



HAL
open science

Elicitation et interprétation des modèles d'Aide MultiCritère à la Décision incluant des interactions

Paul Alain Kaldjob Kaldjob

► **To cite this version:**

Paul Alain Kaldjob Kaldjob. Elicitation et interprétation des modèles d'Aide MultiCritère à la Décision incluant des interactions. Recherche opérationnelle [math.OC]. Université Paris sciences et lettres, 2022. Français. NNT : 2022UPSLD031 . tel-04055053

HAL Id: tel-04055053

<https://theses.hal.science/tel-04055053>

Submitted on 1 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Université Paris Dauphine

**Élicitation et interprétation de modèles d'aide à la décision
incluant des interactions**

Soutenue par

Paul Alain Kaldjob Kaldjob

Le 23 Novembre 2022

École doctorale n° 543

École doctorale SDOSE

Spécialité

Informatique

Composition du jury :

Daniela Grigori Pr., Université Paris Dauphine - PSL	<i>Présidente</i>
Michel Grabisch Pr., Université Panthéon-Sorbonne	<i>Rapporteur</i>
Patrick Meyer Pr., IMT Atlantique	<i>Rapporteur</i>
Agnès Rico MCF, Université Claude Bernard Lyon 1	<i>Examinatrice</i>
Christophe Labreuche Ing. de recherche, Thales Research	<i>Examineur</i>
Nawal Benabbou MCF, Université Panthéon-Sorbonne	<i>Examinatrice</i>
Brice Mayag MCF, Université Paris Dauphine - PSL	<i>Co-encadrant</i>
Denis Bouyssou Pr., Université Paris Dauphine - PSL	<i>Directeur</i>

L'Université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

Je dédie cette thèse de Doctorat à mon adorable fils Kylian Kaldjob...

Remerciements

Je rends tout d'abord grâce à Dieu le père tout puissant qui m'a donné la force nécessaire pour parachever ce travail dans de bonnes conditions. Cette thèse voit son accomplissement grâce au soutien multiforme de certaines personnes.

Mes vifs remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse Denis Bouyssou et, mon co-encadrant Brice Mayag, pour leur grande disponibilité malgré leurs multiples responsabilités, leur suivi, leur rigueur scientifique, leur capacité exceptionnelle d'écoute, leur soutien et conseils judicieux tout au long de cette thèse.

Mon profond respect et mes remerciements au Professeur Daniela Grigori, pour l'immense honneur qu'elle me fait de présider ce jury.

Je remercie les Professeurs Michel Grabisch et Patrick Meyer pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour le temps qu'ils y ont consacré en acceptant d'en être les rapporteurs.

Mes remerciements s'adressent également à Agnès Rico, Christophe Labreuche et Nawal Benabbou pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour le temps qu'ils y ont consacré en acceptant d'être des membres du jury de cette thèse.

Je voudrais témoigner ici ma reconnaissance et ma gratitude au Professeur Bertrand Tchantcho, qui, le premier a cru en ma capacité de mener à bien ce projet et a assuré un suivi de proximité, malgré la distance.

Je remercie toute l'équipe du LAMSADE, pour leur collaboration et les bons moments passés ensemble.

Ma profonde gratitude au couple Zephirin et philomène Nganmeni, pour leur appui constant, leur bonne humeur, les délicieux plats de nourriture dont nous n'avons jamais manqués à la maison. Dit-on souvent : ventre affamé n'a point d'oreilles.

Je remercie ma grande famille pour leur soutien dans mon parcours académique. Tout particulièrement à mes parents Paul et Suzanne Kaldjop, mes tantes Frieda, Elise et Anne Ngo Nongowe, mes frères et sœurs Anne Judith Ngo Kaldjop, Suzanne Adeline Ngo Kaldjop, Jean Baptiste Nongowe, Marie Yvonne Ngo Kaldjop et Luc Landry Bitom Bi Kaldjop.

Mes remerciements s'adressent également à des personnes que j'omets involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail.

Résumé

Les travaux de recherche menés dans le cadre de cette thèse s'inscrivent dans le champ disciplinaire de l'Aide MultiCritère à la Décision et s'intéressent en particulier aux modèles dans lesquels des phénomènes d'interaction peuvent subvenir entre critères. L'objectif de cette thèse est d'investiguer sur la pertinence des outils proposés pour capter les phénomènes d'interaction entre critères, dans un modèle d'intégrale de Choquet et dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive.

L'utilisation de l'intégrale de Choquet et celle de Sugeno implique souvent d'éliciter une capacité sur la base de préférences, données par un décideur sur des alternatives. Dans de telles circonstances, la capacité élicitée est rarement unique. Cette non unicité induit très souvent un changement de signe des indices utilisés pour capter des phénomènes d'interaction, ce qui complique leur interprétation. C'est en particulier le cas lorsque l'élicitation n'utilise que des alternatives binaires, c'est-à-dire, des alternatives qui contiennent soit un niveau neutre soit un niveau satisfaisant sur chaque critère.

Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous caractérisons les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle de l'intégrale de Choquet, et un modèle de l'intégrale de Sugeno 2-maxitive. Cette caractérisation est basée sur l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous joignons une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, nous montrons que l'interprétation des phénomènes d'interaction nécessite une certaine prudence car nous pouvons les capter dans un sens arbitrairement souhaité. Ensuite, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous proposons des modèles de programmation linéaire permettant de tester la stabilité de l'interprétation des phénomènes

d'interaction. Une enquête pilote basée sur le nutri-score nous a servi de champ d'application.

Mots clés : Aide MultiCritère à la Décision, Intégrale de Choquet, Intégrale de Sugeno, Capacité, Interaction.

Abstract

The research work of this thesis is a part of the disciplinary field of MultiCriteria Decision Aid and focuses in particular on models in which interaction phenomena between criteria can occur. The purpose of this thesis is to investigate the relevance of the tools proposed to capture the phenomenon of interaction between criteria, in a Choquet integral model and in a 2-maxitive Sugeno integral model.

The use of the Choquet and Sugeno integrals models need to elaborate a capacity base on the preferences, over a set of alternatives, given by a decision maker. In such circumstances, the capacity elicited is rarely unique. This non-uniqueness can induces a change of the sign of the indices used to capture interaction phenomena, therefore their interpretation is not easy. This is particularly the case when the elicitation uses only binary alternatives, i.e., alternatives which have either a neutral level or a satisfactory level on each criterion.

When the preferences are expressed on binary alternatives, we characterize the ordinal preferential information representable by a Choquet integral model, and a Sugeno integral model. This characterization is based on the lack of a strict cycle in the set of ordinal preferences, for which we added a monotonicity relation. Under this characterization condition, we show that the interpretation of interaction phenomena requires some caution because we can capture them in an arbitrarily desired way. Then, when the decision maker provides an ordinal preferences outside the framework of binary alternatives, we propose the linear programming models to test the stability of the interpretation of interaction phenomena. A pilot survey, based on the nutri-score served as our field of application.

Keywords : MultiCriteria Decision Aid, Choquet integral, Sugeno integral, Capacity, Interaction.

Table des matières

Introduction	1
1 L'aide multicritère à la décision	1
1.1 Introduction	1
1.2 Problèmes de décision multicritère	1
1.3 Différentes problématiques en AMCD	2
1.4 Quelques exemples de problèmes d'AMCD	3
1.5 Différentes approches en AMCD	4
1.6 Notion d'échelle	6
1.7 Quelques notions sur les graphes orientés	7
1.7.1 Relations binaires	8
1.7.2 Graphes orientés	9
1.7.3 Représentation graphique d'une relation binaire	10
1.8 Ensemble des alternatives binaires généralisées	12
1.9 Quelques fonctions d'agrégation classiques en AMCD	13
1.9.1 Modèle additif	13
1.9.2 Intégrale de Choquet	15
1.9.3 Intégrale de Sugeno 2-maxitive	16
1.10 Modélisation des préférences du décideur	18
1.11 Indice d'interaction de Shapley et indice de non-additivité	19
1.11.1 Indice d'interaction de Shapley	19
1.11.2 L'indice de non-additivité	21

1.12	Interactions et degrés de non-additivité possibles et nécessaires	22
1.12.1	Motivation	22
1.12.2	Définitions	25
1.13	Synthèse	25
2	Interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet	27
2.1	Introduction	27
2.2	Décomposition de l'indice d'interaction I_A^μ	27
2.3	Résultats lorsque $I = \emptyset$	29
2.3.1	Résultat sur l'ensemble X des alternatives	29
2.3.2	Résultats sur l'ensemble \mathcal{B}^g des alternatives binaires généralisées . . .	32
2.4	Résultats dans le cas général	35
2.5	Un programme linéaire pour tester l'existence d'interactions nécessaires . . .	43
2.5.1	Le processus	44
2.6	Synthèse et perspectives	52
2.6.1	Synthèse	52
2.6.2	Perspectives	53
3	Degrés de non-additivité possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet	55
3.1	Résultats lorsque $I = \emptyset$	55
3.1.1	Résultats sur l'ensemble des alternatives X	56
3.1.2	Résultats sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g . . .	61
3.2	Résultats lorsque I n'est pas vide	64
3.3	Un programme linéaire permettant de tester l'existence de degré de non-additivité nécessaires	69
3.4	Exemple : sélection d'une star	71
3.5	Synthèse et perspectives	76
3.5.1	Synthèse	76
3.5.2	Perspectives	77

4	Interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Sugeno avec une capacité 2-maxitive	79
4.1	Introduction	79
4.2	Décomposition d'une intégrale de Sugeno k -maxitive	80
4.3	Interactions possibles et nécessaires	83
4.3.1	Un exemple illustratif déjà donné en amont	83
4.3.2	Définitions	86
4.4	Résultats	86
4.5	Un programme linéaire mixte testant les interactions nécessaires	89
4.5.1	Linéarisation des fonctions min et max	90
4.5.2	Procédure	90
4.5.3	Exemple	93
4.6	Synthèse et perspectives	95
4.6.1	Synthèse	95
4.6.2	Perspectives	96
5	Une étude pilote sur le nutri-score	97
5.1	Introduction	97
5.2	Présentation du nutri-score	98
5.2.1	Historique	98
5.2.2	Algorithme du nutri-score	99
5.2.3	Un exemple pratique de calcul du nutri-score d'un aliment.	101
5.3	Un modèle additif équivalent au score nutritionnel	103
5.3.1	Modèle	103
5.3.2	Quelques limites du nutri-score	105
5.4	Une enquête pilote sur le nutri-score	107
5.4.1	Recueil des données	107
5.4.2	Traitement des données	108
5.5	Synthèse et perspectives	116
5.5.1	Synthèse	116

5.5.2 Perspectives	117
A Formulaire d'enquête	127
B Préférences des étudiants	129
C Points nutritionnels et fonctions d'utilités marginales	133
D Différents tableaux de capacités	145

Table des figures

1.1	Exemple de représentation graphique d'une relation binaire	11
2.1	Une illustration des éléments \mathcal{B}_m , \mathcal{B}_q , \mathcal{B}_{r_i} et \mathcal{B}_0 tels que $m > q > r_i > 0$	35
5.1	Attribution des points A et détermination du score final	100
5.2	Attribution des Points C et des classes	101
5.3	Paquet de 2 fourrés chocolat noir BIO	102
B.1	Étudiant ₁	129
B.2	Étudiant ₂	129
B.3	Étudiant ₃	129
B.4	Étudiant ₄	129
B.5	Étudiant ₅	130
B.6	Étudiant ₆	130
B.7	Étudiant ₇	130
B.8	Étudiant ₈	130
B.9	Étudiant ₉	130
B.10	Étudiant ₁₀	130
B.11	Étudiant ₁₁	131
B.12	Étudiant ₁₂	131
B.13	Étudiant ₁₃	131
B.14	Étudiant ₁₄	131
B.15	Étudiant ₁₅	131

B.16 Étudiant ₁₆	131
B.17 Étudiant ₁₇	132
B.18 Étudiant ₁₈	132
B.19 Étudiant ₁₉	132
C.1 Points obtenus par un aliment sur la composante énergie	134
C.2 Fonction d'utilité marginale u_1	135
C.3 Points obtenus par un aliment pour la composante sucre	136
C.4 Fonction d'utilité marginale u_2	137
C.5 Points obtenus par un aliment pour la composante acides gras saturés	138
C.6 Fonction d'utilité marginale u_3	139
C.7 Points obtenus par un aliment pour la composante sodium	140
C.8 Fonction d'utilité marginale u_4	141
C.9 Points obtenus par un aliment pour la composante protéines	142
C.10 Fonction d'utilité marginale u_5	142
C.11 Points obtenus par un aliment sur la composante fibres	143
C.12 Fonction d'utilité marginale u_6	143

Liste des tableaux

1.1 Performances des vélos	3
1.2 Performances des anciens thésards	4
1.3 Caractéristiques des infirmiers	4
1.4 Un exemple de capacité 2-maxitive	17
1.5 Notes des étudiants	23
1.6 Six capacités compatibles avec les préférences $a P b$ et $d P c$	24
2.1 Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{13}^{\mu} = 0$	31
2.2 L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 2.1	32
2.3 Une capacité $\beta_{\varepsilon}^{\mu} \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{13}^{\beta_{\varepsilon}^{\mu}} > 0$	32
2.4 L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité $\beta_{\varepsilon}^{\mu}$ du Tableau 2.3	32
2.5 Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}(P, I)$ et les indices d'interaction I_S^{μ} correspondants	43
2.6 Variables de décision	46
2.7 Nombre de variables $\mu(S)$ et de contraintes de monotonie ($3 \leq n \leq 12$)	47
2.8 Matrice d'évaluation des candidats	48
2.9 Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	50
2.10 L'intégrale de Choquet correspondant à la capacité μ du Tableau 2.9	51
2.11 Une capacité compatible avec PL_{NP}^{123}	51
2.12 L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 2.11	51
2.13 Une capacité μ compatible avec PL_{NN}^{123}	52
2.14 L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 2.13	52
3.1 Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\mu} = 0$	60

3.2	L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 3.1	60
3.3	Une capacité $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\beta_\varepsilon} > 0$	60
3.4	L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité β_ε^μ du Tableau 3.3 . . .	61
3.5	Une capacité $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\gamma_\varepsilon} < 0$	61
3.6	L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité γ_ε^μ du Tableau 3.5. . . .	61
3.7	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\mu > 0, \forall A \subseteq_{\geq 2} N$	64
3.8	Une capacité $\alpha \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\alpha < 0, \forall A \subseteq_{\geq 2} N$	64
3.9	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	66
3.10	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	68
3.11	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	69
3.12	Matrice d'évaluation	72
3.13	Fonctions d'utilités $u_i, i = 1, 2, 3$	73
3.14	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	75
3.15	L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 3.14 . . .	75
3.16	Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	75
3.17	L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 3.16 . . .	75
4.1	Notes des étudiants	83
4.2	Huit capacités 2-maxitives, compatibles avec les préférences $a P b$ et $d P c$.	85
4.3	Une capacité $\mu \in S_{2\text{-max}}$ et les indices d'interaction correspondants	89
4.4	Résultats de $PLMI_{NN}^{MS}$: interaction entre Mathématique et Statistique . . .	94
5.1	Informations nutritionnelles du fourré Chocolat noir BIO BJORG	102
5.2	Quelques aliments	104
5.3	Exemple pour $a = (1435; 0, 8; 1, 3; 192; 18; 11; 4)$	104
5.4	Agrégation des aliments	105
5.5	Valeurs nutritionnelles des aliments a, b, c et d	106
D.1	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$	146
D.2	Suite de la capacité du Tableau D.1.	147
D.3	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$	148
D.4	Suite de la capacité du Tableau D.3.	149

D.5	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{N_s}^\mu < 0$.	150
D.6	Suite de la capacité du Tableau D.5.	151
D.7	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{N_s}^\mu = 0$.	152
D.8	Suite de la capacité du Tableau D.7.	153
D.9	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_\mu^A < 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$.	154
D.10	Suite de la capacité du Tableau D.9.	155
D.11	Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_\mu^A > 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$.	156
D.12	Suite de la capacité du Tableau D.11.	157

Liste des abréviations et notations

Tout au long de cette thèse, nous utilisons parfois les abréviations et notations suivantes.

- AMCD : Aide MultiCritère à la Décision.
- PL : Programme Linéaire.
- PLMI : Programme Linéaire MIxte.
- UTA : UTilités Additives.
- MAUT : MultiAttribute Utility Theory.
- MOPI : MOnotonicity of Preferential Information.
- Resp. : Respectivement.
- Nous notons $|A|$ le nombre d'éléments de l'ensemble A .
- Nous notons $A \subseteq_{\geq t} N$ si $A \subseteq N$ et $|A| \geq t$, où $t \in \mathbb{N}$.
- Nous notons $A \subseteq_{=t} N$ si $A \subseteq N$ et $|A| = t$, où $t \in \mathbb{N}$.
- Nous notons par $C_{\text{Pref}}(P, I)$ l'ensemble de toutes les capacités permettant de représenter une information ordinaire $\{P, I\}$, par une intégrale de Choquet. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'information préférentielle ordinaire sous-jacente $\{P, I\}$, nous notons simplement C_{Pref} .
- De manière similaire, nous notons par $S_{2\text{-max}}(P, I)$ l'ensemble de toutes les capacités permettant de représenter une information ordinaire $\{P, I\}$, par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'information préférentielle ordinaire sous-jacente $\{P, I\}$, nous notons simplement $S_{2\text{-max}}$.

Introduction Générale

Tout individu, qu’il appartienne ou pas à une organisation, doit être confronté à des choix quasi quotidiens. De fait, la vie d’une personne peut-être perçue comme une succession de décisions qui en font la particularité. Cette perception peut-être transposée aux organisations, à une plus grande échelle. L’aide à la décision, sollicitée par les intervenants dans ce processus, doit aider à répondre, souvent indirectement, à cette préoccupation finale. Elle est définie par Bernard Roy [89] comme étant “*l’activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponses aux questions que se posent un intervenant dans un processus de décision*”. Dans cette définition, le “celui” est généralement appelé *homme d’étude* [89] ou *analyste* [106], et l’“intervenant” est appelé *décideur* [89]. Cette définition confirme le fait que l’aide à la décision n’aide pas, nécessairement, à répondre directement à la préoccupation finale mais peut se limiter à certaines questions traduisant les préoccupations de certains intervenants. Cependant, nous pensons qu’il est important de s’assurer, en répondant à ces préoccupations, que nous apportons aussi des éléments de réponses à la préoccupation finale et que l’aide à la décision soit cohérente avec l’évolution de cette préoccupation.

La problématique décisionnelle occupe aujourd’hui une place importante en recherche opérationnelle, en intelligence artificielle et plus généralement en informatique. Cette problématique vise à assister une décision humaine, que ce soit une décision de gestion importante, un choix stratégique de l’entreprise, l’achat d’un bien de consommation par un particulier, la recommandation d’un séjour de vacances ou d’un produit culturel (spectacle, livre, disque). Ici, il s’agit de systèmes d’aide à la décision dont la fonction est de faciliter l’exploration d’un ensemble de solutions potentielles et la recherche de solutions satisfaisantes [89]. En outre,

cette problématique vise la mise en place de nombreux systèmes autonomes capables de prendre en charge des problèmes de décision répétitifs (pilotage de processus de fabrication, réglage automatique d'un appareil électronique en fonction de préférences d'un utilisateur, planification des actions d'un agent mobile autonome). Ici, le problème est déjà bien identifié et le système a pour fonction d'automatiser la prise de décision et éventuellement le suivi de ces décisions en s'appuyant sur les connaissances d'un expert humain qui facilitent la résolution du problème posé. On parle alors de *décision automatique*. Dans un cas comme dans l'autre, l'approche scientifique d'un processus de décision passe par une structuration préalable du problème, par la construction d'un modèle formel des solutions potentielles, des préférences et des objectifs du décideur, enfin par l'élaboration de procédures de choix fondées sur le modèle de préférences préalablement construit [15; 16; 89].

Dans un contexte de l'Aide MultiCritère à la Décision (AMCD), nous avons des alternatives évaluées sur la base de plusieurs critères. La théorie des fonctions d'agrégation réelles, consiste à attribuer un nombre réel à chaque alternative, de telle sorte que l'ordre sur ces nombres réels induise un ordre sur les alternatives. L'indépendance au sens des préférences (la comparaison entre deux alternatives ne dépend pas des critères sur lesquels elles ont la même évaluation) est une condition nécessaire pour que ces nombres soient obtenus à l'aide d'un modèle additif [18]. Mais cette propriété n'est pas toujours satisfaite [45] et il devient intéressant d'utiliser des modèles plus généraux comme le modèle d'intégrale de Choquet et le modèle d'intégrale de Sugeno. Ces modèles ont été popularisés par les travaux de Michel Grabisch [37; 39] et sont aujourd'hui considérés comme des outils centraux en AMCD, quand on veut échapper à l'hypothèse d'indépendance au sens des préférences [42; 45; 46].

Lorsque le décideur fournit des préférences "ordinales" incompatibles avec un modèle additif, il est courant d'interpréter cette situation par l'existence des phénomènes d'interaction entre critères. Ces phénomènes, causés par la non-additivité de la capacité élicitée, peuvent être mesurés par des indices probabilistes, en particulier l'indice de Shapley [40; 96] et l'indice de non-additivité [52; 113]. Nous trouvons des propriétés axiomatiques de plusieurs indices probabilistes dans [31; 32; 33; 42]. Dans [113], J.Z. Wu et G. Beliakov proposent un outil pour traiter cette incompatibilité avec un modèle additif. Cet outil est l'indice de non-additivité et mesure le degré de non-additivité.

À la suite de la modélisation des préférences du décideur par un modèle d'intégrale de Choquet ou de Sugeno, qui se fait par l'élicitation d'une capacité [44], nous allons nous intéresser à la manière dont interagissent les critères. Lorsque l'indice probabiliste d'un sous-ensemble de critères est négatif (resp. nul, positif), il est habituel de conclure que, l'interaction pour cet ensemble de critères est négative (resp. nulle, positive), ou alors les critères de cet ensemble sont redondants (resp. indépendants, complémentaires) [41]. Cependant, il est possible de construire une autre représentation pour laquelle les conclusions sont totalement contradictoires : *ceci constitue la problématique principale de cette thèse*. Cette problématique a été abordée pour la première fois en 2020 par Denis Bouyssou et Brice Mayag [72] dans le cas d'un modèle d'intégrale de Choquet utilisant une capacité 2-additive. Dans ce cas particulier de l'intégrale de Choquet 2-additive, seules les interactions entre deux critères sont prises en compte [40]. Il est souvent considéré comme un compromis entre un modèle additif et un modèle général d'intégrale de Choquet (c'est-à-dire utilisant une capacité qui ne se limite pas à être 2-additive) [68]. En outre, il est très souvent utilisé dans la pratique (évaluation du confort [43; 68], mesure de la performance [11; 24], conception de systèmes [81]). Cette thèse se propose d'aborder cette problématique dans le cadre d'un modèle général d'intégrale de Choquet, et d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. À cet effet, nous subdivisons ce travail en cinq chapitres.

Au premier chapitre, nous rappelons des concepts de base qui constituent le socle de tout ce travail. Plus précisément, nous rappelons quelques éléments de la théorie des graphes, utiles dans la modélisation des préférences. Ensuite, nous explorons des modèles de représentation que nous utilisons pour modéliser les préférences : le modèle additif, le modèle de l'intégrale de Choquet et, celui de l'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. En outre, nous rappelons quelques indices utilisés dans la littérature pour capter des phénomènes d'interaction entre critères. Ce premier chapitre s'achève par l'introduction de la notion d'interactions et degrés de non-additivité possibles et nécessaires.

Le deuxième chapitre quant à lui étudie la stabilité du signe de l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle d'intégrale de Choquet. Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous caractérisons les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle de l'intégrale de Choquet. Cette caractérisation est basée sur

l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous joignons une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, nous illustrons et prouvons que le signe de l'indice d'interaction de Shapley dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Par conséquent, seules les interactions nécessaires peuvent être interprétées en toute quiétude, puisque leur signe est stable dans cet ensemble. L'interprétation des autres interactions exige donc une certaine prudence. Enfin, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous proposons un modèle de programmation linéaire permettant de tester la stabilité de l'interprétation des phénomènes d'interaction.

Au troisième chapitre, nous effectuons un travail similaire à celui du deuxième chapitre, en utilisant l'indice de non-additivité. Cet indice a été proposé en 2018 par Jian-Zhang Wu et Gleb Beliakov dans [113], comme un indice alternatif, qui représenterait, mieux que l'indice d'interaction de Shapley, le type de non-additivité. C'est ainsi que nous choisissons de travailler avec ce nouvel indice. En utilisant les caractérisations de représentation du chapitre 2, nous obtenons beaucoup plus de résultats qu'avec l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet. Ainsi, l'indice d'interaction de Shapley reste "mieux" que celui de non-additivité, qui, présentent beaucoup plus de résultats négatifs. Enfin, comme au chapitre précédent, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous proposons un modèle de programmation linéaire permettant de tester l'existence de certains degrés de non-additivité nécessaires.

Quant au quatrième chapitre, nous y proposons et étudions la notion d'interaction entre deux critères dans un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous caractérisons les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Cette caractérisation est aussi basée sur l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous joignons une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, nous proposons un indice d'interaction entre deux critères, dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive. Ensuite, nous étudions les phénomènes d'interaction sur la base de cet indice. En outre, grâce à la linéarisation des fonctions *min* et *max*, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du

cadre des alternatives binaires, comme aux chapitres précédents, nous proposons un modèle de programmation linéaire *mixte* permettant de tester si l'interprétation des indices d'interaction peut se faire en toute sécurité ou non.

Pour ce qui est du dernier chapitre, il est consacré à l'étude de l'interaction et du degré de non-additivité entre les critères retenus dans l'évaluation du nutri-score. Nous choisissons un sous-ensemble *stratégique* de critères, pour lequel la dépendance linéaire est établie. Par la suite, nous illustrons que, pour ce sous-ensemble stratégique, l'interaction peut être captée dans tous les sens (négatif, nul et positif). Cela nous a permis de déduire que, dans le cadre du nutri-score, l'indice de Shapley ne capte pas *nécessairement* l'interaction entre critères, dans un modèle d'intégrale de Choquet. Nous y avons aussi décelé quelques failles du nutri-score appliqué sur certains aliments.

L'aide multicritère à la décision

1.1 Introduction

Ce chapitre est un panorama du domaine d'AMCD [93]. Après avoir fait une brève introduction du domaine d'AMCD, nous présentons des concepts liés à la modélisation des préférences. Nous parcourons ensuite certaines fonctions d'agrégation classiques, à savoir le modèle additif, l'intégrale de Choquet et l'intégrale de Sugeno. Nous achevons le chapitre par la présentation de l'indice d'interaction et celui de non-additivité dans un modèle de l'intégrale de Choquet.

1.2 Problèmes de décision multicritère

Un problème d'AMCD se caractérise par la prise en compte de plusieurs critères à intégrer, dans l'analyse des préférences, la comparaison des solutions et la détermination d'une (des) "meilleure(s)" solution(s). Pour introduire formellement un problème de décision multicritère, on commence par identifier, avec le décideur, sur quoi va porter la décision (l'ensemble des actions possibles) ou l'*objet de la décision* selon Bernard Roy [89]. Cet ensemble, souvent noté X peut être donné de manière explicite (par exemple en listant les solutions envisagées) ou de manière implicite (par exemple en spécifiant un ensemble de contraintes ou de propriétés que les solutions doivent satisfaire) [93]. Dans tous les cas, l'ensemble X définit les solutions sur lesquelles on souhaite faire porter l'analyse décisionnelle, soit que l'on juge que ce sont les seules disponibles, les seules réalisables ou les seules admissibles.

