



**HAL**  
open science

# Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début du cursus dans le Supérieur - Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs

Fatma Belhaj Amor

► **To cite this version:**

Fatma Belhaj Amor. Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début du cursus dans le Supérieur - Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université de Pau et des Pays de l'Adour; Université virtuelle de Tunis, 2022. Français. NNT : 2022PAUU3020 . tel-04051033

**HAL Id: tel-04051033**

**<https://theses.hal.science/tel-04051033>**

Submitted on 29 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse en cotutelle entre Université  
Virtuelle de Tunis et Université de  
Pau et des Pays de l'Adour



## **Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début du cursus dans le Supérieur - Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs**

Thèse présentée par Fatma Belhaj Amor

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Laboratoire de Didactiques, Sciences de l'enseignement, Métiers de l'Education et de la  
Formation. Université Virtuelle de Tunis

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications. Université de Pau et des Pays de  
l'Adour - UMR CNRS 5142

Soutenue le mardi 29 novembre 2022 devant le jury

Imène Ghedamsi	Professeure, Université de Tunis, rapporteuse de thèse
Patrick Gibel	Professeur, INSPE de l'académie de Bordeaux, co-directeur de thèse
Nicolas Grenier-Boley	Professeur, Université de Rouen Normandie, président du jury
Rahim Kouki	Professeur, Université de Tunis El Manar, directeur de thèse
Laurent Lévi	MCF-HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour, co-directeur de thèse
Fabrice Vandebrouck	Professeur, Université de Paris, rapporteur de thèse



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Messieurs Patrick Gibel, Laurent Lévi et Rahim Kouki, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je leur suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de leur grande compétence, de leur rigueur intellectuelle, de leur dynamisme, et de leur efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Soyez assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Madame Imène Ghedamsi, professeure à l'Université de Tunis, et Monsieur Fabrice Vandebrouck, professeur à l'Université de Paris, m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ils ont pris le temps pour lire ma thèse, de m'écouter et de discuter avec moi. Leurs remarques m'ont permis d'enrichir mon travail et de fournir une multitude de pistes de recherche pour les prochaines années. Pour tout cela je les remercie.

Mes remerciements à Monsieur Nicolas Grenier-Boley, professeur à l'INSPE Normandie Rouen-Le Havre, qui m'a fait l'honneur d'être le président du jury de cette thèse. Je le remercie aussi pour les conseils scientifiques qu'il a apportés en qualité de membre de comité de suivi de ma thèse, ainsi que pour son immense aide pour mener à bien ces travaux.

Je tiens à remercier le laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour de m'avoir acceptée dans son équipe, de m'avoir fourni tous les moyens nécessaires lors de mon séjour à Pau et lors de ma participation aux événements de recherche en didactique des mathématiques.

Je voudrai remercier l'école doctorale de l'Université Virtuelle de Tunis et le laboratoire DISEMEF de m'avoir acceptée dans son équipe.

Mes remerciements chaleureux à Madame Rajia Slim, maître assistante à l'Institut Préparatoire de Tunis (IPEIT), qui a accepté de participer à notre travail de recherche. Elle a consacré du temps pour faire réussir notre expérimentation mise en œuvre lors de son enseignement.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Madame Isabelle Bloch et Monsieur Jean-Matthieu Etancelin qui m'ont apporté leur support moral intellectuel et scientifique dans le cadre de comité de suivi de ma thèse.

Mes sincères remerciements à Mesdames Sonia Ben Othman, Vivianne Durand-Guerrier, Samia Achour et Faiza Chellougui et Messieurs Mahdi Abdeljaouad, Christian Mercat et Mounir Dhieb qui m'ont encouragé et ont enrichi ce travail par des idées pertinentes de leurs expériences dans la recherche.

Mes remerciements chaleureux à ma mère, à ma famille et à tous mes amis de leur patience et de leur encouragement.

## Table des matières

Introduction : Motivation des recherches .....	12
PARTIE I.....	23
PARTIE THEORIQUE .....	23
Chapitre 1 .....	24
Les recherches antérieures dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse à l'entrée dans le Supérieur.....	24
Introduction .....	24
I. Difficultés liées à la transition Secondaire/Supérieur lors de l'enseignement des objets de l'Analyse .....	26
II. Difficultés liées au processus de la conceptualisation des objets du domaine de l'étude d'une fonction et à l'usage des raisonnements en situation au début de l'Université	28
III. Difficultés éprouvées par des étudiants liées à l'étude des signes .....	37
IV. Existence des obstacles liés aux objets du domaine de l'étude d'une fonction.....	41
Conclusion du chapitre 1 .....	45
Chapitre 2 .....	50
Eléments relatifs à l'histoire et l'épistémologie des approximations locales d'une fonction	50
Introduction .....	50
I. Intérêt de la mise en jeu des liens entre les domaines de l'histoire, de l'épistémologie et de la didactique.....	52
II. Méthodologie et cadres théoriques de l'analyse épistémologique .....	53
III. Étude historique et épistémologique des objets liés au concept d'approximation locale d'une fonction .....	55
III.1. La notion de tangente .....	57
III.2. La notion d'équivalence .....	66
III.3. Les notions de « développements en séries infinies », de « développements en séries de Taylor » et de développements asymptotiques.....	68

III.4. Les notions de fonction, de limite d'une fonction, de développements d'une fonction et de développements asymptotiques.....	77
IV. L'évolution historique des applications des méthodes d'approximations.....	88
IV.1. La crise de confiance à l'usage des infiniment petits dans le domaine du calcul différentiel .....	90
IV.2. La crise de confiance à la « Théorie des séries» d'Euler .....	90
IV.3. Les formules inadéquates de Lagrange .....	92
Conclusion du chapitre 2 : identification des obstacles liés à la genèse historique des objets d'approximation locale d'une fonction .....	94
Chapitre 3 .....	100
Cadres théoriques et méthodologie de la recherche .....	100
Introduction .....	100
I. Le cadre théorique premier de notre étude : la théorie des situations didactiques	104
I.1. Les raisons du choix de ce cadre théorique.....	106
I.2. Catégorisation des situations en théorie des situations didactiques .....	107
I.3. Institutionnalisation des savoirs et concepts du répertoire didactique .....	115
I.4. Le schéma de la structuration du milieu.....	119
II. Les rôles déterminants des ingénieries didactiques en théorie des situations didactiques.....	127
II.1. Ingénierie de recherche et ingénierie didactique de développement .....	128
II.2. Les principaux enjeux et les spécificités d'une ingénierie didactique de développement .....	131
III. Outillage didactique pour analyser la construction d'un concept en Analyse.....	136
III.1. Évolution des objets de l'Analyse standard à la transition Secondaire/Supérieur – Les différents paradigmes liés à l'apprentissage de l'Analyse .....	136
III.2. Caractérisation d'un concept mathématique .....	138
III.3. Caractérisation d'une conception mathématique .....	139
III.4. Les représentations sémiotiques d'un concept.....	141

III.5. Analyse logique d'un concept en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique.....	144
III.6. Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les étudiants .....	148
IV. Présentation de la méthodologie utilisée .....	150
IV.1. Définition et classification des raisonnements en théorie des situations didactiques .....	151
IV.2. Présentation du modèle d'analyse des raisonnements.....	152
IV.3. Les fonctions du modèle : fonction prédictive et fonction explicative .....	155
IV.4. Méthodologie utilisée pour analyser les raisonnements.....	157
Conclusion du chapitre 3 : formulation des questions de recherche et synthèse de la méthodologie générale .....	165
Chapitre 4 .....	175
Analyse institutionnelle .....	175
Introduction .....	175
I. Méthodologie de l'analyse des programmes et des différents supports de cours .....	177
II. Étude du programme de la quatrième année Secondaire (SC-E).....	179
II.1. Objectifs généraux du programme d'Analyse .....	179
II.2. Étude du contenu lié au concept d'approximation locale d'une fonction .....	181
II.3. Conclusion : organigramme de contenu du programme .....	183
III. Étude du programme de la première année Physique-Chimie (PC).....	184
III.1. Objectifs généraux de l'enseignement d'Analyse .....	184
III.2. Étude du texte du programme lié au concept d'approximation locale d'une fonction.....	187
III.3. Conclusion : organigramme de contenu du programme.....	191
Conclusions de l'étude des programmes .....	192
IV. Étude de deux parties d'ouvrages universitaires.....	193
Introduction .....	193
IV.1. Étude de la partie de l'ouvrage universitaire « Tout en un PCSI-PTSI » .....	193

IV.2. Étude de l'ouvrage « HPRÉPA Tout en un » .....	200
V. Étude du polycopié de cours de l'enseignante .....	209
V.1. Étude de la partie « Cours ».....	209
V.2. Étude de la partie « Exercices ».....	210
V.3. Conclusion .....	211
Conclusions du chapitre 4.....	211
PARTIE II.....	217
PARTIE EXPÉRIMENTALE .....	217
Chapitre 5 .....	218
Analyse et classification des erreurs effectuées par des étudiants relatives à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction.....	218
I. Les raisons de la confrontation des étudiants à des situations mathématiques « choisies ».....	218
I. Les focales de l'étude réalisée et la méthodologie mise en œuvre .....	220
II.1. L'importance accordée aux différents types de raisonnement produits par les étudiants .....	220
II.2. L'importance de l'identification des paradigmes de l'Analyse .....	220
II.3. Méthodologie mise en œuvre.....	222
- Analyse de la question (2-a).....	231
III. Principaux résultats de l'étude.....	242
III.1. Analyse des questions (1-a-b-c) liées à l'étude locale de la fonction $f$ .....	242
III.2. Analyse des questions (2-a-b-c) liées à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $+\infty$ .....	252
III.3. Analyse des questions liées à l'étude du comportement de la fonction en $(-\infty)$ .....	258
Conclusion du chapitre 5 .....	261
Chapitre 6 .....	270
Élaboration et mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement .....	270



Partie A : présentation globale de l'ingénierie didactique de développement expérimentée en première année de classes préparatoires aux études d'ingénieurs.....	270
I. Les raisons et les conditions de l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement (IDD) .....	270
I.1. Les raisons de l'élaboration de l'IDD .....	270
I.2 Les conditions de l'élaboration de l'IDD .....	272
II. Les focales de l'étude réalisée et la méthodologie mise en œuvre .....	273
II.1. L'importance accordée au modèle d'analyse des raisonnements .....	273
II.2. Méthodologie mise en œuvre .....	273
II.3. Méthodologie d'analyse des données .....	278
Partie B : analyses didactiques de la situation 1 .....	281
I. Présentation et analyse <i>a priori</i> de la situation .....	281
I.1. Présentation de l'origine et des enjeux de la situation mathématique .....	281
I.2. Analyse a priori de la situation sur les plans mathématique et didactique.....	286
Conclusion : tableau de synthèse.....	294
I.3. Déroulement prévu : phases didactiques et phases adidactiques .....	297
I.4. Analyse descendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse .....	303
I.5. Analyse ascendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse .....	306
I.6. Analyse a priori des raisonnements.....	308
II. Déroulement de la séquence .....	310
II.1. Phase 1 : mise en œuvre de la continuité des apprentissages .....	310
II.2. Étude de la dévolution de la situation .....	314
II.3. Analyse des raisonnements produits par confrontation à la situation.....	315
II.4. Présentation des raisonnements lors de la phase de mise en commun des procédures de résolutions.....	335
II.5. Les phases de formulation et de validation.....	337

II.6. L'institutionnalisation de la formule de Taylor-Young.....	339
III. Conclusion .....	347
Partie C : analyses didactiques de la situation 2.....	351
I. Présentation et analyse <i>a priori</i> de la situation .....	351
I.1. Présentation de l'origine et des enjeux didactiques de la situation mathématique .....	352
I.2. Analyse a priori de la situation sur les plans mathématique et didactique.....	354
I.3. Déroulement prévu : phases didactiques et phases adidactiques .....	363
I.4. Analyse descendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse .....	365
I.5. Analyse ascendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse .....	367
I.6. Analyse a priori des raisonnements : modèle d'analyse des raisonnements.....	369
II. Principaux résultats .....	372
II.1. Phase 1 : la manière d'établir le lien avec les précédentes notions .....	372
II.2. Phase 2 : étude de dévolution de la situation .....	374
II.3. Phase 3 : analyse des raisonnements produits par les 8 groupes .....	375
II.4. Phase 4 : phase de la mise en commun et de discussion.....	397
II.5. Phase 5 : Institutionnalisation de la propriété du concept de développement limité .....	402
Conclusion : identification des obstacles.....	403
Conclusions du chapitre 6.....	404
Chapitre 7 .....	409
Les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants .....	409
I. Les raisons de la confrontation des étudiants à des situations « choisies » suite à l'expérimentation .....	409
II. Méthodologie mise en œuvre.....	411

II.1. Sujet .....	411
II.2. Instrumentations.....	411
II.3. Place de la séquence dans la progression.....	413
II.4. Méthode d'analyse des données : mise en œuvre des différentes dimensions de l'outil d'analyse.....	413
II. Principaux résultats.....	413
II.1. Analyse des questions (1-a-b-c) liées à l'étude locale de la fonction $f$ .....	414
II.2. Analyse des questions (2-a-b-c) liées à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $+\infty$ .....	423
II.3. Analyse de la question (3) liée à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$ .....	430
Conclusion du chapitre 7 .....	435
Conclusions générales et perspectives.....	442
Les apports de recherche .....	443
Accès au sens du savoir « approximation locale d'une fonction ».....	448
Modèle d'analyse du raisonnement.....	451
Les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants .....	452
Contraintes et limites de recherche.....	453
Perspectives .....	454
BIBLIOGRAPHIE.....	455
ANNEXES.....	470
Annexe du chapitre 5 .....	470
Annexe 5-1 .....	470
Annexe 5-2 .....	474
Annexe 5-3 .....	478
Annexe du chapitre 6.....	483
Annexe 6-1 .....	483

Annexe 6-2 .....	484
Annexe 6-3 .....	484
Annexe du chapitre 7 .....	486
Annexe 7-1 .....	486
Annexe 7-2 .....	491
Annexe 7-3 .....	497

## Introduction : Motivation des recherches

En Tunisie, au début du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs, les notions de développements limités, la relation de comparaison des fonctions et la formule de Taylor-Young ont une caractéristique fondamentale commune : celle de jouer un rôle déterminant dans la résolution de problèmes d'approximations locales d'une fonction en matière de modélisation dans les domaines de la physique, de la mécanique, de l'optique, etc. Ces objets mathématiques favorisent le passage de l'étude globale d'une fonction à son étude locale au voisinage d'un réel bien précis. En effet, à ce niveau universitaire, les définitions formelles des notions de fonctions négligeables, fonctions équivalentes, la formule de Taylor-Young et développements limités articulent des connaissances et des savoirs qui relèvent des domaines de l'Analyse fonctionnelle et de la topologie. La conceptualisation de ces objets mathématiques nécessite un travail qui s'inscrit dans le paradigme de l'Analyse Infinitésimale [AI], (Kuzniak, Montoya, Vandebrouck & Vivier, 2015). Par ailleurs, la notion de la topologie « voisinage d'un réel » est introduite dans le chapitre « Analyse asymptotique » de l'Analyse avant d'être traitée en topologie à la fin de première année des classes préparatoires. D'une part, ces nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction sont introduites afin d'être des nouvelles techniques permettant l'étude d'une fonction, le calcul de sa limite et l'existence de ses intégrales lors de la transition secondaire/supérieur, ainsi que l'étude de la convergence des séries dans le domaine des mathématiques en première année Physique-Chimie (PC). D'autre part, les étudiants mobilisent ces objets en tant que nouvelle technique lors de la détermination des approximations des fonctions par des polynômes au voisinage d'un réel dans le domaine de la physique, l'optique, la mécanique, etc.

Dans le cadre de notre mémoire de Master (Belhaj Amor, 2016), nous avons conduit une étude de l'enseignement et de l'apprentissage du concept de développement limité, en termes de transposition didactique à l'entrée dans le Supérieur, plus précisément en première année du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs en Tunisie. Dans cet écrit, nous avons mené trois investigations : la première, de nature épistémologique, porte sur l'évolution historique et mathématique des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique ; la deuxième, de nature macro-didactique, est consacrée à l'analyse des programmes, des manuels, des photocopiés de cours des enseignants et la troisième investigation, micro-didactique, se présente sous la forme de l'analyse d'une enquête adressée auprès des enseignants universitaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Dans une réflexion d'ordre épistémologique, nous remarquons que la genèse historique du concept de développement limité est due à l'usage et à l'analyse de ses représentations graphique, géométrique, analytique et algébrique. D'une part, dès le début du XVII<sup>e</sup> jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens se sont appuyés sur des interprétations des représentations graphiques des courbes mécaniques et algébriques, ainsi que sur des transformations syntaxiques des expressions analytiques et algébriques pour résoudre des problèmes physico-mathématiques. D'autre part, l'évolution historique des mathématiques et notamment des objets étroitement liés au concept de développement limité, est due au changement de paradigmes : de celui « cinématique » à un paradigme « géométrique » et ensuite « analytique ». Ce changement de paradigmes a conduit à l'existence d'obstacles épistémologiques liés au concept du développement limité. L'investigation historico-épistémologique a permis de conclure que la genèse historique de ce concept mathématique a mis en évidence l'articulation des approches inter et intra-mathématiques, ainsi que l'interprétation des différentes techniques syntaxiques mobilisées au sein de plusieurs registres analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique.

Dans une réflexion d'ordre didactique, nous avons conduit une étude de l'organisation mathématique, prévue par l'institution des classes préparatoires concernant la notion de développement limité, en utilisant trois variables macro-didactiques susceptibles de conditionner la nature du travail des étudiants et son évolution (Bloch & Ghedamsi, 2005) : V1 – Type de tâches et techniques utilisées (Chevallard, 1999) ; V2 – Registres sémiotiques et conversion entre registres (Duval, 1993) et V3 – Dialectique sémantique/syntaxique (Durand-Guerrier, 1996 ; Kouki, 2008 ; Kouki & Ghedamsi, 2012, etc.). Le croisement des trois variables macro-didactiques nous a permis de conclure que la notion de développement limité n'est pas introduite en tant que connaissance inhérente à l'approximation locale d'une fonction, faisant intervenir les différents registre (analytique, algébrique, graphique et géométrique), ce qui favoriserait l'articulation sémantique/syntaxique dans des domaines intra et extra mathématiques, (Belhaj Amor, 2018).

De ce fait, les investigations épistémologique et didactique conduites donnent l'intérêt du processus de visualisation pour l'apprentissage des nouvelles connaissances théoriques au niveau de l'université et ce, par la nécessité d'articuler les dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique dans l'enseignement de l'objet développement limité. Cette étude nous a permis de proposer l'hypothèse que le travail au niveau du registre graphique, via des techniques géométriques d'ordre sémantique, est au cœur de l'enseignement des objets mathématiques au début de l'Université, (Belhaj Amor, 2018).

Nous avons passé du temps pour approfondir cet aspect. Nos travaux de recherche (Belhaj Amor, 2018, 2019) ont mis aussi en évidence un phénomène important : le fait que les difficultés éprouvées par les étudiants sont étroitement liées à la difficile conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction à l'entrée dans le Supérieur.

L'investigation expérimentale auprès des enseignants en mathématiques a donné des éléments de réponses sur la prise en compte des dimensions sémantique et syntaxique dans l'enseignement du concept de développement limité. En revanche, nous pensons qu'une investigation expérimentale, visant à analyser les types de techniques mobilisées par les étudiants, lors de la résolution des situations mathématiques liées aux notions des développements limités et des approximations locales pourrait nous donner plus d'éléments de réponses à nos questionnements de natures mathématique et didactique.

Les notions de fonctions négligeables, fonctions équivalentes, la formule de Taylor-Young et développements limités sont des nouvelles techniques permettant soit l'approximation d'une fonction transcendante ou algébrique au voisinage d'un réel bien précis par une autre fonction, soit l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini, soit le calcul de limite d'une fonction qui relève d'une forme indéterminée lors de la transition Secondaire/Supérieur.

Dans le domaine de l'étude des fonctions, certains travaux ont établi l'existence des difficultés rencontrées par les étudiants qui résultent principalement du changement de contrat didactique lors de la transition Secondaire/Supérieur, (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018 ; Bloch & Gibel, 2022) :

- Soit au niveau du processus de l'étude des signes et des représentations (Bloch & Gibel, 2019). Dès le début de l'Université, les étudiants apprennent un nouveau signe comme on apprend un mot nouveau, (Berger, 2004). La culture symbolique attendue au niveau de l'Université diffère de celle développée au niveau Secondaire. Par exemple, un même symbole peut avoir de différents sens, (Bardini & Pierce, 2018) ;
- Soit au niveau de paradigme par l'existence des variables en transition liés au passage de « *l'Analyse concrète* » à « *l'Analyse moderne* » : obstacles épistémologiques et contrats, (Winslow, 2007) ;
- Soit au niveau des tâches proposées par le passage d'un « *travail algorithmique à un travail complexe* » (Ghedamsi, 2008). Et notamment, au niveau Secondaire, les tâches proposées ne laissent que peu d'autonomie aux élèves dans le choix des raisonnements (Leithner, 2000 ; Battie, 2003) ;

- Soit au niveau de types des techniques de résolution des différentes tâches (Bloch & Ghedamsi, 2005 ; Bloch, 2005 ; Ghedamsi, 2008), le passage d'une « analyse algébrisée » à une « analyse formalisée » amène à l'existence des micro-ruptures d'ordres conceptuel et technique, (Praslon, 2000). L'approche algébrique fait obstacle lors de l'étude d'une fonction (Vandebrouck, 2011), et notamment lors de passage du niveau global au niveau local et réciproquement (Rogalski, 2008).

Ces précédents travaux n'ont pas ciblé précisément l'analyse didactique des difficultés des étudiants, selon les aspects épistémologiques et cognitifs, lors de la conceptualisation des objets d'approximations locales des fonctions qui nécessite un travail complexe articulant les savoirs et connaissances qui relèvent des domaines de l'Analyse fonctionnelle et de la topologie à l'entrée dans le Supérieur.

Ces constats nous amènent à nous interroger sur la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage raisonné de ces objets mathématiques en classes préparatoires aux études d'ingénieures tunisiennes (IPEI), dans la section Physique-Chimie (PC).

Par ailleurs, certains travaux liés au domaine d'approximations des fonctions au début du Supérieur, ont établi l'influence des images dynamiques sur l'apprentissage des notions de la limite (Alcock & Simpson, 2015), de la convergence des séries de Taylor (Alcock & Simpson, 2004 ; Kidron & Zehavi, 2002 ; Kidron, 2003, 2008) et de l'approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction au voisinage de zéro, (Artigue, 2002).

Cette revue de lecture des travaux nous amène à proposer un projet initial de notre travail de recherche : une expérimentation permettant la visualisation des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations au voisinage d'un réel aide les étudiants à surmonter les difficultés liées à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Dans le contexte de l'analyse des difficultés rencontrées par les étudiants, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (1986) qui donne l'intérêt d'une étude approfondie des différents types d'erreurs effectuées par les élèves confrontés à une situation mathématique. Cette analyse des erreurs se réalise par l'étude du développement cognitif et du fonctionnement des connaissances mobilisées par les élèves. Brousseau (1986) distingue deux catégories d'erreurs. D'une part, une erreur liée à une connaissance fautive qui peut être rejetée et surmontée comme son existence est passagère. Dans ce cas, elle reste une difficulté. D'autre part, un ensemble des connaissances fautes qui constitue une conception erronée. Cette conception sera difficile à modifier ou à rejeter et qui donnera lieu à des conflits cognitifs véritables. Dans ce cas, elle fait



un obstacle : ontogénique, épistémologique lié à la genèse historique du concept ou didactique lié au choix de l'enseignement. Et plus précisément,

*« ...la notion d'obstacle épistémologique tend à se substituer dans certains cas à celle d'erreur d'enseignement, d'insuffisance du sujet ou de difficulté intrinsèque des connaissances. »*  
(Brousseau, 1998, p.7-8)

A l'issue de ces études de Brousseau (1976, 1989, 1986,1998), nous proposons une première hypothèse de notre travail de recherche :

**Hypothèse 1** : les obstacles liés à l'appropriation et à l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant l'utilisation des représentations graphiques.

La construction de ces représentations graphiques, en classes préparatoires, nécessite l'utilisation d'un logiciel dynamique de la géométrie. Pour ceci, une deuxième hypothèse qui se propose dans notre travail :

**Hypothèse 2** : le logiciel dynamique de la géométrie « Geogebra » constitue un environnement adéquat du travail au niveau de l'articulation des différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction.

Dans le contexte de la confrontation des étudiants aux situations en classes ordinaires, le travail avec des enseignants extérieurs à la recherche, avant de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique, permettra de mieux connaître ses pratiques ordinaires afin de surmonter des contraintes de l'enseignement ordinaire, (Perrin-Glorian & Baltar, 2019). Pour ces raisons nous pensons que :

**Hypothèse 3** : la construction et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permettent de surmonter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Dans le cadre des recherches portant sur l'interprétation des erreurs des élèves, Brousseau (1989) indique que le rôle du chercheur consiste tout d'abord à :

*« - trouver ces erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions ;  
- trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques ;  
- confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique. »* (Brousseau, 1989)

D'un côté, Brousseau (1989) a prouvé l'importance de la prise en compte des erreurs prévues dans la révolution historique des mathématiques pour son enseignement en précisant le travail du chercheur en didactique des mathématiques. D'un autre côté, il est très important dans les

travaux de recherche d'un didacticien de connaître les difficultés des mathématiciens afin de les confronter à celles des étudiants. En effet,

« ...il faut maintenant envisager les erreurs récurrentes comme le résultat (produit par et construit autour) de conceptions, qui, mêmes lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives. » (Brousseau, 1989, p.42)

A l'issue de ces travaux de Brousseau, nous envisageons d'élaborer et de construire une ingénierie didactique de développement qui nécessite de conduire préalablement une analyse épistémologique des concepts pour percevoir quel type d'obstacles peuvent apparaître et en même temps de questionner des obstacles qui peuvent être de nature didactique.

**Hypothèse 4** : l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés au concept de relation de comparaison des fonctions, développement limité et la formule de Taylor-Young contribuent à :

- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets mathématiques en première année (PC) ;
- permettre aux étudiants de surmonter ces erreurs.

Dans le cadre de l'apprentissage des objets mathématiques, nous rejoignons le point de vue de Bloch et Gibel (2011) qui donnent l'intérêt de l'analyse détaillée des raisonnements produits par des étudiants lors de la résolution des situations mathématiques Ceci permettra *a priori* d'identifier la nature et l'origine des erreurs apparaissant dans leurs productions. Ainsi, nous proposons les questions de recherche suivantes :

- Est-ce que dans le cas de l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement, l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe permet d'identifier leurs conceptions (erronées ou valides) afin d'étudier la nature et l'origine de leurs erreurs inhérentes à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?
- Est-ce que l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permet de surmonter les obstacles liés à l'apprentissage du concept de la relation de comparaison de fonctions, la formule de Taylor-Young et développements limités ?
- Une évaluation formative et formatrice, à l'issue de cette ingénierie didactique de développement, permet-elle d'analyser les difficultés éprouvées par les étudiants lors de l'appropriation et de l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?

Notre travail de recherche porte sur une réflexion didactique en vue d'élaborer et d'expérimenter d'une ingénierie didactique de développement chez une enseignante de première année (PC). Cette ingénierie est un projet d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction, dans le cadre d'un travail collaboratif avec l'enseignante de la classe, afin d'apporter des éléments de réponses à nos questions relatives aux erreurs effectuées par les étudiants lors de l'appropriation et de l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction.

L'ingénierie didactique de développement vise à étudier l'adaptation des situations produites aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants de première année (PC).

Par ailleurs, la maîtrise des jeux entre le point de vue local et le point de vue global sont essentielles à l'apprentissage des objets de l'Analyse liés au domaine de l'étude d'une fonction (Artigue, 2002). Dans notre travail, l'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction, selon les aspects mathématique, épistémologique et cognitif est étroitement lié à la notion de limite. De ce fait, nous pensons que cette notion est la clé des jeux du passage de l'étude globale d'une fonction à son étude locale, lors de la transition Secondaire/Supérieur, afin d'introduire les définitions formelles des objets d'approximation locale d'une fonction dans le paradigme de l'Analyse Infinitésimale.

À l'instar d'Artigue (2002), il y a la possibilité d'approcher une fonction : son approximation locale au premier ordre par une fonction affine au voisinage d'un point dont sa représentation sera une tangente à sa courbe représentative en ce point. Au niveau du Secondaire, la tangente est un objet de l'Analyse qui se caractérise par son rapport local à la courbe représentative de la fonction en ce point. L'équation de la tangente est une approximation polynômiale d'ordre 1 de cette fonction au voisinage d'un réel.

*« Dans l'environnement des logiciels et calculatrices aujourd'hui, ils se matérialisent à travers les changements de point de vue associés à la dynamique des zooms. Si l'on zoome sur la représentation graphique d'une fonction au voisinage d'un point où elle est dérivable, on finira par voir une droite, c'est-à-dire un objet linéaire. Est-ce que cette dynamique peut être le support d'une pensée métaphorique qui soutiendrait la localisation du regard au lycée ? Comment articuler au mieux les contributions respectives des élèves et de l'enseignant dans la progression du savoir de la classe ? On voit bien le rôle que peut jouer la conception et l'expérimentation d'une ingénierie didactique dans la recherche de réponses à ces questions, une ingénierie dont la fonction première sera une fonction d'exploration et de diagnostic. » (Artigue, 2002, p.69)*

Dans ce travail, Artigue (2002) donne l'intérêt de l'approche graphique « dynamique » lors de l'enseignement d'approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction au voisinage d'un point à travers la fonction « Zoom ». Nous souhaitons aller explorer ce point de vue dans le cas des approximations polynômiales respectivement d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction au voisinage d'un point afin d'introduire les définitions formelles du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). De ce fait, la visualisation des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales au voisinage d'un point à travers les changements des intervalles « voisinages », du point de vue associés à la dynamique des zooms, nous permettra *a priori* d'accéder au sens du savoir : le concept d'approximation locale d'une fonction.

L'observation et les effets d'une séance ordinaire sur les étudiants montrent que des obstacles peuvent être de nature didactique, c'est-à-dire étroitement liés aux choix de l'enseignant, comme le constate Dufour (2019).

Nous souhaitons aller explorer cet aspect dans notre travail de recherche. Nous pouvons certes faire une analyse en termes fonctionnels comme l'a fait Dufour (2019), mais nous pouvons aussi faire une analyse en termes d'ingénierie didactique de développement dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). En utilisant ce cadre théorique, nous aurons ainsi l'opportunité d'effectuer une analyse détaillée des actions et des formulations produites par les étudiants en situation adidactique ou à dimension adidactique. Nous faisons un choix, c'est celui de l'analyse des raisonnements produits par les étudiants confrontés aux situations en classe. Cette analyse des raisonnements nous renseigne précisément sur le degré d'appropriation des connaissances et des savoirs, la capacité de les relier entre eux afin d'atteindre une compréhension fine du concept d'approximation locale d'une fonction. Par ailleurs, il existe une complexité liée à la nature de ce concept mathématique puisque son usage expert relève de l'Analyse Infinitésimale. Nous avons la volonté d'offrir aux étudiants la possibilité d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres de représentation sémiotique et de comprendre comment on le construit dans le paradigme de l'Analyse Infinitésimale. Parmi les caractéristiques de cette ingénierie est l'articulation des savoirs à enseigner en situation didactique et dans des situations à dimension adidactique dévolues aux étudiants. La dévolution d'une situation à dimension adidactique pourra *a priori* favoriser l'accès aux raisons du savoir :

- C'est quoi une approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel respectivement d'ordre 1, d'ordre 2, d'ordre 3, etc. ?

- Comment pouvoir approcher de plus en plus près une fonction étudiée au voisinage d'un réel  $x_0$  avec une précision croissante de l'ordre qui est liée à l'expression du reste  $[o((x - x_0)^n)]$  par un polynôme (qui approxime la fonction étudiée) ?
- Comment percevoir que l'amélioration de l'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel lorsque l'ordre augmente ; ainsi l'erreur d'approximation diminue et l'approximation sera « meilleure » au voisinage de ce réel ?

L'ingénierie didactique de développement est une expérience d'enseignement par l'utilisation d'un logiciel dynamique de la géométrie « Geogebra » pour la construction des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations locales successives d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage d'un réel, ainsi que la détermination de ses représentations analytiques à partir des raisonnements produits par des étudiants. Cette expérimentation vise à percevoir :

- Comment les objets d'approximation locale d'une fonction sont étroitement connexes à la notion de limite selon les points de vue mathématique, épistémologique et cognitif dans le domaine de l'étude d'une fonction ?
- Comment la mobilisation des représentations graphiques et symboliques, ainsi que les raisonnements produits a le potentiel de mener à la définition formelle du concept d'approximation locale d'une fonction ?
- Comment l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique et la mobilisation des différentes approches analytique, algébrique, graphique et géométrique offrent la possibilité aux étudiants d'accéder au sens de savoir ?

L'approche dynamique proposée dans cette expérimentation est basée sur la construction des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales locales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage d'un réel par l'utilisation du logiciel Geogebra, ainsi que les zooms sur des intervalles centrés en ce réel (correspondant à un voisinage de ce réel si l'on se réfère à la topologie) afin d'accéder aux raisons du sens de savoir.

L'environnement de la technologie fournit *a priori* la possibilité d'articuler les différents registres en mobilisant des techniques permettant l'introduction des différentes écritures syntaxiques des objets d'approximation locale d'une fonction et l'interprétation de ses différentes formulations du point de vue du contrôle sémantique. Il nous semble que la méthodologie de l'ingénierie didactique de développement développée dans le cadre de la théorie des situations didactiques répondant tout à fait à ce type de besoin didactique et nous y a donc en recours.

Nous avons construit une situation à dimension adidactique en vue d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction selon les approches graphiques « dynamiques » et analytique dans les différents registres par l'usage du logiciel Geogebra, puis concevoir une autre situation qui vise à montrer l'intérêt de l'approche graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction selon des illustrations graphiques lors de la conceptualisation de ce concept mathématique.

Cette recherche nécessite de conduire une analyse préalable sous forme des études historico-épistémologiques, institutionnelles et expérimentales des concepts pour percevoir quels types d'obstacles peuvent apparaître et en même temps de questionner des obstacles qui peuvent être de nature didactique.

La finalité de cette recherche c'est d'étudier véritablement la possibilité de mettre en œuvre une ingénierie didactique de développement et de déterminer quelles sont ses effets sur les apprentissages mais également d'analyser précisément les erreurs effectuées par des étudiants confrontés à une situation mathématique.

Ce manuscrit se compose de deux principales parties : partie théorique (partie I) et partie d'avantage expérimentale (partie II).

La partie théorique est une partie dans laquelle on présente l'état de l'art et les concepts théoriques convoqués pour réaliser notre recherche. Cette partie comporte quatre chapitres. Nous commençons, dans le chapitre 1, par l'explicitation de notre problématique de recherche. Nous présenterons une revue de lecture des travaux liés à l'enseignement-apprentissage des objets de l'Analyse et notamment liés au domaine de l'étude d'une fonction dans le contexte de l'étude des difficultés des étudiants entrants à l'université. Ces travaux antérieurs nous amènent à formuler nos hypothèses et nos questions de recherche initiales. Dans le chapitre 2, nous proposons une étude historique et épistémologique des notions étroitement liées au concept d'approximation locale d'une fonction, en vue d'identifier les obstacles et les ruptures épistémologiques que peuvent rencontrer les étudiants lors de l'appropriation et l'usage raisonné de ce concept mathématique en première année (PC). Le chapitre 3 concerne l'explication des cadres et des outils théoriques choisis afin de conduire une analyse didactique de l'expérimentation et des raisonnements. Ensuite, dans le chapitre 4, nous précisons les savoirs et les connaissances des étudiants entrants à l'Université sur le concept d'approximation locale d'une fonction afin de déterminer les constituants du répertoire didactique. Cette analyse institutionnelle est réalisée à partir des analyses des programmes officiels, du photocopié de cours de l'enseignante et des parties d'ouvrages utilisés en tant que référence pour préparer ce cours.

Quant à la partie expérimentale, elle est bâtie à partir de trois chapitres complémentaires. Le premier chapitre (chapitre 5) vise à rendre compte des difficultés des étudiants ayant suivi un enseignement ordinaire durant l'année 2018-2019 avec l'enseignante expérimentée. Une analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés aux situations mathématiques « classiques », dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice, nous aide à construire une typologie des erreurs récurrentes éprouvées par les étudiants en rapport avec la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Le deuxième chapitre (chapitre 6) est une présentation détaillée des raisons pour lesquelles nous avons construit une ingénierie didactique de développement et la manière dont nous l'avons élaborée, les choix didactiques que nous avons faits, la mise en œuvre telle qu'elle s'est produite et les effets. Le dernier chapitre (chapitre 7) nous permet de partir de nouveau sur la même situation que celle expérimentée en chapitre 5 pour déterminer les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants ayant mené l'expérimentation (2019-2020) et quelles sont évidemment les erreurs qui persistent chez certains d'entre eux.

Enfin, nous terminerons cette thèse par les conclusions générales de cette recherche et de ses perspectives.

# **PARTIE I**

## **PARTIE THEORIQUE**



# Chapitre 1

## Les recherches antérieures dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse à l'entrée dans le Supérieur

### Introduction

Au début de l'Université, et notamment au niveau du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs, les objets d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique sont introduits via les relations de comparaison des fonctions, les différentes variantes de la formule de Taylor (Lagrange, Maclaurin et Young) ainsi que les développements limités. Ces objets mathématiques sont des savoirs enseignés en première année Physique-Chimie (PC) afin de permettre aux étudiants d'acquérir les techniques nécessaires lors de la résolution des problèmes d'approximations des fonctions et de modélisation de phénomènes physiques relevant de différents domaines (mathématiques, physique, mécanique, optique, etc.).

Les notions de la relation de comparaison des fonctions, la formule de Taylor-Young et développement limité sont des nouvelles techniques liées au domaine de l'étude locale d'une fonction (le calcul de limite qui relève de la forme indéterminée, la détermination de l'équation d'une tangente à la courbe en un point et sa position relative à cette courbe, etc.) ainsi qu'au domaine d'approximations des fonctions. Ces concepts mathématiques sont en permanente dialectique avec les notions de fonction, dérivé, limite, continuité, tangente, séries numériques, séries de Taylor, intégrations, etc. qui font l'objet de l'enseignement de l'Analyse de la fin du Secondaire jusqu'à la fin du parcours académique à l'Université.

Plusieurs recherches didactiques se sont intéressées au domaine de l'Analyse réelle au niveau Secondaire et Supérieur, ainsi qu'à la transition Secondaire/Supérieur.

De notre côté, nous nous intéressons à l'analyse de certains travaux de recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des objets de l'Analyse réelle liés au domaine de l'étude d'une fonction au début de l'Université et plus précisément ceux qui sont en étroite liaison avec les approximations locales et globales des fonctions.

L'objectif initial de notre recherche consiste à identifier la nature et l'origine des difficultés éprouvées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction en termes de connaissances et de savoirs mobilisés.

La revue de littérature nous permettra d'identifier les difficultés liées soit à l'enseignement des objets de l'Analyse lors de la transition Secondaire/Supérieur, soit à l'apprentissage des concepts de l'Analyse et à l'usage des raisonnements en situation, soit aux savoirs. Nous pensons certaines de ces difficultés peuvent être liées à la genèse historique d'un objet mathématique. Dans ce cas, ces difficultés résultent de l'existence d'un obstacle épistémologique (Bachelard, 1983). Ce concept est défini en tant qu'erreur liée à la connaissance. En effet,

*« C'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique, et il ne s'agit pas de considérer les obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons les causes d'inertie, que nous appellerons obstacles épistémologiques. » (Bachelard, 1938, p.13)*

L'objectif principal de ce chapitre consiste à répondre aux deux questions principales :

- Quelles sont les difficultés liées à l'enseignement et à l'apprentissage des objets de l'Analyse dans le domaine de l'étude d'une fonction (fonction, limite, dérivée, tangente, séries de Taylor, approximation, etc.) ?
- Quels sont les obstacles épistémologiques liés aux objets de domaine de l'étude d'une fonction (limite, fonction et tangente) ?

Afin de pouvoir répondre à ces questionnements, nous avons choisi de classer les travaux étudiés selon quatre catégories :

- Difficultés liées à la transition Secondaire/Supérieur lors de l'enseignement des objets de l'Analyse.
- Difficultés liées au processus de la conceptualisation des objets de domaine de l'étude d'une fonction et à l'usage des raisonnements en situation au début de l'Université.
- Difficultés éprouvées par des étudiants liées à l'étude des signes et des représentations.
- Existence des obstacles liés aux objets de domaine de l'étude d'une fonction : fonction, limite et tangente.

Dans la section suivante, nous présentons une synthèse des travaux qui ont permis d'établir l'existence des difficultés liées à la transition Secondaire/Supérieur lors de l'enseignement notions de fonction, dérivée, limite, tangente, etc.

## I. Difficultés liées à la transition Secondaire/Supérieur lors de l'enseignement des objets de l'Analyse

Certains travaux didactiques liés à l'étude d'une fonction ont permis de montrer l'existence des difficultés lors de la transition Secondaire/Supérieur. Ces difficultés résultent soit du changement de contrat didactique (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018 ; Bloch & Gibel, 2021), soit du passage de *l'Analyse concrète* vers *l'Analyse abstraite* (Winslow, 2007), soit de l'existence des *micro-ruptures d'ordre conceptuel et technique*, (Praslon, 2000).

Dans le domaine de l'étude d'une fonction, certaines recherches en didactique soulignent que les difficultés rencontrées par les étudiants sont principalement liées au changement de contrat didactique. Le système d'attentes mutuelles, nommé contrat didactique selon Brousseau (1998), évolue entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur, (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018 ; Bloch & Gibel, 2022).

D'un autre côté, Grenier-Boley (2009) a montré qu'il y a une différence au niveau du déroulement des séances de cours et des exercices entre l'enseignement Secondaire et l'enseignement Supérieur. En effet, les enseignants donnent des cours du type « magistral », au niveau Supérieur.

Les changements de contrat didactique relèvent de la transition Secondaire/Supérieur au niveau de la proposition des exercices aux élèves (Gueudet & Vandebrouck, 2019). Dans ce contexte, Winslow (2007) prouve l'existence des variables en transition liés au passage de *l'Analyse concrète* à *l'Analyse moderne* : Obstacles épistémologiques et contrats. En effet, l'étudiant entrant à l'Université doit accomplir des « sauts cognitifs » résultant de ce changement de paradigme lors de la transition Secondaire/Supérieur.

*« (...) les objets et leurs propriétés n'ont plus qu'une seule forme fiable de représentations et leur étude n'admet que peu de routines de type "algorithmique". Et ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l'expérience précédente des étudiants avec les mathématiques et, en particulier, avec l'analyse. » (Winslow, 2007, p.4)*

Au niveau Secondaire, les tâches proposées ne laissent que peu d'autonomie aux élèves dans le choix des raisonnements, selon Leithner (2000) et Battie (2003). En effet, les enseignants du Supérieur proposent des exercices, « non guidés », obligeant les étudiants de choisir eux-mêmes les techniques à mobiliser afin de produire un raisonnement.

Une étude des tâches proposées aux élèves liées au domaine de l'Analyse au Secondaire et au Supérieur amène Bloch (2012) à conclure que :

*« A l'Université on observe de nombreux exercices portant sur l'aspect objet d'un concept, alors que le secondaire met l'accent exclusivement sur l'aspect outil, processus : étudier une fonction*

*ou une suite spécifiée pour en déduire ses propriétés quant aux limites ou la dérivabilité. » (Bloch, 2012, p.398)*

De plus, elle a montré que la classification des tâches usuelles proposées du Secondaire au Supérieur met en évidence des difficultés rencontrées par les étudiants résultant d'un « saut conceptuel » auquel ils sont contraints :

*« ...- s'emparer du formalisme unificateur via une définition en  $(\varepsilon, \eta)$  ou intégrales, etc. et généraliser ainsi l'usage d'une notion, en réalisant une économie de pensée et de moyens heuristiques dans un grand nombre de tâches ;*

*- s'engager ainsi dans la réification d'un concept comme celui de limite et mettre ce concept en relation avec d'autres (développement limité, dérivée, intégrales...)* ;

*- prendre la responsabilité d'énoncer des propriétés générales relatives aux concepts, c'est-à-dire des théorèmes de l'Analyse. » (Ibid.)*

En ce qui concerne le domaine de l'étude des fonctions, et notamment au niveau de types des techniques de résolution des différents types de tâches, le passage d'une Analyse algébrisée à une Analyse formalisée (Ghedamsi, 2008 ; Haddad, 2012 ; Bloch, 2002) amène à l'existence des *micro-ruptures d'ordre conceptuel et technique*, (Praslon, 2000).

Par ailleurs, les élèves mobilisent des techniques liées au calcul des dérivées, de limite, de primitives, de détermination d'équations de la tangente, par l'application des formules ou de règles opératoires liées à l'étude d'une fonction, (Vandebrouck & Leidwanger, 2016).

Les difficultés éprouvées par les étudiants liées aux notions de fonction et de limite résultent du changement des techniques de résolution des différents types de tâches proposées dans le Secondaire et le Supérieur, (Bloch & Ghedamsi, 2005 ; Bloch, 2005 ; Ghedamsi, 2008). Et plus précisément, l'approche algébrique fait fréquemment obstacle lors de l'étude locale d'une fonction à l'entrée en Université, (Vandebrouck, 2011). Ainsi, lors de l'étude locale des fonctions au début de l'Université,

*« ...les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type  $o(x)$  (...). Enfin, les étudiants ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour faire les raisonnements locaux attendus d'eux. » (Vandebrouck, 2011, p.1-2)*

Par ailleurs, Haddad (2012) note que la complexité de l'élaboration des nouveaux concepts au début de l'Université est due au manque de collaboration entre les deux niveaux d'enseignement Secondaire et Supérieur.

Cette revue des travaux a permis de montrer que les difficultés rencontrées par les étudiants, sont dues au changement de contrat didactique lors de la transition Secondaire/Supérieur soit :

- au niveau du temps d'enseignement d'un savoir : l'organisation de la durée pour enseigner un savoir avec ses propres propriétés et les exercices des travaux dirigés ;
- au niveau de l'enseignement d'un savoir : l'introduction d'une nouvelle notion d'une définition « algébrique » vers une définition « formelle complexe » ;
- au niveau de paradigme de l'enseignement d'un objet mathématique : le passage d'une Analyse algébrisée (d'une Analyse intuitive et algébrisée) à une Analyse formelle amène à l'existence des ruptures et des micro-ruptures *d'ordre technique et conceptuel* ;
- au niveau de l'institution : décalage entre la culture secondaire et la culture universitaire, (Artigue, 2004) ;
- au niveau des tâches proposées : les caractéristiques des exercices proposés. Dans le Secondaire, il y a l'usage des connaissances explicitement. Par contre, dans le Supérieur, il y a l'utilisation implicite des connaissances disponibles, (Gueudet & Vandebrouck, 2019 ; Praslou, 2000) ;
- au niveau des techniques de résolution des tâches ;
- au niveau de l'évolution des connaissances et des savoirs mobilisés lors de la production d'un raisonnement : d'un travail « guidé » à un travail d'autonomie complexe.

Dans ce cadre, Bloch et Gibel (2022) notent que le changement de contrat didactique

« (...) conduisant les étudiants à une plus grande responsabilisation liée aux choix :

- des connaissances et des savoirs qu'il convient de mobiliser pour répondre à la situation de recherche dévolue par l'enseignant (...) ;
- du mode de raisonnement qu'il faut mobiliser (...) ;
- de l'interprétation et de l'usage des signes mathématiques (Bloch et Gibel, 2019), signes dont le niveau de complexité est élevé, par exemple les quantificateurs. » (Bloch & Gibel, 2022, p.3)

Nous pensons que le changement de contrat didactique est une source de difficultés que peuvent rencontrer les étudiants lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

## **II. Difficultés liées au processus de la conceptualisation des objets du domaine de l'étude d'une fonction et à l'usage des raisonnements en situation au début de l'Université**

Certains travaux didactiques conduits sur l'apprentissage des notions liées au champ de l'étude d'une fonction ont mis en évidence l'existence des difficultés des étudiants lors de l'appropriation et l'utilisation de ces objets mathématiques.

Dans le Supérieur, l'enseignant ne consacre pas le temps nécessaire pour introduire une nouvelle notion liée au domaine de l'étude d'une fonction en tant que nouvelle technique pour

la résolution des différents types de tâches. L'institution ne met pas en évidence l'aspect théorique et le nouveau contexte lors de l'introduction d'une nouvelle notion de l'Analyse réelle, et notamment la notion de développement limité. En effet, Praslou (2000) souligne que dans le Supérieur

*« ...L'institution est moins attentive que celle du lycée à éviter, au sein d'une tâche donnée, le télescopage entre une notion théorique nouvelle et un contexte nouveau. Par exemple, on peut solliciter le développement limité d'une fonction trigonométrique réciproque, alors que le temps consacré à l'étude de ce type de fonction reste restreint au sein du cursus, et en tous cas sans commune mesure avec celui consacré en terminale à l'étude de fonctions logarithmes et exponentielles. » (Praslou, 2000, p.12)*

Par ailleurs, l'enseignement Supérieur ne donne pas l'intérêt d'introduire la notion de développement limité en tant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude d'une fonction transcendante ou trigonométrique. Le manque du temps nécessaire pour l'enseignement de cet objet mathématique amène à l'existence des difficultés chez les étudiants lors de l'appropriation et l'usage des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Gueudet et Vandebrouck (2019) ont montré que certaines difficultés rencontrées par les étudiants lors de la résolution d'un problème mathématique résultent d'un manque « *d'expériences mathématiques* » soit au niveau de la variété des types de tâches proposées, soit au niveau des techniques mobilisées, soit au niveau du temps consacré pour les pratiquer.

En effet, ils expliquent que :

*« ... les étudiants manquent d'outillage pour la résolution de problèmes, en termes de connaissances mathématiques, de démarches heuristiques, de moyens de contrôle, etc. La construction d'une « expérience mathématique » semblable à celle des mathématiciens nécessite la pratique de nombreux problèmes suffisamment variés (et donc un temps long). » (Gueudet & Vandebrouck, 2019, p.7)*

L'insuffisance du temps nécessaire pour introduire une nouvelle notion dans le Supérieur ne permet pas aux étudiants d'accéder aux raisons de savoir. Il amène à une complexité de la conceptualisation de ce savoir.

Au début de l'Université, une nouvelle notion est introduite à partir de ses définitions et des preuves formelles, (Ghedamsi, 2008). En outre, l'étude de l'unicité et l'existence d'un objet mathématique n'est traité formellement qu'à ce niveau.

*« Dans l'enseignement Supérieur, les savoirs sont introduits avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le savoir introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres savoirs, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau savoir ou un autre*

*niveau de validation (par exemple les rapports entre limite, taux de variation, dérivée, développement limité, intégrale, etc.). » (Ghedamsi, 2008, p.30)*

La notion de développement limité est un nouveau savoir qui doit être enseigné dépendamment des autres objets de champ du calcul de limite. Ghedamsi (2008) note que le travail

*« ... sur la conception structurelle de la notion de limite : ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales, etc.), et la validation dans le cadre du système de preuves de l'analyse réelle. » (Ibid.)*

Dans le Supérieur, la notion de limite est développée dans le registre analytique, (Ghedamsi, 2008). A ce niveau, les enseignants doivent prendre en compte les connaissances antérieures des étudiants lors de l'introduction des nouvelles notions de domaine de l'Analyse réelle. La notion de développement limité est parmi les techniques de la résolution des tâches heuristiques qui se différencient de celles utilisées au Secondaire. Les exercices qui font appel à ce genre de techniques sont classés suivant deux catégories :

*« La première concerne la recherche de limite (en  $x_0$  fini et à l'infini) de fonctions différentes par le biais de développements limités (implicitement demandés par les énoncés). C'est donc là un entraînement au calcul de développement limité intégrant les thèmes : somme, produit, quotient, composé, etc., et le choix de l'ordre du développement.*

*La deuxième pratique propose des tâches concernant : l'étude de branches infinies, l'étude locale d'une courbe paramétrée, la détermination de l'équation d'une asymptote ou tangente, l'étude des positions relatives entre courbe et tangente ou asymptote et l'étude locale de dérivabilité. » (Ibid., p.22-23)*

Le rôle de l'enseignant est un peu difficile lors de l'introduction des définitions formelles de nouveaux savoirs au début du cursus universitaire, (Ibid.). D'une part, il doit prendre en compte le changement de la nature des savoirs à enseigner (avec ses définitions formelles et preuves) afin de faciliter l'acquisition de ces savoirs aux étudiants habitués à acquérir des objets de l'Analyse algébrisée. D'autre part, il est important de prendre en compte les connaissances antérieures des étudiants lors de l'introduction d'une nouvelle notion.

Il existe un « saut conceptuel » lié à l'enseignement de la notion de développement limité qui est un concept étroitement lié au concept de limite, (Bloch, 2012).

L'existence des liens formels établis entre des objets de l'Analyse réelle pourrait expliquer les difficultés éprouvées dans le travail des étudiants, selon Ghedamsi (2016).

*« Le lien entre nombres réels et limite cristallise à son tour d'une manière fondamentale cette existence, et ceci qu'il s'agisse de l'existence d'une borne Supérieur, d'une limite (...), d'une suite (...), d'une valeur intermédiaire, d'un point fixe, d'un nombre dérivé (théorème des*

*accroissements finis, théorème de Rolle ou formule de Taylor par exemple) ou encore d'un infinitésimal (reste intégral ou un équivalent d'une fonction par exemple). » (Ghedamsi, 2016, pp.1-2)*

Dans le Supérieur, le concept de limite, selon Lecorre (2016), est un savoir complexe défini à partir de ses éléments fondateurs : la notion de nombre réel et le formalisme de limite (double quantificateur et les règles de la logique). Ce didacticien étudie la question de l'utilisation et de l'appropriation des objets mathématiques par des étudiants afin d'avoir une certaine intelligibilité chez eux.

*« C'est dans la notion de conflit que nous avons trouvé une première clef de la réponse : si un objet mathématique apparaît comme outil pour résoudre un conflit cognitif, alors il prend sens et utilité. Une deuxième clef de la réponse se trouve dans l'identification des conditions pour qu'un tel conflit puisse se produire. (...) Une troisième clef concerne les adaptations possibles de la TSD pour la conception de situations sur les savoirs complexes. Enfin, une quatrième clef correspond à la question de prise en charge, parmi ces adaptations, de celles relatives aux niveaux heuristiques. » (Lecorre, 2016, p.423)*

La notion de limite engendre des difficultés chez les élèves à tous les niveaux de son enseignement Secondaire et Supérieur, (Ibid.). Dans notre cas d'étude, les notions d'approximation locale d'une fonction et limite sont connexes selon les aspects mathématiques, cognitifs et épistémologiques.

Par ailleurs, selon Vandebrouck (2011), l'étude globale d'une fonction est nécessaire pour aborder le travail local. En effet,

*« ... l'approche algébrique exclusive fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'Analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions, travaillées explicitement dès le début de l'Université. » (Vandebrouck, 2011, p.32)*

Au début du cycle des classes préparatoires aux études d'ingénieurs, la notion de développement limité n'est pas introduite en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction permettant d'articuler ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique dans les domaines intra et extra-mathématiques, (Belhaj Amor, 2016, 2018, 2019).

Au début de l'Université, il y a changement de formalisme lors de l'introduction de la notion de fonction, selon Gueudet et Vandebrouck (2021).

Dans le Supérieur, les étudiants sont confrontés à des difficultés liées à l'étude d'une fonction par le passage du niveau globale au niveau local ou réciproquement, (Rogalski, 2008). Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue d'Artigue (2002) qui donne l'intérêt de cette étude



lors de l'introduction de l'approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction au voisinage d'un réel.

« Avec l'Analyse, la linéarité va se faire locale : la dérivabilité d'une fonction en un point traduit la possibilité de l'approcher au voisinage de ce point au premier ordre par une fonction affine, elle dont la représentation sera la tangente à la courbe en ce point. La localisation des points de vue et la maîtrise des jeux qui vont substituer entre local et global sont essentiels à l'apprentissage en Analyse. » (Artigue, 2002, p.68-69)

Les difficultés des étudiants au début de l'Université résultent d'un certain manque d'« expériences mathématiques », (Battie, 2003). La première année d'Université ne permet pas le développement souhaitable des modes de raisonnements (Gueudet & Vandebrouck, 2019). Dans le domaine de l'étude d'une fonction, il n'existe pas une continuité entre l'enseignement Secondaire et l'enseignement Supérieur. Au début de l'Université, il y a des erreurs qui sont la cause des "attentes surestimées sur des connaissances numériques et algébriques de base", selon Gueudet et Vandebrouck (2019). Ces erreurs sont liées, par exemple, à la conceptualisation de la notion de développement limité, (Ibid.).

Au début de l'Université, les étudiants ne savent pas manipuler des fonctions définies par des formules. Dans le domaine de l'Analyse, les techniques les plus utilisées sont attachées aux notions de majoration, minoration et de l'encadrement. Les étudiants s'intéressent aux propriétés locales d'une fonction à travers le calcul de limite, (Ibid.). Par exemple, les erreurs effectuées par des étudiants, lors de la résolution d'un exercice de développement limité, sont dues à leurs connaissances antérieures algébriques et numériques de base. Gueudet et Vandebrouck (2019) analysent les productions des étudiants lors de la résolution des exercices proposés dans une enquête au début de l'Université. L'objectif principal de ce questionnaire consiste à amener les étudiants à connaître eux-mêmes leurs lacunes et aider les enseignants à les distinguer. Ces auteurs interprètent un exemple de production d'un étudiant lors de la résolution de l'exercice de développement limité en écrivant :

«

$$2) \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{\left(-1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \left(-1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$$

Ces déficits de connaissances algébriques et numériques sont bien connus des enseignants de lycée, et souvent sous-estimés par les enseignants du Supérieur. » (Gueudet & Vandebrouck, 2019, p.15)

L'objectif de cet exercice est la détermination du développement limité usuel de la fonction trigonométrique «  $\tan(x)$  » au voisinage de 0. Nous pensons que l'analyse de la production de cet étudiant en termes de connaissances et de savoirs mobilisés s'appuyant sur l'étude du signe pourra nous permettre en tant que didacticien d'identifier l'origine et la nature de sa difficulté. En effet, nous pouvons dire que l'élimination de l'expression du reste de l'expression de développement limité traduit l'existence des difficultés liées à la conceptualisation de cet objet mathématique.

Dans le domaine d'approximation d'une fonction, les étudiants dès le début de l'Université sont confrontés au problème de répondre aux tâches liées à la notion des séries de Taylor, (Alcock & Simpson, 2004, 2005). Les étudiants font appel à cette notion en tant que technique d'approximation d'une fonction dans le domaine du calcul, (Martin, 2012). Dans ce contexte, Martin (2012) prouve que le calcul d'une approximation peut être considéré comme

*« (...) a process in which more terms are iteratively added to a Taylor polynomial to produce a new polynomial that better approximates the function. In this case, the terms themselves are used as objects concatenated onto the current Taylor polynomial. » (Martin, 2012, p.270)*

L'utilisation du raisonnement visuel peut aider les étudiants à l'apprentissage des objets mathématiques (Gonzalez-Martin & Correia De Se, 2015) et plus précisément, à attribuer un sens à la notion mathématique, (Alcock & Simpson, 2004).

Alcock et Simpson (2004) explorent les approches des problèmes de convergence et des séries faites par les étudiants de première année universitaire. Ces étudiants utilisent les images visuelles lors de la production des raisonnements dans le domaine de l'Analyse réelle. Les auteurs conduisent une analyse d'une expérimentation proposée aux groupes d'étudiants sous la forme d'entretiens semi-structurés pendant plusieurs séances de cours. A l'issue de cette expérimentation, ils remarquent que les étudiants qui expriment leurs raisonnements par des images visuelles « raisonnement visuel » sont incapables de produire une argumentation écrite. Ensuite, ils étudient leurs comportements. Ces « étudiants visualisateurs »

*« ... also have little trouble recalling definitions, and develop facility and accuracy in using these in general arguments. » (Ibid., p.16)*

Ces didacticiens pensent que pour aider les étudiants à surmonter leurs difficultés liées au domaine de l'Analyse formelle, il est mieux de penser à proposer des tâches qui leur permettant à se concentrer sur les liens entre les images visuelles et les propriétés algébriques d'un objet mathématique.

*« Thus, we suggests that in order to help other visualizing students build on their existing strengths, we need to think about ways. To have them engage in work that will help them to build such links. » (Ibid. p.30)*

Une étude des techniques d'approximations des fonctions (Alcock & Simpson, 2004, 2005 ; Kidron, 2004 ; Oehrtman, 2009) souligne l'influence des images graphiques sur l'apprentissage de la convergence des séries de Taylor, (Kidron & Zehavi, 2002 ; Kidron, 2002, 2004).

Certains chercheurs explorent comment les mathématiciens transmettent des notions ; c'est-à-dire la manière de l'enseignement des notions mathématiques ; comme la convergence ponctuelle dans une série de Taylor, (Martin, 2012), et les notions de topologie (Nemirovs & Smith, 2011 ; Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011). Dans la plupart des cas, une étude portant sur la convergence des séries et notamment les techniques d'approximations des fonctions (Alcock & Simpson, 2004, 2005 ; Kidron, 2004 ; Oehortman, 2009) prouvent l'influence des images graphiques dynamiques sur l'apprentissage du concept de limite dans les travaux de Kidron & Zehavi (2002), Kidron (2003, 2008), etc.

Certains travaux conduits sur la notion des séries de Taylor ont établi que les étudiants sont confrontés à des difficultés pour réaliser les tâches, (Alcock & Simpson, 2004, 2005), et des grandes difficultés à raisonner qui peuvent atteindre « un état de surcharge cognitive », (Kung & Speer, 2010). En effet,

*« Throughout the interviews, students took a very mechanical view of testing series, at times working through the steps of a particular test without being able to clearly articulate the underlying ideas, what they were testing for, or at times, even what the conclusion of the test was. » (Kung & Speer, 2010, p. 9)*

Kung et Speer (2010) interprètent les travaux d'Alcock en écrivant :

*« ...reported very little about students' responses to this question, in part because many students were simply confused about what the question was asking. » (Ibid., p. 3)*

Les séries de Taylor rassemblent de différentes notions de l'Analyse et plus précisément fonction, limite, dérivée, techniques d'approximation, séries, convergence, polynôme, les erreurs, le rayon de convergence et le centre, etc. Les étudiants font appel à la série de Taylor en tant que technique d'approximation d'une fonction dans le domaine du calcul, (Martin, 2012).

*« Calculus students are typically introduced to function approximation techniques using Taylor series, and a single approximation task may require students to coordinate changes to an independent variable, the center, and index, while interpreting the role of the unspecified variable if using Lagrange's remainder formula. » (Martin, 2012, p.268)*

Selon Martin (2012), les étudiants peuvent rencontrer une difficulté pour donner du sens à la structure compliquée des séries de Taylor en raison de l'interaction de tous les concepts de fonction, d'approximations polynômiales, de rayon de convergence, des erreurs, etc. Les étudiants, confrontés à une situation mathématique, s'occupent et opèrent la structure mathématique de la convergence d'une série de Taylor avec les termes, les polynômes, les erreurs, le rayon de convergence et le centre.

Dans le domaine d'approximation d'une fonction, Martin (2012) note :

*« The calculation of an approximation may be viewed as a process in which more terms are iteratively added to a Taylor polynomial to produce a new polynomial that better approximates the function. In this case, the terms themselves are used as objects concatenated onto the current Taylor polynomial. » (Ibid., p.270)*

Dans le cadre des travaux didactiques des objets liés au domaine de l'étude d'une fonction, Dubinsky et Harel (1992) étudient la notion de fonction afin de présenter la conception « *processus d'une fonction* ». Par ailleurs, Sierpiska (1992) étudie le concept de fonction afin de présenter les obstacles épistémologiques et les actes de compréhension pour cette notion mathématique.

En s'appuyant sur ces travaux, Gaudin (2005) met la focale sur l'étude du fonctionnement des connaissances comme régulateur de l'activité au niveau Supérieur. Ses travaux portent sur l'étude des conceptions de la notion de fonction au niveau Supérieur. Dans une première étape, elle conduit une étude épistémologique et historique du concept de la fonction. Cette étude lui a permis de distinguer trois types de conception :

- Conception « courbe » déduite de l'analyse des travaux de Descartes puis de Leibniz et Newton.
- Conception « expression analytique ».
- Conception « objet » qui lui semblait en étroitement liée à la question de la validation.

L'expérimentation conduite se présente sous forme des problèmes d'approximation d'une fonction par l'usage du logiciel "Maple" adressés aux sept couples d'étudiants admettant du capés ou de deuxième année d'école d'ingénieurs qui ont passé une classe préparatoire scientifique. Elle traite le cas de la résolution d'un problème mathématique

*« ... mettant en jeu le concept de fonction qui a conduit les sujets à construire des critères définitoires de la notion d'approximation. » (Gaudin, 2005, p.19)*

L'analyse du corpus constitué des réponses des étudiants amène Gaudin (2005) à caractériser les éléments des conceptions « courbe », « analytique » et « objet ». Cette analyse lui permet de conclure que :

- **Au niveau de l'étude du concept de fonction comme objet :**

*« L'objet existe au-delà des différentes représentations, de leurs propriétés et des calculs sur ces représentations. Et les moyens de représentations restent au service des décisions parce qu'elles permettent au sein de chaque système de représentation du contrôle ou la construction d'opérateurs. Donner du sens au concept dans ce cas particulier, ne signifie pas seulement exprimer des propriétés dans un système de représentation et mettre en œuvre des opérateurs dans ce système de représentation. Mais cela signifie aussi pouvoir hiérarchiser des propriétés (éventuellement concurrentielles) s'exprimant au moyen de représentations différentes. » (Ibid., p.322-323)*

- **Au niveau de l'étude de rôle et des relations des contrôles et des opérateurs dans l'organisation de l'action :**

*« En particulier, les contrôles ne prennent pas en charge les connaissances sur les mathématiques en général, le rôle des questionnements, l'heuristique, le rôle d'une réflexion épistémologique. Les contrôles référents et d'instrumentalisation parlent de l'organisation de la conduite du sujet, et en cela constituent des informations sur les modes de productions des mathématiques et le fonctionnement des mathématiques, sur l'organisation des mathématiques (...) les conceptions ont été présentées et traitées comme des structures complexes, dont les contrôles sont un élément constitutif (..) Les contrôles se différencient entre eux et des autres éléments par leurs fonctionnalités dans l'organisation de la conduite du sujet pour la résolution de problèmes. » (Ibid., p.324-325)*

L'analyse expérimentale amène Gaudin (2005) à distinguer deux types de contrôles : référents et d'instrumentation. Les opérateurs et les contrôles constituent deux dimensions internes aux connaissances. Elle montre notre attachement à un travail qui permet d'articuler des représentations de nature différente lors de la conceptualisation des objets liés à l'étude d'une fonction dans le Supérieur. Elle souligne l'importance des représentations algébriques et graphiques lors de la conceptualisation de la notion de fonction dans le Supérieur. Nous pouvons dire que l'accès et la compréhension liés à l'étude d'une fonction nécessite ce rôle essentiel des représentations algébriques et graphiques.

Dans le Secondaire, les élèves sont habitués à utiliser des illustrations graphiques pour définir des nouvelles connaissances et résoudre des problèmes mathématiques, (Haddad, 2012). Par contre, il y a une absence totale de l'utilisation des représentations graphiques dans l'enseignement et l'apprentissage des objets de l'Analyse au début de l'Université. En effet, l'usage des illustrations graphiques n'est pas convoquée lors de l'enseignement des notions de développement limité (Belhaj Amor, 2016, 2018), de la dérivée (Praslon, 2000), d'intégrale (Haddad, 2012), de l'étude des fonctions (Vandebrouck, 2011) et de limite (Lecorre, 2016). De

ce fait, les difficultés liées au processus de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction résultent *a priori* de l'absence de la mobilisation des représentations graphiques lors de l'introduction de ces nouvelles notions au début du cursus universitaire.

### III. Difficultés éprouvées par des étudiants liées à l'étude des signes

Des travaux de recherche menés en didactique sur l'étude des signes mettent en évidence l'origine et la nature des difficultés rencontrées par les étudiants. L'étude des symboles et des signes est introduite par Bardini et Pierce (2018) qui

*« (...) montrent que la culture symbolique attendue à l'Université diffère largement de celle développée au lycée. » (Gueudet & Vandebrouck, 2019, p.11)*

A l'instar de Berger (2004), les étudiants apprennent, dès le début de l'Université, un nouveau signe comme on apprend un mot nouveau. La culture symbolique attendue au niveau de l'Université diffère de celle développée au niveau du Secondaire. Par exemple, un même symbole peut avoir de différents sens, selon Bardini et Pierce (2018).

Une analyse de la structure interne des signes est importante lors de l'analyse cognitive d'une activité mathématique, (Duval, 2006). Cette analyse présente souvent la distinction entre la signification et la dénotation des signes. La « sémiotique » désigne l'étude des signes et de leurs significations. Le système *{signe, objet}* présente le registre de représentation sémiotique par Duval (1993) qui l'a défini par : *« ...un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes. »*

Dans le contexte de l'étude du signe, le seul moyen d'avoir accès à un objet mathématique est ses différentes représentations sémiotiques, (Duval, 1993).

*« Naturellement, on peut changer le registre de représentation d'un concept, mais on ne peut jamais séparer le concept d'une représentation sémiotique. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, en suivant la distinction sémantique de Frege, nous préférons parler d'objet mathématique plutôt que de «concept» et prendre comme primitive le couple {signe, objet} (Duval, 1998). » (Duval, 2001, p.11-12)*

Dans le Supérieur, les travaux de Hitt (2004) conduits, lors des analyses expérimentales sur des exemples de l'Arithmétique et de l'Algèbre, lui permettent d'établir l'importance de l'articulation entre les divers registres de représentation sémiotique pour l'apprentissage d'un concept mathématique. Il note que

*« Dès lors, il devient absolument nécessaire de proposer aux étudiants des activités de conversion entre les représentations d'un registre à un autre pour que les représentations en jeu, qui par nature sont complémentaires, donnent un support à la construction du concept en question. » (Hitt, 2004, p.350)*

En revanche, un travail dans le même registre ne suffit pas pour accéder totalement à un concept mathématique. Dans le même contexte, Bloch (2002) souligne qu'un registre est

« ... réducteur (un représentant d'un concept, dans un registre, ne peut montrer qu'une partie des propriétés du concept) et producteur : un représentant permet de voir des propriétés parasites (qui ne sont pas celles du concept) car spécifiques de la représentation. » (Bloch, 2002, p.30-31)

Elle donne l'intérêt de la mise en considération des registres de représentation sémiotique pour le traitement d'une activité mathématique où

« L'utilisation, dans la classe, de registres de représentation se fait par des écritures, un langage, des symboles (...) qui sont représentatifs, à un moment donné, de ce que les élèves et le professeur ont en commun comme répertoire pour traiter une question mathématique. » (Bloch, 2000, p.200)

Dans le domaine d'approximation d'une fonction, Kidron (2002) identifie des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'usage des symboles dans le domaine de l'étude des séries où la somme infinie ( $S = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$ ).

Nous rejoignons le point de vue de Bloch et Gibel (2022) qui considèrent l'origine des difficultés des étudiants entrants à l'Université résultent de

« La complexité des signes relevant de plusieurs registres sémiotiques et la maîtrise du développement et l'articulation des registres sémiotiques (...). » (Bloch & Gibel, 2022, p.5)

Certains didacticiens ont mis des dispositifs pédagogiques pour aider les étudiants à établir des liens entre les représentations algébriques et les représentations graphiques des polynômes de Taylor, et notamment des images visuelles dynamiques à l'aide d'un logiciel CAS (Computer Algebra System), (Kidron, 2002, 2004 ; Kidron & Zahavi, 2002).

Kidron (2003) propose l'hypothèse suivante : la combinaison de graphiques dynamiques d'algorithmes et de perspectives historiques pourrait *a priori* conduire à une manière plus simultanée d'apprendre l'Analyse au moyen de processus numériques. Sa recherche

« ...has focused on examining the extent to which this combinaison actually helped the students in the transition from their visual, intuitive interpretation of mathematica concepts of formal reasoning. » (Kidron, 2003, p.300)

Cette didacticienne traite dans son travail de recherche la compréhension conceptuelle du processus de la convergence d'une série obtenue à partir de l'approximation d'une fonction au moyen des polynômes. Et plus précisément, elle essaye de clarifier le concept de limite aux étudiants par l'utilisation des approximations polynômiales de fonctions.

Certains travaux ont prouvé l'existence des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de certains concepts de l'Analyse, et notamment sur la notion de limite d'une suite de nombres. Par contre, Kidron (2003) a étudié les difficultés conceptuelles rencontrées

par les étudiants liées à la notion de limite d'une suite de fonctions. De plus, elle conduit une analyse du rôle joué par le logiciel dynamique *Mathematica* pour permettre aux étudiants de

« ...walk the same paths as the founders of mathematical theory from Euler (1748) to Runge (1901). »  
 » (Ibid.)

Elle utilise un dispositif permettant aux étudiants de calculer "avec Euler" et de visualiser "avec Cauchy". Les objectifs principaux de son expérimentation consistent à donner l'occasion aux étudiants :

- d'une part, d'utiliser les capacités symboliques de *Mathematica* pour effectuer des manipulations d'Euler et de Lagrange sur des expressions algébriques ;
- d'autre part, d'utiliser les graphiques dynamiques de *Mathematica* pour visualiser des propriétés telles que la convergence qui étaient le sujet de l'Analyse de Cauchy.

Kidron (2003) explique son objectif de l'expérimentation en écrivant :

« In this way, we aimed to create an environment that supports reasoning about formal calculation and reasoning by continuity. » (Ibid., p.301)

Dans ce travail, elle étudie les idées intuitives des fondateurs de la théorie de l'Analyse et la mise en œuvre de leurs idées en laboratoire dans la théorie de l'approximation, puis dans la théorie de l'interpolation. Dans la théorie de l'approximation, elle propose deux approches dont la première est analytique afin d'introduire la notion d'ordre conceptuel. La deuxième approche est algébrique pour introduire les polynômes de Taylor par l'idée intuitive d'Euler. Les étudiants ont suivi la méthode de ce mathématicien pour représenter les sommes infinies (une fonction non polynômiale est exprimée en fonction des polynômes) par la recherche de quotient de deux fonctions :  $\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Les deux approches algébrique et analytique donnent les coefficients de la série de Taylor. En suivant la même méthode d'Euler, elle demande aux étudiants de faire une représentation graphique des résultats.

« The higher the degree of the approximating polynomial, the closer are the function  $f(x) = \frac{1+2x}{1-x-x^2}$  and the approximating  $P_n(x)$  of degree  $n$ . » (Ibid., p.304)

L'objectif principal de l'utilisation d'une animation dynamique était de permettre aux étudiants de visualiser le processus dynamique en une seule image, selon Kidron (2003).

Cette didacticienne met en jeu la définition de développement en séries infinies de Lagrange, développée dans la neuvième leçon de son ouvrage publié en 1884, pour la fonction  $[f(x + i) = f(x) + if(x) + i^2 \frac{f^2(x)}{2} + \dots]$  afin d'étudier le cas d'une fonction  $f(x) = \sin(x)$  de degré 5.



Le mode de pensée d'Euler effectue le raisonnement sur le calcul formel. Par ailleurs, le mode de pensée de Cauchy se réalise sur le raisonnement par continuité. Kidron (2003) utilise des animations pour visualiser le point de vue « cinématique » de Cauchy.

*« The students were asked to describe what they see and to relate it to the syntax of the commands which generate the animations (...). » (Ibid., p.308)*

De ce fait, l'objectif principal de l'animation consiste à aider les étudiants à visualiser le processus décrit dans la définition formelle de limite donnée par Weierstrass.

Concernant la théorie de l'interpolation, Kidron (2003) a développé les idées de Tchebychev afin de permettre aux étudiants la possibilité de les utiliser pour définir « la meilleure approximation d'une fonction ».

*« The notion of closeness of approximation over an interval was clarified by taking the maximum deviation between the function and its approximating polynomial. » (Ibid., p.310)*

A l'issue de cette expérimentation, cette didacticienne confirme que les étudiants sont capables d'utiliser les outils fournis par un CAS (Mathematica) pour mettre en œuvre des idées des fondateurs de la théorie de l'approximation et de l'interpolation. D'après l'analyse des réponses des étudiants, elle remarque que deux d'entre eux ont la capacité d'utiliser les approches graphiques et numériques de Mathematica dans leur argumentation lors de la production d'un raisonnement :

*« The higher degree of the approximating polynomial, the bigger is the interval in which  $f(x)$  and the polynomial coincided; the order of contact is bigger. » (Ibid., p.318)*

Certains étudiants ont proposé des questions lors de la combinaison de l'approche algébrique d'Euler et de l'approche analytique sur les idées intuitives de développer une fonction en séries infinies. Kidron (2003) n'a pas de réponses complètes sur ces questions qui en fait sont liées à la théorie formelle des mathématiques à enseigner dans le Supérieur. A l'issue de l'expérimentation, et notamment

*« Episode 5 demonstrates that there is a possibility to interact with the software, to change parameters, to help students to generalize their results, so that they can appreciate that a process is represented and not just a specific case. » (Ibid., p.327)*

L'étude historique des concepts mathématiques aide les étudiants à développer leurs connaissances antérieures dans le Supérieur.

*« The history of mathematics whispers into the students' ears the message: Your mental pictures are valuable. They may need to be refined, but you can build on them. » (Ibid., p.329)*

Dans le même cadre de l'utilisation de *Mathematica* dans une expérience d'enseignement de la convergence des séries, Kidron et Tall (2015) soulignent que :

*« This study has used the power of Mathematica's symbol manipulation and dynamic graphics to study the historical development of Taylor series using Euler's infinite polynomials and Lagrange's error function. The students were provided with an environment to manipulate the symbolism and represent the error function graphically to see how it tended to zero. » (Kidron & Tall, 2015, p.18)*

Ces didacticiens conduisent cette expérimentation afin d'analyser

*« ...how the approach can support the dynamic blending of visual and symbolic representations that has the potential to lead to the formal definition of the concept of limit. » (Ibid., 2015, p.1)*

Les représentations graphiques des fonctions ont un rôle déterminant en tant qu'outil pour la résolution des tâches du domaine de l'Analyse locale, Selon Maschietto (2002). En effet, ce didacticien souligne l'intérêt des aspects dynamiques des activités proposées afin d'introduire un concept mathématique. Dans le cas de l'expression « tangente à une parabole » utilisée par les élèves,

*« Il est clair que c'est la première fois que localisation du regard s'opère, que des familles de voisinage d'un point interviennent dans le travail mathématique. » (Maschietto, 2002, p.375)*

Dans le contexte des apprentissages des objets mathématiques, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (2004) qui précise les divers usages des représentations en didactique.

*« Dans la mesure où on admet que toutes les connaissances sont des représentations, au sens d'images d'une réalité, alors ces représentations sont les « objets mêmes de l'enseignement ». A ce titre, elles sont aussi des « moyens de connaissances pour les élèves », elles doivent donc être enseignées comme telles. » (Brousseau, 2004, p.243-244)*

Nous pouvons dire que les principales difficultés rencontrées par les étudiants, lors de la conceptualisation des notions d'approximation au début de l'Université, sont liées à l'étude des signes. Nous pensons que la visualisation dynamique de ces différents objets par l'articulation de ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique permettra d'accéder au sens de ces savoirs afin de surmonter ces difficultés.

#### **IV. Existence des obstacles liés aux objets du domaine de l'étude d'une fonction**

Certains travaux conduits dans le domaine de l'étude d'une fonction soulignent l'existence des obstacles, définis par Bachelard (1938), relatifs aux notions de limite, fonction et tangente.

Robinet (1984), dans sa thèse, lors de son étude de la genèse historique de la notion de limite d'une fonction, détermine les problèmes ou les difficultés rencontrées par certains mathématiciens en termes d'obstacles (Bachelard, 1938).

« Les problèmes qui se posent aux mathématiciens d'alors et qui relèvent peu ou prou du concept actuel de limite, sont schématiquement :

- Trouver des limites d'éléments géométriques (sécantes à une courbe passant par un point fixe de la courbe, polygones inscrits dans un cercle, etc...).
- Mesurer des grandeurs et des éléments « différentiels » attachés aux courbes et aux surfaces (tangentes, rayons de courbure, asymptotes, maxima, minima, etc...).
- Calculer des formes indéterminées (par exemple, que vaut  $\frac{f(x)}{g(x)}$  en  $x = a$  si  $f(a) = g(a) = 0$  ?)
- Evaluer l'ordre de grandeur des sommes partielles des séries divergentes, ou des restes de séries convergentes. » (Robinet, 1984, p.100)

Par ailleurs, Cornu (1983) identifie des obstacles liés à l'apprentissage de la notion de limite dans ses travaux de recherche. Ces obstacles sont interprétés par Sierpiska (1985),

« 1<sup>er</sup> obstacle : « transposition numérique ». Il s'agit d'un obstacle lié à la « difficulté de se détacher du contexte géométrique et cinématique, pour travailler non plus sur les grandeurs, mais sur les nombres », bref difficulté avec l'arithmétisation de la notion de limite.

2<sup>e</sup> obstacle : « aspect métaphysique » de la notion de limite lié avec l'infini qui y entre en jeu. L'infini n'entrait pas dans le domaine des mathématiques classiques et c'est pour cela que ce concept aussi bien que le concept de limite semblaient appartenir plutôt à la métaphysique. D'où la tendance à évacuer l'infini des raisonnements mathématiques, tendance qui est encore présente chez d'Alembert.

3<sup>e</sup> obstacle : les concepts de grandeur « infiniment petites » et « infiniment grandes ».

4<sup>e</sup> obstacle : « la limite...atteinte ou pas ? » (...).

5<sup>e</sup> obstacle : « autres obstacles ». L'auteur donne quelques exemples soit en citant les élèves : « je pense que la convergence est monotone et que la limite n'est pas atteinte », soit en donnant une description en termes de difficultés : « la difficulté de s'imaginer qu'une somme infinie peut être finie », le « problème « 0/0 ». » (Sierpiska, 1985, p.63)

Dans le même contexte, Robert (1983) détermine une « typologie d'erreurs » lors de l'analyse des réponses des élèves à des problèmes liés à la notion de limite. Cette typologie est citée par Sierpiska (1985) en écrivant :

« Voici ces « catégories » d'erreurs :

- négligence du fait de la variabilité de  $n$  ;
- déformation ou omission de certaines hypothèses dans les théorèmes ou définitions ;
- appels aux procédures algébriques ou algorithmiques. Par exemple : appel à l'expression numérique de  $U_n$  (souvent fausse) ou au moins à une expression explicite permettant d'appliquer un algorithme. » (Ibid., p.62)

En s'appuyant sur les travaux de Cornu (1983) et Robert (1983), Sierpiska (1985) conduit une étude de la genèse historique de la notion de limite et une analyse d'une expérimentation

auprès des élèves afin de trouver les moyens didactiques pour leur aider à surmonter leurs difficultés liées à ce concept mathématique. À partir de ces études historique et didactique, elle propose une liste d'obstacles relatifs à la notion de limite. Le premier obstacle est « *horror infiniti* »,

« (...) Il s'agit de se convaincre le fait que :

1-1. Le passage à la limite est une méthode de démonstration suivant un schéma rigoureux qui élimine le problème de l'infini (...). On rencontre les trois formes suivantes :

1-2. Un raisonnement basé sur une instruction incomplète.

1-3. Le passage à la limite considérée la recherche de ce dont nous ne connaissons que des approximations.

1-4. Pour donner une justification à un résultat, on ne cherche pas à faire des démonstrations rigoureuses, il suffit de trouver une formule qui décrive la situation donnée et qui permet une vérification a posteriori par un calcul simple (...).

Nous placerons dans ce groupe deux autres obstacles, de type « algébrique ».

1-6. Transférer automatiquement les méthodes d'algèbre propre à manipuler les grandeurs infinies.

1-7. Transférer les propriétés des termes d'une suite convergente à sa limite – obstacle qui se manifeste essentiellement dans le principe de continuité de Leibniz (...).

1-5. L'obstacle qui consiste à associer le passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement : « on s'approche indéfiniment » ou « on s'approche de plus en plus », alors que la notion de limite dans la théorie formelle est conçue de façon « statique ». » (Ibid., p.39-40)

Artigue (1990) interprète les travaux de Sierpinski (1985) en présentant les cinq obstacles :

« *Horror infiniti* qui regroupe les obstacles liés au refus de statut d'opération mathématique pour le passage à la limite, au transfert automatique des méthodes d'algèbre propre à manipuler les grandeurs finies à des grandeurs infinies, au transfert des propriétés des termes d'une suite convergente à sa limite et enfin l'obstacle qui consiste à associer le passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement ;

- les obstacles liés au concept de fonction : occultation de la notion de fonction sous-jacente, restriction à une suite de valeurs, réduction monotone, non distinction de limite de la notion de borne inférieure ou Supérieure ;

- les obstacles géométriques, l'intuition géométrique faisant « un obstacle sérieux à la formulation d'une définition rigoureuse, autant en empêchant la détermination de ce qu'il faut comprendre par la différence entre deux grandeurs que par un attachement de la notion de limite à la notion de borne d'un ensemble » ;

- les obstacles logiques, liés à l'effacement des quantificateurs ou de leur ordre ;

- *l'obstacle du symbole*, lié à la réticence à introduire un symbolisme spécifique pour l'opération de passage à la limite. » (Artigue, 1990, p.253-254)

Les difficultés rencontrées par certains mathématiciens lors de la genèse des notions de limite et de fonction pourront *a priori* expliquer la nature et l'origine des difficultés des étudiants lors de l'étude locale d'une fonction au début du cycle préparatoire.

Il est intéressant de distinguer les différentes conceptions d'un objet mathématique qui découle de son étude épistémologique par l'articulation entre les différentes propriétés de ce concept lors de ses utilisations ultérieures, (Rouy, 2007).

Balhan, Krysinska et Schneider (2015) prouvent que le contexte de la définition de limite d'Alembert, dans l'Encyclopédie, illustre un *obstacle géométrique de limite* : « *limite des sécantes* ». En effet, l'idée d'obtenir la position de la tangente à partir des sécantes tournant autour d'un point amène à l'existence d'un problème chez les élèves pour mettre le lien entre les pentes des sécantes et celles de la tangente.

« Cornu (1983), Sierpinska (1985) et Schneider (1988) voient, dans ce constat, la trace de ce qu'ils appellent « *l'obstacle géométrique de limite* ». » (Balhan, Krysinska & Schneider, 2015, p.9)

Cet obstacle s'explique par le passage à la limite en termes géométriques et plus précisément, le fait de déterminer la tangente puis sa pente chez les élèves.

« *Ce qui donne sens à ce processus, comme le développe Schneider (1991a), c'est le mouvement où l'on voit une sécante tourner autour d'un point jusqu'à une position où elle sera tangente. Dans ce processus qui va jusqu'à son terme, les accroissements  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , déterminés par les deux points de rencontre de la sécante et de la courbe, sont perçus comme des quantités qui tendent vers zéro de manière autonome jusqu'à devenir nulle au bout du compte.* » (Ibid., p.9)

A partir de l'évolution historique de la genèse de la tangente au cercle jusqu'à sa définition de l'Analyse actuelle, le parcours didactique « *est balisé de sauts conceptuels majeurs* » qui sont constitués du passage « *...vers une approche infinitésimale* », « *la tangente comme source d'approximation affine locale d'une fonction* », « *la tangente comme outil graphique pour étudier les fonctions* », « *vers une approche plus formalisée de dérivée : la meilleure approximation au sens de Chilov* » et « *vers les développements limités* », (Ibid.).

Dans cette dernière approche, on donne une meilleure approximation d'une fonction affine associée à la tangente par des exemples des fonctions non polynômiales. De ce fait, ils se posent alors

« (...) *deux nouvelles questions : celle de l'erreur commise et celle d'une approximation polynômiale non affine.* » (Ibid., p.21)

Balhan, Kryszynska et Schneider (2015) soulignent le fait que les définitions données aux notions de limite, fonction, dérivée et tangente

« ... se doivent de permettre la mise en place d'une organisation déductive autonome, l'analyse mathématique proprement dite, coupée de ses liens avec géométrie et la physique d'où sont issues les problématiques qui lui ont donné naissance. » (Ibid., p.29-30)

Certaines difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction relèvent *a priori* d'obstacles qui résultent de ses liens avec le domaine de géométrie et de la physique.

### **Conclusion du chapitre 1**

La revue de lecture des travaux présentés liés au domaine de l'étude d'une fonction, et notamment des notions de tangente, fonction, limite, dérivée, intégrale et des séries de Taylor, prouve l'existence des difficultés rencontrées par les étudiants. Ces difficultés sont dues soit :

- au changement de contrat didactique lors de la transition Secondaire/Supérieur : certaines difficultés résultant d'un « saut conceptuel » et à l'existence des ruptures par le passage d'une *Analyse intuitive et algébrisée* à une *Analyse formelle*, soit au niveau de paradigme de l'enseignement d'un objet mathématique, soit au niveau des tâches proposées, soit au niveau des techniques de résolution des différents types de tâches (« d'un travail algorithmique à un travail complexe »), soit au niveau de temps consacré à l'enseignement du savoir, soit au niveau de l'étude des signes et des symboles ;
- au manque de collaboration et de coordination entre les institutions du Secondaire et du Supérieur qui amène à la complexité de l'élaboration des nouveaux concepts au début de l'Université : certaines difficultés résultent de l'existence des ruptures dans la démarche de la construction du savoir soit lors de l'introduction d'une nouvelle notion, soit lors de l'enseignement d'un savoir sans la prise en compte des connaissances antérieures des étudiants et de son nouveau contexte ;
- au décalage entre la culture du Secondaire et la culture du Supérieur ;
- au manque « d'expérience mathématique » dans le Supérieur : l'insuffisance du temps nécessaire lors de l'introduction d'une nouvelle notion afin d'accéder aux raisons de savoir amène à une complexité de la conceptualisation de ce savoir.
- à la complexité des définitions formelles des savoirs à enseigner dans le Supérieur : les étudiants peuvent rencontrer une difficulté de donner du sens à la structure compliquée d'un savoir en raison de l'interaction d'autres concepts, ainsi que de l'étude de son unicité et de son existence. Par exemple, la définition formelle de limite, des séries de Taylor, etc.

- au changement du processus de l'étude des signes et des représentations d'un objet mathématique : par exemple, au Secondaire, les élèves sont habitués à construire des représentations graphiques lors de la construction d'un objet mathématique, (Haddad, 2012). Par contre, dans le Supérieur, l'approche graphique est totalement absente lors de l'étude d'une fonction. Par ailleurs, certains travaux liés au domaine d'approximation des fonctions ont établi l'influence des images dynamiques par l'usage du logiciel de géométrie sur l'apprentissage de la notion de convergence des séries de Taylor, (Alcock & Simpson, 2004 ; Kidron & Zehavi, 2002 ; Kidron, 2003, 2008) et l'approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction au voisinage d'un réel (Artigue, 2002). Et notamment, la combinaison des expériences des étudiants avec la visualisation dynamique et des calculs symboliques contribue à une approche naturelle de la définition formelle de limite, (Kidron & Tall, 2015) ;
- à l'existence des obstacles épistémologiques liés aux objets du domaine de l'étude d'une fonction (Robinet, 1984 ; Robert, 1983 ; Cornu, 1983 ; Sierpiska, 1985, Balhan, Krysinska & Schneider, 2015).

Par ailleurs, dans le domaine d'approximations des fonctions, certains travaux ont établi l'intérêt de la visualisation dynamique des représentations graphiques des objets de l'Analyse dans l'apprentissage au début de l'Université, (Artigue, 2002 ; Alcock & Simpson, 2004 ; Kidron & Zehavi, 2002 ; Kidron, 2003, 2008 ; Kidron & Tall, 2015, etc.).

Dans notre cas d'étude, le concept d'approximation locale d'une fonction est étroitement lié aux notions de limite, fonction, dérivée, approximation et tangente (approximation polynômiale d'ordre 1 d'une fonction au voisinage d'un réel). Cette revue de lecture des travaux liés aux objets de domaine de l'étude des fonctions, nous amène à formuler l'hypothèse initiale suivante :

Hypothèse 1 : une majorité des étudiants éprouvent des difficultés prégnantes quant à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires de filière Physique-Chimie (PC).

Dans le contexte de l'analyse des difficultés rencontrées par les étudiants, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (1976) qui donne l'intérêt d'une étude approfondie des différents types d'erreurs effectuées par l'élève confronté à une situation mathématique. Cette analyse des erreurs se réalise par l'étude du développement cognitif et du fonctionnement des connaissances mobilisées par l'étudiant. Il y a des erreurs liées à une connaissance fautive qui peut être rejetée et modifiée. Comme son existence est passagère, elle reste une difficulté. Il y a aussi des erreurs liées à une conception qui constitue

« ... un ensemble de connaissances, un langage, une manière de voir une représentation - erronée - mais qui a été engagée avec quelque succès dans une famille d'actions, ou comme moyen d'expression, ou dans des jugements (...)]. Une telle conception sera plus difficile à modifier ou à rejeter. Elle donnera lieu à des conflits cognitifs véritables. (...). Si par surcroît la résistance est forte, en ce sens que les conflits cognitifs se prolongent sans que l'on parvienne à éliminer la connaissance fausse, ou si, bien qu'apparemment rejetée par le sujet, elle réapparaît de façon fortuite et en quelque sorte échappe à son contrôle, nous dirons que cette conception fait obstacle. La connaissance ancienne provoque des erreurs persistantes dont l'origine peut échapper longtemps au sujet. » (Brousseau, 1986, p.282)

De ce fait, les erreurs liées au système (maître-élève-connaissance) et au développement des connaissances dans la situation d'apprentissage peuvent relever d'obstacles, selon Brousseau (1998). En effet, ce didacticien a prouvé l'intérêt de mettre en jeu la relation entre sujet, connaissance et milieu dans la présentation des caractéristiques informationnelles d'un obstacle.

« Une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance "intéressante". » (Brousseau, 1998, p.10)

A l'instar de Brousseau (1998), nous envisageons de conduire une analyse des erreurs effectuées par les étudiants confrontés à une situation mathématique en classe en termes d'obstacles. La recherche des indices d'un obstacle se réalise, à partir de ces erreurs en prenant en compte les trois conditions énoncées par ce didacticien, dont la première

« ... un obstacle est une connaissance, le chercheur devra faire un effort pour reformuler la "difficulté" qu'il étudie en termes, non pas de manque de connaissances, mais de connaissance (fausse, voir incomplète...). (...)» (Ibid., p.15)

La deuxième condition est :

« La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité, et donc aussi un domaine où elle est a priori pertinente mais où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs, etc. » (Ibid., p.16)

La troisième condition est énoncée ainsi

« C'est le sens de la troisième condition qui stipule que l'attestation des résistances à la mise en place et au rejet d'une connaissance est indispensable pour établir son caractère. » (Ibid., p.17)

Dans ce cadre de l'étude du fonctionnement d'une connaissance, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (1998) qui considère qu'une connaissance, en tant qu'obstacle, est le fruit d'une interaction de l'étudiant avec le milieu.

« ... et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance "intéressante". (...) il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions "erronées" (ou vraies localement mais non généralement). Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de



*l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique de connaître ces conditions et de les utiliser. » (Ibid., p.7)*

Brousseau (1989) a défini la notion d'obstacle en se référant aux travaux de Bachelard (1938) et Piaget (1975).

*« Fondamentalement cognitifs, les obstacles semblent pouvoir être ontogéniques, épistémologiques, didactiques et même culturels selon leur origine et la façon dont ils évoluent. » (Brousseau, 1989, p.3)*

Il a distingué trois types d'obstacles :

- Obstacle ontogénique qui est lié au développement du sujet à un moment donné.
- Obstacle épistémologique lié à la genèse historique d'un concept mathématique.

*« Certains de ces obstacles historiques sont encore aujourd'hui, dans les conditions actuelles "nécessaires" à la mise en place d'une connaissance : la conception correspondante se développera presque sûrement à un moment de la formation du sujet ou même sera consentie par l'enseignement comme un appui indispensable pour atteindre une connaissance supérieure. Ces conceptions sont les obstacles épistémologiques. » (Brousseau, 1986, p.283)*

- Obstacle didactique lié au choix de l'enseignement et le projet institutionnel. En effet, les obstacles peuvent être des connaissances

*« ... résultant d'une transposition didactique ancienne ou récente mais non susceptibles d'une renégociation par le maître, du moins dans le cadre restreint d'une classe - qui éviterait d'avoir à les considérer. » (Ibid., p.283)*

Dans le cadre de l'étude des erreurs effectuées par des étudiants, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (1989) qui précise le rôle de chercheur qui consiste tout d'abord à :

- « - trouver ces erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions ;
- trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques ;
- confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique. » (Brousseau, 1989, p.1-2)

A l'issue de ces travaux de Brousseau, nous proposons une deuxième hypothèse de notre travail de recherche :

Hypothèse 2 : l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés au concept de la relation de comparaison de fonctions, développements limités et la formule de Taylor-Young contribuent à :

- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets mathématiques en première année (PC) ;
- permettre aux étudiants de surmonter ces erreurs.

Dans le cadre de l'identification de la nature et l'origine des erreurs effectuées par des étudiants en situation d'apprentissage de ces objets d'approximation locale d'une fonction, nous conduirons une étude en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. A l'instar de Brousseau (1998),

*« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, de ramifications imprévues (...) Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu. » (Brousseau, 1998, p.6-7)*

Ce point de vue de Brousseau nous amène à formuler les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3 : les obstacles liés à l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant l'utilisation des représentations graphiques.

Hypothèse 4 : l'étude de la genèse historique des objets d'approximation locale d'une fonction nous permettra *a priori* d'étudier les erreurs effectuées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction.

Nos travaux visent à trouver des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Quels sont les obstacles épistémologiques et didactiques liés à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction ?
- En quoi l'analyse préalable des obstacles épistémologiques et didactiques joue-t-elle un rôle déterminant dans la construction d'une ingénierie didactique de développement permettant aux étudiants de donner du sens au concept d'approximation locale d'une fonction ?

Afin de trouver des éléments de réponses à nos questionnements, nous commençons notre travail de recherche par une étude historique et épistémologique des notions en étroitement liées au concept d'approximation locale d'une fonction. Cette étude historico-épistémologique nous permettra *a priori* d'identifier les obstacles épistémologiques (Brousseau, 1986).

## Chapitre 2

### Eléments relatifs à l'histoire et l'épistémologie des approximations locales d'une fonction

#### Introduction

Une revue de la lecture des travaux didactiques liés aux objets du domaine de l'Analyse, et plus précisément aux notions de tangente (Artigue, 1990 ; Castela, 1995 ; Schneider, 1988 ; Rouy, 2007 ; Balhan, Krysinska & Schneider, 2015 ; etc.), de fonction (Sierpinska, 1992 ; Gaudin, 2005) et de limite (Robinet, 1984 ; Robert, 1983 ; Sierpinska, 1985 ; Cornu, 1983 ; etc.) confirme la nécessité de conduire une étude épistémologique du concept d'approximation locale d'une fonction.

La signification d'un concept mathématique n'est pas déterminée par sa définition donnée par l'enseignement (Sierpinska, 1990)

*« ... mais elle est résultante de l'histoire du concept et de ses diverses applications aussi bien dans le passé que dans le présent. On doit donc étudier l'histoire d'un concept pour pouvoir déterminer les conditions de sa compréhension, i.e. pour en élaborer une analyse épistémologique. D'autre part, la connaissance de l'histoire des concepts est très utile dans les recherches diagnostiques sur les difficultés des élèves, plus particulièrement dans l'effort de comprendre leurs actions et verbalisations pendant les séances expérimentales. C'est parce que nous connaissons l'histoire que nous voyons plus, que nous comprenons plus de ce que les élèves font ou disent. En interprétant leurs solutions et prises de paroles nous faisons des analogies (pas nécessairement directes) avec les textes historiques. (...) En réalité, l'histoire nous aide à construire des modèles des conceptions des élèves sans toutefois nous apporter des modèles tout faits. » (Sierpinska, 1990, pp.85-86, cité par Barbin 1997, p.64-65)*

Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Barbin (1997)

*« Se poser la question de "pourquoi et comment tel concept" signifie que l'on ne se borne pas à aligner des "points de vue" sur un concept, mais que l'on se situe dans une épistémologie de la problématique. » (Barbin, 1997, p.75)*

Dans le cadre de notre mémoire de Master, nous avons effectué une étude de la genèse historique du concept de développements limités en interprétant les différentes méthodes développées par les mathématiciens et les physiciens, dès le début du XVII<sup>e</sup> siècle jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. L'investigation épistémologique conduite nous a permis de conclure que la

genèse historique de cet objet mathématique est étroitement liée à l'usage des différentes techniques cinématiques, infinitésimales, géométriques et analytiques lors de la résolution des problèmes physico-mathématiques (Belhaj Amor, 2016). Par ailleurs, cette étude met en évidence l'existence de ruptures épistémologiques en mathématiques qui sont dues au changement de paradigmes par le passage d'une approche géométrique à une approche purement analytique (Ibid.). Etant donné que la notion de développement limité est un concept d'approximation locale d'une fonction, nous commençons notre réflexion épistémologique par la conduite d'une étude complémentaire de la genèse historique des notions étroitement liées avec notre objet d'étude. Dans une première étape, nous nous intéressons à l'interprétation et la compréhension des différents problèmes étudiés par les mathématiciens et les physiciens dès l'Antiquité afin de découvrir les différents objets d'approximation locale d'une fonction.

Sierpiska (1990) a précisé les buts d'une recherche en didactique des mathématiques par la prise en considération de la notion d'obstacle épistémologique :

- « 1. diagnostic des difficultés des élèves vis-à-vis de l'apprentissage des mathématiques ;
2. études épistémologiques des notions mathématiques ;
3. évaluation des apprentissages, des enseignements et des matériels du point de vue de la construction des connaissances mathématiques ;
4. élaboration de projets d'enseignements. » (Barbin, 1997, p.65)

Dans cette partie de thèse, nous nous intéressons aux différentes méthodes développées par Euclide, Archimède, Apollonius, Torricelli, Roberval, Fermat, Descartes, Leibniz, Newton, Taylor, Lagrange, Euler et Cauchy lors de la résolution des problèmes qui sont dus à la genèse historique des différentes notions liées au concept d'approximation locale d'une fonction. Cette analyse nous permettra de déterminer les différents obstacles (Brousseau, 1998) d'une part, et de distinguer les différents raisonnements dont la validité est limitée par certains mathématiciens et physiciens, d'autre part.

L'identification d'une catégorisation d'obstacles liés à la genèse historique des notions d'approximations d'une fonction pourra *a priori* nous aider à déterminer les difficultés des étudiants en situation d'apprentissage de ces objets dans les domaines intra et extra-mathématiques à l'entrée aux classes préparatoires aux études d'ingénieurs tunisiennes. Avant de commencer notre étude, nous présenterons l'intérêt de mettre en jeu les liens entre les domaines de l'histoire, de l'épistémologie et de la didactique des mathématiques afin d'étudier la genèse historique d'un savoir de référence.

## **I. Intérêt de la mise en jeu des liens entre les domaines de l'histoire, de l'épistémologie et de la didactique**

Le domaine de la didactique des mathématiques est étroitement lié aux autres domaines de recherche. Et en particulier, nous nous intéressons aux domaines de l'histoire et de l'épistémologie. En effet, Dorier (1997) a considéré le fait que

*« ...l'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique et le travail didactique. » (Dorier, 1997, p.7)*

D'un autre côté, Arsac (1987) a prouvé l'intérêt de prendre en considération le lien entre l'apprentissage d'un concept chez l'élève et l'approche historique.

*« ... si la genèse d'un concept chez un élève ne peut être entièrement identique à sa genèse historique, un point commun demeure toujours entre les deux situations : le concept n'apparaît historiquement, n'est assimilable par l'élève, que s'il semble indispensable à la solution d'un problème. » (Arsac, 1987, p.4)*

La compréhension de l'importance fondamentale d'un concept mathématique est réalisée par son analyse épistémologique, selon Sierpinska (1989).

*« L'analyse épistémologique sert avant tout à comprendre (nous le soulignons) les concepts mathématiques dont l'enseignement nous intéresse. [...] Comprendre un concept, c'est aussi savoir pourquoi et quand il est devenu important ou fondamental en mathématiques. » (Sierpinska, 1989)*

Par ailleurs, le travail d'Artigue (1990) s'est inscrit dans une problématique de recherche liée à la fonction de l'analyse épistémologique en didactique et plus précisément sur la rigueur en Analyse, ceci l'amène à conclure que

*« Dans cette direction, celle de la vigilance épistémologique, de la prise de distance par rapport à l'objet d'étude, l'analyse épistémologique permet également au didacticien de prendre la mesure des disparités existant entre savoir « savant », pour reprendre l'expression introduite par Y. Chevallard, et savoir « enseigné ». » (Artigue, 1990, pp.244-245)*

De plus, Artigue (ibidem) a expliqué l'intérêt de l'étude de la genèse historique d'un objet mathématique dans le domaine de la didactique.

*« Or, cette condition me semble essentielle : du fait de la disparité des contraintes qui gouvernent les deux systèmes, l'analyse historique peut aider le didacticien dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, elle ne peut, en aucun cas, apporter à elle seule la preuve de l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels.*

*Et ce, d'autant plus que l'on constate que les nœuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique historique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique. » (Ibid., p.254)*

Par ailleurs, Bachelard (1938) insiste sur la nécessité de distinguer le rôle ou le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. Ce dernier

*« ... doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un obstacle ou une contre-pensée. »*  
(Bachelard, 1938, p.17)

Le rôle de l'épistémologue ne se limite pas à l'interprétation des faits scientifiques, mais il doit aussi prendre en considération la formulation et les différentes étapes de l'évolution historiques des concepts scientifiques.

*« L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté. »* (Ibid., p.18)

Cette étude démonstrative de la distinction entre le métier d'épistémologue et celui d'historien scientifique a amené Bachelard (1938) à introduire la notion d'obstacle qui est développée dans les travaux de Brousseau afin d'étudier les erreurs effectuées par le sujet (élève ou mathématicien) confrontés aux situations. Cette étude des erreurs s'effectue par une analyse du fonctionnement de connaissances et de savoirs mobilisés en interprétant les différentes méthodes développées lors de la résolution d'un problème mathématique.

## **II. Méthodologie et cadres théoriques de l'analyse épistémologique**

Le domaine d'approximation d'une fonction est un domaine assez-vaste à découvrir la genèse historique de ses différents objets. Notre recherche se limite au domaine d'approximation locale d'une fonction d'une variable réelle. De ce fait, ce domaine revoit à la distinction des notions de fonction, des variables étudiées, de limite et de voisinage. Et plus précisément, nous nous intéressons à la manière dont sont utilisés les « infinitésimaux » lors de la résolution des problèmes liés à la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction.

Notre méthodologie repose, dans une première étape, sur une étude épistémologique des concepts en étroite liaison avec les notions d'approximation locale d'une fonction en interprétant les différentes méthodes développées par certains mathématiciens dès l'Antiquité lors de la résolution des problèmes liés à la genèse historique de ces objets.

Dans cette partie de thèse, notre travail porte la focale sur la présentation et l'interprétation de ces méthodes en vue d'identifier les obstacles (Brousseau, 1986) liés à la genèse historique et à mettre en évidence les différents paradigmes correspondants.

La prise en considération des difficultés rencontrées par ces mathématiciens lors de la résolution des différents problèmes liés au domaine d'approximations locales d'une fonction pourra *a priori* nous aider à étudier les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des objets d'approximations locales d'une fonction au début de l'Université.

Notre objectif principal de cette étude épistémologique et historique du concept d'approximation locale de fonction à une variable réelle consiste à présenter et interpréter les différentes méthodes développées par certains mathématiciens et physiciens lors de la résolution des problèmes dus à la genèse historique des notions en étroite liaison avec ce concept mathématique. De ce fait, nous adoptons le cadre de la théorie des situations didactiques en mettant la focale sur la notion de situation-problème (Brousseau, 1982).

*« Les situations problématiques sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en œuvre de choix ou d'actions dont il a la responsabilité. » (Brousseau, 1982, p.40)*

Nous conduisons une analyse des méthodes développées par certains mathématiciens et physiciens lors de la résolution des problèmes liés à la genèse historique des objets d'approximation locale d'une fonction en termes de registres de représentation sémiotique de Duval (1993) (développé dans le chapitre 3) et jeux de cadres de Douady (1992).

Un cadre est

*« ... constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1992, p.135)*

Par ailleurs, la résolution d'un problème mathématique mobilise des interactions entre des concepts dans différents cadres. Cette interaction définit le « changement de cadres » au sens de Douady (1992) qui est

*« ... un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent (...) la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. » (Ibid., p.135)*

Les cadres que nous comptons explorer dans notre travail de recherche sont ceux de :

- Cadre géométrique qui porte tout ce qui est construction graphique des objets mathématiques, etc.

- Cadre algébrique : dans lequel, on étudie des fonctions algébriques, on fait les opérations algébriques sur les fonctions algébriques, le calcul algébrique pour des polynômes, etc.

- Cadre des fonctions (cadre de l'analyse) : dans lequel, on étudie des fonctions transcendantes (non constructibles), etc.

- Cadre numérique est constitué des nombres, des relations des nombres, etc.

### **III. Étude historique et épistémologique des objets liés au concept d'approximation locale d'une fonction**

Le domaine d'approximation d'une fonction est lié au domaine du calcul infinitésimal (calcul intégral et différentiel). Et plus précisément, le domaine d'approximation locale d'une fonction est lié au domaine du calcul différentiel par l'usage des infiniment petits. Le principe des infiniment petits apparaît dès l'Antiquité dans les méthodes d'Archimède, d'Apollonius, de Fermat, Pascal, Huygens, Barrow, Leibniz, etc.

À l'Antiquité, les « infinitésimaux » sont utilisés la première fois par Archimède dans sa méthode d'exhaustion pour trouver des aires des régions et des volumes des solides. Archimède a utilisé sa méthode pour remplacer les arguments infinitésimaux par des arguments géométriques. Cette technique est développée par Kepler au XVII<sup>e</sup> siècle par le calcul de l'aire d'un cercle en représentant celui-ci comme un polygone d'un nombre infini de côtés. Par ailleurs, Cavalieri a développé sa méthode des invisibles en traitant les figures géométriques comme étant composées d'entités de co-dimension 1.

Avant de conduire une étude de la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction, nous présentons le principe des infiniment petits mobilisé par les mathématiciens et les physiciens de cette époque.

*« Le principe des infiniment petits apparaît d'ailleurs sous deux formes distinctes suivant qu'il s'agit de « différentiation » ou d'« intégration ». Quant à celle-ci, soit d'abord à calculer une aire plane : on la divisera en une infinité de tranches parallèles infiniment petites, au moyen d'une infinité de parallèles équidistantes ; et chacune de ces tranches est un rectangle (bien qu'aucune des tranches finies qu'on obtiendrait au moyen de deux parallèles à distance finie ne soit un rectangle). De même, un solide de révolution sera décomposé en une infinité de cylindres de même hauteur infiniment petite, par des plans perpendiculaires à l'axe ; des façons de parler analogues pourront être employées lorsqu'il s'agit de décomposer une aire en triangles par des droites concourantes, ou de raisonner sur la longueur d'un arc de courbe comme s'il s'agissait d'un polygone à une infinité de côtés, etc. Il est certain que les rares mathématiciens qui possédaient à fond le maniement des méthodes d'Archimède, tels Fermat, Pascal, Huygens, Barrow, ne pouvaient, dans chaque cas particulier, trouver aucune difficulté à remplacer*



*l'emploi de ce langage par des démonstrations rigoureuses ; aussi font-ils remarquer que ce langage n'est là que pour abrégé. » (Bourbaki, 1974, p.215-216)*

De ce fait, nous conduisons une étude et une interprétation des différentes méthodes développées par les mathématiciens et les physiciens en prenant en compte l'usage des infiniment petits lors de la résolution des problèmes liés à la genèse historique des notions de tangente, de « développement en séries infinies », de « développement en séries de Taylor », d'équivalence, de limite d'une fonction, de développement d'une fonction et de développement asymptotique.

Une étude de la genèse historico-épistémologique des objets liés au champ d'approximations locales des fonctions nous permettra *a priori* de remarquer l'existence des formules élaborées par certains mathématiciens sont devenues inadéquates par la naissance des nouvelles notions et méthodes dans le domaine du calcul infinitésimal et par suite dans le domaine de l'Analyse.

Au cours de l'évolution historique des mathématiques, certains mathématiciens ont été confrontés à des problèmes liés au concept d'approximation locale d'une fonction. Dans ce travail, nous essayerons d'étudier quelques formules inadéquates qui renvoient aux développements des modes de raisonnements dont la validité est illimitée chez Fermat, Leibniz, Euler, Maclaurin et d'Alembert.

Dans cette partie de thèse, nous ne souhaitons pas présenter toutes les méthodes développées par les mathématiciens lors de la genèse historiques des objets du domaine d'approximation locale d'une fonction tel que pourrait le faire un historien des mathématiques. Notre travail met la focale sur la caractérisation et l'interprétation des différentes méthodes élaborées par certains mathématiciens et physiciens afin d'identifier des obstacles liés à la genèse historique des objets d'approximation locale d'une fonction à une variable réelle et à mettre en lumière les paradigmes correspondants.

La genèse historique des notions de tangente, développement limité, la formule de Taylor-Young et la relation de comparaison des fonctions est due à la résolution des différents problèmes rencontrés par les mathématiciens et les physiciens dès l'Antiquité.

Le premier problème rencontré par les mathématiciens et les physiciens est le « problème des tangentes » qui est lié au domaine du calcul infinitésimal et plus précisément au domaine du calcul différentiel afin d'étudier le concept de tangente.

*« Quant au calcul différentiel, il est comme on sait, intimement lié au problème connu sous le nom de « problème des tangentes ». Le rapport des accroissements infiniment petits (ou différentiels) de deux variables  $x$  et  $y$  dépendant l'une de l'autre, est une quantité en général finie, calculable par les méthodes de l'algèbre élémentaire (c'est la dérivée de  $y$  par rapport à  $x$ ), et cette quantité*

*est égale au coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe. Ainsi les problèmes relatifs aux différentielles s'expriment immédiatement en termes finis, et ont, de plus, une signification géométrique précise.* » (Boutroux, 1920, p.114)

La genèse historique de la notion de tangente est due à la résolution des « problèmes de tangente » par l'usage des différents types des méthodes des mathématiciens et des physiciens dès l'Antiquité.

### **III.1. La notion de tangente**

Boutroux (1920) a résumé l'évolution historique des notions de domaine du calcul différentiel par l'usage des infiniment petits.

*« Dès 1636, en effet, Fermat imagine pour la construction des tangentes une méthode où intervient la considération du maximum ou minimum, et par conséquent de la dérivée d'une fonction, mais qui ne nous oblige point à raisonner sur des infiniment petits. Peu après, Roberval propose à son tour une solution mécanique du même problème, où il fait appel à la notion de vitesse, algébriquement équivalente à celle de dérivée. On voit donc que le calcul des dérivées (quantités finies) a précédé historiquement le calcul des différentielles (quantités infinitésimales) dont Leibniz et Newton furent les promoteurs. Et l'origine de ce calcul se trouve être un problème de géométrie qui est en relation directe avec les théories cartésiennes fondamentales ayant trait à la représentation des fonctions algébriques, par des courbes, ou inversement, à la définition des courbes par des fonctions (3).*

*(3) Ce problème est celui du triangle caractéristique étudié par Leibniz.* » (Ibid., p.115)

Le concept de tangente est un objet géométrique qui représente algébriquement les deux premiers termes du développement limité d'une fonction. Ce concept a été défini à partir des « problèmes des tangentes », puis des problèmes de vitesses, maxima et minima de Fermat.

#### **III.1.1 La notion de tangente en un point à un cercle**

Euclide a étudié la tangente au cercle,

*« ...qu'il définit comme « une droite qui touchant un cercle et étant prolongée ne le coupe point ». Eléments, livre III, définition 2. (...) Dans le même ouvrage, Euclide énonce l'existence et l'unicité de la tangente en tout point du cercle en utilisant l'expression « la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle ». Eléments, livre III, proposition 16 » (Rouy, 2007, p.152)*

Ainsi, dans le registre graphique, Euclide a développé une technique de nature géométrique pour déterminer l'objet tangente à un cercle qui est une droite n'admettant pas uniquement un seul point tout en le traversant.

#### **III.1.2 La notion de tangente en un point à une parabole**

Rouy (2007) a cité la technique développée par Apollonius lors de la résolution des « problèmes des tangentes ». Cette technique géométrique

« ...va « remplacer » la définition par un critère de construction. Apollonius : Les coniques (extraits du premier Livre)

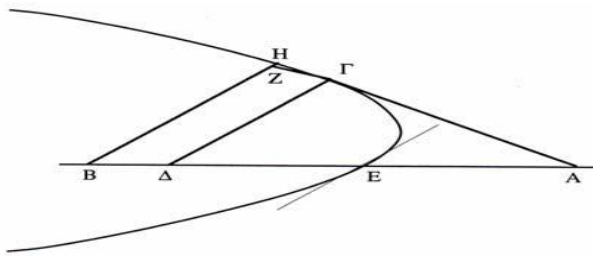


Schéma 2-1

*Proposition 33*

« Si l'on prend un point sur une parabole ; si de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section. (Ici, la propriété de la sous tangente se traduit par  $AA = 2AE$ )

*Proposition 35*

Lorsqu'une droite rencontrant un diamètre à l'extérieur de la section est tangente à une parabole, la droite, amenée de manière ordonnée du point de contact sur le diamètre, découpera sur le diamètre, à partir du sommet de la section, une droite qui est égale à celle qui est située entre le sommet et la tangente ; et nulle droite ne tombera dans l'espace compris entre la tangente et la section.

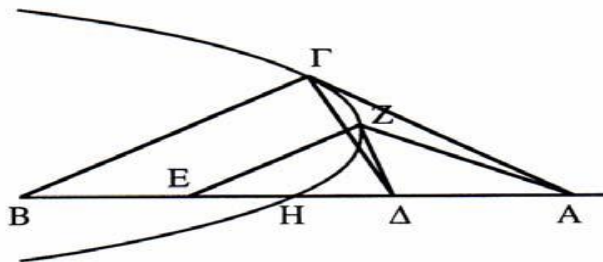


Schéma 2-2

» (Rouy, 2007, pp.152-153)

En effet, Apollonius a présenté sa technique purement géométrique de la construction d'une tangente à une parabole en s'appuyant sur des illustrations graphiques dans le cadre géométrique.

III.1.3 La notion de tangente en un point à une spirale

À l'Antiquité, Archimède a utilisé la tangente en tant que technique géométrique et plus précisément, la tangente à un arc de parabole pour « quarrer » un « segment » de parabole. En langage mathématique actuel, il a utilisé des champs de tangente pour tracer des courbes

« répondant à des équations différentielles » et il a considéré « la tangente comme associée à une approximation affine locale d'une fonction quelconque », selon Rouy (2007).

En étudiant les « problèmes des tangentes », Archimède a développé une méthode cinématique pour présenter la construction graphique d'une tangente à une courbe mécanique dans un registre graphique, (Rouy, 2007).

#### III.1.4 La notion de tangente en un point d'une courbe

Cette méthode cinématique d'Archimède est développée par Torricelli et Roberval au début du XVII<sup>e</sup> siècle. Le statut de l'objet mathématique « tangente » prend son étendue la première fois par les travaux de Torricelli et Roberval. En effet,

*« La méthode élaborée par Archimède pour construire la tangente à la spirale se nourrit de considérations cinématiques. Elle a été étendue, au XVII<sup>e</sup> siècle, dans les travaux de Torricelli et dans ceux de Roberval sur le mouvement des trajectoires. » (Dahan & Peiffer, 1986, p.185)*

Roberval et Torricelli ont cherché la solution du problème dans la combinaison de vitesses d'accroissement. En effet, ils ont trouvé la construction des tangentes par la considération du mouvement des trajectoires.

*« Torricelli et Roberval considèrent les courbes engendrées par la composition de deux mouvements, dont on connaît les vitesses. La vitesse résultante sera la diagonale du parallélogramme des vitesses des deux mouvements qui engendrent la courbe. La droite ayant la direction de la diagonale sera la tangente à la courbe au point P. Cette méthode dynamique permet de déterminer les tangentes à beaucoup de courbes, mais la définition de la tangente qui y opère repose sur des concepts physiques et n'est pas applicable à toutes les courbes.*

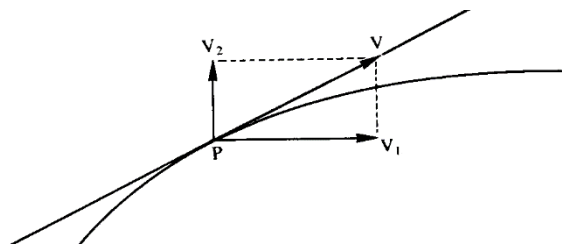


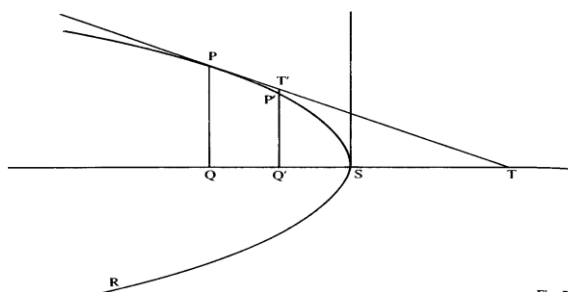
Schéma 2-3 » (Ibid., p.185-186)

Ces physiciens ont utilisé une technique cinématique s'appuyant sur des concepts de physique et plus précisément, les mouvements des trajectoires (les vitesses, etc.) en tant qu'outil représenté sous forme des figures géométriques « dynamiques » dans le cadre géométrique. De ce fait, le concept de tangente prend son statut géométrique par sa représentation graphique en tant que solution mécanique qui est la résultante de la composition de deux vitesses du mouvement engendrant le graphe d'une courbe mécanique, (Dahan & Peiffer, 1986).

### III.1.5 La notion de tangente liée à une méthode basée sur le calcul d'accroissement dans le domaine du calcul infinitésimal

Fermat (1629) a développé une méthode géométrique lors de la résolution des « problèmes des tangentes » afin de déterminer l'équation de la sous-tangente à la parabole d'équation  $y^2 = 2px$  en termes des infiniment petits du domaine du calcul infinitésimal. Cette méthode lui a permis de donner une définition d'une tangente à partir d'une interprétation géométrique qui vise à déterminer la position relative de la tangente par rapport à la courbe mécanique (cf. schéma 2-4). En effet,

*«La définition sous-jacente à cette méthode décrit la tangente comme une position limite d'une sécante lorsque les points d'intersection avec la courbe tendent à se rapprocher. C'est la définition qu'on utilise aujourd'hui pour placer les tangentes aux courbes. Pour déterminer la tangente en  $x_0$  à la courbe représentative d'une fonction  $f$ , on commencera par donner un accroissement  $\Delta x$  à la variable  $x$ , qu'on laissera dans la suite tendre vers zéro. Ce n'est pas en termes de fonction et de limite que pensait Fermat, mais plutôt en termes d'équations et d'infiniment petits. Il est le premier à considérer des infiniment petits numériques et non plus géométriques et, au lieu de les faire tendre vers zéro, il les pose d'emblée égaux à zéro.» (Dahan et Peiffer, 1986, p.187)*



**Schéma 2-4**

L'équation de la tangente est découverte par Fermat, vers 1629, lors de la résolution des « problèmes des tangentes » par l'usage de sa méthode « infinitésimale » dans le cadre géométrique articulant les registres graphique, géométrique et algébrique. En effet, il a déterminé une équivalence géométrique, non pas en termes de fonction et limite, mais en termes d'équations et d'infiniment petits via des éléments d'arc et de la tangente s'appuyant sur des accroissements géométriques et numériques pour approximer la courbe en question (Grégoire, 1998).

Fermat s'est appuyé sur des méthodes graphiques par le croisement des aspects géométriques et numériques afin d'approximer les courbes algébriques et mécaniques.

### III.1.6 La notion de tangente en lien avec le calcul infinitésimal

Fermat a trouvé un résultat fondamental, publié en 1637 dans son traité, sur les problèmes d'extremums qui s'écrivent dans nos jours par : si une fonction numérique  $f$  dérivable sur  $]a, b[$  admet un extremum en un point  $C$  de cet intervalle, alors  $f'(c) = 0$ . Dans ce sens, Bourbaki (1974) écrit que :

« Fermat, dès 1630, inaugure à propos de tels problèmes sa méthode infinitésimale, qui en langage moderne revient en somme à rechercher les deux premiers termes (le terme constant et le terme du premier terme du premier ordre) du développement de Taylor, et d'écrire qu'en un extremum le second s'annule ; il part de là pour étendre sa méthode à la détermination des tangentes, et l'applique même à la recherche des points d'inflexion. » (Bourbaki, 1974, p.222)

Ce mathématicien a développé une méthode géométrique dans le cadre géométrique par l'interprétation des illustrations graphiques afin de déterminer l'équation algébrique d'une tangente. En 1629, il a déterminé la position relative des courbes par rapport à ses tangentes en un point par l'usage de sa méthode des tangentes.

« La méthode de Fermat pour les tangentes

La tangente à  $C$  passant par  $E$  est déterminée par la position du point de contact  $B$  ;  $B$  est déterminé par la valeur de  $EA$  (7).

On pose:  $EA = a, EI = a + e, AB = g(a)$  est l'équation de  $C$  donc  $IC' = g(a + e)$

Adégaler  $IC$  et  $IC'$  ( $IC - IC'$ ) se ramènent à adégaler :  $f(a + e) \sim f(a)$  ou  $f(a + e) - f(a) \sim 0$ ,

on divise par  $e$  :  $\frac{f(a+e)-f(a)}{e} \sim 0$ .

En prenant alors  $e = 0$ , on obtient une équation dont  $a$  est solution (8).

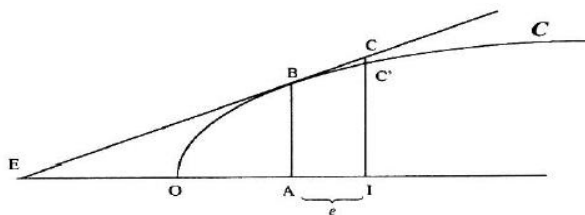


Schéma 2-5 » (Grégoire, 1998, p.358)

Cette méthode amène ce mathématicien à découvrir les premiers termes de « développements en séries de Taylor » lors de la résolution des « problèmes des tangentes ».

« Pour déterminer la tangente en  $x_0$  à la courbe représentative d'une fonction  $f$ , on commencera par donner un accroissement  $\Delta x$  à la variable  $x$ , qu'on laissera dans la suite tendre vers zéro. Ce n'est pas en termes de fonction et de limite que pensait Fermat, mais plutôt en termes d'équations et d'infinitement petits. Il est le premier à considérer des infinitement petits numériques et non plus géométriques et, au lieu de les faire tendre vers zéro, il les pose d'emblée égaux à zéro. » (Dahan et Peiffer, 1986, p.187)

De ce fait, Fermat a étudié la valeur de la sous-tangente EA pour déterminer la tangente EB à la courbe (C) sans dire que « *e* tende vers zéro ».

En plus, le mot « adégaler » amène à la question d'approximation, d'une approche qui est mobilisée par des écritures algébriques. Fermat passe de l'étude de l'équivalence de deux objets géométriques ((IC~IC') à celle de deux objets algébriques ( $f(a + e) \sim f(a)$ ). Et plus précisément, il passe des infiniment géométriques aux infiniment petits numériques afin d'introduire la notion d'équivalence.

La notion de voisinage est proposée par le terme d'un accroissement à la variable  $a$  :  $f(a + e) - f(a) \sim 0$ . Dans ce cas, Fermat propose l'idée d'approximation en termes d'équations et d'infiniment petits numériques. En revanche, ce mathématicien est confronté à un problème lié à l'utilisation de la notion de voisinage dans l'expression analytique :  $\frac{f(a+e)-f(a)}{e} \sim 0$ . En effet, il considère l'égalité «  $e = 0$  » au lieu de dire que «  $e$  tend vers 0 ».

Nous pouvons dire qu'il y a l'usage de la notion de voisinage d'une manière implicite : une quantité infiniment petite devient égale à 0. Sa méthode inadéquate est liée à l'utilisation des infiniment petits en terme de voisinage. On prend conscience d'une vraie difficulté qui est un *obstacle d'ordre épistémologique*. En effet, la formulation historique de la construction graphique d'un objet mathématique permet d'articuler entre des éléments qui relèvent de la topologie et de l'Analyse fonctionnelle. La compréhension fine des éléments d'ordres topologique et fonctionnel pourrait aider à dépasser cet obstacle. Il y a un véritable obstacle *d'ordre épistémologique* dont les effets pourraient apparaître lorsque les étudiants devront articuler leurs connaissances d'ordre topologique et leurs connaissances liées à l'étude d'une fonction en approximation.

### III.1.7 La notion de tangente à une courbe algébrique

Descartes (1638) a développé une méthode qui diffère de celle de Fermat puisqu'elle n'est applicable que pour les cas des courbes algébriques.

*« Dès 1637, Descartes était en possession d'une méthode qui ne s'appliquait qu'aux courbes algébriques. En 1638, il détermine la tangente à la cycloïde en utilisant un procédé reposant sur la notion de centre instantané de rotation et évitant le langage des infiniment petits. » (Dahan & Peiffer, 1986, p.187)*

Cette méthode géométrique faite en Janvier 1638 est présentée par Grégoire en 1998.

*« Cette méthode consiste à chercher la tangente à la courbe C comme la tangente à un cercle F qui a un point d'intersection double avec la courbe (fig. 2). Cette procédure est purement algébrique et il est nécessaire que l'équation de C soit, en termes modernes, polynomiale.*

*Tangente en Mo à une courbe C selon géométrie.*

La tangente est déterminée par la position de la normale  $M_0P$ ,  $P$  étant le centre d'un cercle  $\Gamma$  ayant un point d'intersection double avec  $C$ .

Dans un repère d'origine  $O$ , on pose  $M_0(y_0, x_0)$   $OP = v$ ,  $PM_0 = s$ , l'équation de  $C$  est :

$$P(y, x) = 0, \text{ l'équation de } \Gamma : \sqrt{(y - v)^2 + x^2} = s$$

En éliminant  $x$  entre les deux équations, on obtient  $Q(y, v, s) = 0$ .

On cherche à quelle condition le polynôme  $Q$  admet  $y_0$  pour racine double, donc soit de la forme

$$: Q(y, v, s) = (y - y_0)^2 R(y, v, s).$$

Cette condition donne la valeur de  $v$  qui permet de placer  $P$ . (fig.2)

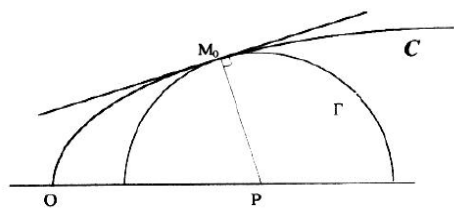


Schéma 2-6 (fig.2) » (Grégoire, 1998, p.358)

Descartes a utilisé, en 1638, cette méthode d'approximation des courbes algébriques afin de déterminer l'équation d'une tangente en s'appuyant sur l'interprétation des illustrations graphiques, et plus précisément à partir de la position de sa normale  $M_0P$  en élaborant les équations du cercle de centre  $P$  et de rayon  $M_0P$  (cf. fig. 2), (Dahan et Peiffer, 1986).

L'historien Montucla (1802) a expliqué cette méthode en écrivant :

« Le principe de la méthode des tangentes de Descartes est celui-ci : concevons une courbe décrite sur un axe, que d'un point de cet axe, comme centre, soit décrit un cercle qui la coupe au moins en deux points, des quels soient tirées deux ordonnées, qui seront par conséquent communes à ce cercle & à la courbe. (...) Ainsi le problème de déterminer la tangente d'une courbe se réduit à trouver la position de la perpendiculaire qu'on lui tirerait d'un point quelconque pris sur l'axe. » (Montucla, 1802, tome II, p.103)

La méthode de Descartes devient inadéquate par la découverte du concept de « développement de fonctions en séries infinies ». En effet,

« L'idée de Descartes de restreindre la notion de fonctions aux seules expressions algébriques était un carcan qui n'a pas résisté longtemps à la découverte des mathématiciens de la génération suivante (Wallis, N. Mercator, James Gregory, I. Newton...) ; le développement des fonctions en séries infinies de puissances. » (Dahan et Peiffer, 1986, p.215)

En réalité, Descartes n'a étudié que le cas de la construction d'une tangente à une courbe algébrique dans un cadre géométrique. Cette méthode ne peut pas être généralisée pour l'étude des courbes mécaniques.



### III.1.8 La notion de tangente à la courbe basée sur des « triangles caractéristiques »

Isaac Barrow a proposé, en 1669, une méthode du calcul infinitésimal dans le cadre géométrique articulant les registres analytique, algébrique, graphique et géométrique. En effet, il s'est appuyé sur la méthode des « triangles caractéristiques » qui fait appel au théorème du Pythagore pour déterminer l'équation de la tangente à une courbe mécanique. La tangente à la parabole d'équation ( $y^2 = px$ ) est un problème résolu par Isaac Barrow à partir de l'utilisation du « triangle caractéristique » NMR (cf. Schéma 2-7).

« Il développe une méthode des tangentes « par le calcul », qui est plus générale que celle de Fermat et qui s'approche davantage encore des procédés modernes.

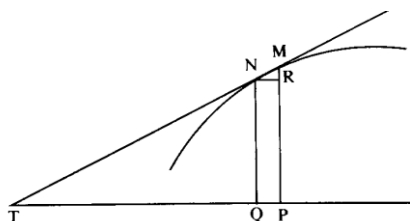


Schéma 2-7 » (Dahan et Peiffer, 1986, p.187)

Depuis l'Antiquité, le concept de tangente est apparu en tant qu'objet géométrique à travers sa construction graphique selon des aspects géométrique et cinématique lors de la résolution des « problèmes de tangentes ». Au début du XVII<sup>e</sup> siècle, les physiciens Roberval et Torricelli ont développé les travaux d'Archimède afin d'élaborer la construction graphique d'une tangente en tant que solution mécanique en termes de mouvements des trajectoires. La construction graphique de la tangente selon un aspect purement géométrique est développée par Fermat, Descartes et Isaac Barrow au début du XVII<sup>e</sup> siècle dans un cadre géométrique. Ce passage d'une approche cinématique (domaine de la physique) à une approche purement géométrique (domaine de géométrie) prouve l'existence d'une rupture épistémologique. Cette rupture est due à un changement du paradigme par l'utilisation des concepts de domaine de la physique à ceux de celui de géométrie analytique pour la construction de l'objet « tangente ». Il y a un véritable obstacle lié à la connaissance visée. Une construction graphique de la tangente nécessite à faire appel à d'autres représentations et finalement à des objets qui sont d'une autre nature. Dans ce cas, ces représentations relèvent d'un autre cadre qui est un cadre géométrique : c'est un *obstacle d'ordre épistémologique*.

Par ailleurs, parallèlement à la construction graphique de la tangente, Fermat et Isaac Barrow ont élaboré une équation algébrique par l'utilisation des différents concepts de domaine du calcul infinitésimal. En effet, Fermat, en 1629, a déterminé l'équation de la tangente en termes d'équation et « infiniment petits numériques ». Ensuite, Barrow a donné cette équation en termes

d'accroissement infinitésimal. Il y a un changement du paradigme de la construction du concept de tangente qui nécessite à faire appel à une autre conception.

L'équation de la tangente est présentée par les mêmes signes (symboles) admettant des différentes représentations. Il existe une rupture épistémologique liée au changement du paradigme pour la conceptualisation de l'équation de la tangente dans le cadre géométrique. Il y a un véritable *obstacle d'ordre épistémologique*.

Nous pouvons résumer l'évolution historique ayant menée à la notion de tangente lors de la résolution des « problèmes de tangentes » dans le tableau ci-dessous en considérant les notations suivante :

Ana : registre analytique - Alg : registre algébrique - Géo : registre géométrique - Gra : registre graphique - Num : registre numérique - ANA : cadre des fonctions - GEO : cadre géométrique - ALG : cadre algébrique - NUM : cadre numérique

Tangente	Mathématiciens	Méthodes	Langages	Cadres	Registres sémiotiques
Construction graphique de la tangente	Euclide	Représentation graphique purement géométrique	«Une tangente est la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle »	GEO	Géo
	Apollonius	Représentation graphique purement géométrique	Tangente à la parabole	GEO	Géo
	Archimède	Utilisation des champs de tangentes pour tracer des courbes «répondant à des équations différentielles»	En termes de vitesses, la tangente à un arc de parabole pour « quarrer » un « segment » de parabole	GEO	Géo-cinématique
	Roberval et Torricelli	Composition des mouvements de trajectoires (des vitesses)	Solution mécanique	GEO	Géo-cinématique
Construction graphique et l'équation de la tangente	Fermat (1629)	Méthode de maxima et minima («Accroissement infinitésimal tantôt nul, tantôt non nul»)	En termes d'équations et des «infiniment petits»: «Infiniment petits numériques »	GEO	Géo/Ana
	Descartes	Utilisation d'équation du cercle (centre instantané de rotation) négligence de notion infinitement petit	Equation polynomiale du cercle : Trouver la position de la perpendiculaire en termes algébriques	GEO	Géo/Alg
	Barrow	Utilisation de son «triangle caractéristique» et le calcul formel	La tangente à la parabole en termes d'accroissement infinitésimal	GEO	Géo/ Alg

**Tableau 2-1 : la genèse historique de la notion de tangente**

Les mathématiciens et les physiciens ont traité le même problème des tangentes en changeant le paradigme par l'usage des différentes représentations de la notion de tangente dans le cadre géométrique selon le paradigme « cinématique », puis « géométrique » et le cadre algébrique.

Les éléments qui relèvent de l'Analyse nous amènent à combiner des connaissances d'ordre topologique et des connaissances liées à l'Analyse fonctionnelle en vue de l'étude d'une fonction. Ce changement du paradigme nécessite l'usage d'autres représentations et finalement à des objets qui sont d'une autre nature : c'est un *obstacle d'ordre épistémologique*.

Nous pouvons conclure que le point de départ de l'étude d'approximation locale d'une fonction est réalisé selon la visualisation de la manière d'approcher une fonction par une droite au voisinage d'un point. En effet, la question de la tangente est avant tout un repère visuel lié autrement dit à percevoir comment s'approcher une fonction au voisinage d'un point.

### ***III.2. La notion d'équivalence***

Dès l'Antiquité jusqu'au début du XVII<sup>e</sup> siècle, il n'y a pas différence entre les notions d'égalité et d'équivalence. La naissance du concept d'équivalence est due aux travaux de Fermat qui

« ... en 1660, il établit l'équivalence des deux infiniment petits : "élément d'arc" et "élément de tangente". Grâce à la généralité de ce principe, Fermat peut placer la tangente à de nombreuses courbes, qu'elles soient algébriques ou transcendentes, comme la cycloïde. » (Dahan et Peiffer, 1986, p.187)

Dans sa méthode des tangentes, vers 1629, il a usage du mot « *Adégaler* » qui est connu sous les notions « *égalité adéquate* » ou « *égalité approximative* » avec une erreur non encore définie (Rouy, 2007). En effet, la notion d'approximation des objets au voisinage d'un point est introduite dans les travaux de Fermat, par son étude de la position relative de deux objets géométriques en un point lors de la résolution des « problèmes des tangentes ».

Nous remarquons qu'il existe un glissement du concept de voisinage par sa considération d'une quantité petite devienne ensuite nulle. Il existe une *rupture épistémologique* liée à la conceptualisation de la notion d'équivalence. Cette analyse conduit à proposer l'hypothèse que lors de la construction du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un point, les étudiants seront confrontés à un véritable *obstacle d'ordre épistémologique*. Afin de surmonter cette difficulté d'ordre historique, cela nécessite de confronter les étudiants à des situations spécifiques que relèvent par exemple de la topologie.

L'émergence du concept d'équivalence des suites numériques est due aux travaux de Bois-Reymond (1870-1871) comme un savoir pour la résolution des problèmes de convergence dans son traité «*Annales des Mathématiques pures et appliquées*». Par ailleurs, les travaux sur les fonctions équivalentes ont été également développés par Landau (1877-1938) pour faciliter la comparaison des fonctions numériques au voisinage d'un point. En plus, la notion ( $o(x^n)$ ) est

due à ce mathématicien. En effet, Bourbaki (1974) confirme que la genèse du concept de la comparaison des fonctions est due à

« ... P. du Bois-Reymond qui, le premier, aborda systématiquement les problèmes de comparaison des fonctions au voisinage d'un point, et, dans des travaux très originaux, reconnut le caractère («non archimédien») des échelles de comparaison, en même temps qu'il étudiait de façon générale l'intégration et la dérivation des relations de comparaison, et en tirait une foule de conséquences intéressantes. Ses démonstrations manquent toutefois de clarté et de rigueur, et c'est à G. H. Hardy que revient la présentation correcte des résultats de du Bois-Reymond : sa contribution principale a consisté à reconnaître et démontrer l'existence d'un ensemble de « fonctions élémentaires », les fonctions (H), où les opérations usuelles de l'Analyse (notamment la dérivation) sont applicables aux relations de comparaison. » (Bourbaki, 1974, p.254)

Nous présentons les principales étapes de l'évolution historique des notions d'équivalence et de la comparaison des fonctions dans le tableau suivant :

Périodes	Mathématiciens	Problèmes	Méthodes	Langages	Cadres	Registres
L'Antiquité			Aucune différence entre les notions d'équivalence et d'égalité			
Au début du XVII <sup>e</sup> siècle	Fermat	"Problèmes des tangentes"	La méthode d'Adégalité de Fermat	Adégaler entre deux grandeurs «élément d'arc» et «élément de tangente» en termes d'infiniment petits	GEO	Géo / Ana
Géométrie analytique			Deux quantités géométriques sont équivalentes	«Composées de parties égales ou seront limites des quantités variables composées de parties respectivement égales»	GEO	Géo / Ana
Au début du XIX <sup>e</sup> siècle	Bois-Reymond et Hardy	La comparaison des fonctions au voisinage d'un point	Comparaison des suites numériques et des fonctions	En termes de variables réelles	ALG	Ana

**Tableau 2-2 : l'évolution historique des notions d'équivalence et de comparaison des fonctions**

Dans le domaine de géométrie analytique, il y a comparaison des objets géométriques « composés de parties égales où seront limites des quantités variables composées de parties

respectivement égales ». La naissance du domaine de l'Analyse ouvre un autre aspect à la conceptualisation de l'objet « équivalence » par l'étude de la comparaison des fonctions au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Nous pouvons dire qu'il existe un *obstacle d'ordre épistémologique* lié à la conceptualisation de la notion de la relation de comparaison des fonctions.

