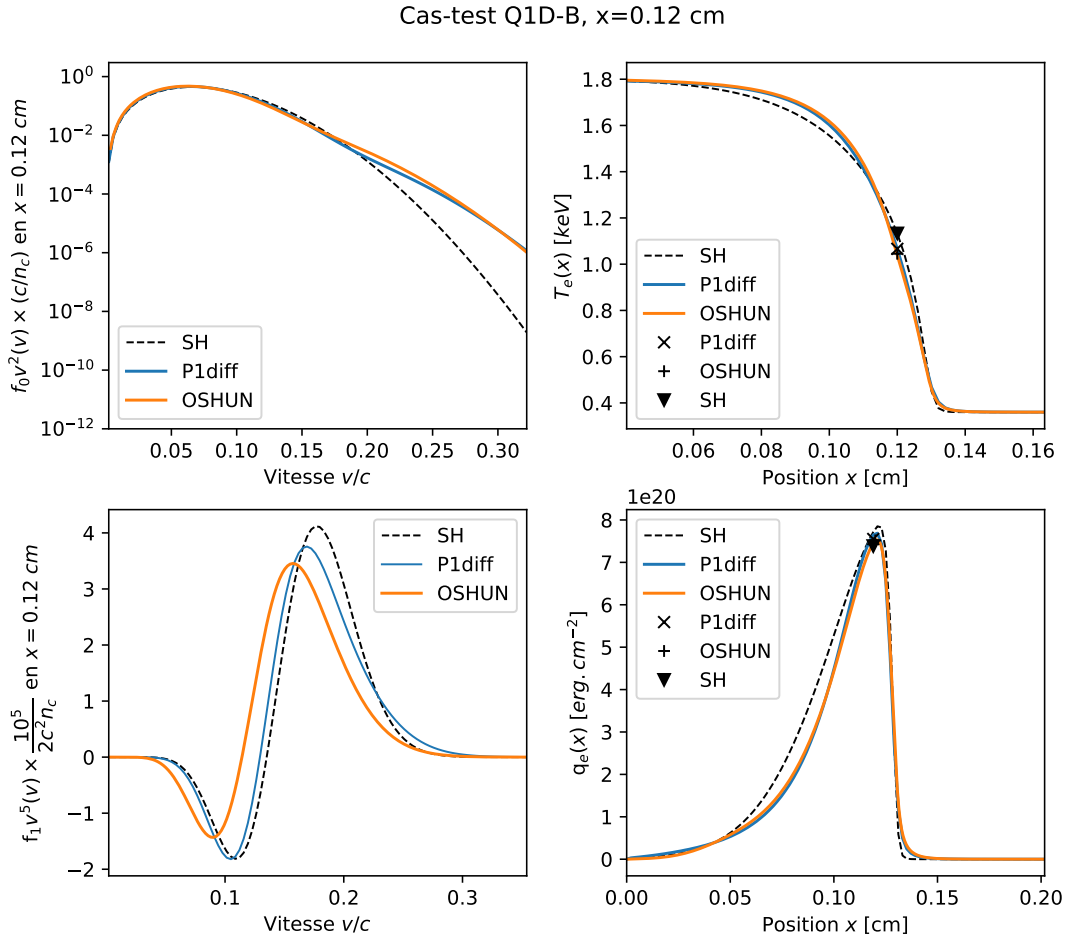


FIGURE 5.9 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.12$ cm pour le cas test Q1D-B, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

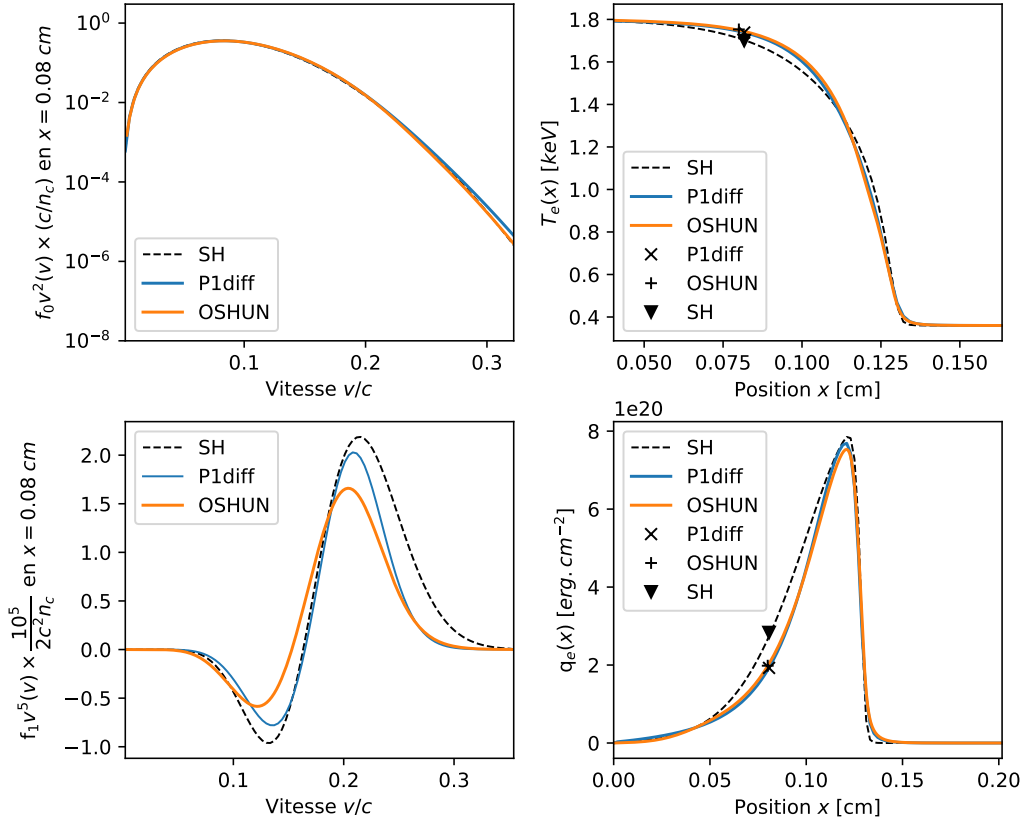
Cas-test Q1D-B, $x=0.08$ cm


FIGURE 5.10 – Profils des composantes $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ à $t = 22$ ps (non-stationnaire) et $x = 0.08$ cm pour le cas test Q1D-B, BC de Neumann (en température). Comparaison entre OSHUN (en orange), P1-Diffusion (en bleu) et Spitzer-Härm (en pointillés noir). Les profils de $f_0 v^2$, tracés en haut à gauche, sont les intégrants en un point choisi pour le profil de température T_e , tracé en haut à droite. Les profils de $f_1 v^5$, tracés en bas à gauche, sont les intégrants du flux de chaleur q_e en un point choisi pour le profil de flux de chaleur tracé en bas à droite. Les profils de distribution $f_0 v^2$ et $f_1 v^5$ sont normalisés par c/n_c et $10^4/(2c^2 n_c)$ avec n_c une densité critique définie par $n_c = n_e/0.448$.

5.5 Cas-test stationnaire Q1D-C

Dans cette section nous allons présenter le cas-test stationnaire Q1D-C. Les conditions initiales pour le cas-test Q1D-C sont très proches du cas-test isobare Q1D-B, mais avec le profil de densité remontant sur le bord gauche du plasma pour atténuer les effets indésirables de couche de Knudsen qui apparaissent aux temps longs, qu'il convient de traiter dans le cas stationnaire. Le but de cette simulation est de montrer que le schéma implicite P1-Diffusion Micro-Macro est capable de prendre des pas de temps suffisamment élevés pour étudier les solutions stationnaires du problème aux conditions aux bords de Dirichlet. On réalise la simulation pour deux profils initiaux de température numérotés respectivement (1) et (2) afin d'étudier l'unicité de la solution stationnaire. Le premier identique aux cas-test Q1D-A et Q1D-B, le deuxième affine par morceaux en x . Les profils

initiaux du cas-test stationnaire Q1D-C sont montrés Figure 5.11.

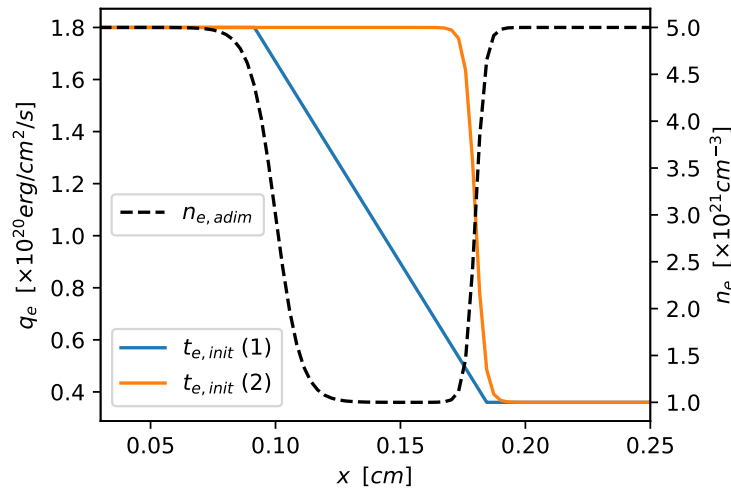


FIGURE 5.11 – Profils initiaux, tangente hyperbolique (CI-1) et affine (CI-2) en température, et profils de flux de chaleur pour cas-test stationnaire Q1D-C.