On introduit ensuite une famille cohérente [89] de critères $N = \{1, \dots, n\}$ prenant la forme de fonctions f_i , $i \in N$, permettant de traduire les objectifs du décideur. Pour tout

$x \in X$ et tout $i \in N$, on appelle *performance de x* sur le critère i la quantité $f_i(x)$ reflétant la valeur de x du point de vue du critère i .

La détermination de l'ensemble des alternatives X et l'ensemble des critères N fait partie du problème de *structuration*. Des détails peuvent être trouvés dans [12; 60; 89; 93]. Dans cette thèse, nous considérons ce problème résolu et donc ne nous y intéressons pas.

Les fonctions critères f_i sont définies sur X et à valeurs dans un ensemble X_i , $i \in N$. L'ensemble $X = X_1 \times \dots \times X_n$, qui constitue un nouvel espace de description des alternatives. Pour simplifier les notations, on posera $x_i = f_i(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $i \in N$. Une alternative x est donc représentée dans X par le vecteur (x_1, \dots, x_n) [93]. Pour simplifier la présentation, on supposera également qu'une alternative x est d'autant meilleure que ses performances x_i , $i \in N$ sont élevées, c'est-à-dire, les fonctions f_i sont à maximiser (on peut toujours se ramener à ce cas moyennant, le cas échéant, un réaménagement des performances sur la fonction critère concernée). Les critères sont re-codés numériquement en utilisant, pour tout $i \in N$, une *fonction d'utilité* [111] u_i de X_i vers $[0, +\infty[$.

Parfois les performances x_i n'ont aucune signification cardinale et seul leur utilité ordinale compte : c'est souvent le cas dans un modèle d'intégrale de Sugeno [26]. Dans d'autres cas elles peuvent représenter une utilité cardinale (définie à une transformation affine positive près) : c'est souvent le cas dans un modèle d'intégrale de Choquet [76].

Nous présentons à présent les manières dont l'aide à la décision doit être envisagée.

1.3 Différentes problématiques en AMCD

On distingue trois principales problématiques d'aide multicritère à la décision [89].

- La problématique du **choix**, encore appelée problématique α : ici le but est de déterminer parmi les éléments de A , un sous-ensemble aussi restreint que possible des actions les plus satisfaisantes.

Exemple : l'achat d'un véhicule.

- La problématique du **rangement**, encore appelée problématique γ : ici le but est de classer les alternatives de la meilleure à la moins bonne, avec des possibles ex aequo.

Exemple : le classement des projets soumis à une assemblée. Ce classement permettra

d'avoir un ordre de priorité sur l'exécution de ces projets en fonction du financement disponible.

- La problématique du **tri**, encore appelée problématique β : ici le but est de répartir les alternatives dans des catégories pré-existantes (ordonnées ou non).

Exemple : définir des catégories de confort pour les offres (très inconfortable, inconfortable, confortable, très confortable) et préciser les recommandations nécessaires afin d'encourager les fournisseurs à passer à la catégorie supérieure.

1.4 Quelques exemples de problèmes d'AMCD

Nous donnons ici quelques situations qui relèvent des problèmes d'AMCD [41; 89; 93] :

- choix d'un moyen de transport ;
- choix d'un site d'implantation d'une usine, d'un magasin... ;
- évaluation des dossiers de crédit ;
- sélection des projets architecturaux, environnementaux... ;
- achat d'un matériel ;
- classement des meilleurs hôpitaux ;
- classement des projets soumis à une assemblée ;
- affectation des unités d'enseignement aux enseignants.

Nous présentons maintenant quelques exemples explicites relevant des problèmes d'AMCD.

Ils relèvent respectivement des problématiques α , γ et β .

Exemple 1.4.1. Achat d'un vélo

Un individu veut acheter soit un vélo de course, soit un vélo tout terrain (VTT) suivant les seuls critères prix, robustesse et vitesse. Leurs performances sont données au Tableau 1.1.

	VTT	Vélo de course
1 : Prix	238 euros	369 euros
2 : Robustesse	Très bonne	Moyenne
3 : Vitesse	20 km/h	35 km/h

TABLEAU 1.1 – Performances des vélos

Exemple 1.4.2. *Classement des anciens thésards*

En vue d'une ouverture d'un ou de plusieurs postes (en fonction du budget à venir), un laboratoire de recherche souhaite classer trois des anciens thésards Alice, Boris et Christian, suivant les performances résumées au Tableau 1.2.

	<i>Alice</i>	<i>Boris</i>	<i>Christian</i>
1 : <i>Durée de la thèse</i>	37 mois	45 mois	33 mois
2 : <i>Nombre de publications</i>	4	5	3

TABLEAU 1.2 – Performances des anciens thésards

Exemple 1.4.3. *Affectation des nouveaux infirmiers*

Le ministère de la santé souhaite affecter des nouveaux infirmiers dans des hôpitaux, en tenant compte du mérite et de leur desiderata. Tout est résumé au Tableau 1.3, avec $H_1 \succ H_2$.

	<i>Antoine</i>	<i>Kylian</i>	<i>Célestin</i>	<i>Raphael</i>
1 : <i>Desiderata</i>	H_1	H_2	H_1	H_2
2 : <i>Rang à la sortie de l'école</i>	3e	1er	4e	2e

TABLEAU 1.3 – Caractéristiques des infirmiers

Nous allons à présent aborder les différentes approches généralement utilisées en AMCD.

1.5 Différentes approches en AMCD

Dans cette section, nous allons lister les approches existantes dans la littérature en AMCD. On en distingue généralement quatre [27; 75], à savoir, l'approche normative, l'approche descriptive, l'approche prescriptive, [9], où le décideur ne joue pas un rôle central dans leur élaboration, mais aussi l'approche constructive [90], où le décideur est sollicité tout au long de la mise en œuvre du modèle. Nous détaillons à présent ces quatre approches, que l'on retrouve dans [68].

1. L'approche *normative* [30; 67; 110; 112].

Les modèles construits dans cette approche sont fondés sur une rationalité, à partir

de normes et standards établis à l'avance et communément acceptés. Le décideur est rarement sollicité pour la construction de tels modèles. La validité des résultats fournis par le modèle repose sur leur cohérence avec les axiomes de la rationalité économique. Par exemple, on cherche un modèle permettant d'ordonner (du meilleur au moins bon) des investissements selon leur rentabilité économique. Si un investissement a est plus rentable qu'un investissement b et l'investissement b plus rentable qu'un investissement c , alors l'investissement a doit être plus rentable que l'investissement c .

2. L'approche *descriptive* [53; 82; 94].

Dans cette approche, les modèles sont généralement fondés sur des données ou des comportements existants (observations). Ils servent donc à décrire des phénomènes déjà réalisés pouvant se reproduire dans les mêmes conditions. Le décideur n'est également pas directement sollicité pour la mise en oeuvre de ces modèles. La validité des résultats fournis par ces modèles repose sur l'observation d'autres phénomènes de même nature.

3. L'approche *prescriptive* [10; 60; 89].

Ici, la différence avec les deux premières est qu'elle ne repose sur aucune information existante (rationalité économique ou observations). L'analyste doit collecter et structurer ces informations afin de construire un modèle. L'intervention du décideur n'est donc pas nécessaire lors de la construction du modèle, néanmoins, il intervient pour sa validation. Par exemple, un médecin qui questionne un malade (pouvant décrire correctement ses symptômes mais ne sait pas ce qu'il a) afin de lui prescrire un traitement.

4. L'approche *constructive* [15; 22; 34; 91].

La particularité de cette approche est que le décideur est sollicité, à la fois, lors de la construction du modèle mais aussi lors de sa validation. Les modèles sont donc fondés sur les connaissances des décideurs. L'homme d'étude cherche à les expliciter ou à les formaliser. La validation de ces modèles s'effectue, à l'image de l'approche prescriptive, par le décideur. Par exemple, lorsque l'homme d'étude cherche à construire un modèle représentant les préférences d'un décideur. Cette thèse s'inscrit dans cette approche.

À la Section 1.2, nous évoquons les fonctions d'utilité u_i , permettant de re-coder numériquement les critères. Ces fonctions d'utilité ne sont pas uniques lorsqu'elles existent, il se pose donc une question de choix. Une réponse correcte à cette question de choix fait appel à la notion d'échelle numérique, basée sur la théorie de mesurage [13; 14; 17; 63; 87].

1.6 Notion d'échelle

Une échelle [63] peut être définie comme un couple (f, Y) où :

- Y est un ensemble de nombres susceptibles de représenter une codification d'une information relative à un ensemble d'alternatives X .
- f est une représentation numérique appropriée de X vers Y .

Les types d'échelles sont développés par Stevens [101]. Ici, nous nous intéressons en particulier aux échelles suivantes, que l'on retrouve dans [68]. Dans cette thèse, nous utilisons uniquement l'échelle ordinale.

1. Échelle *ordinale*.

Il s'agit de l'ensemble des nombres donnant sens à la caractéristique d'ordre (rangement par valeurs croissantes ou décroissantes des nombres constituant la série). Ainsi, si f est une représentation numérique appropriée de X , alors toute transformation monotone ϕ de f l'est aussi.

Exemple : les indicateurs de la qualité de l'air sur une échelle de 1 (meilleure) à 10 (pire), vérifient la caractéristique d'ordre car un air de qualité n est meilleur qu'un air de qualité m , où $n, m \in \{1, \dots, 10\}$ et $n > m$, mais ne vérifient pas la caractéristique d'origine (rôle que joue le 0 vis-à-vis des nombres constituant la série, le 0 désignant l'absence de quantité). En effet, un air de qualité 6 n'est pas nécessairement deux fois moins bon qu'un air de qualité 3, ni celle de distance : la différence de qualité entre un air de qualité 6 et un air de qualité 4 n'est pas nécessairement la même avec la différence de qualité entre un air de qualité 3 et un air de qualité 1.

2. Échelle *d'intervalle*.

C'est une échelle ordinale à laquelle on donne un sens à la caractéristique de distance (rangement par valeurs croissantes ou décroissantes des différences entre tous

les couples de nombres constituant la série). Il en découle que si f est une représentation numérique appropriée de X , alors, toute transformation affine ϕ de f ($\phi \circ f = \alpha f + \beta$, où $\alpha > 0$) l'est aussi.

Exemple : la température en degrés Celsius vérifie la caractéristique de distance car la différence de température entre T et $T + \alpha$ est la même qu'entre T' et $T' + \alpha$, mais ne vérifie pas la caractéristique d'origine, car une température de 10° n'est pas le double d'une température de 5° .

3. Échelle *de ratio*.

C'est une échelle d'intervalle à laquelle on donne sens à la caractéristique d'origine. Il en découle que si f est une représentation numérique appropriée de X , alors toute transformation ϕ de f telle que $\phi \circ f = \alpha f$, l'est aussi.

Exemple : la masse en kg vérifie la caractéristique d'origine. En effet, une masse de $20\ kg$ est le quadruple d'une masse de $5\ kg$.

3. Échelle *absolue*.

Il s'agit d'une échelle de ratio qui n'autorise qu'une seule représentation numérique appropriée.

Exemple : le nombre d'habitants dans une ville vérifie la caractéristique d'origine. En effet, on peut dire qu'il y a trois fois plus d'habitants dans une ville que dans une autre mais toute transformation de ce nombre n'aurait aucun sens, contrairement à une masse ou à une longueur, où l'on peut changer d'échelle ($g \rightarrow kg, cm \rightarrow m$) sans perdre la signification de l'information.

Dans les chapitres suivants, quelques notions de théorie de graphes orientés nous seront utiles. La section suivante se charge d'en faire une brève revue.

1.7 Quelques notions sur les graphes orientés

Cette section est inspirée de [19; 68]. Elle débute par des définitions sur les relations binaires.

1.7.1 Relations binaires

Définition 1.7.1. Une relation binaire T sur un ensemble X est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times X$, c'est-à-dire, un ensemble de couples (a, b) d'éléments de X . Si le couple (a, b) appartient à l'ensemble T , nous noterons parfois aTb au lieu de $(a, b) \in T$. Dans le cas contraire, nous écrirons $(a, b) \notin T$ ou $\text{non}(aTb)$.

Les propriétés suivantes sont usuelles dans la littérature [4; 79] et nous seront utiles.

Définition 1.7.2. Une relation binaire T sur X est dite :

- réflexive si $(x, x) \in T, \forall x \in X$,
- irreflexive si $(x, x) \notin T, \forall x \in X$,
- totale (complète) si $(x, y) \in T$ ou $(y, x) \in T, \forall x, y \in X$,
- symétrique si $(x, y) \in T \implies (y, x) \in T, \forall x, y \in X$,
- asymétrique si $(x, y) \in T \implies (y, x) \notin T, \forall x, y \in X$,
- antisymétrique si $(x, y) \in T$ et $(y, x) \in T \implies x = y, \forall x, y \in X$,
- transitive si $(x, y) \in T$ et $(y, z) \in T \implies (x, z) \in T, \forall x, y, z \in X$,
- un pré-ordre si T est réflexive et transitive,
- un pré-ordre total ou pré-ordre complet si T est complète, réflexive et transitive,
- un ordre si T est réflexive, antisymétrique et transitive,
- un ordre total si T est complète, réflexive, antisymétrique et transitive,
- une relation d'équivalence si T est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.7.3. Soient $x \in X$ et T une relation d'équivalence sur X . On appelle classe d'équivalence associée à x , notée $[x]_T$, l'ensemble $\{y \in X : xTy\}$. L'ensemble des classes d'équivalence $[y]_T, y \in X$ est souvent noté X/T et est appelé ensemble quotient de X par T .

Remarque 1.7.1. Pour toute relation d'équivalence T sur X , on a toujours $x \in [x]_T$, car T est réflexive. Il est élémentaire de montrer que $\forall x, y \in X$, soit $[x]_T = [y]_T$, soit $[x]_T \cap [y]_T = \emptyset$. Une relation d'équivalence induit donc une partition unique de X en classes d'équivalence et vice versa.

Toute relation binaire est constituée d'une partie asymétrique et d'une partie symétrique définies comme suite.

Définition 1.7.4. Soit T une relation binaire sur un ensemble X .

1. La partie asymétrique de T , souvent notée P est définie par

$$P = \{(x, y) \in T : (y, x) \notin T\}$$

2. La partie symétrique de T , souvent notée I est définie par

$$I = \{(x, y) \in T : (y, x) \in T\}$$

Remarque 1.7.2. Soit T une relation binaire sur X telle que xTy s'interprète par "x est au moins aussi bon que y", où $x, y \in X$. Soient P sa partie asymétrique et I sa partie symétrique. Nous interprétons les relations P et I de la manière suivante.

- $(x, y) \in P$ signifie que x est strictement préféré à y ,
- $(x, y) \in I$ signifie que x et y sont jugés indifférents.

Remarque 1.7.3. Nous noterons parfois un pré-ordre T par \succsim , sa partie asymétrique par \succ et sa partie symétrique \sim .

1.7.2 Graphes orientés

Un graphe orienté $G = (V, E)$ [36] est la donnée de deux ensembles : un ensemble V dont les éléments sont appelés *sommets*, et un ensemble E partie du produit cartésien $V \times V$, dont les éléments sont appelés *arcs*. Si $e = (u, v)$ est un arc de G , alors le sommet u (respectivement le sommet v) sera appelé *origine* (respectivement *extrémité*) de l'arc e . Dans ce cas, le sommet u est dit aussi *prédécesseur* de v , et v est dit *successeur* de u . Les définitions suivantes concernent quelques propriétés élémentaires [65] sur les sommets ou arcs d'un graphe orienté.

Définition 1.7.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et $v_0, v_1, \dots, v_q \in V$ avec $q \in \mathbb{N}$.

1. On dira que la suite $((v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{q-1}, v_q))$ est un chemin dans G allant de v_0 à v_q si $\forall l \in \{1, \dots, q\}$, (v_{l-1}, v_l) est un arc de G .
2. Un circuit (ou cycle) dans G est un chemin $((v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{q-1}, v_q))$ dans G tel que $v_0 = v_q$.
3. Une composante fortement connexe de G est un sous-ensemble A de V tel que :
 - soit A est réduit à un singleton;

- soit entre deux sommets v_1 et v_2 de A , il existe dans G , un chemin de v_1 à v_2 et un chemin de v_2 à v_1

Lorsque le graphe G est sans circuit (encore appelé graphe acyclique), il est possible d'ordonner ses sommets en une suite dans laquelle le sommet terminal de chaque arc apparaît avant le sommet de son origine [36]. Cette opération qui consiste à mettre ainsi en niveaux les sommets d'un graphe sans circuit est appelé *tri topologique* ou *parcours topologique*. L'algorithme usuel du tri topologique consiste à rechercher à chaque itération tous les sommets qui n'ont pas de successeur. Ces sommets constituent alors un niveau du tri. Ensuite, on supprime ces sommets avant de rechercher le niveau suivant. On obtient ainsi $q + 1$ niveaux donnés par les ensembles $V_i = \{x \in V \setminus (V_0 \cup \dots \cup V_{i-1}) : \forall y \in V \setminus (V_0 \cup \dots \cup V_{i-1}), (x, y) \notin E\}$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, q$ avec $V_0 \cup \dots \cup V_{i-1} = \emptyset$ pour $i = 0$.

Remarque 1.7.4.

- Les ensembles V_0, V_1, \dots, V_q forment une partition de V .
- Le tri topologique peut aussi se construire de la manière suivante : $\forall i = 0, 1, 2, \dots, r$, $V'_i = \{x \in V \setminus (V'_0 \cup \dots \cup V'_{i-1}) : \nexists y \in V \setminus (V'_0 \cup \dots \cup V'_{i-1}), (y, x) \in E\}$, avec $V'_0 \cup \dots \cup V'_{i-1} = \emptyset$ pour $i = 0$. Les deux partitions $\{V_0, \dots, V_q\}$ et $\{V'_0, \dots, V'_r\}$ sont en général distinctes.

Par analogie avec la Définition 1.7.5, on a les notions suivantes pour les relations binaires.

Définition 1.7.6. Soit \mathcal{R} une relation binaire sur X et P sa partie asymétrique. Il existe un cycle strict dans \mathcal{R} s'il existe des éléments $x_0, x_1, \dots, x_r \in X$ tels que $x_0 \mathcal{R} x_1 \mathcal{R} \dots \mathcal{R} x_r \mathcal{R} x_0$ et pour au moins un $i \in \{0, \dots, r - 1\}$, $x_i P x_{i+1}$.

Définition 1.7.7. Soit \mathcal{R} une relation binaire sur X . Nous écrivons $x TC_{\mathcal{R}} y$ s'il existe des éléments $x_0, x_1, \dots, x_r \in X$ tels que $x = x_0 \mathcal{R} x_1 \mathcal{R} \dots \mathcal{R} x_r = y$. Ainsi, $TC_{\mathcal{R}}$ est la fermeture transitive de la relation binaire \mathcal{R} . Nous avons choisi la notation TC en rapport avec *Transitive Closure* (en anglais).

1.7.3 Représentation graphique d'une relation binaire

Une relation binaire T sur X peut être représentée par un graphe orienté $G = (X, T)$ où X est l'ensemble des sommets du graphe et T est l'ensemble des arcs du graphe (couples de

sommets). Les propriétés remarquables d'une relation binaire peuvent facilement s'exprimer à l'aide de la représentation sagittale du graphe $G = (X, T)$. La réflexivité de T se traduit par la présence d'une boucle en chaque sommet. La symétrie de T signifie que la présence d'un arc orienté de x vers y implique l'existence d'un arc orienté de y vers x . La transitivité de T se traduit en terme de graphe par le fait que s'il existe un chemin de longueur 2 de x vers y , il existe un arc de x vers y . Prendre la relation inverse de T revient à inverser l'orientation de tous les arcs du graphe. Prendre la relation complémentaire consiste à ajouter tous les arcs manquants dans le graphe et à supprimer tous les arcs existants. Notons qu'une relation symétrique peut, plus commodément être représentée par un graphe non orienté dans lequel les couples (x, y) et (y, x) de la relation donnent lieu à une arête entre les sommets x et y . Un graphe orienté peut aussi être représenté par une matrice, mais nous n'utilisons pas cette représentation matricielle dans la cadre de cette thèse. La Figure 1.1 donne une représentation graphique de la relation $T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$ sur l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$.

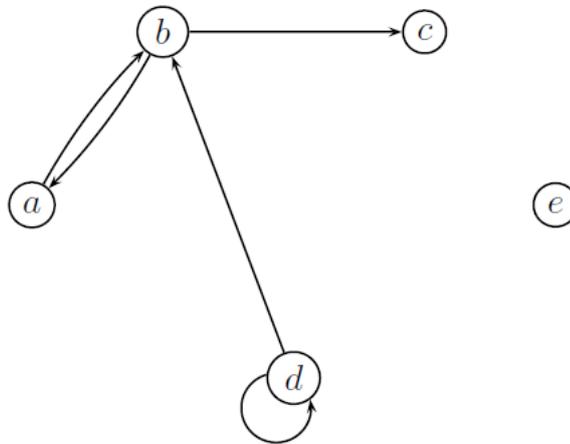


FIGURE 1.1 – Exemple de représentation graphique d'une relation binaire

Une partie des travaux menés dans le cadre de cette thèse se fonde sur les alternatives binaires, c'est-à-dire, des alternatives qui contiennent soit un niveau neutre soit un niveau satisfaisant sur chaque critère. Nous introduisons à présent cet ensemble.

1.8 Ensemble des alternatives binaires généralisées

Nous supposons le décideur capable d'identifier sur chaque critère $i \in N$, deux niveaux de référence 0_i et 1_i :

- le niveau 0_i dans X_i est considéré comme *neutre* et on fixe $u_i(0_i) = 0$,
- le niveau 1_i dans X_i est considéré comme *bon* et on fixe $u_i(1_i) = 1$.

L'existence de tels niveaux de référence trouve ses racines en psychologie [97; 100] et constitue une des thèses fondamentales de l'économiste Herbert Simon dans sa théorie de la rationalité limitée [83; 98].

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ et $S \subseteq N$, nous écrirons parfois $u(x)$ au lieu de $(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$ et nous définissons les alternatives $a_S = (1_S, 0_{-S}) \in X$ telles que $a_i = 1_i$ si $i \in S$ et $a_i = 0_i$ sinon. En considérant uniquement les alternatives a_S telles que $|S| \leq 2$, nous obtenons l'ensemble des alternatives binaires, défini comme suite.

Définition 1.8.1. *L'ensemble des **alternatives binaires** [73] est défini par :*

$$\mathcal{B} = \{0_N, (1_i, 0_{N-i}), (1_{ij}, 0_{N-ij}) : i, j \in N, i \neq j\}, \text{ où}$$

- $0_N = (1_\emptyset, 0_N) = a_\emptyset$ est une alternative considérée neutre sur tous les critères.
- $(1_i, 0_{N-i}) = a_i$ est une alternative jugée satisfaisante sur le critère i et neutre sur les autres critères.
- $(1_{ij}, 0_{N-ij}) = a_{ij}$ est une alternative jugée satisfaisante sur les critères i et j , mais neutre sur les autres critères.

En considérant toutes les alternatives a_S telles que $S \subseteq N$, nous obtenons l'ensemble de toutes les alternatives binaires, défini comme suite.

Définition 1.8.2. *L'ensemble des **alternatives binaires généralisées** est défini par :*

$$\mathcal{B}^g = \{a_S = (1_S, 0_{-S}) : S \subseteq N\}.$$

Nous utilisons la terminologie “généralisées” car l'ensemble des alternatives binaires \mathcal{B} était déjà connu dans la littérature [47; 73]. En plus, nous avons bien $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}^g$.

Nous abordons à présent la problématique de la modélisation des préférences du décideur. Pour cela, nous utilisons des fonctions d'agrégation, qui font l'objet de la section suivante.

1.9 Quelques fonctions d'agrégation classiques en AMCD

En AMCD, il existe plusieurs méthodes classiques, partitionnées en deux catégories : théorie de l'utilité multi-attribut et Surclassement [41; 89]. Dans la première catégorie, le principe de chaque méthode est de comparer les alternatives de façon binaire (deux à deux), puis d'agrégier les comparaisons obtenues : on parle souvent de *Comparer puis Agrégier* (CA). Quant à la seconde catégorie, le principe de chaque méthode est d'utiliser une *fonction d'agrégation* [48] pour agréger les performances de chaque alternative, en une valeur numérique, puis de comparer les agrégations obtenues : on parle souvent d'*agrégier puis comparer* (AC). Dans cette section, nous portons un intérêt particulier, d'abord au modèle additif, ensuite à l'intégrale de Choquet, enfin à l'intégrale de Sugeno, qui occupent une place centrale dans cette thèse. Ces trois méthodes font partie de la seconde catégorie (AC) [41; 80].

1.9.1 Modèle additif

Le modèle additif est le modèle d'agrégation le plus couramment utilisé dans la *théorie de l'utilité multi-attribut* [18; 29]. Le but de cette théorie est de représenter numériquement les préférences du décideur sous forme d'un pré-ordre complet \succsim_X à l'aide d'une fonction $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ appelée *fonction d'utilité globale* satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall x, y \in X, x \succsim_X y \iff U(x) \geq U(y). \quad (1.1)$$

La fonction U est donc construite de sorte que plus l'utilité globale associée à une alternative est grande, plus cette alternative est “bonne” pour le décideur. Le modèle additif se définit par l'existence des fonctions d'utilités marginales $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X, U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in N} u_i(x_i). \quad (1.2)$$

La quantité $u_i(x_i)$ peut être interprétée comme l'intensité de satisfaction, pour le décideur, de x_i sur le critère i . La difficulté réside souvent dans la détermination des fonctions d'utilités marginales u_i . Plusieurs méthodes [61; 109] ont été développées pour résoudre cette difficulté. En particulier, la méthode UTA (UTilités Additives) [54; 99].

Nous donnons à présent un exemple de calcul d'une utilité additive.

Exemple 1.9.1. *Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $x = (15, 18, 11)$, $u_1(15) = 16$, $u_2(18) = 19$ et $u_3(11) = 12$. On a $U(x) = 16 + 19 + 12 = 47$.*

La somme pondérée est un cas particulier, souvent utilisé, du modèle additif. Elle suppose en plus des fonctions d'utilités marginales $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$, l'existence de réels positifs w_i (poids du critère i) tels que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X, U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in N} w_i u_i(x_i). \quad (1.3)$$

Les poids w_i représentent des *taux de substitution entre critères* (gain sur un critère permettant de compenser une perte sur un autre). Par conséquent, ce modèle véhicule l'idée de *compensations* possibles entre critères. Le modèle additif est facile à comprendre, mais présente quelques limites. En particulier, il viole l'axiome d'*indépendance au sens des préférences* [92]. Cet axiome stipule que la comparaison entre deux alternatives ne dépend pas des critères sur lesquels ces deux alternatives ont la même performance. Cette violation est explicitée à la Sous-section 1.12.1 de ce chapitre. Cette limite est comblée par le modèle de l'intégrale de Choquet, qui fera l'objet de la sous-section suivante.

Nous allons à présent présenter deux autres fonctions d'agrégation, à savoir le modèle de l'intégrale de Choquet et celui de l'intégrale de Sugeno 2-maxitive. Ces deux modèles utilisent la notion de capacité [23; 81], définie comme une fonction μ de l'ensemble 2^N vers $[0, 1]$ telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(N) = 1$,
- $\forall S, T \in 2^N, [S \subseteq T \implies \mu(S) \leq \mu(T)]$ (monotonie).

Cette notion est équivalente à celle de jeu monotone en théorie des jeux [20; 84].