### **III.3. Les notions de « développements en séries infinies », de « développements en séries de Taylor » et de développements asymptotiques**

Le deuxième problème traité, au XVII<sup>e</sup> siècle, est connu sous le nom des « problèmes des quadratures » qui sont dus à la découverte des « développements en séries infinies ». Ces expressions sont connues actuellement par les développements limités usuels par restriction de l'expression du reste (les cas particuliers des développements illimités).

#### III.3.1 La notion de « développement en séries infinies »

Avant de présenter les différents types des techniques développés par les mathématiciens et les physiciens du XVII<sup>e</sup> siècle, nous donnons la définition de « développement en séries infinies » qui est

« ... l'idée de développer la fonction en une série et intégrer terme à terme. » (Hairer et Wanner, 2001, p.130)

Les développements en séries infinies de  $\ln(1+x)$ <sup>1</sup> au voisinage de 0 sont découverts dans le cadre géométrique par Mercator à travers l'usage de la procédure d'interpolation de Wallis et indépendamment par le mathématicien Leibniz à travers l'utilisation de sa méthode infinitésimale. Ce dernier s'est appuyé sur l'interprétation des figures géométriques par l'usage de son « triangle caractéristique » et des règles du calcul formel et algébrique. En effet,

« Mercator (...) en 1668, il trouve l'aire de l'hyperbole en réduisant d'abord en série géométrique

$\frac{1}{1+x}$ , puis en intégrant terme à terme suivant la méthode de Wallis. Ce dernier trouvait d'ailleurs

la même année des résultats analogues qu'il publiait en 1670. La méthode a un succès foudroyant et, en quelques années, James Gregory, Newton, Leibniz s'y distinguent. » (Taton, 1961, p.239)

Il parvient ainsi à la formule qui est connue par son nom :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

« C'est ainsi qu'en 1668, Mercator, pour étudier les logarithmes népériens, utilisa la formule

suivante  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

---

<sup>1</sup> $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

*Où le second membre est, pour toute la valeur de  $x$  inférieure à 1, une série convergente. Ce mode de définition des fonctions fut précisé et généralisé par Newton. » (Boutroux, 1920, p.120)*

Grâce à cette publication de la formule de Mercator, en 1668, il s'ouvre un autre aspect dans le domaine des mathématiques à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle. Bourbaki (1974) la supposait comme une

*« ... découverte sensationnelle de série  $\frac{(-1)^n}{n} x^n \log(1+x) = -\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$  par Mercator vient d'ouvrir des perspectives toutes nouvelles sur l'application des séries et principalement des séries de puissance, aux problèmes dits «impossibles» (...) Tous trois Newton à partir de 1665 déjà, J. Gregory à partir de la publication de Mercator en 1668, Leibniz à partir de 1673 environ, se consacrent principalement au sujet d'actualité, l'étude des séries de puissances. » (Bourbaki, 1974, p.230)*

La méthode géométrique de Mercator a eu un succès que beaucoup des mathématiciens avaient développé en tant que nouvelle technique pour résoudre certains problèmes à cette époque dans le domaine du calcul infinitésimal.

Par ailleurs, Newton a découvert sa formule connue sous son nom « la formule du binôme de Newton » lors de la résolution des problèmes des quadratures. Cette nouvelle technique a servi à Newton comme intuition de la possibilité du calcul sur les « développements en séries infinies ». Houzel (1976) note que :

*« Newton est arrivé par induction à cette formule dès 1665, en cherchant à résoudre un problème de quadrature ; il ne l'a jamais démontrée (ni publiée). C'est à partir de ces recherches qu'il s'est convaincu qu'on pouvait calculer sur les séries comme on le fait sur les polynômes : la branche des mathématiques que nous voyons Euler développer a donc été inventée par Newton à partir de la formule du binôme. » p. 139. Euler n'en donne une démonstration qu'en 1774 (un siècle plus tard !), pour sortir du cercle vicieux dans lequel il s'était placé, après qu'il se soit aperçu que la dérivée de  $z^n$ , utilisée à partir de la formule de Taylor pour démontrer la formule du binôme, découlait du développement du binôme. » (Houzel, 1976, p. 140)*

Newton a fait le lien entre les méthodes cinématiques et celles infinitésimales afin de développer sa méthode « des fluxions » explicitée par Taton en écrivant :

*« Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées non par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu de points, les surfaces par le mouvement des lignes, les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation des côtés, les temps par un flux continu. Considérant donc que les grandeurs qui croissent dans des temps égaux sont plus grandes ou plus petites selon qu'elles croissent avec une vitesse plus*

*grande ou plus petite, je chercherais une méthode pour déterminer les grandeurs d'après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent. En nommant fluxions les vitesses de ces mouvements ou accroissements, tandis que les grandeurs engendrées s'appelleraient fluentes, je suis tombé, vers les années 1665-1666, sur la méthode des fluxions dont je ferai usage dans la quadrature des courbes. » » (Taton, 1961, p.242-243)*

Taton (1961) a interprété la méthode des fluxions de Newton en écrivant :

*« Si  $x$  est la grandeur étudiée, la fluente, sa fluxion se représentera par  $\dot{x}$ . Si la variable indépendante, le temps dans l'image physique adoptée par Newton, a un moment, ou accroissement infiniment petit  $0$ , le moment de  $x$  sera  $\dot{x}0$ . Ainsi, la fluxion newtonienne n'est ni plus ni moins que notre dérivée actuelle. La fluxion de la fluxion se représentera par  $\ddot{x}$ , etc. » (Taton, 1961, p.242-243)*

Newton a découvert des « développements en séries infinies » par l'utilisation de sa formule de binôme. En effet,

*« ... Newton qui trouve les séries, non seulement par division, mais par binôme qui porte fort justement son nom, pour les puissances rationnelles relatives de  $(1+x)$ . Il révèle en 1676, longtemps après la découverte, avoir trouvé les développements de  $\text{Arc sin } x$ ,  $\text{Arc sin verse } x$ ,  $\text{sin } x$ ,  $\text{cos } x$ , etc. et des séries analogues pour les arcs d'ellipse, et même pour les segments et les arcs de la quadrature de Dinostrate. » (Taton, 1961, p.239)*

Newton a découvert certains « développements en séries infinies » en s'appuyant sur sa méthode des « fluxions » développée dans le cadre géométrique en articulant les registres graphique, géométrique, algébrique et analytique.

*« La palme revient certainement à I. Newton qui trouve des séries des puissances rationnelles de  $(1-x)^{-1}$ , des fonctions  $\text{sin } x$ ,  $\text{cos } x$ , des séries analogues pour les arcs d'ellipse, etc. Les fonctions inverses des lignes trigonométriques sont étudiées aussi par Newton, qui donne leurs développements en séries, de nouvelles fonctions transcendentes apparaissent et sont étudiées. » (Dahan et Peiffer, 1986, p.216)*

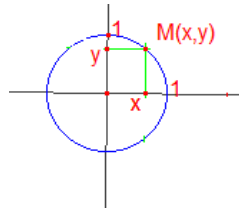
Ce physicien a utilisé certaines procédures pour élaborer les « développements en séries infinies » qui ne sont pas encore connues en ce temps.

*« Newton emploiera ses méthodes, tant sous leur aspect analytique que sous leur aspect géométrique, à la solution de problème physico-mathématiques et astronomiques. » (Taton, 1961, p.251)*

Newton a utilisé ses « développements en séries infinies de variables » en tant que nouvelle méthode pour résoudre des équations fluxionnelles plus compliquées.

« Toute fois, plus encore que par la manière dont elle est pratiquée par Newton, la méthode de développement en série va s'avérer féconde et d'une grande efficacité. Newton en fait une technique d'intégration. En effet, il développait les fonctions en séries infinies puis les intégrer terme à terme, étendant ainsi l'intégration terme à terme aux sommes infinies. » (Hairer & Wanner, 2001, p.18)

Nous présentons l'une de ces découvertes de Newton. Il a utilisé sa méthode cinématique s'appuyant sur des illustrations graphiques et ses « séries infinies de variables » afin de déterminer les développements en séries infinies d'Arc sinus.



**Schème 2-8**

«(...) Le calcul de l'arc du cercle  $y = \sqrt{1-x^2}$  (...)»

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } x &= \int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2} dt = \int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^x \left[ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \dots \right] dt \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

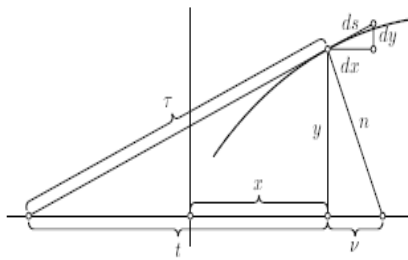
A précisément été l'approche originale de Newton pour obtenir la formule. » (Hairer & Wanner, 2001, p.127)

Dans cette période, les « séries infinies de variables» deviennent une technique très puissante pour résoudre certains problèmes proposés par les mathématiciens et les physiciens de cette époque.

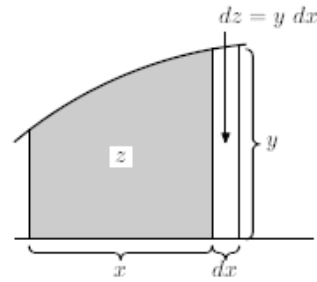
Par ailleurs, Leibniz indépendamment de Newton a découvert les « développements en séries infinies » par l'usage de sa méthode infinitésimale lors de la résolution des « problèmes des quadratures » qui revient à « construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donné ». En effet,

« Le problème des tangentes l'amenait à observer le «triangle caractéristique» dont les trois côtés étaient des différences : différence  $dx$  de l'abscisse, différence  $dy$  de l'ordonnée, différence  $ds$  de l'arc. Le problème inverse consistait donc à remonter des différences aux fonctions elles-mêmes. Mais l'opération inverse de la recherche des différences, c'est celle des sommes. » (Taton, 1961, p.249-250)





**Schéma 2-9**



**Schéma 2-10**

Leibniz s'est appuyé sur des représentations graphiques afin de développer son calcul formel en termes des infiniment petits et des différences d'une quantité.

« Signalons seulement la définition des différences d'ordres Supérieurs :

« La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appelée la différence de cette quantité, ou bien sa différence seconde. » Elle est notée  $ddx$ , la différence troisième sera  $dddx$  ou  $d^3x$ , etc. » (Taton, 1995, p.249)

Boutroux (1920) a expliqué la méthode du « triangle caractéristique » de Leibniz qui

« ... est un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la corde infiniment petite joignant deux points  $M, M'$  très voisins sur une même courbe et dont les cathètes (côtés de l'angle droit) sont parallèles à deux axes de coordonnées rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical. La tangente de l'angle que fait l'hypoténuse  $MM'$  avec la cathète horizontale est égale au rapport de la différence des abscisses des points  $M$  et  $M'$ . Lorsque d'autre part,  $M, M'$  tendent à se confondre sur la courbe, cette tangente d'angle tend vers le coefficient angulaire de la tangente géométrique menée au point  $M$  à la courbe. » (Boutroux, 1920, p.115-116)

En appliquant le théorème de Pythagore à son triangle caractéristique, Leibniz a donné la relation :  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ .

Par la suite, en s'appuyant sur une interprétation géométrique de son triangle caractéristique, Leibniz (1693) a trouvé le développement en séries du sinus que Newton n'a pas encore publié. En effet,

« ...La courbe est le cercle de rayon 1. Alors la normale 1, de sorte que  $yds = dx$ .

La relation  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  entraîne alors  $(ds)^2 = (dx)^2 + y^2(dy)^2$ .

Par différentiation, il vient alors:

$$d((ds)^2) = d[(dx)^2 + (dy)^2] \text{ Avec } d((ds)^2) = 2ds \cdot d(ds) \text{ et}$$

$$d((dx)^2 + y^2(dy)^2) = d((dy)^2) + d(y^2)(ds)^2 + y^2d((ds)^2)$$

$$= 2dyd(dy) + 2ydy(ds)^2 + 2y^2dsd(ds).$$

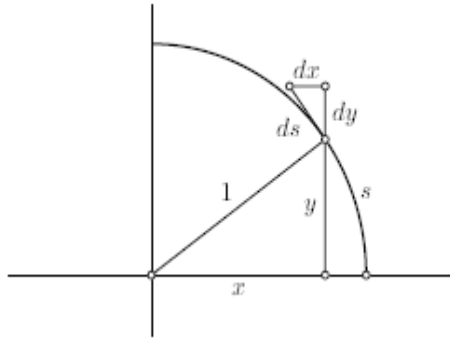


Schéma 2-11

Leibniz suppose alors que la suite de points infiniment proches sur la courbe est choisie de sorte que la suite  $(s_2 - s_1; s_3 - s_2; s_4 - s_3; \dots)$  des valeurs prises par  $ds$  soit constante. Grâce à ce choix, on a la relation supplémentaire  $d(ds) = 0$ , et l'équation précédente devient :

$$2dy \cdot d(dy) + 2y dy (ds)^2 = 0.$$

On peut alors simplifier et obtenir la relation  $d(dy) + y(ds)^2 = 0$ . Leibniz poursuit en recherchant la solution sous forme d'une série... où  $b, c, e, f$ , etc. sont des constantes.

En différenciant deux fois et en utilisant à nouveau la relation  $d(ds) = 0$ , Leibniz obtient :

$$d(dy) = 6bs(ds)^2 + 20cs^3(ds)^2 + 42es^5(ds)^2 + 72fs^7(ds)^2 + \dots$$

$$y(ds)^2 = s(ds)^2 + bs^3(ds)^2 + cs^5(ds)^2 + es^7(ds)^2 + \dots$$

En substituant dans la relation  $d(dy) + y(ds)^2 = 0$ ,

$$\text{Leibniz obtient successivement } b = -\frac{1}{6}, c = \frac{1}{120}, e = -\frac{1}{5040}, \text{ etc.}$$

$$\text{Leibniz donc ici le développement en série du sinus : } \sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \frac{s^9}{9!} - \dots \gg$$

(Baumann, 2004, p.137-138)

Leibnitz s'est appuyé sur l'interprétation des illustrations graphiques par l'usage d'une méthode géométrique « la similitude de son triangle caractéristique » afin de développer son calcul formel pour donner les « développements en séries infinies » dans le cadre géométrique.

### III.3.2 La notion de « développement en séries de Taylor »

Le concept de « développement en séries de Taylor » apparaît la première fois dans les travaux de Leibniz par l'étude d'un cas particulier reposant sur l'utilisation de la méthode des « différences finies » selon un aspect purement analytique. Ce concept est connu actuellement par la formule de Taylor-Young par la restriction de l'expression du reste. En effet, Leibniz a

explicité sa démarche du raisonnement dans une lettre adressée à Jean Bernoulli citée par Taton qui a écrit :

« Le 10 décembre 1694 Leibniz lui répond qu'à Paris il avait médité sur les travaux de Dettonville.

Soit la série décroissante :  $a, b, c, d, \text{ etc.}$

Ses différences premières :  $e, f, g, h, \text{ etc.}$

Secondes :  $l, m, n, o, \text{ etc.}$

Troisièmes :  $p, q, r, s, \text{ etc.}$

Quatrièmes :  $t, u, v, x, \text{ etc.}$

Cinquièmes :  $\beta, \gamma, \delta, \theta, \text{ etc.}$

$$a = e + f + g + h, \text{ etc.} = 1.l + 2m + 3n + 4o, \text{ etc.}$$

$$\dots = 1p + 3q + 6r + 10s, \text{ etc.} = 1t + 4u + 10v + 20x, \text{ etc.}$$

D'autre part,  $e = e; f = 1e - 1l; g = 1e - 2l + 1p; h = 1e - 3l + 3p - 1t, \text{ ainsi de suite.}$

Portant ces valeurs dans  $a = e + f + g + h, \text{ etc.}, \text{ il vient}$

$$a = 1e,$$

$$= 1e - 1l$$

$$= 1e - 2l + 1p$$

$$= 1e - 3l + 3p - 1t$$

$$= 1e - 4l + 6p - 4t + 1\beta, \text{ etc.}$$

Mais dans le calcul différentiel, posons pour  $a, y$  et pour  $e, l, p, t, \beta$  posons  $dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y, \text{ etc.}$

Pour l'unité, posons  $dx$  si bien que  $1+1+1+1+\dots = x; 1+2+3+4\dots = \int x;$

$$1+3+6+10\dots = \iint x, \text{ etc.}$$

Nous aurons :  $y = dy.x - ddy \int x + d^3y \iint x - d^4y \iiint x, \text{ etc.}$

$$\text{Mais } \int x = \frac{1}{1.2} xx; \int^2 x = \frac{1}{1.2.3} x^3; \int^3 x = \frac{1}{1.2.3.4} x^4, \text{ etc.,}$$

d'où, en rétablissant l'homogénéité :

$$y = \frac{1}{1} x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2} xx \frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3} x^3 \frac{d^3y}{dx^3} \text{ etc.} \text{.} \text{ » (Taton, 1961, p.247-248)}$$

Cette dernière équation est actuellement connue sous la formule de Taylor-Young pour déterminer le développement limité de  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0 avec restriction de l'expression de reste.

En réalité, la genèse de la formule connue dans nos jours par la formule de Taylor avec reste intégrale est élaborée pour la première fois, en 1694, par John Bernoulli (1667-1748) avant même la naissance de celle de Taylor. Nous présentons la méthode suivie de ce mathématicien ci-dessous.

« Formule de Taylor avec reste : John Bernoulli (1694b, "Effectioes omnium quadraturam...") calcule des intégrales par intégrations par parties successives et obtient des "generalissman" séries, semblables à celles trouvées plus tard par Taylor. Cauchy (1821) découvre que cette méthode, modifiée judicieusement, livre précisément la série de Taylor d'une fonction  $f$ , avec l'erreur exprimée par une intégrale.

L'idée consiste à écrire  $f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt$  et à faire une intégration par partie avec

$u'(t) = 1$  et  $v(t) = f'(t)$ . Toute fois, le résultat souhaité ne s'obtient pas en posant simplement  $u = t$ . Il faut prendre  $u(t) = -(x-t)$  ( $x$  étant constant ici). Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-t)f'(t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt \end{aligned}$$

Pour la deuxième étape, on aura :

$$u(t) = \frac{-(x-t)^2}{2!}, \quad v(t) = f''(t) \text{ et}$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) dt \text{ et ainsi de suite.}$$

On obtient le résultat suivant :

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt. \quad \text{» (Hairer & Wanner, 2001, p.116)}$$

Ce mathématicien a adopté des transformations et formulations de l'expression analytique ( $\int_a^x 1 \cdot f'(t) dt$ ) en utilisant des opérations formelles (intégrations par partie successives) pour préciser sa formule développée dans le cadre de l'analyse par la mobilisation du registre analytique.

La généralisation du développement en série des fonctions numériques est élaborée par Taylor, en 1712, qui est publiée en 1715.

« ... Taylor utilise la formule d'interpolation de Gregory-Newton pour obtenir, en 1712, la formule portant son nom qui donne le développement en série d'une fonction « quelconque ». » (Dieudonné, 1978, p.123)

Dans le traitement du problème du maximum, minimum et point d'inflexion, la formule de Taylor est devenue une bonne technique pour résoudre certains problèmes mathématiques au XVIII<sup>e</sup> siècle. En effet,

« ... savoir un maximum si les différentielles paires, comme  $ddy, d^4y$ , donnent des valeurs négatives, et au contraire un minimum, si ces différentielles donnent des valeurs positives. Mais si au contraire les valeurs de  $ddy, d^4y$ , s'évanouissent, celles de  $d^3y$  ne s'évanouissent pas, ce serait un point d'inflexion.

La démonstration de ces vérités tient à un théorème élégant et utile de M. Taylor que voici :

Si  $dy, ddy, d^3y$ , etc. sont les différentielles successives de l'ordonnée  $y$  répondante à l'abscisse  $x$ , et qu'on suppose  $x$  croître d'une quantité infiniment petite, alors l'ordonnée correspondante à l'abscisse  $x + dx$  seray  $+ dx + ddy + \frac{ddy}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} \&c.$  » (Montucla, 1799, p.121)

Ainsi, Taylor a développé la méthode des différences finies de Gregory-Newton afin de découvrir son développement en séries par l'usage des différences et des quantités infiniment petites.

Nous présentons la genèse historique des notions de développement en séries infinies et ceux de Taylor dans le tableau suivant :

Mathématiciens	Problèmes	Notions	Langages	Cadres	Registres
Au début du XVII <sup>e</sup> siècle	"Problèmes de tangentes"	Les deux premiers termes de la formule de Taylor	En termes d'infiniment petits	GEO	Gra/ Géo/ Ana
Au XVII <sup>e</sup> siècle	"Problème des quadratures"	La formule du binôme de Newton et les développements en séries infinies (cas particulier des polynômes)	En termes d'infinitésimaux et de mouvement des trajectoires (vitesses)	GEO	Gra/ Géo/ Ana/ Alg
Au XVIII <sup>e</sup> siècle	Problème de la mécanique céleste	Développement en séries de Taylor	En termes des "différences finies"	GEO	Gra/ Géo/ Ana
Dès le début du XIX <sup>e</sup> siècle	Etude de la convergence des séries	Développements en séries infinies et de Taylor en identifiant l'expression de reste Développement asymptotique	En termes du calcul de limite d'une fonction au voisinage d'un point	ANA	Ana

**Tableau 2-3 : l'évolution historique des notions de développements en séries infinies et développements en séries de Taylor**

Mercator, Newton, Leibniz et Taylor ont déterminé les développements en séries infinies et ceux de Taylor sous forme du développement usuel illimité. Dans cette époque, le concept de fonction n'est pas encore découvert en tant qu'objet mathématique selon un aspect analytique (variables réelles).

### ***III.4. Les notions de fonction, de limite d'une fonction, de développements d'une fonction et de développements asymptotiques***

Avant d'étudier la genèse historique de la notion de limite d'une fonction, nous devons mettre la focale sur les paradigmes utilisés lors de la formulation historique du concept de fonction.

#### III.4.1 La notion de fonction

La genèse historique du concept de fonction est due à l'étude des problèmes de géométrie analytique. Le concept de fonction prend son étendue la première fois par Euler, mais le sens de cette notion est introduit par Leibniz (1692) et est précisé par Jean Bernoulli (1718).

En effet, Taton (1995) a étudié l'évolution historique de cet objet mathématique.

*« L'origine de l'idée fonction remonte à la création de géométrie analytique par Fermat et Descartes. En effet, la considération de l'ordonnée d'une courbe correspondant à une abscisse donnée n'est que la transposition géométrique de cette notion. Celle-ci n'apparut sous son aspect purement analytique qu'après la création du calcul infinitésimal, prenant peu à peu un sens plus net chez Leibniz, Newton et leurs disciples. Succédant à diverses autres dénominations, le terme de fonction apparut chez Leibniz et se précise chez Jean Bernoulli qui, en 1718, définit les fonctions d'une variable comme « les quantités composées de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ». La notation moderne, si simple,  $f(x)$ , fut créée par Euler et Clairaut. » (Taton, III, 1995, p.458)*

Leibniz, en 1692, a donné à la notion « functio » une définition formelle en tant qu'objet géométrique associé à une courbe.

*« Leibniz est à l'origine de la définition de la notion fonction, disant, en 1692, qu'une tangente à une courbe est fonction du point de la courbe. » (Escofier, 2016, p.82)*

Dieudonné (1974) a interprété cette définition de Leibniz en langage moderne.

*« La définition que donne Leibniz des « quantités transcendantes » (...) semble plutôt s'appliquer aux fonctions qu'aux nombres (en langage moderne, ce qu'il fait revient à définir les éléments transcendents sur le corps obtenu en adjoignant au corps des nombres rationnels les données du problème. » (Dieudonné, 1974, p.98)*

Jean Bernoulli reprend, en 1698, le même terme avec la définition suivante :

*« On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. » (Escofier, 2016, p.83)*

Le renversement est évoqué dans le domaine des mathématiques par la découverte des concepts de fonction et de limite d'une fonction selon l'aspect purement analytique. Euler a donné une autre définition de la notion de fonction.

*« Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. Ce sont des exemples qui précisent ce que signifie expression analytique composée. » (Ibid., p.88)*

Euler (1732) a introduit le symbole «  $Y=f(x)$  » en donnant la définition d'une fonction sans la mobilisation des illustrations graphiques. Ce mathématicien classe les fonctions selon plusieurs catégories :

*« ... polynômes, fractions rationnelles, algébriques, transcendantes. (...) La construction de l'exponentielle est plus qu'approximative. Euler se limite à définir  $a^x$  pour  $a>1$  en affirmant qu'il varie de 0 à  $+\infty$  en prenant toutes les valeurs intermédiaires sans parler de continuité ni de dérivabilité. » (Escofier, 2016, p.87-88)*

La distinction entre fonctions algébriques et transcendantes chez certains mathématiciens est présentée par Dieudonné (1974).

*« C'est sans doute aussi à l'influence de Descartes qu'il faut faire remonter la distinction entre fonctions algébriques et fonctions transcendantes, parallèle à celle qu'il introduit dans sa Géométrie entre les courbes « géométriques » et les courbes « mécaniques » (...). En tout cas, cette distinction est parfaitement nette chez J. Gregory qui, en 1667, cherche même à démontrer que l'aire d'un secteur circulaire ne peut être fonction algébrique de la corde et du rayon (...). L'expression « transcendant » est de Leibniz, que ces questions de classification ne cessent d'intéresser tout au long de sa carrière, et qui, vers 1682, découvre une démonstration simple du résultat poursuivi par Gregory, en prouvant que  $\sin x$  ne peut être fonction algébrique de  $x$  (...). » (Dieudonné, 1974, p.97-98)*

La formulation du concept de fonction actuellement connue, dans le domaine de l'Analyse, est due aux travaux de Lagrange qui ouvre un autre aspect au domaine de géométrie analytique à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. Ce mathématicien a pris la notion de fonction introduite par Leibniz et les Bernoulli afin d'élaborer sa définition en 1797 :

*« Le mot fonction a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. » (Lagrange, 1797, p.1)*

Lagrange (1797) a précisé sa définition du concept de la fonction, dans son traité, par :

*« On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les*

*quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées. »*  
(Lagrange, 1797, p.1)

Par ailleurs, Cauchy a donné, en 1823, une autre définition de la fonction différentielle de celles d'Euler et de Lagrange. En effet,

*« Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend le nom de variable indépendante ; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. »* (Cauchy, 1823, p.5)

Cauchy (1823) a défini la fonction en précisant les variables à étudier qui sont des quantités variables indépendantes dans le cadre fonctionnel selon un aspect purement analytique.

#### III.4.2 La notion de limite

La théorie de limite est considérée par les anciens géomètres selon trois manières. En effet, ils ont considéré les grandeurs comme limite des séries chez Euclide et Archimède, limite des sommes des quantités infiniment petites et limite de rapport d'infiniment petits. Ce dernier amène au problème des tangentes, (Duhamel, 1856). Le problème général des tangentes revient au problème de l'Analyse.

*« Etant donnée une équation entre deux variables, trouver la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de ces variables. »* (Duhamel, 1856, préface)

La définition de la notion de limite d'Alembert (1754) est présentée selon un langage purement géométrique dans son article « Différentiel » de "L'Encyclopédie, vol.IV (1713-1784)", comme la « vraie métaphysique du calcul différentiel » :

*« ...il y définit le rapport différentiel  $\frac{dy}{dx}$  comme la limite du rapport des Accroissements finis de  $y$  et de  $x$  lorsque ces accroissements tendent vers 0, et il insiste sur le fait que l'on ne doit pas séparer les «différentielles»  $dy$  et  $dx$ . ».* (Rond D'Alembert, 1754)

En d'autres termes,

*« ... une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche: en quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable(...). A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. »* (Ibid.)



Rond d'Alembert a introduit, en 1785, la définition de la notion de limite selon un aspect purement géométrique par l'usage des grandeurs dans le cadre géométrique.

« LIMITE, (...) On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. » (Diderot et D'Alembert, Encyclopédie tome 2, 1785, p.309)

Cauchy (1823) a donné une définition purement analytique du concept de limite.

« Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. » (Cauchy, 1823, p.1)

Ce mathématicien a précisé la notion d'infiniment petit utilisée lors de l'étude d'une fonction.

« Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite. » (Ibid., p.4)

Cauchy a défini une fonction continue par

« Soient maintenant  $h$  et  $i$  deux quantités distinctes, la première finie, la seconde infiniment petite (...). Lorsque, la fonction  $f(x)$  admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de  $x$  comprises entre deux limites données, la différence  $f(x+i) - f(x)$  est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que  $f(x)$  est une fonction continue de la variable  $x$  entre les limites dont il s'agit. » (Cauchy, 1823, p.7)

Selon ce mathématicien, la continuité et la dérivée à partir de la notion de limite sont définies par :  $y = f(x)$ ,  $dy = f'(x)dx$ ,  $d^2y = f''(x)dx^2, \dots, d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ , où  $f^{(n)}(x)$  est le coefficient différentiel.

Par ailleurs, il a expliqué la continuité d'une fonction en écrivant :

« On dit encore que la fonction  $f(x)$  est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable  $x$ , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites, même très-rapprochées, qui renferment la valeur en question. » (Cauchy, 1823, p.8)

D'un autre côté, il a défini la dérivée d'une fonction par :

« Il en sera de même en général ; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport  $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$  dépendra de la forme de la fonction proposée  $y = f(x)$ . Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de fonction dérivée, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation  $y'$  ou  $f'(x)$ . » (Ibid., p.9)

La naissance des notions de limite et de fonction amène certains mathématiciens, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, à étudier la théorie des séries d'une manière respectant l'étude de la convergence d'une série selon un aspect purement analytique.

### III.4.3 Les notions de développement d'une fonction et de développement asymptotique

Le fondement de la méthode des séries découle de la théorie des formules de Taylor. En 1772, Lagrange s'est appuyé sur les notions d'infiniment petits ou de limite dans son étude de cette théorie. Il a commencé ses recherches par les examinations de la forme de la série qui doit représenter le développement d'une fonction ( $fx$ ) en utilisant les notations « fonction primitive » et « fonction dérivée », publié en 1797.

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots \text{ Avec } i \text{ une quantité quelconque indéterminée}$$

*« ... dans laquelle les quantités  $p, q, r$ , etc., coefficients des puissances de  $i$  seront de nouvelles fonctions de  $x$ , dérivées de la fonction primitive  $x$ , et indépendantes de l'indéterminée  $i$ . »*

*(Lagrange, 1797, p.2)*

Par ailleurs, Lagrange a élaboré une méthode pour trouver les termes successifs de la série qui représente une fonction de  $(x+i)$ . Cette technique est développée suivant les puissances de  $i$  et elle n'est applicable que dans le cas du développement d'une fonction de  $x$  et de  $i$ . En effet, il a remplacé  $i$  par  $(i+0)$  et  $(x)$  par  $(x+0)$ . Lagrange (1813) a expliqué intégralement sa démarche suivie dans son traité « Théorie des fonctions analytiques » :

*« La première substitution donnera :  $fx + p(i+0) + q(i+0)^2 + r(i+0)^3 + \dots$ ; savoir, en développant les puissances de  $i+0$ , et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,*

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots + p0 + 2qi0 + 3ri0^2 + 4si0^2 + \dots$$

*Pour faire l'autre substitution, soient*

$$fx + f'x0 + \dots, p + p'0 + \dots, q + q'0 + \dots, r + r'0 + \dots,$$

*ce que deviennent les fonctions  $fx, p, q, r$ , etc., en y mettant  $x+0$  pour  $x$ , et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de  $0$ , il est clair que la même formule deviendra :  $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots + f'x0 + p'i0 + q'i^20 + r'i^30 + \dots$*

*Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de  $i$  et de  $0$ , on aura, en comparant les termes affectés de  $0$  de  $i.0$ , de  $i^2.0$ , etc.;*

$$p = f'x, 2q = p', 3r = q', 4s = r',$$

Maintenant, de même que  $f'x$  est la première fonction dérivée de  $fx$ , il est clair que  $p'$  est la première fonction dérivée de  $p$ , que  $q'$  est la première fonction dérivée de  $q$ ,  $r'$  la première fonction dérivée de  $r$ , et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par  $f'x$  la première fonction dérivée de  $f$ , par  $f''x$  la première fonction dérivée de  $f'x$ , par  $f'''x$  la première fonction dérivée de  $f''x$ , et ainsi de suite, on aura :  $p = f'x$  et de là  $p' = f''x$  ;

$$\text{Donc } q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2} \quad \text{et de là } q' = \frac{f'''x}{2};$$

$$\text{Donc } r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3} \quad \text{et de là } r' = \frac{f^{iv}x}{2.3};$$

$$\text{Donc } s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{iv}x}{2.3.4} \quad \text{et de là } s' = \frac{f^{v}x}{2.3.4}; \text{ Et ainsi de suite.}$$

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction  $f(x+i)$ , on aura :

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2.3}i^3 + \frac{f^{iv}x}{2.3.4}i^4 + \text{etc.} \quad \text{» (Lagrange, 1813, p.17-18)}$$

En d'autres termes, il a élaboré une relation entre sa définition et le calcul différentiel.

« Nous appellerons la fonction  $fx$ , fonction primitive, par rapport aux fonctions  $f'x, f''x, \dots$ , etc., qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci fonctions dérivées par rapport à celle-là (...). De la même manière, si  $y$  est supposé une fonction de  $x$ , nous dénoterons ses fonctions dérivées par  $y', y'', y''', \dots$ , etc., de sorte que  $y$  étant une fonction primitive,  $y'$  sera la fonction seconde,  $y''$  la fonction tierce, et ainsi de suite.

$$\text{De sorte que } x \text{ devenant } x+i, y \text{ deviendra } y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$

(...) on doit voir que les fonctions dérivées  $y', y'', y''', \dots$ , etc. relatives à  $x$ , coïncident avec les

$$\text{expressions } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, \frac{d^3y}{d^3x}, \text{ etc.} \quad \text{» (Lagrange, 1813, p.19)}$$

Par ailleurs, ce mathématicien a étudié le développement en séries de Taylor en termes des dérivées successives d'une fonction à une variable dans le domaine du calcul différentiel selon un aspect purement analytique.

Cauchy (1923) fait appel à ses notions de fonction et de limite d'une fonction afin d'étudier les développements en séries de Taylor dans le domaine de l'Analyse.

« Comme Euler, Cauchy commence par parler des fonctions. Les problèmes des limites et de continuité sont abordés avec des infiniment petits, mais ce ne sont plus des êtres imaginaires, ce

sont des fonctions qui tendent vers 0, presque ce que nous manions aujourd'hui avec les  $\varepsilon$ . »  
(Escofier, 2016, p.115)

Il a aussi étudié la convergence des formules de Taylor et de Maclaurin en déterminant la limite d'une série et plus précisément le reste de la série dans son traité "Résumé des leçons sur le calcul infini". Il souligne que :

« On appelle série une suite indéfinie de termes  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \&c...$  qui dérivent les uns des autres suivant une loi connue.

Soit  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$  la somme des  $n$  premiers termes,  $n$  désignant un nombre entier quelconque.

Si, pour des valeurs de  $n$  toujours croissantes, la somme  $S_n$  s'approche indéfiniment d'une certaine limite  $s$ , la série sera dite convergente, et la limite  $s$  représentée par la notion  $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c$ . s'appellera la somme de la série.

Si au contraire, tandis que  $n$  croît indéfiniment, la somme  $S_n$  ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de somme.

Dans l'un et l'autre cas, le « terme général ».

De plus, si dans la première hypothèse, on fait  $s = S_n + r_n$ ,  $r_n$  sera ce qu'on nomme le reste de la série, à partir du  $n^{\text{ième}}$  terme.

Ces définitions étant admises, il résulte évidemment des formules (2) et (3) de la 36<sup>e</sup>. Leçon que les séries :

$$(2) F(0), \frac{x}{1} F'(0), \frac{x^2}{1.2} F''(0), \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0), \&c...,$$

$$(3) f(x), \frac{h}{1} f'(x), \frac{h^2}{1.2} f''(x), \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x), \&c...,$$

Seront convergentes, et auront pour sommes respectives les deux fonctions  $F(x), f(x+h)$ , toutes les fois que les deux intégrales

$$(4) \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} F^{(n)}(z) dz = \frac{x^n}{1.2.3.4...n} F^{(n)}(\theta x)$$

$$(5) \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f^{(n)}(x+z) dz = \frac{h^n}{1.2.3...n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

Convergeront, pour des valeurs croissantes de  $u$ , vers la limite zéro.

On trouvera, en conséquence,

$$(6) F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \&c.,$$

Si l'expression (4) s'évanouit par des valeurs infinies de  $n$ , et

$$(7) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \&c.,$$

Si l'expression (5) satisfait à la même condition. Les formules (6) et (7) renferment les théorèmes de Maclaurin et de Taylor. Elles servent, quand les intégrales (4) et (5) remplissent les conditions prescrites, à développer les deux fonctions  $F(x)$  et  $f(x+h)$  en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières des quantités  $x$  et  $h$ .

Les restes de ces séries sont précisément les deux intégrales dont nous venons de parler. » (Cauchy, 1823, p.145-146)

Les historiens Dahan et Peiffer (1986) ont interprété cette méthode analytique de Cauchy en écrivant :

« Parmi les applications de l'intégrale définie, Cauchy démontre la formule de Taylor. Il

considère la série  $f(x), \frac{h}{1!} f'(x), \dots, \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$

Et affirme qu'elle sera convergente et aura pour somme la fonction

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x), \text{ toutes les fois que l'intégrale}$$

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+z) dz = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \text{ Convergera pour des valeurs croissantes de } n,$$

vers la limite zéro. » » (Dahan et Peiffer, 1986, p.204)

Par ailleurs, Abel a étudié la série du binôme de Newton en s'appuyant sur l'utilisation de la nouvelle technique « la série de Taylor » qui est une méthode très puissante dans cette époque.

« La série du binôme : « ...mais celui qui me fait le plus de plaisir c'est un mémoire...sur la simple

$$\text{série } 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots$$

J'ose dire que c'est la première démonstration rigoureuse de la formule binôme...» (Abel, lettre à Holmbo en 1826, Œuvres, vol.2, p.261).

La première démonstration rigoureuse de l'identité du binôme.

$$(7.16) (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots \text{ pour } |x| < 1 \text{ et arbitraire et due à}$$

Abel en 1826.

Une démonstration basée sur la série de Taylor figure dans un cours de Weierstrass (voir Weierstrass 1861).

$$\text{Posons } f(x) = (1+x)^a$$

et calculons ses dérivées  $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ ,  $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$ , ...

Nous observons que la série (7.16) n'est autre que la série de Taylor de  $f(x) = (1+x)^a$ .

Son rayon de convergence a été calculé dans l'exemple (7.6) ; c'est  $p=1$ .

Pour démontrer l'identité (7.16) pour  $|x| < 1$ , il faut vérifier que le reste (voir le théorème 7.13) ;

$$(7.17) R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} a(a-1)\dots(a-k)(1+t)^{a-k-1} dt, \text{ tend vers zéro lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Utilisons le théorème (5.17) et posons  $\xi = \theta_k x$  avec  $0 < \theta_k < 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Cela donne } R_k(x) &= \frac{(x - \theta_k x)^k}{k!} a(a-1)\dots(a-k)(1 + \theta_k x)^{a-k-1} \cdot x \\ &= \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-k)}{k!} x^k \left(\frac{1 - \theta_k}{1 + \theta_k}\right)^k \cdot (1 + \theta_k x)^{a-1} \cdot ax \end{aligned}$$

Le facteur  $ax$  ne dépend pas de  $k$ , le facteur  $(1 + \theta_k x)^{a-1}$ , situé entre  $(1+x)^{a-1}$  et 1 est borné,

et  $0 < 1 - \theta_k < 1 + \theta_k x$  si  $|x| < 1$ , donc le facteur  $\left(\frac{1 - \theta_k}{1 + \theta_k x}\right)^k$  est borné par 1.

Puisque le facteur  $\frac{(a-1)(a-2)\dots(a-k)}{k!} \cdot x^k$  est, pour  $|x| < 1$ , le terme général d'une série convergente, il tend vers zéro par (2.3).

Par conséquent, nous avons  $R_k(x) \rightarrow 0$  pour  $k \rightarrow \infty$  et l'identité (7.16) est démontré pour  $|x| < 1$

Chaque fois que la série (7.16) converge pour  $x = +1$  ou  $x = -1$ , elle représente une fonction continue. Par le théorème (7.8), elle est donc égale à  $(1+x)^a$  aussi en ces points. » (Hairer & Wanner, 2001, p.254)

Selon Poincaré (1886), un développement limité obtenu par la formule de Taylor est un cas particulier de développement asymptotique. Il a introduit l'analyse asymptotique en étudiant la mécanique analytique et céleste lors de l'étude du problème des trois corps afin de résoudre les difficiles équations différentielles de la mécanique céleste. Bourbaki (1974) a expliqué le principe de Poincaré lors de son étude de la théorie des séries afin d'introduire le concept de développements asymptotiques et précise que :

« Dans la plupart des calculs de l'Analyse classique, il est possible d'obtenir une loi générale de formation des développements asymptotiques d'une fonction, ayant un nombre de termes arbitrairement grand ; ce fait a contribué à créer une confusion durable (tout au moins dans le langage) entre séries et développements asymptotiques ; si bien que H. Poincaré, lorsqu'il prend la peine, en 1886, de codifier les règles élémentaires des développements asymptotiques (suivant les puissances entières de  $\frac{1}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ ), emploie encore le vocabulaire de la théorie

des séries. Ce n'est guère qu'avec l'apparition des développements asymptotiques provenant de la théorie analytique des nombres que s'est enfin opérée la distinction nette entre la notion de développement asymptotique et celle de série, en raison du fait que, dans la plupart des problèmes que traite cette théorie, on ne peut obtenir explicitement qu'un très petit nombre de termes (le plus souvent un seul) du développement cherché. » (Bourbaki, 1974, p.253-254)

Nous pouvons résumer les principales phases de l'évolution historique ayant menée aux concepts de fonction, de limite d'une fonction, de développement d'une fonction et de développement asymptotique dans le tableau suivant :

Mathématiciens	Définitions	Méthodes en termes de	Cadres	Registres
Fermat et Descartes	« ...la considération de l'ordonnée d'une courbe correspondant à une abscisse donnée » est la transposition géométrique de la notion de fonction	Objets géométriques	GEO	Géo
Leibniz (1692)	« Functio »: « Une tangente à une courbe est fonction du point de la courbe »	Objets géométriques	GEO	Géo
Jean Bernoulli (1718)	« Fonction d'une grandeur variable une grandeur composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »	Grandeurs variables	GEO	Géo
Euler (1732)	« Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. »	Quantités variables	ANA	Ana
D'Alembert (1754)	« ...une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche: en quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. »	Grandeurs	GEO	Géo
Maclaurin et d'Alembert	« ... emploient la considération des limites et regardent le rapport des différentielles comme la limite du rapport des différences finies, lorsque ces différences deviennent nulles. »	Différences finies	ANA	Géo / Ana
Lagrange (1797)	« On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables »	Quantités de variable	ANA	Ana
Cauchy (1823)	« Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. »	Variable	ANA	Ana

Abel	La formule du Binôme de Newton	Variable réelle	ANA	Ana
Poincaré	Un développement limité obtenu de la formule de Taylor est un cas particulier de développement asymptotique	Variable réelle	ANA	Ana

**Tableau 2-6 : genèse historique des notions de fonction, de limite d'une fonction, de développements d'une fonction et de développements asymptotiques**

En conclusion, la notion de fonction a été introduite dans le cadre géométrique par Leibniz et John Bernoulli avant d'être formalisée dans le cadre de l'Analyse par Euler, Lagrange et Cauchy. Il y a un changement de la nature de variable étudiée pour définir une fonction. Le passage de l'étude d'une fonction d'une « grandeur variable » à l'étude d'une fonction de « quantité variable » amène à l'existence d'une rupture épistémologique liée au changement du paradigme par l'utilisation des objets géométriques à celui des objets purement analytiques. Il y a un changement du cadre géométrique articulant les registres analytique, graphique et géométrique au cadre de l'analyse mobilisant le registre analytique. Nous pouvons dire qu'il existe un changement de paradigmes de l'approche géométrique à l'approche purement analytique lors de la formulation historique des concepts de fonction et de limite d'une fonction. Il existe un véritable *obstacle d'ordre épistémologique* lié à la conceptualisation de la notion de fonction.

La définition analytique de Lagrange de la notion de fonction l'amène à la découverte de la notion de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel (la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 avec restriction de reste) lors de son étude de la « Théorie des fonctions analytiques ». En effet, il donne une autre représentation de développement en série de Taylor d'une fonction sous forme d'un polynôme en termes de dérivées successives de cette fonction.

Par ailleurs, il y a un obstacle épistémologique lié à la conceptualisation de la notion de limite par le changement du paradigme. En effet, il existe une rupture épistémologique liée à la notion de limite qui est introduite selon un aspect purement géométrique par Rond D'Alembert en termes de limite d'une grandeur dans le cadre géométrique. Par suite, Cauchy a développé cette définition dans le cadre de l'analyse selon un aspect purement analytique afin de l'utiliser dans l'étude de la convergence des séries.

L'étude de la convergence d'une série par Cauchy ouvre un autre aspect plus rigoureux dans le domaine de l'Analyse au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Cette nouvelle technique amène Cauchy à étudier les théorèmes de Taylor et Maclaurin en présentant un développement en séries de Taylor sous forme d'une somme finie par l'identification de son dernier terme « le reste ». La formalisation de fonction amène à l'existence des raisonnements dont la validité est illimitée



lors de l'utilisation des méthodes de développements en séries infinies et ceux de Taylor au XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècle. L'étude de la convergence d'une série et d'une fonction au voisinage d'un réel, ainsi que l'identification de l'expression de reste renvoient à l'existence d'une rupture épistémologique liée à la conceptualisation de la notion de développement en série infinies et de Taylor. Nous pouvons dire qu'il existe un *obstacle d'ordre épistémologique* lié à la conceptualisation de la formule de Taylor-Young.

#### IV. L'évolution historique des applications des méthodes d'approximations

Les notions de développements en séries infinies et de développements en séries de Taylor sont devenues des nouvelles méthodes pour résoudre des différents problèmes liés au domaine d'approximations locales des fonctions au XVIII<sup>e</sup> siècle.

Nous pouvons résumer, dans le tableau suivant, l'évolution historique des concepts de développements en séries infinies, de développements en séries de Taylor et de développements d'une fonction en distinguant les problèmes étudiés en tant que principales phases de la genèse historiques des différents objets d'approximation locale d'une fonction dès l'Antiquité.

Phases	Mathématiciens	Objets	Méthodes	Cadres	Registres
Résolution des «problèmes des tangentes »	Euclide Apollonius Archimède Roberval et Torricelli Fermat Descartes Isaac Barrow	Tangente : Construction graphique Solution mécanique  Son équation	-Mouvement des trajectoires -Interprétation des représentations graphiques	GEO	Gra/ Géo/ Alg
Résolution des «problèmes des quadratures »	Mercator Leibniz Newton	« Développement en séries infinies » Formule du binôme de Newton	Les procédés d'approximations indéfinies des fonctions circulaires et algorithmiques	GEO	Gra/Géo/ Ana/Alg
Résolution des équations fluxionnelles plus compliquées	Newton	«Développement en séries infinies»	« Développements en séries infinies de variables » de Newton	GEO	Gra/ Géo Ana
Détermination des «développement en séries infinies»	Leibniz Maclaurin Taylor	«Développement en série de Taylor»	La méthode des «différences finies»	GEO	Gra/ Géo/ Ana
Détermination des approximations des fonctions compliquées	Lagrange	Développement d'une fonction	«Développements en séries de Taylor »	ANA	Ana
Etude de convergence des séries	Abel Cauchy	Formules de Taylor avec reste et la formule du Binôme de Newton	Calcul de limite	ANA	Ana

## Tableau 2-4 : l'évolution historique du concept d'approximation locale d'une fonction

Lagrange (1813) a interprété les méthodes d'approximation locale d'une fonction développées par certains mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> siècle en écrivant :

*« La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce que l'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes que l'on néglige, et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques sont encore très imparfaites. » (Lagrange, 1813, p.70)*

Dès la naissance des définitions du concept de fonction introduit par Leibniz et Euler et du concept de limite d'Alembert, Lagrange a étudié les méthodes développées par certains mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> siècle dans le domaine du calcul différentiel.

Par une étude comparative des travaux de Newton et Leibniz sur l'analyse infinitésimale et l'enseignement de l'Analyse du XX<sup>e</sup> siècle, Taton (1961) dit que :

*« ... En somme Newton et Leibniz sont les co-inventeurs de l'analyse infinitésimale moderne. Ils puisent tous deux directement dans l'acquis de la génération précédente, mais le souci de rigueur est Supérieur chez Newton. Leibniz crée la notation différentielle  $dx$ ,  $ddx$ ,  $d^3x$ , etc., plus suggestive à certains égards et qui prévaudra au cours du XVIII<sup>e</sup> siècle. Ce pendant la notation de Newton, où la fluxion joue le rôle essentiel, est plus voisine des notations de notre enseignement moderne. » (Taton, 1961, p.251)*

Dans le contexte de l'intérêt des objets d'approximation locale d'une fonction dans les domaines intra et extra-mathématiques en tant que nouvel outil d'approximation polynômiale d'une fonction, Cousteix et Mauss (2006) soulignent le fait que

*« A la différence d'une série convergente, une série asymptotique est telle qu'une somme partielle représente la fonction développée d'autant mieux qu'un certain paramètre est petit. Quand le paramètre est nul, ce cas limite donne exactement la fonction avec le premier terme de la série. Lorsque le paramètre n'est pas nul mais simplement petit, toute somme partielle est donc une approximation de la fonction. On note de façon générique  $\varepsilon$  un petit paramètre. Ce petit paramètre est déterminant en physique pour réduire le modèle mathématique considéré à un modèle le plus simple dont la solution est une approximation de la solution du modèle plus général (...). Une approximation asymptotique est obtenue, au sens mathématique, pour des valeurs de  $\varepsilon$  aussi petites que l'exige le formalisme, la précision de l'approximation étant ici parfaitement définie. En revanche, au sens physique, l'approximation est recherchée pour une valeur donnée du paramètre et sa décision n'est pas connue à l'avance. » (Cousteix et Mauss, 2006, p.2)*

Dès la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'utilisation des notions d'approximation locale d'une fonction comme étant une nouvelle technique pour résoudre certains problèmes amène certains mathématiciens et physiciens, de cette époque, à découvrir des formules inadéquates. Nous présentons quelques méthodes, qui nous semblent, les plus pertinentes à notre cas d'étude.

#### ***IV.1. La crise de confiance à l'usage des infiniment petits dans le domaine du calcul différentiel***

Lagrange a prouvé, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, l'existence des difficultés rencontrées par certains mathématiciens lors de l'usage des infiniment petits dans le domaine du calcul différentiel. Il a découvert, en 1806, que la nature et l'origine des erreurs effectuées par Leibniz, Euler, Maclaurin et d'Alembert sont dues à l'usage du rapport des infiniment petits.

*« On connaît les difficultés qu'offre la supposition des infiniment petits, sur laquelle Leibnitz a fondé le calcul différentiel. Pour les éviter, Euler regarde les différentielles comme nulles, ce qui réduit leur rapport à l'expression zéro divisé par zéro, laquelle ne présente aucune idée. Maclaurin et d'Alembert emploient la considération des limites et regardent le rapport des différentielles comme la limite du rapport des différences finies, lorsque ces différences deviennent nulles. Cette manière de représenter les quantités différentielles ne fait que reculer la difficulté ; car, en dernière analyse, le rapport des différences évanouissantes se réduit encore à celui de zéro à zéro. » (Lagrange, 1806, p.1-2)*

Leibniz, Euler, Maclaurin et D'Alembert ont rencontrées des difficultés liées à l'usage différemment de rapport des infiniment petits afin de donner une forme indéterminée dans le domaine de l'Analyse au début du XIX<sup>e</sup> siècle, (Lagrange, 1806). En effet, le calcul du rapport des infiniment petits en termes des différentielles nulles amène Euler à la forme indéterminée (le rapport 0 sur 0). Par ailleurs, Maclaurin et D'Alembert ont trouvé la même forme indéterminée par le calcul de limite du rapport des différences finies qui est égal au rapport des différentielles. Ce changement du paradigme n'a pas empêché ces mathématiciens d'effectuer les mêmes erreurs. Leibniz, Maclaurin et D'Alembert ont produit des raisonnements dont la validité est illimitée. Le calcul de limite d'un rapport des infiniment petits est véritablement un *obstacle d'ordre épistémologique*. L'étudiant peut être confronté à ce type de difficulté qui est en étroitement lié à la topologie.

#### ***IV.2. La crise de confiance à la « Théorie des séries » d'Euler***

Dieudonné (1974) a interprété la théorie développée par Euler, au XVIII<sup>e</sup> siècle, en prouvant que sa méthode du raisonnement est inadéquate pour certains cas d'étude des développements en séries infinies.

« (...) la série entière converge au sens usuel pour  $x$  assez petit et a donc pour somme une fonction analytique  $f$ ; si cette fonction admet une autre expression analytique définie pour  $x=1$ , c'est  $f(1)$  qui est prise pour « somme » de la série donnée. Cela le conduit par exemple à écrire :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1 \quad (2)$$

Puisque les seconds membres sont les valeurs pour  $x=1$  de  $\frac{1}{1+x}$  et  $\frac{1}{1-2x}$  respectivement. Il

semble que si les avis des contemporains aient été partagés quant à la validité de (1), la plupart rejetaient (2) comme absurde, une somme de grandeurs positives ne pouvant avoir une « valeur » négative. Euler ne se prononce pas nettement sur ce point, se bornant à signaler en défense de (2) (et sans le prendre à son compte) un argument qui revient à dire que la fonction  $-\frac{1}{x}$  est croissante, et passe cependant de valeur  $>0$  à des valeurs  $<0$  lorsque  $x$  croît en franchissant la valeur 0. » (Dieudonné, 1974, p.23)

En appliquant sa méthode analytique, Euler a remplacé  $x$  par la valeur de 1 dans l'expression de développement en séries infinies de  $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \dots$  afin de trouver l'expression :  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ .

Dans ce cas, ce mathématicien n'a pas traité le développement en séries infinies au voisinage de 0. Il existe une difficulté liée à la conceptualisation de la notion d'approximation d'une fonction au voisinage d'un point.

D'un autre côté, il a remplacé  $x$  par la valeur 1 dans l'expression de développement en séries infinies  $\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^n (2x)^k$  afin de trouver l'expression :  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$ .

Dans ce cas, l'égalité entre un nombre positif et un nombre négatif amène à poser des questionnements sur la Théorie des séries d'Euler à cette époque, et plus précisément sur les développements en séries infinies et les développements en séries de Taylor en tant que nouvelle méthode d'approximation locale d'une fonction.

Dieudonné (1974) a expliqué les difficultés liées à l'utilisation de ces formules en prouvant que certains mathématiciens ont produit un mode du raisonnement dont la validité est limitée.

« En outre Euler ne pouvait guère se rendre compte des difficultés inhérentes à sa définition de la « somme » d'une série, par exemple lorsque  $f$  a un prolongement analytique non uniforme. Un exemple de calcul où sa « définition » tombe en défaut est celui où il cherche à donner un sens à la « somme » de la série  $1 - 1! + 2! - 3! + \dots + (-1)^n n! + \dots$ . Sans se soucier du fait que la série entière :  $y = x - 1!x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + \dots$  n'est jamais convergente pour  $x \neq 0$ , il la dérive terme à terme et obtient formellement l'équation différentielle :  $x^2 y' + y = x$ .

Or cette équation a effectivement une seule solution telle que  $y(0)=0$ , donnée par

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} dt \quad (3)$$

Et Euler considère donc  $y(1)$  est la « somme » qu'il cherche (il ne se rend évidemment pas compte qu'il a en fait donné ainsi le premier exemple de fonction indéfiniment dérivable dans  $[0, +\infty[$ , mais non analytique au point  $x=0$ ). » (Dieudonné, 1974, p.23-24)

Il existe des problèmes liés à l'utilisation de la Théorie des séries d'Euler dans l'étude de développements en séries infinies. Euler n'a pas mis en considération la définition des développements en séries infinies au voisinage de 0. Il est confronté au problème lié à l'étude d'une fonction au voisinage d'un point. Il existe un *obstacle d'ordre épistémologique* dont les effets pourraient apparaître lorsque les étudiants devront articuler des connaissances d'ordre topologique et des connaissances liées à l'étude d'une fonction.

Nous pouvons conclure qu'il y a des obstacles épistémologiques (Brousseau, 1986) qui sont liés au concept d'approximation d'une fonction. Il existe des difficultés de la compréhension de la notion d'approximation qui nécessite d'être associée au couple : topologie au sens de voisinage et analyse fonctionnelle au sens de l'analyse spécifique d'une fonction qui réalise une approximation adéquate.

#### ***IV.3. Les formules inadéquates de Lagrange***

Lagrange a développé sa Théorie des fonctions analytiques afin d'étudier les « développements en séries de Taylor » dans le domaine de la mécanique analytique. A partir de cette théorie, il a défini une fonction et ses dérivées successives en termes de variables réel ou de plusieurs réels en identifiant les expressions de  $f(x)$  en fonction de  $f(x_0)$ ,  $f'(x_0)$ ,  $f''(x_0)$ , etc. La naissance du concept de limite introduit par Reymond d'Alembert et développé par Cauchy propose des questionnements sur la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, l'étude de la convergence des séries amène au questionnement sur la validité des formules de Taylor :

- A quelle condition une fonction peut être considérée comme une approximation d'une fonction donnée au voisinage d'un point ?
- A quelle condition cette approximation peut-elle être obtenue ?
- A quelle condition une fonction s'écrit-elle sous forme d'une série ?
- Peut-on identifier l'erreur commise lorsqu'on effectue un développement limité d'une fonction d'ordre 2 au voisinage d'un réel ?

Cauchy (1822) a prouvé que la méthode développée par Lagrange est inadéquate dans certains cas d'application de la formule de Taylor pour la résolution des problèmes dans le champ d'approximation d'une fonction (Escofier, 2016).

*« Le traité d'analyse d'Euler était le premier traité moderne. Le traité de Lagrange, paraissait le plus près de la rigueur, mais Cauchy le bouleverse en 1822 avec un exemple que Lagrange n'avait pas pressenti, celui de la fonction  $x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$  dont toutes les dérivées en 0 sont nulles alors que la fonction n'est pas nulle ; (...) » (Escofier, 2016, p.114-115)*

Cauchy a interprété la méthode de Lagrange pour l'application de la formule de Taylor dans le cas de l'étude de la fonction  $x \rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}$  en écrivant dans son traité, publié en 1823, que

*« ... je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant pas être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la Mécanique analytique (Lagrange) a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes(...). » (Cauchy, 1823, p.)*

Cauchy a proposé le problème de l'expression de reste dans la formule de Taylor.

Par ailleurs, la détermination de terme de l'expression du reste de la formule de Taylor pose un problème chez les mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle lors de l'étude de la convergence des séries. Ces mathématiciens sont confrontés aux difficultés liées à l'étude d'une fonction au voisinage d'un point. Il existe un *obstacle d'ordre épistémologique* dont la conceptualisation d'approximation locale d'une fonction nécessite d'être associée à la topologie au sens de voisinage, ainsi que l'analyse fonctionnelle au sens de l'étude d'une fonction.

Les notions de « développements en séries infinies » et « développements en séries de Taylor » sont devenues des méthodes très importantes lors de la résolution des problèmes d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle et au début du XIX<sup>e</sup> siècle. L'utilisation de ces méthodes pose des problèmes chez les mathématiciens de cette époque par l'élimination de l'expression du reste de développements limités d'une fonction (Lagrange, 1813). En effet,

*« La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce que l'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes que l'on néglige, et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques sont encore très imparfaites. » (Lagrange, 1813, p.70)*

L'expression du terme de reste traduit l'erreur entre une approximation d'une fonction et la fonction elle-même. On ne peut pas comprendre la notion d'approximation sans l'interprétation et la précision du sens de l'expression de reste dans un développement limité ou la formule de Taylor-Young. Ainsi, la négligence de l'expression du reste dans les méthodes d'approximations des fonctions pour résoudre des problèmes géométriques et mécaniques pose des vraies difficultés à comprendre le concept d'approximation locale d'une fonction. Il y a un véritable obstacle épistémologique relevant de la topologie et l'analyse fonctionnelle et plus précisément de l'analyse spécifique d'une fonction qui vise comme approximation.

## **Conclusion du chapitre 2 : identification des obstacles liés à la genèse historique des objets d'approximation locale d'une fonction**

Nous avons conduit une étude de la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction selon une hiérarchie temporelle. Le point de départ de l'étude des approximations s'inscrit à l'origine dans le cadre géométrique. Le concept de tangente est introduit selon un aspect cinématique afin de visualiser l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un point. La tangente est élaborée à partir de sa construction graphique selon des méthodes cinématique et infinitésimale dans le cadre géométrique. La naissance de cet objet est due à l'étude d'une courbe mécanique au voisinage d'un point et plus précisément, la construction d'une tangente à une courbe mécanique ou algébrique. Par ailleurs, la détermination de l'équation de la tangente ou les deux premiers termes du développement limité et de la formule de Taylor-Young est développée dans les registres graphiques, géométrique et algébrique.

Dans un deuxième temps, la naissance du concept d'équivalence est due à la méthode des tangentes de Fermat, vers 1629, par l'utilisation du mot « *Adégaler* » qui est connue sous les notions « *égalité adéquate* » ou « *égalité approximative* » avec une erreur infinie (Rouy, 2007). En effet, la notion d'approximation des objets au voisinage d'un point est introduite dans les travaux de Fermat, par son étude de la position relative de deux objets géométriques en un point lors de la résolution des « problèmes des tangentes ».

Ensuite, il apparaît le concept du développement limité, au début du XVII<sup>e</sup> siècle, sous les notions de « développements en séries infinies », par Mercator, Leibniz et Newton, qui sont connues actuellement par les développements limités usuels par l'élimination de l'expression de reste.

Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, la découverte de la formule de Taylor-Young sous la notion de « développement en séries de Taylor » revient aux travaux de John Bernoulli et de Taylor avant d'être formalisée sous forme d'un développement d'une fonction par Euler, Maclaurin et

Lagrange en fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. L'étude de la convergence d'une série est due aux travaux de Cauchy, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, par l'utilisation de la méthode du calcul de limite introduite par d'Alembert.

Au XVII<sup>e</sup> siècle, le concept d'approximation locale d'une fonction est élaboré sous forme des notions de « développements en séries infinies » et « développements en séries de Taylor » dans le domaine du calcul infinitésimal par l'usage des infiniment petits selon l'aspect cinématique par Newton, selon l'aspect géométrique par Leibniz, Gregory, Taylor et l'aspect analytique par Lagrange, Maclaurin et Euler.

Nous pouvons conclure que les notions d'approximation locale d'une fonction se sont faites initialement du point de vue purement géométrique par la mobilisation des registres graphique, géométrique et algébrique. Il fallut l'attendre plusieurs siècles avant que cette question soit traitée non plus en lien avec un paradigme géométrique, mais en lien avec un paradigme différent celui lié à une formalisation des fonctions selon un aspect purement analytique.

Certains mathématiciens et physiciens sont confrontés aux problèmes liés à l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction lors de l'évolution historique des mathématiques. Dans ce travail, nous avons étudié quelques formules inadéquates qui renvoient aux développements des modes de raisonnements dont la validité est limitée chez Fermat, Leibniz, Euler, Maclaurin, Lagrange et d'Alembert. Ces méthodes mobilisées sont devenues inadéquates par la naissance des nouvelles notions et techniques dans le domaine du calcul infinitésimal, puis dans le domaine de géométrie analytique et finalement dans le domaine de l'Analyse.

L'étude historico-épistémologique, menée dans ce chapitre, nous permet de conclure que la genèse historique des notions de tangente à une courbe, d'équivalence de fonctions, des « développements en séries infinies », des « développements en séries de Taylor » de la fonction, de limite d'une fonction et de développement asymptotique est due à l'utilisation et à l'analyse de ses représentations graphique, géométrique, analytique et algébrique. Nous remarquons que certains mathématiciens ont produit des raisonnements, dont la validité dépend de l'évolution des connaissances mathématiques dans la société savante, et que ses évolutions successives se traduisent par l'existence d'obstacles épistémologiques en étroitement liés au concept d'approximation locale d'une fonction. Ces obstacles épistémologiques résultent :

- soit d'une rupture d'ordre épistémologique par le changement du paradigme « cinématique » à celui « géométrique » puis « analytique ». En réalité, ce changement s'effectue par le changement des cadres géométrique et algébrique. Par exemple, les notions de développements limités et des formules de Taylor sont introduites dans le cadre géométrique par l'utilisation des méthodes géométrique et infinitésimale s'appuyant sur l'interprétation des illustrations



graphiques chez Newton, Leibniz et Mercator enfin du XVII<sup>e</sup> siècle et au début du XVIII<sup>e</sup> siècle. Par ailleurs, la naissance de la notion de fonction à une variable réelle par Lagrange dans le domaine de l'Analyse ouvre l'aspect purement analytique dans le domaine des mathématiques. En plus, la négligence de l'expression du reste dans des développements en séries infinies et ceux de Taylor est due à l'existence d'une rupture épistémologique liée à la difficile conceptualisation de la notion d'approximation locale d'une fonction. Ces difficultés nécessitent pour être dépassées d'avoir une compréhension fine d'éléments d'ordres topologique et fonctionnel ;

- soit d'une rupture d'ordre cognitif liée à la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction. En effet, ce type d'obstacle est lié à un changement de mode de pensée. Par exemple, la notion d'équivalence est traitée comme une égalité dès l'Antiquité jusqu'au début du XVII<sup>e</sup> siècle. Dans ce cas, il y a une confusion entre deux objets mathématiques : une fonction transcendante et son approximation polynômiale au voisinage d'un point. Par ailleurs, l'erreur commise par Leibniz, Euler, Maclaurin et d'Alembert résulte de leurs méthodes du calcul différentiel pour obtenir le « *rapport de zéro à zéro* ». Ce résultat du calcul de limite n'a pas de sens ce qu'on appelle actuellement en domaine de l'Analyse « *une forme indéterminée* ». Ce type d'erreur renvoie à une rupture d'ordre cognitif liée à la conceptualisation des notions d'approximation d'une fonction au voisinage de zéro ;

- soit aux difficultés liées à l'articulation des savoirs relatifs à la topologie et à l'Analyse fonctionnelle. En effet, ce type de difficulté résulte de l'utilisation des raisonnements dont la validité est limitée lors de la résolution des problèmes étroitement en lien avec le concept d'approximation locale d'une fonction. En effet, le domaine de la topologie est présentée à partir de la notion de voisinage soit par l'utilisation des « *infiniment petits* » dans le domaine du calcul infinitésimal, soit par l'usage de « *variable  $x$  tend vers 0* » dans le domaine de l'Analyse réelle. Par ailleurs, l'Analyse fonctionnelle au sens de l'étude d'une fonction est visée en tant qu'approximation. Par exemple, l'erreur commise par Euler lors de l'étude des « *développements en séries infinies* » qui lui a amenée à la crise de confiance à sa « *Théorie des séries* », au XIX<sup>e</sup> siècle. La résolution des problèmes liés au domaine d'approximation locale d'une fonction est traitée initialement dans le cadre géométrique selon un aspect cinématique.

Nous remarquons qu'Archimède, Torricelli et Roberval ont développé leurs raisonnements s'appuyant sur des illustrations graphiques lors de la résolution de « *problème des tangentes* » par l'usage des mouvements des trajectoires (vitesse, etc.) afin d'introduire le concept de tangente en tant que solution mécanique. Par ailleurs, Euclide, Apollonius, Fermat, Barrow et Descartes font l'usage des méthodes purement géométriques afin de présenter la construction

graphique de cet objet mathématique. Ensuite, Fermat a découvert une représentation algébrique de la tangente à des courbes mécaniques et algébrique par la détermination des deux premiers termes du développement limité. Nous pensons que le travail dans le cadre géométrique est une condition nécessaire mais elle n'est pas suffisante pour la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires de section Physique – Chimie (PC). Nous proposons la question suivante :

- L'existence d'une approximation locale d'une fonction est-elle considérée comme une approximation valide ?

D'après Artigue (1990), les problèmes d'ordre épistémologique sont renforcés parce que l'enseignement par le choix des programmes et du curricula conduit à mettre les étudiants dans des situations difficilement tenables. Dans notre travail, les questions qui s'imposent :

- Est-ce que les problèmes et les activités que l'enseignant propose aux étudiants permettent-ils vraiment une confrontation à des milieux qui autorisent un questionnement important sur l'interprétation et le sens d'une approximation ?

- Qu'el est son intérêt ? Quand on peut l'utiliser ? Quelles sont les éléments des conditions et des raisons de l'approximation ?

L'articulation des cadres géométrique et algébrique pose un problème chez l'élève lors de l'apprentissage de la notion de tangente, (Artigue, 1990). Nous rejoignons le point de vue d'Artigue (1990) qui explique l'intérêt de l'identification des conceptions liées à la genèse historique d'un concept mathématique. En effet,

*« Dans cette perspective, l'identification des conceptions historiquement rencontrées peut nous aider à interpréter certaines réponses d'élèves, à comprendre leur cohérence. Elle ne nous aide pas fondamentalement à résoudre les problèmes de cloisonnement entre cadres dans la mesure où justement, historiquement, la tangente est un objet avant tout géométrique. Lorsque Lagrange, par exemple, dans son ouvrage déjà cité, arrive la première caractérisation algébrique de la tangente en termes de dérivée (identique apparemment à celle des élèves), c'est après avoir montré que la caractérisation géométrique d'Euclide implique (en utilisant une formulation actuelle) entre la courbe représentative de la fonction  $y = f(x)$  et la tangente d'équation  $y = F(x)$ , au point de tangente d'abscisse  $x$ , un contact satisfaisant  $f'(x) = F'(x)$ . » (Artigue, 1990, p.277-278)*

Cette réflexion épistémologique sur le concept d'approximation locale d'une fonction met en évidence le choix des situations qui pourraient permettre aux étudiants de se confronter à la réalité des objets mathématiques et à leurs nécessités. Autrement dit, ces objets seront mobilisés afin de résoudre des problèmes essentiels en proposant les questions suivantes :

Comment approcher une fonction au voisinage d'un point par une autre fonction ?

Peut-on approcher toujours des fonctions transcendante ou algébrique par un polynôme ?

Quelles sont les conditions suffisantes pour approcher une fonction transcendante par un polynôme au voisinage d'un point ?

Comment étudier le comportement asymptotique d'une fonction ?

Notre objectif principal de notre recherche consiste à trouver la situation qui peut permettre à l'étudiant de prendre des décisions et de mobiliser ses connaissances antérieures afin de répondre et de résoudre des problèmes liés au domaine d'approximation locale d'une fonction.

L'approximation est la notion la plus complexe de l'Analyse. Nous allons essayer de comprendre mieux les situations qui favorisent la rencontre de l'étudiant avec les connaissances convenables à les mobiliser en situation réelle en classe. Ainsi, notre travail se focalise sur l'étude des formes des raisonnements produits par les étudiants lors de la résolution des problèmes liés au domaine d'approximation locale d'une fonction, ainsi que les différentes conceptions de ce concept mathématique.

L'évolution du répertoire didactique de représentation de l'étudiant va nous livrer des éléments très pertinents sur l'évolution des conceptions tout au long de sa confrontation à des situations et à un milieu spécifique.

Nous conduirons une étude exprimant l'importance de niveau des milieux et nous étudierons les raisonnements qui sont développés, ainsi que les connaissances mobilisées. Ceci nous va renseigner vraiment sur l'intérêt de proposer des situations réelles en classe. En d'autres termes, les connaissances et les savoirs qui permettent de résoudre des problèmes sont susceptibles d'évoluer. Pour cela, il est préférable de confronter les étudiants à des situations articulant les différentes approches graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique. Pour ceci, il est intéressant d'étudier les programmes officiels, la structure des ouvrages universitaires et la manière dont le cours est présenté par l'enseignante qui collabore à la mise en œuvre de l'expérimentation didactique. De ce fait, des questions s'imposent :

Comment la construction des conceptions d'approximation locale d'une fonction s'établit ?

Quelles sont ses étapes ?

Comment l'enseignant introduit le concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?

Qu'est-ce qu'on dit véritablement sur les approximations locales des fonctions dans les programmes, dans le polycopié de cours de l'enseignant et les ouvrages universitaires utilisés en tant que référence de son cours ?

Afin de trouver des éléments de réponses à nos questionnements, nous adoptons des cadres et outils théoriques que nous présenterons dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

### Cadres théoriques et méthodologie de la recherche

#### Introduction

L'objectif didactique premier de notre recherche est de déterminer la nature et l'origine des principales difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'appropriation et de la mise en œuvre des notions d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires aux études d'ingénieurs de section Physique-Chimie (PC). Notre second objectif est de nous appuyer sur cette analyse des difficultés et des obstacles afin d'élaborer et de mettre en œuvre une ingénierie didactique permettant aux étudiants de dépasser certaines difficultés et de surmonter certains obstacles afin d'être capables d'effectuer un usage raisonné de ce concept lors de la confrontation à des situations mathématiques qui requièrent son usage.

L'étude de l'évolution des connaissances et des savoirs mobilisés par les étudiants, confrontés à des problèmes, nous permettra d'identifier les obstacles liés à l'apprentissage des objets d'approximation locale d'une fonction.

Dans le cadre de notre recherche, nous souhaitons élaborer et mettre en œuvre une ingénierie didactique de développement afin d'étudier l'évolution d'une connaissance mobilisée lors de l'action de l'étudiant pour construire un apprentissage, en vue d'analyser le développement cognitif de ses connaissances par confrontation à une situation mathématique en classe. L'évolution des connaissances et des savoirs de l'étudiant résulte de l'analyse didactique de sa confrontation aux plusieurs situations didactiques ou à dimension didactique (Bloch, 1999 ; Mercier, 1995).

Dans le cadre de l'apprentissage des objets mathématiques, nous rejoignons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005) qui donne l'intérêt de l'analyse détaillée des raisonnements produits par les élèves confrontés à une situation mathématique en vue d'étudier la nature et l'origine des erreurs apparaissant dans leurs productions.

Notre travail porte la focale sur l'étude du fonctionnement et du développement cognitif des connaissances et savoirs mobilisés par l'étudiant lors de son action pour construire un apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction par confrontation à des situations mathématiques en classe. Pour ces raisons, nous adoptons dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011) qui nous permettra d'identifier la nature et l'origine des erreurs apparaissant dans leur productions.

En effet, l'utilisation de ce modèle offre *a priori* la possibilité de conduire une analyse des différentes conceptions valides ou erronées, ainsi que de l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement.

De ce fait, le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), s'appuyant sur les notions de connaissances et de savoirs, de situations et sur la structuration des milieux, apparaît comme un cadre adéquat pour l'analyse des procédures des étudiants confrontés à des situations mathématiques afin d'identifier leurs erreurs en termes d'obstacles.

Notre travail porte la focale aussi sur la compréhension de la manière de la construction du concept d'approximation locale à partir des actions de l'étudiant pour construire un apprentissage par la prise en considération du rôle de langages et de symboles dans sa conceptualisation et ses composantes. Pour ceci, nous adoptons aussi le cadre théorique du champ conceptuel (Vergnaud, 1990, 2013).

*«... relativement à un concept donné, la connaissance d'un sujet peut s'actualiser en des conceptions distinctes selon les caractéristiques des situations.» (Vergnaud, 2013, p.5)*

Vergnaud (1990) a développé une théorie permettant de comprendre la manière dont un sujet procède lors de la construction d'un concept mathématique à partir de ses actions : c'est la théorie des champs conceptuels. Ainsi, un concept s'acquiert à travers un ensemble des situations et des problèmes auxquels est confronté le sujet.

La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990) porte la focale sur les notions de concept et de conception. Elle rend aussi visibles la nature et l'origine des erreurs effectuées par des étudiants lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction.

Ainsi, dans le cadre de la théorie des situations didactiques et de la théorie des champs conceptuels, nous nous intéressons à l'analyse des raisonnements produits par les étudiants lors de l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

L'analyse des raisonnements qui sous-tendent les procédures des étudiants, en situation de résolution des problèmes, inhérents à l'approximation locale d'une fonction, nous permettra d'identifier les difficultés auxquelles les étudiants sont confrontés. Les erreurs commises par les étudiants peuvent être dues :

- soit aux difficultés propres à l'apprentissage et relatives au champ de la validité des connaissances et des savoirs mathématiques mobilisés, notamment par un usage erroné ou inadéquat de ses connaissances antérieures ;
- soit aux difficultés qui relèvent principalement des choix didactiques effectués par l'enseignant ; plus précisément lorsque ces derniers s'avèrent inadapés et ne permettent pas aux étudiants d'accéder aux véritables raisons de savoir ;

- soit aux difficultés conceptuelles propres aux savoirs à enseigner.

Dans ce chapitre, nous souhaitons expliciter et justifier les cadres et outils théoriques que nous avons choisis de mobiliser pour conduire une analyse des savoirs enseignés et des raisonnements produits par les étudiants confrontés à des situations mathématiques en termes de connaissances et de savoirs mobilisés.

Au début de l'Université, les notions de développement limité, la formule de Taylor-Young et les relations de comparaison de fonctions sont des nouvelles méthodes d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). L'analyse des raisonnements produits par les étudiants nécessite une étude des rapports établis entre l'étudiant et les savoirs inhérents à la topologie et à l'analyse fonctionnelle, puisque ces deux domaines interviennent simultanément dans la construction et l'utilisation de ces concepts mathématiques.

Par ailleurs, une analyse des raisonnements repose sur l'analyse didactique de l'activité mathématique et des productions de l'étudiant en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. Cette analyse se réalise par une étude du fonctionnement et du développement cognitif des connaissances mobilisées par l'étudiant confronté à des situations mathématiques.

L'analyse des connaissances et des savoirs mis en œuvre par l'étudiant en situation heuristique, l'étude du langage, l'analyse des symboles mathématiques et des figures géométriques produites lors de l'élaboration du raisonnement met en exergue le rôle des signes dans la pensée mathématique. L'analyse sémiotique d'une activité et des productions mathématiques permet de comprendre la complexité des apprentissages. Ainsi, la sémiotique triadique de Peirce couplée à l'approche sémiotique de Duval (1993) en termes de conversion de registres de représentation sémiotique pourrait *a priori* nous aider à analyser le processus des raisonnements produits par les étudiants.

Afin de conduire une analyse plus fine des raisonnements, nous pensons qu'il est nécessaire de relier le signe, l'objet et son interprétation lors de la construction et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction. Pour ceci, une analyse logique d'un concept mathématique en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique nous permettra *a priori* d'étudier précisément les raisonnements produits par les étudiants.

La méthodologie des analyses *a priori* et *a posteriori* des travaux des étudiants est basée sur le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011, 2019, 2020, 2022). Ce modèle est utilisé pour étudier des objets au niveau Primaire, Secondaire et Supérieur. Dans notre cas d'étude, les objets d'approximation locale d'une fonction couplent des connaissances et des savoirs qui relèvent des domaines de l'Analyse fonctionnelle et de la topologie. Pour ces raisons, nous envisageons d'enrichir ce modèle par des outils théoriques permettant de conduire

une analyse plus fine des raisonnements. Ces outils offrent la possibilité au point de vue de conceptions d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés ainsi que le paradigme de l'Analyse standard correspondant (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015) et à quel niveau de sa mise en fonctionnement (Robert, 1998). En effet, l'analyse du statut d'une notion mathématique selon les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves (Robert, 1998) constituent un outil théorique pertinent pour l'analyse plus fine de l'usage des savoirs et des connaissances mobilisés dans un raisonnement produit par un étudiant. En plus, selon notre étude historique et épistémologique du concept d'approximation locale d'une fonction, développée dans le chapitre 2, nous avons établi l'existence des obstacles qui résultent d'une rupture d'ordre épistémologique émanant d'un changement de paradigme. Dans ce contexte, nous partageons le point de vue de Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier (2015) qui ont conduit une étude de l'évolution historique des mathématiques et son impact sur l'enseignement actuel afin de distinguer trois paradigmes de l'Analyse standard.

L'objectif principal de notre recherche consiste à aider les étudiants à surmonter les obstacles liés à l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Nous pensons qu'un travail collaboratif avec un enseignant de classe, avant la mise en œuvre d'une ingénierie, nous permettra de trouver les moyens adéquats afin de surmonter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets mathématiques. Ainsi, la construction et l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement pourrait *a priori* nous permettre d'atteindre nos objectifs principaux.

Dans une première étape, nous présenterons le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) en expliquant une catégorisation des situations, les caractéristiques des situations adidactiques et à dimension adidactique (Bloch, 1999), l'institutionnalisation des savoirs et des connaissances en terme de répertoire didactique (Gibel, 2018). Dans ce cadre, l'aménagement des situations dans lesquelles on place l'étudiant, en interaction avec un milieu adéquat, l'aide à construire lui-même une nouvelle notion et lui permet d'accéder aux raisons de savoir. Le processus de dévolution d'une situation est établi par l'enseignant qui a un rôle déterminant notamment par l'observation du travail de l'étudiant. De ce fait, le schéma de la structuration du milieu joue un rôle très important lors de l'analyse de l'activité de l'étudiant et du professeur ainsi que pour l'étude de la transformation des savoirs.

Dans une deuxième étape, nous expliciterons l'intérêt de l'ingénierie didactique de développement en tant que méthodologie de recherche dans notre cas d'étude.

Ensuite, nous présenterons notre réflexion didactique sur la construction d'un concept mathématique en prouvant l'importance de l'étude de l'évolution des objets de l'Analyse



standard dans le cursus Secondaire à l'Université, les caractéristiques d'un concept et d'une conception mathématique, les représentations sémiotiques d'un concept et son analyse logique en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique, ainsi que les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les étudiants.

Dans la quatrième partie de ce chapitre, nous présenterons la méthodologie mise en œuvre lors des analyses *a priori* et *a posteriori* des raisonnements produits par des étudiants et l'enseignant. Cette méthodologie repose sur le modèle d'analyse du raisonnement introduit par Bloch et Gibel (2011, 2019, 2020) et Gibel (2018) et développé par Lalaude (2016) afin d'élaborer un modèle multidimensionnel permettant l'analyse des raisonnements dans le cas de la conceptualisation des objets de l'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Nous terminerons ce chapitre par la présentation des questions de recherche et de la synthèse de la méthodologie générale de notre travail.

## **I. Le cadre théorique premier de notre étude : la théorie des situations didactiques**

Avant de donner une catégorisation des situations en théorie des situations didactiques, nous présentons la définition de la notion de « situation » de Brousseau.

*« Un objet mathématique étant déterminé par une de ces définitions classiques, il s'agit de concevoir un ensemble de conditions qui fasse qu'un sujet doive nécessairement utiliser cet objet comme moyen pour obtenir un certain résultat. Ces conditions ne sont pas a priori indépendantes les unes des autres ni indépendantes de l'objet ainsi défini. Elles seront modélisées par un ou des systèmes mathématiques appelés « situations » et formellement structurées comme des « jeux » mathématiques. » (Brousseau, 2004, p.245)*

L'un des objectifs de la théorie des situations didactiques consiste à classer les situations relatives à une même connaissance,

*« (...) et par conséquent, les connaissances non seulement en fonction de leurs rapports logiques, mais aussi suivant leurs propriétés ergonomiques et les possibilités d'apprentissage et d'enseignement qu'elles offrent. » (Ibid., p.245)*

La théorie des situations didactiques modélise les conditions spécifiques de la connaissance mathématique mise en jeu.

*« Ces conditions sont modélisées par des systèmes appelés situations, qui conduisent des agents en interaction avec elles à manifester cette connaissance. » (Brousseau, 2011, p.2)*

De ce fait une « situation » est un modèle d'interaction du sujet avec un certain milieu qui

« (...) détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. » (Brousseau, 2012, p.106)

Brousseau (2011) considère que la distinction du type de situations se réalise à partir de leur structure, de leurs règles, de leur fonctionnement, des formes de connaissances produites, etc., Dans le contexte de l'étude des erreurs des étudiants, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (2012),

« Le fait pour un observateur de savoir qu'une connaissance est fausse parce qu'elle produit des erreurs n'est pas nécessairement la marque d'un fonctionnement erroné des mécanismes de cognition du sujet observé. La T. S. renvoie à l'étude des conditions présentes et antérieures qui "justifient" l'état de ces connaissances, et à l'usage qu'il convient d'en faire. » (Brousseau, 2012, p.17)

Brousseau (2012) indique que les situations mathématiques relèvent de l'un des deux processus : soit le modèle de la *dévolution*, soit celui de l'*institutionnalisation*.

La dévolution d'une situation est

« ... le passage d'une situation didactique à une situation a-didactique. Cette transition est plus complexe que le passage classique du cours au problème, ne le laisse paraître. L'élève doit accepter ce qu'aucun adulte n'accepterait, c'est-à-dire de s'engager à obtenir un résultat, (avec le risque d'être mal jugé) sans savoir à l'avance comment il peut le faire. » (Brousseau, 2012, p.17)

Au niveau Supérieur, l'institutionnalisation des savoirs consiste à

« ... placer la connaissance produite par l'élève par rapport aux connaissances culturelles et aux intentions didactiques du professeur. (...) L'institution comporte donc la relecture par le professeur de l'activité de l'élève et sa réinterprétation. » (Brousseau, 2012, p.117)

En classe, la mise en considération de l'évolution des connaissances et des savoirs mobilisés est très intéressante dans l'interaction du sujet avec le milieu (Margolinas, 2015).

« Le processus d'institutionnalisation [est] envisagé comme une transformation qui légitime tout savoir dans une institution. La transformation en savoir, qui rompt le lien avec les premières situations dans lesquelles ont été rencontrées les connaissances, permet aussi de s'en émanciper : le savoir pourra à nouveau se transformer en connaissances dans de nouvelles situations. La déconstruction nécessaire pour retrouver les connaissances et les situations qui permettent de leur donner du sens est la dévolution. » (Margolinas, 2015, p. 14-15)

Dans ce cadre, nous rejoignons le point de vue de Conne (1992) qui a établi l'intérêt de distinguer les notions de connaissance et de savoir dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Il propose :

« ... que l'on distingue le cas où le contrôle de la situation, ce sera l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation) ce sera l'ordre du savoir

*(...). Le savoir est l'ordre de l'utilité des connaissances pour transformer les situations. » (Conne, 1992, p.223)*

Dans le contexte de l'intérêt de l'étude de la distinction connaissance/savoir, Brousseau et Centeno (1991) considèrent les connaissances sont placées du côté de la validation et de la communication. Cette distinction doit être réalisée lors de la transposition didactique d'un objet mathématique.

*« Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente où à une exigence sociale.*

*Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissances ou de savoirs et la production de nouveaux savoirs. » (Brousseau & Centeno, 1991, p.176)*

Dans la section suivante, nous présentons les raisons de notre choix de cadre de la théorie des situations didactiques.

### ***1.1. Les raisons du choix de ce cadre théorique***

En mobilisant les concepts de la théorie des situations didactiques, l'analyse de la confrontation des étudiants à une situation mathématique nous donne la possibilité d'étudier les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants ainsi que le rôle de l'enseignant. Cette dialectique sujet/situation nécessite une étude des rapports établis entre l'étudiant et les savoirs inhérents à la topologie et à l'analyse fonctionnelle. L'analyse didactique de cette dialectique nous permet d'étudier les connaissances et les savoirs mobilisés (valides ou erronés) par l'étudiant en vue de produire un raisonnement. Par ailleurs, le professeur a un rôle déterminant dans le processus enseignement-apprentissage des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). En classe, l'enseignant joue le rôle soit d'un observateur, soit d'un initiateur du processus de dévolution, soit d'un régulateur en situation de formulation et en situation de validation (Bloch, 1999). Par ailleurs, l'enseignant joue un rôle déterminant dans la gestion de la phase d'exposition (Allard, 2015) et lors du processus d'institutionnalisation. Il convient alors d'effectuer une analyse précise des interactions entre le sujet et le milieu avec lequel il interagit. Nous devons conduire une analyse didactique de la relation entre enseignant, étudiants, savoirs et milieu effectuée lors de la confrontation des étudiants à une situation réelle en classe. Cette relation didactique se réalise dans un champ de l'étude des expérimentations. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) est un cadre théorique pertinent qui permet de l'analyse de ces expérimentations par l'adaptation des notions de situation,

d'institutionnalisation des savoirs et des connaissances et le schéma de la structuration du milieu.

Dans la partie suivante, nous présentons la catégorisation des situations en théorie des situations didactiques.

### ***1.2. Catégorisation des situations en théorie des situations didactiques***

A l'instar de Brousseau (2011), dans l'enseignement Supérieur, les situations mathématiques les plus « faciles » sont les situations de réinvestissement et les activités d'entraînement. Le modèle général d'une situation permet l'identification des connaissances d'un étudiant ou d'un enseignant, (Brousseau, 1999).

*« Une situation modélise les relations et les interactions d'un ou plusieurs actants avec un milieu (un environnement). Le modèle comprend une représentation :*

- des états du milieu, et des changements que les actants peuvent lui faire subir ;*
- l'enjeu de l'action, généralement un état final du milieu et l'intérêt qui lui est attaché par l'actant ;*
- et l'inventaire des choix permis par des règles. » (Brousseau, 1999, p.12)*

En théorie des situations didactiques, nous présentons les définitions des différents types de situations en vue de mettre le lien entre chacune de ces notions : situation mathématique, situation non didactique, situation didactique, situation adidactique et situation à dimension adidactique.

#### Notion de situation mathématique

L'analyse fine du fonctionnement des connaissances de l'étudiant confronté à des situations mathématiques nous permettra d'étudier ses erreurs commises lors de l'appropriation et l'usage des objets d'approximation locale d'une fonction. Nous rappelons la définition de situation mathématique introduite par Brousseau (2010).

*« Une situation mathématique est un système formé par les conditions d'une utilisation particulière d'une connaissance mathématique. Autrement dit, une situation mathématique est*

- d'une part, un jeu hypothétique qui explicite un système (...) de conditions nécessaires dans lesquelles une connaissance mathématique déterminée peut se manifester par des décisions aux effets observables, des actions, d'un actant (un enseignant ou un étudiant) sur un milieu, ou par milieu on entend ensemble des objets physiques, culturels, sociaux ...) avec lesquels l'actant interagit ;*
- et d'autre part, un modèle destiné à interpréter la partie des décisions observables d'un sujet réel qui relèvent de son rapport à une connaissance déterminée. » (Brousseau, 2010, p.2)*

Dans notre travail, nous rejoignons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005), nous choisissons de proposer des situations mathématiques en classe en vue d'étudier les raisonnements produits par les étudiants en termes de connaissances et de savoirs mobilisés.

Notre travail se focalise sur l'étude de la nature et de l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction. Nous faisons l'hypothèse que l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations mathématiques, liées au domaine d'approximation d'une fonction, permet d'identifier et de caractériser précisément leurs difficultés. Dans ce cadre, nous rejoignons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005) :

*« Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement – le moins possible – peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » dans la TSD. La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet ni à la connaissance qui la motive, mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.<sup>2</sup> » (Brousseau & Gibel, 2005, p.16-17)*

En première année de classes préparatoires (PC), les notions de développements limités, la formule de Taylor-Young et la relation de comparaison de fonctions sont présentées comme de nouvelles méthodes d'approximation locale d'une fonction. L'analyse des raisonnements produits par les étudiants nécessite une étude des rapports établis entre l'étudiant et les précédents savoirs, inhérents à la topologie et à l'analyse fonctionnelle. De ce fait, la théorie des situations didactiques, s'appuyant sur les notions de connaissances, de savoirs et de représentations apparaît comme un cadre théorique pertinent pour l'analyse des raisonnements des étudiants confrontés à des situations mathématiques.

L'analyse des raisonnements qui sous-tendent les procédures des étudiants, en situation de résolution des problèmes inhérents à l'approximation locale d'une fonction, nous permettra d'identifier les difficultés auxquelles les étudiants sont confrontés.

La résolution des problèmes nécessite une mobilisation des connaissances et des savoirs mathématiques. La théorie des situations didactiques est une théorisation de ce procédé, (Brousseau, 2004).

---

<sup>2</sup> Traduit de l'anglais par les auteurs de l'article

Par ailleurs, l'élaboration et la dévolution des situations d'action, de formulation et de validation, au cours desquelles l'étudiant interagit avec un certain milieu, jouent un rôle déterminant dans la construction de ses nouvelles connaissances, (Brousseau, 1998).

### Notion de situation didactique

La théorie des situations didactiques est un cadre théorique permettant l'étude des moyens didactiques à mobiliser dans une relation didactique. Ces moyens sont nécessaires lors de l'étude d'une situation didactique, (Brousseau, 1997).

« a) La communication "didactique" a pour objet de donner à son destinataire un moyen de contrôle ou de régulation sur certain **milieu** (...)

b) Les instruments culturels de reconnaissance et d'organisation des connaissances sont des **savoirs**, objets d'une activité spécifique des institutions, ou d'une activité d'institutions spécifiques (...)

c) Le "sens" d'une connaissance est une image culturelle de la compréhension, un moyen de reconnaissance et de gestion des connaissances, moyen personnel ou institutionnel, et donc variable suivant les institutions. (...)

d) L'action du professeur comprend une forte composante de régulation des processus d'acquisition de l'élève. L'élève lui-même apprend par des régulations de ses rapports avec son "milieu". » (Brousseau, 1997, p.21)

Dans le contexte de l'étude du sens d'une connaissance, on parle du « tissu de raisonnement ». Dans le processus d'enseignement, il est nécessaire de donner du sens aux connaissances, comme le souligne Brousseau (1988).

« Le sens d'une connaissance est formé :

- du «tissu» des **raisonnements** et des **preuves** dans lesquels elle est impliquée avec, évidemment, les traces des situations de preuves, qui ont motivé ces raisonnements ;
- du «tissu» des reformulations et des formalisations à l'aide desquels l'élève peut la manipuler, accompagné d'une certaine idée des contraintes de communication qui les accompagnent ;
- des modèles implicites qui lui sont associés – soit qu'elle les produise, soit qu'elle en résulte – et des traces des situations d'action qui les fonctionnalisent, ou qui, simplement, les contextualisent ; – et des rapports plus ou moins assumés entre ces différentes composantes, rapports essentiellement dialectiques. L'enchaînement « question/réponse » par exemple : les questions tendent à s'articuler entre elles, indépendamment des réponses reçues, et les réponses font de même de leur côté. » (Brousseau, 1988, p.17)

La situation didactique est l'ensemble des rapports établis explicitement ou implicitement en vue de faire acquérir à l'étudiant certains savoirs. Lors de la période temporelle de l'acceptation

de l'étudiant du problème et la production de sa réponse, l'enseignant n'intervient pas en tant que disposant des connaissances attendues.

Le processus de dévolution de la situation est établi par l'enseignant qui a un rôle très important pour gérer l'avancement du travail de l'étudiant à partir de son observation.

*« (...) mais également pour prendre des décisions sur l'opportunité d'introduction d'une nouvelle valeur de variable dans la suite des situations, ou, plus généralement, de l'opportunité d'une nouvelle situation. C'est également cette observation qui lui permet de constituer une mémoire du travail des élèves qui pourra être utile par la suite, pour le rappel des difficultés rencontrées et de la façon de les dépasser (...). » (Margolinas, 1998, p.3)*

A l'instar de Margolinas (1995) et Mercier (1995), l'étude de l'évolution des connaissances et des savoirs de l'étudiant en situation réelle en classe s'effectue par sa confrontation à une situation adidactique ou à dimension adidactique.

#### Notion de situation adidactique

Lors de l'analyse d'une situation adidactique, le système sujet/milieu se caractérise par l'ensemble des questions sur les actions et les rétroactions, (Gaudin, 2005). Dans notre travail, nous nous intéressons à l'interaction du sujet (étudiant ou enseignant) avec le milieu. Nous conduirons une analyse fine du fonctionnement des connaissances du sujet confronté à des situations d'action, de formulation et de validation qui précèdent et contribuent à l'institutionnalisation du concept d'approximation locale d'une fonction.

Au sein de l'institution, comme l'indique Schneider et Mercier (2005), l'articulation des deux processus, l'un de dévolution et l'autre d'institutionnalisation, est nécessaire dans l'enseignement d'une nouvelle notion au début de l'Université. Dans ce cas, on parle d'un jeu adidactique. En effet,

*« Le professeur abdique de son intention d'enseigner, engageant l'élève dans une série de jeux dont l'enjeu est une connaissance partagée (un savoir) : c'est le processus de dévolution et, dans le même temps, le professeur oriente les activités de l'élève pour qu'il parcoure les étapes de la production d'un savoir reconnu dans la culture de la société : c'est le processus d'institutionnalisation. » (Schneider & Mercier, 2005, p.2)*

La dévolution d'une situation adidactique aide l'étudiant à construire lui-même ses connaissances, (Brousseau, 1997). Cette situation est une situation d'apprentissage organisée dans un système didactique pour faire acquérir à l'étudiant un savoir en lui dévoluant un problème, (Brousseau, 1988).

*« Les situations « a-didactiques » sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants*

*de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. » (Brousseau, 1988, p.17)*

Il est intéressant de distinguer, dans le système sujet-milieu, les deux principaux jeux adidactiques dont le premier est les jeux de l'étudiant

*« (...) avec le milieu adidactique, qui permettent de préciser quelle est la fonction du savoir après et pendant l'apprentissage. Ces jeux sont spécifiques de chaque connaissance ». Ces jeux « fondamentaux » et adidactiques, mettant en présence un milieu et un joueur (sont) tels que le savoir – tel savoir précis – apparaîtra comme le moyen de produire des stratégies gagnantes. » (Brousseau, 1986, p.90)*

Le deuxième type de jeux adidactiques est les jeux de l'enseignant qui joue le rôle d'un organisateur des jeux des étudiants, (Brousseau, 1986).

Les rôles de l'enseignant et de l'étudiant dépendent du niveau de milieu adidactique. Selon les travaux de Brousseau (1998),

*« ... le concept de situation adidactique - auquel renvoie la notion vulgarisée de situation-problème - fait partie d'un réseau conceptuel qui lui confère sa portée et sa consistance épistémologiques : avant tout, une situation adidactique s'insère dans une intentionnalité didactique. » (Schneider & Mercier, 2005, p.1)*

Brousseau (1986) désigne une situation adidactique quand l'étudiant

*« ... sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette **connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques**. Nous seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation a-didactique. » (Brousseau, 1986, p.49)*

Les situations que nous avons élaborées dans le cadre de l'ingénierie ont cette vertu : la connaissance visée est toute entière justifiée par la logique interne de la situation autrement dit par les raisonnements valides produits par les étudiants lors de la construction des procédures de résolution.

#### Notion de situation à dimension adidactique

Dans le système sujet-milieu, l'activité de l'enseignant et de l'étudiant s'articulent tout au long de déroulement d'une séquence. En effet, en classe lors de l'interaction de l'étudiant en situation réelle, il peut se saisir des problèmes et des difficultés, à ce moment, l'enseignant doit interagir pour lui aider. Et plus précisément,



« Du point de vue de l'activité mathématique de l'enseignant et de l'élève, il apparaît bien qu'elles sont conjointes, ou plutôt dépendantes l'une de l'autre : elles s'articulent durant tout le déroulement de la séance, elles s'alimentent l'une l'autre. » (Bloch, 1999, p.33)

Dans notre cas de la confrontation des étudiants à une situation à dimension adidactique liée aux notions d'approximation locale d'une fonction, l'enseignant fournit à la réflexion de ses étudiants. Dans ce cas, on parle, (Bloch, 1999), d'une situation à dimension adidactique qui

« - d'une part, est dépendante des connaissances présentes dans le milieu et des connaissances que l'enseignant peut y injecter ;

- d'autre part se manifeste par une interaction de connaissances élèves / professeur. » (Bloch, 1999, p.33)

Dans le cas d'une situation à dimension adidactique, l'enseignant admet un rôle important lors des interactions étudiant/savoirs et étudiant/milieux.

### Notion de situation non didactique

Dans l'institution, nous pouvons distinguer des *situations non didactiques* qui sont des situations non développées dans un contexte didactique.

« (...) les situations « non didactiques » où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe. » (Brousseau, 2010, p.2)

Une situation adidactique est une situation d'enseignement apparaissant aux étudiants en tant que *situation non didactique* dans une période de temps d'un « projet didactique qui sert à enseigner ». Selon Brousseau (1999),

« Certaines situations à usage didactique ont la propriété de permettre à l'élève de prendre seul des décisions pertinentes, de juger de leur adéquation et de s'adapter au milieu par la construction de la connaissance voulue, ces situations ont un modèle "non didactique" en ce sens qu'elles n'ont pas besoin d'une intervention spécifiquement didactique (autre que la dévolution). » (Brousseau, 1999, p.15)

### Classification des situations adidactiques et des situations à dimension adidactique

L'élaboration et la mise en œuvre des situations adidactiques et des situations à dimension adidactique nécessitent l'identification des connaissances et des savoirs mises en jeu par l'enseignant. A l'instar de Gibel (2017),

« Les savoirs en jeu dans une situation peuvent être de diverses natures : langagiers, liés aux formulations et/ou aux représentations, procéduraux, c'est-à-dire liés aux actions sur le milieu et à l'usage des instruments ou méthodologiques, autrement dit liés aux démarches d'apprentissages et à l'analyse des rétroactions. » (Gibel, 2017, p.50)

Concernant une même notion mathématique, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (1990),

« ... on peut donc envisager une famille de situation où cette notion fonctionne comme une connaissance (*situation d'action*), une famille de situation où elle figure comme savoir (par exemple *situation de validation*), une famille de situation où apparaît l'identification d'un besoin de connaissances et de la possibilité de la satisfaire par la communication du savoir correspondant. » (Brousseau, 1990, p.316)

Dans notre travail, nous nous intéressons notamment à une situation d'action au point de vue de la construction d'un savoir.

Une séquence d'enseignement intégrant une ou plusieurs situations adidactiques ou à dimension adidactique est fréquemment organisée en trois « phases » :

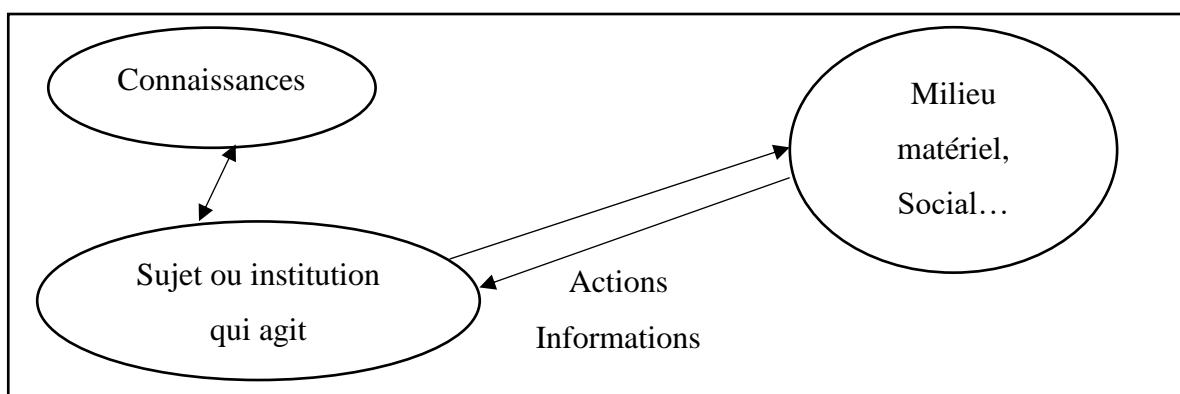
- phase d'action : la connaissance du sujet se manifeste par des décisions : succès ou échec ;
- phase de formulation : elle met en rapport deux sujets avec le milieu, et le succès exige que l'un des sujets formule la connaissance à l'intention de l'autre ;
- phase de validation théorique : construction formelle dans un répertoire de règles ou de théorèmes reconnus.

En théorie des situations didactiques, comme l'indique Gibel (2018),

« La situation adidactique est une situation de preuve, si l'on considère le schéma de la dialectique de la validation, en théorie des situations, il s'appuie nécessairement sur une situation d'action et sur une situation de formulation. » (Gibel, 2008, p.6)

Les situations adidactiques et les situations à dimension adidactique sont classées selon trois catégories :

i. Une situation adidactique d'action est une situation permettant à l'étudiant de mobiliser individuellement ses connaissances antérieures afin d'entrer dans le processus de recherche des solutions en vérifiant lui-même sa réponse. Ce processus s'effectue sans l'intervention de l'enseignant. Afin de simplifier la schématisation d'une situation d'action, Brousseau (1999) reprend un triplé : {actant, règles d'interactions avec le milieu, connaissances}.



**Schématisme d'une situation d'action, (Brousseau, 1999, p.12)**

Une situation d'action est :

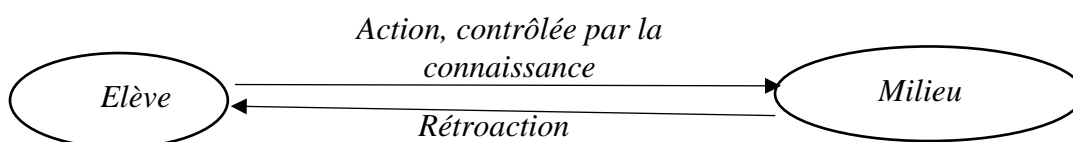
« ... une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire. » (Brousseau, 2010, p.3)

Dans le jeu du sujet avec le milieu, les connaissances sont les moyens

« ...d'appréhender les règles et les stratégies de bases, puis les moyens d'appréhender les règles et les stratégies gagnantes et obtenir le résultat recherché. » (Brousseau, 1986, p.65)

Dans le cas de l'étude d'une fonction, comme l'indique Gaudin (2005) :

« Les (formes de) connaissances sont ce qui « contrôle les interactions du sujet » avec le milieu :



» (Gaudin, 2005, p.10)

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous nous intéressons à la situation d'action qui consiste à placer l'étudiant devant une situation telle qu'elle

« ...lui pose un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner ; d'autre part, qu'il puisse agir sur elle et qu'elle lui renvoie de l'information sur son action. » (Brousseau, 1988, p.106)

ii. Une situation adidactique de formulation est une situation visant à déboucher sur la formulation d'une connaissance. La formulation consiste pour au moins deux actants (étudiants), à interagir avec un milieu, à faire usage de leur répertoire afin de formuler un message « original ». Brousseau (1972) explique la façon du fonctionnement du schéma de la formulation en écrivant :

« Le récepteur agit en fonction du message qu'il a reçu. Si cette action n'est pas satisfaisante, il peut la corriger par un nouvel échange de messages, mais la communication ne peut s'établir que si le récepteur et l'émetteur utilisent le même code, et l'utilisent bien l'un et l'autre. Il faut ensuite évidemment que le contenu du message soit correct. » (Brousseau, 1972, p.433)

La situation de formulation peut bien évidemment conduire à modifier ce répertoire en l'enrichissant de nouvelles connaissances (Brousseau, 2010).

« C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. La

*formulation consiste pour ce couple d'actants à utiliser un répertoire connu pour formuler un message original, mais la situation peut conduire à modifier ce répertoire. On peut déduire théoriquement et vérifier expérimentalement qu'une formulation « spontanée » de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les deux actants. » (Brousseau, 2010, p.3-4)*

Dans le cas d'une situation à dimension adidactique, nous rejoignons le point de vue de Gibel (2015) qui souligne que

*« La situation de formulation des méthodes est une situation à dimension adidactique, dont la gestion par l'enseignant devrait être délicate. En effet ce dernier aura pour mission de rester au plus près des propositions des élèves tout en rédigeant une méthode consistante. Il effectuera un moment d'institutionnalisation visant à reconnaître ces énoncés comme assimilables à des méthodes dont la validité reste à étudier. » (Gibel, 2015, p.55)*

iii. *Une situation adidactique de validation* est une situation favorisant une collaboration entre les actants afin de valider les résultats obtenus à partir de la situation. L'enseignant joue le rôle d'un régulateur de la situation. Comme l'indique Brousseau (2010), une situation de validation est

*« ... une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes d'établir ensemble explicitement cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, et/ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique. » (Brousseau, 2010, p.5)*

### ***1.3. Institutionnalisation des savoirs et concepts du répertoire didactique***

Pour Brousseau (2010), l'institutionnalisation des savoirs est liée à un processus didactique et résulte d'une intervention spécifique permettant à l'étudiant et l'enseignant de « reconnaître » et de légitimer « l'objet d'enseignement ».

*« L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est « encapsulée » et désignée – et une modification de son fonctionnement. » (Brousseau, 2010, p.4)*

*« L'institutionnalisation peut déjà se produire dans des situations non didactiques d'auto-apprentissage spontané et aussi des processus auto-didactiques, c'est alors une convention interne au groupe d'actants (institutionnalisation non didactique). » (Ibid., p.5)*

L'institutionnalisation des savoirs est définie en tant que processus qui rend possible les décontextualisations et les dépersonnalisations des savoirs (Allard & Masselot, 2016).

*« L'institutionnalisation consiste à placer la connaissance produite par l'élève par rapport aux connaissances culturelles et aux intentions didactiques du professeur. Elle revient à passer d'une organisation chronogénétique didactique des connaissances à une organisation topogénétique scolaire « officielle ».*

*L'institution comporte donc la relecture par le professeur de l'activité de l'élève et sa réinterprétation. » (Brousseau, 2012, p.117)*

Lorsque l'étudiant est confronté à une situation d'action, il a recours à ses connaissances antérieures et ses savoirs qui sont sous forme de définitions, propriétés, formules, théorèmes, des règles du calcul formel et algébrique, etc. Cet ensemble des savoirs et des connaissances mobilisés constitue le répertoire didactique, (Gibel, 2018).

#### - Répertoire didactique de la classe

Le répertoire didactique de la classe est constitué de l'ensemble des moyens que l'enseignant pense pouvoir attendre des étudiants suite à son enseignement (Gibel, 2004). Nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) qui souligne que

*« ... l'enseignant identifie un répertoire didactique qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations, afin de produire la solution ou la réponse attendue. » (Gibel, 2018, p.26)*

Selon Gibel (2018), le répertoire didactique de la classe est formé de trois composantes qui sont :

- *« le système produit i.e. le registre des formules ;*
- *le système organisateur utilisé afin de générer de nouvelles connaissances ou de réactiver des connaissances anciennes ;*
- *le répertoire de décision qui est assimilable à un répertoire de savoirs en relation avec un ensemble de situations. Ce répertoire de décision commande le répertoire d'action de l'élève. » (Gibel, 2018, p.18)*

En première année (PC), le répertoire didactique de la classe comporte l'ensemble des connaissances et des savoirs des étudiants sous forme de définitions, propriétés, théorèmes, formules, méthodes et tous les types de procédures attendues par l'enseignant lors de la résolution de situations mathématiques. Les composantes du répertoire didactique décrites précédemment leur permettent aussi de générer de nouvelles connaissances et de nouvelles formules (Gibel, 2018).

Dans le cas de l'enseignement de la notion d'approximation locale d'une fonction en première année (PC), le répertoire didactique de la classe est constitué des attendus des étudiants par le professeur, suite à son enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction dans le chapitre « Analyse asymptotique ». Dans le champ de l'étude locale d'une fonction, nous pouvons distinguer deux composantes du répertoire didactique :

- le répertoire didactique du Secondaire : il intègre toutes les propriétés, les formules, les techniques, les théorèmes, les règles du calcul algébrique et formel enseignés au niveau Secondaire ;

- le répertoire didactique du Supérieur : il intègre les propriétés, les formules, les définitions, les techniques, les théorèmes, etc. qui sont liés aux notions de fonctions équivalentes, de fonctions négligeables, de voisinage d'un réel, de développement limité d'une fonction au voisinage d'un point et à la formule de Taylor-Young. En fait, il est le répertoire didactique des connaissances et des savoirs enseignés dans la classe de première année (PC).

- Répertoire didactique de l'étudiant

En classes préparatoires, les étudiants considèrent que les cours et les travaux dirigés dispensés par l'enseignant ne suffisent pas pour l'apprentissage et l'usage raisonné des notions et des concepts mathématiques. Nous rejoignons le point de vue de Farah (2015) et Lalaude (2016) qui indiquent que les étudiants ont fréquemment recours, en dehors du temps scolaire, à l'utilisation de certains ouvrages universitaires pour investiguer de nouvelles situations, inhérentes à la notion ou au concept visé en vue d'approfondir leurs connaissances et leurs savoirs. D'une certaine manière, ceci constitue pour les étudiants un prolongement de l'étude. En conséquence, l'étudiant, confronté à une situation mathématique en classe, a recours à son propre répertoire didactique, selon Gibel (2018).

A l'instar de ce didacticien, l'analyse sémiotique du signe est nécessaire lors de l'étude des connaissances et des savoirs mobilisés dans une procédure de résolution d'un problème mathématique par l'étudiant. De ce fait, ce didacticien introduit la notion du répertoire de représentation d'un étudiant. Ce répertoire est

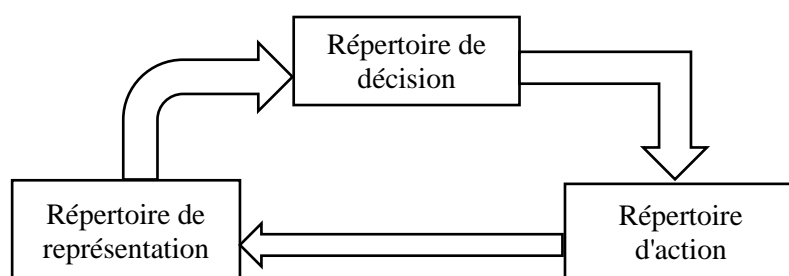
*« ... la composante sémiotique de son répertoire didactique, autrement dit ce sont les signes langagiers et infra-langagiers qui donnent à voir la manière dont l'élève utilise son répertoire didactique lorsqu'il est confronté à une situation. » (Gibel, 2018, p.34)*

La résolution par l'étudiant des situations adidactiques et à dimensions adidactique nécessite l'utilisation de son répertoire de représentation. De ce fait, chaque étudiant décide de la mise en œuvre d'une suite d'actions, valides ou erronées, relevant de l'usage de son répertoire d'action. À partir des résultats obtenus, il va modifier son répertoire de représentation, (Gibel, 2018).

Cette interaction entre les répertoires est résumée dans un schéma permettant de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique.

« Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations (...), celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions. » (Gibel, 2018, p.31)

Nous considérons le schéma théorique, proposé par Gibel (2018), du fonctionnement des connaissances de l'étudiant confronté à une situation adidactique (d'action) où à dimension adidactique.



**Schéma 3-1** : modélisation du fonctionnement du répertoire didactique de l'étudiant en situation d'apprentissage (Gibel & Ennassef, 2012)

Dans notre travail, ce schéma nous permettra de modéliser le fonctionnement de connaissances de l'étudiant en situation réelle en classe. Cette modélisation est réalisée par la précision des composantes du répertoire didactique de la classe et du répertoire didactique de chaque étudiant (des théorèmes, formules, propriétés, symboles, techniques utilisées, etc.), selon Gibel (2018).

« Le répertoire de représentation, de la classe et de chaque élève, est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). (...) »

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première et au milieu de la situation pour la seconde :

- la composante liée au répertoire antérieur c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures ;
- une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose. » (Gibel, 2018, p.30)

Nous conduisons une analyse des connaissances et des savoirs mobilisés par les étudiants en termes de répertoire didactique. Dans le champ de l'approximation locale d'une fonction, le

répertoire de représentation est composé de deux composantes dont la première est liée au répertoire didactique de la classe. La deuxième composante est liée au milieu de la situation. Par confrontation de l'étudiant aux différents milieux, il va mobiliser des connaissances de son répertoire didactique afin de construire des nouvelles représentations. Ainsi, un répertoire de représentation est étroitement en lien avec les registres de représentation sémiotique.

Comme le mentionnent Gibel et Ennassef (2010), l'évaluation formative offre la possibilité de déterminer l'écart entre le répertoire didactique de l'étudiant et le répertoire didactique de la classe par la mise en jeu des connaissances et des savoirs mobilisés de l'étudiant confronté à une situation mathématique.

#### ***1.4. Le schéma de la structuration du milieu***

Le schéma de la structuration du milieu est un élément essentiel en théorie des situations didactiques. Nous présentons tout d'abord le schéma de la structuration du milieu, ensuite nous définissons les situations « emboîtées » associées aux différents niveaux de milieux, puis nous précisons pour chacun d'eux le rôle de l'enseignant et enfin nous caractérisons les formes de raisonnements susceptibles d'être produites à chacun des niveaux de milieux.

##### I.4.1 Présentation du schéma de la structuration du milieu

A l'instar de Bloch (2005), le schéma de structuration du milieu permet de prévoir les interactions étudiant/milieu à travers les connaissances et les savoirs mises en jeu à chaque niveau du milieu. Cette structuration du milieu permet aussi

*« (...) de contrôler le fonctionnement a-didactique d'une situation, et de suivre la progression de la reconnaissance du savoir dans la succession des niveaux de milieux. » (Bloch, 2005, p.55)*

Le modèle de la structuration du milieu a été créé par Brousseau et présenté à l'école d'été de 1986 afin de modéliser la relation didactique et d'en prévoir les différents régimes de fonctionnements. Ensuite, il a été repris et modifié par Margolinas (1998) et développé dans les travaux de Bloch (1999, 2006) afin d'aider à étudier le rôle de l'enseignant dans les niveaux didactiques de milieux.

M+3 : M-Construction		P+3 : P-Noosphérien	<i>S+3 : Situation Noosphérienne</i>
M+2 : M-Projet		P+3 : P-Constructeur	<i>S+2 : Situation de Construction</i>
M+1:M-Didactique	E+1 : E-Réflexif	P1 : P-Projeteur	<i>S+1 : Situation de Projet</i>
<b>M0 : M-Apprentissage</b>	<b>E0 : Elève</b>	<b>P0 : Professeur</b>	<b><i>S0 : Situation Didactique</i></b>
M-1 : M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1 : P-Observateur	<i>S-1 : Situation d'apprentissage</i>



M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant	P-2 : P-Dévolueur Observateur	S-2: <i>Situation de Référence</i>
M-3: M-Matériel	E-3: E-Objectif		S-3: <i>Situation objective</i>

**Tableau 3-2** : tableau de la structuration du milieu (Bloch, 2006)

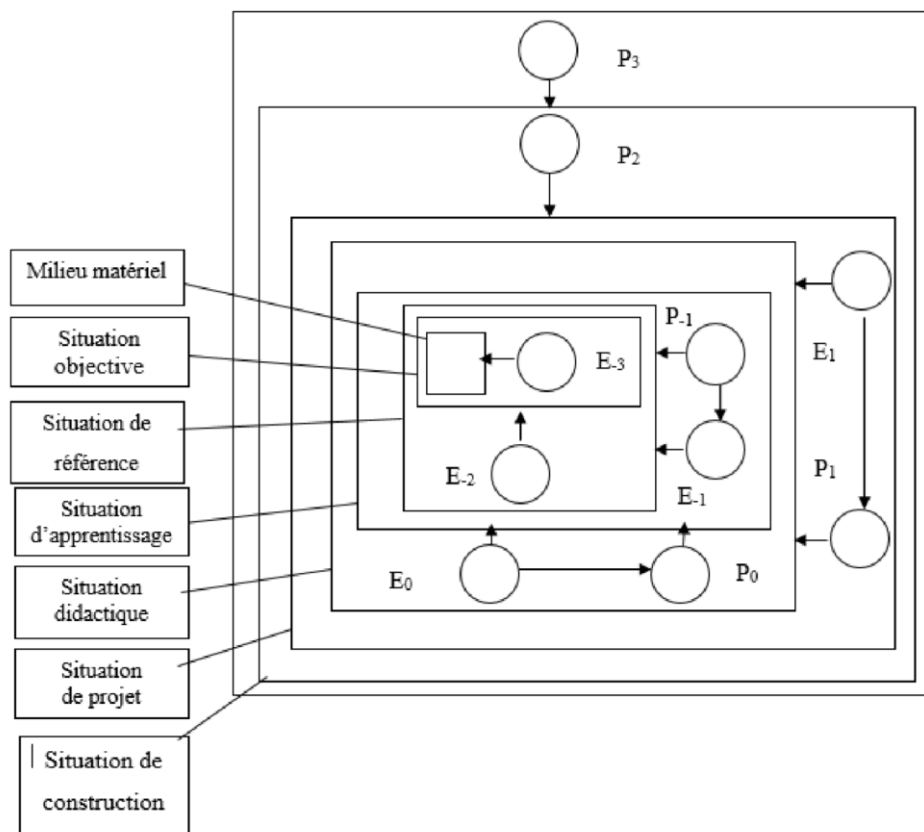


Schéma de la structuration du milieu

**Figure 3-2** : schéma de la structuration du milieu.

Les situations « emboîtées » (Brousseau, 1988)

Comme l'indique Gibel (2018), le schéma de la structuration du milieu, permet de

- « - représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique ;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir. » (Gibel, 2018, 40-41)

Dans l'analyse d'une séquence, il est nécessaire de distinguer les différentes situations emboîtées, (Gibel, 2018) :

- la situation objective est la situation proprement mathématique ;
- la situation d'action du sujet est la situation à laquelle est confrontée l'étudiant ;
- la situation d'apprentissage où on s'intéresse à l'étude des enjeux didactiques ;

- la situation didactique pour laquelle l'enseignant effectue ses interventions et mobilisent des arguments d'adidacticité afin de conduire une leçon.

La mise en considération de la structuration du milieu joue un rôle très important lors de l'analyse des productions des étudiants, (Gibel, 2008).

*« Le schéma de la structuration du milieu est l'outil approprié, non seulement pour d'étudier les conditions théoriques du fonctionnement des raisonnements pour chacune des situations emboîtées, mais encore pour analyser a posteriori, les actions et les interactions des élèves, en situation d'action, de formulation et de validation. » (Gibel, 2008, p.38)*

La structuration du milieu est introduite dans les travaux de Brousseau et développée dans les travaux de Conne (1992), Margolinas (1994) et Mercier (1998). Ce dernier a conduit une étude de l'enseignement en tant qu'activité coopérative entre l'enseignant et l'élève. Nous rejoignons le point de vue de Bloch (1999) qui a interprété les travaux de Mercier (1998) en écrivant :

*« Nous prévoyons à présent d'étudier l'activité mathématique dans l'enseignement / apprentissage, du couple élève/professeur, par rapport aux critères retenus, c'est-à-dire :*

- activité sur un champ de problèmes relevant de la théorie enseignée ;
- activité débouchant sur des pratiques mathématiciennes.

*D'autre part cette activité devra être observée :*

- du point de vue de l'élève, des connaissances que le milieu a-didactique qui fera rencontrer ;
- du point de vue du professeur, des connaissances et savoirs qu'il doit mettre dans la situation, pour pouvoir la piloter.

*Cette activité se manifestera sur un milieu que nous pourrons également évaluer avec ces critères.*

*» (Bloch, 1999, p.10)*

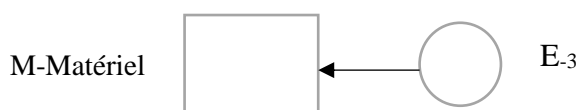
Nous présentons les différents niveaux de milieux afin d'indiquer le rôle du sujet.

#### I.4.2 Identification des niveaux de milieux

L'identification des niveaux de milieux permet de percevoir les transformations du savoir au travers les différentes situations emboîtées lorsqu'on veut étudier une séquence dans laquelle certaines phases intègrent des situations adidactiques ou à dimension adidactique. Concernant la même notion, pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances mobilisés de l'enseignant diffèrent de ceux de l'étudiant.

➤ **La situation objective** : l'élève objectif et le milieu matériel

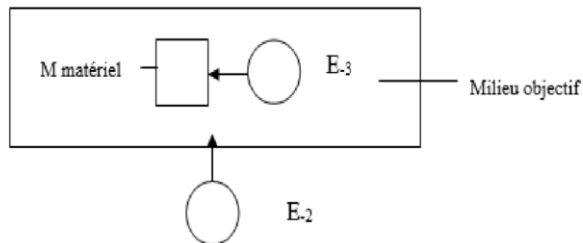
On désigne par : E-3 étudiant-objectif.



**Figure 3-3** : le sujet objectif et le milieu matériel

➤ **La situation de référence : le sujet agissant et le milieu objectif**

On désigne par : E<sub>3</sub> étudiant-objectif et E<sub>2</sub> étudiant-agissant.



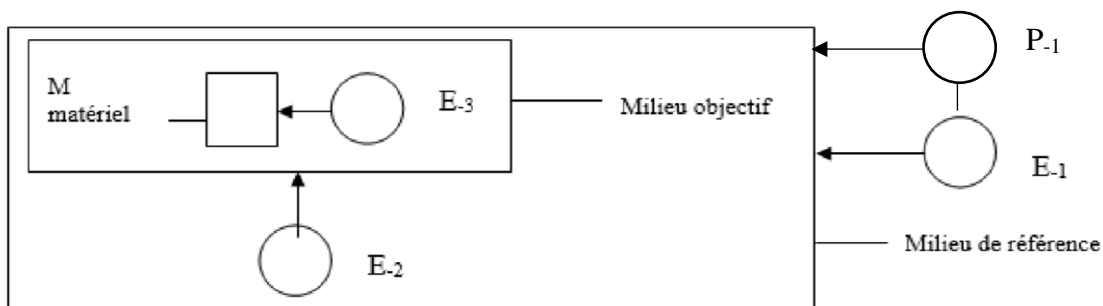
*Sujet agissant et milieu objectif*

**Figure 3-4** : sujet agissant et milieu objectif

➤ **La situation d'apprentissage : le sujet apprenant et le milieu de référence**

On désigne par :

E<sub>1</sub> : étudiant-apprenant, E<sub>2</sub> : étudiant-agissant, E<sub>3</sub> : étudiant-objectif et P<sub>1</sub> : professeur en action.



*Le sujet apprenant et le milieu de référence*

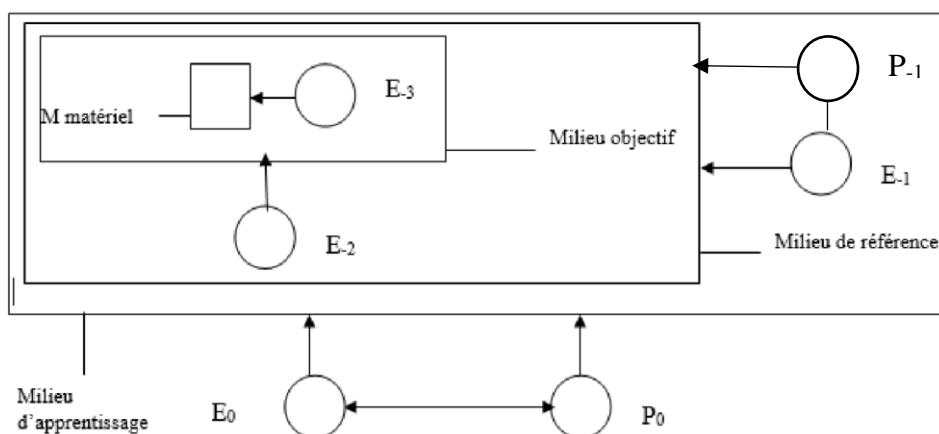
**Figure 3-5** : sujet apprenant et milieu de référence

A ce niveau du milieu, le rôle de l'enseignant est important, il intervient afin d'aider les étudiants confrontés à une situation à dimension adidactique.

➤ **La situation didactique : l'élève et le milieu d'apprentissage**

Dans notre cas d'étude, E<sub>0</sub> désigne étudiant-apprenant et P<sub>0</sub> le professeur.

#### Niveau (M0) L'élève et la situation d'apprentissage



**Figure 3-6 :** schéma du milieu-apprentissage

Le milieu d'apprentissage de l'étudiant est un milieu d'institutionnalisation des savoirs pour l'enseignant et ce n'est pas un milieu pour l'action, (Bloch, 1999). Autrement dit, l'enseignant s'appuie sur les raisonnements produits par les étudiants dans le milieu objectif (phase d'action) et le milieu de référence (phase de formulation et des argumentations mathématiques) afin de valider théoriquement le savoir à partir des critères mathématiques.

Dans le cas de la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique aux groupes de trinômes, la structuration du milieu permet de préciser le rôle de l'enseignant lors de la phase de la recherche de la situation.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons le rôle de l'enseignant pour chacun des niveaux de milieux.

#### I.4.3 Rôles et activités de l'enseignant pour chacun des niveaux de milieux

L'étude du milieu met en considération l'intérêt du rôle de l'étude des connaissances

*« ... que le professeur manifeste dans la situation, pour la contrôler, et particulièrement dans les phases a-didactiques (...). » (Bloch, 1999, p.7)*

Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Bloch (1999) qui reprend les questions de Margolinas (1998) afin de préciser le milieu de l'enseignant en écrivant :

*« ... nous considérons que les connaissances du professeur s'exercent et se construisent sur le milieu qui lui renvoie :*

*La situation (celle qu'il a mise en œuvre pour l'élève) ;*

*Les élèves (leurs procédures, leurs erreurs, (...). » (Bloch, 1999, p.10)*

Comme l'indique Bloch (1999) qui a identifié trois niveaux de milieux pour lesquels le rôle de l'enseignant doit être explicité en classe : ces milieux sont liés à l'étude de la modélisation de ses savoirs et de ses connaissances :

« - un milieu d'observation, correspondant au milieu objectif de l'élève agissant ;  
- un milieu pour l'action, correspondant au milieu de référence de l'élève apprenant ;  
- un milieu pour l'institutionnalisation, correspondant au milieu d'apprentissage de l'élève dans la situation didactique. » (Ibid., p.18)

De ce fait, il est intéressant d'étudier les actions du professeur en situation adidactique ou à dimension adidactique, selon Bloch (1999).

« Le niveau d'action pure et bien sûr trop rudimentaire pour nous permettre d'étudier l'évolution de la situation. Le professeur parle, écrit, se manifeste par une gestuelle...tout ceci pouvant être significatif par rapport à la gestion de la situation, ou pas du tout. » (Bloch, 1999, pp.19-20)

Les actions du professeur qui visent à modifier la situation se manifestent par ses interventions (Bloch, 1999). Ces interventions ont un impact sur le milieu de l'étudiant. Il est intéressant de se centrer sur

« ... les interventions du professeur et ses décisions d'ordre didactique ; et nous tenons :  
- d'une part, de situer ces interventions dans le milieu ;  
- d'autre part, d'étudier l'effet de ces interventions sur la conduite de la situation et sur le maintien (ou non) d'une composante adidactique. » (Ibid., p.20)

#### • **Au niveau du milieu objectif**

Comme le définit Bloch (1999), les principaux rôles de l'enseignant au niveau du milieu objectif consistent à :

« - engager la dévolution ;  
- observer le fonctionnement convenable de la situation de référence, les procédures des élèves, les erreurs, le fonctionnement de la classe (échanges dans les groupes et entre groupes, formulations, oppositions (...)) ;  
- reconnaître les connaissances des élèves et en tout premier lieu s'assurer que ceux-ci ont bien à leur disposition les connaissances nécessaires pour s'engager dans le jeu proposé ;  
- préparer l'étape suivante de la situation, de façon à ce que le jeu des élèves s'avère possible dans la phase de formulation et de validation. » (Ibid., p.20)

De ce fait, nous pouvons étudier la manière dont l'étudiant mobilise ses connaissances et ses savoirs lorsqu'il est confronté à une situation adidactique ou à une situation à dimension adidactique.

« Le milieu de référence est donc un milieu où les élèves sont engagés dans la formulation et la validation, c'est-à-dire la recherche de savoirs (sous forme par exemple des critères de validité) donnant prise sur la situation ; c'est-à-dire, de savoirs sur ce que la situation a mis en scène comme expérience et leurs a permis de manifester/construire comme connaissance. » (Ibid., p.18)

Cette étude de l'évolution d'une connaissance de l'étudiant nous conduit à préciser le rôle du professeur au niveau du milieu de référence.

« C'est donc un milieu où le professeur, s'il n'institutionnalise certes pas encore, ne peut rester neutre par rapport aux formulations et validations proposées : il est tenu d'agir, car les tâches qui lui incombent dans ce milieu vont se manifester par des actions / interventions (ré-actions par exemple aux actions, formulations des élèves). Sous quelle forme ? C'est ce qu'il convient d'examiner. » (Ibid., p.18)

Ainsi, le professeur effectue plusieurs tâches dans un milieu de référence. Ces tâches sont définies par Margolinas (1997) et citées par Bloch (1999) :

« ... - choisir les éléments du milieu à mettre en évidence, voire fournir des compléments au milieu, si nécessaire : sous forme de questions, d'exemples ...

- anticiper les conséquences des actions des élèves, des questions qu'ils proposent au débat, des compléments fournis ;

- décider de poursuivre ou d'abrégier les recherches des élèves, les débats, les formulations sur tel ou tel point (...). » (Ibid., p.22)

Le milieu de référence est le milieu pour lequel la recherche des savoirs par les étudiants dans les situations de formulation et de validation permet de construire une nouvelle connaissance.

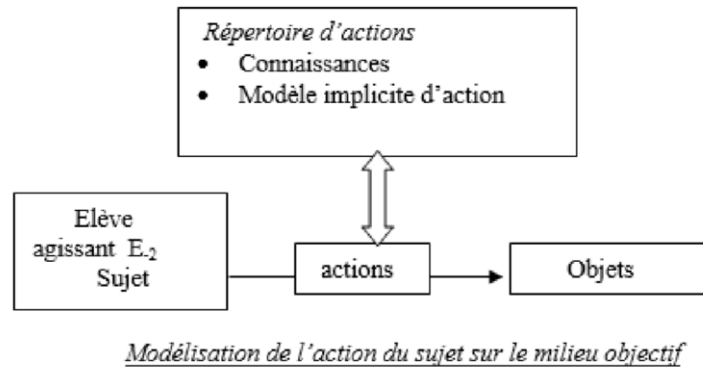
#### I.4.4 Identification des formes de raisonnements associés à chaque niveau du milieu

Lors de la mise en œuvre d'une situation adidactique ou à dimension adidactique, comme l'indique Gibel (2018) : nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus des étudiants au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (M<sub>2</sub>) (ou milieu heuristique) et le milieu de référence (M<sub>1</sub>) afin d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction au niveau du milieu-apprentissage.

##### **- Raisonnements et milieu objectif**

Confronté au milieu objectif, l'étudiant va agir par la mobilisation de ses connaissances antérieures. Dans ce cadre, nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) lors la modélisation du fonctionnement des connaissances en termes de répertoire didactique lors de l'interaction étudiant/milieu objectif. En s'appuyant sur *son répertoire de connaissances*, il va établir une action sur les objets.

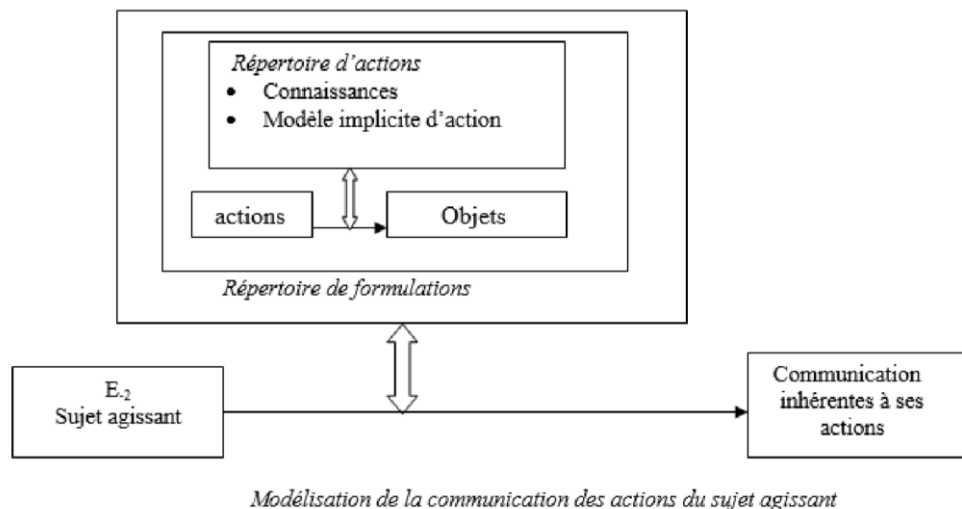
« Ce qui motive l'action sur les objets c'est le répertoire didactique dont dispose l'élève.



**Figure 3-7** : schéma de modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif (Gibel, 2018, p.42)

L'étudiant est amené à effectuer des choix afin de décider des connaissances et des savoirs qu'il va mobiliser pour répondre à la situation. Dans de nombreuses situations mathématiques, plusieurs procédures différentes peuvent permettre d'établir la réponse attendue.

*« Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a choix s'il y a plusieurs possibilités effectives. On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux-mêmes. » (Gibel, 2018, p.42)*

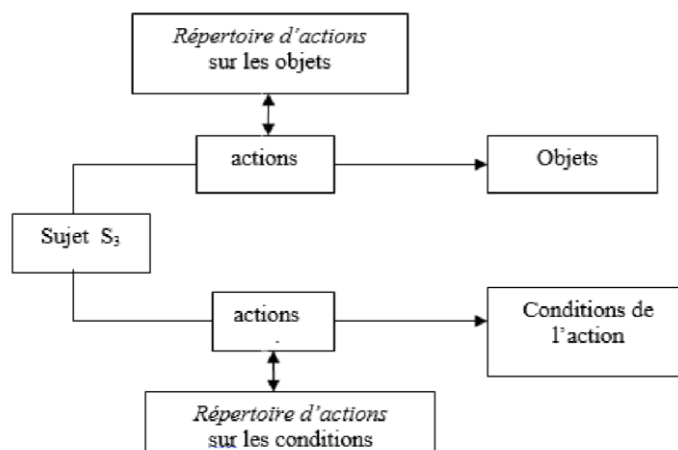


**Figure 3-8** : schéma de modélisation de la communication des actions du sujet agissant

**- Raisonnements et milieu de référence**

Au niveau du milieu de référence (M<sub>1</sub>), l'étudiant va interpréter les savoirs et les connaissances mobilisés par confrontation au milieu objectif afin de produire son raisonnement.

Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) qui a modélisé les différentes formes d'actions du sujet apprenant dans ce schéma :



**Figure 3-9** : schéma de modélisation des différentes formes d'action du sujet apprenant (Gibel, 2018, p.44)

« Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer : d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, autrement dit l'élève est conduit à envisager une modification des conditions dans lesquelles il va utiliser les objets. Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en termes de conditions. » (Gibel, 2018, p.44)

Lors de l'expérimentation et notamment à un moment du déroulement d'une séquence, le schéma de la structuration du milieu nous permet de caractériser chacune des situations « emboîtées » identifiées, (Margolinas, 1994 ; Brousseau & Gibel, 2005).

Il résulte de l'étude de ce schéma, la nécessité d'élaborer une séquence intégrant des situations à dimension adidactique en première année (PC) mettant en jeu les niveaux du milieu objectif ( $M_2$ ), milieu de référence ( $M_1$ ) et milieu d'apprentissage ( $M_0$ ).

Dans le contexte de l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations mathématiques en classe de première année (PC), l'élaboration d'un modèle s'appuyant sur cette structuration des milieux adidactiques permet de conduire une analyse détaillée des raisonnements, (Bloch & Gibel, 2011, 2019, 2020).

## **II. Les rôles déterminants des ingénieries didactiques en théorie des situations didactiques**

L'un des principes de base de la théorie des situations didactiques est

« (...) - de comprendre qu'il y a des régimes de fonctionnement des savoirs et d'articulation des savoirs qui ne sont pas les mêmes que la logique des raisons (texte du savoir) ;



- de questionner ce que cet écart pose comme problèmes et ce que cela permet de résoudre le cas échéant. » (Bessot, 2011, p.28)

Dans la section suivante, nous expliquons le processus d'une ingénierie didactique versus une ingénierie didactique de développement en tant que méthodologie de recherche.