Les simulations sont réalisées sur un maillage uniforme de taille 100×100 et avec un pas de temps $\Delta t = 2$ ns. Le temps final de la simulation est $t = 22$ ns. Les résultats de ces simulations sont montrés Figure 5.12. On observe que les deux simulations convergent bien vers la même limite stationnaire, ce qui indique l'unicité de la solution stationnaire dans le problème aux conditions aux bords de Dirichlet. On remarque que la présence de gradient de densité perturbe la solution stationnaire et implique une délocalisation de la solution stationnaire, avec une composante non-locale non nulle du flux de chaleur. Ce cas-test permet d'une part de tester la stabilité du modèle P1-Diffusion pour des pas de temps très grands (de l'ordre de la nanoseconde), et de montrer que des solutions stationnaires non-locales uniques existent.

5.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que le modèle P1-Diffusion est capable de décrire les effets du transport non-local sur un cas-test représentatif des régimes rencontrés en FCI. On souligne donc la qualité des approximations P1 et Diffusion dans ces régimes physique. On rappelle que ces approximations permettent de réduire la dimension algébrique du système de 7D à 5D, sur une seule variable f_0 , sans hypothèse perturbative. Cela représente un gain important en terme de mémoire. Ce dernier point peut devenir limitant si l'objectif est d'effectuer des simulations multiphysiques intégrées. En terme de temps de calcul, on se ramène à des opérations simples comme des inversions de systèmes linéaires de faible taille, séparant les dimensions d'espace et de vitesse, indépendants, et pouvant être résolus de façon parallèle. Cela réduit le problème du temps de calcul à la vitesse de convergence des processus itératifs, en particulier les itérations Micro. Nous n'avons pas étudié l'accélération du processus itératif mais de nombreuses méthodes existent, basées sur une meilleure initialisation, en calculant par exemple une solution sur un maillage plus

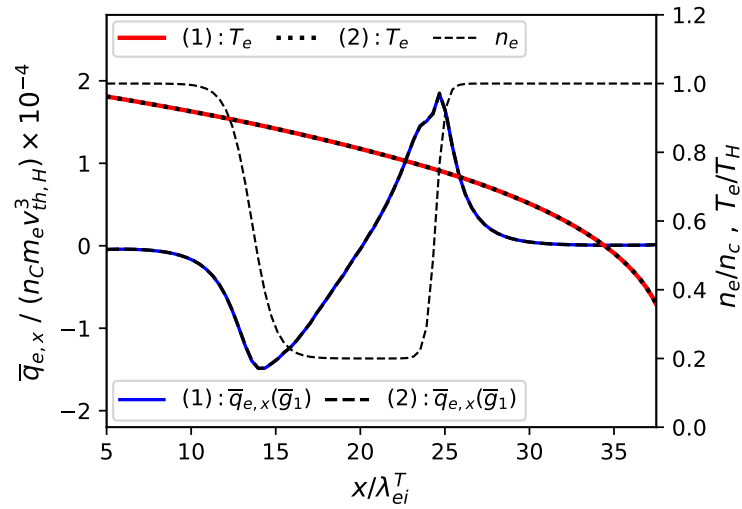


FIGURE 5.12 – Solutions à $t = 22$ ns du cas-test Q1D-C avec conditions aux bords de Dirichlet, pour le profil initial (1) tangente hyperbolique (en traits pleins rouge pour la température et bleu pour le flux de chaleur non-local), et pour le profil initial (2) affine par morceaux (en pointillés noir pour la température et en tirets noir pour le flux de chaleur non-local).

grossier et dans une limite linéaire. Nous avons vu que dans la limite linéaire, les projecteurs de courant nul s'écrivent de façon identique, cela permet de réduire de façon drastique le nombre d'opérations dans le remplissage des matrices de résolution des systèmes Micro. Aussi le calcul des matrices à inverser peut être factorisé sur les itérations Micro, et effectué en amont. Nous pouvons en attendre un gain important, car le remplissage des matrices constitue le principal coût observé d'une itération Micro. La discrétisation Micro-Macro Implicite Itérative permet l'utilisation de pas de temps suffisamment grands, permettant d'étudier les solutions stationnaires à des problèmes de transport, et de capturer des solutions stationnaires non-locales, comme on l'a vu pour le cas-test Q1D-C.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Nous avons étudié dans cette étude le modèle quasi-cinétique P1-Diffusion dans le cadre de la fermeture des équations de la MHD résistive en régime non-local. Les exigences d'un couplage éventuel d'un tel modèle à un code hydrodynamique lagrangien sur maillage 2D non-structuré comme TROLL [34] nous ont amené à rapidement identifier des objectifs précis concernant la modélisation et les propriétés numériques du modèle. Parmi ces objectifs principaux on compte : la maîtrise totale du domaine de validité du modèle ; la capture des différents régimes asymptotiques ; la stabilité inconditionnelle de la résolution numérique ; le respect strict des lois de conservations pour un couplage cohérent avec l'hydrodynamique.

Nous avons construit le modèle P1-Diffusion dans le chapitre 1 à partir des équations de référence de Vlasov-Fokker-Planck-Landau (VFPL) et justifié chaque approximation par l'analyse asymptotique. Le modèle obtenu se ramène à un système parabolique de dimension 5D (temps, 3D espace, 1D vitesse) dont l'inconnue est la partie isotrope f_0 de la distribution, en opposition au système VFPL, hyperbolique de dimension 7 (temps, 3D espace, 3D vitesse). Nous avons proposé dans le chapitre 2 de faire l'analyse variationnelle du modèle P1-Diffusion linéarisé autour de l'équilibre maxwellien. Pour cela, nous avons proposé une réécriture matricielle compacte de l'opérateur de transport P1-Diffusion \mathcal{T} , et une décomposition des flux cinétiques en contributions de courant nul permettant de réécrire la limite linéaire $\mathcal{T}^{(l)}$ de l'opérateur de transport P1-Diffusion en faisant apparaître un projecteur de courant nul. Cette réécriture adaptée à l'analyse variationnelle, nous a permis d'étudier la coercivité de $\mathcal{T}^{(l)}$. Nous avons proposé dans les chapitres 3 et 4 des discrétisations du modèle P1-Diffusion, d'abord explicite pour vérifier certaines propriétés importantes, puis totalement implicite dans le but de proposer un schéma inconditionnellement stable pour résoudre le système couplé fluide/cinétique.

Nous avons enfin confronté dans le dernier chapitre les résultats numériques obtenus avec le code d'étude résolvant de façon totalement implicite des équations du modèle P1-Diffusion, par la méthode décrite dans le chapitre 4, avec des résultats obtenus à l'aide du code PN totalement cinétique OSHUN. Nous avons aussi montré que le modèle P1-Diffusion est capable de décrire les effets du transport non-local sur un cas-test représentatif des régimes rencontrés en FCI, en comparant les profils de température, de flux de chaleur et des distributions sur un cas-test instationnaire. Nous avons enfin montré que le modèle P1-Diffusion était capable de capturer, en une seule itération en temps, des états stationnaires non-locaux.

Perspectives

Les principales perspectives de ce travail sont l'extension du modèle P1-Diffusion à une résolution en 2D/3D sur maillages non-structurés ainsi que la prise en compte de l'hydrodynamique et du champ magnétique. Ces perspectives s'inscrivent dans un objectif de faire du modèle P1-Diffusion une fermeture précise et robuste pour les codes multiphysiques utilisés pour simuler les expériences de FCI, comme le code TROLL [34]. *En particulier, les derniers mois de la thèse seront dédiés à l'adaptation du schéma implicite itératif Micro-Macro sur maillage 2D non-structuré.*

D'autres perspectives, comme l'accélération de la convergence des itérations micro via l'amélioration des critères de convergence et l'utilisation de solveurs de type Krylov, ou par l'exploitation de la forme très simplifiée de la limite linéaire pour initialiser la distribution plus proche de la solution, peuvent être envisagées. Il y a également en perspective la recherche d'une inégalité de type Poincaré pour l'analyse variationnelle de l'opérateur de transport linéarisé, afin de compléter l'étude de la coercivité réalisée dans le chapitre 2.