1.9.2 Intégrale de Choquet

Dans le cadre de l'intégrale de Choquet, l'ensemble d'arrivée $[0, 1]$ de la capacité μ est muni des opérations arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division ...).

Les fonctions d'utilité u_i permettant de re-coder les critères, sont construites de telle sorte que les critères soient *commensurables* [47], en ce sens que le décideur soit en mesure de comparer un élément d'un point de vue à un autre élément d'un autre point de vue. C'est-à-dire, $\forall x_i \in X_i, \forall x_j \in X_j, u_i(x_i) \geq u_j(x_j)$ si et seulement si le décideur considère x_i au moins aussi bon que x_j . L'utilisation de l'intégrale de Choquet nécessite la commensurabilité des critères [47]. Dans cette thèse, nous considérons ce problème de commensurabilité des critères, résolu.

L'intégrale de Choquet a été utilisée pour la première fois en AMCD par T. Murofushi et M. Sugeno à la fin des années quatre-vingt [76; 77]. Depuis, plusieurs études sur l'intégrale de Choquet en AMCD ont été menées [23; 40; 42; 45; 62; 64; 69; 78; 108].

Définition 1.9.1. *Étant données une capacité μ et une alternative $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, l'expression de l'intégrale de Choquet de x pour μ est donnée par :*

$$\begin{aligned} C_\mu(u(x)) &= C_\mu(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \mu(N_{\sigma(i)}), \end{aligned}$$

où σ est une permutation sur N telle que : $u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \leq u_{\sigma(2)}(x_{\sigma(2)}) \leq \dots \leq u_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})$, $N_{\sigma(i)} = \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$ et $u_{\sigma(0)}(x_{\sigma(0)}) = 0$.

Nous donnons un exemple de calcul d'une intégrale de Choquet.

Exemple 1.9.2. *Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $x = (15, 18, 11)$, $u_i(x_i) = x_i$ pour $i \in N$ et la capacité μ définie par $\mu(1) = \mu(3) = 0$, $\mu(2) = 0.1$, $\mu(12) = 0.6$, $\mu(13) = \mu(23) = 0.2$.*

On a $\sigma(x) = (11, 15, 18)$ et $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$, donc $x_{\sigma(1)} = 11 = x_3$, $x_{\sigma(2)} = 15 = x_1$, $x_{\sigma(3)} = 18 = x_2$, d'où $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, $N_{\sigma(1)} = N$, $N_{\sigma(2)} = \{1, 2\}$, $N_{\sigma(3)} = \{2\}$.

Donc $C_\mu(u(x)) = 11\mu(N) + (15 - 11)\mu(12) + (18 - 15)\mu(2) = 11 \times 1 + 4 \times 0.6 + 3 \times 0.1 = 13.7$.

Remarque 1.9.1. Pour une capacité additive μ , c'est-à-dire, $\mu(S) = \sum_{i \in S} \mu_i$, $\forall S \subseteq N$, l'intégrale de Choquet correspondante est réduite à un modèle additif. Ainsi, l'intégrale de Choquet est un outil généralisant le modèle additif.

1.9.3 Intégrale de Sugeno 2-maxitive

Dans le cadre de l'intégrale de Sugeno, l'ensemble d'arrivée $[0, 1]$ de la capacité μ est muni uniquement des deux opérations de comparaison min et max.

L'intégrale de Sugeno [26; 28; 86; 102] est une fonction d'agrégation connue en AMCD comme une version ordinale de l'intégrale de Choquet. Son application nécessite également la commensurabilité des critères.

Définition 1.9.2. Pour une alternative $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ et une capacité μ , l'expression de l'intégrale de Sugeno de x pour μ est donnée par :

$$\begin{aligned} S_\mu(u(x)) &= S_\mu(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)) \\ &= \bigvee_{i=1}^n \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) \wedge \mu(N_{\sigma(i)}) \right) \end{aligned}$$

où σ est une permutation sur N vérifiant : $u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \leq u_{\sigma(2)}(x_{\sigma(2)}) \leq \dots \leq u_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})$ et $N_{\sigma(i)} = \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$.

Remarque 1.9.2. L'équation 1.4 donne une expression équivalente de l'intégrale de Sugeno d'une alternative x , pour une capacité μ . Cette expression est donnée dans [70].

$$S_\mu(u(x)) = \bigvee_{A \subseteq N} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right). \quad (1.4)$$

Nous donnons à présent un exemple de calcul d'une intégrale de Sugeno.

Exemple 1.9.3. Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $x = (0.3, 0.8, 0.5)$, $u_i(x_i) = x_i$ pour $i \in N$ et la capacité μ définie par $\mu(1) = \mu(3) = 0$, $\mu(2) = 0.1$, $\mu(12) = 0.6$, $\mu(13) = \mu(23) = 0.2$.

On a $\sigma(x) = (0.3, 0.5, 0.8)$ et $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ donc $x_{\sigma(1)} = 0.3 = x_1$, $x_{\sigma(2)} = 0.5 = x_3$, $x_{\sigma(3)} = 0.8 = x_2$, d'où $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$, $N_{\sigma(1)} = N$, $N_{\sigma(2)} = \{2, 3\}$ et $N_{\sigma(3)} = \{2\}$. Ainsi $S_\mu(u(x)) = (0.3 \wedge \mu(N)) \vee (0.5 \wedge \mu(23)) \vee (0.8 \wedge \mu(2)) = (0.3 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.1) = 0.3$.

La notion d'intégrale de Sugeno 2-maxitive est fondée sur celle d'une capacité 2-maxitive, qui à son tour est fondée sur la notion de transformée de Möbius.

Définition 1.9.3. La transformée ordinale de Möbius m^μ [48], d'une capacité μ est définie pour tout $S \subseteq N$ par :

$$m^\mu(S) = \begin{cases} \mu(S) & \text{si } \mu(S) > \bigvee_{T \subsetneq S} \mu(T) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

La définition d'une capacité nécessite généralement $2^n - 2$ coefficients, qui sont les valeurs de μ pour tous les sous-ensembles de N (hormis \emptyset et N dont les valeurs sont respectivement 0 et 1). Lorsque n est grand, cette détermination devient difficile. Ce qui avait motivé l'introduction du concept de capacité k -maxitive, où k est un entier compris entre 1 et n , afin de réduire le nombre de paramètres de μ à déterminer.

Définition 1.9.4. Une capacité μ est dite k -maxitive [21; 74] lorsque

$$\mu(S) = \bigvee_{\substack{T \subseteq S \\ |T| \leq k}} \mu(T) \quad \text{pour tout } S \subseteq N. \quad (1.6)$$

Remarque 1.9.3. Notons qu' :

- une capacité k -maxitive est entièrement déterminée par ses valeurs sur les ensembles d'au plus k éléments ;
- il n'est pas difficile de voir à partir de l'équation 1.6 que, pour une capacité k -maxitive μ , nous avons $m^\mu(S) = 0$ pour tout $S \subseteq N$ tel que $|S| > k$. Ainsi S_μ peut être exprimée comme un maximum d'images par μ , de termes avec au plus k critères.

Définition 1.9.5. Une intégrale de Sugeno est dite k -maxitive lorsqu'elle est définie relativement à une capacité k -maxitive.

Le Tableau 1.4 donne une capacité 2-maxitive, avec $N = \{1, 2, 3\}$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0	0.1	0.2	1	0.5	0.7	1

TABLEAU 1.4 – Un exemple de capacité 2-maxitive

À présent, nous abordons la problématique de modélisation des préférences du décideur, en utilisant l'une des trois fonctions d'agrégation précédentes.

1.10 Modélisation des préférences du décideur

Nous supposons que le décideur donne des préférences en comparant certaines alternatives de X . On obtient alors les relations binaires P et I de la Définition 1.7.4, où P est la relation de préférence stricte (partie asymétrique) et I la relation d'indifférence (partie symétrique).

Définition 1.10.1. *Un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X , est la donnée d'une paire $\{P, I\}$ où :*

$$P = \{(x, y) \in X \times X : \text{le décideur préfère strictement } x \text{ à } y\},$$

$$I = \{(x, y) \in X \times X : \text{le décideur est indifférent entre } x \text{ et } y\}.$$

Dans certains cas, pour ne pas alourdir les notations et du fait de la symétrie de la relation d'indifférence I , un seul des deux couples (x, y) et (y, x) de I sera considéré dans sa définition en extension.

La définition suivante indique si l'ensemble d'informations préférentielles ordinales $\{P, I\}$ est représentable par une fonction d'agrégation F .

Définition 1.10.2. *Un ensemble d'informations préférentielles ordinales $\{P, I\}$ sur X , est représentable (modélisable) par une fonction d'agrégation F , si on peut trouver une fonction d'utilité u telle que pour tout $x, y \in X$, on a :*

$$x P y \implies F(u(x)) > F(u(y)),$$

$$x I y \implies F(u(x)) = F(u(y)).$$

Lorsque l'ensemble d'informations $\{P, I\}$ est restreint à \mathcal{B}^g , nous lui ajoutons une relation binaire M modélisant la relation de monotonie entre alternatives binaires généralisées, et nous permettant d'assurer la satisfaction de la condition de monotonie : $[S \subseteq T \implies \mu(S) \leq \mu(T)]$. En effet, pour les couples d'alternatives (a_S, a_T) tels que $S \supseteq T$, pour lesquels le décideur n'a donné aucune préférence stricte (P), ni une indifférence (I), nous allons ajouter un arc orienté de a_S vers a_T .

Définition 1.10.3. *Pour tout $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$, $a_S M a_T$ si $[S \supseteq T$ et $\text{non}(a_S(P \cup I) a_T)]$.*

Remarque 1.10.1. $a_S M a_T \implies C_\mu(u(a_S)) \geq C_\mu(u(a_T))$.

En cas d'absence d'incohérence dans les préférences du décideur, nous les modélisons et nous intéressons à une nouvelle problématique : celle de capter comment interagissent les critères. Pour cela, on utilise parfois l'indice d'interaction de Shapley ou l'indice de non-additivité.

Nous donnons ci-dessous deux exemples pour se fixer des idées sur les phénomènes d'interaction entre critères.

Exemple 1.10.1. *Pour écrire une lettre, on a besoin d'un papier et d'un stylo. Si on a du papier mais pas de stylo, ou un stylo mais pas de papier, cela est équivalent à n'avoir ni stylo ni papier. Si le critère 1 indique la présence d'un stylo et 2 la présence d'un papier alors on peut dire qu'il y a une interaction positive entre 1 et 2.*

Exemple 1.10.2. *Supposons qu'il existe deux remèdes pour soigner une maladie et la présence d'un seul suffit. Si le critère 1 représente la capacité du premier traitement à soigner la maladie et 2 la capacité du deuxième traitement, on peut alors dire que les critères 1 et 2 interagissent négativement.*

Des indices ont été proposés pour capter ces phénomènes d'interaction. Dans cette thèse, nous nous intéressons en particulier à l'indice d'interaction de Shapley et l'indice de non-additivité. Notons qu'il existe d'autres indices d'interaction, comme celui de Banzhaf [49; 50], mais nous ne nous y intéressons pas ici.

1.11 Indice d'interaction de Shapley et indice de non-additivité

1.11.1 Indice d'interaction de Shapley

L'indice de Shapley a été initialement défini en théorie des jeux [96], puis transposé en AMCD par Michel Grabisch [40], dans le but de capter les phénomènes d'interaction. Il est parfois appelé *indice d'interaction de Shapley* et est donné par la Définition 1.11.1.

Définition 1.11.1. L'indice d'interaction [40], relativement à une capacité μ , est défini pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$ par,

$$I_A^\mu = \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n - k - a)!k!}{(n - a + 1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L), \text{ où } \ell = |L|, k = |K| \text{ et } a = |A|.$$

Étant donnée une capacité μ , l'indice d'interaction I_A^μ vise à capter l'interaction pour la coalition A . Son interprétation est la suivante, en fonction de son signe.

Interprétation 1.11.1. Soient μ une capacité sur N et A une coalition d'au moins deux critères. L'interprétation de I_A^μ , pour $A = \{i, j\}$, se fait de la manière suivante [41]. Nous l'interprétons de la même façon pour toute coalition A de critères.

- Si $I_{ij}^\mu < 0$, alors les critères i et j interagissent négativement (sont redondants) relativement à μ .
- Si $I_{ij}^\mu = 0$, alors les critères i et j sont indépendants relativement à μ .
- Si $I_{ij}^\mu > 0$, alors les critères i et j interagissent positivement (sont complémentaires) relativement à μ .

Nous donnons à présent un exemple de calcul et d'interprétation de l'indice d'interaction d'une coalition de critères.

Exemple 1.11.1. Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ et la capacité μ définie par $\mu(1) = 0.1$, $\mu(2) = 0.2$, $\mu(3) = 0$, $\mu(12) = 0.5$, $\mu(13) = \mu(23) = 0.7$. On a :

$$\begin{aligned} I_{12}^\mu &= \sum_{K \subseteq \{3\}} \frac{(1 - k)!k!}{2!} \sum_{L \subseteq \{1,2\}} (-1)^{2-\ell} \mu(K \cup L) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mu(N) + \mu(12) - \mu(13) - \mu(23) - \mu(1) - \mu(2) + \mu(3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 0.5 - 0.7 - 0.7 - 0.1 - 0.2 + 0 \right) \\ &= -0.1 < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour la capacité μ donnée, les critères 1 et 2 interagissent négativement.

En 2018, Jian-Zhang Wu et Gleb Beliakov mentionnent dans [113], que, l'indice d'interaction de Shapley peut être trompeur en reflétant le type de non-additivité d'une capacité.

Par exemple, pour une capacité super-additive (i.e., $\mu(S \cup T) \geq \mu(S) + \mu(T)$, pour tout $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$), cet indice peut avoir des valeurs négatives pour certains sous-ensembles au lieu de positives. En outre, pour une capacité sous-additive (i.e., $\mu(S \cup T) \leq \mu(S) + \mu(T)$, pour tout $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$), cet indice peut avoir des valeurs positives, au lieu de négatives. Enfin, Jian-Zhang Wu et Gleb Beliakov mentionnent que les plages de valeurs possibles de l'indice d'interaction de Shapley diffèrent pour des sous-ensembles de cardinalités différentes, ce qui empêche une comparaison directe de ces valeurs. La raison en est que cet indice reflète les interactions marginales dans un sous-ensemble. Ainsi, ces derniers introduisent dans [113], un indice alternatif, qui représenterait mieux le type de non-additivité.

1.11.2 L'indice de non-additivité

Nous travaillons avec l'indice de non-additivité dont la définition et les propriétés axiomatiques sont données dans [113]. Il mesure le *degré de non-additivité* entre critères et l'interprétation de son signe est similaire à celle de l'indice d'interaction de Shapley.

Définition 1.11.2. *L'indice de non-additivité [52; 113; 114], pour une capacité μ , est défini comme suite. Pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$,*

$$\eta_A^\mu = \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\substack{(B, A \setminus B) \\ \emptyset \subsetneq B \subsetneq A}} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right) \quad (1.7)$$

Pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$ et pour chaque partition $(B, A \setminus B)$ de A avec $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, on calcule la différence $\mu(A) - (\mu(B) + \mu(A \setminus B))$. Ainsi l'indice de non-additivité η_A^μ de A correspond à la moyenne arithmétique de ces différentes contributions marginales, pour toutes les partitions de A .

Remarque 1.11.1. *On a $\eta_{ij}^\mu = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j$, donc l'indice de non-additivité coïncide avec l'indice d'interaction de Shapley I_{ij}^μ , pour les paires $\{i, j\} \subseteq N$, avec une capacité 2-additive.*

La remarque suivante donne deux expressions équivalentes de η_A^μ , données dans [113].

Remarque 1.11.2. *Étant donnée une capacité μ sur N et $A \subseteq_{\geq 2} N$, l'équation 1.7 est équivalente à chacune des équations 1.8 et 1.9.*

$$\eta_A^\mu = \frac{1}{2^{|A|} - 2} \sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right) \quad (1.8)$$

$$\eta_A^\mu = \mu(A) - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} \mu(B) \quad (1.9)$$

Nous donnons à présent un exemple de calcul et d'interprétation du degré de non-additivité d'une coalition de critères.

Exemple 1.11.2. *Nous considérons les données de l'exemple 1.11.1, $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, la capacité μ définie par $\mu(1) = 0.1$, $\mu(2) = 0.2$, $\mu(3) = 0$, $\mu(12) = 0.5$, $\mu(13) = \mu(23) = 0.7$.*

$$\begin{aligned} \text{On a : } \eta_{12}^\mu &= \mu(12) - \frac{1}{2^{|2|-1} - 1} \sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq \{1,2\}} \mu(B) \\ &= \mu(12) - \mu(1) - \mu(2) \\ &= 0.5 - 0.1 - 0.2 \\ &= 0.2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour la capacité μ donnée, le degré de non-additivité des critères 1 et 2 est strictement positif. Rappelons que, dans l'exemple 1.11.1, on a $I_{12}^\mu = -0.1 < 0$.

À présent, nous allons illustrer que, dans le processus de modélisation des préférences, ces deux indices ont des signes variables. Ce qui nous conduira à définir les notions d'interactions et degrés de non-additivité possibles et nécessaires.

1.12 Interactions et degrés de non-additivité possibles et nécessaires

1.12.1 Motivation

Ici, nous motivons, avec un exemple, l'introduction de la notion d'interaction (resp. du degré de non-additivité) possible et nécessaire. On considère l'exemple suivant inspiré de [45]. Quatre étudiants sont évalués sur trois matières (critères) à savoir : Mathématiques (M), Langue (L) et Statistiques (S). Toutes les notes sont sur une même échelle, de 0 à 1. Les évaluations de ces étudiants sont données au Tableau 1.5.

	1 : Mathématiques (M)	2 : Langue (L)	3 : Statistiques (S)
a	0.3	0.25	0.6
b	0.3	0.6	0.25
c	0.7	0.25	0.6
d	0.7	0.6	0.25

TABLEAU 1.5 – Notes des étudiants

Pour sélectionner les meilleurs étudiants, le doyen de la faculté exprime ses préférences, où la notation $x P y$ signifie x est strictement préféré à y .

Pour un étudiant mauvais en Mathématiques, la Statistiques est plus importante que la Langue, de sorte que

$$a P b.$$

Pour un étudiant bon en Mathématiques, la Langue est plus importante que la Statistiques, de sorte que

$$d P c.$$

Il n'est pas possible de modéliser les deux préférences $a P b$ et $d P c$ par un modèle additif. En effet, on a :

$$a P b \implies u_M(0.3) + u_L(0.25) + u_S(0.6) > u_M(0.3) + u_L(0.6) + u_S(0.25).$$

$$d P c \implies u_M(0.7) + u_L(0.6) + u_S(0.25) > u_M(0.7) + u_L(0.25) + u_S(0.6).$$

L'addition membres à membres de ces deux inégalités conduit à la contradiction $0 > 0$.

Nous supposons à présent que l'échelle d'évaluation $[0, 1]$ correspond à la fonction d'utilité associée à chaque critère, c'est-à-dire, $u_M(0.3) = 0.3$, $u_M(0.7) = 0.7$, $u_L(0.25) = 0.25$, $u_L(0.6) = 0.6$, $u_S(0.25) = 0.25$ et $u_S(0.6) = 0.6$. Dans ce cas, les préférences $a P b$ et $d P c$, sont maintenant représentables par des intégrales de Choquet, relativement aux capacités données au Tableau 1.6. Nous avons choisi six capacités (Cap. en abrégé) compatibles avec ces préférences, afin d'illustrer le fait que le signe de l'indice de non-additivité dépend fortement de la capacité choisie.

	Cap. 1	Cap. 2	Cap. 3	Cap. 4	Cap. 5	Cap. 6
μ_M	0	0.5	0	0.7	0.6	0.6
μ_L	0	0.4	0	0.3	0.2	0.1
μ_S	0.4	0.6	0.5	0.5	0.4	0.4
μ_{ML}	1	0.7	0.8	1	0.9	0.9
μ_{MS}	0.4	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6
μ_{LS}	0.5	0.6	0.7	0.5	0.6	0.4
$C_\mu(a)$	0.39	0.46	0.43	0.43	0.4	0.4
$C_\mu(b)$	0.3	0.40	0.29	0.39	0.35	0.32
$C_\mu(c)$	0.39	0.51	0.49	0.56	0.52	0.5
$C_\mu(d)$	0.6	0.54	0.53	0.67	0.62	0.62
η_{ML}^μ	1	-0.2	0.8	$\boxed{0}$	0.1	0.2
η_{MS}^μ	$\boxed{0}$	-0.5	0.2	-0.3	-0.4	-0.4
η_{LS}^μ	0.1	-0.4	0.2	-0.3	$\boxed{0}$	-0.1
η_{MLS}^μ	0.23	-0.13	0.1	-0.23	-0.1	$\boxed{0}$

TABLEAU 1.6 – Six capacités compatibles avec les préférences $a P b$ et $d P c$

Dans cet exemple, l'interprétation du degré de non-additivité entre deux critères n'est pas aisée. Par exemple, relativement à la capacité choisie, ce degré entre Langue et Statistiques, η_{LS}^μ , est strictement positif (voir Cap. 1, Cap. 3), nul (voir Cap. 5), strictement négatif (voir Cap. 2, Cap. 4, Cap. 6). Cette conclusion est aussi valable concernant le degré de non-additivité η_{MS}^μ entre Mathématiques et Statistiques. En effet, ce degré est strictement positif (voir Cap. 3), nul (voir Cap. 1), strictement négatif (voir Cap. 2, Cap. 4, Cap. 5, Cap. 6). Cette conclusion tient également pour le degré de non-additivité η_{LS}^μ entre Langue et Statistiques. En effet, ce degré est strictement positif (voir Cap. 1, Cap. 3), nul (voir Cap. 5), strictement négatif (voir Cap. 2, Cap. 4, Cap. 6).

Il en ressort que, suivant la représentation numérique μ compatible avec les préférences du décideur, pour un même sous-ensemble de critères, le degré de non-additivité n'a pas un signe constant. Dans [56], nous obtenons la même conclusion avec l'indice d'interaction de Shapley. Cela conduit à la définition de la notion de degré de non-additivité possible et nécessaire. Cette notion est similaire à celle introduite dans [56; 72], dans le cadre d'un modèle de l'intégrale de Choquet. Elle est aussi quelque peu similaire à la notion de relations de préférence nécessaires et possibles introduite dans la régression ordinale robuste [35; 51], en remplaçant les préférences par des indices d'interaction.

1.12.2 Définitions

Les définitions suivantes seront centrales dans cette thèse. Elles s'inspirent de [72], dans le cas particulier du modèle d'intégrale de Choquet à 2-additive.

Définition 1.12.1. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales et une coalition de critères $A \subseteq_{\geq 2} N$.*

1. *Il existe une possible interaction positive (resp. nulle, négative) pour A s'il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $I_A^\mu > 0$ (resp. $I_A^\mu = 0$, $I_A^\mu < 0$).*
2. *L'interaction est nécessairement positive (resp. nulle, négative) pour A si $I_A^\mu > 0$ (resp. $I_A^\mu = 0$, $I_A^\mu < 0$) pour toutes les capacités $\mu \in C_{Pref}$.*

Définition 1.12.2. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales et une coalition de critères $A \subseteq_{\geq 2} N$.*

1. *Le degré de non-additivité est possiblement positif (resp. nul, négatif) pour A s'il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $\eta_A^\mu > 0$ (resp. $\eta_A^\mu = 0$, $\eta_A^\mu < 0$).*
2. *Le degré de non-additivité est nécessairement positif (resp. nul, négatif) pour A si $\eta_A^\mu > 0$ (resp. $\eta_A^\mu = 0$, $\eta_A^\mu < 0$) pour toutes les capacités $\mu \in C_{Pref}$.*

1.13 Synthèse

Nous avons présenté, dans ce chapitre, des notions essentielles que nous utiliserons tout le long de ce travail, celles-ci constituent alors le cadre de notre étude. En effet, après avoir

fait une brève introduction du domaine d'aide multicritère à la décision, nous avons présenté des concepts liés à la modélisation des préférences. Nous avons ensuite parcouru certaines fonctions d'agrégation classiques, ainsi que l'indice d'interaction et celui de non-additivité dans un modèle de l'intégrale de Choquet, qui feront le socle des deux prochains chapitres.

Interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet

2.1 Introduction

Dans un modèle d'intégrale de Choquet, ce chapitre est une version plus large de notre papier [58]. Il étudie la stabilité du signe de l'indice d'interaction de Shapley.

À la Section 2.2, nous donnons une décomposition de l'indice d'interaction de Shapley. Par la suite, nous présentons nos résultats en commençant par le cas particulier $I = \emptyset$ à la Section 2.3, puis le cas général $I \neq \emptyset$ à la Section 2.4. Quant à la Section 2.5, elle présente un modèle de programmation linéaire pour tester l'existence d'interactions nécessaires.

2.2 Décomposition de l'indice d'interaction I_A^μ

À la sous-section 1.11.1 du Chapitre 1, nous avons rappelé la définition de l'indice d'interaction de Shapley. Nous en donnons à présent une décomposition qui nous sera utile dans la preuve de la Proposition 2.4.2.

Remarque 2.2.1. *Étant donnée une capacité μ sur N et une coalition de critères $A \subseteq_{\geq 2} N$, nous réécrivons l'indice I_A^μ via l'équation 2.1.*

$$I_A^\mu = \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n - k - a)!k!}{(n - a + 1)!} \Delta_A \mu(K) \tag{2.1}$$

où $\ell = |L|$, $k = |K|$, $a = |A|$ et $\Delta_A \mu(K) = \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L)$.

Le lemme suivant donne une décomposition de la dérivée $\Delta_A \mu(K)$. Nous l'utilisons dans la preuve de la Proposition 2.4.2. Dans cette décomposition, nous utilisons la convention selon laquelle 0 est un nombre pair.

Lemme 2.2.1. *Pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $K \subseteq N \setminus A$, nous avons :*

$$\Delta_A \mu(K) = \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right]. \quad (2.2)$$

Preuve 2.2.1. *Nous effectuons cette preuve en raisonnant selon la parité de a .*

- **Premier cas :** a est un nombre pair. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_A \mu(K) &= \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L) \\ &= \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-1}} \mu(K \cup L) \right] + \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-2}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-3}} \mu(K \cup L) \right] \\ &+ \dots + \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=2}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=1}} \mu(K \cup L) \right] + \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=0}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=-1}} \mu(K \cup L) \right], \end{aligned}$$

où $\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=-1}} \mu(K \cup L) = \sum_{L \in \emptyset} \mu(K \cup L) = 0$. Par conséquent,

$$\Delta_A \mu(K) = \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right].$$

- **Second cas :** a est un nombre impair. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_A \mu(K) &= \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L) \\ &= \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-1}} \mu(K \cup L) \right] + \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-2}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-3}} \mu(K \cup L) \right] \\ &+ \dots + \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=1}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=0}} \mu(K \cup L) \right] \\ \Delta_A \mu(K) &= \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^{a-1} \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right] \\ &= \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right], \text{ car } a \text{ est impair et } p \text{ pair.} \end{aligned}$$

□

La remarque suivante est utilisée dans la preuve de la Proposition 2.4.1.

Remarque 2.2.2. *Pour tout $A \subseteq N$, $K \subseteq N \setminus A$ et $1 \leq t \leq |A|$. On a*

$$\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ |L|=t}} \sum_{i \in L} \mu(K \cup L \setminus \{i\}) = (|A| - t + 1) \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ |L|=t-1}} \mu(K \cup L).$$

Lorsqu'on demande à un individu de comparer une option a à une autre option b , il semble plus courant de préférer strictement l'une à l'autre, que d'être indifférent entre les deux options. Par conséquent, la condition $I = \emptyset$ est donc susceptible d'être satisfaite dans plusieurs applications. La section suivante donne nos résultats dans le cas où le décideur ne donne aucune relation d'indifférence.