### ***II.1. Ingénierie de recherche et ingénierie didactique de développement***

En théorie des situations didactiques, l'ingénierie didactique est « au cœur de la didactique », selon Brousseau et Brousseau (2006). En effet, l'ingénierie didactique est :

« - l'indispensable instrument de confrontation de la science didactique avec la contingence ;  
- l'instrument et l'objet des observations ;  
- le moyen de mise en œuvre et de diffusion de ses résultats vers les enseignants et le public. »  
(Brousseau & Brousseau, 2006, glossaire)

A l'instar d'Artigue (2002), l'ingénierie didactique est considérée comme méthodologie de recherche qui

« (...) se différencie d'abord des méthodes expérimentales alors usuelles en éducation par son mode de validation. Ce mode de validation est en effet interne et basé sur la confrontation entre une analyse a priori dans laquelle sont engagées un certain nombre d'hypothèses et une analyse a posteriori qui s'appuie sur les données issues de la réalisation effective. » (Artigue, 2002, p.63)

L'ingénierie didactique, comme méthodologie de recherche, se caractérise différemment des autres types de recherche, en premier temps, par un « schéma expérimental », selon Artigue (1988), basé sur

« ... des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignements. » (Artigue, 1988, p.247)

Dans le même contexte, l'ingénierie didactique est définie par Perrin-Glorian (2011) comme méthodologie de recherche

« ... susceptible de faire apparaître des phénomènes didactiques dans des conditions aussi proches que possible du fonctionnement normal d'une classe mais contrôlées, permettant d'étudier les situations didactiques produites tout en prenant en charge la complexité de la classe. »  
(Perrin-Glorian, 2011, p.56)

Le processus expérimental de la méthodologie d'ingénierie didactique est découpé temporellement en trois principales phases, selon Artigue (1988) :

#### **- Phase 1 : « les analyses préalables »**

Les analyse préliminaires se réalisent plus souvent sur :

- « l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement ;
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets ;

- *l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution ;*
- *l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective ;*
- *et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche. » (Artigue, 1988, p.249)*

- **Phase 2 : « conception et analyse *a priori* des situations didactiques »**

Afin de faciliter l'analyse d'une ingénierie didactique, il est utile de distinguer les deux types de variables de commande : *les variables macro-didactiques et les variables micro-didactiques.*

« - *les variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie ;*

- *et les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie, c'est-à-dire l'organisation d'une séance ou d'une phase, les unes et les autres pouvant être elles-mêmes des variables d'ordre général ou des variables dépendantes du contenu didactique dont l'enseignement est visé. » (Ibid., p.255)*

- **Phase 3 : « expérimentation, analyse *a posteriori* et validation »**

L'analyse *a posteriori* s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation, par exemple les observations réalisées lors du déroulement de l'expérimentation, les productions des élèves en classe ou hors de classe, etc.

La validation des hypothèses engagées dans la recherche se réalise par la confrontation de deux analyses : une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori*.

Ces différentes phases joueront un rôle essentiel dans l'élaboration d'une ingénierie que nous construirons dans le cadre de la partie expérimentale.

Dans le contexte de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique en classe, nous rejoignons le point de vue de Perrin-Glorian et Baltar (2019) qui ont prouvé l'insuffisance de cette méthodologie de recherche lors de la confrontation des étudiants aux situations en classes ordinaires. En effet,

« *En particulier, vu la difficulté souvent observée dans les classes à faire le lien entre l'activité des élèves et le savoir à retenir, il est nécessaire de prévoir soigneusement les modifications à apporter dans le milieu d'une situation d'action pour permettre la formulation et la validation des connaissances en jeu. (...)*

*Cependant, le travail avec des enseignants extérieurs à la recherche sur un projet d'ingénierie didactique avant la mise en œuvre permettent de mieux connaître les pratiques ordinaires des enseignants, les manques éventuels relatifs aux conditions qui devraient favoriser l'apprentissage des élèves mais aussi des enrichissements qui pourraient être apportés à l'ingénierie initiale en y*

*intégrant des éléments qui font partie des pratiques ordinaires des enseignants. » (Perrin-Glorian & Baltar, 2019, p.74-75)*

L'existence des difficultés de diffusion des ingénieries didactiques dans l'enseignement ordinaire témoignent de la naïveté du modèle de l'ingénierie didactique classique dans la recherche fondamentale de la didactique qui est vu uniquement dans une perspective descendante (recherche – ingénierie – développement - enseignement).

Nous rejoignons le point de vue de Perrin-Glorian (2011), ces difficultés ont

*« ... fait apparaître la nécessité d'étudier de plus près le fonctionnement de l'enseignement ordinaire du point de vue des contraintes institutionnelles (y compris sociales) cadrant l'exercice du métier d'enseignant et de la conduite de la classe. » (Perrin-Glorian, 2011, p.65)*

Cet élément nous a conduit à justifier le fait que nous avons fait le choix de construire notre ingénierie dans le cadre d'une recherche collaborative afin d'être au plus près des contraintes de l'enseignant et de les prendre en compte.

Perrin-Glorian (2011) s'est intéressée au problème proposé par Chevallard (1982) pour développer *une ingénierie didactique de deuxième génération* s'appuyant sur une ingénierie didactique de la première génération afin de mettre en considération l'écoulement de temps et le développement des cadres théoriques en ce temps.

*« ... le développement actuel de la didactique des mathématiques permet de reposer « le problème de l'action et des moyens de l'action sur le système d'enseignement » (Chevallard, 1982) et d'envisager une ingénierie didactique qui vise à produire des ressources pour l'enseignement ordinaire et à étudier l'impact que peuvent avoir les recherches en didactique sur l'enseignement ordinaire. » (Ibid., p.66)*

La question qui se pose : l'ingénierie didactique peut-elle permettre à la fois des avancées sur des questions de recherche tout en permettant la diffusion de ces résultats dans l'enseignement ordinaire ?

Perrin-Glorian (2011) pose deux niveaux de questionnement :

- un premier niveau celui de « l'étude des situations dans des conditions relativement protégés ». Il correspond à une ingénierie didactique classique ;
- un second niveau celui de la prise en compte des contraintes de l'enseignement ordinaire par le passage à « une idée d'adaptation beaucoup plus dialectique relativement aux pratiques ordinaires ».

Dans ce cadre, nous rejoignons le point de vue de cette didacticienne qui a donné une définition de l'ingénierie didactique de développement :

*« C'est l'ensemble de ces deux niveaux qu'il faut considérer dans une ingénierie didactique pour le développement de ressources et la formation (...). Le problème n'est plus le contrôle et la*

*diffusion des produits d'ingénierie issus des recherches mais de déterminer les variables fondamentales au regard des savoirs en jeu qui commande l'ingénierie dont on veut faire une ressource pour l'enseignement ordinaire. » (Ibid., p.67)*

Nous passons à présenter les principaux enjeux et les spécificités de l'ingénierie didactique de développement dans le paragraphe suivant.

## ***II.2. Les principaux enjeux et les spécificités d'une ingénierie didactique de développement***

L'ingénierie didactique de développement est une méthodologie de recherche qui doit permettre d'avancer sur les questions de diffusion de situations aux enseignements ordinaires. Ainsi, elle apparaît comme une « interface » entre recherche et enseignement, (Gobert, 2011).

Dans notre cas d'étude, une ingénierie didactique de développement (IDD) est une méthodologie de recherche menée dans le cadre d'un travail collaboratif entre chercheurs, enseignant et formateur.

*« ...l'ingénierie didactique sera la manière d'enseigner la notion concernée cette année-là, elle entre dans le temps didactique de la classe. Ainsi, en même temps qu'un instrument phénoménotechnique pour le chercheur, c'est un dispositif d'enseignement et d'apprentissage dans la classe. » (Perrin-Glorian, 2011, p.56)*

Dans notre travail, nous rejoignons le point de vue de Perrin-Glorian (2011) et nous envisageons d'élaborer une *ingénierie didactique de deuxième génération* :

*« Inversement, avant d'essayer d'implanter une ingénierie didactique dans l'enseignement ordinaire, il est nécessaire de s'assurer de sa validité au niveau expérimental. Il faut donc prévoir au moins deux niveaux d'ingénierie (peut-être-plus), avec des objectifs différents :*

- premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques "protégées" pour tester la validité théorique des situations (...);*
- deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont pris comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élève...). » (Ibid., p.66-67)*

A l'instar de Perrin-Glorian (2011), l'enseignant doit garder entièrement la responsabilité de l'enseignement dans sa classe.

*« Un des points délicats est son action sur le milieu, au moment de la dévolution, au moment de la recherche des élèves, au moment de l'institutionnalisation. » (Ibid., p.69)*

Perrin-Glorian et Baltar (2019) ont étudié la notion de l'ingénierie didactique de développement en expliquant :

*« L'IDD se distingue par le type de questions qu'elle aborde, questions qui posent des problèmes méthodologiques et théoriques particuliers. Le projet reste de développer une recherche fondamentale et des cadres théoriques qui permettent d'étudier les phénomènes didactiques et de donner aux enseignants des outils qui les aident à gérer les problèmes d'enseignement et d'apprentissage qu'ils rencontrent dans leur quotidien. » (Perrin-Glorian & Baltar, 2019, p.73)*

Les éléments caractéristiques de l'ingénierie didactique de développement dans un cadre d'étude des pratiques ordinaires sont présentés selon deux projets différents dont le premier est piloté par une question de formation. Le deuxième projet est piloté par une question de recherche. Dans ce cas, l'ingénierie didactique de développement est une méthodologie du travail pour la production de la ressource pour la recherche. Ainsi, elle se présente sous la forme d'un projet collaboratif entre chercheur, enseignant et formateur. Gobert (2011) a présenté les rôles de chacun d'eux dans l'ingénierie didactique de développement. Le rôle du chercheur est de privilégier l'avancée de la question de recherche et de s'investir pleinement dans l'élaboration des situations mathématiques. Le rôle de l'enseignant est la configuration et les choix de mise en œuvre des séances pour la classe. Par ailleurs, le rôle du formateur se réalise pour les reconfigurations et réifications des données de l'expérimentation.

L'ingénierie didactique de développement en tant que méthodologie de recherche partage trois points essentiels, (Perrin-Glorian, 2019) :

- « - les questions de recherche sont directement issues d'un problème d'enseignement d'un contenu précis et englobent des questions de formation des maîtres ;*
- le caractère cyclique de la méthodologie qui nécessite plusieurs réalisations et donc un temps long ;*
- un partage assumé et théorisé du travail et des responsabilités dans l'élaboration de l'ingénierie entre chercheurs, enseignants et éventuellement formateurs. » (Perrin-Glorian, 2019, p.3)*

Au niveau Supérieur, l'enseignant de la classe peut prendre des décisions non prévues dans l'analyse *a priori* lors de l'expérimentation puisque l'enseignant qui doit parvenir à articuler les spécificités de l'ingénierie à laquelle il a pris part activement lors de son élaboration et les contraintes institutionnelles étroitement liées aux contraintes temporelles auxquelles il peut difficilement se soustraire ; tandis que les autres acteurs sont « *observateurs et recueillent des observables pour les analyses ultérieures* » (Perrin-Glorian, 2019).

L'ingénierie didactique de développement contribue à l'interrogation sur le savoir à enseigner et plus précisément sur le rapport au savoir à créer pour les étudiants. Ce questionnement amène à la distinction de deux niveaux en cette ingénierie.

- « Les diverses descriptions de l'IDD mettent en avant deux niveaux non indépendants de questionnement et de validation.*

*Au premier niveau, il s'agit de tester la validité théorique des situations au plan épistémologique et cognitif et de dégager les choix essentiels de l'ingénierie, ce qui est primordial car il est indispensable de laisser des marges de manœuvre aux enseignants tout en leur indiquant les fondements des ingénieries qui permettent de construire avec les élèves le sens des notions enseignées.*

*Le deuxième niveau concerne les pratiques ordinaires des enseignants et leurs possibilités d'évolution en repérant les points sur lesquels ils ont besoin de soutien, points à prendre en compte dans les ressources et dans les formations. » (Ibid., p.5-6)*

A l'instar de Mangiante et Perrin-Glorian (2017), la dialectique entre ces deux niveaux est un élément important pour atteindre le but commun à tous les acteurs (enseignant, chercheur et formateur) en l'ingénierie didactique de développement.

*« Ainsi, la nécessité de l'instance de conversion semble découler de la volonté de prendre en compte les deux sens des rapports entre recherche et enseignement : diffuser des résultats de recherche via une ingénierie didactique et répondre aux besoins de l'enseignement. C'est le lieu où s'organise une dialectique entre les niveaux 1 et 2 de l'IDD et c'est aussi le moyen d'élaborer une ressource utile du point de vue des chercheurs (répondant aux besoins qu'ils ont identifiés) et utilisable du point de vue des enseignants (répondant aux besoins ressentis). » (Mangiante et Perrin-Glorian, 2017, p. 53)*

Notre méthodologie de recherche repose sur l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement dans le cadre d'un travail collaboratif. Notre projet d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction nécessite une collaboration étroite avec l'enseignant de la classe de première année (PC). L'enseignant s'intéresse à notre objectif initial de notre recherche concernant la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'usage et l'appropriation des notions de relation de comparaison des fonctions, développements limités et la formule de Taylor-Young. Il a la volonté de changer son cours « classique » en vue de connaître les erreurs effectuées par les étudiants lors de la résolution des situations liés à ces objets mathématiques afin de pouvoir leur aider à surmonter certaines difficultés.

L'enseignant a constaté l'existence des difficultés chez ses étudiants lors de la résolution des situations mathématiques liées au concept de développement limité d'autant que ce concept mathématique est un outil essentiel dans les champs de l'Analyse et de la physique au niveau du cycle préparatoire en première et deuxième année (PC). En effet, la notion de développement limité est un savoir à enseigner afin de l'utiliser en tant que procédure soit dans le domaine du calcul de limite d'une fonction relevant d'une forme indéterminée, soit dans le domaine de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique, soit dans l'étude de

l'intégrale d'une fonction, soit dans l'étude de la convergence des séries numériques, etc. De ce fait, il est pleinement conscient de la nécessité de changer le processus d'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction pour permettre aux étudiants d'accéder au sens de savoir. Il s'est intéressé à notre projet de recherche afin de trouver des éléments de réponse à son questionnement sur :

Les raisons de l'existence des difficultés chez les étudiants lors de l'appropriation et l'usage du concept de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel et notamment au voisinage d'un réel différent de zéro.

Nous avons décidé, avant de proposer ce projet d'élaboration d'une ingénierie didactique de développement en classe, d'étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par des étudiants lors de la conceptualisation des notions de la relation de comparaison de fonctions, de développements limités et de la formule de Taylor-Young dans un enseignement « classique ». Il nous semble que l'évaluation des connaissances des étudiants, relatives au concept d'approximation locale d'une fonction, est la manière la plus adéquate d'étudier ces erreurs. Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Vandeveld (1982) qui a précisé la définition de l'évaluation formative :

*« ... c'est une évaluation intervenant, en principe, au terme de chaque tâche d'apprentissage et ayant pour objet d'informer du degré de maîtrise atteint et / ou de découvrir où, et en quoi, un, des, les élèves éprouvent des difficultés d'apprentissage non sanctionnées comme erreurs ; en vue de proposer ou de faire découvrir des stratégies susceptibles de permettre une progression (remédiations). » (Cité par Gibel & Ennassef, 2010, p.5)*

De ce fait, nous pensons que la confrontation des étudiants à des situations mathématiques « classiques » dans le cadre d'une évaluation formative nous permettra d'identifier une typologie de leurs erreurs liées à l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction afin de trouver les moyens convenables de surmonter leurs difficultés. Ces moyens seront les points d'appuis lors de la construction des situations didactiques en vue d'offrir aux étudiants la possibilité d'accéder au sens du savoir.

Afin d'atteindre notre objectif de cette recherche, nous envisageons d'élaborer et la mise en œuvre, en collaboration avec l'enseignant de la classe, une ingénierie didactique de développement qui se réalise pendant deux années universitaires : 2018-2019 et 2019-2020. De ce fait, notre projet de recherche s'effectue avec la même enseignante, mais notre échantillon des étudiants diffère d'une année à l'autre.

La construction et l'élaboration de cette ingénierie nécessite des échanges et des travaux spécifiques avec l'enseignant, pendant plusieurs réunions, avant de sa mise en œuvre en classe. De ce fait, notre travail collaboratif se réalise en plusieurs étapes temporelles :

- Etape 1 : la détermination des connaissances antérieures des étudiants entrant à l'Université sur le concept d'approximation locale d'une fonction (les savoirs enseignés dans le Secondaire), ainsi que les savoirs à enseigner, en Analyse, liés à ce concept mathématique en première année (PC) ;

- Etape 2 : la construction des situations mathématiques « classiques » permettant d'évaluer les acquis des étudiants sur l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction qui sont liés aux chapitres : « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques » ;

- Etape 3 : la proposition d'un devoir suite à l'enseignement de ces chapitres ;

- Etape 4 : l'étude des productions des étudiants afin d'identifier les principales erreurs effectuées liées au domaine d'approximation locale d'une fonction en termes d'obstacles ;

- Etape 5 : la construction des situations à dimension adidactique (Mercier, 1995 ; Bloch, 1999) en vue de surmonter les obstacles liés à l'apprentissage de ce concept mathématique ;

- Etape 6 : la mise en œuvre de ces deux situations pendant deux séances du chapitre « Analyse asymptotique » ;

- Etape 7 : la proposition d'un devoir suite à l'enseignement de ce chapitre afin d'analyser les effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants.

L'ingénierie didactique de développement s'est déroulée de 2019 à 2020 en collaboration avec l'enseignante ayant la responsabilité de deux classes de première année (PC). Le rôle de l'enseignante est très spécifique lors de l'expérimentation conduite dans ses classes :

- pendant l'année universitaire 2018-2019, elle organise temporellement son enseignement en terminant sa progression par un devoir écrit proposé aux étudiants de ses deux classes, comportant chacune 22 étudiants, s'inscrivant dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. Ce devoir sur table est proposé, en avril 2019, fait suite à l'enseignement des chapitres « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques » ;
- pendant l'année anniversaire 2019-2020 : elle co-construit l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » en intégrant deux situations à dimension adidactique lors de deux séances et à la fin de ce chapitre, elle propose un devoir écrit à toute la classe.

L'analyse de la dévolution d'une situation nécessite en amont une réflexion sur la manière de construire le concept mathématique objet d'étude.



Dans notre travail, nous souhaitons étudier l'évolution d'une connaissance mobilisée lors de l'action de l'étudiant pour construire un apprentissage en vue d'analyser le développement cognitif de ses compétences et de ses savoirs mobilisés par confrontation à une situation. Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Brousseau (2004) qui donne l'intérêt de la prise en considération des représentations du sujet au lieu de ses connaissances.

*« Si « la connaissance de l'élève » différerait de celle de savant, elle serait une erreur ; elle ne pourrait donc pas être une connaissance. Il nous semble que l'emploi du terme « représentation » permet d'échapper en partie à cette logique. Le terme « connaissance » étant réservé aux connaissances « vraies », le terme « représentation » peut s'en écarter un peu pour désigner les idées qu'en ont divers sujets. » (Brousseau, 2004, p.244)*

Ainsi, une étude du développement cognitif et du fonctionnement d'un savoir lors de son apprentissage et notamment lors de son appropriation et de son usage nous permettra d'identifier ses différentes représentations. Pour ceci, il est très important de rechercher les outils théoriques adéquats afin de conduire une analyse de la construction d'un concept mathématique en Analyse ainsi que de regarder la forme de la connaissance lors de l'action du sujet pour construire un apprentissage, (Vergnaud, 1990).

### **III. Outillage didactique pour analyser la construction d'un concept en Analyse**

#### ***III.1. Évolution des objets de l'Analyse standard à la transition Secondaire/Supérieur – Les différents paradigmes liés à l'apprentissage de l'Analyse***

Lors de l'étude historique et épistémologique du concept d'approximation locale d'une fonction, développée dans le chapitre 2, nous avons établi l'existence des obstacles qui résultent d'une rupture d'ordre épistémologique et sont étroitement liés au changement de paradigme. Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier (2015) qui ont conduit une étude de l'évolution historique des mathématiques et son impact sur l'enseignement actuel. En effet, le domaine de l'Analyse

*« ... présente deux facettes assez communes dans le développement des mathématiques : elle résulte d'un travail de modélisation de situations issues du monde réel et elle s'appuie également sur des objets qui peuvent avoir une autre nature mathématique, géométrique pour les courbes ou les aires ; algébrique pour l'écriture de nombreuses fonctions. » (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015, p.5)*

A l'instar de Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier (2015), il existe trois paradigmes de l'Analyse standard :

« Le paradigme [Analyse Arithmetico-géométrique], noté (AG), qui permet des interprétations provenant, avec quelques implicites, de géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel (...).

Le paradigme [Analyse calculatoire], noté (AC). Dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Dans ce paradigme, les fonctions vont être identifiées avec leur écriture, retrouvant ainsi l'idéal perdu d'assimiler toutes les fonctions aux fonctions analytiques.

Le paradigme [Analyse Infinitésimale], noté (AI). Cette fois, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité (...). » (Ibid., p.7)

Dans la pratique de l'Analyse en première année (PC), nous pouvons envisager dans le cas de l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un réel :

$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]-\alpha; \alpha[ \cap D_f$  ; on a :  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$  un développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

- *Paradigme [AG]* : par exemple, le réel  $a_1$  est la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$  qui est d'équation :  $y = a_0 + a_1x$ .

- *Paradigme [AC]* : par exemple, le résultat d'un calcul symbolique sur des expressions analytiques, le calcul de limite du rapport et de différence des fonctions, etc.

- *Paradigme [AI]* : par exemple, la fonction  $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  est l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

Dans notre étude, nous nous intéressons à identifier clairement dans quel paradigme s'inscrit le raisonnement de l'étudiant et notamment sa manière d'appréhender les conceptions. Nous pouvons distinguer quatre catégories de conceptions :

- conceptions spécifiques qui relèvent du paradigme [AC] et/ou [AG] : dans ce cas, l'étudiant effectue un calcul algébrique et formel ou il mobilise des objets de géométrie. Par exemple, il détermine l'équation d'une tangente par la mobilisation de la technique du calcul du nombre dérivé ou par l'interprétation de sa représentation graphique, etc.
- conceptions plus fines et plus précises qui relèvent du paradigme [AI] : dans ce cas, l'étudiant mobilise les notions de fonctions négligeables, d'approximation polynômiale d'une fonction, de développements limités ou de la formule de Taylor-Young afin de déterminer l'approximation locale d'une fonction.
- conceptions s'inscrivent dans le paradigme [AI] qui coexistent à un certain moment de la progression d'un raisonnement en lien avec les paradigmes [AC] et [AG] : dans ce

cas, l'étudiant s'appuie sur des objets du domaine de l'étude d'une fonction en utilisant le concept d'approximation locale d'une fonction. Par exemple, il interprète le résultat du calcul de limite de fonctions par la mobilisation de la technique de la détermination de fonctions négligeables.

- conceptions que certains étudiants ne maîtrisent pas suffisamment : dans ce cas, leurs conceptions ne reflètent pas la mobilisation de connaissances et de savoirs spécifiques du Supérieur qui s'inscrivent dans le paradigme [AI].

Nous pensons que l'identification des paradigmes de l'Analyse standard nous permettra d'étudier d'une manière plus précise l'évolution des connaissances et des savoirs mobilisés par les étudiants confrontés à une situation réelle en classe en vue de produire un raisonnement.

### ***III.2. Caractérisation d'un concept mathématique***

Nous rejoignons le point de vue de Vergnaud (1990) qui a développé la théorie des champs conceptuels afin de comprendre la manière de la construction d'un concept à partir des actions du sujet (élève ou étudiant). Un concept mathématique acquiert du sens pour l'élève c'est à travers des situations et des problèmes ainsi que des théorèmes, des formules, des techniques liés à son usage.

Dans l'apprentissage, un concept mathématique ne se réduit pas à sa définition mais il est très important de prendre en considération le rôle de langages et de symboles dans sa conceptualisation. Pour ceci, il est nécessaire de considérer les composantes d'un concept lors de l'action du sujet pour construire un apprentissage. En effet, nous devons conduire une étude du développement cognitif et du fonctionnement du concept lors de son apprentissage et de son usage, (Vergnaud, 1990).

Le terme du concept est introduit dans les travaux de Vergnaud (1982) et développé dans les travaux d'Artigue (1991) afin de distinguer les composantes d'un concept mathématique :

« - la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée ;

- l'ensemble des signifiants associés au concept ;

- la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens ;

- les outils : théorèmes, techniques algorithmiques, spécifiques du traitement du concept ; (...).»

(Artigue, 1991, p.271)

La construction d'un concept mathématique se réalise à travers des situations mathématiques et des problèmes que ce dernier permet de résoudre. Ainsi, il existe des difficultés de différentes natures pour l'appropriation et l'utilisation d'un concept. En effet, l'observation des productions des étudiants confrontés à une situation met en évidence ces vraies difficultés. De ce fait, il est

nécessaire de percevoir et d'interpréter les rétroactions qu'offre le milieu. La structure du contrôle aura un rôle très important dans la construction d'un concept mathématique. Dans ce cas, nous parlons de la caractérisation d'une conception. La définition d'un concept ne prend pas en charge « *les contrôles exercés par le sujet sur ses propres actions* », (Ouvrier-Bufferet, 2004). Dans ce contexte, nous rejoignons le point de vue de Balacheff et Margolinas (2003) qui ont prouvé l'intérêt de distinguer les différentes conceptions d'un concept mathématiques en s'appuyant sur toutes les approches de Vergnaud (1982), Duroux (1983) et d'Artigue (1991) qui

*« ... convergent sur le fait que relativement à un concept donné, la connaissance d'un sujet peut s'actualiser en des conceptions distinctes selon les caractéristiques des situations. Les éléments de caractérisation sont alors les problèmes dont la dévolution est le résultat des situations, les systèmes de représentation et les moyens de traitement (action et décision). » (Balacheff & Margolinas, 2003)*

Dans la section suivante, nous essayons de développer la caractérisation d'une conception introduite par Vergnaud (1982) et développée par Artigue (1991) dans le cadre de la théorie des situations didactiques.

### ***III.3. Caractérisation d'une conception mathématique***

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le sens d'une connaissance mathématique se définit par plusieurs moyens parmi eux l'ensemble des conceptions, selon Brousseau (1998).

*« Le sens d'une connaissance mathématique se définit, non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique, (...), non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution, mais aussi par l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, les économies qu'elle procure, les formulations qu'elle reprend, etc. » (Brousseau, 1998, p.117)*

A l'instar de Brousseau (1997), dans le cadre des situations didactiques, la manière de traiter particulièrement une notion mathématique constitue une conception.

*« Les conceptions peuvent se déterminer théoriquement comme des ensembles de connaissances et de savoirs fréquemment sollicités ensemble pour résoudre des situations, empiriquement comme des patrons de réponses cohérents donnés par une partie importante des sujets sur une classe de situation. » (Brousseau, 1997, p.17)*

Nous rejoignons le point de vue d'Artigue (1991) lorsqu'elle indique que la notion de conception répond à deux nécessités distinctes dont la deuxième d'ordre méthodologique :

« - mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus au moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes ;

- aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève. » (Artigue, 1991, p.265)

Ce sont les deux nécessités qui vont répondre à la conception (Artigue, 1991).

« On distingue dans les conceptions des sujets ces diverses composantes et, en particulier :

- la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève ;
- l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques ;
- les outils, théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept. » (Ibid., p.271)

Nous n'avons pas besoin de cette définition globale de la *conception* en tant qu'outil d'ordre théorique pour l'analyse des observations des étudiants en situation (Artigue, 1991),

« ... mais l'identification de conceptions locales qui se manifeste en situation et l'analyse des conditions de passage de telle conception locale à telle autre, qu'il s'agisse de rejeter une conception erronée, de mettre en place une conception permettant d'améliorer l'efficacité dans la résolution de telle ou telle classe de problèmes ou de favoriser la mobilité entre des conceptions déjà disponibles. De ce point de vue, c'est l'objet local qui est bien l'outil adéquat. » (Ibid., p.271-272)

De ce fait, une *conception* est considérée comme un outil pour la construction d'un concept mathématique qui permet la modélisation de l'étudiant en tant qu'agent apprenant, (Artigue, 1991). Par ailleurs, une *conception* est liée à la connaissance de l'apprenant en situation. Elle est distinguée par les représentations et les traitements qu'elle mobilise dans un domaine scolaire. En conclusion, une « *conception est l'instance d'un concept par le système du [sujet<>milieu]* », (Ibid.).

En mettant en considération les travaux de Brousseau (1980) et Duroux (1982),

« ...la conception est un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient ; elle va constituer un outil, aussi bien pour l'analyse de ce savoir et l'élaboration de situations didactiques que pour l'analyse stricte du comportement de l'élève. Même si les conceptions font l'objet d'une définition autonome, ce qui intéresse le didacticien, visiblement, ce n'est pas de dresser un catalogue fin des conceptions possibles, mais d'étudier l'articulation conceptions-situations dans un apprentissage donné. » (Ibid., p.270)

En s'attachant à la nature de la situation, Brousseau a toujours voulu indiquer qu'on ne pouvait pas étudier les connaissances et les savoirs mobilisés sans tenir compte des conditions dans lesquelles ils sont produits. C'est-à-dire qu'il faut toujours mettre au centre de la situation les questions suivantes : Pourquoi pose-t-on ce type de problème ? Quelle est la nature de ce type de problème ?

Quand on a bien analysé la nature de la situation, on peut montrer les conceptions qui sont susceptibles de surgir et les conceptions qui surgissent effectivement. En adoptant le paradigme de l'erreur et la problématique des obstacles, Balacheff (1995) considère qu'une conception

*« ... n'a pas en soit de caractère local, elle est d'abord une connaissance au sens d'un état d'équilibre dynamique du système en interaction sujet/milieu. » (Balacheff, 1995, p.224)*

A l'instar de Brousseau (1997), la notion de conception est développée afin d'étudier le traitement d'une notion mathématique. Ainsi, les conceptions

*« ... peuvent se déterminer théoriquement comme des ensembles de connaissances et de savoirs fréquemment sollicités ensemble pour résoudre des situations, empiriquement comme des patrons de réponses cohérents donnés par une partie importante des sujets sur une classe de situation. » (Brousseau, 1997, p.17)*

Le système des représentations joue un rôle déterminant dans la conception. Nous allons attacher à définir les représentations selon la sémiotique de Peirce et les registres de représentation sémiotique de Duval (1993, 2006).

#### **III.4. Les représentations sémiotiques d'un concept**

Nous rejoignons le point de vue de Bloch (2005) qui donne l'intérêt de l'étude des signes lors de l'analyse des difficultés des étudiants en début de l'Université. En effet,

*« ... la transition Secondaire/Supérieur dévoile des comportements semblables d'étudiants confrontés au formalisme de l'analyse. Eclaircir les distorsions entre l'interprétation attendue et celle qui est à l'œuvre dans le travail des élèves nécessite d'analyser la nature des objets en jeu dans l'activité mathématique, la relation entre ces objets et les signes qui les représentent, la nature même de ces signes, et les sémoses en jeu – c'est-à-dire les processus de production et d'interprétation des signes dans les situations didactiques qui visent l'enseignement d'une notion mathématique. » (Bloch, 2005, p.1)*

Nous pensons que l'étude des signes nous aidera à conduire une analyse plus fine d'un concept mathématique. La *sémiotique* désigne l'étude des signes et de leurs significations.

La définition de l'étude des signes « l'analyse sémiotique » est introduite par Peirce au XIX<sup>e</sup> siècle et développée par Duval en fin du XX<sup>e</sup> siècle.

Nous commençons cette partie par la présentation de la sémiotique peircienne.

### III.4.1. La sémiotique de Peirce

Selon Savan (1980), C.S. Peirce, en 1867, a élaboré une définition et une classification scientifique des signes.

*« Un representamen est une relation triadique dans laquelle un fondement est relié à un objet par le biais d'un interprétant. (...) Dans ses écrits ultérieurs, il a indiqué qu'il préférait utiliser le mot « signe » pour désigner les representamen dont la pensée et l'action humaines sont les interprétants. » (Savan, 1980, p.9)*

Peirce a défini un signe d'un triadique composé de trois éléments : (R, O, I) avec

R : le representamen

O : l'objet qui est représenté par R

I : l'interprétant mettant en relation R et O

Savan (1980) a étudié la théorie des signes de Peirce en écrivant

*« PEIRCE a introduit la tripartition des signes en « indice », « icône » et « symbole ». Il tient la sémiotique pour une science première par rapport à la logique et il considère qu'elle constitue une base pour la logique des termes, des propositions et des arguments. La sémiotique fonde également les trois formes de raisonnement qu'on utilise dans les sciences : hypothèse, la déduction et l'induction. » (Savan, 1980, p.9-10)*

Cette théorie de Peirce est explicitée par Bloch (2005). En effet,

*« Un signe a, comme tel, trois références : premièrement il est un signe pour quelque pensée qui l'interprète ; deuxièmement, il est un signe qui tient lieu de quelque objet auquel il est équivalent dans cette pensée ; troisièmement il est un signe, sous quelque rapport ou qualité, qui le met en connexion avec cet objet. Posons-nous la question de savoir ce que sont les trois corrélats auxquels une pensée-signé réfère ». (1868)*

*« Un signe est quelque chose qui représente une autre chose pour un esprit. Pour son existence comme tel trois choses sont requises. En premier lieu, il doit avoir des caractères qui nous permettront de le distinguer des autres objets. En second lieu, il doit être affecté d'une façon ou d'une autre par l'objet qui est signifié ... En troisième lieu chaque représentation s'adresse à un esprit. C'est seulement pour autant qu'elle fait ceci qu'elle est une représentation » (1873) (...) » (Bloch, 2005, p.9)*

Par ailleurs, une analyse de l'activité mathématique nécessite des outils permettant l'analyse des connaissances et des savoirs mobilisés par l'étudiant. Comme indiqué dans les travaux de Bloch et Gibel (2011), cette analyse nécessite d'avoir recours à une analyse sémiotique de Peirce afin d'analyser les signes produits, leurs usages et leurs transformations. A l'instar de ces didacticiens, l'étude des signes qui apparaissent dans la production des étudiants nous aide à identifier les différentes conceptions, valides ou erronées.

### III.4.2. Représentations sémiotiques de Duval

Comme le spécifie Duval (1993), la distinction entre un objet et ses différentes représentations est obligatoire dans l'analyse sémiotique d'une activité mathématique.

*« En mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Un signe n'est intéressant que s'il peut être substitué à d'autres signes pour effectuer des opérations (Condillac, 1982). » (Duval, 2006, p.57)*

Nous rejoignons le point de vue de Duval(1993) qui donne des exemples des représentations d'un objet mathématique en indiquant que :

*« Une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique : un nombre, une fonction, un vecteur, (...) De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques : un segment, un point, un cercle ... » (Duval, 1993, p.37)*

Le seul moyen d'avoir accès à un objet mathématique est de prendre en compte ses différentes représentations sémiotiques qui

*« ... sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signification et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. » (Ibid., p.39)*

A l'instar de Bloch (2000), il est intéressant de mettre en considération des registres de représentation sémiotique pour le traitement d'une activité mathématique où

*« L'utilisation, dans la classe, de registres de représentation se fait par des écritures, un langage, des symboles... qui sont représentatifs, à un moment donné, de ce que les élèves et le professeur ont en commun comme répertoire pour traiter une question mathématique. » (Bloch, 2000, p.200)*

Au niveau Supérieur, l'articulation entre les divers registres de représentation sémiotique est importante pour l'apprentissage d'un concept mathématique, (Hitt, 2004).

*« Dès lors, il devient absolument nécessaire de proposer aux étudiants des activités de conversion entre les représentations d'un registre à un autre pour que les représentations en jeu, qui par nature sont complémentaires, donnent un support à la construction du concept en question. » (Hitt, 2004, p.350)*

Comme l'indique Hitt (2004), il est important de prendre en considération la production des représentations sémiotiques par les étudiants dans une démarche heuristique.

*« Le caractère fonctionnel et dynamique de ces représentations sémiotiques permet à l'étudiant d'avoir un contrôle sur la démarche qui le mène à la solution. » (Ibid.)*

Dans notre étude des objets inhérents à l'approximation locale d'une fonction, nous pouvons distinguer plusieurs registres de représentation sémiotique :



- Le registre algébrique : il intègre des expressions algébriques (polynômes, équation de la tangente ou d'une asymptote), des fonctions algébriques, des transformations des formules algébriques, etc.

- Le registre analytique : il concerne les expressions algébriques qui comprennent des symboles (exemples :  $\varepsilon$ ,  $\Sigma$ ,  $o$  etc.), des expressions ou représentations analytiques comme les concepts de l'analyse (limite, dérivée, intégrale, continuité, prolongement par continuité, etc.). Par exemple, le développement limité d'une fonction au voisinage de 0 à l'ordre  $n$  s'écrit sous la forme d'une égalité :  $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$  Avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et  $P$  : un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- Le registre de langage naturel : il désigne une expression écrite en langue naturelle.

- Le registre de langage formel : il désigne une expression écrite avec des symboles et des notations mathématiques.

- Le registre graphique : il comporte les courbes représentatives des fonctions (algébriques, transcendentes, etc.), les tangentes en un point, les asymptotes, etc.

- Le registre numérique : il comprend tout ce qui est calcul numérique comme les approximations décimales, rationnelles, calcul numérique de limite d'une fonction, à l'aide de la calculatrice, d'une fonction au voisinage ou en un point, calcul des dérivées en un point, etc.

- Le registre géométrique : il désigne toute interprétation des illustrations graphiques ou des expressions analytique ou algébrique comme l'étude locale de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente ou à son asymptote, etc.

Dans le cas de l'usage du logiciel dynamique de géométrie en classe, le répertoire de représentation est composé de deux composantes distinctes. La première est liée au répertoire didactique de la classe. La deuxième composante est liée au milieu de la situation. Par confrontation aux différents milieux, l'étudiant utilise des connaissances de son répertoire didactique afin de construire de nouvelles représentations. Ainsi, le répertoire de représentation est étroitement lié aux registres de représentation sémiotique.

### ***III.5. Analyse logique d'un concept en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique***

L'étudiant confronté à une situation réelle va agir sur cette dernière par l'utilisation de ses connaissances antérieures, sous forme de formules, de techniques, de théorèmes, de définitions, de propriétés, de règles du calcul algébrique et formel, de symboles, etc. liés à des savoirs. Cet usage doit reposer sur des relations logiques permettant la vérification des formulations et des transformations des expressions analytiques et algébriques, ainsi que dans certains cas des

interprétations des illustrations graphiques et des tracés. Dans ce sens, chaque étudiant va exprimer son mode de pensée en s'appuyant sur ses propres règles logiques afin de produire une réponse. La rédaction d'une solution nécessite un langage et une logique permettant l'usage des symboles et des signes. L'étude des symboles ou des signes utilisés et ses interprétations possibles nous aident à percevoir la manière dont l'étudiant a utilisé ses connaissances et ses savoirs afin de produire sa réponse. Ainsi, nous pensons que la dualité sémantique/syntaxique est nécessaire lors de l'analyse logique des productions des étudiants. A l'instar de Kouki (2008),

*« Le terme de syntaxe est utilisé également en logique dans un sens plus large englobant ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel, en opposition avec la sémantique, qui prend en compte les interprétations. » (Kouki, 2008, p.24)*

Nous pensons que l'analyse logique basée sur l'étude des deux dimensions sémantique et syntaxique est pertinente pour conduire des analyses didactiques dans l'enseignement et l'apprentissage des notions du domaine de l'Analyse au niveau du Supérieur.

Dans ce qui suit nous essayons de produire un aperçu sur les outils d'analyse des dimensions sémantique et syntaxique afin de pouvoir les mettre en relation avec les objets d'approximation locale d'une fonction.

### III.5.1. La sémantique logique

Nous rejoignons le point de vue de Frege (1971) qui a considéré qu'un signe se décompose en deux éléments : son sens et sa dénotation.

*« Le lien régulier entre le signe, son sens, et sa dénotation, est tel qu'au signe correspond un sens déterminé et au sens une dénotation déterminée tandis qu'une seule dénotation (un seul objet) est susceptible de plus d'un signe. De plus, un même sens a dans des langues différentes, et parfois dans la même langue, plusieurs expressions. » (Frege, 1971, p. 104)*

Notre travail se focalise sur les définitions et des exemples relatifs au sens et de la dénotation (ou référence) d'un signe ainsi qu'à ses valeurs.

La sémantique logique au sens de Tarski (1974) est

*« ... l'ensemble des études qui traitent des concepts, qui, en gros, expriment entre les expressions d'un langage et les objets et états de choses auxquels ces expressions se réfèrent. » (Tarski, 1974, p.133)*

De plus, Sinaceur (1991a) a expliqué que la sémantique logique au sens de Tarski

*« ...élargit le spectre des concepts métamathématiques propres à permettre d'établir des rapports entre forme et contenu. Plus encore, il définit un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permis par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète. » (Sinaceur, 1991, p.313)*

Kouki (2018) s'est appuyé sur les travaux de Frege (1971) et Tarski (1974) afin de résumer les notions de syntaxe et sémantique dans le cadre théorique de la logique des prédicats du premier ordre.

*« Le langage logique est défini par une syntaxe (système généré par des symboles et des règles combinés sous forme de formules) et une sémantique associée à ce langage et permettant d'attacher à ces symboles, et donc aux formules construites avec ces symboles, une interprétation. » (Kouki, 2018, p.46)*

Dans ce sens, nous rejoignons le point de vue de Kouki (2008) :

*« Le terme de syntaxe est utilisé également en logique dans un sens plus large englobant ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel, en opposition avec la sémantique, qui prend en compte les interprétations. » (Kouki, 2008, p.24)*

### III.5.2. La syntaxe et la sémantique en mathématiques

Dans le domaine des mathématiques, à l'instar de Kouki (2018) qui a défini la syntaxe selon un aspect purement didactique.

*« La syntaxe concerne l'aspect formel du langage ou d'une langue formelle. Elle se donne un alphabet de signes dépourvus de sens et susceptibles d'être combinés suivant des règles de formation et de transformation d'une part, et permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre est valide, d'autre part. » (Ibid., p.47)*

Dans le domaine de la didactique des mathématiques, concernant un langage formalisé,

*« (...) la sémantique étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. » (Ibid., p.49)*

De ce fait, la sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles utilisés, ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules mobilisées. La syntaxe est un système généré par des symboles et des règles combinés sous forme de formules.

En nous appuyant sur ces travaux, nous interprétons les dimensions sémantique et syntaxique dans le cas de l'étude des objets d'approximation locale d'une fonction par la mise en jeu de la notion de représentation d'un concept mathématique.

C'est la raison pour laquelle, nous allons adopter les définitions de dimension sémantique et syntaxique dans le cadre où la syntaxe se manifeste comme étant une manipulation et transformation des écritures symboliques mathématiques s'appuyant sur des opérations du calcul algébrique et formel d'une part, et la sémantique s'impose dans le cas où les transformations et formulations des expressions nécessitent des contrôles, interprétations et substitutions, ainsi que les interprétations des représentations graphiques, d'autre part.

### III.5.3 Syntaxique versus sémantique en Analyse

L'articulation entre les deux dimensions syntaxique et sémantique est au cœur de l'activité mathématique explicitement pour les étudiants à partir de leurs analyses didactiques de la déduction naturelle dans le calcul des prédicats, (Durand-Guerrier & Arsac, 2003). Et plus précisément, la satisfaction d'une phrase ouverte par un élément et la démonstration naturelle de Copi (1954) qui

*« ... permettent de prendre en compte de manière explicite l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est au cœur de l'activité mathématique dès lors que l'on se propose de tirer parti des avantages du formalisme liés à ses propriétés opératoires, l'aspect syntaxique, sans renoncer pour autant aux intérêts d'un contrôle par la signification, l'aspect sémantique. »*  
(Durand-Guerrier & Arsac, 2003, p.334)

La compréhension de l'activité mathématique des étudiants et de leurs preuves est due à l'analyse logique de cette activité. Par ailleurs, les travaux de recherche de Durand-Guerrier et Arsac (2003) sur l'enseignement de l'Analyse montrent que

*« ... d'une certaine manière, la logique est le plus souvent absente du discours du professeur, remplacée par un certain nombre de règles de raisonnement relevant d'un savoir-faire qui n'est pas constitué en savoir théorique, et qui ne possède pas en particulier de frontières franches. »*  
(Durand-Guerrier, 2005, p.150)

Les travaux sur la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique au cas de l'implication ont amené Durand-Guerrier (2005) à développer ses recherches selon

*« (...) deux axes complémentaires : le premier concerne l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans l'enseignement universitaire, le second concerne l'analyse du discours dans la classe de mathématiques à tous les niveaux d'enseignement. »* (Ibid., p.149)

Elle s'est intéressée aux pratiques ordinaires des enseignants des mathématiques des premiers cycles universitaires qui sont confrontés à des difficultés. Ces dernières résultent d'un manque de préparation des nouveaux étudiants à tout ce qui va être enseigné.

*« Ceci étant dû en particulier à une évolution des programmes qui repousse à l'entrée à l'Université un certain nombre de concepts auparavant étudiés au lycée ainsi qu'à une introduction généralisée du formalisme logique qui est souvent considéré comme incontournable pour étudier les mathématiques à ce niveau d'enseignement. »* (Ibid., p.362)

La didacticienne a mis un lien entre les méthodes logiques et la pratique enseignante dans l'enseignement des mathématiques.

*« C'est la formalisation d'un point de vue sémantique sur la validité et sur son articulation avec la vérité dans les interprétations qui va permettre de rapprocher les méthodes logiques et les pratiques mathématiques. »* (Durand-Guerrier, 2012, p.415)

L'articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique permet l'appropriation correcte d'un concept mathématique. A l'instar de Kouki (2006),

*« ... l'importance, dans les procédures syntaxiques de résolution, de la vérification, l'interprétation, l'assignation... qui correspondent à l'aspect sémantique de la vérité relatif à un domaine donné. Ce qui correspond à la capacité d'articuler les deux points de vue sémantique et syntaxique et plus particulièrement à la flexibilité cognitive qui fait partie de la rationalité et la capacité de coordination, des registres de représentation, au cours de la résolution. » (Kouki, 2006, p.9)*

En fait, les travaux de recherches de Kouki (2006, 2008, 2018) et Ghedamsi & Kouki (2012) nous amènent à admettre l'importance de la prise en compte de l'articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique dans l'enseignement et l'apprentissage des objets mathématiques au niveau du Secondaire et du Supérieur.

Dans le cas de l'analyse logique du concept d'approximation locale d'une fonction, nous distinguons la dimension sémantique, la dimension syntaxique et l'articulation de ces deux dimensions lors de la construction des conceptions valides dans des productions des étudiants :

- la syntaxe fournit des règles des transformations et formulations des expressions analytique et algébrique lors de son appropriation et de son usage par l'adaptation des définitions ou théorèmes ou propriétés du concept mathématique. Les différentes écritures des objets mathématiques renvoient à la dimension syntaxique. La dimension syntaxique est liée à l'usage et à la mise en œuvre des propriétés et des règles du calcul algébrique et formel afin de résoudre un problème mathématique ;

- la sémantique désigne toute interprétation des représentations graphiques des objets d'approximation locale d'une fonction, ainsi que toute interprétation ou vérification des expressions algébriques ou analytiques. Les différentes interprétations des écritures des objets mathématiques et toutes les interprétations d'une figure géométrique renvoient à la dimension sémantique ;

- l'articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique est liée à la mobilisation des moyens de contrôle, de justification et de vérification lors de l'utilisation et la mise en œuvre d'une propriété ou d'une formule, d'une définition ou d'un théorème, etc. du répertoire didactique.

### ***III.6. Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les étudiants***

Au début du cursus universitaire, lorsque les étudiants sont confrontés en classe à des situations mathématiques, nous conduisons des analyses didactiques de leurs productions mettant en jeu l'usage d'une connaissance ou d'un savoir. Dans ce contexte, nous rejoignons le

point de vue de Robert (1998) qui a déterminé les caractéristiques de mise en fonctionnement des connaissances et des savoirs, en termes d'outil, relatives à un niveau scolaire bien déterminé. Elle a distingué trois niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves :

« Le niveau technique : (...) Ce niveau correspond pour nous à des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. » (Robert, 1998, p.165)

« Le niveau des connaissances mobilisables : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement plus large : encore indiquée, mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois. (...) » (Ibid., p.166)

« Le niveau des connaissances disponibles : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller rechercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. » (Ibid., p.167)

Ce dernier niveau est plus spécifique à l'Université. Il nous permet de connaître la manière de l'évolution des pratiques attendues des étudiants.

Dans le domaine de l'étude d'une fonction au voisinage d'un réel et de son comportement en l'infini, les étudiants confrontés à une situation mathématique peuvent rencontrer des difficultés liées inhérentes :

- au niveau technique : par exemple, les étudiants sont confrontés à un problème lié au fonctionnement de l'outil " approximation locale d'une fonction ". En effet, ils ne parviennent pas à appliquer la formule de Taylor-Young ou la définition généralisée lors de la détermination des développements limités d'une fonction au voisinage d'un réel ;

- au niveau des connaissances mobilisables : par exemple, les étudiants ne savent pas appliquer la formule de Taylor-Young lors du calcul de limite d'une fonction ;

- au niveau des connaissances disponibles : par exemple, les étudiants décident seuls d'utiliser le développement limité pour l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en l'infini.

#### Hypothèse et questions de recherche initiales

Nous rappelons l'hypothèse et les questions de recherche initiales de notre travail de recherche présentées au chapitre 1. Les travaux antérieurs liés au domaine de l'étude d'une fonction et de ses approximations nous conduisent à émettre l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : une majorité des étudiants éprouvent des difficultés prégnantes quant à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires de filière Physique-Chimie (PC).

Hypothèse 2 : l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés au concept de la relation de comparaison de fonctions, développements limités et la formule de Taylor-Young contribuent à :

- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets mathématiques en première année (PC) ;
- permettre aux étudiants de surmonter ces erreurs.

Hypothèse 3 : les obstacles liés à l'appropriation et à l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant l'utilisation des représentations graphiques.

Nos travaux visent à apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Quels sont les obstacles épistémologiques et didactiques liés à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction ?
- En quoi l'analyse préalable des obstacles épistémologiques et didactiques joue-t-elle un rôle déterminant dans la construction d'une ingénierie didactique de développement permettant aux étudiants de donner du sens au concept d'approximation locale d'une fonction ?

Avant de présenter le modèle d'analyse du raisonnement introduit par Bloch et Gibel (2011) et développé dans les travaux de Gibel (2018, 2019, 2020), Bloch et Gibel (2019, 2020) et Lalaude (2016), nous expliquons les différents phénomènes développés dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) en vue d'élaborer un modèle multidimensionnel permettant l'analyse d'un raisonnement produit par l'étudiant confronté à une situation d'action.

#### **IV. Présentation de la méthodologie utilisée**

L'un des objectifs de notre travail est d'étudier les raisonnements produits par des étudiants dans le but d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs liées à l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Un raisonnement mathématique est classifié d'après ses fonctions et le type de situation étudiée, selon Gibel (2018). Il est intéressant de définir les conditions dans lesquelles les raisonnements mathématiques ont été produits lors de la résolution d'une situation adidactique ou à dimension adidactique au niveau du Primaire, du Secondaire et du Supérieur, (Gibel, 2018). Nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) qui a mis en place une méthodologie « ... visant à identifier précisément les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, que les acteurs, enseignant et élève, mettent en œuvre lors du déroulement d'une séquence de classe. » (Gibel, 2018, p.16)

L'étude d'un raisonnement produit par un étudiant confronté à une situation d'action par la mise en considération du fonctionnement des connaissances nous permettra *a priori* d'identifier la nature et l'origine de ses difficultés.

Nous présentons la définition et la classification des raisonnements en théorie des situations didactiques afin de donner l'intérêt du modèle d'analyse du raisonnement initialement introduit par Bloch et Gibel (2011) en vue d'élaborer notre modèle permettant d'étudier les raisonnements produits par les étudiants liés au domaine d'approximation locale d'une fonction.

#### ***IV.1. Définition et classification des raisonnements en théorie des situations didactiques***

Le terme *raisonnement* tend à couvrir, en didactique des mathématiques, un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous prenons la définition introduite par P. Oléron (1977) :

*« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. » (Oléron, 1977, p.10)*

A l'instar de Gibel (2008), le rôle d'un raisonnement pour un chercheur en didactique des mathématiques consiste à :

*« - identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant ;  
- relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que : Cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent a priori de celui des protagonistes. » (Gibel, 2008, p.9)*

En théorie des situations didactiques, les caractéristiques d'un raisonnement dépendent de la situation dans laquelle il est produit et de sa fonction (Gibel 2008).

*« ... un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de formulation, de preuve...) généraux mais différents. » (Ibid., p.9)*

Il est intéressant de distinguer *les savoirs et les connaissances* de l'enseignant, de ceux de l'étudiant dans chacune des situations « emboîtées » (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique).

A l'instar de Gibel (2008), le raisonnement produit par l'étudiant dépend de la situation étudiée. Dans le cas des situations didactiques, le raisonnement de l'étudiant

*« ... s'adresse principalement à l'enseignant,  
- soit pour justifier une action ou pour produire une réponse ;  
- soit pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur ; formellement il est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors à une citation. » (Ibid., p.9)*



Dans le cas d'une situation adidactique, le raisonnement a un rôle différent de celui produit en situation didactique. En effet, dans les situations adidactiques, le raisonnement est produit par des étudiants

« ... pour les besoins de la résolution, sans intervention, appui, ni recours à l'enseignant :

- soit comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans les situations d'action ;
- soit comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une situation de formulation ;
- soit comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité lors d'une situation de validation. » (Ibid., p.9)

Un raisonnement mathématique est classifié d'après ses fonctions et le type de situation étudiée. Il est intéressant de définir les conditions dans lesquelles les raisonnements mathématiques ont été produits lors de la résolution d'une situation adidactique ou à dimension adidactique du Supérieur, (Gibel, 2018).

Nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) qui a mis en place une méthodologie

« ... visant à identifier précisément les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, que les acteurs, enseignant et élève, mettent en œuvre lors du déroulement d'une séquence de classe. » (Gibel, 2018, p.16)

L'étude d'un raisonnement produit par un étudiant confronté à une situation d'action par la mise en considération du fonctionnement des connaissances nous permettra *a priori* d'identifier la nature et l'origine de ses erreurs.

Avant d'expliquer la méthodologie utilisée pour l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe, nous présentons le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011).

#### **IV.2. Présentation du modèle d'analyse des raisonnements**

Bloch et Gibel (2011) ont élaboré un modèle d'analyse du raisonnement, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), initialement afin d'étudier le déroulement d'une séquence d'Analyse, dans le Secondaire, visant à étudier les différents niveaux de preuve.

La théorie des situations didactiques joue un rôle déterminant :

- d'une part, le schéma de la structuration du milieu donne la possibilité d'identifier les différentes situations plus au moins emboîtées, de décrire et de caractériser chacune de ces situations, ainsi que d'explicitier les conditions de la production d'un raisonnement. Les fonctions du raisonnement jouent un rôle déterminant dans l'analyse de ces conditions ;

- d'autre part, ce cadre théorique est pertinent pour la réalisation d'une analyse *a priori* détaillée des situations.

Par ailleurs, la sémiotique de Peirce a permis de conduire une analyse précise des signes par la prise en compte des savoirs et des connaissances mobilisés par l'étudiant confronté aux différents milieux.

La combinaison de deux cadres théoriques, la théorie des situations didactiques et la sémiotique de Peirce, donne l'originalité et l'intérêt de ce modèle qui permet de recouvrir des dimensions d'analyse du raisonnement à la fois globale et locale.

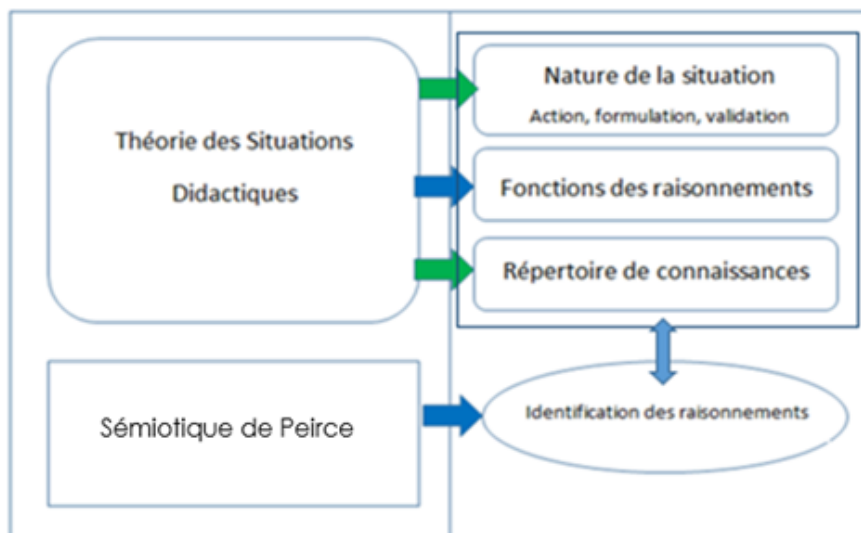
*« L'analyse globale est liée à l'identification du niveau de milieu qui définit et traduit le statut logique des énoncés et permet de déterminer sa fonction, l'analyse locale repose sur une identification peircienne des signes donnant ainsi à voir l'usage et l'évolution du répertoire de représentation. » (Gibel, 2018, p.55)*

Bloch et Gibel (2011) ont montré la nécessité de mettre en œuvre trois axes pour l'analyse des raisonnements en termes de connaissances et de savoirs des élèves et de l'enseignant en classe de mathématiques au niveau Primaire, Secondaire et Supérieur :

*« - le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent ;*

*- le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, (...). Nous nous attacherons à mettre ces deux axes en relation, en montrant comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieu et comment ces fonctions manifestent aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux ;*

*- le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. (...) » (Gibel, 2018, p.47)*



**Figure 3-9** : schéma du modèle d'analyse des raisonnements (Gibel, 2018, p.48)

Le modèle doit leur permettre :

« - d'affiner l'analyse a priori des niveaux de milieux de manière à pouvoir anticiper les signes et les raisonnements ;

- d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation (analyse a posteriori) ;

- d'analyser les signes produits en situation et de les relier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves ;

... et, en définitive, de porter une appréciation sur l'adéquation des signes, des raisonnements et des connaissances produits aux enjeux de la situation. » (Bloch & Gibel, 2011, p.14)

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
<b>Fonctions des raisonnements</b>	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
<b>Niveaux d'utilisation des symbols</b>	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
<b>Niveau d'actualisation du repertoire</b>	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

**Tableau 3-2** : le modèle milieux/répertoire/symboles (Bloch & Gibel, 2011, p17)

Bloch et Gibel (2011) ont établi que l'usage du modèle d'analyse du raisonnement assure deux fonctions distinctes : la fonction prédictive et la fonction explicative. Ce modèle est utilisé pour conduire des études inhérentes aux objets de l'Analyse du Secondaire par Bloch et Gibel (2011, 2019, 2020) et Gibel (2020) d'une part et, aux objets du Supérieur et plus précisément pour le cas de l'Algèbre par Lalaude (2016) et le concept d'une suite réelle par Bloch et Gibel (2022), d'autre part.

Dans notre cas d'étude des objets de l'Analyse du Supérieur, le concept d'approximation locale d'une fonction couple les domaines de l'Analyse fonctionnelle et la topologie. Pour cette raison, nous envisageons d'enrichir ce modèle par des outils théoriques permettant de conduire une analyse plus fine des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe de première année (PC).

**IV.3. Les fonctions du modèle : fonction prédictive et fonction explicative**

Comme l'indique Gibel (2018), le modèle d'analyse du raisonnement a été construit afin de conduire une analyse *a priori* de la séquence et une analyse des observables lors de chacune des phases de la séquence. Ce modèle d'analyse assure deux fonctions distinctes : la fonction prédictive et la fonction explicative.

➤ **La fonction prédictive du modèle**

La fonction prédictive du modèle sert à préciser l'analyse *a priori* de la séquence incluant les analyses descendante et ascendante des niveaux de milieux.

*« ... le chercheur pour pouvoir interpréter les différents observables, en lien avec chacune des situations, doit avoir préalablement envisagé précisément les formes de raisonnements. De plus l'observateur, en s'appuyant sur une analyse fine des niveaux de milieux, est en mesure de repérer dans la production des raisonnements des élèves un changement de niveau de milieux ; notamment le retour à une confrontation à la situation objective ou bien le passage de la situation didactique à la situation d'apprentissage. » (Gibel, 2018, p.50)*

L'analyse *a priori* de la séquence réalisée dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau, couplée avec l'analyse sémiotique de Peirce en référant aux registres de représentation sémiotique de Duval (1993) permettent d'étudier les formes et les fonctions des raisonnements que peuvent produire les étudiants par la prise en compte de leur répertoire didactique.

Pour chacun des niveaux de milieu, la forme et la fonction des raisonnements produits par les étudiants se réalisent par la mise en relation avec les signes et l'actualisation du répertoire

didactique. L'analyse des signes en termes de représentations sémiotiques permettent d'accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction.

Le répertoire didactique lié à ce concept mathématique et spécifique au Supérieur est constitué des éléments de l'Analyse Infinitésimale. Ce paradigme [AI] est le « palier » auquel les étudiants doivent accéder à partir des autres paradigmes [AC] et [AG]. Pour cette raison, l'actualisation du répertoire didactique au cours du déroulement des différentes phases de la séquence nécessite l'identification des différents paradigmes associés.

*« Le modèle, utilisé dans sa fonction prédictive, doit être « précisé » par la production de l'analyse a priori de la séquence incluant l'analyse ascendante des niveaux de milieux. » (Gibel, 2018, p.55)*

Le modèle offre la possibilité à l'enseignant d'identifier les différentes formes de raisonnement que les étudiants pourraient produire (valides ou erronés) lors de chacune des phases de la séquence. Cette étude nécessite l'analyse des signes par la sémiotique de Peirce et les registres de représentation sémiotique de Duval, ainsi que l'actualisation du répertoire didactique par l'identification des différents paradigmes de l'Analyse standard.

#### ➤ **La fonction explicative du modèle**

Pour chacune des phases du déroulement de la séquence étudiée, le modèle sert à identifier les situations et à déterminer les fonctions du raisonnement produit en situation.

#### **- Méthodologie de l'analyse a posteriori**

Avant d'utiliser le modèle pour effectuer une analyse *a posteriori* des raisonnements produits par les étudiants, lors d'une séquence, on explicite les différentes phases de déroulement de cette séquence. Chacune des phases se décompose en des « épisodes » dont chacun constitue une étape d'une situation didactique. Suite à ce découpage de la séquence, on met en œuvre une analyse *a posteriori* des différents épisodes pour chacune des phases selon les axes structurant ce modèle.

Par ailleurs, la sémiotique de Peirce référant aux registres de représentation sémiotique de Duval sert à conduire une analyse des signes produits, la nature, les fonctions et d'identifier ceux qui traduisent la mise en œuvre d'un raisonnement, selon Gibel (2018). Le modèle d'analyse du raisonnement permettra :

- d'étudier les raisonnements (valides ou erronés) et plus précisément d'identifier la nature et l'origine des erreurs commises par les étudiants confrontés à une situation mathématique ;
- de déterminer les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants au niveau de la pratique du raisonnement, l'actualisation du répertoire didactique et la conviction des étudiants.

L'analyse *a posteriori* se focalise sur l'analyse des raisonnements produits par les étudiants lors de chacun des épisodes et pas la totalité des événements didactiques réalisés lors de la séance. Cette étude repose sur l'analyse sémiotique des signes et par l'actualisation de répertoires didactiques utilisés par les étudiants lors de la production d'un raisonnement.

#### **- Les axes privilégiés de l'analyse *a posteriori***

A l'instar de Gibel (2018), la fonction explicative du modèle permet de percevoir les écarts du déroulement prévu de l'expérimentation et la réalité du déroulement en classe.

*« ... et ce de différents points de vue ayant une même visée : comprendre les raisons pour lesquelles certaines phases n'ont pas produit les effets attendus du point de vue des apprentissages et du point de vue des comportements et les raisons pour lesquelles les phases, plus précisément la confrontation des élèves aux situations emboîtées a permis (ou non) de favoriser la pratique du raisonnement et d'enrichir le répertoire didactique de la classe en permettant aux élèves d'accéder aux véritables raisons de savoir. » (Gibel, 2018, p.53)*

Dans notre cas d'étude, le modèle d'analyse du raisonnement offre la possibilité :

- du point de vue de conceptions, d'identifier les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, mobilisés par les étudiants en vue de produire leur raisonnement par confrontation aux différents milieux, ainsi que la production relève duquel paradigme : [AC], [AG] et [AI] ;
- du point de vue de signes, d'identifier les différentes représentations mobilisées par les étudiants, analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique afin de produire leur raisonnement erroné ou valide.

Dans ce contexte, comme le formule Gibel (2018),

*« Il nous semble important de déterminer l'évolution du répertoire didactique de la classe, au fil de la séquence, en repérant les savoirs pour lesquels l'enseignant a choisi d'enclencher un processus d'institutionnalisation. » (Ibid., p.53)*

#### **IV.4. Méthodologie utilisée pour analyser les raisonnements**

Dans notre travail, nous adoptons le cadre de la théorie des situations didactiques en mettant la focale sur les notions de conception, connaissance, savoir, situation mathématique, situation à dimension adidactique, institutionnalisation et structuration du milieu. Lorsque les étudiants vont se confronter à une situation réelle en classe (situation mathématique ou situation à dimension adidactique), nous allons nous intéresser à l'analyse de leur production en termes de raisonnement :

- du point de vue de conceptions : c'est de connaître si la production relève du paradigme [AC], si elle relève du paradigme [AG], si elle relève du type d'Analyse spécifique *a priori* de l'Université : le paradigme [AI] ;
- du point de vue logique : c'est un travail spécifique en deux éléments très importants du raisonnement par l'identification de la dimension sémantique ou de la dimension syntaxique ou de l'articulation des deux dimensions ;
- du point de vue des signes : c'est l'étude des signes qu'apparaissent dans un raisonnement par l'analyse sémiotique de Peirce en référant aux registres de représentation sémiotique de Duval (1993) ;
- du point de vue du fonctionnement des connaissances et des savoirs mobilisés par leurs actions sur le milieu : c'est l'étude de fonction, forme et nature du raisonnement.

Dans notre cas d'étude, l'ingénierie didactique de développement se divise temporellement en trois principales phases :

**- Phase 1 : « les analyses préalables »**

Afin de conduire une étude de la nature et de l'origine des erreurs effectuées par des étudiants, nous avons proposé, en collaboration avec l'enseignant de la classe en avril 2019, un devoir écrit dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. Ce devoir est composé de trois situations mathématiques « classiques » proposé aux deux classes de première année (PC). La modalité de passation de l'évaluation est la suivante : chaque étudiant travaille seul afin de produire les réponses aux questions. Les étudiants disposent de 75 minutes pour rédiger leur composition.

**- Phase 2 : la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement**

Notre projet de recherche porte sur l'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction qui nécessite une collaboration étroite avec l'enseignant de la classe de première année (PC). Cet enseignant co-construit l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » en intégrant deux situations à dimension à didactique lors de la deuxième et troisième séance de ce chapitre.

**- Phase 3 : analyse des effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants**

Nous proposons, en collaboration avec l'enseignant de la classe, suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique », un devoir sur table dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. Ce devoir est composé de trois situations mathématiques « classiques » et proposé aux deux classes de première année (PC) pendant 75 minutes. La première situation mathématique est identique à celle proposée au pré-test en avril 2019.

A l'issue de cette présentation des différentes phases de notre expérimentation, nous devons distinguer deux méthodologies d'analyse des raisonnements :

- Lorsque les étudiants vont se confronter à un énoncé mathématique proposé dans le cadre d'un devoir sur table, ils vont mobiliser leurs connaissances antérieures du répertoire didactique dans le cadre d'un travail individuel. Dans ce cas, nous ne pouvons pas effectuer une analyse des raisonnements en lien avec les différents niveaux de milieux, aussi nous prendrons en compte dans notre étude uniquement les fonctions des raisonnements, les connaissances et les savoirs mobilisés en lien avec le répertoire de représentation et nous identifierons le paradigme de l'Analyse dans lequel s'inscrit le raisonnement de l'étudiant. Pour cette raison, le modèle d'analyse du raisonnement « stricto-sensu » - intégrant toutes ses dimensions - n'est pas utilisable dans le cadre de cette étude des productions produites lors d'un devoir sur table ;
- Lors de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement, les différents groupes, constitués chacun de trois étudiants, vont se confronter à des situations à dimension adidactique, il y aura au cours des différentes phases de la séquence des échanges et des débats au sein du groupe, ainsi que des échanges entre l'enseignant et les étudiants. De ce fait, l'analyse des interactions entre l'étudiant et les savoirs et entre les étudiants nous permettra d'identifier les différents niveaux de milieux. A partir de ces interactions, les étudiants de chaque groupe vont produire des raisonnements dont l'analyse sera effectuée en mobilisant le modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en prenant ainsi en compte l'ensemble des dimensions de l'analyse.

Notre méthodologie d'analyse des raisonnements produits par les étudiants dépend du type de situation mise en œuvre en classe : situation d'évaluation (assimilable à un devoir sur table) ou situation à dimension adidactique.

#### IV.4.1 Raisonnements et situations à dimension adidactique : modèle multidimensionnel d'analyse du raisonnement

Les situations à dimension adidactique sont proposées en classe divisée en trinômes (groupes hétérogènes de trois étudiants). Lorsque les étudiants vont se confronter à ce type de situation, ils vont interagir d'une manière individuelle sur les questions proposées, ensuite ils vont discuter entre eux au sein du groupe sur la validité de leur production. S'ils sont bloqués, ils vont avoir la possibilité de demander l'aide auprès de l'enseignant en vue de surmonter les difficultés rencontrées.

##### ➤ **Analyse a priori**



L'analyse *a priori* de la séquence sera réalisée selon différentes étapes dans le cadre de la théorie des situations didactiques.

**i. Analyse *a priori* de la situation sur les plans mathématique et didactique**

Dans une première étape, nous allons conduire une analyse *a priori* sur le plan didactique par la détermination du type de la situation étudiée, les principaux objectifs didactiques de sa proposition et les variables didactiques.

Dans les plans mathématique et didactique, nous conduirons une analyse de chacune des questions proposées par l'identification des différentes natures de procédures de résolution attendues par l'enseignant, les différentes difficultés envisagées et les moyens de justification, de vérification et de validation associés.

**ii. Déroulement prévu de la séquence : Phases didactiques et phases adidactiques**

Afin de faire vivre une situation réelle en classe, nous conduirons une réflexion sur les enjeux des différentes phases didactiques et adidactiques lors du déroulement envisagé de la séquence.

**iii. Analyses descendante et ascendante en termes de niveaux de milieux**

Les enjeux didactiques de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement reposent sur la dévolution aux étudiants des situations à dimension adidactique. La résolution de ce type de situation par les étudiants nécessite la mobilisation de leurs connaissances antérieures afin de construire une production.

L'un des objectifs de notre expérimentation est l'étude des interactions sujet/milieu. Pour ceci, nous adoptons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le niveau de structuration du milieu en précisant les activités de l'étudiant dans les situations d'action, de formulation et de validation. Ces activités s'appuient sur le fonctionnement du répertoire didactique. L'étudiant va établir une action sur des objets mathématiques qui sera motivée par son répertoire didactique.

➤ **Analyse *a posteriori***

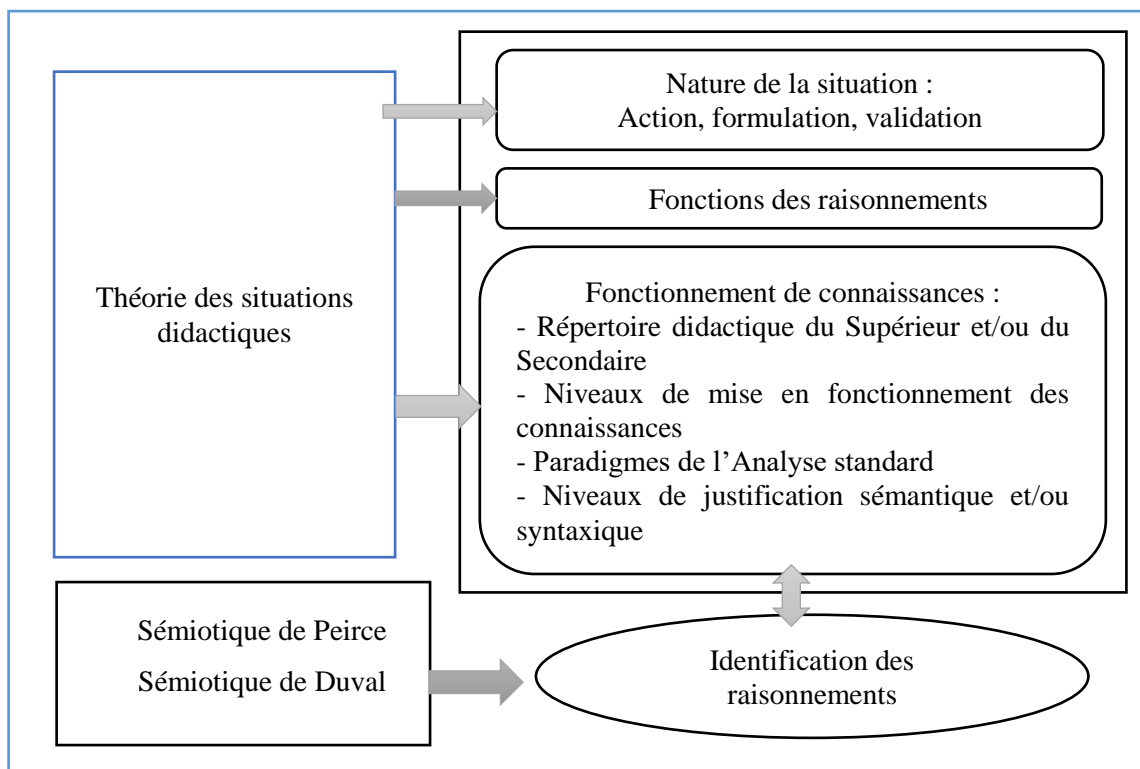
En s'appuyant sur le modèle d'analyse du raisonnement introduit par Bloch et Gibel (2011) et enrichi par des outils théoriques développés précédemment, nous conduirons une analyse des raisonnements selon quatre axes :

- le premier est attaché aux niveaux de milieu dans la situation et aux paradigmes de l'Analyse ;
- le deuxième axe concernant les fonctions du raisonnement ;
- le troisième est un axe de nature sémiotique basé sur l'analyse sémiotique de Peirce et l'analyse des représentations sémiotiques de Duval (1993) ;

- le quatrième axe concerne l'analyse logique du raisonnement en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique.

Afin de conduire une analyse plus fine des raisonnements produits par les étudiants, nous enrichissons les trois composantes du raisonnement (fonction, dimension sémiotique et nature) du modèle de Bloch et Gibel (2011, 2018) par une quatrième composante : niveau de justification d'un raisonnement (sémantique/syntaxique).

Dans notre étude, nous conduirons une analyse des raisonnements qui est orientée selon quatre axes dont le premier est lié au niveau du milieu de la situation et de paradigmes correspondants. Le deuxième axe se réalise selon l'analyse des fonctions des raisonnements (Bloch & Gibel, 2011). Le troisième est l'étude des signes (Peirce) et des représentations sémiotiques (Duval, 1993) observables. Le dernier axe est l'étude de l'usage logique des connaissances antérieures de l'étudiant et les éléments du contrôle.



**Figure 3-11 : schéma du modèle d'analyse des raisonnements**

Notre méthodologie repose sur la prise en compte de ces quatre composantes lors de l'analyse des différents types de raisonnement élaborés par les étudiants dans une situation à dimension adidactique. Par ailleurs, dans ce type de situation, les niveaux de milieux où se situent les étudiants sont : milieu objectif  $M_{-2}$ , milieu de référence  $M_{-1}$  et milieu d'apprentissage  $M_0$ .

Nous prenons en compte les quatre composantes (fonctions, dimension sémiotique, nature et justification) du raisonnement dans chaque niveau de milieux  $M_{-2}$ ,  $M_{-1}$  et  $M_0$ , ainsi qu'au niveau de paradigmes de l'Analyse :

- fonctions des raisonnements : les étudiants vont interagir pour décider, d'effectuer et de contrôler leurs procédures de résolutions des différentes tâches proposées en situation ;
- niveau d'utilisation des symboles, des signes et des représentations sémiotiques : les étudiants auront actions de mobiliser des signes et des symboles pour répondre aux différentes tâches proposées en situation adidactique ou à dimension adidactique ;
- niveau d'actualisation du répertoire didactique : les étudiants vont mobiliser leurs connaissances antérieures soit en faisant fonctionner le système générateur soit en utilisant un énoncé du registre des formules. Et plus précisément, ils vont utiliser des techniques afin de répondre aux différentes questions proposées dans la situation ;
- niveau de justification d'un raisonnement (sémantique/syntaxique) : les étudiants vont justifier leurs raisonnements en vérifiant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'utilisation des signes et des différentes formules du répertoire didactique.

Nous obtenons le tableau synthétique suivant :

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 [AC] / [AI] - Décision du calcul - Intuition sur l'étude d'une fonction	R1.2 [AC] / [AG] / [AI] - Calculs génériques - Décision sur un objet mathématique - Contrôler la cohérence et la validité des résultats - Interpréter des expressions algébriques ou analytiques	R1.3 [AC] / [AG] / [AI] - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec l'aide de l'enseignant) - Formalisation d'une formule ou d'une propriété d'un concept mathématique (avec l'aide de l'enseignant)
<b>Niveau d'utilisation des symboles, des signes et des représentations sémiotiques</b>	R2.1 [AC] / [AI] - Icônes ou indices dépendant du contexte (schéma, intuition,...) - Représentations algébriques ou analytiques dépendant du contexte (équation, représentation d'une fonction, ...)	R2.2 [AC] / [AG] / [AI] - Arguments locaux ou plus génériques (indices, calculs) - Représentations graphiques ou géométriques d'un objet mathématique	R2.3 [AI] / [AC] - Arguments formels spécifiques - Représentations sémiotiques - Visualisation d'une représentation graphique d'un objet mathématique
<b>Niveau d'actualisation du répertoire didactique</b>	R3.1 [AC] / [AI] - Utilisation ponctuelle des connaissances anciennes	R3.2 [AC] / [AG] / [AI]	R3.3 [AC] / [AG] / [AI] - Formalisation des preuves

	- Enrichissement au niveau heuristique : Calculs, conjectures, ponctuelles	Enrichissement au niveau argumentaire : - Des énoncés - Des résultats d'un calcul formel et algébrique ou numérique - Du système organisateur	- Introduction d'une formule ou propriété d'un concept mathématique - Intégration des éléments théoriques du domaine mathématique
<b>Niveau de justification d'un raisonnement (sémantique / syntaxique)</b>	R4.1 [AC] / [AI] - Vérification de l'usage d'une formule lors de la transformation et formulation des expressions algébriques ou analytiques - Vérification d'un calcul formel et algébrique - Mobilisation des conditions nécessaires de l'usage d'une syntaxe	R4.2 [AC] / [AG] / [AI] - Interprétation d'une représentation graphique d'un objet mathématique - Interprétation d'un résultat du calcul - Des expressions algébriques ou analytiques ou numériques prennent le statut des arguments. - Interprétation géométrique d'une expression analytique	R4.3 [AC] / [AG] / [AI] - Interprétation des représentations analytiques ou algébriques ou graphiques pour formaliser une définition - Interprétation des représentations analytiques ou algébriques pour généraliser une propriété d'un objet mathématique

**Tableau 3-3 : modèle d'analyse du raisonnement : le modèle**

**milieux/paradigmes/répertoire/signes/symboles/justifications sémantique-syntaxique**

Nous souhaitons que ce modèle d'analyse nous permette de conduire une analyse détaillée des raisonnements produits par les étudiants confrontés à une situation à dimension adidactique afin d'identifier leurs difficultés liées à l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

IV.4.2 Raisonnements et situations mathématiques

Dans notre cas d'étude, lorsque l'étudiant va être confronté à une situation mathématique dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice assimilable à un devoir, il va agir individuellement pour répondre aux questions proposées dans la feuille de devoir. Par ailleurs, l'enseignant joue le rôle d'un observateur. L'étudiant est en situation d'apprentissage mais l'expérimentation réalisée ne nous permet pas d'avoir accès à ces éléments. Les traces et des interprétations des essais nous échappent car nous n'avons accès qu'au produit « fini ».

Nous ne pouvons pas identifier le niveau du milieu, par contre nous allons identifier la fonction, forme des raisonnements, les connaissances et les savoirs mobilisés qui sont valides ou erronés, etc.

Pour ces raisons, nous ne pouvons pas utiliser le modèle d'analyse du déroulement de situation d'enseignement-apprentissage en classe « stricto-sensu ». Ce modèle est lié à plusieurs dimensions, nous allons utiliser et réaliser une analyse qui se limitera à :

- la fonction du raisonnement ;
- l'analyse sémiotique des signes ;
- l'analyse du fonctionnement des répertoires didactiques utilisés ;
- l'analyse logique du raisonnement en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique ;
- l'identification des paradigmes de l'Analyse standard.

➤ **Analyse *a priori***

Nous conduirons une analyse *a priori* de la situation selon deux points de vue : mathématique et didactique.

**i. Analyse *a priori* de la situation sur le plan mathématique**

Nous allons conduire une analyse *a priori* de chacune des questions proposées dans cette situation en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. De ce fait, nous allons identifier les différentes procédures de résolution attendues par l'enseignant et les moyens de contrôle, de justification et de validation.

**ii. Analyse *a priori* sur le plan didactique**

D'une part, nous conduirons une analyse globale de cette situation en mettant la focale sur la détermination du type de la situation étudiée, des objectifs didactiques de sa proposition et des différentes variables didactiques.

D'autre part, nous allons conduire une analyse de chacune des questions de la situation en identifiant les différentes difficultés envisagées.

➤ **Déroulement de la séquence : analyse *a posteriori* de la situation**

La prise en compte des trois composantes (fonction, forme, nature et dimension sémiotique de Peirce) du raisonnement nous permettra d'analyser les différents types de raisonnement. Une analyse plus fine des raisonnements nous aidera à déterminer la nature et l'origine des erreurs commises par les étudiants lors de la production du raisonnement erroné.

Nous conduirons une analyse des raisonnements produits par les étudiants confrontés à une situation mathématique selon deux axes dont le premier se rapporte sur l'étude de fonction et nature du raisonnement. Le deuxième axe est lié à une analyse en termes de répertoires didactiques et signes et plus précisément des connaissances et des savoirs mobilisés.

Tout au long de notre analyse des productions des étudiants, nous conduirons une étude de la notion de connaissance en adoptant les niveaux de sa mise en fonctionnement définie par Robert (1998).

Ainsi, nous allons nous intéresser à une étude plus précise de fonction du raisonnement en mettant en jeux :

- d'une part, l'usage local des signes par une analyse sémiotique de Peirce en référant aux registres de représentation sémiotique de Duval pour identifier la nature et l'origine des signes, des connaissances et des savoirs mobilisés ;
- d'autre part, de définir s'il s'agit d'une dimension sémantique ou une dimension syntaxique ou d'une articulation de ces deux dimensions.

Le but de cette étude est d'essayer de tirer la nature et l'origine des erreurs et donc d'essayer de faire des hypothèses sur les difficultés qui vont rencontrer les étudiants.

La méthodologie d'analyse des productions des étudiants confrontés à une situation mathématique repose sur :

- l'identification de la fonction et de la nature des raisonnements ;
- la détermination des connaissances et des savoirs mobilisés avec une analyse en termes du répertoire didactique, une analyse des signes et une identification des paradigmes associés ;
- l'identification des difficultés rencontrées par les étudiants afin de déterminer la nature et l'origine de leurs erreurs.

### **Conclusion du chapitre 3 : formulation des questions de recherche et synthèse de la méthodologie générale**

Dans ce chapitre, nous avons expliqué dans une première étape, notre choix du cadre de la théorie des situations didactiques en vue de donner l'intérêt de la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement en tant que méthodologie de recherche. Notre objectif principal de l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement est de permettre aux étudiants d'accéder au sens du savoir relatif à « l'approximation locale d'une fonction ».

Dans une deuxième étape, nous avons présenté l'intérêt de l'identification des paradigmes de l'Analyse standard, la considération des caractéristiques des conceptions et des représentations sémiotiques d'un concept mathématique, son analyse logique en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique ainsi que les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les étudiants en tant qu'outils didactiques pour analyser la construction d'un concept en Analyse.

Ensuite, nous avons donné un modèle multidimensionnel de l'analyse du raisonnement produit par un étudiant confronté à une situation réelle en classe en s'appuyant sur le modèle introduit par Bloch et Gibel (2011) et développé dans leurs travaux.

Ces cadres et outils théoriques choisis, les travaux didactiques liés au domaine de l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse à l'entrée dans le Supérieur et notamment des notions liées à l'étude d'une fonction développés dans le premier chapitre ainsi que l'étude historico-épistémologique menée au chapitre précédent nous amène à reformuler nos hypothèses et questions de recherche selon un point de vue didactique afin de préciser nos objectifs de ce travail élaboré dans le cadre de l'enseignement et l'apprentissage de l'Analyse.

Nous rappelons des hypothèses initiales présentées dans les chapitres précédents :

Hypothèse 1 : une majorité des étudiants éprouvent des difficultés prégnantes quant à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires de filière Physique-Chimie (PC).

Hypothèse 2 : l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés aux notions d'approximation locale d'une fonction contribuent à :

- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de ces objets en première année (PC) ;
- permettre aux étudiants de surmonter ces erreurs.

Hypothèse 3 : les obstacles liés à l'appropriation et à l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant l'utilisation des représentations graphiques.

Dans la section du chapitre 1 inhérente aux difficultés éprouvées par les étudiants en rapport avec l'étude des signes, certains travaux de recherche liés au domaine d'approximation des fonctions ont permis d'établir l'influence des images dynamiques, par l'usage du logiciel de géométrie, sur l'apprentissage de la notion de convergence des séries de Taylor, (Alcock & Simpson, 2004 ; Kidron, 2003, 2008) et de la notion de limite (Kidron & Tall, 2015). Par ailleurs, selon nos travaux de recherche (Belhaj Amor, 2016, 2018, 2019), la notion de développement limité n'est pas introduite en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction articulant ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) au début du cycle des classes préparatoires. Pour ces raisons, nous proposons les questions suivantes :

- Est-il possible d'organiser un projet d'enseignement du concept de développement limité autour d'une problématique qui rende compte de l'intérêt de sa représentation graphique par

l'usage d'un logiciel dynamique de géométrie afin de l'introduire en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction ?

- Est-il possible d'élaborer et de mettre en œuvre des situations dévolues aux étudiants dans le cadre d'un projet d'enseignement-apprentissage du concept de développement limité autour d'une problématique qui rende compte de l'articulation de ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) afin d'accéder aux raisons de savoir à travers l'introduction de cet objet mathématique en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction ?
- Le logiciel dynamique de géométrie « Geogebra » constitue-t-il un environnement adéquat du travail au niveau de l'articulation des différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction ?

Ce projet d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction en classes ordinaires nécessite un travail collaboratif avec l'enseignant de la classe avant de la mise en œuvre de l'ingénierie. De ce fait, des réunions réalisées avec l'enseignant tout au long des années universitaires (2018-2019 et 2019-2020) nous aident à construire et de mettre en œuvre des situations à dimension adidactique en vue d'introduire le concept du développement limité dans le paradigme [AI] par l'articulation des différents registres de représentation sémiotique.

L'étude historique et épistémologique des notions d'approximation locale d'une fonction, conduite dans le chapitre 2, ont mis en lumière un certain nombre d'obstacles épistémologiques. Ces obstacles qui nous renseignent sur certaines difficultés liées à la conceptualisation de ces objets mathématique. Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, les principaux enjeux et les spécificités d'une ingénierie didactique de développement développés dans la section de ce chapitre compatibles avec notre objectif principal de cette recherche. Nous cherchons alors des éléments de réponses aux questions suivantes :

- La construction et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permettent-elles de surmonter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction au début du cycle des classes préparatoires ?
- Est-ce que l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permet de surmonter les obstacles liés à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction ?



Dans ce contexte de l'étude des difficultés des étudiants, les travaux de Brousseau et Gibel (2005), Bloch et Gibel (2011, 2019, 2020, 2022) et Gibel (2018, 2020) ont établi l'intérêt de l'analyse des raisonnements. Nous rejoignons leur point de vue en proposant la question suivante :

- Est-ce que dans le cas de l'élaboration de l'ingénierie didactique de développement, l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe permet d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs inhérentes à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?

Ces questions de recherche nous conduisent à émettre les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4 : le logiciel dynamique de géométrie « Geogebra » constitue un environnement adéquat du travail au niveau de l'articulation des différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction.

Hypothèse 5 : la construction et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permettent de surmonter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Afin d'examiner ces hypothèses, nous pensons qu'une évaluation formative et formatrice, à l'issue de cette ingénierie didactique de développement, permettant mieux d'examiner leurs difficultés liées à l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Pour ces raisons, nous conduirons une analyse des effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants par la proposition d'un devoir sur table à toute la classe suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique ».

Avant de la construction d'une ingénierie didactique de développement, nous envisageons de conduire une analyse préliminaire qui nous aide à déterminer une typologie de ces difficultés. Pour cette raison, nous conduirons un travail de recherche qui se focalise sur l'étude de la nature et de l'origine des principales difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Nous pensons que l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations mathématiques choisies, (Brousseau & Gibel, 2005), liées au domaine d'approximation d'une fonction, nous permettra d'identifier leurs difficultés d'un usage raisonné des notions de développements limités, la formule de Taylor-Young et la relation de comparaison de fonctions. Le modèle d'analyse du raisonnement nous permettra *a priori*

d'étudier ces difficultés et les conceptions erronées lors de la confrontation des étudiants à une situation mathématique « classique ». Les questions qui se posent :

- L'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe permet-elle d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs effectuées lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?
- Le modèle d'analyse du raisonnement permet-il d'identifier et de caractériser les difficultés des étudiants confrontés à une situation réelle en classe ?

La construction et la mise en œuvre de ces situations nécessitent une étroite collaboration avec l'enseignant de la classe. Nous construisons des situations mathématiques « classiques », en collaboration avec l'enseignante de la classe, afin d'étudier les acquis des étudiants. Un travail collaboratif avec l'enseignant de la classe nous permet de proposer un devoir, composé de trois situations mathématiques « classiques », aux deux classes de (PC), en avril 2019, dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. Ce devoir écrit est proposé suite à l'enseignement des chapitres « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques » en vue de déterminer leurs acquis et leurs difficultés persistantes lors de la mise en œuvre de leurs connaissances relatives à l'approximation locale d'une fonction à ce niveau universitaire.

- Quelles sont les principales difficultés éprouvées par des étudiants en première année (PC) en rapport avec les objets d'approximation locale d'une fonction lors de la confrontation à des situations « classiques » ?
- La nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'usage et l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction, en première année (PC), résultent-elles d'obstacles ?
- L'analyse des productions des étudiants en termes de raisonnement permet-elle d'étudier ces erreurs ?

Avant de conduire l'analyse de cette expérimentation préliminaire, nous devons préciser les connaissances antérieures des étudiants relatives au domaine d'approximation locale d'une fonction. En recours au processus d'institutionnalisation des savoirs développé dans la section de ce chapitre, afin de trouver des éléments de réponse à ces questions de recherche, nous rejoignons le point de vue de Gibel (2004) qui porte sur l'identification des constituants du répertoire didactique de l'étudiant et de la classe. Dans notre cas d'étude, nous identifierons les constituants du répertoire didactique du Supérieur et du Secondaire. Dans ce cas, nous adoptons

le cadre théorique de la praxéologie mathématique (Chevallard, 1998) en vue de conduire une étude institutionnelle de la transposition didactique d'un savoir-savant à un savoir à enseigner.

En Tunisie, les étudiants inscrits en première année (PC) sont les élèves de la quatrième année Secondaire de section Sciences Expérimentales (SC-E). Au Supérieur, il n'existe pas un manuel commun comme au niveau Primaire, Collège et Secondaire. Pour ceci, l'enseignant s'appuie sur le programme officiel et des ouvrages universitaires pour préparer son cours.

Par interaction avec l'enseignante de la classe, nous avons pu avoir accès au support de cours et aux activités notamment qui font l'objet d'un travail scientifique. De ce fait, notre analyse institutionnelle se focalise sur l'étude de contenu des programmes officiels de la quatrième année Secondaire (SC-E) et première année (PC), des parties d'ouvrages universitaires et de photocopié de cours de l'enseignante en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. Nous essayerons de trouver des éléments de réponses à nos questions de recherche :

- Quelle est la manière développée par les programmes et les auteurs de différents supports de cours lors de l'introduction des objets d'approximation locale d'une fonction ?
- L'institutionnalisation prend-elle en considération l'articulation des registres analytique, algébrique, graphique et géométrique lors de la construction des nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction dans le paradigme [AI] ?

Selon le chapitre 1, dans le domaine de l'étude d'une fonction, certaines difficultés rencontrées par les étudiants résultent principalement d'un changement du contrat didactique lors de la transition Secondaire/Supérieur (Pepin, 2014 ; Gueudet et Pepin, 2018 ; Bloch et Gibel, 2022). En se limitant au concept d'approximation locale d'une fonction, nous proposons les questions suivantes :

- Quels sont les contenus mathématiques qui sous-tendent le processus de la transposition didactique sur le concept d'approximation locale d'une fonction lors du cursus Secondaire Supérieur ?
- Est-ce qu'il existe une collaboration entre les institutions du Secondaire et du Supérieur lors de l'introduction des nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?

Avant de présenter l'étude de la transposition didactique des objets d'approximation locale d'une fonction, d'un savoir-savant à un savoir enseigné, lors de la transition Secondaire/Supérieur en termes de connaissances et de savoirs, nous décrivons les principales étapes de la partie expérimentale de la thèse.

#### **- Méthodologie générale de recherche**

Notre travail de recherche porte la focale sur l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement en vue de surmonter les difficultés liées à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires des études d'ingénieurs de filière Physique-Chimie (PC).

Afin de trouver des éléments de réponse à nos questionnements, nous adoptons dans le cadre de la théorie des situations didactiques, le modèle d'analyse des raisonnements en vue de connaître la manière d'appréhender les conceptions lors de la confrontation des étudiants à une situation à dimension adidactique. Lorsque les étudiants vont confronter à une situation à dimension adidactique, ce qui va nous intéresser au point de vue de conception est de connaître si la production relève du paradigme [AC] ou si la production relève du paradigme [AG] ou si elle relève du type d'Analyse spécifique *a priori* à l'Université, c'est l'Analyse Infinitésimale.

Notre projet de recherche porte sur l'enseignement-apprentissage de l'Analyse et notamment du concept d'approximation locale d'une fonction qui nécessite une collaboration étroite avec l'enseignante de la classe de première année (PC).

La méthodologie mise en œuvre est la suivante : l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement dans le cadre d'un travail collaboratif avec l'enseignante de la classe de première année (PC) pendant deux années universitaires (2018-2019 et 2019-2020). Cette méthodologie de recherche se réalise en trois étapes successives :

- **Étape 1 : phase préliminaire**

Dans une première étape de ce projet, nous envisageons de conduire une analyse didactique des erreurs en vue d'identifier des obstacles liés à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction. Cette phase préliminaire est composée de trois études :

- Une étude historique et épistémologique menée au chapitre 2 qui a permis d'identifier les obstacles épistémologiques.
- Une étude institutionnelle nous aidera à identifier les connaissances antérieures des étudiants liées au domaine d'approximation locale d'une fonction lors de la transition Secondaire/Supérieur. L'objectif principal de cette étude consiste à déterminer les constituants du répertoire didactique et notamment *le registre des formules*.
- Une analyse préliminaire qui nous permettra de classer les différents types d'erreurs effectuées par des étudiants confrontés à une situation mathématique « classique » liée à l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction. L'analyse des raisonnements des étudiants nous permettra d'étudier ces erreurs afin d'identifier les obstacles liés à son apprentissage. En collaboration avec l'enseignante, nous proposons, en avril 2019, un devoir sur table, aux deux classes de (PC) dans le cadre d'une

évaluation formative et formatrice. Ce devoir écrit est composé de trois situations mathématiques « classiques ». Il est proposé suite à l'enseignement des chapitres « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques ». Cette analyse des raisonnements en termes de connaissances et savoirs mobilisés nous permettra de connaître les constituants du *système générateur* du répertoire didactique de l'étudiant.

Nous adoptons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), le modèle d'analyse du raisonnement de Bloch et Gibel (2011) par la prise en compte de deux composantes (fonction, nature et dimension sémiotique de Peirce). Afin de conduire une étude plus fine des raisonnements, nous effectuerons une analyse en termes de dimensions sémantique et/ou syntaxique et de registres de représentation sémiotique. Nous enrichissons cette étude par l'identification des différents paradigmes de l'Analyse standard ainsi que les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mobilisées par les étudiants. Cette analyse didactique des raisonnements nous permettra *a priori* d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors d'un usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction.

Cette analyse préalable, l'étude institutionnelle et l'étude historico-épistémologique menée au chapitre 2 nous permettra *a priori* de déterminer les obstacles liés à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction.

➤ **Étape 2 : co-construction du chapitre « Analyse asymptotique » en intégrant deux situations à dimension adidactique**

A l'issue de ces études complémentaires, nous construisons et élaborons une ingénierie didactique de développement en collaboration étroite avec l'enseignante Rajia Slim en vue de surmonter ces obstacles. L'enseignante a un rôle très spécifique dans ce projet d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction. Elle va co-construire le chapitre « Analyse asymptotique » en intégrant deux situations à dimension adidactique (Mercier, 1995 ; Bloch, 1999) en vue d'offrir aux étudiants la possibilité :

- ✓ d'accéder aux raisons de savoir par le travail dans le paradigme Analyse infinitésimale ;
- ✓ d'accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction à partir du fonctionnement de leurs connaissances antérieures par leurs actions sur le milieu ;
- ✓ de percevoir l'intérêt de l'approche graphique « dynamique » lors de la conceptualisation de cet objet mathématique ;
- ✓ de donner du sens à ce concept mathématique par une appropriation et un usage raisonné par confrontation à des situations mathématiques ;

- ✓ de visualiser ses représentations graphiques soit par l'utilisation du logiciel dynamique de géométrie (dans le cas de la situation 1), soit par l'utilisation des images graphiques sur papier (dans le cas de la situation 2).

La situation 1 vise à permettre aux étudiants de déterminer eux-mêmes les approximations locales respectivement d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0 via ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 par l'utilisation de fonctions négligeables et la visualisation de ses représentations graphiques « dynamiques » par l'usage du logiciel Geogebra.

La situation 2 vise à donner l'intérêt de la définition généralisée du concept de développement limité en évaluant la capacité des étudiants d'articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction dans les différents registres analytique, algébrique, graphique et géométrique. Elle offre la possibilité aux étudiants d'étudier le cas d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 sans cependant être 2 fois-dérivable en ce réel et de donner l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction.

Ces deux situations sont proposées en classe divisée en des groupes de trois étudiants. Une fois cette ingénierie didactique de développement est mise en place, nous adoptons une méthodologie de l'analyse des données.

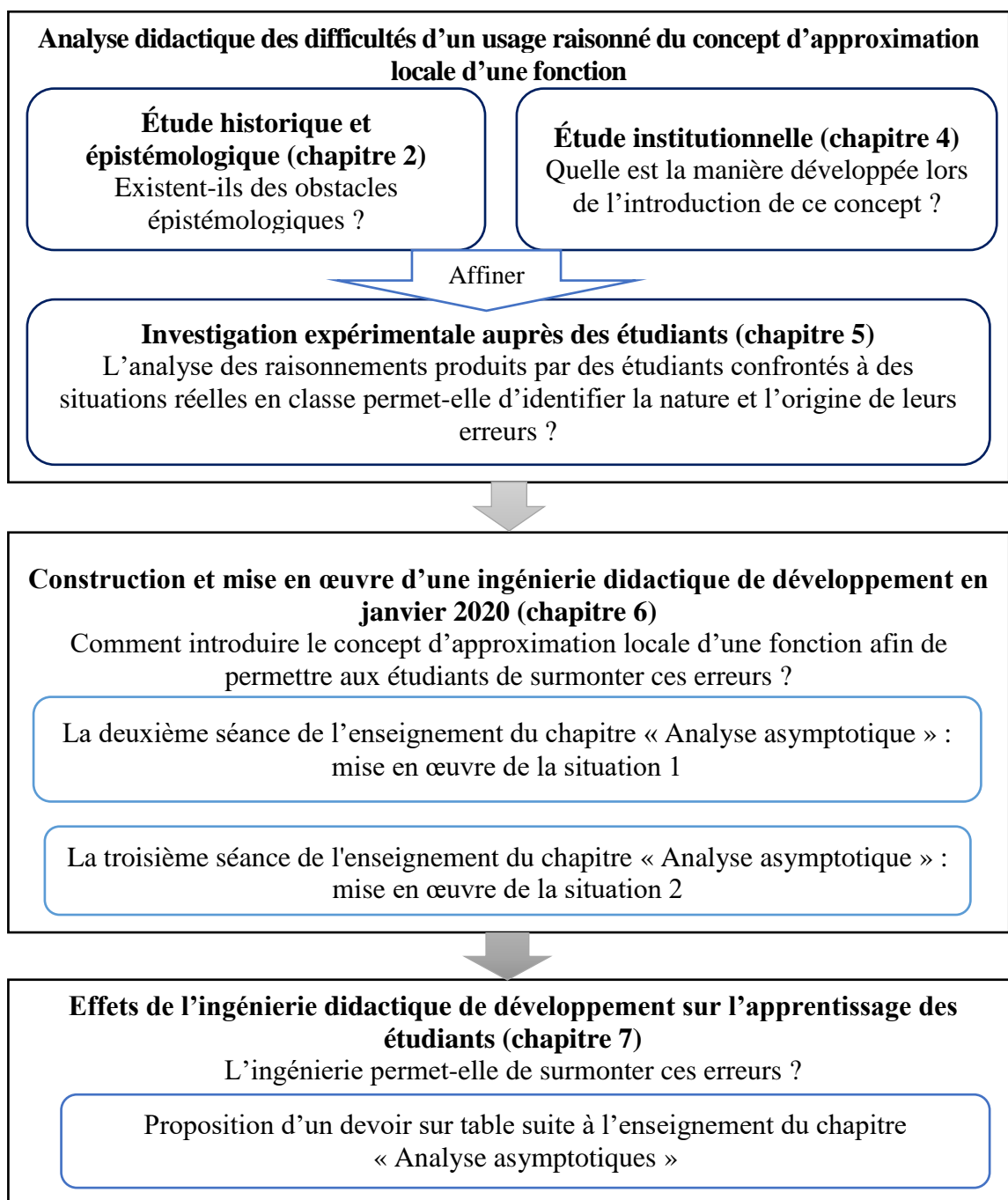
- **Étape 3 : méthodologie de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement**

Ces deux situations sont proposées en classe comportant 24 étudiants qui est divisée en des groupes de trois étudiants. Une fois cette ingénierie est mise en œuvre, la méthodologie porte sur l'analyse de notre corpus constitué des productions des groupes, des interactions au sein du groupe et des interactions entre l'enseignante et les étudiants. La méthodologie des analyses *a priori* et *a posteriori* des travaux des étudiants est basée sur le modèle d'analyse des raisonnements introduit par Bloch et Gibel (2011) par la prise en compte de la structuration des milieux et ses composantes (fonction, nature et dimension sémiotique de Peirce). Ce modèle est utilisé pour étudier des objets de l'Analyse au niveau Secondaire et au niveau Supérieur pour le cas des suites et de limite d'une suite. Pour ceci, nous envisageons de l'enrichir par des outils théoriques permettant une analyse plus fine des raisonnements dans le cas des objets d'approximation locale d'une fonction. Pour lequel, nous allons conduire une analyse logique spécifique aux deux éléments importants du raisonnement : l'identification de la dimension syntaxique ou la dimension sémantique ou l'articulation des deux dimensions. Dans notre cas, la dimension syntaxique est liée à l'utilisation et la mise en œuvre des règles et des propriétés lors de la production d'un raisonnement. La dimension sémantique désigne toute interprétation

des illustrations graphiques ainsi que toute vérification et contrôle des pas d'un raisonnement mathématique. Nous allons aussi être intéressés aux signes qui apparaissent par l'analyse sémiotique de Peirce en référant aux registres de représentation sémiotique. Nous enrichirons cette analyse des raisonnements par l'identification des paradigmes de l'Analyse standard associés et les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mobilisées par les étudiants (Robert, 1998).

Nous présentons les principales étapes de ce travail de recherche en identifiant les différents chapitres et les questions de recherche dans le digramme suivant :

### Diagramme de la présentation de notre travail de recherche



## Chapitre 4

### Analyse institutionnelle

#### Introduction

A l'issue de l'étude de la genèse historique des différents objets liés au domaine d'approximation d'une fonction développée dans le chapitre 2, l'analyse épistémologique a permis de montrer l'existence d'obstacles liés à la conceptualisation de chacune des notions de fonction, limite, d'équivalence d'une fonction, voisinage, tangente et notamment leur définition, leur sens et les symboles utilisés. De plus, à partir d'une analyse des méthodes employées par les mathématiciens lors de la résolution des problèmes physico-mathématiques liés au domaine du calcul infinitésimal, dès l'Antiquité, nous avons signalé l'intérêt des figures géométriques qui étaient un outil qui a contribué à l'émergence des concepts de développements limités, de « développements en séries infinies », de « développements en séries de Taylor », de la formule de Taylor-Young, de la tangente et de la relation de comparaison de fonctions. Cette analyse historico-épistémologique a permis d'identifier des erreurs effectuées par certains mathématiciens ainsi que des erreurs liées aux savoirs étudiés. Ces erreurs sont dues au changement de paradigmes et à l'existence de ruptures épistémologiques. L'identification des différents types d'erreurs nous a amenée à élaborer une typologie d'obstacles épistémologiques afin de les confronter aux difficultés rencontrées par les étudiants.

Une étude des raisonnements produits lors de l'appropriation et de l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction pourrait *a priori* nous aider à identifier la nature et l'origine de leurs erreurs à l'entrée à l'Université.

Avant d'analyser ces raisonnements, nous conduirons une étude du processus de transposition didactique externe de ce concept mathématique de sa niche conceptuelle à sa niche institutionnelle afin de déterminer les éléments du répertoire didactique de la classe qui

*« ...ne se limite pas à l'ensemble des connaissances et des savoirs, c'est aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances, de nouvelles formules (...) en lui offrant ainsi la possibilité de retrouver des tâches, des actions, des méthodes, des formulations et des justifications. » (Gibel, 2018, p.27)*

Nous rejoignons le point de vue de Gibel (2018) sur la définition du répertoire didactique dans lequel il distingue deux types d'objets le « registre des formules » qui est la collection des



formules et le « système organisateur » qui permet d'organiser et d'utiliser ce répertoire didactique.

D'un côté, le concept d'approximation locale est introduit à la fin du Secondaire, en Tunisie, et se développe largement dans les filières universitaires destinées à la formation des futurs ingénieurs. Cependant, deux processus de transposition apprêtés sont déployés. En effet, au Secondaire, l'enseignant dispose d'un programme et d'un manuel qui sont uniques. Par contre, l'enseignant universitaire ne dispose que d'un programme unique et par la suite, sa tâche consiste à élaborer son propre cours en utilisant des ouvrages universitaires.

De ce fait, au niveau Supérieur, l'enseignant prépare lui-même son cours en s'appuyant sur le programme officiel ainsi que sur des ouvrages universitaires en tant que références de son cours. Ceci nous a amenés à conduire une étude du programme de terminale (quatrième année Secondaire de l'Analyse) afin d'identifier les connaissances antérieures sur ce concept mathématique des étudiants entrant dans le Supérieur.

En Tunisie, les étudiants sont inscrits en première année de filière Physique-Chimie (PC) suite à leur réussite au baccalauréat de la filière Sciences Expérimentales (SC-E). Pour ces raisons, nous allons conduire une étude en termes de transposition didactique du concept d'approximation locale d'une fonction dans les programmes officiels de la quatrième année secondaire (SC-E) et de première année (PC), du polycopié de cours de l'enseignante et des parties d'ouvrages universitaires les plus utilisées en tant que références de son cours. Cette réflexion didactique nous aide à identifier les connaissances et les savoirs des étudiants entrant en classes préparatoires dans le domaine d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique. Nous proposons les questions suivantes :

- Chacune des notions d'approximation locale d'une fonction est-elle introduite en tant que nouvelle technique, dans les domaines intra et extra mathématiques, en articulant les différentes approches (algébrique, analytique, graphique et géométrique) au niveau des programmes officiels et les différents supports de cours étudiés ?
- Quel est le sens donné au concept d'approximation locale d'une fonction dans le projet institutionnel de son enseignement ?
- Quels sont les contenus mathématiques qui sous-tendent le processus de la transposition didactique inhérent au concept d'approximation locale d'une fonction en quatrième année secondaire (SC-E) et en première année des classes préparatoires aux études d'ingénieurs (PC) ?

- Quelles sont les différentes techniques mobilisées pour résoudre les différents types de tâches dans l'environnement des approximations des fonctions ?
- Quelles sont les approches choisies, ainsi que les techniques utilisées dans les programmes afin d'introduire les nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction au début de l'Université ?

### **I. Méthodologie de l'analyse des programmes et des différents supports de cours**

Dans le contexte de la confrontation d'un étudiant à une situation mathématique, nous nous intéressons à conduire une analyse des raisonnements produits en termes de connaissances et de savoirs mobilisés et plus précisément le répertoire didactique de l'étudiant entrant à l'Université. Afin d'identifier les définitions, les propriétés, les théorèmes, les méthodes, les techniques et les formules qui peuvent être mobilisés lors de l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction, nous adoptons le cadre théorique de l'anthropologie didactique (Chevallard, 1998).

Nous conduirons une étude des programmes et des différents supports de cours en nous appuyant essentiellement sur les aspects praxéologiques développés dans la théorie anthropologique de didactique dans le domaine de mathématiques (Chevallard, 1998) en termes de blocs (type de tâche, type de technique) et (Technologie, Théorie). En effet, l'activité mathématique est modélisée par l'organisation praxéologique de Chevallard (1998) notée :  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ .

T : type de tâche donné

$\tau$  : une technique  $\tau$  est une « manière de faire »

*« Soit donc T un type de tâches donné. Une praxéologie relative à T précise (en principe) une manière d'accomplir, de réaliser les tâches  $t \in T$  : à une telle manière de faire,  $\tau$ , on donne ici le nom de technique (du grec tekhnê, savoir-faire). Une praxéologie relative au type de tâches T contient donc, en principe, une technique  $\tau$  relative à T. » (Chevallard, 1998, p.2)*

$\theta$  : une technologie est

*« un discours rationnel (logos) sur la technique – la tekhnê –  $\tau$ , discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique  $\tau$ , en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. » (Ibid., p.3)*

$\Theta$  : une théorie est le discours technologique qui

*« ... contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau Supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie,  $\Theta$ , laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. » (Ibid., p.4)*

La notion de praxéologie est définie selon les deux mots *praxis et logos* :

*Praxis* signifie « pratique » et renvoie au bloc practico-technique  $[T/\tau]$  et désigne le savoir-faire.

*Logos* signifie « raison », « discours raisonné » qui renvoie au bloc technologico-théorique  $[\theta/\Theta]$  et désigne le savoir.

Les concepts d'approximation locale d'une fonction sont des savoirs à enseigner dans le Supérieur en tant que nouvelle connaissance dans le domaine de l'étude d'une fonction transcendante ou algébrique. Pour cette raison, nous enrichissons cette étude par une analyse sémiotique en termes de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et par une identification de paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015), développés dans la section III du chapitre 3.

Afin de conduire une étude didactique plus fine d'un concept mathématique, nous rejoignons le point de vue de Douady (1986) qui s'est appuyée sur les travaux de Brousseau, Piaget, Vergnaud et Chevallard pour étudier les réalisations en classe.

*« Pour un concept mathématique, il convient de distinguer son caractère "outil" et son caractère "objet". Par outil nous entendons son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre. Un concept prend son sens par son caractère outil. (...)*

*Par objet, nous entendons le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.*

*» (Douady, 1986, p.9-10)*

Pour ceci, nous conduirons une étude du concept d'approximation locale d'une fonction en termes de la dialectique outil/objet de Douady (1986) dans les programmes, le polycopié de cours de l'enseignante et les différentes parties d'ouvrages universitaires.

Ces analyses seront croisées avec les dimensions sémiotiques en termes de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). Nous complétons cette analyse par l'identification des paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015).

Dans le cadre des praxéologies mathématiques, l'identification des paradigmes de l'Analyse et les registres de représentation sémiotique nous amènent à classer les différents types de techniques mobilisées lors de la résolution des différents types de tâches proposées aux élèves selon quatre catégories :

- techniques analytiques : dans ce cas, l'auteur fait un usage direct des algorithmes et des méthodes (des techniques, formules, propriétés ou théorèmes, etc.) du répertoire didactique lors de la résolution des différents types de tâches ;

- techniques algébriques : dans ce cas, il utilise des règles du calcul formel et algébrique lors de la détermination des dérivées successives d'une fonction, du calcul de limite d'une fonction, etc. ;
- techniques géométriques : dans ce cas, il interprète des illustrations graphiques ou des expressions algébriques ou analytiques afin d'étudier des objets de géométrie. Par exemple, il interprète une expression analytique pour étudier la position relative d'une courbe et de sa tangente en un point ;
- techniques graphiques : dans ce cas, il construit des représentations graphiques des objets mathématiques pour résoudre certains types de tâches.

Nous commençons par une étude du programme officiel de la quatrième année Secondaire (SC-E) afin de déterminer les connaissances antérieures des élèves entrant en Université sur le domaine d'approximation locale d'une fonction au niveau de la première année (PC).

## **II. Étude du programme de la quatrième année Secondaire (SC-E)**

Dans cette section, nous présentons une étude du programme officiel de terminale dans le domaine de l'Analyse - section Sciences Expérimentales (SC-E). Cette étude est structurée en deux volets dont le premier se rapporte aux objectifs généraux du programme. Le second volet traite les objectifs du contenu des parties liées au concept d'approximation locale d'une fonction.

### ***II.1. Objectifs généraux du programme d'Analyse***

Le texte des programmes de mathématiques de troisième et de la quatrième année Secondaire en Tunisie, publié en 2006, commence par une présentation des objectifs généraux d'enseignement des concepts mathématiques dans les différentes filières (Mathématiques - Sciences Expérimentales - Sciences Techniques - Sciences de l'Informatique - Economie et gestion – Lettres).

A l'instar de Haddad (2006), le programme de terminale (2006) comporte quatre types de problèmes proposés dans l'enseignement des différents objets mathématiques en Analyse :

- « - *Problèmes qui visent la construction d'une nouvelle connaissance.*
- *Problèmes d'entraînement qui visent l'application et/ou le réinvestissement de connaissances déjà construites, du moins supposées l'être.*
  - *Problèmes de synthèse qui visent l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.*
  - *Problèmes de recherche pour lesquels l'élève ne dispose pas d'une stratégie de résolution déjà utilisée et qui visent donc à placer l'élève en situation de recherche. » (Haddad, 2012, p.111)*

Le programme donne la priorité à la démarche expérimentale (pratique mathématique).

« Il ne place pas les mathématiques seulement du côté du formalisme et de l'abstraction. Il préconise le recours à des situations dans lesquelles est posé pensable et effectuable une complémentarité entre l'observation concrète et la pensée abstraite. Il apparaît ainsi que les auteurs du programme cherchent à donner aux mathématiques à enseigner une certaine épaisseur sémantique. » (Ibid., p.112)

Les principaux objectifs de l'enseignement de mathématiques en troisième et quatrième année du Secondaire sont présentés selon trois grandes parties :

- **Introduction**

A partir d'activités écrites et orales, les enseignants doivent aider les élèves à développer leurs aptitudes dans les tâches suivantes :

- ✓ Pratiquer d'une démarche mathématique

- « Chercher, expérimenter, conjecturer ou contrôler un résultat »
- Développer des chaînes de raisonnement inductif, déductif par l'absurde ou par récurrence.

- ✓ Communiquer dans un langage mathématique

- « Expliquer un raisonnement, une stratégie ou une solution à un problème » en utilisant le vocabulaire mathématique adapté.
- Discuter avec ses collègues à travers les interactions d'idées.

- ✓ Mobiliser des algorithmes et des procédures

- « Élaborer une stratégie de calcul (numérique, algébrique, géométrique et statistique) » afin d'utiliser des algorithmes et des procédures adéquates.

- ✓ Résoudre des problèmes

- ✓ Organiser et analyser l'information

- « Identifier, organiser, sélectionner et synthétiser des informations chiffrées ou graphiques. »

- ✓ Utiliser les technologies de l'information et de la communication

- Utiliser la calculatrice ou des logiciels pour résoudre des activités numériques, algébriques, géométriques et statistiques. Ainsi, la technique informatique est un moyen d'échange d'information entre les élèves.

- ✓ Apprécier la contribution des mathématiques

- **Démarche et raisonnement mathématique**

Dans cette partie, les recommandations du programme invitent les enseignants à aider leurs élèves au développement de leur aptitude à :

- ✓ chercher et cultiver leur persévérance à travers l'utilisation des illustrations graphiques, la calculatrice et le logiciel ;
- ✓ développer des raisonnements ;
- ✓ développer une méthodologie de résolution des problèmes.

- **Communication à l'aide du langage mathématique**

Dans cette partie, les objectifs consistent à amener les élèves à :

- ✓ Interpréter des illustrations graphiques ou figures géométriques par l'utilisation de notions mathématiques

« ... les élèves décrivent une figure ou un graphique en utilisant un vocabulaire mathématique. » (PO, 2006, p.6)

- ✓ Expliquer oralement ou résoudre oralement des problèmes par l'utilisation de différentes techniques et syntaxes. Le raisonnement doit être produit oralement en classe.
- ✓ Rédiger une démonstration ou résoudre des problèmes mathématiques.

De plus, l'enseignant a un rôle très important en classe qui consiste à trouver les moyens de créer des interactions entre les élèves à travers des discussions, des inter-échanges sur leur démarche de raisonnement ou leur stratégie de recherche. Par ailleurs, l'enseignant est invité à aider les élèves à utiliser « *des technologies de l'information et de la communication* » par l'usage d'outils technologiques tels que la calculatrice ou un logiciel en vue de résoudre des différents types de tâches :

« - *Faire des essais, conjecturer ;*

- *effectuer ou vérifier un calcul*
- *construire des figures ou des tableaux ;*
- *représenter graphiquement des résultats.* » (PO, 2006, p.6)

En outre, les recommandations du programme invitent les enseignants à utiliser des techniques géométriques en s'appuyant sur des représentations graphiques des objets afin de mener à bien certains types de tâches dans des différents registres algébrique, analytique, graphique, géométrique et numérique.

## ***II.2. Étude du contenu lié au concept d'approximation locale d'une fonction***

Le concept d'approximation locale d'une fonction est présenté en quatrième année (SC-E) *via* les notions de la tangente, la limite d'une fonction, l'asymptote (le comportement d'une fonction en l'infini) et l'approximation affine d'une fonction.

Selon le texte officiel du programme, les enseignants doivent mettre en lien les objets mathématiques : « tangente » et « nombre dérivé ». En effet, la tangente est définie comme

étant une approximation affine d'une fonction au voisinage d'un réel à partir du nombre dérivé d'une fonction au voisinage d'un réel et inversement.

Le mot « reconnaître » existant dans le contenu du programme désigne de présenter la définition des savoirs à enseigner.

Nous pouvons ainsi dire que les enseignants sont invités à introduire les différents savoirs à enseigner, liés au domaine d'approximation locale d'une fonction, à partir de ses définitions, de ses propriétés et des théorèmes. Ainsi, ils pourront les étudier en tant que technique pour résoudre différents types de tâches mentionnées dans le contenu du programme.

Nous présentons la grille d'analyse multidimensionnelle du contenu du programme lié au domaine d'approximation locale d'une fonction dans ce tableau :

Concepts	Types de tâche	Types de technique	Technologie/ Théorie	Paradigmes
Continuité d'une fonction en un réel ou sur un intervalle	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étudier une fonction au voisinage d'un réel ou sur un intervalle.</li> <li>- Déterminer des valeurs exactes ou approchées des extrema.</li> </ul>	Algébrique	Analyse fonctionnelle	[AC]
Limite d'une fonction en un réel ou à l'infini	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliser les résultats sur les limites finies pour déterminer le prolongement par continuité d'une fonction.</li> <li>- Déterminer la limite finie d'une fonction.</li> <li>- Interpréter les résultats sur les limites finies pour déterminer la limite finie d'une fonction.</li> <li>- Étudier une fonction au voisinage d'un réel et à l'infini.</li> <li>- Interpréter graphiquement les limites finies ou infinies en termes d'asymptotes ou des branches paraboliques.</li> </ul>	Analytique  Algébrique  Graphique  Géométrique	Analyse réelle	[AC] et [AG]
Extrema d'une fonction	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étudier graphiquement une fonction</li> </ul>	Géométrique / Graphique	Analyse fonctionnelle	[AG]
Étude de la position relative de deux courbes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Exploiter une représentation graphique.</li> <li>- Créer Tracer une représentation graphique</li> </ul>	Géométrique / Graphique	Analyse fonctionnelle	[AG]
Tangente à une courbe en un point	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer l'équation d'une tangente.</li> <li>- Déterminer la pente de la tangente à partir du nombre dérivé.</li> <li>- Déterminer le nombre dérivé d'une fonction connaissant l'équation de sa tangente en un point.</li> <li>- Déterminer une approximation affine d'une fonction.</li> <li>- Déterminer l'approximation d'un réel par la technique d'approximation d'une fonction.</li> <li>- Calculer la valeur approchée d'un réel par l'utilisation de la technique d'approximation affine d'une fonction (approximation locale d'une fonction).</li> <li>- Étudier une fonction au voisinage d'un réel</li> </ul>	Géométrique       Algébrique/ Graphique/ Géométrique	Analyse fonctionnelle	[AC] et [AG]
Nombre dérivé	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculer un nombre dérivé</li> </ul>	Algébrique/ Géométrique	Analyse fonctionnelle	[AC] et [AG]

	- Définir l'interprétation géométrique d'un nombre dérivé - Déterminer l'équation d'une tangente			
Approximation affine d'une fonction	- Déterminer une valeur approchée d'un réel	Algébrique	Analyse fonctionnelle	[AC]
Point d'inflexion	- Interpréter graphiquement une fonction au voisinage d'un réel - Déterminer un point d'inflexion	Géométrie / Graphique	Analyse fonctionnelle	[AG]
Asymptote à une courbe	- Étudier le comportement d'une fonction en l'infini	Algébrique/ Graphique/ Géométrie	Analyse fonctionnelle	[AC] et [AG]

**Tableau 4-1 : analyse de contenu du programme de 4<sup>ième</sup> secondaire (SC-E) lié au champ d'approximation locale d'une fonction**

En conclusion, au niveau du Secondaire, l'objectif principal du programme de la quatrième année (SC-E) confère à l'enseignant comme mission principale d'aider l'élève à utiliser son répertoire didactique constitué d'algorithmes et de procédures en faisant appel aux technologies de l'information et de la communication (logiciel, calculatrice, etc.), ainsi que de construire et d'interpréter des représentations graphiques des objets mathématiques. Par ailleurs, les enseignants sont invités à accompagner chaque élève à développer sa démarche de raisonnement par la rédaction et l'explication orale de la résolution des problèmes à travers l'interaction avec ses collègues. Le texte du programme impose le recours aux registres graphique et géométrique par la construction et l'interprétation des illustrations graphiques et des figures géométriques ou par des logiciels afin d'introduire des nouvelles notions.

### ***II.3. Conclusion : organigramme de contenu du programme***

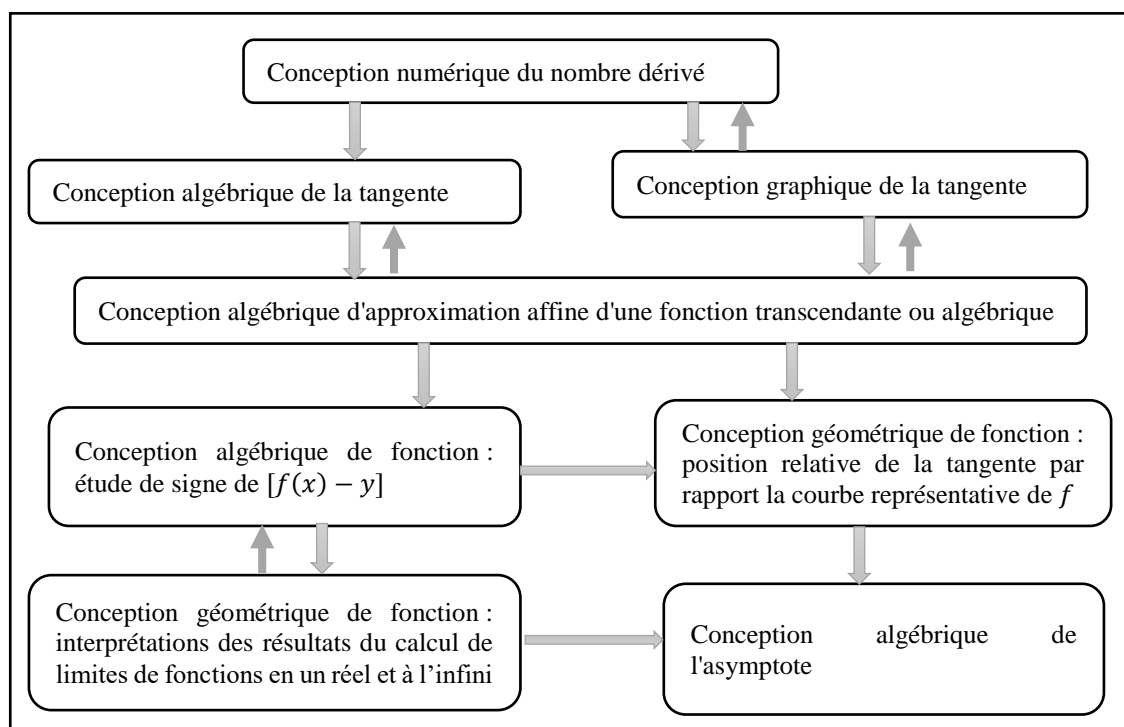
Au regard du contenu du programme lié à nos objets d'étude, les notions d'approximation locale d'une fonction algébrique ou transcendante sont présentés *via* les approximations affines de fonctions ainsi que l'équation de la tangente obtenue à partir du nombre dérivé. Ce dernier concept permet de déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction en question qui est l'outil de base des approximations linéaires d'ordre 1. De plus, le travail sur les points d'inflexion par des techniques analytiques du calcul de la dérivée seconde en un point, représente une étude locale faisant intervenir implicitement l'approximation locale d'ordre 2 de la fonction en question.

Ainsi, l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction nécessite la mobilisation de ses différentes représentations sémiotiques dans des registres (analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique) afin de développer le raisonnement de l'élève par la rédaction et l'explication orale d'un raisonnement mathématique.



Nous pouvons conclure que les recommandations du programme invitent les enseignants à utiliser des représentations graphiques de la tangente et de la fonction elle-même afin d'introduire les objets de son étude. Le texte du programme impose donc le recours aux registres graphique et géométrique pour introduire ces nouveaux objets mathématiques.

Nous pouvons classer les conceptions de ces objets mathématiques dans ce diagramme :



**Figure 4-1 : mises en relation des différentes conceptions inhérentes à l'approximation locale d'une fonction dans le Secondaire**

### III. Étude du programme de la première année Physique-Chimie (PC)

Le texte officiel du programme actuel (2016) de la première année (PC) commence par une introduction composée de deux parties dont la première vise à présenter ses principaux objectifs. La deuxième comporte les notes à considérer dans l'enseignement des objets mathématiques. Dans notre travail, nous conduisons une étude des objectifs généraux de l'enseignement de l'Analyse, ainsi que le contenu du contexte lié au concept d'approximation locale d'une fonction et qui est relatif au chapitre « Analyse asymptotique ».

#### III.1. Objectifs généraux de l'enseignement d'Analyse

Les auteurs du programme dirigent l'enseignant quant à la transposition didactique d'un objet mathématique en précisant son rôle au début de l'Université. Dans la première partie de l'introduction, ils mettent en avant son action principale dans le processus de transposition d'un savoir-savant à un savoir à enseigner qui se réalise à travers la mise en jeu de l'interaction objet-

apprenant. En effet, l'enseignant doit prendre en compte les connaissances antérieures des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement en mathématiques et les différentes techniques utilisées pour résoudre le problème du calcul au niveau du Secondaire. D'un autre côté, il doit introduire un nouvel objet en présentant l'intérêt de son enseignement en tant que nouvelle technique dans les domaines intra et extra mathématiques au début de l'Université qui sont :

- la collaboration entre les deux niveaux d'enseignement Secondaire et Supérieur à travers l'interaction objet-apprenant afin d'enseigner des savoirs (définitions, propriétés, théorèmes, etc.) au début de l'Université ;
- la façon d'introduire un nouveau concept (sa définition) afin de présenter l'intérêt de son enseignement au début de cursus universitaire ;
- l'aide aux étudiants pour rédiger correctement une démonstration mathématique (activité) par l'utilisation des éléments de la logique ;
- l'aide aux étudiants pour élaborer des raisonnements en faisant usage de leur répertoire didactique.

Le programme présente l'intérêt des éléments de la logique dans le domaine de l'Analyse. En effet, les différents points à considérer par l'enseignant sont liés à l'utilisation des éléments tels que les quantificateurs existentiel et universel, les méthodes de démonstrations, le raisonnement par récurrence, le raisonnement par analyse et synthèse. Ils ont pour but d'aider les étudiants à maîtriser et rédiger correctement une démonstration mathématique.

Dans le chapitre « Analyse asymptotique », les objectifs principaux de l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction, consistent à amener l'étudiant à maîtriser les techniques asymptotiques à travers des calculs asymptotiques simples, la détermination des développements limités de fonctions, ainsi que la résolution des problèmes. Cette dernière nécessite la vérification des propriétés des nouvelles notions et surtout celles liées à la relation de comparaison de fonctions. L'enseignant est invité à mobiliser les registres graphique et géométrique par l'utilisation des illustrations graphiques et des figures géométriques en s'appuyant sur les outils logiciels dans le cas des « *situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité (qui) seront traitées à l'aide d'outils logiciels* ».

En résumé, nous pouvons classer les objectifs généraux du programme de l'enseignement des objets de l'Analyse selon quatre catégories :

- le développement de modes de raisonnement mathématique ainsi qu'une méthodologie de résolution des problèmes selon un aspect logique ;

- l'intérêt d'introduire une nouvelle notion d'approximation locale d'une fonction par l'utilisation de techniques graphique et géométrique à partir de l'interprétation des illustrations graphiques et des figures géométriques dans différents registres à l'aide d'outils logiciels ;
- l'intérêt des langages mathématiques et des éléments logiques dans une démarche de raisonnement mathématique ;
- le développement cognitif de l'étudiant.

Les recommandations du programme insistent sur l'enseignement de la relation de comparaison de fonctions (les notions de voisinage, de fonctions négligeables, dominées et équivalentes), de développements limités d'une fonction et de la formule de Taylor-Young afin de déterminer des développements limités usuels. Le concept du développement limité est un nouvel « outil » pour le calcul d'équivalents et de limite d'une fonction (relevant d'une forme indéterminée), pour l'étude locale d'une fonction par la détermination de l'équation d'une tangente et la position relative de celle-ci par rapport à la courbe représentative en un point et pour l'étude des asymptotes éventuelles.

Nous pouvons conclure que le rôle principal de l'enseignant consiste à se questionner sur :

- Comment introduire un nouvel objet mathématique en mettant en jeu les connaissances antérieures des étudiants enseignées dans le Secondaire afin de donner l'intérêt de l'enseignement de cette nouvelle notion ?
- Comment transposer les nouvelles techniques du raisonnement mathématique pour résoudre les différents types de tâches dans les domaines intra et extra-mathématiques ?
- Comment amener l'étudiant à rédiger lui-même convenablement une démonstration mathématique en Analyse et en Algèbre ?

En conclusion, les principaux objectifs du programme de la première année (PC) consistent à mettre en œuvre la transition entre les deux niveaux d'enseignement Secondaire et Supérieur ; et plus précisément, la manière d'introduire une nouvelle notion pour présenter l'intérêt de son enseignement au niveau Supérieur. En plus, l'objectif principal de l'enseignement des nouvelles techniques consiste à consolider les outils de la logique et les outils de calcul dans les domaines intra et extra-mathématiques. Finalement, un autre objectif principal de ce programme est d'amener l'étudiant à la rédaction, d'une manière autonome, d'un raisonnement ou d'une démonstration mathématique en Algèbre et en Analyse à travers l'utilisation des différentes techniques (algébrique, analytique, graphique et géométrique).

Ainsi le rôle de l'enseignant s'organise selon deux volets. Le premier est concentré autour de « *l'objet mathématique* » par la mise en jeu des connaissances antérieures des étudiants et

l'intérêt des nouvelles notions dans les domaines intra et extra mathématiques. Le second volet se focalise sur le « *raisonnement mathématique* » par la mise en jeu des moyens de justification, de validation et de contrôle des différentes étapes d'une démonstration mathématique utilisant les éléments de la logique, les langages mathématique, les techniques et les règles de calcul.

En mettant en perspective notre thème de recherche et nos objets d'étude, nous avons décidé de présenter le contenu du programme d'Analyse du premier semestre qui est composé de deux parties divisées en six chapitres. La première partie est composée des chapitres « Techniques fondamentales de calcul en Analyse » et « Nombres réels et suites numériques ». La deuxième partie s'intitule « Limites, continuité, dérivabilité » est composée de quatre chapitres : « Limites, continuité », « Dérivation », « Fonction convexe » et « Analyse asymptotique ».

Nous allons étudier le contenu du programme lié au concept d'approximation locale d'une fonction dans la section suivante.

### ***III.2. Étude du texte du programme lié au concept d'approximation locale d'une fonction***

L'approximation locale d'une fonction est présentée, dans un premier temps, *via* le « développement limité d'ordre 1 ». Cet objet mathématique est introduit par l'interprétation géométrique de la tangente dans le quatrième chapitre « Dérivabilité » alors qu'il est présenté, au niveau du sixième chapitre intitulé « Analyse asymptotique », sous l'angle de la relation de comparaison de fonctions, de la formule de Taylor-Young et des développements limités.

- Objectifs principaux de l'enseignement de la partie « Limites, continuité, dérivabilité »

Nous essayons dans cette section de conduire une étude globale des objectifs de l'enseignement du programme « Limites, continuité, dérivabilité ». Cette partie est introduite par son objectif où les auteurs précisent les deux thèmes « *limites et continuité* » et « *calcul différentiel* ». C'est dans ce dernier thème, qu'est développée l'étude locale d'une fonction.

Les auteurs soulignent l'intérêt du processus de visualisation pour l'apprentissage de la notion de fonction. En effet, la figure géométrique a un rôle très important dans l'enseignement de cet objet mathématique. Ainsi, le travail au niveau des registres graphique et géométrique est au cœur de l'enseignement de la notion de fonction au début de l'Université.

Dans le dernier paragraphe de l'introduction de cette partie, l'enjeu est l'appropriation de la notion de voisinage : voisinage d'un réel et voisinage de l'infini. La « propriété » est mentionnée pour qu'il y ait un lien entre la notion de voisinage et la notion d'étude d'une fonction. Les auteurs souhaitent relier les deux domaines : topologie et analyse fonctionnelle.

*« Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction  $f$  définie sur  $I$  est vraie au voisinage de  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $I$  avec un intervalle ouvert centré sur*

*a si a est réel, avec un intervalle  $[A, +\infty[$  si  $a = +\infty$ , avec un intervalle  $] -\infty, A]$  si  $a = -\infty$  » (PO, 2016, p.9)*

- Objectifs d'enseignement du chapitre « Limites - continuité »

Ce troisième chapitre est introduit par un paragraphe expliquant l'étude de limite et de la continuité entre les deux notions : suite et fonction. Ensuite, les auteurs donnent l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvel « outil » pour le calcul de limite.

*« Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développement limité). » (Ibid.)*

- Étude du contenu de la partie du quatrième chapitre liée au concept d'approximation locale d'une fonction

La notion d'approximation locale d'une fonction est introduite dans le chapitre « Dérivabilité » et elle est développée dans le chapitre suivant « Analyse asymptotique ». Le contexte de chaque chapitre est présenté dans un tableau en deux parties : Contenus et capacités & commentaires.

Dans la partie consacrée à l'étude de la dérivabilité d'une fonction, le concept d'approximation locale d'une fonction se présente, pour la première fois, sous la notion de développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un réel. L'enseignant est invité à introduire cette notion par l'usage du symbole de l'expression du reste pour déterminer la définition de cet objet mathématique et par l'interprétation géométrique pour déterminer la tangente à la courbe en mobilisant des registres algébrique et géométrique.

- Objectifs généraux de l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique »

Afin de rester dans le cadre de nos objets d'étude, nous limitons notre analyse aux objectifs liés à l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction à travers l'analyse des objectifs spécifiques du sixième chapitre « Analyse asymptotique ».

Dans l'introduction de ce chapitre, les auteurs invitent les enseignants à mettre en avant certains points :

- L'enseignement de chacun des « objets » afin de préciser leur intérêt en tant que nouvel « outil » pour la résolution des différentes tâches dans l'environnement des suites et des fonctions.
- Au cours de la démarche du raisonnement mathématique, la priorité de la résolution des différents types de tâches dans l'environnement de la relation de comparaison de fonctions.
- L'enseignement des développements limités usuels afin d'être présentés comme des techniques usuelles utilisées pour la résolution des différents types de tâches des calculs asymptotiques simples.

- L'usage des techniques de nature graphique et géométrique articulant les registres graphique, géométrique et analytique pour résoudre des situations nécessitant l'outil logiciel.

Nous remarquons que la notion d'approximation est totalement absente dans tout le texte du programme. Nous pouvons classer les objectifs selon trois catégories :

- Utilisation des nouveaux objets en tant que nouvelles techniques pour résoudre certains types de tâches dans le domaine de l'Analyse et notamment à la notion de la relation de comparaison des fonctions.
- Choix des techniques adéquates pour résoudre certains types de tâches dans le domaine de l'Analyse asymptotique.
- Détermination des développements limités usuels.

Parmi les objectifs principaux du programme est la prise en compte de la transition entre les deux niveaux d'enseignement Secondaire et Supérieur et plus précisément, la manière d'introduire un nouvel objet mathématique afin de présenter l'intérêt de son enseignement au niveau Supérieur.

En résumé, le programme d'Analyse vise à développer des nouvelles techniques croisant les registres géométrique, graphique, algébrique, analytique et numérique dans les domaines intra et extra mathématiques.

- Étude du contenu du chapitre « Analyse asymptotique »

Dans ce chapitre, les savoirs à enseigner sont liés à l'étude des limites des suites et des fonctions. Dans notre travail, nous mettons la focale sur les savoirs liés à la limite des fonctions.

Le contenu du programme lié à l'enseignement de la relation de comparaison de fonctions, de la formule de Taylor-Young et de développements limités précise les définitions, les propriétés élémentaires et les théorèmes inhérents à ces savoirs à enseigner.

Nous présentons, dans le tableau ci-dessous, les différents types de tâches et de techniques liées aux notions d'approximation locale d'une fonction en prenant en considération le bloc technologico-théorique au sens de Chevallard (1998), les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 2006), la dialectique outil/objet (Douady, 1986) et les paradigmes de l'Analyse standard correspondants.

Concepts	Outil/Objet	Types de tâche	Types de techniques	Technologie /Théorie	Paradigmes
Développement limité d'ordre 1	Objet	- Déterminer un développement limité d'une fonction d'ordre 1 par l'utilisation de l'expression du reste sous la forme : $(x - a)\varepsilon(x - a)$	Analytique	Topologie et analyse fonctionnelle	[AI]
	Outil	- Interpréter géométriquement - Déterminer la tangente au graphe d'une fonction au point d'abscisse a	Géométrie / Algébrique		[AG]-[AI]

Fonctions équivalentes	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractériser <math>f(x) \sim g(x)</math> à partir du quotient <math>\frac{f(x)}{g(x)}</math></li> <li>- Déterminer <math>f(x) \sim g(x)</math> et <math>[f(x) - g(x) = o(g(x))]</math></li> <li>- Déterminer l'équivalent d'une fonction par l'usage du symbole "petit o" de la topologie au voisinage d'un réel</li> </ul>	Analytique		Analytique/ [AI]
Fonctions négligeables	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractériser <math>[f(x) = o(g(x))]</math> à partir du quotient <math>\frac{f(x)}{g(x)}</math></li> <li>- Déterminer les fonctions négligeables les unes relativement aux autres par l'utilisation du symbole « o » de la topologie au voisinage d'un réel</li> </ul>	Analytique		Analytique/ [AI]
Développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel a	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer le développement d'ordre n d'une fonction au voisinage d'un réel</li> </ul>	Analytique/ algébrique/ géométrique/ graphique		[AI]-[AC]
	Outil	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculer la limite d'une fonction</li> <li>- Déterminer des équivalents</li> <li>- Étudier une fonction au voisinage d'un réel : <ul style="list-style-type: none"> <li>* Prolongement par continuité ;</li> <li>* Dérivabilité d'un prolongement par continuité ;</li> <li>* Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a ;</li> <li>* Préciser la position relative de la courbe et de la tangente ;</li> <li>* Déterminer l'extrémum (si existence)</li> </ul> </li> <li>- Étudier le comportement d'une fonction en l'infini : <ul style="list-style-type: none"> <li>* Calculer sa limite en l'infini ;</li> <li>* Déterminer un DL d'ordre n en l'infini</li> <li>* Déterminer des asymptotes, etc.</li> </ul> </li> </ul>	Algébrique/ analytique/ géométrique/ graphique		[AG]-[AI]- [AC]
Formule de Taylor-Young	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer un développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage d'un réel</li> </ul>	Analytique		[AG]-[AI]- [AC]
	Outil	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer des développements limités usuels</li> <li>- Étudier une fonction au voisinage d'un réel</li> <li>- Étudier le comportement d'une fonction en l'infini</li> </ul>	Analytique/ graphique/ géométrique		[AG]-[AI]- [AC]

**Tableau 4-2 : analyse de contenu du programme lié au domaine d'approximation locale d'une fonction en première année (PC)**

Nous remarquons que l'expression d'approximation d'une fonction ne s'affiche pas dans le programme. D'une part, la notion de fonctions équivalentes est introduite à partir de la relation de comparaison des fonctions puis celle de développement limité. En effet, les auteurs n'insistent pas sur le lien entre les notions de la relation de comparaison de fonctions et de

développements limités. D'autre part, l'expression du reste du développement limité d'une fonction au voisinage de  $x_0$  est présentée sous la forme de  $o((x - x_0)^n)$  et n'est pas assez développée par les auteurs.