Bibliographie

- [1] B. Perthame A. Decoster, P.A. Markowich. *Modeling of Collisions*. Elsevier Sciences, 1998.
- [2] J. R. Albritton. Laser absorption and heat transport by non-maxwell-boltzmann electron distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 50 :2078–2081, Jun 1983.
- [3] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions de l’Ecole polytechnique, 2005.
- [4] Pierre Anguill, Patricia Cargo, Cedric Énaux, Philippe Hoch, Emmanuel Labourasse, and Gerald Samba. An asymptotic preserving method for the linear transport equation on general meshes. *Journal of Computational Physics*, 450 :110859, 2022.
- [5] S. Atzeni and J. Meyer ter Vehn. *The Physics of Inertial Fusion : Beam Plasma Interaction, Hydrodynamics, Hot Dense Matter*. OUP Oxford, 2004.
- [6] S. I. Braginskii. Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1 :205, January 1965.
- [7] C. Bruulsema, W. A. Farmer, M. Sherlock, G. F. Swadling, M. D. Rosen, J. S. Ross, and W. Rozmus. Characterization of thermal transport and evolution of au plasma in icf experiments by thomson scattering. *Physics of Plasmas*, 29(1) :012304, 2022.
- [8] Christophe Buet and Kim-Claire Le Thanh. Positive, conservative, equilibrium state preserving and implicit difference schemes for the isotropic Fokker-Planck-Landau equation. working paper or preprint, May 2007.
- [9] A. Chrisment, P. Loiseau, J.-L. Feugeas, P.-E. Masson-Laborde, J. Mathiau, V. Tikhonchuk, , and Ph Nicolai. Analysis of a kinetic model for electron heat transport in inertial confinement fusion plasmas. *Physics of Plasmas*, 29 :062302, 2022.
- [10] J. R. Davies, H. Wen, Jeong-Young Ji, and Eric D. Held. Transport coefficients for magnetic-field evolution in inviscid magnetohydrodynamics. *Physics of Plasmas*, 28(1) :012305, 2021.
- [11] Pierre Degond and Brigitte Lucquin-Desreux. Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases. *Transport Theory and Statistical Physics*, 25(6) :595–633, 1996.
- [12] D. Del Sorbo, J.-L. Feugeas, Ph. Nicolai, M. Olazabal-Loumé, B. Dubroca, S. Guisset, M. Touati, and V. Tikhonchuk. Reduced entropic model for studies of multi-dimensional nonlocal transport in high-energy-density plasmas. *Physics of Plasmas*, 22(8) :082706, 2015.

- [13] B Dubroca and JL Feugeas. Moment closure hierarchy for the radiative transfer equation. In *Inertial fusion sciences and applications 99*. 2000.
- [14] E. M. Epperlein. Effect of electron collisions on ion-acoustic waves and heat flow. *Physics of Plasmas*, 1(1) :109–115, 1994.
- [15] E. M. Epperlein and M. G. Haines. Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker–Planck equation. *The Physics of Fluids*, 29(4) :1029–1041, 1986.
- [16] E. M. Epperlein, R. W. Short, and A. Simon. Damping of ion-acoustic waves in the presence of electron-ion collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :1765–1768, Sep 1992.
- [17] E.M. Epperlein. Fokker–planck modeling of electron transport in laser-produced plasmas. *Laser and Particle Beams*, 12(2) :257–272, 1994.
- [18] J. Hawreliak et al. Thomson scattering measurements of heat flow in a laser-produced plasma. *Journal of Physics B*, 37(1) :1541, 2004.
- [19] J. P. Brodrick et al. Incorporating kinetic effects on nernst advection in inertial fusion simulation. *Physics of Plasmas*, 60 :084009, 2018.
- [20] Jan Nikl et. al. Thermal runaway and convective heat transport by fast electron in plasmas. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 50 :470, 1979.
- [21] Jan Nikl et. al. Implicit reduced vlasov-fokker-planck-maxwell model based on high-order mixed elements. *Journal of Computational Physics*, 434 :110214, 2021.
- [22] J. Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie*. Calvage et Mounet, 2006.
- [23] W. A. Farmer, C. Bruulsema, G. F. Swadling, M. Sherlock, M. D. Rosen, W. Rozmus, and J. S. Ross. Validation of heat transport modeling using directly driven beryllium spheres. *Physics of Plasmas*, 27(1) :082701, 2020.
- [24] W. A. Farmer, M. D. Rosen, C. Bruulsema, G. F. Swadling, M. Sherlock, W. Rozmus, and J. S. Ross. Investigation of heat transport modeling using directly driven gold spheres. *Physics of Plasmas*, 28(1) :032707, 2021.
- [25] S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, and R. Turpault. An admissible asymptotic-preserving numerical scheme for the electronic m_1 model in the diffusive limit. *Communications in Computational Physics*, 24(5) :1326–1354, 2018.
- [26] Guisset, Sébastien, Brull, Stéphane, D’Humières, Emmanuel, and Dubroca, Bruno. Asymptotic-preserving well-balanced scheme for the electronic M1 model in the diffusive limit : Particular cases. *ESAIM : M2AN*, 51(5) :1805–1826, 2017.
- [27] R. J. Hennen, M. Sherlock, W. Rozmus, J. Katz, D. Cao, J. P. Palastro, and D. H. Froula. Observation of nonlocal heat flux using thomson scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 121 :125001, Sep 2018.
- [28] R. J. Hennen, M. Sherlock, W. Rozmus, J. Katz, P. E. Masson-Laborde, D. Cao, J. P. Palastro, and D. H. Froula. Measuring heat flux from collective thomson scattering with non-maxwellian distribution functions. *Physics of Plasmas*, 26(3) :032104, 2019.
- [29] J. D. Huba. *NRL PLASMA FORMULARY Supported by The Office of Naval Research*. Naval Research Laboratory, 2013.
- [30] I. Bernstein J. Albritton, E. Williams and K. Swart. Nonlocal electron heat transport by not quite maxwellian-boltzmann distributions. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :1887, 1986.

-
- [31] T. Wyatt Johnston. Cartesian tensor scalar product and spherical harmonic expansions in Boltzmann's equation. *Phys. Rev.*, 120 :1103–1111, Nov 1960.
- [32] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Science, 2013.
- [33] E.W Larsen, C.D Levermore, G.C Pomraning, and J.G Sanderson. Discretization methods for one-dimensional fokker-planck operators. *Journal of Computational Physics*, 61(3) :359–390, 1985.
- [34] E. Lefebvre, S. Bernard, C. Esnault, P. Gauthier, A. Grisollet, P. Hoch, L. Jacquet, G. Kluth, S. Laffite, S. Liberatore, I. Marmajou, P.-E. Masson-Laborde, O. Morice, and J.-L. Willien. Development and validation of the TROLL radiation-hydrodynamics code for 3d hohlraum calculations. *Nuclear Fusion*, 59(3) :032010, dec 2018.
- [35] M. Lemou and L. Mieussens. micro macro AP schemes. *Transport Theory and Statistical Physics*, 25(6) :595–633, 1996.
- [36] Mohammed Lemou and Luc Mieussens. Fast implicit schemes for the fokker-planck-landau equation. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(10) :809–814, 2004.
- [37] Mohammed Lemou and Luc Mieussens. Implicit schemes for the fokker-planck-landau equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3) :809–830, 2005.
- [38] J.-F. Luciani and P. Mora. Resummation methods of the chapman-enskog expansion for a strongly inhomogeneous plasma. *Journal of Statistical Physics*, 43 :281–302, 1986.
- [39] J.-F. Luciani and P. Mora. Nonlocal electron transport in laser created plasmas. *Laser Part. Beams*, 12 :387, 1994.
- [40] J.-F. Luciani, P. Mora, and R. Pella. Quasistatic heat front and delocalised heat flux. *The Physics of Fluids*, 28 :835–845, 1985.
- [41] J.-F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont. Nonlocal electron heat transport due to steep temperature gradients. *Phys. Rev. Lett.*, 51 :1664, 1983.
- [42] A. Marocchino, M. Tzoufras, and S. Atzeni et al. Comparison for non-local hydrodynamic thermal conduction models. *Physics of Plasmas*, 20 :022702, 2013.
- [43] Ph. D. Nicolai, J.-L. A. Feugeas, and G. P. Schurtz. A practical nonlocal model for heat transport in magnetized laser plasmas. *Physics of Plasmas*, 13(3) :032701, 2006.
- [44] Michel Olivier. Construction de l'approximation P1-diffusion pour le transport électronique non-local. Technical Report CEA-R-6564, CEA, September 2021.
- [45] Marshall N. Rosenbluth, William M. MacDonald, and David L. Judd. Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force. *Phys. Rev.*, 107 :1–6, Jul 1957.
- [46] W. Rozmus, T. Chapman, and A. Brantov et al. Resonance between heat-carrying electrons and langmuir wave in inertial confinement fusion plasmas. *Physics of Plasmas*, 23 :012707, 2016.
- [47] G. P. Schurtz, Ph. D. Nicolai, and M. Busquet. A nonlocal electron conduction model for multidimensional radiation hydrodynamics codes. *Physics of Plasmas*, 7(10) :4238–4249, 2000.
- [48] I. P. Shkarofsky. Cartesian tensor expansion of the Fokker-Planck equation. *Canadian Journal of Physics*, 41 :1753, January 1963.

- [49] I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, and M. P. Bachynski. *The Particle Kinetics of Plasmas*. Addison Wesley Publ. Co., 1966.
- [50] Lyman Spitzer and Richard Härm. Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas. *Phys. Rev.*, 89 :977–981, Mar 1953.
- [51] M. Tzoufras, A.R. Bell, P.A. Norreys, and F.S. Tsung. A vlasov–fokker–planck code for high energy density physics. *Journal of Computational Physics*, 230(17) :6475–6494, 2011.