2.3 Résultats lorsque $I = \emptyset$

Dans cette section, nous commençons par le cas particulier $I = \emptyset$. Les résultats de cette section seront utilisés dans la section suivante où nous traiterons le cas général ($I \neq \emptyset$).

Nous subdivisons cette section en deux sous-sections : la première concerne nos résultats fondés sur l'ensemble de toutes les alternatives X et la seconde porte sur nos résultats fondés sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g .

2.3.1 Résultat sur l'ensemble X des alternatives

Lorsque $I = \emptyset$, la proposition suivante montre que l'interaction nulle n'est jamais nécessaire. Dans [72], Denis Bouyssou et Brice Mayag présentent ce résultat dans le cadre d'une intégrale de Choquet 2-additive et en supposant que le décideur fournit ses préférences en un ordre linéaire sur un sous-ensemble Y de X . Ici, nous abandonnons cette hypothèse et étendons ce résultat au modèle (général) de l'intégrale de Choquet.

Proposition 2.3.1. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X . On suppose que $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. Si la relation I est vide alors aucune interaction nulle n'est nécessaire.*

Preuve 2.3.1. Supposons $I = \emptyset$ et $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet utilisant une capacité μ pour laquelle $I_A^\mu = 0$ où $A \subseteq_{\geq 2} N$. Nous montrons que cette interaction nulle n'est pas nécessaire. Définissons la capacité β_ε^μ pour tout $S \subseteq N$ par,

$$\beta_\varepsilon^\mu(S) = \begin{cases} \frac{1}{1+\varepsilon} \mu(S), & \text{si } S \subsetneq N, \\ 1, & \text{si } S = N. \end{cases}$$

où ε est un réel strictement positif à déterminer dans la suite. Pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) &= \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\ &= u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \beta_\varepsilon^\mu(N) + \sum_{i=2}^n \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right) \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\ &= u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) + \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=2}^n \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right) \mu(N_{\sigma(i)}) \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) + \sum_{i=2}^n \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right) \mu(N_{\sigma(i)}) \right] + \\ &\quad \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} C_\mu(u(x)) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}). \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[C_\mu(u(x)) + \varepsilon u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \right]. \text{ Ainsi, pour tout } (x, y) \in P, \text{ on a} \end{aligned}$$

$C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(y)) = \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\left(C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \right) + \varepsilon \left(u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)}) \right) \right]$.
Nous cherchons ε de telle sorte que $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(y)) > 0$ pour tout $(x, y) \in P$. Pour cela, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(y)) &> 0 \\ &\iff \\ \varepsilon \left(u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)}) \right) &> - \left(C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \right). \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in P : u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)}) < 0\}$.

- Si $\Omega = \emptyset$, alors pour tout $(x, y) \in P$, $u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)}) \geq 0$. Donc pour tout $(x, y) \in P$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(y)) > 0$.
- Si $\Omega \neq \emptyset$, alors choisir ε tel que $0 < \varepsilon < \min_{(x,y) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(y)) - C_\mu(u(x))}{u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)})} \right)$ nous garantit d'avoir $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(y)) > 0$ pour tout $(x, y) \in P$.

Ainsi, dans les deux cas, choisir $\varepsilon = \frac{1}{4} \min_{(x,y) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(y)) - C_\mu(u(x))}{u_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(y_{\gamma(1)})} \right)$ nous garantit d'avoir $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$.

En outre, nous avons

$$\begin{aligned}
I_A^{\beta_\varepsilon^\mu} &= \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n-k-a)!k!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \beta_\varepsilon^\mu(K \cup L) \\
&= \frac{(n-a)!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \beta_\varepsilon^\mu((N \setminus A) \cup L) + \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n-k-a)!k!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \beta_\varepsilon^\mu(K \cup L) \\
&= \frac{(n-a)!}{(n-a+1)!} \beta_\varepsilon^\mu(N) + \frac{(n-a)!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \beta_\varepsilon^\mu((N \setminus A) \cup L) + \\
&\quad \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n-k-a)!k!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \beta_\varepsilon^\mu(K \cup L) \\
&= \frac{(n-a)!}{(n-a+1)!} + \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{(n-a)!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu((N \setminus A) \cup L) + \\
&\quad \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{K \subseteq N \setminus A} \frac{(n-k-a)!k!}{(n-a+1)!} \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L) \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} I_A^\mu + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{n-a+1} \\
&= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{n-a+1} > 0, \text{ car } I_A^\mu = 0.
\end{aligned}$$

On déduit que l'interaction positive est possible pour l'ensemble A . L'interaction nulle n'est donc pas nécessaire pour A quelconque. Par conséquent, les interactions nulles ne sont jamais nécessaires lorsque $I = \emptyset$. Ainsi, lorsque $I = \emptyset$, le fait d'avoir $I_A^\mu = 0$ n'implique pas nécessairement que le critères de A sont dépendants. \square

L'exemple suivant illustre la Proposition 2.3.1.

Exemple 2.3.1. Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $X = \{a, b, c, d\}$, $a = (6, 11, 9)$, $b = (6, 13, 7)$, $c = (16, 11, 9)$, $d = (16, 13, 7)$ et $P = \{(a, b), (d, c)\}$.

L'information préférentielle ordinale $\{P, I\}$ est représentable par la capacité μ (avec $I_{13}^\mu = 0$) donnée au Tableau 2.1, et l'intégrale de Choquet correspondante est donnée au Tableau 2.2. Pour chaque $i \in N$, nous définissons la fonction d'utilité u_i par $u_i(x_i) = x_i$. Rappelons que $I_{13}^\mu = \frac{1}{2}(\mu_{123} - \mu_{12} + \mu_{13} - \mu_{23} - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3)$.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0	0	0	1	0.5	0.5	1

TABLEAU 2.1 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{13}^\mu = 0$

x	a	b	c	d
$C_\mu(u(x))$	7.5	6.5	11	13

TABLEAU 2.2 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 2.1

On a $u_{\sigma(1)}(a_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(b_{\gamma(1)}) = 6 - 6 = 0$, $u_{\sigma(1)}(d_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(c_{\gamma(1)}) = 7 - 9 = -2 < 0$, donc $\Omega = \{(d, c)\}$ et $\varepsilon = \frac{1}{2} \times \frac{C_\mu(u(c)) - C_\mu(u(d))}{u_{\sigma(1)}(d_{\sigma(1)}) - u_{\gamma(1)}(c_{\gamma(1)})} = \frac{1}{4} \times \frac{11 - 13}{7 - 9} = 0.25$. Une capacité

$\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{13}^{\beta_\varepsilon^\mu} > 0$ et l'intégrale de Choquet correspondante à β_ε^μ sont respectivement données aux Tableaux 2.3 et 2.4. Nous avons explicitement :

$$I_{13}^{\beta_\varepsilon^\mu} = \frac{1}{2}(\mu_{123} - \mu_{12} + \mu_{13} - \mu_{23} - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3) = \frac{1}{2}(1 - 0.8 + 0.4 - 0.4 - 0 + 0 - 0) = 0.1 > 0.$$

Ou encore, comme dans la preuve de la Proposition 2.3.1, nous pouvons retrouver $I_{13}^{\beta_\varepsilon^\mu}$ par $I_{13}^{\beta_\varepsilon^\mu} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \times \frac{1}{n - a + 1} = \frac{0.25}{1.25} \times \frac{1}{2} = 0.1 > 0$.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\beta_\varepsilon^\mu(S)$	0	0	0	0.8	0.4	0.4	1

TABLEAU 2.3 – Une capacité $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{13}^{\beta_\varepsilon^\mu} > 0$

x	a	b	c	d
$C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x))$	7.2	6.4	10.6	11.8

TABLEAU 2.4 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité β_ε^μ du Tableau 2.3

Dans la sous-section suivante, nous allons nous restreindre sur l'ensemble \mathcal{B}^g .

2.3.2 Résultats sur l'ensemble \mathcal{B}^g des alternatives binaires généralisées

Lorsqu'une information préférentielle sur \mathcal{B} ne contient aucune indifférence, dans [73] Michel Grabisch, Brice Mayag et Christophe Labreuche donnent des conditions nécessaires et suffisantes de représentation de cette information par une intégrale de Choquet 2-additive.

La proposition suivante étend ce résultat, sur l'ensemble des binaires généralisées \mathcal{B}^g , dans un modèle (général) de l'intégrale de Choquet [56].

Proposition 2.3.2. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que $I = \emptyset$. Alors, $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet si et seulement si la relation binaire $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict.*

Preuve 2.3.2.

Nécessite. Supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet C_μ . Si $P \cup M$ contient un cycle strict, alors on peut trouver des éléments $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathcal{B}^g$ tels que $x_0 (P \cup M) x_1 (P \cup M) \dots (P \cup M) x_r (P \cup M) x_0$ et il existe $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ tel que $x_i P x_{i+1}$. Or $\{P, I\}$ est représentable par C_μ , donc $C_\mu(u(x_0)) \geq \dots \geq C_\mu(u(x_i)) > C_\mu(u(x_{i+1})) \geq \dots \geq C_\mu(u(x_0))$, de sorte que $C_\mu(u(x_0)) > C_\mu(u(x_0))$. Ceci est une contradiction. Nous déduisons que $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict.

Suffisance. Supposons que $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict, alors nous pouvons construire une partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g , en utilisant un tri topologique sur $P \cup M$ [36]. Nous construisons en effet cette partition comme suite :

$\mathcal{B}_0 = \{x \in \mathcal{B}^g : \forall y \in \mathcal{B}^g, \text{ non } [x(P \cup M)y]\}$ et pour tout $i = 1, 2, \dots, m$,

$\mathcal{B}_i = \{x \in \mathcal{B}^g \setminus (\mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{i-1}) : \forall y \in \mathcal{B}^g \setminus (\mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{i-1}), \text{ non } [x(P \cup M)y]\}$.

Définissons la capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ pour tout $S \subseteq N$, par :

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0, \\ (2n)^\ell / (2n)^m, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

Soient $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$ tels que $a_S P a_T$. Montrons que $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Puisque $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$ et $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ est une partition de \mathcal{B}^g , alors il existe $r, q \in \{0, 1, \dots, m\}$ tels que $a_S \in \mathcal{B}_r$, $a_T \in \mathcal{B}_q$. Comme $a_S P a_T$, donc $r > q$, de sorte que $C_\mu(u(a_S)) = \mu(S) = (2n)^r / (2n)^m$.

- Si $q = 0$, alors $a_T \in \mathcal{B}_0$ et $a_S \in \mathcal{B}_r$ avec $r \geq 1$. Or $C_\mu(u(a_T)) = C_\mu(u(a_0)) = \mu(\emptyset) = 0$, donc $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.
- Si $q \geq 1$, alors $C_\mu(u(a_T)) = \mu(T) = (2n)^q / (2n)^m$ car $1 \leq q \leq m-1$. Mais $r > q$ implique $C_\mu(u(a_S)) = (2n)^r / (2n)^m > (2n)^q / (2n)^m = C_\mu(u(a_T))$, de sorte que $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Par conséquent, dans les deux cas, nous avons $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$. Nous déduisons que $\{P, I\}$ est représentable par l'intégrale de Choquet C_μ . \square

Remarque 2.3.1. Cette condition de représentation de $\{P, I\}$ (avec $I = \emptyset$) est la même obtenue dans [73], sur l'ensemble des alternatives binaires \mathcal{B} , dans un modèle de l'intégrale de Choquet 2-additive.

Lorsqu'une information préférentielle sur \mathcal{B} ne contenant aucune indifférence, est représentable par une intégrale de Choquet 2-additive, dans [72] Denis Bouyssou et Brice Mayag montrent que l'interaction positive est toujours possible pour toutes les paires de critères. La proposition suivante étend ce résultat, sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g , dans un modèle (général) de Choquet. En effet, elle montre que si l'information préférentielle ne contient aucune indifférence et est représentable par une intégrale (générale) de l'intégrale de Choquet, alors il existe une représentation pour laquelle **tous** les indices d'interaction sont strictement positifs, c'est-à-dire, les interactions négatives et nulles ne sont pas nécessaires.

Proposition 2.3.3. Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que $I = \emptyset$. Il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $I_A^\mu > 0, \forall A \subseteq_{\geq 2} N$.

Preuve 2.3.3. La partition $\{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g et la capacité μ sont construites comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2. Nous y avons montré que $\mu \in C_{Pref}$. Il reste à montrer ici que $I_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$. Pour cela, nous allons montrer que pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$, et pour tout $K \subseteq N \setminus A$, on a $\Delta_A \mu(K) > 0$. Soient donc $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $K \subseteq N \setminus A$, d'après le Lemme 2.2.1 nous avons :

$$\Delta_A \mu(K) = \sum_{L \subseteq A} (-1)^{a-\ell} \mu(K \cup L) = \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right].$$

Soit $L \subseteq A$, $|L| = a - p$ avec $p \in \{0, 1, \dots, a\}$ et p pair. Comme pour tout $i \in L$, on a $K \cup L \supseteq K \cup L \setminus \{i\}$, donc $a_{K \cup L} \geq a_{K \cup L \setminus \{i\}}$. Par conséquent il existe $q \in \{1, 2, \dots, m\}$ tel que $a_{K \cup L} \in \mathcal{B}_q$ et $\forall i \in L$, il existe $r_i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ tel que $a_{K \cup L \setminus \{i\}} \in \mathcal{B}_{r_i}$ avec $r_i \leq q - 1$. La Figure 2.1 ci-dessous illustre cette procédure. Ainsi, $\mu(K \cup L) = (2n)^q = (2n)(2n)^{q-1}$ et $\mu(K \cup L \setminus \{i\}) = (2n)^{r_i}$, donc $\sum_{i \in L} \mu(K \cup L \setminus \{i\}) = \sum_{i \in L} (2n)^{r_i} \leq \sum_{i \in L} (2n)^{q-1} = l(2n)^{q-1}$. Comme $2n > l$, alors $\mu(K \cup L) > \sum_{i \in L} \mu(K \cup L \setminus \{i\})$, donc $\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ l=a-p}} \mu(K \cup L) > \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ l=a-p}} \sum_{i \in L} \mu(K \cup L \setminus \{i\})$.

En utilisant la Remarque 2.2.2, pour $t = a - p$, nous avons

$$\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p}} \sum_{i \in L} \mu(K \cup L \setminus \{i\}) = (p+1) \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p-1}}^a \mu(K \cup L) \geq \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p-1}}^a \mu(K \cup L) \text{ car } p+1 \geq 1.$$

Donc, $\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ l = a-p}} \mu(K \cup L) > \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p-1}}^a \mu(K \cup L)$, i.e., $\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ l = a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p-1}}^a \mu(K \cup L) > 0$. Ainsi,

$$\sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell = a-p-1}} \mu(K \cup L) \right] > 0, \text{ d'où, } \Delta_A \mu(K) > 0.$$

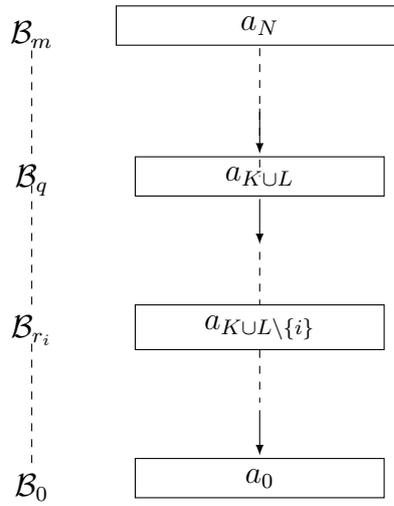


FIGURE 2.1 – Une illustration des éléments \mathcal{B}_m , \mathcal{B}_q , \mathcal{B}_{r_i} et \mathcal{B}_0 tels que $m > q > r_i > 0$.

□

Remarque 2.3.2. Nous venons de montrer que, sur \mathcal{B}^q , si $I = \emptyset$ alors il est toujours possible d'obtenir une interaction positive, simultanément, pour tous les groupes de critères. Le problème dual (relatif aux interactions négatives) a déjà attiré notre attention, nous n'avons pas une solution à portée de main, mais nous continuons à nous y intéresser.

2.4 Résultats dans le cas général

Dans cette section, nous abandonnons l'hypothèse $I = \emptyset$ faite dans la section précédente, et nous généralisons certains de nos résultats précédents.

Dans [72], Denis Bouyssou et Brice Mayag donnent des conditions nécessaires et suffisantes de représentation d'une information préférentielle sur \mathcal{B} par une intégrale de Choquet 2-additive. La proposition suivante étend ce résultat, sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g , dans un modèle (général) de l'intégrale de Choquet. Elle est aussi une généralisation de la Proposition 2.3.2 de ce chapitre.

Proposition 2.4.1. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g . L'information $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet si et seulement si la relation binaire $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict.*

Preuve 2.4.1. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g .*

Nécessité. *Supposons $\{P, I\}$ représentable par l'intégrale de Choquet C_μ . Si $P \cup M \cup I$ contient un cycle strict, alors il existe $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathcal{B}^g$ tels que $x_0 (P \cup M \cup I) x_1 (P \cup M \cup I) \dots (P \cup M \cup I) x_r (P \cup M \cup I) x_0$ et il existe $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ tels que $x_i P x_{i+1}$. Puisque $\{P, I\}$ est représentable par C_μ , alors $C_\mu(u(x_0)) \geq \dots \geq C_\mu(u(x_i)) > C_\mu(u(x_{i+1})) \geq \dots \geq C_\mu(u(x_0))$, et par conséquent $C_\mu(u(x_0)) > C_\mu(u(x_0))$. Ceci est une contradiction. Ainsi, $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict.*

Suffisance. *Supposons que le graphe $(\mathcal{B}^g, P \cup M \cup I)$ ne contient aucun cycle strict, puis définissons la relation binaire $\mathcal{R}_{I \cup M}$ sur \mathcal{B}^g de la manière suivante. Pour tout $x, y \in \mathcal{B}^g$, $x \mathcal{R}_{I \cup M} y$ si et seulement si $x T C_{I \cup M} y$ et $y T C_{I \cup M} x$. Alors $\mathcal{R}_{I \cup M}$ est une relation d'équivalence sur \mathcal{B}^g . Posons $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^g / \mathcal{R}_{I \cup M}$ l'ensemble quotient de \mathcal{B}^g par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{I \cup M}$. Définissons sur \mathcal{B}' , la relation de préférence stricte P' pour tout $A, B \in \mathcal{B}'$, par :*

$$A P' B \iff \exists a \in A, \exists b \in B : a P b \text{ or } a M b.$$

Le graphe (\mathcal{B}', P') ne contient aucun cycle strict car le graphe $(\mathcal{B}^g, P \cup M \cup I)$ ne contient aucun cycle strict. De plus, le graphe (\mathcal{B}', P') ne contient aucune relation d'indifférence, donc il existe une partition $\{\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_m\}$ de \mathcal{B}' , construite en utilisant un tri topologique sur le graphe (\mathcal{B}', P') [36]. Nous construisons cette partition de la manière suivante.

$\mathcal{B}'_0 = \{A \in \mathcal{B}' : \forall C \in \mathcal{B}', \text{ non } [A(P \cup M)C]\}$, et pour tout $i = 2, 3, \dots, m$,

$\mathcal{B}'_i = \{A \in \mathcal{B}' \setminus (\mathcal{B}'_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_{i-1}) : \forall C \in \mathcal{B}' \setminus (\mathcal{B}'_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}'_{i-1}), \text{ non } [A(P \cup M)C]\}$.

Posons $\mathcal{B}_i = \{x \in A : A \in \mathcal{B}'_i\}$ pour tout $i = 0, 1, \dots, m$. Ainsi, $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ est une partition de \mathcal{B}^g , car $\{\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_m\}$ est une partition de \mathcal{B}' . Définissons la capacité

$\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ pour tout $S \subseteq N$, par :

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0, \\ (2n)^\ell / (2n)^m, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

Soient $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$.

a) Supposons que $a_S I a_T$, alors il existe $A \in \mathcal{B}'$ tel que $a_S, a_T \in A$. Puisque $A \in \mathcal{B}'$, alors il existe $\ell \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $A \in \mathcal{B}'_\ell$, de sorte que $a_S, a_T \in \mathcal{B}_\ell$.

- Si $\ell = 0$, alors $C_\mu(u(a_S)) = 0 = C_\mu(u(a_T))$.
- Si $\ell \in \{1, \dots, m\}$, alors $C_\mu(u(a_S)) = (2n)^\ell / (2n)^m = C_\mu(u(a_T))$.

Dans les deux cas, nous avons $C_\mu(u(a_S)) = C_\mu(u(a_T))$.

b) Supposons que $a_S P a_T$, alors il existe $A \in \mathcal{B}'_r, C \in \mathcal{B}'_q$, tel que $a_S \in A, a_T \in C$ avec $r, q \in \{0, 1, \dots, m\}$ et $r > q$. Ainsi $q \in \{0, 1, \dots, m-1\}, r \in \{1, \dots, m\}$ et $C_\mu(u(a_S)) = \mu(S) = (2n)^r / (2n)^m$.

- Si $q = 0$, alors $C_\mu(u(a_T)) = \mu(T) = 0 < (2n)^r / (2n)^m = \mu(S) = C_\mu(u(a_S))$.
- Si $q \in \{1, \dots, m-1\}$, alors $C_\mu(u(a_T)) = \mu(T) = (2n)^q / (2n)^m$.

Comme $r > q$, donc $(2n)^r > (2n)^q$, et par conséquent $(2n)^r / (2n)^m > (2n)^q / (2n)^m$, c'est-à-dire, $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

On déduit que $\{P, I\}$ est représentable par C_μ , c'est-à-dire, $\mu \in C_{\text{Pref}}(P, I)$. □

Remarque 2.4.1. Dans le cas où $I = \emptyset$, la proposition précédente stipule que $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet si et seulement si la relation binaire $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict. Ainsi, lorsque $I = \emptyset$ on retrouve la Proposition 2.3.2, donc la Proposition 2.4.1 est une généralisation de la Proposition 2.3.2.

Remarque 2.4.2. Cette condition de représentation de $\{P, I\}$ (avec $I \neq \emptyset$) est plus simple que celles données dans [72], sur l'ensemble des alternatives binaires \mathcal{B} , dans un modèle de l'intégrale de Choquet 2-additive. En effet, dans ce dernier modèle, outre la condition donnée ici, il y a la condition MOPI.

Lorsqu'une information préférentielle sur \mathcal{B} est représentable par une intégrale de Choquet 2-additive, dans [72], Denis Bouyssou et Brice Mayag montrent que sous certaines conditions,

il est possible de la représenter par une intégrale de Choquet 2-additive induisant des indices d'interaction strictement positifs pour toutes les paires de critères. La proposition suivante étend ce résultat, sur l'ensemble des binaires généralisées \mathcal{B}^g , dans un modèle (général) de Choquet. En effet, elle stipule que, si le décideur n'est pas indifférent entre la meilleure alternative a_N et une autre alternative, alors on peut obtenir des interactions simultanément positives pour toutes les coalitions de critères.

Proposition 2.4.2. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que la relation binaire $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict. Si non($a_S T C_{IUM} a_N$) pour tout $S \subsetneq N$, alors il existe une capacité $\mu \in C_{P_{ref}}(P, I)$ telle que $I_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$.*

Preuve 2.4.2. *La partition $\{\mathcal{B}'_0, \dots, \mathcal{B}'_m\}$ de \mathcal{B}' et celle $\{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g sont construites comme dans la preuve de la Proposition 2.4.1. Nous définissons la capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ pour tout $S \subseteq N$, par :*

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0, \\ \frac{(2n)^\ell}{(2n)^{n+m}}, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\ 1, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_m. \end{cases}$$

Soient $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$.

a) Si $a_S I a_T$, alors il existe $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $a_S, a_T \in \mathcal{B}_r$, donc $C_\mu(u(a_S)) = \mu(S) = \mu(T) = C_\mu(u(a_T))$.

b) Si $a_S P a_T$, alors il existe $r, q \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $a_S \in \mathcal{B}_r$, $a_T \in \mathcal{B}_q$. Comme $a_S P a_T$, alors $r > q$. Ainsi, on a $C_\mu(u(a_S)) = \mu(S) = \frac{(2n)^r}{(2n)^{n+m}}$ (si $1 \leq r \leq m-1$) ou 1 (si $r = m$). Donc $C_\mu(u(a_S)) \geq \frac{(2n)^r}{(2n)^{n+m}}$.

- Si $q = 0$, alors $a_T \in \mathcal{B}_0$ et $a_S \in \mathcal{B}_r$ avec $r \geq 1$. Comme $C_\mu(u(a_T)) = C_\mu(u(a_0)) = \mu(\emptyset) = 0$, donc $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

- Si $q \geq 1$, alors $C_\mu(u(a_T)) = \mu(T) = \frac{(2n)^q}{(2n)^{n+m}}$, car $1 \leq q \leq m-1$. Mais $r > q$ implique $C_\mu(u(a_S)) \geq \frac{(2n)^r}{(2n)^{n+m}} > \frac{(2n)^q}{(2n)^{n+m}} = C_\mu(u(a_T))$, de sorte que $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Ainsi, dans les deux cas, nous avons $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Nous déduisons que $\{P, I\}$ est représentable par C_μ , c'est-à-dire, $\mu \in C_{\text{Pref}}(P, I)$.

Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$, d'après le Lemme 2.2.1 nous avons :

$$(n-a+1)! \times I_A^\mu = \sum_{K \subseteq N \setminus A} (n-k-a)!k! \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right]$$

$$\geq \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right], \text{ car } (n-k-a)!k! \geq 1.$$

En outre,

$$\sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \left[\sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \right]$$

$$= \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L)$$

$$= \mu(N) + \sum_{\substack{p=2, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu((N \setminus A) \cup L) + \sum_{K \subsetneq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p}} \mu(K \cup L) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L)$$

$$\geq \mu(N) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L).$$

Par conséquent, $(n-a+1)!k! \times I_A^\mu \geq \mu(N) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L)$.

Il reste à prouver que $\mu(N) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) > 0$.

Soient $K \subseteq N \setminus A$, $p \in \{0, \dots, a\}$ un nombre pair et $L \subseteq A$ avec $\ell = a - p - 1$. Nous avons $L \subsetneq A$, donc $K \cup L \subsetneq N$. Par hypothèse, on a $\text{non}(a_{K \cup L} T C_{I \cup M} a_N)$. Ainsi, $a_N \in \mathcal{B}_m$ et il existe $\ell_{K \cup L} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ tel que $a_{K \cup L} \in \mathcal{B}_{\ell_{K \cup L}}$. Par suite, $\mu(K \cup L) = \frac{(2n)^{\ell_{K \cup L}}}{(2n)^{n+m}}$ ou

$\mu(K \cup L) = 0$, et donc dans les deux cas on a $\mu(K \cup L) \leq \frac{(2n)^{\ell_{K \cup L}}}{(2n)^{n+m}}$. Par conséquent,

$$\sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) \leq \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \frac{(2n)^{\ell_{K \cup L}}}{(2n)^{n+m}}$$

$$\leq \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \frac{(2n)^{m-1}}{(2n)^{n+m}} = \frac{(2)^{n-1} (2n)^{m-1}}{(2n)^{n+m}}.$$

Or $\frac{(2)^{n-1} (2n)^{m-1}}{(2n)^{n+m}} = \frac{2^{n-1} (2n)^{m-1}}{(2n)^n (2n)^m} = \frac{2^{n-1} (2n)^{m-1}}{2(2)^{n-1} (n)^n (2n) (2n)^{m-1}} = \frac{1}{4n^{n+1}} < 1 = \mu(N)$, donc

$$\mu(N) > \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L), \text{ c'est-à-dire, } \mu(N) - \sum_{K \subseteq N \setminus A} \sum_{\substack{p=0, \\ p \text{ pair}}}^a \sum_{\substack{L \subseteq A, \\ \ell=a-p-1}} \mu(K \cup L) > 0.$$

Nous pouvons donc conclure que $(n-a+1)! \times I_A^\mu > 0$, c'est-à-dire, $I_A^\mu > 0$. \square

Nous donnons à présent une version simplifiée et équivalente à la condition suffisante de la Proposition 2.4.2. En effet, le Lemme 2.4.1 montre que la condition $\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $i \in N$ est équivalente à $\text{non}(a_S TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $S \subsetneq N$ utilisée ci-dessus. Cette nouvelle condition interdit d'être indifférent entre la meilleure alternative a_N et une autre alternative $a_{N \setminus \{i\}}$, obtenue à partir de a_N en dégradant la satisfaction du décideur, du niveau de référence 1_i au niveau de référence 0_i sur le critère i , tout en restant constant pour les autres critères.