### ***III.3. Conclusion : organigramme de contenu du programme***

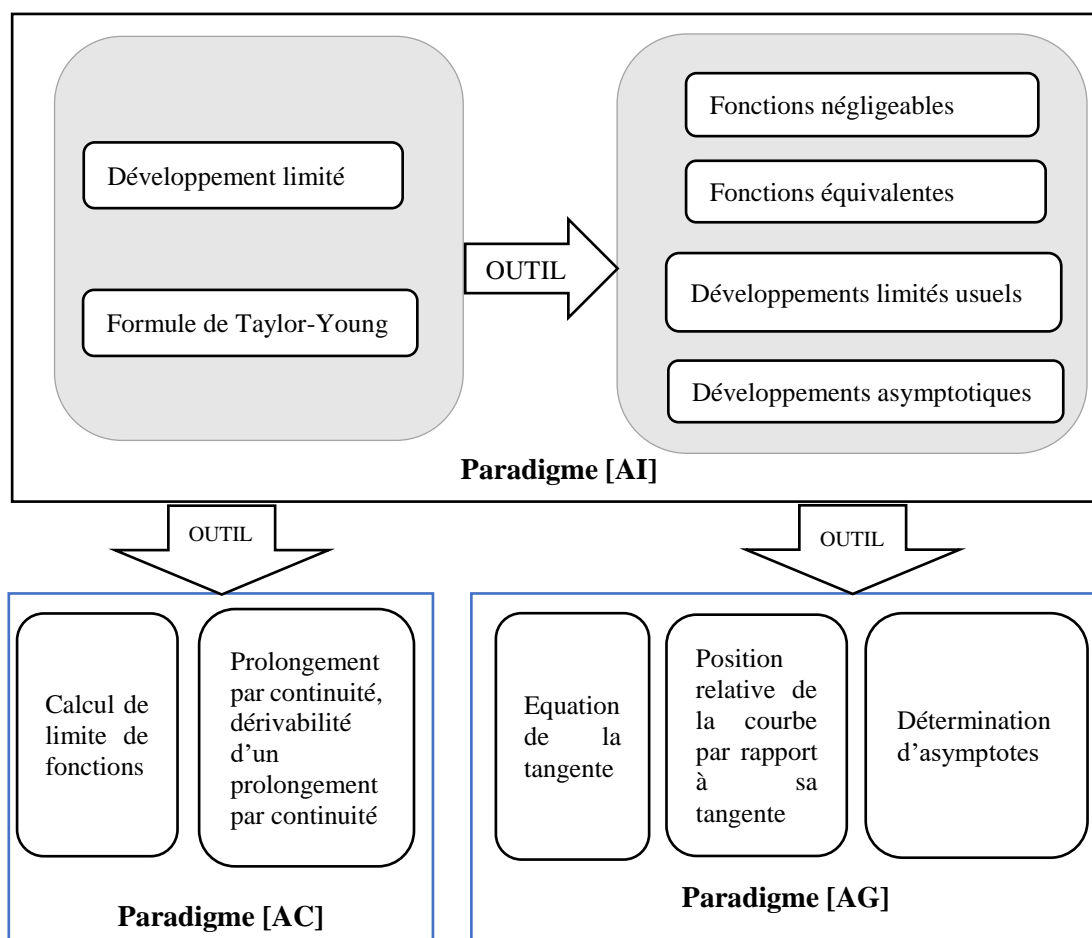
En conclusion, le texte officiel du programme actuel (2016) de la première année (PC) commence par une introduction précisant la mission de l'enseignant qui se réalise selon deux volets. Le premier est du côté « *objet mathématique* » par la mise en jeu des connaissances antérieures des étudiants et de l'intérêt d'introduire de nouvelles notions dans les domaines intra et extra mathématiques. Le deuxième volet est du côté « *raisonnement mathématique* » qui consiste à mettre en jeu la vérification des différentes étapes d'une démonstration ou d'un raisonnement mathématique en utilisant des éléments de la logique, du langage mathématique, des techniques fondamentales de calcul en Analyse, des règles de calcul et éventuellement d'outils logiciels pour des constructions graphiques. Par ailleurs, l'objectif principal de l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » est d'amener l'étudiant à maîtriser des techniques asymptotiques à travers des calculs simples, la détermination des développements limités des fonctions et la résolution des problèmes liés à la notion de relation de comparaison de fonctions.

Dans ce chapitre, les savoirs à enseigner sont la relation de comparaison de fonctions, les développements limités et la formule de Taylor-Young. Le développement limité est un nouvel objet à partir duquel se développent des outils techniques particuliers relatifs aux calculs d'équivalents, la détermination de limite dans le paradigme [AI], l'étude locale d'une fonction et de son comportement en  $+\infty$  dans les paradigmes [AC] et [AG]. Ce concept mathématique nécessite un travail dans le paradigme [AI] par la précision de l'ordre et du voisinage sur lequel il est défini. Sa représentation analytique est la somme d'une fonction polynômiale et d'une expression du reste. De ce fait, le concept du développement limité relève de couple : la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

Le programme insiste sur l'articulation des différents registres graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique lors de l'introduction des nouvelles notions, et notamment les notions d'approximation locale d'une fonction.

Nous pouvons classer le contenu du programme lié au concept d'approximation locale d'une fonction en distinguant ses deux statuts outil et objet (Douady, 1986) et par identification des paradigmes de l'Analyse dans un organigramme :





**Schéma 4-2 : contenu du chapitre « Analyse asymptotique » lié au concept d'approximation locale d'une fonction**

***Conclusions de l'étude des programmes***

L'objectif des programmes de la quatrième année (SC-E) et de première année (PC) consiste à amener l'étudiant à la rédaction autonome d'un raisonnement, en Algèbre et en Analyse, intégrant un processus de contrôle dont la finalité est de s'assurer de la validité sémantique et syntaxique de chaque pas du raisonnement produit.

Dans le programme de la quatrième année de l'enseignement Secondaire de (SC-E), le concept d'approximation locale d'une fonction est présenté via les approximations affines des fonctions et les différentes formes d'équations de la tangente obtenues à partir du nombre dérivé. En effet, la tangente est présentée via ses représentations algébrique et géométrique dans le paradigme [AG].

## **IV. Étude de deux parties d'ouvrages universitaires**

### ***Introduction***

Conformément à ce que nous avons mentionné, la tâche de la réalisation des cours est laissée à la charge de l'enseignant universitaire. Nous avons choisi de travailler avec une enseignante qui s'appuie essentiellement sur deux ouvrages de référence que nous analyserons. Dans cette partie, nous conduirons une étude de deux ouvrages universitaires d'Analyse : « Tout en un PCSI-TSPI » (nouvelle collection 2018) et « HPREPA Tout en un ».

Pour cette raison, nous conduisons une analyse de deux parties de ces ouvrages liées au domaine d'approximation locale d'une fonction afin de connaître la manière d'introduire les nouvelles notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes, de la formule de Taylor-Young et de développements limités.

Nous commencerons cette étude par la présentation générale de chacun de ces ouvrages. Ensuite, nous présenterons une analyse didactique des parties liées au concept d'approximation locale d'une fonction en vue d'étudier la manière de l'introduction et du traitement de ce concept mathématique à partir du cours et des exercices.

### ***IV.1. Étude de la partie de l'ouvrage universitaire « Tout en un PCSI-PTSI »***

#### **IV.1.1. Présentation de l'ouvrage**

L'ouvrage « Tout en un » de la collection "J'intègre" propose le cours de référence en classes préparatoires, ainsi que des exercices résolus des premières années scientifiques, (PCSI) et (PTSI). Suite aux réformes, cette nouvelle édition publiée en 2018 par Dunod propose des cours et des exercices en conformité avec les nouveaux programmes de mathématiques en première année (PC). Ce livre est composé de six parties : Technique de calcul - Raisonnement et vocabulaire – Analyse – Géométrie - Algèbre - Probabilités.

La notion de la formule de Taylor-Young est présentée dans le chapitre 12 intitulé « Intégration » de la partie « Analyse ». Dans cette partie d'ouvrage, les notions de fonctions négligeables, fonctions équivalentes et développements limités sont étudiées dans le chapitre 13 intitulé « Analyse asymptotique ». Dans la section suivante, nous allons conduire une analyse didactique des parties de deux chapitres : « Intégration » et « Analyse asymptotique ».

#### **IV.1.2. Étude des parties de cours liées aux notions de la relation de comparaison de fonctions, de la formule de Taylor-Young et des développements limités**

Dans le chapitre « Intégration », les auteurs donnent la formule de Taylor-Young dans le paragraphe intitulé « Formules de Taylor ».

Dans le chapitre « Analyse asymptotique », ils présentent les définitions, remarques, propriétés et théorèmes illustrés par des applications, exemples et exercices de chacune des notions : fonctions dominées, fonctions négligeables, fonctions équivalentes, développements limités au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young, développements limités au voisinage d'un réel et développements asymptotiques.

De ce fait, nous conduirons une analyse du contenu de ces deux chapitres liés au concept d'approximation locale d'une fonction en distinguant deux parties :

- La partie « **Cours** » comporte la définition de la formule de Taylor-Young et toutes les définitions, propriétés, remarques, méthodes, théorèmes de chacune des notions du chapitre « Analyse asymptotique ».
- La partie « **Exercices** » comporte les différents types de tâches proposées dans ces deux chapitres : les exemples et les exercices donnés en tant qu'application du cours et les exercices donnés à la fin des chapitres sous le titre de « S'entraîner et approfondir ».

#### *IV.1.2.1. Étude de la partie « Cours »*

La notion de développement limité est introduite par la formule de Taylor-Young donnée sous forme d'un théorème dans le chapitre « Intégration » et plus précisément dans le paragraphe intitulé « Formules de Taylor ». Dans les registres de langage naturel et de langage formel, l'approximation polynômiale d'une fonction au voisinage de 0, par l'utilisation de l'expression du reste sous la forme «  $o(x^n)$  », est définie dans un voisinage de 0 (un intervalle contenant 0).

Les auteurs commencent le chapitre « Analyse asymptotique » par une introduction. D'une part, ils s'appuient sur les notions de la relation de comparaison des suites, présentées précédemment dans le chapitre 9, pour introduire les notions de relation de comparaison de fonctions. Ils montrent l'intérêt de ces nouvelles notions en écrivant :

*« Elles permettent d'étudier et de comparer le comportement local de fonctions au voisinage d'un point  $a$ , qui peut-être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ . » (Ouvrage, 2018, p.690)*

D'autre part, ils présentent les notations mentionnées dans ce chapitre selon un point de vue abrégé : intervalle, domaine de définition d'une fonction, la notion de voisinage, etc.

Le contenu du chapitre « Analyse asymptotique » est composé de six parties présentées dans 47 pages (pp.690 – 737) : « Fonctions dominées, fonctions négligeables » - « Fonctions équivalentes » - « Développements limités : généralités » - « Opérations sur les développements limités » - « Applications des développements limités » - « Développements asymptotiques ».

Dans la première partie, ils donnent les définitions de fonctions dominées et de fonctions négligeables au voisinage d'un réel en articulant les registres de langage naturel et de langage formel dans le paradigme [AI]. Par ailleurs, ils présentent les fonctions négligeables en exprimant l'existence d'une fonction «  $\varepsilon(x)$  » et le symbole «  $o$  ».

Dans la deuxième partie, ils présentent la définition de fonctions équivalentes au voisinage d'un réel qui est donnée dans les registres de langage naturel et de langage formel en justifiant l'existence d'une fonction «  $u(x)$  » définie au voisinage d'un réel et les symboles «  $o$  » et «  $\sim$  ». Les auteurs ne se limitent pas à cette définition, ils donnent des propriétés de fonctions équivalentes et la proposition - la plus utilisée - lors de la détermination des fonctions équivalentes (à partir du calcul de limite du rapport de deux fonctions qui est égale à 1), ainsi que les équivalents classiques au voisinage d'un réel et au voisinage de 0.

Dans les registres de langage naturel et de langage formel, ils étudient le concept du développement limité d'une fonction au voisinage de 0 dans la troisième partie de ce chapitre en présentant sa définition par l'utilisation de l'expression du reste sous la forme de «  $x^n \varepsilon(x)$  ». Dans une remarque, il écrit cette expression sous la forme du symbole «  $o(x^n)$  » en indiquant :

$$\langle \dots \rangle f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = o(x^n)$$

*Dans la pratique, on écrit couramment cette relation sous la forme :*

$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$  (\*\*) qui a l'avantage d'être plus simple à écrire et d'éviter l'introduction d'une fonction  $\varepsilon$ .

*(...) dans la relation (\*\*), le «  $o(x^n)$  » est utilisé pour désigner, dans une expression algébrique, une quantité dont on sait qu'elle est négligeable devant  $x^n$  au voisinage de 0. » (Ibid., p.706)*

De ce fait, les auteurs s'intéressent à étudier l'« objet » développement limité d'une fonction au voisinage de 0 par l'utilisation de l'expression du reste sous la forme «  $o(x^n)$  » dans le paradigme [AI]. Après l'interprétation de la définition de cet objet mathématique, ils présentent ses différentes propriétés sous la forme des remarques, corollaires, points de méthode et théorèmes.

Dans le paragraphe « III.3. Développements limités usuels », ils expliquent l'intérêt de la formule de Taylor-Young en tant qu'« outil » pour déterminer des développements limités usuels. En expliquant le lien entre la partie régulière de développements limités de la fonction  $[x \mapsto (1+x)^\alpha]$  et la formule du binôme, il écrit son développement limité sous la forme :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

Ensuite, ils présentent les différentes propriétés liées aux développements limités usuels et la définition de la forme normalisée d'un développement limité d'une fonction au voisinage de

0. Puis, ils montrent l'intérêt de cette formule en tant qu'« outil » pour déterminer l'équivalence de cette fonction et l'étude locale de son signe au voisinage de 0. Ils interprètent aussi les différents termes de sa partie régulière. Par la suite, ils formulent la définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel qui est illustrée par la méthode de la détermination du développement limité au voisinage de 0.

« Point méthode : Lorsque l'on cherche le développement limité d'une fonction en un point  $x_0$ , on se ramène de manière quasi-systématique à effectuer un développement limité en 0, en considérant la fonction  $h \mapsto f(x_0 + h)$ . » (Ibid., p.715)

Les auteurs introduisent la quatrième partie « Opérations sur les développements limités » par un paragraphe en explicitant la manière de calculer un développement limité et l'intérêt de sa définition généralisée par la mobilisation du registre de langage naturel. En effet, l'utilisation de la formule de Taylor-Young nécessite l'existence des dérivées successives de la fonction.

Dans la cinquième partie « Applications des développements limités », ils prouvent l'importance du concept de développement limité en tant qu'« outil » lors de la recherche de limites et d'équivalents, de l'étude de l'allure d'une courbe au voisinage d'un point et la recherche d'asymptote dans les registres de langage naturel et de langage formel.

Les auteurs commencent la dernière partie « Développements asymptotiques » par l'exemple traité précédemment  $[f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x}), \text{ en } +\infty]$  afin d'introduire la notion du développement asymptotique.

Nous adoptons, dans le cadre des praxéologies mathématiques (Chevallard, 1998), une analyse des savoirs à enseigner en termes de la dialectique outil/objet (Douady, 1986), de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et par l'identification des paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015) afin d'étudier le contenu de la partie « Cours ».

Concepts	Outil/ Objet	Contenu	Paradigmes	Registres
Formule de Taylor-Young	Objet	- Définition	[AI]	Langage naturel - langage formel
Fonctions dominées - fonctions négligeables	Objet	- Définitions - Propriétés	[AI]	Langage naturel - langage formel
Fonctions équivalentes	Objet	- Définition - Lien entre fonctions négligeables et fonctions équivalentes par l'utilisation des symboles "petit o" et $\varepsilon(x)$ - Fonctions équivalentes et limite - Équivalent d'une fonction polynômiale - Équivalent et dérivabilité en un réel	[AI]	Langage naturel - langage formel

		- Équivalents "classiques" au voisinage de 0 - Produit, quotient, puissance, somme d'équivalents		
Développement limité au voisinage de 0	Objet	- Définition par l'utilisation de deux symboles $\varepsilon(x)$ et $o(x^n)$ - Utilisation de l'expression du reste $o(x^n)$ est plus simple lors de la conceptualisation du développement limité - Développement limité et continuité - Développement limité et dérivabilité	[AI]	Langage naturel - langage formel
Formule de Taylor-Young	Outil	- Proposition pour déterminer les développements limités usuels	[AI]	Langage naturel - langage formel
Forme normalisée d'un développement limité	Objet	- Définition	[AI] et [AG]	Langage naturel - langage formel
	Outil	- Équivalent et développement limité - Étude locale de signe	[AI] et [AC]	Analytique
Développement limité au voisinage d'un réel	Objet	- Définition	[AI]	Langage naturel - langage formel
	Outil	- Recherche de limite - Recherche d'équivalents - Étude de l'allure d'une courbe au voisinage d'un point - Recherche d'asymptotes	[AI], [AC] et [AG]	Analytique- Algébrique- Numérique- Géométrique – Graphique
Développements asymptotiques	Objet	- Définition - Exemples des développements asymptotiques	[AI]	Langage naturel - langage formel

**Tableau 4-3 : étude de contenu de la partie « Cours » d'ouvrage lié au concept d'approximation locale d'une fonction**

Les auteurs vérifient certaines remarques et propriétés associées aux notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes par la proposition de contre-exemples.

#### *IV.1.2.2. Conclusions de la partie « Cours »*

Dans cette partie « Cours », le concept d'approximation locale est introduit par la formule de Taylor-Young dans le chapitre « Intégration » avant d'être étudié à partir des notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes et de développements limités dans le chapitre « Analyse asymptotique ».

Les auteurs ne précisent pas le voisinage d'un réel, ils indiquent tout simplement que la fonction admet un développement limité « *au voisinage d'un réel* ». En plus, ils expriment le fait que : l'utilisation du symbole «  $o$  » dans l'expression du reste est la plus facile pour les étudiants que l'expression de la fonction «  $\varepsilon$  ».

Nous pouvons conclure que les auteurs introduisent les notions d'approximation locale d'une fonction en tant qu'« objet » par la mobilisation des registres de langage naturel et de langage formel et l'utilisation des symboles mathématiques dans le paradigme [AI] afin d'être un « outil » lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en articulant les différents registres analytique, algébrique, numérique, géométrique et graphique dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

#### IV.1.2.3. Étude de la partie « Exercices »

Dans notre travail, nous désignons par « Exercices » la partie contenant non seulement les exercices, les exemples et mais aussi les exercices de « S'entraîner et d'approfondir » donnés dans les deux chapitres « Intégration » et « Analyse asymptotique ».

Dans un tableau, nous présentons le résumé de l'analyse didactique de cette partie conduite dans le cadre des praxéologies mathématiques (Chevallard, 1998), en considérant la dialectique outil/objet et en identifiant des registres et des paradigmes de l'Analyse correspondants.

Concepts	Outil/ Objet	Types de tâches	Types de techniques	Technologie / Théorie	Paradigmes / Registres
<b>Formule de Taylor-Young</b>	Objet			Analyse réelle	En langage naturel et formel
<b>Fonctions négligeables</b>	Objet	- Montrer que deux fonctions sont négligeables l'une par rapport à l'autre	Analytique	Topologie et analyse fonctionnelle	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
<b>Fonctions équivalentes</b>	Objet	- Montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un réel et en l'infini - Peut-on affirmer qu'une fonction est équivalente à une fonction donnée au voisinage d'un réel ? - Montrer qu'une fonction est équivalente à une fonction donnée en 0 et en l'infini - Donner un équivalent simple d'une fonction en l'infini - Donner deux fonctions tendant vers l'infini, mais qui ne sont pas équivalentes - Donner un équivalent à une fonction au voisinage de 0. - Montrer que pour deux fonctions équivalentes au voisinage d'un réel, leur différence tend vers 0 - Déterminer l'équivalent d'une fonction en 0 et en l'infini	Analytique/ Numérique	Topologie et analyse fonctionnelle	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
	Outil	- Déterminer la limite du rapport des fonctions - Calculer la limite d'une fonction	Analytique		[AI] et [AC]/ R <sub>ANA</sub> – R <sub>NUM</sub>
<b>Développements limités – Formule de Taylor-Young</b>	Objet	- Déterminer la partie régulière du développement limité d'une fonction polynômiale au voisinage de 0	Analytique	Analyse réelle	[AI] et [AC]/ R <sub>ANA</sub> -

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Montrer qu'une fonction admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0</li> <li>- Déterminer le développement limité d'une fonction au voisinage de 0</li> <li>- Déterminer le développement limité d'une fonction, de la composée de fonctions, du quotient de fonctions, du produit de fonctions et de la somme de fonctions au voisinage d'un réel</li> </ul>			
	Outil	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Montrer qu'une fonction est dérivable en 0</li> <li>- Étudier la dérivée seconde d'une fonction en 0 admettant un DL d'ordre 2 au voisinage de ce réel</li> <li>- Calculer la limite d'une fonction en 0</li> <li>- Déterminer les équivalents d'une fonction</li> </ul>	Analytique	Analyse réelle	[AI] et [AC]/ R <sub>ANA</sub>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étudier l'allure de la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point d'abscisse 1</li> <li>- Étudier la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport à sa tangente au voisinage de 0</li> <li>- Donner l'allure de la courbe représentative d'une fonction en 0.</li> </ul>	Graphique/ géométrique		[AI] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> – R <sub>ALG</sub> - R <sub>GRA</sub> – R <sub>GEO</sub>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étudier le comportement d'une fonction en l'infini</li> <li>- Déterminer les asymptotes</li> <li>- Interpréter graphiquement l'expression du développement asymptotique en l'infini</li> </ul>	Graphique/ géométrique	Analyse réelle	[AI]-[AC] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> – R <sub>ALG</sub> - R <sub>GRA</sub> – R <sub>GEO</sub>
<b>Développement asymptotique</b>	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer les asymptotes à la courbe</li> <li>- Donner un développement asymptotique d'une fonction</li> </ul>	Analytique/ géométrique	Analyse réelle	[AI] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> – R <sub>ALG</sub> – R <sub>GEO</sub>
<b>Fonctions négligeables, fonctions équivalentes et la limite</b>	Objet	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparer deux fonctions au voisinage de 0 et de l'infini</li> </ul>	Analytique	Analyse réelle	[AI]/ R <sub>ANA</sub>

**Tableau 4-4 : étude des différents types tâches proposés dans la partie « Exercices »  
liée au concept d'approximation locale d'une fonction**

*IV.1.2.4. Conclusions de l'étude de la partie « Exercices »*

Nous remarquons que lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini, les auteurs mobilisent les différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique dans les paradigmes [AI] et [AG], d'une part et ils montrent l'intérêt d'articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction



(fonctions négligeables, fonctions équivalentes, formule de Taylor-Young et développements limités), d'autre part.

## ***IV.2. Étude de l'ouvrage « HPRÉPA Tout en un »***

### **IV.2.1. Présentation de l'ouvrage**

Cet ouvrage de mathématiques est spécifiquement dédié aux classes préparatoires et plus précisément aux premières années scientifiques des filières (PCSI) et (PTSI). Cet ouvrage comporte les cours de références et des exercices corrigés. Plus précisément, il est composé de sept principales parties intitulées respectivement « Programme de début de l'année », « Nombres et structures algébriques usuelles », « Nombres réels, suites et fonctions », « Calcul différentiel et intégral », « Algèbre linéaire », « Espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne » et « Espace  $\mathbb{R}^2$  et géométrie euclidienne ».

Chaque chapitre de ces parties est composé de cinq principales parties intitulées : « Introduction et objectifs » - « Cours » - « Méthode » - « Exercice résolu » - « Exercices ». Les auteurs les introduisent par un paragraphe expliquant les objectifs de la manipulation des différentes notions et techniques dans ce chapitre. Par ailleurs, le « Cours » est divisé en des parties selon le savoir étudié avec la présentation de ses définitions, propriétés, remarques, exemples, applications et des commentaires sous forme d'un aperçu historique, des remarques, des contre-exemples, des illustrations graphiques et des figures géométriques.

Dans cette section, nous mettons la focale sur l'étude des parties liées aux notions de la relation de comparaison de fonctions, développements limités et la formule de Taylor-Young afin de connaître la manière de l'introduction de ces objets mathématiques en première année (PC).

### **IV.2.2. Étude des parties de cours liées aux notions de la relation de comparaison de fonctions, la formule de Taylor-Young et développement limité**

Dans notre étude, le concept d'approximation locale d'une fonction est présenté dans les deux chapitres : « Fonctions d'une variable réelle » et « Formules de Taylor – Développements limités ».

Les notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes sont manipulées dans le cinquième paragraphe du chapitre 17 intitulé « Fonctions d'une variable réelle » de la troisième partie d'ouvrage « *Nombres réels, suites et fonctions* ». Cette dernière partie est composée de trois chapitres : « Nombres réels », « Suites réelles et complexes » et « Fonctions d'une variable réelle ». Les auteurs introduisent ce dernier chapitre par un paragraphe contenant un aperçu historique de la notion de fonction et de ses objectifs principaux. Le Cours est composé des

paragraphes intitulées : « Généralités sur les fonctions » - « Continuité » - « Limites » - « Opérations sur les limites » - « Comparaison locale des fonctions » - « Fonctions continues sur un intervalle » - « Continuité uniforme » et « Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes ».

Les notions de développements limités et de la formule de Taylor-Young sont présentées dans le chapitre numéro 21 intitulé « Formules de Taylor – Développements limités » de la quatrième partie d'ouvrage « *Calcul différentiel et intégral* ». Cette partie est composée de cinq chapitres intitulés successivement : « Dérivations des fonctions d'une variable réelle », « Intégration sur un segment », « Intégrales et primitives d'une fonction », « Formules de Taylor – Développements limités » et « Approximations ».

Le contenu de ce chapitre est composé de dix principales parties présentées successivement : « Formule de Taylor avec reste intégrale », « Inégalité de Taylor-Lagrange », « Développements limités », « Formule de Taylor-Young », « Opérations sur les développements limités », « Applications des développements limités », « Méthodes », « Exercices résolus » et « Exercices ».

Dans une première étape, ils présentent les définitions, théorèmes, propriétés, remarques, etc. des nouvelles notions illustrés d'exemples, des contre-exemples, des figures géométriques et d'applications.

Ensuite, la partie intitulée « Méthode » de ce chapitre est présentée sous forme d'une fiche des méthodes qui récapitule les principaux savoir-faire et les différents types de techniques à développer lors de la résolution des différents types de tâches. En effet, ils ne suffisent pas d'introduire les notions de la formule de Taylor-Young et développements limités et ses applications dans le domaine de l'étude d'une fonction. Mais, il résume les méthodes les plus importantes qui mettent en jeu ce savoir à enseigner dans un paragraphe à la fin de ce chapitre.

Dans une troisième étape, les auteurs donnent une partie d'exercices résolus qui sont intégralement corrigés et accompagnés des conseils.

Finalement, ils donnent une série d'exercices proposés avec des indications et réponses plus ou moins détaillées suivant leur difficulté. Les corrections de ces exercices sont données à la fin de l'ouvrage.

Dans cette section, nous mettons la focale sur l'analyse didactique des parties liées au concept d'approximation locale d'une fonction de deux chapitres : « *Fonctions d'une variable réelle* » et « *Formules de Taylor – Développements limités* ». Nous pouvons classer le contenu de ces parties selon deux catégories :

- Partie « **Cours** » : dans ce cas, on désigne le contenu lié aux définitions, théorèmes, propriétés, remarques, méthodes, etc. présenté dans le paragraphe « Comparaison locale des fonctions » du chapitre « *Fonctions d'une variable réelle* » et dans le chapitre « *Formules de Taylor – Développements limités* ».

- Partie « **Exercices** » : elle est composée des exemples présentés suite à chaque propriété du cours, des applications et des problèmes à résoudre dans le champ d'approximation locale d'une fonction qui sont présentés sous forme d'un exercice résolu illustré par des conseils et d'une série d'exercices corrigés à la fin de l'ouvrage. Les auteurs précisent le thème de chaque ensemble d'exercices. Dans notre cas d'étude, nous nous intéressons aux différents types de tâches présentées dans les applications, exemples, exercices résolus et séries d'exercices liés au concept d'approximation locale d'une fonction et notamment à la partie « Comparaison locale de fonctions » du chapitre « *Fonctions d'une variable réelle* » et au chapitre « *Formules de Taylor – Développements limités* ».

#### IV.2.2.1. Étude de la partie « Cours »

Dans le paragraphe « Comparaison locale des fonctions » du chapitre « *Fonctions d'une variable réelle* », les auteurs présentent les définitions des notions d'une fonction dominée par une autre au voisinage d'un réel, d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un réel et de fonctions équivalentes au voisinage d'un réel, ainsi que ses propriétés et des remarques dans le paradigme [AI] par la mobilisation des registres de langue naturel et de langage formel. Ils illustrent les définitions de fonctions négligeables par les notations des symboles «  $o$  » et de fonctions équivalentes par le symbole «  $\sim$  ».

Nous remarquons que la notion de développement limité est introduite dans ce chapitre lors de l'application du théorème exprimant le lien entre les fonctions négligeables et les fonctions équivalentes. Autrement dit, la transformation et formulation de l'expression analytique des fonctions équivalentes (définies au voisinage d'un réel) amène à l'écriture de fonctions négligeables par le théorème suivant :

« Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définie au voisinage de  $a$ .

$f(x) \sim g(x)$  au voisinage de  $a \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$  au voisinage de  $a$  » (Ouvrage, 2008, p.315)

A partir d'un exemple présenté suite à ce théorème, les auteurs introduisent le concept du développement limité en écrivant :

« En particulier :  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$  au voisinage de  $a$

Cette écriture s'appelle **développement limité** au voisinage de  $a$ . Cette notion sera étudiée plus en détail dans le chapitre 21. » (Ibid., p.316)

Les auteurs commencent le chapitre « Formules de Taylor – Développements limités » par une introduction présentant ses objectifs principaux, ainsi qu'un rappel de la notion liée au concept du développement limité. Ensuite, ils présentent la formule de Taylor-Young illustrée par un aperçu historique en effectuant le lien avec la notion de « Binôme de Newton ». En effet, ils donnent le lien entre la notion des polynômes, définies par une formule de Taylor précédemment dans le chapitre « Polynômes »  $[P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k]$ , et la notion de fonction afin d'introduire la formule de Taylor-Young. Ils soulignent cette formule

*« (...) ne s'applique évidemment pas sans changement à une fonction non polynômiale. Il existe cependant une formule analogue pour les fonctions de classe  $C^p$ , moyennant un terme supplémentaire appelé « reste ». » (Ibid., p.387)*

De ce fait, les auteurs expliquent la démarche suivie lors de la présentation de la notion de reste afin d'introduire de nouvelles techniques d'approximations d'une fonction. L'expression du reste sera écrite

*« (...) enfin comme une fonction négligeable devant une puissance de la variable, ce qui permet de calculer très aisément les développements limités des fonctions usuelles, que nous apprendrons à combiner pour obtenir des développements limités de fonctions composées. » (Ibid.)*

Nous pouvons conclure que les auteurs introduisent le concept du développement limité en mettant en relation l'expression du reste et les fonctions négligeables.

Dans la partie intitulée « Objectifs » de l'introduction de ce chapitre, les auteurs précisent les objectifs principaux de ce chapitre en écrivant :

- « - Étudier différentes formes de la formule de Taylor et leurs applications.*
  - Appliquer la formule de Taylor-Young pour découvrir les développements limités usuels.*
  - S'entraîner au calcul de développement limité de fonctions composées.*
  - Utiliser les développements limités dans les calculs de limite et dans l'étude des courbes. »*
- (Ibid.)

Dans le chapitre « Formules de Taylor – Développements limités », ils montrent, dans certains cas, l'intérêt d'une nouvelle formule ou une nouvelle notion dans le champ de l'étude d'une fonction. Par ailleurs, ils donnent un aperçu historique des mathématiciens dont les noms sont cités dans les formules données (Brook Taylor et Louis Lagrange). La dernière section du cours comporte l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvel « outil » puissant pour résoudre certains problèmes mathématiques. Ces problèmes se réalisent à partir de ses applications lors du calcul des limites, de la précision de position relative d'une courbe par rapport à sa tangente en un point ou son asymptote.

Après la présentation de la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange, les auteurs donnent la définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel par l'utilisation du symbole «  $o(h^n)$  » pour l'expression du reste. Ensuite, ils mentionnent des remarques concernant :

- Le lien entre le développement limité d'ordre 0 d'une fonction au voisinage d'un réel et l'existence de limite de cette fonction en ce réel.
- Le lien entre le développement limité d'ordre 1 au voisinage d'un réel et de sa dérivabilité en ce réel.
- Une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être deux-fois dérivable en ce réel.

Après ces remarques, ils présentent le théorème de l'unicité du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel dans le paradigme [AI].

Le lien entre un développement limité d'une fonction et sa parité est présenté sous la forme d'un corollaire illustré par sa démonstration en justifiant certains pas de ce raisonnement. Les auteurs ne suffisent pas de ce corollaire, ils notent qu'il n'admet pas une réciproque en soulignant la propriété locale d'un développement limité. En effet,

*« Ce corollaire n'admet pas de réciproque : si une fonction admet au voisinage de 0 un développement limité pair, fût-ce à tout ordre, elle n'est pas nécessairement paire : la fonction «  $o(x^n)$  » n'a aucune raison d'être paire... Il ne faut pas perdre de vue qu'un développement limité au voisinage d'un point  $a$  est une propriété **locale** qui n'engage la fonction que sur un intervalle aussi petit que l'on veut autour de  $a$ , et qu'on ne peut en aucun cas en déduire des propriétés globales de la fonction comme la parité, la monotonie, etc. » (Ibid., p.392)*

La propriété d'intégration terme à terme d'un développement limité est donnée sous la forme d'un théorème par l'utilisation du symbole «  $o(h^n)$  » de l'expression du reste. Ils interprètent ce théorème en indiquant que sa réciproque est fautive et en le justifiant par des exemples.

En s'appuyant sur ce théorème, ils introduisent la notion de la formule de Taylor-Young, par l'utilisation de l'expression du reste «  $o(h^n)$  ». Ils montrent l'intérêt de cette formule en tant qu'« outil » pour déterminer les développements limités usuels. Ensuite, ils donnent des cas particuliers de ces développements limités.

Dans un autre paragraphe, ils manipulent les opérations sur les développements limités au voisinage d'un réel : les développements limités d'une somme, d'un produit, d'une fonction composée et d'un produit. Ensuite, ils montrent l'intérêt du développement limité en tant qu'« outil » pour déterminer :

- Deux fonctions équivalentes afin de calculer des limites dans les paradigmes [AI] et [AC].
- La position relative d'une courbe par rapport à sa tangente en un point dans les paradigmes [AI], [AG].

Nous remarquons que les auteurs donnent l'intérêt de certains théorèmes et de certaines définitions lors de l'introduction du concept d'approximation locale d'une fonction. Par exemple, ils font la distinction entre les caractéristiques générales d'une fonction et ses comportements au voisinage d'un point. D'un côté, ils justifient cette distinction par un exemple d'une fonction non nulle dont le développement limité est nul à tout ordre puisque

*« L'unicité du développement limité d'une fonction en un point ne doit pas laisser penser qu'un développement limité caractérise entièrement la fonction au voisinage de ce point, comme le montre l'Application 2. » (Ibid., p.391)*

D'un autre côté, ils mettent en relief l'intérêt de la prise en considération du couple (Topologie / Analyse fonctionnelle) lors de l'appropriation du concept de développement limité. En effet, ils présentent cette distinction entre l'étude locale, globale et ponctuelle d'une fonction lors de l'étude du développement limité d'une fonction paire (respectivement impaire).

Ces auteurs mettent en avant l'intérêt de préciser l'ordre d'un développement limité d'une fonction en interprétant le théorème de l'intégration terme à terme. Ils illustrent cette importante remarque à l'aide d'un exemple. Par ailleurs, ils expliquent le lien entre développements limités et développements de Taylor afin d'introduire le concept de la formule de Taylor-Young. En effet, à partir de cette expression en langue naturelle, ils précisent les conditions nécessaires de l'utilisation de la formule de Taylor-Young lors de l'appropriation des développements limités.

Dans la dernière partie, « *Applications des développements limités* », les auteurs présentent l'intérêt du développement limité en tant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude d'une fonction. En effet, dans le champ du calcul de limite, ils écrivent :

*« Les développements limités permettent d'obtenir très facilement des équivalents (une fonction possédant un développement limité au voisinage de  $a$  est équivalente en ce point au premier terme non nul du développement limité.), donc des limites. » (Ibid., p.398)*

Les auteurs montrent l'intérêt de ces nouvelles notions par l'interprétation du passage de l'une à l'autre et en s'intéressant à l'étude des réciproques de certaines propriétés en s'appuyant, parfois, sur des contre-exemples.

Nous présentons le résumé de cette étude du contenu de la partie « Cours » lié au concept d'approximation locale d'une fonction à une variable réelle et ce, en adoptant le cadre théorique des praxéologies mathématiques (Chevallard, 1998), dans le tableau ci-dessous :

Concepts	Contenus	Registres	Paradigmes
Fonction négligeable devant une autre	- Définition - Notation de Landau par l'utilisation de la notion de la topologie " $o$ "	En langages naturel et langage formel	[AI]
Fonctions équivalentes	- Définition - Notation par l'utilisation du symbole " $\sim$ " - Exemples à retenir - Fonctions équivalentes et étude de leurs signes - Théorème : lien entre fonctions équivalentes et fonctions négligeables par l'utilisation de la notion de la topologie " $o$ " - Exemples traitant le passage des fonctions équivalentes aux fonctions négligeables - Introduction de la notion de développement limité à partir d'un exemple	En langages naturel – en langage formel – Analytique	[AI] - [AC]
Formule de Taylor avec reste intégral	- Théorème - Aperçu historique	En langages naturel et langage formel	[AI] et [AC]
Inégalité de Taylor-Lagrange	- Théorème - Aperçu historique	En langages naturel et langage formel	[AI] et [AC]
Développements limités	- Définition généralisée du développement limité au voisinage d'un réel par l'utilisation du symbole " $o$ " - Développement limité d'ordre 0 et prolongement par continuité en un réel - Développement limité à l'ordre 1 et la dérivabilité en un réel - Étude de cas d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être deux-fois dérivable en ce réel à partir d'un contre-exemple - Développement limité et parité - Propriétés du développement limité et des contre-exemples - Développement limité d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée des fonctions	En langages naturel et langage formel	[AI]
Formule de Taylor-Young	- Développement limité d'une fonction de classe $C^p$ - Théorème - Utilisation du logiciel pour l'étude d'un exemple - Développements limités usuels	En langages naturel et langage formel	[AI]
Applications des développements limités	- Calcul de limite - Lien entre développement limité, équivalence et limite	En langages naturel et langage formel	[AI]
	- Position relative d'une courbe par rapport à sa tangente - Position relative d'une courbe par rapport à une asymptote	En langages naturel et langage formel	[AI] - [AG]

**Tableau 4-5 : étude du contenu de « Cours » lié aux notions d'approximation locale d'une fonction**

Dans la partie « Cours » liée aux notions de développements limités et la formule de Taylor-Young, les auteurs ne précisent pas l'intervalle pour lequel est défini un développement limité d'une fonction, ils viennent d'écrire juste « *au voisinage de  $a$*  ». En plus, ils n'utilisent que le

symbole «  $o$  » pour l'expression du reste. En effet, ils négligent l'utilisation du symbole  $[x^n \varepsilon(x)]$  de l'expression du reste de la notion de développement limité.

#### *IV.2.2.2. Conclusions de la partie « Cours »*

En se référant au programme officiel, on peut dire que les auteurs parviennent à leurs objectifs principaux par la prise en compte de la construction graphique. En revanche, la notion d'approximation numérique n'est pas mise en avant dans ce cours. Cependant les notions de développement de Taylor et de développement limité sont abordées dans des registres analytique, graphique, géométrique et numérique associés aux paradigmes [AC], [AI] et [AG]. Par contre, lors de la présentation du « statut outil » de ces objets pour le calculus de limites et l'analyse de courbes, ils développent ces nouvelles techniques par l'usage de ses différentes représentations algébrique, analytique, graphique et géométrique.

#### *II.2.2.3. Étude de la partie « Exercices »*

Dans le chapitre « Fonctions à une variable réelle », ils donnent des exemples et une application corrigée dans la partie du cours liée aux notions de fonctions négligeables et fonctions équivalentes en mobilisant le registre analytique dans le paradigme [AI]. A la fin de ce chapitre, dans un exercice résolu, ils montrent l'intérêt de la notion d'équivalence lors de l'étude des suites. Dans la série d'exercices, le concept d'approximation locale d'une fonction est présenté sous le thème « Limites – Équivalents ». Ils demandent de déterminer l'équivalence d'une fonction afin de calculer sa limite. Dans ce chapitre, il n'existe pas des exercices sur la notion de fonctions négligeables.

Dans le chapitre « Formules de Taylor – Développements limités », ils utilisent des représentations graphiques et des figures géométriques, obtenues par l'usage de calculatrice numériques, pour un certains nombres d'exemples et d'applications visant l'appropriation et l'utilisation des notions de développements limités et la formule de Taylor-Young. Dans la série d'exercices, ces notions sont présentées dans des parties sous les thèmes : « Formule de Taylor-Young », « Développements limités » et « Applications des développements limités ». La correction de ces exercices est développée dans les paradigmes [AI] et [AG] par la mobilisation des registres analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique.

La partie « Exercices » de ce chapitre est composée de problèmes à résoudre dans le champ d'approximation locale d'une fonction qui sont présentés sous la forme d'activités résolues, illustrées par des conseils et d'une série d'exercices corrigés à la fin de l'ouvrage. Les auteurs précisent le thème de chaque ensemble d'exercices.



Dans ce tableau, nous présentons le résumé de notre analyse didactique de la partie « Exercices », dans le cadre des praxéologies mathématiques et la dialectique outil/objet en identifiant les paradigmes de l'Analyse standard et les registres de représentation sémiotique correspondants.

Concepts	Outil/Objet	Types de tâches	Types de technique	Technologie/Théorie	Paradigmes/Registres
Fonction négligeable devant une autre	Objet	- Déterminer deux fonctions négligeables au voisinage de 0 (exemples)	Analytique	Analyse réelle	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
	Outil	- Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$ (application)	Analytique	Analyse réelle	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
Fonctions équivalentes	Objet	- Déterminer un équivalent simple d'une fonction au voisinage de 0	Analytique	Topologie/ Analyse fonctionnelle	[AC]-[AI]/ R <sub>ANA</sub>
	Outil	- Calculer la limite d'une fonction à l'aide de son équivalent - Déterminer les limites des fonctions en un réel et à l'infini	Analytique	Analyse réelle	[AC]-[AI]/ R <sub>ANA</sub>
Développement limité	Objet	- Déterminer le développement limité d'une fonction en 0	Analytique	Analyse réelle	[AI]
	Outil	- Calculer la limite d'une fonction	Analytique	Analyse réelle	[AC]-[AI]
Formule de Taylor-Young	Outil	- Appliquer la formule de Taylor-Young pour déterminer les développements limités des fonctions usuelles - Déterminer la limite d'une fonction de classe $C^2$ en 0	Analytique	Analyse réelle	[AC]-[AI]
Développement limité - Formule de Taylor-Young	Objet	- Déterminer l'équivalent d'une fonction - Déterminer un développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel - Classer au voisinage de 0 des fonctions	Analytique	Analyse réelle	[AI]
	Outil	- Calculer la limite d'une fonction - Placer une courbe par rapport à sa tangente en un point - Trouver une asymptote - Placer une courbe par rapport à ses asymptotes - Étudier la variation d'une fonction et construire sa courbe représentative	Graphique/ Géométrie /graphique Analytique	Analyse réelle	[AI] – [AC] et [AG]

**Tableau 4-6 : étude des différents types de tâches proposées lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction**

#### *II.2.2.4. Conclusions de la partie « Exercice »*

Les auteurs mettent l'accent sur l'intérêt des nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction en tant que nouvelle technique dans le champ de l'étude d'une fonction : calcul de

limite, la tangente, détermination d'asymptotes, etc. Par ailleurs, ils montrent l'intérêt de l'articulation des notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes, de développements limités et de la formule de Taylor lors de l'étude d'une fonction dans les paradigmes [AI] et [AG] par la mobilisation des différents registres (algébrique, analytique, numérique, graphique et géométrique). Ils s'appuient sur des représentations graphiques d'une fonction et sa tangente afin de l'étudier au voisinage de 0, ainsi que d'une fonction et son asymptote afin d'étudier son comportement asymptotique en l'infini.

## V. Étude du polycopié de cours de l'enseignante

Par interaction avec l'enseignante, nous avons pu avoir accès au support de son cours et aux activités associées. Le chapitre « Analyse asymptotique » est composé de deux parties : « Cours » et « Travaux dirigés ». La partie « Cours » comporte les définitions, théorèmes et propriétés des notions de la relation de comparaison des suites et des fonctions, de développements limités et de la formule de Taylor-Young. Nous désignons par « Exercices » les exemples traités dans le cours et les exercices de la série distribuée à la fin du cours. Ce cours comporte trois parties : Relation de comparaison des suites – Relation de comparaison de fonctions – Développements limités.

### V.1. Étude de la partie « Cours »

Dans cette section, nous conduisons une étude de la partie liée à l'objet « fonction ». L'enseignante donne les définitions et les propriétés de fonctions négligeables, de fonctions dominées et de fonctions équivalentes. Ensuite, elle introduit le concept du développement limité à partir de sa définition généralisée par l'utilisation de deux symboles de l'expression du reste :  $[(x - x_0)^n \varepsilon((x - x_0))]$  et  $[o((x - x_0)^n)]$ . En outre, elle ne précise pas un voisinage de  $x_0$  sur lequel est défini un développement limité. Elle indique juste que ces expressions sont définies au voisinage d'un réel.

Dans ce tableau, nous résumons le contenu de la partie « Cours » par l'adaptation du cadre des praxéologies mathématiques et les outils théoriques en termes de la dialectique outil/objet, de registres de représentation sémiotique et de paradigmes de l'Analyse standard.

Concepts	Outil/ Objet	Contenus	Registres	Paradigmes
Fonctions négligeables	Objet	- Définition - Exemple des fonctions négligeables par l'utilisation des symboles "o" et $\varepsilon(x)$	En langages naturel et formel	[AI]
Fonctions équivalentes	Objet	- Propriété exprimant le lien entre fonctions négligeables, fonctions équivalentes et limite - Exemple - Propriétés de fonctions équivalentes	En langages naturel et formel	[AI]

		- Équivalences usuelles à retenir par l'utilisation de limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $f(x) \sim g(x)$ - L'équivalence d'une fonction polynômiale		
Développement limité au voisinage d'un réel		- Définition par l'usage des symboles "o" et $\varepsilon(x)$ - Propriétés - Développement limité au voisinage de 0 par l'usage du symbole "o" - Forme normalisée de développement limité - Développement limité et équivalence - Développement limité et parité - Développement limité à l'ordre 0 et continuité par l'usage des symboles "o" et $\varepsilon(x)$ - Développement limité à l'ordre n ( $n \geq 2$ ) et dérivabilité - Étude de cas d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 et qui n'est pas 2-fois dérivable en 0 - Propriétés des développements limités par l'usage du symbole "o" - Présentation d'une méthode hors programme	En langages naturel et formel $R_{ANA}$	[AI]
	Outil	- Étude locale d'une fonction en un point	$R_{ANA}$	
Formule de Taylor-Young	Objet	-Théorème	En langages naturel et formel	
	Outil	- Développement limité obtenu par la formule de Taylor-Young par l'usage du symbole "o" - Détermination des développements limités usuels	$R_{ANA}$	
Branche infinie	Objet	- Définition de développement asymptotique	En langages naturel et formel –	[AI] – [AG]
	Outil	- Méthode pratique - Étude du comportement d'une fonction en l'infini	$R_{ANA}$ - $R_{GEO}$	[AI] – [AG] – [AI]

**Tableau 4-7 : étude du contenu de la partie « Cours » lié au concept d'approximation locale d'une fonction**

### V.2. Étude de la partie « Exercices »

Nous adoptons le cadre des praxéologies mathématiques, la dialectique outil/objet, les registres de représentation sémiotique et les paradigmes de l'Analyse standard correspondants afin de conduire une analyse didactique de contenu de la partie « Exercices » dans ce tableau.

Concepts	Outil/Objet	Types de tâches	Types de techniques	Technologie /Théorie	Paradigmes
Fonction négligeable devant une autre					
Fonctions équivalentes					
Développements limités – Formule de Taylor-Young	Objet	- Déterminer le développement limité	Analytique	Analyse réelle	[AI]
	Outil	- Déterminer l'équivalence d'une fonction - Calculer la limite d'une fonction - Montrer qu'une fonction est dérivable en 0	Analytique/ Géométrique / graphique	Analyse réelle	[AI] - [AC] - [AG]

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Faire une étude locale d'une fonction en 0</li> <li>- Étudier le comportement d'une fonction en l'infini</li> <li>- Déterminer une équation de la tangente</li> <li>- Étudier la position relative de la tangente par rapport à la courbe</li> <li>- Tracer la tangente et la courbe</li> </ul>			
--	--	--	--	--	--

**Tableau 4-8 : étude des différents types tâches proposés liés aux notions d'approximation locale d'une fonction**

Nous remarquons qu'il n'y a pas d'exercices liés spécifiquement aux notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes. L'enseignante donne les définitions de ces deux concepts mathématiques afin d'établir l'intérêt des développements limités pour déterminer des fonctions équivalentes dans le paradigme [AI], puis du calcul des limites dans le paradigme [AC]. L'appropriation du concept de développement limité est développée dans le registre analytique associé au paradigme [AI]. En plus, elle montre l'intérêt de ce concept mathématique entant que nouvel « outil » lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique par la mobilisation des registres analytique, algébrique, numérique et géométrique.

### **V.3. Conclusion**

L'enseignante explicite les définitions, propriétés et théorèmes des « objets » de la relation de comparaison de fonctions, par la mobilisation de ses représentations algébriques et analytiques, afin d'être des « outils » lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement en l'infini, dans les registres algébrique, numérique, analytique et géométrique. L'approche graphique est totalement absente dans le polycopié de cours de l'enseignante.

### **Conclusions du chapitre 4**

Dans les différents supports de cours, les notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes et de développements limités sont présentées selon leurs « statuts objets » afin d'être des « outils » lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. Par ailleurs, la notion de développement limité est introduite en indiquant que cette expression est définie « *au voisinage d'un réel* », sans que soit précisé le voisinage sur lequel est réalisé ce développement limité.

Les programmes de la quatrième année Secondaire (SC-E) et de la première année (PC) insistent sur l'articulation des différents registres graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique lors de l'introduction des nouvelles notions. En effet, les textes des programmes imposent le recours aux registres graphique et géométrique par des illustrations

graphiques ou par des logiciels en vue d'introduire de nouveaux objets. L'enseignant est invité à aider les élèves à développer leurs démarches de raisonnement par la rédaction et l'explication orale de la résolution des problèmes via l'interaction entre eux.

Dans l'introduction du chapitre « Analyse asymptotique », les recommandations du programme invitent les enseignants à utiliser des outils logiciels pour des situations nécessitant des constructions graphiques, des calculs compliqués, etc.

Les auteurs des ouvrages et des programmes montrent l'intérêt des représentations graphiques du concept d'approximation locale d'une fonction lors de son utilisation dans le domaine de l'étude d'une fonction. En outre, le registre graphique n'est pas convoqué par l'enseignante durant l'élaboration et l'utilisation de ce concept mathématique, contrairement aux préconisations des programmes.

Nous conduisons une étude comparative entre le contenu des différents supports de cours lié au concept d'approximation locale d'une fonction (les parties de deux ouvrages et le photocopié de cours de l'enseignante) en faisant référence aux recommandations du programme de la première année (PC). Nous classons l'ensemble des différents types de tâches données selon deux catégories :

- Exemples : dans ce cas, on désigne l'ensemble de différents types de tâches recommandés par le programme à donner dans le cours.
- Exercices : dans ce cas, on désigne l'ensemble des différents types de tâches recommandés par le programme à proposer aux étudiants sous forme des applications et des exercices.

Nous avons résumé notre analyse didactique dans un tableau récapitulatif en identifiant les registres mobilisés et les paradigmes correspondants. Ceci nous permettra de voir :

- les différentes représentations mobilisées du concept d'approximation locale d'une fonction dans son enseignement en première année (PC) ;
- à quel point l'enseignante et les auteurs des ouvrages se réfèrent au programme actuel de première année (PC).

Dans le tableau ci-dessous, nous désignons par :

- Ouvrage 1 : la partie d'ouvrage « Tout en un PCSI – PTSI » liée au concept d'approximation locale d'une fonction.
- Ouvrage 2 : la partie d'ouvrage « H RÉPA Tout en un » liée au concept d'approximation locale d'une fonction.
- Analytique, algébrique, numérique, graphique, géométrique, langage naturel et langage formel : les registres mobilisés.

- [AI], [AC] et [AG] : les différents paradigmes correspondants.

Savoirs à enseigner selon le programme de (PC)	Contenu du programme de (PC)	Ouvrage 1	Ouvrage 2	Polycopié de cours de l'enseignante
Relation de comparaison de fonctions	Relations de domination	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Relation de négligeabilité	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langage naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Relation d'équivalence	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Exemples	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique
	Exercices sur la relation de comparaison des fonctions	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	
	Liens entre les relations de comparaison	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Exemples	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique
	Exercices	[AI]/Analytique		
	Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langage naturel	
	Exercices	[AI]/Analytique		
	Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.		[AI]/ Langages naturel et formel	
	Exemples	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique
	Exercices	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	
	Développements limités	Définition du développement limité au voisinage d'un réel $a$	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
Exercices		[AI]/Analytique	[AI]/Analytique	[AI]/Analytique
Adaptation au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{a\}$				
Unicité des coefficients,		[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	
Troncature d'un développement limité.		[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
Définition du développement limité en 0		[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
Exercices		[AI]/ Analytique	[AI]/ Analytique	[AI]/ Analytique
Forme normalisée d'un développement limité		[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
Équivalence $f(a+h) \sim a_0 h$ , $h \rightarrow 0$ ; signe de $f$ au voisinage de $a$		[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
Exemples		[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique
Exercices		[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.		[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel

	Étude des exemples	[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique
	Primitivation d'un développement limité.	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Exercices	[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique	[AI]-[AC]/ Analytique
Formule de Taylor-Young	Théorème	[AI]/ Langage naturel et formel	[AI]/ Graphique - Langage naturel et formel	[AI]/ Langage naturel et formel
	Exemples	[AI]/ Analytique	[AI]/ Graphique – Analytique	[AI]/ Analytique
	Développements limités usuels	[AI]/ Analytique – Langages naturel et formel	[AI]/ Analytique – Langages naturel et formel	[AI]/ Analytique
	Exercices	[AI]/ Analytique	[AI]/ Analytique	[AI]/ Analytique
Applications des développements limités	Calcul d'équivalents et de limite	[AI]-[AC]/ Langage naturel - langage formel – numérique	[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel	[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel
	Exercices	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique
	Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel	[AI]/ Langages naturel et formel
	Exercices	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique
	Étude locale d'une fonction : dérivabilité d'un prolongement par continuité	[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel	[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel	[AI]-[AC]/ Langages naturel et formel
	Exercices	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique	[AI]-[AC]/ Analytique – Numérique
	Étude locale d'une fonction : tangente	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel – Algébrique	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel – Algébrique	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel – Algébrique
	Exercices	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrique	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrique	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Géométrique
	Étude locale d'une fonction : position relative de la courbe et de la tangente	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel – Géométrique – Algébrique	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel - Géométrique – Algébrique	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel - Géométrique – Algébrique
	Exercices	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrique	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrique	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Géométrique
	Étude locale d'une fonction : Extremum			
	Exercices			
	Détermination d'asymptotes	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel -	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel -	[AI]-[AG]/ Langages naturel et formel

		Géométrie – Algébrique	–	Géométrie – Algébrique	–	- Géométrie – Algébrique
	Exercices	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrie	–	[AI]-[AG]/ Analytique – Algébrique – Graphique – Géométrie	–	[AI]-[AG]/ Analytique – Géométrie – Algébrique

**Tableau 4-8 : étude des différents supports de cours en référence au programme de première année (PC)**

A l'issue de cette étude, nous remarquons que l'enseignante et les auteurs des ouvrages montrent l'intérêt d'articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction par la mobilisation de ses représentations analytiques lors du calcul de limite d'une fonction dans les paradigmes [AC] et [AI].

Dans les différents supports de cours, les notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes, la formule de Taylor-Young et de développements limités sont présentées selon ses « statuts objets » dans le paradigme [AI] afin d'être des nouvelles techniques lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini dans les paradigmes [AC] et [AG]. Nous pensons que ce changement de paradigme de [AI] au paradigme [AC] ou [AG] pourra être l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'usage raisonné de ces concepts mathématiques.

Les notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes sont cruciales pour comprendre le rôle du développement limité dans l'approximation locale d'une fonction, par contre elles ne font l'objet d'aucun exercice dans le cours de l'enseignante.

A l'issue de cette étude institutionnelle, nous pouvons maintenant connaître les éléments que l'on peut attendre des étudiants confrontés à une situation réelle en classe. En effet, nous avons précisé les constituants du répertoire didactique de la classe : du Supérieur et du Secondaire. Cette étude nous permettra de procéder dans les chapitres suivants à l'analyse des raisonnements produits par les étudiants en termes de connaissances et de savoirs mobilisés.

Nous pensons que la confrontation des étudiants aux situations « classiques », dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice en vue d'évaluer leurs acquis, nous offre la possibilité d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs liées à ce concept mathématique. Pour ces raisons, nous allons conduire, dans le chapitre suivant, une analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à une situation mathématique « classique » afin de déterminer une typologie de leurs erreurs effectuées lors de l'appropriation et l'usage raisonné de ce concept d'approximation locale d'une fonction.



Les analyses épistémologique et institutionnelle, développées dans les chapitres 2 et 4, nous amènent à penser que la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction, en première année (PC), résultent d'obstacles. Nous allons essayer de trouver des éléments de réponse à notre questionnement dans le chapitre suivant.

## **PARTIE II**

### **PARTIE EXPÉRIMENTALE**

## Chapitre 5

### Analyse et classification des erreurs effectuées par des étudiants relatives à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction

#### I. Les raisons de la confrontation des étudiants à des situations mathématiques « choisies »

Notre travail de recherche porte sur l'enseignement et l'apprentissage des outils d'approximation locale d'une fonction. Dans ce premier chapitre de la partie expérimentale, notre objectif principal est l'identification de la nature et de l'origine des erreurs majeures effectuées par les étudiants lors de l'appropriation et l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction. Nous pensons que l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations mathématiques « classiques » choisies, nous permettra d'identifier ces erreurs.

C'est pourquoi nous envisageons de construire des situations permettant :

- de mettre en évidence l'intérêt des notions de développements limités, la formule de Taylor-Young et la relation de comparaison de fonctions en tant que nouveaux outils pour l'approximation d'une fonction et l'étude de la convergence d'une série.
- d'étudier la capacité des étudiants à articuler ces différentes notions lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement en  $(-\infty)$  et en  $(+\infty)$ , ainsi que lors de l'étude d'une série.
- d'analyser la nature et l'origine des erreurs liées à la conceptualisation des objets mathématiques visant l'approximation locale d'une fonction.

Dans le Secondaire, les élèves ont effectué l'étude locale au premier ordre d'une fonction régulière  $f$ , soit à partir du calcul de sa limite en un réel  $a$ , soit à partir de la détermination de l'équation de la tangente au point  $(a, f(a))$  à sa courbe représentative par le calcul du nombre dérivé, soit à partir de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente en ce point *via* l'étude du signe de  $[f(x) - y]$ . Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $M(a, f(a))$  est :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . Par ailleurs, ils savent préciser le comportement d'une fonction en  $(-\infty)$  et en  $(+\infty)$  en effectuant le calcul de limites.

Au niveau du Supérieur, les étudiants sont sensés déterminer le développement limité d'ordre  $n$  ( $n \geq 1$ ) d'une fonction au voisinage d'un réel, à partir de la définition généralisée ou en utilisant la formule de Taylor-Young. Ces modes d'approximation nécessitent de la part des étudiants une compréhension fine des notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes.

Un travail mené en Tunisie, en étroite collaboration avec l'enseignante de deux classes préparatoires, nous a conduits à élaborer trois situations mathématiques qui seront proposées aux étudiants dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice.

La première situation vise à évaluer les connaissances et les savoirs relatifs au concept de développements limités, à l'utilisation de la formule de Taylor-Young, ainsi que leur capacité à relier ces concepts aux notions de fonctions équivalentes et de fonctions négligeables. Dans un premier temps, nous souhaitons proposer des questions donnant la possibilité aux étudiants d'orienter leurs démarches de raisonnement. Ensuite, nous formulons une dernière question laissant d'avantage d'autonomie dans le choix des connaissances et des savoirs à mobilisés. Par ailleurs, nous choisissons la formulation de certaines questions en vue d'offrir aux étudiants la possibilité soit de mobiliser des connaissances du répertoire didactique du Secondaire, soit de faire usage de connaissances du répertoire didactique du Supérieur (voir chapitre 3 de la partie théorique).

La deuxième situation vise à évaluer les acquis inhérents au concept de développements limités et leurs usages en tant que nouvelle technique dans le domaine du calcul de limite des fonctions (des formes indéterminées).

La troisième situation a pour finalité d'évaluer la capacité des étudiants à conduire l'étude d'une série numérique en effectuant un usage adéquat, en situation, de leurs connaissances et de leurs savoirs relatifs aux développements limités d'une fonction au voisinage d'un réel.

L'objectif principal de cette étude didactique consiste donc à identifier les différents types de difficultés rencontrées dans le domaine de l'approximation locale d'une fonction. Pour ceci, nous effectuerons des analyses détaillées, de nature quantitative et qualitative, des productions des étudiants lors de la résolution de différentes questions proposées dans la première situation mathématique. Nous souhaitons identifier précisément la nature et l'origine des erreurs produites lors de leur confrontation à cette situation. Concernant les situations 2 et 3, nous nous limiterons à présenter leurs énoncés.

## **I. Les focales de l'étude réalisée et la méthodologie mise en œuvre**

### ***II.1. L'importance accordée aux différents types de raisonnement produits par les étudiants***

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous conduirons une étude des procédures de résolution des étudiants confrontés à des situations mathématiques « classiques ». L'analyse du raisonnement nous renseignera sur la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants en situation d'évaluation. Notre travail se focalise sur l'étude de la nature des procédures de résolutions attendues par l'enseignante en nous attachant à étudier les raisonnements produits en réponse aux questions proposées dans la première situation mathématique.

Pour cela, nous adoptons le point de vue de Brousseau et Gibel (2005) qui ont proposé une classification des raisonnements des étudiants, en situation de résolution de problèmes, selon leur(s) fonction(s) : organiser sa démarche, décider des connaissances à mobiliser, effectuer un changement de cadre, décider d'un changement de registre, formuler une explication, formuler une justification, interpréter le résultat d'un calcul, contrôler la validité du résultat obtenu.

Comme indiqué dans les travaux de Bloch et Gibel (2011), l'étude des raisonnements produits par les étudiants nécessite un travail sur la sémiotique afin d'analyser les signes produits, leurs usages et leurs transformations. Nous utiliserons ainsi les notions de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) afin d'identifier d'éventuels changements de registres.

La prise en compte des composantes du raisonnement (fonction, forme, dimension sémiotique et nature) nous permettra d'étudier les différents types de raisonnement élaborés par les étudiants afin d'identifier la nature et l'origine des erreurs commises dans leurs productions erronés (Gibel, 2018). Dans notre cas, un raisonnement est une articulation de ses pas qui permet la mobilisation du répertoire didactique.

### ***II.2. L'importance de l'identification des paradigmes de l'Analyse***

Pour chaque pas du raisonnement, nous identifions les savoirs et les connaissances mobilisés valides et erronés mises en œuvre par les étudiants.

Dans le premier chapitre de la partie théorique, certains travaux didactiques, liés à l'enseignement et l'apprentissage des objets de l'Analyse ont prouvé l'existence d'un passage d'une « Analyse algébrisée » à une « Analyse formalisée » lors de la transition Secondaire/Supérieur, (Bloch, 2002 ; Artigue, 2001 ; Ghedamsi, 2008 ; Praslon, 2000 ; Haddad, 2012, etc.).

Dans le deuxième chapitre de la partie théorique, le champ d'approximation locale d'une fonction est lié au domaine du calcul infinitésimal. D'un côté, les raisonnements - dont la validité dépend de l'évolution des connaissances mathématiques - révèlent l'existence d'obstacles épistémologiques en lien avec le domaine d'approximation locale d'une fonction. D'un autre côté, certains de ces obstacles résultent soit d'une rupture d'ordre épistémologique par le changement du paradigme lié à la cinématique à celui de nature géométrique, soit des difficultés associées à la nécessaire articulation des connaissances relatives au couple : topologie et Analyse fonctionnelle.

Dans ce cadre, nous jugeons pertinent de considérer le point de vue de Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier (2015) qui ont identifié trois paradigmes de l'Analyse standard : Analyse Arithmetico-géométrique [AG], Analyse calculatoire [AC] et Analyse Infinitésimale [AI<sup>3</sup>].

Au niveau Secondaire, les notions d'approximation locale d'une fonction sont présentées *via* leurs approximations affines, ainsi que les différentes formes d'équations de la tangente en un point obtenues à partir du nombre dérivé. Le répertoire didactique du Secondaire contient des savoirs et des connaissances mobilisés au niveau des paradigmes [AC] et [AG] lors de l'étude d'une fonction transcendante ou algébrique.

Au début de l'Université, le concept d'approximation locale d'une fonction est présenté à travers la relation de comparaison de fonctions, les développements limités et la formule de Taylor-Young afin de déterminer des développements limités usuels.

L'objet « développement limité » est un nouvel outil pour la recherche de fonctions équivalentes, le calcul de limites de fonctions, ainsi que l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. Au niveau universitaire, ce concept mathématique est introduit dans toute sa complexité relative à l'articulation de savoirs dans les domaines de l'Analyse fonctionnelle et de la topologie. Le répertoire didactique du Supérieur est constitué des connaissances et des savoirs mobilisés par un travail s'inscrivant dans le paradigme [AI], lors de la détermination des développements limités et de l'identification de fonctions négligeables ou de fonctions équivalentes. Concernant l'élaboration de ces concepts, le répertoire didactique est constitué des définitions, des propriétés, des théorèmes et de leurs démonstrations, mobilisés au niveau des paradigmes [AC] et [AG]. De ce fait, l'enseignement et l'apprentissage des objets d'approximation locale d'une fonction nécessitent un travail pouvant relever des trois paradigmes [AI], [AC] et [AG].

---

<sup>3</sup> Ces paradigmes ont été définis précisément dans le chapitre 3

## ***II.3. Méthodologie mise en œuvre***

### **II.3.1 Sujets**

En Tunisie, les élèves ayant obtenu le baccalauréat doivent remplir une fiche de vœux indiquant les spécialités souhaitées pour leurs études Supérieures (médecine en faculté, licence à l'Université, classes préparatoires dans les instituts préparatoires aux études d'ingénieurs, formation dans les instituts Supérieurs des études de technologies, etc.). Une commission du ministère de l'éducation décide de l'orientation de l'élève dans le Supérieur selon son score au baccalauréat. Concernant les classes préparatoires, il y a trois filières : Mathématiques-Physique (MP) pour les élèves ayant obtenu le baccalauréat Mathématiques, Physique-Chimie (PC) pour les élèves issus du baccalauréat de spécialité Sciences Expérimentales et Physique-Technique (PT) pour les élèves ayant obtenus le baccalauréat de spécialité Sciences et Techniques.

Dans l'étude réalisée, les étudiants sont inscrits en première année des classes préparatoires de la filière Physique-Chimie (PC) et ont été admis au baccalauréat Sciences Expérimentales avec un score élevé.

Une enseignante expérimentée<sup>4</sup> de l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT), madame Rajia Slim, a accepté de participer à ce travail de recherche. La collaboration s'inscrit dans le cadre d'un projet portant sur l'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction. Cette enseignante a montré un vif intérêt à s'appuyer sur les résultats de l'évaluation de ses étudiants en vue d'améliorer le contenu de ses enseignements. Pour cela, elle a accepté de prendre en compte l'identification des principales difficultés de ses étudiants afin de participer activement à l'élaboration des situations mathématiques qu'elle expérimentera l'année suivante dans ses classes. En effet, elle souhaite préparer au mieux ses étudiants de première année (PC) à l'examen. Elle enseigne dans deux classes de (PC) chacune comportant 22 étudiants pour l'année universitaire 2018-1019.

### **II.3.2 Instrumentation**

#### ***II.3.2.1 Les situations mathématiques objet d'étude***

En mettant en jeu la relation étudiant-situation (Brousseau, 1998), nous conduisons une analyse *a priori* de la première situation proposée en vue d'évaluer les acquis des étudiants.

#### **Énoncé de la situation 1**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$

1) On s'intéresse à l'étude locale de  $f$  en 0.

a. Donner le  $DL_2(0)$ .

<sup>4</sup> Ayant enseigné depuis de plus de dix ans dans cette filière. Elle est en poste depuis sa réussite au concours du recrutement dans l'enseignement Supérieur des docteurs de mathématiques.

- b. En déduire  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .  
 c. Déterminer l'expression de l'équation de la tangente  $\Delta$  à  $C_f$  passant par le point  $(0, f(0))$  ; préciser la position de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$ .  
 2) Étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  :  
 a. Montrer que l'on a :  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .  
 b. Déduire une fonction équivalente à  $f$  en  $+\infty$ .  
 c. Préciser le comportement de  $f$  en  $+\infty$ .  
 3) Préciser le comportement de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

L'objectif principal de ce problème est d'amener les étudiants à étudier localement une fonction au voisinage de 0 ainsi que son comportement asymptotique en  $(+\infty)$  puis en  $(-\infty)$ .

### Énoncé de la situation 2

- 1). Déterminer les limites :  
 a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x) - x \cdot \cos(x)}{x \cdot (1 - \operatorname{ch}(x))}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot [e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}]$   
 2). Donner le  $DL_n(x_0)$   
 a)  $\frac{Ln(x)}{x-1}$  ;  $n = 3$  ;  $x_0 = 1$       b)  $Ln(x)$  ;  $n = 3$  ;  $x_0 = 2$

Le but de cette situation est essentiellement de mettre en évidence l'intérêt du développement limité en tant qu'outil du calcul de limite d'une fonction dans le cas de formes indéterminées.

### Énoncé de situation 3

- 1) Soit  $U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$   
 a. Montrer que  $U_n = e^{-n} e^{\frac{1}{2} + o(1)}$   
 b. En déduire la nature de  $\sum U_n$   
 2) Soit :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$  ; déterminer la nature de cette série.  
 3) Étudier la nature de la série :  $\sum_{n \geq 1} \frac{Ln(n)}{n^\alpha}$  ; avec  $\alpha \in \mathbb{R} / \{1\}$  (Indication : distinguer les cas  $\alpha > 1$  et  $\alpha < 1$ )

La situation 3 vise à mettre en lumière l'intérêt du développement limité pour l'étude de la convergente d'une série.

#### II.3.2.2 Les données recueillies avant la mise en œuvre (par les échanges avec l'enseignante)

Malgré les fortes contraintes temporelles relatives à chaque chapitre, liées à la densité du programme, l'enseignante a accepté de s'engager dans cette expérimentation. Elle a planifié son enseignement afin de programmer une séance d'évaluation sommative. Ensuite, elle a participé à la conception de l'expérimentation et accepté de nous remettre les copies des étudiants. Ces dernières ne font pas apparaître ses commentaires mais comportent uniquement les points attribués à chaque question et la note globale.

L'enseignante nous a remis une partie de ses notes de cours sous la forme d'un photocopié. Et plus précisément, elle nous a permis d'accéder aux chapitres intitulés « Analyse asymptotique », « Intégration » et « Séries numériques » sur lesquels porte l'évaluation. Dans le photocopié de



cours, nous remarquons que l'enseignante mobilise principalement les registres algébrique, numérique, analytique et géométrique. Cependant, le registre graphique n'est pas convoqué durant l'élaboration et l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction, contrairement aux préconisations des programmes.

Le volume horaire d'enseignement de l'Analyse est de quatre heures hebdomadaires. Durant la matinée, l'enseignante dispense ses cours à ses classes lors de deux séances consécutives.

Dans le chapitre « Analyse asymptotique », le concept de développements limités d'une fonction au voisinage d'un réel est introduit à partir de sa définition généralisée ; l'enseignante propose deux formulations de l'expression du reste :  $[(x - x_0)^n \varepsilon((x - x_0)^n)]$  et  $[o(x - x_0)^n]$ . Dans une première partie, ce concept mathématique est présenté en tant qu'« objet » à partir de ses définitions, de ses propriétés et de la formule de Taylor-Young. Ensuite, il est étudié en tant qu'outil dans le domaine du calcul de limite d'une fonction, lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en  $(+\infty)$  et en  $(-\infty)$ .

À la fin de la dernière séance du chapitre « Séries numériques », l'enseignante informe ses étudiants des deux classes (PC1) et (PC2) qu'ils auront un devoir lors de la prochaine séance. Ce devoir écrit portera sur les chapitres nommés précédemment. De cette manière, elle leur laisse du temps pour étudier de façon approfondie leur cours ; son objectif est de pouvoir évaluer précisément leurs acquis.

Les étudiants ont accepté l'accès à leurs copies après que l'enseignante les ait informés des enjeux et du cadre de la recherche.

Suite à l'enseignement des chapitres « Analyse asymptotique », « Intégration » et « Séries numériques », nous conduisons une étude expérimentale, en collaboration avec l'enseignante, basée sur la dévolution des situations mathématiques visant à évaluer les acquis et les difficultés des étudiants.

### *II.3.2.3 Les données recueillies lors de la mise en œuvre*

L'enseignante commence la séance en distribuant la feuille des énoncés des situations aux étudiants de la classe de (PC1) vers huit heures trente minutes, ensuite à la classe de (PC2) vers dix heures trente minutes.

La modalité de l'évaluation est la suivante : chaque étudiant travaille seul et dispose d'une heure et quinze minutes pour rédiger sa composition.

Chacun répond individuellement aux questions, qui structurent chacun des énoncés, en s'appuyant sur les données et sur son répertoire didactique de connaissances. Par ailleurs, l'enseignante circule dans les rangs et observe. Elle n'effectue aucune intervention tout au long du devoir. Nous tenons à préciser que ni la calculatrice, ni les documents ne sont autorisés.

### II.3.3 Dérroulement et analyse *a priori* de la séquence

#### *II.3.3.1 Place de la séance dans la progression*

Ces situations sont dévolues aux étudiants de première année de classes préparatoires aux études d'ingénieurs de Tunis - filière Physique-Chimie - afin d'étudier leur capacité à :

- articuler les différents concepts de développements limités, de fonctions équivalentes et manipuler la formule de Taylor-Young en vue de réaliser l'étude locale d'une fonction régulière au voisinage d'un réel et/ou de préciser son comportement asymptotique en  $(+\infty)$  ou en  $(-\infty)$  ;
- percevoir l'intérêt du développement limité en tant qu'outil pour résoudre certaines questions traitées dans le Secondaire, comme par exemple l'étude locale d'une fonction, etc. ;
- percevoir si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage d'un réel alors elle est nécessaire continue (et dérivable) en ce réel.

L'objectif principal de cette étude didactique est l'identification des difficultés rencontrées par les étudiants dans le domaine de l'approximation locale d'une fonction. Nous souhaitons préciser la nature et l'origine des erreurs commises par confrontation à la première situation proposée.

#### *II.3.3.2 Analyse *a priori* de la situation*

Nous conduisons une analyse *a priori* de chacune des questions proposées dans cette situation selon les deux points de vue : mathématique et didactique. Cette analyse est réalisée, dans le cadre de la théorie des situations didactiques, en termes de connaissances et de savoirs mobilisés sur le plan des mathématiques et sur le plan didactique.

- Du point de vue mathématique, nous porterons l'accent sur la nature de la réponse et les différents types de procédures attendues par l'enseignante. Nous identifions les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et les différents paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015).
- Du point de vue didactique, nous préciserons le type de la situation et expliciterons ses principales variables didactiques, les objectifs de sa mise en œuvre, ainsi que les différentes difficultés envisagées.

Sur le plan didactique, la situation est assimilable à un problème de réinvestissement des connaissances antérieures relevant de trois chapitres étudiés : « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques ».

L'enseignante construit un barème à suivre lors de l'évaluation des copies des étudiants. Elle accepte de nous permettre d'accéder aux copies. Pour ceci, elle décide d'utiliser le crayon à papier afin de noter les différentes questions proposées et la note globale.

#### Objectifs didactiques de la situation

Les principaux objectifs de cette première situation problème consistent à :

- étudier la capacité des étudiants à articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0 ;
- donner l'intérêt de l'objet développement limité en tant que nouvelle technique pour résoudre des questions traitées au niveau du Secondaire ;
- étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point et en l'infini.

#### Variables didactiques

Nous pouvons distinguer trois variables didactiques :

- **VD1** : la nature de la fonction à étudier. Nous avons choisi de proposer une fonction sous forme d'un produit de fonctions admettant des développements limités « usuels ».
- **VD2** : les voisinages dans lesquels les étudiants doivent déterminer les développements limités de la fonction : celui de 0, et en l'infini.
- **VD3** : le choix de l'ordre des développements limités « usuels ».

Pour chacune des questions posées, notre travail porte la focale sur les différentes procédures de résolution attendues par l'enseignante dans les différents paradigmes, ainsi que les différents types de difficultés envisagées. L'étudiant peut choisir plusieurs méthodes lors de la résolution des différentes questions. Dans ce cas, la nature des procédures de résolution dépend des moyens de validation et de contrôle effectués par l'étudiant.

#### - **Analyse *a priori* des questions (1-a) et (1-b)**

##### • **Procédures de résolutions attendues par l'enseignante**

L'étudiant peut choisir plusieurs méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0, à l'ordre 2, dans le paradigme [AI]. Il peut utiliser soit la formule de Taylor-Young, soit la formule du développement limité usuel au voisinage de 0 de la fonction  $X \rightarrow [(1 + X)^\alpha]$  à l'ordre 1 en écrivant la fonction  $f$  sous la forme d'un produit de fonctions.

L'étudiant doit agir individuellement en utilisant des règles du calcul formel et algébrique, les formules et les propriétés des développements limités usuels pour déterminer celui de la fonction  $f$ . Sa procédure s'inscrit dans le paradigme [AI]. En effet, il doit faire faire un pilotage/contrôle de l'ordre dans ce calcul complexe de développement limité, ainsi que la

précision d'un voisinage de 0. Après le calcul du produit des développements limités, il doit suivre un processus de troncature. Il peut présenter le développement de  $f$  par l'utilisation de deux symboles pour l'expression du reste :  $[o(x^2)]$  ou  $[x^2\varepsilon(x)]$ . Ensuite, à partir de cette approximation polynômiale, l'étudiant fait appel à la formule de Taylor-Young, puis à la méthode d'identification terme à terme de ces deux polynômes afin de donner le nombre dérivé  $f'(0)$  et le nombre dérivé seconde  $f''(0)$  dans les paradigmes [AI] et [AC].

➤ Procédure 1 : utilisation de la formule des développements limités usuels

**1-a)** On a :  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{1+x^2}$

La fonction  $f$  est sous la forme de produits de fonctions.

La fonction  $x \mapsto x$  est une fonction polynôme qui est définie sur  $R$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  est écrite sous la forme d'un quotient où le dénominateur doit être différent de 0.

La fonction  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  est définie sur  $R$

Donc la fonction  $f$  est donc définie sur  $R \setminus \{1\}$

On a :  $\forall x \in R \setminus \{1\}, f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

La fonction  $f$  est le produit de trois fonctions de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0. L'existence d'un développement limité pour  $f$  est assurée par l'existence d'un développement limité pour chacune des fonctions qui la compose et qui viennent d'être mises en évidence. Cette fonction admet un développement limité d'ordre  $n$  (quelconque) au voisinage de 0 tel que :  $\exists \alpha > 0, \exists \varepsilon$  une fonction, telle que  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[ \cap D_f$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$  où les  $(a_k)$  sont des réels et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est le produit de deux fonctions  $[x \mapsto (1-x)^{-1}]$  et  $[x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}]$  dont il suffit de déterminer les développements limités à l'ordre 1.

Les fonctions  $[x \mapsto (1-x)^{-1}]$  et  $[x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}]$  ont un développement-au voisinage de 0 de la forme de :  $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + X\varepsilon(X)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

Comme  $x \rightarrow 0$ , alors  $(-x) \rightarrow 0$ ,  $\exists \alpha > 0$ , tel que  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[ \cap D_f, (1-x)^{-1} = 1 + (-1) \cdot (-x) + x\varepsilon_1(x) = 1 + x + x\varepsilon_1(x)$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$

Comme  $x \rightarrow 0$ , alors  $x^2 \rightarrow 0$ , on a :  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) = 1 + x\varepsilon_2(x)$ , où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Donc  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = -x[1 + x + x\varepsilon_1(x)] \cdot [1 + x\varepsilon_2(x)]$

Conclusion, on a :  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = -x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ , ce qui fournit le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

**1-b)** On a :  $f(x) = x(x-1)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ . On a déjà vu que :

La fonction  $x \mapsto x(x-1)^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $R \setminus \{1\}$ .

La fonction  $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $R$ .

Ainsi la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $R \setminus \{1\}$  et en particulier de classe  $C^2$  pour tout  $x$  assez petit. D'après la formule de Taylor-Young, la fonction  $f$  admet donc une approximation locale d'ordre 2 au voisinage de 0.

$\exists \beta > 0, \exists \varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0, \forall x \in ]-\beta; \beta[, f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^2 \varepsilon(x)$

D'après la question précédente (1-a), on a :  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = -x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$  qui est le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

D'après la propriété de l'unicité, en posant  $\delta = \min(\alpha, \beta)$ , on peut écrire que :

$$\forall x \in ]-\delta; \delta[, f(x) = -x - x^2 + x^2 \varepsilon(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

Par identification, terme à terme, on aura : 
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = -1 \\ \frac{f''(0)}{2} = -1 \end{cases}$$

Conclusion :  $f'(0) = -1$  et  $f''(0) = -2$

➤ Procédure 2 : utilisation de la formule de Taylor-Young

**1-a)** On a :  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$

D'après la formule de Taylor-Young, et puisque la fonction  $f$  est au moins de classe  $C^2$  au voisinage de 0, elle y admet un développement limité d'ordre 2 :  $\exists \beta > 0, \forall x \in ]-\beta; \beta[, f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2)$$

Il suffit maintenant de calculer les dérivées première et seconde de la fonction  $f$  afin de déterminer ses valeurs en 0.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $R \setminus \{1\}$  et :  $\forall x \in R \setminus \{1\}$ ,

$$f'(x) = \frac{(x-1)-x \cdot 1}{(x-1)^2} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{(x-1)^2} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{x-1} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donc  $f'(0) = -1$

En écrivant  $f'$  sous la forme :  $f'(x) = -(x-1)^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(x-1)^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$  et en dérivant, nous obtenons, pour tout réel  $x$  différent de 1 :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2(x-1)^{-3}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (x-1)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x(x-1)^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - x^2(x-1)^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot x \cdot x^2(x-1)^{-1}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= 2(x-1)^{-3}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}(x-1)^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x(x-1)^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - x^2(x-1)^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^3(x-1)^{-1}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

De sorte que:  $f''(0) = -2$

En remplaçant les coefficients de l'approximation polynômiale par expressions de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ , nous aurons :  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = 0 + (-1) \cdot x + \frac{(-2)}{2}x^2 + o(x^2)$  qui donne le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

**1.b)** Dans la question précédente (1-a), nous avons déjà trouvé  $f'(0) = -1$  et  $f''(0) = -2$   
- Difficultés envisagées

D'une part, l'étudiant peut rencontrer plusieurs difficultés liées au travail au niveau du paradigme [AI] lors de la détermination du développement limité. Ces difficultés peuvent être liées à la production soit d'une procédure incomplète par la négligence de la notion d'intervalle autour de 0, soit d'une procédure erronée lors de l'utilisation des développements limités usuels. D'autre part, les étudiants peuvent être confrontés à certains problèmes liés au passage du paradigme [AI] à celui de [AC] lors de la détermination des valeurs numériques des nombres dérivés première et seconde de  $f$  en 0.

Dans tout ce qui suit, on prend le parti d'écrire  $o(x^p)$  toute fonction négligeable devant  $x^p$ ,  $p \geq 1$ , et on désigne par  $] - \alpha; \alpha[$  tout voisinage de 0, suffisamment petit pour être contenu dans  $D_f$ .

Difficulté 1 liée au symbole de l'expression du reste

**1-a)** On a :  $f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = -x[1+x+o(x)] \cdot [1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)] = -x[1+x+o(x^2)]$$

Donc  $f(x) = -x - x^2 - o(x^2)$  est le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

Difficulté 2 liée à l'utilisation du développement limité usuel de la fonction  $(1+X)^\alpha$ .

**1-a)** On a :  $f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = x[1+x+o(x)] \cdot [1+o(x)]. \text{ Donc,}$$

$$\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = x + x^2 + o(x^2)$$

Difficulté 3 liée à l'utilisation de la formule de Taylor-Young

**1-b)** D'après la formule de Taylor-Young

$$\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2) \text{ et } f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } f'(0) = -1 \text{ et } f''(0) = -2$$

Difficulté 4 liée à la troncature du développement limité

**1-a)** On a :  $f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\exists \alpha > 0$ , tel que  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \cdot [1 + x + o(x)] \cdot [1 + x^2 + o(x^2)] = [-x - x^2 + o(x^2)] \cdot \left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \\ &= -x - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

- **Analyse de la question (1-c)**

**Procédures de résolution attendues par l'enseignante**

Dans le problème de recherche de l'équation de la tangente au point  $(0, f(0))$  et sa position relative par rapport à la courbe représentative de  $f$ , nous attendons que l'étudiant utilise les résultats trouvés dans les deux questions précédentes afin de développer sa production dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG]. Par contre, il peut utiliser une technique du répertoire didactique du Secondaire en déterminant l'équation de la tangente à partir du nombre dérivé dans les paradigmes [AC] et [AG].

➤ **Procédure : utilisation du développement limité dans les paradigmes [AI] et [AG]**

**1-c)** Le développement limité d'une fonction est un nouvel outil pour déterminer l'équation d'une tangente, ainsi que sa position relative par rapport à la courbe représentative en un point donné, où la fonction est régulière.

En recours au cours, le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 est suffisant.

Ici on a :  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$  donc son approximation polynômiale d'ordre 1 définit l'équation de sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

Par ailleurs, le signe du troisième terme précise la position de cette tangente par rapport à la courbe  $C_f$  en ce point. De ce fait, la courbe  $C_f$  est ci-dessous de la tangente  $\Delta$  au point  $(0, f(0))$ .

**Difficultés envisagées**

Le changement de niveau du paradigme [AI] à celui de [AG] pourrait amener à l'existence de difficultés chez certains étudiants soit pour déterminer l'équation de la tangente, soit pour préciser la position relative de cette tangente par rapport à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

- Difficulté liée à l'utilisation d'une technique du Secondaire dans les paradigmes [AC] et [AG]

**1-c)** La tangente  $\Delta$  a pour équation :  $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = -1$

Conclusion : la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = -x$  est la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $(0, f(0))$ .

- Position de la courbe par rapport à sa tangente :

$$\text{On a : } f(x) - y = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x-1} + x$$

	-∞	+∞
Signe de $[f(x) - y]$	+	-
Position de $C_f$ par rapport à $\Delta$	$C_f$ est au-dessus de $\Delta$	$C_f$ est en dessous de $\Delta$

Dans ce cas, l'étudiant néglige le rôle du développement limité en tant que nouvelle technique pour l'étude locale d'une fonction.

- Analyse de la question (2-a)

### ***Procédures de résolution attendues par l'enseignante***

Le problème de la recherche du développement limité de la fonction  $f$  en  $+\infty$  amène l'étudiant à effectuer le changement de variable ( $X = \frac{1}{x}$ ) afin de se transporter d'un voisinage de  $+\infty$  à un voisinage de 0, où il pourra se référer soit aux développements limités usuels, soit à la formule de Taylor-Young. Il introduit ainsi une fonction  $g$  telle que :  $g(X) = f(x)$ . Dans ses développements successifs, il pourra utiliser les expressions du reste sous la forme :  $[o\left(\frac{1}{x}\right)]$  ou  $\frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ .

- **Procédure**

➤ **2-a) La fonction  $f$  est définie sur  $R \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$**

On cherche à réécrire la fonction  $f$  en fonction de  $\frac{1}{x}$ .

$$\forall x \in R \setminus \{0,1\}, f(x) = \frac{x \cdot 1}{x \cdot (1 - \frac{1}{x})} \sqrt{x^2 \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot |x| \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)^{\frac{1}{2}}, \text{ or pour } x \rightarrow +\infty, \text{ on a}$$

$$|x| = x$$

$$\text{Pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1, f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot x \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Nous effectuons alors le changement de variable suivant : on pose  $X = \frac{1}{x}$  de sorte que  $X \rightarrow 0^+$ , quand  $x \rightarrow +\infty$ . Ceci conduit tout naturellement à considérer la fonction  $g$  définie par :

$$\forall X \in R^* \setminus \{1\}, g(X) = \frac{1}{X} (1 - X)^{-1} (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$$



Il est clair que  $g$  est le produit de fonctions régulières et admettant un développement limité au voisinage de 0. En fait, pour déterminer le développement d'ordre 1 de  $g$ , il convient de déterminer les développements d'ordre 2 des fonctions  $X \rightarrow (1 - X)^{-1}$  et  $X \rightarrow (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$ . On désigne par  $o(x)$  toute fonction négligeable devant  $x$ .

$$\exists \alpha > 0, \forall X \in ] - \alpha; \alpha[ \cap D_g, (1 - X)^{-1} = 1 + (-1) \cdot (-X) + \frac{(1-1)}{2} \cdot (-X)^2 + o(X^2) \\ = [1 + X + X^2 + o(X^2)]$$

$$\forall X \in ] - \alpha; \alpha[ \cap D_g, (1 + X^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2) = 1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

$$\exists \alpha > 0, \forall X \in ] - \alpha; \alpha[ \cap D_g, g(X) = \frac{1}{X} [1 + X + X^2 + o(X^2)] \cdot [1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)]$$

$$g(X) = \left[ \frac{1}{X} + 1 + X + o(X) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right] = \frac{1}{X} + \frac{X}{2} + 1 + X + o(X)$$

$$\text{Donc } \forall X \in ] - \alpha; \alpha[, g(X) = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{2}X + o(X)$$

La question vise à déterminer la représentation analytique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ , donc nous devons revenir en la variable  $x$  c'est-à-dire remplacer dans l'écriture du développement de  $g$ , la variable  $X$  par  $\frac{1}{x}$ . Mais attention dans ce cas, il y aura aussi un changement de voisinage. En effet pour  $X \in ]0; \alpha[$ , et  $\frac{1}{x} > \frac{1}{\alpha}$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in ]\frac{1}{\alpha}, +\infty[, f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

### *Difficultés envisagées*

L'étudiant peut effectuer plusieurs types d'erreurs lors de la détermination du développement asymptotique par la production d'une procédure incomplète ou une procédure erronée. Dans ce cas, il est confronté à un problème lié à la mobilisation de ses connaissances antérieures, soit la méthode enseignée au Secondaire par un changement de variable développée dans le paradigme [AC], soit l'utilisation des développements limités usuels au voisinage de 0 dans le paradigme [AI], soit le calcul du produit de développements limités usuels dans le paradigme [AI], soit la notion du reste dans le paradigme [AI].

#### Difficulté 1 liée à l'utilisation d'une méthode du Secondaire au niveau du paradigme [AC]

$$\mathbf{2-a)} \text{ On a : } f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On pose :  $X = \frac{1}{x}$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow 0^+$  et on aura :  $f(X) = \frac{X}{X-1} (1 + X^2)^{\frac{1}{2}} = -X \cdot (1 - X)^{-1} (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\exists \beta > 0, \text{ et une fonction } \varepsilon, \text{ avec } \lim_{X \rightarrow 0^+} \varepsilon(X) = 0, \text{ telle que } \forall X \in ] - \beta; \beta[$$

$$f(X) = -X[1 + X + X^2 + X^2\varepsilon(X)]. [1 + \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)]$$

$\forall X \in ]-\beta; \beta[, f(X) = -X - X^2 + X^2\varepsilon'(X)$  avec  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \varepsilon'(X) = 0$  Comme  $X = \frac{1}{x}$ , on aura  
 $\forall x \in ]\beta; +\infty[, f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ .

En réalité, l'étudiant est en train de déterminer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Puis, il remplace systématiquement  $X$  par  $\frac{1}{x}$  dans la dernière étape.

### Difficulté 2 liée à l'expression du reste dans le paradigme [AI]

**2-a)** On a (pour  $x \geq 0$ ) :  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot x \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)^{\frac{1}{2}}$

On pose  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ , quand  $x \rightarrow +\infty$ , donc  $f(\frac{1}{X}) = \frac{1}{X} (1-X)^{-1} (1+X^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \exists \alpha > 0, \forall X \in ]0; \alpha[, f\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{X} [1 + X + X^2 + o(X^2)]. [1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)] \\ &= \frac{1}{X} + \frac{X}{2} + 1 + \frac{X^2}{2} + X + \frac{X^3}{2} + o(X^3) \end{aligned}$$

Donc  $\forall X \in ]0; \alpha[, f\left(\frac{1}{X}\right) = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{2}X + o(X)$

Or  $x = \frac{1}{X}$ , d'où  $\forall x \in ]\frac{1}{\alpha}; +\infty[, f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$

Ainsi, l'étudiant doit effectuer une troncature à l'ordre 1 du développement limité de  $f\left(\frac{1}{X}\right)$ .

### **- Analyse de la question (2-b)**

#### *Procédures de résolution attendues par l'enseignante*

L'étudiant doit interpréter le résultat trouvé précédemment, pour déterminer une fonction équivalente à  $f$  en  $+\infty$ . Il doit s'appuyer sur la propriété de fonctions équivalentes du répertoire didactique du Supérieur au niveau du paradigme [AI].

- Procédure : utilisation du développement limité

**2-b)** D'après la définition de fonctions équivalentes : si  $g$  ne s'annule pas dans un voisinage de  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = 1$  alors  $h(x) \sim g(x)$  au voisinage de  $a$ .

Dans notre cas, en  $+\infty$ , il suffit de déterminer une fonction  $g$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Nous pouvons déterminer cette fonction  $g$  à partir du développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . En effet, on a :  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \frac{\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})}{1+x}]$$

Conclusion :  $f(x) \sim 1 + x$  en  $+\infty$

### ***Difficultés envisagées***

Lors de la détermination d'une fonction équivalente en  $+\infty$ , l'étudiant peut être confronté aux différents types de difficultés liées soit à l'utilisation d'un développement asymptotique, soit à la définition de fonctions équivalentes dans le paradigme [AI].

#### Difficulté 1 liée à l'utilisation du développement limité

2-b) On a :  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x] = +\infty$  donc  $f(x) \sim \frac{3}{2x}$  en  $+\infty$ .

#### Difficulté 2 liée au calcul de limite dans le paradigme [AC]

2-b) Au voisinage de  $+\infty$ , on a :  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + x + \frac{3}{2x}\right] = 1$ , donc  $f(x) \sim 1$ , en  $+\infty$

### **- Analyse de la question (2-c)**

#### ***Procédures de résolution attendues par l'enseignant***

Lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$ , l'étudiant va mobiliser soit une technique du répertoire Supérieur par l'interprétation des résultats trouvés précédemment (2-a et 2-b), soit une technique issue du Secondaire par le calcul des limites des fonctions, soit enfin une technique articulant les méthodes enseignées au Secondaire et au Supérieur.

- Procédure : utilisation d'une technique du répertoire Supérieur dans les paradigmes [AI], [AC] et [AI]

**2-c)** Le développement asymptotique est un nouvel outil pour étudier le comportement d'une fonction en  $+\infty$  puisque le polynôme de degré 1 de cette expression fournit une équation de son asymptote oblique.

$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  donc  $C_f$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y = ax + b$  en  $+\infty$

D'après la question (2-a), nous avons  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $+\infty$

Donc en  $+\infty$ ,  $f(x) \sim 1 + x$  et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0$

Ainsi la courbe représentative de la fonction  $f$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y = 1 + x$  au voisinage de  $+\infty$ .

La courbe se situe au-dessus de l'asymptote d'équation :  $y = 1 + x$  en  $+\infty$ .

### ***Difficultés envisagées***

D'une part, l'étudiant peut être confronté à un problème lié à la détermination d'un développement limité au voisinage de 0 lors de l'utilisation de la formule du répertoire

didactique du Supérieur dans les paradigmes [AI] et [AG]. D'autre part, il peut effectuer des erreurs lors de l'utilisation de la méthode du changement de variable dans le paradigme [AC].

- Difficulté liée à l'utilisation du développement asymptotique dans le paradigme [AG]

**2-c)** On a en  $+\infty$ ,  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Donc la droite d'équation :  $y = 1 + \frac{3}{2x}$  est l'asymptote oblique de la courbe  $C_f$  en  $+\infty$ .

Dans ce cas, l'étudiant est confronté à un problème lié à l'interprétation de la représentation analytique du développement asymptotique de la fonction  $f$ . Il ne sait pas que l'approximation polynômiale d'ordre 1 (le polynôme de degré 1) définit une équation de l'asymptote oblique.

- **Analyse de la question (3)**

Cette question concerne le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  afin de déterminer l'équation de l'asymptote oblique de sa courbe représentative en  $(-\infty)$ .

**Procédures de résolution attendues par l'enseignante**

Dans ce cas, le jeu relatif à l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  consiste à amener l'étudiant à choisir d'une manière autonome sa démarche de raisonnement. L'étudiant va soit mobiliser ses connaissances antérieures du Supérieur en utilisant un développement asymptotique en  $(-\infty)$ , soit se référer à une technique enseignée dans le Secondaire *via* le calcul des limites des fonctions  $f(x)$ ,  $\frac{f(x)}{x}$  et  $[f(x) - ax]$  en  $(-\infty)$ .

➤ Procédure : utilisation du développement asymptotique au niveau des paradigmes [AC], [AI] et [AG]

**3)** D'après les questions précédentes, nous sommes guidés vers le calcul du développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

On a :  $\forall x \in R \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$

Il faut écrire la fonction  $f$  sous la forme d'une fonction de variable  $\frac{1}{x}$  pour pouvoir utiliser des développements limités au voisinage de 0 comme cela a été le cas en  $+\infty$ .

On a :  $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot |x| \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$ . Or quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x| = -x$ , donc

$$f(x) = -\frac{x}{1-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

On effectue le changement de variable  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ , quand  $x \rightarrow -\infty$ , de sorte que

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{1-X} \cdot (1+X^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{X} (1-X)^{-1} (1+X^2)^{\frac{1}{2}}$$

On pose alors :  $g(X) = -\frac{1}{X} (1-X)^{-1} (1+X^2)^{\frac{1}{2}}$

D'après les questions précédentes, nous avons besoin de déterminer le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  en 0.

Comme les fonctions  $X \rightarrow (1 - X)^{-1}$  et  $X \rightarrow (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$  (admettant des développements limités usuels au voisinage de 0) sont multipliées par la fonction  $\frac{1}{X}$ , donc nous allons déterminer les développements limités d'ordre 2 de ces deux fonctions au voisinage de 0.

Au voisinage de 0 et à l'ordre 2, on a :

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha \cdot u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2), \forall u \in ]-\beta; \beta[$$

$$\text{Donc } \forall X \in ]-\beta; \beta[, (1 - X)^{-1} = (1 + (-X))^{-1} = 1 + (-1) \cdot (-X) + \frac{(-1)(-1-1)}{2} (-X)^2 + o((-X)^2) = 1 + X + X^2 + o(X^2)$$

$$\text{Et } (1 + X^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} X^2 + o(X^2)$$

$$\text{Donc } \forall X \in ]-\beta; 0[, g(X) = -\frac{1}{X} [1 + X + X^2 + o(X^2)] \cdot \left[1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right] \\ = -\frac{1}{X} \left[1 + X + \frac{3}{2} X^2 + o(X^2)\right]. \text{ Ainsi, puisque } g(X) = f(x) \text{ où } = \frac{1}{x}, \text{ on peut écrire que :}$$

$$\forall X \in ]-\beta; 0[, f\left(\frac{1}{X}\right) = -1 - \frac{1}{X} - \frac{3}{2} X + o(X)$$

$$\text{C'est à dire } \forall x \in ]-\infty - 1/\beta [, f(x) = -1 - x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Détermination d'une fonction équivalente : en revenant à la définition de deux fonctions équivalentes on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{-1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{-1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{3}{2x(1+x)}\right] = 1$$

Donc  $f(x) \sim (-1 - x)$  en  $(-\infty)$

- Étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$

Le développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  est un outil pertinent pour l'étude de son comportement puisque :

$$\forall x \in ]-\infty; -1/\beta [, f(x) = -1 - x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion : la courbe  $C_f$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y = -1 - x$  en  $(-\infty)$ .

### ***Difficultés envisagées***

Les étudiants peuvent rencontrer des problèmes liés soit à la mobilisation de leurs connaissances antérieures relevant du Supérieur par le passage du niveau de paradigme [AI] à celui [AC], soit résultant de l'utilisation d'une méthode du répertoire didactique du Secondaire dans les paradigmes [AC] et [AG].

Difficulté 1 liée à la détermination du développement asymptotique dans le paradigme [AI]

Pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  est le développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ ,

Pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) = -\left[1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$  est le développement asymptotique de  $f$  en  $-\infty$

Conclusion : La courbe  $C_f$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y = -1 - x$  en  $(-\infty)$ .

Difficulté 2 liée à l'utilisation du développement asymptotique au niveau du paradigme [AI]

3) On a :  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$   $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  est le développement asymptotique de  $f$  en  $(+\infty)$ .

$\forall x \in ]-\infty; -\alpha[$ ,  $f(x) = -1 - x - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  est le développement asymptotique de  $f$  en  $(-\infty)$ .

$$f(x) \sim -x - \frac{3}{2x} \text{ en } -\infty$$

Conclusion : la droite d'équation :  $y = -x - 1$  est l'asymptote oblique à la courbe  $C_f$  en  $(-\infty)$ .

*Conclusion*

Les étudiants peuvent mobiliser différentes procédures de résolution afin de donner des réponses aux différentes questions de la situation mathématique. En recours à l'étude institutionnelle menée au chapitre 4, les étudiants peuvent mobiliser des méthodes et des formules du répertoire didactique du Secondaire ou du Supérieur lors de l'étude locale de la fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. Par ailleurs, ils peuvent effectuer plusieurs erreurs lors de la mobilisation de leurs connaissances, et notamment lors des changements de paradigme.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons d'une manière synthétique la nature des procédures de résolutions attendues par l'enseignante en identifiant les différentes méthodes utilisées, les différentes justifications et les différents moyens de contrôle associés, les différentes difficultés envisagées, les registres de représentation sémiotique et les paradigmes correspondants.

	Natures de procédures de résolutions		Difficultés envisagées	Paradigmes/ Registres
	Méthodes	Justifications et moyens de contrôle		
Q1-a	Développements limités usuels	- Détermination du domaine de définition de la fonction - Vérification de l'existence du développement limité en (0) de la fonction	- Utilisation du développement limité usuel de $X \rightarrow (1 + X)^\alpha$ - Calcul du produit des développements limités	[AI]/ $R_{ANA}$

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation de la formule du produit des développements limités pour préciser l'ordre des développements limités usuels à réaliser</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Troncature</li> <li>- Expression du reste</li> <li>- Précision d'un voisinage sur lequel est défini le développement limité</li> </ul>	
	Formule de Taylor-Young	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Domaine de définition de la fonction</li> <li>- Vérification des conditions nécessaires pour l'utilisation de la formule de Taylor-Young : prouver que la fonction est de classe <math>C^2</math> dans un voisinage de 0</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation de la formule de Taylor-Young</li> <li>- Calcul des dérivées première et seconde de la fonction</li> <li>- Erreur d'ordre calculatoire</li> </ul>	[AI]/ $R_{ANA}$
Q1-b	Formule de Taylor-Young et méthode d'identification terme à terme	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Existence du développement limité</li> <li>- Prouver la fonction est de classe <math>C^2</math> dans un voisinage de 0.</li> <li>- Unicité du développement limité d'une fonction</li> <li>- Prouver l'égalité de deux polynômes afin de donner l'égalité entre ses coefficients</li> <li>- Interprétation du développement limité pour donner les valeurs numériques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation de la formule de Taylor-Young</li> <li>- Méthode d'identification terme à terme</li> <li>- Unicité du développement limité</li> </ul>	[AI] et [AC]/ $R_{ANA}$ - $R_{NUM}$
	Calcul des dérivées première et seconde de la fonction	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vérification que la fonction est de classe <math>C^2</math> dans un voisinage de 0.</li> <li>- Utilisation d'une fonction puissance pour simplifier le calcul des dérivées</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcul de la dérivée de la fonction</li> <li>- Effectuer un calcul numérique</li> </ul>	[AC]/ $R_{ANA}$ - $R_{NUM}$
Q1-c-1	Développements limités	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rappel de la propriété de l'utilisation du développement limité lors de l'étude locale d'une fonction</li> <li>- Interprétation géométrique de l'expression du développement limité</li> <li>- Justification de l'équation de la tangente</li> <li>- Définition de la représentation algébrique de la tangente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation directe du développement limité</li> <li>- Écriture algébrique de l'équation de la tangente</li> </ul>	[AI] et [AG]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
	<i>Détermination de l'équation de la tangente à partir du nombre dérivé</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Écriture de l'équation de la tangente</i></li> <li>- <i>Vérification des valeurs de <math>f(0)</math> et <math>f'(0)</math></i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Calcul de la dérivée première de la fonction en 0</i></li> </ul>	[AC] - [AG]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
Q1-c-2	Développements limités	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rappel de la formule du développement limité</li> <li>- Interprétation des différents termes de l'approximation polynômiale</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation directe du développement limité</li> <li>- Manque de connaissances sur l'utilisation du développement limité</li> </ul>	[AI] - [AG]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$

	<i>Technique du Secondaire par l'étude du signe de la fonction <math>[f(x) - y]</math></i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étude de la fonction <math>[f(x) - y]</math></li> <li>- Justification de la dérivabilité de <math>x \rightarrow [f(x) - y]</math></li> <li>- Interprétation du tableau de signes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur de calcul de la dérivée de la fonction <math>x \rightarrow [f(x) - y]</math></li> <li>- Étude du signe d'une fonction</li> </ul>	[AC] - [AG]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>ALG</sub> - R <sub>NUM</sub> - R <sub>GEO</sub>
Q2-a	Méthode de changement de variable et utilisation des développements limités usuels en 0 de la fonction $X \rightarrow (1 + X)^\alpha$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vérification de l'existence du développement limité</li> <li>- Explication du choix du changement de variable</li> <li>- Contrôle des différentes étapes du calcul</li> <li>- Détermination de l'ordre du développement limité à réaliser</li> <li>- Expression du développement limité avec les deux formulations du reste</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Changement de variable effectué</li> <li>- Utilisation du développement limité de <math>X \rightarrow (1 + X)^\alpha</math></li> <li>- Attribution du changement de variable au reste</li> <li>- Changement de variable dans l'expression du développement limité</li> </ul>	[AC] et [AI]/ R <sub>ANA</sub>
Q2-b	Utilisation de l'expression analytique de la fonction $f$ obtenue en (2-a)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rappel de la formule pour déterminer deux fonctions équivalentes</li> <li>- Justification du calcul de limite du rapport de deux fonctions équivalentes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Confusion entre fonctions équivalentes et fonctions négligeables</li> <li>- Calcul de limite du rapport de deux fonctions</li> <li>- Interprétation de l'expression analytique de la fonction <math>f</math> obtenue en (2-a)</li> </ul>	[AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
Q2-c	Interprétation de l'expression analytique de la fonction $f$ obtenue en (2-a)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation des différents termes de l'approximation polynômiale</li> <li>- Vérification de l'unicité du développement limité</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition de l'équation de l'asymptote et position relative de celle-ci par rapport à la courbe</li> </ul>	[AI] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>
	<i>Technique du Secondaire pour le calcul de limite</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justification du calcul de limite</li> <li>- Contrôle du résultat par le calcul de limite de la fonction <math>x \rightarrow [f(x) - y]</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcul de limite d'une fonction</li> <li>- Interprétation des résultats du calcul de limite</li> </ul>	[AC] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>ALG</sub> -R <sub>GEO</sub>
Q3	Détermination de l'expression analytique de la fonction $f$ en $-\infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justification du choix du changement de variable</li> <li>- Vérification du remplacement de <math> X </math> par <math>(-X)</math></li> <li>- Contrôle des différentes étapes du calcul</li> <li>- Détermination de l'ordre du développement limité à réaliser en 0</li> <li>- Donnée de l'expression analytique de la fonction <math>f</math> obtenue en <math>(-\infty)</math> avec les deux expressions du reste.</li> <li>- Interprétation de l'expression analytique de la fonction <math>f</math> en <math>-\infty</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Changement de variable convenable à effectuer</li> <li>- Utilisation des développements limités usuels en (0)</li> <li>- Calcul du produit de développement limité en (0)</li> <li>- Changement de variable dans l'expression du reste</li> <li>- Interprétation de l'expression analytique de la fonction <math>f</math> en <math>-\infty</math></li> </ul>	[AI] et [AG]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>



	Détermination de l'expression analytique de la fonction $f$ en $-\infty$ et fonctions équivalentes	Explication du choix des procédures à suivre : - Justification du choix du changement de variable - Vérification du remplacement de $ X $ par $(-X)$ - Contrôle des différentes étapes du calcul - Détermination de l'ordre du développement limité à réaliser - Donnée du développement limité avec les deux expressions de reste. - Articulation des différents objets d'approximation lors l'étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$ .	- Difficulté liée au changement de variable. - Utilisation du développement limité en (0) de la fonction $X \rightarrow (1 + X)^\infty$ - Expression du reste prenant en compte le changement de variable - Changement de variable dans l'expression du développement limité en 0 - Définition de fonctions équivalentes - Étude du comportement d'une fonction en $(-\infty)$	[AI] et [AG]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
	<i>Technique du Secondaire par le calcul de limite</i>	- Rappel sur l'étude du comportement d'une fonction en $(-\infty)$ - Justification du calcul de limite - Interprétation des résultats du calcul de limite effectué	- Interprétation des résultats du calcul de limite - La formule de l'étude du comportement d'une fonction vue dans le Secondaire	[AC] et [AG]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$

**Tableau 5-1 : présentation synthétique des procédures de résolutions et des difficultés envisagées lors de la résolution des différentes questions de la situation mathématique**

### II.3.4 Méthode d'analyse des données : mise en œuvre des différentes dimensions de l'outil d'analyse

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous conduisons une analyse des productions des quarante-quatre étudiants en nous attachant à étudier leurs raisonnements produits en réponse aux questions posées. L'analyse de ces raisonnements selon ses composantes (fonction, nature et étude des signes) est réalisée en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. Nous pensons qu'une analyse des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998) nous aide à identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants.

Pour approfondir l'étude didactique des raisonnements, nous effectuerons en complément une analyse de nature sémiotique, en vue d'identifier des dimensions sémantique et/ou syntaxique du raisonnement. Dans notre cas d'étude, la syntaxe fournit des règles de transformation des expressions analytique et algébrique. Dans certains cas, les règles de transformation nécessitent un contrôle sémantique intégrant les interprétations et les

vérifications des différents pas d'un raisonnement. De ce fait, nous pouvons classer les différents pas de raisonnement selon trois catégories :

- le pas de raisonnement de nature syntaxique : l'étudiant utilise directement des formules, théorèmes et définitions issus du répertoire didactique ;
- le pas de raisonnement articulant les dimensions sémantique et syntaxique : l'étudiant interprète et vérifie certaines étapes de sa démarche de raisonnement par l'utilisation des justifications attendues et la mobilisation de moyens de contrôle et de validation ;
- le pas de raisonnement de nature sémantique : l'étudiant donne le résultat soit en produisant un exemple, soit un contreexemple, soit par l'interprétation d'une représentation graphique d'un objet mathématique ou d'une expression analytique ou algébrique.

Notre méthodologie d'analyse des productions des étudiants se déroulera selon trois axes :

- ✓ l'identification de la fonction et de la nature des raisonnements ;
- ✓ la détermination des connaissances et des savoirs mobilisés avec une analyse en termes de répertoire didactique, une analyse des signes et une identification des paradigmes associés ;
- ✓ l'identification des difficultés rencontrées par les étudiants afin de déterminer la nature et l'origine de leurs erreurs.

Concernant les types de raisonnement produits par les étudiants, nous adoptons la caractérisation du point de vue de Gibel (2004) :

- Raisonnement formel complet : dans ce cas, les étudiants donnent du sens à la connaissance mathématique mobilisée. Par exemple, ils formulent le développement limité d'une fonction en précisant son ordre et le voisinage sur lequel il est défini.
- Raisonnement formellement incomplet : dans ce cas, les étudiants produisent des procédures de résolutions qui ne mentionnent pas explicitement les conditions de l'utilisation des connaissances antérieures utilisées (c'est-à-dire la validité des hypothèses nécessaires lors de l'utilisation d'une formule ou d'un énoncé). D'une part, ils ne précisent pas l'intervalle de voisinage sur lequel une approximation locale de la fonction  $f$  est définie. D'autre part, il ne vérifie pas que cette fonction est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 pour appliquer la formule de Taylor-Young afin de déterminer les valeurs de ses dérivées première et seconde en 0.
- Raisonnement erroné : dans ce cas, les étudiants produisent des procédures de résolutions fausses.
- Absence de raisonnement : dans ce cas, les étudiants ne donnent aucune réponse.

### III. Principaux résultats de l'étude

Nous présentons notre analyse de notre corpus constitué des productions de 44 étudiants selon deux points de vue : le premier d'aspect quantitatif et le second d'aspect qualitatif par la distinction de quatre catégories de raisonnement : formel complet, formellement incomplet, erroné et absence. Cette analyse nous permet d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la résolution des problèmes liés au domaine de l'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Le deuxième point de vue est qualitatif, il permet de réaliser une étude didactique beaucoup plus précise en termes de raisonnement en s'attachant à analyser précisément chaque pas de raisonnement.

#### III.1. Analyse des questions (1-a-b-c) liées à l'étude locale de la fonction $f$

L'étude locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 est déterminée à partir de la résolution de trois questions successives. Nous commençons, dans un premier temps par présenter une analyse quantitative des productions des étudiants pour chacune des questions (1-a), (1-b) et (1-c). Ensuite, nous présentons une analyse qualitative détaillée des raisonnements produits par un étudiant en adoptant notre modèle.

##### III.1.1. Analyse de la question (1-a)

Nous présentons les réponses des étudiants dans le tableau en dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	0 %	36 %	62 %	2 %

**Tableau 5-2 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité au voisinage de 0 de la fonction  $f$**

Nous remarquons que tous les étudiants ont produit des raisonnements formellement incomplets lors de l'appropriation du concept de développement limité. D'une part, les étudiants ne parviennent pas à déterminer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 en précisant son domaine de définition. D'autre part, ils ne précisent pas les ordres des développements limités usuels à réaliser. En effet, il faut choisir l'ordre 1 des développements limités des fonctions  $X \rightarrow (x - 1)^{-1}$  et  $X \rightarrow (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  pour déterminer le développement limité de la fonction  $f$ .

Certaines difficultés envisagées présentées dans la partie de l'analyse *a priori* existent dans les productions. Plusieurs étudiants sont confrontés au problème lié à l'utilisation des connaissances actuelles, relevant du Supérieur.

##### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Un tiers des étudiants (36 %) ont déterminé l'expression analytique du développement limité. Cependant ils ne parviennent pas à contrôler à quel ordre ce développement limité doit être réalisé ainsi que son domaine de validité. En outre, un seul étudiant a expliqué son choix pour l'ordre des développements intermédiaires réalisés. Ces étudiants font un usage automatique de la méthode du répertoire didactique du Supérieur, sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. Enfin, un seul étudiant n'a pas essayé de répondre à cette première question.

#### Difficultés liées au niveau technique

Un étudiant a déterminé les développements limités d'ordre 2 des fonctions  $x \rightarrow (x - 1)^{-1}$  et  $x \rightarrow (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  mais il n'est pas capable de calculer le produit de ces représentations analytiques. Nous pensons que ce problème résulte de l'utilisation des propriétés des opérations et de la troncature des développements limités.

Un autre utilise la propriété d'une fonction continue en 0 pour déterminer son développement limité d'ordre 2 au voisinage de ce réel.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Presque la moitié des étudiants (environ 43%) sont confrontés à une difficulté pour employer la formule (\*)<sup>5</sup> du répertoire didactique du Supérieur soit pour déterminer le développement limité de la fonction  $x \rightarrow (x - 1)^{-1}$  - cas de 13 étudiants - soit pour obtenir de  $x \rightarrow (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  pour 6 d'entre eux.

Afin de déterminer le développement limité de  $x \rightarrow (x - 1)^{-1}$ , certains ont remplacé cette expression par l'une des expressions suivantes :

- ✓ le développement limité de la fonction  $x \rightarrow (1 + \frac{1}{x})^{-1}$  au voisinage de 0 ;
- ✓ le développement limité de la fonction  $x \rightarrow (1 + x)^{-1}$  au voisinage de 0 en écrivant l'expression  $[1 + x - \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + o(x^2)]$  ;
- ✓ l'expression algébrique  $(-1 - x)$ . Ils présentent alors la partie polynômiale du développement limité de  $x \rightarrow (x - 1)^{-1}$  à l'ordre 1 au voisinage de 0. L'élimination de l'expression du reste traduit l'existence d'une difficulté liée à la notion d'approximation polynômiale d'une fonction ;
- ✓ le développement limité de  $x \rightarrow (1 - x)^{-1}$  au voisinage de 0. L'erreur commise est due au signe (-) et elle est liée au répertoire didactique du Supérieur. En fait, il y a une

---

<sup>5</sup>  $[(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)]$

confusion entre le développement limité au voisinage de 0 de la fonction  $[x \mapsto (1 - x)^{-1}]$  et le développement limité de la fonction  $x \mapsto (x - 1)^{-1}$  ;

✓ l'expression  $(\frac{1}{x-1})$  : l'étudiant ne donne pas le développement limité demandé ;

Dans le cas de la détermination du développement limité de la fonction  $x \rightarrow (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  :

- un étudiant élimine le terme  $\sqrt{1 + x^2}$  dans le calcul du produit ;
- un étudiant remplace  $\sqrt{1 + x^2}$  par l'expression analytique  $[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)]$  qui est en réalité, le développement limité usuel de  $x \rightarrow \sqrt{1 + x}$  au voisinage de 0.

Ces étudiants ont l'habitude de calculer le développement limité usuel d'une fonction par l'application directe des formules données en classe. L'écriture de la formule (\*), en remplaçant X et  $\alpha$  par les valeurs demandées, pourrait les aider à surmonter ce type de difficulté. Elle leur simplifie la tâche en évitant les erreurs commises.

Il y a des difficultés que nous n'avons pas envisagées dans l'analyse *a priori* comme celles liées au calcul du produit des développements limités et à la troncature. En effet, six étudiants ont déterminé les développements limités usuels attendus mais, ils ont effectué des erreurs lors du calcul de produit de leurs parties polynômiales de degré 2. Celles-ci sont majoritairement liées à la manipulation du signe (-).

Un étudiant vérifie les conditions d'utilisation de la formule de Taylor-Young, mais il n'applique pas cette technique pour déterminer le développement limité de la fonction  $f$ . En effet, il vérifie que  $f$  est de classe  $C^2(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ . Ensuite, il utilise la formule (\*) pour déterminer les développements limités des fonctions  $[x \mapsto (1 - x)^{-1}]$  et  $[x \mapsto (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}]$  au voisinage de 0.

### III.1.2 Analyse de la question (1-b)

Nous résumons les réponses des étudiants dans le tableau ci-dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	9 %	7 %	7 %
	Du Supérieur et du Secondaire	0 %	4 %	
	Autres procédures	0 %	25 %	
	Aucune technique	7 %	41 %	

**Tableau 5-3 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination des valeurs des dérivées première et seconde de la fonction f en 0**

Nous remarquons que 16 % des étudiants ont produit des raisonnements valides. Nous pouvons classer ses raisonnements selon deux catégories :

### Raisonnement explicitement traité

Environ 5% des étudiants ont produit un pas de raisonnement articulant les dimensions sémantique et syntaxique. Ces étudiants ont vérifié que la fonction  $f$  est de classe  $C^2$  au voisinage de 0. D'autres (environ 9%) ont présenté l'expression du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Ensuite, ils ont donné les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .

### Raisonnement traité d'une manière implicite

Certains étudiants (environ 7%) ont donné directement les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0. En effet, ils ne mobilisent aucune technique lors de la présentation de ces valeurs.

#### - **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Nous remarquons qu'il existe des difficultés que nous n'avons pas citées dans notre analyse *a priori* puisque la majorité des étudiants est confronté à un problème lié à l'utilisation de la formule de Taylor-Young pour déterminer les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  à partir du développement limité de la fonction  $f$  en 0.

### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Un quart des étudiants (25 %) a utilisé une méthode n'ayant aucune relation avec le répertoire didactique de la classe. En effet, ils ont calculé les dérivées successives de l'expression du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 afin de donner les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .

### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Environ 41% des étudiants ont donné directement des valeurs fausses de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ . Ainsi, par leurs réponses erronées, on en déduit qu'ils ne donnent pas de sens à l'objet « développement limité » en tant qu'approximation locale de la fonction  $f$  par un polynôme de degré 2, qui peut être obtenu par la formule de Taylor-Young.

### Difficultés liées au niveau technique

Environ 7 % des étudiants ont développé des techniques du répertoire didactique du Secondaire et du Supérieur pour déterminer la valeur de  $f'(0)$ . En effet, ils ont déterminé la limite du taux d'accroissement  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$  en remplaçant la fonction  $f$  par son développement limité au voisinage de 0.

### III.1.3 Analyse de la question (1-c)

Cette question est divisée en deux sous-questions, dont nous analysons indépendamment les productions des étudiants.

#### **III.1.3.a. Analyse de la question liée à la détermination d'une équation de la tangente**

Dans le tableau suivant, nous présentons le résumé des réponses des étudiants pour la détermination d'une équation d'une tangente.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	55 %	16 %	11 %
	Du Secondaire	14 %	2 %	
	Autres procédures	0 %	2 %	

**Tableau 5-4 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination d'une équation de la tangente au point  $(0, f(0))$**

Nous remarquons que plus de deux tiers (69 %) des étudiants ont déterminé une équation par la mobilisation de méthodes soit issues du répertoire didactique du Supérieur, soit issues de celui du Secondaire, soit enfin issues des deux répertoires. Nous pouvons classer ces raisonnements selon deux catégories :

Raisonnement explicitement traité

Certains étudiants (environ 7 %) ont présenté l'expression du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. A partir de cette expression, ils ont donné une équation de la tangente au niveau du paradigme [AG]. De ce fait, ils prouvent l'intérêt de ce concept en tant que nouvel outil pour l'étude locale d'une fonction.

Environ 14 % des étudiants ont développé une méthode du répertoire didactique du Secondaire par le calcul des valeurs de  $f(0)$  et  $f'(0)$  afin de donner l'équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $(0, f(0))$  :  $y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$  dans le paradigme [AC].

Raisonnement traité d'une manière implicite

La moitié des étudiants (environ 48 %) ont donné directement l'équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $(0, f(0))$  sans effectuer aucune procédure calculatoire ou formelle. En réalité, ils ont pris en compte le rôle de l'objet « développement limité » en tant qu'outil pour déterminer une équation d'une tangente à la courbe au point  $(0, f(0))$ .

- **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Pour environ 31 % il y a :

Des difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

11% des étudiants ne parviennent pas à déterminer l'équation de la tangente à partir de l'expression du développement limité.

Un étudiant a donné directement une équation de la tangente sous la forme :  $y = x$ . Cette erreur résulte de l'expression erronée trouvée précédemment lors du calcul du développement limité de  $f$  au voisinage de 0.

Des difficultés liées au niveau technique

Certains étudiants ont présenté la formule de l'équation de la tangente, enseignée dans le Secondaire, sans terminer leur raisonnement et d'autres ont effectué des erreurs de calcul pour les valeurs de  $f(0)$  et  $f'(0)$  lors de l'utilisation des techniques du répertoire didactique du Secondaire dans le paradigme [AC].

#### Des difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Environ 11 % des étudiants sont confrontés à l'égalité entre deux objets mathématiques dont l'un est issu de géométrie (une droite) et l'autre est une écriture algébrique.

### **II.1.3.b. Analyse de la question liée à la précision de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point $(0, f(0))$**

Le résumé des réponses des étudiants est présenté dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	41 %	20 %	14 %
	Du Secondaire	0 %	7 %	
	Aucune	14 %	0 %	
	Autres procédures	0 %	4 %	

**Tableau 5-5 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude de la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$**

Nous remarquons que la majorité des étudiants (environ 55 %) ont produit un raisonnement valide. Nous pouvons classer leurs raisonnements selon deux catégories :

#### **Raisonnements traités d'une manière implicite**

Environ 14 % des étudiants ont donné directement la position de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$  dans le paradigme [AG]. Dans ce cas, ils ont utilisé la formule du répertoire didactique du Supérieur par l'utilisation implicite de la formule (\*\*):

(\*\*) Dans le où la fonction est de classe  $C^2$  au voisinage de 0, si son développement limité au voisinage de 0 est  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2 \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  alors la position relative de la courbe  $C_f$  par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$  est donné par celui du signe de  $a_2$ .

#### **Raisonnements explicitement traités**

Environ 41 % des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique au niveau des paradigmes [AI] et [AG]. Ils ont interprété l'expression du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 et l'étude du signe du terme  $(-x^2)$  afin de préciser la position relative de la tangente par rapport à la courbe représentative au point  $(0, f(0))$ .

#### **- Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**



Près de la moitié des étudiants (environ 45 %) ont utilisé soit une méthode du répertoire didactique du Supérieur, soit une méthode du répertoire didactique du Secondaire.

#### Difficulté liée au niveau des connaissances mobilisables

Environ 7 % des étudiants ont recours au répertoire didactique du Secondaire par l'utilisation de la technique de l'étude du signe de la fonction  $[x \mapsto f(x) - y]$  au niveau de paradigme [AC]. Leurs raisonnements erronés montrent qu'ils ne perçoivent pas l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction.

Un étudiant a utilisé une technique enseignée au niveau du Secondaire et plus précisément, le tableau des valeurs pour étudier le signe de  $[f(x) - y]$ .

Deux étudiants ne parviennent pas à appliquer la méthode du répertoire didactique du Supérieur. En effet, ils ont interprété le premier terme du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 pour préciser la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

#### Difficultés liées au niveau technique

Un étudiant a mené une étude selon le signe de la variable  $x$  en distinguant deux cas :  $x$  positif ou  $x$  négatif pour préciser la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

Un autre a déterminé la position relative de la courbe par rapport à sa tangente à partir de son équation algébrique au niveau de paradigme [AC] puis [AG].

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Environ 14 % des étudiants ne parviennent pas à mobiliser leurs connaissances et leurs savoirs pour étudier la position relative de la courbe  $C_f$  par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

Nous remarquons qu'environ 4% ont utilisé une méthode qui n'a aucune relation avec le répertoire didactique de la classe. En effet, ils se sont appuyés sur l'équation algébrique de la tangente pour étudier son signe selon le signe de la variable (positif ou négatif).

#### III.1.4. Analyse qualitative des questions (1-a-b-c) liées à l'étude locale de la fonction $f$

L'objectif principal de cette étude qualitative est de conduire une analyse plus fine des raisonnements produits en termes de répertoire didactique, de paradigmes, de registres de représentation sémiotique et de signes afin mettre en lumière les difficultés des étudiants.

Nous choisissons de conduire une analyse détaillée des raisonnements produits par quatre étudiants afin d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées liées à l'appropriation des objets d'approximation locale d'une fonction et son usage raisonné lors de l'étude locale d'une

fonction. Dans cette partie, nous présentons les productions d'un étudiant ayant effectué une rétroaction sur son raisonnement. En effet, il a rédigé deux productions liées à l'étude locale de la fonction. L'analyse des autres productions est présentée en annexe (cf. Annexe 5-1).

Productions d'un étudiant

L'étudiant utilise des astuces du calcul formel et algébrique. Il est confronté au problème de la justification de son raisonnement. De plus, il n'a pas répondu à la troisième question.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1-a} \quad (1) \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\
 (2) \sqrt{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
 (3) \frac{1}{1-x} = (x - 1)^{-1} \\
 (4) = (1 - x)^1 \\
 (5) = 1 + (-x) + o(x) \\
 (6) f(x) = \frac{x}{1-x+o(x)} [1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] \\
 (7) f(x) = \frac{x+o(x^3)}{1-x+o(x)} \\
 \mathbf{1-b} \quad (8) f'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' \\
 (9) = \frac{1-x-(xx-1)}{(1-x)^2} \\
 (10) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\
 (11) = \frac{1}{(1-x)^2} \\
 (12) f'(0) = 1 \\
 (13) f''(x) = \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]' \\
 (14) = [(1-x)^{-2}]' \\
 (15) = -2(1-x)^{-3} \\
 (16) = \frac{-2}{(1-x)^3} \\
 (17) \text{ Donc } f''(0) = -2
 \end{array}$$

**Figure 5-1** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant développe sa méthode pour déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Ensuite, le calcul numérique des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  est réalisé, dans le paradigme [AC], afin de donner les valeurs en 0.

➤ **Identification du niveau de registres de représentation sémiotique**

La méthode utilisée pour déterminer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 mobilise le registre analytique. Ensuite, le calcul des dérivées première et seconde s'effectue dans les registres analytique et numérique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'utilisation du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)] Ces étapes traduisent la mise en application de la formule (\*) du répertoire didactique du Supérieur et plus précisément celui des formules.

$$(*) (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

Cette connaissance mobilisable amène l'étudiant à obtenir une réponse valide de l'expression du développement limité de la fonction  $x \rightarrow (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  au voisinage de 0.

[(3)-(4)-(5)] Détermination du développement limité au voisinage de 0 de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ . Ces étapes du calcul formel mettent en évidence la difficulté de l'étudiant à faire usage de la formule du développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 dans le cas où  $\alpha=-1$ .

La première erreur, dans l'étape (3), est liée à l'application d'une propriété enseignée dans le Secondaire ( $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ). La deuxième erreur, dans l'étape (4), traduit ses difficultés à utiliser les propriétés des fonctions écrites sous la forme :  $x \mapsto (a + x)^n$ . Cette dernière erreur amène l'étudiant à obtenir un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction  $x \rightarrow (1 - x)^1$  qui n'a pas de sens.

[(6)-(7)] Décomposition de la fonction  $f$  sous la forme d'un quotient de développements limités. Cette décision sur l'objet (fonction) traduit la difficulté de l'étudiant dans la mise en application des propriétés des développements limités et notamment du produit et du quotient.

[(8)-(9)-(10)-(11)-(12)-(13)-(14)-(15)-(16)-(17)] Détermination des valeurs numériques de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  dans le paradigme [AC]. Ces étapes du calcul des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  pour obtenir les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  traduisent la mobilisation exclusive d'une technique du Secondaire Ainsi, il néglige l'apport du développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction dans les paradigmes [AI] et [AC]. Ces pas de raisonnement de nature syntaxique traduisent une difficulté à travailler dans le paradigme [AI].

A ce stade, il ne termine pas son raisonnement. Il va le développer d'une autre manière sans barrer le précédent. Cette décision traduit la rétroaction de l'étudiant et la mise en évidence d'un contrôle sur son raisonnement, de manière autonome. Cette deuxième partie de production prouve que l'étudiant est conscient du fait que son premier raisonnement est erroné.

<p><b>1-a)</b> (18) <math>\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}</math>  (19) <math>\sqrt{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)</math>  (20) <math>\frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}</math>  (21) <math>= 1 - x + x^2 + o(x^2)</math>  (22) <math>\frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1} = x(1 - x + x^2 + o(x^2)) \cdot (1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))</math>  (23) <math>= [x - x^2 + x^3 + o(x^3)] \cdot [1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)]</math></p>
---

(24) $f(x) = x - x^2 + o(x^3)$ <b>1-b)</b> (25) $f'(x) = 1 - 2x$ (26) Donc $f'(0) = 1$ (27) $f''(x) = -2$ (28) Donc $f''(0) = -2$ <b>1-c)</b> (29) $\Delta: y = x$ (30) $C_f$ est en dessous de $\Delta$ . (31) Car $-x^2 < 0$
---

**Figure 5-2** : suite de l'extrait proposé dans la figure 5-1

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

Dans une première étape, l'étudiant rédige sa méthode pour déterminer la représentation analytique du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 au niveau du paradigme [AI]. En réalité, il réalise des calculs formel et algébrique dans le paradigme [AC]. Ensuite, il calcule les dérivées première et seconde de ces expressions algébriques pour enfin déterminer les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  au niveau du paradigme [AC]. Dans une dernière étape, il donne l'équation de la tangente et sa position relative par rapport à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$  au niveau du paradigme [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étude locale de la fonction au voisinage de 0 est développée dans des registres analytique, algébrique, géométrique et numérique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'utilisation du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(18)-(19)] Détermination du développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ . L'étudiant a recours au répertoire didactique du Supérieur par l'utilisation du développement limité usuel (\*) dans le cas où  $\alpha$  vaut  $\frac{1}{2}$  pour obtenir finalement le développement limité de la fonction [ $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ].

[(20)-(21)] Détermination du développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ . L'erreur commise, dans l'étape (21), exprime sa difficulté à traduire la formule (\*) puisqu'en réalité, il est en train de déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :  $x \mapsto (1+x)^{-1}$ .

[(22)-(23)-(24)] Décision de calculer le produit des développements limités d'ordre 2 par distributivité puis de faire émerger un polynôme de degré deux. Dans ces étapes, l'étudiant mobilise une propriété du répertoire didactique du Supérieur, et plus précisément du registre

des formules et de la technique de troncature. L'erreur de signe (-) est une conséquence de la détermination de l'expression fautive du développement limité de la fonction  $x \mapsto (1 - x)^{-1}$ .

L'étudiant ne contrôle pas l'ordre des développements réalisés et ne précise pas le voisinage de 0 sur lequel ils sont définis. Ces erreurs résultent de l'utilisation automatique des énoncés du registre des formules.

[(25)-(26)-(27)-(28)] Décision de calculer les dérivées successives de la partie polynômiale du développement de  $f$  au voisinage de 0 afin d'en déduire les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ . Il utilise alors une méthode qui n'a aucune relation avec le répertoire didactique de la classe. Ce qui prouve l'existence d'une difficulté liée au sens de la connaissance mathématique mobilisée (le concept du développement limité).

[(29)] Présentation de l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$ . L'étudiant met en évidence, d'une manière implicite, la propriété qui fournit l'équation de la tangente au point  $(0, f(0))$ , à partir du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. L'erreur vient de l'expression erronée du développement limité de la fonction  $f$  d'ordre 2 au voisinage de 0 obtenue en étape (24).

[(30)-(31)] Détermination des positions relatives de la tangente par rapport à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$ . Dans l'étape (31), l'étudiant vérifie son raisonnement par la mise en évidence de la formule du répertoire didactique du Supérieur. De ce fait, il donne l'intérêt du développement limité en tant qu'outil d'approximation locale d'une fonction. Il a produit un pas de raisonnement de nature sémantique.

### III.2. Analyse des questions (2-a-b-c) liées à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $+\infty$

Nous conduisons une analyse des productions des étudiants selon les trois questions proposées.

#### III.2.1. Analyse de la question (2-a)

Nous présentons les réponses dans le tableau suivant :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	0 %	62 %	20 %	18 %

**Tableau 5-6 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$**

Nous remarquons qu'aucun étudiant n'a précisé un voisinage sur lequel est défini le développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Par contre, la majorité ont trouvé

l'expression analytique cherchée au niveau du paradigme [AC] puis [AI] en ayant produit des pas de raisonnement de nature syntaxique. En outre, un seul étudiant a validé sa technique de changement de variable. Par ailleurs, tous les étudiants ont utilisé l'expression du reste  $[o(\frac{1}{x})]$  au lieu celle de  $[\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})]$  donnée dans la question.

- **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Environ 62 % des étudiants ont produit un raisonnement formellement incomplet par l'absence de la précision du voisinage. Ils sont confrontés au problème de l'utilisation de la formule (\*) des développements limités usuels au voisinage de 0 du répertoire didactique du Supérieur.

Certains étudiants ont écrit l'expression de la fonction  $f$  sous la forme d'une expression en fonction de  $(\frac{1}{x})$ . L'erreur commise résulte de la technique du changement de variable dans le cas où  $(\frac{1}{x} \rightarrow 0, \text{ quand } x \rightarrow +\infty)$ .

Difficultés liées au niveau technique

Environ 18 % des étudiants n'ont pas la capacité à mobiliser leurs connaissances et leurs savoirs pour déterminer l'expression de la fonction  $f$  en  $+\infty$ , sous la forme des développements limités des fonctions au voisinage de 0.

Un étudiant a déterminé les développements limités des fonctions au voisinage de 0 mais il ne parvient pas à calculer leur produit.

Certains ont commis des erreurs lors du calcul du produit des développements limités au voisinage de 0. Ils ont effectué *des erreurs d'ordre calculatoire*.

Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (l'expression du reste)

Plusieurs étudiants ont utilisé la technique du changement de variable ainsi que des développements limités usuels au voisinage de 0. Mais, dans les étapes suivantes de leur raisonnement, ils se heurtent à des problèmes liés à l'expression du reste soit en omettant son expression, soit en l'exprimant sous la forme de  $[o(x)]$  au lieu de  $[o(\frac{1}{x})]$ .

Aucun étudiant n'a précisé un voisinage de 0 lors de l'utilisation des développements limités usuels.

Un étudiant a effectué le changement de variable adéquat et en ayant recours à ses connaissances du Supérieur pour trouver les développements limités au voisinage de 0 des fonctions  $x \mapsto (1-x)^{-1}$  et  $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ . Mais pour le calcul de leur produit, il élimine l'expression du reste et ne calcule que le produit des parties polynômiales.

Le calcul, par un étudiant, de l'expression de la fonction  $[x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)]$  en  $(+\infty)$  au lieu de celle de la fonction  $[x \mapsto f(x)]$  traduit une difficulté liée à la notion de voisinage pour lequel un développement limité est défini.

### III.2.2 Analyse de la question (2-b)

Nous présentons les réponses des étudiants dans le tableau en dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	27 %	5 %	25 %
	Aucune	36 %	0 %	
	Autres procédures	0 %	7 %	

**Tableau 5-7 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination des fonctions équivalentes en  $(+\infty)$**

La plupart des étudiants ne parvient pas à justifier leur raisonnement. Leur production relève du paradigme [AI]. Par ailleurs, certains étudiants ont justifié leur raisonnement par le calcul des limites des différents termes de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  afin d'obtenir une fonction équivalente.

En outre 25% des étudiants, parmi ceux qui ont donné des réponses valides, ont justifié leur raisonnement par le calcul des limites des différents termes de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Par ailleurs, un seul étudiant a vérifié son raisonnement en utilisant la définition de deux fonctions équivalentes au voisinage d'un réel.

Environ 36% des étudiants ont donné directement une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

### **Identification des différents de difficultés rencontrées par les étudiants**

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (le développement limité)

Un quart des étudiants n'ont pas la capacité à trouver la technique adéquate pour déterminer une fonction équivalente.

#### Difficultés liées au niveau technique

Certains produisent des erreurs du calculus de limites de fonctions : erreurs d'ordre calculatoire.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Environ 7% des étudiants ont utilisé une procédure de calcul de limite de la fonction  $(x \mapsto \frac{f(x)}{x})$  afin de donner une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

### III.2.3. Analyse de la question (2-c)

Nous présentons le résumé des réponses des étudiants dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	7 %	0 %	27 %
	Du Supérieur et du Secondaire	30 %	18 %	
	Autres procédures	0 %	16 %	
	Aucune	2 %	0 %	

**Tableau 5-8 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$**

À partir de notre corpus, environ 39 % des étudiants ont donné une équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Parmi ceux-ci (7 %) ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique en utilisant une méthode du répertoire didactique du Supérieur dans le paradigme [AI] puis [AG].

D'autres se réfèrent à des formules du répertoire didactique du Secondaire et du Supérieur afin de déterminer l'équation de l'asymptote. En effet, ils remplacent la fonction  $f$  par son expression en  $(+\infty)$  ou sa fonction équivalente lors du calcul des limites des fonctions  $[f(x), \frac{f(x)}{x} \text{ et } (f(x) - x)]$ . Ces étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature syntaxique qui s'inscrit dans les paradigmes [AC], [AI] et [AG].

Un étudiant a produit un pas de raisonnement de nature sémantique en effectuant une simple vérification. Cette technique relève du paradigme [AC].

Enfin, un étudiant a donné directement l'équation de l'asymptote dans le paradigme [AG].

#### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Certains étudiants (environ 34 %) ont produit des raisonnements erronés. À partir de leurs démarches de raisonnement, nous pouvons identifier plusieurs types de difficultés.

Un nombre assez-important des étudiants (environ 61%) sont confrontés aux difficultés liées à l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en  $(+\infty)$ .

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Environ 27 % n'ont pas la capacité à mobiliser leurs connaissances lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

Les erreurs commises, par certains (environ 8%), traduisent l'existence de difficultés liées à l'utilisation de la méthode du répertoire didactique du Secondaire lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en  $(+\infty)$ . Par exemple, un étudiant considère que le calcul de limite de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  est suffisant pour connaître son comportement.



Certains ont calculé les limites des fonctions ( $x \mapsto f(x)$  et  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ ). Ils ne parviennent pas à interpréter les expressions ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ). En effet, trois parmi eux considèrent que la fonction «  $f$  admet une branche parabolique asymptotique de direction :  $y = 1$  ».