ANNEXE A

Unités et notations

A.1 Systèmes d'unités et conversions

Dimension	Unité CGS	Symb.	Équiv.	Unités SI
longueur	centimètre	cm		10^{-2} m
masse	gramme	g		10^{-3} kg
temps	seconde	s		1 s
énergie	erg	erg	$\text{cm}^2 \text{g s}^{-2}$	10^{-7} J
charge	statcoulomb	q	$\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$1/3 \times 10^{-9}$ C
induction magnétique	gauss	B	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	10^{-4} T
champ électrique	statvolt / cm	E	$\text{cm}^{-1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}$	3×10^4 V/m

TABLEAU A.1 – Unités GCS utilisées en physique des plasmas [29]

Remarque A.1.1. Les unités de longueur, de masse et de temps sont appelées unités de base. Elles sont indépendantes et toutes les autres unités peuvent être dérivées à partir d'elles.

Remarque A.1.2. Les champs électrique et magnétique E et B ont les mêmes unités Gaussiennes équivalentes.

A.2 Constantes physiques

célérité de la lumière	$c = 2.9979 \times 10^{10}$ cm/s
charge électronique	$e = 4.8033 \times 10^{10}$ statcoulomb
constante de Boltzmann	$k_B = 1.3807 \times 10^{16}$ erg/K
masse électronique	$m_e = 9.1096 \times 10^{-28}$ g
masse d'un proton	$m_p = 1.6726 \times 10^{-24}$ g
rapport de masse proton/électron	$m_p/m_e = 1836$
température associée à 1 eV	1.1604×10^4 K

A.3 Symboles et notations

Nous listons dans cette section les symboles utilisés dans ce manuscrit. Inévitablement, certains symboles utilisés dans différents chapitres ont des significations différentes. Par exemple, le symbole e désigne à la fois la charge électronique, la constante d'Euler $e = 2.718281828\dots$ et l'indice pour désigner les électrons (ex. : température électronique T_e). Dans ces cas de figures, le sens d'un symbole devrait être clair dans le contexte de son utilisation.

Indices/exposants fréquemment utilisés

e	électron	i	ion
g	groupe de vitesse	j	maille spatiale
n	indice des itérations temporelles	M, m	indices des itérés Macro et Micro
l, m	indices des harmoniques sphériques		

Notations fréquemment utilisées

λ_{ee}	libre parcours moyen $e-e$	λ_{ei}	libre parcours moyen $e-i$
λ_D	longueur de Debye	φ, ψ	fonctions tests
τ_{ee}	temps collisionnel $e-e$	τ_{ei}	temps collisionnel $e-i$
ν_{ee}	fréquence de collisions $e-e$	ν_{ei}	fréquence de collisions $e-i$
$\ln \Lambda$	logarithme coulombien	κ	conductivité thermique

- Les **scalaires** sont notés en *italique* :

x	norme de la position	v	norme de la vitesse
f_0	harmonique sphérique d'ordre 0 de f	n_e	densité électronique
T_e	température électronique	B	Champs magnétique
Q_{ei}	Terme d'échange de chaleur e-i	J	densité de courant
Z_i	numéro atomique des ions i		

- Les **vecteurs** sont notés en police "droite" :

x	vecteur position	v	vecteur vitesse
f_1	harmonique sphérique d'ordre 1 de f	u_e	vecteur vitesse moyenne électronique
J	densité de courant	q_e	flux de chaleur électronique
E	Champs électrique	B	Champs magnétique
R_{ei}	Terme d'échange d'impulsion e-i		

- Les **tenseurs** sont notés en police sans empattement :

f_2	harmonique sphérique d'ordre 2 de f	P_e	tenseur de pression électronique
Π_e	tenseur de pression anisotrope	Id	tenseur identité

A.4 Acronymes

FCI	Fusion par Confinement Inertiel	VFPL	Vlasov-Fokker-Planck-Landau
LMJ	Laser MegaJoule	ETL	Équilibre Thermodynamique Local
NIF	National Ignition Facility	BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
WKB	Wentzel-Kramers-Brillouin	SH	Spitzer-Härm
ILP	Interaction Laser-Plasma	SNB	Schurtz-Nicolaï-Busquet

ANNEXE B

Développements en harmoniques sphériques

B.1 Opérateur de Vlasov

Identités vectorielles utiles

Soient u et v des champs vectoriels, f un champ scalaire, et P un champ tensoriel. Soient les identités suivantes :

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = (\nabla \cdot u)v + (u \cdot \nabla)v, \quad (B.1)$$

$$\nabla \cdot (fP) = \nabla f \cdot P + f \nabla \cdot P, \quad (B.2)$$

$$\nabla \cdot (Pu) = u \cdot (\nabla \cdot P) + \text{Tr}(P(\nabla u)^t). \quad (B.3)$$

Calcul des $\int Y_1^p Y_1^q Y_l^m d\Omega$:

On rappelle que $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ désigne la mesure d'angle solide et que $dv = v^2 d\Omega$ avec $v = \|v\|$.

D'après la formule de Gaunt :

$$\int_{4\pi} Y_1^p Y_1^q Y_l^m d\Omega \propto \int_{-1}^1 P_1^p P_1^q P_l^m dx = 0 \quad \text{si } l \neq 0 \text{ ou } 2.$$

cas $l = 0$:

$$\int_{4\pi} Y_1^p Y_1^q Y_0^0 f_0^0 d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{p,q} f_0^0 = \frac{I_3}{\sqrt{3}} f_0^0.$$

cas $l = 2$:

Pour $l = 2$, on a $m \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$. On utilise les formules de récurrences suivantes pour se ramener au calcul d'une intégrale d'un produit de deux polynômes de Legendre associés et utiliser leur propriété d'orthogonalité :

$$\sqrt{1-x^2} P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \left[(l-m+1)(l-m+2) P_{l+1}^{m-1}(x) - (l+m-1)(l+m) P_{l-1}^{m-1}(x) \right], \quad (B.4)$$

$$\sqrt{1-x^2} P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \left[-P_{l+1}^{m+1}(x) + P_{l-1}^{m+1}(x) \right], \quad (B.5)$$

$$x P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \left[(l+m) P_{l-1}^m(x) + (l-m+1) P_{l+1}^m(x) \right]. \quad (B.6)$$

L'intégrale du produit de deux polynômes de Legendre associés est donnée par :

$$\int_{-1}^1 P_l^m P_l^{m'} = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (\text{B.7})$$

On peut alors calculer les $\int Y_1^p Y_1^q Y_l^m d\Omega$. Par exemple, si $p = q = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} Y_1^1 Y_1^1 Y_2^m d\Omega &= \frac{3}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{4\pi} \frac{(2-|m|)!}{(2+|m|)!}} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^{|m|} dx \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \begin{cases} \sqrt{2} \cos^2 \varphi \cos(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m > 0 , \\ \cos^2 \varphi d\varphi & \text{si } m = 0 , \\ \sqrt{2} \cos^2 \varphi \sin(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m < 0 . \end{cases} \end{aligned}$$

La première formule de récurrence (B.4) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^{|m|} dx &= - \int_{-1}^1 P_1^1(x) \frac{1}{5} \left[(3-|m|)(4-|m|) P_3^{|m|-1}(x) - (1+|m|)(2+|m|) P_1^{|m|-1}(x) \right] dx \\ &= \frac{1}{5} (3-|m|)(4-|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_3^1 dx \delta_{2,|m|} - \frac{1}{5} (1+|m|)(2+|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{2,|m|} \\ &= -\frac{1}{5} (1+|m|)(2+|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{2,|m|} = -\frac{4}{3} \frac{1}{5} 3 \times 4 \delta_{2,|m|} , \end{aligned}$$

et la deuxième formule de récurrence (B.5) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^{|m|} dx &= - \int_{-1}^1 P_1^1(x) \frac{1}{5} \left[-P_3^{m+1}(x) + P_1^{m+1}(x) \right] dx \\ &= \frac{1}{5} \int_{-1}^1 P_1^1 P_3^1 dx \delta_{0m} - \frac{1}{5} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{0m} \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{5} \delta_{0m} . \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cos(2\varphi) d\varphi = \pi/2$ et $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin(2\varphi) d\varphi = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_m f_l^m \int_{4\pi} Y_1^1 Y_1^1 Y_2^m d\Omega &= \sum_m \partial_x f_l^m v \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{5}{4\pi} \frac{(2-|m|)!}{(2+|m|)!}} \left[-\frac{4}{3} \frac{1}{5} \delta_{0m} \pi - \frac{4}{3} \frac{1}{5} 3 \times 4 \delta_{2,m} \sqrt{2} \pi/2 \right] \\ &= v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \partial_x \left[-\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0 \right] . \end{aligned}$$