Lemme 2.4.1. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle telle que $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict. Alors la condition $[\text{non}(a_S TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $S \subsetneq N]$ est équivalente à $[\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $i \in N]$.*

Preuve 2.4.3. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle telle que $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict.*

Nécessité. Supposons que $\text{non}(a_S TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $S \subsetneq N$, alors $\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $i \in N$ car $N \setminus \{i\} \subsetneq N$ pour tout $i \in N$.

Suffisance. Supposons en plus que $\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $i \in N$. On suppose qu'il existe $S \subsetneq N$ tel que $a_S TC_{I \cup M} a_N$. Puisque $S \subsetneq N$, alors il existe $i_0 \in N \setminus S$ tel que $S \subseteq N \setminus \{i_0\}$, donc $a_N (P \cup M \cup I) a_{N \setminus \{i_0\}} (P \cup M \cup I) a_S TC_{I \cup M} a_N$.

- Si $a_N P a_{N \setminus \{i_0\}}$ ou $a_{N \setminus \{i_0\}} P a_S$, alors la relation $P \cup I \cup M$ contient un cycle strict. Ceci est une contradiction.
- Sinon, on a $a_N (I \cup M) a_{N \setminus \{i_0\}} (I \cup M) a_S TC_{I \cup M} a_N$ donc $a_{N \setminus \{i_0\}} TC_{I \cup M} a_N$. Ceci est une contradiction.

Nous déduisons que $\text{non}(a_S TC_{I \cup M} a_N)$ pour tout $S \subsetneq N$. □

Nous conjecturons que la condition $\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{I \cup M} a_N)$ est nécessaire et suffisante pour obtenir toutes les interactions positives simultanément. La proposition suivante montre que la conjecture est vraie pour un petit nombre de critères ($n \leq 5$). Cette proposition est utile en pratique puisqu'une bonne partie des problèmes de décision comporte moins de 6 critères. À ce stade, nous n'avons ni une preuve pour le cas général ($n \geq 6$), ni un contre-exemple indiquant que cette condition n'est pas nécessaire.

Proposition 2.4.3. *Soit N un ensemble de n critères, avec $2 \leq n \leq 5$. Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict. S'il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}(P, I)$ vérifiant $I_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$, alors on a $\text{non}(a_{N \setminus \{i\}} TC_{IUM} a_N)$ pour tout $i \in N$.*

Preuve 2.4.4. *Supposons que $I_A^\mu > 0$, pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$ et qu'il existe $i \in N$ tel que $a_{N \setminus \{i\}} TC_{IUM} a_N$. Pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$, posons $J_A^\mu = (n - a + 1)! I_A^\mu$. On a $J_A^\mu > 0$ car $I_A^\mu > 0$.*

- **Cas $n = 2$.**

Par hypothèse, nous avons $a_1 TC_{IUM} a_{12}$ ou $a_2 TC_{IUM} a_{12}$. Respectivement, on obtient $\mu_{12} = \mu_1$ ou $\mu_{12} = \mu_2$, ce qui implique $J_{12}^\mu = -\mu_2 \leq 0$ ou $J_{12}^\mu = -\mu_1 \leq 0$. Ceci est une contradiction car $J_{12}^\mu > 0$.

- **Cas $n = 3$.**

Sans nuire à la généralité, supposons que $i = 3$, c'est-à-dire, $\mu_{123} = \mu_{12}$. On a, $J_{23}^\mu = \mu_{123} - \mu_{12} - \mu_{13} + \mu_{23} + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3$ et $J_{123}^\mu = \mu_{123} - \mu_{12} - \mu_{13} - \mu_{23} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. Ce qui conduit à $J_{23}^\mu + J_{123}^\mu = -2(\mu_{13} - \mu_1) \leq 0$. Ceci est impossible car $J_{23}^\mu, J_{123}^\mu > 0$.

- **Cas $n = 4$.**

*Sans nuire à la généralité, supposons $i = 4$, c'est-à-dire, $\mu_{1234} = \mu_{123}$. On a : $J_{34} = 2u_{1234} - 2u_{123} - 2u_{124} + u_{134} + u_{234} + 2u_{12} - u_{13} - u_{14} - u_{23} - u_{24} + 2u_{34} + u_1 + u_2 - 2u_3 - 2u_4$.
 $J_{134} = u_{1234} - u_{123} - u_{124} + u_{134} - u_{234} + u_{12} - u_{13} - u_{14} + u_{23} + u_{24} - u_{34} + u_1 - u_2 + u_3 + u_4$.
 $J_{234} = u_{1234} - u_{123} - u_{124} - u_{134} + u_{234} + u_{12} + u_{13} + u_{14} - u_{23} - u_{24} - u_{34} - u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.
 $J_{1234} = u_{1234} - u_{123} - u_{124} - u_{134} - u_{234} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{23} + u_{24} + u_{34} - u_1 - u_2 - u_3 - u_4$.
Ceci implique $2J_{34} + 3(J_{134} + J_{234}) + 2J_{1234} = -12(\mu_{124} - \mu_{12}) \leq 0$. Ceci est une contradiction car $J_{34}, J_{134}, J_{234}, J_{1234} > 0$.*

- **Cas $n = 5$.**

Comme dans les cas précédents, sans nuire à la généralité, supposons que $i = 5$, c'est-à-dire, $\mu_{12345} = \mu_{1234}$. On a :

$$J_{1245}^\mu = \mu_{12345} - \mu_{1234} - \mu_{1235} + \mu_{1245} - \mu_{1345} - \mu_{2345} + \mu_{123} - \mu_{124} - \mu_{125} + \mu_{134} + \mu_{135} - \mu_{145} + \mu_{234} + \mu_{235} - \mu_{245} + \mu_{345} + \mu_{12} - \mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} - \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{25} - \mu_{34} - \mu_{35} + \mu_{45} - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5.$$

$$J_{1345}^\mu = \mu_{12345} - \mu_{1234} - \mu_{1235} - \mu_{1245} + \mu_{1345} - \mu_{2345} + \mu_{123} + \mu_{124} + \mu_{125} - \mu_{134} - \mu_{135} -$$

$$\mu_{145} + \mu_{234} + \mu_{235} + \mu_{245} - \mu_{345} - \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} - \mu_{23} - \mu_{24} - \mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{35} + \mu_{45} - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5.$$

$$J_{2345}^\mu = \mu_{12345} - \mu_{1234} - \mu_{1235} - \mu_{1245} - \mu_{1345} + \mu_{2345} + \mu_{123} + \mu_{124} + \mu_{125} + \mu_{134} + \mu_{135} + \mu_{145} - \mu_{234} - \mu_{235} - \mu_{245} - \mu_{345} - \mu_{12} - \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{15} + \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{35} + \mu_{45} + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5.$$

$$J_{145}^\mu = 2\mu_{12345} - 2\mu_{1234} - 2\mu_{1235} + \mu_{1245} + \mu_{1345} - \mu_{2345} + 2\mu_{123} - \mu_{124} - \mu_{125} - \mu_{134} - \mu_{135} + 2\mu_{145} + 2\mu_{234} + 2\mu_{235} - \mu_{245} - \mu_{345} + \mu_{12} + \mu_{13} - 2\mu_{14} - 2\mu_{15} - 2\mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{35} - 2\mu_{45} + 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 2\mu_4 + 2\mu_5.$$

$$J_{245}^\mu = 2\mu_{12345} - 2\mu_{1234} - 2\mu_{1235} + \mu_{1245} - 2\mu_{1345} + \mu_{2345} + 2\mu_{123} - \mu_{124} - \mu_{125} + 2\mu_{134} + 2\mu_{135} - \mu_{145} - \mu_{234} - \mu_{235} + 2\mu_{245} - \mu_{345} + \mu_{12} - 2\mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} + \mu_{23} - 2\mu_{24} - 2\mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{35} - 2\mu_{45} - \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 + 2\mu_4 + 2\mu_5.$$

$$J_{345}^\mu = 2\mu_{12345} - 2\mu_{1234} - 2\mu_{1235} - 2\mu_{1245} + \mu_{1345} + \mu_{2345} + 2\mu_{123} + 2\mu_{124} + 2\mu_{125} - \mu_{134} - \mu_{135} - \mu_{145} - \mu_{234} - \mu_{235} - \mu_{245} + 2\mu_{345} - 2\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} + \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{25} - 2\mu_{34} - 2\mu_{35} - 2\mu_{45} - \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 + 2\mu_4 + 2\mu_5.$$

$$J_{45}^\mu = 6\mu_{12345} - 6\mu_{1234} - 6\mu_{1235} + 2\mu_{1245} + 2\mu_{1345} + 2\mu_{2345} + 6\mu_{123} - 2\mu_{124} - 2\mu_{125} - 2\mu_{134} - 2\mu_{135} + 2\mu_{145} - 2\mu_{234} - 2\mu_{235} + 2\mu_{245} + 2\mu_{345} + 2\mu_{12} + 2\mu_{13} - 2\mu_{14} - 2\mu_{15} + 2\mu_{23} - 2\mu_{24} - 2\mu_{25} - 2\mu_{34} - 2\mu_{35} + 6\mu_{45} + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3 - 6\mu_4 - 6\mu_5.$$

$$\text{Donc, } J_{45}^\mu + 2(J_{145}^\mu + J_{245}^\mu + J_{345}^\mu) + 2(J_{1245}^\mu + J_{1345}^\mu + J_{2345}^\mu) = -24(\mu_{1235} - \mu_{123}) \leq 0.$$

Ceci est une contradiction car $J_{45}^\mu, J_{145}^\mu, J_{245}^\mu, J_{345}^\mu, J_{1245}^\mu, J_{1345}^\mu, J_{2345}^\mu > 0$. \square

Exemple 2.4.1. *Considérons $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{(a_{23}, a_1), (a_{234}, a_{123}), (a_2, a_{13})\}$ et $I = \{(a_{14}, a_{23})\}$. $P \cup M \cup I$ ne contenant aucun cycle strict, alors $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet C_μ . Un tri topologique de $P \cup M \cup I$ est donné par $\mathcal{B}_0 = \{a_0\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_3, a_4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{13}, a_{34}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_2\}$, $\mathcal{B}_4 = \{a_{12}, a_{14}, a_{23}, a_{24}\}$, $\mathcal{B}_5 = \{a_{123}, a_{124}, a_{134}\}$, $\mathcal{B}_6 = \{a_{234}\}$ et $\mathcal{B}_7 = \{a_N\}$. Le Tableau 2.5 donne une capacité $\mu \in C_{P_{\text{ref}}}(P, I)$ et les indices d'interaction correspondants I_S^μ . Il est clair que, pour tout $S \subseteq_{\geq 2} N$, on a $I_S^\mu > 0$.*

S	$8^7 \times \mu(S)$	I_S^μ
\emptyset	0	–
$\{1\}, \{3\}, \{4\}$	8	–
$\{2\}$	8^3	–
$\{1, 2\}$	8^4	0.29
$\{1, 3\}$	8^2	0.29
$\{1, 4\}$	8^4	0.29
$\{2, 3\}, \{2, 4\}$	8^4	0.34
$\{3, 4\}$	8^2	0.74
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$	8^5	0.42
$\{1, 3, 4\}$	8^5	0.43
$\{2, 3, 4\}$	8^6	0.53
N	8^7	0.83

TABLEAU 2.5 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}(P, I)$ et les indices d'interaction I_S^μ correspondants

2.5 Un programme linéaire pour tester l'existence d'interactions nécessaires

Cette section s'appuie sur [72]. Nous relâchons l'hypothèse selon laquelle le décideur fournit des préférences sur \mathcal{B}^g , mais plutôt sur l'ensemble X . Nous montrons comment tester l'existence de certaines interactions positives et négatives nécessaires. Soit A un sous-ensemble d'au moins deux critères, notre approche consiste à tester d'abord, en deux étapes, la compatibilité de $\{P, I\}$ avec une intégrale de Choquet, puis, dans une troisième étape, l'existence d'une interaction positive ou négative nécessaire pour A .

Nous commençons cette section par une remarque donnant une version simplifiée de la condition de monotonie. Nous l'utilisons dans nos programmes linéaires, dans le but de réduire le nombre de contraintes de monotonie de la capacité.

Remarque 2.5.1. *La condition de monotonie d'une capacité est équivalente à la condition*

suivante [42] :

$$\forall S \subsetneq N, \forall i \in N \setminus S, \mu(S) \leq \mu(S \cup \{i\}).$$

2.5.1 Le processus

Le processus se déroule en trois étapes.

Étape 1. Le programme linéaire PL_1 suivant modélise chaque relation dans $\{P, I\}$ en introduisant deux variables d'écart non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- dans la contrainte correspondante (équation (1a) ou (1b)). L'équation (1c) (resp. (1d)) assure la normalisation (resp. monotonie) de la capacité μ . La fonction objectif Z_1 minimise toutes les variables non négatives introduites dans (1a) et (1b).

$$\text{Min } Z_1 = \sum_{(x,y) \in P \cup I} (\alpha_{xy}^+ + \alpha_{xy}^-) \quad PL_1$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) + \alpha_{xy}^+ - \alpha_{xy}^- \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x P y \quad (1a)$$

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) + \alpha_{xy}^+ - \alpha_{xy}^- = 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x I y \quad (1b)$$

$$\alpha_{xy}^+ \geq 0, \quad \alpha_{xy}^- \geq 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x(P \cup I)y$$

$$\mu(N) = 1 \quad (1c)$$

$$\mu(S \cup \{i\}) \geq \mu(S) \quad \forall S \subsetneq N, \forall i \in N \setminus S. \quad (1d)$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

$C_\mu(u(x))$ dépend linéairement des variables de décision $\mu(S)$. Le programme linéaire PL_1 est toujours réalisable grâce à l'introduction des variables non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- . Il y a deux cas possibles :

1. Si la solution optimale de PL_1 est $Z_1^* = 0$, alors nous pouvons conclure que, selon le signe de la variable ε ($\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon > 0$), $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. L'étape suivante de la procédure, va confirmer ou non cette possibilité.
2. Si la solution optimale de PL_1 est $Z_1^* > 0$, alors il n'existe pas une intégrale de Choquet compatible avec $\{P, I\}$.

Étape 2. Ici, le programme linéaire PL_2 assure l'existence d'une intégrale de Choquet compa-

tible avec $\{P, I\}$, lorsque la solution optimale de PL_1 est $Z_1^* = 0$. Par rapport au programme linéaire précédent, dans cette formulation, nous avons supprimé les variables non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- (nous les avons tous simplement mises à zéro). Nous avons ensuite changé la fonction objectif en maximisant la valeur de la variable ε , afin de satisfaire la relation de préférence stricte P . Ceci est similaire à ce qui se fait dans [5; 72]

$$\text{Max } Z_2 = \varepsilon \tag{PL_2}$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X \text{ tel que } x P y \tag{2a}$$

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) = 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tel que } x I y \tag{2b}$$

$$\mu(N) = 1 \tag{2c}$$

$$\mu(S \cup \{i\}) \geq \mu(S) \quad \forall S \subsetneq N, \forall i \in N \setminus S \tag{2d}$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

Nous avons l'un des deux cas suivants.

1. Si le programme linéaire PL_2 est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* = 0$, alors il n'existe pas une intégrale de Choquet compatible avec $\{P, I\}$.
2. Si la solution optimale de PL_2 est $Z_2^* > 0$, alors $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet.

Étape 3. À cette étape, nous supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet, c'est-à-dire $Z_2^* > 0$. Afin de tester si l'interaction négative (resp. positive) est nécessaire pour le sous-ensemble $A \subseteq_{\geq 2} N$, nous rajoutons au programme linéaire précédent PL_2 , la contrainte (2e) et obtenons le programme linéaire suivant noté PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A).

$$\text{Max } Z_3 = \varepsilon \tag{PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A)}$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x P y \tag{2a}$$

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) = 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x I y \tag{2b}$$

$$\mu(N) = 1 \tag{2c}$$

$$\mu(S \cup \{i\}) \geq \mu(S) \quad \forall S \subsetneq N, \forall i \in N \setminus S \quad (2d)$$

$$I_A^\mu \geq 0 \text{ (resp. } I_A^\mu \leq 0) \quad (2e)$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

I_A^μ dépend linéairement des variables de décision $\mu(S)$. Après la résolution de ce dernier programme, nous avons l'une des trois conclusions possibles suivantes.

1. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) n'est pas réalisable, alors l'interaction est nécessairement négative (resp. positive) pour A . En effet, puisque PL_2 est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* > 0$, alors la contradiction sur la représentation de $\{P, I\}$ par une intégrale de Choquet provient de l'introduction de la contrainte $I_A^\mu \geq 0$ (resp. $I_A^\mu \leq 0$).
2. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* = 0$, alors la contrainte $C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \geq \varepsilon, \forall x, y \in X$ tels que $x P y$ est satisfaite avec $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire, il n'est pas possible de modéliser les préférences strictes en ajoutant la contrainte $I_A^\mu \geq 0$ (resp. $I_A^\mu \leq 0$) dans PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A). Ainsi, nous pouvons conclure que l'interaction est nécessairement négative (resp. positive) pour A .
3. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* > 0$, alors l'interaction n'est pas nécessairement négative (resp. positive) pour A .

Chacun des programmes linéaires précédents contient $n(2^{n-1} - 1)$ contraintes de monotonie. De plus, le Tableau 2.6 liste les variables de décision et le Tableau 2.7 donne une idée du nombre de variables et du nombre de contraintes de monotonie pour $(3 \leq n \leq 12)$.

Variables de décision	
PL_1	$\varepsilon, \alpha_{xy}^+, \alpha_{xy}^-, \mu(S) (\emptyset \subsetneq S \subsetneq N)$
PL_2	$\varepsilon, \mu(S) (\emptyset \subsetneq S \subsetneq N)$
PL_{NN}^A	$\varepsilon, \mu(S) (\emptyset \subsetneq S \subsetneq N)$
PL_{NP}^A	$\varepsilon, \mu(S) (\emptyset \subsetneq S \subsetneq N)$

TABLEAU 2.6 – Variables de décision

	Nombre de variables $\mu(S)$	Nombre de contraintes de monotonie
$n = 3$	6	9
$n = 4$	14	28
$n = 5$	30	75
$n = 6$	62	186
$n = 7$	126	441
$n = 8$	254	1 016
$n = 9$	510	2 295
$n = 10$	1 022	5 110
$n = 11$	2 046	11 253
$n = 12$	4 094	24 564

TABLEAU 2.7 – Nombre de variables $\mu(S)$ et de contraintes de monotonie ($3 \leq n \leq 12$)

En pratique, le nombre de critères dépasse rarement 12, donc avec un solveur classique, nous sommes capables de résoudre ces programmes linéaires.

Exemple 2.5.1. *Dans cette section, nous illustrons notre procédure de décision par un exemple, inspiré de [6]. Considérons un problème de recrutement, où le dirigeant d'une entreprise cherche à engager un nouveau jeune employé. Le recruteur tient compte des quatre critères suivants.*

1. *Diplôme d'études (en abrégé : De) ;*
2. *Expérience professionnelle (en abrégé : Ep) ;*
3. *Âge (en abrégé : Ag) ;*
4. *Entretien d'embauche (en abrégé : En).*

Le recruteur va devoir choisir parmi les candidats de l'ensemble $X = \{\text{Arthur, Bernard, Charles, Daniel, Esther, Felix, Germaine, Henry, Irene}\}$.

Les scores d'évaluation pour chaque critère sont donnés au Tableau 2.8, sur une échelle de $[0, 10]$. Tous les critères doivent être maximisés. Le recruteur a donné ses préférences sur $X' = \{\text{Arthur, Bernard, Charles, Germaine, Irène}\}$.

- (a) Il préfère le candidat Charles (C) au candidat Bernard (B),
- (b) Il préfère la candidate Germaine (G) au candidat Arthur (A),
- (c) Il est indifférent entre les candidats Charles (C) et Irène(I).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
De	8	3	10	5	8	5	8	5	0
Ep	6	1	9	9	0	9	10	7	10
Ag	7	10	0	2	8	4	5	9	2
En	5	10	5	9	6	7	7	4	8

TABLEAU 2.8 – Matrice d'évaluation des candidats

Nous re-codons chaque alternative x par la transformation "identité" $u_i(x) = x, \forall i = 1, 2, 3$.

Étape 1. Le programme linéaire PL_1 avec les variables d'écart non négatives $\alpha_{CB}^+, \alpha_{CB}^-, \alpha_{GA}^+, \alpha_{GA}^-, \alpha_{CI}^+$ et α_{CI}^- .

$$\text{Min } Z_1 = \alpha_{CB}^+ + \alpha_{CB}^- + \alpha_{GA}^+ + \alpha_{GA}^- + \alpha_{CI}^+ + \alpha_{CI}^- \quad PL_1$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(C) - C_\mu(B) + \alpha_{CB}^+ - \alpha_{CB}^- \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(G) - C_\mu(A) + \alpha_{GA}^+ - \alpha_{GA}^- \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(C) - C_\mu(I) + \alpha_{CI}^+ - \alpha_{CI}^- = 0$$

$$C_\mu(A) = 5 + \mu_{123} + \mu_{13} + \mu_1$$

$$C_\mu(B) = 1 + 2\mu_{134} + 7\mu_{34}$$

$$C_\mu(C) = 5\mu_{124} + 4\mu_{12} + \mu_1$$

$$C_\mu(D) = 2 + 3\mu_{124} + 4\mu_{24}$$

$$C_\mu(E) = 6\mu_{134} + 2\mu_{13}$$

$$C_\mu(F) = 4 + \mu_{124} + 2\mu_{24} + 2\mu_2$$

$$C_\mu(G) = 5 + 2\mu_{124} + \mu_{12} + 2\mu_2$$

$$C_\mu(H) = 4 + \mu_{123} + 2\mu_{23} + 2\mu_3$$

$$C_\mu(I) = 2\mu_{234} + 6\mu_{24} + 2\mu_2$$

$$\mu_1 \geq 0; \mu_2 \geq 0; \mu_3 \geq 0; \mu_4 \geq 0$$

$$\mu_{12} \geq \mu_1; \mu_{12} \geq \mu_2$$

$$\mu_{13} \geq \mu_1; \mu_{13} \geq \mu_3$$

$$\mu_{14} \geq \mu_1; \mu_{14} \geq \mu_4$$

$$\mu_{23} \geq \mu_2; \mu_{23} \geq \mu_3$$

$$\mu_{24} \geq \mu_2; \mu_{24} \geq \mu_4$$

$$\mu_{34} \geq \mu_3; \mu_{34} \geq \mu_4$$

$$\mu_{123} \geq \mu_{12}; \mu_{123} \geq \mu_{13}; \mu_{123} \geq \mu_{23}$$

$$\mu_{124} \geq \mu_{12}; \mu_{124} \geq \mu_{14}; \mu_{124} \geq \mu_{24}$$

$$\mu_{134} \geq \mu_{13}; \mu_{134} \geq \mu_{14}; \mu_{134} \geq \mu_{34}$$

$$\mu_{234} \geq \mu_{23}; \mu_{234} \geq \mu_{24}; \mu_{234} \geq \mu_{34}$$

$$\mu_{1234} \geq \mu_{123}; \mu_{1234} \geq \mu_{124}; \mu_{1234} \geq \mu_{134}; \mu_{1234} \geq \mu_{234}$$

$$\mu_{1234} = 1$$

$$\varepsilon \geq 0$$

$$\alpha_{CB}^+, \alpha_{CB}^-, \alpha_{GA}^+, \alpha_{GA}^-, \alpha_{CI}^+ \text{ et } \alpha_{CI}^- \geq 0.$$

PL_1 est réalisable avec pour solution optimale $Z_1^* = 0$, donc selon le signe de la variable ε , $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. L'étape suivante de la procédure, va confirmer ou non cette possibilité.

Étape 2. Le programme linéaire suivant PL_2 correspond au test de la compatibilité de $\{P, I\}$ avec une intégrale de Choquet C_μ .

$$\text{Max } Z_2 = \varepsilon \tag{PL_2}$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(C) - C_\mu(B) \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(G) - C_\mu(A) \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(C) - C_\mu(I) = 0$$

$$C_\mu(A) = 5 + \mu_{123} + \mu_{13} + \mu_1$$

$$C_\mu(B) = 1 + 2\mu_{134} + 7\mu_{34}$$

$$C_\mu(C) = 5\mu_{124} + 4\mu_{12} + \mu_1$$

$$C_\mu(D) = 2 + 3\mu_{124} + 4\mu_{24}$$

$$C_\mu(E) = 6\mu_{134} + 2\mu_{13}$$

$$C_\mu(F) = 4 + \mu_{124} + 2\mu_{24} + 2\mu_2$$

$$C_\mu(G) = 5 + 2\mu_{124} + \mu_{12} + 2\mu_2$$

$$C_\mu(H) = 4 + \mu_{123} + 2\mu_{23} + 2\mu_3$$

$$C_\mu(I) = 2\mu_{234} + 6\mu_{24} + 2\mu_2$$

$$\mu_1 \geq 0; \mu_2 \geq 0; \mu_3 \geq 0; \mu_4 \geq 0$$

$$\mu_{12} \geq \mu_1; \mu_{12} \geq \mu_2$$

$$\mu_{13} \geq \mu_1; \mu_{13} \geq \mu_3$$

$$\mu_{14} \geq \mu_1; \mu_{14} \geq \mu_4$$

$$\mu_{23} \geq \mu_2; \mu_{23} \geq \mu_3$$

$$\mu_{24} \geq \mu_2; \mu_{24} \geq \mu_4$$

$$\mu_{34} \geq \mu_3; \mu_{34} \geq \mu_4$$

$$\mu_{123} \geq \mu_{12}; \mu_{123} \geq \mu_{13}; \mu_{123} \geq \mu_{23}$$

$$\mu_{124} \geq \mu_{12}; \mu_{124} \geq \mu_{14}; \mu_{124} \geq \mu_{24}$$

$$\mu_{134} \geq \mu_{13}; \mu_{134} \geq \mu_{14}; \mu_{134} \geq \mu_{34}$$

$$\mu_{234} \geq \mu_{23}; \mu_{234} \geq \mu_{24}; \mu_{234} \geq \mu_{34}$$

$$\mu_{1234} \geq \mu_{123}; \mu_{1234} \geq \mu_{124}; \mu_{1234} \geq \mu_{134}; \mu_{1234} \geq \mu_{234}$$

$$\mu_{1234} = 1$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

PL_2 est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* = 3.8 > 0$, donc $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. Les Tableaux 2.9 et 2.10 donnent les résultats de PL_2 .