#### Difficultés liées au niveau technique

Un étudiant a utilisé la fonction équivalente pour étudier la monotonie de la fonction  $f$ .

D'un point de vue langagier, un autre étudiant a employé l'expression « tangente » au lieu de l'expression « l'asymptote oblique ».

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (fonctions équivalentes)

Un étudiant est confronté à un problème pour employer la formule des fonctions équivalentes du répertoire didactique du Supérieur. De plus, il a utilisé la fonction équivalente et sa dérivée afin d'étudier la monotonie de  $f$ .

#### III.2.4. Analyse qualitative de la question (2-a-b-c)

Comme précédemment, afin de trouver des éléments de réponse sur notre questionnaire sur la nature et l'origine des erreurs commises par les étudiants lors de l'utilisation des notions d'approximations locales d'une fonction dans l'étude de son comportement en  $(+\infty)$ , nous conduisons une analyse détaillée des raisonnements produits par quatre étudiants. Dans cette partie, nous présentons l'analyse des productions d'un étudiant et les autres sont fournies en annexe (cf. annexe 5-2).

##### - **Productions d'un étudiant**

Nous présentons la production d'un étudiant qui est confronté au problème lié à la conceptualisation du développement limité, et notamment à l'expression du reste et la notion de voisinage.

2-a)

$$(1) f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$$

$$(2) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$(3) = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{y} \cdot (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4) (1-y)^{-1} = 1+y+(-1)(-1-1)(-\frac{y^2}{2})$$

$$(5) (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}y^2$$

$$(6) f(x) = (1+y+y^2) \cdot (1+\frac{1}{2}y^2) \cdot \frac{1}{y}$$

$$(7) = (1+y+y^2) \cdot (\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y)$$

$$(8) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2}y + y + \frac{1}{2}y^3 + 1$$

$$(9) = \frac{1}{y} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} + y + 1$$

$$(10) \quad f(x) = x + \frac{3}{2x} + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ DL}(+\infty)$$

2-b) (11)  $f(x) \sim x + 1$ , en  $+\infty$

2-c) (12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\frac{3}{2x}}{x}$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{3}{2x^2} \right)$$

$$(15) = 1$$

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{3}{2x} - x \right)$$

$$(17) = 1$$

(18) La courbe  $C_f$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y = x + 1$  en  $+\infty$

**Figure 5-3** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant commence son raisonnement par la recherche d'une formulation de la fonction  $f$  permettant d'appliquer la technique du changement de variable dans le paradigme [AI]. Ensuite, il donne les parties polynômiales des développements limités au voisinage de 0 des fonctions  $[y \mapsto (1 - y)^{-1} \text{ et } y \mapsto (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}]$  en omettant les expressions des restes. Dans une troisième étape, il calcule le produit des deux précédentes expressions par la fonction  $(y \mapsto \frac{1}{y})$  afin d'obtenir celle de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Par la suite, il en déduit une fonction équivalente à  $f$  en  $(+\infty)$  dans le paradigme [AI]. Et finalement, il étudie le comportement asymptotique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  au niveau des paradigmes [AC], [AI] et [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant développe une méthode algébrique lors de la détermination de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  dans le registre algébrique. Ensuite, il détermine son expression, ainsi qu'une fonction équivalente par la mobilisation du registre analytique. Et finalement, il donne le comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  dans les registres analytique, numérique et géométrique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'utilisation du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)-(3)] Décomposition de la fonction  $f$  en un produit de fonctions afin de l'exprimer en mettant en facteur le réel  $x$ . Cette transformation de l'expression de la fonction  $f$  conduit à l'écrire en produit de fonctions de la variable  $\frac{1}{x}$ . Dans l'étape (3), l'étudiant effectue le changement  $y = \frac{1}{x}$  sans le mentionner explicitement et sans repérer le domaine d'étude associé

à cette nouvelle variable. La formulation produite par l'étudiant amène à un pas de raisonnement de nature syntaxique.

[(4)-(5)] L'étudiant travaille à la mise en application de la formule du développement limité du répertoire didactique du Supérieur (\*) pour  $\alpha = -1$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$(*) (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

En revanche, il néglige l'expression du reste et calcule le produit des parties polynômiales. Cette erreur commise est due à l'existence d'une difficulté liée à la conceptualisation de la notion de développement limité.

[(6)-(7)-(8)-(9)] Décision de calculer les produits de  $\frac{1}{y}$  par des polynômes déduits des développements limités au voisinage de 0 des fonctions  $y \mapsto (1 - y)^{-1}$  et  $y \mapsto (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ . L'élimination de l'expression du reste dans toutes les étapes de son calcul vient de la difficulté liée à la notion de voisinage sur lequel est défini un développement limité. Le passage de l'étape (8) à celle (9) prouve l'utilisation de la formule de la troncature.

[(10)] Décision de présenter l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

Dans le passage de l'étape (9) à l'étape (10), il y a un glissement du résultat puisque l'expression est donnée dans l'énoncé de la situation mathématique. En outre, il désigne cette expression par le développement limité en  $(+\infty)$ . Par ailleurs, l'étudiant utilise une expression du reste sous la forme  $[o(\frac{1}{x})]$ .

[(11)] Détermination des fonctions équivalentes. Ce pas de raisonnement est valide de nature syntaxique. L'étudiant ne donne aucune justification de son raisonnement.

[(12)-(13)-(14)-(15)-(16)-(17)-(18)] Articulation de technique du répertoire didactique du Secondaire et du Supérieur. L'étudiant remplace la fonction  $f$  par sa fonction équivalente pour le calcul de limites. À partir de ce raisonnement valide, il ne considère pas l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  en tant qu'outil permettant l'étude de son comportement en l'infini. Cependant, il perçoit l'intérêt de la notion de fonctions équivalentes pour effectuer un calcul de limite.

### ***III.3. Analyse des questions liées à l'étude du comportement de la fonction en $(-\infty)$***

#### **III.3.1 Analyse de la question 3**

Dans cette partie, nous conduisons une analyse des productions des étudiants concernant l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  en identifiant les types de techniques mobilisées dans leurs raisonnements valides et erronés. Nous présentons le résumé de cette analyse dans le tableau en dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	0 %	7 %	12 %	44 %
	Du Secondaire et du Supérieur	0 %	0 %	28 %	
	Autres procédures	0 %	0 %	9 %	

**Tableau 5-8 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$**

Rares sont les étudiants (environ 7 %) ayant recours à la même démarche que celle suivie dans les questions précédentes (2-a-b-c). En effet, ils cherchent l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , ensuite, ils déterminent une fonction équivalente et finalement ils déterminent l'équation de l'asymptote. Par ailleurs, un seul étudiant parmi eux a utilisé la technique étudiée dans le Supérieur pour donner une équation de l'asymptote oblique.

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Nous remarquons que certains étudiants sont confrontés à des difficultés particulières non envisagées dans l'analyse *a priori*.

#### Difficultés liées aux connaissances disponibles

Près de la moitié des étudiants (44%) ont effectué des erreurs pour déterminer le comportement asymptotique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Ces erreurs traduisent l'existence des difficultés liées soit à l'utilisation de la méthode du Secondaire, soit à l'utilisation de méthodes inadéquates pour ce type de tâche.

#### Difficultés liées aux connaissances mobilisables (le développement asymptotique)

Nous remarquons que lors de la détermination l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , plusieurs étudiants sont confrontés au problème lié à l'utilisation de la formule du répertoire didactique du Supérieur.

Certains étudiants se sont appuyés sur l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  afin de déterminer son expression en  $(-\infty)$  :

- ✓ environ 5 % ont remplacé  $x$  par  $(-x)$  dans cette expression analytique. Parmi eux, un étudiant a reproduit le même raisonnement pour prouver que «  $f$  admet une branche parabolique en  $(-\infty)$  d'équation :  $y = -x$  » ;
- ✓ un étudiant a calculé l'opposé de l'expression trouvée. Ensuite, il a suivi le même cheminement que celui développé dans les questions précédentes afin de déterminer le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  ;
- ✓ environ 5 % des étudiants ont considéré que la fonction  $f$  est paire ;

- ✓ certains ont utilisé l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  pour étudier son comportement en  $(-\infty)$  ;
- ✓ d'autres se sont référés à une technique enseignée dans le Secondaire en s'appuyant sur une expression fautive de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

### Difficultés liées au niveau technique

Certains étudiants n'ont pas la capacité à mobiliser la technique vue dans le Secondaire pour l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ . En effet, ils ont utilisé des techniques qui n'ont aucune relation avec le répertoire didactique de classe. Ils ont recours soit à l'étude de la parité de la fonction  $f$ , soit au calcul de limite de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  pour préciser son comportement.

Environ 5 % des étudiants ont considéré que la fonction  $f$  admet le même comportement en  $(-\infty)$  qu'en  $(+\infty)$ .

#### III.3.2 Analyse quantitative de la question (3)

Nous conduisons une analyse détaillée des raisonnements produits par six étudiants selon le modèle d'analyse développé dans le chapitre 3 de la partie théorique. Cette analyse nous permet d'étudier la nature et l'origine des erreurs liées au domaine d'approximation d'une fonction. Dans cette section, nous choisissons de présenter l'analyse des productions d'un étudiant et les autres sont présentées dans l'annexe (cf. Annexe 5-3).

#### Production d'un étudiant

Cet étudiant est confronté aux difficultés liées à l'appropriation du concept de développement limité et à son usage raisonné lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction.

(1)	D'après la question a), $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
(2)	$f(x) = -x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}\varepsilon\left(-\frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$
(3)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$
(4)	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}\varepsilon\left(-\frac{1}{x}\right)\right]$
(5)	$= -\infty$
(6)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{-x}$
(7)	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{-x}$
(8)	$= 1$
(9)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(-x) + x]$
(10)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 - \frac{3}{2x} + x\right] = 1$
(11)	Car $\frac{3}{2x} \rightarrow 0$
(12)	$C_f$ admet une asymptote oblique d'équation : $y = x + 1$ en $(-\infty)$

**Figure 5-4 : extrait d'une copie d'étudiant**

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

Dans une première étape, l'étudiant donne l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  dans le paradigme [AI]. Ensuite, il étudie le comportement de cette fonction pour donner l'équation de l'asymptote oblique, objet de nature géométrique, se plaçant ainsi dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant articule des registres analytique, algébrique, numérique et géométrique lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

➤ **Du point de vue de fonctions des raisonnements, de l'utilisation du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Utilisation de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Cette étape préfigure l'organisation de raisonnement de l'étudiant. Il s'est appuyé sur cette expression analytique pour obtenir celle de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

[(2)] Décision sur un objet (fonction). L'étudiant utilise le changement de la variable  $x$  en la variable  $(-x)$  dans l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  afin de déterminer son expression en  $(-\infty)$ . L'étudiant, par son raisonnement erroné, est confronté à un problème lié à la conceptualisation de la notion de développement limité. L'écriture de  $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  pourrait lui simplifier la tâche, évitant ainsi l'erreur commise en étape (2).

L'écriture de l'expression du reste sous la forme,  $[-\frac{1}{x} \varepsilon(-\frac{1}{x})]$ , dans l'expression du reste du développement asymptotique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , traduit l'existence d'une difficulté liée au travail dans le domaine de la topologie.

[(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)-(9)-(10)-(11)-(12)] Utilisation de la méthode enseignée dans le Secondaire lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

Dans l'étape (3), l'étudiant a effectué un changement de variable : pour  $x \rightarrow -\infty, (-x) \rightarrow +\infty$ . L'expression trouvée finalement pour l'asymptote est inexacte car l'expression de  $f$  en  $-\infty$  est erronée.

Nous pouvons donc dire que l'étudiant est confronté à une difficulté liée au travail au niveau du paradigme [AI].

### **Conclusion du chapitre 5**

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous avons conduit une analyse des productions de 44 étudiants en termes de raisonnement, par la prise en compte de ses

composantes (fonction, nature et sémiotique), du niveau de mise en fonctionnement des connaissances, par une identification des niveaux de registres et des paradigmes correspondants et les dimensions sémantique et/ou syntaxique. Ces analyses, selon des points de vue quantitatif et qualitatif, nous permettent d'identifier la nature et l'origine des erreurs liées à la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction.

L'analyse des raisonnements produits par les étudiants en termes de savoirs et de connaissances mobilisés nous permet de les classer dans ce tableau :

	Raisonnements		Difficultés rencontrées	Paradigmes/ Registres
	Méthodes	Justifications et moyens de contrôle		
Q1-a	Développements limités usuels	- Vérification que la fonction est de classe $C^2$ au $V(0)$ pour assurer l'existence d'un développement limité	- Utilisation du développement limité de $x \rightarrow (1+x)^\alpha$ - Calcul du produit de développements limités en $(0)$ - L'expression du reste - Précision d'un voisinage pour lequel est défini développement limité - Précision de l'ordre du développement limité - Problème de justification de raisonnement - Troncature du développement limité - Problème lié au sens de la connaissance mathématique mobilisée (développements limités)	[AI]/ R <sub>AN</sub>
Q1-b	Développement limité et formule de Taylor-Young	- Vérification la fonction est de classe $C^2$ au $V(0)$	- Utilisation d'une méthode fautive - Présentation directe des résultats - Problème de justification des raisonnements - Problème d'interprétation de l'expression du développement limité	[AI]- [AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>ALG</sub>
	Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ par l'utilisation d'un développement limité au $V(0)$ pour donner $f'(0)$		- Utilisation de techniques vues dans le Secondaire - Calcul de limite - Utilisation d'un développement limité au $V(0)$ pour le calcul de limite	[AI]- [AC]/ R <sub>NUM</sub> - R <sub>ANA</sub>
Q1-c-1	Développements limités au $V(0)$		- Interprétation de l'expression d'un développement limité - Utilisation directe du développement limité - Problème de justification de raisonnement - Égalité de deux objets : objet de géométrie et son équation algébrique	[AG]/ R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>
	Détermination de l'équation de la tangente à partir du nombre dérivé	- L'équation algébrique de la tangente	- Calcul numérique de $f(0)$ et $f'(0)$	[AC]- [AG]/ R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>
Q1-c-2	Développements limités au $V(0)$	- Formule de Taylor-Young	- Problème de justification du raisonnement - Utilisation directe du développement limité	[AI]- [AG]/

			- Manque de connaissances sur l'utilisation des développements limités - Définition de l'objet tangente	R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>
	<i>Technique du Secondaire par l'étude du signe de la fonction <math>x \rightarrow [f(x) - y]</math></i>		- Étude du signe de $[f(x) - y]$ - Tableau des valeurs - Étude du comportement d'une fonction au niveau du Secondaire - Utilisation d'une méthode fautive	[AC]- [AG]/ R <sub>ALG</sub> - R <sub>GEO</sub>
Q2-a	- Méthode de changement de variable et développements limités au $V(0)$ de la fonction $X \rightarrow (1 + X)^\alpha$		- Changement de variable au niveau de la fonction - Utilisation du développement limité usuel de $X \rightarrow (1 + X)^\alpha$ - Prise en compte de changement de variable dans l'expression du reste - Changement de variable dans l'expression du développement limité - Calcul de produit de développements limités - Élimination de l'expression du reste	[AC]- [AI]/ R <sub>ANA</sub>
Q2-b	L'expression du développement limité de la fonction $f$ en $(+\infty)$	- Calcul de limite - Définition de fonctions équivalentes	- Problème de justification du raisonnement - Utilisation directe de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
Q2-c	L'expression du développement limité de la fonction $f$ en $(+\infty)$		- Utilisation directe de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - Problème d'interprétation de l'expression du développement limité de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - Problème de justification du raisonnement	[AG]- [AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
	Techniques du niveau du Secondaire pour l'étude du comportement d'une fonction par l'utilisation de l'expression de son développement limité en $(+\infty)$ ou d'une fonction équivalente pour le calcul de limite	- Calcul de limite	- Méthode de l'étude du comportement d'une fonction en l'infini - Étude de la monotonie d'une fonction - Équation d'une asymptote	[AG]- [AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
Q3	L'expression du développement limité de la fonction $f$ en $(-\infty)$		- Remplacement de $x$ par $(-x)$ dans l'expression de développement asymptotique de $f$ en $(+\infty)$ - Calcul de l'opposé de l'expression de développement asymptotique de $f$ en l'infini - Parité de la fonction $f$ - Utilisation de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$	[AI]- [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
	Technique du registre du Secondaire par		- Calcul de limite - Interprétation des résultats du calcul de limite	[AI]- [AG]/ R <sub>NUM</sub> -



	l'utilisation de l'expression du développement limité de la fonction $f$ en $(-\infty)$ pour le calcul limite		- Formulaire issu de l'étude du comportement d'une fonction enseignée dans le Secondaire	R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
--	---	--	--	--

**Tableau 5-10 : présentation synthétique des raisonnements des étudiants et de leurs difficultés lors de la résolution des différentes questions de la situation mathématique**

Cette analyse nous permet de conclure que :

- le travail de la majorité des étudiants s'inscrit principalement dans le paradigme [AC] et plus rarement dans le paradigme [AI]. En effet, ils ne donnent pas l'intérêt de la relation de comparaison de fonctions, du développement limité et de la formule de Taylor-Young en tant que nouvelle connaissance pour réaliser l'étude locale d'une fonction au voisinage de 0 et préciser son comportement asymptotique en  $(+\infty)$  et en  $(-\infty)$  ;
- la plupart des étudiants sont confrontés à un problème lié à la dialectique sémantique/syntaxique puisqu'ils n'effectuent aucune justification et ne mobilisent aucun moyen de contrôle de leurs raisonnements. Ils n'ont pas la capacité à prévoir l'ordre du développement limité à réaliser. Ils font appel automatiquement à la formule du répertoire didactique du Supérieur sans en comprendre le sens. Cette utilisation des connaissances et des savoirs nous amène à conclure qu'il n'y a pas réellement une compréhension fine du concept d'approximation locale d'une fonction ;
- certains étudiants rencontrent des difficultés liées à l'interprétation de la notion de voisinage, soit en ne mentionnant pas l'expression du reste, soit en effectuant un changement de variable sans expliciter le domaine d'étude de cette fonction. Ces erreurs traduisent l'existence de problèmes liés à l'étude d'une fonction au voisinage d'un point ;
- aucun étudiant n'a précisé de voisinage lors de la détermination des développements limités de la fonction  $f$  au voisinage de 0, ainsi que les développements asymptotiques en  $(+\infty)$  et  $(-\infty)$ .

L'analyse de notre corpus nous permet d'identifier l'origine et la nature des erreurs effectuées par les étudiants selon trois catégories :

- Erreurs d'ordre cognitif et conceptuel : liées à la connaissance mathématique mobilisée. D'un côté, l'étudiant est confronté à un problème lié au travail s'inscrivant dans le paradigme [AI] par l'usage de façon automatique des formules du répertoire didactique du Supérieur sans comprendre le sens du concept d'approximation locale d'une fonction. Dans ce cas, il est confronté à une difficulté liée à l'interprétation de la notion de voisinage et la précision de l'ordre du développement limité à réaliser. Par exemple, il ne contrôle pas l'ordre des développements limités qu'il convient de réaliser, il ne vérifie pas le domaine de validité, et par conséquent il ne justifie pas les raisons pour lesquelles il doit mobiliser ses connaissances du répertoire didactique du Supérieur. D'un autre côté, l'étudiant est confronté à une difficulté liée au travail s'inscrivant dans le paradigme [AG] par la mobilisation des registres algébrique et géométrique. Dans ce cas, l'erreur commise est due à la mobilisation de méthodes erronées du Secondaire pour l'étude de la position relative de la tangente et de la courbe en un point, ainsi que l'étude du comportement d'une fonction en l'infini.
- Erreurs d'ordre technique : liées à l'existence d'une rupture conceptuelle qui s'opère entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur lors de l'introduction d'une nouvelle notion liée au domaine de l'étude d'une fonction. Par exemple, l'étudiant fait appel aux techniques du répertoire didactique du Secondaire et il néglige le rôle du concept de développement limité en tant que nouvelle connaissance inhérente à l'approximation locale d'une fonction lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. Ce type d'erreur résulte de changements de paradigmes lors de la transition Secondaire/Supérieur. Dans ce cas, l'étudiant préfère inscrire plutôt son travail dans les paradigmes [AC] ou [AG] que dans le paradigme [AI] lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini.
- Erreurs d'ordre calculatoire : liées à l'utilisation des règles du calcul algébrique et formel dans les paradigmes [AI] ou [AC]. Dans ce cas, il s'agit principalement d'erreurs notamment liées au calcul du produit de développements limités, etc.

Nous présentons le résumé de nos résultats selon les points de vue quantitatif et qualitatif dans le tableau suivant :

Erreurs d'ordre		Cognitif et conceptuel	Technique	Calculatoire
Appropriation du	Détermination de développement limité	91 %	0 %	9 %

développement limité	Détermination de l'expression du développement asymptotique de la fonction $f$ en $(+\infty)$	80 %	0 %	2 %
	Détermination de l'expression du développement asymptotique de la fonction $f$ en $(-\infty)$	47 %	0 %	2 %
Utilisation du développement limité	Détermination des valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$	25 %	41 %	0 %
	Détermination d'une équation de la tangente	5 %	16 %	16 %
	Détermination de la position relative de la courbe $C_f$ par rapport à sa tangente au point $(0, f(0))$	28 %	11 %	5 %
	Détermination de fonctions équivalentes en $(+\infty)$	7 %	0 %	5 %
	Étude du comportement de la fonction $f$ en $+\infty$	30 %	30 %	5 %
	Étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$	7 %	65 %	2 %

**Tableau 5-11 : nature et origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la mise en œuvre des objets d'approximation locale d'une fonction**

L'analyse de notre corpus constitué des 44 productions des étudiants selon deux points de vue quantitatif et qualitatif nous permet de conclure que la plupart d'entre eux ont produit des pas de raisonnements principalement de nature syntaxique articulant les approches algébrique et analytique. Par ailleurs, une majorité des étudiants ont été confrontés à des problèmes de justification sémantique des pas de leur raisonnement. D'une part, ils font un usage automatique des méthodes et des formules de répertoire didactique du Supérieur sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. D'autre part, ils n'ont même pas pris en compte l'ordre des développements limités à réaliser. Les erreurs éprouvées par ces étudiants traduisent l'existence d'un obstacle lié à la connaissance mathématique mobilisée.

Cette analyse expérimentale, en termes de raisonnements, nous permet de conclure qu'un nombre assez-important d'étudiants ne donnent pas de sens aux notions de la relation de

comparaison de fonctions, de développement limité, ainsi qu'à la formule de Taylor-Young en tant que nouvelle technique pour résoudre les problèmes proposés. De plus, ils ont du mal à articuler ces différents objets mathématiques en vue de réaliser l'étude locale d'une fonction au voisinage de 0 et l'analyse de son comportement asymptotique en l'infini. Ces problèmes résultent de leurs difficultés à effectuer un changement de paradigme, et notamment du paradigme [AC] au paradigme [AI]. En effet, lors de la résolution des questions traitées au niveau du Secondaire, certains étudiants reviennent à des méthodes déjà utilisées au Lycée mais qui ne sont pas les méthodes les plus intéressantes et les plus puissantes dont ils disposent désormais. L'étude montre que les étudiants ont eu beaucoup de difficulté à s'approprier les nouveaux outils, les nouvelles formulations et les nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction dans le paradigme [AI]. De ce fait, nous pouvons conclure l'existence d'une rupture conceptuelle qui s'opère entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur. Dans le Secondaire, on travaille sur les fonctions algébriques et transcendantes dans les paradigmes [AC] et [AG]. Au niveau Supérieur, on étudie les écritures syntaxiques d'une approximation locale d'une fonction (transcendante ou algébrique) dans toute sa complexité inhérente au paradigme [AI]. Il y a un véritable *obstacle d'ordre conceptuel* pour s'approprier cette notion d'approximation locale.

Par ailleurs, l'utilisation automatique des méthodes et des formules du répertoire didactique du Supérieur constitue vraiment une difficulté liée à la compréhension d'un objet mathématique. Dans notre cas, le concept d'approximation locale d'une fonction n'a de sens que par la précision du voisinage et des conditions d'utilisation, notamment le voisinage d'un point et par la capacité d'identifier l'ordre du développement limité de la fonction à réaliser. Certains étudiants occultent complètement la notion de voisinage. Nous pouvons donc dire qu'il existe un *obstacle d'ordre topologique et fonctionnel* lié à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction.

Nous sommes en mesure d'identifier et de classer des obstacles relatifs à l'utilisation, en situation, du concept d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique en première année (PC) selon deux catégories :

- Obstacle didactique : l'étudiant est confronté aux difficultés liées au contrat didactique. D'une part, les choix didactiques de l'enseignante qui a privilégié les activités dans les registres analytique, algébrique et géométrique au détriment du registre graphique. D'autre part, nous remarquons qu'il existe des erreurs qui relèvent d'un *obstacle d'ordre culturel*, par le recours des étudiants aux techniques enseignées dans le Secondaire lors de l'étude locale

d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. Ces erreurs résultent du passage du travail dans les paradigmes [AC] et [AG] aux paradigmes [AI], [AG] et [AC].

- Obstacle épistémologique : l'étudiant est confronté au problème lié au travail mathématique dans le paradigme [AI] lors de l'appropriation de la notion d'approximation locale d'une fonction, et notamment au niveau du couple : Topologie / Analyse fonctionnelle. L'utilisation automatique des formules du répertoire didactique du Supérieur traduit l'incompréhension d'un concept mathématique. Dans notre cas, la notion d'approximation locale d'une fonction n'a de sens que par la précision d'un voisinage du point considéré et la capacité d'identifier l'ordre du développement limité à réaliser. Ce type *d'obstacle d'ordre cognitif et conceptuel* est lié à la connaissance mathématique mobilisée.

Certains de ces obstacles de nature épistémologique et didactique, liés à l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction, sont dus au changement de paradigme lors de la transition Secondaire/Supérieur. En effet, dans le Secondaire, les élèves sont habitués à développer des calculs formels et algébriques afin de construire des représentations graphiques lors de l'étude d'une fonction. De ce fait, ils mobilisent les différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) de l'objet « fonction » dans les paradigmes [AC] et [AG]. Dans le Supérieur, ces élèves travaillent sur les différentes écritures syntaxiques des concepts d'une approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique au niveau du paradigme [AI]. Ensuite, ils utilisent ces objets en tant que nouvelle technique, soit dans le domaine du calcul de limite d'une fonction au niveau du paradigme [AI], soit dans le domaine de l'étude locale d'une fonction à partir de la détermination d'une équation de la tangente et de la précision de sa position relative par rapport à sa courbe en un point au niveau du paradigme [AG], soit dans le domaine de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction par la détermination d'une équation de l'asymptote au niveau du paradigme [AG]. De ce fait, ces étudiants mobilisent les représentations algébrique, analytique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction au niveau des paradigmes [AI] et [AG].

Par ailleurs, la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction est liée à ses représentations graphiques qui sont totalement absentes dans les productions des étudiants et dans le photocopié de cours de l'enseignante. Le programme officiel de la première année (PC) invite les enseignants à introduire une nouvelle notion à partir de l'utilisation de ses différentes représentations, ainsi qu'apprendre en considération des connaissances antérieures des étudiants.

Nous pensons que les obstacles liés à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence de situations mathématiques dont la résolution nécessite un usage raisonné des représentations graphiques en lien avec les autres registres de

représentation sémiotique. Afin de surmonter ces obstacles de natures épistémologique, didactique et culturelle, nous envisageons de construire et de mettre en œuvre une ingénierie didactique de développement permettant l'accès au sens des notions de la relation de comparaison d'une fonction, de développement limité et de la formule de Taylor-Young par l'articulation de ses différentes représentations dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

La proposition des situations à dimension adidactique mobilisant les différents registres (graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique) pourraient permettre *a priori* de dépasser certaines difficultés et mieux comprendre le concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Pour ces raisons, nous construisons une ingénierie didactique de développement intégrant deux situations à dimension adidactique lors de l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique ». Les raisons et les conditions de l'élaboration et la mise en œuvre de cette ingénierie, ainsi que l'analyse de la séquence seront présentées dans le chapitre suivant.

## Chapitre 6

### Élaboration et mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement

#### Partie A : présentation globale de l'ingénierie didactique de développement expérimentée en première année de classes préparatoires aux études d'ingénieurs

##### I. Les raisons et les conditions de l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement (IDD)

###### *I.1. Les raisons de l'élaboration de l'IDD*

A l'issue de notre étude historique et épistémologique du concept d'approximation locale d'une fonction, rédigée de façon détaillée dans le chapitre 2, nous constatons que la genèse historique de ce concept mathématique est liée à une étude mathématique spécifique qui trouve sa source dans le registre des représentations graphiques d'une fonction. Nous avons décrit dans le tableau (2-6) figurant au chapitre 2 les différentes étapes inhérentes à la genèse et au développement du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un point. Certains mathématiciens ont produit des raisonnements, dont la validité dépend de l'évolution des connaissances mathématiques dans la société savante, et que ses évolutions successives se traduisent par l'existence d'obstacles épistémologiques en lien avec l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction. Ces obstacles peuvent résulter :

- soit d'une rupture d'ordre épistémologique par le changement du paradigme « cinématique » à un paradigme « géométrique » et ensuite « analytique » ;
- soit d'une rupture d'ordre cognitif liée à la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction ;
- soit des difficultés liées à l'articulation de connaissances et de savoirs relatifs à la topologie et à l'Analyse fonctionnelle.

Dans une réflexion d'ordre institutionnelle, précisément selon le programme de première année (PC), les enseignants universitaires, sont invités, dans le cadre de l'enseignement-apprentissage de l'Analyse, à articuler les différentes représentations sémiotiques (graphique, géométrique, analytique et algébrique) d'un concept mathématique afin d'en faciliter

l'appropriation et l'usage raisonné. Dans le Secondaire, lors de l'étude d'une fonction, les élèves sont fréquemment conduits à construire sa représentation graphique. Cependant lors de l'analyse du polycopié de cours de l'enseignante, que nous avons présenté au chapitre 4, nous avons constaté que le registre graphique n'est que très rarement convoqué durant l'élaboration et l'utilisation du concept d'approximation locale d'une fonction, contrairement aux préconisations des programmes de première année (PC). En conclusion, les programmes de quatrième année secondaire (SC-E) et de première année (PC), insistent sur l'articulation des différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique lors de l'introduction des nouvelles notions dans le domaine de l'Analyse. Par ailleurs, les enseignants sont invités à aider les étudiants à rédiger un raisonnement en vue d'une rédaction autonome et à justifier la validité et la pertinence d'un raisonnement mathématique en articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres.

Notre étude de l'origine et la nature des erreurs effectuées par des étudiants confrontés à une situation mathématique « classique », présentée dans le chapitre 5, nous ont permis d'identifier des obstacles de nature épistémologique et didactique, liés à l'usage et à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

Ces études épistémologique, institutionnelle et didactique nous ont conduits à formuler les hypothèses suivantes :

- Les obstacles liés à l'appropriation et à l'usage des objets d'approximation locale d'une fonction résultent, en grande partie de l'absence de situations mathématiques dévolues aux étudiants, nécessitant un usage raisonné de leurs représentations graphiques et une articulation des différents registres de représentation sémiotique.
- Le logiciel dynamique de géométrie « Geogebra » constitue un environnement adéquat du travail au niveau de l'articulation des différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction.

Afin de valider ou de réfuter nos hypothèses, nous envisageons de réaliser une expérimentation visant l'introduction du concept d'approximation locale d'une fonction, par l'utilisation de ses différentes représentations (graphique, géométrique, algébrique, numérique et analytique), ainsi que par la prise en considération des connaissances antérieures des étudiants. Nous formulons les questions de recherche suivantes :

- Est-il possible d'organiser un enseignement de la notion de développement limité autour d'une problématique qui rende compte de l'articulation des approches graphique,



géométrique, algébrique et analytique afin d'introduire cet objet mathématique en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction ?

- Est-ce que dans le cas de l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement, l'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe permet d'identifier leurs conceptions afin d'étudier la nature et l'origine de leurs difficultés inhérentes à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) ?

Nous pensons que l'importance accordée à la formulation des procédures produites en situation à dimension adidactique devrait nous offrir la possibilité d'identifier l'origine et la nature des erreurs commises lors de l'appropriation de ces objets mathématiques.

### ***1.2 Les conditions de l'élaboration de l'IDD***

Une recherche, qui s'apparente à un travail collaboratif avec un enseignant de classe de première année (PC), nous permettra de confronter des étudiants à des situations à dimension adidactique.

La construction de l'ingénierie didactique de développement a reposé sur une collaboration étroite avec l'enseignante. Dans une réflexion d'ordre didactique, notre projet de recherche est bâti sur une collaboration étroite avec une enseignante ayant la responsabilité de deux classes de première année (PC). L'enseignante expérimentée, madame Rajia Slim, de l'Institut Préparatoire de Tunis (IPEIT) a accepté de participer à cette recherche en didactique de l'Analyse depuis 2019. Notre collaboration s'inscrit dans le cadre d'un projet qui s'est déroulé de 2019 à 2020, portant sur l'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction. L'enseignante a accepté de modifier sa séquence initiale d'enseignement « classique » en intégrant, dans le déroulement du chapitre « Analyse asymptotique », deux situations à dimension adidactique en vue de permettre aux étudiants d'accéder aux raisons de savoir, autrement dit de donner du sens à ce concept par une appropriation et un usage raisonné par confrontation à des situations mathématiques. L'enseignante a pris part activement à l'élaboration d'un enseignement dans lequel deux situations à dimension adidactique offrent aux étudiants la possibilité de mettre en œuvre leurs connaissances et leurs savoirs relatifs à leur répertoire didactique pour accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction. En revanche, le rôle de l'enseignante est très spécifique lors de la gestion des situations à dimension adidactique. En effet, les étudiants ne sont pas familiers de ce type de situation, notamment parce qu'ils ne sont pas habitués à coopérer et à travailler ensemble au sein d'un groupe afin de résoudre un problème mathématique. Par conséquent, l'enseignante doit parvenir

à articuler le travail des étudiants au sein de chaque groupe et la construction des connaissances et des savoirs qu'elle souhaite institutionnaliser.

Ceci nous a amené, à élaborer conjointement avec l'enseignante, deux situations à dimension adidactiques au sens de la théorie des situations didactiques (Mercier, 1995 ; Bloch, 1999). Nous avons choisi de donner à chacune de ces situations un rôle central dans la construction du concept d'approximation locale d'une fonction présenté au cours d'une séquence comportant deux séances dans deux classes de première année de (PC).

## **II. Les focales de l'étude réalisée et la méthodologie mise en œuvre**

### ***II.1. L'importance accordée au modèle d'analyse des raisonnements***

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous conduisons une analyse des raisonnements produits par les étudiants confrontés à des situations à dimension adidactique. En utilisant le modèle d'analyse du raisonnement, développé dans le chapitre 3 de la partie théorique et introduit par Bloch et Gibel (2011) et (Gibel, 2018), nous conduirons une analyse des connaissances et des savoirs mobilisés par les étudiants. Cette étude a aussi pour finalité d'étudier la mise en fonctionnement du niveau de connaissances des étudiants (Robert, 1998), d'identifier la dimension sémantique et/ou syntaxique de chaque pas de raisonnement, et de déterminer les différents paradigmes de l'Analyse standard associés ainsi que les registres de représentation sémiotique correspondants.

### ***II.2. Méthodologie mise en œuvre***

#### **II.2.1. Sujets**

Lors de l'expérimentation conduite dans ses classes, l'enseignante a un rôle très spécifique. Elle a co-construit le chapitre « Analyse asymptotique » dans lequel ces deux situations à dimension adidactique offrent aux étudiants la possibilité :

- d'accéder aux raisons de savoir par le travail dans le paradigme [Analyse infinitésimale] en articulant ses différentes représentations ;
- d'accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction à partir du fonctionnement de leurs connaissances antérieures par leurs actions sur le milieu et de la visualisation de ses représentations graphiques « dynamiques » ;
- de donner du sens à ce concept par une appropriation et un usage raisonné par confrontation à des situations mathématiques.

Dans une première étape, en collaboration avec l'enseignante, nous construisons une situation 1 en vue de permettre aux étudiants de déterminer eux-mêmes les approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction via ses approximations polynômiales successifs d'ordre

1, 2 et 3 par l'utilisation de fonctions négligeables. Cette situation est mise en œuvre dans la deuxième séance du chapitre « Analyse asymptotique ».

Dans une deuxième étape, nous construisons une situation 2 permettant aux étudiants de percevoir l'intérêt de la définition généralisée du concept de développement limité en évaluant leur capacité à articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction dans les différents registres (graphique, géométrique, analytique et algébrique).

Durant l'année universitaire 2019-2020, elle enseigne à deux classes de première année (PC), (PC1) et (PC2), chacune comportant 24 étudiants. Compte-tenu des contraintes éditoriales et temporelles, dans le cadre de la thèse, nous présenterons une analyse didactique de l'expérimentation proposée à une seule classe de (PC) : (PC1).

## II.2.2. Instrumentation

### II.2.2.1 Les situations mathématiques objets d'études

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous conduisons une analyse *a priori* des situations mathématiques mises en jeu lors de l'expérimentation.

#### - **Situation 1**

La situation 1 est proposée dans la deuxième séance du chapitre « Analyse asymptotique » suite à l'enseignement des notions de fonctions dominées, de fonctions équivalentes et de fonctions négligeables. Les objectifs principaux de la proposition de cette situation consistent à :

- permettre aux étudiants de déterminer eux-mêmes les approximations locales d'une fonction via ses approximations polynômiales ;
- introduire la notion de développement limité à partir des connaissances antérieures des étudiants ;
- mobiliser les différentes représentations algébrique, analytique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction.

De ce fait, l'enseignante met les étudiants en situation de réinvestir leurs connaissances afin de leur permettre d'établir des liens avec les fonctions négligeables.

#### - **Situation 2**

L'enseignement de la formule de Taylor-Young est illustré par une application proposée oralement en classe. Cet exemple traite le cas d'une fonction admettant des approximations polynômiales au voisinage de deux différents points dans des registres algébrique, analytique, graphique, géométrique et numérique. Suite à cette mise en situation, l'enseignante introduit la définition généralisée du concept de développement limité au voisinage d'un point. Ensuite,

elle propose la situation 2 aux 8 trinômes de la classe (PC). Les objectifs principaux de cette situation sont de permettre aux étudiants :

- d'étudier l'approximation locale d'une fonction par l'usage de ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique ;
- de donner l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction ;
- de déterminer des développements limités d'une fonction d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 dans le cas où cette fonction est prolongeable par continuité en ce réel ;
- d'articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction ;
- de mobiliser les différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept de développement limité lors de son appropriation et de son usage ;
- d'étudier le cas d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être deux-fois dérivable en ce réel.

#### II.2.2.2 Les données recueillies avant la mise en œuvre de l'ingénierie

L'enseignante a planifié son enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » de manière à programmer deux séances afin de proposer les deux situations en classe. Elle a accepté d'interagir avec nous et de suivre nos recommandations inhérentes à la gestion des phases au cours desquelles les étudiants sont confrontés à des situations à dimension adidactique en privilégiant, pour répondre à leurs éventuelles questions, le recours à une guidance faible (cf. chapitre 3). Elle organise le processus de la transposition didactique des savoirs à enseigner aux savoirs enseignés de ce chapitre en suivant le déroulement prévu de notre expérimentation.

Par ailleurs, elle a déposé une demande d'autorisation de filmer les séances et de nous permettre de participer à l'expérimentation en classe. L'accord du responsable administratif de l'Institut Préparatoire (IPEIT) nous permet d'enregistrer les séances en des vidéos et de prendre des photos.

L'enseignante nous a remis son polycopié de cours du chapitre « Analyse asymptotique ».

Le volume horaire d'enseignement de l'Analyse est de quatre heures hebdomadaires. Durant la matinée, l'enseignante dispense ses cours à ses classes de (PC) (PC2 et PC1) lors de deux séances consécutives.

L'enseignante commence le chapitre « Analyse asymptotique » par l'introduction du concept de la relation de comparaison des suites et des fonctions. A la fin de cette séance, elle informe ses étudiants des deux classes de (PC) qu'ils vont travailler en groupes hétérogènes, plus précisément en trinômes, pendant les deux prochaines séances dans l'amphi.

Les étudiants ont accepté que nous récupérions la photocopie de leurs productions après que l'enseignante les ait informés des enjeux et du cadre de la recherche.

Notre expérimentation se déroule pendant la deuxième et la troisième séance de l'enseignement de ce chapitre.

### II.2.2.3 Les données recueillies lors de la mise en œuvre de l'ingénierie

L'enseignante commence la séance par un rappel sur les notions de fonctions dominées, de fonctions négligeables, de voisinage d'un réel et de fonctions équivalentes. Ensuite, elle distribue elle-même à chaque étudiant l'énoncé de la situation 1 afin de leur laisser d'avantage du temps pour travailler en trinôme. Tous les documents sont autorisés. Quand les étudiants rencontrent des difficultés pour répondre aux questions et que leurs échanges ne leur permettent pas de les surmonter alors ils ont la possibilité de demander l'aide auprès de l'enseignante pour pallier les insuffisances du milieu auquel ils sont confrontés. Cette dernière, par une guidance faible, le plus souvent sous la forme d'un questionnement adéquat, pourra les amener à envisager une interprétation de leurs productions ou à prendre de nouvelles décisions. Après quarante minutes, l'enseignante ramasse les copies des trinômes. Par la suite, un représentant de chaque groupe vient au tableau pour rédiger la réponse du trinôme à l'une des questions posées. L'intervention de l'enseignante dépend de la nature de la réponse, valide ou erronée, rédigée par le représentant du trinôme. Son rôle principal est de susciter le débat au sein de la classe quant à la pertinence, la validité et la complexité du raisonnement produit. Ensuite, elle fait usage du logiciel « Geogebra » pour réaliser les représentations graphiques de la fonction et de ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0. À partir des illustrations graphiques et des productions des étudiants, elle introduit la formule de Taylor-Young. Ensuite, elle illustre ce théorème par un exemple traité oralement reposant sur la mobilisation des représentations algébriques et graphiques du concept de développement limité déduit de la formule de Taylor-Young. À partir de cette application, l'enseignante donne la définition généralisée de la notion de développement limité d'une fonction au voisinage d'un point. Dans une deuxième étape de cette expérimentation, elle propose la situation 2 aux groupes de la classe en conservant les trinômes initiaux. Ensuite, l'enseignante ramasse les copies contenant les productions des trinômes, elle corrige au tableau les différentes questions par des échanges oraux avec toute la classe sur les différentes procédures mobilisées. Ceci amène l'enseignante à introduire la propriété d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être deux-fois dérivable en ce réel.

II.2.3 Programmation des différentes étapes de l'IDD : tableau de synthèse de la progression de la séquence et les différents supports recueillis

Nous présentons les principales phases de l'ingénierie didactique de développement, dans le tableau ci-dessous, en distinguant les connaissances et les savoirs mobilisés, ainsi que les différents supports recueillis lors de la mise en œuvre de cette expérimentation.

<b>Phases de l'ingénierie de développement</b>	<b>Séances du chapitre « Analyse asymptotique »</b>	<b>Déroulement</b>	<b>Supports recueillis</b>
Phase préliminaire	1 <sup>ère</sup> séance (14 janvier 2020)	Enseignement du concept de la relation de comparaison des suites et des fonctions	Polycopié de cours de l'enseignante
Mise en œuvre de l'ingénierie	2 <sup>ème</sup> séance (15 janvier 2020)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rappel des définitions des notions de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes et de fonctions dominées ;</li> <li>- Illustration de ces notions par des d'exemples ;</li> <li>- Utilisation du logiciel Geogebra pour la construction graphique des fonctions afin d'expliquer la notion de voisinage ;</li> <li>- Proposition de la situation 1 aux trinômes ;</li> <li>- Correction des différentes questions au tableau par des représentants des trinômes ;</li> <li>- Intervention de l'enseignante lors de la production d'un raisonnement erroné ;</li> <li>- Usage du logiciel Geogebra pour la construction graphique des fonctions étudiées (la fonction et ses approximations polynômiales au voisinage de 0) ;</li> <li>- Introduction de la formule de Taylor-Young.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vidéos du déroulement de la séance ;</li> <li>- Photos des productions des étudiants au tableau</li> <li>- Photos des rédactions de l'enseignante au tableau ;</li> <li>- Copies des 8 groupes d'étudiants contenant les réponses à la situation 1.</li> </ul>
	3 <sup>ème</sup> séance (16 janvier 2020)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rappel de la formule de Taylor-Young</li> <li>- Discussion orale sur une activité : étude d'une fonction admettant des approximations polynômiales au voisinage de deux différents points par l'utilisation du logiciel Geogebra ;</li> <li>- Définition généralisée du développement limité ;</li> <li>- Proposition de la situation 2 aux trinômes ;</li> <li>- Correction de la situation 2 par l'enseignante au tableau.</li> <li>- Propriété d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 sans être deux-fois dérivable en ce réel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Vidéos enregistrés lors du déroulement de la séance</li> <li>- Photos des productions de l'enseignante au tableau ;</li> <li>- Travaux des 4 groupes enregistrés avec le dictaphone ;</li> <li>- Copies des 8 groupes d'étudiants contenant les</li> </ul>

			réponses à la situation 2
	Quatre séances de "cours" et "travaux dirigés"	- Enseignement des propriétés du développement limité (troncature, parité, produit, somme, quotient, etc.) ; - Enseignement de développement limité en tant qu'outil lors du calcul de limite (FI), étude locale d'une fonction et son comportement asymptotique.	Polycopié de cours de l'enseignante
Analyse des effets de l'ingénierie sur les apprentissages des étudiants	Début février	Proposition de test à toute la classe	- Copies de 24 étudiants

**Tableau 6-1 : le déroulement de l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » et la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement**

### **II.3. Méthodologie d'analyse des données**

Notre étude en théorie des situations didactiques des effets de cette ingénierie de développement sur l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction en un réel repose principalement sur une confrontation des analyses *a priori* des situations, réalisées d'un point de vue « classique » (au sens de la théorie des situations didactiques) et prolongées par une analyse *a priori* des formes de raisonnements, et des analyses *a posteriori* détaillées conduites pour chacune des situations expérimentées. Cet écart entre les phénomènes attendus, du point de vue des raisonnements, des connaissances et des savoirs mobilisés, et les phénomènes observés par une analyse fine des données recueillies nous permettra de valider ou de réfuter nos hypothèses de recherche et ainsi d'apporter des éléments de réponses étayés à nos questions de recherche.

Notre méthodologie repose sur la prise en compte des quatre composantes du modèle d'analyse de raisonnement, développé dans le troisième chapitre de la partie théorique qui est déduit du modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011) et de Gibel (2018), lors de l'analyse des différents types de raisonnement élaborés par les étudiants dans une situation à dimension adidactique. Par ailleurs, dans ce type de situation les niveaux de milieux où se situent les étudiants sont : le milieu objectif ( $M_2$ ), le milieu de référence ( $M_1$ ) et le milieu d'apprentissage ( $M_0$ ).

Cette méthodologie d'analyse du raisonnement par la mise en jeu de ses composantes (fonctions, dimension sémiotique, nature et justification) associée à chaque niveau de milieux  $M_2$ ,  $M_1$  et  $M_0$  est réalisée selon ces quatre axes :

- Fonctions des raisonnements : dans chaque trinôme les étudiants vont interagir entre eux pour décider des actions à réaliser sur les objets mathématiques, effectuer et contrôler le calcul de limites de fonctions, de différence de deux fonctions et les rapports des fonctions, réaliser et contrôler le calcul des valeurs des dérivées successives de la fonction  $f$  en 0 et établir l'existence et l'unicité de la fonction  $f_2$ , l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

- Niveau d'utilisation des symboles, des signes et des représentations sémiotiques : les étudiants vont devoir mobiliser des signes et des symboles pour effectuer des calculs de différences et de rapports des fonctions, ainsi que pour modéliser l'écart entre la fonction étudiée  $f$  et son approximation polynômiale au voisinage de 0 afin de déterminer la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de ce réel.

- Utilisation et caractérisation du répertoire didactique : les étudiants vont mobiliser leurs connaissances antérieures relatives au système générateur et au registre des formules. Et plus précisément, ils vont utiliser des méthodes de calcul de limites des fonctions, le calcul des dérivées successives de la fonction  $f$ , l'étude de la position relative des courbes et l'étude des représentations graphiques des fonctions.

- Nature de la justification d'un raisonnement (les dimensions sémantique et/ou syntaxique) : les étudiants vont justifier leurs raisonnements en vérifiant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'usage des signes et des différentes formules du répertoire didactique. Par exemple, lors de la démonstration de l'unicité d'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0, ils vont faire l'hypothèse de l'existence d'une autre approximation polynômiale d'ordre 2 de cette fonction au voisinage de ce réel afin de déduire la contradiction avec les hypothèses de la situation mathématique.

Dans une première étape, nous conduisons une analyse quantitative des productions de l'ensemble des trinômes pour chacune des questions posées dans la situation. Ensuite, grâce à l'enregistrement vidéo réalisé, nous mettons la focale sur l'analyse des productions des groupes qui ont demandé l'aide auprès de l'enseignante afin d'identifier la nature et l'origine de leurs difficultés relatives à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction. Dans ce cas, nous choisissons de conduire une analyse qualitative détaillée des raisonnements produits par certains de ces groupes avant et après l'intervention de l'enseignante, ainsi que de certaines étapes relatives à la formulation de leur procédure.

Nous pouvons classer les raisonnements produits par les étudiants selon deux catégories :

- Raisonnement en situation adidactique : dans ce cas, les étudiants décident de rédiger leur procédure de résolution en effectuant la synthèse des échanges au sein du trinôme sans



demander l'aide auprès de l'enseignante. Ils sont d'accord sur l'élaboration d'une procédure commune.

- Raisonnement en situation à dimension adidactique : dans ce cas, les étudiants ne parviennent pas à se mettre d'accord sur l'élaboration d'une procédure de résolution commune au trinôme et ils vont demander l'aide auprès de l'enseignante. Les étudiants décident de modifier leurs procédures de résolution en s'efforçant de prendre en compte, autrement dit de tirer parti des échanges avec l'enseignante. En effet, dans ce cas, ils produisent un raisonnement qui résulte d'une guidance faible de l'enseignante.

Les étudiants ont produit des calculs et des raisonnements en ayant recours à leur répertoire didactique. Selon le contenu des questions des situations 1 et 2, les actions de l'étudiant agissant ont pour objet de produire un pas du raisonnement de différentes natures :

- Pas de raisonnement de nature syntaxique : dans ce cas, l'étudiant va mobiliser des règles du calcul formel et algébrique, des propriétés, des formules et des théorèmes pour produire le pas de raisonnement objet d'étude.

- Pas de raisonnement de nature sémantique : dans ce cas, l'étudiant va produire un pas de raisonnement en justifiant et/ou en interprétant les expressions analytiques du calcul de limites des fonctions ou des illustrations graphiques. Par exemple, il va interpréter les nouvelles représentations analytiques de la fonction  $f$  et plus précisément, ses approximations locales d'ordre 2 et 3 au voisinage de 0 afin de préciser la position relative de deux courbes.

- Pas de raisonnement articulant les dimensions sémantique et syntaxique : dans ce cas, l'étudiant va justifier et vérifier les conditions de l'utilisation d'une technique du répertoire didactique.

Concernant les types de raisonnements produits par les étudiants, nous adoptons la caractérisation du point de vue de Gibel (2004) :

- Raisonnement formel complet : dans ce cas, les étudiants donnent du sens à la connaissance mathématique mobilisée. Par exemple, ils formulent le développement limité d'une fonction, précise l'ordre de développement limité et le voisinage sur lequel il est défini.

- Raisonnement formellement incomplet : dans ce cas, les étudiants produisent des procédures de résolutions qui ne mentionnent pas explicitement les conditions de l'utilisation des connaissances antérieures utilisées (c'est-à-dire la validité des hypothèses nécessaires lors de l'utilisation d'une formule ou d'un énoncé). D'une part, ils ne précisent pas l'intervalle de voisinage sur lequel une approximation locale de la fonction  $f$  est définie.

D'autre part, il ne vérifie pas que cette fonction est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 pour déterminer les valeurs de ses dérivées successives en ce réel.

Raisonnement erroné : dans ce cas, les étudiants produisent des procédures de résolutions fausses.

Absence de raisonnement : dans ce cas, les étudiants ne donnent aucune réponse.

L'objectif principal de cette analyse des raisonnements produits par les trinômes consiste à identifier leurs difficultés rencontrées lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0 en première année (PC).

Nous conduisons une analyse des raisonnements produits par les 8 groupes en distinguant les différents types de techniques mobilisées lors de la résolution des questions proposées dans chacune des deux situations. Nous mettons en jeu les différents paradigmes de l'Analyse<sup>6</sup> (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015) afin d'identifier les techniques mobilisées par les étudiants lors de la résolution des différentes questions proposées.

## **Partie B : analyses didactiques de la situation 1**

### **I. Présentation et analyse *a priori* de la situation**

Dans une première étape, nous présentons la construction de la première situation par la présentation de son origine et de ses enjeux en précisant les principaux objectifs de sa mise en œuvre en classe.

Notre recherche réalisée dans le cadre de la théorie des situations didactiques, développée par Brousseau (1998), s'appuie essentiellement sur une analyse *a priori* « classique » de la situation, intégrant les plans mathématique et didactique, ainsi que sur une analyse en termes de niveaux de milieux. Cette dernière comprend une analyse ascendante et une analyse descendante en référence au schéma de la structuration du milieu, selon Margolinas (2002) et Bloch (1999, 2006). Ces analyses *a priori* vont nous être particulièrement utiles afin de déterminer les formes et les fonctions des raisonnements, valides et erronés, que les étudiants sont susceptibles de produire par confrontation aux différents milieux.

#### ***1.1. Présentation de l'origine et des enjeux de la situation mathématique***

Dans cette partie, nous présentons les raisons et les enjeux de l'élaboration de la situation 1. D'une part, à partir du programme officiel, nous devons formuler explicitement les objectifs de

---

<sup>6</sup> Ils ont distingué trois types de paradigme de l'enseignement de l'Analyse du niveau collège au niveau Supérieur : Le paradigme [Analyse Calculatoire] noté (AC), le paradigme [Arithmetico-Géométrique] noté (AG) et le paradigme [Analyse Infinitésimale] noté (AI).

l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel. D'autre part, nous devons prendre en considération les connaissances antérieures de l'étudiant afin d'introduire ce concept mathématique par l'articulation de ses différentes représentations.

L'approche curriculaire recommande que le concept d'approximation locale d'une fonction soit enseigné au sein du chapitre « Analyse asymptotique », faisant suite à l'enseignement des concepts de la relation de comparaison des fonctions et des suites (programme officiel, 2016). Ces concepts sont construits à partir des définitions et des propriétés de fonctions dominantes, de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes et étayées par des exemples. De ce fait, l'enseignante introduira le concept d'approximation locale d'une fonction lors de la deuxième séance en s'appuyant sur les propriétés et sur les définitions précédemment formulées.

Par ailleurs, en référence au programme officiel, l'objectif principal de l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » consiste à ce que :

*« ... On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison. (...) En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels. »*  
(PO, 2016, p.12)

De ce fait, l'enseignante mettra les étudiants en situation de réinvestir leurs connaissances mobilisées afin de leur permettre d'établir des liens avec les fonctions négligeables.

Au niveau Secondaire, les élèves étudient l'approximation locale d'une fonction à partir de la détermination d'une équation de la tangente et de sa position relative par rapport à la courbe représentative de la fonction en un point donné, en articulant les registres algébrique, analytique, graphique, géométrique et numérique. La notion de tangente a été présentée en mettant en relation deux représentations différentes : la première est géométrique - il s'agit d'une droite définie par sa pente au point  $(x_0, f(x_0))$  - la deuxième est algébrique, c'est l'écriture d'un polynôme de degré 1 déterminé à partir du nombre dérivé  $[f'(x_0)]$  qui caractérise sa pente au point  $(x_0, f(x_0))$ .

À l'Université, l'équation de la tangente à une courbe représentative d'une fonction en un point est introduite comme l'approximation polynômiale d'ordre 1 de cette fonction au voisinage de ce point.

Nous supposons que la méthode d'introduction du concept d'approximation locale d'une fonction à partir de ses approximations polynômiales, respectivement de degré 1, 2 et 3, au voisinage d'un point donné est la plus pertinente. En effet, elle pourra être enrichie par l'utilisation des notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes au voisinage d'un réel  $x_0$ , en prenant en compte l'écriture d'un « reste » de la forme  $[(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)]$  ou

$(o(x - x_0))$  à ce polynôme de degré 1. Par cette méthode, les étudiants pourront déterminer, eux-mêmes, le concept d'approximation locale d'une fonction à l'ordre 1 au voisinage d'un réel.

Ainsi, nous allons construire une situation mathématique permettant aux étudiants de déterminer eux-mêmes les approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction via ses approximations polynômiales successives de degré 1, 2 et 3 au voisinage d'un réel.

Dans notre étude, nous construisons une situation à dimension adidactique dont l'objectif principal consiste à amener les étudiants à comprendre qu'à une fonction  $f$  quelconque (algébrique non polynômiale ou transcendante), de classe  $C^n$  au voisinage d'un réel  $x_0$ , on peut déterminer à différents degrés des approximations polynômiales et locales en  $x_0$ .

Plus précisément, une fonction  $f$  au voisinage de 0 sera égale à la somme d'un polynôme de degré 1 (successivement de degré 2 et 3) et d'une fonction qui sera de la forme  $x\varepsilon_1(x)$  (respectivement  $x^2\varepsilon_2(x)$  et  $x^3\varepsilon_3(x)$ ) telles que :

Au voisinage de 0,  $f(x) = a_0 + a_1x + x\varepsilon_1(x)$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon_3(x)$$

Avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_i(x) = 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$

L'expression analytique d'une approximation locale d'ordre 1 au voisinage de 0 d'une fonction nous amène à la définition de différentielle.

#### Définition

On dit qu'une fonction  $f$  est différentiable en  $x_0$ , si et seulement s'il existe un intervalle ouvert  $I$  de centre zéro, un nombre réel  $l$  et une fonction  $\alpha$  tels que, pour tout  $h$  de  $I$ , on ait :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$$

La fonction linéaire :  $h \rightarrow l.h$  définie sur  $R$  **la différentielle** de  $f$  en  $x_0$

Nous trouvons dans un ouvrage d'Analyse<sup>7</sup>, chapitre « Analyse asymptotique », la manière d'atteindre notre objectif de la construction d'une situation didactique. Par ailleurs, nous avons recours au chapitre intitulé « Développements limités » où est introduit par un paragraphe permettant d'atteindre notre objectif de la construction d'une situation à dimension adidactique :

*« Le développement limité d'ordre 1 d'une fonction  $f$  en  $x_0$  permet de déterminer la tangente à la représentation graphique  $C$  de  $f$ , au point d'abscisse  $x_0$ . Pour obtenir des renseignements plus précis sur le comportement de  $f$  au voisinage de  $x_0$  nous allons généraliser la notion de développement limité à des ordres Supérieurs à 1. Ceci permettra, entre autres, de préciser la position de  $C$  par rapport à sa tangente, au voisinage d'un point et aussi de lever des « indéterminations » dans certains calculs des limites. » (Ouvrage, 1983, p.206)*

<sup>7</sup> Un ouvrage d'Analyse et de statistique de terminale C et E publié en 1983

En introduction de ce chapitre, est développée de manière « transmissive » la notion de développement limité d'une fonction au voisinage de 0. En effet, les auteurs introduisent la définition du développement limité d'ordre 1 d'une fonction à partir de l'équation de la tangente au point d'abscisse correspondant.

L'expression du reste est obtenue par l'interprétation d'un résultat du calcul de limite du rapport de deux fonctions. Nous pouvons ainsi dire, que la définition du développement limité d'une fonction d'ordre 1 au voisinage de 0 est introduite en se référant à des représentations sémiotiques dans un registre algébrico-graphique consistant à approximer via l'approximation polynômiale linéaire et de l'associer, par la suite, à la tangente au point d'abscisse 0.

Les auteurs ont prouvé l'unicité de la fonction affine approximante à la fonction en question. L'unicité a été mise en lumière dans un exemple mobilisant les registres algébrique, analytique, numérique, graphique et géométrique, (Cf. Annexe 6.1).

Dans une deuxième étape, le concept de la comparaison de fonctions au voisinage de zéro est présenté par une étude de cas particuliers de fonctions sous la forme de  $(x \rightarrow ax^n)$ .

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à la partie intitulée « 1.3. *Étude au voisinage de zéro de  $\sqrt{1+x}$*  ». Les auteurs ont introduit cette partie par des représentations graphiques de cette fonction et de sa tangente au point d'abscisse 0. Ensuite, ils ont déterminé le développement limité d'ordre 1 de cette fonction au voisinage de ce réel à partir du calcul du nombre dérivé en ce même point dans les registres analytique et numérique. Dans une deuxième étape, ils ont introduit (p. 209) la notion de développement limité d'ordre 2 de cette fonction au voisinage de 0 par l'utilisation explicite d'un calcul de limite, (cf. Annexe 6.2).

Ensuite, ils ont interprété les représentations graphiques de la fonction  $f$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 pour prouver que l'approximation d'ordre 2 est la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de ce réel.

Nous présentons cette étude et la question proposée pour montrer l'unicité de l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 (p.210) que le lecteur pourra consulter dans l'annexe 6.3.

Dans notre étude, nous envisageons de construire une situation didactique visant l'introduction du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0 à partir d'une fonction de classe  $C^n$  au voisinage de ce réel. On se réfère à plusieurs registres de représentation sémiotique afin d'en assurer la coordination au sens de Duval (1993).

La situation didactique pourra être modifiée afin de confronter les étudiants à une situation adidactique (ou à dimension adidactique). Par ailleurs, nous souhaitons utiliser un logiciel

dynamique permettant aux étudiants de visualiser d'une manière dynamique ce que nous entendons par approximation d'une fonction au voisinage de 0 d'une part, et par approximation plus précise qu'une autre, d'autre part.

Dans la première partie de l'ouvrage intitulé « *Développements limités* » (Ouvrage, 1983, p.206), les auteurs ont choisi d'intégrer dans l'énoncé de la situation mathématique des représentations graphiques. De notre côté, nous envisageons de construire une situation d'apprentissage permettant aux étudiants de visualiser cette approche graphique directement en classe avec l'enseignante. Compte tenu de nos intentions didactiques, nous avons modifié ce contenu de l'ouvrage (1983) en vue d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction à partir du cas particulier de la fonction  $[f: x \mapsto \sqrt{1+x}]$  dans le but de généraliser ce résultat et de le formaliser dans le cadre de la formule de Taylor-Young. Pour cela, nous souhaitons construire une situation permettant aux étudiants de déterminer successivement les approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction qui relèvent d'un calcul algébrique-analytique. Ensuite, l'enseignante utilisera le logiciel dynamique Geogebra afin de visualiser et de représenter cette fonction  $f$  ainsi que ses approximations polynômiales de l'ordre 1 à l'ordre 3, puis enfin de conjecturer la meilleure approximation de  $f$  au voisinage de 0.

Dans le contenu du programme de la première année (PC), le concept d'approximation locale d'une fonction est un savoir à enseigner au chapitre « Analyse asymptotique » à la suite de l'enseignement du concept de fonctions négligeables, de fonctions équivalentes et de fonctions dominantes au voisinage d'un réel et en l'infini. L'enseignante a d'abord présenté ces notions à partir de leurs définitions et propriétés, enrichies par des exemples traités dans la première séance de ce chapitre.

En conclusion, nous allons construire une situation à dimension adidactique qui sera l'objet d'une deuxième séance et dont la structuration sera similaire à celle étudiée dans l'ouvrage de terminal (1983). D'une part, nous voulons prendre en considération les connaissances antérieures des étudiants. D'autre part, nous souhaitons mobiliser les différents registres, en articulant les dimensions sémantique et syntaxique lors de l'introduction de ce nouveau concept mathématique.

### Énoncé de la situation

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+x}, f_1(x) = 1 + \frac{x}{2}, f_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \text{ et } f_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

**1.a)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f_1(x)]$

**b)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x}$

**c)** En déduire l'expression de la fonction  $f$  en fonction de  $f_1$  au voisinage de 0.

- 2.a)** Calculé  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2}$
- b)** En déduire l'expression de  $f$  en fonction de  $f_2$  au voisinage de 0.
- 3.a)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2}$ .
- b)** En déduire l'expression de  $f$  en fonction de  $f_1$  au voisinage de 0.  
(En déduire  $f(x) = f_1(x) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ )
- c)** Préciser la position de la courbe  $C_{f_1}$  par rapport à celle de  $C_f$  au point  $(0; f(0))$ .
- 4)** Montrer que  $f_2$  est la seule fonction polynôme de degré 2 tel que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$
- 5.a)** D'une manière analogue à la question 2, déterminer l'expression de  $f$  en fonction de  $f_3$  au voisinage de 0.
- b)** Préciser la position de la courbe  $C_{f_2}$  par rapport à celle de  $C_f$  au point  $(0; f(0))$ .
- 6.a)** Calculer  $f(0), f'(0), f''(0)$  et  $f'''(0)$ .
- b)** Exprimer  $f_1$  en fonction de  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
- c)** Exprimer  $f_2$  en fonction de  $f(0), f'(0)$  et  $f''(0)$ .
- d)** En déduire l'expression de  $f_3$  en fonction de  $f(0), f'(0), f''(0)$  et  $f'''(0)$ .

D'un point de vue didactique, les principaux objectifs de cette situation visent, par la confrontation à différents milieux, à amener les étudiants à :

- étudier le cas de deux fonctions négligeables ayant le même comportement au voisinage de 0 ;
- élaborer eux-mêmes des approximations locales de la fonction  $f$  au voisinage de 0 d'ordre respectivement 1, 2 et 3 ;
- formuler le reste dans l'expression du développement limité au voisinage de 0 sous la forme de deux expressions  $o(x^n)$  ou  $x^n \varepsilon(x)$  ;
- montrer l'unicité de l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel par des polynômes de degré fixé pour un ordre déterminé ;
- mettre en relation l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel et la formule de Taylor-Young ;
- introduire la notion de développement limité en tant qu'approximation locale d'une fonction par un polynôme (de degré 1, 2 et 3).

### ***1.2. Analyse a priori de la situation sur les plans mathématique et didactique***

La situation est proposée à la suite de l'enseignement des notions de la relation de comparaison des suites et de la relation de comparaison des fonctions. C'est à ce dernier point auquel nous nous intéressons.

On rappelle que :

#### **Définition**

Soit  $f$  et  $\varphi$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V$  de  $a$ ,  $a \in \bar{R}$

-On dit que  $f$  est dominée par  $\varphi$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $u$  définie et bornée sur  $V$ , telle que  $f = \varphi \times u$  au voisinage de  $a$ .

On note alors  $f = O(\varphi)$  au voisinage de  $a$ .

-On dit la fonction  $f$  est négligeable devant  $\varphi$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $V$ , telle que  $f = \varphi \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

On note alors  $f = o(\varphi)$  au voisinage de  $a$ .

**Proposition 1**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $V$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une fonction  $u$  définie sur  $V$  telle que  $f = g \times u$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$
- (ii)  $f - g = o(g)$  au voisinage de  $a$ .

Lorsque ce qui précède est vérifié, on dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , et l'on note  $f \sim g$  au voisinage de  $a$ .

**Proposition 2**

Supposons que  $g$  ne s'annule pas sur  $V \setminus \{a\}$  et que, si  $g(a) = 0$  alors  $f(a) = 0$ , alors la fonction  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  si, et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

L'enseignante a déjà proposé une première approche de la notion de voisinage ; cette dernière fera l'objet d'un cours spécifique de topologie au deuxième semestre.

Elle a commencé la deuxième séance par un rappel des notions de la relation de comparaison de fonctions. Elle a enrichi ce rappel par des exemples de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes au voisinage d'un réel bien déterminé. Ensuite, elle a construit les représentations graphiques de ces fonctions par l'usage du logiciel dynamique Geogebra et leur a fait prendre conscience de la notion de voisinage.

Après ces représentations analytique et graphique, l'enseignante distribue à toute la classe la feuille contenant la première situation. Les étudiants vont d'abord travailler seuls, puis ils vont confronter leur démarche et finalement ils rédigeront une synthèse de leurs procédures de résolution. Il y aura des échanges entre eux. À partir de ces échanges, ils vont proposer une méthode qui leur paraît la plus adéquate.

Les étudiants vont travailler individuellement, puis ils vont essayer de mettre en commun leurs procédures afin de décider d'un écrit commun résultant de la synthèse des échanges sur leurs procédures de résolutions. Nous espérons que la discussion et le débat entre eux vont aider certains étudiants à dépasser leurs difficultés.

Quand les étudiants seront en désaccord sur leurs productions respectives, ils pourront éventuellement demander l'aide auprès de l'enseignante. Dans ce cas, elle s'efforcera d'analyser le raisonnement produit afin de déterminer la nature et l'origine des difficultés rencontrées. Et plus précisément, elle va interroger les étudiants sur leurs connaissances et leurs savoirs afin de les aider à les mobiliser.

Type de la situation étudiée

Notre objectif est d'introduire à partir d'une situation particulière le concept d'approximation locale d'une fonction et la formule de Taylor-Young en s'appuyant sur la notion de la relation de comparaison de fonctions en articulant les différents registres analytique, algébrique,



graphique, numérique et géométrique. Cette situation est assimilable à une situation à dimension adidactique.

Les étudiants vont devoir construire les approximations polynômiales d'une fonction au voisinage de 0. L'enjeu de la situation est que les étudiants puissent trouver les approximations locales d'une fonction à l'ordre 1, 2 et 3 à partir du processus de calculus de limites des fonctions.

#### Objectifs didactiques de la situation

Les objectifs de cette situation problème consistent à :

- ✓ mobiliser et réorganiser des connaissances antérieures de l'étudiant ;
- ✓ introduire les approximations locales d'une fonction en faisant le lien entre ces connaissances et le nouvel objet mathématique.

Cette séance vise à répondre à la question : comment introduire les notions de développements limités et la formule de Taylor-Young à partir de la notion de relation de comparaison des fonctions, en articulant les différentes représentations associées aux différents registres numériques, graphique, géométrique, algébrique et analytique ?

La consigne donnée aux étudiants est :

*« Vous allez travailler par groupe composé chacun de trois étudiants. Chaque groupe devra répondre aux questions posées dans ce problème mathématique pendant 45 minutes. En plus, chacun de vous va rédiger ses réponses indépendamment de son groupe et selon son mode de raisonnement. Ensuite, un représentant de chaque groupe rédigera au tableau la réponse à l'une des questions posées. »*

#### Variables didactiques

Nous pouvons distinguer trois variables didactiques :

**VD<sub>1</sub>** : la nature de la fonction étudiée et de ses approximations polynômiales au voisinage de 0.

Dans ce cas, la fonction est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0.

**VD<sub>2</sub>** : le degré des approximations polynômiales étudiées.

**VD<sub>3</sub>** : le point au voisinage duquel les étudiants doivent produire l'approximation polynômiale (dont le degré est fixé).

#### I.2.1. Analyse *a priori* des questions (1-a-b-c)

#### Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Les étudiants vont faire appel aux connaissances de leur répertoire didactique pour calculer les limites de fonctions et interpréter leurs résultats. Nous pouvons envisager plusieurs procédures de résolution.

- **Procédure**

**1-a)** on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f_1(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right] = 0$

**1-b)** On pose la fonction  $h$  définie sur  $]-1, +\infty[$  telle que  $h(x) = f(x) - f_1(x)$

D'où  $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$

La fonction  $h$  est continue et de classe  $C^\infty$  sur  $]-1, +\infty[$

Donc  $h(0) = f(0) - f_1(0) = 0$

Par ailleurs  $h'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$  et  $h'(0) = 0$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0) = 0$

Nous pouvons conclure que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x} = 0$

**1-c)** Nous avons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 0$ , donc il existe une fonction  $\varepsilon(x)$  définie sur un voisinage de 0 telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ , de sorte que l'on puisse écrire que  $h(x) = x\varepsilon(x)$  pour tout  $x$  appartenant à un voisinage de 0.

Conclusion : pour tout  $x$  appartenant à un voisinage de 0,  $f(x) = f_1(x) + x\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

### Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent être confrontés au problème lié soit au calculus de limite, soit à l'utilisation de la notion de fonctions négligeables, soit à l'usage de l'expression du reste.

#### Difficulté liée au calculus de limite

**1-b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} (\sqrt{1+x} - 1) - \frac{1}{2} \right] = +\infty$

**1-c)** On a :  $f(x) = \sqrt{1+x}$  et  $f_1(x) = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{f_1(x) + \frac{x}{2}}$

#### I.2.2 Analyse a priori des questions (2-a-b)

### Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Les étudiants vont utiliser la technique de l'expression conjuguée du répertoire didactique du Secondaire.

#### Procédure

**2-a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8})^2}{x^2 \cdot [\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}]}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - \left(1+x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}\right)}{x^2 \cdot \left[\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64}}{x^2 \cdot \left[\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{8} - \frac{x^2}{64}}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}} = 0
\end{aligned}$$

**2-b)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$ , donc il existe un voisinage I de 0 et une fonction  $\varepsilon$  définie

sur I telle que pour tout  $x$  de I,  $\frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = \varepsilon(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Conclusion : pour tout  $x \in I$ , on aura :  $f(x) = f_2(x) + x^2 \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

### Difficultés envisagées

Nous pouvons distinguer plusieurs difficultés chez les étudiants, soit au niveau du calculus de limite, soit lors de l'utilisation de la notion de fonction négligeable, soit au moment de préciser le voisinage lors de l'usage de fonctions négligeables, soit au cours de l'utilisation de la notion de voisinage pour déterminer l'expression de la fonction  $f$  en fonction de  $f_2$  au voisinage de 0.

**2-a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8} \right] = +\infty$

**2-b)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$ , donc les fonctions  $[f(x) - f_2(x)]$  et  $x^2$  sont équivalentes au voisinage de 0 et  $f(x) - f_2(x) \sim x^2$

Conclusion :  $f(x) \sim f_2(x) + x^2$  au  $V(0)$

### I.2.3. Analyse a priori des questions (3-a-b-c)

#### Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Les étudiants peuvent mobiliser de différentes procédures lors de la résolution de ces trois questions.

#### **Procédure**

**3-a)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)] \cdot [\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)]}{x^2 \cdot [\sqrt{1+x} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)]}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2})^2}{x^2 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + x + \frac{x^2}{4})}{x^2 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2})} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

**3-b)** On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}$ , donc il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-\alpha; \alpha[$ , on a

$$\frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8} + o(1)$$

$$\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) - f_1(x) = -\frac{x^2}{8} + x^2 o(1)$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = f_1(x) - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\mathbf{3-c)}$$
 On a :  $f(x) = f_1(x) - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ , donc  $f(x) - f_1(x) = -\frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Et le signe de  $[f(x) - f_1(x)]$  dépend du signe de terme  $(\frac{-x^2}{8})$  au voisinage de 0

Conclusion : la courbe  $C_f$  est au-dessous de la courbe  $C_{f_1}$ .

### Difficultés envisagées

Les erreurs commises par les étudiants résultent soit de l'utilisation des méthodes fausses, soit du calcul de limite de quotient des fonctions, soit de la détermination de fonctions négligeables au voisinage de 0, soit de l'utilisation de l'approximation locale d'une fonction pour préciser le signe de différence de deux fonctions.

#### Difficulté liée au concept de fonctions négligeables

$$\mathbf{3-a)}$$
 On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sqrt{1+x}}{x^2} - \frac{1 + \frac{x}{2}}{x^2}] = 0$

$$\mathbf{3-b)}$$
 On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}$ , donc  $\frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8} + o(1)$

$$\text{Conclusion : } f(x) = f_1(x) - \frac{x^2}{8} + x^2 o(1)$$

$$\mathbf{3-c)}$$
 On a  $f(x) = f_1(x) - \frac{x^2}{8} + x^2 o(1)$

$$\text{Donc } f(x) - f_1(x) = -\frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) \Rightarrow f(x) - f_1(x) = x^2 [-\frac{1}{8} + \varepsilon(x)]$$

Si  $\varepsilon(x) > -\frac{1}{8}$  alors  $f(x) - f_1(x) > 0$  et  $C_f$  est en dessous de  $C_{f_1}$ .

Si  $\varepsilon(x) < -\frac{1}{8}$  alors  $f(x) - f_1(x) < 0$  et  $C_f$  est au-dessus de  $C_{f_1}$ .

#### I.2.4. Analyse a priori de la question (4)

##### Procédure de résolutions attendues par l'enseignante

La seule procédure attendue est le raisonnement par l'absurde.

4) On suppose qu'il existe un polynôme  $P_2$  de degré 2, différent de la fonction  $f_2$ , vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} = 0 \text{ telle que } P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ avec } a_0, a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont des réels et } a_2 \neq 0$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} - \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2) - (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a_0 - 1) + (a_1 - \frac{1}{2})x + (a_2 + \frac{1}{8})x^2}{x^2} = 0$$

Cette écriture n'est possible que pour le cas où :  $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}$  et  $a_2 = -\frac{1}{8}$

Selon le raisonnement par l'absurde, nous pouvons conclure que la fonction  $f_2$  est le seul polynôme de degré 2 vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$

##### Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent rencontrer des problèmes de justification de raisonnements.

On suppose qu'il existe P un polynôme de degré 2 telle que  $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\text{Avec } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2}, \text{ d'où } P(x) = f_2(x)$$

Conclusion : La fonction  $f_2$  est la seule fonction polynomiale à l'ordre 2 vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0.$$

#### I.2.5 Analyse a priori des questions (5-a-b)

##### **Procédures de résolutions attendues par l'enseignante**

$$\begin{aligned} \text{5-a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})^2}{x^3 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + x + \frac{3x^4}{32} + \frac{x^5}{16} + \frac{x^6}{256})}{x^3 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3x^4}{32} - \frac{x^5}{16} - \frac{x^6}{256}}{x^3 \cdot [\sqrt{1+x} + (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3x}{32} - \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{256}}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}} = 0 \end{aligned}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = 0$ , donc il existe  $\alpha > 0$  et il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur

$] - \alpha; \alpha[$  telle que pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$ ,  $\frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Conclusion : pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = f_3(x) + x^3 \varepsilon(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

**5-b)** Pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$  or  $f_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

donc pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = f_2(x) + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$

D'où pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = f_2(x) + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

Donc  $f(x) - f_2(x) = \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

Le signe de  $[f(x) - f_2(x)]$  au voisinage de 0 dépend de celui de  $\frac{x^3}{16}$ .

Conclusion : Pour tout  $x \in ] - \alpha; \alpha[$

Si  $x < 0$ , alors  $C_f$  est au-dessous de  $C_{f_2}$ .

Si  $x > 0$ , alors  $C_f$  est au-dessus de  $C_{f_2}$ .

### Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent rencontrer des difficultés liées soit à la notion de voisinage, soit à l'interprétation de l'expression du calcul de limite lors de l'utilisation de fonctions négligeables.

**5-a)** On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3} - \frac{1}{16} \right] = -\frac{1}{16}$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = -\frac{1}{16}$ , d'où  $\frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = -\frac{1}{16} + \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Conclusion :  $f(x) = f_3(x) - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$

**5-b)** Comme  $f(x) = f_3(x) - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$ , alors  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$

D'où  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3 \varepsilon(x) \Rightarrow f(x) = f_2(x) + x^3 \varepsilon(x)$

Conclusion : On a :  $f(x) - f_2(x) = x^3 \varepsilon(x)$  donc le signe de  $[f(x) - f_2(x)]$  est celui de  $x^3$

Pour  $x < 0$ ,  $C_f$  est en dessous de  $C_{f_2}$ .

Pour  $x > 0$ ,  $C_f$  est au-dessus de  $C_{f_2}$ .

### 1.2.6 Analyse a priori des questions (6-a-b-c-d)

#### **Procédures de résolutions attendues par l'enseignante**

Les étudiants vont calculer les fonctions dérivées successives de  $f$  afin de déterminer ses valeurs numériques en 0.

**6-a)** On a :  $f(x) = \sqrt{1+x}$  donc  $f(0) = 1$

La fonction  $f$  est continue et de classe  $C^n$  sur  $] -1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ donc } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \text{ donc } f''(0) = \frac{-1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \text{ donc } f'''(0) = \frac{3}{8}$$

**6-b)** On a :  $f_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$  or  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \frac{1}{2}$

Donc  $f_1(x) = f(0) + f'(0).x$

**6-c)** On a :  $f_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$  or  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$ , et  $f''(0) = \frac{-1}{4}$

Donc  $f_2(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}x^2$

**6-d)** On a :  $f_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ , or  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f''(0) = \frac{-1}{4}$  et  $f'''(0) = \frac{3}{8}$

Conclusion :  $f_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$

**Difficultés envisagées**

Les étudiants peuvent effectuer des erreurs lors de l'utilisation d'une technique vue dans le Secondaire, produiraient des réponses provenant des raisonnements incomplets ou erronés.

Difficulté d'ordre calculatoire

**6-a)** On a :  $f(x) = \sqrt{1+x}$  donc  $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ donc } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \text{ donc } f''(0) = -\frac{1}{4} \text{ et } f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \text{ donc } f'''(0) = \frac{3}{8}$$

**6-b)** On a  $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x = f(0) + f'(0)x$

**6-c)** On a  $f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 = f(0) + f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2$

**6-d)** On a  $f_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ , donc  $f_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$

**Conclusion : tableau de synthèse**

Nous présentons, dans le tableau ci-dessous, l'analyse *a priori* de la situation en termes de connaissances et de savoirs mobilisés en déterminant les différentes méthodes utilisées, les

différentes justifications, les moyens de contrôle et les différentes difficultés envisagées, mais aussi en identifiant les paradigmes et les registres de représentation sémiotique associés.

	Procédures de résolutions			Paradigmes/ Registres
	Méthodes utilisées	Justifications et moyens de contrôle	Difficultés envisagées	
<b>Q1-a</b>	Remplacer les fonctions par leurs expressions	- Interprétation du calcul de limite de chaque terme de la fonction - Vérification que la fonction : $x \mapsto f(x) - f_1(x)$ est continue en 0	- Problème lié au calcul de limite - Faute d'ordre calculatoire	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q1-b</b>	Méthode de l'expression conjuguée	- Justification de l'existence d'une forme indéterminée - Justification du choix de la méthode de l'expression conjuguée	- Calcul du produit de fonctions - Simplification du rapport de fonctions - Erreur du calcul - Remplacement de $x$ par 0	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
	Calcul du nombre dérivé de la fonction ( $x \mapsto f(x) - f_1(x)$ )	- Étude de la dérivabilité de la fonction ( $x \mapsto f(x) - f_1(x)$ ) - Calcul du nombre dérivé en 0	- Calcul numérique du nombre dérivé	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
	Théorème de l'Hôpital ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ )	- Vérification des conditions nécessaires de l'usage du théorème de l'Hôpital ( $G(0) = F(0) = 0$ et $G'(0) \neq 0$ )	- Calcul directement de limite - Erreur d'ordre calculatoire - Calcul de dérivées des fonctions $F$ et $G$	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q1-c</b>	Fonctions équivalentes	- Rappel de la définition de fonctions équivalentes	- Usage de la propriété de fonctions équivalentes	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
	Fonctions négligeables	- Rappel de la définition de fonctions négligeables - Vérification de son usage	- Usage de la propriété de fonctions négligeables	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
<b>Q2-a</b>	Méthode de l'expression conjuguée	- Justification de l'existence d'une forme indéterminée - Vérification que le théorème de l'Hôpital n'est pas applicable	- Calcul de produit de fonctions - Erreur d'ordre calculatoire	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q2-b</b>	Fonctions équivalentes	- Rappel de la définition de fonctions équivalentes	- Erreur d'ordre calculatoire - Usage de la propriété de fonctions équivalentes	[AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
	Fonctions négligeables	- Rappel de la définition de fonctions négligeables	- Erreur d'ordre calculatoire - Usage de la propriété de fonctions négligeables	[AI] R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>



<b>Q3-a</b>	Méthode de l'expression conjuguée	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justification de l'existence d'une forme indéterminée</li> <li>- Justification du calcul de limite de chaque terme</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur d'ordre calculatoire</li> <li>- Connaissances antérieures du secondaire sur le calcul de limite</li> </ul>	[AC] R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q3-b</b>	Fonctions équivalentes	- Rappel de la définition de fonctions équivalentes	- Erreur d'ordre calculatoire	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
	Fonctions négligeables	- Rappel de la définition de fonctions négligeables	- Erreur d'ordre calculatoire	[AI]/ R <sub>ANA</sub>
<b>Q3-c</b>	Étude du signe de la fonction $x \mapsto [f(x) - f_1(x)]$ par l'usage de l'expression trouvée précédemment	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation de la fonction <math>x \mapsto [-\frac{x^2}{8} + o(x^2)]</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation du signe de terme <math>[-\frac{x^2}{8} + o(x^2)]</math></li> <li>Étude du signe de l'expression de <math>[x^2(-\frac{1}{8} + \varepsilon(x))]</math></li> <li>- Étude du signe de l'expression du reste</li> </ul>	[AI]- [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub> - R <sub>GEO</sub>
	Méthode vue dans le secondaire pour l'étude du signe de la fonction $x \mapsto [f(x) - f_1(x)]$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étude de la dérivabilité de la fonction <math>x \mapsto [f(x) - f_1(x)]</math></li> <li>- Tableau de signes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcul de la fonction dérivée</li> <li>- Tableau de signe</li> </ul>	[AC]- [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub> - R <sub>GEO</sub>
<b>Q4</b>	Raisonnement par l'absurde	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proposition de l'existence d'une autre approximation polynômiale d'ordre 2</li> <li>- Dédution de l'absurdité</li> <li>- Dédution de l'unicité de l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>f</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Usage de la méthode de raisonnement par l'absurde</li> <li>- Erreur d'ordre calculatoire</li> <li>- Calcul de limite</li> </ul>	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q5-a</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcul de limite de la fonction <math>x \mapsto \frac{f(x)-f_2(x)}{x^3}</math> par l'usage de la méthode de l'expression conjuguée</li> <li>- Dédution de la fonction par l'usage de fonctions équivalentes</li> <li>- Écriture de la fonction <math>f</math> sous la forme de la fonction sous la forme <math>x \mapsto f_2(x) + \frac{x^3}{16} + o(x^3)</math></li> </ul>	- Justification de sa démarche de raisonnement	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Méthode du calcul de limite</li> <li>- Calcul du produit de fonctions</li> <li>- Manipuler la méthode à suivre</li> <li>- Interprétation du résultat du calcul de limite</li> </ul>	[AC]- [AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q5-b</b>	Étude du signe de la fonction $x \mapsto [f(x) - f_2(x)]$ par l'usage de l'expression trouvée précédemment	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justification de son choix de cette méthode en recours aux questions précédentes</li> <li>- Interprétation du signe de l'expression <math>[\frac{x^3}{16} + o(x^3)]</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation du signe de terme <math>[\frac{x^3}{16} + o(x^3)]</math></li> <li>- Étude du signe de l'expression de <math>[x^3(\frac{1}{16} + \varepsilon(x))]</math></li> </ul>	[AI]- [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub> - R <sub>GEO</sub>

			- Étude du signe de l'expression du reste	
<b>Q6-a</b>	Calcul des dérivées successives de la fonction $f$	- Vérification que la fonction $f$ est de classe $C^n$ en 0	- Calcul des dérivées - Erreur d'ordre calculatoire	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q6-b</b>	Méthode de remplacement des valeurs numériques par des symboles	- Vérification des résultats - Mise de lien entre approximation polynômiale d'une fonction et ses dérivées successives en 0	- Méthode du secondaire concernant l'égalité de deux expressions algébriques - Erreur d'ordre calculatoire	[AC]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q6-c</b>	Méthode de remplacement des valeurs numériques par des symboles	- Vérification des résultats - Mise en relation entre approximation polynômiale d'une fonction et ses dérivées successives en 0	- Méthode du secondaire d'égalité entre deux expressions algébriques - Erreur d'ordre calculatoire	[AC] R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
<b>Q6-d</b>	Méthode de remplacement des valeurs numériques par des symboles	- Vérification des résultats - Mise de lien entre approximation polynômiale d'une fonction et ses dérivées successives en 0 - Interprétation des expressions trouvées - Généralisation à l'ordre $n$ - Écriture du DL de la fonction $f$ par l'utilisation de ses dérivées successives en 0	- Méthode du secondaire d'égalité entre deux expressions algébriques - Erreur d'ordre calculatoire	[AC] R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>

**Tableau 6-2 : nature des procédures de résolutions et types de difficultés envisagées**

Selon le modèle d'analyse des raisonnements développé dans le troisième chapitre de la partie théorique, nous conduirons une analyse *a priori* descendante et ascendante en termes de niveaux de milieux, (Margolinas, 1994, 2008 ; Bloch, 1999, 2006).

### ***1.3. Déroulement prévu : phases didactiques et phases adidactiques***

Dans la section précédente, nous avons effectué une analyse *a priori* du point de vue mathématique et du point de vue didactique. Pour faire vivre cette situation, nous conduisons une réflexion sur les enjeux des différentes phases didactiques et adidactiques lors du déroulement envisagé de la séquence.

Du point de vue des modalités pédagogiques choisies, les étudiants travaillent en groupes hétérogènes de trinômes. Ce déroulement permet de mettre les étudiants en situation d'action en classe.

Dans cette section, nous expliciterons les différentes phases du déroulement c'est-à-dire la manière dont la situation 1 est mise en œuvre dans la classe. Le déroulement est le scénario

élaboré par le didacticien et l'enseignante pour faire vivre aux étudiants la situation mathématique co-construite. Nous nous intéressons aux phases didactiques et adidactiques (ou à dimension adidactique).

Nous souhaitons que chaque étudiant soit confronté individuellement à la situation mathématique et qu'il rédige une procédure de résolution à chacune des questions. Par la suite, nous jugeons nécessaire qu'ils confrontent, au sein de chaque trinôme, leur(s) proposition(s) de résolution, qu'ils échangent entre eux afin qu'ils élaborent une procédure de résolution commune. Ensuite, lors de la phase d'exposition des procédures, nous avons fait de notre mieux pour favoriser les échanges et le débat autour de la validité de la procédure présentée au tableau tour à tour par chacun des trinômes en réponse à chacune des questions de la situation mathématique.

Enfin, par la présentation de leur production, l'enseignante et les étudiants se positionnent. Lorsque l'enseignante juge que le moment est adéquat, elle assure l'institutionnalisation à partir des productions effectives.

### I.3.1. Phases didactiques

#### ➤ *Phase 1 : mise en œuvre de la continuité des apprentissages*

L'enseignante commencera la séance par un rappel écrit détaillé sur le concept de la relation de comparaison de fonctions, et plus précisément sur les notions de fonctions négligeables, de fonctions dominées et de fonctions équivalentes en lien étroit avec la notion de voisinage. Dans un premier temps, elle demandera aux étudiants de formuler les définitions de ces notions avant de les écrire au tableau. Ensuite, elle illustrera les définitions et les propriétés mathématiques par des exemples.

Elle étudiera graphiquement les différents cas rencontrés de fonctions négligeables au voisinage de 0. Dans chaque cas, elle présentera les représentations graphiques des fonctions et celui de leur rapport par l'usage du logiciel Geogebra. L'enseignante s'appuiera sur ces illustrations graphiques pour expliquer la notion de voisinage à partir de fonctions négligeables.

- **Le premier cas** : étude du cas de deux fonctions définies en 0

On a :  $f(x) = o(g(x))$  où  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = \ln(1 + x)$

- **Le deuxième cas** : étude du cas d'une fonction définie en 0 et une fonction prolongeable par continuité en 0

On a :  $f(x) = o(k(x))$  où  $f(x) = x^2$  et  $k(x) = \frac{\sin x}{x} + 6$

➤ *Phase 2 : la dévolution de la situation*

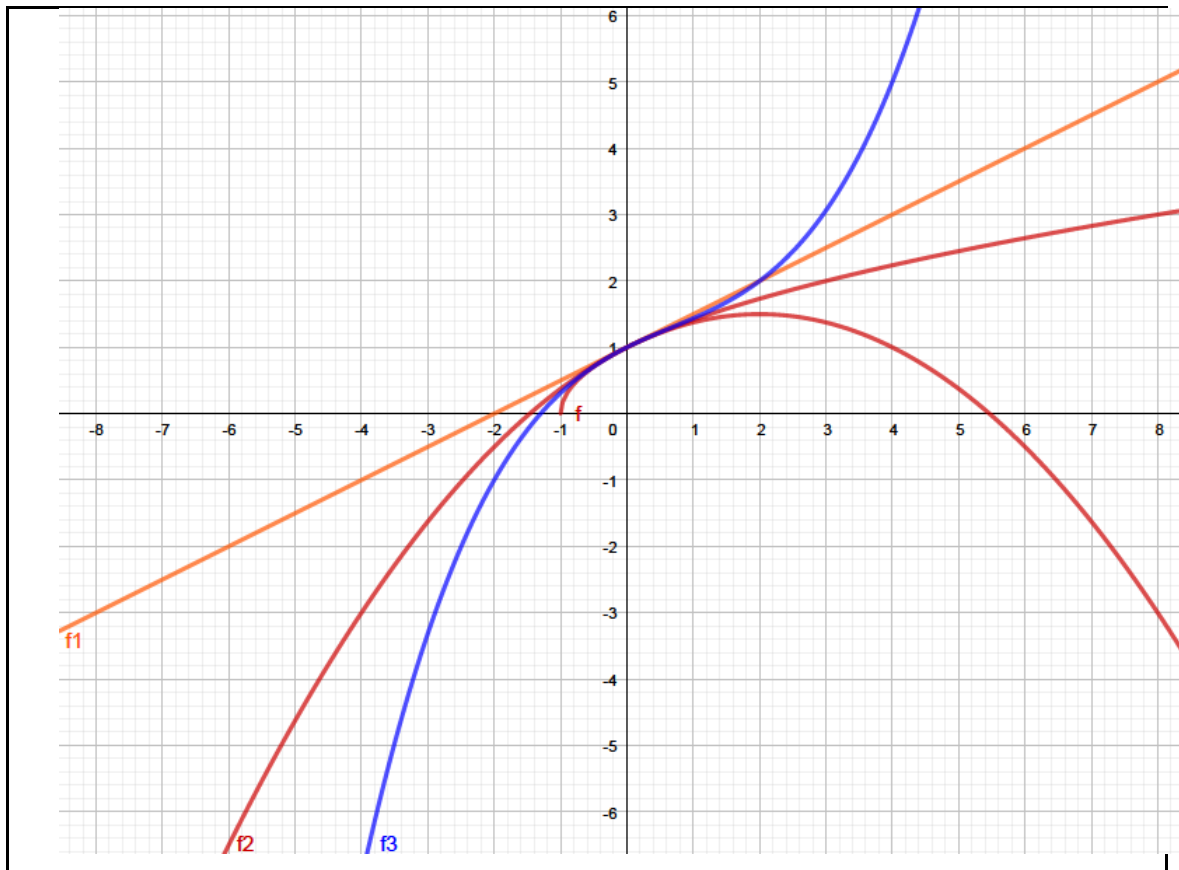
La dévolution est un processus que l'enseignante initie avec la volonté d'établir un contrat entre elle et ses étudiants (Hersant, 2010). Le rôle de l'enseignante consiste à décider de la manière de communiquer avec ses étudiants afin de les confronter à la situation. Par ailleurs, elle précisera sa responsabilité et celle des étudiants afin de motiver l'intérêt de cette situation. Les étudiants seront informés du déroulement de la mise en situation, du niveau d'exigence, ainsi que des modalités d'organisation. En effet, son objectif principal est d'offrir d'abord aux étudiants la possibilité de se confronter à la situation objective décrite dans l'énoncé, de répondre aux premières questions qui sont posées. Elle les confrontera ensuite à d'autres questions qui nécessitent l'utilisation de leurs connaissances antérieures. L'enseignante donnera une feuille pour chaque étudiant contenant la situation en leur demandant de travailler en groupe pendant quarante minutes.

➤ *Phase 3 : phase d'institutionnalisation*

Après la résolution de ce problème, l'enseignante présentera sur une même figure les représentations graphiques de ces fonctions  $f, f_1, f_2$  et  $f_3$  via l'utilisation du logiciel dynamique de géométrie Geogebra. L'interprétation de ces représentations graphiques en lien avec les raisonnements produits par les étudiants lui permettra d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction en présentant selon deux approches graphique et algébrique la meilleure approximation de la fonction  $f$ .

L'enseignante suivra les étapes suivantes :

- **La présentation des représentations graphiques des fonctions :**  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  
 $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ ,  $f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$  et  $f_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ .



**Figure 6-1 : les représentations graphiques des fonctions à étudier dans la situation 1 par l'usage du logiciel dynamique « Geogebra »**

Les objectifs principaux de cette étape sont :

- de connaître graphiquement l'intérêt de l'objet « développement limité » ;
- d'introduire algébriquement la notion de développement limité en s'appuyant sur ces illustrations graphiques.

L'enseignante va donner la consigne :

« À partir de ces illustrations graphiques présentées et en comparant les distances entre deux courbes, quelle est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0 ? »

L'enseignante vérifiera que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  par l'utilisation de deux différentes techniques : géométrique et algébrique. Tout d'abord, elle va utiliser le logiciel Geogebra pour des constructions graphiques des fonctions étudiées. Ensuite, elle interprètera ses représentations graphiques par l'utilisation de la fonction « Zoom » pour donner des exemples des voisinages de 0. Dans une dernière étape, elle va justifier sa méthode par le développement du calcul des limites en signalant :

« Cette interprétation géométrique découle du calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3} = \frac{1}{16}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_2(x)} = 0$$

Ainsi,  $[f(x) - f_3(x)]$  tend plus rapidement vers 0 que  $[f(x) - f_1(x)]$  et  $[f(x) - f_2(x)]$  quand  $x$  tend vers 0.

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_1(x)} = 0$

On constate que la fonction  $f_3$  est une meilleure approximation de la fonction  $f$  que  $f_1$  et  $f_2$  au voisinage de 0. »

En s'appuyant sur ces approches graphique « dynamique » et algébrique, l'enseignante donnera la définition de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

L'enseignante s'appuiera sur la sixième question, et l'unicité du développement limité, l'écriture de la fonction  $f$  pour donner la formule de Taylor-Young :

**La formule de Taylor-Young**  
 Si  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ , alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ . Il est donné par :  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$  au voisinage de 0

Ensuite, à partir de la question 4, elle donnera la propriété de l'unicité d'un développement limité.

**Propriété**  
 Si la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , alors celui-ci est unique.

### I.3.2. Phases adidactiques

Au cours de la mise en situation des étudiants, il y a des moments où l'enseignante est sollicitée. Dans ces phases adidactiques, notre travail porte la focale sur l'étude des échanges au sein du groupe, ainsi que les interactions avec l'enseignante. Dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique, nous envisageons un déroulement détaillé de cette troisième phase de la séquence de la situation :

- l'action individuelle sur les différentes questions proposées dans la situation ;
- les échanges au sein de groupe lors de la résolution des différentes questions de la situation ;
- les interventions de l'enseignante à la suite de la demande de certains groupes ;
- le retour en travail au sein de groupe de trinôme.

Les phases adidactiques qui sont prévues sont les suivantes :

#### *Phase 1 : phase de recherche individuelle*

Après la distribution des feuilles contenant la situation à toute la classe, les étudiants réagissent individuellement pour répondre aux différentes questions proposées en mobilisant ses connaissances antérieures pour trouver un raisonnement valide.

### *Phase 2 : phase d'échange au sein du groupe*

Après une réflexion individuelle sur chacune des questions proposées, les étudiants de chaque groupe discuteront entre eux à propos de leurs raisonnements et des difficultés auxquelles ils sont confrontés. Quand, ils seront d'accord sur ces procédures de résolutions, ils vont décider de produire un écrit qui est la synthèse des échanges sur leurs procédures de résolutions. Quand les étudiants seront en désaccord sur leurs productions, certains d'entre eux vont demander l'aide auprès de l'enseignante. Dans ce cas, l'enseignante essaiera de leur guider pour mobiliser les connaissances nécessaires afin de produire un raisonnement valide. En effet, quand les étudiants vont rencontrer des problèmes pour résoudre certaines questions, l'enseignante les aidera à mettre en relation certains résultats obtenus avec leurs connaissances antérieures sur la relation de comparaison des fonctions. De ce fait, les étudiants produiront un raisonnement « commun » qui résulte des interactions au sein du trinôme.

### *Phase 3 : phase de présentation au tableau des raisonnements des trinômes et mise en place du débat en classe*

L'enseignante ramasse les copies des étudiants. Ensuite, un représentant de chaque groupe présentera, au tableau, leur production pour chacune des questions proposées (1-a-b-c, 2-a-b, 3-a-b-c, 4, 5-a-b et 6-a-b-c-d). Après la présentation par chaque représentant d'un groupe de leur raisonnement au tableau, l'enseignante interviendra et à ce moment-là il y aura une interaction et un débat en classe.

Dans cette phase, nous conduisons une analyse détaillée en lien avec l'étude des interactions entre les étudiants et avec l'enseignante.

D'une certaine manière, nous pouvons dire qu'il y aura une présentation et une mise en commun des résultats au tableau assimilable à des phases de formulation et de validation.

Au moment de la présentation des productions des étudiants au tableau, l'enseignante attire leur attention sur certaines étapes nécessitant des moyens de contrôle et de validation. À certains moments, l'enseignante reconnaît la valeur, l'intérêt, la validité et la richesse des raisonnements produits par les étudiants. La phase de formulation est la phase rédaction du raisonnement produit au sein du groupe. Quand ce trinôme produit un raisonnement erroné, l'enseignante demande aux autres étudiants d'intervenir et de se positionner. À ce moment-là, il existe des éléments de débats qui sont très intéressants. Par ailleurs, nous pouvons dire qu'il existe des moments d'institutionnalisation lors de la mise en commun des productions.

Après la rédaction d'un représentant du trinôme de leur raisonnement au tableau, l'enseignante va questionner ce groupe et les autres étudiants afin de débattre de la pertinence

et de la validité des éléments formulés par ce trinôme au tableau. L'intervention de l'enseignante dépend du type du raisonnement produit par ce groupe (valide ou erroné).

#### *1.4. Analyse descendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse*

La procédure de construction de cette situation est réalisée en collaboration avec l'enseignante lors de la préparation de son cours et plus précisément dans le cadre du chapitre « Analyse asymptotique ».

Dans l'enseignement Supérieur, il n'existe pas un manuel scolaire commun comme au niveau Primaire, Collège et Secondaire en Tunisie. Aussi, l'enseignant doit avoir recours au programme officiel et des ouvrages universitaires pour construire son cours. Dans notre cas, nous devons construire et élaborer, en collaboration avec l'enseignante, la situation mathématique adaptée à notre projet didactique. De ce fait, nous constatons qu'il s'agit d'un passage du niveau du milieu de construction ( $M_{+3}$ ) à un milieu-projet ( $M_{+2}$ ), milieu-didactique ( $M_{+1}$ ) et milieu-apprentissage ( $M_0$ ).

- **Au niveau de milieu  $M_{+3}$  (situation noosphérique)**

D'après le contenu du programme d'Analyse de première année (PC), l'objectif de l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction est la présentation :

- de la définition de développement limité d'une fonction d'ordre  $n$  au voisinage d'un réel à partir de la forme normalisée (l'unicité des coefficients et la troncature d'un développement limité) dans le paradigme [AI] ;
- de ses propriétés : opérations sur les développements limités (combinaison linéaire, produit, quotient et la primitivation d'un développement limité) dans le paradigme [AI] ;
- de la formule de Taylor-Young dans le paradigme [AI] ;
- des développements limités usuels dans le paradigme [AI] ;
- des applications des développements limités : détermination d'équivalents et de limites de fonctions dans le paradigme [AI], étude locale d'une fonction et détermination d'asymptotes dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

L'enseignante doit se conformer au programme afin de préciser l'objet de l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction. Nous remarquons la complexité de vouloir travailler cet aspect avec des étudiants de première année (PC). En effet, il y a à la fois une partie de réflexion sur la topologie inhérente à la notion de voisinage et une autre sur l'Analyse fonctionnelle à travers l'étude des propriétés globale, locale et ponctuelle d'une fonction, (Vandebrouck, 2011).



Le chapitre « Analyse asymptotique » est introduit, dans le programme officiel de première année (PC), par un paragraphe donnant l'objectif principal de l'enseignement du concept de développement limité à ce niveau du Supérieur. En effet, les recommandations du programme insistent sur le fait d'aider les étudiants à connaître les développements limités usuels. Dans le cas de l'étude des situations nécessitant des constructions graphiques, les enseignants doivent utiliser l'outil logiciel.

Par ailleurs, les objectifs principaux du programme sont d'introduire les nouvelles notions par l'utilisation de ses différentes représentations associées aux différents registres et par la prise en considération des connaissances antérieures de l'étudiant. En plus, les recommandations du programme invitent les enseignants à aider les étudiants à produire des raisonnements offrant la possibilité d'intégrer et d'articuler les différents registres associés aux paradigmes [AI], [AC] et [AG].

Pour ceci, le milieu de construction doit permettre la dévolution de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction par l'usage de ses différentes représentations associées aux différents registres.

- **Au niveau de milieu  $M_{+2}$  (situation de construction)**

La situation de construction repose sur la manière de conduire un travail progressivement sur les approximations polynômiales successives d'une fonction au voisinage d'un réel afin d'introduire et de généraliser la formule de Taylor-Young à partir de ce cas particulier de fonction. Ce travail permet d'articuler les différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique dans les paradigmes [AC] et [AI].

Dans une première étape, nous souhaitons accorder aux représentations graphiques une place importante de sorte que les étudiants puissent parvenir à mettre en relation à la fois l'écriture d'une fonction comme somme d'un polynôme et d'une fonction négligeable avec les représentations graphiques. Ensuite, nous envisageons de permettre aux étudiants d'établir le lien entre les approximations locales d'une fonction ( $f_1$  et  $f_2$  ensuite  $f_2$  et  $f_3$ ).

- **Au niveau de milieu  $M_{+1}$  (situation de projet)**

Le projet de l'enseignante est d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction à partir d'un cas particulier d'une fonction de classe  $C^n$  au voisinage de 0 par la mobilisation de ses différentes représentations associées aux différents registres dans les paradigmes [AC], [AG] et [AI]. La construction des représentations graphiques nécessite un logiciel de géométrie. Par ailleurs, nous voulons expliquer la notion de voisinage par l'utilisation des différents intervalles définis au voisinage de 0. Pour ceci, le choix d'un logiciel de géométrie dynamique permet l'enjeu didactique de cette situation. De ce fait, l'utilisation du logiciel Geogebra nous

aide à réaliser des constructions graphiques et à expliquer la notion de voisinage à partir de la fonction « Zoom ».

Par ailleurs, il existe des contraintes : notamment, nous n'avons pas la possibilité de permettre aux étudiants d'avoir un accès direct au logiciel dynamique Geogebra. Pour ceci, l'enseignante va utiliser un vidéo projecteur en plein écran pour présenter ces représentations graphiques. De ce fait, les étudiants vont finalement être amenés à observer, visualiser et interpréter les représentations graphiques dynamiques. Ils ne sont pas en situation de décider par eux-mêmes des tracés à effectuer.

- **Au niveau de milieu  $M_0$  (situation didactique)**

On veut introduire le concept d'approximation locale d'une fonction déduit de la formule de Taylor-Young à partir d'un cas particulier traité par les étudiants. En plus, on veut présenter aux étudiants une fonction et ses approximations polynômiales au voisinage de 0 en s'appuyant sur ses représentations graphiques *via* l'utilisation du logiciel Geogebra.

L'enseignante va introduire le concept d'approximation locale d'une fonction comme une généralisation de ce qui est produit par les étudiants dans la situation. L'enjeu didactique repose sur la manière de concevoir le terme de reste de l'approximation locale d'une fonction. En effet, la fonction  $f$  est la somme de la fonction  $f_1$  et d'un reste, ensuite la fonction  $f$  est la somme de la fonction  $f_2$  et d'un autre reste, puis la fonction  $f_2$  est la somme de la fonction  $f_1$  et un terme du second degré. L'enseignante les amène à se réinterroger sur les relations existant entre la fonction  $f$  et ses approximations locales au voisinage de 0.

L'enseignante va s'appuyer sur les raisonnements produits par les étudiants et ce qu'ils ont établi pour définir et caractériser de nouveaux objets et plus précisément les approximations locales d'une fonction à partir d'un cas particulier d'une fonction.

Elle va introduire le concept d'approximation locale d'une fonction selon deux aspects différents :

- Une approche purement analytique consistant à écrire la fonction  $f$  sous la forme d'un polynôme plus une quantité négligeable successivement d'ordre 1, 2 et 3.
- Une approche graphique « dynamique » par la présentation des représentations graphiques de la fonction  $f$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0 par l'usage du logiciel Geogebra. Elle va utiliser les zooms de ce logiciel pour montrer graphiquement le positionnement et la manière de représenter les approximations locales d'une fonction.

### ***1.5. Analyse ascendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse***

Cette situation est une situation d'activité permettant d'introduire la formule de Taylor-Young. Nous rejoignons le point de vue de Bloch et Gibel (2011) qui ont distingué les niveaux de milieux de  $M_0$  à  $M_{-3}$  dans le cas de l'étude d'une situation adidactique ou à dimension adidactique.

*« ... car c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (milieu heuristique) et le milieu de référence que nous pourrions voir apparaître et se développer les raisonnements attendus. »*  
(Bloch & Gibel, 2011, p.10)

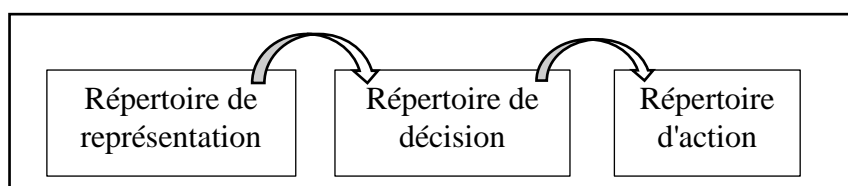
Les questions successives visent à introduire des approximations polynômiales d'une fonction à l'ordre 1, puis à l'ordre 2 et enfin à l'ordre 3 au voisinage de 0 à partir du calculus de limites de fonctions dans le paradigme [AC] et à percevoir les conditions définissant les fonctions négligeables dans le paradigme [AI]. Nous essayons de voir les échanges au sein du groupe qui amènent à un niveau de confrontation en situation de référence. Ainsi, nous sommes en train de poser des questions permettant aux étudiants de passer de la situation de référence à la situation d'apprentissage, ainsi que de changement de paradigmes de [AC] à [AI].

- **S<sub>2</sub> : Situation de référence : sujet agissant et milieu objectif**

Le milieu objectif est constitué des expressions analytique et algébrique, ainsi que des types de tâches à effectuer afin de déterminer l'approximation polynômiale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 successivement à l'ordre 1, puis à l'ordre 2, puis à l'ordre 3. L'étudiant va établir une action sur des objets mathématiques qui sera motivée par son répertoire didactique. En effet, il va mobiliser ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire pour le calculus de limites des fonctions dans le paradigme [AC]. Nous rejoignons le point de vue de Gibel et Ennassef (2010) : l'élève va élaborer un répertoire de décision de stratégie du calcul de limite de la fonction définie par un rapport des fonctions.

*« Ainsi, par l'usage de leur répertoire de représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de leur répertoire didactique, plus précisément du fonctionnement de leur système organisateur. »* (Gibel & Ennassef, 2010, p.3)

Les actions de l'étudiant agissant sur le milieu objectif ont pour objet le calcul de limites des rapports de deux fonctions, ainsi que la manière de l'effectuer, de l'obtenir et de le contrôler dans le paradigme [AC].



**Schéma 6-1 : modélisation du fonctionnement du répertoire didactique de l'élève (Gibel & Ennassef, 2010, p.4)**

Les expressions analytiques et algébriques données vont alors prendre le statut d'argument au niveau de milieu objectif. Et plus précisément, les expressions  $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f_1(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f_2(x)}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f_3(x)}{x^3} = 0)$  vont prendre les statuts d'arguments au niveau de milieu objectif en mettant en jeu les conditions nécessaires pour l'usage de fonctions négligeables.

• **S-1 : Situation d'apprentissage : étudiant apprenant et milieu de référence**

L'étape qui suit le calcul de limite correspond à la capacité de l'étudiant à interpréter ce résultat en référence aux fonctions négligeables par un usage raisonné de l'expression du reste : en  $\varepsilon(x)$  ou  $o(x^n)$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$  donc on en déduit en recours au cours que  $F(x) = o(G(x))$  ou  $\frac{F(x)}{G(x)} = \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

La situation d'apprentissage repose sur la capacité de l'étudiant à :

- réaliser un lien avec le cours sur les fonctions négligeables et à en déduire les expressions analytiques attendues. En effet, il est capable d'exprimer la fonction  $f$  en fonction de  $f_1$  puis en fonction de  $f_2$ , puis en fonction de  $f_3$ , ainsi que de percevoir le comportement des fonctions  $(f - f_1)$ ,  $(f - f_2)$ ,  $(f - f_3)$ , etc. L'étudiant va utiliser son répertoire didactique, plus précisément, le système générateur en ayant pris conscience du fait que les conditions de son usage sont vérifiées ;
- prouver l'existence des approximations locales d'une fonction au voisinage de 0 d'ordre 1, 2 et 3 et son unicité ;
- comprendre que le passage d'une approximation polynômiale d'ordre 1 à une approximation polynômiale d'ordre 2 délivre des informations très intéressantes pour la détermination de la position relative de deux courbes représentatives de cette fonction et de son approximation polynômiale d'ordre 1 ;
- réaliser un lien entre la fonction  $f$  définie au voisinage de 0, la valeur de la fonction  $f$  en ce réel, les valeurs de ses dérivées première, seconde et troisième en 0 et les approximations polynômiales proposées. Les étudiants doivent percevoir les conditions nécessaires pour réaliser le calcul des dérivées successives d'une fonction en 0.

Les étudiants vont s'interroger sur la validité de chacune des expressions analytiques trouvées dans les paradigmes [AC] puis [AI], ainsi que sur la position relative des courbes dans les paradigmes [AI] puis [AG].

L'enseignante a pour objectif de prendre en considération le travail produit par les étudiants en vue d'institutionnaliser la formule de Taylor-Young. Elle souhaite enrichir cette approche algébrique en proposant une représentation graphique des fonctions pour montrer et rendre accessible la compréhension d'une meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

- **S<sub>0</sub> : Situation didactique : milieu M<sub>0</sub>**

L'enjeu didactique de cette situation est de comprendre qu'une fonction n-fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par un polynôme. En effet, nous pouvons « approcher », de plus en plus près, la fonction étudiée, autrement dit avec une précision croissante liée au degré du polynôme.

Nous allons expliciter une manière d'établir une approximation polynômiale d'une fonction de classe  $C^n$  au voisinage d'un réel donné par la recherche des nombres dérivés successifs en ce réel.

L'enjeu didactique repose sur la manière de mettre en forme l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point et la mise en généralisation. La situation didactique repose sur l'idée de comprendre la manière d'affiner progressivement l'approximation d'une fonction, au voisinage de 0, par des polynômes. Cette approximation se fait tout d'abord par une fonction polynôme de degré 1, puis par une fonction polynôme de degré 2 qui est obtenue en ajoutant un terme à la précédente, puis un travail sur la fonction polynôme de degré 3 qui est obtenue en ajoutant de nouveaux termes de degré 3. À partir de ces expressions, l'enseignante va ensuite introduire la formule de Taylor-Young dans le paradigme [AI].

### ***1.6. Analyse a priori des raisonnements***

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous analyserons les productions des étudiants en nous attachant à étudier leurs raisonnements produits en réponse aux différentes questions proposées dans la situation.

Nous présentons l'application de modèle d'analyse des raisonnements, développé dans le troisième chapitre de la partie théorique, produits par les étudiants qui sont confrontés à la situation 1 dans le tableau récapitulatif suivant :

	<b>Milieu M<sub>2</sub></b>	<b>Milieu M<sub>1</sub></b>	<b>Milieu M<sub>0</sub></b>
<b>Fonctions des raisonnements</b>	<b>R<sub>11</sub></b> - Décision de la procédure du calcul de limite de la	<b>R<sub>12</sub></b> - Décider d'interpréter le calcul de limite en lien avec	<b>R<sub>13</sub></b> - Contrôler la cohérence des résultats obtenus par

	<p>différence de deux fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Décision de la stratégie de calcul de limite du rapport de deux fonctions</li> <li>- Décision du choix du mode de raisonnement pour prouver l'unicité de l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0</li> </ul>	<p>la notion de fonctions négligeables.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Contrôler la cohérence et la validité des résultats</li> <li>- Interprétation des expressions algébriques <math>f_1</math>, <math>f_2</math> et <math>f_3</math> pour les réécrire en fonction des valeurs des dérivées successives de la fonction <math>f</math> en 0 (<math>f(0)</math>, <math>f'(0)</math> et <math>f''(0)</math>).</li> <li>- Établissement de la preuve de l'existence et de l'unicité de l'approximation polynômiale <math>f_2</math> de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0</li> </ul>	<p>des procédures analytiques avec les résultats obtenus graphiquement.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Généralisation de concept d'approximation locale d'une fonction</li> <li>- Formalisation de la formule de Taylor-Young</li> <li>- Justification analytique et graphique de la meilleure approximation de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0</li> <li>- Contrôler, établir des liens et effectuer des interprétations dans les registres graphique et géométrique</li> </ul>
<p><b>Niveau d'utilisation des symboles, signes et représentations sémiotiques</b></p>	<p><b><math>R_{21}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Des symboles iconiques pour désigner la somme ou la différence ou le quotient de fonctions</li> </ul>	<p><b><math>R_{22}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Indices spécifiques pour mettre le lien entre une fonction et ses approximations polynômiales ainsi qu'entre les différentes approximations polynomiales</li> <li>- Symboles spécifiques pour modéliser l'écart entre l'approximation polynômiale et la fonction étudiée.</li> </ul>	<p><b><math>R_{23}</math></b></p> <p>Arguments formels spécifiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Des symboles arguments liés à la construction des preuves (l'existence et l'unicité, raisonnement par l'absurde, les tracés des courbes, etc.)</li> </ul>
<p><b>Usage et actualisation du répertoire</b></p>	<p><b><math>R_{31}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes (méthode de l'expression conjuguée, règles du calcul algébrique et formel, théorème de l'Hôpital, usage de la formule du calcul des fonctions dérivées successives d'une fonction puissance)</li> </ul>	<p><b><math>R_{32}</math></b></p> <p>Enrichissement au niveau argumentaire :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Propriétés des fonctions négligeables au voisinage de 0</li> <li>- Utilisation des propriétés des fonctions équivalentes au voisinage de 0</li> </ul>	<p><b><math>R_{33}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La formule de Taylor-Young au voisinage de 0</li> <li>- La définition du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0</li> <li>- Visualisation d'une fonction et ses approximations polynômiales</li> </ul>
<p><b>Nature de justification d'un raisonnement (sémantique et/ou syntaxique)</b></p>	<p><b><math>R_{41}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vérification de calcul de limite</li> <li>- Détermination de domaine de définition de la fonction <math>f</math></li> <li>- Justification que la fonction <math>f</math> est de classe <math>C^n</math> en 0</li> </ul>	<p><b><math>R_{42}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Existence d'un voisinage de 0</li> <li>- Existence de la fonction <math>\mathcal{E}(x)</math></li> <li>- Interprétation géométrique d'une expression analytique</li> <li>- Les expressions de calcul de limite du rapport des</li> </ul>	<p><b><math>R_{43}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation géométrique des représentations graphiques de la fonction <math>f</math> et ses approximations polynômiales à l'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0</li> <li>- Interprétation de l'usage de la fonction "zoom"</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Le domaine de validité de calcul des dérivées successives d'une fonction</li> <li>- Proposition de l'existence d'une autre approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0 pour déduire l'absurdité</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>fonctions prennent les statuts des arguments</li> <li>- Interprétation géométrique d'une expression analytique pour préciser la position de deux courbes</li> <li>- Justification des liens entre les fonctions <math>f_1, f_2</math> et <math>f_3</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>pour préciser un voisinage convenable permettant de donner la meilleure approximation locale de la fonction <math>f</math></li> <li>- Interprétation des expressions algébriques (polynômes) pour généraliser l'approximation d'une fonction au voisinage de 0.</li> <li>- Interprétation des représentations graphiques pour donner la meilleure approximation polynomiale d'une fonction</li> </ul>
<b>Niveau des paradigmes de l'Analyse</b>	<p style="text-align: center;"><b><math>R_{51}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans le paradigme [AC] :</li> <li>- Calcul de limite des fonctions s'inscrit dans le paradigme</li> <li>- Calcul des dérivées successives de la fonction</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b><math>R_{52}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans les paradigmes [AC] et [AI] :</li> <li>- Interprétation des résultats du calcul de limite</li> <li>- Raisonnement par l'absurde</li> <li>Dans les paradigmes [AI] et [AG] :</li> <li>- Interprétation de l'expression analytique</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b><math>R_{53}</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans les paradigmes [AC], [AI] et [AG] :</li> <li>- Généralisation du concept d'approximation locale d'une fonction</li> <li>- Calcul infinitésimal pour introduire la formule de Taylor-Young</li> </ul>

**Tableau 6-3 : le modèle milieux/ paradigmes/ répertoires/ symboles/ justifications  
sémantique - syntaxique**

## II. Déroulement de la séquence

L'analyse *a priori* de la situation nous a permis de construire une grille d'analyse des raisonnements. À partir du modèle d'analyse du raisonnement de Bloch et Gibel (2011), nous avons développé cette grille multidimensionnelle par une analyse des raisonnements en nous référant aux paradigmes de l'Analyse standard et des dimensions sémantique et/ou syntaxique. Nous pensons que cette grille nous permettra de conduire une analyse détaillée des raisonnements qui étaient produits lors de différentes phases. Dans cette section, nous présentons l'analyse de la situation sous la forme des différentes étapes de déroulement de la séquence.

### ***II.1. Phase 1 : mise en œuvre de la continuité des apprentissages***

L'enseignante commence la séance de cours par un rappel écrit détaillé, rédigé au tableau, des notions de fonctions négligeables, de fonctions dominées, de fonctions équivalentes et de

la notion de voisinage. Dans un premier temps, elle demande aux étudiants de donner les définitions de ces notions avant de les écrire au tableau. Ensuite, elle donne des exemples des intervalles des voisinages des réels déterminés. Nous présentons l'analyse des retranscriptions des interactions de l'enseignante avec toute la classe et les traces du tableau à partir de vidéo enregistrée et des photos prises lors de cette expérimentation. Nous conduisons une analyse de ces retranscriptions par la mise en jeu de natures, fonctions et spécificités de ces interventions lors de la présentation du rappel de fonctions négligeables et dominées, de notion de voisinage enrichi par des exemples. Nous pouvons distinguer les différentes étapes de ce rappel. Les objectifs principaux des interactions Enseignante – Étudiants sont de rappeler les notions de la relation de comparaison de fonctions enseignées dans la séance précédente du cours « Analyse asymptotique ».

Les interactions Enseignante – Etudiants	Natures, fonctions et spécificités des interactions
<p><b>Étape 1 : rappel de la notion de fonctions négligeables</b>            001 P : Nous faisons un rappel sur des fonctions négligeables.            (Elle écrit au tableau :  <u>Rappel</u>  <math>f, g : I \rightarrow R</math>, avec <math>a \in \bar{I}</math>  <math>f = o(g)</math>, <math>f</math> est négligeable par rapport à <math>g</math> en <math>a</math>)            002 P : Par définition c'est quoi ?            003 E : C'est <math>\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0</math>            004 P : Celle-ci ce n'est pas la définition, mais c'est la conséquence !            (Elle rédige au tableau : Conséquence : <math>\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0</math>)            005 P : Ceci c'est la conséquence, c'est quoi la définition ?            006 E1 : C'est <math>f(x)</math> égale à <math>\varepsilon(x) \times g(x)</math>            (Elle rédige au tableau : <math>f(x) = \varepsilon(x) \times g(x)</math>)            007 P : C'est quoi <math>\varepsilon(x)</math> ?            008 E : C'est une fonction qui tend vers 0            (Elle rédige au tableau : Si <math>\varepsilon : I \rightarrow R</math> ; <math>\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0</math>)            009 P : Et où vous trouvez cette relation ?            (Elle désigne <math>f(x) = \varepsilon(x) \times g(x)</math>)            010 E : Au voisinage de <math>a</math>.            (Elle rédige au tableau : <math>\forall \varepsilon &gt; 0, \exists \alpha &gt; 0</math> tel que <math>\forall x \in ]a - \alpha, a + \alpha[ \cap I,  f(x)  &lt; \varepsilon(x) \cdot  g(x) </math>)</p>	<p>- L'enseignante demande aux étudiants de donner la définition de la notion des fonctions négligeables. Un étudiant donne une conséquence de cette définition.            Une autre étudiante intervient pour donner l'expression analytique présentant la définition de deux fonctions négligeables.            À partir de ses questionnements, elle guide ses étudiants à déterminer cette expression par l'usage de deux représentants symboliques de reste (<math>\varepsilon(x)</math> et petit o).</p>
<p><b>Étape 2 : rappel de la notion de voisinage</b>            011 P : Qu'est-ce que ça veut dire un voisinage ?            (Silence des étudiants)            012 P : Par exemple, l'intervalle <math>]1 ; 6[</math> est-il un voisinage de 5 ?            013 E : Oui.            014 P : C'est bien, est-ce que c'est un voisinage de 2 ?            015 E : Oui            016 P : Pourquoi ? Est-ce que tu peux nous expliquer ton raisonnement ?</p>	<p>Les étudiants sont confrontés à un problème lié à la notion de voisinage. En effet, ils ne savent pas même sa définition. Devant l'absence de ses réponses, l'enseignante s'appuie sur l'étude des exemples pour rappeler la notion de voisinage.            Elle amène les étudiants à comprendre la notion de voisinage par une</p>



<p>017 E : 2 appartient à cet intervalle. (Elle écrit au tableau : <u>Voisinage de a</u> : V un voisinage de a, <math>\exists \alpha &gt; 0</math>, tel que <math>]a - \alpha, a + \alpha [ \subset V</math> 018 P : On a trouvé l'intervalle ouvert <math>]1,6[</math> est un voisinage de 2 et de 5. Est-ce que <math>]1,6[ \cup \{6\}</math> est un voisinage de 6 ? 019 E : Non (Elle rédige au tableau : <math>]1,6[ = V(2) = V(5)</math> <math>]1,6[ \cup \{6\} \neq V(6)</math>) 020 P : Est-ce que c'est un voisinage de 4 ? 021 E : Oui (Elle rédige au tableau : <math>]1,6[ \cup \{6\} = V(4)</math>)</p>	<p>guidance faible (Bartolini-Bussi, 2009)</p>
<p><b>Étape 3 : étude d'exemple de fonctions négligeables</b> 022 P : Donnez-moi un exemple de fonction négligeable par rapport à une autre fonction au voisinage d'un point en question. On considère par exemple le point a égale à 0. 023 E : Les fonctions <math>\sin x</math> et <math>x</math> 024 P : Faites attention dans ce cas la limite de la fonction <math>\frac{\sin x}{x}</math> sera égale à 1 025 E2 : <math>f(x) = x</math> et <math>g(x) = x^2</math> 026 P : Laquelle est négligeable par rapport à l'autre ? 027 E2 : Le <math>x^2</math> est négligeable par rapport à <math>x</math> au voisinage de 0. (Elle rédige au tableau : <math>a = 0</math> <math>f(x) = x, g(x) = x^2</math> donc <math>x^2 = o(x)</math>) 028 P : <math>x^2</math> est un petit <math>o(x)</math>, si vous faites le rapport alors <math>\frac{x^2}{x}</math> 029 E : C'est le contraire. (Elle écrit au tableau : <math>\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0</math> pour <math>x \rightarrow 0</math>) 030 P : Donc c'est clair que <math>x^2</math> est négligeable par rapport à <math>x</math> au voisinage de 0. 031 P : Maintenant, si on propose <math>a = +\infty</math>, alors ? 032 E : C'est l'inverse, <math>x</math> sera négligeable devant <math>x^2</math>. 033 : C'est bien, voilà on aura : (Elle rédige : <math>x = o(x^2)</math> ; <math>\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0</math> qd <math>x \rightarrow +\infty</math>)</p>	<p>L'enseignante demande aux étudiants de donner un exemple de fonctions négligeables en vue de contrôler leur connaissance sur cet objet mathématique. Un étudiant traite un exemple de fonction à partir de deux fonctions négligeables. Cet étudiant est confronté à une difficulté liée à l'appropriation de ce concept mathématique. Un autre étudiant a réussi à donner un exemple simple relatif à deux fonctions négligeables. À partir de cet exemple, l'enseignante vérifie le degré de la compréhension de la notion de fonctions négligeables par un changement de voisinage. Elle effectue des moyens en vue de contrôler les connaissances antérieures des étudiants sur le concept des fonctions négligeables.</p>
<p><b>Étape 4 : fonctions dominées</b> 034 P : Maintenant on passe à grand O. qu'est-ce que ça veut dire une fonction f égale à grand O(g) au voisinage de a par définition ? (Elle rédige au tableau : O Fonctions dominées <math>f = O(g)</math> au <math>V(a)</math>) (Aucune réponse des étudiants.) 035 P : Pour le cas de petit o, on a parlé de l'existence d'une relation entre deux fonctions f et g au voisinage de a. Quand nous étudions le grand O, quelle est la nature de la fonction qui va faire le lien entre f et g ? C'est une fonction qui va-t-elle être bornée ? Alors ? (Elle rédige au tableau : <math>\exists B : I \rightarrow R</math> bornée <math>\exists \alpha &gt; 0</math>, tel que <math>\forall x \in ]a - \alpha, a + \alpha[ \cap I</math> ; <math>f(x) = B(x). g(x)</math>) 036 P : On peut l'exprimer autrement ? Comment on peut le changer ?</p>	<p>Les étudiants sont confrontés aux difficultés liées à la notion de fonctions dominées. Ils ne peuvent pas déterminer sa définition. Devant l'absence de ses réponses, l'enseignante invite ou suggère aux étudiants de s'appuyer sur la définition de fonctions négligeables afin de donner la définition de fonctions dominées. Le silence des étudiants traduit l'existence d'une difficulté d'ordre conceptuel liée à la notion de fonctions dominées. L'enseignante décide de donner la définition de fonctions dominées au voisinage d'un réel.</p>

<p>037 E : L'existence d'un majorant  038 P : C'est bien, on peut l'écrire aussi comme ça.  (Elle écrit au tableau : <u>Conséquence</u>  <math>f = O(g)</math> au <math>V(a)</math>), <math>\exists M &gt; 0, \exists \alpha &gt; 0</math> tel que  <math>\forall x \in ]a - \alpha, a + \alpha[ \cap I ;</math>  <math> f(x)  \leq M \cdot  g(x) </math>)  039 P : J'ai déduit cette relation à partir de <math>B(x)</math> qui est bornée, donc elle a un majorant <math>M</math>.</p>	<p>Ensuite, les étudiants donnent la conséquence de la définition des fonctions dominées, par une guidance faible.</p>
<p><b>Étape 5 : rappel de la notion d'équivalence</b>  040 P : Maintenant on passe à la notion d'équivalence.  (Elle écrit : <math>f \sim g</math> au voisinage de <math>a</math>)  041 P : Qu'est-ce que ça veut dire ?  042 E : C'est <math>\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1</math>  043 P : Ça, c'est une conséquence, je vous demande la définition.  (Elle écrit : <math>\exists \varepsilon : I \rightarrow R, \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0</math>  <math>f(x) = g(x) \cdot [1 + \varepsilon(x)]</math> au <math>V(a)</math>)  Équivalent à <math>f(x) - g(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)</math>  044 P : C'est quoi ce terme <math>g(x) \cdot \varepsilon(x)</math> ?  045 E : C'est petit <math>o(g(x))</math>  (Elle rédige au tableau : <math>= o(g(x))</math>)  046 P : Donc c'est négligeable, on peut voir aussi équivalent à <math>\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \varepsilon(x)</math>  On peut voir aussi <math>\varepsilon(x)</math> ?  047 E : c'est petit <math>o(1)</math>  048 P : Très bien. Voilà la définition des fonctions équivalentes.  (Elle rédige au tableau : <math>f(x) \sim g(x)</math> au <math>V(a)</math>)  <math>\exists \varepsilon : I \rightarrow R, \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0</math> alors <math>\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \varepsilon(x) = o(1)</math></p>	<p>Pour cet étudiant, on perçoit une confusion entre la conséquence et la définition du concept de fonctions équivalentes.  L'enseignante guide les étudiants à donner la représentation analytique de la différence de deux fonctions par l'usage de deux symboles : <math>\varepsilon(x)</math> et <math>o(x)</math>.  Ensuite, elle précise un lien entre cette représentation analytique (la différence de deux fonctions) et la notion de fonctions négligeables.  L'enseignante donne une autre définition de la notion de fonctions équivalentes au voisinage d'un réel en vue d'établir deux fonctions négligeables au voisinage de ce réel.  Cette dernière définition de l'équivalence permet de déterminer deux fonctions négligeables.</p>

**Tableau 6-4 : analyse des interactions en classe lors de la mise en œuvre de la continuité des apprentissages**

À l'issue de l'analyse de ces interactions, nous remarquons que les étudiants sont confrontés à une difficulté liée à la définition formalisée du concept de la relation de comparaison de fonctions. En effet, les étudiants ne peuvent pas individuellement formuler les définitions des notions de fonctions négligeables, de fonctions dominées et de fonctions équivalentes. Par ailleurs, ils ne savent pas traiter la notion de voisinage qu'à partir des exemples. Précisément, ils formulent une conséquence au lieu d'énoncer la définition de ces notions. La confusion entre une conséquence et la définition de ces notions traduit l'existence d'une complexité liée à la dialectique technique/sens du concept de relation de comparaison des fonctions. Cette complexité est liée à l'articulation sémantique/syntaxique. Nous pouvons conclure que les étudiants ont effectué *une erreur d'ordre cognitif et conceptuel* lors de l'appropriation du concept de la relation de comparaison des fonctions.

## II.2. Étude de la dévolution de la situation

Après le rappel, l'enseignante commence à distribuer les feuilles contenant la situation à toute la classe en disant :

*001 P : (1) voilà le rappel sur les fonctions négligeables, les fonctions équivalentes, les fonctions dominées et la notion de voisinage. Maintenant, (2) je vous distribue la feuille contenant une situation problème. (3) Vous allez travailler par groupe pour essayer de répondre aux différentes questions proposées dans cette situation pendant 45 minutes. En plus, (4) chacun de vous va rédiger ses réponses dans une feuille indépendamment de son groupe selon son mode de raisonnement. Ensuite, (5) un représentant de chaque groupe va rédiger au tableau leur réponse à l'une des questions du problème. (6) On fera un débat sur vos réponses afin de trouver la réponse valide.*

Dans le tableau en dessous, nous présentons une analyse de cette intervention en étudiant sa nature et sa spécificité dans la première colonne et sa fonction dans la deuxième colonne.

<b>Nature et spécificité de l'intervention</b>	<b>Fonction de l'intervention</b>
La manière de donner la consigne (1) Présentation de la finalité de la phase de rappel. (2) Évocation de la mise en œuvre d'un nouveau projet en classe. (3) Évocation de projet de débat au sein de groupe pour répondre aux questions proposées dans la situation. (4) Évocation du projet de rédaction individuelle au sein de groupe pour répondre aux questions proposées dans la situation. (5) Évocation de mise en position de projet de débat entre les étudiants et l'enseignante. (6) Évocation du projet de débat et du dispositif associé	L'enseignante explicite l'organisation de la séquence en vue de communiquer le projet des débats entre les étudiants de même groupe, toute la classe et l'enseignante. Elle donne les conditions nécessaires aux débats : - Au sein de groupe, chaque étudiant devra prendre position par rapport aux différentes questions proposées. Ensuite, il devra prendre la décision de rédiger son propre raisonnement. - Pour toute la classe, un représentant de chaque groupe devra prendre position par rapport à une question proposée pour la rédiger afin de discuter sur leur raisonnement avec toute la classe et l'enseignante. - L'enseignante devra prendre la décision de rédiger les raisonnements valides.

**Tableau 6-5 : la dévolution de la situation 1 et la manière de donner la consigne aux étudiants**

Dans notre travail, nous étudions, du point de vue du fonctionnement du savoir, la manière dont les étudiants s'approprient et s'investissent dans chacune des situations « emboîtées » telles que nous les avons définies dans l'analyse *a priori*. Nous pensons que le schéma de la structuration du milieu nous permet d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants, ainsi que la manière dont ces savoirs se transforment pour étudier le déroulement final de la mise en situation. Dans cette phase didactique, l'enseignante aide les étudiants à s'approprier la situation objective, à s'approprier les questions et à agir sur le milieu.

### ***II.3. Analyse des raisonnements produits par confrontation à la situation***

Après la distribution des feuilles contenant la situation 1 à toute la classe, les étudiants travaillent individuellement, puis ils décident de produire un écrit qui est la synthèse des échanges sur leurs procédures de résolutions. À certains moments, les étudiants étaient en désaccord sur leurs productions, certains d'entre eux ont demandé l'aide auprès de l'enseignante. Dans ce cas, l'enseignante a essayé de les guider pour mobiliser les connaissances nécessaires pour produire un raisonnement valide. De ce fait, les étudiants ont produit un raisonnement « commun » qui résulte des interactions au sein du trinôme. Afin d'analyser les raisonnements produits par ces étudiants, nous nous appuyerons sur l'analyse *a priori* et le déroulement prévu réalisés auparavant. Dans une première étape, nous présentons une analyse globale des raisonnements de 8 groupes selon les deux points de vue : quantitatif et qualitatif. Ensuite, nous nous intéressons à présenter une analyse détaillée des raisonnements de deux groupes qui jouent un rôle important afin d'étudier des difficultés liées à l'appropriation du concept de fonctions négligeables.

#### II. 3.1. Analyse globale des raisonnements de 8 groupes

Dans cette section, nous conduisons une analyse des différents raisonnements produits par les 8 trinômes selon les quatre composantes du modèle d'analyse du raisonnement en termes de structuration de niveaux de milieux : fonctions, nature, étude des signes et mode de justification des raisonnements. Ces étapes sont extraites de la première séance de notre expérimentation à la suite d'un rappel sur la relation de comparaison de fonctions.

Notre travail de recherche porte la focale sur l'étude de l'évolution de la connaissance de l'étudiant lors de sa confrontation à une situation à dimension adidactique.

En recours à l'énoncé de la situation 1, nous pouvons classer les questions proposées selon les connaissances et les savoirs mobilisés :

- Question traitée au niveau Secondaire qui nécessite soit l'utilisation des méthodes du registre de formules du répertoire didactique du Secondaire par la mise en œuvre de la méthode de l'expression conjuguée, soit par l'utilisation du théorème de l'Hôpital issu du répertoire didactique du Supérieur. Les questions sont : (1-b), (2-a) et (3-a).
- Question traitée au niveau Secondaire qui nécessite l'utilisation des méthodes du registre des formules du répertoire du Secondaire. Les questions sont : (1-a) et (6-a).
- Question traitée au niveau Secondaire qui nécessite l'usage d'une méthode du répertoire didactique du Supérieur. Les questions (4) et (3-c).
- Question du Supérieur qui est liée à la formalisation de limite d'une fonction. Les questions sont : (1-c), (2-b) et (3-b).

- Question du Supérieur qui nécessite l'usage des techniques de registres des formules du répertoire didactique du Secondaire. Les questions sont : (6-b), (6-c) et (6-d).

Nous pouvons classer les objectifs de la proposition des différentes questions dans la situation selon quatre catégories :

- Calculus de limite : dans ce cas, l'étudiant fait appel à une méthode du calcul algébrique et formel issu soit du répertoire didactique du Secondaire par l'usage de la méthode de l'expression conjuguée, soit du répertoire didactique du Supérieur par l'utilisation de théorème de l'Hôpital. Le raisonnement produit est développé dans le paradigme [AC].

- Interprétation des expressions analytiques et algébriques : dans ce cas, l'étudiant s'appuie sur une expression analytique pour produire son raisonnement. D'un côté, il utilise les fonctions négligeables à partir de l'expression du calcul de limite pour déterminer une approximation locale de la fonction  $f$  dans le paradigme [AI]. D'un autre côté, il étudie le signe de l'expression analytique mettant le lien entre les fonctions  $f$  et  $f_1$  dans le paradigme [AI] pour préciser la position relative de deux courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $f_2$  dans le paradigme [AG]. Par ailleurs, l'étudiant remplace les valeurs des dérivées successives de la fonction  $f$  en 0 par ses représentants analytiques (des symboles) ( $f(0), f'(0), f''(0)$  et  $f'''(0)$ ) dans les représentations algébriques de ses approximations polynômiales au voisinage de ce réel. Cette méthode de remplacement des valeurs numériques par des symboles est développée dans le paradigme [AI].

- Preuve de l'unicité : dans ce cas, l'étudiant utilise le raisonnement par l'absurde. En effet, il mobilise une technique analytique du répertoire didactique du Secondaire dans le paradigme [AI].

- Étude d'une fonction de classe  $C^3$  sur  $R$  : dans ce cas, l'étudiant prouve que la fonction  $f$  est de classe  $C^3$  afin de développer le calcul des valeurs de ses dérivées successives en 0 dans le paradigme [AC].

Nous présentons notre analyse des productions des trinômes selon deux points de vue. Le premier d'aspect quantitatif par la distinction de cinq modes du raisonnement : raisonnement en situation à dimension adidactique (valide ou erroné), raisonnement en situation adidactique (valide ou erroné) et absence de raisonnement.

Le deuxième point de vue est qualitatif. Il est beaucoup plus précis en termes d'analyse des raisonnements selon le modèle d'analyse développé dans le chapitre 3 des cadres théoriques.