Un calcul similaire pour $\int_{4\pi} Y_1^{-1} Y_1^{-1} Y_2^m d\Omega$ donne, avec $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos(2\varphi) d\varphi = -\pi/2$:

$$v \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_m \partial_y f_l^m \int_{4\pi} Y_1^{-1} Y_1^{-1} Y_2^m d\Omega = v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \partial_y \left[+\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0 \right] .$$

Pour $\int_{4\pi} Y_1^1 Y_1^{-1} Y_2^m f_l^m d\Omega$, on a :

$$\int_{4\pi} Y_1^1 Y_1^{-1} Y_2^m d\Omega = \frac{3}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{4\pi} \frac{(2-|m|)!}{(2+|m|)!}} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^{|m|} dx$$

$$\times \int_0^{2\pi} \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \cos(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m > 0, \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi & \text{si } m = 0, \\ (-1)^m \sqrt{2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \sin(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m < 0, \end{cases}$$

avec :

$$\int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^{|m|} dx = - \int_{-1}^1 P_1^1(x) \frac{1}{5} \left[(3-|m|)(4-|m|) P_3^{|m|-1}(x) - (1+|m|)(2+|m|) P_1^{|m|-1}(x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{5} (3-|m|)(4-|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_3^1 dx \delta_{2,|m|} - \frac{1}{5} (1+|m|)(2+|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{2,|m|}$$

$$= -\frac{1}{5} (1+|m|)(2+|m|) \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{2,|m|} = -\frac{4}{3} \frac{1}{5} 3 \times 4 \delta_{2,|m|},$$

et

$$\int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 P_2^m dx = - \int_{-1}^1 P_1^1(x) \frac{1}{5} \left[-P_3^{|m|+1}(x) + P_1^{|m|+1}(x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{5} \int_{-1}^1 P_1^1 P_3^1 dx \delta_{0m} - \frac{1}{5} \int_{-1}^1 P_1^1 P_1^1 dx \delta_{0m}$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{1}{5} \delta_{0m}.$$

On a toujours $m \in \{-2, 0, 2\}$, de plus :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \cos(2\varphi) d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \sin(2\varphi) d\varphi = \pi/2.$$

Donc seul le cas $m = -2$ est non nul et on a :

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_m \int_{4\pi} Y_1^1 Y_1^1 Y_2^m f_l^m d\Omega = \sum_m \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{3}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{4\pi} \frac{(2-m)!}{(2+m)!}}} \left[-\frac{4}{3} \frac{1}{5} 3 \times 4 \delta_{2m} \sqrt{2} \pi/2 \right] f_2^m$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\sqrt{3} f_2^{-2} \right].$$

Les autres termes se calculent de façon similaire, on trouve finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} f_l^m \mathcal{P}_1^m(\omega \otimes \omega Y_l^m) = v \frac{1}{\sqrt{3}} e_x f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[e_x (-\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0) + e_y (\sqrt{3} f_2^{-2}) + e_z (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1) \right], \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} f_l^m \mathcal{P}_1^{-1}(\omega \otimes \omega Y_l^m) = v \frac{1}{\sqrt{3}} e_y f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[e_x (\sqrt{3} f_2^{-2}) + e_y (\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0) + e_z (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1}) \right], \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} f_l^m \mathcal{P}_1^0(\omega \otimes \omega Y_l^m) = v \frac{1}{\sqrt{3}} e_z f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[e_x (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1) + e_y (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1}) + e_z (f_2^0) \right]. \end{array} \right.$$

(B.8)

Ou plus simplement :

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} f_l^m \mathcal{P}_1(\omega \otimes \omega Y_l^m) = v Id \frac{f_0}{\sqrt{3}} + v \frac{2}{5} (\sqrt{\frac{5}{3}} f_2), \quad (\text{B.9})$$

avec f_2 le tenseur suivant :

$$f_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}f_2^2 - \frac{1}{2}f_2^0 & \sqrt{3}f_2^{-2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^1 \\ \sqrt{3}f_2^{-2} & \sqrt{3}f_2^2 - \frac{1}{2}f_2^0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^{-1} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}f_2^{-1} & f_2^0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

On remarque que f_2 est symétrique et de trace nulle.

Calcul de $\mathcal{A}_0(f)$

Le terme d'advection s'écrit $\mathcal{A}(f) = v \cdot \nabla_x f$, on veut calculer $\mathcal{A}_0(f) = \mathcal{P}_0^0(\mathcal{A}(f))$ avec $f(x, v, t) = \sum_{l,m} f_l^m(x, v, t) Y_l^m(\omega)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \mathcal{P}_0^0(v \cdot \nabla_x (\sum_{l,m} f_l^m Y_l^m)) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{l,m} \nabla_x \cdot (f_l^m \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0^0(Y_1^1 Y_l^m) \\ \mathcal{P}_0^0(Y_1^{-1} Y_l^m) \\ \mathcal{P}_0^0(Y_1^0 Y_l^m) \end{pmatrix}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \nabla_x \cdot (v \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_1^{-1} \\ f_1^0 \end{pmatrix}), \end{aligned}$$

car $\mathcal{P}_0^0(Y_l^m Y_{l'}^{m'}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{P}_l^m(Y_{l'}^{m'}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, d'où :

$$\boxed{\mathcal{A}_0 = v \nabla_x \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}}}. \quad (\text{B.11})$$

Calcul de $\mathcal{E}_0(f)$

Le terme de champ électrique s'écrit : $\mathcal{E}(f) = a \cdot \nabla_v f$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^0 &= \mathcal{P}_0^0(E \cdot \nabla_v (\sum_{l,m} f_l^m Y_l^m)) = \sum_{l,m} E \cdot \mathcal{P}_0^0(f_l^m \nabla_v Y_l^m + Y_l^m \nabla_v f_l^m) \\ &= \sum_{l,m} E \cdot [f_l^m \mathcal{P}_0^0(\nabla_v Y_l^m) + \mathcal{P}_0^0(Y_l^m \nabla_v f_l^m)]. \end{aligned}$$

Calculons $\mathcal{P}_0^0(\nabla_v Y_l^m) = \int_{4\pi} Y_0^0 \nabla_v Y_l^m d\Omega$, qu'on peut écrire sous la formulation faible suivante :

$$\int \psi(v) Y_0^0 \nabla_v Y_l^m dv = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(- \int \omega \frac{\partial \psi(v)}{\partial v} Y_l^m dv \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\partial \psi(v)}{\partial v} v^2 dv \int \begin{pmatrix} Y_1^1 Y_l^m \\ Y_1^{-1} Y_l^m \\ Y_1^0 Y_l^m \end{pmatrix} d\Omega \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int 2v \psi(v) dv \int \begin{pmatrix} Y_1^1 Y_l^m \\ Y_1^{-1} Y_l^m \\ Y_1^0 Y_l^m \end{pmatrix} d\Omega \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\psi(v)}{v} \begin{pmatrix} Y_1^1 Y_l^m \\ Y_1^{-1} Y_l^m \\ Y_1^0 Y_l^m \end{pmatrix} dv .
 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction ψ , on a donc :

$$\begin{aligned}
 f_l^m \mathcal{P}_0^0(\nabla_v Y_l^m) &= 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{f_l^m}{v} \mathcal{P}_0^0 \begin{pmatrix} Y_1^1 Y_l^m \\ Y_1^{-1} Y_l^m \\ Y_1^0 Y_l^m \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{f_1}{v} .
 \end{aligned}$$

Pour $\mathcal{P}_0^0(Y_l^m \nabla_v f_l^m)$, les f_l^m ne dépendant que de v , on a alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_0^0(Y_l^m \nabla_v f_l^m) &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\partial f_l^m}{\partial v} \mathcal{P}_0^0 \begin{pmatrix} Y_1^1 Y_l^m \\ Y_1^{-1} Y_l^m \\ Y_1^0 Y_l^m \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial f_1}{\partial v} ,
 \end{aligned}$$

et on peut écrire :

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = E \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1)} . \quad (\text{B.12})$$

Calcul de $\mathcal{B}_0(f)$

Le terme de champ magnétique s'écrit : $\mathcal{B}(f) = (\omega_b \times v) \cdot \nabla_v f$, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_0 &= \mathcal{P}_0^0((v \times B) \cdot \nabla_v \sum_{l,m} f_l^m Y_l^m) = \sum_{l,m} \mathcal{P}_0^0 \left(\begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{v} \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} f_l^m Y_l^m \\
 &= \sum_{l,m} f_l^m \mathcal{P}_0^0 \left(-B_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m + B_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m \right) \\
 &= -B_\varphi \sum_{l,m} f_l^m \mathcal{P}_0^0 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m \right) + B_\theta \sum_{l,m} f_l^m \mathcal{P}_0^0 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m \right) .
 \end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\mathcal{P}_0^0\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}d\theta d\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int[Y_l^m]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\theta = 0,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0^0\left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{4\pi}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\frac{\partial Y_l^m}{\partial\cos\theta}\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\frac{\partial P_l^{|m|}}{\partial x}dx \\ &\quad \times \int_0^{2\pi}\begin{cases} (-1)^m\sqrt{2}\cos(|m|\varphi)d\varphi & \text{si } m > 0, \\ d\varphi & \text{si } m = 0, \\ (-1)^m\sqrt{2}\sin(|m|\varphi)d\varphi & \text{si } m < 0. \end{cases} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\frac{\partial P_l^{|m|}}{\partial x}dx 2\pi\delta_{0m} \\ &= -\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\int_{-1}^1\left[\frac{1}{2}(l+|m|)(l+1-|m|)P_l^{|m|-1}(x) - P_l^{|m|+1}(x)\right]dx\delta_{0m} \\ &= -\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\int_{-1}^1\left[\frac{1}{2}l(l+1)P_l^{-1}(x) - P_l^1(x)\right]dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{B}_0^0 = 0.} \quad (\text{B.13})$$