S	$\mu(S)$
$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}$	0
$\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$	0.9
$\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, N$	1

TABLEAU 2.9 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$C_\mu(x)$	6	3	9	8.6	6	8.6	9.8	6.8	9

TABLEAU 2.10 – L'intégrale de Choquet correspondant à la capacité μ du Tableau 2.9

Étape 3. Afin de savoir si l'interaction est nécessairement négative (resp. positive) pour $\{1, 2, 3\}$, nous obtenons le programme linéaire PL_{NN}^{123} (resp. PL_{NP}^{123}) par ajout à PL_2 , de la contrainte $I_{123}^\mu \geq 0$ (resp. $I_{123}^\mu \leq 0$) avec $I_{123}^\mu = \mu_{1234} + \mu_{123} - \mu_{124} - \mu_{134} - \mu_{234} - \mu_{12} - \mu_{13} + \mu_{14} - \mu_{23} + \mu_{24} + \mu_{34} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4$.

- PL_{NP}^{123} est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* = 3.8 > 0$, donc l'interaction n'est pas nécessairement positive pour le sous-ensemble {Diplôme d'études, Expérience professionnelle, Âge}. Les résultats obtenus en résolvant PL_{NP}^{123} sont donnés aux Tableaux 2.11 et 2.12 (avec $I_{123}^\mu = -2.375 < 0$).

S	$\mu(S)$
$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}$	0
$\{2\}$	0.6875
$\{2, 4\}$	0.9375
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, N$	1

TABLEAU 2.11 – Une capacité compatible avec PL_{NP}^{123}

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$C_\mu(x)$	7	3	9	8.75	8	8.25	9.375	7	9

TABLEAU 2.12 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 2.11

- PL_{NN}^{123} est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* = 3.8 > 0$, donc l'interaction n'est pas nécessairement négative pour le sous-ensemble {Diplôme d'études, Expérience professionnelle, Âge}. Les résultats obtenus après la résolution de PL_{NP}^{123} sont donnés aux Tableaux 2.13 et 2.14 (avec $I_{123}^\mu = 1 > 0$).

S	$\mu(S)$
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}$	0
$\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$	0.125
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$	0.2
N	1

TABLEAU 2.13 – Une capacité μ compatible avec PL_{NN}^{123}

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$C_\mu(x)$	5.2	1	1	3.1	0	4.45	5.4	4.2	1

TABLEAU 2.14 – L’intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 2.13

2.6 Synthèse et perspectives

2.6.1 Synthèse

Ce chapitre a étudié la stabilité du signe de l’indice d’interaction de Shapley, dans un modèle d’intégrale de Choquet. Nous avons fait une restriction au cas où le décideur donne ses préférences sur un ensemble fini d’alternatives, contrairement au cas continu étudié dans [103; 104; 105].

En somme, tout au long de ce chapitre, nous avons illustré que le signe de l’indice d’interaction de Shapley dépend du choix arbitraire d’une capacité dans l’ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Son interprétation exige donc une certaine prudence. Il en ressort que les interactions nécessaires sont les seules qui peuvent être interprétées en toute sécurité, puisque leur signe est stable dans l’ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Nous avons ensuite proposé un modèle de programmation linéaire permettant de tester l’existence de certaines interactions nécessaires. Le chapitre suivant sera consacré à un travail similaire avec l’indice de non-additivité.

2.6.2 Perspectives

Nous présentons à présent des limites et perspectives relatives à ce chapitre.

- Nous travaillons le plus souvent avec les alternatives binaires car cela nous permet d'obtenir plus de résultats, mais ces alternatives sont rarement réelles, mais sont plutôt le plus souvent fictives.
- Sur l'ensemble X de toutes les alternatives, nous avons proposé un modèle de programmation linéaire car nous y avons un seul résultat axiomatique, portant sur l'interaction nulle non nécessaire. Dans la preuve de ce résultat, nous quittons d'un indice d'interaction nul à un indice d'interaction strictement positif, tout en restant dans l'ensemble des capacités compatibles avec les préférences du décideur. Dans nos prochains travaux, nous examinerons le problème dual : quitter d'un indice nul à un indice strictement négatif, tout en restant dans l'ensemble des capacités compatibles avec les préférences du décideur.
- Sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées, lorsque l'information préférentielle ordinaire du décideur ne contient aucune indifférence, nous montrons qu'il est toujours possible d'obtenir une interaction positive, simultanément pour tous les groupes de critères. Le problème dual (relatif aux interactions négatives) a déjà attiré notre attention, nous n'avons pas une solution à portée de main, mais continuons à nous y intéresser.
- Sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées, lorsque l'information préférentielle ordinaire du décideur peut contenir une indifférence, nous montrons qu'il peut ne pas être possible d'obtenir une interaction positive, simultanément pour tous les groupes de critères. Mais nous montrons que cela est toujours possible, à une condition nécessaire et suffisante que nous donnons. Par contre, notre condition ne tient que pour des cas où le nombre de critère ne dépasse pas cinq. Notre intuition est que cette condition tient quelque soit le nombre de critères, nous allons davantage creuser pour obtenir une preuve formelle.
- Nous avons un à priori selon lequel l'interaction nécessaire ne peut jamais se produire

si le décideur fournit uniquement des informations préférentielles ordinales. Pour cela, il faudra recueillir des informations supplémentaires. La première idée est d'y ajouter des *intensités de préférences*, pour obtenir des interactions nécessaires.

- Dans ce chapitre, notre travail se fonde sur les alternatives binaires, avec deux niveaux de références : le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i . Nous envisageons faire un travail similaire, avec un modèle d'intégrale de Choquet bipolaire (utilisant une bicapacité) se fondant sur les alternatives ternaires, avec trois niveaux de références : le niveau mauvais -1_i , le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i .

Degrés de non-additivité possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet

Ce chapitre est une version longue de notre papier [55]. Il s'inscrit dans le prolongement du Chapitre 2. Ici, nous travaillons avec l'indice de non-additivité car il permet aussi de capter la façon dont interagissent les critères, et avec cet indice nous obtenons beaucoup plus de résultats qu'avec l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle utilisant l'intégrale de Choquet.

La première partie de ce chapitre traite du cas particulier où l'information préférentielle du décideur ne contient aucune relation d'indifférence. La seconde partie quant à elle est consacrée au cas général ($I \neq \emptyset$). Ensuite, à la Section 3.3, nous proposons un modèle de programmation linéaire pour tester l'existence de degrés de non-additivité nécessaires.

3.1 Résultats lorsque $I = \emptyset$

Au chapitre précédent, nous avons motivé le fait de commencer par le cas particulier $I = \emptyset$. Cette section donne nos résultats dans le cas où le décideur ne donne aucune relation d'indifférence, puis nous traitons le cas général ($I \neq \emptyset$) dans la section suivante.

Nous subdivisons cette section en deux sous-sections. La première se base sur l'ensemble de toutes les alternatives X et la seconde se concentre sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées. Nos résultats de la sous-section suivante montrent que le signe de l'indice de

non-additivité n'est pas stable dans l'ensemble $C_{\text{Préf}}$.

3.1.1 Résultats sur l'ensemble des alternatives X

La Proposition 2.3.1 du Chapitre 2 montre que l'interaction nulle n'est jamais nécessaire. Nous avons en effet prouvé qu'à partir d'un indice d'interaction nul, nous pouvons construire une autre capacité représentative, dépendante de la précédente et pour laquelle l'indice d'interaction est strictement positif. La proposition suivante va dans le même sens, avec l'indice de non-additivité. En effet, la Proposition 3.1.1 montre qu'à partir d'un indice de non-additivité nul, on peut construire un indice de non-additivité strictement positif, tout en restant dans $C_{\text{Préf}}$ [59].

Proposition 3.1.1. *Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X tel que $I = \emptyset$. Si $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet C_μ et $\eta_A^\mu = 0$. Alors il existe une capacité $\beta^\mu \in C_{\text{Préf}}$ telle que $\eta_A^{\beta^\mu} > 0$.*

Preuve 3.1.1. *Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X tel que $I = \emptyset$. Nous supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet C_μ telle que $\eta_A^\mu = 0$. Définissons sur N la fonction β_ε^μ , pour tout $S \subseteq N$, par :*

$$\beta_\varepsilon^\mu(S) = \begin{cases} \frac{1}{1+\varepsilon}(\mu(S) + \varepsilon), & \text{si } A \subseteq S \\ \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(S) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ε est un nombre réel positif à déterminer ultérieurement. Montrons que $\forall \varepsilon > 0$, β_ε^μ est une capacité sur N . Il est évident que $\forall \varepsilon > 0$, on a $\beta_\varepsilon^\mu(\emptyset) = 0$ et $\beta_\varepsilon^\mu(N) = 1$. Soient $\varepsilon > 0$ et $S, T \subseteq N$ tels que $S \subseteq T$.

- Si $A \subseteq S$, alors $A \subseteq T$ et $\beta_\varepsilon^\mu(T) - \beta_\varepsilon^\mu(S) = \frac{1}{1+\varepsilon}(\mu(T) - \mu(S)) \geq 0$ car μ est une capacité sur N et $S \subseteq T \subseteq N$.
- Sinon, on a $\beta_\varepsilon^\mu(S) = \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(S)$ et $\beta_\varepsilon^\mu(T) = \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(T)$ (si $A \subseteq T$) ou $\beta_\varepsilon^\mu(T) = \frac{1}{1+\varepsilon}(\mu(T) + \varepsilon)$, donc $\beta_\varepsilon^\mu(T) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(T)$ car $\mu(T) + \varepsilon > \mu(T)$. Par conséquent $\beta_\varepsilon^\mu(T) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(T) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(S)$ car $S \subseteq T \subseteq N$ et μ est une capacité sur N . Ainsi, $\beta_\varepsilon^\mu(T) \geq \beta_\varepsilon^\mu(S)$.

Dans les deux cas, on a $\beta_\varepsilon^\mu(T) \geq \beta_\varepsilon^\mu(S)$, d'où β_ε^μ est une capacité sur N , $\forall \varepsilon > 0$.

Par ailleurs, on a $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) = \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)})$.

Considérons l'ensemble $\Gamma_{u(x)} = \{i = 1, 2, \dots, n : A \subseteq N_{\sigma(i)}\}$. On a $1 \in \Gamma_{u(x)}$ pour tout $x \in X$ car $A \subseteq N = N_{\sigma(1)}$, donc $\Gamma_{u(x)} \neq \emptyset$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(x)) &= \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\ &= \sum_{i \notin \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\ &+ \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \beta_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i \notin \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \mu(N_{\sigma(i)}) \\ &+ \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] (\mu(N_{\sigma(i)}) + \varepsilon) \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i \notin \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \mu(N_{\sigma(i)}) \\ &+ \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \mu(N_{\sigma(i)}) \\ &+ \frac{1}{1+\varepsilon} \varepsilon \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right) \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[C_\mu(u(x)) + \varepsilon \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[C_\mu(u(x)) + \varepsilon v^\sigma(u(x)) \right] \text{ où} \\ v^\sigma(u(x)) &= \sum_{i \in \Gamma_{u(x)}} \left(u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right). \text{ Ainsi, } \forall (a, b) \in P, \text{ nous pouvons écrire} \end{aligned}$$

$$C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(b)) = \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\left(C_\mu(u(a)) - C_\mu(u(b)) \right) + \varepsilon (v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))) \right].$$

Nous cherchons ε tel que $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0$ pour tout $(a, b) \in P$ car nous voulons avoir $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{Pref}$. Posons $\Omega = \{(a, b) \in P : v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b)) < 0\}$.

- Si $\Omega = \emptyset$, alors pour tout $(a, b) \in P$, on a $v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b)) \geq 0$.

Ainsi, pour tout $(a, b) \in P$, on a $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

- Si $\Omega \neq \emptyset$, alors choisir ε tel que $0 < \varepsilon < \min_{(a,b) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(a))}{v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))} \right)$ nous garantit que $C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0$ pour tout $(a, b) \in P$.

Ainsi, dans les deux cas, choisir $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{(a,b) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(x^a))}{v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))} \right)$ nous garantit que $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \eta_A^{\beta_\varepsilon^\mu} &= \beta_\varepsilon^\mu(A) - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \neq B \subsetneq A} \beta_\varepsilon^\mu(B) \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\varepsilon + \mu(A) - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \neq B \subsetneq A} \mu(B) \right) \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon} (\varepsilon + \eta_A^\mu). \end{aligned}$$

Comme $\eta_A^\mu = 0$, donc $\eta_A^{\beta_\varepsilon^\mu} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 0$. Ainsi, le degré de non-additivité est possiblement positif pour A . Par conséquent, le degré de non-additivité n'est pas nécessairement nul lorsque $I = \emptyset$. \square

Le résultat de la proposition suivante est le dual de celui de la Proposition précédente. En effet, il montre qu'à partir d'un degré de non-additivité nul, nous pouvons construire un degré de non-additivité strictement négatif, tout en restant dans C_{Pref} [59]. Notons que nous n'avons pas un tel résultat au Chapitre 2 avec l'indice d'interaction de Shapley.

Proposition 3.1.2. Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X tel que $I = \emptyset$. Si $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet C_μ et $\eta_A^\mu = 0$. Alors il existe une capacité $\gamma^\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^{\gamma^\mu} < 0$.

Preuve 3.1.2. Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur X tel que $I = \emptyset$. Nous supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet C_μ telle que $\eta_A^\mu = 0$. Définissons sur N la fonction γ_ε^μ , pour tout $S \subseteq N$, par :

$$\gamma_\varepsilon^\mu(S) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \varepsilon} (\mu(S) + \varepsilon) & \text{si } S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S = \emptyset, \end{cases}$$

où ε est un nombre réel positif à déterminer ultérieurement. Montrons que $\forall \varepsilon > 0$, γ_ε^μ est une capacité sur N . Il est évident que $\forall \varepsilon > 0$, on a $\gamma_\varepsilon^\mu(\emptyset) = 0$ et $\gamma_\varepsilon^\mu(N) = 1$. Soient $\varepsilon > 0$ et $S, T \subseteq N$ tels que $S \subseteq T$.

- Si $S = \emptyset$, alors $\gamma_\varepsilon^\mu(S) = 0 \leq \gamma_\varepsilon^\mu(T)$.
- Si $S \neq \emptyset$, alors $T \neq \emptyset$ et $\gamma_\varepsilon^\mu(S) = \frac{1}{1 + \varepsilon} (\mu(S) + \varepsilon) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} (\mu(T) + \varepsilon) = \gamma_\varepsilon^\mu(T)$.

Dans les deux cas, on a $\gamma_\varepsilon^\mu(T) \geq \gamma_\varepsilon^\mu(S)$. Ce qui nous permet de déduire que, $\forall \varepsilon > 0$, γ_ε^μ est une capacité sur N . De plus, on a

$$\begin{aligned}
C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(x)) &= \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \gamma_\varepsilon^\mu(N_{\sigma(i)}) \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] (\mu(N_{\sigma(i)}) + \varepsilon) \text{ car } N_{\sigma(i)} \neq \emptyset. \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \mu(N_{\sigma(i)}) \\
&+ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[C_\mu(u(x)) + \varepsilon v^\sigma(u(x)) \right] \text{ où}
\end{aligned}$$

$$v^\sigma(u(x)) = \sum_{i=1}^n \left[u_{\sigma(i)}(x_{\sigma(i)}) - u_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i-1)}) \right]. \text{ Ainsi, } \forall (a, b) \in P,$$

$$C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\beta_\varepsilon^\mu}(u(b)) = \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\left(C_\mu(u(a)) - C_\mu(u(b)) \right) + \varepsilon (v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))) \right].$$

Nous cherchons ε de telle sorte que $C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0, \forall (a, b) \in P$ car nous voulons avoir $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{Pref}$. Posons $\Omega = \{(a, b) \in P : v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b)) < 0\}$.

- Si $\Omega = \emptyset$, alors $\forall (a, b) \in P$, on a $v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b)) \geq 0$. Donc, $\forall (a, b) \in P$, on a $C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0, \forall \varepsilon > 0$.
- Si $\Omega \neq \emptyset$, alors choisir ε tel que $0 < \varepsilon < \min_{(a,b) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(a))}{v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))} \right)$ nous garantit $C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(a)) - C_{\gamma_\varepsilon^\mu}(u(b)) > 0, \forall (a, b) \in P$.

Dans les deux cas, nous pouvons choisir $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{(a,b) \in \Omega} \left(\frac{C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(a))}{v^{\sigma^a}(u(a)) - v^{\sigma^b}(u(b))} \right)$ de telle sorte que $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{Pref}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\eta_A^{\gamma_\varepsilon^\mu} &= \gamma_\varepsilon^\mu(A) - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \neq B \subsetneq A} \gamma_\varepsilon^\mu(B) \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\varepsilon + \mu(A) - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \neq B \subsetneq A} (\mu(B) + \varepsilon) \right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\eta_A^\mu + \varepsilon - \frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \varepsilon (2^{|A|} - 2) \right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\eta_A^\mu + \varepsilon \left(1 - \frac{2^{|A|} - 2}{2^{|A|-1} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left[\eta_A^\mu + \varepsilon \left(1 - \frac{2(2^{|A|-1} - 1)}{2^{|A|-1} - 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} \left(\eta_A^\mu + \varepsilon \times (1 - 2) \right) \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon} (\eta_A^\mu - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Or $\eta_A^\mu = 0$, donc $\eta_A^{\gamma_\varepsilon^\mu} = \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} < 0$. Ainsi, le degré de non-additivité est possiblement né-

gatif pour A . On conclut donc qu'au cas où $I = \emptyset$, le degré de non-additivité n'est jamais nécessairement nul. \square

L'exemple suivant illustre les Propositions 3.1.1 et 3.1.2.

Exemple 3.1.1. $N = \{1, 2, 3\}$, $X = \{a, b, c, d\}$, $a = (6, 11, 9)$, $b = (6, 13, 7)$, $c = (16, 11, 9)$, $d = (16, 13, 7)$ and $P = \{(d, c), (b, a)\}$.

Le Tableau 3.1 donne une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ et telle que $\eta_{23}^\mu = 0$. Le Tableau 3.2 quant à lui donne les indices d'interaction correspondants à la capacité du Tableau 3.1.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	1

TABLEAU 3.1 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^\mu = 0$.

x	d	c	b	a
$C_\mu(u(x))$	14.5	13.5	9.5	8.5

TABLEAU 3.2 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité du Tableau 3.1

- **Construction de $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\beta_\varepsilon} > 0$**

On a $v^{\sigma^d}(d) - v^{\sigma^c}(c) = 7 - 9 = -2 < 0$ et $v^{\sigma^b}(b) - v^{\sigma^a}(a) = 7 - 9 = -2 < 0$ donc $\Omega = \{(d, c), (b, a)\}$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left(\frac{8.5 - 9.5}{7 - 9}, \frac{13.5 - 14.5}{7 - 9} \right) = 0.25$. Une capacité $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{23}^{\beta_\varepsilon} > 0$ et l'intégrale de Choquet correspondante à β_ε^μ sont respectivement données aux Tableaux 3.3 et 3.4. En effet, on a

$$\eta_{23}^{\beta_\varepsilon^\mu} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{0.25}{1 + 0.25} = 0.2 > 0.$$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0.4	0.4	0	0.8	0.4	0.6	1

TABLEAU 3.3 – Une capacité $\beta_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\beta_\varepsilon} > 0$.

x	d	c	b	a
$C_\mu(u(x))$	13	12.6	9	8.6

TABLEAU 3.4 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité β_ε^μ du Tableau 3.3

- **Construction de $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\gamma_\varepsilon^\mu} < 0$**

On a $v^{\sigma^d}(d) - v^{\sigma^c}(c) = 16 - 16 = 0$ et $v^{\sigma^b}(b) - v^{\sigma^a}(a) = 13 - 11 = 2 \geq 0$ donc $\Omega = \emptyset$, par conséquent nous pouvons choisir n'importe quel $\varepsilon > 0$. Nous optons pour $\varepsilon = 1$.

Une capacité $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ (avec $\eta_{23}^{\gamma_\varepsilon^\mu} < 0$) et l'intégrale de Choquet correspondante à γ_ε^μ sont respectivement données aux Tableaux 3.5 et 3.6. En effet, on a

$$\eta_{23}^{\gamma_\varepsilon^\mu} = \frac{-\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{-0.25}{1 + 0.25} = -0.2 < 0.$$

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mu(S)$	0.75	0.75	0.5	1	0.75	0.75	1

TABLEAU 3.5 – Une capacité $\gamma_\varepsilon^\mu \in C_{\text{Pref}}$ avec $\eta_{23}^{\gamma_\varepsilon^\mu} < 0$.

x	d	c	b	a
$C_\mu(u(x))$	15.25	14.25	11.25	9.75

TABLEAU 3.6 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité γ_ε^μ du Tableau 3.5.

Dans la sous-section suivante, nous allons nous restreindre à l'ensemble des alternatives binaires généralisées. Nos résultats montrent que sous certaines conditions de représentation de $\{P, I\}$, le degré de non-additivité positive est toujours possible. Il en est de même pour celle négative.

3.1.2 Résultats sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g

Le résultat de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2 montre que, s'il n'y a pas d'indifférence, alors l'absence de cycle strict dans $P \cup M$ est une condition nécessaire et suffisante de représentation de $\{P, I\}$. Sous cette condition, la Proposition 2.3.3 du Chapitre 2 montre

que l'interaction positive est toujours possible simultanément pour toutes les coalitions d'au moins deux critères. Le résultat de la proposition suivante est le même, avec l'indice de non-additivité [59].

Proposition 3.1.3. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que, $I = \emptyset$ et $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict. Alors il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $\eta_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$.*

Preuve 3.1.3. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que, $I = \emptyset$ et $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict. Comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2, nous construisons une partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g . Nous définissons la capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$, pour tout $S \subseteq N$, par :*

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ (2n)^\ell / (2n)^m, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

On a $\mu \in C_{Pref}$. En effet, si $a_S P a_T$, alors $a_S \in \mathcal{B}_q$ et $a_T \in \mathcal{B}_r$ avec $q > r$. Donc $\mu(S) = (2n)^q$ et $\mu(T) = 0$ (si $r = 0$) ou $\mu(T) = (2n)^r$ (si $r \geq 1$). Mais $(2n)^q > \max(0, (2n)^r)$ car $q > r \geq 0$, d'où $\mu(S) > \mu(T)$.

Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, il existe $q, r, s \in \{1, 2, \dots, m\}$ tels que $a_A \in \mathcal{B}_q$, $a_B \in \mathcal{B}_r$ et $a_{A \setminus B} \in \mathcal{B}_s$ avec $q > r$ et $q > s$. Donc $\mu(B) = (2n)^r$, $\mu(A \setminus B) = (2n)^s$ et $\mu(A) = (2n)^q = (2n)(2n)^{q-1} > 2(2n)^{q-1} = (2n)^{q-1} + (2n)^{q-1} \geq (2n)^r + (2n)^s$ car $q - 1 \geq r$ et $q - 1 \geq s$. Par conséquent, $\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) > 0$ pour tout B tel que $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$. Par suite, $\sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} (\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B)) > 0$, d'où $\eta_A^\mu > 0$. \square

Le résultat de la proposition suivante est le dual de celui de la Proposition 3.1.3 précédente. En effet, étant donné un ensemble d'informations de préférentielles ordinales $\{P, I\}$ sur \mathcal{B}^g , sous les conditions précédentes, la Proposition 3.1.4 montre que le degré de non-additivité est toujours possiblement négatif, simultanément pour tous les sous-ensembles $A \subseteq_{\geq 2} N$ [59]. En d'autres termes, lorsqu'il n'y a pas d'indifférence, le degré de non-additivité n'est **jamais** nécessairement positif, ni nul. Notons que ce problème dual est resté ouvert au Chapitre 2, avec l'indice d'interaction de Shapley.

Proposition 3.1.4. Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que, $I = \emptyset$ et $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict. Alors il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $\eta_A^\mu < 0$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$.

Preuve 3.1.4. Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g tel que, $I = \emptyset$ et $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict. Nous construisons la partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2. Nous définissons la capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$, pour tout $S \subseteq N$, par :

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ \frac{\ell + 1}{\ell + 2}, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m - 1\} \\ 1, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_m. \end{cases}$$

Soient $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$ tels que $a_S P a_T$. Montrons que $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Puisque $a_S, a_T \in \mathcal{B}^g$ et $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ est une partition de \mathcal{B}^g , alors il existe $r, q \in \{0, 1, \dots, m\}$ tels que $a_S \in \mathcal{B}_r$, $a_T \in \mathcal{B}_q$. Comme $a_S P a_T$, donc $r > q$. On a $\mu(S) = \frac{r + 1}{r + 2}$ (si $1 \leq r \leq m - 1$) ou $\mu(S) = 1$ (si $r = m$), par conséquent $C_\mu(u(a_S)) \geq \frac{r + 1}{r + 2}$, car $1 \geq \frac{r + 1}{r + 2}$ et $C_\mu(u(a_S)) = \mu(S)$.

- Si $q = 0$, alors $C_\mu(u(a_T)) = C_\mu(u(a_0)) = \mu(\emptyset) = 0 < \frac{r + 1}{r + 2} \leq C_\mu(u(a_S))$.
- Si $q \geq 1$, alors $C_\mu(u(a_T)) = \mu(T) = \frac{q + 1}{q + 2}$, car $1 \leq q \leq m - 1$. Mais $r > q$ implique $\frac{r + 1}{r + 2} > \frac{q + 1}{q + 2}$, car la suite numérique $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, où $f_n = \frac{n + 1}{n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$.

Dans les deux cas, on a $C_\mu(u(a_S)) > C_\mu(u(a_T))$, donc $\mu \in C_{Pref}$.

Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, il existe $q, r, s \in \{1, 2, \dots, m\}$ tels que $a_A \in \mathcal{B}_q$, $a_B \in \mathcal{B}_r$ et $a_{A \setminus B} \in \mathcal{B}_s$ avec $q > r$ et $q > s$. Alors, $\frac{2}{3} \leq \mu(A) \leq 1$, $\frac{2}{3} \leq \mu(B) \leq 1$ et $\frac{2}{3} \leq \mu(A \setminus B) \leq 1$. Donc $\mu(B) + \mu(A \setminus B) \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 1 \geq \mu(A)$, c'est-à-dire, $\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) < 0$ pour tout B tel que $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$. Ainsi, $\sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} (\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B)) < 0$, d'où $\eta_A^\mu < 0$. \square

L'exemple suivant illustre les Propositions 3.1.3 et 3.1.4.

Exemple 3.1.2. $N = \{1, 2, 3\}$, $P = \{(a_{23}, a_{12}), (a_2, a_3)\}$.

L'information $\{P, I\}$ ne contient pas d'indifférence et la relation binaire $P \cup M$ ne contient

aucun cycle strict, donc $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. Un tri topologique convenable sur $P \cup M$ nous permet de construire la partition suivante. $\mathcal{B}_0 = \{a_0\}$; $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_3\}$; $\mathcal{B}_2 = \{a_2, a_{13}\}$; $\mathcal{B}_3 = \{a_{12}\}$; $\mathcal{B}_4 = \{a_{23}\}$ et $\mathcal{B}_5 = \{a_{123}\}$. L'information $\{P, I\}$ est représentable par les capacités μ et α données aux Tableaux 3.7 et 3.8 respectivement, avec $\eta_A^\mu > 0$ et $\eta_A^\alpha < 0$, $\forall A \subseteq_{\geq 2} N$.