Nous résumons les réponses de 8 trinômes de la classe (PC1) aux différentes questions proposées dans la situation dans ce tableau :

		Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Calculus de limite des fonctions	Q 1-a	0	0	8	0	0
	Q 1-b	0	0	8	0	0
	Q 2-a	3	1	2	1	1
	Q 3-a	2	0	5	0	1
Détermination d'approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction au V(0)	Q 1-c	1	3	0	4	0
	Q 2-b	1	2	0	5	0
	Q 3-b	1	2	0	4	1
Étude de la position de deux courbes	Q 3-c	0	1	3	1	3
Preuve de l'unicité d'approximation locale de la fonction d'ordre 2 au V(0)	Q 4	0	0	1	0	7
Calcul des dérivées de la fonction en 0	Q 6-a	0	1	6	0	1
Détermination d'approximations polynômiales par l'usage des symboles des dérivées de la fonction en 0	Q 6-b	0	0	6	0	2
	Q 6-c	0	0	3	3	2
	Q 6-d	0	0	2	3	3

**Tableau 6-6 : analyse globale des raisonnements produits par les 8 trinômes**

Nous remarquons que la majorité des groupes ont produit des pas de raisonnements de nature syntaxique par la mobilisation des registres analytique et numérique lors du calculus de limites de fonctions. En effet, ces trinômes n'ont pas justifié leurs raisonnements lors de l'utilisation de la méthode de l'expression conjuguée du répertoire didactique du Secondaire dans le paradigme [AC].

La majorité des groupes sont confrontés au problème lié à la détermination d'une approximation locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Certains d'entre eux ont donné la représentation analytique d'approximation locale de la fonction sans donner du sens à ce concept mathématique. En effet, ils ne précisent pas le voisinage de 0. Ces trinômes ont interprété le résultat du calculus de limite du rapport de deux fonctions par l'usage de la propriété de fonctions négligeables lors de la détermination de la représentation analytique d'une approximation locale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En revanche, le groupe 1 a utilisé le calcul de la dérivée première d'une fonction en 0 pour déterminer la représentation analytique d'approximation locale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, ce groupe interprète le résultat du calculus de limite ( $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f_1(x)] = 0$ ) par l'utilisation du calcul de la dérivée première d'une fonction pour déterminer la représentation analytique.

Par ailleurs, le groupe 4 est le seul groupe qui a produit des pas de raisonnements de nature sémantique/syntaxique, par une guidance faible, lors de la détermination des approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

Nous remarquons que certains trinômes ont produit des pas de raisonnements de nature sémantique/syntaxique lors de l'utilisation d'une technique géométrique afin de préciser la position relative de deux courbes. En effet, ces groupes ont étudié le signe de la différence de deux fonctions  $f$  et  $f_1$  pour préciser la position de ses représentations graphiques.

Le groupe 4 considère le signe de la fonction  $[f(x) - f_1(x)]$  dépend du signe de la fonction  $[\varepsilon(x) - \frac{1}{8}]$ . Ce trinôme est confronté au problème lié à la fonction  $\varepsilon(x)$ . Cette erreur commise est due au contrat didactique. En effet, l'enseignante définit la fonction  $\varepsilon(x)$ , dans son cours, par l'expression suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  au voisinage de 0.

Concernant la preuve de l'unicité d'approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0, un seul trinôme (groupe 4) a produit des pas de raisonnement de nature sémantique par l'usage de la technique du raisonnement par l'absurde du répertoire didactique du Secondaire.

À l'issue de cette identification des objectifs des questions traitées dans la situation, nous pouvons présenter une catégorisation des différents types de techniques mobilisées :

- Technique Arithmetico-algébrique : par exemple, l'étudiant utilise la méthode de l'expression conjuguée pour calculer la limite du rapport de deux fonctions.
- Technique Arithmetico-analytique : par exemple, il prouve que la fonction  $f$  est de classe  $C^3$  afin de calculer les valeurs de ses dérivées successives en 0.
- Technique analytique : par exemple, l'étudiant utilise le théorème de l'Hôpital pour calculer la limite du rapport de deux fonctions. Il fait appel aussi à la méthode du raisonnement par l'absurde pour prouver l'unicité d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0.
- Technique géométrique : par exemple, il étudie le signe de la différence de deux fonctions pour préciser la position relative de ses deux représentations graphiques.
- Technique analytique-infinitésimale : par exemple, il utilise la formule de fonctions négligeables du répertoire didactique du Supérieur afin de déterminer une approximation locale d'une fonction au voisinage de 0 dans le paradigme [AI].

Nous présentons le résumé des différents types de techniques et de raisonnements mobilisés par les 8 groupes dans le tableau ci-dessous :

	Types de techniques utilisées	Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Calcul de limite de fonctions	Arithméco-algébrique	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
	Analytique	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	

Détermination d'approximations locales de la fonction	Analytique-infinésimale	1	6	0	0
	Autres	0	1	0	0
Étude de la position de deux courbes	Géométrique	3	0	2	2
	Aucune	0	0	1	
Preuve de l'unicité d'approximation locale d'ordre 2 de la fonction	Analytique	1	0	0	7
Calcul des dérivées de $f$ en 0	Arithméco-analytique	6	0	1	1
Détermination d'approximations polynômiales de la fonction $f$ par l'usage des symboles de ses dérivées successives en 0	Arithméco-analytique	4	0	2	0
	Aucune	2	0	0	

**Tableau 6-7 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la résolution des différentes questions proposées dans la situation mathématique**

Certains groupes sont confrontés aux problèmes liés au calcul de limite du rapport de deux fonctions ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2}$ ). L'erreur commise est due à une difficulté lors de l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Secondaire et plus précisément la méthode de l'expression conjuguée présentée dans le registre des formules.

D'une part, la majorité des groupes ont produit des raisonnements formellement incomplets lors de la détermination des approximations locales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, cinq groupes ont utilisé la fonction  $[\varepsilon(x)]$  par la négligence de l'intervalle de voisinage de 0. Par ailleurs, deux groupes ont rencontré des problèmes liés à l'usage de la fonction  $\varepsilon(x)$ . Ces groupes ont effectué des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liées à l'appropriation du concept de fonctions négligeables. En plus, le groupe 4 a produit des pas de raisonnements de nature syntaxique par la mobilisation d'une connaissance disponible, celle de la propriété des fonctions négligeables.

D'une autre part, deux groupes seulement ont produit des pas de raisonnements articulant les dimensions sémantique et syntaxique lors de la précision de la position relative de deux courbes. En effet, ils ont interprété la représentation analytique de la différence des objets  $f$  et  $f_1$  pour étudier son signe.

La majorité des groupes ont calculé les dérivées successives de la fonction  $f$  sans apporter la justification nécessaire : la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0, ce qui garantit



l'existence de ses dérivées successives en ce réel. Un seul trinôme a produit des éléments d'ordre sémantique : la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ .

La plupart des groupes ont donné des représentations analytiques d'approximations polynômiales d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 en utilisant des symboles de ses valeurs en 0 et de sa dérivée en ce réel. En revanche, la plupart d'entre eux n'ont pas produit un raisonnement valide lors de la détermination des approximations polynômiales d'ordre 2 et 3 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 par l'usage des symboles de sa valeur et de ses dérivées d'ordre 1, 2 et 3 en ce réel.

### II.3.2. Analyse des raisonnements produits par certains groupes

Nous choisissons de vous présenter une analyse détaillée des raisonnements produits par deux trinômes : groupes 1 et 4. Notre choix repose sur la particularité des productions de ces trinômes selon leurs copies et les vidéos enregistrées. En effet, le groupe 1 n'a pas pu déterminer de façon autonome une approximation locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Pour cette raison, il a décidé de demander l'aide auprès de l'enseignante. Le groupe 4 est le seul trinôme qui a essayé d'étudier l'unicité d'approximation locale d'une fonction au voisinage de 0. Nous pensons que l'analyse détaillée des raisonnements produits par ces groupes nous permettra d'identifier les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction. Les productions de chaque groupe sont présentées à partir de la transcription de la copie de synthèse de leurs productions, des photos prises et des vidéos enregistrées.

L'analyse de ces productions est proposée dans un tableau comportant deux colonnes. Dans la première colonne, nous présentons les productions du groupe, ainsi que ses interactions avec l'enseignante. Dans la deuxième colonne de ce tableau, nous essayons de conduire une analyse détaillée de ces raisonnements selon le modèle d'analyse, développé dans le troisième chapitre de la partie théorique, sous forme des commentaires. Cette analyse est réalisée selon une identification de paradigmes, de niveaux de milieux et, du niveau de registres de représentation sémiotique, ainsi qu'au niveau de fonctions des raisonnements, l'usage du répertoire didactique par la prise en compte des niveaux de mise de fonctionnement des connaissances des étudiants, des analyses sémiotiques, ainsi que des dimensions sémantique et/ou syntaxique.

#### *II.3.2.1 Analyse des raisonnements du groupe 1*

Dans cette partie, nous conduisons une analyse détaillée des raisonnements produits par le groupe 1. Ce trinôme est confronté à un problème lié à l'usage des connaissances disponibles.

#### ***Épisode 1 (étape 1) : le calculus de limite***

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>1-a) L1</b> <math>f(x) = \sqrt{1+x}</math> et <math>f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x</math></p> <p><b>L2</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f_1(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \right]</math></p> <p><b>L3</b> = <math>1 - 1</math></p> <p><b>L4</b> = <math>0</math></p> <p><b>1-b) L5</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x}</math></p> <p><b>L6</b> = <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L7</b> = <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} - \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L8</b> = <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} - \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L9</b> = <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L10</b> = <math>\frac{1}{2} - \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L11</b> = <math>0</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Le milieu objectif (M<sub>2</sub>) est constitué de la représentation analytique de la fonction <math>f</math> et celle algébrique de la fonction <math>f_1</math>. Cette expression du calculus de limite de rapport de deux fonctions va prendre le statut d'argument dans le milieu de référence. Ce calculus de limite est développé dans le paradigme [AC].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Ce groupe fait l'usage des représentations analytique et algébrique des fonctions lors du calcul algébrique de la différence et du rapport de deux fonctions. Cette méthode est développée dans des registres analytique, algébrique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(1)] Décision de l'usage des représentations analytique et algébrique des fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math> afin de calculer la limite de ses différences.</p> <p>[(1)-(2)-(3)-(4)] Calculus de limite de la différence de deux fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math>.</p> <p>Dans l'étape (3), l'erreur commise est due à l'élimination du signe "limite". Il manque une étape de ce raisonnement pour le calculus de limite : <math>\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2})</math></p> <p>[(5)-(6)] Décision de simplification du rapport de deux fonctions pour le calculus de sa limite.</p> <p>[(7)] Décision de l'utilisation d'une autre méthode du répertoire didactique et plus précisément d'une connaissance mobilisable : la méthode de l'expression conjuguée. Il y a une rétroaction des étudiants puisque la première méthode de calcul de limite donne une forme indéterminée.</p> <p>[(8)-(9)-(10)-(11)] Calculus de limite du rapport de deux fonctions.</p> <p>Dans l'étape (9), les étudiants simplifient le rapport de deux fonctions.</p>

**Tableau 6-8 : analyse des raisonnements produits par le groupe 1 lors du calculus de limite**

Cette technique utilisée, lors du calculus de limite, est à rapprocher d'une procédure présentée en analyse *a priori* de la situation.

**Épisode 2 (phase 1 – étape 2) : demande l'aide auprès de l'enseignante**

Les étudiants discutent entre eux sur la méthode à utiliser pour interpréter le résultat du calculus de limite, mais ils ne parviennent pas à mobiliser la technique adéquate pour interpréter

l'expression du calculus de limite. À ce moment-là, ils demandent l'aide auprès de l'enseignante.

Une étudiante de ce groupe lève le doigt. Nous allons effectuer l'analyse de cette étape.

<p>001 E : S'il vous plaît, madame.</p> <p>002 P : Qu'est-ce qu'il y a ?</p> <p>003 E : Madame, nous n'avons pas trouvé une méthode d'en déduire l'expression de la fonction <math>f</math> à partir de la question précédente. (Elle désigne la question 1-b)</p> <p>004 P : Est-ce que nous pouvons déterminer une relation entre la limite <math>l</math> d'une fonction et cette fonction ?</p> <p>005 E : C'est <math>f(x)</math> moins <math>l</math> (<math>f(x) - l</math>) ?</p> <p>006 P : Si tu as une fonction <math>h</math> tends vers <math>l</math> c'est-à-dire la limite de <math>h(x)</math> égale à <math>l</math>. Est-ce que <math>h</math> va être égale à <math>l</math> exactement ? Elle va être égale à quoi ? (<math>\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = l</math>)</p> <p>007 E1 : L'approximation de la fonction <math>h</math> s'annule.</p> <p>008 P : Donc cette fonction <math>h</math> admet une limite égale à <math>l</math>, donc <math>h</math> égale à quoi ?</p> <p>009 E1 : Donc son approximation est proche de <math>l</math>.</p> <p>010 P : Qu'est-ce que ça veut dire proche de <math>l</math> ? Comment je pourrai l'écrire ?</p> <p>011 E 2 : <math>\epsilon</math> fois <math>l</math> (<math>\epsilon \cdot l</math>)</p> <p>012 P : Pourquoi fois <math>l</math> ?</p> <p>013 E 1 : Fois <math>l</math> ???</p> <p>014 P : C'est <math>l</math> lui-même</p> <p>015 E1 : C'est tends vers <math>l</math>, c'est inférieur à <math>l</math>, elle va s'approcher de <math>l</math>.</p> <p>016 P : Et qui t'a dit ça ? Ça peut-être plus grand que <math>l</math>.</p> <p>017 E2 : Plus inférieur que <math>l</math>.</p> <p>018 E : Au voisinage....</p> <p>019 P : Comment on peut l'écrire au voisinage de <math>l</math> ? Donc la fonction <math>h</math> égale à une chose proche de <math>l</math>.</p> <p>020 E 2 : <math>\epsilon</math> fois <math>l</math></p> <p>021 E 1 : Pourquoi fois ?</p> <p>022 P : Et <math>\epsilon</math> tend vers quoi ?</p> <p>023 E 2 : (<math>l - \alpha</math>) tend vers <math>l</math>.</p> <p>024 P : Si <math>h</math> tend vers <math>l</math> c'est-à-dire que la distance entre <math>h</math> et <math>l</math>.</p> <p>025 E 1 : C'est <math>\epsilon</math></p> <p>026 P : Et <math>l</math>, c'est très petite ?</p> <p>027 E : Très petit, c'est <math>\epsilon</math>.</p> <p>028 P : Donc la fonction <math>h</math> qui va tendre vers <math>l</math>, c'est que la distance entre <math>h</math> et <math>x</math> est <math>l</math> qui est en train de diminuer lorsque le <math>x</math> tend vers le point <math>a</math>, alors <math>h(x)</math> elle va être égale à quoi ?</p> <p>029 E : .....(les étudiants ne répondent pas)</p> <p>030 P : égale à <math>l</math> ?</p> <p>031 E 1 : Plus <math>\epsilon</math>.</p> <p>032 P : Voilà. C'est plus la distance qui va s'annuler. Donc tant que la limite de la fonction <math>h</math> égale à <math>l</math>. Donc on enlève le mot limite devient la fonction <math>h</math> égale à <math>l</math> plus la distance qui va tendre vers 0.</p> <p>033 E 2 : C'est <math>\epsilon</math>.</p> <p>034 P : Donc plus <math>\epsilon</math> qui tend vers 0.</p> <p>035 E 1 : J'ai bien compris.</p> <p>036 P : D'accord.</p> <p>037 E 2 : J'ai bien compris, merci.</p> <p>038 P : Tu as trouvé une fonction qui tend vers 0 donc je peux par la suite continuer à rédiger.</p> <p>039 E1 : OK, merci madame.</p>
---

**Tableau 6-9 : transcriptions d'échanges de l'enseignante avec le groupe 1**

Ce groupe n'a pas trouvé les moyens de faire évoluer le savoir qui est mobilisé lors de la confrontation au milieu objectif pour traduire le résultat de calcul de limite en une expression algébrique idoine reposant sur la connaissance de la notion de fonctions négligeables. En effet, au niveau de milieu  $M_{-1}$ , ce trinôme devrait interpréter très finement le calcul de limite et le mettre en relation avec la notion de fonctions négligeables. Il n'est pas capable de porter des réflexions sur des objets qui interviennent dans les transformations des expressions analytiques. Au moment du blocage, les étudiants déclarent qu'ils ne parviennent pas à trouver la technique adéquate pour interpréter ce calcul de limite. Ils sont confrontés à une difficulté liée à la dialectique sémantique/syntaxique du concept de fonctions négligeables. Cette méthode va leur permettre de déterminer l'expression de la fonction  $f$  en utilisant l'expression du calcul de limite comme un statut d'argument dans ce type de raisonnement. Dans ce cas, la propriété de fonctions négligeables est une connaissance disponible. À ce moment de blocage, l'enseignante intervient pour guider les étudiants de ce groupe en vue d'utiliser la fonction  $(\varepsilon(x))$  afin de formaliser la limite. Ainsi, le rôle principal de l'enseignante consiste à trouver les moyens d'intervenir pour préciser la formulation de limite. Elle place les étudiants dans une posture réflexive sur cette expression  $\varepsilon(x)$  et leurs connaissances antérieures. Par son questionnement, elle tente de pallier les insuffisances du milieu. Autrement dit, il y a l'absence de rétroactions du milieu dans lequel les étudiants interagissent. Elle veut les aider à utiliser la formulation  $[l + \varepsilon(x)]$ , or les étudiants veulent écrire la formulation sous la forme  $[l \times \varepsilon(x)]$ . Cette erreur commise traduit l'existence d'un obstacle didactique lié au choix de l'enseignante lors de l'introduction de la fonction  $\varepsilon(x)$ . Le rappel fait par l'enseignante, au début de la séance, sur les fonctions négligeables a un impact sur ce groupe. En effet, il se remémore ce qui a été rappelé.

Ce groupe est confronté à un problème résultant du changement de paradigmes de [AC] au paradigme [AI]. Il n'a pas trouvé les moyens de faire évoluer le savoir qui est entre le milieu  $M_{-2}$  et le milieu  $M_{-1}$ . Cette *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* est liée à la formalisation de limite par l'usage des fonctions négligeables.

➤ **Épisode 3 (étape 2) : recherche d'approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de 0**

L'intervention de l'enseignante entraîne une rétroaction des étudiants.

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
1-c) <b>L12</b> On a $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f_1(x)] = 0$ <b>L13</b> $\exists \varepsilon(x) : I \rightarrow$ <b>R tel que</b> $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ <b>L14</b> On pose $h(x) = f(x) - f_1(x)$	<u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u> L'expression du calcul de limite de la différence de deux fonctions prend le statut d'argument dans le milieu de

<p><b>L15</b> <math>h(0) = f(0) - f_1(0)</math>  <b>L16</b> <math>= \sqrt{1 + 0} - 1 - \frac{1}{2}x \times 0</math>  <b>L17</b> <math>= 0</math>  <b>L18</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}</math>  <b>L19</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x) - h(0)}{x - 0}</math>  <b>L20</b> <math>= 0</math>  <b>L21</b> <math>= h'(0)</math>  <b>L22</b> Donc <math>h(x) = h(0) + x\varepsilon(x)</math>  <b>L23</b> <math>f(x) - f_1(x) = f(0) - f_1(0) + x\varepsilon(x)</math>  <b>L24</b> <math>f(x) = f_1(x) + x\varepsilon(x)</math></p>	<p>référence (M<sub>1</sub>). Ce groupe a formulé cette expression analytique pour déterminer une fonction <math>h</math>. Il a étudié sa dérivabilité en 0 par le calcul de limite du rapport de la variation infinitésimale de la valeur de cette fonction <math>h</math> sur un changement infinitésimal de la variable.</p> <p>Ils ont interprété ce calcul de la valeur de la dérivée de la fonction <math>h</math> en 0 pour donner son approximation locale d'ordre 1 au voisinage de ce réel par le passage du paradigme [AC] à celui [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Les étudiants ont développé un calcul formel et algébrique dans des registres analytique, algébrique et numérique par l'utilisation des représentations analytique et algébrique des fonctions.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(12)] Décision de l'utilisation du calculus de limite de la différence de deux fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math> pour déterminer l'approximation locale d'ordre 1 de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0.</p> <p>[(13)] Existence de la fonction <math>\varepsilon</math>.</p> <p>[(14)] Décision de l'utilisation de l'expression d'une fonction <math>h</math></p> <p>[(15)-(16)-(17)] Calculus de la valeur de la fonction <math>h</math> en 0</p> <p>[(18)-(19)-(20)-(21)] Calcul du nombre dérivé de la fonction <math>h</math> en 0.</p> <p>[(22)] Usage d'une connaissance disponible, et plus précisément, la propriété de fonctions négligeables (*)</p> <p>(*) On a : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = 0</math> donc il existe <math>\alpha &gt; 0</math> et il existe une fonction <math>\varepsilon</math> telle que pour tout <math>x \in ]-\alpha, \alpha[</math>, <math>F(x) = G(x) \cdot \varepsilon(x)</math> avec <math>\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0</math></p> <p>L'usage de cette formule du répertoire didactique du Supérieur (plus précisément du registre des formules) donne l'expression de <math>h</math> en fonction de <math>\varepsilon</math>.</p> <p>[(23)-(24)] Décision d'exprimer l'objet <math>f</math> en fonction de <math>f_1</math></p> <p>Détermination de l'approximation locale d'ordre 1 de <math>f</math> au voisinage de 0 sans la précision d'un voisinage de 0.</p>
---	---

**Tableau 6-10 : analyse des raisonnements produits par le groupe 1 lors de la détermination de l'approximation locale d'ordre 1 de la fonction  $f$**

Ce groupe a produit un raisonnement formellement incomplet par une guidance faible. En effet, les étudiants n'ont pas précisé le voisinage de 0 sur lequel a lieu l'égalité. Cette *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* traduit l'existence des difficultés d'articuler des connaissances et des savoirs relevant des domaines de la topologie et de l'Analyse fonctionnelle.

*Épisode 4 (étapes 5-6-7-8-9-10-11) : calculus de limites et détermination des approximations locales*

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>Étape 5 : calculus de limite</b></p> <p><b>2-a)</b> <b>L25</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} =</math></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2)}{x^2}$ <p><b>L26</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{8}x^2}{x^2}</math></p> <p><b>L27</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x^2} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L28</b> <math>=</math></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x))(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}{x^2[\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x)]} + \frac{1}{8}$ <p><b>L29</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1 + \frac{1}{2}x)^2}{x^2(\sqrt{1+x} + (\frac{1}{2}x + 1))} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L30</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1 - x - \frac{x^2}{4}}{x^2(\sqrt{1+x} + (\frac{1}{2}x + 1))} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L31</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2(\sqrt{1+x} + (\frac{1}{2}x + 1))} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L32</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(\sqrt{1+x} + (\frac{1}{2}x + 1))} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L33</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(\sqrt{1+0} + (0+1))} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L34</b> <math>= \frac{-1}{8} + \frac{1}{8}</math></p> <p><b>L35</b> <math>= 0</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u></p> <p>Le milieu objectif (M<sub>2</sub>) est constitué des représentations analytique et algébrique des objets "fonctions" pour développer un calcul symbolique sur le rapport de deux fonctions. Ce calcul de variation infinitésimale de la fonction f est associé au paradigme [AC].</p> <p>L'expression du calculus de limite du rapport de deux fonctions va prendre le statut d'argument dans le milieu de référence.</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Les étudiants ont développé un calcul formel et algébrique par la mobilisation des registres analytique, algébrique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(25)-(26)] Décision du calculus de limite du rapport de deux fonctions par la simplification de ce rapport.</p> <p>[(27)] Décision de changer la méthode du calcul de limite. Il y a rétroaction des étudiants. En effet, cette méthode amène à une forme indéterminée sans justification de raisonnement.</p> <p>[(28)-(29)-(30)-(31)-(32)-(33)-(34)-(35)] Calculus de limite du rapport des fonctions par l'utilisation de la méthode de l'expression conjuguée qui est une connaissance mobilisable du Secondaire.</p> <p>Dans l'étape (33), les étudiants ont justifié le calculus de limite par le remplacement de variable x par la valeur 0</p>
<p><b>Étape 6 : détermination d'une approximation de la fonction f d'ordre 2 au voisinage de 0</b></p> <p><b>2-b)</b></p> <p><b>L36</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0</math></p> <p><b>L37</b> <math>\frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = \varepsilon(x)</math> avec <math>\varepsilon(x) : I \rightarrow R</math> tel que <math>\varepsilon(x) \rightarrow 0</math> qd <math>x \rightarrow 0</math></p> <p><b>L38</b> <math>f(x) - f_2(x) = x^2 \varepsilon(x)</math></p> <p><b>L39</b> Donc <math>f(x) = x^2 \varepsilon(x) + f_2(x)</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Dans le milieu de référence, l'expression du calculus de limite du rapport de deux fonctions prend le statut d'argument. Il donne une approximation d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0. Cette interprétation de l'expression de calcul de limite est associée au changement de paradigme [AC] à [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotiques</u></p> <p>À partir d'un calcul développé dans des registres analytique, algébrique et numérique, les étudiants ont donné une nouvelle représentation analytique de la fonction f.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(36)] Décision de l'usage de l'expression du calculus de limite pour déterminer l'expression demandée.</p> <p>[(37)] Utilisation de la connaissance disponible : la propriété de fonctions négligeables. Ce raisonnement est formellement incomplet. En effet, les étudiants sont confrontés au problème lié à la notion de voisinage. Ils n'introduisent pas le voisinage pour lequel la fonction <math>\varepsilon(x)</math> doit être définie</p> <p>[(38)-(39)] Expression de f en fonction de f<sub>2</sub>.</p>

<p><b>Étape 7 : calculus de limite du rapport de deux fonctions</b></p> <p><b>3-a) L40</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} =</math></p> <p><b>L41</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)}{x^2} =</math></p> <p><b>L42</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x))(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}{x^2(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}</math></p> <p><b>L43</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1 + \frac{1}{2}x)^2}{x^2(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}</math></p> <p><b>L44</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{4} \cdot \frac{1}{x^2(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}</math></p> <p><b>L45</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(\sqrt{1+x} + (1 + \frac{1}{2}x))}</math></p> <p><b>L46</b> <math>= -\frac{1}{8}</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Le milieu objectif est constitué des représentations analytiques et algébriques de fonctions <math>f</math> et <math>f_2</math>. Les étudiants ont développé un calcul symbolique du rapport de la variation infinitésimale de la fonction <math>f</math>. Les procédures de deux paradigmes [AI] et [AC] sont résumés dans cette expression du calculus de limite.</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Les étudiants ont développé le calculus de limite dans les registres algébrique, analytique et numérique sans vérifier les étapes de leur raisonnement.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(40)-(41)] Décision de l'utilisation de la méthode de l'expression conjuguée</p> <p>[(42)-(43)-(44)-(45)-(46)] Calculus de limite du rapport de deux fonctions par simplification de ce rapport.</p>
<p><b>Étape 8 : détermination d'une approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0 par la mise d'un lien entre cette fonction et son approximation polynômiale d'ordre 1</b></p> <p><b>3-b)</b></p> <p><b>L47</b> On a : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}</math></p> <p><b>L48</b> Donc <math>\exists \varepsilon(x) : I \rightarrow R</math> tel que <math>\varepsilon(x) \rightarrow 0</math> qd <math>x \rightarrow -\frac{1}{8}</math></p> <p><b>L49</b> D'où <math>\frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{8} + \varepsilon(x)</math></p> <p><b>L50</b> <math>f(x) - f_1(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)</math></p> <p><b>L51</b> <math>f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) + f_1(x)</math></p>	<p><u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Dans le milieu de référence, les étudiants interprètent l'expression analytique représentant le résultat du calcul symbolique du rapport de la variation infinitésimale de la fonction <math>f</math> sur un changement infinitésimal de la variable <math>x</math>. Cet aspect est associé au changement de paradigme de [AC] au paradigme [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Cette interprétation de l'expression analytique nécessite de recourir au registre analytique afin de la mettre en relation avec les deux fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math>.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(47)] Décision de l'usage de l'expression du calculus de limite en tant que statut d'argument pur déterminer la nouvelle représentation analytique de la fonction <math>f</math>.</p> <p>[(48)] Utilisation de la fonction <math>\varepsilon</math>. Le symbole <math>\varepsilon</math> désigne un objet mathématique : une fonction définie sur un intervalle <math>I</math>. L'égalité <math>\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{8}} \varepsilon(x) = 0</math> prouve l'existence d'une <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i> chez les étudiants de ce groupe.</p> <p>[(49)-(50)-(51)] Mobilisation de la connaissance disponible. En effet, ces étudiants font usage de la propriété de fonctions négligeables.</p> <p>Ce groupe a produit un raisonnement formellement incomplet. Les étudiants n'ont pas précisé le voisinage sur lequel la fonction <math>f</math> est définie par son approximation au voisinage de 0.</p>
<p><b>Étape 9 : étude la position relative de deux représentations graphiques de fonctions</b></p>	<p><u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>La représentation analytique de la différence de deux fonctions prend le statut d'argument dans le milieu de</p>

<p><b>3-c) L52</b> <math>f(x) - f_1(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) + f_1(x) - f_1(x)</math></p> <p><b>L53</b> <math>= -\frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)</math></p> <p><b>L54</b> <math>= -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)</math></p> <p><b>L55</b> <math>= x^2\left(-\frac{1}{8} + \varepsilon(x)\right)</math></p> <p><b>L56</b> Si <math>\varepsilon(x) - \frac{1}{8} &gt; 0</math> donc <math>f(x) - f_1(x) &gt; 0</math></p> <p><b>L57</b> Donc <math>C_f</math> est au-dessus de <math>C_{f_1}</math></p> <p><b>L58</b> Si <math>\varepsilon(x) - \frac{1}{8} &lt; 0</math> donc <math>f(x) - f_1(x) &lt; 0</math></p> <p><b>L59</b> Donc <math>C_f</math> est au-dessous de <math>C_{f_1}</math></p>	<p>référence (M<sub>1</sub>). Les étudiants interprètent géométriquement cette représentation analytique par l'étude de son signe. Ainsi, ils précisent les positions relatives des représentations graphiques de ces objets mathématiques : les fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math>. Nous pouvons dire que ce travail mathématique est piloté par les paradigmes [AI] puis [AG]. Ils amènent ce groupe à une difficulté d'ordre cognitif.</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Le changement de registres est lié au paradigme [AG] à travers l'interprétation d'un calcul algébrique dans le domaine de géométrie. Ce changement induit une complexité chez ces étudiants. Ils n'ont pas la capacité d'articuler les registres analytique, algébrique, numérique et géométrique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(52)-(53)-(54)] Décision de l'usage du signe de la différence de deux fonctions pour préciser les positions relatives de leurs représentations graphiques. Les étudiants présentent l'expression de l'erreur sous ses deux formes.</p> <p>[(55)] Rétroaction sur la représentation analytique de cette différence de deux fonctions. Ce groupe donne l'expression sous forme de produit en mettant <math>x^2</math> en facteur.</p> <p>[(56)-(57)-(58)-(59)] Décision de l'usage du signe de l'expression <math>[\varepsilon(x) - \frac{1}{8}]</math> pour déterminer les positions relatives de deux courbes. Pour ces étudiants, la formulation de la différence de deux fonctions en produit prouve l'existence <i>d'erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i> liée à l'expression du reste.</p>
<p><b>Étape 10 : détermination des valeurs des dérivées successives de la fonction <math>f</math> en 0</b></p> <p><b>6-a)</b></p> <p><b>L60</b> <math>f(0) = 1,</math></p> <p><b>L61</b> <math>f'(x) = (\sqrt{1+x})'</math></p> <p><b>L62</b> <math>= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}</math></p> <p><b>L63</b> Donc <math>f'(0) = \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L64</b> <math>f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)'</math></p> <p><b>L65</b> <math>= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}}</math></p> <p><b>L66</b> <math>= \frac{-1}{4\sqrt{1+x}}</math></p> <p><b>L67</b> <math>= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}</math></p> <p><b>L68</b> <math>= -\frac{1}{4} (1+x)^{-\frac{3}{2}}</math></p> <p><b>L69</b> <math>f''(0) = -\frac{1}{4}</math></p> <p><b>L70</b> <math>f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right)'</math></p> <p><b>L71</b> <math>= \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}}</math></p> <p><b>L72</b> <math>= \frac{3}{8} (1+x)^{-\frac{5}{2}}</math></p>	<p><u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Au niveau du milieu M<sub>2</sub>, ce groupe a effectué un calcul algébrique généralisé par l'usage des règles du calcul de la dérivée d'une fonction sous forme d'une fonction puissance. Ensuite, il a réalisé un calcul algébrique-numérique en remplaçant d'une variable <math>x</math> par la valeur. Ces étudiants ont produit un raisonnement lié au travail s'inscrivant dans le paradigme [AC].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Les étudiants calculent les dérivées successives de la représentation analytique de la fonction <math>f</math> afin de produire un calcul numérique. Ils ont développé leur raisonnement dans les registres analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(60)] Présentation de la valeur de la fonction <math>f</math> en 0.</p> <p>[(61)-(62)-(63)] Décision de calculer la fonction dérivée, pour ensuite donner sa valeur en 0.</p> <p>[(64)-(65)-(66)-(67)-(68)] Calcul de la fonction dérivée seconde de <math>f</math> à partir de la fonction dérivée première. En étape (66), il y a une rétroaction sur une erreur du calcul. En</p>



<p><b>L73</b> <math>f'''(0) = \frac{3}{8}</math></p>	<p>étape (67), il y a une formulation de la représentation analytique de la fonction dérivée <math>f</math> afin de calculer ses dérivées successives. Ce groupe fait usage de la dérivée d'une fonction puissance pour calculer sa dérivée.  <b>[(69)]</b> Calcul de la dérivée seconde de la fonction <math>f</math> pour déterminer sa valeur en 0.  <b>[(70)-(71)-(72)-(73)]</b> Calcul de la fonction dérivée troisième de <math>f</math> pour déterminer sa valeur en 0.</p>
<p><b>Étape 11 : détermination des approximations polynômiales <math>f</math> au voisinage de 0 en fonction de ses dérivées en ce point</b></p> <p><b>6-b)</b>  <b>L74</b> <math>f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x</math>  <b>L75</b> <math>= f(0) + f'(0)x</math></p> <p><b>6-c)</b>  <b>L76</b> <math>f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2</math>  <b>L77</b> <math>= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2</math></p> <p><b>6-d)</b>  <b>L78</b> <math>f_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3</math>  <b>L79</b> <math>= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3</math></p>	<p><u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u>  Au niveau du milieu de référence, les étudiants remplacent les coefficients (données numériques) par des symboles. Cette méthode s'inscrit dans le paradigme [AI].  <u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>  Les étudiants mobilisent des registres analytique, algébrique et numérique lors de la transformation des expressions algébriques.  <u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(74)-(75)]</b> Détermination de la représentation algébrique de la fonction <math>f_1</math> sous forme d'un polynôme ayant pour coefficients les valeurs de <math>f</math> et de sa fonction dérivée en 0.  <b>[(76)-(77)]</b> Détermination de la représentation algébrique de la fonction <math>f_2</math> sous forme d'un polynôme ayant coefficients les valeurs de <math>f</math> et ses fonctions dérivées première et seconde en 0.  <b>[(78)-(79)]</b> Détermination de la représentation algébrique de la fonction <math>f_3</math> sous forme d'un polynôme ayant coefficients les valeurs de la fonction <math>f</math> et de ses fonctions dérivées première, seconde et troisième en 0.</p>

**Tableau 6-11 : analyse des raisonnements produits par le groupe 1 lors du calculus de limites et de la détermination des approximations locales**

Ce groupe a produit des pas de raisonnements de nature syntaxique/sémantique lors du calculus de limite d'une fonction en contrôlant la validité de la méthode utilisée. En effet, il a décomposé le quotient de fonctions sous la forme d'une somme de trois quotients. Par passage à la limite, cette transformation fait apparaître une forme indéterminée. Alors, il mobilise la méthode de l'expression conjuguée.

Lors de blocage (003E-étape2), les étudiants sollicitent l'enseignante. Par son intervention, elle amène les étudiants à s'interroger sur les manières de traduire ces résultats obtenus du calculus de limite. De ce fait, ils mobilisent des objets pour étudier les fonctions  $f$  et  $f_1$  dans le milieu de référence ( $M_{-1}$ ). Le rôle de l'enseignante est lié aux travaux de Bloch (1999) qui a précisé le travail de professeur au niveau du milieu de référence.

Malgré cet échange, ce trinôme ne parvient pas à mobiliser la technique adéquate pour formaliser l'expression de la fonction  $f$ . Il n'est pas capable de porter des réflexions sur des

connaissances permettant l'évolution de savoir entre le milieu objectif - le milieu de référence. L'écriture de l'expression de la fonction  $h$  sous la forme de  $[l \times \varepsilon(x)]$  traduit l'existence d'un obstacle lié au contrat didactique.

Nous remarquons que ce groupe est confronté au problème lié à l'usage de la propriété des fonctions négligeables. Après une guidance faible, il a produit un raisonnement formellement incomplet. Cet usage automatique de la méthode du registre des formules (plus précisément la propriété de fonctions négligeables) traduit l'existence d'une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction. En effet, le concept des fonctions négligeables n'a de sens qu'au voisinage d'un point bien déterminé.

Nous pouvons conclure qu'il existe des difficultés récurrentes éprouvées par ce trinôme en rapport avec la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction.

#### II.3.2.2 Analyse des raisonnements du groupe 4

Nous choisissons de conduire une analyse détaillée des raisonnements produits par le groupe 4. Il est le seul groupe ayant essayé de prouver l'unicité d'approximation locale d'une fonction. Ce groupe a développé les mêmes procédures présentées dans la partie analyse *a priori* lors du calcul des limites des fonctions :  $x \mapsto f(x) - f_1(x)$ ,  $x \mapsto \frac{f(x)-f_1(x)}{x}$  et  $x \mapsto \frac{f(x)-f_2(x)}{x^2}$ . Par contre, ces étudiants sont confrontés à une difficulté liée au calcul de limite de la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)-f_1(x)}{x^2}$ . En outre, ils ont produit un raisonnement formel complet lors de l'interprétation des expressions du calcul de limite. Ils ont produit un raisonnement en situation adidactique valide lors de la détermination des approximations de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Par exemple, dans le cas de son approximation d'ordre 1, le raisonnement produit est identique à la procédure présentée dans la partie analyse *a priori*. En plus, ils donnent ces approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 par l'utilisation de deux symboles de l'expression du reste.

Nous choisissons de présenter les épisodes exprimant les difficultés de ce groupe.

**Étape 2 : calcul de limite de la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)-f_1(x)}{x^2}$**

Ce groupe a effectué le calcul de limite de la fonction ( $x \mapsto \frac{f(x)-f_1(x)}{x^2}$ ) indépendamment l'un de l'autre. Chacun d'eux utilise la méthode de l'expression conjuguée et il trouve des valeurs différentes :  $(-\frac{1}{4})$ ,  $(-\frac{1}{8})$  et 0. Au moment de la décision de rédiger leur raisonnement dans la copie de synthèse, il commence le débat entre eux. Ils pensent que le résultat du calcul de limite doit être égal à 0 comme les questions précédentes ((1-b) et (2-a)).

**Épisode (phase – étape) : demande d'aide auprès de l'enseignante**

Pour ceci, ils demandent l'aide auprès de l'enseignante afin d'identifier l'origine de leur erreur.

001 E : Madame, il faut toujours trouver des limites égales à 0 ?  
 002 P : Non, pourquoi ?  
 003 E : Nous croyons que nous avons commis une erreur du calcul, nous n'avons pas trouvé 0.  
 004 P : En mathématique, il ne faut pas effectuer des pré-jugements.  
 005 E : Puisque dans la question suivante, il faut déduire l'expression de f.  
 006 P : Et alors quel est le problème ? Il y a un passage de limite finie à une expression. Qu'est-ce que nous devons faire ?  
 (Les étudiants ne répondent pas.)  
 007 P : Il faut faire quoi ?  
 008 E : Il faut trouver égale à 1 pour utiliser la dernière formule existante au tableau.  
 (elle désigne la formule de relation de comparaison des fonctions)  
 009 P : La dernière ? Comparaison ? Mais tu travailles au voisinage de 0 !  
 010 E : Ah, oui.  
 011 P : Fais attention.  
 012 E 2 (Gofrane) : Égale à  $\frac{-1}{4}$   
 013 E1 : Non, c'est égal à 1  
 014 P : Comment tu as trouvé 1 ?  
 015 E1 : Non, c'est bon, ce n'est pas égal à 1. (L'étudiante en train de contrôler son raisonnement).  
 016 P : Et toi, tu as trouvé  $\frac{-1}{4}$ , je veux voir avec toi ta méthode du calcul. (L'enseignante désigne l'étudiante 2)  
 017 E 2 : Voilà madame mon travail.  
 018 P : Je refais alors avec toi les étapes de ton calcul de limite. Pourquoi tu as écrit  $(1+x)$  ?  
 019 E 2 : J'ai utilisé le conjugué.  
 020 P : Regardez, normalement d'après votre rédaction, vous avez  $\frac{-1}{4}$  sur  $(1+1)$ , c'est quoi alors ?  
 021 E 2 : Ah, c'est  $\frac{-1}{4}$  sur 2 alors c'est égal à  $(\frac{-1}{8})$ , je vais corriger mon travail, c'est  $\frac{-1}{8}$  et pas  $\frac{-1}{4}$ .  
 022 P : C'est bien, continuez alors les autres questions.  
 023 E2 : Merci madame.

**Tableau 6-12 : transcriptions des échanges du groupe 4 avec l'enseignante lors du calculus de limite**

L'enseignante pose d'autres questions pour les aider à surmonter cette difficulté et trouver eux-mêmes *l'erreur d'ordre calculatoire* du calculus de limite. Les étudiants indiquent que le résultat doit être égal à 0. Cette réflexion sur le calculus de limite résulte des questions précédentes que la valeur trouvée est égale à 0. En effet, ces étudiants se remémorent le rappel de début de séance et les premières questions liées au calcul de limite. Ce « pré-jugement » du résultat du calcul de limite d'une fonction traduit l'existence d'un obstacle lié au contrat didactique.

L'enseignante intervient pour aider chacun des étudiants de ce trinôme à contrôler leurs procédures du calcul de limite. Ils ont utilisé la méthode de l'expression conjuguée du registre des formules du répertoire didactique du Secondaire.

Une étudiante a effectué une faute de calcul lors de simplification de ce calcul de limite. Elle a produit un pas de raisonnement de nature syntaxique, par une guidance faible.

Ce groupe corrige sa faute de calcul en mettant en jeu les moyens du contrôle effectués par l'intervention de l'enseignante dans le milieu d'apprentissage (M<sub>0</sub>).

**Étape 4 : étude de la position relative de deux courbes représentatives de fonctions  $f$  et  $f_1$**

Ce groupe ne parvient pas à comprendre la question proposée. Le changement de paradigme et le passage du milieu M<sub>2</sub> au milieu M<sub>1</sub> amène à une complexité chez ces étudiants. En effet, il s'agit de passer d'un calcul algébrique et formel dans le paradigme [AI] à une interprétation géométrique dans les paradigmes [AI] puis [AG]. Ce groupe étudie cette expression analytique à partir de l'étude du signe pour conduire un travail spécifique selon un aspect géométrique.

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>3-c) L38</b> On a <math>f(x) = \sqrt{1+x} &gt; 0, x^2 &gt; 0</math>  <b>L39</b> Donc la position de <math>C_{f_1}</math> dépend du signe de <math>\varepsilon(x)</math>  <b>L40</b> Or  <math display="block">f_1(x) = \frac{1}{8}[8f(x) + x^2 - 8x^2 \cdot \varepsilon(x)]</math>  <b>L41</b> On a : <math>f(x) - f_1(x) = [\varepsilon(x) - \frac{1}{8}]x^2</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u>            La différence de deux fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math> prend le statut d'argument pour préciser la position de ses représentations graphiques dans le milieu de référence. Ce groupe interprète cette expression analytique à partir de l'étude du signe pour conduire un travail spécifique selon un aspect géométrique dans le paradigme [AI] puis [AG].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>            Ce raisonnement incomplet est développé dans les registres analytique et algébrique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(38)]</b> Précision des signes des fonctions <math>f</math> et <math>x^2</math>. Cette étape traduit que ce groupe va étudier directement le signe des fonctions. Il est confronté à un problème lié à l'usage d'une technique enseignée au Secondaire. Autrement dit, la position de deux courbes est précisée à partir de l'étude du signe de la différence de deux fonctions.  <b>[(39)]</b> Décision de la précision de la position d'une courbe. Ce groupe ne parvient pas à comprendre la question proposée. Le changement de registre amène à une complexité chez ces étudiants. En effet, le passage d'un calcul algébrique et formel à une interprétation géométrique amène à un travail sur de différents objets.  <b>[(40)-(41)]</b> Usage de l'expression analytique favorisant le lien entre les deux objets "les fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math>".            La différence de deux fonctions découle de la représentation analytique de la fonction <math>f_1</math>.            L'étape (41) traduit un problème chez ce groupe lié à la notion de voisinage. En effet, l'écriture de <math>x^2</math> en facteur prouve qu'il existe une <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i> liée à la notion de fonctions négligeables.</p>

**Tableau 6-13 : analyse des raisonnements produits par le groupe 4 lors de la détermination de la position relative de deux courbes**

**Épisode 4 : demande d'aide auprès de l'enseignante**

Les étudiants discutent entre eux à propos du signe de la différence des deux fonctions. Lors de ce moment de blocage, ils décident de demander l'aide auprès de l'enseignante. L'étudiante avoue qu'elle ne sait pas le signe de la fonction  $\varepsilon(x)$ .

001 E : Pour préciser la position de la courbe  $C_f$  par rapport à  $C_{f_1}$ , nous voulons faire la différence entre  $f(x)$  et  $f_1(x)$  à partir de la question précédente (3-b). Nous avons trouvé  $[f(x) - f_1(x) = x^2\varepsilon(x) - \frac{x^2}{8}]$ , mais on ne sait pas le signe de  $\varepsilon(x)$ .  
 (Elle désigne l'expression rédigée dans sa feuille)  
 002 P : C'est-à-dire vous ignorez le signe de la fonction  $\varepsilon(x)$  si positive ou négative ? C'est ça ?  
 003 E : Oui madame.  
 004 P : C'est une fonction qui tend vers 0 positivement ou négativement ? Pour vous, vous avez dit que la position de la courbe  $C_f$  par rapport à  $C_{f_1}$  va dépendre de quel signe ?  
 005 E : Va dépendre de  $\varepsilon(x)$  car  $x^2$  c'est toujours positif.  
 006 P : Vous pouvez répondre ainsi ?  
 007 E : Il y a deux cas ?  
 008 P : ça dépendre du signe de  $\varepsilon(x)$  puisque la fonction  $x^2$  est toujours positif ! Donc va dépendre toujours de  $\varepsilon(x)$  ?  
 (L'enseignante est étonnée).  
 010 E : Oui.  
 011 P : Je veux une réponse logique, c'est tout.

**Tableau 6-14 : transcriptions des échanges de l'enseignante avec le groupe 4 lors de la précision des positions relatives de deux courbes**

Cette interaction de l'enseignante avec ce trinôme prouve l'existence d'une difficulté liée à l'expression du reste et plus précisément à la fonction  $\varepsilon(x)$ . En effet, ces étudiantes cherchent le signe de la fonction  $\varepsilon(x)$  pour déterminer la position relative de deux courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $f_1$ . Par contre, l'enseignante a défini la fonction  $\varepsilon(x)$  à partir de l'expression  $[\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0]$  lors de l'introduction du concept de la comparaison des fonctions et le rappel réalisé au début de la séance. Le rappel sur les fonctions négligeables a un impact sur ce groupe. Nous pouvons dire qu'il existe un obstacle lié au choix didactique de l'enseignante lors de l'introduction de la fonction  $\varepsilon(x)$ .

**Étape 5 : rétroaction sur l'étude de la position relative des représentations graphiques de deux fonctions**

L'intervention de l'enseignante aide les étudiants à mobiliser la propriété des fonctions négligeables du registre des formules du répertoire didactique du Supérieur. À partir de cette propriété, ils précisent le signe de la différence de deux fonctions, qui est nécessairement

négatif. Ces moyens du contrôle amène à la production d'un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par une guidance faible.

**Étape 6 : preuve de l'unicité d'approximation d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0**

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>4) L73</b> Raisonnement par l'absurde  <b>L74</b> Soit <math>P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2</math>  <b>L75</b> <math>\neq f_2(x)</math>  <b>L76</b> Vérifiant <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x} = 0</math>  <b>L77</b> Avec <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x} = 0</math>  <b>L78</b> On a : <math>0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x}</math>  <b>L79</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x) + P_2(x) - f_2(x)}{x^2}</math>  <b>L80</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2}</math>  <b>L81</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - f_2(x)}{x^2}</math>  <b>L82</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a_0 - 1) + x \cdot (a_1 - \frac{1}{2}) + x^2 \cdot (a_2 + \frac{1}{8})}{x^2}</math>  <b>L83</b> <math>= 0</math>  <b>L84</b> Avec <math>(a_0 - 1) = 0</math>  <b>L85</b> <math>(a_1 - \frac{1}{2}) = 0</math>  <b>L86</b> <math>a_2 + \frac{1}{8} = 0</math>  <b>L87</b> Donc <math>a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}</math> et <math>a_2 = -\frac{1}{8}</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u>            Ce groupe effectue un raisonnement par l'absurde. Il suppose qu'il existe une autre approximation polynômiale de la fonction <math>f</math> d'ordre 2 au voisinage de 0 en vue de mettre en défaut la validité de son hypothèse. Cette représentation algébrique, les représentations analytique et algébrique des fonctions <math>f</math> et <math>f_2</math> ainsi que l'expression analytique de limite prennent le statut d'argument au niveau de milieu de référence. Un travail, du calcul algébriste, est appliqué avec une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Le travail s'inscrit dans le paradigme [AC] puis [AI]. Ainsi, les approximations polynômiales de la fonction <math>f</math> d'ordre 2 au voisinage de 0 sont définies par des variations infinitésimales.</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>            Ce raisonnement par l'absurde mobilise les registres algébrique, analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(73)]</b> Décision de l'usage d'une technique du répertoire didactique et plus précisément le raisonnement par l'absurde.  <b>[(74)-(75)-(76)-(77)]</b> Proposition de l'existence d'une autre approximation polynômiale de la fonction <math>f</math> d'ordre 2 au voisinage de 0 vérifiant les mêmes conditions que la fonction <math>f_2</math>.            Dans les étapes (74) et (75), ce groupe met un lien entre les fonctions <math>f</math> et <math>f_2</math> par une réflexion sur les écritures et la nature de ces objets mathématiques.  <b>[(78)]</b> Décision de l'utilisation de l'expression du calculus de limite du rapport de deux fonctions.  <b>[(79)-(80)-(81)]</b> Proposition d'un autre raisonnement vérifiant le calculus de limite du rapport de la variation infinitésimale de la valeur de la fonction <math>f</math> sur un polynôme de degré 2.            Dans les étapes (79) et (80), ce groupe utilise une technique algébrique du Secondaire par l'ajout et la soustraction du même objet "le polynôme <math>P_2</math>" dans le quotient des fonctions. Il mobilise ses connaissances antérieures et plus précisément les règles du calcul algébrique et formel du répertoire didactique du Secondaire. Ce groupe ne justifie pas son raisonnement.  <b>[(82)-(83)]</b> Réflexion sur les écritures des objets donnés "les fonctions polynômiales <math>f_2</math> et <math>P_2</math>".  <b>[(84)-(85)-(86)-(87)]</b> Calculus des valeurs des coefficients du polynôme <math>P_2</math>.</p>

	Ce groupe ne donne pas les moyens du contrôle et de validation de son raisonnement par l'absurde.
--	---

**Tableau 6-15 : analyse des raisonnements produits par le groupe 4 lors de preuve de l'unicité d'approximation locale d'ordre 2 de la fonction au voisinage de 0**

Ce trinôme a produit des pas de raisonnements de nature sémantique et syntaxique lors du calculus de limite d'une fonction en justifiant certaines étapes de son calcul algébrique et formel. En revanche, il est confronté à un problème au niveau du calculus de limite de la fonction  $[\frac{f(x)-f_1(x)}{x^2}]$ . Il y a discussion au sein de groupe sur la valeur trouvée. En effet, ces étudiantes décident que cette valeur doit être égale à 0. Pour ceci, elles demandent l'intervention de l'enseignante pour identifier l'erreur commise. Le pré-jugement sur le résultat trouvé du calcul de limite prouve l'existence d'un obstacle didactique lié au contrat didactique.

Par ailleurs, le contrôle sur la procédure du calcul de limite effectué avec l'enseignante traduit l'existence d'une *erreur d'ordre calculatoire* lors de l'usage de la méthode de l'expression conjuguée.

Ce trinôme a produit des pas de raisonnements de nature syntaxique lors de l'appropriation du concept des fonctions négligeables. En effet, il donne un sens à ce concept mathématique par la précision de voisinage et de l'expression du reste selon ses deux symboles spécifiques :  $\varepsilon(x)$  et « o » [ $o(x)$  ou  $o(x^2)$ ].

Nous remarquons que ce groupe est confronté à une difficulté liée à l'expression du reste et plus précisément à la fonction  $\varepsilon(x)$ . En effet, il cherche le signe de cette fonction afin d'étudier le signe de l'expression analytique  $[(\varepsilon(x) - \frac{1}{8}) \cdot x^2]$ . A partir de cette étude, il donne le signe de l'expression  $[f(x) - f_1(x)]$  afin de préciser la position relative des représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $f_1$ . Ce problème traduit l'existence *d'une erreur d'ordre cognitif et conceptuel* qui relève d'un obstacle lié au choix didactique de l'enseignante. En effet, l'enseignante donne une seule caractéristique de la fonction  $\varepsilon(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ ) lors de l'appropriation du concept des fonctions négligeables.

Une guidance faible de l'enseignante aide ces étudiantes à surmonter cette difficulté par une rétroaction sur le caractère négligeable de la fonction  $\varepsilon(x)$  au voisinage de 0.

Conclusion

Le modèle d'analyse du raisonnement, introduit par Bloch et Gibel (2011) et développé dans le chapitre 3 de la partie théorique, nous a permis de conduire une analyse quantitative et qualitative des raisonnements produits par les 8 trinômes. Cette analyse didactique nous amène à conclure que la majorité des étudiants sont confrontés à des difficultés liées à la dialectique

technique/sens lors de l'appropriation du concept de fonctions négligeables. Ces problèmes résultent du passage du niveau de milieu d'objectif à celui du milieu de référence. Et plus précisément, ces étudiants ne parviennent pas à interpréter des expressions analytiques soit les résultats du calculus de limite du quotient des fonctions afin de déterminer les approximations locales d'ordre 1, 2 et 3 d'une fonction au voisinage d'un réel, soit l'approximation locale d'ordre 2 au voisinage de 0 afin de préciser la position relative de deux courbes. Nous pouvons conclure que le changement de paradigmes de l'Analyse standard (de [AC] à [AI] et de [AI] à [AG]) amène à l'existence d'une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel*. Par exemple, certains groupes mobilisent la notion de fonctions négligeables sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. Une analyse détaillée des raisonnements produits par les groupes 1 et 4 nous a permis de conclure que ces étudiants sont confrontés à une difficulté liée à l'expression du reste et notamment à la fonction  $\varepsilon(x)$ .

L'analyse en termes de raisonnements nous a permis d'identifier les connaissances erronées mobilisées par les étudiants, ainsi que les habilités de certains groupes à s'appuyer sur leurs connaissances, du répertoire didactique, par la mise d'un lien entre des calculs effectués et les expressions des fonctions.

En conclusion, le modèle d'analyse du raisonnement nous a permis d'identifier et de caractériser les difficultés des étudiants confrontés à cette situation. À partir de ces analyses, nous avons remarqué que ces difficultés apparaissent lors du passage du niveau du milieu objectif au niveau du milieu de référence, ainsi que lors du changement de paradigme par l'interprétation des résultats des calculs effectués dans le milieu M-2.

#### ***II.4. Présentation des raisonnements lors de la phase de mise en commun des procédures de résolutions***

Après avoir ramassé les copies, l'enseignante commence la correction des différentes questions proposées dans la situation. Le rôle principal de l'enseignante dans cette étape est de désigner les groupes qui vont rédiger leur raisonnement au tableau, ainsi que de guider le débat entre les étudiants de la classe.

Après quatre-vingt-dix minutes, l'enseignante commence la mise en commun par une intervention :

*Maintenant c'est midi, (1) il ne nous reste pas beaucoup du temps pour corriger ce problème mathématique. (2) Pour ceci, je vais corriger moi-même la première question du calcul de limite qui était déjà résolu par tous les groupes. (3) Ensuite, chaque groupe va désigner un représentant pour corriger chacune des questions proposées. Pour gagner du temps, (4) je vais ensuite moi-*



même étudier l'unicité de l'existence de la fonction  $f_2$  et de corriger les dernières questions (6-a-b-c-d). (5) Nous laissons l'usage de graphique pour la prochaine séance.

Nous conduisons une analyse de cette intervention de l'enseignante par une étude de sa nature, sa spécificité et sa fonction. Nous présentons cette analyse dans ce tableau :

Nature et spécificité de l'intervention	Fonction de l'intervention
<p>La manière de présenter la correction de la situation 1</p> <p>(1) Formulation des raisons justifiant le changement de modalité de mise en commun des procédures.</p> <p>(2) Décision de corriger la première question par l'enseignante.</p> <p>(3) Organisation de la mise en commun des productions</p> <p>(4) Décision de finaliser la correction des questions.</p> <p>(5) Information sur l'usage du graphique pour terminer cette situation.</p>	<p>L'enseignante explicite le changement de l'organisation de la correction des différentes questions au tableau. Ce changement est dû aux contraintes temporelles. Elle présente les étapes de présentation de la correction des différentes questions proposées dans cette situation par une chronologie :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La première question (1-a) sera corrigée par l'enseignante.</li> <li>- Un représentant de chaque groupe va rédiger leur raisonnement au tableau. Chacun d'eux va corriger les questions de (2-a) jusqu'à (3-c).</li> <li>- Élimination de la correction des questions (5-a-b)</li> <li>- Les autres questions (4) seront corrigées par l'enseignante.</li> <li>- La situation sera terminée dans une autre séance du chapitre</li> </ul>

**Tableau 6-16 : la dévolution de la présentation de la correction de la situation**

La question (1-a) concernant le calculus de limite est corrigée au tableau par l'enseignante. Elle effectue le calcul de limite de la différence de deux fonctions selon un aspect purement syntaxique. Ensuite, une représentante du groupe 1 passe au tableau pour écrire leur procédure de résolution de la question (1-b). Ce raisonnement est présenté précédemment dans la partie de l'analyse détaillée des raisonnements (III.3.3). Elle a produit un pas de raisonnement de nature syntaxique par l'usage de la méthode de l'expression conjuguée.

La question (1-c) est corrigée par la représentante du groupe 2 par la production d'un pas de raisonnement articulant les dimensions sémantique et syntaxique en vérifiant l'existence d'un voisinage de 0 et de la fonction  $\varepsilon(x)$ . Cette étudiante a donné deux représentations analytiques d'approximation locale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 en mettant le lien entre ces deux objets mathématiques. En effet, elle donne l'expression du reste sous ses deux formes ( $x\varepsilon(x)$  et  $o(x)$ ).

Les questions (2-a) et (2-b) sont corrigées par la représentante du groupe 4. L'étudiante a produit des pas de raisonnement de nature syntaxique par l'utilisation de la méthode de l'expression conjuguée lors du calculus de limite du rapport de deux fonctions. Par ailleurs, elle précise un voisinage de 0 et les propriétés de la fonction  $\varepsilon(x)$  lors de l'utilisation de fonctions négligeables afin de déterminer l'approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

La représentante du groupe 3 corrige les questions (3-a) et (3-b). Cette étudiante utilise la méthode de l'expression conjuguée lors du calcul de limite du rapport de deux fonctions. Ensuite, elle s'appuie sur cette expression analytique pour mettre le lien entre les deux fonctions  $f$  et  $f_1$ . Elle produit un raisonnement formellement incomplet lors de la détermination d'une approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, elle donne une représentation analytique de cet objet mathématique en exprimant le reste par l'usage de la fonction  $\varepsilon(x)$  et elle ne précise pas un voisinage de 0. Si l'on se réfère à ce groupe, on constate qu'il n'a pas traité la question (3-b).

La question (3-c) est corrigée par un représentant du groupe 7. Cet étudiant s'appuie sur l'expression analytique trouvée précédemment (en question (3-b)) en exprimant le lien entre les deux objets  $f$  et  $f_1$  pour préciser la position relative de ses deux représentations graphiques. Il prouve la différence de ces deux fonctions est négative en vérifiant que le reste ( $o(x^2)$ ) est un terme négligeable. Il interprète cette différence pour produire un raisonnement de nature sémantique. Ce groupe a développé son raisonnement dans la copie de synthèse de leur production.

Après une heure quarante minutes, l'enseignante corrige au tableau la question (4) en expliquant l'utilisation de la méthode du raisonnement par l'absurde.

Ensuite, elle remplace les coefficients polynômiaux dans les  $(f_i)_i$  par des symboles. Ainsi, elle détermine des approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

### ***II.5. Les phases de formulation et de validation***

Après la présentation de chaque représentant d'un groupe de leur raisonnement au tableau, l'enseignante intervient et à ce moment-là il y a une interaction et un débat en classe. Le rôle principal de l'enseignante est de créer un débat en classe à partir d'une guidance faible.

Après la présentation du groupe 1 de leur méthode du calcul de limite du rapport de deux fonctions, l'enseignante intervient et contrôle les différentes étapes de ce raisonnement. À ce moment-là commence le débat en classe.

<b>Le débat lors du calcul de limite du quotient de deux fonctions</b>	<b>Commentaires</b>
<p>001 P : <i>Quelle est la méthode que vous avez utilisée pour ce calcul de limite ?</i></p> <p>002 E1 : <i>La méthode de l'expression conjuguée.</i> (L'enseignante désigne toute la classe)</p> <p>003 P : <i>Votre collègue a adopté la méthode de l'expression conjuguée. Existe-t-il d'autres méthodes à utiliser pour calculer cette limite ?</i></p> <p>004 E2 : <i>Le théorème de l'Hôpital</i></p>	<p>L'enseignante regarde le tableau et demande à l'étudiante de préciser la connaissance mobilisable de son répertoire didactique lors du calcul de limite d'une fonction.</p> <p>Après la réponse de l'étudiante, elle interroge toute la classe sur l'existence d'une autre méthode pour ce type de calcul algébrique et formel.</p>

005 P : Oui, pour $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)}$ c'est égale à $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$	Une étudiante du groupe 4 propose le théorème de l'Hôpital. À ce moment-là, l'enseignante donne oralement cette formule du répertoire didactique du Supérieur.
---	--

**Tableau 6-17 : le débat après la correction de la question (1-b) par le groupe 1**

Les questions liées au calculus de limite du rapport de deux fonctions peuvent être traitées par l'utilisation des connaissances du répertoire didactique du Supérieur.

Après la correction de la question (3-a) par la représentante du groupe 3, cette étudiante regarde la feuille contenant l'énoncé de la question (3-b) sans aucune réaction. À ce moment-là, l'enseignante intervient pour l'aider à surmonter sa difficulté. Nous présentons la transcription de débat entre l'enseignante et cette étudiante lors de la détermination d'approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

<b>Le débat entre l'enseignante et la représentante du groupe 3</b>	<b>Commentaires</b>
<p>001 P : C'est cette expression de <math>\frac{f(x)-f_1(x)}{x^2}</math> qu'on va utiliser pour établir un lien entre les deux fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math>. Tu vas écrire cette expression qui va tendre vers <math>(-\frac{1}{8})</math>. (Aucune réaction de l'étudiante)</p> <p>002 P : Puisque cette fonction va tendre vers <math>(-\frac{1}{8})</math> donc la différence va tendre vers quoi ?</p> <p>003 E : C'est <math>\varepsilon</math></p> <p>004 P : C'est vers 0, oui ou non ? (L'étudiante rédige au tableau <math>\frac{f(x)-f_1(x)}{x^2} - \frac{1}{8}</math>)</p> <p>005 P : Si j'écris la limite ici c'est tend vers 0. Et si j'élimine la limite ?</p> <p>006 E : On va écrire <math>\varepsilon</math></p> <p>007 P : Voilà c'est bien (L'étudiante rédige au tableau : <math>f(x) = \varepsilon(x) \cdot x^2 - \frac{1}{8} + f_1(x)</math>).</p> <p>008 P : Mais tu as ici sur un <math>x^2</math> ! (L'enseignante efface cette expression et elle rédige au tableau : <math>\exists \alpha &gt; 0, \exists \varepsilon</math>, telle que : <math>\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,</math> <math>\frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} + \frac{1}{8} = \varepsilon(x)</math> Donc <math>\frac{f(x)-f_1(x)}{x^2} = \varepsilon(x) - \frac{1}{8}</math> Donc <math>f(x) - f_1(x) = [\varepsilon(x) - \frac{1}{8}] \cdot x^2</math> D'où <math>\forall x \in ]-\alpha; \alpha[, f(x) = f_1(x) - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)</math> avec <math>\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0</math></p> <p>009 P : Qu'est-ce que ce qu'on peut aussi appeler ce terme ? (Elle désigne <math>[x^2\varepsilon(x)]</math>).</p> <p>010 E : C'est petit o.</p>	<p>Au moment de blocage de l'étudiante au tableau, l'enseignante intervient en désignant l'expression du calculus de limite en tant que point de départ pour trouver l'expression analytique demandée. L'étudiante n'a pas trouvé la méthode convenable à utiliser.</p> <p>Devant l'absence de sa réponse, l'enseignante propose de décrire autrement cette expression du calculus de limite par l'étude de sa différence. En effet, elle lui questionne sur l'égalité à trouver.</p> <p>Le guidance faible de l'enseignante amène l'étudiante à réaliser le lien entre le calcul de limite et la détermination de fonctions négligeables. En revanche, elle effectue une <i>erreur d'ordre calculatoire</i>. L'enseignante corrige l'erreur commise par l'étudiante en présentant la représentation analytique d'approximation locale d'ordre 2 de la fonction <math>f</math> au voisinage de 0 avec le symbole spécifique de reste (la fonction <math>\varepsilon(x)</math>).</p> <p>Ensuite, elle l'amène à exprimer ce reste sous la forme de <math>o(x^2)</math> par une guidance faible.</p>

011 P : <i>Petit o de quoi ?</i> 012 E : <i>C'est petit o de <math>x^2</math></i> (L'étudiante rédige l'expression : $f(x) = f_1(x) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ )	
---	--

**Tableau 6-18 : les échanges entre l'enseignante et la représentante du groupe 3 lors de la correction de la question (3-b)**

Ensuite, après une heure quarante-cinq minutes, l'enseignante demande aux autres groupes de corriger la question (3-c) sur la précision de la position relative de deux courbes.

<b>Le débat sur la précision de la position relative de deux représentations graphiques des fonctions <math>f</math> et <math>f_1</math></b>	<b>Commentaires</b>
001 P : <i>Quelle est la position de la courbe représentative de la fonction <math>f</math> par rapport à celle de <math>f_1</math> ?</i> 002 E : <i>Il faut étudier le signe de la différence.</i> 003 P : <i>Groupe 5 vous pouvez passer au tableau pour répondre à cette question (2-c) ?</i> (Un étudiant de groupe 5 répond) 004 E : <i>Madame, nous n'avons pas compris cette question.</i> 005 P : <i>OK, groupe 7 alors va étudier la position de deux groupes.</i> (Un étudiant de groupe 7 passe au tableau et rédige : $\forall x \in ] -\alpha; \alpha[$ , $f(x) - f_1(x) = -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ ) 007 E : <i>On a petit <math>o(x^2)</math> est négligeable.</i> 008 P : <i>D'accord <math>o(x^2)</math> est une quantité négligeable.</i> 009 E : <i>Donc la différence <math>f(x) - f_1(x) &lt; 0</math></i> 010 P : <i>C'est égale toujours à une chose négative vu que <math>o(x^2)</math> est une quantité négligeable. Donc elle n'a pas influé sur la valeur de <math>\frac{x^2}{8}</math>. Donc c'est le signe de <math>\frac{x^2}{8}</math> qui va s'imposer. Donc <math>(-\frac{x^2}{8})</math> est toujours négatif, quelle que soit la valeur de <math>x</math> positif ou négatif.</i>	Un étudiant du groupe 5 avoue à l'enseignante qu'ils n'ont pas répondu à cette question. C'est pourquoi elle désigne le groupe 7 pour rédiger leur raisonnement au tableau. Le représentant de ce groupe a rédigé un pas de raisonnement de nature sémantique. En effet, il interprète le signe de différence de deux fonctions en justifiant que l'expression du reste $o(x^2)$ est négligeable.

**Tableau 6-19 : le débat lors de la précision de la position de deux représentations graphiques de fonctions  $f$  et  $f_1$  au voisinage de 0**

Comme il ne reste que quatre minutes, l'enseignante décide de terminer elle-même la correction des questions (6-a-b-c-d) à cause des contraintes temporelles.

### **II.6. L'institutionnalisation de la formule de Taylor-Young**

À partir des représentations analytiques des approximations polynômiales de la fonction  $f$  au voisinage de 0, l'enseignante introduit le concept de la formule de Taylor-Young. Elle interroge les étudiants pour introduire ce concept mathématique. Elle rédige au tableau les réponses aux questions (6-b-c-d) :

$$f_1(x) = f(0) + f'(0).x$$

$$f_2(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{1}{2}f''(0).x^2$$

$$f_3(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{1}{2}f''(0).x^2 + \frac{1}{6}f'''(0).x^3$$

A ce moment-là, il commence le débat en classe. Nous commençons par la présentation des échanges entre l'enseignante et toute la classe lors de l'introduction de la formule de Taylor-Young dans les tableaux suivantes.

001 P : Comment je pourrai écrire 6 ?

002 E1 : C'est  $2 \times 3$

003 P : C'est quoi aussi  $2 \times 3$  ?

004 E2 : C'est  $1 \times 2 \times 3$

005 P : C'est quoi alors  $1 \times 2 \times 3$  ?

006 E : C'est factoriel 3

007 P : C'est bien c'est factoriel de 3. Donc on peut réécrire  $f_3(x)$  sous la forme de :

$$f_3(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{1}{2}f''(0).x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0).x^3$$

008 P : Et c'est quoi 2 ?

009 E : C'est factoriel 2

010 P : Et ici ? (Elle désigne avec son doigt le dénominateur 1)

011 E : C'est 1 factoriel

012 P : Donc on peut présenter la fonction  $f_3(x)$  sous la forme de  $f_3(x) = \frac{1}{0!}f(0) + \frac{1}{1!}f'(0).x + \frac{1}{2!}f''(0).x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0).x^3$

013 P : Donc je suis face à la forme de quoi ? (Elle rédige le symbole  $\sum$ )

014 E1 : C'est la somme de 0 à 3.

015 E2 : De  $\frac{1}{k!}f^{(k)}(0).x^k$

016 P : C'est bien (L'enseignante écrit au tableau :  $f_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!}f^{(k)}(0).x^k$ )

017 P : Alors, si je regarde par la suite de la même manière la fonction  $f_2$  c'est égale ?

018 E : C'est la somme de  $k$  allant de 0 à 2.

019 P : C'est bien donc on peut écrire :  $f_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!}f^{(k)}(0).x^k$

020 P : Tout à l'heure, on a déjà réexprimé  $f$  en fonction de  $f_2$ . On a trouvé :

$\forall x \in ]-\alpha; \alpha[$ ,  $f(x) = f_2(x) + o(x^2)$ . Alors, si je refais cette expression en remplaçant la fonction  $f_2$  par l'expression précédente, donc la fonction  $f$  au voisinage de 0 s'écrit sous la forme

$$de f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^2)$$

Je vous donne la possibilité de refaire cette partie. Alors si je veux mettre cette expression de la fonction  $f$  en moyen de  $f_3$ , comment je pourrai l'écrire alors sous la forme de

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^3), \forall x \in ]-\alpha; \alpha[$$

021 E : C'est 3 au lieu de 2

022 P : Oui, c'est exactement. Regarde cette expression, pour le polynôme de degré 2, on a ajouté  $o(x^2)$ , et pour celui de degré 3, on a ajouté  $o(x^3)$ . En d'autres termes, si j'avais un calcul

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{x^3}$  sera égale à combien ?

023 E : C'est égal à 0.

024 P : Oui, la limite sera 0 car  $o(x^3)$  s'écrit aussi sous la forme de  $[x^2 \varepsilon(x)]$ .

En général, si je considère ma fonction  $f$  qui est de classe  $C^\infty$ , on peut faire le même travail pour

la fonction  $f_n$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_n(x)}{x^n}$ . Donc, on peut écrire la fonction  $f(x)$  sous la forme

d'une somme de  $k$  allant de 0 jusqu'à  $n$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$  plus petit  $o$  de quoi ?

025 E : C'est petit  $o$  de  $x^n$ .

026 P : C'est bien, c'est  $o(x^n)$ . Donc  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

Ceci est réalisé sous quelle condition ?

027 E : La fonction  $f$  est de classe  $C^n$ .

028 P : Oui, c'est bien la fonction  $f$  doit être de classe  $C^n$  pour écrire cette expression au voisinage de 0.

Donc si une fonction est de classe  $C^n$  au voisinage de 0, elle peut s'écrire de cette forme qu'on l'appelle la formule de Taylor-Young.

(L'enseignante rédige au tableau :

La formule de Taylor-Young

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^n$  sur  $I$ , il existe  $\alpha > 0, \forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \cap I$ , alors la fonction  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  avec  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ .

029 P : Cette expression est l'approximation locale d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

L'expression  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  est appelée la partie régulière ou l'approximation polynômiale d'ordre  $n$  de la fonction  $f$ .

De plus,  $o(x^n)$  est appelé le reste ou l'erreur.

Normalement puisque ma fonction  $f$  est de classe  $C^n$ , alors je sais que je pourrai l'écrire sous la forme de  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$  au voisinage de 0.

Le petit  $o$  révèle l'ordre avec lequel vous êtes en train de le faire. Fais attention, c'est principalement le petit  $o$  qui révèle l'ordre et pas le degré du polynôme. Parce que le polynôme peut être égal à 0. Autrement, c'est le nombre naturel  $n$  de petit  $o$  qui désigne l'ordre du développement limité et ce n'est pas le degré de la partie polynômiale.

Demain, nous allons terminer cette situation par une étude graphique de ces expressions.

**Tableau 6-20 : les traces de l'enseignante au tableau et l'interaction avec toute la classe lors de l'introduction de la formule de Taylor-Young**

L'enseignante présente les représentations des approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 par l'usage des symboles des valeurs de ses dérivées successives en 0. Ensuite, elle questionne les étudiants à propos des valeurs numériques obtenues en vue de reformuler ces expressions par l'usage des symboles.

À partir de la reformulation des entiers naturels 1, 2 et 6 sous la forme des factoriels, les étudiants expriment la partie polynômiale d'approximation locale d'ordre 3 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 par l'usage du symbole de somme de ses coefficients.

L'enseignante s'appuie sur les raisonnements produits par les étudiants pour introduire le concept d'approximation locale d'une fonction. En effet, la mise des liens entre la fonction  $f$  et ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 l'amène à introduire le concept du développement limité déduit de la formule de Taylor-Young. Il existe une évolution des savoirs pour enseigner ce concept mathématique. De ce fait, l'enseignante donne l'intérêt de préciser l'ordre du développement limité qui est lié à l'expression du reste.

Au début de la deuxième séance de l'expérimentation, elle suit son enseignement de la formule de Taylor-Young.

030 P : Hier, nous avons étudié la formule de Taylor-Young pour le cas d'une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0. (L'enseignante rédige au tableau :

$$\text{Pour tout } x \in V(0) \text{ et } f \in \mathbb{C}^n, \text{ on a : } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{Partie régulière ou partie polynômiale}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{reste}}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \cdot \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

031 E : C'est le développement limité d'ordre n de la fonction f

032 P : Oui, mais fait attention, ce développement limité est défini au voisinage de 0. Maintenant, si on considère la fonction f est de classe  $\mathbb{C}^n$  au voisinage d'un réel  $x_0$ , est-ce que je pourrai par la suite exprimer la partie régulière, ainsi que l'erreur au voisinage de  $x_0$  ?

033 E : Oui

034 P : Dans ce cas f(x) comment sera écrite ?

035 E : On remplace 0 par  $x_0$ , comme nous avons fait pour la formule de Taylor-Lagrange.

036 P : C'est bien, dis-moi alors comment je pourrai l'écrire ?

037 E : C'est égal à  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$  au voisinage de  $x_0$ .

038 P : Vous êtes d'accord sur l'expression donnée par votre collègue ?

039 E : Oui, madame.

040 P : C'est bien, c'est la formule générale de Taylor-Young au voisinage d'un réel quelconque  $x_0$ .

(L'enseignante rédige au tableau :

La formule de Taylor-Young

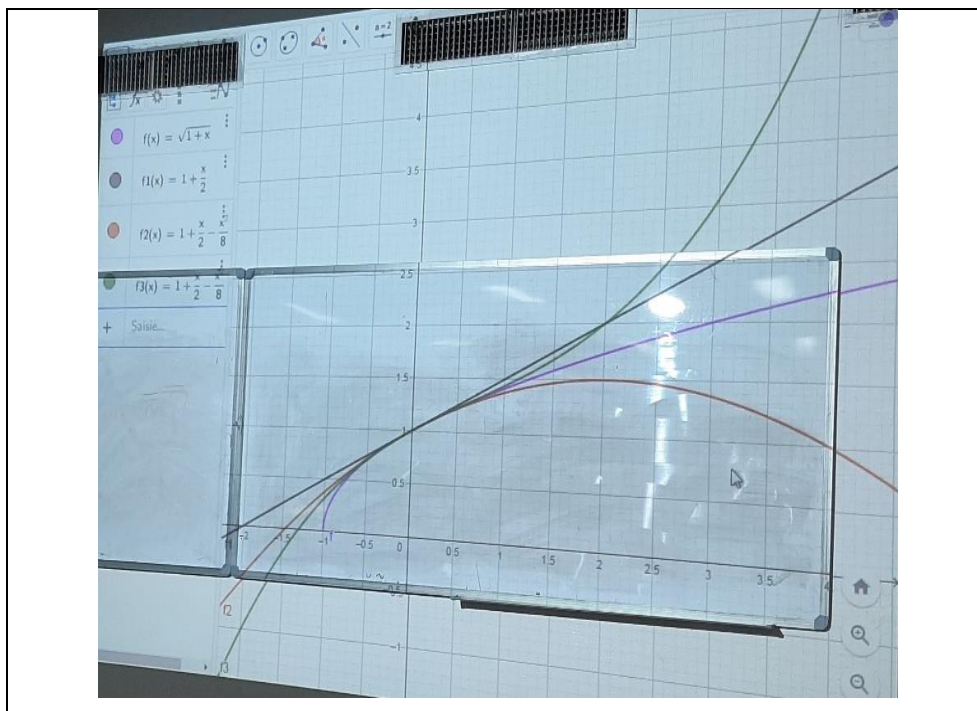
$$\text{Pour tout } x \in V(x_0) \text{ et } f \in \mathbb{C}^n(V(x_0)), \text{ on a : } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

041 P : Maintenant, nous revenons à notre situation étudiée dans la séance précédente. D'après vous, si je vais tracer graphiquement les fonctions f,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , laquelle sera plus proche graphiquement au voisinage de 0 de la fonction f ? (Aucune réponse des étudiants)

**Tableau 6-21 : les traces de l'enseignante au tableau et l'interaction avec toute la classe**

L'enseignante commence la troisième séance du chapitre « Analyse asymptotique » par un rappel de la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 étudiée précédemment. À partir de la présentation de l'intérêt de cette formule pour déterminer des développements limités d'une fonction au voisinage de 0, elle guide les étudiants à déterminer la formule de Taylor-Young généralisée. En effet, un étudiant mobilise ses connaissances antérieures et plus précisément la formule de Taylor-Lagrange pour donner cette formule permettant la détermination de l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel  $x_0$ .

Ensuite, elle demande aux étudiants de déterminer la meilleure approximation de la fonction f au voisinage de 0. Devant le silence de toute la classe, l'enseignante décide de représenter graphiquement les fonctions étudiées dans la situation.



**Figure 6-2 : les représentations graphiques de la fonction  $f$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0 (photos prises du tableau)**

L'enseignante utilise le logiciel Geogebra pour la construction des représentations graphiques des fonctions  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  et le projecteur au tableau. Elle demande aux étudiants de s'appuyer sur cette approche graphique afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

042 P : Regardez ces courbes. Laquelle de ces fonctions se rapproche de la fonction  $f$  c'est-à-dire au voisinage de 0, par exemple entre  $(-1)$  et  $1$ , laquelle des trois fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  ou  $f_3$  se rapprochera de plus de la fonction  $f$  ?

043 E : C'est la fonction  $f_3$ .

044 P : Pourquoi ?

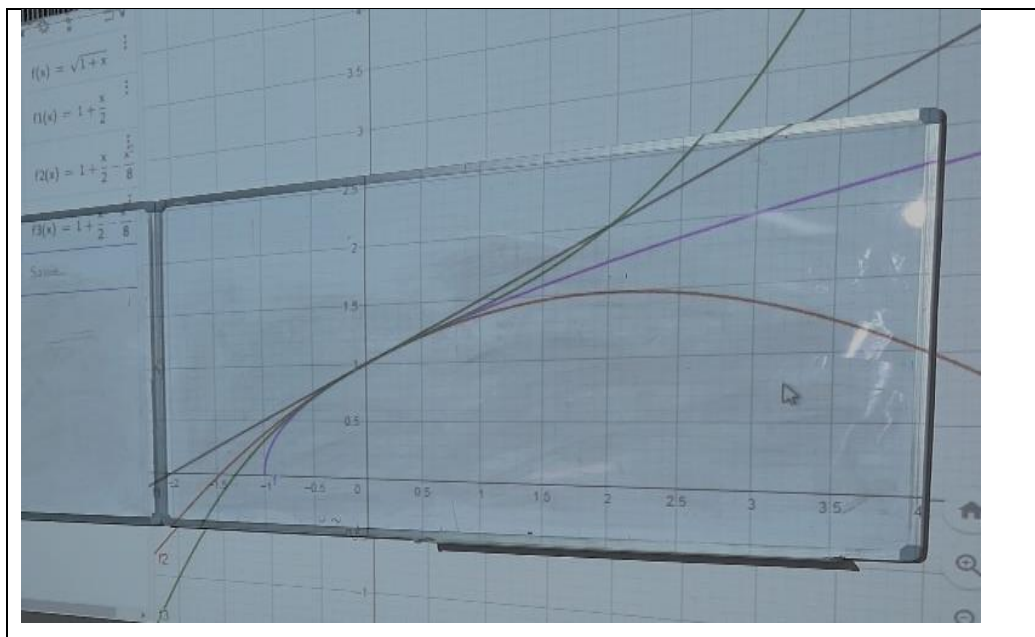
045 E : Car elle a plus de coefficients, c'est un polynôme de plus grand degré.

046 P : Car elle est en train de recueillir plus de valeur, c'est-à-dire elle a déjà les valeurs de  $f_1$  et de  $f_2$ . Mais elle rajoute, elle s'approche mieux, c'est-à-dire elle est plus raffinée au niveau d'approximation par rapport à la fonction  $f$ . Car on constate de même à partir de la représentation algébrique de  $f_3$ . On peut visualiser aussi graphiquement que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Qu'est-ce que ça veut dire un petit  $o$  de  $x$  ?

**Tableau 6-22 : l'interaction de l'enseignante avec toute la classe**

Après l'utilisation de l'approche graphique pour déterminer la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0, elle questionne sur la notion de la topologie « petit  $o$  ». Afin d'aider les étudiants à accéder au sens de ce savoir, elle utilise les zooms du logiciel Geogebra.





**Figure 6-3 : les représentations graphiques de la fonction  $f$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0 par l'usage des zooms (photos prises du tableau)**

L'enseignante utilise les zooms nécessaires pour ne pas avoir des approximations linéaires dont ses représentations graphiques seront des droites au voisinage de 0. Le choix des voisinages de ce réel n'est pas évident selon l'aspect graphique « dynamique ».

047 P : Regardez, voilà les représentations graphiques des fonctions  $f, f_1, f_2$  et  $f_3$ , le tracé de la fonction  $f$  est présenté en couleur violette. Si je fais le zoom sur le voisinage de 0, par exemple entre  $(-1)$  et  $1$ , qu'est-ce que je remarque ?

048 E : C'est l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$  ? La fonction  $f_3$  ?

049 P : Oui, on remarque que la fonction  $f_3$  est plus proche de  $f$  que les autres. Et qu'elle est la plus éloignée de  $f$  ?

050 E : C'est la fonction  $f_1$

051 P : C'est bien. Regarde le graphique qu'est-ce que présente la fonction  $f_1$  ?

052 E : C'est la tangente.

053 P : Oui, c'est la tangente à  $C_f$  au point  $(0,0)$ . Donc la fonction  $f_1$  est l'approximation polynômiale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Hier, on a vu que la position de la courbe  $C_{f_1}$  par rapport à  $C_f$ , elle s'exprime au moyen de quel terme ?

054 E : C'est  $(-\frac{1}{8}x^2)$

055 P : Donc on a trouvé  $C_{f_1}$  est au-dessus de  $C_f$ . Regardez, graphiquement c'est justifié. On voit bien que si j'étudie la différence entre  $f$  et  $f_1$ , entre  $f$  et  $f_2$  et entre  $f$  et  $f_3$ . De ces différences, quelle est la plus petite ?

056 E : C'est  $f$  moins  $f_3$

057 P : Oui, c'est la distance entre les deux courbes et  $f_3$ . Alors, si je veux prouver ceci par un calcul algébrique. (L'enseignante rédige au tableau :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_2(x)}$ )

058 P : D'après vous, graphiquement parlant quelle sera cette limite ?

059 E<sub>1</sub> : C'est 1.

060 P : Si c'était égal à 1, quelle serait la relation entre le numérateur et le dénominateur de ce rapport ? Autrement dit, quelle serait la relation entre  $(f(x) - f_3(x))$  et  $(f(x) - f_2(x))$  ?

061 E<sub>1</sub> (Ahmed) : Elles seraient équivalentes.

062 P : Oui, elles seraient équivalentes. D'après le graphique, cette différence entre  $f$  et  $f_2$  et celle entre  $f$  et  $f_3$  est-ce qu'elles sont vraiment équivalentes ?

063 E<sub>1</sub> : Il y a une différence.

064 P : Oui, il y a une différence. Dans ce cas, cette limite ne sera pas égale 1, sinon ces expressions ( $f(x) - f_3(x)$ ) et ( $f(x) - f_2(x)$ ) seraient équivalentes et elles auraient la même distance. Et alors, quelle est la limite ?

065 E<sub>1</sub> : Égale à 0.

066 P : Oui, ça sera égal à 0. Dans quel sens vous pensez que c'est égal à 0 ?

067 E<sub>1</sub> : Elles sont négligeables.

068 P : Oui, qui s'approche le premier vers  $f$  ?

069 E<sub>1</sub> : C'est  $f_3$  selon le graphique.

070 P : Lorsque  $f_2$  avait déjà cette position,  $f$  est plus proche de la valeur, donc  $f_3$  est plus proche et plus rapidement proche de  $f$  que  $f_2$ , donc la vitesse de la convergence de  $f_3$  vers  $f$  est plus élevé. Là, je pourrai le voir à partir du graphique. Si je passe de théorique au calcul de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_2(x)}$

Nous avons établi tout à l'heure le lien entre les fonctions  $f$ ,  $f_2$  et  $f_3$   
(L'enseignante rédige au tableau :  $f(x) = f_2(x) + o(x^2)$  et  $f(x) = f_3(x) + o(x^3)$ )

071 E : On remplace la fonction  $f(x)$  par ces représentations pour calculer la limite.

072 P : Voilà, vous avez compris, si on remplace  $f$  par ces expressions, j'aurais :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{o(x^2)}$$

073 E : C'est  $x\varepsilon(x)$

074 P : Donc on aura l'égalité  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3\varepsilon(x)}{x^2\varepsilon(x)}$

Ça c'est la vitesse de convergence (elle désigne  $x^3$ ), la puissance révélée la vitesse, elle est plus élevée. Cette différence [ $f(x) - f_3(x)$ ] converge avec la vitesse  $x^3\varepsilon(x)$ , par contre l'autre elle converge avec celle de  $x^2\varepsilon(x)$ . Si vous faites la simplification, vous allez avoir c'est égale à  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Donc on a vu graphiquement que c'est égal à 0, on peut le justifier numériquement. Voilà les deux méthodes graphique et algébrique.

**Tableau 6-23 : les traces de l'enseignante au tableau et l'interaction avec toute la classe**

Ensuite, elle utilise l'approche graphique « dynamique » par le choix des autres intervalles (voisinage de 0) en zoomant. Elle s'appuie sur ces représentations graphiques « dynamiques » avec le zoom pour visualiser le comportement de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

L'étudiante revient aux représentations algébriques des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  par la mise en jeu de degré de ces polynômes pour confirmer que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. À ce moment-là, l'enseignante explique cette méthode algébrique utilisée par l'étudiante.

L'enseignante aide les étudiants à mobiliser des moyens afin de valider des raisonnements produits précédemment par l'utilisation des objets de géométrie. Dans une première étape, elle les questionne sur la représentation graphique de la fonction  $f_1$  afin de visualiser que l'équation de la tangente est une approximation polynomiale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Dans une deuxième étape, elle l'aide à visualiser la position relative de deux représentations

graphiques de fonctions  $f$  et  $f_1$  (trouvée précédemment selon l'étude du signe de la différence de deux fonctions).

Nous remarquons, lors de la discussion sur le calculus de limite  $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_3(x)}{f(x) - f_2(x)})$ , un étudiant (E<sub>1</sub>) effectue une erreur liée à la confusion entre les notions de fonctions négligeables et de fonctions équivalentes.

A partir de cette erreur commise, l'enseignante aide les étudiants à percevoir la différence entre les propriétés des fonctions négligeables et fonctions équivalentes selon l'approche graphique. Elle interprète les représentations graphiques pour vérifier le résultat trouvé. Elle mobilise les différents registres algébrique, analytique, graphique, géométrique et numérique pour prouver que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, elle articule les approches graphique « dynamique » et algébrique lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Elle intègre l'image obtenue en zoomant l'usage du graphique. En effet, la mobilisation des objets de géométrie aide les étudiants à visualiser que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

### Conclusion

L'enseignante s'appuie sur les raisonnements produits par les étudiants pour introduire le concept d'approximation locale d'une fonction. En effet, la mise des liens entre la fonction  $f$  et ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 l'amène à introduire le concept de développement limité déduit de la formule de Taylor-Young. Il existe une évolution des savoirs pour enseigner ce concept mathématique. Ensuite, elle construit les représentations graphiques des fonctions étudiées pour déterminer la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Avec la fonction « zoom », elle précise un voisinage de 0 qui est un intervalle centré en 0 (l'intervalle  $] -1, 1[$  au sens de la topologie). Ensuite, elle utilise l'approche graphique « dynamique » par le choix des autres intervalles (voisinage de 0) avec le zoom. Elle s'appuie sur ces représentations graphiques « dynamiques » avec le zoom pour visualiser le comportement de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Elle questionne les étudiants sur la représentation graphique de la fonction  $f_1$  afin de visualiser que l'équation de la tangente est une approximation polynômiale d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Dans une deuxième étape, elle l'aide à visualiser la position relative de deux représentations graphiques de fonctions  $f$  et  $f_1$  (trouvée précédemment selon l'étude du signe de la différence de deux fonctions). Dans une troisième étape, elle passe à étudier la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0 selon deux approches graphique « dynamique » et algébrique. En

effet, elle aide les étudiants à visualiser la meilleure approximation d'une fonction par l'usage des zooms pour choisir un voisinage de 0. Ensuite, elle vérifie ce résultat selon une approche algébrique par la mobilisation de la technique du calcul de limite en 0 du rapport de fonctions  $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f_3(x)}{f(x)-f_2(x)})$  pour prouver que la fonction  $f_3$  est la meilleure approximation de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Dans une dernière étape, elle fait le zoom sur un voisinage de 2 pour expliquer aux étudiants que ces fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  ne sont pas des approximations de la fonction  $f$  au voisinage d'un réel différent de 0. Elle effectue des moyens du contrôle sémantique pour déterminer les écritures syntaxiques du concept d'approximation locale d'une fonction.

De ce fait, l'articulation des approches graphique « dynamique », associe la perception visuelle des approximations locales d'une fonction, avec une approche algébrique issue de l'interprétation des résultats du calculus de limite de fonctions par l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique a aidé les étudiants à aboutir à :

- la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel ;
- la définition formelle du concept de développement limité avec toute la complexité du travail dans le paradigme [AI] qui couple la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

Nous pouvons dire que le concept d'approximation locale d'une fonction est introduit par la mobilisation des différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. Nous émettons l'hypothèse que la visualisation des objets mathématiques aide les étudiants à s'approprier ce concept mathématique.

### III. Conclusion

Dans ce travail de recherche, nous nous intéressons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), à la construction des raisonnements produits par les étudiants, ainsi qu'à la question du contrôle de ces raisonnements afin d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de la notion d'approximation locale d'une fonction. Pour ceci, nous avons proposé, en collaboration avec l'enseignante, une situation en classe à la suite de l'enseignement du concept de relation de comparaison des fonctions. L'enseignante n'a pas consacré beaucoup du temps lors de cette expérimentation. Malgré ces contraintes temporelles, l'analyse de notre corpus, constitué des productions de 8 groupes et des retranscriptions des interactions en classe, nous permet de distinguer des difficultés liées à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

L'analyse *a priori* de la situation 1 nous a permis de définir et de caractériser les différents niveaux de milieux. Le niveau du milieu nous donne des informations sur la nature du

raisonnement produit par les étudiants confrontés à une situation à dimension adidactique. Par confrontation au niveau de milieu objectif, les étudiants réalisent un calcul syntaxique qui fait fonctionner des règles de transformations et de formulations des écritures mathématiques (des expressions analytique et algébrique). Suite à l'obtention des résultats, les étudiants doivent nécessairement trouver les moyens de les interpréter. À ce moment-là, ils doivent être capables de produire des réflexions sur des objets permettant de faire évoluer le savoir, notamment lorsqu'ils sont amenés à passer de la situation de référence à la situation d'apprentissage.

L'analyse de notre corpus en termes de raisonnements, selon le modèle d'analyse, nous permet de conclure que la majorité des étudiants n'ont pas la capacité à interpréter leurs résultats mathématiques. La majorité des groupes utilisent une technique du répertoire didactique de la classe sans connaître le sens de la connaissance mathématique mobilisée.

Les difficultés rencontrées par les étudiants résultent, en grande partie, à une complexité liée à la dialectique technique/sens du concept de fonctions négligeables. Cette complexité est liée à l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique. Ces difficultés apparaissent lors du passage de niveau du milieu objectif au niveau du milieu de référence, ainsi que lors du changement de paradigmes de [AC] au paradigme [AI] lors de l'interprétation des résultats des calculs effectués dans le milieu  $M_2$ . Nous pouvons dire que les groupes ont effectué des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* lors de l'appropriation du concept de la relation de comparaison des fonctions.

La plupart des groupes ont produit des pas de raisonnements de nature syntaxique lors du calculus de limite par l'utilisation d'une technique du répertoire didactique du Secondaire. Par ailleurs, la plupart d'entre eux sont confrontés aux problèmes de justification sémantique des différents pas de leur raisonnement. Nous remarquons que tous les étudiants ont mobilisé des connaissances et des savoirs du répertoire didactique du Secondaire lors du calculus de limite du rapport de deux fonctions. Ils ne parviennent pas à mobiliser des connaissances du Supérieur et plus précisément le théorème de l'Hôpital qui est la méthode la plus facile et la plus puissante dans ce type de raisonnement. Nous pouvons dire qu'ils ont mal à comprendre que le Supérieur est un prolongement du Secondaire en ce qui concerne les connaissances et savoirs mobilisés. Nous pouvons conclure qu'il existe une rupture conceptuelle qui s'opère entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur lié au champ de limite. Ainsi, il existe *un obstacle de nature culturelle* par le recours aux connaissances vues au Secondaire lors de la résolution des questions traitées au lycée.

En conclusion, les étudiants sont confrontés à une difficulté liée à la définition formalisée du concept de la relation de comparaison des fonctions. En effet, l'écriture d'une fonction sous

forme d'une somme d'un polynôme et d'un reste ne donne pas du sens au concept d'approximation locale d'une fonction.

Nous pouvons identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction selon trois catégories :

- Erreurs d'ordre technique : liées aux techniques utilisées lors de la production d'un raisonnement lié au calculus de limite dans le paradigme [AC]. Dans ce cas, l'étudiant mobilise les méthodes du répertoire didactique du Secondaire et il néglige le rôle du Théorème de l'Hôpital en tant que nouvelle technique dans le champ du calculus de limite du rapport de deux fonctions.

- Erreurs d'ordre cognitif et conceptuel: liées au sens de la connaissance mathématique mobilisée et plus précisément à la définition formalisée du concept d'approximation locale d'une fonction. Ce type d'erreur est lié à la dialectique sémantique/syntaxique. En effet, les étudiants sont confrontés au problème lié au changement de paradigmes de l'Analyse standard (de [AI] à [AG] ou de [AC] à [AI]). Dans ce cas, nous parlons des difficultés liées à l'interprétation d'une expression analytique ou d'un résultat mathématique. Le concept de fonctions négligeables n'a de sens qu'à partir de la précision de voisinage pour lequel les deux fonctions sont négligeables.

- Erreurs d'ordre calculatoire : liées à l'usage des règles du calcul algébrique et formel dans le paradigme [AC]. Par exemple, certains groupes sont confrontés à une difficulté liée à l'utilisation de la méthode de l'expression conjuguée lors du calculus de limite d'une fonction.

Lorsque les étudiants sont confrontés à une difficulté prégnante, ils ont la possibilité de demander l'aide auprès de l'enseignante. Cette dernière, par son intervention, aide les étudiants à s'interroger sur les manières de traduire et d'interpréter leurs résultats, obtenus à partir du calculus de limite au niveau de milieu  $M_{-2}$  par la mobilisation des objets pour étudier les fonctions dans le milieu de référence. Ils agissent sur ces objets par l'usage des propriétés et des techniques liées au domaine de l'étude locale d'une fonction.

Au niveau Secondaire, l'étudiant est habitué à l'usage automatique des formules du répertoire didactique. En effet, il s'intéresse à connaître la technique adéquate de l'Analyse "algébrisée" pour résoudre des problèmes mathématiques. Au niveau Supérieur, il est amené à effectuer un travail mathématique dans le domaine d'Analyse mobilisant des définitions formalisées. À ce niveau, l'étudiant doit agir sur les objets mathématiques pour tirer des conclusions à partir des interprétations des expressions analytique et algébrique. Par ailleurs, il doit être capable d'interpréter des résultats en termes de propriétés et de caractéristiques pour s'approprier le

concept d'approximation locale d'une fonction. Nous pouvons dire qu'il existe une rupture conceptuelle qui s'opère entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur. Cette rupture traduit l'existence d'un *obstacle de nature culturelle* lié à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

Par ailleurs, les étudiants sont confrontés à des difficultés pour donner du sens aux écritures mathématiques et pour indiquer le domaine de sa validité lorsqu'ils doivent déterminer l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel. En effet, ce concept mathématique n'a du sens que par la détermination de l'erreur (par l'usage de  $\varepsilon(x)$  ou  $o(x)$ ) et la précision d'un voisinage. Cette difficulté traduit une complexité du travail dans le domaine de la topologie.

Nous pouvons identifier les obstacles liés au concept de fonctions négligeables selon deux catégories :

- Obstacle épistémologique : c'est un *obstacle d'ordre fonctionnel et topologique*. Dans ce cas, l'étudiant est confronté au problème lié au domaine de l'Analyse fonctionnelle et de la topologie. En effet, nous remarquons que des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* relèvent d'un obstacle repéré dans l'histoire des mathématiques et notamment lié à la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction. Ce type d'obstacle résulte de changement de paradigmes : du paradigme [AC] au paradigme [AI]. Par exemple, l'étudiant ne précise pas le voisinage de 0 lors de l'appropriation du concept de fonctions négligeables dans le paradigme [AI]. Par ailleurs, il fait usage automatique des techniques et des formules du répertoire didactique du Supérieur sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. Il ne maîtrise pas le sens de la notion de fonctions négligeables.
- Obstacle didactique : dans ce cas, il existe des erreurs liées aux choix didactiques du professeur. En effet, certains choix par l'enseignement renforcent les *obstacles d'ordre culturel*. D'une part, les choix didactiques de l'enseignante qui a caractérisé la fonction  $\varepsilon(x)$  juste par son calcul de limite au voisinage de 0 ( $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ ), dans son cours, amène à l'existence des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liées à la formalisation de limite. D'autre part, les erreurs d'ordre technique relèvent d'un *obstacle culturel* par le recours des étudiants aux connaissances vues au Secondaire lors du calcul de limite du rapport de deux fonctions. Nous pouvons dire qu'il existe une rupture conceptuelle qui s'opère entre le niveau Secondaire et le niveau Supérieur. En réalité, les étudiants n'ont pas mobilisé des connaissances du registre graphique.

L'articulation des approches graphique « dynamique » par l'utilisation des zooms sur les intervalles centrés en 0 (des voisinages de 0) et algébrique par le calculus de limite a offert aux étudiants la possibilité d'accéder au sens du savoir : la meilleure approximation d'une fonction au voisinage de ce réel.

Le schéma de la structuration du milieu nous permet d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants, ainsi que la manière dont ces savoirs se transforment pour étudier le déroulement final de la mise en situation. Pour ceci, nous allons proposer une situation 2 permettant l'usage des représentations graphiques du concept d'approximation locale d'une fonction afin de distinguer les formules utilisées pour déterminer un développement limité : la formule de Taylor-Young et la définition généralisée du développement limité.

## **Partie C : analyses didactiques de la situation 2**

### **I. Présentation et analyse *a priori* de la situation**

Après l'enseignement du concept de développement limité au voisinage d'un réel déduit de la formule de Taylor-Young et celui de sa définition généralisée, nous souhaitons permettre aux étudiants de percevoir la différence entre ces deux définitions en vue de l'appropriation de ce concept mathématique. Pour ceci, nous souhaitons proposer aux étudiants une situation mathématique permettant d'introduire une propriété très importante de la notion d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel. Cette propriété est liée à l'étude locale d'un cas particulier d'une fonction au voisinage d'un réel déterminé. En effet, la fonction objet d'étude n'est pas définie en ce réel, cependant elle admet une approximation polynômiale au voisinage de ce réel sans-êre deux-fois dérivable en ce réel. Nous avons la volonté de construire une situation permettant d'introduire cette propriété du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel par l'usage de ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique en articulant les dimensions sémantique et syntaxique par un travail s'inscrit dans les paradigmes [AI], [AC] et [AI].

Nous commençons cette partie par la présentation de l'origine de cette situation et nous explicitons les raisons didactiques qui nous ont conduits à élaborer cette situation et à la faire vivre aux étudiants de première année (PC). Dans une deuxième étape, nous présentons l'analyse *a priori* de cette situation, nous conduisons une analyse « classique », en théorie des situations didactiques, selon les points de vue mathématique et didactique. Dans une troisième étape, nous présentons une analyse de cette situation en termes de niveaux de milieux (Margolinas, 1992 ; Bloch, 1999, 2015) ; nous identifions, pour chacune des situations



emboîtées, le paradigme de l'enseignement de l'Analyse à laquelle elle se réfère en utilisant les travaux de Kuzniak, Montoya Delgado, Vandebrouck et Vivier (2015). Grâce aux analyses précédemment réalisées, nous serons en mesure d'effectuer une analyse *a priori* des raisonnements en mettant en œuvre le modèle d'analyse du raisonnement, développé dans le chapitre 3 du cadre théorique et introduit dans les travaux de Bloch et Gibel (2011 ; 2019) et (Gibel, 2018). Nous nous attacherons à étudier précisément la nature des justifications susceptibles d'être élaborées par les étudiants, en identifiant précisément celles qui sont de nature sémantique ou syntaxique et celles qui articulent les dimensions syntaxique et sémantique (Kouki, 2008, 2017, 2018 ; Belhaj Amor, 2016, 2018, 2019 ; etc.).

### ***1.1. Présentation de l'origine et des enjeux didactiques de la situation mathématique***

Dans cette section, nous présentons les raisons et les enjeux de l'élaboration et de la mise en œuvre de la situation. Les objectifs principaux de sa proposition consistent à amener l'étudiant à :

- étudier le cas d'une fonction prolongeable par continuité en un réel ;
- élaborer lui-même les développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage d'un réel par l'usage de deux différentes expressions du reste :  $o(x^n)$  et  $x^n \varepsilon(x)$  ;
- prouver l'unicité de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel pour un ordre bien déterminé ;
- constater qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un réel n'est pas nécessairement deux-fois dérivable en ce réel ;
- articuler les différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique lors de la détermination des approximations locales d'une fonction au voisinage d'un réel.

Nous avons choisi de concevoir une situation d'enseignement-apprentissage à partir d'une activité proposée dans un ouvrage d'Analyse de première année (PC) publié suite au changement de la réforme en 2016. Pour ceci, nous choisissons l'ouvrage « J'intègre » le plus utilisé par les enseignants en tant que référence pour construire leurs cours. Par ailleurs, l'étude de cet ouvrage est développée dans le chapitre 4.

Dans le chapitre intitulé « Analyse asymptotique », les auteurs ont présenté la propriété mettant en relation une fonction dérivable en 0 et l'existence de son développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0. Ensuite, ils ont indiqué que cette propriété n'est pas toujours vérifiée dans le cas d'un développement limité d'ordre strictement Supérieur à 1. Ces auteurs ont établi la validité de cette déclaration en proposant l'étude d'un contre-exemple dont l'étude a été

dévolue aux étudiants sous la forme d'un exercice. Ils ont introduit la propriété d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans cependant être deux-fois dérivable en ce réel selon la dimension sémantique.

### Énoncé de l'exercice d'un ouvrage universitaire (2018, p.709)

#### Exercice 15

Soit  $f$  une fonction définie sur  $R$  par  $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  si  $x \in R^*$  et  $f(0) = 0$

- 1) Montrer que  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- 2) La fonction  $f$  est-elle dérivable sur  $R$  ?
- 3) La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Dans cet exercice, les auteurs ont choisi d'étudier une fonction définie par la somme d'un polynôme de degré 1 et d'une fonction analytique. Dans notre cas, nous souhaitons amener les étudiants à déterminer les approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 d'une fonction par la mobilisation de ses représentations algébrique et graphique. Pour ceci, nous voulons construire une fonction sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré 2 et d'une fonction analytique permettant de déduire l'expression du reste  $[x^2\varepsilon(x)]$  à partir du calcul de sa limite.

Par ailleurs, nous envisageons de construire une situation permettant de déterminer les approximations polynômiales d'une fonction et ses approximations locales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0, selon les deux approches analytique et géométrique. En effet, les étudiants vont déterminer ces expressions algébriques et analytiques soit par le calcul de limite de cette fonction selon un aspect analytique, soit par l'interprétation de ses représentations graphiques selon un aspect géométrique.

D'une part, nous voulons construire une fonction  $g$  s'écrivant sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré 2 et d'une fonction  $f$ . Cette fonction  $f$  doit être présentée sous la forme d'un produit de  $x^2$  par une fonction tendant vers 0 au voisinage de ce réel. Pour ceci, nous proposons une fonction  $g$  définie sur  $R \setminus \{0\}$  par :  $g(x) = x + x^2 + x^2 \left[ x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ , admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 et cependant n'est pas deux-fois dérivable en ce réel.

D'autre part, nous souhaitons que l'énoncé de la situation intègre nécessairement les données graphiques pour permettre aux étudiants d'accéder aux représentations graphiques de cette fonction  $g$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0. Les étudiants pourront ainsi articuler les différents registres lors de la détermination de ses approximations polynômiales et de ses approximations locales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.

De ce fait, nous envisageons de construire une situation permettant l'articulation des différents registres lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel.

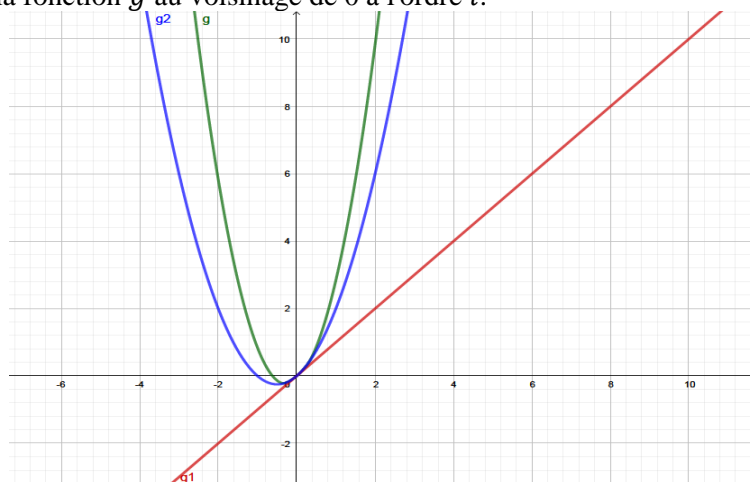
### Énoncé de la situation

Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**1-a).** Montrer que la fonction  $g$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

**b).** Déterminer l'expression de la fonction prolongée de  $g$  qu'on notera toujours  $g$ .

On considère les représentations graphiques des fonctions  $g$ ,  $g_1$  et  $g_2$  avec  $g_i$  les approximations polynômiales de la fonction  $g$  au voisinage de 0 à l'ordre  $i$ .



**2-a)** Déterminer les expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

**b)** Quelle est la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0 ?

**c)** Donner les développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

**3-a)** Calculer  $g(0)$  et  $g'(0)$ .

**b)** La fonction  $g$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

**4)** Peut-on exprimer  $g_2$  en fonction des coefficients  $g(0)$  et  $g'(0)$  ?

Les objectifs principaux de cette situation proposée sont d'amener l'étudiant à :

- étudier l'approximation locale d'une fonction par l'usage de ses différentes représentations associées aux différents registres analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique ;
- étudier le cas d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 sans cependant être deux-fois dérivable en 0 ;
- déterminer les développements limités d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 d'une fonction prolongée par continuité en ce réel ;
- donner l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction ;
- articuler les différents objets d'approximation locale d'une fonction.

### I.2. Analyse a priori de la situation sur les plans mathématique et didactique

La situation est proposée aux étudiants suite à l'enseignement de la définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel. Nous nous intéressons à introduire

une propriété d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel par la prise en considération de la différence entre les conditions nécessaires de l'usage de la formule de Taylor-Young et de la définition généralisée de développement limité d'une fonction au voisinage de ce réel.

#### Type de situation étudiée

La situation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Mercier, 1995 ; Bloch, 1999) visant l'utilisation des connaissances et des savoirs inhérents aux différentes représentations du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel lors de son appropriation dans le paradigme [AI] et son usage raisonné dans les différents paradigmes [AI], [AC] ou [AG].

#### Principaux objectifs de la situation proposée

Les objectifs de cette situation sont :

- ✓ l'étude de l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel dans les différents registres analytique, algébrique, numérique, géométrique et graphique ;
- ✓ la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 d'une fonction prolongée par continuité en ce réel ;
- ✓ l'étude de cas d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 alors qu'elle n'est pas nécessairement deux fois-dérivable au voisinage de ce réel ;
- ✓ la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage de 0 par l'articulation de ses différentes représentations numérique, graphique, géométrique, algébrique et analytique.

#### Variables didactiques

Nous pouvons distinguer quatre variables didactiques :

- VD1 : la nature de la fonction à étudier. Dans notre cas, la fonction  $g$  est de classe  $C^n(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  et admet une approximation locale d'ordre 2 au voisinage de 0.
- VD2 : le choix du type de représentation d'une fonction utilisable lors de la détermination de ces expressions algébrique et analytique. Les fonctions sont présentées à partir de leurs représentations graphiques.
- VD3 : le choix de la formulation de l'expression du reste du développement limité à partir de l'expression de la fonction donnée.
- VD4 : le choix de l'ordre du développement limité à réaliser.

Nous conduisons l'analyse de chacune des questions proposées selon deux points de vue : mathématique et didactique, par la présentation des procédures de résolution attendues par

l'enseignante, les difficultés envisagées des étudiants et les moyens de contrôle et de validation, ainsi que les différents paradigmes de l'Analyse et des registres de représentation sémiotique associés.

Analyse a priori des questions

➤ **Analyse des questions (1-a-b)**

Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Les étudiants doivent, dans une première étape, déterminer le domaine de la définition de la fonction  $g$ . Ensuite, ils vont calculer sa limite en 0 afin de prouver que cette fonction est prolongeable par continuité sur  $R$ .

**Procédure**

**1-a)** On a :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Comme la fonction :  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  est définie sur  $R \setminus \{0\}$  alors la fonction  $g$  est définie sur  $R \setminus \{0\}$

Conclusion :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  donc  $D_g = R \setminus \{0\}$

La fonction  $g$  est continue sur  $R \setminus \{0\}$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + x^2 + x^2 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right)$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x + x^2 + x^2 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) = 0$

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

On en déduit que la fonction  $g$  est prolongeable par continuité en 0.

Conclusion : La fonction  $g$  est prolongeable par continuité sur  $R$ .

**1-b)** Comme la fonction  $g$  est prolongeable par continuité sur  $R$

$g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pour tout  $x \in R \setminus \{0\}$  et  $g(x) = 0$  pour  $x = 0$

On note encore  $g$  la prolongée par continuité de la fonction  $g$  telle que :

$$g(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent rencontrer plusieurs difficultés liées soit à l'étude de la continuité d'une fonction, soit au calcul de limite de la fonction  $g$  en 0, et plus précisément au niveau du calcul la limite du terme  $\left[ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ .

### Difficulté liée au calcul de limite

**1-a)** On a :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  donc  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)) = +\infty$ .

**1-b)** La fonction  $g$  est prolongeable par continuité sur son domaine de définition  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pour tout  $x \in D_g$ .

#### ➤ Analyse des questions (2-a-b-c)

### Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Dans le cas de la détermination des expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ , les étudiants peuvent utiliser soit une méthode géométrique du répertoire didactique du Secondaire par l'interprétation de ses représentations graphiques, soit une méthode analytique du répertoire didactique du Supérieur par l'usage des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

Concernant la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0, ils peuvent mobiliser soit la méthode du calcul de limite de la fonction ( $x \mapsto \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)}$ ), soit la méthode géométrique par l'interprétation des représentations graphiques des fonctions  $g, g_1$  et  $g_2$ .

Dans le cas de la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0, les étudiants peuvent utiliser soit la méthode analytique par la détermination de l'expression analytique par un calcul de limite, soit une méthode algébrique par l'usage des expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

### **Procédure**

**2-a)** La représentation graphique de la fonction  $g_1$  est une droite passant par l'origine  $O(0,0)$  donc d'équation :  $y = ax$ .

Nous remarquons que cette droite passe aussi par le point  $A(1,1)$  donc  $a = 1$ .

Conclusion :  $g_1(x) = x$ .

La courbe représentative de la fonction  $g_2$  est une parabole d'équation :  $y = ax^2 + bx + c$  passant par les points  $O(0,0)$ ,  $B(2,6)$  et  $C(-2,2)$

$$\text{On aura : } \begin{cases} 0 = c \\ 6 = 4a + 2b \\ 2 = 4a - 2b \end{cases} \text{ Donc : } \begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Conclusion :  $g_2(x) = x + x^2$ .

**2-b)** En ayant recours aux courbes représentatives des fonctions  $g$ ,  $g_1$  et  $g_2$ , nous remarquons qu'au voisinage de 0 la représentation graphique de la fonction  $g_2$  (la parabole) est plus proche de celle de  $g$  que celle de la représentation graphique de la fonction  $g_1$ .

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 0$$

Donc la fonction  $g_2$  est une meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

**2-c)** Détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 :

$$\text{On a } g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x + x\left[x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + x \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Donc il existe  $\alpha > 0$ , et il existe une fonction  $\varepsilon$ , telle que  $\forall x \in ]-\alpha; \alpha[$ , on a :  $g(x) = x + x\varepsilon(x)$  un développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

#### **Détermination de développement limité d'ordre 2 de la fonction $g$ au voisinage de 0**

$$\text{On a : } g(x) = x + x^2 + x^2 \left[ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$$

Il existe  $\beta > 0$  et il existe une fonction  $\varepsilon'$  tel que  $\varepsilon'(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , et pour tout  $x \in ]-\beta; \beta[$ ,  $g(x) = x + x^2 + x^2 \varepsilon'(x)$  est un développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$ .

#### **Difficultés envisagées**

Les étudiants peuvent effectuer des erreurs liées à l'utilisation des formules du répertoire didactique soit lors de la mise en œuvre de la formule de Taylor-Young, soit lors de l'application des interprétations géométriques des représentations graphiques, soit par une méconnaissance ou un usage erroné de la définition de la notion de développement limité, soit lors du calcul de limite des fonctions.

#### **Difficulté liée au concept du développement limité**

L'étudiant peut être confronté à un problème lié à l'expression du reste. Par exemple, pour le cas du développement limité d'ordre 1, cette expression sera écrit sous la forme de  $\varepsilon(x)$  au lieu de  $[x\varepsilon(x)]$ .

**2-a)** On a :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc  $g(x) = x + [x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)]$  Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 + x^2 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) = 0$

Donc il existe une fonction  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon(x) = \left( x^2 + x^2 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right)$

Donc le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 est :

$g(x) = x + \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Conclusion :  $g_1(x) = x$

On a :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  or  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

Donc il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

En posant :  $\varepsilon(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 est :

$g(x) = x + x^2 + \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Conclusion :  $g_2(x) = x + x^2$ .

**2-b)** La fonction  $g_2$  est la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

**2-c)** On a :  $g(x) = x + o(x)$  est  $DL_1(0)$  et  $g(x) = x + x^2 + o(x^2)$  est  $DL_2(0)$ .

➤ **Analyse des questions (3-a-b)**

Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Dans le cas de l'étude de la dérivée première de de la fonction  $g$  en 0, les étudiants peuvent développer soit une méthode analytique par l'interprétation de l'expression de développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0, soit une méthode géométrique par l'interprétation de la représentation graphique de la fonction  $g_1$ , soit enfin une méthode algébrique par le calcul de limite de la fonction :  $x \mapsto \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ .

Concernant l'étude de la dérivabilité seconde de la fonction  $g$  en 0, ils doivent étudier le taux d'accroissement de  $g'$  en 0.

**Procédure**

**3-a)** La représentation graphique de la fonction  $g_1$  est la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point  $(0, g(0))$ , donc  $g'(0)$  représente la pente de cette droite.



Conclusion : la fonction  $g$  est dérivable en 0 avec  $g'(0) = 1$

**3-b)** On a :  $g$  est deux-fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et  $g''(x) = 2 + 6x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc  $g''(x) = 2 + \frac{6x^2-1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 + \frac{6x^2-1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -\infty$$

Conclusion : la fonction  $g$  n'est pas deux-fois dérivable en 0.

### Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent rencontrer des problèmes liés soit au calcul de la fonction dérivée  $g$ , soit au calcul de limite de la fonction ( $x \mapsto \frac{g'(x)-g(0)}{x}$ ).

#### Difficulté liée au calcul de limite

**3-a)** On a :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , la fonction est deux-fois dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Donc  $g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1$$

Donc  $g$  est dérivable en 0 avec  $g'(0) = 1$

**3-c)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)-g'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x+3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 + x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1$

Conclusion : la fonction  $g$  est deux-fois dérivable en 0 avec  $g''(0) = 1$ .

#### ➤ **Analyse de la question (4)**

#### Procédures de résolutions attendues par l'enseignante

Dans une première étape, les étudiants remplacent les valeurs de  $g(0)$  et  $g'(0)$  par ses symboles. Ensuite, ils justifient ses réponses par l'utilisation de la formule de Taylor-Young du répertoire didactique du Supérieur.

**4)** On a :  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$  et  $g_2(x) = x + x^2$

Donc  $g_2(x) = g(0) + g'(0)x + x^2$

Comme la fonction  $g$  n'est pas deux-fois dérivable en 0, donc on ne peut pas appliquer la formule de Taylor-Young pour déterminer son développement limité au voisinage de 0 d'ordre 2 ou 3 ou 4, etc.

### Difficultés envisagées

Les étudiants peuvent rencontrer des problèmes liés à l'utilisation de la formule de Taylor-Young du répertoire didactique du Supérieur dans le paradigme [AI].

Difficulté liée à l'utilisation de la formule de Taylor-Young

4) D'après la formule de Taylor-Young,  $g(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2)$

Donc  $g_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2$ .

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons, d'une manière synthétique, la nature des procédures de résolutions attendues par l'enseignante en identifiant les différentes méthodes utilisées, les différentes justifications, les moyens de contrôle et de validation associés, les différentes difficultés envisagées, les registres de représentation sémiotique et les niveaux de paradigmes correspondants.

	Procédures de résolutions		Difficultés envisagées	Paradigmes/ Registres
	Méthodes	Justifications et moyens de contrôle		
Q1-a	Étude de la continuité de la fonction $g$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Détermination du domaine de définition de la fonction</li> <li>- <i>Justification du calcul de limite en 0</i></li> <li>- <i>Interprétation du résultat du calcul de limite effectué</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur du calcul de limite</li> <li>- Etude de la continuité d'une fonction</li> <li>- Définition d'une fonction prolongeable par continuité</li> </ul>	[AC]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
Q1-b	Interprétation des résultats	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition d'une fonction prolongeable par continuité sur <math>R</math></li> <li>- Vérification des conditions nécessaires de l'existence de la fonction prolongeable</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition d'une fonction prolongeable par continuité</li> </ul>	[AC]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
Q2-a	Interprétation des représentations graphiques des fonctions $g_1$ et $g_2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Justification de la nature des représentations graphiques</li> <li>- Justification du choix des points des courbes</li> <li>- Vérification de l'usage de la méthode d'identification terme à terme</li> <li>- Vérification des différentes étapes du calcul algébrique</li> <li>- Vérification des expressions trouvées</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Erreur d'ordre calculatoire</li> <li>- Détermination des coordonnées d'un point sur la courbe</li> <li>- Usage de la méthode algébrique pour interpréter les représentations graphiques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math></li> <li>- Usage de la méthode d'identification terme à terme</li> </ul>	[AG]-[AC]/ R <sub>GRA</sub> -R <sub>GEO</sub> - R <sub>NUM</sub> -R <sub>ALG</sub>
	Usage du développement limité par le calcul de limite pour déterminer l'expression du reste	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation de l'expression de la fonction <math>g</math></li> <li>- Justification du choix du terme de l'expression de la fonction <math>g</math>, à calculer sa limite, pour donner l'expression du reste</li> <li>- Explication que l'expression de la fonction <math>g_1</math> (respectivement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Détermination du développement limité</li> <li>- La notion de voisinage</li> <li>- Calcul de limite</li> <li>- Erreur d'ordre calculatoire</li> </ul>	[AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>

		$g_2$ ) est la partie polynômiale du développement limité de la fonction $g$ d'ordre 1 (d'ordre 2) au voisinage de 0		
Q2- b	Calcul de limite et interprétation des représentations graphiques	- Justification du calcul de limite - Mesure de l'écart entre les deux courbes - Justification de l'usage de la méthode de calcul de limite	- Erreur d'ordre calculatoire	[AC]-[AI]/ R <sub>GRA</sub> -R <sub>GEO</sub> - R <sub>NUM</sub> -R <sub>ALG</sub>
	Calcul de limite	- Justification de l'usage de la méthode de calcul de limite - Vérification du calcul	- Erreur d'ordre calculatoire	[AC]-[AI]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
Q2- c	Interprétation de l'expression de la fonction $g$ par le calcul de limites	- Vérification que l'expression de la fonction $g$ s'écrit sous la forme de la somme d'un polynôme et d'un terme exprimant un reste du développement limité. - Justification de calcul de limite	- Choix des termes pour donner les expressions du reste	[AC]-[AI]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
	Usage des expressions des fonctions $g_1$ et $g_2$	- Vérification que l'expression de $g_1$ (respectivement $g_2$ ) est la partie polynômiale du DL(0) de la fonction $g$ (respectivement $g_2$ ) - Unicité de l'expression du DL(0)	- Notion de voisinage - L'expression du reste	[AC]-[AI]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub> R <sub>ALG</sub>
Q3- a	Calcul de limite de la fonction $x \mapsto \frac{g(x)-g(0)}{x}$	- Domaine de définition de $g$ - Étude de la dérivabilité de la fonction $g$	- Erreur d'ordre calculatoire - Calcul de limite	[AC]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
	Interprétation graphique de la tangente	- Le nombre dérivé est la pente de la tangente - Justification des raisonnements	- Méthode d'interprétation de la représentation graphique - Erreur d'ordre calculatoire de la pente de la tangente	[AG]/ R <sub>GRA</sub> -R <sub>GEO</sub>
	Formule de Taylor-Young	- La fonction $g$ est de classe $C^1$ en 0 - Justification de la continuité de la fonction $g'$ en 0 - Unicité du DL(0)	- Méthode d'identification terme à terme - Erreur d'ordre calculatoire	[AI]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>NUM</sub>
Q3- b	Calcul de taux d'accroissement da la fonction $g'$ en 0	- Justification du calcul de limite	- Calcul de limite - Erreur d'ordre calculatoire	[AC]/ R <sub>ANA</sub> -R <sub>NUM</sub>
Q4	Interprétation de l'expression de la fonction $g$ et usage de la formule de Taylor-Young	- Vérification que la fonction $g$ n'est pas deux-fois dérivable en 0 - Unicité du DL(0)	- Remplacement du coefficient de degré 2 de l'expression de la fonction $g_2$ par le symbole $g''(0)$	[AC]/ R <sub>ALG</sub> -R <sub>NUM</sub>

**Tableau 6-24 : présentation synthétique des procédures de résolutions et des difficultés envisagées lors de la résolution des différentes questions de la situation 2**

### ***1.3. Déroulement prévu : phases didactiques et phases adidactiques***

Dans la section précédente, nous avons conduit une analyse *a priori* de la situation selon les plans mathématique et didactique. Notre objectif principal consiste à mettre les étudiants en situation d'action en classe.

#### **1.3.1 Phases didactiques**

Nous présentons les différentes phases didactiques du déroulement envisagé conjointement avec l'enseignante.

##### *Phase 1 : la manière d'établir un lien avec ce qui a été construit*

Après l'enseignement de la formule de Taylor-Young, l'enseignante va proposer oralement un exemple traitant le cas d'une fonction admettant deux approximations polynômiales au voisinage de deux différents points. Elle donnera les approximations polynômiales d'ordre 4 d'une fonction inconnue au voisinage de 0 et 2. Elle utilise le logiciel Geogebra pour la construction graphique des courbes représentatives des fonctions étudiées (une fonction et ses approximations polynômiales). A partir de ces données analytiques et graphiques, les étudiants vont déterminer une expression de la fonction inconnue.

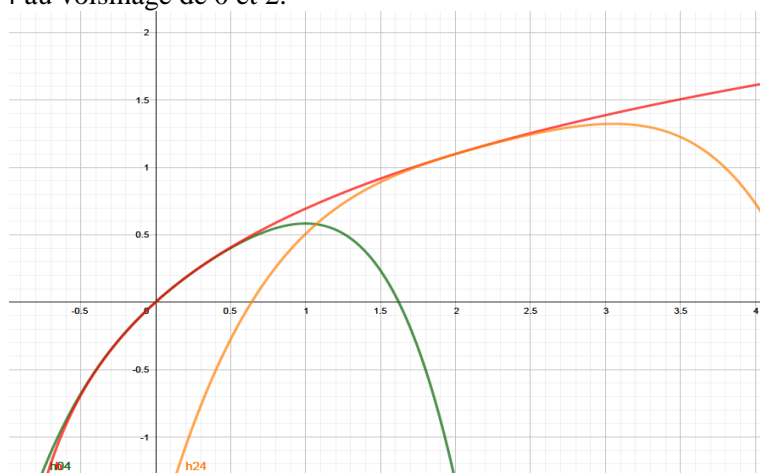
#### **Énoncé de l'exemple**

Soit  $h$  une fonction de classe  $C^\infty ]-1, +\infty[$

Soit :  $h_{04}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$  l'approximation polynômiale d'une fonction  $h$  au voisinage de 0.

Soit :  $h_{24}(x) = \ln(3) + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{18}(x-2)^2 + \frac{1}{81}(x-2)^3 - \frac{1}{324}(x-2)^4$  l'approximation polynômiale d'une fonction  $h$  au voisinage de 2.

On considère les courbes représentatives d'une fonction  $h$  et de ses approximations polynômiales d'ordre 4 au voisinage de 0 et 2.



Essayer de déduire une expression d'une fonction  $h$ .

L'objectif principal de cet exemple consiste à étudier les développements limités d'une fonction au voisinage de deux réels distincts par la mobilisation de ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique.

À partir de cet exemple, l'enseignante va introduire la définition généralisée du concept de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel.

**Définition d'un développement limité**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , s'il existe  $\alpha > 0$ , une fonction  $\varepsilon$  et des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :

$$\forall x \in D_f \cap ]-\alpha + x_0; \alpha + x_0[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \cdot \varepsilon((x - x_0)) \quad \text{avec}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  est le développement limité d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$

Afin d'illustrer cette définition généralisée de développement limité, l'enseignante va proposer à ses étudiants l'étude d'une fonction permettant de distinguer l'usage de cette définition et la formule de Taylor-Young lors de la détermination d'une approximation locale d'une fonction.

*Phase 2 : la dévolution de la situation*

L'enseignante va distribuer aux étudiants les feuilles contenant la situation mathématique en leur demandant de travailler en groupes afin de rédiger une production commune au groupe et une production individuelle. En effet, dans un trinôme, chacun des trois étudiants va essayer de répondre aux différentes questions posées dans cette situation afin de produire une synthèse de ses procédures de résolution.

*Phase 3 : phase d'institutionnalisation*

L'enseignante va s'appuyer sur les raisonnements produits par les étudiants pour introduire une propriété de développement limité d'une fonction au voisinage de 0. Elle va mobiliser les différentes représentations algébrique, analytique, géométrique et graphique du concept d'approximation locale de la fonction étudiée au voisinage de 0. Elle s'appuiera sur le fait qu'une fonction prolongée par continuité en 0, elle peut admettre un développement limité d'ordre 1 et 2 au voisinage de ce réel. L'utilisation de la définition généralisée de développement limité est suffisante pour déterminer cet objet mathématique.

Une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel n'est pas nécessairement de classe  $C^2$  au voisinage de ce réel.

I.3.2. Phases adidactiques

Nous présentons les différentes phases adidactiques du déroulement envisagé.

*Phase 1 : phase de recherche individuelle*

Après la distribution des feuilles contenant l'énoncé de la situation à toute la classe, les étudiants vont travailler individuellement pour répondre aux différentes questions proposées.

En effet, chaque étudiant va mobiliser les connaissances antérieures de son répertoire didactique pour essayer de produire une réponse à chacune des questions proposées.

*Phase 2 : phase d'échange au sein du groupe*

Après une réflexion individuelle sur chacune des questions proposées, les étudiants de chaque groupe vont discuter entre eux de la pertinence et de la validité de leurs différentes productions. S'ils sont d'accord sur leurs procédures de résolutions, ils décident de produire un écrit qui est la synthèse des échanges au sein du groupe sur leurs procédures de résolutions. Par contre, si les étudiants sont en désaccord sur leurs productions, ils peuvent demander l'aide auprès de l'enseignante. Dans ce cas, elle va essayer de les guider pour mobiliser les connaissances nécessaires afin de produire un raisonnement valide. De ce fait, les étudiants vont produire un raisonnement « commun » qui résulte des interactions au sein du trinôme.

*Phase 3 : phase de la mise en commun et de discussion*

L'enseignante ramassera les copies de synthèse des groupes et de chaque étudiant. Ensuite, elle demandera aux différents groupes de désigner un représentant qui passera au tableau pour rédiger leur réponse à une des questions proposées.

Après la rédaction des raisonnements au tableau par un représentant du trinôme, l'enseignante va questionner ce groupe et les autres étudiants afin de débattre de la pertinence et de la validité des savoirs et des techniques utilisés par ce trinôme. Dans ce cas, l'intervention de l'enseignante va dépendre du type du raisonnement produit : valide ou erroné.

Si le raisonnement est valide, elle va demander au trinôme d'expliquer et de justifier la procédure utilisée. A ce moment-là, elle demandera à toute la classe s'il existe une autre procédure pour enrichir leur apprentissage.

Dans le cas d'un raisonnement erroné, elle laissera la parole aux autres étudiants afin d'initier un débat.

***1.4. Analyse descendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse***

Nous envisageons de construire une situation permettant la mobilisation des connaissances antérieures de l'étudiant lors de l'appropriation et l'usage du concept de développement limité dans les différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. Nous conduisons une analyse *a priori* descendante de cette situation en termes de niveaux de milieux (Margolinas, 1994, 2002 ; Bloch, 1999, 2006) et par l'identification des paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015).

- **Au niveau du milieu  $M_{+3}$  (Situation noosphérique)**

Le programme officiel mentionne que l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel doit se présenter via l'étude de deux cas :

*« Si  $f$  est définie sur l'intervalle  $I$  et si  $a$  est un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $a$ . (...) Adaptation au cas où  $f$  est définie sur  $I \setminus \{a\}$ . » (PO, 2016, p.11)*

Les recommandations du programme invitent les enseignants à présenter les différentes propriétés de la notion d'approximation d'une fonction au voisinage d'un réel à partir des exemples. Parmi ces propriétés, l'une d'elles est l'étude du cas d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être nécessairement deux-fois dérivable en ce réel. De ce fait, nous souhaitons construire une situation permettant la mise en lumière de cette propriété en considérant le cas d'une fonction prolongée par continuité au voisinage de ce réel.

Par ailleurs, les enseignants sont invités à aider les étudiants à produire des raisonnements permettant d'intégrer et d'articuler les différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. Pour cette raison, le milieu de construction doit permettre la dévolution de l'appropriation du concept d'approximation d'ordre 2 au voisinage d'un réel d'une fonction, qui n'est pas deux-fois dérivable en ce réel, en articulant ses différentes représentations en référence aux paradigmes [AI], [AC] et [AG].

- **Au niveau du milieu  $M_{+2}$  (Situation de construction)**

L'objet de l'enseignement consiste à introduire la propriété d'une fonction, admettant une approximation locale d'ordre 2 au voisinage de  $x_0$  sans être deux-fois dérivable en ce réel, à partir d'un exemple. La situation de construction repose sur la manière de conduire l'étudiant à élaborer cette propriété par la découverte qu'il peut déterminer l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel sans l'usage de la formule de Taylor-Young.

Nous envisageons de construire une situation permettant l'étude d'un cas particulier de ces fonctions afin d'introduire cette propriété en articulant les différents registres analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique associés aux paradigmes [AI], [AC] et [AG] (voir le troisième chapitre de la partie théorique).

Dans une première étape, nous souhaitons proposer cette situation aux étudiants afin de leur permettre de mobiliser les différentes représentations du concept d'approximation d'une fonction au voisinage de 0. Les représentations graphiques sont données dans cette situation. Dans une deuxième étape, nous voulons amener l'étudiant à déterminer les approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 d'une fonction par l'interprétation de ses représentations graphiques. Ensuite, il va déterminer les approximations locales de cette fonction au voisinage de 0 par

l'usage de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de ce réel. Dans une dernière étape, nous souhaitons conduire l'étudiant à savoir que la formule de Taylor-Young n'est pas toujours applicable pour déterminer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel.

➤ **Milieu  $M_{+1}$  (situation de projet)**

Le projet de l'enseignante est d'introduire le concept de développement limité d'une fonction au voisinage de 0 à partir d'un cas particulier d'une fonction n'est pas deux-fois dérivable en ce réel. Ce projet doit mobiliser ses différentes représentations associées aux différents registres dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

➤ **Milieu  $M_0$  (situation didactique)**

Nous voulons généraliser la notion d'approximation locale d'une fonction par l'existence d'un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 d'une fonction sans être deux-fois dérivable en ce réel. De plus, nous souhaitons amener l'étudiant à articuler les différents registres lors de l'appropriation de ce concept mathématique.

L'enseignante va donner la propriété de cet objet mathématique comme une généralisation de ce qui est produit par les étudiants dans la situation. L'enjeu didactique repose sur la manière d'articuler les différentes représentations dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG] afin de déterminer :

- les approximations locales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 d'une fonction n'est pas 2-fois dérivable en ce réel ;
- sa meilleure approximation au voisinage de ce réel.

En effet, nous voulons laisser l'étudiant choisir lui-même une technique de nature sémantique ou/et syntaxique en donnant l'expression de la fonction  $g$ , ses représentations graphiques et ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.

L'enseignante amènera l'étudiant à s'interroger sur les relations existant entre une approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel déduite de la formule de Taylor-Young et un développement limité généralisé. Elle va s'appuyer sur les raisonnements produits par les étudiants et ce qu'ils ont établi pour définir et caractériser le concept d'approximation locale au voisinage d'un réel à partir d'un cas particulier d'une fonction n'est pas deux-fois dérivable en ce réel.

***1.5. Analyse ascendante en termes de niveaux de milieux et de paradigmes de l'Analyse***

La situation est une situation à dimension adidactique permettant d'introduire la propriété du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel en référence aux différents paradigmes [AI], [AC] et [AG]. Nous avons ajouté des représentations graphiques comme



donnée dans cette situation afin d'articuler les différents registres par l'étudiant lors de l'appropriation d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel. Les questions visent à déterminer les développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 par l'interprétation des représentations graphiques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de cette fonction au voisinage de ce réel. Nous essayons de voir les échanges au sein du groupe qui permettent la confrontation des étudiants à une situation de référence. Ainsi, nous sommes en train de questionner les étudiants afin de les confronter à la situation de référence et à la situation d'apprentissage.

➤ **S-2 : situation de référence : sujet agissant et milieu objectif**

Le milieu objectif est constitué de la représentation analytique de la fonction  $g$ , ainsi que des représentations graphiques de sa fonction prolongée et de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

Dans une première étape, les étudiants vont élaborer un répertoire de décision (Gibel & Ennassef, 2010) de stratégie du calcul de limite de la fonction  $g$  en 0 afin de déterminer la fonction prolongée par continuité sur  $R$  associé aux paradigmes [AI] et [AC].

Dans une deuxième étape, ils mobiliseront leur connaissance du répertoire didactique en s'appuyant sur les objets du milieu objectif afin de déterminer les approximations polynômiales et les approximations locales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 dans le paradigme [AI] ainsi que la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de ce réel dans les paradigmes [AI], [AC] et [AG].

Les étudiants vont étudier la dérivabilité de la fonction  $g$  afin de montrer qu'elle n'est pas 2-fois dérivable en 0, dans le paradigme [AI]. Cette étude prend le statut d'argument pour prouver que cette fonction admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans utiliser la formule de Taylor-Young.

Les actions de l'étudiant agissant sur le milieu objectif ont pour objet la manière d'effectuer, d'obtenir et de contrôler :

- le calcul de limite d'une fonction ;
- l'interprétation des représentations graphiques pour développer un calcul algébrique pour déterminer les approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 ;
- la mobilisation des connaissances antérieures de l'étudiant par l'interprétation des représentations graphiques pour déterminer la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0 ;

- la mobilisation des connaissances antérieures du répertoire didactique de la classe pour déterminer les approximations locales de la fonction  $g$  au voisinage de 0 à partir de ses approximations polynômiales au voisinage de ce réel ;

- la décision de calculer les limites des expressions analytiques afin de déterminer les expressions du reste d'approximations locales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.

➤ **S-1 : situation d'apprentissage : étudiant apprenant et milieu de référence**

Les étudiants vont interpréter leurs résultats sur la détermination de l'approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 afin de montrer que dans ce cas, ils ne peuvent pas appliquer la formule de Taylor-Young.

Il existe  $\alpha > 0$ , pour tout  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ , on a :  $g(x) = x + x^2 + o(x^2)$ .

Comme la fonction  $g$  n'est pas 2-fois dérivable en 0, elle ne s'écrit pas sous la forme de  $\sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2)$ .

La situation d'apprentissage repose sur la capacité de l'étudiant :

- de prouver l'existence d'approximation locale d'une fonction d'ordre 1 et 2 au voisinage d'un réel et de tirer parti de son unicité ;
- de mobiliser ses connaissances antérieures pour trouver un lien entre l'approximation polynômiale d'une fonction et son approximation locale au voisinage de 0 ;
- de comprendre qu'une fonction admettant une approximation locale d'ordre 2 au voisinage de 0 n'est pas nécessairement déduite de la formule de Taylor-Young ;
- de comprendre qu'une fonction n'est pas définie en un réel peut avoir une approximation locale au voisinage de ce réel ;
- d'interpréter le calcul de limite de la fonction  $g$  en 0 pour montrer qu'elle est prolongeable par continuité en ce réel.

➤ **S<sub>0</sub> : situation didactique : milieu M<sub>0</sub>**

L'enseignante veut introduire la propriété du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel à partir des raisonnements produits par les étudiants. La situation didactique repose sur la possibilité de déterminer l'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel sans l'usage de la formule de Taylor-Young.

**1.6. Analyse a priori des raisonnements : modèle d'analyse des raisonnements**

Les étudiants confrontés à une situation à dimension adidactique vont travailler en groupe afin de rédiger la synthèse de leurs raisonnements dans des copies.