On a utilisé la formule de récurrence suivante :

$$\sqrt{1-x^2}\frac{\partial}{\partial x}P_l^m(x) = \frac{1}{2}(l+m)(l+1-m)P_l^{m-1}(x) - P_l^{m+1}(x). \quad (\text{B.14})$$

L'équation sur $\partial_t f_0$ s'écrit alors :

$$\boxed{\partial_t f_0 + v\nabla \cdot \frac{f_1}{\sqrt{3}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_1).} \quad (\text{B.15})$$

Calcul de $\mathcal{A}_1(f)$

Le terme d'advection s'écrit $\mathcal{A}(f) = v \cdot \nabla_x f$, on a :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}_1(v \cdot \nabla_x (\sum_{l,m} f_l^m Y_l^m)) = v\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{l,m}\nabla_x \cdot (f_l^m \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^n(Y_1^1 Y_l^m) \\ \mathcal{P}_1^n(Y_1^{-1} Y_l^m) \\ \mathcal{P}_1^n(Y_1^0 Y_l^m) \end{pmatrix}).$$

Si on écrit :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^1 \\ \mathcal{P}_1^{-1} \\ \mathcal{P}_1^0 \end{pmatrix} = \int_{4\pi} \begin{pmatrix} Y_1^1 \\ Y_1^{-1} \\ Y_1^0 \end{pmatrix} (\dots) d\Omega = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{4\pi} \omega(\dots) d\Omega,$$

alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= v \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \nabla_x \cdot \left(\int \omega \otimes \omega f d\Omega \right) \\ &= v \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} \nabla_x \cdot \left(f_l^m \int \omega \otimes \omega Y_l^m d\Omega \right) \\ &= v \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{l,m} \nabla_x \cdot \left[f_l^m \int \begin{pmatrix} Y_1^1 \\ Y_1^{-1} \\ Y_1^0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} Y_1^1 \\ Y_1^{-1} \\ Y_1^0 \end{pmatrix} Y_l^m d\Omega \right]. \end{aligned}$$

Le calcul des $\int Y_1^q Y_1^p Y_l^m d\Omega$ fait plus tôt, nous permet d'écrire à l'aide de (B.8) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1^1 = v \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_x f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\partial_x (-\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0) + \partial_y (\sqrt{3} f_2^{-2}) + \partial_z (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1) \right], \\ \mathcal{A}_1^{-1} = v \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_y f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\partial_x (\sqrt{3} f_2^{-2}) + \partial_y (\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0) + \partial_z (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1}) \right], \\ \mathcal{A}_1^0 = v \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_z f_0^0 + v \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[\partial_x (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1) + \partial_y (\frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1}) + \partial_z (f_2^0) \right]. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

ou plus simplement :

$$\mathcal{A}_1 = v \nabla_x \frac{f_0^0}{\sqrt{3}} + v \frac{2}{5} \nabla_x \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}} f_2 \right), \quad (\text{B.17})$$

avec f_2 le tenseur suivant :

$$f_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0 & \sqrt{3} f_2^{-2} & \frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1 \\ \sqrt{3} f_2^{-2} & \sqrt{3} f_2^2 - \frac{1}{2} f_2^0 & \frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1} \\ \frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^1 & \frac{1}{2} \sqrt{3} f_2^{-1} & f_2^0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Calcul de $\mathcal{E}_1(f)$

Le terme de champ électrique s'écrit : $\mathcal{E}(f) = a \cdot \nabla_v f$, on a :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P}_1 \left(a \cdot \nabla_v \sum_{l,m} f_l^m Y_l^m \right).$$

On écrit \mathcal{P}_1 et \mathcal{E}_1 sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int a \cdot \nabla_v \left(\sum_{l,m} f_l^m Y_l^m \right) \omega \, d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{lm} \int [\omega \otimes \nabla_v (f_l^m Y_l^m)] \cdot a \, d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{lm} \int \left[\underbrace{(f_l^m [\omega \otimes \nabla_v Y_l^m])}_{(a)} + \underbrace{(Y_l^m \omega \otimes \nabla_v f_l^m)}_{(b)} \right] d\Omega \cdot a .\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de (a) par rapport à $d\Omega$, on écrit sous une formulation faible $\int \psi(v) \omega \otimes \nabla_v Y_l^m dv$ avec ψ une fonction quelconque dépendant de v . On écrit le tenseur $\omega \otimes \nabla_v Y_l^m$ sous la forme cartésienne $\omega_i \frac{\partial}{\partial v_j} Y_l^m$ et on fait une intégration par partie par rapport à la variable v_j :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \psi(v) \omega_i \frac{\partial}{\partial v_j} Y_l^m dv &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v_j} (\omega_i \psi(v)) Y_l^m dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(v_i \frac{\psi(v)}{v} \right) Y_l^m dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} \frac{\psi(v)}{v} Y_l^m dv - \int_{\mathbb{R}^3} v_i \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\psi(v)}{v} \right) Y_l^m dv .\end{aligned}$$

La fonction $\psi(v)$ ne dépend que de v donc on a $\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\psi(v)}{v} \right) = \omega_j \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\psi(v)}{v} \right)$ et on peut séparer les intégrales en écrivant $dv = v^2 dv d\Omega$ dans le dernier terme :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \psi(v) \omega_i \frac{\partial}{\partial v_j} Y_l^m dv &= - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} \frac{\psi(v)}{v} Y_l^m dv - \int_0^\infty v^3 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\psi(v)}{v} \right) dv \int_{4\pi} \omega_i \omega_j Y_l^m d\Omega \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} \frac{\psi(v)}{v} Y_l^m dv + \int_0^\infty 3v^2 \frac{\psi(v)}{v} dv \int_{4\pi} \omega_i \omega_j Y_l^m d\Omega \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} \frac{\psi(v)}{v} Y_l^m dv + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3}{v} \psi(v) \omega_i \omega_j Y_l^m dv .\end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(v) \omega_i \frac{\partial}{\partial v_j} Y_l^m dv = - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} \frac{\psi(v)}{v} Y_l^m dv + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3}{v} \psi(v) \omega_i \omega_j Y_l^m dv .$$

Ceci est vrai pour toute fonction $\psi(v)$, par conséquent, on a :

$$\int_{4\pi} \omega_i \frac{\partial}{\partial v_j} Y_l^m d\Omega = - \int_{4\pi} \delta_{ij} \frac{1}{v} Y_l^m d\Omega + \int_{4\pi} \frac{3}{v} \omega_i \omega_j Y_l^m d\Omega .$$

La contribution (a) à \mathcal{E}_1 s'écrit alors :

$$(a) = -I_3 \frac{f_l^m}{v} \int_{4\pi} Y_l^m d\Omega + \frac{3}{v} f_l^m \int_{4\pi} \omega \otimes \omega Y_l^m d\Omega ,$$

et idem (b) s'écrit simplement :

$$(b) = \int_{4\pi} Y_l^m \omega \otimes \nabla_v f_l^m d\Omega = \frac{\partial}{\partial v} f_l^m \int_{4\pi} \omega \otimes \omega Y_l^m d\Omega .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{lm} \left[-I_3 \frac{f_l^m}{v} \int_{4\pi} Y_l^m d\Omega + \frac{3}{v} f_l^m \int_{4\pi} \omega \otimes \omega Y_l^m d\Omega + \frac{\partial}{\partial v} f_l^m \int_{4\pi} \omega \otimes \omega Y_l^m d\Omega \right] \cdot a \\ &= -\sqrt{3} \frac{f_0 a}{v} + \frac{3}{v} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} f_0 a + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} f_2 \cdot a \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial v} (f_0 a) + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\partial}{\partial v} (f_2 \cdot a) , \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\boxed{\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial v} (a f_0) + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f_2 \cdot a) .} \quad (\text{B.19})$$