A	{1}	{3}	{2}	{1, 3}	{1, 2}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$6^5 \times \mu(A)$	6	6	6^2	6^2	6^3	6^4	6^5
$6^5 \times \eta_A^\mu$				24	174	1254	7244

TABLEAU 3.7 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\mu > 0$, $\forall A \subseteq_{\geq 2} N$

A	{1}	{3}	{2}	{1, 3}	{1, 2}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\alpha(A)$	2/3	2/3	3/4	3/4	4/5	5/6	6/7
η_A^α				-7/12	-37/60	-7/12	-199/315

TABLEAU 3.8 – Une capacité $\alpha \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\alpha < 0$, $\forall A \subseteq_{\geq 2} N$

Dans cette section, nous avons prouvé et illustré par des exemples que : le degré de non-additivité n'est pas nécessairement nul, ni positif, ni même négatif. Par conséquent, l'interprétation du signe du degré de non-additivité exige une certaine prudence.

Dans la section suivante, en supposant que l'ensemble d'informations peut contenir de l'indifférence, nous donnons quelques conditions suffisantes pour obtenir un degré de non-additivité positif, ainsi que négatif pour une coalition de critères A donnée. Nous montrons par la suite que ces conditions ne sont équivalentes que pour les couples de critères $\{i, j\}$.

3.2 Résultats lorsque I n'est pas vide

Le résultat de la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2, prouve que l'information $\{P, I\}$ sur \mathcal{B}^g est représentable par une intégrale de Choquet si et seulement si la relation binaire $P \cup M \cup I$

ne contient pas de cycle strict. Dans toute cette section, nous supposons que cette condition est vérifiée et que l'information $\{P, I\}$ peut contenir de l'indifférence. Nos résultats de cette section montrent que sous certaines conditions, le signe du degré de non-additivité n'est pas stable dans l'ensemble C_{Pref} .

Étant donné un sous-ensemble $A \subseteq_{\geq 2} N$, la proposition suivante donne une condition suffisante sur $\{P, I\}$ pour que le degré non-additivité soit négatif pour A . Notons qu'au Chapitre 2 nous n'avons pas une telle condition suffisante pour obtenir une interaction négative.

Proposition 3.2.1. *Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Si pour tout $i \in A$, on a $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_i)$, alors il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\mu < 0$.*

Preuve 3.2.1. *Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Nous supposons que $\forall i \in A$, on a $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_i)$. Puisque $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet, alors $P \cup M \cup I$ ne contient aucun cycle strict. Comme dans la preuve de la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2, nous construisons une partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g en faisant un tri topologique sur $P \cup M \cup I$. Nous définissons une capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$, pour tout $S \subseteq N$, par :*

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ \frac{\ell + 1}{\ell + 2}, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m-1\} \\ 1, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_m. \end{cases}$$

D'après la preuve de la Proposition 3.1.4 de ce chapitre, si $a_S P a_T$ alors $\mu(S) > \mu(T)$. En outre, si $a_S I a_T$, alors il existe $\ell \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $a_S, a_T \in \mathcal{B}_\ell$, donc $\mu(S) = \mu(T)$. Par conséquent, on a $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

Soit $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, puisque $\forall i \in A$, $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_i)$, alors $\forall i \in A$, $a_i \notin \mathcal{B}_0$, donc $a_B \notin \mathcal{B}_0$. Ainsi, $\mu(B) \geq \frac{\ell + 1}{\ell + 2}$ avec $1 \leq \ell \leq m-1$. Par conséquent $\mu(B) \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, donc $\sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} \mu(B) >$

$\frac{1}{2}(2^{|A|} - 2) = 2^{|A|-1} - 1$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2^{|A|-1} - 1} \sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} \mu(B) > 1 \geq \mu(A)$, d'où $\eta_A^\mu < 0$. \square

Remarque 3.2.1. *La condition suffisante de la Proposition 3.2.1 est nécessaire pour $A \subseteq_{=2} N$ (voir la Proposition 3.2.2 ci-dessous) mais n'est pas nécessaire pour $A \subseteq_{\geq 3} N$. En effet, posons $N = \{1, 2, 3\}$, $P = \{(a_{13}, a_2)\}$, $I = \{(a_0, a_1)\}$ et $A = N$. L'information $\{P, I\}$ est représentable par la capacité donnée au Tableau 3.9.*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0	0.5	1	1	1	0.5	1

TABLEAU 3.9 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

On a $1 \in A$ et $a_0 TC_{M \cup I} a_1$, mais $\eta_{123}^\mu = 1 - \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{23}) = -\frac{1}{3} < 0$.

Étant donnée une paire de critères $\{i, j\} \subseteq N$, la proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante sur $\{P, I\}$ de telle sorte que le degré de non-additivité soit négatif pour $\{i, j\}$.

Proposition 3.2.2. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet et $\{i, j\}$ une paire de critères. Il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{ij}^\mu < 0$ si et seulement si $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_i)$ et $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_j)$.*

Preuve 3.2.2. *Soit $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet et $\{i, j\}$ une paire de critères.*

Nécessité. *Supposons l'existence d'une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{ij}^\mu < 0$. Si $a_0 TC_{M \cup I} a_i$ ou $a_0 TC_{M \cup I} a_j$, alors $\eta_{ij}^\mu = \mu_{ij} - \mu_j \geq 0$ ou $\eta_{ij}^\mu = \mu_{ij} - \mu_i \geq 0$ respectivement. Donc $\eta_{ij}^\mu \geq 0$ dans les deux cas. Ceci est une contradiction car nous avons supposé que $\eta_{ij}^\mu < 0$.*

Suffisance. *Selon la Proposition 3.2.1, il suffit de prendre $A = \{i, j\}$ □*

Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\emptyset \neq B \subsetneq A$, si le décideur est indifférent entre les alternatives a_A et $a_{A \setminus B}$, alors cela induirait que le sous-ensemble B est sans grande "importance" pour le décideur, de sorte que a_B soit indifférent à a_0 . Nous traduisons cette idée par la définition suivante.

Définition 3.2.1. *Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$, nous appelons MOPI (de l'anglais MOnotonicity of Prefe-rential Information) pour A , la propriété suivante (notée $A - \text{MOPI}$).*

$$\text{Pour tout } \emptyset \neq B \subsetneq A, (a_A \sim a_{A \setminus B}) \implies (\text{non}(a_B TC_P a_0)).$$

Pour les paires de critères $A \subseteq_{=2} N$, la condition $A - \text{MOPI}$ coïncide avec celle introduite par Brice Mayag et Denis Bouyssou dans [72]. Elle y est utilisée pour caractériser les informations sur \mathcal{B} , représentables par une intégrale de Choquet 2-additive, lorsque $I = \emptyset$.

La Proposition 2.4.2 du Chapitre 2 donne une condition suffisante pour obtenir une interaction positive, simultanément pour toutes les coalitions de critères. La proposition suivante s'inscrit dans le même cadre, en donnant une condition suffisante pour obtenir un degré de non-additivité positif ou nul, pour une coalition de critères A donnée. En effet, étant donné un sous-ensemble $A \subseteq_{\geq 2} N$, la proposition suivante donne une condition suffisante sur $\{P, I\}$ pour que le degré de non-additivité ne soit pas nécessairement négatif pour A .

Proposition 3.2.3. *Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Supposons satisfaite la condition A -MOPI, alors il existe une capacité $\mu \in C_{Pref}$ telle que $\eta_A^\mu \geq 0$.*

Preuve 3.2.3. *Soient $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Supposons satisfaite la condition A -MOPI. La partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B}^g est construite telle dans la preuve de la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2. Définissons la capacité $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$, pour tout $S \subseteq N$, par :*

$$\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ (2n)^\ell / (2n)^m, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

D'après la preuve de la Proposition 3.1.3, si $a_S P a_T$ alors $\mu(S) > \mu(T)$. En outre, si $a_S I a_T$, alors il existe $\ell \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $a_S, a_T \in \mathcal{B}_\ell$, donc $\mu(S) = \mu(T)$. Ainsi, $\mu \in C_{Pref}$.

Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$, posons $\Psi = \{\emptyset \neq B \subsetneq A : \text{non}(a_A \sim a_B) \text{ et } \text{non}(a_A \sim a_{A \setminus B})\}$. On a

$$\begin{aligned} (2^{|A|} - 2)\eta_A^\mu &= \sum_{\emptyset \neq B \subsetneq A} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right) \\ &= \sum_{B \in \Psi} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right) + \sum_{B \notin \Psi} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right). \end{aligned}$$

Soit $\emptyset \neq B \subsetneq A$ tel que $B \notin \Psi$, alors $a_A \sim a_B$ ou $a_A \sim a_{A \setminus B}$ respectivement, donc $(a_A \sim a_B$ et $\text{non}(a_{A \setminus B} T C_P a_0))$ ou $(a_A \sim a_{A \setminus B}$ et $\text{non}(a_B T C_P a_0))$ respectivement car par hypothèse, la propriété A -MOPI est satisfaite. Ainsi, $(\mu(A) = \mu(B) \text{ et } \mu(A \setminus B) = 0)$ ou $(\mu(A) = \mu(A \setminus B) \text{ et } \mu(B) = 0)$ respectivement. Ce qui implique, $\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) = 0$. Par

suite, $\sum_{B \notin \Psi} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right) = 0$. Donc $(2^{|A|} - 2)\eta_A^\mu = \sum_{B \in \Psi} \left(\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) \right)$.

a) *Si $\Psi = \emptyset$, alors $(2^{|A|} - 2)\eta_A^\mu = 0$, d'où $\eta_A^\mu = 0$.*

b) *Si $\Psi \neq \emptyset$, alors pour tout $B \in \Psi$, on a $a_B \in \mathcal{B}_r$, $a_{A \setminus B} \in \mathcal{B}_s$ et $a_A \in \mathcal{B}_q$ avec $q > r$ et $q > s$. Par conséquent $\mu(B) \leq (2n)^r$, $\mu(A \setminus B) \leq (2n)^s$ et $\mu(A) = (2n)^q = (2n)(2n)^{q-1} > 2(2n)^{q-1} = (2n)^{q-1} + (2n)^{q-1} \geq (2n)^r + (2n)^s$ car $q-1 \geq r$ et $q-1 \geq s$.*

Ceci implique $\mu(A) > (2n)^r + (2n)^s \geq \mu(B) + \mu(A \setminus B)$, c'est-à-dire, $\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B) > 0$ pour tout $B \in \Psi$. Par conséquent $\sum_{B \in \Psi} (\mu(A) - \mu(B) - \mu(A \setminus B)) > 0$, d'où $\eta_A^\mu > 0$.

On déduit des deux cas que $\eta_A^\mu \geq 0$. □

Remarque 3.2.2. La condition suffisante de la Proposition 3.2.3 est nécessaire pour $A \subseteq_{=2} N$ (voir le Théorème 4 de [72]), mais n'est pas nécessaire pour $A \subseteq_{\geq 3} N$. En effet, considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $P = \{(a_{23}, a_1), (a_3, a_0)\}$, $I = \{(a_{12}, a_{123})\}$ et $A = N$. L'information $\{P, I\}$ est représentable par la capacité donnée au Tableau 3.10.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mu(S)$	0	0	0.5	1	0.5	0.5	1

TABLEAU 3.10 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

On a $a_{12} \sim a_{123}$ et $a_3 TC_P a_0$ donc la propriété $\{1, 2, 3\} - \text{MOPI}$ est satisfaite. Mais $\eta_{123}^\mu = 1 - \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{23}) = \frac{1}{6} \geq 0$.

Étant donné un sous-ensemble $A \subseteq_{\geq 2} N$, la proposition suivante donne une condition suffisante sur $\{P, I\}$ de telle sorte le degré de non-additivité soit positif pour A .

Proposition 3.2.4. Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Supposons que pour tout $i \in A$, $\text{non}(a_{A \setminus \{i\}} TC_{M \cup I} a_A)$, alors il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\mu > 0$.

Preuve 3.2.4. Soit $A \subseteq_{\geq 2} N$, supposons que pour tout $i \in A$, $\text{non}(a_{A \setminus \{i\}} TC_{M \cup I} a_A)$. Nous définissons l'ensemble Ψ tel dans la preuve de la Proposition 3.2.3. Puisque pour tout $i \in A$, $\text{non}(a_{A \setminus \{i\}} TC_{M \cup I} a_A)$, alors pour tout $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A$, $\text{non}(a_B \sim a_A)$ et $\text{non}(a_{A \setminus B} \sim a_A)$. Ainsi, tout sous-ensemble $\emptyset \neq B \subsetneq A$ appartient à Ψ , donc $\Psi \neq \emptyset$. Selon l'item b) dans la preuve de la Proposition 3.2.3, nous construisons $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_A^\mu > 0$. □

Remarque 3.2.3. La condition suffisante de la Proposition 3.2.4 est nécessaire pour $A \subseteq_{=2} N$ (voir la Proposition 3.2.5 ci-dessous) mais pas nécessaire pour $A \subseteq_{\geq 3} N$. En effet, considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $P = \{(a_{12}, a_3)\}$, $I = \{(a_{13}, a_{123})\}$ et $A = N$. L'information $\{P, I\}$ est représentable par la capacité donnée au Tableau 3.11.

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mu(S)$	0	0	0	1	1	0	1

TABLEAU 3.11 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

On a $2 \in A$ et $a_{13}TC_{M \cup I}a_{123}$, mais $\eta_{123}^\mu = 1 - \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{23}) = \frac{1}{3} > 0$.

Étant donnée une paire de critères $\{i, j\}$, la proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante sur $\{P, I\}$ pour que le degré de non-additivité soit positif pour la paire $\{i, j\}$.

Proposition 3.2.5. *Soient $i, j \in N$ et $\{P, I\}$ un ensemble d'informations préférentielles ordinales sur \mathcal{B}^g , représentable par une intégrale de Choquet. Alors il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{ij}^\mu > 0$ si et seulement si $[\text{non}(a_i TC_{M \cup I} a_{ij}) \text{ et } \text{non}(a_j TC_{M \cup I} a_{ij})]$.*

Preuve 3.2.5. *Soient $i, j \in N$.*

Nécessité. *Supposons qu'il existe une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{ij}^\mu > 0$. Si $a_i TC_{M \cup I} a_{ij}$ ou $a_j TC_{M \cup I} a_{ij}$, alors $\eta_{ij}^\mu = -\mu_j \leq 0$ ou $\eta_{ij}^\mu = -\mu_i \leq 0$ respectivement. Ce qui implique $\eta_{ij}^\mu \leq 0$. Ceci est une contradiction car $\eta_{ij}^\mu > 0$.*

Suffisance. *En utilisant la Proposition 3.2.4, il suffit de prendre $A = \{i, j\}$. □*

Hormis les résultats des Propositions 3.1.1 et 3.1.2, tous les autres sont fondés sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées \mathcal{B}^g . Ceci peut sembler restrictif, raison pour laquelle nous proposons dans la section suivante une procédure fondée sur la programmation linéaire, qui permet de tester si le degré de non-additivité est nécessairement positif (resp. négatif), pour un sous-ensemble de critères $A \subseteq_{\geq 2} N$.

3.3 Un programme linéaire permettant de tester l'existence de degré de non-additivité nécessaires

À la Section 2.5 du Chapitre 2, nous proposons une procédure en trois étapes. Les deux premières consistent à tester la compatibilité de l'information $\{P, I\}$ avec une intégrale de

Choquet et la troisième consiste à tester l'existence d'une interaction nécessaire, pour une coalition de critères A donnée. Ici, la procédure est semblable et les deux premières étapes sont identiques à celles de la Section 2.5 du Chapitre 2, donc nous présentons uniquement la troisième étape qui permet de tester l'existence d'un degré de non-additivité nécessaire pour un sous-ensemble A donné.

Étape 3. À cette étape, nous supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Choquet.

Afin de tester si la non additivité négative (resp. positive) est nécessaire pour le sous-ensemble $A \subseteq_{\geq 2} N$, nous rajoutons au programme linéaire PL_2 de la Section 2.5 du Chapitre 2, la contrainte (2e) et nous obtenons le programme linéaire suivant noté PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A).

$$\text{Max } Z_3 = \varepsilon \qquad \qquad \qquad PL_{NN}^A \text{ (resp. } PL_{NP}^A)$$

Sous contraintes :

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \geq \varepsilon, \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x P y \qquad (2a)$$

$$C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) = 0, \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x I y \qquad (2b)$$

$$\mu(N) = 1 \qquad (2c)$$

$$\mu(S \cup \{i\}) \geq \mu(S) \quad \forall S \subsetneq N, \forall i \in N \setminus S \qquad (2d)$$

$$\eta_A^\mu \geq 0 \text{ (resp. } \eta_A^\mu \leq 0) \qquad (2e)$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

Notons que η_A^μ dépend linéairement des variables de décision $\mu(S)$. Après la résolution de ce programme linéaire, nous avons l'une des trois conclusions possibles.

1. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) n'est pas réalisable, alors le degré de non-additivité est nécessairement négatif (resp. positif) pour A . En effet, puisque le programme linéaire PL_2 est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* > 0$, alors la contradiction sur la représentation de $\{P, I\}$ provient de l'introduction de la contrainte $\eta_A^\mu \geq 0$ (resp. $\eta_A^\mu \leq 0$).
2. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* = 0$, alors la contrainte $C_\mu(u(x)) - C_\mu(u(y)) \geq \varepsilon, \forall x, y \in X$ tels que $x P y$ est satisfaite avec $\varepsilon = 0$, donc il n'est pas possible de modéliser les préférences strictes en rajoutant la contrainte $\eta_A^\mu \geq 0$ (resp. $\eta_A^\mu \leq 0$) dans PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A). Par conséquent, nous pouvons conclure que le degré de non-additivité est nécessairement négatif (resp. positif) pour A .

3. Si PL_{NN}^A (resp. PL_{NP}^A) est réalisable avec une solution optimale $Z_3^* > 0$, alors le degré de non-additivité n'est pas nécessairement négatif (resp. positif) pour A .

La liste des variables de décision, leur nombre et le nombre de contraintes de monotonie pour ($3 \leq n \leq 12$) sont identiques à ceux des Tableaux 2.6 et 2.7 de la Section 2.5 du Chapitre 2.

3.4 Exemple : sélection d'une star

Cet exemple est inspiré de [71]. Six jeunes artistes sans producteur participent à une émission de concours de chant à forte audience, dont le vainqueur verra sa maquette produite par une célèbre maison de disques. Chaque candidat interprète à cette occasion, devant un jury, une chanson de son propre répertoire. Le jury se subdivise en trois sous-jurys : un sous-jury constitué de professionnels de la chorégraphie, un autre de professionnels de la chanson et de la voix, et le dernier, formé de professionnels de la musique. Les six candidats sont évalués sur les trois critères suivants.

1. Chorégraphie : la chorégraphie choisie par le candidat pour sa prestation. Les évaluations sont données sous forme d'un certain nombre de barres verticales |. Il y a quatre membres du sous-jury et chacun note de 0 à 5 barres. Le meilleur candidat en chorégraphie sera celui qui recueillera le plus grand nombre de barres.
2. Chanson : la qualité de la chanson interprétée, en tenant compte de la voix de l'interprète. Le sous-jury chanson évalue les candidats de manière classique, en leur attribuant des notes entre 0 et 20.
3. Musique : la qualité de la musique utilisée pour accompagner la chanson choisie. La capacité à jouer des instruments de musique est aussi prise en compte à ce niveau. Les évaluations des candidats par le sous-jury musique sont données entre 0 et 100.

Les évaluations obtenues par les candidats sont données au Tableau 3.12 suivant.

Candidates	1 : Chorégraphie	2 : Chanson	3 : Musique
a : Anita		17	70
b : Bertrand		17	60
c : Carine		8	70
d : Didier		8	60
e : Elise		10	45
f : Fabien		10	45

TABLEAU 3.12 – Matrice d'évaluation

Dans cet exemple nous avons $N = \{1, 2, 3\}$ et $X = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Pour choisir le vainqueur, le jury établit les deux règles suivantes :

- Lorsque deux candidats ont des bonnes notes en chanson et en musique, le jury préférera celui qui a une meilleure évaluation en chorégraphie, quitte à être moins bon en chanson ou en musique. Donc il préfère strictement b à a .
- Lorsque deux candidats ont une mauvaise performance en chanson, le jury préférera celui qui a la meilleure évaluation en musique. Par conséquent il préfère strictement c à d .

De plus, le jury trouvant les évaluations des candidats e et f très proches, les juge indifférents. L'information préférentielle sur X fournie par le jury sera donc constituée des relations binaires suivantes $P = \{(b, a), (c, d)\}$, $I = \{(e, f), (f, e)\}$.

Nous construisons des fonctions d'utilités u_1 , u_2 et u_3 de la manière suivante. Pour un candidat donné, la valeur d'utilité relative au critère chorégraphique est égale au nombre de barres obtenues, celle relative au critère chanson vaut la note obtenue, puis celle relative au critère musique, vaut de cinquième de la note obtenue. Nous obtenons le Tableau 3.13.

	1	2	3
$u_i(a)$	7	17	14
$u_i(b)$	9	17	12
$u_i(c)$	7	8	14
$u_i(d)$	9	8	12
$u_i(e)$	11	10	9
$u_i(f)$	12	10	9

TABLEAU 3.13 – Fonctions d'utilités u_i , $i = 1, 2, 3$

Étape 1. PL_1 avec des variables d'écart non négatives α_{ba}^+ , α_{ba}^- , α_{cd}^+ , α_{cd}^- , α_{ef}^+ , α_{ef}^- .

$$\text{Min } Z_1 = \alpha_{ba}^+ + \alpha_{ba}^- + \alpha_{cd}^+ + \alpha_{cd}^- + \alpha_{ef}^+ + \alpha_{ef}^- \quad PL_1$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(a)) + \alpha_{ba}^+ - \alpha_{ba}^- \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(u(c)) - C_\mu(u(d)) + \alpha_{cd}^+ - \alpha_{cd}^- \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(u(e)) - C_\mu(u(f)) + \alpha_{ef}^+ - \alpha_{ef}^- = 0$$

$$C_\mu(u(a)) = 7 + 7\mu_{23} + 3\mu_2$$

$$C_\mu(u(b)) = 9 + 3\mu_{23} + 5\mu_2$$

$$C_\mu(u(c)) = 7 + \mu_{23} + 6\mu_3$$

$$C_\mu(u(d)) = 8 + \mu_{13} + 3\mu_3$$

$$C_\mu(u(e)) = 9 + \mu_{12} + \mu_1$$

$$C_\mu(u(f)) = 9 + \mu_{12} + 2\mu_1$$

$$\mu_{12} \geq \mu_1; \mu_{12} \geq \mu_2; \mu_{13} \geq \mu_1; \mu_{13} \geq \mu_3; \mu_{23} \geq \mu_2; \mu_{23} \geq \mu_3$$

$$\mu_{123} \geq \mu_{12}; \mu_{123} \geq \mu_{13}; \mu_{123} \geq \mu_{23}$$

$$\mu_1 \geq 0; \mu_2 \geq 0; \mu_3 \geq 0$$

$$\mu_{123} = 1$$

$$\varepsilon \geq 0$$

$$\alpha_{ba}^+, \alpha_{ba}^-, \alpha_{cd}^+, \alpha_{cd}^-, \alpha_{ef}^+, \alpha_{ef}^- \geq 0.$$

Le programme linéaire PL_1 est réalisable avec une solution optimale $Z_1^* = 0$, donc nous

pouvons déduire, en fonction du signe de la variable ε ($\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon > 0$), que l'information $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet. L'étape suivante de la procédure, va confirmer ou non cette possibilité.

Étape 2. Test de l'existence d'une capacité μ compatible avec l'information $\{P, I\}$.

$$\text{Max } Z_2 = \varepsilon \quad PL_2$$

Sous les contraintes :

$$C_\mu(u(b)) - C_\mu(u(a)) \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(u(c)) - C_\mu(u(d)) \geq \varepsilon$$

$$C_\mu(u(e)) - C_\mu(u(f)) = 0$$

$$C_\mu(u(a)) = 7 + 7\mu_{23} + 3\mu_2$$

$$C_\mu(u(b)) = 9 + 3\mu_{23} + 5\mu_2$$

$$C_\mu(u(c)) = 7 + \mu_{23} + 6\mu_3$$

$$C_\mu(u(d)) = 8 + \mu_{13} + 3\mu_3$$

$$C_\mu(u(e)) = 9 + \mu_{12} + \mu_1$$

$$C_\mu(u(f)) = 9 + \mu_{12} + 2\mu_1$$

$$\mu_{12} \geq \mu_1; \mu_{12} \geq \mu_2; \mu_{13} \geq \mu_1; \mu_{13} \geq \mu_3; \mu_{23} \geq \mu_2; \mu_{23} \geq \mu_3$$

$$\mu_{123} \geq \mu_{12}; \mu_{123} \geq \mu_{13}; \mu_{123} \geq \mu_{23}$$

$$\mu_1 \geq 0; \mu_2 \geq 0; \mu_3 \geq 0$$

$$\mu_{123} = 1$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

Le programme linéaire PL_2 est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* = 0.8 > 0$, donc nous pouvons déduire que $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet.

Étape 3. Afin de savoir si le degré de non-additivité est nécessairement négatif (resp. positif) pour $\{1, 2, 3\}$, on obtient PL_{NN}^{123} (resp. PL_{NP}^{123}) par ajout à PL_2 , de la contrainte $\eta_{123}^\mu \geq 0$ (resp. $\eta_{123}^\mu \leq 0$) avec $\eta_{123}^\mu = 1 - \frac{1}{3}(\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{23} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

- PL_{NN}^{123} est réalisable et de solution optimale $Z_3^* = 0.8 > 0$, donc le degré de non-additivité n'est pas nécessairement négatif pour $\{\text{Chorégraphie, Chanson, Musique}\}$.

Les résultats obtenus en résolvant PL_{NN}^{123} sont donnés aux Tableaux 3.14 et 3.15 (avec $\eta_{123}^\mu = 0.3 > 0$).

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mu(S)$	0	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	1

TABLEAU 3.14 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

x	a	b	c	d	e	f
$C_\mu(u(x))$	11	12.2	9.8	9.6	9.5	9.5

TABLEAU 3.15 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 3.14

- PL_{NP}^{123} est réalisable et de solution optimale $Z_3^* = 0,8 > 0$, donc le degré de non-additivité n'est pas nécessairement positif pour {Chorégraphie, Chanson, Musique}. Les résultats obtenus en résolvant PL_{NP}^{123} sont donnés aux Tableaux 3.16 et 3.17 (avec $\eta_{123}^\mu = -0,2 < 0$).

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mu(S)$	0	0.7	0.7	0.8	0.7	0.7	1

TABLEAU 3.16 – Une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

x	a	b	c	d	e	f
$C_\mu(u(x))$	14	14.6	11.9	10.8	9.8	9.8

TABLEAU 3.17 – L'intégrale de Choquet correspondante à la capacité μ du Tableau 3.16

3.5 Synthèse et perspectives

3.5.1 Synthèse

Ce chapitre a étudié la stabilité du signe du degré de non-additivité, dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet. Il s'inscrit dans le prolongement du Chapitre 2. Ici, nous avons choisi de travailler avec l'indice de non-additivité car il a été proposé avec l'ambition d'améliorer l'indice d'interaction de Shapley, dans le but de capter des phénomènes d'interaction entre critères. Nous avons obtenu beaucoup plus de résultats qu'avec l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet. En particulier, nous répondons aux questions de dualité restées ouvertes au Chapitre 2, avec l'indice d'interaction de Shapley. Ainsi, l'indice d'interaction de Shapley reste "mieux" que celui de non-additivité, qui, présentent beaucoup plus de résultats négatifs.