Nous présentons l'application de modèle d'analyse des raisonnements produits par les étudiants qui sont confrontés à la situation 2 dans le tableau récapitulatif suivant :

	Milieu M <sub>2</sub>	Milieu M <sub>1</sub>	Milieu M <sub>0</sub>
<b>Fonctions des raisonnements</b>	<p>R<sub>11</sub> [AC], [AG] et [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Décision de la procédure de calcul de limite de la fonction et du rapport de deux fonctions</li> <li>- Décision de la stratégie de calcul de limite de la fonction</li> <li>- Décision d'interpréter les représentations graphiques pour déterminer les approximations polynômiales de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> <li>- Décision de calculer la limite d'une fonction pour déterminer l'expression du reste.</li> <li>- Décision de calculer les dérivées successives de la fonction <math>g</math> pour donner la valeur de <math>g'(0)</math> et prouver que cette fonction n'est pas deux-fois dérivable en 0.</li> </ul>	<p>R<sub>12</sub> [AG], [AC] et [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Interpréter les représentations graphiques de fonctions <math>g, g_1</math> et <math>g_2</math> afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> <li>- Décider du calculer les limites du rapport des fonctions afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> <li>- Contrôler la cohérence et la validité des résultats</li> <li>- Prouver l'existence et l'unicité des approximations polynômiales <math>g_1</math> et <math>g_2</math> de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> </ul>	<p>R<sub>13</sub> [AI] et [AG]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Contrôler la cohérence des résultats obtenus par des procédures analytiques avec les résultats obtenus graphiquement.</li> <li>- Généraliser le concept du développement limité</li> <li>- Développement limité au voisinage d'un réel d'une fonction n'est pas définie en ce réel.</li> <li>- Formaliser la propriété de concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel</li> <li>- Justification analytique et graphique de la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> <li>- Contrôler, établir des liens et effectuer des interprétations dans les registres graphique et géométrique</li> </ul>
<b>Utilisation des symboles, signes et représentations sémiotiques</b>	<p>R<sub>21</sub> [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Des symboles iconiques pour désigner la somme ou le quotient de fonctions</li> </ul>	<p>R<sub>22</sub> [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Indices spécifiques pour mettre le lien entre une fonction et ses approximations polynômiales ainsi qu'entre ses différentes approximations locales au voisinage de 0</li> <li>- Symboles spécifiques pour modéliser l'écart entre l'approximation polynomiale et la fonction étudiée.</li> </ul>	<p>R<sub>23</sub> [AI]</p> <p>Arguments formels spécifiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Des symboles arguments liés à la construction des preuves (l'existence et l'unicité des approximations polynômiales, les tracés des courbes, etc.)</li> </ul>
<b>Usage et actualisation du répertoire</b>	<p>R<sub>31</sub> [AC] et [AI]</p> <p>Utilisation ponctuelles de connaissances anciennes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilisation des règles du calcul algébrique et formel</li> <li>- Usage de la formule de Taylor-Young</li> <li>- Usage de la définition généralisée du développement</li> </ul>	<p>R<sub>32</sub> [AG] et [AI]</p> <p>Enrichissement au niveau argumentaire :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Usage des propriétés d'une parabole</li> <li>- Usage des propriétés d'une droite</li> <li>- Usage des propriétés d'une fonction admettant des approximations</li> </ul>	<p>R<sub>33</sub> [AI] et [AG]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La définition généralisée de concept du développement limité d'une fonction au voisinage de 0</li> <li>- Visualisation d'une fonction et ses approximations</li> </ul>

	<p>limité d'une fonction au voisinage d'un réel</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Usage de la formule du calcul des fonctions dérivées successives d'une fonction</li> <li>- Usage de la méthode d'identification terme à terme.</li> <li>- Usage de la méthode de la résolution d'une équation de premier et deuxième degré à une seule inconnue</li> <li>- Usage de la formule de l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un réel.</li> <li>- Usage de la formule de prouver une fonction prolongeable.</li> </ul>	<p>polynômes au voisinage de 0</p>	<p>polynomiales au voisinage d'un réel</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- La propriété d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel sans être 2-fois dérivable en ce réel</li> </ul>
<p><b>Nature de justification d'un raisonnement (sémantique et/ou syntaxique)</b></p>	<p><math>R_{41}</math> [AC], [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Vérification de calcul de limite</li> <li>- Détermination de domaine de définition de la fonction <math>g</math></li> <li>- Justification que la fonction <math>g</math> est de classe <math>C^n</math> en <math>\mathbb{R} \setminus \{0\}</math></li> <li>- Le domaine de validité de calcul des dérivées successives d'une fonction</li> <li>- Proposition de l'application de la formule de Taylor-Young pour déduire l'absurdité</li> <li>- Vérification des expressions des approximations polynômes de la fonction <math>g</math> par l'interprétation des représentations graphiques</li> </ul>	<p><math>R_{42}</math> [AG], [AC] et [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Existence d'un voisinage de 0</li> <li>- Existence de la fonction <math>\mathcal{E}(x)</math></li> <li>- Interprétation géométrique des représentations graphiques</li> <li>- Les expressions de calcul de limite du rapport des fonctions prennent les statuts des arguments</li> <li>- Interprétation de l'usage de Zoom pour préciser le voisinage convenable de donner la meilleure approximation locale de la fonction <math>g</math>.</li> <li>- Interprétation géométrique des représentations graphiques « dynamiques » pour donner la meilleure approximation polynôme de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</li> <li>- Justification des liens entre les fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math>.</li> </ul>	<p><math>R_{42}</math> [AG] et [AI]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Interprétation géométrique des représentations graphiques de la fonction <math>g</math> et ses approximations polynômes à l'ordre 1 et 2 au voisinage de 0</li> <li>- Interprétation des représentations graphiques pour donner la meilleure approximation polynôme d'une fonction</li> </ul>
<p><b>Niveau de paradigmes de l'Analyse</b></p>	<p><math>R_{51}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dans les paradigmes [AC] et [AI], le calcul des limites de la fonction <math>g</math> et du rapport des fonctions afin d'étudier la</li> </ul>	<p><math>R_{52}</math></p> <p>Dans les paradigmes [AG], [AI] et [AG], l'usage des représentations graphiques des fonctions</p>	<p><math>R_{53}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Dans les paradigmes [AG], [AI] et [AG], l'interprétation des objets de géométrie (des représentations</li> </ul>

	continuité de la fonction $g$ et sa dérivée seconde en 0.	$g$ , $g_1$ et $g_2$ afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction $g$ , ainsi que ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.	graphiques des fonctions $g$ , $g_1$ et $g_2$ ) afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction $g$ et ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.
--	---	---	---

**Tableau 6-25 : analyse des raisonnements lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 d'une fonction n'est pas 2-fois dérivable en ce réel**

## II. Principaux résultats

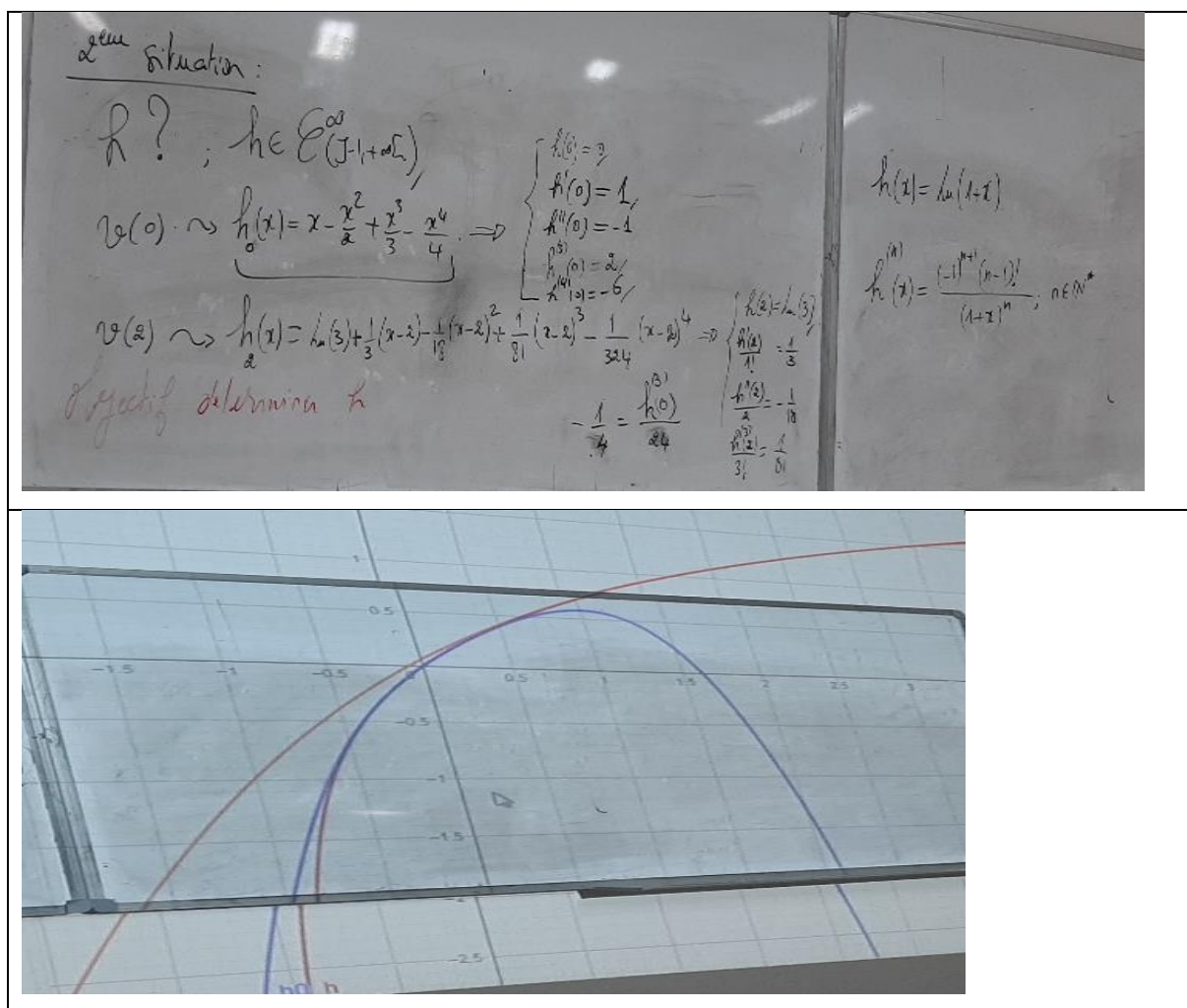
Nous conduisons l'analyse du déroulement de la deuxième séance de l'expérimentation par la distinction des phases didactiques et adidactique.

### II.1. Phase 1 : la manière d'établir le lien avec les précédentes notions

L'enseignante rédige au tableau l'énoncé de l'exemple traitant le cas d'une fonction inconnue admettant des approximations polynômiales d'ordre 4 aux voisinages de deux réels distincts. Ensuite, elle utilise le logiciel Geogebra pour la construction des représentations graphiques de cette fonction et de ses approximations polynômiales d'ordre 4 au voisinage des réels 0 et 2. Elle fait la projection au tableau par un projecteur. Ensuite, elle demande à toute la classe de déterminer oralement les valeurs des dérivées successives d'une fonction  $h$  en 0 et en 2. A ce stade, les étudiants proposent l'application de la formule de Taylor-Young puisque cette fonction est de classe  $C^n(\] - 1; +\infty[)$ . L'enseignante donne la parole aux étudiants pour donner leurs procédures « oralement » afin de pouvoir les rédiger au tableau.

Après la détermination des valeurs des dérivées successives d'une fonction en 0 et 2 à partir de ses approximations polynômiales d'ordre 4 au voisinage de ces deux réels, elle revient aux illustrations graphiques présentées au deuxième tableau de l'amphi. Elle utilise la fonction « zoom » en choisissant des intervalles fermés déterminant des voisinages de 0 et de 2. Cette approche graphique « dynamique » aide les étudiants à accéder au sens des approximations locales d'une fonction au voisinage de deux différents réels. A partir de ces représentations graphiques « dynamiques » et algébriques, l'enseignante leur demande de déterminer une expression d'une fonction inconnue  $h$  vérifiant ces conditions. Une étudiante propose que cette fonction peut être égale à la fonction  $[x \mapsto \ln(1 + x)]$ . A ce moment-là, l'enseignante lui laisse la parole pour expliquer son raisonnement. Cette étudiante a choisi cette expression puisqu'elle vérifie les conditions initiales données : la fonction est de classe  $C^n(\] - 1; +\infty[)$  et sa courbe représentative est celle présentée au deuxième tableau. A ce stade, certains

étudiants interviennent pour donner oralement les dérivées successives de cette fonction en mobilisant la technique enseignée au Secondaire. L'enseignante rédige cette formule au tableau.



**Figures 6-4 : les traces du tableau lors de la résolution de l'exemple traité oralement par l'enseignante**

De ce fait, l'enseignante étudie le développement limité d'une fonction aux voisinages de deux réels distincts en articulant les approches analytique, algébrique et graphique « dynamique ». En effet, elle offre aux étudiants la possibilité de visualiser les approximations locales d'une fonction aux voisinages de deux réels distincts (0 et 2) par la mobilisation des différents registres associés aux paradigmes [AC], [AI] et [AG].

L'enseignante s'appuie sur cet exemple étudié d'une fonction admettant des développements limités au voisinage de deux différents réels afin d'introduire la définition généralisée du concept de développement limité.

*001 P : A partir de cet exemple, vous avez étudié les développements limités d'ordre 4 d'une fonction au voisinage de deux réels. Je vais poser la question : qu'est-ce qu'un développement limité ? Est-ce que développement limité c'est Taylor-Young ? Ou la formule de Taylor-Young est un développement limité ?*

(Aucune réponse des étudiants)

002 P : C'est-à-dire en d'autres termes, est-ce que la notion est plus générale que la formule de Taylor-Young ou en fait le développement limité est une conséquence de cette formule ?

003 E : C'est une conséquence

004 P : C'est bien, le développement limité est plus général que la formule de Taylor-Young. En fait, Taylor-Young impose beaucoup de conditions, il faut que la fonction  $h$  soit de classe  $n$ , c'est-à-dire vous allez voir est-ce qu'elle a les mêmes conditions ?

(Elle rédige au tableau :

Définition du développement limité

$f$  admet un  $DL_n(x_0)$ . S'il existe  $(n + 1)$  coefficients réels,  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  tel que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n}_{\text{Partie polynomiale}} + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{\text{Reste}}$$

$$= P(x) + ((x - x_0)^n \varepsilon((x - x_0)^n)) \text{ avec } d^\circ P \leq n$$

005 P : Le degré du polynôme  $P$  peut être égal à 0. Au maximum,  $P$  sera de degré  $n$ . Il y a là un minimum de condition. Quelle est la plus générale : la notion de développement limité ou la formule de Taylor-Young ?

006 E : Le développement limité.

007 P : Oui, le développement limité est plus général que la formule de Taylor-Young. Le cas général n'a rien proposé concernant la fonction  $f$ . En effet, les conditions de l'usage de la formule de Taylor-Young sont très fortes, il faut que la fonction  $f$  soit de classe  $n$  au voisinage de  $x_0$ . Par contre, la définition du développement limité est très simple. Si j'arrive à écrire ma fonction  $f$  sous la forme d'un polynôme plus un reste, alors là j'ai trouvé un développement limité d'ordre lié au reste.

### **Tableau 6-26 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de l'introduction de la définition généralisée du concept de développement limité**

L'enseignante aide les étudiants à distinguer les deux notions de la formule de Taylor-Young et de développement limité pour déterminer une approximation locale d'une fonction au voisinage d'un réel. Elle explique l'intérêt de la définition d'un développement limité d'une fonction qui n'est pas nécessairement de classe  $n$ . Elle donne l'intérêt de préciser l'ordre d'un développement limité qui est lié à l'expression du reste. A partir d'un « cours dialogué », l'enseignante introduit la définition généralisée du concept de développement limité en faisant une distinction entre un développement limité déduit de la formule de Taylor-Young et celui déduit de sa définition généralisée.

#### **II.2. Phase 2 : étude de dévolution de la situation**

Suite à l'enseignement de la définition généralisée de développement limité, l'enseignante propose la situation 2 à la classe divisée en huit trinômes.

001 P : (1) Voilà la définition généralisée du concept de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel. Maintenant, (2) nous passons à une deuxième situation. (3) Je vous distribue la feuille contenant l'énoncé de ce problème. (4) Vous allez travailler par trinôme pour essayer de répondre aux différentes questions de cette situation pendant 30 minutes. (5) Vous allez rédiger vos réponses dans une copie de synthèse. En plus, (6) chacun de vous va rédiger ses réponses sur une feuille indépendamment de son groupe selon son propre mode du raisonnement. (7) Si vous

rencontrez des difficultés, vous pouvez m'appeler pour vous aider. Ensuite, (8) nous allons corriger ensemble les différentes questions proposées dans cette situation. (9) Mais cette fois, comme il ne nous reste pas beaucoup du temps, je vais moi-même rédiger la correction au tableau.

Nous conduisons une analyse de cette intervention de l'enseignante en distinguant sa nature, sa spécificité et sa fonction.

Nature et spécificité de l'intervention	Fonction de l'intervention
<p>La manière de donner la consigne</p> <p>(1) Présentation de la finalité de la phase de l'institutionnalisation de la définition généralisée du concept de développement limité.</p> <p>(2) Évocation de la mise en œuvre d'un nouveau projet en classe.</p> <p>(3) Déclaration de départ du nouveau projet</p> <p>(4) Évocation du projet de débat au sein du groupe pour répondre aux questions proposées dans la situation.</p> <p>(5) Projet de produire une production commune.</p> <p>(6) Évocation du projet de rédaction individuelle au sein du groupe pour répondre aux questions proposées dans la situation.</p> <p>(7) Évocation de mise en position d'un débat au sein de groupe et entre les étudiants avec l'enseignante.</p> <p>(8) Évocation du projet de débat et du dispositif associé</p> <p>(9) Décision de la rédaction de la correction au tableau par l'enseignante</p>	<p>L'enseignante explicite l'organisation de la séquence en vue de susciter le débat au sein du groupe, puis avec toute la classe. Elle donne les conditions nécessaires aux débats :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Au sein du groupe, chaque étudiant devra prendre position par rapport aux différentes questions proposées. Ensuite, il devra prendre la décision de rédiger son propre raisonnement.</li> <li>- Après le débat au sein du groupe, l'enseignante donne la parole à toute la classe pour répondre oralement à chacune des questions proposées dans la situation. Cette interaction permettra de savoir les différentes connaissances mobilisées par les étudiants.</li> <li>- L'enseignante devra prendre la décision de rédiger les raisonnements valides.</li> </ul>

**Tableau 6-27 : la dévolution de la situation et la manière de donner la consigne aux étudiants**

L'enseignante dévolue la situation d'une manière assez-claire aux étudiants. Elle précise son rôle lors de confrontation à cette situation et lors de la correction des différentes questions proposées.

### ***II.3. Phase 3 : analyse des raisonnements produits par les 8 groupes***

Nous conduisons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), une analyse des raisonnements produits par les 8 trinômes. Dans une première étape de cette analyse, nous mettons la focale sur l'analyse didactique des savoirs et des connaissances mobilisés afin d'identifier les difficultés rencontrées par ces étudiants. Pour ceci, nous reprenons les objectifs principaux de la proposition des différentes questions en distinguant les types des techniques, formules, méthodes, etc. mobilisées par les étudiants :

- Études de la prolongée par continuité de la fonction  $g$  sur  $R$  et de ses dérivées d'ordre 1 et 2 en 0 : ces questions sont traitées au niveau Secondaire.



- Détermination des approximations polynômiales de la fonction  $g$  au voisinage de 0 : d'un côté, l'étudiant peut mobiliser ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire par l'utilisation d'une technique d'ordre géométrique. En effet, dans ce cas, il interprète les représentations graphiques des fonctions pour déterminer ses représentations algébriques. D'un autre côté, il peut mobiliser ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Supérieur par l'usage d'une technique d'ordre analytique. En effet, il s'appuie sur l'expression de la fonction  $g$  pour déterminer ses approximations locales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0. Et à partir de ces expressions analytiques, il donne les représentations algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$ .
- Détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Dans ce cas, l'étudiant utilise une méthode du répertoire didactique du Supérieur pour déterminer un développement limité.
- Détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Dans ce cas, l'étudiant peut utiliser deux différentes techniques articulant les dimensions sémantique et syntaxique. En effet, il fait appel à ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Supérieur soit par le calcul algébrique de limite, soit par la mesure de l'écart entre les courbes.
- Étude de développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Dans ce cas, l'étudiant doit prouver que la formule de Taylor-Young n'est pas applicable puisque la fonction  $g$  n'est pas de classe 2 au voisinage de 0.

Dans une deuxième étape, nous conduisons une analyse détaillée des raisonnements produits par deux trinômes : groupes 1 et 4. Nous pensons que cette analyse didactique nous permettra d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation de la notion d'approximation locale d'une fonction.

### III.3.1 Analyse globale des raisonnements des groupes

Nous distinguons les différents types de raisonnement selon l'intervention de l'enseignante :

- Raisonnements en situation à dimension adidactique : dans ce cas, le trinôme produit un raisonnement par une guidance faible. En effet, il rédige leur procédure de résolution suite à la demande de l'intervention de l'enseignante.
- Raisonnements en situation adidactique : dans ce cas, le trinôme produit un raisonnement d'une manière autonome. Il ne demande pas l'aide de l'enseignante.

Nous résumons les réponses de 8 groupes de la classe (PC) aux différentes questions proposées dans la situation 2 dans le tableau ci-dessous :

	Types de raisonnement	Raisonnements en situation à dimension adidactique		Raisonnements en situation adidactique		Absence de raisonnement
		Valides	Erronés	Valides	Erronés	
Etudes de la prolongée par continuité de la fonction $g$ sur $R$ et de ses dérivées d'ordre 1 et 2 en 0	Q1-a	0	0	8	0	0
	Q1-b	0	0	8	0	0
	Q3-a	0	0	8	0	0
	Q3-b	0	0	5	1	2
Détermination des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction $g$ au $V(0)$	Q2-a	2	0	6	0	0
Détermination des $DL_1(0)$ et $DL_2(0)$	Q2-c	0	0	0	8	0
Détermination de la meilleure approximation de la fonction $g$ au $V(0)$	Q2-b	1	0	6	1	0
Etude de $DL_2(0)$	Q4	0	0	1	0	7

**Tableau 6-28 : types de raisonnements produits par les trinômes lors de la résolution des différentes questions de la situation**

Tous les groupes font appel à leurs connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction  $g$  sur  $R$ .

Nous remarquons que la majorité des groupes ont produit des raisonnements valides d'une manière autonome lors de la détermination des représentations algébriques des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. En revanche, les groupes 4 et 6 sont confrontés à un problème lorsqu'il faut choisir une méthode adéquate pour déterminer les représentations algébriques des approximations polynômiales de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Ils ont mis en œuvre des pas de raisonnement de nature sémantique, par une guidance faible.

La majorité des groupes n'ont pas essayé de chercher la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Nous pouvons dire qu'il existe une erreur *d'ordre cognitif et conceptuel* liée à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

Nous pouvons classer les différents types de techniques utilisées en mettant en jeux les paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015) selon ces catégories :

- Technique Arithméco-algébrique : dans ce cas, l'étudiant effectue un calcul algébrique et numérique afin de développer son raisonnement dans les paradigmes [AC] et [AI]. Il utilise une méthode ou formule ou propriété du répertoire didactique du Secondaire. Par

exemple, il calcule la limite d'une fonction au voisinage de 0 pour étudier sa continuité et sa dérivabilité en ce réel.

- Technique géométrico-graphique : dans ce cas, l'étudiant interprète une représentation graphique d'un objet de géométrie pour confirmer directement sa représentation algébrique dans les paradigmes [AI] et [AG]. Par exemple, il donne directement l'expression de la fonction  $g_1$  par l'interprétation de sa représentation graphique. Cette technique est développée dans un pas de raisonnement de nature sémantique.

- Technique géométrico-algébrique : dans ce cas, il interprète une représentation graphique d'un objet mathématique, en lien avec géométrie, afin de développer un calcul algébrique et formel. Il produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique dans les paradigmes [AC], [AG] et [AI].

- Technique analytique : dans ce cas, l'étudiant utilise une formule de registres du répertoire didactique du Supérieur dans le paradigme [AI]. Par exemple, il détermine un développement limité de la fonction  $g$  par l'usage de sa définition généralisée afin de donner une représentation algébrique de son approximation polynômiale au voisinage de 0. Il produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique.

Nous conduisons des analyses quantitative et qualitative de chacune des questions proposées dans la situation afin d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés par les différents groupes.

#### Analyse des questions (1-a) et (1-b)

Nous présentons les types de techniques et de raisonnements produits par les 8 groupes lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction  $g$  sur  $R$  dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Arithméco-algébrique	8	0	0

**Tableau 6-29 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction  $g$  sur  $R$**

Nous remarquons que tous les trinômes ont produit des pas de raisonnement de nature syntaxique/sémantique par la justification du calcul de limite de la fonction  $g$  en 0 dans le paradigme [AC]. En effet, ils font appel à leurs connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire : la fonction  $[x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)]$  est bornée au voisinage de 0. Par ailleurs, le groupe 8 s'appuie sur cette propriété pour développer son raisonnement par l'usage de la formule (\*) du calcul de limite d'une fonction bornée.

(\*) Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = a$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a$ .

Par ailleurs, tous les groupes ont donné la représentation analytique de la prolongée de la fonction  $g$  sur  $R$  selon un aspect purement syntaxique dans des registre analytique et numérique.

#### Analyse de la question (2-a)

Nous résumons les productions des groupes lors de la détermination de chacune des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 dans deux tableaux.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de technique utilisée	Analytique	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
	Géométrico-algébrique	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

**Tableau 6-30 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la représentation algébrique de la fonction  $g_1$**

La majorité des groupes ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par l'usage d'une méthode géométrico-algébrique dans les différents paradigmes [AG], [AI] et [AC]. En effet, ces trinômes interprètent la représentation graphique de l'objet fonction  $g_1$  pour développer un calcul algébrique dans les registres algébrique, graphique, géométrique et numérique. Par ailleurs, le groupe 6 a produit un raisonnement formellement incomplet par l'utilisation de la formule de Taylor-Young, puis il vérifie son raisonnement par l'interprétation de la représentation graphique de la fonction  $g_1$ . En effet, ce groupe ne précise pas un voisinage de 0 lors de la détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de ce réel. Il a développé son raisonnement, par une guidance faible, en mobilisant les différents registres analytique, algébrique, graphique, numérique et géométrique.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de technique utilisés	Analytique	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
	Géométrico-algébrique	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
	Aucune	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

**Tableau 6-31 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la représentation algébrique de la fonction  $g_2$**

Nous remarquons que la plupart des groupes ont produit des pas de raisonnements de nature sémantique/syntaxique par la mobilisation des différents registres algébrique, graphique, géométrique et numérique. Ces groupes font l'usage d'une technique géométrico-algébrique

pour déterminer l'expression de la fonction  $g_2$ . En effet, ils interprètent la représentation graphique de la fonction  $g_2$  afin de développer un calcul algébrique et formel.

Par ailleurs, le groupe 6 a utilisé une méthode fautive qui diffère de celles des autres groupes lors de la détermination des représentations algébriques des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

En revanche, les deux groupes 5 et 7 ont donné directement l'expression de la fonction  $g_2$ .

#### Analyse de la question (2-b)

Nous résumons les réponses des groupes dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de technique utilisés	Géométrico-graphique	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
	Aucune	<b>1</b>	<b>1</b>	

**Tableau 6-32 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0**

Nous remarquons que la plupart des trinômes considèrent que la représentation graphique de la fonction  $g_2$  est plus proche de la représentation graphique de la fonction  $g$ . En réalité, les étudiants sont en train de visualiser ces représentations graphiques par la mesure de l'écart entre ces courbes dans les paradigmes [AG] et [AI]. Cette interprétation géométrique traduit l'existence d'une difficulté de justification de leurs raisonnements lors de l'articulation des différents registres de représentation sémiotique.

La majorité des étudiants ont mis en œuvre des pas de raisonnements de nature sémantique dans des registres graphique et géométrique.

Le groupe 3 considère directement la fonction  $g_2$  est plus proche de la représentation graphique de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Il n'a pas produit aucun moyen de justification de son raisonnement.

#### Analyse de la question (2-c)

Nous présentons le résumé des productions des étudiants lors de la détermination du développement limité de la fonction  $g$  d'ordre 1, puis celui d'ordre 2 au voisinage de 0 dans deux différents tableaux.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de technique utilisés	Algébrico-analytique	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
	Aucune	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	

**Tableau 6-33 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0**

Nous remarquons qu'aucun groupe n'a produit un raisonnement formel complet. En effet, cinq groupes ont donné la représentation analytique du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 sans la précision d'un voisinage de ce réel dans le paradigme [AI]. Par ailleurs, les autres groupes mobilisent une méthode fautive.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisés	Algébri-co-analytique	0	1	6	0
	Aucune	0	1	0	

**Tableau 6-34 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0**

Nous remarquons que tous les trinômes ont effectué des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liées à l'appropriation du concept de développement limité d'une fonction au voisinage de 0. En effet, la majorité des groupes utilise une méthode fautive lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 dans le paradigme [AI].

Par ailleurs, le groupe 7 présente les représentations analytiques des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 sans la précision d'un voisinage. Ce trinôme considère qu'un développement limité d'une fonction est la somme de son approximation polynômiale et de l'expression du reste présentée sous deux formes différentes :  $[x^2, \varepsilon(x)]$  et  $[o(x^2)]$ .

Le groupe 6 a donné directement les représentations analytiques des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 sans la précision de voisinage. Ce trinôme a déjà utilisé ces expressions pour déterminer des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 dans la question précédente (2-b). Ces étudiants sont confrontés au problème lié à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

Par ailleurs, le groupe 1 utilise une méthode n'ayant aucune relation avec le répertoire didactique de classe. En effet, il considère que le développement limité d'une fonction est le produit de son approximation polynômiale avec la fonction  $\varepsilon(x)$ . Ce trinôme a effectué une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel*. Nous allons présenter, dans la section suivante, une analyse détaillée des raisonnements produits par ce groupe afin d'identifier et de caractériser l'origine de leurs erreurs.

Les groupes 7 et 8 développent une méthode fautive (\*) lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

(\*)  $DL_2(0)$  Il existe des coefficients réels tel que  $g(x) = 0 + 1(x - 0) + 1(x - 0)^2 + (x - 0)^2 \varepsilon(x)$

Ces deux trinômes sont confrontés à une difficulté liée à l'appropriation du concept de développement limité d'une fonction. En effet, ils ne parviennent pas à utiliser la définition généralisée de ce concept mathématique.

#### Analyse de la question (3-a)

Nous présentons le résumé des réponses des groupes lors de la détermination des valeurs de la fonction  $g$  en 0 et de sa dérivée en ce réel dans deux différents tableaux.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisés	Algébrico-analytique	1	0	0
	Géométrico-graphique	1	0	
	Aucune	6	0	

**Tableau 6-35 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la valeur de la fonction  $g$  en 0**

Nous remarquons que tous les groupes ont produit un raisonnement formel complet lors de la détermination de la valeur de la fonction  $g$  en 0. La majorité des groupes ont donné directement cette valeur numérique dans le paradigme [AC]. En revanche, le groupe 1 a interprété le graphique pour produire un pas de raisonnement de nature sémantique dans les paradigmes [AI] et [AG].

En plus, le groupe 4 a vérifié son raisonnement par un moyen de contrôle sur le comportement local de la fonction  $g$  au voisinage de 0. En effet, il mobilise sa connaissance antérieure du répertoire didactique du Secondaire sur le fait que cette fonction est prolongeable par continuité en 0.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons le résumé des productions des trinômes lors de l'étude de la dérivée de la fonction  $g$  en 0.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisés	Algébrico-analytique	0	1	0
	Géométrico-algébrique	1	0	
	Arithmetico-algébrique	5	0	
	Aucune	1	0	

**Tableau 6-36 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de la valeur de la dérivée de la fonction  $g$  en 0**

Nous remarquons que la majorité des groupes ont utilisé une technique Arithmetico-algébrique du répertoire didactique du Secondaire. En effet, ils ont calculé la limite de la

fonction  $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$  pour donner la valeur de  $g'(0)$ . Ce pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique est développé dans le paradigme [AC].

Par ailleurs, le groupe 2 a produit un pas de raisonnement de nature sémantique par l'interprétation de la représentation graphique de la fonction  $g$ . En effet, il considère la valeur  $g'(0)$  est la pente de la tangente au point  $O(0,0)$  d'équation :  $y = x$ .

Le groupe 6 a donné directement la valeur de la dérivée de la fonction  $g$  en 0.

Le groupe 8 a déterminé la valeur de la dérivée de la fonction  $g$  en 0 par le calcul de sa dérivée. L'erreur commise par ce trinôme traduit l'existence d'une difficulté liée à la mobilisation des connaissances antérieures du Secondaire. En effet, une fonction n'est pas définie en 0, elle n'est pas obligatoirement dérivable en ce réel.

Nous remarquons que le groupe 5 agit sur la validation de son raisonnement par une rétroaction sur la technique mobilisée. Dans une première étape, il calcule la dérivée de la fonction  $g$  pour prouver que sa limite en 0 n'existe pas. Ensuite, il calcule la limite de  $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$  en 0 pour déterminer la valeur de  $g'(0)$  en justifiant son raisonnement. L'usage de ces deux techniques amène à une contradiction dans le raisonnement de ce trinôme.

#### Analyse de la question (3-b)

Dans ce tableau, nous présentons une analyse des productions des groupes lors de l'étude de la dérivée seconde de la fonction  $g$  en 0.

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisés	Algébrico-analytique	1	0	2
	Arithmetico-algébrique	5	0	

**Tableau 6-37 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude de la dérivée seconde de la fonction  $g$  en 0**

Un nombre assez important des groupes ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique en mobilisant les registres analytique et numérique dans les paradigmes [AC] et [AI]. En effet, ils déterminent la dérivée de la fonction  $g$  afin de développer le calcul de limite de la fonction  $\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}$  en 0. L'inexistence d'une valeur réelle prouve que la fonction  $g$  n'est pas deux-fois dérivable en 0. Ces groupes vérifient ce calculus de limite dans le paradigme [AC].

Le groupe 2 confirme l'inexistence de limite de la fonction  $[x \mapsto \frac{g'(x)-g'(0)}{x}]$  en 0 sans la vérification de son raisonnement.



Les groupes 1 et 8 n'ont pas essayé d'étudier la dérivée seconde de la fonction  $g$  en 0.

#### Analyse de la question 4

Le résumé des productions des groupes est présenté dans le tableau ci-dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisés	Algébrico-analytique	1	0	7

**Tableau 6-38 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la vérification des moyens de contrôle de l'usage de la formule de Taylor-Young**

Un seul groupe (le groupe 6) a produit un pas de raisonnement de nature sémantique. En effet, ce groupe interprète son raisonnement par la vérification des conditions nécessaires de l'usage d'une formule du répertoire didactique du Supérieur. En effet, la formule de Taylor-Young de registres des formules n'est applicable que dans le cas de l'étude d'une fonction de classe  $C^2$ .

Nous pouvons conclure que la majorité des groupes sont confrontés à une difficulté pour interpréter la représentation algébrique de l'approximation polynômiale de la fonction  $g$  en 0.

A l'issue de cette analyse des productions de 8 trinômes en termes de raisonnements, nous pouvons conclure que la majorité des étudiants donnent l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction.

#### III.3.2 Analyse des raisonnements produits par certains groupes

Les productions de chaque groupe sont présentées à partir de la transcription de la copie de synthèse de leurs productions, des photos prises et des vidéos enregistrées. Nous choisissons de vous présenter l'analyse détaillée des raisonnements produits par les groupes 1 et 4. En effet, nous pensons que les interventions de l'enseignante nous aident à identifier certaines difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Dans une première étape, nous présentons les raisonnements produits par chacun des deux trinômes à partir de copies de synthèse de leurs productions, des photos prises et de la vidéo enregistrée lors de la séance. Ensuite, nous adoptons notre modèle d'analyse, introduit par Bloch et Gibel (2011) et développé dans le troisième chapitre de la partie théorique, afin de conduire une analyse détaillée des raisonnements qui sous-tendent leurs productions. Dans une dernière étape, nous nous intéressons à identifier et caractériser les différentes difficultés rencontrées par ces deux groupes en étudiant la nature et l'origine de leurs erreurs.

Nous présentons l'analyse des raisonnements produits par chacun des groupes dans un tableau composé de deux colonnes dont la première comporte les transcriptions de la copie de ce groupe et de leurs échanges avec l'enseignante enregistrés en vidéo. Dans la deuxième colonne, nous conduisons une analyse de chacune des étapes de leurs raisonnements par l'identification de niveau de milieux et de paradigmes correspondants et du niveau de registre sémiotique, ainsi que du point de fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotique et des dimensions sémantique et/ou syntaxique. Nous envisageons que cette étude nous permettra d'identifier et de caractériser les différentes difficultés des étudiants lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

### III.3.2.1. Analyse des raisonnements du groupe 1

Le groupe 1 n'a pas demandé l'aide de l'enseignante lors de la production de ses procédures de résolutions. Nous conduisons une analyse détaillée de ces raisonnements selon notre modèle d'analyse du raisonnement en s'appuyant sur les retranscriptions de sa copie de synthèse.

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>Etape 1 : étude de la prolongée par continuité de la fonction <math>g</math> sur <math>R</math></b></p> <p><b>1-a) L1</b> <math>g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)</math></p> <p><b>L2</b> <math>D_g = R^*</math></p> <p><b>L3</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]</math></p> <p><b>L4</b> Avec <math>x \rightarrow 0, x^2 \rightarrow 0, x^3 \rightarrow 0</math> et <math>\sin\left(\frac{1}{x}\right)</math> borné</p> <p><b>L5</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0</math></p> <p><b>L6</b> Donc <math>g</math> est prolongeable par continuité en 0</p> <p><b>2-b) L7</b></p> $g(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u></p> <p>L'expression de de la fonction <math>g</math> constitue un élément de milieu objectif (<math>M_2</math>). L'interprétation du calcul de limite de cette fonction en 0 amène ce trinôme à conclure qu'elle est prolongeable par continuité sur <math>R</math>. Cette interprétation de résultat est développée dans les paradigmes [AI] et [AC].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Ce trinôme mobilise les registres analytique et numérique lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction <math>g</math> sur <math>R</math>.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(1)] Décision de l'utilisation de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>.</p> <p>[(2)] Détermination de domaine de définition de la fonction <math>g</math>.</p> <p>[(3)-(4)-(5)] Calculus de limite de la fonction <math>g</math> en 0. Ce calcul algébrique et numérique est un moyen de l'étude de cette fonction en ce réel.</p> <p>Dans l'étape (4), ce trinôme justifie son calcul de limite.</p> <p>[(6)] Confirmation que la fonction <math>g</math> est prolongeable par continuité en 0.</p> <p>[(7)] Présentation de la fonction prolongée de la fonction <math>g</math> sur <math>R</math>.</p> <p>Ce trinôme a produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par l'utilisation d'une méthode du répertoire didactique du Secondaire.</p>

<p><b>Etape 2 : détermination des représentations algébriques d'approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</b></p> <p><b>2-a) L8</b> Graphiquement : <math>g_1(x) = x</math></p> <p><b>L9</b> <math>g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)</math></p> <p><b>L10</b> Au <math>V(0)</math>, <math>g_1(x) = a_0 + a_1x</math></p> <p><b>L11</b> <math>g_1(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0</math></p> <p><b>L12</b> <math>g_1(x) = a_1x</math></p> <p><b>L13</b> Graphiquement : <math>g_1(2) = 2</math></p> <p><b>L14</b> <math>\Rightarrow a_1 \cdot 2 = 2</math></p> <p><b>L15</b> <math>\Rightarrow a_1 = 1</math></p> <p><b>L16</b> <math>g_1(x) = x</math></p> <p><b>L17</b> <math>\deg g_2 = 2</math></p> <p><b>L18</b> <math>g_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2</math></p> <p><b>L19</b> <math>a_0 = 0</math></p> <p><b>L20</b> <math>g_2(-2) = 2</math></p> <p><b>L21</b> <math>a_1(-2) + a_2(-2)^2 = 2</math></p> <p><b>L22</b> <math>(-2)a_1 + 4a_2 = 2</math></p> <p><b>L23</b> <math>\Rightarrow 4a_2 = 2 + 2a_1</math></p> <p><b>L24</b> <math>\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1</math></p> <p><b>L25</b> <math>g_2(2) = 6</math></p> <p><b>L26</b> <math>\Rightarrow a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 6</math></p> <p><b>L27</b> <math>\Rightarrow 2a_1 + 4a_2 = 6</math></p> <p><b>L28</b> <math>\Rightarrow 2a_1 + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1\right) = 6</math></p> <p><b>L29</b> <math>\Rightarrow 2a_1 + 2 + 2a_1 = 6</math></p> <p><b>L30</b> <math>\Rightarrow 4a_1 + 2 = 6</math></p> <p><b>L31</b> <math>4a_1 = 4</math></p> <p><b>L32</b> <math>a_1 = 1</math></p> <p><b>L33</b> <math>a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}</math></p> <p><b>L34</b> <math>\Rightarrow a_2 = 1</math></p> <p><b>L35</b> <math>g_2(x) = x + x^2</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u></p> <p>Ce trinôme utilise une méthode géométrico-algébrique par l'interprétation des représentations graphiques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math> pour déterminer ses représentations algébriques. Ces représentations graphiques prennent le statut d'argument dans le milieu de référence. Par ailleurs, cette technique permet d'étudier ces fonctions en des points de ses courbes représentatives. Elle est développée dans les paradigmes [AG], [AI] et [AC].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Ce trinôme articule les différents registres algébrique, graphique, géométrique et numérique pour déterminer les représentations algébriques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math>. En effet, il interprète ses représentations graphiques afin de développer un calcul algébrique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(8)] Présentation de la représentation algébrique d'approximation polynômiale d'ordre 1 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 par l'usage du graphique. Ce trinôme développe une technique géométrico-graphique par l'interprétation de la représentation graphique de la fonction <math>g_1</math>.</p> <p>[(9)] Décision de l'usage de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>.</p> <p>[(10)] Décision d'utiliser un polynôme de degré 1 avec deux inconnues pour déterminer la représentation algébrique de la fonction <math>g_1</math>.</p> <p>[(11)-(12)-(13)-(14)-(15)-(16)] Détermination de la représentation algébrique de la fonction <math>g_1</math> par l'usage d'une méthode géométrico-algébrique. Ce trinôme désigne deux points de la représentation graphique de cette fonction afin de développer un calcul algébrique et numérique. En réalité, il développe une technique du répertoire didactique du secondaire. Il a produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique.</p> <p>[(17)] Précision de degré d'approximation polynômiale de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p> <p>[(18)] Décision de l'usage d'un polynôme de degré 2 admettant trois inconnues pour déterminer l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p> <p>[(19)-(20)-(21)-(22)-(23)-(24)-(25)-(26)-(27)-(28)-(29)-(30)-(31)-(32)-(33)-(34)-(35)] Détermination de l'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 par l'usage d'une technique géométrico-algébrique. Ce trinôme mobilise une méthode du registre des formules du répertoire didactique du Secondaire. En effet, il interprète la représentation graphique de la fonction <math>g_2</math> pour développer un calcul algébrique et numérique. En réalité, ce groupe précise trois points de</p>
---	---

	<p>cette courbe représentative pour déterminer les coefficients inconnus du polynôme de degré 2. Il a produit un pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique.</p>
<p><b>Etape 3 : détermination de la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</b>  <b>2-b) L36</b> La meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au <math>V(0)</math>  <b>L37</b> <math>g(x) = g_1(x) + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)</math>  <b>L38</b> <math>g(x) = g_2(x) + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)</math>  <b>L39</b> On a : <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{o(x^3)}</math>  <b>L40</b> Car graphiquement <math>C_{g_2}</math> est plus proche que <math>C_{g_1}</math> au <math>V(0)</math></p>	<p>- <u>Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>  Les représentations graphiques des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math> prennent les statuts d'arguments dans le milieu de référence. Ce trinôme mobilise des objets de géométrie pour étudier la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Il développe deux méthodes dans les paradigmes [AG] et [AI].  - <u>Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>  Ce trinôme développe une méthode géométrico-graphique dans les registres géométrique et graphique.  - <u>Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(36)]</b> Décision de la détermination de la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.  <b>[(37)]</b> Utilisation d'une méthode fautive pour déterminer une représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Il déduit cette expression par l'usage de l'approximation polynômiale d'ordre 1 de cette fonction.  <b>[(38)]</b> Usage d'une méthode erronée pour déterminer une représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Il détermine cette représentation en utilisant l'approximation polynômiale d'ordre 2 de cette fonction.  Les étapes (37) et (38) traduisent l'existence d'une difficulté liée à l'appropriation du concept de développement limité.  <b>[(39)]</b> Rétroaction sur sa procédure de résolution. Il barre sa méthode algébrique en décidant l'inefficacité de cette technique. Il calcule les écarts entre les courbes mais il effectue une faute de simplification du calcul du rapport de deux fonctions. Cette erreur commise est due aux étapes (37) et (38)). Il détermine des représentations fausses des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math>.  <b>[(40)]</b> Mobilisation des éléments de géométrie pour justifier son raisonnement. Il interprète les représentations graphiques pour mesurer les écarts entre ces courbes. Il développe une technique géométrico-graphique du répertoire didactique du Supérieur.</p>
<p><b>Etape 4 : détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 2</b>  <b>2-c) L41</b> <math>DL_1(0)</math>  <b>L42</b> <math>g(x) = x \cdot \varepsilon(x)</math>  <b>L43</b> <math>= g_1(x) \cdot \varepsilon(x)</math>  <b>L44</b> <math>g(0) = 0</math>  <b>L45</b> <math>DL_2(0)</math>  <b>L46</b> <math>g(x) = (x + x^2) \cdot \varepsilon(x)</math>  <b>L47</b> <math>= 0</math></p>	<p>- <u>Identification de niveaux de milieux et de paradigmes correspondants</u>  Le milieu objectif est constitué des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math>. Ce trinôme étudie la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 dans le paradigme [AI].  - <u>Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>  Cette méthode erronée est développée dans les registres analytique et numérique.</p>

	<p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(41)] Décision de déterminer le développement limité d'ordre 1 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p> <p>[(42)-(43)] Utilisation d'une méthode erronée lors de la détermination du développement limité d'ordre 1 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Cette <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i> traduit l'existence d'une difficulté liée à la connaissance mathématique mobilisable.</p> <p>[(44)] Calcul numérique de la valeur de la fonction <math>g</math> en 0.</p> <p>[(45)] Décision de déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p> <p>[(46)-(47)] Utilisation d'une méthode fautive lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Il existe une <i>erreur d'ordre cognitif et conceptuel</i>.</p> <p>En conclusion, ce groupe est confronté au problème lié à l'appropriation du concept de développement limité.</p>
<p><b>Etape 5 : étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction <math>g</math> en 0</b></p> <p><b>3-a) L48</b> Graphiquement : <math>g(0) = 0</math></p> <p><b>L49</b> <math>g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)</math></p> <p><b>L50</b> <math>= 1 + 2x + 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)</math></p> <p><b>L51</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}</math></p> <p><b>L52</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]</math></p> <p><b>L53</b> <math>= 1</math></p> <p><b>L54</b> Car <math>x \rightarrow 0</math> et <math>x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u></p> <p>Le milieu objectif est constitué de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Le calcul de limite d'une fonction prend le statut d'argument dans le milieu de référence. A partir de résultat de ce calcul, ce trinôme étudie la dérivabilité de la fonction <math>g</math> en 0 dans les paradigmes [AC] et [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Le calculs de limite d'une fonction est développé dans les registres analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p>[(48)] Utilisation d'une méthode géométrique pour déterminer la valeur de la fonction <math>g</math> en 0. En effet, ce trinôme interprète la représentation graphique de la fonction <math>g</math>.</p> <p>[(49)-(50)] Calcul algébrique de la dérivée de la fonction <math>g</math>. Ce groupe décide de changer sa procédure de résolution. En effet, il barre ces étapes du calcul algébrique.</p> <p>[(51)-(52)-(53)-(54)] Décision de la mobilisation d'une technique du répertoire didactique du Supérieur pour étudier la dérivabilité de la fonction <math>g</math> en 0. Ce trinôme calcule la limite d'une fonction.</p> <p>Dans l'étape (54), il vérifie son calculs de limite.</p> <p>Ce trinôme a produit des pas de raisonnement de nature syntaxique.</p>

**Tableau 6-39 : analyse des raisonnements produits par le groupe 1 lors de la confrontation à la situation 2**

Nous pouvons déduire de cette analyse des raisonnements que ce trinôme perçoit l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction. Par ailleurs, il a produit des pas des raisonnements de nature sémantique/syntaxique par l'usage des méthodes du répertoire didactique du Secondaire lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction, ainsi que lors de la détermination de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0. Il a produit un pas de raisonnement de nature sémantique lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

Nous remarquons que le groupe 1 est confronté au problème lié à l'usage d'une technique du répertoire didactique du Supérieur pour s'approprier le concept du développement limité. Nous pouvons distinguer deux catégories d'erreurs :

- Erreurs d'ordre cognitif et conceptuel liées au concept du développement limité. Ce type d'erreur traduit l'existence d'une difficulté liée à la connaissance mathématique mobilisée. Dans ce cas, la difficulté apparaît lorsqu'il s'agit de mettre en relation entre une approximation polynômiale d'une fonction et son développement limité au voisinage d'un réel. En effet, ce trinôme considère le développement limité d'ordre 1 (respectivement d'ordre 2) de la fonction  $g$  au voisinage de 0 est sous la forme du produit de son approximation polynômiale d'ordre 1 et la fonction  $\varepsilon(x)$  en écrivant [ $g(x) = g_1(x) \cdot \varepsilon(x)$ ] (respectivement :  $g(x) = g_2(x) \cdot \varepsilon(x)$ ). Dans le cours, l'enseignante donne les formules du répertoire didactique du Supérieur :  $g(x) = g_1(x) + x\varepsilon(x)$  et  $g(x) = g_2(x) + x^2\varepsilon(x)$  au voisinage de 0.
- Erreurs liées aux choix didactiques de l'enseignante : l'enseignante, dans son cours, donne l'intérêt de préciser l'ordre d'un développement limité qui est défini par l'expression du reste. Par exemple, les écritures des expressions [ $g(x) = g_1(x) + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)$ ] et [ $g(x) = g_2(x) + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + o(x^3)$ ] traduisent un problème lié à l'utilisation de cette propriété du concept de développement limité. Il donne le développement limité d'ordre 3 de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

### III.3.2.2 Analyse des raisonnements du groupe 4

Dans cette partie, nous présentons une analyse détaillée des retranscriptions de la copie du groupe 4, des photos prises et de ses interactions avec l'enseignante afin d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par ces étudiants de ce trinôme. Ce groupe a produit des raisonnements par une guidance faible.

#### **Épisode 1 (étapes 1) : étude de la prolongée par continuité de la fonction $g$ sur $R$**

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>1-a)</b>  <b>L1</b> <math>g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)</math>  <b>L2</b> On a : <math>D_g = \mathbb{R}^*</math>  <b>L3</b> <math>x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)</math> une fonction bornée  <b>L4</b> Alors <math>\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]</math>  <b>L5</b> = 0  <b>L6</b> Donc <math>g</math> est prolongeable par continuité en 0.  <b>1-b)</b>  <b>L7</b> Soit <math>g</math> la fonction prolongée de <math>g</math> telle que :  <b>L8</b> <math>g(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) &amp; \text{si } x \neq 0 \\ 0 &amp; \text{si } x = 0 \end{cases}</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>  Le milieu objectif (<math>M_2</math>) est constitué de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Ensuite, le calcul de limite de cette fonction au voisinage de 0 prend le statut d'argument dans le milieu de référence. Ce trinôme interprète le résultat de ce calcul de limite dans les paradigmes [AI] et [AC].</p> <p><u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>  Ce groupe utilise la représentation analytique de la fonction <math>g</math> lors du calcul de sa limite en 0. Ce raisonnement est développé dans les registres analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(1)]</b> Décision de l'usage de l'expression analytique de la fonction <math>g</math>.  <b>[(2)]</b> Précision de domaine de définition de la fonction <math>g</math>.  <b>[(3)-(4)-(5)-(6)]</b> Démonstration de la continuité de la fonction <math>g</math> en 0 par l'usage du calcul de sa limite en 0.  Dans l'étape (3), ce groupe vérifie son calcul de limite.  <b>[(7)-(8)]</b> Détermination de la représentation analytique de la fonction prolongée par continuité de la fonction <math>g</math> sur <math>\mathbb{R}</math>.  Les pas de raisonnements produits par ce trinôme sont de nature syntaxique par la mobilisation de ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire.</p>

**Tableau 6-40 : analyse des raisonnements produits par le groupe 1 lors de l'étude de la prolongée par continuité de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$**

**Épisode 2 (étape 2) : demande d'aide auprès de l'enseignante**

<p>001 E : S'il vous plaît madame, la détermination des expressions de <math>g_1</math> et <math>g_2</math> graphiquement ou à partir de l'application de la formule de Taylor-Young ?  002 P : Comme vous voulez numérique ou graphique, c'est à vous de voir la méthode juste.  003 E : Donc je peux utiliser les deux méthodes ?  004 P : Par exemple, lorsque tu dis Taylor-Young, est-ce que la fonction vérifie l'usage de la formule de Taylor-Young ?  005 E : Non  006 P : Quelles sont les conditions de l'usage de Taylor-Young ?  007 E : Dérivable sur <math>\mathbb{C}^n</math>  008 P : Donc elle doit être de classe <math>n</math>, c'est-à-dire lorsque tu cherches l'expression de <math>g_1</math>, tu cherches si elle est ?  009 E : De classe 1  010 P : C'est bien c'est de classe 1, mais est-ce que tu as montré qu'elle est de classe 1 ?</p>
--

011 E : Non  
 012 P : Donc qu'est-ce qu'il te reste comme possibilité ?  
 013 E : Développement limité.  
 014 P : Ou bien ?  
 015 E2 : Taylor-Young.  
 016 P : Est-ce que Taylor-Young est toujours valable ?  
 017 E2 : Non.  
 018 P : Taylor-Young n'est valable que si tu vas par la suite vérifier que la fonction  $g$  est de classe 1, la fonction  $g$  est-elle de classe 2 pour appliquer cette formule ?  
 019 E2 : Non  
 020 P : Donc la proposition de l'application de la formule de Taylor-Young à éliminer. Il reste le graphique ou bien ?  
 021 E : Développement limité  
 022 P : Donc il reste développement limité ou graphique. Qu'est-ce que ça veut dire développement limité ? (Aucune réponse)  
 023 P : C'est-à-dire il reste à écrire la fonction  $g$  sous la forme ?  
 024 E : Une fonction plus le reste.  
 025 P : C'est un polynôme et un reste. C'est-à-dire si vous cherchez  $g_1$ , le polynôme sera de degré combien ?  
 026 E : De degré 1  
 027 P : C'est bien, et si vous cherchez l'expression de  $g_2$  ?  
 028 E : De degré 2  
 029 P : Un polynôme de degré 2 ou bien vous essayez de voir graphiquement ? Qu'est-ce que vous voulez utiliser alors ?  
 030 E :  $g_1$  graphiquement et  $g_2$  à partir du développement limité.  
 031 P : Je vous laisse de terminer votre travail.  
 032 E : Merci madame.

#### **Tableau 6-41 : transcriptions d'échanges de l'enseignante avec le groupe 4**

Nous nous intéressons aux raisonnements produits par ce trinôme. L'intervention de l'enseignante semble avoir pour objectif d'enrichir le milieu de référence afin de faciliter de nouvelles prises de décisions sur la méthode convenable.

Les différents raisonnements produits par les étudiantes semblent les orienter pour déterminer les expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  et alors confrontées à une difficulté de choisir la formule convenable.

Les étudiantes de ce trinôme échangent à propos de la méthode à utiliser pour déterminer les représentations algébriques d'approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. A ce moment-là, elles demandent l'aide auprès de l'enseignante. L'étudiante avoue ne pas avoir d'idées sur les méthodes à utiliser pour déterminer les expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

L'enseignante interroge le groupe sur la méthode valide permettant de déterminer ces expressions. L'étudiante constate que la formule de Taylor-Young et la méthode graphique sont applicables dans le cas de la détermination des approximations polynômiales de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Elle propose alors à l'étudiante de vérifier les conditions nécessaires de



l'usage de la formule de Taylor-Young. Elle aide ce groupe à vérifier les conditions nécessaires lors de l'application de cette formule pour déterminer un développement limité. En effet, l'étudiant doit vérifier que la fonction  $g$  est de classe  $C^n$  au voisinage de 0 lors de l'utilisation de la formule de Taylor-Young. Dans notre cas, la fonction  $g$  n'est pas de classe  $C^2$ .

L'enseignante aide les étudiants à utiliser deux méthodes différentes soit celle du répertoire didactique du Supérieur par l'usage de la définition généralisée du développement limité, soit celle géométrico-algébrique du répertoire didactique du Secondaire par l'interprétation des représentations graphiques.

Les étudiants arrivent à voir l'expression de la fonction  $g$  sous forme d'une somme d'un polynôme et d'un reste. Dans le cas d'un développement limité d'ordre 1, la représentation analytique sera la somme d'un polynôme de degré 1 et d'un reste. Dans le cas d'un développement limité d'ordre 2, la représentation analytique sera la somme d'un polynôme de degré 2 et d'un reste.

### Épisode 3 (étape 3) : détermination des représentations algébriques d'approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction $g$

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><b>2-a)</b>  <b>L9</b> <math>g_1</math> est une fonction linéaire  <b>L10</b> sous la forme <math>g_1(x) = ax</math>  <b>L11</b> avec <math>a = \text{pente}</math>  <b>L12</b> <math>a = \frac{2-0}{2-0}</math>  <b>L13</b> <math>= 1</math>  <b>L14</b> alors <math>g_1(x) = x</math>  <b>L15</b> <math>g_1 : x \rightarrow x</math>  <b>L16</b> La forme de <math>g_2</math> est une parabole de la forme <math>g_2(x) = ax^2 + bx + c</math>  <b>L17</b> <math>\begin{cases} g_2(0) = 0 \\ g_2(-2) = 2 \end{cases}</math>  <b>L18</b> Donc <math>\begin{cases} c = 0 \\ g_2(-2) = 4a - 2b \end{cases}</math>  <b>L19</b> Donc <math>g_2(-2) = 2</math>  <b>L20</b> <math>2a - b = 1</math>  <b>L21</b> <math>a = \frac{1+b}{2}</math>  <b>L22</b> <math>g_2(0) = 6</math>  <b>L23</b> Donc <math>4a + 2b = 6</math>  <b>L24</b> <math>\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases}</math>  <b>L25</b> <math>4a = 4</math>  <b>L26</b> Donc <math>a = 1</math>  <b>L27</b> <math>b = 2a - 1</math>  <b>L28</b> <math>= 1</math>  <b>L29</b> Donc <math>b = 1</math>  <b>L30</b> Alors <math>g_2(x) = x^2 + x</math></p>	<p>Ce trinôme décide d'utiliser une technique géométrico-algébrique du répertoire didactique du Secondaire afin de déterminer les représentations algébriques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math>, par une guidance faible. Il ne donne pas l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique pour déterminer une approximation polynômiale d'une fonction au voisinage d'un réel.  <u>Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>  Les représentations graphiques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math> prennent les statuts d'arguments pour déterminer ses représentations algébriques dans le milieu de référence. Ce groupe développe son raisonnement dans les paradigmes [AG] et [AI].  <u>-Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique</u>  Ce groupe interprète les représentations graphiques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math> afin de développer son calcul algébrique. Il mobilise des différents registres (graphique, géométrique et algébrique) pour déterminer les approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.  <u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(9)-(10)-(11)-(12)-(13)-(14)-(15)]</b> Interprétation géométrique de la représentation graphique de la fonction <math>g_1</math> pour déterminer sa représentation algébrique.</p>

	<p>Ce groupe utilise une technique géométrico-algébrique par la mobilisation d'une connaissance antérieure du répertoire didactique du Secondaire afin de déterminer l'équation d'une droite. Il utilise le symbole "a" pour désigner la pente de la droite qui définit un coefficient du polynôme de degré 1.</p> <p>Dans les étapes (12) et (13), il détermine la pente de la droite en développant un calcul numérique.</p> <p>Dans les étapes (14) et (15), il donne la représentation algébrique de la fonction <math>g_1</math>.</p> <p>[(16)] Interprétation géométrique de la représentation graphique de la fonction <math>g_2</math> pour déterminer sa représentation algébrique. Ce groupe utilise les symboles (<math>a</math>, <math>b</math> et <math>c</math>) pour désigner les coefficients du polynôme de degré 3. Ces symboles prennent le statut d'inconnu. L'objectif principal consiste à chercher les valeurs numériques de ces inconnus.</p> <p>[(17)] Utilisation des coordonnées de deux points de la parabole pour déterminer sa représentation algébrique.</p> <p>[(18)-(19)-(20)-(21)-(22)-(23)-(24)-(25)-(26)-(27)-(28)-(29)] Calcul numérique des coefficients de la représentation algébrique de la fonction <math>g_2</math>.</p> <p>[(30)] Détermination de la représentation algébrique de l'approximation polynomiale d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p> <p>Ce trinôme utilise une technique géométrico-algébrique de registres des formules du répertoire didactique du Secondaire. En effet, il interprète des objets de géométrie pour déterminer des représentations algébriques des fonctions <math>g_1</math> et <math>g_2</math>.</p> <p>Les pas de raisonnements produits par ce groupe sont de nature sémantique/syntaxique.</p>
--	--

**Tableau 6-42 : analyse des raisonnements produits par le groupe 4 lors de la détermination des représentations algébriques d'approximations polynomiales d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$**

**Épisode 4 (étape 4) : demande d'aide auprès de l'enseignante**

<p>001 E : Madame, pourquoi <math>g_2</math> sera la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 ?</p> <p>002 P : C'est une bonne question. Pourquoi vous avez décidé que <math>g_2</math> est la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 ?</p> <p>003 E : Car c'est plus proche de <math>g</math>.</p> <p>004 P : Tu veux dire graphiquement ?</p> <p>005 E : Oui je parle graphiquement.</p> <p>006 P : Donc tu peux répondre comme ça : D'après le graphique, c'est clair que la fonction <math>g_2</math> est la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Cela au côté graphique. Mais au côté numérique, lorsque je veux montrer que la vitesse de convergence de <math>g_2</math> vers <math>g</math> est meilleure que celle de <math>g_1</math> vers <math>g</math> ?</p> <p>007 E : On calcule la limite pour <math>x</math> tend vers 0 de <math>\left[ \frac{g(x)-g_2(x)}{g(x)-g_1(x)} \right]</math>, on trouve c'est égale à 0.</p> <p>008 P : Voilà, c'est bien.</p> <p>009 E : C'est-à-dire lorsqu'on trouve 0, on trouve le résultat.</p>
---

010 P : C'est-à-dire quand le numérateur tend vers 0 plus vite que le dénominateur, c'est-à-dire  $g_2$  est plus proche que  $g_1$  au  $g$ . On peut dire celle-ci est une méthode mathématique et aussi si vous répondez graphiquement, c'est acceptable.  
 011 E : Oui, merci madame.

**Tableau 6-43 : transcriptions des échanges du groupe 4 avec l'enseignante**

Ce trinôme décide que la fonction  $g_2$  est la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0, mais il ignore les raisons de sa décision. Il est confronté à une difficulté de trouver les moyens de justification de son raisonnement. L'enseignante aide les étudiants à surmonter leurs difficultés par la visualisation des représentations graphiques des fonctions  $g$ ,  $g_1$  et  $g_2$ , par une guidance faible.

Les actions et les réactions de l'enseignante aident les étudiants à mobiliser une méthode algébrique en tant qu'élément justificatif de leur raisonnement. Elle fait appel à la méthode du calcul des écarts des courbes présentées lors de l'étude des représentations graphiques des fonctions étudiées dans la situation 1.

Après l'intervention de l'enseignante, ce trinôme décide d'utiliser la technique géométrico-graphique pour déterminer la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Il est confronté au problème lié à la mobilisation de la méthode du répertoire didactique du Supérieur.

Productions	Analyse des raisonnements réalisée à partir du modèle
<p><i>Étape 5 : détermination de la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</i>  <b>2-b)</b>  <b>L31</b> La meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 c'est la courbe <math>g_2</math>  <b>L32</b> Car elle est la plus proche de <math>g</math> au <math>V(0)</math>.</p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>          Les représentations graphiques des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math> prennent le statut d'argument dans le milieu de référence. Cette méthode géométrico-graphique donne l'étude locale de la de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 dans les paradigmes [AG] et [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux de registres de représentation sémiotique</u>          Ce groupe interprète les représentations graphiques des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math> afin de déterminer la meilleure approximation de la fonction <math>g</math>. Il mobilise les registres graphique et géométrique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(31)-(32)]</b> Décision de la meilleure approximation de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Ce groupe développe une technique géométrico-graphique par l'interprétation des représentations graphiques des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math>. Dans l'étape (32), il justifie son raisonnement à partir de sa visualisation des représentations graphiques des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math>.          Ce trinôme a produit un pas de raisonnement de nature sémantique dans les registres graphique et géométrique.</p>

<p><b>Etape 6 : détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0</b></p> <p><b>2-c)</b></p> <p><b>L33</b> <math>DL_1(0)</math></p> <p><b>L34</b> <math>g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) +</math></p> <p><b>L35</b> <math>= x + o(x)</math></p> <p><b>L36</b> <math>= x + (x \cdot \varepsilon(x))</math></p> <p><b>L37</b> <math>= x + x \cdot [x \cdot (x + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}))]</math></p> <p><b>L38</b> <math>g(x) = g_1(x) + o(x)</math></p> <p><b>L39</b> <math>DL_2(0)</math></p> <p><b>L40</b> <math>g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +</math></p> <p><b>L41</b> <math>= x + x^2 + o(x^2)</math></p> <p><b>L42</b> <math>= x + x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x)</math></p> <p><b>L43</b> <math>= x + x^2 + [x^2 \cdot (x \cdot \sin(\frac{1}{x}))]</math></p> <p><b>L44</b> <math>g(x) = x + x^2 + o(x^2)</math></p> <p><b>L45</b> <math>g(x) = g_2(x) + o(x^2)</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u></p> <p>Le milieu objectif (<math>M_2</math>) est constitué des représentations analytique et algébrique des fonctions <math>g</math>, <math>g_1</math> et <math>g_2</math> pour déterminer les développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Il utilise une méthode analytique dans les paradigmes [AC] et [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux de registres de représentation sémiotique</u></p> <p>Ce groupe utilise les représentations analytique et algébrique des fonctions données lors de la détermination des représentations analytiques des développements limités de la fonction <math>g</math>. Ce raisonnement est développé dans le registre analytique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u></p> <p><b>[(33)-(34)-(35)-(36)-(37)-(38)]</b> Détermination des représentations analytiques du développement limité d'ordre 1 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Il utilise les deux symboles de l'expression du reste : <math>[x \cdot \varepsilon(x)]</math> et <math>o(x)</math>. L'étape (34) traduit l'existence d'une difficulté liée à l'usage d'une formule du répertoire didactique du Supérieur et plus précisément la définition généralisée du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel <math>x_0</math>. Cette erreur commise traduit l'existence d'une difficulté liée à l'appropriation du concept de développement limité chez ce groupe.</p> <p>Dans les étapes (35) et (36), il donne les représentations analytiques du développement limité d'ordre 1 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0 par l'usage de deux symboles de l'expression du reste. En effet, il commence son raisonnement par la présentation de ces deux représentations analytiques.</p> <p>Le passage de l'étape (36) à (37) prouve qu'il a effectué le calcul de limite de l'expression <math>[x + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})]</math> pour trouver la fonction <math>\varepsilon(x)</math>. En effet, ce groupe est en train de justifier son utilisation de cette expression analytique. Il décide, d'une manière implicite, que <math>\lim_{x \rightarrow 0} [x + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})] = 0</math>.</p> <p>Ce trinôme ne vérifie pas son raisonnement.</p> <p><b>[(39)-(40)-(41)-(42)-(43)-(44)-(45)]</b></p> <p>Détermination des représentations analytiques du développement limité d'ordre 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Ce trinôme utilise les deux symboles de l'expression du reste : <math>[x^2 \cdot \varepsilon(x)]</math> et <math>[o(x^2)]</math>. En revanche, il ne précise pas un voisinage de 0 et les caractéristiques de la fonction <math>\varepsilon(x)</math>.</p> <p>Le passage de l'étape (42) à (43) traduit que le calcul de limite au voisinage de 0 de la fonction <math>[x \cdot \sin(\frac{1}{x})]</math> donne la fonction <math>\varepsilon(x)</math>.</p>
--	--

	<p>L'étape (40) prouve l'existence d'une difficulté liée à une connaissance mobilisable du répertoire didactique du Supérieur. En effet, ce groupe est confronté au problème lié à l'usage de la définition généralisée du concept de développement limité. Il a produit un raisonnement formellement incomplet qui prouve sa difficulté liée aux domaines de la topologie et l'analyse fonctionnelle. En effet, il ne précise pas les voisinages de 0 pour lesquels il doit déterminer les développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0.</p>
<p><b>Etape 7 : calcul des valeurs de la fonction <math>g</math> et sa dérivée en 0</b>  <b>3-a)</b>  <b>L46</b> <math>g</math> est prolongeable par continuité en 0  <b>L47</b> alors <math>g(0) = 0</math>  <b>L48</b> <math>g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}</math>  <b>L49</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 \cdot \sin(\frac{1}{x})}{x}</math>  <b>L50</b> <math>= 1</math></p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>  Le milieu objectif (<math>M_2</math>) est constitué de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Le calcul de limite du rapport de la variation infinitésimale de la valeur d'une fonction sur un changement infinitésimal de la variable prend le statut d'argument dans le milieu de référence. La vérification de la dérivabilité de la fonction <math>g</math> en 0 est associée aux paradigmes [AC] et [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux de registres de représentation sémiotique</u>  Ce groupe utilise la représentation analytique de la fonction <math>g</math> lors du calcul algébrique de limite du rapport de deux fonctions dans les registres analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(46)-(47)]</b> Décision de l'usage de la propriété de la fonction prolongée par continuité de la fonction <math>g</math> en 0.  <b>[(48)-(49)-(50)]</b> Calcul du rapport de la variation infinitésimale pour déterminer la valeur de la dérivée de la fonction <math>g</math> en 0.  Dans l'étape (48), ce trinôme décide que la fonction <math>g</math> est dérivable en 0 avant de justifier son calcul.</p>
<p><b>Etape 8 : étude de la dérivée seconde de la fonction <math>g</math> en 0</b>  <b>3-b)</b>  <b>L50</b> <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0}</math>  <b>L51</b> <math>= \lim_{x \rightarrow 0} [2 + 3 \cdot \sin(\frac{1}{x}) + 1 \cdot \cos(\frac{1}{x})]</math>  <b>L52</b> avec <math>\sin(\frac{1}{x})</math> borné  <b>L53</b> <math>\cos(\frac{1}{x}) \not\rightarrow</math>  <b>L54</b> avec <math>g'(x) = 2x + 3x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x^3 \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cdot \cos(\frac{1}{x})</math>  <b>L55</b> Alors <math>g</math> n'est pas 2 fois dérivable</p>	<p><u>-Identification de niveaux de milieux et de paradigme correspondants</u>  Le milieu objectif (<math>M_2</math>) est constitué de la représentation analytique de la fonction <math>g</math>. Le calcul de limite du rapport de la variation infinitésimale de la valeur d'une fonction sur un changement infinitésimal de la variable prend le statut d'argument dans le milieu de référence. À partir de ce calcul algébrique, il vérifie que la fonction <math>g</math> n'est pas deux-fois dérivable en 0. Ce calcul est réalisé dans les paradigmes [AC] et [AI].</p> <p><u>-Identification de niveaux de registres de représentation sémiotique</u>  Ce groupe développe un calcul algébrique et formel dans les registres analytique et numérique.</p> <p><u>-Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique</u>  <b>[(50)-(51)]</b> Décision du calcul de limite du rapport de deux fonctions pour étudier la dérivée seconde de la fonction <math>g</math> en 0.</p>

	<p>[(52)-(53)-(54)] Vérification de son calcul de limite de la fonction <math>g</math> au voisinage de 0. Il justifie ce calcul par l'usage des formules du répertoire didactique du Secondaire.</p> <p>[(55)] Décision sur la propriété de la fonction <math>g</math> en 0. Les pas de raisonnement produit par ce groupe sont de nature sémantique/syntaxique.</p>
--	--

**Tableau 6-44 : analyse des raisonnements produits par le groupe 4**

Nous remarquons que ce trinôme perçoit l'intérêt de l'approche graphique lors de l'appropriation du concept d'approximation polynômiale d'une fonction. En effet, il interprète les représentations graphiques des approximations polynômiales d'une fonction au voisinage d'un point pour déterminer ses représentations algébriques. L'étude montre qu'il utilise des méthodes géométriques du répertoire didactique du Secondaire lors de la détermination des expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ , ainsi que lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$ .

Le groupe 4 n'a pas essayé de mettre un lien entre la formule de Taylor-Young et le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Il a donné des représentations analytiques des développements limités d'ordre 1 et 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 avec les deux symboles spécifiques du reste, mais ces raisonnements sont formellement incomplets. Il fait un usage « automatique » d'une technique du répertoire didactique du Supérieur sans percevoir précisément le sens de ce concept mathématique. En effet, le concept de développement limité n'a de sens que par la précision de voisinage et de l'interprétation de l'expression du reste. Ce trinôme effectue des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liées à l'articulation des connaissances et des savoirs qui relèvent des domaines de la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

#### ***II.4. Phase 4 : phase de la mise en commun et de discussion***

Après deux heures, l'enseignante ramasse les copies de synthèse des trinômes et des travaux individuels des étudiants. Ensuite, à cause des contraintes temporelles, elle décide de présenter elle-même la correction au tableau en laissant la parole du temps en temps aux étudiants pour répondre à certaines questions.

Nous conduisons, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), une analyse des interactions de l'enseignante avec les étudiants en termes de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993), de dimensions sémantique et/ou syntaxique (Bloch & Gibel, 2011 ; Kouki, 2008, 2017, 2018, 2020 ; Belhaj Amor, 2016, 2018, 2019, etc.), de paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2015) et des analyses sémiotiques.

(L'enseignante rédige au tableau :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ )  
 001 P : *Quelle est le domaine de définition de la fonction g ?*  
 002 E : *C'est  $R^*$*   
 003 P : *Oui, la fonction est continue sur  $R^*$ . On va chercher sa prolongée donc on va calculer sa limite en 0. Quand x tend vers 0, alors  $x^2$  tend vers 0 et l'autre terme  $x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  ?*  
 004 E : *C'est le produit d'un borné par zéro.*  
 005 P : *C'est bien, c'est un borné fois zéro, don c'est égale à 0.* (Elle rédige au tableau :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ )  
 006 P : *Enfinement, je vais par la suite noter  $g(x)$  comme étant la prolongée. Ça va être présentée par :*  

$$g(x) = \begin{cases} x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \in R^* \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$
 (Elle rédige au tableau)  
 007 P : *Vous avez tous étudié cette expression ?*  
 008 E : *Oui*

**Tableau 6-45 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de l'étude de la prolongée de la fonction g sur**

L'enseignante guide les étudiants afin d'identifier le domaine de définition de la fonction g en vue d'étudier sa prolongée sur R. Elle les aide à articuler les dimensions sémantique et syntaxique dans les registres analytique et numérique lors de l'étude de la continuité de la fonction g. Cette étude est associée aux paradigmes [AI] et [AC].

009 P : *On passe maintenant à la question d'après (2-a). Déterminez les expressions des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ . Vous avez trouvé tous  $g_1(x) = x$  et la majorité d'entre vous a utilisé le graphique. Qui a utilisé une autre méthode ?*  
 (Aucune réponse des étudiants).  
 010 P : *On passe maintenant à déterminer l'expression de  $g_2$ .*  
 011 E : *Selon le graphique, c'est une parabole donc  $g_2(x) = x + x^2$ .*  
 (Elle rédige au tableau :  $g_2(x) = x + x^2$ )

**Tableau 6-46 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de la détermination des approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0**

L'enseignante utilise le logiciel Geogebra pour la construction graphique des fonctions g,  $g_1$  et  $g_2$  en les distinguant par des couleurs comme ce sont présentées dans la feuille d'énoncé de la situation mathématique. Ensuite, elle utilise un projecteur pour afficher ces figures géométriques au tableau.

Par l'usage de ce logiciel dynamique, elle aide les étudiants à visualiser l'intérêt de l'approche graphique « dynamique » pour déterminer les approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 de la fonction g au voisinage de 0. En effet, elle développe une technique géométrico-graphique dans les registres algébrique, graphique et géométrique.

012 P : *C'est bien, et quelle est la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0 ?*  
 013 E : *C'est  $g_2$ .*  
 014 P :  *$g_2$  s'approche mieux, c'est grâce au graphique, la meilleure approximation de la fonction g au voisinage de 0 est la fonction  $g_2$ .*

(Elle rédige au tableau :  $g_2$  est la meilleure approximation selon le graphique)

015 P : Et quelle est la justification numérique ?

016 E (du groupe 4) : A partir du calcul de limite, car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)} = 0$

017 P : Vous avez fait ce calcul ?

018 E : Oui, c'est égal à 0.

(Elle rédige au tableau :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g_2(x)}{g(x) - g_1(x)} = 0$ , donc  $g_2$  s'approche mieux.

### Tableau 6- 47 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction $g$ au voisinage de 0

L'enseignante articule les approches analytiques et graphique « dynamique » pour déterminer la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Elle donne l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction.

Après la visualisation des représentations graphiques des fonctions étudiées, l'enseignante aide les étudiants à justifier ce résultat par l'usage d'une méthode algébrique. Le calculus de limite est justifié par le groupe 4 dans le paradigme [AC]. De ce fait, l'enseignante mobilise les différents registres algébrique, analytique, géométrique, graphique et numérique associés aux paradigmes [AI], [AC] et [AG] lors de la détermination de la meilleure approximation de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

019 P : Ensuite, donnez le développement limité à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0. Est-ce que la formule de Taylor-Young est applicable pour cette question ?

020 E : Non

021 P : Pourquoi ?

022 E : Car la fonction  $g$  n'est pas de classe 2.

023 P : Donc pour appliquer la formule de Taylor-Young il nous manque la classe 1 et la classe 2. Par contre, si j'utilise la définition du développement limité. La fonction  $g(x)$  étant écrite sous cette forme :  $[x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]$ . Peut-on la voir sous la forme de  $[x + x \cdot [x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]]$  ?

024 E : Oui.

025 P : Cette quantité  $[x \cdot [x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]]$  tend vers 0 donc je pourrai la réécrire sous cette forme  $[x + o(x)]$ , c'est l'expression du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $g$  au voisinage de 0.

(L'enseignante rédige au tableau :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x + x \cdot [x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]$   
 $= x + o(x)$  DL<sub>1</sub>(0) au voisinage de 0).

026 P : De même la fonction  $g(x)$ , je peux toujours la voir autrement si j'adopte pour un développement limité à l'ordre 2.

(Elle rédige au tableau :  $g(x) = x + x^2 + x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x + x^2 + x^2 \cdot [x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)]$

027 P : Sous cette forme, c'est-à-dire sous la forme de  $[x + x^2 + o(x^2)]$ . En d'autres termes, je vois que cette expression c'est égale à  $[g_2(x) + o(x^2)]$  qui est un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 et l'autre développement limité d'ordre 1 c'est égale à  $[g_1(x) + o(x)]$ .

(Elle rédige au tableau :  $g(x) = x + x^2 + o(x^2) = g_2(x) + o(x^2)$

028 E : C'est le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0

### Tableau 6-48 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 de $g$ au voisinage de 0



L'enseignante aide les étudiants à trouver des moyens de validation de l'usage de la formule de Taylor-Young afin de déterminer des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage de 0. Dans notre cas, les étudiants prouvent que cette formule n'est pas applicable. En effet, la condition de la fonction est de classe  $C^2$  est nécessaire pour utiliser la formule de Taylor-Young. À ce moment-là, l'enseignante donne l'intérêt de l'usage de la définition généralisée du développement limité. En outre, il y a des contraintes temporelles, de sorte que la phase de validation se transforme en un « cours dialogué » durant lequel l'enseignante prend manifestement la main totalement (par exemple, dans les étapes (026P et 027P)).

Elle aide les étudiants à identifier l'expression du reste à partir de la représentation analytique de la fonction  $g$ . Elle explique que cette représentation est la somme d'un polynôme et d'un terme amenant à déduire l'expression du reste.

029 P : On passe à la question suivante : Calculer  $g(0)$  et  $g'(0)$ . Vous avez tous trouvé  $g(0)$  ?  
 030 E : Oui, c'est égale à 0.  
 031 P : Oui et  $g'(0)$  ?  
 032 E : C'est égale à 1  
 (Elle rédige au tableau :  $g(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$ )

**Tableau 6-49 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de la détermination des valeurs de  $g(0)$  et  $g'(0)$**

L'enseignante donne directement les valeurs de  $g(0)$  et  $g'(0)$  selon les raisonnements produits par les étudiants à cause des contraintes temporelles.

033 P : La fonction  $g$  est-elle donc deux fois dérivables en 0 ?  
 034 E : Non.  
 035 P : Vous avez vérifié ça ?  
 036 E : Oui.

**Tableau 6-50 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de l'étude de la dérivée seconde de la fonction  $g$  en 0**

L'enseignante considère que la fonction  $g$  n'est pas deux-fois dérivable en 0 sans recours aux moyens de justification de l'usage de la formule de la dérivabilité d'une fonction du répertoire didactique du Secondaire. En effet, elle s'appuie sur les raisonnements produits par les étudiants.

037 P : D'accord, peut-on exprimer  $g_2$  en fonction des coefficients  $g(0)$  et  $g'(0)$  ?  
 038 E : Oui  
 039 P : Comment on a trouvé  $g_2(x)$  ?  
 040 E : C'est égale à  $[g(0) + x \times g'(0)]$   
 041 P : Voilà  $g(x)$ .  
 (Elle rédige au tableau :  $g(x) = g_2(x) + o(x^2)$   
 $= \underbrace{0 + 1 \times x + 1 \times x^2}_{g_2} + o(x^2)$ ).

<p>042 P : Ce polynôme est <math>g_2</math>. Je le vois comme étant égale à <math>[g(0) + g'(0) \times x + 1 \times x^2]</math>          (Elle rédige au tableau : <math>g(x) = g(0) + g'(0) \times x + 1 \times x^2 + o(x^2)</math>)</p> <p>043 P : Est-ce que je peux attribuer le 1 comme une dérivée seconde ?</p> <p>044 E : C'est impossible car la fonction <math>g</math> n'est pas de classe 2.</p> <p>045 P : Non, d'accord, je ne peux pas attribuer le 1 à la dérivée seconde. Tout simplement parce que la fonction <math>g</math> n'est pas deux fois dérivable en 0, donc elle n'est pas de classe 2.</p>
--

**Tableau 6-51 : les interactions entre l'enseignante et les étudiants lors de l'étude de la représentation algébrique d'approximation polynômiale d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0**

L'enseignante détermine le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $g$  au voisinage de 0 à partir de l'expression de son approximation polynômiale au voisinage de ce réel. En effet, elle utilise la définition généralisée du développement limité d'une fonction qui se présente sous la forme de la somme de l'approximation polynômiale de cette fonction et l'expression du reste.

Elle aide les étudiants à trouver les éléments de vérification nécessaires lors de l'utilisation de la formule de Taylor-Young afin de déterminer le développement limité.

De ce fait, elle donne l'intérêt de trouver les moyens du contrôle lors de l'utilisation d'une technique du répertoire didactique du Supérieur. Elle s'appuie sur le polynôme de l'approximation locale d'ordre 2 de la fonction  $g$  pour donner la différence entre la formule de Taylor-Young et la définition généralisée du concept de développement limité.

Nous remarquons que le rôle principal de l'enseignante est de mettre en évidence la nécessité d'identifier les moyens de contrôle et de validation de l'utilisation d'une technique du répertoire didactique du Supérieur. En effet, elle amène les étudiants à étudier les conditions nécessaires à l'utilisation de la formule de Taylor-Young pour déterminer un développement limité. À partir de cette étude, elle prouve l'intérêt de la définition généralisée du développement limité lors de la détermination d'une approximation locale d'une fonction.

D'un autre côté, elle donne l'intérêt du graphique en tant que modèle d'approximation locale d'une fonction. Elle interprète les représentations graphiques des approximations polynômiales de la fonction  $g$  au voisinage de 0 afin de déterminer ses représentations algébriques, ainsi que la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de ce réel par l'usage des « zooms ». De ce fait, elle articule les approches graphique « dynamique » et algébrique afin d'offrir aux étudiants la possibilité d'accéder à la raison de savoir : le concept d'approximation locale d'une fonction.

L'enseignante étudie le cas d'une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans cependant être 2-fois dérivable en ce réel dans les différents registres associés aux paradigmes [AC], [AG] et [AI].

### **II.5. Phase 5 : Institutionnalisation de la propriété du concept de développement limité**

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous présentons les analyses des interactions entre l'enseignante et ses étudiants lors de l'institutionnalisation d'une nouvelle propriété du concept de développement limité.

001 P : La fonction  $g$  n'est pas de classe 2, donc la formule de Taylor-Young n'est pas applicable dans ce cas, mais bien qu'elle ne soit pas de classe 2, elle a un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0. Nous remarquons que la fonction  $g$  avait un problème de définition en 0, elle avait un problème d'être en classe 2 car elle n'est pas deux fois dérivable en 0. Alors malgré la fonction  $g$  n'est pas définie en 0, n'est pas de classe 2 au voisinage de 0, j'ai parvenu à lui préciser un développement limité à l'ordre 2.

Donc  $g(x) = x + x^2 + o(x^2) \equiv DL_2(0)$  au  $V(0)$

Par contre, d'après la formule de Taylor-Young, il précise les expressions des dérivées successives d'une fonction de classe  $n$ , il établit le lien entre les coefficients et les dérivées  $n^{\text{ième}}$  sur le factoriel  $n$ . Donc en résumé, est-ce que vous êtes en mesure de trouver un développement limité pour une fonction qui n'est pas définie en un point ?

002 E : Oui (presque toute la classe répond).

003 P : Et n'est pas de classe  $n$  ?

004 E : Oui, cette fonction  $g$  n'est pas de classe  $n$ .

005 P : Oui, mais à condition qu'elle soit prolongeable par continuité. Donc on est en train de déterminer le développement limité pour la fonction prolongée par continuité.

Voilà la différence entre l'usage de la formule de Taylor-Young et la définition généralisée du développement limité pour déterminer un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction au voisinage d'un réel.

C'est une nouvelle propriété de la notion de développement limité.

#### Propriété

Une fonction  $f$  peut admettre un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel  $x_0$  sans être deux-fois dérivable en ce réel.

### **Tableau 6-52 : les interactions entre l'enseignante et ses étudiants lors de l'institutionnalisation d'une propriété du concept de développement limité**

L'enseignante présente l'intérêt de l'usage de la définition généralisée du concept de développement limité lors de la détermination du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel. En effet, la formule de Taylor-Young n'est pas toujours applicable. Il faut contrôler les conditions nécessaires de son usage. Elle amène les étudiants à percevoir qu'une fonction admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans être nécessairement de classe 2 au voisinage de ce réel.

L'enseignante étudie le concept d'approximation locale d'une fonction par l'usage de ses différentes représentations analytiques, géométrique et graphiques. Elle aide les étudiants à trouver les moyens de contrôle et de validation relatifs à l'usage d'une technique du répertoire didactique du Supérieur. À partir des raisonnements produits, elle introduit une nouvelle propriété du concept de développement limité.

### ***Conclusion : identification des obstacles***

Nous pouvons conclure que la majorité des étudiants ont produit des pas de raisonnements de nature sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres algébrique, graphique, géométrique et numérique lors de la détermination des approximations polynômiales d'une fonction.

La plupart des étudiants ont mis en œuvre des pas de raisonnements de nature sémantique dans des registres graphique et géométrique lors de la détermination de la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

Concernant la détermination des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction au voisinage de 0, nous remarquons que les approches graphique et géométrique sont totalement absentes dans les raisonnements produits par les 8 trinômes. En effet, ils s'appuient sur les approximations polynômiales pour déterminer les expressions analytiques par la production d'un raisonnement formellement incomplet par certains groupes. En outre, la majorité des groupes ont produit des raisonnements erronés par l'usage de la technique analytique du répertoire didactique du Supérieur.

Nous pouvons dire que la plupart des étudiants se heurtent à une difficulté : ils ne justifient pas leur raisonnement lors de l'utilisation de la formule de Taylor-Young pour une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 au voisinage d'un réel.

La majorité des étudiants perçoivent l'intérêt de l'approche graphique lors de la détermination des expressions algébriques des approximations polynômiales d'une fonction au voisinage d'un point.

Nous remarquons que certains groupes produisent des raisonnements qui se situent dans le milieu de référence  $M_{-1}$  et ainsi ils s'inscrivent dans la situation d'apprentissage ; en effet ils ont perçu les conditions qui permettent d'envisager l'obtention d'une approximation locale au voisinage d'un point pour la fonction étudiée (pour laquelle la formule de Taylor-Young n'est pas applicable). Ainsi, on observe une transformation des savoirs des étudiants qui se positionnent en situation d'apprentissage (confrontation à  $M_{-1}$ ). Ils perçoivent qu'une fonction qui n'est pas deux-fois dérivable en 0 peut cependant admettre un développement limité d'ordre 2 au voisinage de ce réel.

Pour d'autres groupes, on perçoit une résistance, une difficulté persistante lors de l'interprétation des calculs algébriques effectués par confrontation à  $M_{-2}$ . Et l'intervention de l'enseignante – par un questionnement adéquat assimilable à une guidance faible – s'efforce de les amener à passer d'une action sur les objets à une réflexion sur les conditions de ces actions (Gibel, 2018) en interprétant de façon idoine les résultats de leurs calculs algébriques.

Le modèle d'analyse des raisonnements nous permet de mettre en évidence, du point de vue des conceptions, les erreurs relèvent d'obstacles (Brousseau, 1986). A l'issue de cette analyse des productions des raisonnements, nous pouvons identifier et caractériser des obstacles liés à l'appropriation et à l'usage du concept de développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel :

- Obstacle épistémologique : c'est un obstacle d'ordre *fonctionnel et topologique*. Dans ce cas, l'étudiant utilise automatiquement des techniques et des formules du répertoire didactique du Supérieur sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. D'une part, il ne précise pas un voisinage de réel pour lequel il doit déterminer le développement limité d'une fonction. D'autre part, l'étudiant est confronté à une difficulté liée à l'appropriation et l'usage raisonné de la formule de Taylor-Young. Ses erreurs résultent de l'articulation des connaissances et des savoirs des domaines de la topologie et l'Analyse fonctionnelle. Ce type d'obstacle résulte du changement de paradigmes de [AC] à [AI] ou des paradigmes [AG] et [AC] à [AI]) par l'utilisation d'une définition formalisée du concept d'approximation locale d'une fonction.
- Obstacle didactique : ce type d'obstacle est lié aux choix didactiques de l'enseignante. Par exemple, l'étudiant cherche le développement limité d'ordre 3 de la fonction au voisinage de 0 lors de la détermination de la meilleure approximation de cette fonction au voisinage de 0. Il remémore la question de la situation 1 résolue par l'enseignante au début de la séance de cours.

### **Conclusions du chapitre 6**

Nous avons pu élaborer, mettre en œuvre et analyser un enseignement du concept de développement limité autour d'une problématique qui rend compte de l'articulation de ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) afin d'introduire cet objet mathématique en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction. Ce projet d'enseignement est réalisé dans le cadre d'un travail collaboratif. En effet, l'ingénierie didactique de développement vise l'introduction du concept d'approximation locale d'une fonction par l'utilisation de ses différentes représentations, ainsi que par la prise en considération des connaissances antérieures des étudiants. L'utilisation du logiciel dynamique de géométrie « Geogebra » nous a permis de construire les représentations graphiques de ces objets mathématiques afin d'aider les étudiants à accéder aux raisons de savoir.

La construction et la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement a nécessité une collaboration étroite avec l'enseignante, Madame Rajia Slim, qui a un rôle très spécifique

en classe. L'enseignante s'est investie dans l'élaboration du chapitre « Analyse Asymptotique » dans lequel les deux situations à dimension adidactique offrent aux étudiants la possibilité de faire fonctionner leurs connaissances et leurs savoirs du répertoire didactique par leurs actions successives sur les différents milieux afin d'accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction par la mobilisation des différents registres. En offrant ces deux situations complémentaires, l'enseignante parvient, par une guidance faible, à aider les étudiants de produire des raisonnements originaux permettant de trouver leur place dans la construction du concept d'approximation locale d'une fonction. En fait, dans la situation 1, ils accèdent à ce concept mathématique par une succession de questions qui les amènent à élaborer des raisonnements à partir du concept de limite afin de faire le lien avec les notions de fonctions négligeables et arriver ensuite à l'écriture de l'approximation locale d'une fonction. La situation 2 repose sur des illustrations graphiques. Elle a un rôle central dans la construction du concept d'approximation locale d'une fonction par l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique et par la mobilisation des différents registres dans les paradigmes [AC], [AG] et [AI].

De ce fait, l'ingénierie didactique de développement a permis d'amener à construire successivement des savoirs, des échanges et des discussions afin d'accéder au sens du concept de développement limité. Elle a permis aussi de faire percevoir aux étudiants la richesse de l'articulation des différentes représentations du concept d'approximation locale d'une fonction. Cette ingénierie a amené les étudiants à produire des raisonnements articulant les dimensions sémantique et syntaxique.

L'ingénierie a permis de confronter des procédures et de percevoir l'articulation des différents registres comme facilitatrice, notamment du point de vue du contrôle sémantique. Elle a permis aussi de percevoir l'intérêt de l'articulation des différents registres graphique, géométrique, algébrique, analytique et numérique, ainsi que de mettre en lumière le niveau de justification attendue dans l'élaboration des différentes formes de raisonnements.

Nous pouvons dire que l'ingénierie didactique de développement a permis de pratiquer le raisonnement afin de donner du sens à la conception du concept d'approximation locale d'une fonction et de percevoir ses différentes fonctions dans l'apprentissage : décider de l'utilisation d'une connaissance, expliquer, contrôler, justifier, convaincre, réfuter, prouver, démontrer, etc.

L'expérimentation conduite en classe offre la possibilité aux étudiants de leur permettre d'accéder aux raisons de savoir, ainsi que de donner du sens à ce concept mathématique par une appropriation et un usage raisonné du concept par confrontation à des situations mathématiques.

Dans notre travail, la mise en œuvre des situations à dimension adidactique, couplée au modèle d'analyse des raisonnements, est un dispositif intéressant qui nous a permis de repérer les conceptions des étudiants au travers de leurs productions.

Le schéma de la structuration du milieu nous a permis d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants, ainsi que la manière dont ces savoirs se transforment pour étudier le déroulement final de la séquence.

Notre travail porte la focale à la fois sur l'étude des formes de raisonnements produits par les étudiants et sur leurs discours soit au sein du groupe, soit lors de l'interaction avec l'enseignante lorsqu'ils demandent son aide, soit lors de la présentation de leurs productions au tableau.

L'analyse de ces discours et de ces interactions a joué un rôle très important dans notre étude : elle nous a permis d'accéder à la nature de justification, la nature des explications, la manière dont les étudiants interagissent entre eux lorsqu'ils se posent des questions, la manière de justifier le choix des savoirs et des connaissances mobilisés lors de la production d'un raisonnement. Et notamment, la phase de mise en commun et de débat a permis de mettre en évidence l'importance, la richesse des paradigmes liés à l'Analyse Infinitésimale.

Dans le cas de l'élaboration de l'ingénierie didactique de développement, l'analyse des raisonnements nous a fourni des renseignements précis sur les conceptions, valides et erronées, au travers de l'utilisation que les étudiants font de leurs connaissances pour la production des raisonnements.

L'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe nous a permis d'identifier la nature et l'origine de leurs difficultés inhérentes à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). En effet, le modèle d'analyse des raisonnements par la prise en compte de ses composantes (fonction, dimension sémiotique, nature et justification) nous a permis d'identifier et de caractériser les erreurs effectuées par des étudiants confrontés à une situation mathématique.

De ce fait, l'ingénierie a permis d'amener, de mettre en lumière le niveau de justification attendue dans l'élaboration des différents formes de raisonnements et de percevoir l'intérêt de l'articulation des différents registres lors de la conceptualisation de la notion d'approximation locale d'une fonction.

L'analyse didactique des obstacles épistémologiques nous aide à avoir une compréhension très fine d'un concept complexe ; en effet ce dernier met en relation d'une part des éléments de la topologie liée à la notion de voisinage et d'autre part, des éléments de l'analyse fonctionnelle.

Nous avons conduit une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori* de l'expérimentation dans le cadre de la théorie des situations didactiques afin de produire des éléments de réponses à nos questions de recherche et à elles proposées par l'enseignante sur la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). Notre formulation des questions en tant que didacticien diffère de celle proposée par l'enseignante. Nous nous appuyons sur des concepts didactiques, et notamment la notion d'obstacle, (Brousseau, 1998).

L'analyse *a priori* nous a permis de prévoir d'une certaine manière l'ensemble des comportements et des productions des étudiants. L'écart entre les phénomènes attendus, du point de vue des raisonnements, des connaissances et des savoirs mobilisés, et les phénomènes observés par une analyse fine des données recueillies nous permet de valider nos hypothèses de recherche et ainsi d'apporter des éléments de réponses étayés à nos questions de recherche.

Par ailleurs, nous remarquons qu'il existe des difficultés que nous n'avons pas envisagées. On perçoit que pour certains étudiants, le concept de limite pose encore des vraies difficultés lors du calcul de limite d'une expression algébrique. Par ailleurs, il y a une complexité à produire des raisonnements qui relèvent du paradigme Analyse Infinitésimale. En fait, il y a une vraie complexité à coupler des connaissances relatives à la fonction, à la notion de voisinage et à l'identification de l'écart entre la fonction et son approximation locale.

Il y a des difficultés prégnantes qui traduisent des problèmes liés à l'usage raisonné du graphique, et plus précisément à établir un lien entre l'approche graphique et un raisonnement basé sur l'approche algébrique.

L'ingénierie didactique de développement vise à étudier l'adaptation des situations produites aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants.

L'expérimentation est proposée aux deux classes de première année (PC), mais nous avons conduit une analyse seulement pour une classe. Les étudiants et l'enseignante n'ont pas l'habitude de travailler avec les outils de la technologie en classe des mathématiques, ainsi de coopérer et de travailler ensemble au sein d'un groupe afin de résoudre un problème.

Nous sommes soumis à des contraintes qui sont liées à l'institution. Nous avons pu intégrer des situations mais concernant le temps de recherche on a un petit point d'ambiguïté. Il y a du temps de formulation, mais les temps de débat ne sont pas aussi importants qu'on le souhaite.

La visualisation des représentations graphiques du concept d'approximation locale d'une fonction par l'usage du logiciel dynamique Geogebra et notamment la fonction « Zoom » pour préciser les voisinages des réels lors de la détermination du développement limité d'une fonction, aide les étudiants à accéder aux raisons de savoir. Malheureusement, dans notre cas il



n'y a pas la possibilité de laisser les étudiants de choisir eux-mêmes les intervalles par l'usage de ce logiciel. Par ailleurs, il y a des contraintes du temps à la fin de la deuxième séance de l'expérimentation, de sorte que la phase de validation se transforme en un « cours dialogué » durant lequel l'enseignante prend manifestement la main totalement.

Notre questionnement nous amène à proposer un écrit à la suite de cette expérimentation dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. L'analyse des productions des étudiants en termes de raisonnements nous permettra de mieux scanner les effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants en première année (PC).

## Chapitre 7

### Les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants

#### I. Les raisons de la confrontation des étudiants à des situations « choisies » suite à l'expérimentation

La mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement, début janvier 2020, a nécessité une collaboration étroite avec l'enseignante de la classe. Madame Rajia Slim a un rôle spécifique lors de l'expérimentation conduite dans ses classes. Elle nous offre la possibilité de filmer le déroulement de deux séances de cours et de prendre des photos des traces d'écrits au tableau afin de conduire une analyse détaillée de ces deux séquences. L'analyse du déroulement des séquences en termes de phases didactiques et adidactiques, ainsi que l'analyse des productions des groupes d'étudiants selon le modèle d'analyse des raisonnements, développé dans le troisième chapitre de la partie théorique, nous ont permis d'identifier et de caractériser les difficultés des étudiants confrontés aux deux situations à dimension adidactique. Certaines de ces difficultés relèvent d'obstacles de nature épistémologique et didactique.

L'objectif principal de l'élaboration et de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement consiste à examiner la validité de nos hypothèses de recherche :

Hypothèse 1 : les obstacles liés à l'appropriation et à l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant l'utilisation des représentations graphiques.

Hypothèse 2 : le logiciel dynamique de la géométrie « Geogebra » constitue un environnement adéquat du travail au niveau de l'articulation des différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique du concept d'approximation locale d'une fonction.

Dans le chapitre 5, nous avons constaté l'intérêt de la confrontation des étudiants à des situations mathématiques « classiques », dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice, en vue d'étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction. Cette typologie d'erreurs nous a permis d'identifier des obstacles épistémologique et didactique liés à la

conceptualisation des notions de la relation de comparaison de fonctions, de développements limités et de la formule de Taylor-Young.

Nous pensons qu'une évaluation formative et formatrice, à l'issue de cette ingénierie, nous permettra mieux d'examiner les difficultés des étudiants liées à l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction.

Afin d'étudier les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants de première année (PC), nous proposons en collaboration avec l'enseignante un devoir sur table à cette classe expérimentée suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique ». Ce devoir est composé de trois situations mathématiques « classiques » proposées dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. L'analyse des raisonnements produits par les étudiants nous permettra d'étudier la nature et l'origine de leurs erreurs liées au champ d'approximation locale d'une fonction.

Nous pensons que l'analyse des productions des étudiants confrontés à une même situation « classique » avant et après l'expérimentation nous permettra de percevoir les effets de l'ingénierie didactique de développement sur leurs apprentissages. Pour cette raison, nous choisissons de proposer dans ce devoir la première situation mathématique donnée en avril 2019. Une étude comparative entre les principaux résultats des analyses des productions des étudiants confrontés à cette situation « classique » et suite à la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement, nous permettra d'examiner les effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants de première année (PC).

Nous envisageons de construire des situations mathématiques permettant de :

- mettre en évidence l'intérêt des notions de la relation de comparaison des fonctions, de développements limités et de la formule de Taylor-Young en tant que nouvelle connaissance pour l'approximation locale d'une fonction ;
- étudier la capacité des étudiants à articuler ces différentes notions lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en  $(-\infty)$  et en  $(+\infty)$  ;
- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation des objets mathématiques visant le comportement local d'une fonction.

Comme le devoir est composé de trois situations mathématiques, nous envisageons de construire deux autres situations.

La situation 2 vise à évaluer les acquis inhérents au concept de développement limité au voisinage d'un réel  $x_0$  (différent de 0) et leurs usages en tant que technique pour déterminer si

deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un réel, calculer la limite d'une fonction en un réel donné, mais aussi d'exprimer une équation de la tangente et étudier sa position relative par rapport à la courbe représentative de cette fonction en un point d'abscisse ce réel.

La situation 3 du devoir a pour finalité d'évaluer la capacité des étudiants à :

- déterminer un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 d'une fonction qui n'est pas définie en ce réel, mais y est prolongeable par continuité ;
- étudier le comportement de cette fonction au voisinage de 0 ;
- prouver que cette fonction n'admet pas un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de ce réel.

L'objectif principal de cette étude didactique consiste à examiner les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages. Pour cette raison, nous effectuerons des analyses détaillées, selon deux points de vue quantitatif et qualitatif, des productions des étudiants lors de la résolution de différentes questions proposées dans la première situation mathématique d'avril 2019.

Dans cette partie de thèse, pour éviter les répétitions de certains éléments de l'étude menée au chapitre 5, nous nous intéressons à présenter la méthodologie mise en œuvre et les principaux résultats de l'analyse des productions des étudiants de la classe (PC1).

## **II. Méthodologie mise en œuvre**

### ***II.1. Sujet***

Dans le cadre d'un travail collaboratif, l'enseignante, Madame Rajia Slim de l'Institut Préparatoire de Tunis, a accepté de proposer un devoir écrit à ses étudiants suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » en février 2020. Ce chapitre s'est déroulé en sept séances de deux heures. L'ingénierie didactique de développement est mise en œuvre lors de la deuxième et la troisième séance de ce chapitre.

### ***II.2. Instrumentations***

- Les situations mathématiques objets d'études

En mettant en jeu la relation étudiant-situation (Brousseau, 1998), nous avons conduit une analyse *a priori* de la première situation proposée en vue d'évaluer les acquis des étudiants. Cette étude est présentée dans le chapitre 5.

Nous présentons les énoncés de trois situations proposées dans ce devoir. Nous commençons par un rappel des énoncés.

#### **Énoncé de la situation 1**

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}$
--

- 1) On s'intéresse à faire une étude locale de  $f$  en 0.
  - a. Donner le  $DL_2(0)$ .
  - b. En déduire  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .
  - c. Déterminer l'expression de la tangente  $\Delta$  à  $C_f$  passant par le point  $(0, f(0))$  ; préciser la position relative de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$ .
- 2) Étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  :
  - a. Montrer que l'on a :  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $(+\infty)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .
  - b. Déduire une fonction équivalente à  $f$  en  $+\infty$ .
  - c. Préciser le comportement de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3) Préciser le comportement de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

L'objectif principal de ce problème est d'amener les étudiants à étudier localement une fonction au voisinage de 0 ainsi que son comportement en  $(+\infty)$  puis en  $(-\infty)$ .

### Énoncé de la situation 2

- On considère la fonction  $g$  définie sur  $] -2, +\infty[$  par :  $g(x) = \ln(x + 2)$ .
1. Déterminer le développement limité de la fonction  $g$  à l'ordre 2 au voisinage de 2.
  2. Déterminer une fonction équivalente à  $g$  au voisinage de 2.
  3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
  4. En déduire que la courbe représentative de  $g$  admet une tangente au point d'abscisse 2, dont on précisera l'équation.
  5. Étudier la position relative de la courbe  $C_g$  et de la tangente au voisinage de ce point.

L'objectif principal de cette situation consiste à donner l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un réel différent de 0.

### Énoncé de la situation 3

- On considère la fonction  $h : h(x) = x + 2x^2 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $h$ .
  2. Déterminer le développement limité de la fonction  $h$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.
  3. Étudier le comportement de la fonction  $h$  au voisinage de 0.
  4. La fonction  $h$  admet-elle un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 ?

La situation 3 vise à mettre en lumière l'intérêt de la définition généralisée du développement limité dans le cas d'une fonction n'est pas deux-fois dérivable en 0.

#### - Les données recueillies avant de la mise en œuvre

Dans le cadre d'un travail collaboratif, l'enseignante joue un rôle spécifique. Malgré les contraintes temporelles, elle a planifié son enseignement afin de programmer une séance d'évaluation sommative suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique ». Ensuite, elle a participé à la conception de l'expérimentation et a accepté de nous remettre les copies des étudiants. Ces dernières ne font pas apparaître ses commentaires mais comportent uniquement les points attribués à chaque question et la note globale.

#### - Les données recueillies lors de la mise en œuvre

L'enseignante commence la séance par la distribution de la feuille des énoncés des situations aux étudiants de la classe de (PC1) vers dix heures trente minutes.

La modalité de passation de l'évaluation est identique à celle de pré-test : chaque étudiant travaille seul et dispose d'une heure et quinze minutes pour rédiger sa composition.

Chacun répond individuellement aux questions, qui structurent chacun des énoncés, en s'appuyant sur les données et sur son répertoire didactique de connaissances. Par ailleurs, l'enseignante circule dans les rangs et observe les étudiants. Elle n'effectue aucune intervention tout au long du devoir. Nous tenons à préciser que ni la calculatrice, ni les documents ne sont autorisés.

### ***II.3. Place de la séquence dans la progression***

En collaboration avec l'enseignante, dans un contexte de classe, nous avons proposé une évaluation écrite constituée de trois situations mathématiques en février 2020. Nous l'avons faite passer à une classe de première année (PC) composée de 24 étudiants (PC1). Ce devoir écrit fait suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » auquel nous avons intégré les deux situations à dimension adidactique lors de la deuxième et la troisième séance. La modalité de passation de l'évaluation est la suivante : chaque étudiant travaille seul afin de produire les réponses aux différentes questions proposées. Les étudiants disposent de 75 minutes pour rédiger leur composition.

### ***II.4. Méthode d'analyse des données : mise en œuvre des différentes dimensions de l'outil d'analyse***

Nous allons conduire, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), une analyse *a posteriori* d'une des trois situations. Nous analyserons les productions des étudiants en nous attachant à étudier les raisonnements produits en réponse aux questions. Nous adoptons le modèle d'analyse du raisonnement développé dans la partie théorique (chapitre 3) afin de conduire une analyse fine des productions des étudiants en termes de connaissances et de savoirs mobilisés. Pour ceci, notre travail porte la focale sur l'étude de l'utilisation des formules et des techniques du répertoire didactique de la classe, et plus précisément des transformations et des formulations des expressions analytique et algébrique par l'utilisation des règles du calcul formel et algébrique.

## **II. Principaux résultats**

Nous pouvons distinguer différents types de raisonnement produits par les étudiants lors de la détermination des développements limités de la fonction  $f$  au voisinage de 0 ou de ses expressions analytiques en  $(+\infty)$  ou en  $(-\infty)$ .

- Raisonnement formel complet : dans ce cas, l'étudiant donne la représentation analytique du développement limité de la fonction  $f$  par la précision de voisinage.

- Raisonnement formellement incomplet : dans ce cas, l'étudiant donne la représentation analytique du développement limité de la fonction  $f$  sans la précision de voisinage, ainsi que l'ordre à réaliser.
- Raisonnement erroné : dans ce cas, l'étudiant est confronté à un problème lié à l'utilisation d'une formule du répertoire didactique de la classe.
- Absence de raisonnement : l'étudiant n'essaye pas de répondre à cette question.

Dans cette partie, notre travail porte la focale sur les savoirs et les connaissances mobilisés du répertoire didactique et notamment les types de techniques utilisées :

- Technique du Supérieur : dans ce cas, l'étudiant développe une méthode ou une propriété ou une formule ou un théorème ou une définition du répertoire didactique du Supérieur. Par exemple, il utilise le développement limité d'une fonction pour déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de cette fonction au voisinage d'un point.

- Technique du Secondaire : dans ce cas, l'étudiant utilise une technique du répertoire didactique du Secondaire lors de l'étude locale ou asymptotique d'une fonction.

- Techniques du Secondaire et du Supérieur : dans ce cas, il articule ses connaissances antérieures du Secondaire et du Supérieur pour résoudre des tâches traitées au niveau Secondaire. Il néglige la technique du répertoire didactique du Supérieur la plus simple et la plus facile et la plus efficace pour traiter des questions relevant du niveau Secondaire.

- Autres techniques : dans ce cas, l'étudiant utilise une méthode qui n'a aucune relation avec le répertoire didactique de la classe.

- Aucune technique : dans ce cas, l'étudiant donne directement le résultat sans l'indication ou l'explicitation de la méthode utilisée pour répondre à la question proposée.

### ***II.1. Analyse des questions (1-a-b-c) liées à l'étude locale de la fonction $f$***

Nous conduisons une analyse de chacune des questions proposées dans cette situation mathématique selon deux points de vue : quantitatif et qualitatif.

#### II.1.1. Analyse de la question (1-a)

Nous présentons les réponses de 24 étudiants dans le tableau ci-dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	4 %	67 %	29 %	0%

**Tableau 7-1 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination du développement limité d'ordre 2 de la fonction au voisinage de 0**

Nous remarquons que tous les étudiants ont essayé de déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction au voisinage de 0, mais un seul étudiant a produit un raisonnement formel complet. En effet, la majorité ont fait l'usage automatique de la formule du répertoire didactique du Supérieur sans donner du sens à la notion mathématique mobilisée.

Environ 33 % (un tiers) des étudiants se sont intéressés à vérifier l'existence d'un développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, trois étudiants ont donné les conditions nécessaires pour l'utilisation de la formule de Taylor-Young en justifiant que la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ . En revanche, quatre étudiants ont prouvé que la fonction  $f$  admet un développement limité en justifiant leur raisonnement par le fait qu'elle vérifie les conditions de l'application de la formule de Taylor-Young : la fonction est de classe  $C^2(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ .

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Nous pouvons classer les difficultés des étudiants selon le type de raisonnement produit : des difficultés liées à la production d'un raisonnement formellement incomplet et celle d'un raisonnement erroné dans le paradigme [AI].

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables (la conceptualisation de la notion de développement limité)

La majorité des étudiants (67 %) ont déterminé l'expression de développement limité d'ordre 2 de la fonction au voisinage de 0. Ils sont confrontés à des difficultés liées à la production d'un raisonnement formellement incomplet. Ils ont mobilisé une formule du répertoire didactique du Supérieur, et plus précisément la formule du calcul de produit de développements limités usuels du registre des formules afin de déterminer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, ils ont utilisé le développement limité usuel  $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha \cdot X + \frac{\alpha(\alpha-1)X^2}{2} + o(X^2)$  pour déterminer les développements limités des fonctions  $\sqrt{1 + x^2}$  et  $(1 - x)^{-1}$  dans le paradigme [AI]. Ces étudiants ont donné la représentation analytique de l'approximation locale de la fonction  $f$  sous la forme de :  $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$ . Cependant, ils n'ont pas précisé le voisinage de 0 sur lequel doit être déterminé un développement limité d'une fonction, ainsi que l'ordre à réaliser. Nous pouvons dire que l'utilisation automatique des formules du répertoire didactique du Supérieur traduit l'existence d'une difficulté liée à la dialectique sens/technique d'un concept mathématique. Ces étudiants sont confrontés à une difficulté liée au domaine de la topologie et de l'Analyse fonctionnelle.

En revanche, un seul étudiant a contrôlé l'ordre des développements limités à réaliser. Il a déterminé les développements limités d'ordre 1 de la fonction  $[x \rightarrow \sqrt{1 + x^2}]$  et d'ordre 2 de



la fonction  $[x \rightarrow x(1-x)^{-1}]$  afin de donner le développement limité d'ordre 2 de  $f$  au voisinage de 0.

Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Un nombre assez-important des étudiants ont produit un raisonnement erroné.

Certains ne parviennent pas à appliquer les formules du répertoire didactique du Supérieur. En effet, ils sont confrontés au problème lié à la mobilisation d'une connaissance antérieure disponible (\*), et plus précisément le développement limité usuel de la fonction  $X \rightarrow (1+X)^\alpha$  pour déterminer les développements limités des fonctions  $[x \rightarrow \sqrt{1+x^2}]$  et  $[x \rightarrow (1-x)^{-1}]$  :

- ✓ Un étudiant a produit un raisonnement différent lors de la détermination du développement limité de la fonction  $(x \rightarrow \frac{x}{x-1})$ . Il a remplacé cette expression par  $[1 + \frac{1}{x-1}]$  pour utiliser la formule (\*) dans le cas  $(\alpha = -1)$  et  $(X = -x)$ . Puis, il a trouvé l'expression  $[-1 - x - x^2 + o(x^2)]$  comme développement limité de la fonction  $(x \rightarrow \frac{x}{x-1})$ . En revanche, il est confronté au problème lié à l'usage de cette formule (\*) pour déterminer celui de la fonction  $x \rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ .
- ✓ Trois étudiants ont éliminé l'expression du reste  $[o(x^2)]$  dans le calcul du produit des développements limités. En réalité, ils ont calculé le produit des approximations polynômiales des fonctions  $(x \rightarrow \frac{x}{x-1})$  et  $[x \rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}}]$  afin de déterminer un développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Enfin, ils ont ajouté l'expression du reste dans la dernière étape de ce calcul. Un étudiant a ajouté l'expression  $[-o(x^2)]$  dans la représentation analytique de développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

Par ailleurs, nous distinguons plusieurs réponses dans le cas de la détermination de développement limité de la fonction  $[x \rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}}]$  :

- Un étudiant l'a remplacé par  $[\frac{3}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)]$  via l'utilisation d'une formule fautive (\*\*\*) du répertoire didactique du Supérieur. De plus, il n'a pas remplacé la fonction  $(x \rightarrow \frac{x}{x-1})$  par son développement limité.
- Un étudiant l'a remplacé par  $[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)]$ .

---

(\*)  $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha.X + \frac{\alpha(\alpha-1)X^2}{2} + o(X^2)$

(\*\*\*)  $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)X}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}X^2 + o(X^2)$

- Un étudiant a remplacé  $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  par son approximation polynômiale d'ordre 2 au voisinage de 0 et la fonction  $[x \rightarrow [x + (-1)]^{-1}]$  par  $[x \rightarrow (1 - x)]$ .

Nous remarquons qu'il existe des difficultés que nous n'avons pas envisagées dans l'analyse *a priori* comme celles liées au calcul du produit des développements limités par la négligence de l'expression du reste.

Nous pouvons conclure que presque tous les étudiants sont confrontés à des problèmes liés à la détermination du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Ces problèmes résultent de l'utilisation de la formule du répertoire didactique du Supérieur soit d'une manière automatique par 67 %, soit d'une manière fautive lors de l'application des développements limités usuels par 29%.

### II.1.2 Analyse de la question (1-b)

Nous présentons le résumé des réponses des 24 étudiants dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	38 %	8 %	4 %
	Autres	0 %	4 %	
	Aucune technique	25 %	21 %	

**Tableau 7-2 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination des valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0**

Nous remarquons que la majorité des étudiants (environ 63 %) ont déterminé les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0. D'un côté, la majorité d'entre eux ont produit des pas de raisonnement de nature sémantique/syntaxique par l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur. En effet, ils ont appliqué la formule de Taylor-Young du registre des formules dans les paradigmes [AC] et [AI]. En revanche, les autres étudiants ont donné directement les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  dans le paradigme [AC]. Un quart des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature syntaxique par la mobilisation de cette formule du répertoire didactique du Supérieur, d'une manière implicite.

#### **Identification des différents types des difficultés rencontrées par les étudiants**

Nous remarquons qu'environ 37 % des étudiants sont confrontés à des difficultés lors de la détermination des valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles

Un étudiant ne parvient pas à trouver la connaissance convenable pour déterminer les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0. Il n'a pas essayé de produire un raisonnement.

Par ailleurs, un étudiant a utilisé une méthode qui n'a aucune relation avec le répertoire didactique du Supérieur et du Secondaire. En effet, il a calculé les dérivées successives du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 afin de donner les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  dans les paradigmes [AI] et [AC]. Il est confronté à un problème lié à la connaissance mathématique mobilisée. Nous allons conduire une analyse détaillée des productions de cet étudiant.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Environ 21 % des étudiants ont donné directement les valeurs fausses des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0 dans le paradigme [AC]. Ceci traduit l'utilisation de développements limités et la formule de Taylor-Young d'une manière implicite, mais ces étudiants sont confrontés à un problème lié à l'interprétation de ces expressions analytiques. L'erreur commise est due à l'utilisation directe de la formule du répertoire didactique du Supérieur sans donner aucun moyen de justification de l'identification terme à terme.

#### Difficultés liées au niveau technique

Certains étudiants (8 %) sont confrontés au problème lié à l'utilisation du développement limité pour déterminer les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  dans les paradigmes [AI] et [AC]. Ils n'ont pas la capacité à articuler les objets d'approximation locale d'une fonction : les développements limités et la formule de Taylor-Young.

A l'issue de cette analyse, nous pouvons dire qu'environ 96 % des étudiants donnent de l'intérêt au concept de développement limité en tant que technique relevant du domaine de l'étude d'une fonction et plus précisément pour la détermination des valeurs des dérivées première et seconde d'une fonction en 0 dans les paradigmes [AI] et [AC].

### II.1.3 Analyse de la question (1-c)

Cette question est divisée selon deux sous-questions dont nous analysons les productions des étudiants indépendamment.

#### **II.1.3.a. Analyse de la question liée à la détermination de l'équation de la tangente**

Nous présentons les réponses des étudiants dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	17 %	0 %	4 %
	Du Secondaire	4 %	0 %	
	Aucune	67 %	8 %	

**Tableau 7-3 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination d'une équation de la tangente au point  $(0, f(0))$**

La plupart des étudiants (environ 88 %) ont réussi à déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$ . Certains d'entre eux ont produit des pas de raisonnement de nature sémantique par la mobilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur. En effet, ils donnent du sens au développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction dans les paradigmes [AI] et [AG].

Environ 67 % des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature syntaxique par la détermination directe d'une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$  dans le paradigme [AG]. En réalité, ces étudiants ont utilisé la propriété de l'unicité du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel de manière implicite.

Un étudiant a mobilisé ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire pour déterminer une équation de cette tangente. Il a fait appel à la technique étudiée en terminale par la détermination des valeurs de  $f(0)$  et  $f'(0)$  afin de donner une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $(0, f(0))$  [ $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$ ] dans les paradigmes [AG] et [AC]. Cet étudiant ne donne pas d'intérêt au concept de développement limité en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction.

#### **Identification des différents types des difficultés rencontrées par les étudiants**

Deux étudiants n'ont pas déterminé une équation adéquate de la tangente à la courbe au point  $(0, f(0))$ . Ces étudiants sont confrontés aux difficultés liées au niveau technique. Ils ont donné une équation fautive de la tangente dans le paradigme [AG]. La production d'un raisonnement erroné est due à la négligence des moyens de justification et de contrôle. En réalité, ces étudiants ont utilisé directement la formule du répertoire didactique du Supérieur. Ils se réfèrent au développement limité d'une manière implicite.

En conclusion, environ 92 % des étudiants donnent un intérêt au développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction dans les paradigmes [AI] et [AG].

#### **II.1.3.b. Analyse de la question liée à la précision de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente**

Le résumé des réponses des étudiants est présenté dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	63 %	33 %	4 %

**Tableau 7-4 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude de la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$**

La majorité des étudiants ont donné l'intérêt du concept de développement limité d'une fonction en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction. En effet, ces 63 % des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature sémantique par l'interprétation de la représentation analytique du développement limité dans le paradigme [AI] pour déterminer la position relative de la courbe représentative par rapport à la tangente au point  $(0, f(0))$  dans le paradigme [AG].

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Environ 41% des étudiants sont confrontés à des difficultés liées à l'étude de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

#### Difficulté liée au niveau des connaissances mobilisables

Un quart des étudiants sont confrontés à un problème lié à l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur par le changement de paradigme [AI] au paradigme [AG] et plus précisément celle du développement limité.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (l'expression du reste)

Nous remarquons qu'environ 8 % des étudiants ont fait une confusion entre l'expression du développement limité d'une fonction et sa fonction équivalente. En effet, ils considèrent l'égalité :  $f(x) - (-x) = -x^2$ . L'élimination de l'expression du reste prouve l'existence d'une difficulté liée à la conceptualisation de la notion d'approximation locale d'une fonction. L'erreur commise revient au changement de paradigme par le passage de paradigme [AI] au paradigme [AG]. Par ailleurs, un étudiant ne parvient pas à mobiliser ses connaissances antérieures pour préciser la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

A l'issue de cette analyse des questions (1-c-1) et (1-c-2), nous remarquons que seulement un étudiant ne parvient pas à donner l'intérêt du développement limité en tant qu'outil lors de l'étude de la fonction au point  $(0, f(0))$ . Nous présenterons par la suite les productions de cet étudiant.

#### II.1.4. Analyse qualitative des questions (1-a-b-c) sur l'étude locale de la fonction $f$ au voisinage de 0

Dans cette section, nous conduisons une analyse des raisonnements produits par quatre étudiants au niveau des paradigmes de l'Analyse standard (Kuzniak, Montoya Delgado, Vandebrouck & Vivier, 2015), au niveau des registres et au niveau des fonctions des raisonnements, de l'utilisation du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique. Nous choisissons de présenter l'analyse des productions d'un étudiant qui nous permettent d'étudier au plus près la nature et l'origine de ses

erreurs effectuées lors de la conceptualisation et l'utilisation de la notion de développement limité pour l'étude locale d'une fonction. L'analyse des autres productions selon le modèle d'analyse des raisonnements est présentée en annexe (Cf. Annexe 7-1).

*Productions d'un étudiant*

Nous présentons les productions d'un étudiant qui est confronté aux difficultés relatives à la mobilisation de ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire.

**1-a** (1)  $DL_2(0)$   
 (2)  $f(x) = x(x-1)^{-1}\sqrt{x^2+1}$   
 (3)  $= x(x-1)^{-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$   
 (4)  $= -x(1+x)\left(1+\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$  au voisinage de 0  
 (5)  $= (-x-x^2)\left(1+\frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$   
 (6)  $\Rightarrow f(x) = -x-x^2 + o(x^2)$   
**1-b** (7)  $\Rightarrow f(0) = 0$  en  $DL_2(0)$   
 (8)  $f(x) = -x-x^2 + o(x^2)$  est le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.  
 (9)  $\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$   
 (10)  $\Rightarrow a_1 = f'(0)$   
 (11)  $= -1$   
 (12)  $\Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$   
 (13)  $= -1$   
 (14)  $\Rightarrow f''(0) = -2$   
 (15)  $f'(0) = -1$  et  $f''(0) = -2$   
**1-c** (16)  $f(x) = \underbrace{-x}_{\text{équation de la tangente position}} \underbrace{-x^2}_{\text{position}} + o(x^2)$   
 (17)  $\Rightarrow \Delta : y = -x$  qui passe par  $(0, f(0)) = (0,0)$   
 (18) Si  $x > 0 \Rightarrow C_f$  en dessous de  $\Delta$   
**(19) Si  $x < 0 \Rightarrow C_f$  au-dessus de  $\Delta$**   
 (20) Si  $x = 0 \Rightarrow C_f$  et  $\Delta$  confondues en 0

**Figure 7-1** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant s'appuie sur le produit des fonctions pour déterminer la représentation analytique du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Ensuite, il utilise sa représentation algébrique pour déterminer les valeurs numériques des dérivées première et seconde de  $f$  en 0 dans le paradigme [AC]. La recherche d'une équation de la tangente et sa position relative par rapport à la courbe représentative de  $f$  au point  $(0, f(0))$  est développée dans les paradigmes [AI] et [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant mobilise les registres analytique, algébrique, géométrique et numérique lors de l'étude locale de la fonction  $f$ .

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision de déterminer le développement limité d'une fonction.

[(2)-(3)-(4)-(5)-(6)] Détermination de la représentation analytique du développement limité de la fonction  $f$ . L'étudiant a produit un raisonnement formellement incomplet. Il utilise les formules des développements limités usuels du registre des formules du répertoire didactique du Supérieur. L'erreur commise est due à l'utilisation automatique de cette formule. Il ne donne pas de sens à cet objet mathématique. En effet, il n'a pas précisé un voisinage de 0 sur lequel est défini ce développement limité, ainsi que l'ordre auquel le réaliser. Il est confronté à une difficulté liée au sens de la connaissance mathématique mobilisée.

[(7)] Calcul de la valeur numérique de la fonction  $f$  en 0. Il donne l'intérêt du développement limité en tant que nouvel outil pour l'étude locale d'une fonction.

[(8)] Décision de l'utilisation du développement limité.

[(9)] Cette étape traduit la mobilisation de la formule de Taylor-Young du répertoire didactique du Supérieur. L'étudiant donne donc un intérêt au développement limité en tant que nouvelle technique pour déterminer les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .

[(10)-(11)] Détermination de la valeur numérique de la dérivée de la fonction  $f$  en 0. Il utilise une technique du répertoire didactique du Supérieur sans expliciter la formule mobilisée. Il n'effectue aucune justification et ni contrôle aucun pas de son raisonnement.

[(12)-(13)-(14)] Détermination de la valeur de la dérivée seconde de la fonction  $f$  en 0.

[(15)] Déclaration de la fin de son raisonnement.

Cet étudiant a produit des pas de raisonnement de nature syntaxique lors de la détermination des valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0.

[(16)] Explication de l'intérêt du développement limité en tant que nouvelle technique pour l'étude locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0. L'étudiant tire parti des différents termes de cette approximation polynômiale d'ordre 2 et explique le rôle de chacun dans l'étude locale de cette fonction.

[(17)] Précision de l'expression d'une équation de la tangente par l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur. La production d'un pas de raisonnement de nature sémantique donne l'intérêt du concept de développement limité d'une fonction en tant que nouvelle technique lors de son étude au voisinage de 0.

[(18)-(19)-(20)] Détermination de la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

Dans l'étape (16), l'étudiant tire avantage du troisième terme ( $-x^2$ ) pour préciser la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ . Mais il est confronté à un problème lié à l'étude du signe (de la fonction  $(-x^2)$ ). Cette erreur *d'ordre calculatoire* est associée à une connaissance antérieure mobilisable relevant du répertoire didactique du Secondaire.

La production d'un raisonnement incomplet pour déterminer le développement limité prouve l'existence d'une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* relative à l'appropriation de ce concept mathématique. Cette difficulté est liée au travail dans le paradigme [AI] et notamment dans les domaines de la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

## II.2. Analyse des questions (2-a-b-c) liées à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $+\infty$

Dans cette partie, nous conduisons une analyse quantitative et qualitative des trois questions proposées dans cette situation.

### II.2.1. Analyse de la question (2-a)

Nous présentons les réponses des étudiants dans le tableau ci-dessous :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	4 %	38 %	46 %	12 %

**Tableau 7-5 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$**

Nous remarquons qu'un seul étudiant a produit un raisonnement formel complet lors de la détermination de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . En effet, il a développé une formule du répertoire didactique du Supérieur mais sans la justification de certaines étapes de son raisonnement dans les paradigmes [AC] et [AI]. Par contre, 38% des étudiants ont déterminé l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  sans la précision d'un voisinage de 0 lors de la détermination des développements limités au voisinage de 0.

Nous remarquons que presque tous les étudiants sont confrontés aux difficultés lors de l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur dans de paradigme [AI] afin de déterminer le développement limité de la fonction  $f(\frac{1}{x})$  au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Cette erreur traduit l'existence d'une difficulté liée à l'appropriation du concept de développement limité.



Nous pouvons identifier plusieurs maladroresses quant à la détermination de l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  : au niveau des signes et relatives à la notion de voisinage.

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

La majorité des étudiants ont effectué des erreurs lors de la mobilisation de leurs connaissances antérieures, soit sur la formule du développement limité du répertoire didactique du Supérieur, soit sur la technique du changement de variable relevant elle du répertoire didactique du Secondaire.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

D'une part, un étudiant a fait appel à la technique du changement de variable (on pose :  $X = \frac{1}{x}$ ), mais il n'a pas terminé son raisonnement. D'autre part, un étudiant a utilisé la technique du changement de variable en choisissant les formulations et les transformations convenables afin de donner une représentation analytique de l'objet « fonction » sous forme d'une fonction de la variable  $\frac{1}{x}$ . En revanche, le changement de paradigme [AC] au paradigme [AI] pose un vrai problème.

Environ 16 % des étudiants ont reformulé l'expression de la fonction  $f$  sous la forme d'une fonction de la variable  $(\frac{1}{x})$  en effectuant directement la technique du changement de variable. Ensuite, ils ont utilisé les développements limités usuels au voisinage de 0 sans précision de d'ordre ni de voisinage sur lequel est défini ce développement limité.

Nous remarquons qu'environ 38 % des étudiants ont utilisé automatiquement cette technique pour déterminer l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Ils ont obtenu une représentation analytique sans cependant préciser un voisinage, ni l'ordre des développements limités à réaliser. Ces étudiants ne donnent pas du sens à la connaissance mathématique mobilisée.

#### Difficultés liées au niveau technique

Certains étudiants (environ 12 %) n'ont pas trouvé la technique convenable de leur répertoire didactique pour déterminer une expression analytique de  $f$  en  $+\infty$ . Ils sont confrontés au problème lié à l'appropriation du concept de développement limité.

Un étudiant ne sait pas employer la formule (\*)<sup>8</sup> du développement limité au voisinage de 0, relevant du répertoire didactique du Supérieur, afin de déterminer celui de la fonction  $[X \rightarrow (1 - X)^{-1}]$ .

---

<sup>8</sup>  $[(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)]$

Environ 19 % des étudiants ont produit des raisonnements erronés. Ils n'ont pas effectué le changement de variable adéquat afin de mobiliser la formule (\*) en vue de déterminer le développement limité de la fonction  $[X \rightarrow (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}]$  qui n'a de sens que lorsque la variable  $X$  tend vers 0 et non pas vers  $(+\infty)$ . Cette *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* résulte de l'usage automatique des techniques du répertoire didactique du Supérieur lors de l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

#### Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (l'expression du reste)

Environ 4% des étudiants sont confrontés à un problème lié à la notion de l'expression du reste. L'un d'eux a utilisé la technique de changement de variable et la formule des développements limités au voisinage de 0, mais, on relève des erreurs à travers l'écriture de l'expression du reste sous la forme  $[o(x)]$  au lieu de  $[o(\frac{1}{x})]$ .

Nous remarquons que tous les étudiants ont utilisé une expression du reste en  $[o(\frac{1}{x})]$  au lieu de  $[\frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x})]$  comme donné dans la question.

#### II.2.2 Analyse de la question (2-b)

Le résumé des réponses des étudiants lors de la détermination des fonctions équivalentes est présenté dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	8 %	13 %	33 %
	Aucune	33 %	13 %	

**Tableau 7-6 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de la détermination des fonctions équivalentes en  $+\infty$**

A partir de notre corpus, nous remarquons qu'un nombre assez important des étudiants ont produit des raisonnements complets formels pour déterminer des fonctions équivalentes en  $+\infty$  dans le paradigme [AI]. Ils ont la capacité d'articuler les objets : expression analytique de la fonction en  $(+\infty)$  et fonctions équivalentes.

- Environ 8 % des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature syntaxique. Ils ont donné l'expression de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  afin de présenter une fonction équivalente dans le paradigme [AI]. En effet, ils n'ont effectué aucune justification et aucun contrôle de leurs raisonnements. Ils ont mobilisé cette expression analytique en tant que technique pour trouver une fonction équivalente. Ils ont fait un usage automatique d'une formule du répertoire didactique du Supérieur.

- Certains étudiants (environ 33 %) ont donné directement des fonctions équivalentes en  $+\infty$ . Ils n'ont effectué aucun contrôle et ni validé de leur raisonnement. L'utilisation implicite d'une formule du répertoire didactique du Supérieur amène à la production d'un raisonnement de nature syntaxique.

### **Identification des difficultés rencontrées par les étudiants (59 %)**

Nous remarquons que la majorité des étudiants sont confrontés à la difficulté de déterminer une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

Difficultés liées au niveau des connaissances disponibles (l'expression analytique de la fonction en  $(+\infty)$ )

Un tiers des étudiants ne savent pas tirer avantage de l'expression analytique de la fonction en  $(+\infty)$  pour déterminer une fonction équivalente. Ils n'ont donc pas la capacité de mobiliser leurs connaissances antérieures.

#### Difficultés liées au niveau technique

Environ 15 % des étudiants ont utilisé l'expression obtenue de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  comme nouvelle technique pour en déterminer une fonction équivalente. En revanche, ils sont confrontés à une difficulté liée à son usage. En effet, certains d'entre eux (environ 8%) ont calculé la limite de la fonction  $[x \mapsto \frac{f(x)}{x+\frac{3}{2x}}]$  afin de justifier que la fonction  $(x \mapsto x + \frac{3}{2x})$  est l'équivalente à la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

$$(**) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 1 \text{ donc } F(x) \sim G(x) \text{ en } +\infty$$

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Trois étudiants ont produit des raisonnements erronés. Ils ont donné directement deux fonctions équivalentes en  $+\infty$ .

### II.2.3. Analyse de la question (2-c)

Nous présentons les réponses des étudiants dans ce tableau :

		Raisonnements formels complets	Raisonnement erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	38 %	17 %	16 %
	Du Supérieur et du Secondaire	0 %	8 %	
	Aucune	13 %	8 %	

**Tableau 7-7 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$**

Nous remarquons que la plupart des étudiants (environ 51 %) ont donné une équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  :

- Environ 38% d'entre eux ont produit des pas de raisonnement de nature sémantique par l'interprétation de l'expression analytique de cette fonction en  $(+\infty)$  dans les paradigmes [AI] et [AG].
- Environ 13 % des étudiants ont produit un pas de raisonnement de nature syntaxique. Ils ont donné directement l'équation de l'asymptote oblique dans le paradigme [AG]. Ces étudiants, n'effectuent aucune justification et ni validation de leur raisonnement.

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Un nombre assez important des étudiants (49 %) sont confrontés à un problème lié à l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en  $(+\infty)$ . Nous pouvons classer leurs difficultés selon les savoirs et les connaissances mobilisés (Robert, 1998).

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables

Certains étudiants (16 %) n'ont pas la capacité à mobiliser leurs connaissances antérieures soit du Supérieur, soit du Secondaire lors de l'étude du comportement de cette fonction en  $(+\infty)$ .

#### Difficultés liées au niveau technique

Environ 19 % des étudiants sont confrontés à un problème lié à l'utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur. Ces étudiants ont trouvé l'intérêt du concept de développement asymptotique en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction, mais ils ne parviennent pas à utiliser pleinement cette nouvelle technique du répertoire didactique du Supérieur.

Environ 15 % des étudiants ont considéré que l'équation :  $y = x + 1$  est une tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Ces étudiants ont fait confusion entre l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique. Le passage du local au global leur pose un vrai problème, (Rogalski, 2008).

#### II.2.4. Analyse qualitative des questions (2-a-b-c) sur l'étude du comportement de la fonction en $+\infty$

Nous choisissons de conduire une analyse plus fine des productions de quatre étudiants en termes de raisonnements, selon le modèle d'analyse développé dans le chapitre 3, qui nous permettra d'étudier des difficultés liées à l'appropriation et l'utilisation du développement limité lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(+\infty)$ . Dans cette section, nous présentons l'analyse des productions de l'un de ces étudiants, par contre les analyses des productions des autres sont présentées en annexe (Cf. Annexe 7-2).

### Productions d'un étudiant

Nous présentons les productions d'un étudiant qui étudie le comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$  avant de déterminer deux fonctions équivalentes. Cet étudiant ne donne pas l'intérêt du concept de fonctions équivalentes en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en  $+\infty$ .

2-a)

(1)  $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1}$

(2)  $= \frac{x}{x(1-\frac{1}{x})} \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}$

(3)  $= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

(4)  $= \frac{x}{1-\frac{1}{x}} \sqrt{1 + x^2}$

(5) On pose  $y = \frac{1}{x}$

(6) Donc  $y \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$

(7)  $\Leftrightarrow f(y) = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^2}$

(8)  $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(y^2) \quad DL_2(0)$

(9)  $\sqrt{1 + y^2} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ , au voisinage de 0

(10)  $\Rightarrow \frac{1}{1-y} \sqrt{1 + y^2} = 1 + y + \frac{3}{2}y^2 + o(y^2)$

(11) Or  $\frac{1}{y} = x$

(12)  $\Rightarrow f(x) = x(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}))$  en  $+\infty$

(13)  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$  en  $+\infty$

2-c)

(14)  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$

(15) Alors  $f$  admet une tangente  $\Delta'$ :  $y = x + 1$  au voisinage de  $+\infty$

2-b)

(16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x + \frac{3}{2x}} = 1$

(17) D'où  $f(x) \sim x + \frac{3}{2x}$  en 0

Figure 7-2 : extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ Identification des paradigmes correspondants

Les transformations et formulations de l'expression analytique de la fonction  $f$  se réalisent afin de produire un calcul infinitésimal par un changement de variable. Cette méthode est développée dans le paradigme [AC] puis [AI] afin de déterminer l'expression analytique de la fonction  $x \rightarrow f(\frac{1}{x})$  en  $+\infty$  et son équivalence au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Ensuite, l'étude de son comportement en  $+\infty$  est réalisée par la mise en relation entre des objets de géométrie dans le paradigme [AG].

#### ➤ Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique

L'étudiant mobilise les registres analytique, algébrique, géométrique et numérique afin d'étudier le comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Par ailleurs, il détermine son expression analytique en  $+\infty$  dans le registre analytique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)-(3)-(4)] Transformations et formulations de la représentation analytique de l'objet « fonction ». Cet étudiant a mobilisé ses connaissances antérieures du Secondaire afin de déterminer le produit des fonctions par l'usage de l'indice symbolique  $\frac{1}{x}$ .

[(5)-(6)] Décision de l'usage de la technique du changement de variable. Dans l'étape (6), il a vérifié et a justifié son raisonnement par la mobilisation d'une connaissance du répertoire didactique du Secondaire.

[(7)] Action sur l'égalité de deux différents objets mathématiques. En réalité, il donne une représentation analytique d'une fonction  $g$  telle que :  $g(y) = f(x)$ .

[(8)-(9)] Détermination des développements limités d'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions  $(x \rightarrow \frac{1}{1-x})$  et  $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$  par l'usage automatique de la formule (\*) du répertoire didactique du Supérieur.

[(10)] Détermination du développement limité de la fonction produit  $x \rightarrow \frac{1}{1-x} \sqrt{1+x^2}$ .

[(11)] Décision de l'utilisation de la méthode du changement de variable du répertoire didactique du Secondaire.

[(12)-(13)] Détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Il a produit des pas de raisonnement de nature syntaxique.

[(14)] Décision de l'utilisation de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $+\infty$  afin d'étudier son comportement.

[(15)] Confirmation du comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Le désigne de la notion de tangente en  $+\infty$  traduit l'existence d'une difficulté liée à la connaissance mathématique mobilisée : une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction en l'infini. Le passage de l'étape (14) à (15) prouve que l'étudiant donne l'intérêt du rôle du concept d'approximation locale d'une fonction en tant que nouvel outil lors de l'étude d'une fonction, en outre il a confusion entre son développement limité et sa représentation analytique en l'infini.

[(16)-(17)] Mobilisation de la formule (\*\*\*) du répertoire didactique du Supérieur d'une manière implicite afin de déterminer deux fonctions équivalentes. Mais, le choix de la fonction

équivalente est faux. Dans l'étape (16), cet étudiant a utilisé une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $+\infty$  lors du calcul du rapport de ces deux fonctions en 0. Ensuite, il a interprété ce résultat du calculus de limite pour déterminer une fonction équivalente à la fonction  $f$  au voisinage de ce réel. Ces étapes prouvent l'existence des *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* liée à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction.