Calcul de $\mathcal{B}_1(f)$

Le terme de champ magnétique s'écrit $\mathcal{B}(f) = (\omega_b \times v) \cdot \nabla_v f$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{4\pi} (v \times B) \cdot \nabla_v \sum_{l,m} f_l^m Y_l^m \omega d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} \int_{4\pi} \left[\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{v} \begin{pmatrix} v \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} f_l^m Y_l^m \omega d\Omega \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \int_{4\pi} \left(-B_\varphi \omega \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m + B_\theta \omega \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \left[-B_\varphi \int_{4\pi} \omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m d\theta d\varphi + B_\theta \int_{4\pi} \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m d\theta d\varphi \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \left[B_\varphi \int_{4\pi} Y_l^m \frac{\partial(\omega \sin \theta)}{\partial \theta} d\theta d\varphi - B_\theta \int_{4\pi} Y_l^m \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} d\theta d\varphi \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \left[B_\varphi \int_{4\pi} Y_l^m (\cos \theta \omega + \sin \theta e_\theta) d\theta d\varphi - B_\theta \int_{4\pi} Y_l^m \sin \theta e_\varphi d\theta d\varphi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \left[\int_{4\pi} (B_\varphi e_\theta - B_\theta e_\varphi) Y_l^m d\Omega + B_\theta \int_{4\pi} Y_l^m \cos \theta \omega d\theta d\varphi \right] \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \left[\int_{4\pi} (B \times \omega) Y_l^m d\Omega + \underbrace{B_\theta \int_{4\pi} Y_l^m \cos \theta \omega d\theta d\varphi}_R \right].
 \end{aligned}$$

On a utilisé la relation

$$d\omega = d\theta e_\theta + \sin \theta d\varphi e_\varphi .$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 R &= \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{4\pi} Y_l^m \cos \theta \omega d\theta d\varphi = \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{4\pi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \omega Y_l^m d\Omega \\
 &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{4\pi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \begin{pmatrix} Y_1^1 \\ Y_1^{-1} \\ Y_1^0 \end{pmatrix} Y_l^m d\Omega .
 \end{aligned}$$

On montre, composante par composante, que ce terme est identiquement nul :

composante x :

$$\begin{aligned}
 R_x &= -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_1^1(x) P_l^{|m|}(x) dx \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \cos(\varphi) \cos(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m > 0 , \\ \cos(\varphi) d\varphi & \text{si } m = 0 , \\ (-1)^m \sqrt{2} \cos(\varphi) \sin(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m < 0 . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si $m = 0$, alors $R_x = 0$ car $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0$. Même chose pour R_y avec $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = 0$.

Pour $m \neq 0$ on peut utiliser la formule de récurrence (B.20) on a alors :

$$\begin{aligned}
 R_x &= -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{-1}^1 -\frac{1}{2|m|} \left[P_1^1 P_l^{|m|+1} + (l+|m|)(l+1-|m|) P_1^1 P_l^{|m|-1} \right] dx \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \cos(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m > 0 , \\ (-1)^m \sqrt{2} \sin(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m < 0 , \end{cases}
 \end{aligned}$$

Alors $R_x = 0$, car :

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{2|m|} \left[P_1^1 P_l^{|m|+1} + (l+|m|)(l+1-|m|) P_1^1 P_l^{|m|-1} \right] dx = 0 , \quad \forall m \neq 0 .$$

Même chose pour R_y par symétrie.

Pour la composante R_z , on a :

$$R_z = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sum_{l,m} f_l^m B_\theta \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_1^0(x) P_l^m(x) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \cos(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m > 0, \\ d\varphi & \text{si } m = 0, \\ (-1)^m \sqrt{2} \sin(|m|\varphi) d\varphi & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Si $m = 0$ on fait une intégration par partie :

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_1^0(x) P_l^0(x) dx = - \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} (P_1^0 P_l^0) dx$$

$$= - \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_l^0 dx - \int_{-1}^1 P_1^0 \sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} P_l^0 dx,$$

puis on utilise les formules de récurrence (B.21) et (B.22) :

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_1^0(x) P_l^0(x) dx = - \int_{-1}^1 \frac{1}{2l+1} [-P_{l+1}^1 + P_{l-1}^1] dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [l(l+1)P_1^0 P_l^{-1} - P_1^0 P_l^1] dx$$

$$= 0, \quad \forall l.$$

Si $m \neq 0$, alors on a toujours $R_z = 0$ car :

$$\int_0^{2\pi} \cos(|m|\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(|m|\varphi) d\varphi = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*.$$

On a montré que $R = 0 \forall l, m$, et on a utilisé les identités suivantes :

$$-\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_l^m = P_l^{m+1} + (l+m)(l+1-m)P_l^{m-1}, \quad (\text{B.20})$$

$$\sqrt{1-x^2} P_l^m = \frac{1}{2l+1} [-P_{l+1}^{m+1} + P_{l-1}^{m+1}], \quad (\text{B.21})$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{\partial P_l^m}{\partial x} = \frac{1}{2} [(l+m)(l+1-m)P_l^{m-1} - P_l^{m+1}]. \quad (\text{B.22})$$

On a finalement :

$$\mathcal{B}_1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m \int_{4\pi} B \times \omega Y_l^m d\Omega$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{l,m} f_l^m B \times \int_{4\pi} \omega Y_l^m d\Omega,$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{B}_1 = \omega_b \times f_1 .} \quad (\text{B.23})$$

L'expression finale de l'équation sur $\partial_t f_1$ est :

$$\boxed{\partial_t f_1 + v \nabla_x \frac{f_0}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial v} (a f_0) + \omega_b \times f_1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{3}} \left[v \nabla_x \cdot (f_2) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 f_2 \cdot a) \right] = \mathcal{C}_1 .} \quad (\text{B.24})$$

B.2 Opérateur de Fokker-Planck-Landau

Calculs préliminaires

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, définissons la fonction :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv'x}} .$$

On peut développer G sur la base des polynômes de Legendre P_k :

$$G(x) = \sum_{k \geq 0} g_k(v, v') P_k(x) ,$$

avec $g_k(v, v') = \frac{v'^k}{v^{k+1}}$ si $v > v'$. Par la suite on admettra que $v > v'$, dans le cas contraire on utilise la symétrie de G .

Soient $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$ tels que $v = \|\mathbf{v}\|$, $v' = \|\mathbf{v}'\|$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = vv'x$, on a :

$$G(x) = \frac{1}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} G(x) = \frac{vv'}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^3} .$$

Soit A défini par :

$$A = \int_{-1}^1 \frac{1}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} d\mu ,$$

on a :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{vv'} \frac{d}{d\mu} G(\mu) d\mu \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{vv'} \frac{d}{d\mu} \sum_{k \geq 0} g_k(v, v') P_k(\mu) d\mu \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \int_{-1}^1 P_0 \frac{d}{d\mu} P_k(\mu) d\mu \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \int_{-1}^1 P_0 \sum_{j \geq 0} \frac{P_{k-(2j+1)}(\mu)}{\|P_{k-(2j+1)}\|^2} d\mu \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \sum_{j \geq 0} 2\delta_{k, 2j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{vv'} \sum_{k \geq 0} g_{2k+1}(v, v') \\
 &= \frac{2}{vv'} \sum_{k \geq 0} \frac{v'^{2k+1}}{v^{2k+2}} \\
 &= \frac{2}{v^3} \sum_{k \geq 0} \frac{v'^{2k}}{v^{2k}} \\
 &= \frac{2}{v^3} \frac{1}{(1 - v'^2/v^2)} \quad \text{si } v > v', \\
 &= \frac{2}{v(v^2 - v'^2)} \quad \text{si } v < v'.
 \end{aligned}$$

Soit B défini par :

$$B = \int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} d\mu,$$

avec :

$$\mu^2 = \frac{1}{3}(2P_2(\mu) + P_0(\mu)),$$

on a :

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \int_{-1}^1 \frac{1}{3}(2P_2(\mu) + P_0(\mu)) \frac{d}{d\mu} P_k(\mu) d\mu \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \int_{-1}^1 \frac{1}{3}(2P_2(\mu) + P_0(\mu)) \sum_{j \geq 0} \frac{P_{k-(2j+1)}(\mu)}{\|P_{k-(2j+1)}\|^2} d\mu \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{g_k(v, v')}{vv'} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{4}{3} \delta_{k, 2j+3} + \frac{2}{3} \delta_{k, 2j+1} \right) \\
 &= \frac{2}{vv'} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{2}{3} g_{2k+3}(v, v') + \frac{1}{3} g_{2k+1}(v, v') \right) \\
 &= \frac{2}{vv'} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{2}{3} \frac{v'^{2k+3}}{v^{2k+4}} + \frac{1}{3} \frac{v'^{2k+1}}{v^{2k+2}} \right) \\
 &= \frac{2}{v^3} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{2}{3} \frac{v'^{2k+2}}{v^{2k+2}} + \frac{1}{3} \frac{v'^{2k}}{v^{2k}} \right) \\
 &= \frac{2}{v^3} \left(\sum_{k \geq 0} \left(\frac{v'^{2k}}{v^{2k}} \right) - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{2}{v(v^2 - v'^2)} - \frac{4}{3} \frac{1}{v^3} \quad \text{si } v > v', \\
 &= \frac{2}{v(v^2 - v'^2)} + \frac{4}{3} \frac{1}{v^3} \quad \text{si } v < v'.
 \end{aligned}$$