En conclusion, l'analyse des raisonnements produits par cet étudiant traduisent l'existence des *erreurs d'ordre conceptuel et cognitif*. En effet, il ne parvient pas à mobiliser correctement le concept d'approximation locale d'une fonction en tant que nouvelle technique pour déterminer des fonctions équivalentes, ainsi que l'étude du comportement d'une fonction en  $(+\infty)$ .

### **II.3. Analyse de la question (3) liée à l'étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$**

Dans une première partie, nous conduisons une analyse quantitative et qualitative des raisonnements produits par les 24 étudiants en termes de connaissances et de savoirs mobilisés afin d'évaluer leur mode de raisonnement lors de suivre d'une manière autonome les procédures de résolution des questions précédentes.

Dans une deuxième étape, nous conduisons une analyse qualitative des raisonnements de quelques étudiants selon le modèle d'analyse du raisonnement développé dans le troisième chapitre de la partie théorique. Cette analyse des raisonnements nous permettra d'identifier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation des différents objets d'approximation locale d'une fonction.

#### **II.3.1. Analyse de la question 3**

Nous présentons le résumé de notre analyse des 24 copies des étudiants dans le tableau suivant :

		Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Types de techniques utilisées	Du Supérieur	4 %	17 %	30 %	33 %
	Du Secondaire	0 %	0 %	4 %	
	Du Secondaire et du Supérieur	0 %	0 %	4 %	
	Aucune	0 %	0 %	8 %	

**Tableau 7-8 : types de raisonnement et techniques mobilisés lors de l'étude du comportement de  $f$  en  $(-\infty)$**

Nous remarquons qu'un nombre assez-important des étudiants (environ 33 %) ne parviennent pas à trouver la technique convenable pour étudier le comportement de la fonction en  $(-\infty)$ . Ils sont confrontés à un problème d'agir d'une manière autonome pour répondre à cette

question. En effet, ils n'ont pas la capacité à mettre un lien entre l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  avec les questions précédentes et de son comportement en  $(+\infty)$ .

Dans cette partie, nous nous intéressons à la démarche suivie par les 67 % des étudiants lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

#### *Différents types de démarches des raisonnements*

Nous classons ces démarches du raisonnement selon trois catégories afin d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs.

Nous distinguons deux modes de démarches du raisonnement produit par certains étudiants.

- Détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  afin d'étudier son comportement : dans ce cas, il y a une action d'une manière autonome à refaire les mêmes étapes de démarches du raisonnement suivies dans les questions précédentes. L'étudiant a déterminé l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , puis il a étudié son comportement. Cette démarche de raisonnement prouve que cet étudiant donne l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ .
- Détermination d'une fonction équivalente de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  afin d'étudier son comportement : dans ce cas, il y a une rétroaction sur l'intérêt du concept des fonctions équivalentes pour l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ .
- Etude directe du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  : Dans ce cas, l'étudiant ne donne pas l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  ou les fonctions équivalentes.

A l'issue de cette classification des types de démarches de raisonnements, nous résumons les productions des étudiants dans ce tableau :

	Raisonnements formels complets	Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés	Absence de raisonnement
Étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$ par l'usage de son expression analytique	0 %	21 %	18 %	33 %
Étude du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$ par l'usage de son équivalente	0 %	0 %	12 %	
Étude directe du comportement de la fonction $f$ en $(-\infty)$	0 %	0 %	16 %	

**Tableau 7-9 : types de démarches suivies et natures des raisonnements lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$**

Dans la première démarche du raisonnement, nous remarquons qu'un nombre assez-important des étudiants (environ 21 %) ont suivi automatiquement la même démarche proposée



en questions (2-a) et (2-c) afin d'étudier le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Ces étudiants ont mobilisé une méthode du répertoire didactique du Supérieur par la mobilisation des connaissances antérieures disponibles. Ils ont donné l'intérêt de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  en tant que nouvelle technique afin d'étudier son comportement en  $(-\infty)$ .

En effet, ils se sont appuyés sur la représentation analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  pour donner l'équation d'une droite. Trois étudiants parmi eux ont étudié la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  par rapport à son asymptote oblique en interprétant le signe de troisième terme de son expression analytique en  $(-\infty)$ . Ces étudiants donnent l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique dans le champ de l'étude d'une fonction. Par contre, deux étudiants ont produit des raisonnements formellement incomplets lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . En effet, ils n'ont pas précisé un voisinage de 0 sur lequel les développements limités sont définis.

Par ailleurs, l'erreur commise, par environ 8 % des étudiants, lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  est due à la détermination d'une représentation analytique erronée de l'expression de cette fonction.

En revanche, environ 8 % des étudiants ont déterminé une représentation analytique de l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , mais ils sont confrontés à un problème lié à l'usage de cette technique. Ils ont défini une droite d'équation sous la forme de :  $y = a \frac{1}{x} + b$ . Au niveau Secondaire, l'objet de géométrie « droite » est défini par sa représentation algébrique connue sous la forme d'un polynôme de degré 1 :  $y = ax + b$  avec  $a$  et  $b$  sont deux réels et plus précisément dans le cas d'une asymptote oblique, ces deux réels sont différents de zéro.

Dans une deuxième démarche de raisonnement, certains étudiants (environ 12 %) ont donné l'intérêt de la notion des fonctions équivalentes en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ . Ces étudiants ont déterminé une fonction équivalente à  $f$  en  $(-\infty)$  afin d'étudier son comportement en  $(-\infty)$ . La production d'un raisonnement erroné résulte du fait que ces étudiants n'effectuent aucun moyen de justification et de contrôle des raisonnements.

Dans une troisième démarche, nous remarquons qu'un nombre assez-important des étudiants (environ 16 %) ont produit un raisonnement erroné lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ , soit par la détermination directe d'une équation de l'asymptote, soit par l'étude de la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  par rapport à son asymptote. Deux étudiants ont considéré que la fonction  $f$  admet le même comportement en

$(+\infty)$  et en  $(-\infty)$ . En effet, ces étudiants ont présenté une droite d'équation :  $y = 1 + x$  comme une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  en  $(-\infty)$ .

Par ailleurs, un étudiant a mobilisé ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Secondaire par l'utilisation de la méthode du calcul de limites. De ce fait, il néglige le rôle du développement asymptotique en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ .

### **Identification des différents types de difficultés rencontrées par les étudiants**

Nous pouvons classer et identifier la nature et l'origine des difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'étude du comportement d'une fonction  $f$  en  $(-\infty)$  selon deux catégories :

#### Difficultés liées au niveau des connaissances mobilisables (le développement limité)

D'une part, certains étudiants (environ 12 %) sont confrontés à un problème lié à l'appropriation du concept de développement limité. Deux d'entre eux ont donné directement une représentation analytique erronée de l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . L'utilisation directe d'une formule du répertoire didactique du Supérieur, sans effectuer aucun moyen de justification de leur raisonnement, amène à l'existence d'une difficulté d'approprier le concept du développement limité.

D'autre part, environ 4 % des étudiants sont confrontés à une difficulté liée à l'usage de l'expression analytique d'une fonction en  $(-\infty)$  en tant que nouvelle technique pour l'étude de son comportement asymptotique.

Un étudiant a présenté directement une équation erronée de l'asymptote.

#### Difficultés liées au niveau technique (des connaissances antérieures du Secondaire)

Un étudiant a mobilisé la formule du répertoire didactique du Supérieur afin de déterminer une représentation analytique de l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Il est conscient que ce concept mathématique est une nouvelle technique pour résoudre une question traitée au niveau Secondaire. Mais, ils donnent une représentation erronée de l'asymptote oblique :  $y = -\frac{1}{x} - 1$ .

Deux étudiants ont considéré que la fonction  $f$  admet le même comportement en  $(-\infty)$  que celui en  $(+\infty)$ .

Un étudiant a fait appel à une technique du répertoire didactique du Secondaire lors de la détermination de l'équation de l'asymptote oblique.

### II.3.2. Analyse qualitative de la question (3)

Dans cette partie, nous présentons l'analyse des raisonnements en identifiant ses natures, fonctions et formes, une analyse du répertoire didactique, de signe et de paradigmes de l'Analyse afin d'identifier les difficultés rencontrées par ces étudiants.

Nous avons distingué trois types des erreurs effectués par les étudiants lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Nous choisissons de conduire une analyse détaillée des copies de quatre étudiants que nous pensons pourrait nous aider à identifier la nature et l'origine de leurs erreurs. Dans une première étape, notre travail porte la focale sur l'analyse des raisonnements produits par des étudiants lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Ensuite, nous présentons une analyse détaillée des raisonnements produits par des étudiants confrontés à des difficultés liées au niveau de connaissances mobilisables du Supérieur et du Secondaire. Dans cette partie de thèse, nous présentons l'analyse des productions d'un étudiant et les autres sont fournies en annexe (Cf. Annexe 7-3).

#### *Productions d'un étudiant*

La majorité des étudiants sont confrontés à une difficulté de justification de leur raisonnement. Nous conduisons une analyse des productions de l'un de ces étudiants.

<p>(1) <math>f(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{x^2 - 1}</math>  (2) <math>f(x) = -\frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)</math>, en <math>-\infty</math>  (3) <math>f(x) - \left(-\frac{1}{x} - 1\right) \sim -\frac{3}{2x}</math>  (4) Or <math>-\frac{3}{2x} &gt; 0</math>  (5) Et <math>x \rightarrow -\infty</math>  (6) <math>C_f</math> est en dessous de la droite <math>\Delta : y = \frac{-1}{x} - 1</math></p>
--

**Figure 7-3 :** extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant agit d'une manière autonome à suivre les mêmes étapes de démarche de résolution présentées précédemment lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Dans une première étape, il présente l'expression analytique de cette fonction en  $(-\infty)$  dans le paradigme [AI]. Ensuite, dans le même paradigme, il donne sa fonction équivalente en  $(-\infty)$ . Finalement, il étudie la position relative de deux objets de géométrie (courbe et droite) dans les paradigmes [AC] et [AG].

#### ➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant mobilise le registre analytique lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction en  $(-\infty)$  et de son équivalent. Par ailleurs, il articule les registres analytique, algébrique et géométrique lors de l'étude de son comportement en  $(-\infty)$ .

#### ➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision de l'utilisation d'une autre représentation de la fonction  $f$ . Il n'a effectué aucun moyen de justification et de validation de son choix de cette expression analytique.

[(2)] Présentation de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Cet étudiant n'a réalisé aucun pas de raisonnement lors de la détermination de cette expression valide.

[(3)] Détermination de deux fonctions équivalentes en  $(-\infty)$ . L'étudiant a fait appel à la notion des fonctions équivalentes pour étudier la position relative de deux objets de géométrie (la courbe et la droite) en  $(-\infty)$ .

[(4)-(5)-(6)] Étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . L'étudiant a mobilisé ses connaissances antérieures du répertoire didactique du Supérieur lors cette étude.

L'étape (6) prouve l'existence d'un problème lié à ses connaissances antérieures du Secondaire. Il définit l'objet de géométrie (droite) par une représentation analytique qui diffère d'un polynôme de degré 1 (la définition donnée dès le Secondaire). Nous pouvons dire qu'il existe une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à la conceptualisation de l'équation d'une droite.

En conclusion, l'étudiant donne l'intérêt des concepts de développements limités et de fonctions équivalentes en tant qu'outil lors de l'étude du comportement asymptotique d'une fonction. En revanche, il est confronté à une difficulté liée au niveau de ses connaissances mobilisables du Secondaire.

### Conclusion du chapitre 7

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, nous avons conduit une analyse de notre corpus constitué des productions de 24 étudiants, en termes de raisonnements par la prise en compte de ses composantes, de niveau de la mise en fonctionnement des connaissances et des savoirs mobilisés, par une identification des registres et des paradigmes correspondants, ainsi que les dimensions sémantique et/ou syntaxique. Ces analyses, selon deux points de vue quantitatif et qualitatif, nous aident à identifier la nature et l'origine des erreurs liées à la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction.

L'analyse des raisonnements produits par ces étudiants en termes de savoirs et de connaissances mobilisés nous permet de les classer dans ce tableau :

	Raisonnements		Difficultés rencontrées	Paradigmes/ Registres
	Méthodes	Justifications et moyens de contrôle		
Q1-a	Développement limité usuels	-Détermination du domaine de définition de la fonction - Vérification la fonction est de classe $C^2$ au $V(0)$ pour prouver l'existence du développement limité	-Usage du développement limité de $(1 + X)^\alpha$ -Précision d'un voisinage pour lequel est défini développement limité -Précision de l'ordre du développement limité	[AI]/ $R_{AN}$

		- Vérification l'usage de développement limité de $(1 + X)^\alpha$	-Problème de justification de raisonnement -Problème lié au sens de la connaissance mathématique mobilisée (développement limité)	
Q1-b	Développement limité et formule de Taylor-Young	- Domaine de définition de la fonction - Vérification la fonction est de classe $C^2$ au $V(0)$ - Appel à la formule de Taylor-Young - Unicité de développement limité au $V(0)$	-Usage d'une méthode fautive -Présentation directe des résultats -Problème de justification de raisonnements -Problème d'interprétation de l'expression du développement limité	[AI]- [AC]/ $R_{ANA}$ - $R_{ALG}$
Q1-c-1	Développement limité au voisinage de 0	- Interprétation de l'expression développement limité - Interprétation géométrique de l'expression de développement limité	-Interprétation de l'expression développement limité -Usage direct du développement limité -Problème de justification de raisonnement	[AG]/ $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
	<i>Détermination d'une équation de la tangente à partir du nombre dérivé</i>	<i>-L'équation algébrique de la tangente</i>	<i>-Calcul numérique de <math>f(0)</math> et <math>f'(0)</math></i>	[AC]- [AG]/ $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
Q1-c-2	développement limité au voisinage de 0	-Formule de Taylor-Young - Interprétation des différents termes de l'approximation polynômiale	-Problème de justification de raisonnements -Usage direct du développement limité	[AI]- [AG]/ $R_{ALG}$ - $R_{GEO}$
Q2-a	- Méthode de changement de variable et développement limité au voisinage de 0 de la fonction $(1 + X)^\alpha$	- Explication du choix du changement de variable	- Changement de variable effectué à la fonction - Usage du développement limité usuel de $(1 + X)^\alpha$ -Prise en compte de changement de variable dans l'expression du reste -Élimination de l'expression du reste	[AC]- [AI]/ $R_{ANA}$
Q2-b	L'expression analytique de la fonction $f$ en $(+\infty)$	- Justification du calcul de limite - Rappel de la formule de détermination des fonctions équivalentes	-Problème de justification de raisonnement -Usage direct de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$	[AI]/ $R_{ANA}$
Q2-c	Interprétation de l'expression analytique de la fonction $f$ obtenue en (2-a)	- Interprétation des différents termes de l'expression analytique de la fonction $f$ en $(+\infty)$	- Usage direct de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - Problème de justification de raisonnement	[AG]- [AI]/ $R_{ANA}$ - $R_{GEO}$ - $R_{ALG}$
	Techniques du Secondaire pour l'étude du comportement d'une	- Calcul de limite	- Méthode de l'étude du comportement d'une fonction en l'infini - L'équation d'une asymptote	[AG]- [AI]/ $R_{ANA}$ -

	fonction par l'usage de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$ ou la fonction équivalente pour le calcul de limite		- Interprétation des résultats du calcul de limite	R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
Q3	L'expression analytique de la fonction $f$ en $(-\infty)$	- Interprétation des différents termes de l'expression analytique de la fonction $f$ en $(-\infty)$ - Vérification de l'existence d'une fonction équivalente à $f$ en $(-\infty)$	- Remplacement de $x$ par $(-x)$ dans l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - Calcul de l'opposé de l'expression de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - Usage de l'expression analytique de la fonction $f$ en $(+\infty)$ - L'expression de reste	[AI]- [AG]/ R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>
	Technique du secondaire par l'usage de l'expression de la fonction $f$ en $(-\infty)$ pour le calcul limite	- Rappel de la formule de l'étude du comportement d'une fonction en l'infini	- Calcul de limite - Interprétation des résultats du calcul de limite - Formule de l'étude du comportement d'une fonction enseignée au secondaire	[AI]- [AG]/ R <sub>NUM</sub> - R <sub>ANA</sub> - R <sub>GEO</sub> - R <sub>ALG</sub>

**Tableau 7-10 : présentation synthétique des raisonnements des étudiants et de leurs difficultés lors de la résolution des différentes questions de la situation mathématique**

Cette analyse des raisonnements, visant à évaluer les acquis des étudiants liés au domaine de l'étude d'une fonction et de son comportement asymptotique en  $+\infty/-\infty$ , nous permet de conclure que :

- La plupart d'entre eux s'inscrivent principalement leurs travaux dans le paradigme [AI] et plus rarement dans le paradigme [AC]. En effet, ils donnent l'intérêt des notions de la relation de comparaison de fonctions, développements limités et la formule de Taylor-Young en tant que nouvelle connaissance lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini.
- Un nombre assez-important des étudiants (71%) ont déterminé la représentation analytique du développement limité de la fonction au voisinage de 0.
- Aucun étudiant n'est confronté à un problème lié à l'usage de la propriété de la troncature du développement limité qui nous semble un « nœud » de leurs difficultés lors de l'usage des développements limités.
- Certains étudiants sont confrontés au problème lié à la dialectique technique/sens lors de l'appropriation des objets d'approximation locale d'une fonction dans le paradigme [AI]. Ils n'effectuent aucune justification et ils ne mobilisent aucun moyen de validation et de contrôle des différents pas de leurs raisonnements. Par contre, un tiers des étudiants justifient l'existence du développement limité au voisinage de 0 ou l'ordre de développement limité à réaliser.

- La plupart des étudiants ne sont pas confrontés aux difficultés lors de l'utilisation des fonctions équivalentes, développements limités et la formule de Taylor-Young en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction. En effet, ils utilisent des moyens du contrôle et de validation lors de la production des différents pas de leur raisonnement. D'une part, certains d'entre eux interprètent les différents termes du développement limité au voisinage de 0 afin d'étudier la fonction au voisinage de ce réel dans les paradigmes [AC] et [AG], ainsi que les expressions analytiques de la fonction  $f$  en  $+\infty$  pour étudier son comportement asymptotique dans le paradigme [AG]. D'autre part, ils font appel aux formules du répertoire didactique du Supérieur pour donner l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique soit lors de la détermination de deux fonctions équivalentes dans le paradigme [AI], soit lors de la détermination des valeurs des dérivées première et seconde en 0 dans le paradigme [AC], soit lors de l'étude d'une fonction dans le paradigme [AG].
- Un seul étudiant n'a pas la capacité à mobiliser le développement limité en tant que nouvelle technique lors de la détermination des valeurs des dérivées première et seconde de la fonction en 0, ainsi que son étude locale au voisinage de ce réel.
- Presque tous les étudiants considèrent l'unicité du développement limité d'une fonction au voisinage de 0 par l'usage de la formule de Taylor-Young pour déterminer les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction en 0. Par contre, l'utilisation automatique de cette propriété amène 29 % des étudiants à effectuer des erreurs liées aux signes lors de l'interprétation de l'expression du développement limité au voisinage de 0 pour déterminer ces valeurs.
- Un seul étudiant a mobilisé la méthode du Secondaire lors de la détermination d'une équation de la tangente.
- Un seul étudiant a mobilisé la méthode du répertoire didactique du Secondaire lors de l'étude du comportement asymptotique de la fonction en  $-\infty$ .
- La majorité des étudiants n'ont pas précisé le voisinage correspondant lors de la détermination des développements limités au voisinage de 0, ainsi que les expressions analytiques de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  et  $(-\infty)$ . En revanche, un seul étudiant a mentionné que le développement limité de cette fonction est définie au voisinage de 0.
- Certains étudiants rencontrent des difficultés liées à l'interprétation de la notion de voisinage soit en ne mentionnant pas l'expression du reste, soit en effectuant un changement de variable sans explicité le domaine de l'étude de cette fonction. Ces

erreurs traduisent l'existence des problèmes liés à l'étude d'une fonction au voisinage d'un point.

L'analyse de notre corpus nous permet d'identifier certaines erreurs liées à l'étude locale d'une fonction au voisinage de 0 et l'étude de son comportement asymptotique en  $+\infty$ . Ces erreurs commises résultent des problèmes liés soit à la conceptualisation du développement limité, soit à l'usage raisonné de cet objet mathématique dans le domaine de l'étude d'une fonction.

Nous remarquons que rares des étudiants qui ont recours à leurs connaissances antérieures du Secondaire lors de l'étude locale de la fonction et de son comportement en  $+\infty$ . Par contre, la plupart des étudiants sont confrontés à un problème lié au domaine de la topologie et de l'Analyse fonctionnelle. Ils ont produit des raisonnements formellement incomplets lors de la détermination du développement limité de la fonction au voisinage de 0 et de ses expressions analytiques en  $+\infty$  dans le paradigme [AI]. Ces étudiants ne donnent pas du sens à cette connaissance mathématique mobilisée par la négligence de voisinage pour lequel est défini un développement limité d'une fonction, ainsi que le contrôle et le pilotage des ordres à réaliser. Nous pouvons dire qu'il existe *un obstacle d'ordres topologique et fonctionnel* lié à la conceptualisation du concept de développement limité.

En conclusion, le modèle d'analyse des raisonnements produits par des étudiants confrontés à une situation mathématique dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice nous a permis d'identifier et de caractériser des obstacles pour s'appropriier et utiliser la notion d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) :

- Obstacle didactique : ce type d'obstacle est lié au contrat didactique. Dans ce cas, l'étudiant effectue des erreurs liées au changement de paradigme de [AI] au paradigme [AC] ou [AG]. Par exemple, il est confronté à une difficulté liée à l'utilisation de l'expression de la fonction en l'infini pour étudier son comportement asymptotique.
- Obstacle épistémologique : dans ce cas, les *erreurs d'ordre cognitif et conceptuel* relèvent d'un obstacle lié à la connaissance mathématique mobilisée. En effet, l'étudiant est en présence d'une difficulté inhérente liée au travail dans le paradigme [AI] lors de l'appropriation de la notion d'approximation locale d'une fonction, et notamment au niveau de couple : la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

Afin d'étudier les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants, nous conduisons une étude comparative de l'analyse des raisonnements produits par les étudiants de 2019 et ceux de 2020 qui sont confrontés à la première situation mathématique « classique » du devoir écrit dans le cadre d'une évaluation formative et



formatrice. Ainsi, nous conduisons une étude comparative des procédures et des raisonnements des étudiants n'ayant pas bénéficié de l'ingénierie didactique de développement (présentées d'une manière détaillée dans le chapitre 5) et de ceux ayant vécu l'expérimentation (développées précédemment) en vue d'examiner les effets de cette ingénierie sur leurs apprentissages. Nous présentons l'analyse de ces raisonnements en distinguant les différents types d'erreurs d'ordres cognitif, conceptuel, technique et calculatoire – développées dans le chapitre 5 - dans le tableau suivant :

		Raisonnements formellement incomplets	Raisonnements erronés		
Erreurs d'ordre		Cognitif et conceptuel	Technique	Calculatoire	
Détermination DL(0)	Etudiants (2019)	36%	62%	0%	9%
	Etudiants (2020)	67%	29%	0%	0%
Détermination de $f'(0)$ et $f''(0)$	Etudiants (2019)		25%	41%	0%
	Etudiants (2020)		4%	4%	25%
Détermination de l'équation de la tangente au point $(0, f(0))$	Etudiants (2019)		5%	16%	16%
	Etudiants (2020)		4%	8%	0%
Précision de la position relative de $C_f$ par rapport à sa tangente au point $(0, f(0))$	Etudiants (2019)		28%	11%	5%
	Etudiants (2020)		0%	0%	0%
Détermination de l'expression analytique de $f$ en $+\infty$	Etudiants (2019)	62%	20%	0%	0%
	Etudiants (2020)	17%	4%	0%	0%
Détermination d'une fonction équivalente à $f$ en $(+\infty)$	Etudiants (2019)	0%	12%	0%	0%
	Etudiants (2020)	0%	13%	0%	13%
Étude du comportement de $f$ en $+\infty$	Etudiants (2019)		16%	18%	0%
	Etudiants (2020)		34%	8%	0%
Détermination de l'expression analytique de $f$ en $-\infty$	Etudiants (2019)	7%	12%	0%	0%
	Etudiants (2020)	17%	8%	0%	0%
Étude du comportement de la fonction $f$ en $-\infty$	Etudiants (2019)		25%	28%	0%
	Etudiants (2020)		16%	8%	0%

**Tableau 7-11** : étude comparative de la nature et l'origine d'erreurs effectuées par les étudiants avant et après l'IDD lors de l'appropriation et de l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction

A l'issue d'une étude comparative, nous pouvons conclure que l'ingénierie didactique de développement articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres aide les étudiants à surmonter certaines erreurs. Par ailleurs, les étudiants de 2020 n'ont pas effectué des erreurs liées à la troncature et au calcul de produit des développements limités, ainsi qu'aux règles de la détermination de l'expression du reste.

Nous remarquons que les étudiants de 2020 perçoivent l'intérêt des notions de la relation comparative de fonctions, la formule de Taylor-Young et développement limité en tant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude d'une fonction. En effet, rares des étudiants de 2020 qui ont effectué des *erreurs d'ordre technique*. Par contre, la plupart des étudiants de 2019 ont recours aux méthodes enseignées au niveau Secondaire et ils négligent le rôle de ces objets d'approximation locale d'une fonction en tant que nouvel outil pour déterminer les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction en 0, ainsi que l'équation de la tangente et de sa position relative par rapport à sa courbe représentative en un point.

Nous pouvons conclure que la proposition des situations à dimension adidactique, mobilisant les différents registres graphique, géométrique, analytique, algébrique et numérique, a permis aux étudiants de dépasser certaines difficultés et de mieux comprendre le concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC). En effet, ces derniers mettent davantage en œuvre des procédures qui s'inscrivent dans le paradigme [AI]. D'une part, ils parviennent à articuler les paradigmes [AI], [AC] et [AG] lors de l'étude locale d'une fonction et de son comportement asymptotique en l'infini. D'autre part, ils mobilisent davantage les connaissances et les savoirs du Supérieur qui s'inscrivent dans la composante de leur répertoire didactique. On perçoit plus fréquemment dans leurs procédures, une articulation entre les dimensions sémantique et syntaxique attestant d'une compréhension fine du concept d'approximation locale d'une fonction. Cependant qu'une majorité d'entre eux est encore en difficulté pour produire le niveau de justification attendu et en conséquence, on constate de nombreux raisonnements formellement incomplets. Ceci résulte de la complexité de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC), ainsi que de la difficulté à articuler des connaissances et des savoirs qui couplent la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

## Conclusions générales et perspectives

Cette recherche, présentée dans la thèse, porte sur l'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année des classes préparatoires aux études d'ingénieurs en Tunisie de filière Physique-Chimie (PC). Certaines recherches précédentes, réalisées en didactique des mathématiques dans le domaine de l'étude d'une fonction, ont établi l'existence de difficultés rencontrées par les étudiants et inhérentes aux concepts fondamentaux de l'Analyse : la limite, la tangente, la fonction, l'intégrale, etc. Ces difficultés résultent principalement des changements de contrats didactiques qui relèvent de la transition Secondaire/Supérieur. Dans ce cadre, le passage d'une Analyse algébrisée à une Analyse formelle peut amener à l'existence de « conflits conceptuels », de « micro-ruptures » ou d'obstacles de différentes natures. Des études soulignent la possibilité que certaines conceptions des étudiants entrant à l'université constituent un obstacle à l'apprentissage des objets liés à l'étude d'une fonction.

Au début de l'Université, un savoir est introduit à partir de sa définition formelle et des théorèmes dont la validité est fondée sur des preuves. En effet, l'étude de l'existence et de l'unicité d'un objet mathématique n'est traitée formellement que dans le Supérieur. Dans cette perspective, nous avons conduit une recherche sur l'étude de la nature et de l'origine des difficultés, éprouvées par les étudiants, lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction qui, selon nous, peuvent résulter d'obstacles.

Par ailleurs, certains travaux de recherche liés au domaine d'approximation des fonctions ont montré l'influence des images dynamiques, obtenues par l'utilisation d'un logiciel de géométrie, sur l'apprentissage de la notion de convergence des séries de Taylor et de la notion de limite.

L'enseignement « classique » du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) prend fréquemment appui sur les définitions formelles des notions de fonctions équivalentes, de fonctions négligeables, de la formule de Taylor-Young et des développements limités afin de les utiliser autant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude d'une fonction. Cependant, cela signifie que l'étudiant est confronté aux difficultés liées à la complexité des notions étudiées précisément en relation avec le paradigme *Analyse Infinitésimale* [AI] pour passer à l'étude d'une fonction (calcul de limites qui relèvent des formes indéterminées, valeurs des dérivées successives d'une fonction, tangente, etc.) par un

travail qui s'inscrit dans les paradigmes *Analyse Calculatoire* [AC] et *Analyse Arithmetico-géométrique* [AG].

Pour ces raisons, nous avons décidé de conduire une expérimentation afin de répondre à notre première question de recherche :

*Est-il possible d'organiser un projet d'enseignement du concept de développement limité autour d'une problématique qui rende compte de l'intérêt de sa représentation graphique par l'usage d'un logiciel dynamique de la géométrie afin de l'introduire en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction ?*

Afin de produire des éléments de réponses à notre questionnement, nous avons mis en place une ingénierie didactique de développement en collaboration avec l'enseignante de la classe de première année (PC). Les cadres et les outils théoriques développés dans le chapitre 3, afin de conduire une analyse de cette expérimentation, nous ont amenés à rédiger une deuxième question de recherche :

La construction et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique de développement permettent-elles de surmonter les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction au début du cycle des classes préparatoires ?

### **Les apports de recherche**

La construction et l'élaboration d'une ingénierie didactique de développement a nécessité la prise en considération des trois études complémentaires liées au concept d'approximation locale d'une fonction : une étude historico-épistémologique, une étude institutionnelle et une étude des « analyses préalables » des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les étudiants.

L'étude historico-épistémologique que nous avons effectuée est une étude de la genèse historique des notions étroitement liées au concept d'approximation locale d'une fonction que nous avons développée dans le chapitre 2. Notre travail s'est focalisé sur l'interprétation des méthodes développées par certains mathématiciens physiciens dès l'Antiquité, lors de la résolution des problèmes, liés à la genèse historique des notions d'approximation locale d'une fonction, en vue d'identifier les obstacles et à mettre en évidence les différents paradigmes correspondants. Nous avons montré que la genèse historique des notions de tangente à une courbe, d'équivalence de fonctions, des « développements en séries infinies », des « développements en séries de Taylor » de la fonction, la limite d'une fonction et de développement asymptotique est due à l'usage et à l'analyse de ses représentations graphique, géométrique, analytique et algébrique. Nous remarquons que certains mathématiciens ont

produit des raisonnements, dont la validité dépend de l'évolution des connaissances mathématiques dans la société savante, et que ses évolutions successives se traduisent par l'existence des obstacles épistémologiques en lien avec l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction.

D'un point de vue plus global, ces obstacles à l'apprentissage de ce concept peuvent résulter :

- soit d'une rupture d'ordre épistémologique par le changement du paradigme « cinématique » à un paradigme « géométrique » et ensuite « analytique » ;
- soit d'une rupture d'ordre cognitif liée à la conceptualisation des notions d'approximation locale d'une fonction ;
- soit des difficultés liées à l'articulation de connaissances et de savoirs relatifs à la topologie et à l'analyse fonctionnelle.

De plus, nous avons souligné l'intérêt de l'approche graphique lors de la genèse historique du concept d'approximation locale d'une fonction. En effet, les mathématiciens et physiciens ont interprété des illustrations graphiques et des figures géométriques afin de déterminer les représentations algébriques et analytiques des objets d'approximation locale d'une fonction transcendante ou algébrique.

L'étude institutionnelle du processus de la transposition didactique externe des notions de la relation de comparaison de fonctions, la formule de Taylor-Young et développements limités est développée dans le chapitre 4. Cette étude est réalisée afin de répondre à notre question de recherche :

L'institutionnalisation prend-elle en considération l'articulation des registres analytique, algébrique, graphique et géométrique lors de l'introduction des nouvelles notions d'approximation locale d'une fonction dans le paradigme [AI] ?

Les recommandations des programmes invitent les enseignants à :

- d'une part, aider les élèves à la rédaction autonome et l'explication orale d'un raisonnement mathématique en articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres analytique, algébrique, graphique, numérique et géométrique ;
- d'autre part, introduire une nouvelle notion à partir de l'usage de ses différentes représentations et la prise en considération des connaissances antérieures de l'étudiant.

Par contre, l'approche graphique n'était pas initialement convoquée par l'enseignante de classes préparatoires avec qui nous avons ensuite conduit la recherche de nature collaborative. En outre, les élèves sont habitués à construire des représentations graphiques lors de l'introduction d'une nouvelle notion au niveau Secondaire.

L'étude didactique des difficultés éprouvées par les étudiants lors de l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) est développée dans le chapitre 5. Les analyses préalables ont été conduites en avril 2019 afin d'identifier la nature et l'origine de leurs erreurs effectuées lors de la confrontation à des situations mathématiques « classiques » liées au domaine de l'étude d'une fonction suite à l'enseignement des chapitres « Analyse asymptotique », « Intégrations » et « Séries numériques ». Nous avons réalisé une étude des productions des étudiants dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice en adoptant le modèle d'analyse des raisonnements présenté de façon détaillée dans le chapitre 3. En effet, nous avons conduit une analyse de ces raisonnements par la prise en compte de ses composantes (fonction, nature et sémiotique), selon le modèle de Bloch et Gibel (2011) et Gibel (2018), du niveau de la mise en fonctionnement des connaissances et des savoirs mobilisés, par une identification des niveaux des registres de représentation sémiotique et des paradigmes correspondants et les dimensions sémantique et syntaxique en vue de trouver des éléments de réponse aux questions suivantes :

- *Quelles sont les principales difficultés éprouvées par des étudiants en première année (PC) en rapport avec les objets d'approximation locale d'une fonction lors de la confrontation à des situations « classiques » ?*
- *La nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors de l'usage et l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction, en première année (PC), résultent-elles d'obstacles ?*
- *L'analyse des productions des étudiants en termes de raisonnement permet-elle d'étudier ces erreurs ?*

L'analyse des raisonnements produits par les étudiants, visant à évaluer leurs acquis liés au domaine de l'étude d'une fonction, nous a permis de conclure que :

- les travaux de la majorité d'entre eux s'inscrivent principalement dans le paradigme [AC] et beaucoup plus rarement dans le paradigme [AI] ;
- la plupart des étudiants sont confrontés à un problème qui traduit leurs difficultés à raisonner en articulant conjointement les dimensions sémantique et syntaxique.

Cette analyse nous a permis d'identifier l'origine et la nature des principales erreurs effectuées par des étudiants lors de la résolution des problèmes dans le domaine de l'étude d'approximation locale d'une fonction selon trois catégories : des erreurs d'ordre cognitif et conceptuel, des erreurs d'ordre technique et des erreurs d'ordre calculatoire. Nous pouvons conclure que ces erreurs résultent :

- soit du fait que les étudiants parviennent difficilement à réaliser leur travail mathématique en prenant en compte les spécificités du paradigme [AI] : l'usage automatique des méthodes et des formules du répertoire didactique du Supérieur est vraiment un problème lié à la compréhension d'un objet mathématique. Dans notre cas, le concept d'approximation locale d'une fonction n'a de sens que par la précision du voisinage et des conditions de son usage, notamment le voisinage d'un réel et par la capacité d'identifier l'ordre du développement limité de la fonction à réaliser. Nous pouvons dire qu'il existe un obstacle *d'ordres topologique et fonctionnel* lié à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction ;
- soit au changement de paradigme lors de l'usage du développement limité en vue de réaliser l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un réel par le passage du paradigme [AG] au paradigme [AC]. L'usage des méthodes enseignées au Secondaire traduit l'existence d'une rupture conceptuelle qui s'opère entre le Secondaire et le Supérieur. Il y a un véritable *obstacle d'ordre conceptuel* pour s'approprier la notion d'approximation locale d'une fonction.

Nous pouvons identifier et classer des obstacles relatifs à l'usage, en situation, du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) selon deux catégories :

- Obstacle didactique : l'étudiant est confronté à des difficultés liées au contrat didactique. D'une part, le fait que l'enseignante ait décidé de privilégier les activités dans les registres analytique, algébrique et géométrique au détriment du registre graphique. D'autre part, nous remarquons qu'il existe des erreurs qui relèvent d'un *obstacle d'ordre culturel*, par le recours des étudiants aux techniques vues au Secondaire lors de l'étude locale d'une fonction.
- Obstacle épistémologique : l'étudiant est confronté au problème lié au travail mathématique dans le paradigme [AI] lors de l'appropriation de la notion d'approximation locale d'une fonction, et notamment au niveau de couple : la topologie et l'analyse fonctionnelle. Ce type *d'obstacle d'ordre cognitif* est lié à la connaissance mathématique mobilisée.

Notre travail de recherche porte la focale sur l'étude de l'évolution de la connaissance de l'étudiant lors de sa confrontation à des situations à dimension adidactique.

Le travail spécifique relatif à la construction, à l'élaboration et à la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement, par l'intégration de deux situations à dimension adidactique dans la deuxième et la troisième séance de l'enseignement du chapitre « Analyse

asymptotique », est développé dans le chapitre 6. Les études menées dans les chapitres 2, 4 et 5, ainsi que certaines recherches présentées dans le chapitre 1 constituent des points d'appui pour la construction de ces deux situations à dimension adidactique dans le cadre d'un travail collaboratif avec l'enseignante de la classe.

Nous avons mis en œuvre, en janvier 2020, une ingénierie didactique de développement afin de répondre à notre question de recherche :

Est-il possible d'élaborer et de mettre en œuvre des situations dévolues aux étudiants dans le cadre d'un projet d'enseignement du concept de développement limité autour d'une problématique qui rende compte de l'articulation de ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) afin d'accéder aux raisons de savoir à travers l'introduction de cet objet mathématique en tant que nouvel outil d'approximation locale d'une fonction ?

Ce projet d'enseignement-apprentissage repose sur les hypothèses suivantes rédigées dans le chapitre 3 :

Hypothèse 2 : l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés aux notions d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) contribuent à :

- étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants lors la conceptualisation de ces objets ;
- permettre aux étudiants de surmonter ces erreurs.

Hypothèse 3 : une ingénierie didactique de développement articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres aide *a priori* les étudiants à surmonter leurs difficultés liées à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Hypothèse 4 : les obstacles liés à l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant un usage raisonné des représentations graphiques.

Afin d'étudier la pertinence des hypothèses de recherche et de produire des éléments de réponses à nos questions de recherche, nous avons choisi d'analyser précisément les effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants. Pour ces raisons, nous avons proposé aux étudiants un devoir écrit dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice. L'analyse des raisonnements produits par les étudiants, ayant pris part à l'expérimentation de la mise en œuvre de l'ingénierie didactique de développement, est développée dans le chapitre 7 en vue de



conduire une étude comparative des erreurs effectuées par les étudiants lors de la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction en termes d'obstacles.

Dans les sections suivantes, nous allons préciser les éléments de réponses obtenus aux questions de recherche ainsi que les questions qui demeurent des questions ouvertes auxquelles cette étude n'a pas permis d'apporter des réponses.

### *Accès au sens du savoir « approximation locale d'une fonction »*

La construction de l'ingénierie didactique de développement a reposé sur une collaboration étroite avec l'enseignante, Rajia Slim. Le rôle de l'enseignante était très spécifique en classe. Elle a pris part à l'élaboration du chapitre « Analyse asymptotique » qui intègre les deux situations à dimension adidactique offrant aux étudiants la possibilité :

- de mettre en œuvre leurs connaissances et leurs savoirs par leurs actions sur le milieu ;
- de mobiliser et réorganiser des connaissances antérieures de l'étudiant ;
- d'introduire les définitions formelles du concept d'approximation locale d'une fonction en faisant le lien entre les connaissances antérieures de l'étudiant et le nouveau concept mathématique ;
- de mobiliser les différents registres graphique, algébrique, analytique, numérique et géométrique ;
- d'accéder au sens du savoir : développement limité et la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

L'ingénierie didactique de développement a permis de construire un projet d'enseignement-apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction par l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans les différents registres de représentation sémiotique. L'expérimentation aide les étudiants à percevoir qu'une fonction  $n$ -fois dérivable au voisinage d'un point peut être « approximée » par un polynôme, et sur la manière de produire l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point et la généralisation de ce résultat. Cette approximation se fait tout d'abord par une fonction polynôme de degré 1, puis par une fonction polynôme de degré 2, obtenue en ajoutant un terme à la précédente fonction, puis un travail sur la fonction polynôme de degré 3 qui est obtenue en ajoutant de nouveau terme de degré 3. Ensuite, elle explicite une manière d'établir une approximation polynômiale d'une fonction de classe  $C^n$  par la détermination des valeurs de ses dérivées successives en un point donné. A partir de ces expressions, l'enseignante a introduit la formule de Taylor-Young. En effet, nous pouvons approcher de plus en plus près la fonction étudiée autrement dit avec une précision croissante liée au degré du polynôme (qui approxime la fonction étudiée).

Les étudiants ont pu déterminer par eux-mêmes les approximations locales d'une fonction à l'ordre 1, 2 et 3 à partir du processus du calculus de la limite du rapport des fonctions et à trouver les développements limités déduits de la formule de Taylor-Young de l'ordre 1 jusqu'à l'ordre  $n$ . De ce fait, au lieu de se concentrer initialement sur le processus formel de la conceptualisation de la notion de développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction au voisinage d'un réel, il devient possible de se cibler précisément les représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales successives (d'ordre 1, 2 et 3) en tant qu'objet pour visualiser l'amélioration de l'approximation polynômiale lorsque l'ordre augmente ; ainsi l'erreur d'approximation diminue et l'approximation sera « meilleure » au voisinage de ce réel.

Les changements dynamiques des intervalles centrés sur des différents points (voisinages d'un réel) par l'utilisation des zooms du logiciel Geogebra permettent aux étudiants d'accéder au sens d'approcher une fonction transcendante ou algébrique par une fonction polynômiale au voisinage d'un réel bien déterminé et à un ordre précis. L'enseignante a utilisé ce logiciel dynamique de la géométrie pour la construction graphique soit d'une fonction et de ses approximations polynômiales d'ordre 1, 2 et 3 au voisinage de 0 lors de la proposition de la situation 1 dans la première séance de l'expérimentation, soit d'une fonction et de ses approximations polynômiales d'ordre 4 au voisinage de deux différents réels lors du « cours dialogué » proposé dans la deuxième séance de l'expérimentation, soit d'une fonction et de ses approximations polynômiales d'ordre 1 et 2 au voisinage de 0 lors de la proposition de la situation 2. Cet aspect articulant les approches « dynamique » et graphique a offert aux étudiants la possibilité d'accéder aux raisons des savoirs : développement limité et la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel.

A l'aide des animations présentées par l'enseignante en utilisant des zooms (par le choix des voisinages d'un réel), les étudiants ont la capacité d'interpréter ce qu'ils ont visualisé à partir des représentations graphiques « dynamiques ». La finalité de la séquence était de permettre aux étudiants de comprendre la dimension sémantique du concept d'approximation locale d'une fonction par l'interprétation des images graphiques « dynamiques » et de traduire ces représentations graphiques en langage analytique afin de déterminer la meilleure approximation de cette fonction au voisinage d'un réel. Les étudiants ont produit des pas de raisonnement de nature sémantique par la mesure des écarts entre les représentations graphiques par une approche algébrique s'appuyant sur le calcul des limites.

L'articulation des approches graphique-dynamique et graphique, associe la perception visuelle des approximations locales d'une fonction avec une approche algébrique issue de l'interprétation des résultats du calculus de limite de fonctions, a aidé les étudiants à aboutir à

la définition formelle du concept de développement limité avec toute la complexité du travail dans le paradigme [Analyse Infinitésimale] qui couple la topologie et l'Analyse fonctionnelle.

A l'issue de la situation 1 (situation à dimension adidactique), les étudiants ont constaté que plus le degré de l'approximation polynômiale augmente, plus l'erreur diminue, puisque l'approximation devient meilleure, comme le souligne Kidron et Zehavi (2002). La notion de développement limité est exploitée par la coordination de ses représentations graphiques « dynamiques », algébriques et analytiques lors de son introduction par les étudiants. Nous pouvons considérer la détermination des approximations polynômiales d'une fonction comme des processus dans lesquels on ajoute des termes en augmentant le degré du polynôme afin de produire un nouveau polynôme qui est une meilleure approximation de cette fonction au voisinage d'un réel, (Martin, 2012). La compréhension conceptuelle de la notion de développement limité déduite de la formule de Taylor-Young est obtenue en approximant une fonction aux moyens des polynômes d'une manière successive de degré 1, 2, 3, etc.

Dans notre travail, l'expérimentation combinant la visualisation des représentations graphiques « dynamiques » et les raisonnements mathématiques, produits par les étudiants par la mobilisation de leurs connaissances antérieures sur l'étude d'une fonction, ont pu contribuer à une approche analytique permettant l'introduction de la définition formelle du concept de développement limité dans le paradigme Analyse Infinitésimale.

L'ingénierie didactique de développement a rendu possible une construction successive des approximations polynômiales d'une fonction. Elle a également permis, au sein des groupes et en classe entière, de générer des discussions, d'amener des échanges et de faire percevoir aux étudiants la richesse de l'articulation des différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) du concept d'approximation locale d'une fonction pour poser des raisonnements articulant les dimensions sémantique et syntaxique.

La mise en œuvre de cette ingénierie a permis d'élaborer et de mettre en œuvre des situations dévolues aux étudiants dans le cadre d'un projet d'enseignement du concept de développement limité autour d'une problématique qui rend compte de l'articulation de ses différentes représentations (analytique, algébrique, graphique et géométrique) afin d'accéder aux raisons de savoir à travers l'introduction de cet objet mathématique en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction. Cette expérimentation a aussi offert aux étudiants la possibilité de se positionner dans les différents paradigmes de l'Analyse standard ([AI], [AC] et [AG]) en formulant les transformations des expressions analytique et algébrique mobilisées lors de la transition Secondaire/Supérieur.

A l'issue de cette expérimentation, nous rejoignons le point de vue d'Alcock et de Simpson (2015) : dans la pensée mathématique, les images visuelles ou représentations graphiques dessinées sur papier (dans le cas de la situation 2) ou créées à l'aide d'un logiciel dynamique de la géométrie (dans le cas de la situation 1) sont importantes. En effet, notre travail de recherche montre l'importance de la visualisation des figures géométriques par la prise en compte des relations entre les représentations graphiques et formelles afin d'introduire le concept d'approximation locale d'une fonction. Nous pouvons dire que la visualisation des représentations graphiques des objets de l'Analyse est essentielle dans leurs enseignements au début de l'Université afin de permettre d'introduire leurs définitions formelles.

L'évolution de la construction du nouveau concept « développement limité » s'effectue par les étudiants eux-mêmes à partir d'un processus mobilisant les différents registres algébrique, analytique, numérique, géométrique et graphique :

- L'expression du reste du développement limité est définie soit par l'interprétation du calcul de limite de fonctions en utilisant les fonctions négligeables (situation 1), soit par le calcul de limite d'un terme d'une fonction (situation 2), soit par l'interprétation des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales au voisinage d'un réel (situation 2).
- La partie régulière du développement limité est définie soit par des représentations algébriques en utilisant les symboles des dérivées successives d'une fonction en un réel (situation 1), soit par l'interprétation des représentations graphiques d'une fonction et de ses approximations polynômiales (situation 2).
- Les approximations locales d'une fonction d'ordre 1, 2 et 3 sont déterminées via ses approximations polynômiales successives de degré 1, 2 et 3.

### *Modèle d'analyse du raisonnement*

L'ingénierie didactique de développement a offert aux étudiants un cadre permettant de produire des raisonnements variés du point de vue de leur nature et forme, et recouvrant de multiples fonctions, de confronter des procédures et ainsi de percevoir l'articulation des différents registres comme facilitatrice notamment du point de vue du contrôle sémantique.

L'expérience d'apprentissage, inhérente à la situation 1, a été la première rencontre des étudiants avec la notion d'approximation à partir du concept « la meilleure approximation d'une fonction au voisinage d'un réel ». Cette expérimentation a atteint son but : offrir la possibilité aux étudiants de produire un raisonnement de nature sémantique par l'interprétation des représentations graphiques « dynamiques », ensuite un raisonnement articulant les dimensions

sémantique et syntaxique par des interprétations du calculus de limite afin d'introduire la formule de Taylor-Young.

L'adaptation du modèle d'analyse du raisonnement introduit par (Bloch et Gibel, 2011) et (Gibel, 2018) et développé dans notre travail de recherche (chapitre 3 de la partie théorique) a permis d'étudier les raisonnements produits par des étudiants confrontés à des situations réelles en classe par la mise en considération du point de vue du fonctionnement des connaissances et des savoirs mobilisés par leur actions sur les différents milieux, du point de vue de conceptions, du point de vue logique et du point de vue des signes. Ce modèle a permis de visualiser très précisément les connaissances et les savoirs mobilisés.

Nous pouvons dire que le modèle d'analyse des raisonnements a joué un rôle essentiel dans l'élaboration de l'ingénierie didactique de développement, dans l'identification des conceptions des étudiants (erronées ou valides), des formes et des fonctions des raisonnements.

Ce modèle d'analyse du raisonnement a permis d'identifier et de caractériser la nature et l'origine des erreurs inhérentes à l'appropriation et l'usage raisonné du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC) :

- Obstacle didactique : cet obstacle est lié aux choix didactiques de l'enseignement ou contrat didactique. Par exemple, l'enseignante, dans son cours, caractérise la fonction  $\varepsilon(x)$  juste par son calcul de la limite au voisinage de 0 ( $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ ).

- Obstacle épistémologique : c'est un *obstacle d'ordres fonctionnel et topologique*. Dans ce cas, l'étudiant est confronté au problème lié au domaine de l'analyse fonctionnelle et de la topologie. Par exemple, il ne précise pas le voisinage de 0 lors de l'appropriation du concept de fonctions négligeables dans le paradigme [AI]. Par ailleurs, l'étudiant fait usage automatique des techniques et des formules du répertoire didactique sans comprendre le sens de la connaissance mathématique mobilisée. Il néglige le sens de la notion des fonctions négligeables.

### ***Les effets de l'ingénierie didactique de développement sur les apprentissages des étudiants***

La proposition d'un devoir sur table à toute la classe de première année (PC), dans le cadre d'une évaluation formative et formatrice en 2019 et en 2020, suite à l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique », nous a permis d'analyser les effets de cette ingénierie sur les apprentissages des étudiants. Nous remarquons que les étudiants de 2020 (ayant participé à l'expérimentation) perçoivent l'intérêt des notions d'approximation locale d'une fonction en tant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude d'une fonction. Par contre, la plupart des étudiants de 2019 ont recours à leurs connaissances antérieures du Secondaire lors de l'étude

locale d'une fonction et de son comportement en  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Par ailleurs, les étudiants de 2020 n'ont pas effectué des erreurs liées soit à la troncature du développement limité qui est un « nœud » des difficultés des étudiants lors de l'appropriation de ce concept mathématique, soit à l'expression du reste, soit au calcul du produit des développements limités.

L'ingénierie didactique de développement articulant les dimensions sémantique et syntaxique par la mobilisation des différents registres (analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique) aide les étudiants à surmonter certaines erreurs liées à la conceptualisation des objets d'approximation locale d'une fonction. Une évaluation formative et formatrice, à l'issue de cette ingénierie, a permis mieux d'examiner leurs erreurs effectuées lors de l'appropriation et l'usage du concept d'approximation locale d'une fonction en première année (PC).

Nous pouvons dire que les obstacles liés à l'appropriation et l'usage raisonné des objets d'approximation locale d'une fonction résultent en grande partie de l'absence des situations mathématiques dévolues aux étudiants nécessitant un usage raisonné de ses représentations graphiques.

En conclusion, l'identification et la caractérisation des obstacles épistémologiques liés aux notions d'approximation locale d'une fonction contribuent à étudier la nature et l'origine des erreurs effectuées par les étudiants, ainsi qu'à permettre aux étudiants de surmonter certaines erreurs concernant la conceptualisation de ces objets en première année (PC).

### **Contraintes et limites de recherche**

L'expérimentation a été proposée aux deux classes de première année (PC), cependant nous avons conduit une analyse didactique détaillée, de nature qualitative et quantitative, uniquement dans une classe (PC1).

En tant que didacticiens, nous sommes soumis à des contraintes temporelles et matérielles liées à l'institution. D'une part, au niveau Supérieur, les étudiants n'ont pas l'habitude de travailler avec des outils de la technologie d'informatique dans le cours de mathématiques. Pour ceci, le logiciel dynamique Geogebra est utilisé par l'enseignante, les étudiants n'ont pas la possibilité de construire eux-mêmes les représentations graphiques, ainsi que de choisir des intervalles « voisinages d'un réel » avec la fonction Zoom de ce logiciel. D'autre part, nous avons certes pu intégrer les deux situations à dimension adidactique dans l'enseignement du chapitre « Analyse asymptotique » mais, concernant le temps de recherche octroyé aux étudiants, nous avons un petit point d'ambiguïté. Il y a eu aussi des temps de formulation, mais les temps de débat lors de la phase de la mise en commun et de validation n'ont pas été aussi

longs que nous l'aurions souhaité, compte-tenu de cette contrainte temporelle qui est très forte en classes préparatoires et qui nous amène à travailler de cette façon. En effet, la phase de validation de la situation 2 se transforme en un « cour dialogué » durant lequel l'enseignante présente la correction des différentes questions au tableau en demandant aux étudiants de donner oralement les procédures. Malgré ces contraintes du temps et de matériels, nous avons cependant constaté et analysé avec beaucoup de précision, la variété, la richesse et les multiples fonctions des raisonnements qui ont été produits par les étudiants. Nous avons atteint notre objectif : la capacité des étudiants à formuler des raisonnements et à les justifier.

### **Perspectives**

Cette recherche a conduit à accorder une place importante à l'étude du concept de « limite » d'une fonction qui est un élément clé afin d'accéder au sens du concept d'approximation locale d'une fonction.

L'ingénierie didactique de développement a permis l'adaptation des situations produites aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants. Cette étude pourra ainsi jouer un rôle dans la formation des enseignants du point de vue de la construction des connaissances, de l'importance de contrat didactique et de l'ouverture sur la formation des enseignants par l'usage des représentations graphiques par un travail dans l'environnement de la technologie lors de l'enseignement des nouvelles notions au niveau Supérieur.

Des questions restent ouvertes et peuvent être d'objet d'un prolongement de l'étude dans le domaine de réflexion didactique. Notre population est constituée des étudiants de filière Physique-Chimie, cette expérimentation de l'enseignement du concept d'approximation locale d'une fonction va les aider à manipuler ce concept mathématique en physique (mécanique, optique, etc.).

À l'issue de ce premier cycle d'ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian, 2011), nous envisageons de surmonter ces contraintes, en s'appuyant sur les conclusions tirées, une deuxième expérimentation permettant l'usage du logiciel Geogebra par les étudiants en vue d'accéder au sens du savoir « approximation locale d'une fonction » dans le paradigme Analyse Infinitésimale par l'articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique en mobilisant ses différentes représentations analytique, algébrique, graphique et géométrique.

## BIBLIOGRAPHIE

- Alcock, L. & Simpson, A. (2004). « Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role ». *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32.
- Alcock, L. & Simpson, A. (2005). « Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role ». *Educational Studies in Mathematics* 58(1), 77-100.
- Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas des fractions*. [Thèse de doctorat. Université Paris 7].
- Allard, C. & Masselot, P. (2016). De la ressource à la séance de classe. Institutionnalisation : tâche impossible ? In *Actes du 43e colloque de la COPIRELEM (219-242), enseignement des mathématiques et formation des maitres aujourd'hui : quelles orientations ? Quels enjeux ?*, Le Puy en Velay juin 2016.
- Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (5), 1-45.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (5), 1-22.
- Artigue, M. (1991). Introduction au débat sur les enseignements de didactique en IUFM. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S6), 67-70.
- Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 207-220). Springer, Dordrecht.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8(1), 59-72.
- Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, 54, 23-39.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : VRIN.
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In *Séminaire de l'équipe DidaTech, IMAG* (pp. 219-244). IMAG Grenoble.
- Balacheff, N. & Margolinas, C. (2003). CKç Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In *XII école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 1-32). La Pensée Sauvage éditions.



- Balhan, K., Krysinska, M. et Schneider, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons. *Repères IREM*, 101, 5-32.
- Barbin E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. Paris : IREM.
- Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.). *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, pp.53–58). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Bardini, C. & Pierce, R. (2018). Symbols: pillars of the secondary-university bridge? In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, S. Goodchild, & N.-M. Hogstad (Eds) *Proceedings of INDRUM 2018*, (pp. 478-486), Kristiansand: Norway.
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. [Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot-Paris VII].
- Baumann, P. (2004) *Histoire des mathématiques DEUG MIAS* [En ligne]. UFR de mathématique et d'informatique — Université Louis Pasteur 7, rue René Descartes — 67084 Strasbourg Cedex. Disponible sur <http://www-irma.u-strasbg.fr/~baumann/polyh.pdf>.
- Belhaj Amor, F. (2016). *Enseignement de l'objet développement limité au début de l'Université entre syntaxe et sémantique : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs*. [Mémoire de Master. Université virtuelle de Tunis]. En ligne : <https://www.researchgate.net/publication/341194538> Memoire de master Belhaj Amor
- Belhaj Amor, F. (2018). « Le processus de transposition didactique de l'objet développement limité ». In Abboud. M. (éds). *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines*. EMF 620-623. Genevilliers, France.
- Belhaj Amor, F (2019). « L'articulation des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique dans le processus de transposition didactique de l'objet développement limité en début de l'Université ». In Eric Roditi (Eds.). *XXème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Paris : ARDM. La Pensée Sauvage.
- Berger, M. (2004). L'échec de la protection de l'enfance. *Dans Enfance & Psy* 1(25), 131-134.
- Bessot, A. (2011). « L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations ». In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. XVe école d'été de didactique des mathématiques, (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193. <https://revue-rdm.com/1999/l-articulation-du-travail/>
- Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. [Thèse de doctorat. Université Bordeaux 1].
- Bloch, I. (2002). « Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations ». In Dorier, J.-L. et al (Eds). *XIème école d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 125-140). Grenoble : La pensée Sauvage.
- Bloch, I. (2005). Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe. *Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ?*
- Bloch, I. (2006). Quelques apports de la théorie des situations a la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.
- Bloch, I. (2012). « Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique: l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse ». In Dorier J-L et Coutat S (Edes). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. EMF 2012* (pp. 392-403), Université de Genève, Suisse. Récupéré de <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Bloch, I. & Ghedamsi, I. (2005). Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires. *Petit x*, 69, 7-30.
- Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : études des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(1), 191-227.
- Bloch, I., & Gibel, P. (2019). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 24, 183-205. <http://journals.openedition.org/adsc/648>.
- Bloch, I. & Gibel, P. (2020). « Analyse des effets d'un dispositif innovant sur l'évolution des représentations des étudiants en première année de licence de mathématiques ». In Hausberger, M. Bosch & F. Chelloughi (Eds.). *Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. INDRUM2020, 288-297, Bizerte, Tunisia.

- Bloch, I. & Gibel, P. (2022). Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'Université. *Épjournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*.
- Bourbaki, N. (1974). Éléments d'histoire des mathématiques [1969], nouvelle édition revue, corrigée et augmentée. *Collection histoire de la pensée, IV, Hermann : Paris*.
- Boutroux, P. (1920). *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*. F. Alcan.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'Ecole Elémentaire*, 428-442.
- Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, 41, 177-182.
- Brousseau, G. (1982). Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, 39-60.
- Brousseau, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple : géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 45, 183-226.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. [Thèse de doctorat. Université Sciences et Technologies Bordeaux I].
- Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ. Montréal.*, (23), 14-24.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz N., Garnier C. (Eds.). *Construction des savoirs*. (pp.41-63). Montréal : Editions Agence d'ARC.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(9.3), 309-336.
- Brousseau, G. (1997). Théorie des situations didactiques et ses applications. *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal-juin*.
- Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage 1998. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, pp.115-160.
- Brousseau, G. (1999). Education et didactique des mathématiques. In *Educacion y didactica de las matematicas*.
- Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 30 (2), 241-277.

- Brousseau, G. (2010). Glossaire V5, en ligne : [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf).
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques, Presses universitaires de Rennes.
- Brousseau, G. (2012). *Des dispositifs piagétien... aux situations didactiques*. (No. 6-2, pp. 103-129). Presses universitaires de Rennes.
- Brousseau, G. & Brousseau, N. (2006). L'ingénierie didactique des mathématiques disponible en ligne : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/11/radeci02sanfoto.ppt>.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). La mémoire du système didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 167-210.
- Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. In *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 13-58). Springer, Boston, MA.
- Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures : un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(1), 7-47.
- Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique* [Analysis course of the Royal École Polytechnique]. Paris : Imprimerie Royale. See. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90195m/f12>
- Cauchy, A. L. (1823). *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Imprimerie royale.
- Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. Preprint. Marseille : IREM d'Aix Marseille. Disponible sur [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=195](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=195).
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91-118.
- Condillac, E. B. (1982). Condillac et les problèmes du langage.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(2.3), 221-270.
- Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite. *Conception et Obstacle. IREM Grenoble*.
- Copi, I. (1954), *Symbolic Logic*. New York.
- Cousteix, J. & Mauss, J. (2006). *Analyse asymptotique et couche limite* (Vol. 56). Springer Science & Business Media.
- Dahan-Dahmedico, A. & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*. Paris : Seuil.

- D'Alembert, J. L. R., & Diderot, D. (1754). Dictionnaire. *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Tome IV, 958-969.
- Descartes, R. (1637). *Géométrie*, translated by D. E. Smith & M. L. Latham (1954) as *The Geometry of René Descartes*, Dover Publications: New York.
- Diderot, D. & d'Alembert, J. L. R. (1785). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (regroupe les 17 vol. édités de 1751 à 1765 et 4 vol. de suppléments, 2 vol. de tables, 11 vol. de planches et un supplément, et suppléments), dite ci-après «. *Encyclopédie de Diderot et d'Alembert* », 1784-1785.
- Dieudonné, J. (1974). *Devons-nous enseigner les " mathématiques modernes" ?* CESDOC.
- Dieudonné, J. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. Paris : Herman.
- Dorier, J. L. (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. *La pensée sauvage*, 105-147.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 7(2), 5-31.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-31.
- Douady R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Paris VII : *IREM* 6, 132-158.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. USA : *Mathematical Association of America (MMA)*.
- Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal].
- Duhamel, J. M. C. (1856). Mémoire sur le mouvement des différents points d'une barre cylindrique dont la température varie. *J. école polytech. (Paris)*, 21, 1-33.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Claude Bernard-Lyon I.
- Durand-Guerrier, V. (2012). Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques. Dans Ouelbeni, M. (Eds). *Des mathématiques à la philosophie. Regards Croisés : Didactique, Histoire et Philosophie*, 163-183. Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales.

- Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 295-342.
- Duroux, A. (1982). *La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. [Mémoire de DEA]. *Publications de l'IREM, Burdeos*.
- Duroux, A. (1983). *La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. [Thèse de doctorat. Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques].
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.
- Duval, R. (1998). Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S4), 79-98.
- Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à R. Douady, Université du Littoral, Nord Pas de Calais, France*.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
- Escofier, J. P. (2016). *Petites histoires des mathématiques*. Paris: Dunod.
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. [Introduction to the analysis of the infinite] Lausanne: Bousquet. Reprinted as *Opera mathematica*, Series I, Volume VIII.
- Farah, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. [Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Paris 7].
- Frege, G. (1971). Sens et dénotation. *Écrits logiques et philosophiques*, 102-126.
- Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registres de représentation : étude de cas au lycée. *For the Learning of mathematics*, 22(2), 35-47.
- Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction*. [Thèse de doctorat. Université Joseph-Fourier-Grenoble I].
- Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'Université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*. [Thèse de doctorat. Université de Tunis ; Université Victor Segalen-Bordeaux II].
- Ghedamsi, I. (2016). « Entrée des étudiants dans l'Analyse formelle de début d'université : Potentialité des méthodes numériques d'approximation ». In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.). *Proceedings of the First Conference of the International Network for*

*Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 64-72). Montpellier, France : University of Montpellier and INDRUM.

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*. [Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 2].

Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire. *Annales de didactique et de sciences* (pp. 5-39).

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et didactique*, 9(2), 51-72.

Gibel, P. (2017). Étude d'un dispositif de formation : le séminaire « Apprentissage et raisonnement en mathématiques ». In Braconne-Michoux, A. Gibel, P. & Oliveira, I. (Eds). *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants Québec*, (pp46-69). Livres en ligne du CRIRES. En ligne : [http://lel.crires.ulaval.ca/public/BraconneMichoux\\_Gibel\\_Oliveira\\_2017.pdf](http://lel.crires.ulaval.ca/public/BraconneMichoux_Gibel_Oliveira_2017.pdf)

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Gibel, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 1, 153-189.

Gibel, P. et Blanquart-Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, 43(1), 37-84.

Gibel, P., & Ennassef, M. H (2010). Analyse d'une séquence de classe visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal au cours préparatoire. In Yves M et Annie N (Eds). *L'évaluation dans tous ses états. Quels rapports entre évaluation, apprentissage, compétences et savoirs*. XXXVIIème Colloque COPIRELEM, La Grande Motte (34). Paris : IREM.

Gibel, P., & Ennassef, M. (2012). Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 87-116.

Gobert, S. (2011). Une ingénierie didactique pour le développement des pratiques de description de formes géométriques à l'école maternelle.

- Gonzalez-Martin, A. S., & Correia, D. S. C. (2015). « Utilisation de la visualisation dans le développement historique des séries avant le 17e siècle. Une analyse à travers les ostensifs ». In Theis Laurent (Eds). *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*. EMF 2015, p. 653-665. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Société Mathématique d'Algérie.
- Grenier-Boley, N. (2009). Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. *Cahier de DIDIREM*. Num. 59. IREM de Paris.
- Grégoire, M. (1998). Descartes et ses correspondances. La correspondance entre Descartes et Fermat. *Revue d'histoire des Sciences*, Tome 51/2-3, 355-362.
- Gueudet, G. & Pepin, B. (2018). Didactic contract at the beginning of university: A focus on resources and their use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 56-73.
- Gueudet, G. & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement Supérieur : éclairages en didactique des mathématiques*. Rapport pour le Conseil National d'Evaluation du Système Scolaire. En ligne : <http://www.cnesco.fr/fr/education-a-lorientation/postbaccalaureat/>.
- Gueudet, G. Vandebrouck, F. (2021). Transition secondaire-Supérieur en mathématiques : Ce que nous apprend la recherche en didactique. *Épjournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*.
- Haddad, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien*. [Thèse de doctorat. Université Paris 7].
- Hairer, E., & Wanner, G. (2001). *L'analyse au fil de l'histoire* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.
- Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation* 30 (2), 329-354.
- Houzel, C. (1976). *Philosophie et calcul de l'infini*. La Découverte.
- Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.3, pp.209–216), Norwich, England.
- Kidron, I. (2003). Polynomial approximation of functions: Historical perspective and new tools. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (IJCML) 8, 299–331.
- Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit concept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics* 69(3), 197–216.



- Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education* **9**(6): 1261-1279.
- Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The role of animation in teaching the limit concept. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, **9**, 205–227.
- Kidron, I. & Tall, D. (2015). "The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process." *Educational Studies in Mathematics* **88**(2): 183-199.
- Kouki, R. (2006). L'articulation syntaxe/sémantique au cœur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire. In Nadine. B et Claudine M. (Eds). *Actes du colloque Espace Mathématique francophone, Thème* (Vol. 8). CRP Sherbrooke, Canada.
- Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. [Thèse de doctorat. Université Claude Bernard-Lyon I].
- Kouki, R. (2017). *Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Étude de cas : algèbre du secondaire et développements limités au début de l'Université*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Tunis El Manar (Tunisie).
- Kouki, R. (2018). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, **38**(1), 43-78.
- Kouki, R., Belhaj Amor, F. et Hachaïchi, Y. (2016). « Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'Université : Entre syntaxe et sémantique ». In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 1st Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 123-132). Montpellier: INDRUM.
- Kung, D., & Speer, N. (2010). Do they really get it? Evaluating evidence of student understanding of power series. In *Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2015). « Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du Supérieur : identification et construction ». In Matheron Y, Gueudet Gh et Cerli V (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*. 18<sup>ième</sup> école d'été de didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Brest, France. Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Lagrange, J. L. (1797). *Théorie de fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel [Theory of analytic functions, containing the principles of differential calculus]*. Paris, L’Imprimerie de la République.
- Lagrange, J. L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*. Nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée par l'auteur. Courcier.
- Lagrange, J. L. (1813). *Théorie des fonctions analytiques: contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Ve. Courcier.
- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. [Thèse de doctorat. Université de Pau et des Pays de l’Adour].
- Larue, C. (2015). *L'enseignement des mathématiques en anglais langue seconde. Etude didactique de l'articulation des apprentissages linguistiques et mathématiques, à travers l'expérimentation de situations intégrées de type CLIL*. [Thèse de doctorat. Université de Bordeaux].
- Lecorre, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie didactique relative à la définition de la notion de limite : élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalités pour l'accès aux objets mathématiques complexes*. [Thèse de doctorat. Université Grenoble Alpes].
- Leithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational studies in mathematics*, 165-190.
- Leibniz, G. (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis* [New method for maximas and minima], translated by Struik, D. J., (1969): *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Harvard University Press, pp. 271–281.
- Maschietto, M. (2001). Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d’analyse à l’Université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 21(1.2), 123–156.
- Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*. [Thèse de doctorat. Université de Paris 7].
- Mangiante-Orsola C. & Perrin-Glorian M.J. (2017). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. In T. Barrier et C. Chambris. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Année 2016. pp. 35-59. IREM de Paris.

- Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. In Margolinas C. (Eds.), *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations, in Margolinas C., *Les débats de didactique des mathématiques*, Annales 1993-1994. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1997). Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In Bailleul Marc (Eds) *Actes de la IX<sup>e</sup> Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, ARDM.
- Margolinas C. (1998). Étude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *VIII<sup>ème</sup> école d'été de Didactique des Mathématiques*.
- Margolinas, C. (2015). Situations, savoirs et connaissances... comme lieux de rencontre ? *Formation et pratiques d'enseignement en questions*, 19, 31-49.
- Martin, J. (2012). "Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical structure of Taylor series convergence." *Educational Studies in Mathematics* 82(2), 267-283.
- Martin, J. & Oehrtman, M. (2010). Strong metaphors for the concept of convergence of Taylor series. Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, North Carolina State University Raleigh, NC.
- Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations didactiques. *Les débats de didactique des mathématiques*, 157, 168.
- Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18, 279-310.
- Montucla, J.F. (1799-1802) *Histoire des mathématiques*, Tome III. Paris : Henri Agasse. Nouvel éd, publié par Jérôme DE LA LANDE.
- Nemirovsky, R. & Smith, M. (2011). The physicality of symbol use: Projecting horizons and traversing improvisational paths across inscriptions and notations: In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman, Proceedings of the 14th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Vol. 3, pp. 314–324. Portland.
- Newton, I. (1671) *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*. First published in 1736 in English translation as *Method of Fluxions*.
- Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitations, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 396–426.

- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Ouvrier-Buffet, C. (2004). Construction of Mathematical Definitions: An Epistemological and Didactical Study. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, pp 473–480.
- Pepin, B. (2014). Using the construct of the didactic contract to understand student transition into university mathematics education. *Policy futures in education*, 12(5), 646-657.
- Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In Margolinas C, M. Abboud Blanchard M, Bueno-Ravel L, N. Douek, Fluckiger A, Gibel P, Vandebrouck F, & Wozniak F (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques (XVe école d'été de didactique des mathématiques)*, pp. (57–74). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. Actes du congrès : *La TACD en questions, questions à la didactique*. Rennes : CREAD. Consulté le 11 octobre 2019 sur : [https://tacd2019.sciencesconf.org/data/ACTES\\_SessionX\\_Congres\\_TACD\\_Rennes\\_2019.pdf](https://tacd2019.sciencesconf.org/data/ACTES_SessionX_Congres_TACD_Rennes_2019.pdf).
- Perrin-Glorian, M.J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/2, 217-276.
- Perrin-Glorian, M. J., & Baltar, P. M. B. (2019). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (On-line)*, 9(1, 2019–ISSN 2358-4750), 45-82.
- Piaget, J. (1975). L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement.
- Pierce, C.S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud).
- Pierce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.)*. Paris : Seuil.
- Praslon, F. (2000). Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse : Le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (3), 1-27.
- Rond d'Alembert. (1713-1714) *Encyclopédie universelle*. [Consulté en ligne 2012]. Disponible sur <[http://encyclopedie.universelle.fracademic.com/12175/LIMITE\\_\(NOTION\\_DE\)>](http://encyclopedie.universelle.fracademic.com/12175/LIMITE_(NOTION_DE)>).
- Robert, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, 340, 431-449.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des cours mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 8(2), 139-190.

- Robinet, J. (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au Supérieur*. [Thèse de Doctorat. Université Paris VII].
- Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61-87). Presses Universitaires de France.
- Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs (du secondaire Supérieur) et changements de posture vis à vis de la rationalité mathématique*. [Thèse de doctorat, Université de Liège].
- Savan, D. (1980). Enlèvement et sémiotique. *L'animal signifiant*, 252-262.
- Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. [Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain].
- Schneider, M. (1991a). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 241-294.
- Schneider, M., & Mercier, A. (2005). Situation adidactique, situation didactique, situation-problème : circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement. In *AFIRSE*.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 59-84.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1), 5-67.
- Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. *Construction des savoirs*, 130-147.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.
- Sinaceur, H. (1991). *Corps et modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Vrin.
- Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tarski, A. (1974). *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944* (vol.2). Paris : Armand Colin.
- Taton, R. (1961). *Histoire générale des sciences : La science contemporaine- Le XIX<sup>e</sup> siècle* (vol 3). Paris.
- Taton, R. (1995). *Histoire générale des sciences*. Presses universitaires de France.

- Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. In *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* (Vol. 16, pp. 149-185).
- Vandebrouck, F., & Leidwanger, S. (2016). Students' visualization of functions from secondary to tertiary level. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*.
- Vandevelde, L. (1982) Aider à devenir, Nathan-labor.
- Vergnaud, G. (1982). Psychologie cognitive et développementale et recherche en didactique des mathématiques : quelques enjeux théoriques et méthodologiques. *Pour l'apprentissage des mathématiques*, 3 (2), 31-41.
- Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. *Développement et fonctionnement cognitifs*, 261-277.
- Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 79-86.
- Vergnaud, G. (2002). L'explication est-elle autre chose que la conceptualisation. *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation*, 31-44.
- Vergnaud, G. (2013). Qu'est-ce que la pensée ? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (3), 277-299.
- Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. (2011). Designed and Emergent Pedagogical Supports for Coordinating Quantitative and Agent-Based Descriptions of Complex Dynamic Systems. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219–236.
- Winslow, C. (2007) Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 189-204.

## ANNEXES

### Annexe du chapitre 5

#### Annexe 5-1

- **Productions d'un deuxième étudiant**

L'étudiant utilise juste des astuces du calcul formel et algébrique. Il ne vérifie pas les étapes des transformations des expressions analytiques et algébriques étudiées dans sa démarche de raisonnement.

1-a)

(1)  $f(x) = x(x-1)^{-1} \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

(2)  $f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

(3)  $(1-x)^{-1} = 1 - 1 \cdot (-x) - \frac{1 \cdot (-1-1)}{2} (-x)^2 + o(x^2)$

(4)  $= 1 + x + x^2 + o(x^2)$

(5)  $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

(6)  $f(x) = -x \left[ 1 + x + x^2 + o(x^2) \right] \left[ 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]$

(7)  $f(x) = -x \left[ 1 + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + o(x^2) \right]$

(8)  $= -x - x^2 + o(x^2)$

(9)  $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$

1-b)

(10)  $f(x) = f(0) \cdot x + x \cdot f'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$

(11) Donc  $f'(0) = -1$

(12)  $f''(0) = -2$

1-c)

(13)  $\Delta = -x$

(14) Position :  $C_f$  en dessous de  $\Delta$

(15) Car  $-x^2 < 0$

[(1)-(2)] La décomposition de la fonction f en produit des fonctions. L'étudiant en train de chercher dans son répertoire didactique des développements limités usuels nécessaires pour ces fonctions.

[(3)-(4)] La décision de l'utilisation une formule de répertoire didactique de la classe :

(\*)  $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} X^2 + o(X^2)$

[(5)] L'utilisation d'une formule sans vérification dans ce pas de son raisonnement son choix.

[(6)-(7)-(8)-(9)] La phase de calculus de produit des développements limités usuels. L'étudiant applique directement les troncatures des développements limités sans la justification de son raisonnement.

[(10)-(11)-(12)] L'étudiant a recours à son répertoire didactique et plus précisément au registre des formules pour utiliser la formule de Taylor-Young. Il présente les différents termes de son polynôme d'approximation afin d'identifier ces termes à ceux du développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0. En effet, il donne deux représentations analytiques de la fonction  $f$  dans son raisonnement pour justifier les valeurs trouvées de  $f'(0)$  et  $f''(0)$ .

[(13)] La confusion entre un objet mathématique et une expression algébrique et plus précisément, la confusion entre la représentation d'un objet géométrique et sa représentation algébrique.

L'erreur est due aux connaissances antérieures de l'étudiant sur les représentations des objets mathématiques : l'objet géométrique la droite et son équation algébrique.

[(14)-(15)] La vérification de la position de la courbe par rapport à sa tangente en vérifiant le signe du troisième terme de développement limité de la fonction  $f$ .

L'étudiant a mis en jeu l'intérêt de développement limité pour préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en utilisant une propriété de répertoire didactique de la classe.

$$(**) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente dépend de signe du terme  $a_2$ .

- **Production du troisième étudiant**

L'étudiant a problème de justification de son raisonnement lors de la détermination de développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. Il ne donne pas le rôle de cet objet mathématique en tant qu'une approximation de la fonction  $f$  par un polynôme de degré 2.

**1-a)**

(1)  $f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

(2)  $= -x(1+x+x^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}x^2) + o(x^2)$

(3)  $f(x) = (-x-x^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}x^2) + o(x^2)$

(4)  $f(x) = -x-x^2 + o(x^2)$

(5)  $f(x) = -(x+x^2) + o(x^2)$

**1-b)**

(6)  $f'(0) = -1$

(7)  $f''(0) = -1$

**1-c)**



$$(8) \Delta : y = -x$$

$$(9) -x^2 < 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

(10)  $C_f$  est au-dessous de  $\Delta$  au  $V(0)$

[(1)] La décision sur l'objet "fonction". Il décompose la fonction  $f$  en produit des fonctions.

[(2)-(3)] La phase du calculus de produit des polynômes en mettant en jeu le terme du reste comme deuxième terme de la représentation analytique de la fonction  $f$ . Ce mode de raisonnement prouve que l'étudiant connaît la distinction entre les deux objets d'approximation polynomiale et la notion (\*):  $f(x) = P(x) + o(x^2)$ .

[(2)-(3)-(4)-(5)] Dans ces étapes du raisonnement, l'étudiant est en train de calculer le produit des polynômes des développements limités en ajoutant l'expression reste.

[(6)-(7)] Cette présentation directe des valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  met en évidence la difficulté de l'étudiant à connaître l'intérêt de développement limité pour déterminer les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  en mettant en jeu la formule de Taylor-Young (\*\*).

(\*\*) Soit  $I$  un intervalle définit un voisinage de 0. La fonction  $f$  est définie sur  $I$ , elle est de classe  $C^2(I)$  donc  $f(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^2)$

L'usage de la formule (\*\*) de répertoire didactique de la classe, la formule de Taylor-Young, lui aurait simplifié la tâche et lui conduisant à obtenir les valeurs valides.

[(8)] Une décision sur l'objet tangente pour déterminer son équation.

[(9)-(10)] Ces étapes traduisent la mise en application de la formule (\*\*\*) du registre des formules de répertoire didactique de la classe :

(\*\*\*)  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$  Si  $a_2$  inférieur à 0 alors  $C_f$  est au-dessous de  $\Delta$ .

Si  $a_2$  supérieur à 0 alors  $C_f$  est au-dessus de  $\Delta$ .

Cette formule donne l'intérêt du concept développement limité comme un nouvel outil pour préciser la position de la courbe à sa tangente au point (0,0).

#### • Productions de quatrième étudiant

L'étudiant est confronté au problème de rédaction des raisonnements. Il ne s'intéresse pas à justifier les étapes de son raisonnement pour obtenir le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

1-a)

$$(1) f(x) = -x(1-x)^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) (1-x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{1}{2!}(-1)(-1-1)x^2 + o(x^2)$$

$$(3) (1-x)^{-1} = 1 - x - x^2 + o(x^2)$$

(4)  $(-x)(1-x)^{-1} = -x - x^2 + o(x^2)$

(5)  $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

(6)  $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$

1-b)

(7)  $f'(0) = 0$

(8)  $f''(0) = 0$

1-c)

(9)  $\Delta : y = -x$

(10)

➤ <b>X</b>	➤ $-\infty$	➤ <b>0</b>
➤ <b>f-y</b>	➤ $+$	➤ $-$
➤ <b>Position</b>	➤ <b>C<sub>f</sub> au-dessus <math>\Delta</math></b>	➤ <b>C<sub>f</sub> au-dessous <math>\Delta</math></b>

➤

[(1)] Décomposition de la fonction f en un produit de fonctions. Cette décomposition préfigure l'organisation du raisonnement, elle manifeste une décision sur un objet (fonction).

Les étapes du calcul [(2)-(3)], [(4)-(5)] traduisent la mise en application de la formule du répertoire didactique de la classe, plus précisément du registre de formules

$$(*) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha-1)x^2 + o(x^2) \text{ DL}_2(0) \text{ de la fonction } (1+x)^\alpha$$

La première étape du calcul [(2)-(3)] met en évidence la difficulté de l'étudiant à employer (faire usage de) la formule de développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $(1-x)^{-1}$ . Il ne l'écrit pas sous la forme  $(1+(-x))^{-1}$  d'où son erreur en [(2)-(3)]. L'usage direct de la formule du  $\text{DL}_2(0)$  de  $\frac{1}{1-x}$  lui aurait simplifié la tâche, évitant ainsi l'erreur de signe.

La deuxième étape (5) est valide, il traduit l'usage direct de la formule (\*) pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

L'étape (6) rend compte du développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f. Une deuxième erreur, liée au produit des deux termes (4) et (5), vient "compenser" la précédente (commise en (2)-(3)) conduisant ainsi un développement limité valide.

[(7)-(8)] L'étudiant ne contrôle pas l'ordre auquel chacun des deux développements limités doit être réalisé.

L'étudiant, par ses réponses erronées, ne donne pas de sens au développement limité comme une approximation de la fonction f par un polynôme de degré 2.

[(9)] L'étudiant présente directement l'équation de la tangente.

[(10)] Dans cette étape, l'étudiant a recours à une technique vue au secondaire par l'utilisation de tableau du signe de  $[f(x)-y]$  pour préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ .

En fait, il n'effectue aucune étude du signe de l'expression  $[f(x)-y]$  puisqu'il donne directement le résultat. L'erreur est due à son négligence du rôle de développement limité, et plus précisément le signe du troisième terme, pour donner la position de la courbe par rapport à sa tangente au point  $(0, f(0))$ . Ainsi, la difficulté de l'étudiant est due au manque de connaissance et au plus précisément au registre des formules par l'utilisation de la formule (\*\*)

(\*\*) Le développement limité de la fonction  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de 0 est  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$  alors la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = a_0 + a_1x$  est la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $(0, f(0))$ .

Si  $a_2 < 0$  alors  $C_f$  est au-dessous de  $\Delta$ .

Si  $a_2 > 0$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $\Delta$ .

Par ailleurs, nous présentons une production d'un étudiant qui a écrit deux différentes résolutions en contrôlant son mode de raisonnement par la décision de le refaire.

### Annexe 5-2

#### ► Productions de deuxième étudiant

L'étudiant est confronté à une difficulté liée à la conceptualisation de l'objet développement limité d'une fonction en  $(+\infty)$ . Il ne donne pas l'intérêt de ce nouvel concept mathématique pour l'étude du comportement de cette fonction.

2-a)

(1) Soit  $y = \frac{1}{x}$

(2)  $\Rightarrow f(y) = -\frac{1}{y} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

2-b)

(3) On a :  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

(4)  $x + 1 + \frac{3}{2x^{+\infty}} \approx x + 1 \approx x$

(5) Car  $\frac{3}{2x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$

2-c)

(6) Au voisinage de  $+\infty$ ,  $f(x) \sim x$

(7) Donc  $f$  est strictement croissante.

(8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(9) Donc f admet une branche parabolique d'équation :  $y=x$

[(1)-(2)] L'étudiant connaît la nécessité de l'utilisation de la technique du changement de variable ( $y = \frac{1}{x}$ ) afin de donner le développement limité de la fonction f en  $(+\infty)$ . En revanche, il ne sait pas appliquer cette connaissance antérieure pour la formulation de l'expression analytique. Cette erreur commise en (2) conduisant ainsi à la difficulté de suivre son raisonnement.

[(3)-(4)] L'étudiant s'appuie sur le développement limité en  $(+\infty)$  donné dans la question précédente et plus précisément, l'approximation polynomiale pour déterminer une fonction équivalente. La vérification du calcul de limite de terme  $\frac{3}{2x} \rightarrow 0$  quand x tend vers  $+\infty$ .

L'erreur effectuée par l'étudiant au cours du calcul de limite de terme x dans l'expression  $(x+1)$  pour x tend vers  $+\infty$  lui amène à une réponse invalide. La vérification du calcul de limite de la fonction  $(x+1)$  pour x tend vers  $+\infty$  lui aurait simplifié la tâche, évitant ainsi l'erreur  $(x+1) \sim x$  au voisinage de  $+\infty$ .

[(7)-(8)-(9)-(10)] L'étudiant, par ses réponses erronées, ne donne pas du sens au développement limité comme une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage de  $+\infty$ , ainsi que nouvelle technique pour obtenir le comportement d'une fonction en  $+\infty$ . Les erreurs commises par l'étudiant sont liées à ses connaissances antérieures sur les notions de fonction équivalente et la technique vue au secondaire sur la détermination de l'équation de l'asymptote oblique à la courbe  $C_f$ .

#### ► Productions de troisième étudiant

L'étudiant est confronté au problème de justification de son raisonnement. Il a effectué des erreurs liées à la notion de voisinage. Il n'a pas articulé les objets développement limité et la relation de comparaison d'une fonction pour étudier le comportement de cette fonction en  $(+\infty)$ .

2-a)

$$(11) \quad f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(12) \quad = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$(13) \quad = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{y} \cdot (1+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(14) \quad (1-y)^{-1} = 1 + y + (-1)(-1-1)\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

(15)	$(1 + y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2$
(16)	$f(x) = (1 + y + y^2) \cdot (1 + \frac{1}{2}y^2) \cdot \frac{1}{y}$
(17)	$= (1 + y + y^2) \cdot (\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y)$
(18)	$= \frac{1}{y} + \frac{1}{2}y + y + \frac{1}{2}y^3 + 1$
(19)	$= \frac{1}{y} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} + 1$
(20)	$f(x) = x + \frac{3}{2x} + 1 + o(\frac{1}{x})$
2-b)	
(21)	$f(x) \underset{+\infty}{\approx} x + 1$
2-c)	
(22)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

[(1)-(2)-(3)] Décomposition la fonction  $f$  en produit des fonctions afin de la formuler en mettant le réel  $x$  en facteur. Cette transformation de la représentation de la fonction  $f$  amène à l'écrire en produit des fonctions dépendant de variable  $\frac{1}{x}$ .

Dans l'étape (3), l'étudiant fait appel à sa connaissance antérieure le changement de variable  $y = \frac{1}{x}$  sans vérification les conditions de l'utilisation. L'application de cette connaissance mobilisable prouve son rôle en tant que technique automatiquement utilisée. La formulation produite par l'étudiant est un raisonnement de nature syntaxique.

[(4)-(5)] L'étudiant travaille à la mise en application de la formule de développement limité de répertoire didactique de classe (\*) pour  $\alpha = -1$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$(*) (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

En revanche, il néglige l'expression de reste. Cette erreur commise est due à l'existence de difficulté liée à l'égalité entre deux objets mathématiques "fonction" et "son approximation polynomiale". Ainsi, l'étudiant a problème lié à la conceptualisation de développement limité.

[(6)-(7)-(8)-(9)-(10)] Les étapes du calcul des produits de  $\frac{1}{y}$  par des polynômes déduits de DL<sub>2</sub>(0) des fonctions  $(1 - y)^{-1}$  et  $(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ . L'élimination du terme de l'expression reste

dans toutes les étapes du calculus vient de la difficulté liée à la notion de voisinage et plus précisément à la conceptualisation de l'objet développement limité.

Dans l'étape (10), il existe un glissement du résultat puisque le résultat est donné dans l'exercice. Par ailleurs, l'étudiant utilise le signe de l'expression reste  $[o(\frac{1}{x})]$  au lieu de

$$\frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x}).$$

[(11)] Ce raisonnement est valide de nature syntaxique exprimant la mobilisation de sa connaissance antérieure sur le rôle de développement limité pour déterminer une fonction équivalente.

[(12)] L'erreur est liée à sa connaissance antérieure sur la détermination du comportement d'une fonction en  $+\infty$ . Cette connaissance erronée traduit l'existence de difficulté chez l'étudiant depuis le niveau secondaire.

#### Productions de quatrième étudiant

Dans le Secondaire, certains élèves s'intéressent au changement de variable sans recours au statut de l'objet « fonction ». Il y a confusion entre les deux statuts des objets :  $f(x)$  et  $f(\frac{1}{x})$ . Nous présentons une copie d'un étudiant qui est confronté à des problèmes dès le Secondaire.

2-a)

(1) Soit  $y = \frac{1}{x}$

(2)  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$

(3)  $f(y) = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}-1} \sqrt{(\frac{1}{y})^2 + 1}$

2-c)

(4)  $f$  admet une asymptote  $y' = x + 1$  en  $+\infty$

Figure 5-8 : extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant développe la méthode du changement de variable pour déterminer une nouvelle représentation analytique de la fonction  $f$  dans les paradigmes [AC] et [AI]. Ensuite, il donne directement le comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$  par l'interprétation des objets de géométrie dans le paradigme [AG].

#### ➤ **Identification du niveau de registres de représentations sémiotiques**

L'étudiant mobilise les registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

#### ➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)] Décision de l'usage de la méthode de changement de variable. Dans l'étape (2), cet étudiant vérifie et justifie son choix de ce changement de variable.

[(3)] Recherche de la représentation analytique de la fonction  $f(\frac{1}{x})$  par l'usage d'un symbole. Cette étape traduit l'existence d'un problème lié à l'appropriation du concept de développement limité. Il doit transformer et formuler la représentation de la fonction  $f(x)$  afin de la réécrire en fonction de variable  $(\frac{1}{x})$ . Ce variable sera noté par le symbole  $y$  proposé dans l'étape (1) de son raisonnement. L'erreur commise traduit la confusion entre deux objets : La fonction  $f(x)$  et la fonction  $f(\frac{1}{x})$ . Il est confronté à un problème lié à l'utilisation d'une technique du répertoire didactique du Secondaire.

Cet étudiant ne parvient pas à mobiliser les connaissances convenables pour déterminer le développement limité au voisinage de 0.

[(4)] Décision du comportement de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . En réalité, l'étudiant s'appuie sur l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $+\infty$  dans l'énoncé pour déterminer son comportement en  $+\infty$ . Il n'effectue aucun moyen de justification et de validation de son raisonnement.

### Annexe 5-3

#### • Productions de deuxième étudiant

L'étudiant agit d'une manière autonome à refaire les mêmes étapes de démarches du raisonnement suivies dans les questions précédentes afin de préciser le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Il a la capacité d'articuler les différents objets d'approximations locales d'une fonction pour étudier le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1} \\
 (2) \quad & f(x) = -\frac{x}{1-\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\
 (3) \quad & = -x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
 (4) \quad & = -x - 1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\
 (5) \quad & f(x) \approx -(x+1) \\
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x+1) \\
 (7) \quad & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty
 \end{aligned}$$

[(1)-(2)] Décomposition de la fonction  $f$  en produit des fonctions afin d'obtenir le produit des fonctions par la mise en jeu de variable  $\frac{1}{x}$ .

Dans l'étape (2), l'étudiant ne justifie pas son raisonnement pour apparaître  $\frac{1}{x}$  dans l'expression de la fonction  $f$ . Il remplace directement  $|x|$  par  $(-x)$ .

Les étapes (1) et (2) traduisent l'existence de difficulté de rédaction chez l'étudiant.

[(3)-(4)] Usage de la formule de développement limité d'ordre 2 de la fonction  $(1+x)^a$  au voisinage de 0.

L'étudiant ne contrôle pas l'ordre auquel chacun des développements limités doit être réalisé.

Dans l'étape (3), il décide de déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Il s'intéresse à calculer le produit des parties polynomiales des développements limités réalisés.

L'étape (4) traduit l'usage de la formule de troncature de développement limité de répertoire didactique de la classe.

[(5)] Décision sur un objet (fonction). L'étudiant, par sa réponse valide, présente directement la fonction équivalente. Il a problème de justification de son raisonnement.

[(6)-(7)] Usage de la fonction équivalente dans le calcul de limite de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . L'étudiant a problème lié à ses connaissances antérieures de secondaire sur l'étude du comportement d'une fonction. Il considère le comportement de la fonction  $f$  se manifeste par le calcul de sa limite en  $(-\infty)$ . Par ailleurs, l'étudiant donne le rôle de la fonction équivalente en tant que nouvel outil pour le calcul de limite d'une fonction.

#### • Productions de troisième étudiant

L'étudiant s'appuie sur son raisonnement précédemment traité (en 2-a) concernant la détermination de développement limité de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Il agit d'une manière autonome pour appliquer les mêmes procédures suivies précédemment lors de l'étude du comportement de la fonction en  $(+\infty)$ .

$$(1) \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x} \text{ au voisinage de } -\infty$$

$$(2) f(x) = -(x+1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x}))$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = -1$$

$$(5) C_f \text{ admet une asymptôte oblique } y = -1 - x \text{ au voisinage de } (-\infty).$$



[(1)-(2)] Mobilisation implicitement de la technique utilisée dans la question précédente en vérifiant les conditions de changement de signe de développement limité d'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de  $(+\infty)$ .

L'étape (2) traduit la décision sur l'objet fonction. Le développement limité de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  est l'opposé de son développement limité en  $+\infty$ . Cette décision découle de son précédent raisonnement sur la détermination de développement limité en  $(+\infty)$ .

[(3)-(4)-(5)] Présentation des résultats des calculs des limites des fonctions étudiées par la mise en application d'une technique de secondaire afin d'obtenir l'équation de l'asymptote oblique. Ce raisonnement valide traduit la réponse automatique déduite de la question précédente par la mise en jeu de changement du signe.

- **Productions de quatrième étudiant**

L'étudiant s'intéresse à chercher le développement limité de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . En revanches, il calcule le développement limité de  $f(-x)$ . A partir de son raisonnement erroné, cet étudiant a problème lié à la notion de développement limité et plus précisément à la notion de voisinage.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & X = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{X} \\
 (2) \quad & f\left(-\frac{1}{X}\right) = \frac{-\frac{1}{X}}{-\frac{1}{X}-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{X^2} + 1} \\
 (3) \quad & X \rightarrow -\infty, \frac{1}{X} < 0 \\
 (4) \quad & f\left(-\frac{1}{X}\right) = \frac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{X^2} + 1} \\
 (5) \quad & = \frac{1}{X+1} \sqrt{X^2+1} \cdot \left|\frac{1}{X}\right| \\
 (6) \quad & = -\frac{1}{X} \left[1 - X - \frac{1(-1-1)}{2} X^2 + o(X^2)\right] \cdot \left[1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right] \\
 (7) \quad & = -\frac{1}{X} \cdot \left[1 - X + \frac{X^2}{2} - X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right] \\
 (8) \quad & = -\frac{1}{X} [1 - X + X^2 + o(X^2)] \\
 (9) \quad & = -\frac{1}{X} [1 - X + X^2 + X^2 \varepsilon(X^2)] \\
 (10) \quad & = -\frac{1}{X} + 1 - X - X\varepsilon(X^2)
 \end{aligned}$$

(11)	$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$
(12)	$= x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$
(13)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1$
(14)	$= -\infty$
(15)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{1} = 1$
(16)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 1 - x] = 1$
(17)	$T : y = x + 1$

[(1)] Usage de la technique de changement de variable. Cette étape préfigure l'organisation du raisonnement de l'étudiant.

[(2)] Décision sur un objet (fonction). L'étudiant donne une autre représentation analytique de f en fonction de variable  $(-\frac{1}{X})$ . En réalité, il est en train de rechercher l'expression de  $f(-x)$ . L'erreur commise vient du signe de x.

Pour le variable x tends vers  $+\infty$ , le signe de x est positif.

Dans le cas de variable x tends vers  $-\infty$ , le signe de x est négatif. D'où vient le signe (-).

L'écriture de f en fonction de variable  $X = \frac{1}{x}$  lui aurait simplifié la tâche, évitant ainsi l'erreur de signe.

[(3)] Etude du signe de variable.

[(4)-(5)] Décision sur l'objet fonction. L'étudiant décompose la fonction f en produit des fonctions. Cette décomposition préfigure l'organisation de son raisonnement.

[(6)] Usage de la formule de développement limité. Il détermine les développements limité d'ordre 2 des fonctions  $\frac{1}{1+X}$  et  $\sqrt{1+X^2}$  au voisinage de 0.

L'étudiant ne contrôle pas l'ordre auquel chacun des développements limités doit être réalisé.

[(7)-(8)-(9)-(10)] Calculus du produit des développements limités. L'erreur commise vient de la technique de changement de variable. En réalité, il est en train de déterminer le développement limité de  $f(-\frac{1}{X})$ . L'étudiant, par sa réponse erronée dans l'étape (10), traduit la difficulté liée à l'expression de reste, et plus précisément les propriétés des opérations de l'expression de reste.

L'écriture de  $[\frac{1}{X} \cdot X^2 \varepsilon(X^2) = X \varepsilon(X^2)]$  prouve que l'étudiant ne multiplie pas  $\varepsilon(X^2)$  par  $\frac{1}{X}$ .

[(11)-(12)] Usage de technique de changement de variable  $x = -\frac{1}{X}$ . Il transforme l'expression analytique de développement limité de la fonction f sous forme de variable x.

L'étape (12) traduit l'existence d'un problème lié au calcul de l'expression reste chez l'étudiant. Il remplace  $\frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x^2})$  par  $\frac{1}{x} \varepsilon(\frac{1}{x})$ .

[(13)-(15)-(16)-(17)] Usage de technique du Secondaire pour l'étude du comportement de la fonction f en  $(-\infty)$ . L'étudiant utilise la fonction équivalente de f dans le calcul de limite.

L'erreur commise vient de l'expression analytique fautive de développement limité de la fonction f trouvée dans l'étape (12).

Par ailleurs, trois étudiants ont mis en relation entre la parité de la fonction f et l'étude de son comportement en  $(-\infty)$ . Nous choisissons de conduire une analyse de leurs productions.

- **Productions de cinquième étudiant**

L'étudiant a recours à ses connaissances antérieures pour étudier la parité de la fonction f. Il considère l'approximation polynomiale de la fonction f est la même expression de la fonction f définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . L'étudiant a problème lié à la notion de voisinage. L'égalité entre deux objets (fonction et son approximation polynomiale au voisinage de 0) traduit l'existence d'une difficulté liée à la conceptualisation de la notion de développement limité.

(1) $f(-x) = -(-x) + (-x^2)$
(2) $= x + x^2$
(3) Donc f est impaire
(4) Au voisinage de $-\infty$ , $C_f$ admet une asymptote $\Delta'$ : -x

[(1)-(2)-(3)] Décision sur l'étude de parité de la fonction f à partir de son approximation polynômiale au voisinage de 0.

L'étape (1) préfigure l'organisation du raisonnement de l'étudiant.

Dans les étapes (1) et (2), il s'appuie sur le polynôme de développement limité de la fonction f au voisinage de 0 en éliminant l'expression reste afin de prouver que la fonction f est impaire. L'étudiant, par ses réponses erronées, a du problème lié à ses connaissances antérieures sur l'objet développement limité et plus précisément sur la notion de voisinage. Il utilise une méthode n'a aucune relation avec le répertoire didactique de la classe.

[(4)] Décision sur un objet géométrique (la courbe représentative de la fonction f).

L'étudiant, par sa réponse erronée, s'appuie sur la technique vue au secondaire (une fonction impaire) pour déduire l'équation de l'asymptote en  $(-\infty)$  de celle trouvée dans l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

• **Productions de sixième étudiant**

L'étudiant n'utilise aucune formule vue au Supérieur de répertoire didactique de la classe. Il a problème lié à ses connaissances antérieures de secondaire concernant la parité d'une fonction, ainsi que l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ .

(1) La fonction  $f$  est paire  
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 (2)

[(1)] Décision sur l'objet fonction. L'étudiant n'explique pas sa décision que la fonction  $f$  est paire. Il n'existe aucune technique mobilisable dans son raisonnement.

[(2)] Décision sur l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  s'effectue par le calculus de sa limite en  $(-\infty)$ .

L'erreur commise de l'étudiant vient de ses connaissances antérieures de secondaire.

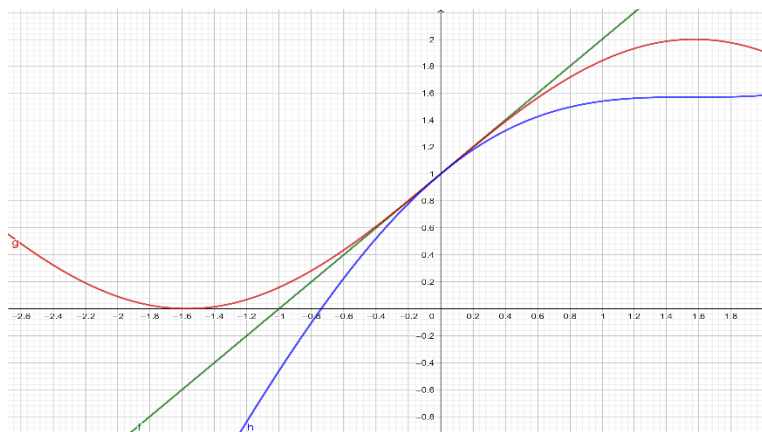
**Annexe du chapitre 6**

*Annexe 6-1*

**Enoncé de l'exemple (Ouvrage, 1983, p.207)**

On a représenté sur la figure ci-dessous les fonctions :

$$x \rightarrow 1 + x, x \rightarrow 1 + \sin(x), x \rightarrow x + \cos(x)$$



**Question :**

Montrer que si  $f$  est l'une quelconque des trois fonctions ci-dessus, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 0$$

Il apparaît cependant sur la figure que ces trois fonctions n'ont pas le même comportement au voisinage de 0. La méthode utilisée pour le mettre en évidence consiste à comparer  $h(x) = f(x) - (f(0) + xf'(0))$  avec  $x^n$  quand  $x$  tend vers 0. C'est ce que nous allons faire.

### Annexe 6-2

Posons  $h(x) = f(x) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)$

Nous savons que  $\frac{h(x)}{x}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Nous allons maintenant étudier  $\frac{h(x)}{x^2}$ .

En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x)$ , on obtient pour

$$x > -1 \text{ et } x \neq 0 : \frac{h(x)}{x^2} = \frac{1+x - \left(1+x + \frac{1}{4}x^2\right)}{x^2(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x)} = \frac{-1}{4(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{1}{2}x)}$$

On aura alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} + \frac{1}{8} = 0$

Si l'on pose  $\varepsilon(x) = \frac{h(x)}{x^2} + \frac{1}{8}$  pour  $x \neq 0$  et  $\varepsilon(0) = 0$ , on a en fait démontré que  $\varepsilon$  est continue et nulle en 0 et  $h$  s'écrit :  $h(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

On en déduit que, pour  $x > -1$  :

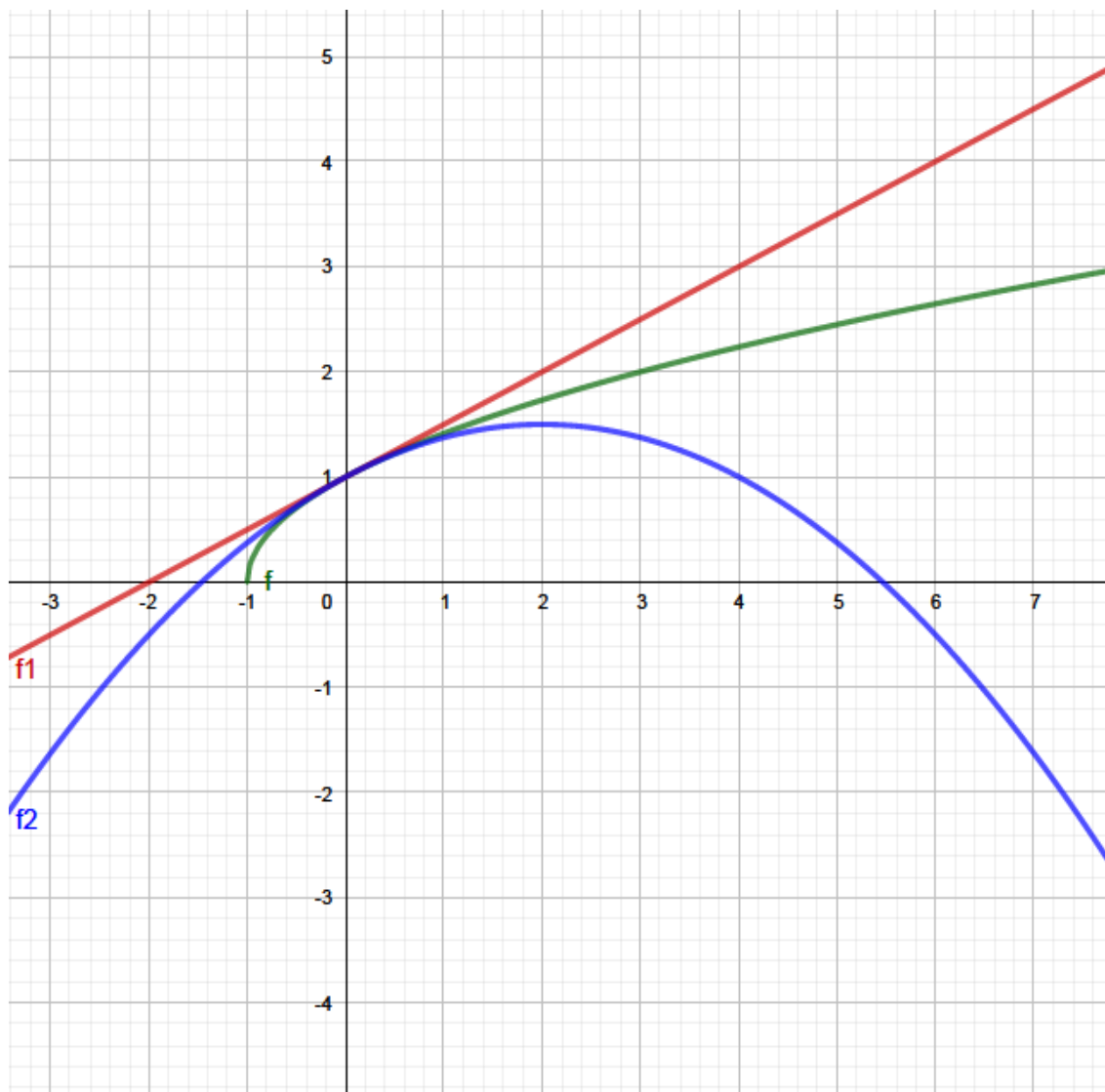
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = \varepsilon(0) = 0$$

On dit qu'on a obtenu un DL d'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{1+x}$

### Annexe 6-3

Traçons sur une même figure les représentations graphiques de :

$$f : x \rightarrow \sqrt{1+x}, \quad f_1 : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}x, \quad f_2 : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$



On constate que  $f_2$  est une meilleure approximation de  $f$  que  $f_1$  au voisinage de 0. En effet,  $f(x) - f_2(x)$  tend plus rapidement vers 0 que  $f(x) - f_1(x)$  quand  $x$  tend vers 0, car :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_1(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{f(x) - f_1(x)} = 0$

2. Montrer en utilisant une méthode analogue à celle employée au §1.1 que  $f_2$  est la seule fonction polynôme de degré 2 telle que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f_2(x)}{x^2} = 0$

## Annexe du chapitre 7

### Annexe 7-1

#### Productions de deuxième étudiant

Dans une première étape, nous présentons une analyse détaillée des raisonnements formellement incomplets et erronés lors de l'appropriation et l'utilisation du concept de développement limité.

<p><b>1-a (1)</b> On a : <math>(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)</math></p> <p><b>(2)</b> <math>(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)</math></p> <p><b>(3)</b> <math>x\sqrt{1 + x^2} = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)</math></p> <p><b>(4)</b> <math>\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(1-x)}</math></p> <p><b>(5)</b> <math>= -(1 + x + x^2 + o(x^2))</math></p> <p><b>(6)</b> <math>f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}</math></p> <p><b>(7)</b> <math>= \frac{-\left(x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \cdot (1+x+x^2+o(x^2))}{-(1+x+x^2)}</math></p> <p><b>(8)</b> <math>= -[x + x^2 + o(x^2)]</math></p> <p><b>1-b (9)</b> <math>f'(0) = -1</math></p> <p><b>(10)</b> <math>f''(0) = -1</math></p> <p><b>1-c (11)</b> <math>\Delta: y = -x</math></p> <p><b>(12)</b> <math>f(x) - y = -x^2 + o(x^2)</math></p> <p><b>(13)</b> <math>&lt; 0</math></p> <p><b>(14)</b> <math>\Rightarrow C_f</math> est en dessous de <math>\Delta</math></p>
---

Figure 7-1 : extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ Identification des paradigmes correspondants

L'étudiant développe d'abord sa méthode de la détermination de la représentation analytique du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 dans le paradigme [AI]. Ensuite, la présentation des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0 se réalise directement dans le paradigme [AC]. Dans une dernière étape, l'étude locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 s'effectue dans les paradigmes [AI] et [AG].

#### ➤ Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique

L'étude locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 est développée dans les registres analytiques, algébriques, géométriques et numériques.

#### ➤ Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique

[(1)-(2)-(3)-(4)-(5)] Utilisation d'une propriété pour déterminer des développements limités usuels. L'étudiant n'effectue aucun moyen de justification du recours au développement limité usuel de la fonction  $[X \rightarrow (1 + X)^\alpha]$ . En effet, il n'explique pas son choix d'ordre pour les

développements limités à réaliser. De plus, il ne précise pas un voisinage de 0 sur lequel ces expressions sont déterminées.

[(6)-(7)-(8)] Détermination de la représentation analytique du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

Dans l'étape (7), il y a une rétroaction sur la méthode développée pour calculer le produit des développements limités usuels.

Cet étudiant a produit un raisonnement formellement incomplet dans le registre analytique. En effet, il n'a pas précisé un voisinage de 0, ainsi que l'ordre des développements limités à réaliser. Il est confronté à un problème lié à l'appropriation du concept d'approximation locale d'une fonction.

[(9)-(10)] Présentation des valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0. Cet étudiant donne une valeur fautive pour le nombre dérivé seconde de la fonction  $f$  en 0. Cette erreur commise est due à l'utilisation automatique d'une formule de son répertoire didactique.

[(11)] Présentation de la représentation algébrique d'une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point  $(0, f(0))$ . L'étudiant produit un pas de raisonnement de nature syntaxique. Il utilise la formule du répertoire didactique du Supérieur de manière implicite.

[(12)-(13)-(14)] Étude de la position de la courbe représentative de la fonction  $f$  et de sa tangente au point  $(0, f(0))$ . Cet étudiant interprète l'approximation polynômiale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 afin de préciser la position relative de deux objets de géométrie. Il produit un pas de raisonnement de nature sémantique dans le paradigme [AG].

L'étudiant utilise une technique du répertoire didactique du Supérieur. Il donne un intérêt au développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude locale d'une fonction. En revanche, il existe une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à l'appropriation du concept de développement limité.

#### *Productions de troisième étudiant*

Nous choisissons de vous présenter les productions d'un étudiant qui a produit un raisonnement formel complet lors de la détermination du développement limité, en outre, il a effectué des *erreurs d'ordres cognitif, conceptuel et technique*. En effet, il néglige le rôle du développement limité en tant que nouvelle technique dans le champ de l'étude d'une fonction.

1-a)

(1)  $DL_2(0)$

(2)  $f(x) = -\frac{x}{1-x}\sqrt{x^2+1}$

(3) Or  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ , au voisinage de 0



(4) On pose  $x^2 = u$  dans le développement limité usuel au voisinage de 0

(5)  $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$

(6)  $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}u^2 + o(u^2)$

(7) Donc  $f(x) = -x[(1+x+x^2+o(x^2)) \cdot (1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))]$ , au voisinage de 0

(8)  $= (-x-x^2+o(x^2)) \cdot (1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))$

(9)  $= -x-x^2+o(x^2)$

(10) D'où  $f(x) = -x-x^2+o(x^2)$

➤ 1-b)

(11)  $f'(0) = ?$

(12)  $f''(0) = ?$

(13)  $f'(x) = -1-2x$

(14) Donc  $f'(0) = -1$

(15)  $f''(x) = -2$

(16) Donc  $f''(0) = -2$

1-c)

(17)  $\Delta : y = f'(0)x + f(0)$

(18)  $y = -x$

(19)  $f(x) + x = -x - x^2 + x$

(20)  $= -x^2 < 0$

(21) Donc la courbe est en dessous de  $\Delta$  passant par  $(0, f(0))$

**Figure 7-2** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant fait appel à une formule usuelle afin d'effectuer un calcul infinitésimal dans le paradigme [AI]. Ensuite, il détermine les valeurs de  $f'(0)$  et  $f''(0)$  dans le paradigme [AC]. Finalement, il donne une équation de la tangente et précise sa position relative par rapport à la courbe représentative en mobilisant une technique géométrique dans les paradigmes [AC], [AG] et [AI].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

Dans une première étape, l'étudiant détermine la représentation analytique du développement limité dans le registre analytique. Ensuite, il effectue un calcul formel et numérique dans les registres algébrique et numérique. L'étude locale de la fonction  $f$  au voisinage de 0 mobilise les registres algébrique, numérique et géométrique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)] Décision de déterminer le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0 par l'utilisation de sa représentation analytique en tant que produit de fonctions. L'étape (2) préfigure l'utilisation de ce produit.

[(3)] Présentation du développement limité usuel d'ordre 2 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  au voisinage de 0.

[(4)-(5)-(6)] Utilisation d'une formule du répertoire didactique du Supérieur pour déterminer le développement limité de la fonction  $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$ . L'étudiant ne donne pas de sens à la connaissance mathématique mobilisée. En effet, il ne précise pas un voisinage de 0 lors de la détermination du développement limité de la fonction.

[(7)-(8)-(9)-(10)] Détermination de l'expression analytique du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. L'étudiant considère cette fonction comme un produit de  $x$  par des développements limités d'ordre 2 des fonctions :  $[x \rightarrow \frac{1}{1-x}$  et  $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}]$ . L'utilisation automatique d'une technique du registre de formules du répertoire didactique du Supérieur amène à la production d'un raisonnement formellement incomplet. Il n'a effectué aucun moyen du contrôle de l'ordre des développements limités usuels et il ne précise pas le voisinage pour lequel l'approximation locale est définie. En effet, il n'y a pas pilotage des ordres des développements limités lors du calcul du produit. Le passage de l'étape (8) à (9) traduit l'usage de la formule de la troncature du développement limité sans aucun moyen du contrôle.

[(11)-(12)] Décision de rechercher les valeurs des dérivées première et seconde de la fonction  $f$  en 0.

[(13)-(14)] Détermination de la valeur de dérivée première de la fonction  $f$  en 0. L'étudiant calcule la fonction dérivée de la représentation d'approximation polynômiale d'ordre 2 de cette fonction au voisinage de 0 afin de déterminer la valeur de sa dérivée en ce réel. Il mobilise une technique fautive qui n'a aucune relation avec les formules du répertoire didactique de la classe. Ce mode de pensée prouve l'existence d'un problème lié à la connaissance mathématique mobilisée.

[(15)-(16)] Détermination de la valeur de dérivée seconde de la fonction  $f$  en 0. L'étudiant calcule la dérivée seconde de la représentation d'approximation polynômiale d'ordre 2 de cette fonction au voisinage de 0 pour déterminer la valeur de sa dérivée seconde en ce réel. Il est confronté à un problème lié au sens du concept de développement limité.

Les erreurs commises, dans les étapes (13), (14), (15) et (16), traduisent l'existence des erreurs *d'ordre cognitif et conceptuel* liées au concept du développement limité.

[(17)-(18)] Détermination d'une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0. L'étudiant utilise une technique du registre des formules du répertoire didactique du Secondaire. En effet, il néglige le rôle du concept de développement

limité en tant que nouvelle technique pour déterminer une équation de la tangente. Ceci traduit l'existence d'une *erreur d'ordre technique*.

[(19)-(20)-(21)] Précision de la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  et sa tangente au point  $(0, f(0))$ . L'étudiant rencontre une difficulté liée à l'utilisation d'une connaissance mobilisable du répertoire didactique du Supérieur.

Dans les étapes (19) et (20), il néglige l'expression du reste lors de l'étude du signe de la différence entre la représentation analytique de développement limité et une équation de la tangente. Cette erreur traduit l'existence d'une difficulté liée au sens de la connaissance mathématique mobilisée. Cet étudiant est confronté à une confusion entre l'expression du développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel et son équivalent.

En conclusion, ces productions prouvent que cet étudiant est confronté à des difficultés liées à l'usage des formules du répertoire didactique du Supérieur.

#### *Productions de quatrième étudiant*

Nous choisissons de conduire une analyse détaillée des raisonnements produits par l'étudiant qui n'a pas essayé d'étudier localement la fonction au voisinage de 0. Par ailleurs, il a produit des raisonnements erronés lors de l'appropriation du concept de développement limité et ne lui donne pas l'intérêt en tant que nouvel outil lors de l'étude d'une fonction.

1-a)

(1)  $DL_2(0)$  de  $f$  ?

(2) On a :  $DL_2(0)$  de  $(1 + X)^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}X + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}X^2 + o(X^2)$

(3) On pose :  $X = x^2$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$

(4)  $\sqrt{X+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}X + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}X^2 + o(X^2)$

(5)  $\sqrt{X+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X + \frac{3X^2}{8 \cdot 6} + o(X^2)$

(6)  $DL_2(0) : \sqrt{x^2+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

(7) D'où  $DL_2(0)$  de  $f$

(8)  $f(x) = \frac{x}{x-1} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x^2 \right) + o(x^2)$

(9)  $= \frac{3}{2 \left( \frac{x-1}{x} \right)} + o(x^2)$

**Figure 7-3** : extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant fait appel à une formule pour déterminer le développement limité usuel dans le paradigme [AI].

#### ➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant développe une technique analytique lors de l'utilisation du développement limité usuel dans le registre analytique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision de rechercher le développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.

[(2)-(3)-(4)-(5)-(6)] Utilisation d'une formule fautive pour déterminer le développement limité de la fonction  $[x \rightarrow \sqrt{1+x^2}]$  au voisinage de 0. L'étape (3) traduit l'existence d'un problème lié à la connaissance antérieure mobilisable du répertoire didactique du Supérieur. Cette erreur est due à l'application de la formule du développement limité usuel (\*) :

$$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} X^2 + o(X^2).$$

[(7)-(8)-(9)] Recherche du développement limité d'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0. L'étudiant ne parvient pas à déterminer le produit des développements limités des fonctions.

En conclusion, cet étudiant n'effectue pas le changement de variable nécessaire pour utiliser la formule (\*) du répertoire didactique du Supérieur. Il ne considère pas que la fonction  $[x \rightarrow \frac{1}{x-1}]$  s'écrit sous la forme de  $[x \rightarrow (1+(-x))^{-1}]$ . Ce manque de connaissance met l'étudiant en blocage pour terminer son raisonnement. Nous pouvons dire qu'il existe une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à la notion de développement limité.

**Annexe 7-2**

*Productions d'un deuxième étudiant*

Certains étudiants sont confrontés à un problème lié à la conceptualisation de la notion de développement limité. Nous présentons des productions d'un étudiant ayant des *erreurs d'ordres technique, cognitif et conceptuel*.

<p>2-a)</p> <p>(1) <math>f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{1+x^2}</math></p> <p>(2) On pose <math>u = \frac{1}{x}</math></p> <p>(3) <math>\Rightarrow f(u) = \frac{1}{u} (\frac{1}{u^2} + 1)^{\frac{1}{2}}</math></p> <p>(4) <math>f(u) = [1 + u + u^2 + o(u^2)] \cdot [1 + \frac{1}{2u^2}]</math></p> <p>2-b)</p> <p>(5) <math>x \mapsto x + 1 + \frac{3}{2x}</math> est une fonction équivalente de <math>f</math> en <math>+\infty</math>.</p> <p>2-c)</p> <p>(6) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + \frac{3}{2x})</math></p> <p>(7) <math>= +\infty</math></p> <p>(8) Donc <math>f</math> est strictement croissante en <math>+\infty</math> et elle tend vers <math>+\infty</math></p> <p>(9) Donc elle suit un comportement parabolique.</p>
--

**Figure 7-5** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant essaye de déterminer l'expression analytique de la fonction  $f$  dans le paradigme [AC] et d'obtenir un équivalent en  $(+\infty)$  dans les paradigmes [AI]. Ensuite, il interprète l'expression d'un calcul de limite dans le paradigme [AC] pour étudier le comportement de cet objet mathématique en  $(+\infty)$  dans le paradigme [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

Dans les registres analytique et géométrique, l'étudiant étudie le comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision de l'utilisation de la représentation analytique de l'objet « fonction  $f$  ».

[(2)] Mobilisation de la technique du changement de variable sans justification de cette méthode du répertoire didactique du Secondaire. Cet étudiant fait appel à un symbole pour préciser ce changement.

[(3)] Détermination d'une nouvelle représentation analytique de l'objet « fonction ». Cette étape prouve l'utilisation automatique d'une technique du registre des formules du répertoire didactique du Secondaire. Cette étape préfigure les erreurs produites lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

[(4)] Décision de considérer que l'objet « fonction » est le produit des développements limités usuels sans vérification de ce raisonnement.

L'écriture  $[1 + \frac{1}{2u^2}]$  traduit la difficulté à s'approprier le développement limité.

Cet étudiant est bloqué, il n'a pas pu terminer son raisonnement. Ce blocage est due à son calcul dans l'étape (4).

[(5)] Proposition directe d'une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Ce pas de raisonnement de nature syntaxique prouve l'utilisation de manière implicite de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$  pour en déterminer une fonction équivalente. L'étudiant n'a produit aucune justification et ni aucun contrôle de son raisonnement.

[(6)-(7)-(8)-(9)] Utilisation d'une technique du répertoire didactique du Secondaire pour étudier le comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . En outre, dans l'étape (6), il fait appel à la fonction équivalente en tant que nouvel outil pour calculer la limite d'une fonction.

Les étapes (8) et (9) mettent en lumière, chez cet étudiant, une difficulté liée à ses connaissances antérieures mobilisables du répertoire didactique du Secondaire : c'est *une*

erreur d'ordre cognitif et conceptuel liée à l'étude du comportement asymptotique d'une fonction.

Nous pouvons dire que cet étudiant tire pas parti du développement limité en tant que nouvel outil lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(+\infty)$ . Il a aussi effectué des *erreurs d'ordre technique, cognitif et conceptuel*. Par ailleurs, il ne parvient pas à mobiliser correctement ses connaissances antérieures du Secondaire pour l'étude du comportement d'une fonction en  $(+\infty)$ .

*Productions d'un troisième étudiant*

Nous choisissons de présenter les productions d'un autre étudiant ayant un problème lié à la notion de développement limité.

2-a)

(1)  $y = \frac{1}{x}$

(2)  $f(y) = \frac{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}}{1-y}$

(3)  $= \frac{\frac{1}{y}\sqrt{1+y^2}}{\frac{1-y}{y}}$

(4)  $f(y) = 1 + y + \frac{1}{y} + \frac{y}{2} + o(y)$

(5)  $y = \frac{1}{x}$

(6) D'où  $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$

(7)  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})$

2-b)

(8)  $f(x) \sim x$  en  $+\infty$

2-c)

(9)  $T : y = \frac{3}{2x}$

**Figure 7-6** : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

Cet étudiant détermine une représentation analytique de l'expression de la fonction  $f$  en  $+\infty$  dans les paradigmes [AC] et [AI]. Par la suite, il présente une fonction équivalente dans le paradigme [AI]. Finalement, l'étude de son comportement asymptotique est donnée dans le paradigme [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

La détermination de l'expression de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et de fonctions équivalentes mobilisent le registre analytique. Par ailleurs, l'étude du comportement de cette fonction en  $(+\infty)$  est développée dans le registre géométrique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision d'effectuer un changement de variable. Il utilise un symbole pour désigner ce changement de variable sans justification, ni de vérification de son raisonnement.

[(2)-(3)] Changement de la représentation analytique de l'objet « fonction ». L'utilisation d'une technique du répertoire didactique du Secondaire amène cet étudiant à réécrire la fonction  $f$  sous forme d'un produit des fonctions. Cette étape va l'aider à faire appel à la formule des développements limités usuels au voisinage de 0 relevant du répertoire didactique du Supérieur.

[(4)] Détermination directe du développement limité de la fonction  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  au voisinage de 0.

[(5)] Décision de l'utilisation de la technique du changement de variable.

[(6)-(7)] Déduction de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

L'étudiant utilise automatiquement la technique du changement de variable du répertoire du Secondaire, ainsi que les formules des développements limités usuels du répertoire didactique du Supérieur. Ceci traduit l'existence d'une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel*.

[(8)] Décision de déterminer une fonction équivalente à  $f$  en  $(+\infty)$ . Cette décision prouve l'existence d'un problème d'appropriation du concept de fonction équivalente.

[(9)] Précision d'une équation d'un objet géométrique « la tangente ». Cette étape traduit l'existence d'une difficulté liée à la connaissance mathématique mobilisable pour préciser le comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ .

En conclusion, l'étudiant valide l'intérêt du développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(+\infty)$ , mais il effectue une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* lors de l'utilisation de cette méthode.

*Productions d'un quatrième étudiant*

L'égalité entre deux différents objets mathématiques est parmi les erreurs commises par la majorité des élèves dès le niveau Secondaire. Nous nous intéressons à l'étude l'une de ces erreurs produites par un étudiant.

2-a)

$$(1) \text{ On a : } f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(2) \text{ On pose } u = \frac{1}{x}$$

$$(3) f(u) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$(4) = \frac{u}{u-1} \sqrt{u^2 + 1}$$

$$(5) g(u) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
(6) &= \frac{1}{u(1-u)} \sqrt{1-u^2} \\
(7) &= \frac{1}{u} (1-u)^{-1} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} \\
(8) &\forall u \in ]-\infty; \infty[, f(u) = \frac{1}{u} [1 + (-u)]^{-1} [1 + (-u^2)]^{\frac{1}{2}} \\
(9) &= \frac{1}{u} (1 + u + u^2) \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\frac{1}{2}(1-1)}{2} ((-u^2)^2) \right] + o(u) \\
(10) &= \frac{1}{u} (1 + u + u^2) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2}u^2 \right) + o(u) \\
(11) &= \frac{1}{u} \left( 1 + \frac{1}{2}u^2 + u + u^2 \right) + o(u) \\
(12) &= \frac{1}{u} + \frac{1}{2}u + 1 + u + o(u) \\
(13) &= x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\
(14) &= x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\
2-b) & \\
(15) &h(x) = x + 1 + \frac{5}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\
2-c) & \\
(16) &C_f \text{ admet une tangente } \Delta' \text{ au point } C(0, h(0)) \text{ d'équation :} \\
&y = x + 1. \\
(17) &f(x) - y = \frac{3}{2x} \\
(18) &> 0 \\
(19) &\text{Donc } C_f \text{ est au-dessus de } \Delta'
\end{aligned}$$

Figure 7-7 : extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

La formulation de l'expression de la fonction  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  se réalise dans les paradigmes [AI] et [AC]. Ensuite, l'étudiant passe à donner une fonction équivalente à la fonction  $f$  en  $+\infty$  dans le paradigme [AI]. Finalement, il étudie son comportement en  $+\infty$  dans les paradigmes [AC] et [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

Dans le registre analytique, l'étudiant développe sa procédure de résolution lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . Ensuite, il articule les registres analytique, algébrique et géométrique lors de l'étude de son comportement en  $(+\infty)$ .

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)] Décision de s'appuyer sur l'expression de la fonction  $f$ . À partir de cette étape, cet étudiant va développer son raisonnement.

[(2)] Précision de la technique à suivre par la détermination symbolique d'une autre variable.

[(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)] Recherche des formulations de l'objet « fonction » de la variable  $\frac{1}{x}$  par le recours au calcul algébrique. Cet étudiant décide de produire des transformations et



formulations de la représentation analytique de  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  afin de favoriser la représentation convenable pour utiliser les développements limités usuels définies au voisinage de 0. Mais, en réalité, l'étudiant doit reformuler l'expression de la fonction  $f(x)$ .

Dans l'étape (3), il y a un problème lié à l'égalité de deux différents objets. En réalité, cet étudiant est en train de remplacer la variable  $x$  par  $\frac{1}{x}$  dans la représentation initiale de la fonction  $f$ . Il n'est pas en train de réécrire cette représentation analytique en fonction de  $\frac{1}{x}$ . Il est confronté à une difficulté liée à l'usage d'une technique de répertoire didactique du Secondaire.

Dans les étapes (2) et (3), l'erreur effectuée est liée à l'existence d'une *erreur d'ordre technique* au niveau Secondaire. Cet étudiant ne parvient pas à utiliser correctement la méthode de changement de variable. Il doit s'appuyer sur la représentation analytique de la fonction  $f(x)$  afin de la formuler et la transformer sous forme d'une autre fonction  $[g: x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)]$ . En revanche, il a reformulé la fonction  $f$  pour une variable tendant vers 0. Cette transformation syntaxique va leur permettre de déterminer le développement limité au voisinage de 0 de la fonction  $f$  et ce n'est pas son expressions analytique en  $+\infty$ .

L'étape (3) explicite l'erreur commise dans le raisonnement lors de la détermination de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

Le passage de l'étape (5) à (6) traduit une complexité de formuler une égalité entre deux statuts différents des objets mathématiques. Ce passage confirme l'égalité suivante :

$$\frac{u}{u-1} \sqrt{u^2+1} = \frac{1}{u(1-u)} \sqrt{1-u^2}$$

Cette erreur commise traduit une complexité conceptuelle de l'objet « fonction ». Ce type de difficulté résulte d'un manque des connaissances antérieures liées à l'étude d'une fonction au niveau Secondaire.

Dans l'étape (5), l'étudiant utilise un symbole de l'objet « fonction » qui désigne  $f$  de variable  $\frac{1}{x}$ . Dans cette question, on propose de déterminer une représentation analytique de la fonction  $f$  de variable  $x$  (tendant vers  $+\infty$ ) et ce n'est pas celle de variable  $\frac{1}{x}$ .

Nous remarquons que dans le passage de l'étape (3) à (4), l'étudiant remplace l'indice  $\frac{1}{x}$  par l'usage de symbole  $y$ .

Dans les étapes (6), (7) et (8), il exprime l'expression de la fonction  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  sous forme du produit des fonctions. Ils sont en train d'organiser sa recherche afin de déterminer ses développements limités. L'étape (6) traduit l'existence d'un problème lié au signe. Dans l'étape

(8), il effectue une formulation des expressions analytiques afin de favoriser les écritures convenables pour appliquer les formules des développements limités usuels.

**[(9)-(10)-(11)-(12)-(13)-(14)]** Détermination du développement limité de la fonction :

$u \mapsto \frac{1}{u} [1 + (-u)]^{-1} \cdot [1 + (-u^2)]^{\frac{1}{2}}$ . Cet étudiant effectue un calcul permettant d'atteindre son objectif de déterminer un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. Le symbole  $o(u)$  désigne la décision de préciser l'ordre d'un développement limité à réaliser.

Dans l'étape (9), il fait appel à la formule (\*) du répertoire didactique du Supérieur pour déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

$$(*) (1 + X)^\alpha = 1 - X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} X^2 + o(X^2).$$

La troncature de l'expression du développement limité de la fonction  $[u \rightarrow (1 - u^2)^{\frac{1}{2}}]$ , dans l'étape (10), sert à trouver l'expression demandée du développement limité d'ordre 2 d'une fonction au voisinage de 0. Cette représentation analytique est présentée dans l'étape (14).

**[(15)]** Confirmation d'une représentation analytique d'une nouvelle fonction. Cette expression présente une représentation analytique de l'expression d'une fonction en  $+\infty$ .

**[(16)-(17)-(18)-(19)]** Décision du comportement de la fonction  $f$  au voisinage de 0. L'étudiant est confronté à un problème lié à l'usage d'une technique du répertoire didactique du Supérieur. Dans l'étape (16), il donne l'équation d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction au voisinage de 0. Cette étape prouve l'existence d'une confusion entre l'étude locale d'une fonction et de son comportement en  $+\infty$ .

Nous pouvons dire que l'étudiant est confronté à une difficulté liée aux connaissances mathématiques mobilisables du répertoire Supérieur et du Secondaire. Il effectue des *erreurs d'ordres technique, conceptuel et cognitif*.

### **Annexe 7-3**

#### *Production de deuxième étudiant*

L'étudiant a l'action d'une manière autonome à refaire les mêmes étapes de démarches du raisonnement suivies dans les questions précédentes (2-a) et (2-c). Il donne l'intérêt du concept de développement limité en tant que nouvelle technique dans le domaine de l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ . En revanche, il est confronté à un problème lié à la conceptualisation de cet objet mathématique.

- (1)  $f(x) = -x + 1 - \frac{3}{2x} + o(-\frac{1}{x})$
- (2) Donc  $f$  admet une asymptote oblique au  $V(-\infty)$
- (3)  $\Delta'' : y = 1 - x$
- (4) D'après le signe  $-\frac{3}{2x} < 0$
- (5) Alors  $C_f$  est en dessous de  $\Delta''$  au  $V(-\infty)$

**Figure 7-9 :** Extrait d'une copie d'étudiant

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

L'étudiant interprète l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  afin de donner l'équation d'un objet de géométrie « asymptote oblique ». Ce mode du raisonnement se réalise dans le paradigme [AI], [AC] puis [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

L'étudiant articule les registres analytique, algébrique et géométrique lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)] Précision d'une expression analytique de la fonction  $f$  en  $-\infty$  afin d'étudier son comportement. L'étudiant ne mobilise aucune technique lors de la détermination de cette expression. Ce raisonnement erroné traduit l'existence d'une difficulté liée à la conceptualisation de la notion de développement limité. L'erreur du signe (-) dans l'expression du reste traduit l'existence d'une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel*.

[(3)] Décision de présenter une équation de l'asymptote. L'erreur commise est due à l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $-\infty$  présentée précédemment en étape (1).

L'étudiant présente directement les résultats de ses raisonnements lors de l'appropriation et de l'utilisation de cette expression analytique. Il n'effectue aucune justification de son raisonnement lors de la mobilisation des méthodes du répertoire didactique du Supérieur et du Secondaire.

[(4)-(5)] Étude de la position relative de la courbe représentative de la fonction  $f$  par rapport son asymptote en  $-\infty$ . Cette étude prouve l'intérêt du développement limité en tant que nouvelle technique de l'étude du comportement de cette fonction.

Dans l'étape (4), le manque de justification du raisonnement lors de l'utilisation d'une méthode du répertoire du Secondaire amène à l'existence d'un problème lié au signe.

A l'issue de cette analyse qualitative des raisonnements, nous constatons que cet étudiant est confronté à une difficulté liée à la conceptualisation de la notion de développement limité. Cette erreur résulte de l'utilisation automatique de la formule du répertoire didactique du Supérieur. En revanche, il donne l'intérêt de ce concept mathématique d'une fonction en tant qu'outil de l'étude de son comportement en  $(-\infty)$ .

### Productions de troisième étudiant

Nous présentons des productions d'un étudiant qui a suivi les mêmes étapes de démarches de résolution lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(+\infty)$ . En outre, il est confronté à des difficultés liées aux connaissances mobilisables du Secondaire et du Supérieur.

(1) En $-\infty$ , $f(x) = -x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
(2) $= -x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$
(3) $\frac{f(x)}{x} = -1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
(4) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
(5) $\Rightarrow C_f$ admet une droite oblique d'équation $\Delta : y = -1 + \frac{1}{x}$ au voisinage de $-\infty$
(6) $f(x) - y = \frac{-3}{2x^2}$
(7) $< 0$
(8) $\Rightarrow C_f$ est en dessous de $\Delta$

Figure 7-11 : extrait d'une copie d'étudiant

#### ➤ Identification des paradigmes correspondants

La présentation de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  est donnée dans le paradigme [AI]. Par ailleurs, l'étude de son comportement en  $(-\infty)$  se réalise dans les paradigmes [AC] et [AG] par la mobilisation des représentations des objets de géométrie.

#### ➤ Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique

L'étudiant mobilise les registres analytique et géométrique lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

#### ➤ Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique

[(1)] Présentation de l'expression analytique de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Cet étudiant ne mobilise aucune technique. L'erreur commise de signe  $(-)$  résulte du manque de l'usage d'une technique de répertoire du Supérieur et plus précisément la méthode de la détermination d'une expression analytique d'une fonction en  $(-\infty)$  de registre des formules.

[(2)] Décision de reformuler la représentation analytique de l'expression de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  donnée en étape (1). Cette étape préfigure l'organisation du raisonnement erroné de l'étudiant.

[(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)] Étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ .

Dans les étapes (3) et (4), l'étudiant donne l'intérêt du développement limité en tant que nouvelle technique dans le domaine du calcul de limite d'une fonction.

Dans l'étape (3), il recherche une représentation analytique de la fonction :  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  afin de calculer sa limite en étape (4). Cette étape prouve l'utilisation de la méthode du répertoire didactique du Secondaire.

Le statut de l'égalité présenté en étape (4) n'a pas du sens dans ce cas du calcul de limite d'une fonction. L'étudiant remplace le calcul de limite d'une fonction en  $(-\infty)$  par une expression analytique de la fonction en  $(-\infty)$ . En réalité, il n'effectue pas un calcul de limite d'une fonction.

Cette erreur commise traduit l'existence d'une difficulté liée au niveau technique. En effet, il n'est pas en train de calculer la limite de l'expression trouvée en étape (3) pour la variable  $x$  tendant vers 0. Il simplifie juste la représentation analytique de la fonction  $[x \rightarrow \frac{f(x)}{x}]$ . Il effectue une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel* liée à la notion de limite.

Le passage de l'étape (4) à (5) prouve qu'il est en train d'interpréter le résultat pour déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe  $C_f$  en  $(-\infty)$ . Ce passage explique la production d'un raisonnement erroné. En effet, cette méthode utilisée n'a aucune relation avec le répertoire didactique de la classe.

Dans l'étape (5), il détermine une représentation analytique de l'objet « droite ». Cette expression ne présente pas l'équation algébrique d'une droite qui doit être sous la forme :  $y = ax + b$ .

Dans les étapes (6), (7) et (8), il étudie la position de deux objets géométriques (droite et courbe) à partir de l'étude de signe de la différence de deux fonctions.

L'égalité présentée en étape (6) n'a aucun sens en langage mathématique. Selon ce raisonnement erroné, l'étudiant fait appel à l'expression analytique trouvée précédemment en étape (2) de la fonction  $[x \rightarrow \frac{f(x)}{x}]$  par l'élimination de l'expression du reste.

La production d'un raisonnement erroné traduit l'existence des difficultés liées soit au niveau technique lors du calcul de limite d'une fonction, soit au niveau des connaissances mobilisables lors de la détermination et l'usage de l'expression analytique de la fonction en  $(-\infty)$ , soit au niveau des connaissances disponibles (l'expression du reste). En conclusion, cet étudiant a effectué des *erreurs d'ordres conceptuel, cognitif et conceptuel*.

#### *Productions d'un quatrième étudiant*

Certains étudiants néglige le rôle de l'objet « développement limité » en tant qu'outil lors de l'étude du comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Dans ce paragraphe, nous choisissons de

conduire une analyse détaillée des raisonnements produits par un étudiant qui a mobilisé la méthode du répertoire didactique du Secondaire.

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
(3) Donc $C_f$ n'admet pas une branche parabolique au $V(-\infty)$

➤ **Figure 7-12 : extrait d'une copie d'étudiant**

➤ **Identification des paradigmes correspondants**

Cet étudiant a produit un raisonnement nécessitant des calculs des limites de fonctions afin de confirmer le comportement de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$ . Cette méthode du Secondaire est développée dans le paradigme [AC] puis [AG].

➤ **Identification de niveaux des registres de représentation sémiotique**

La technique du Secondaire est développée dans les registres analytique, géométrique et numérique.

➤ **Du point de vue des fonctions des raisonnements, de l'usage du répertoire didactique, des analyses sémiotiques et des dimensions sémantique et/ou syntaxique**

[(1)-(2)-(3)] Décision de l'usage d'une technique du répertoire didactique du Secondaire. L'étudiant néglige le rôle du développement limité en tant que nouvelle technique lors de l'étude du comportement d'une fonction en  $(-\infty)$ .

Dans les étapes (1) et (2), il donne directement les résultats de son calcul de limite sans aucun moyen de justification ou de vérification de son raisonnement.

Les erreurs commises en étapes (2) et (3) prouvent l'existence d'une difficulté liée au niveau technique du répertoire didactique du Secondaire.

En conclusion, l'étudiant n'a pas la capacité à rédiger son raisonnement. En plus, il préfère mobiliser ses connaissances antérieures du Secondaire que celles du Supérieur. Il existe une *erreur d'ordre technique*. Mais, il ne parvient pas à mobiliser correctement cette méthode du Secondaire : c'est une *erreur d'ordre cognitif et conceptuel*.