On a calculé les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} d\mu = \begin{cases} \frac{2}{v(v^2 - v'^2)} & \text{si } v > v', \\ -\frac{2}{v'(v^2 - v'^2)} & \text{si } v < v', \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

et

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} d\mu = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{1}{v^3} + \frac{2}{v(v^2 - v'^2)} & \text{si } v > v', \\ -\frac{4}{3} \frac{1}{v'^3} - \frac{2}{v'(v^2 - v'^2)} & \text{si } v < v'. \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Nous avons vu que pour les interactions Coulombiennes le terme de collision électron-électron est donné par :

$$\mathcal{C}^{ee}(f^e, f^e) = \frac{Y_{ee}}{2} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|} (f^e(\mathbf{v}') \nabla_{\mathbf{v}} f^e(\mathbf{v}) - f^e(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}'} f^e(\mathbf{v}')) d\mathbf{v}', \quad (\text{B.27})$$

$$\text{avec } Y_{\alpha\beta} = \frac{4\pi \ln \Lambda_{ee}}{m_e^2}.$$

Soit ψ une fonction de distribution régulière de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , indépendante du temps. L'opérateur de collision s'écrit alors sous la formulation faible suivante :

$$\frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) \mathcal{C}^{ee}(f^e, f^e) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|} (f^e(\mathbf{v}') \nabla_{\mathbf{v}} f^e(\mathbf{v}) - f^e(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}'} f^e(\mathbf{v}')) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}.$$

Si on remplace f^e par la fonction de distribution isotrope f_0^e et qu'on suppose que ψ est également isotrope, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) \mathcal{C}^{ee}(f_0^e, f_0^e) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|} \\ &\quad \times \left(f_0^e(\mathbf{v}') \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(\mathbf{v}) - f_0^e(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(\mathbf{v}') \right) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations on pose :

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{S(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|} (f_0^e(\mathbf{v}') \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(\mathbf{v}) - f_0^e(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}'}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(\mathbf{v}')) d\mathbf{v}',$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \mathcal{C}^{ee}(f_0^e) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{v}} \psi_0(v) \cdot F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot F(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \mathbf{v} \cdot F(\mathbf{v}) v dv d\Omega. \end{aligned}$$

Pour calculer F , on va devoir intégrer $\left(\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{v}$ et $\left(\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{v}'$ par rapport à la mesure $d\Omega dv'$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|} &= \frac{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|^2 I - (\mathbf{v}-\mathbf{v}')\otimes(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|^3} \\ &= \frac{(v^2+v'^2-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')I - \mathbf{v}\otimes\mathbf{v} - \mathbf{v}'\otimes\mathbf{v}' + \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\otimes\mathbf{v}}{(v^2+v'^2-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')^{3/2}},\end{aligned}$$

avec $\mu = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{vv'}$, $\Omega = \frac{\mathbf{v}}{v}$ et $\Omega' = \frac{\mathbf{v}'}{v'}$ on a :

$$\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|}\mathbf{v} = \frac{v'^2v\Omega + v^2v'\mu\Omega - v'^2v\mu\Omega' + v^2v'\Omega'}{(v^2+v'^2-2vv'\mu)^{3/2}},$$

d'où :

$$\left(\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{v} = \left(\frac{S(\mathbf{v}-\mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{v}' = \frac{v^2v'^2(1-\mu^2)}{(v^2+v'^2-2vv'\mu)^{3/2}}.$$

En revenant à la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \mathcal{C}^{ee}(f_0^e) dv &= - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathcal{S}^2} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^2v'^2(1-\mu^2)}{(v^2+v'^2-2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' v dv d\Omega,\end{aligned}$$

on écrit $dv' = v'^2 dv' d\varphi d\mu$ et on intègre par rapport à Ω :

$$\begin{aligned}\frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \mathcal{C}^{ee}(f_0^e) dv &= -4\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{v^2v'^2(1-\mu^2)}{(v^2+v'^2-2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) v'^2 dv' d\varphi d\mu dv \\ &= -4\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} v^3 v'^4 \int_{-1}^1 \frac{1-\mu^2}{(v^2+v'^2-2vv'\mu)^{\frac{3}{2}}} d\mu \\ &\quad \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' d\varphi dv.\end{aligned}$$

D'après les intégrales (B.25) et (B.26), on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - \mu^2}{(v^2 + v'^2 - 2vv'\mu)^{\frac{2}{3}}} d\mu = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{v^3} & \text{si } v \geq v', \\ \frac{4}{3} \frac{1}{v'^3} & \text{si } v \leq v', \end{cases} = \frac{4}{3} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) C^{ee}(f_0^e) dv &= -\frac{4\pi}{3} 8\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' dv \\ &= \frac{8\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' dv. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Cette identité est vérifiée pour toute fonction ψ_0 , par conséquent on peut écrire :

$$\frac{2}{Y_{ee}} C^{ee}(f_0^e) = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv'.$$

On introduit les intégrales d'Allis :

$$I_n^l = \frac{4\pi}{v^n} \int_0^v v'^{n+2} f_l(v') dv' \quad \text{et} \quad J_n^l = \frac{4\pi}{v^n} \int_v^\infty v'^{n+2} f_l(v') dv'. \quad (\text{B.29})$$

On peut alors réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} C^{ee}(f_0^e, f_0^e) &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_0^v \frac{1}{v^3} v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' \right. \\ &\quad \left. + \int_v^\infty \frac{1}{v'^3} v^3 v'^4 \left(f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' \right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_0^v \left(v'^4 f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) v'^3 \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' \right. \\ &\quad \left. + \int_v^\infty v^3 \left(v' f_0^e(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^e(v) - f_0^e(v) \frac{\partial}{\partial v'} f_0^e(v') \right) dv' \right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{4\pi} \frac{\partial f_0^e}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{3}{4\pi} f_0^e I_0^0 \right). \end{aligned}$$

On a finalement :

$$C^{ee}(f_0^e, f_0^e) = \frac{Y_{ee}}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{3} \frac{\partial f_0^e}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) + f_0^e I_0^0 \right). \quad (\text{B.30})$$

B.3 Propriétés de $\mathcal{C}_0^{ee}(f_0, f_0)$

Nous allons énoncer des propriétés relatives au termes de collision électron-électron que nous venons de calculer.

Proposition B.3.1. *La maxwellienne centrée M définie par :*

$$M = \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{T}{m} v^2\right)$$

est solution de l'équation $\mathcal{C}^{ee}(f_0^e, f_0^e) = 0$.

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{C}^{ee}(f_0^{\mathcal{M}}, f_0^{\mathcal{M}}) = 0$ on revient à la notation intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \mathcal{C}^{ee}(f_0^{\mathcal{M}}, f_0^{\mathcal{M}}) &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0^{\mathcal{M}}(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^{\mathcal{M}}(v) - f_0^{\mathcal{M}}(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0^{\mathcal{M}}(v') \right) dv' \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(-\frac{T}{m} \right) \left(f_0^{\mathcal{M}}(v') f_0^{\mathcal{M}}(v) - f_0^{\mathcal{M}}(v) f_0^{\mathcal{M}}(v') \right) dv' \\ &= 0, \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0^{\mathcal{M}}(v) = -\frac{T}{m} f_0^{\mathcal{M}}(v)$$

■

Proposition B.3.2. *L'opérateur de collisions $\mathcal{C}^{ee}(f_0^e, f_0^e)$ conserve la densité (i) et l'énergie (ii)*

Démonstration. (i) Pour la conservation de la densité, partons de la formulation faible suivante (eq (B.28)) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \mathcal{C}^{ee}(f_0) dv &= \frac{8\pi}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \\ &\quad \times \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' dv, \end{aligned}$$

avec $\psi_0 = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}^{ee}(f_0) dv &= \frac{32\pi^2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' dv \\ &= \frac{32\pi^2}{3} \left[\int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \right]_{v=0}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Quand $v \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \\ &= v^2 \int_{\mathbb{R}^+} \left(f_0(v') v' \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) v \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \end{aligned}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \longrightarrow 0 \quad \text{quand } v \rightarrow 0,$$

si f_0 est bornée en 0 et que sa dérivée en 0 s'annule.

Quand $v \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} v'^4 \left(f_0(v') v' \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) v \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \end{aligned}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' \longrightarrow 0 \quad \text{quand } v \rightarrow +\infty,$$

si f_0 tend vers 0 en $+\infty$ plus vite que $\frac{1}{v}$.

(ii) Pour la conservation de l'énergie, partons de la formulation faible suivante (eq (B.28)) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_0(v) \mathcal{C}^{ee}(f_0, f_0) dv &= -\frac{4\pi}{3} 8\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial}{\partial v} \psi_0(v) \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \\ &\quad \times \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' dv, \end{aligned}$$

avec $\psi_0 = v^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Y_{ee}} \int_{\mathbb{R}^3} v^2 \mathcal{C}^{ee}(f_0, f_0) dv &= -\frac{32\pi^2}{3} \int_{\mathbb{R}^+} 2v \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^3 v'^4 \\ &\quad \times \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' dv \\ &= -\frac{64\pi^2}{3} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \inf\left(\frac{1}{v^3}, \frac{1}{v'^3}\right) v^4 v'^4 \\ &\quad \times \left(f_0(v') \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_0(v) - f_0(v) \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_0(v') \right) dv' dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