Comme au Chapitre 2, nous avons supposé que le décideur donne ses préférences sur un ensemble fini d'alternatives, contrairement au cas continu étudié dans [103; 104]. En somme, tout au long de ce chapitre, nous avons illustré et démontré que le signe du degré de non-additivité dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Son interprétation exige donc une certaine prudence. Il en ressort que les degrés de non-additivité nécessaires sont les seuls qui peuvent être interprétés en toute sécurité, puisque leur signe est stable dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Nous avons ensuite proposé un programme linéaire permettant de tester l'existence de certains degrés de non-additivité nécessaires. Le chapitre suivant sera consacré à un travail similaire avec l'indice d'interaction dans un modèle d'intégrale de Sugeno, utilisant une capacité 2-maxitive.

3.5.2 Perspectives

Ce chapitre présente des limites et offre des perspectives. Nous les présentons ci-dessous.

- Comme au Chapitre 2, nous travaillons le plus souvent avec les alternatives binaires car cela nous permet d’obtenir plus de résultats, mais ces alternatives sont rarement réelles, mais sont plutôt le plus souvent fictives.
- Dans le cas où l’information préférentielle ordinale du décideur peut contenir une indifférence, nous avons montré que la condition A –MOPI est suffisante pour rendre non nécessaire le degré de non-additivité négatif pour la coalition de critères A . Une condition que nous n’avons pas au Chapitre 2, mais qui nous semble très “forte” car il n’est pas rare que le décideur préfère strictement une alternative a_A à une autre $a_{A \setminus B}$, mais qu’il préfère aussi strictement a_B à a_\emptyset . Il sera donc intéressant pour nous d’affaiblir certaines de nos conditions, en particulier A –MOPI.
- Dans le cas où l’information préférentielle ordinale du décideur peut contenir une indifférence, à la Proposition 3.2.1 (respectivement 3.2.4), nous donnons une condition suffisante pour obtenir un degré de non-additivité négatif (respectivement positif). Nous avons ensuite prouvé aux Propositions 3.2.2 et 3.2.5 que chacune de ces conditions devient nécessaire pour les paires de critères. Nous envisageons étendre ces résultats pour les coalitions de plus de deux critères.
- Dans ce chapitre, notre travail se fonde sur les alternatives binaires, avec deux niveaux de références : le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i . Nous envisageons faire un travail similaire, avec un modèle d’intégrale de Choquet bipolaire (utilisant une bicapacité) se fondant sur les alternatives ternaires, avec trois niveaux de références : le niveau mauvais -1_i , le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i .

Interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant une intégrale de Sugeno avec une capacité 2–maxitive

4.1 Introduction

Ce chapitre se propose de transposer, avec l'intégrale de Sugeno 2–maxitive, dans le contexte “ordinal”, certains de nos résultats obtenus dans un contexte “cardinal”, avec l'intégrale de Choquet. Il se situe dans le prolongement des deux précédents et est une large version de notre papier [57].

L'intégrale de Sugeno est une fonction d'agrégation utilisée dans une approche “ordinaire” de la prise de décision. Elle a été introduite dans [102] et présente de nombreuses applications pour la prise de décision [28; 37]. En outre, le problème d'identification des capacités, sur la base desquelles les intégrales sont définies, a attiré une attention [7; 8; 38].

Au Chapitre 2, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une information préférentielle sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées soit représentable par une intégrale de Choquet. Dans ce chapitre, nous donnons un résultat similaire avec un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2–maxitive [57].

Au Chapitre 2, nous avons prouvé que, dans le cadre des alternatives binaires, si l'information préférentielle ne contient pas d'indifférence, et si elle est représentable par une intégrale de Choquet, alors il est toujours possible de la représenter en captant simultanément des interactions positives pour tous les groupes de critères. On obtient un résultat

semblable avec l'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive [57].

En dehors du cadre des alternatives binaires, nous proposons au Chapitre 2, un modèle de programmation linéaire, nous permettant de tester si l'information ordinaire obtenue est représentable par une intégrale de Choquet, puis de tester l'ambiguïté de l'interprétation des indices d'interaction. Dans ce chapitre, grâce à la linéarisation des fonctions min et max, nous faisons un travail similaire, dans le contexte de l'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive [57].

À la Section 4.2, nous donnons une décomposition d'une intégrale de Sugeno k -maxitive, puis nous introduisons, à la Section 4.3, la notion d'interactions possibles et nécessaires dans un modèle d'intégrale de Sugeno, utilisant une capacité 2-maxitive. Par la suite, nous présentons nos résultats à la Section 4.4. La Section 4.5 quant à elle présente un modèle de programmation linéaire mixte pour tester l'existence d'interactions nécessaires.

4.2 Décomposition d'une intégrale de Sugeno k -maxitive

À la Sous-section 1.9.3 du Chapitre 1, nous avons défini l'intégrale de Sugeno de manière générale, et en particulier, nous avons défini l'intégrale de Sugeno k -maxitive. Nous allons à présent donner une expression simplifiée de l'intégrale de Sugeno k -maxitive. Il s'agit de l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *Si la capacité μ est k -maxitive, alors on a :*

$$S_{\mu}^k(u(x)) = \bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \leq k}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right) \quad (4.1)$$

Preuve 4.2.1. *Supposons que la capacité μ soit k -maxitive. Alors nous avons :*

$$\mu(A) = \bigvee_{\substack{B \subseteq A \\ |B| \leq k}} \mu(B) \quad \text{pour } |A| \geq k + 1, \text{ car } \bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \geq \bigwedge_{i \in B} u_i(x_i) \text{ lorsque } A \subseteq B, \text{ donc}$$

$$\bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \leq k}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right) \geq \bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \geq k+1}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right). \text{ Ainsi nous avons :}$$

$$\begin{aligned}
S_\mu^k(x) &= \bigvee_{A \subseteq N} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right) \\
&= \left[\bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \leq k}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right) \right] \bigvee \left[\bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \geq k+1}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right) \right] \\
&= \bigvee_{\substack{A \subseteq N \\ |A| \leq k}} \left(\left(\bigwedge_{i \in A} u_i(x_i) \right) \wedge \mu(A) \right)
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.2.1. Pour $k = 1$, l'intégrale de Sugeno 1-maxitive est entièrement déterminée par la connaissance des μ_i , avec $i \in N$. L'intégrale de Sugeno 1-maxitive est un équivalent de la somme pondérée dans le cas ordinal et est donnée par l'équation 4.2. Ce cas particulier a été étudié dans [25].

$$S_\mu^1(u(x)) = \bigvee_{i \in N} \left(u_i(x_i) \wedge \mu_i \right) \quad (4.2)$$

Pour une alternative x , l'équation 4.2 montre qu'il suffit d'avoir une bonne performance sur un critère i "important" (avoir un $u_i(x_i)$ et un μ_i grands) pour obtenir globalement une bonne évaluation. Ce cas correspond à un *décideur tolérant*.

Remarque 4.2.2. L'équation 4.3 donne une autre expression de l'intégrale de Sugeno 1-maxitive.

$$S_\mu^1(u(x)) = \bigwedge_{i \in N} \left(u_i(x_i) \vee (1 - \mu_i) \right) \quad (4.3)$$

où $1 - \mu_i$ est la "négation" de μ_i .

Pour une alternative x , l'équation 4.3 montre que pour avoir une bonne évaluation globale, il ne faut pas qu'il existe un critère i "important" (μ_i grand) sur lequel on a une mauvaise performance ($u_i(x_i)$ petit). Ce cas correspond à un *décideur intolérant*.

Remarque 4.2.3. Pour $k = 2$, l'intégrale de Sugeno 2-maxitive est donnée par l'équation 4.4. Cette dernière montre qu'une intégrale de Sugeno 2-maxitive est complètement déterminée par la donnée des valeurs de μ_i et μ_{ij} , avec $i, j \in N$.

$$\begin{aligned}
S_\mu^2(u(x)) &= \left[\bigvee_{i \in N} \left(u_i(x_i) \wedge \mu_i \right) \right] \bigvee \left[\bigvee_{i,j \in N} \left(u_i(x_i) \wedge u_j(x_j) \wedge \mu_{ij} \right) \right] \\
&= S_\mu^1(u(x)) \bigvee \left[\bigvee_{i,j \in N} \left(u_i(x_i) \wedge u_j(x_j) \wedge \mu_{ij} \right) \right] \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Ainsi, le passage d'une intégrale de Sugeno 1-maxitive à celle 2-maxitive induit une amélioration, strict ou non, car $S_\mu^1(u(x)) \leq S_\mu^2(u(x))$. Donc on ne peut pas être moins bon que le cas 1-maxitif, on ne peut qu'être meilleur (strictement ou pas). Ceci nous permet de déduire que l'interaction négative n'est pas envisageable dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive.

En outre, lorsque $\mu_{ij} = \mu_i \vee \mu_j$, alors on revient au cas 1-maxitif, et obtenir le cas $\mu_{ij} < \mu_i \vee \mu_j$ est impossible car la capacité μ est monotone. Par conséquent, le seul cas où l'on passe strictement de l'intégrale de Sugeno 1-maxitive pour celle 2-maxitive se produit lorsque $\mu_{ij} > \mu_i \vee \mu_j$.

À la lumière de ces arguments, nous proposons, dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive, un indice d'interaction défini comme suite.

Définition 4.2.1. *Pour une capacité 2-maxitive μ , nous définissons l'indice d'interaction par :*

$$\bar{I}_{ij}^\mu = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{si } \mu_{ij} > \mu_i \vee \mu_j, \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} = \mu_i \vee \mu_j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Remarque 4.2.4. *Cet indice d'interaction entre deux critères i et j coïncide avec leur transformée ordinale de Möbius, c'est-à-dire, $\bar{I}_{ij}^\mu = m_{ij}^\mu$ pour tout $i, j \in N$. Cette coïncidence est aussi observée dans le cadre de l'intégrale de Choquet 2-additive, où $I_{ij}^\mu = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j = m_{ij}^\mu$, pour tout $i, j \in N$ [72].*

Remarque 4.2.5. *Étant donnée une capacité $\mu \in S_{2-max}$, nous allons interpréter l'indice d'interaction comme suite :*

- Si $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$, alors on dira que les critères i et j sont complémentaires (ou en synergie positive) relativement à la capacité μ .
- Si $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$, alors on dira que les critères i et j sont indépendants relativement à la capacité μ .

Comme à la Sous-section 1.12.2 du Chapitre 1, nous abordons la notion d'interactions possibles et nécessaires, dans le cadre d'une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Nous commençons par un exemple déjà donné à la Sous-section 1.12.1 du Chapitre 1.

4.3 Interactions possibles et nécessaires

4.3.1 Un exemple illustratif déjà donné en amont

L'exemple suivant est inspiré de [45]. Il a déjà été donné à la Section 1.12.2 du Chapitre 1, mais nous le redonnons ici pour faciliter la tâche au lecteur. Quatre élèves sont évalués sur trois matières Mathématiques (M), Statistiques (S) et Langue (L). On suppose réglé le problème de commensurabilité. Toutes les notes sont sur une même échelle, de 0 à 1. Les évaluations de ces étudiants sont données au Tableau 4.1.

	Mathématiques (M)	Langue (L)	Statistiques (S)
a	0.3	0.25	0.6
b	0.3	0.6	0.25
c	0.7	0.25	0.6
d	0.7	0.6	0.25

TABLEAU 4.1 – Notes des étudiants

Pour sélectionner les meilleurs étudiants, le doyen de la faculté exprime ses préférences où la notation $x P y$ signifie x est strictement préféré à y .

Pour un élève mauvais en Mathématiques, le critère Langue est plus important que le critère Statistiques, de sorte que

$$a P b.$$

Pour un élève bon en Mathématiques, le critère Statistiques est plus importante que le critère Langue, de sorte que

$$d P c.$$

Il n'est pas possible de modéliser ces deux préférences $a P b$ et $d P c$ par une intégrale de Sugeno 1-maxitive. En effet, nous avons :

$$S_\mu(a) = (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee (u_L(0.25) \wedge \mu_2) \vee (u_S(0.6) \wedge \mu_3)$$

$$S_\mu(b) = (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee (u_L(0.6) \wedge \mu_2) \vee (u_S(0.25) \wedge \mu_3)$$

$$S_\mu(c) = (u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee (u_L(0.25) \wedge \mu_2) \vee (u_S(0.6) \wedge \mu_3)$$

$$S_\mu(d) = (u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee (u_L(0.6) \wedge \mu_2) \vee (u_S(0.25) \wedge \mu_3)$$

Par conséquent, nous avons :

$$(u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(a) = (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(c) \text{ et}$$

$$(u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(b) = (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(d).$$

$$\text{On a : } a P b \implies S_\mu(a) > S_\mu(b),$$

$$\implies (u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(a) \geq (u_M(0.7) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(b),$$

$$\implies (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(c) \geq (u_M(0.3) \wedge \mu_1) \vee S_\mu(d),$$

$$\implies S_\mu(c) \geq S_\mu(d),$$

$$\implies \text{non}(d P c). \text{ Ce qui contredit la préférence stricte } d P c.$$

Nous supposons que l'échelle d'évaluation $[0, 1]$ correspond à la fonction d'utilité associée à chaque sujet, c'est-à-dire, $u_M(0.3) = 0.3, u_M(0.7) = 0.7, u_L(0.25) = 0.25, u_L(0.6) = 0.6, u_S(0.25) = 0.25$ et $u_S(0.6) = 0.6$. Dans ce cas, les préférences $a P b$ et $d P c$ sont maintenant représentables par une intégrale de Sugeno 2-maxitive, relativement aux capacités (Cap. en abrégé) données au Tableau 4.2. Nous avons choisi huit capacités compatibles avec ces préférences, afin d'illustrer le fait que le signe de l'indice d'interaction dépend fortement de la capacité choisie.

	Cap. 1	Cap. 2	Cap. 3	Cap. 4	Cap. 5	Cap. 6	Cap. 7	Cap. 8
μ_M	0	0	0.3	0.5	0.3	0	0	0
μ_L	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_S	0.5	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.49	0.49
μ_{ML}	1	1	0.6	0.6	1	0.6	0.6	1
μ_{MS}	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
μ_{LS}	0.5	0.5	1	1	0.5	1	1	0.49
$S_\mu(a)$	0.5	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.49	0.49
$S_\mu(b)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$S_\mu(c)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$S_\mu(d)$	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
\bar{I}_{ML}^μ	1	1	0.6	0.6	1	0.6	0.6	1
\bar{I}_{MS}^μ	0	0.5	0	0	0	0	0.5	0.5
\bar{I}_{LS}^μ	0	0.5	1	1	0	1	1	0

TABLEAU 4.2 – Huit capacités 2–maxitives, compatibles avec les préférences aPb et dPc

Dans cette illustration, l'interprétation de l'interaction entre deux critères n'est pas aisée. Par exemple, relativement à la capacité choisie, l'interaction entre les Mathématiques et les Statistiques, \bar{I}_{MS}^μ , peut être strictement positive (Cap. 2, Cap. 7, Cap. 8) ou nulle (Cap. 1, Cap. 3, Cap. 4, Cap. 5, Cap. 6). Ainsi, à partir des préférences données par le décideur, il n'est pas évident que les sujets Mathématiques et Statistiques sont complémentaires ou indépendantes. Cette conclusion est toujours valable concernant l'interaction \bar{I}_{LS}^μ entre les critères Langue et Statistiques. En effet, cette interaction est strictement positive (voir Cap. 2, Cap. 3, Cap. 4, Cap. 6 et Cap. 7), et nulle (voir Cap. 1 et Cap. 5).

Selon la représentation numérique μ compatible avec les préférences du décideur, l'indice d'interaction peut être nul ou strictement positif, cela a conduit à la définition de la notion d'interaction nécessaire et possible. Cette notion a été introduite dans [56; 72], dans le cadre

d'un modèle de l'intégrale de Choquet.

4.3.2 Définitions

À la Sous-section 1.12.2 du Chapitre 1, nous avons défini la notion d'interaction possible et nécessaire avec l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet. La définition suivante est similaire, cette fois en utilisant notre indice proposé à la Définition 4.2.1, dans un modèle utilisant une intégrale de Sugeno, avec une capacité 2-maxitive.

Définition 4.3.1. Soient $i, j \in N$ deux critères distincts, on dit que :

1. Les critères i et j sont possiblement complémentaires (resp. indépendants) s'il existe une capacité $\mu \in S_{2-max}$ telle que $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$ (resp. $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$) ;
2. Les critères i et j sont nécessairement complémentaires (resp. indépendants) si $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$ (resp. $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$) pour toutes les capacités $\mu \in S_{2-max}$.

Remarque 4.3.1. Soient $i, j \in N$ deux critères distincts.

- Si les critères i et j sont nécessairement complémentaires (resp. indépendants), alors ils sont possiblement complémentaires (resp. indépendants).
- Si la complémentarité (resp. l'indépendance) entre i et j n'est pas nécessaire, alors l'indépendance (resp. la complémentarité) entre i et j est possible.

Nous allons actuellement présenter nos résultats obtenus dans un modèle de l'intégrale de Sugeno 2-maxitive.

4.4 Résultats

Le résultat de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2 montre que, s'il n'y a pas d'indifférence, alors l'absence de cycle strict dans $P \cup M$ est une condition nécessaire et suffisante de représentation d'une information $\{P, I\}$ sur \mathcal{B}^g . Nous obtenons la même condition avec l'intégrale de Sugeno 2-maxitive. Il s'agit de l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4.1. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle ordinale sur \mathcal{B} telle que $I = \emptyset$. $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Sugeno 2–maxitive si et seulement si la relation binaire $P \cup M$ ne contient pas de cycle strict.*

Preuve 4.4.1. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle ordinale sur \mathcal{B} telle que $I = \emptyset$.*

Nécessité. *Supposons $\{P, I\}$ représentable par une intégrale de Sugeno 2–maxitive. Alors il existe une capacité $\mu \in S_{2\text{-max}}$ telle que $\{P, I\}$ soit représentable par S_μ .*

Si $P \cup M$ contient un cycle strict, alors il existe des éléments x_0, x_1, \dots, x_r de \mathcal{B} tels que $x_0 (P \cup M) x_1 (P \cup M) \dots (P \cup M) x_r (P \cup M) x_0$ et il existe deux éléments $x_i, x_{i+1} \in \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$ tels que $x_i P x_{i+1}$. Puisque $\{P, I\}$ est représentable par S_μ , donc $S_\mu(u(x_0)) \geq \dots \geq S_\mu(u(x_i)) > S_\mu(u(x_{i+1})) \geq \dots \geq S_\mu(u(x_0))$, ce qui entraîne $S_\mu(u(x_0)) > S_\mu(u(x_0))$, contradiction.

Suffisance. *Supposons que $P \cup M$ ne contienne pas de cycle strict. Alors il existe une partition $\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B} , construite en utilisant un tri topologique approprié sur $P \cup M$ [36]. La construction de cette partition se fait comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2.*

Définissons les applications $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(N)$, $f : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ comme suite.

$$\phi(a_S) = S, \forall S \subseteq N;$$

$$f(\phi(x)) = \ell \forall x \in \mathcal{B}_\ell, \text{ avec } \ell \in \{0, 1, \dots, m\};$$

$$\mu_\emptyset = 0, \mu_i = \frac{f_i}{\alpha}, \mu_{ij} = \frac{f_{ij}}{\alpha}, \mu(S) = \bigvee_{i,j \in S} \mu_{ij}, \forall i, j \in N, \forall S \subseteq N, \text{ où } f_i = f(\phi(a_i)), f_{ij} =$$

$$f(\phi(a_{ij})) \text{ et } \alpha = \bigvee_{i,j \in N} \mu_{ij}.$$

La capacité μ ainsi défini est 2–maxitive par construction et l'information préférentielle ordinale $\{P, I\}$ est représentable par S_μ . \square

La Proposition 2.3.3 du Chapitre 2 montre que si l'information $\{P, I\}$ ne contient aucune indifférence et la relation binaire $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict, alors l'interaction positive est toujours possible simultanément pour toutes les coalitions d'au moins deux critères. Nous avons obtenu un résultat identique dans le cadre d'un modèle d'une intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2–maxitive. En effet, étant donnée une information préférentielle ordinale $\{P, I\}$ sur \mathcal{B} , sous les conditions précédentes, la proposition suivante montre qu'il est toujours possible de choisir dans l'ensemble $S_{2\text{-max}}(P, I)$, une capacité permettant

d'avoir tous les indices d'interaction strictement positifs. Ce résultat montre qu'une synergie positive (complémentarité) est toujours possible pour toutes les paires de critères dans un modèle utilisant une intégrale de Sugeno 2-maxitive, si l'information préférentielle ordinale ne contient pas d'indifférence et est représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive.

Proposition 4.4.2. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle ordinale sur \mathcal{B} telle que $I = \emptyset$. Supposons que la relation binaire $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict. Alors il existe une capacité $\mu \in S_{2-max}$ telle que pour tout $i, j \in N$, $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$.*

Preuve 4.4.2. *Soit $\{P, I\}$ une information préférentielle ordinale sur \mathcal{B} telle que $I = \emptyset$. Supposons que la relation binaire $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict. Alors la partition $\{\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_m\}$ de \mathcal{B} est construite comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2 du Chapitre 2. Quant à la capacité 2-maxitive μ , elle est construite comme dans la preuve de la Proposition 4.4.1 de ce chapitre. Nous y avons déjà prouvé que $\mu \in S_{2-max}$.*

En outre, soient $i, j \in N$, il existe $p, q, s \in \{1, \dots, m\}$ tels que $a_{ij} \in \mathcal{B}_p$, $a_i \in \mathcal{B}_q$, $a_j \in \mathcal{B}_s$ avec $p > q > 0$ et $p > s > 0$. De plus, on a $f_{ij} = p$, $f_i = q$, $f_j = s$ avec $p > q$ et $p > s$, donc $p > q \vee s$, c'est-à-dire, $\mu_{ij} > \mu_i \vee \mu_j$, d'où $\bar{I}_{ij}^\mu = \mu_{ij} > 0$. Nous avons ainsi prouvé que, si $I = \emptyset$ alors il existe une capacité $\mu \in S_{2-max}$ telle que $i, j \in N$, $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$, c'est-à-dire qu'il existe une complémentarité possible pour toute paire de critères $\{i, j\}$. Il n'y a donc pas d'indépendance nécessaire entre deux critères i et j . \square

L'exemple suivant illustre les deux résultats précédents.

Exemple 4.4.1. *Considérons $N = \{1, 2, 3\}$, $P = \{(a_{23}, a_1), (a_{12}, a_{23})\}$.*

L'information préférentielle ordinale $\{P, I\}$ ne contient pas d'indifférence et la relation binaire $P \cup M$ ne contient aucun cycle strict, donc $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Un tri topologique convenable sur $P \cup M$ est donné par : $\mathcal{B}_0 = \{a_0\}$; $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$; $\mathcal{B}_2 = \{a_{13}, a_{23}\}$; $\mathcal{B}_3 = \{a_{12}\}$. L'information préférentielle ordinale $\{P, I\}$ est représentable par la capacité μ donnée au Tableau 4.3. Il est clair que $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$, $\forall i, j \in N$, c'est-à-dire, les critères sont deux à deux complémentaires pour la capacité 2-maxitive μ élicitée.

S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\mu(S)$	0	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	1	1
$\bar{I}_{\mu(S)}^S$	—	—	—	—	2/3	2/3	1	—

TABLEAU 4.3 – Une capacité $\mu \in S_{2\text{-max}}$ et les indices d'interaction correspondants

Remarque 4.4.1. *L'indice d'interaction proposé ici, dans le cadre d'un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive, n'induit pas d'interaction négative, donc le problème dual du résultat de la Proposition 4.4.2 ne se pose pas.*

Remarque 4.4.2. *À la Proposition 2.3.1 du Chapitre 2, nous avons montré que l'interaction nulle n'est jamais nécessaire lorsqu'il y a aucune indifférence. Les Propositions 3.1.1 et 3.1.2 du Chapitre 3 donnent un résultat équivalent avec le degré de non-additivité. Par contre, nous n'avons pas un tel résultat, dans ce chapitre.*

Comme dans les chapitres précédents, nous allons présenter un modèle linéaire pour tester les interactions nécessaires.

4.5 Un programme linéaire mixte testant les interactions nécessaires

Comme à la Section 2.5 du Chapitre 2, nous relâchons l'hypothèse selon laquelle nous ne demandons des informations préférentielles ordinales que sur les alternatives binaires. Nous élaborons un Programme Linéaire MIXte (PLMI) pour tester en deux étapes, si l'information préférentielle ordinale recueillie est représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Puis, dans une troisième étape, nous testons l'existence d'une interaction nulle ou positive nécessaire entre deux critères donnés i et j .

L'expression d'une intégrale de Sugeno 2-maxitive est une composition des fonctions min et max. Dans la sous-section suivante, nous rappelons comment linéariser les fonctions min et max. Cette linéarisation nous permettra d'obtenir un PLMI.

4.5.1 Linéarisation des fonctions min et max

Étant donnés des nombres réels x_1, x_2, \dots, x_n, m et M , la linéarisation des fonctions min et max peut se faire de la manière suivante [95].

- $m = \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \iff \forall i = 1, 2, \dots, n, m \leq x_i, m \geq x_i - A\delta_i, \delta_i \in \{0, 1\}, \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = n - 1$ et A une “grande” constante positive, arbitrairement choisie.
- $M = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \iff \forall i = 1, 2, \dots, n, M \geq x_i, M \leq x_i + B\delta_i, \delta_i \in \{0, 1\}, \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = n - 1$ et B une “grande” constante positive, arbitrairement choisie.

Cette transformation des fonctions min et max en des contraintes linéaires, nous permet de transformer les programmes suivant en PLMI.

4.5.2 Procédure

À la Section 2.5 du Chapitre 2, nous proposons une procédure en trois étapes. Les deux premières consistent à tester la compatibilité de l’information $\{P, I\}$ avec une intégrale de Choquet et la troisième consiste à tester l’existence d’une interaction nécessaire, pour une coalition de critères A donnée. Ici, les deux premières consistent à tester la compatibilité de l’information $\{P, I\}$ avec une intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2–maxitive et la troisième consiste à tester l’existence d’une interaction nécessaire, pour une paire de critères $\{i, j\}$ donnée.

Étape 1. $PLMI_1$ suivant modélise chaque préférence de $\{P, I\}$ en introduisant deux variables d’écart non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- dans les contraintes correspondantes (équations (1a) et (1b)). L’équation (1c) (resp. (1d)) assure la normalisation (resp. la monotonie) de la capacité μ . L’équation (1e) reflète la condition de 2–maxitivité. La fonction objectif Z_1 minimise toutes les variables non négatives introduites dans (1a) et (1b).

$$\text{Min } Z_1 = \sum_{(x,y) \in P \cup I} (\alpha_{xy}^+ + \alpha_{xy}^-) \quad PLMI_1$$

Sous les contraintes :

$$S_\mu(u(x)) - S_\mu(u(y)) + \alpha_{xy}^+ - \alpha_{xy}^- \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x P y \quad (1a)$$

$$S_\mu(u(x)) - S_\mu(u(y)) + \alpha_{xy}^+ - \alpha_{xy}^- = 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x I y \quad (1b)$$

$$\mu(N) = 1 \quad (1c)$$

$$\mu_i \geq 0, \mu_{ij} \geq \mu_i, \mu_{ij} \geq \mu_j, \forall i, j \in N \quad (1d)$$

$$\mu(S) = \bigvee_{i,j \in S} \mu_{ij} \quad \forall S \subseteq N, |S| \geq 3 \quad (1e)$$

$$\alpha_{xy}^+ \geq 0, \alpha_{xy}^- \geq 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x(P \cup I)y$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

$PLMI_1$ est toujours réalisable grâce à l'introduction des variables non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- . Nous avons deux cas possibles.

Cas 1. La solution optimale de $PLMI_1$ est $Z_1^* = 0$: dans ce cas nous pouvons conclure que, selon le signe de la variable ε ($\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon > 0$), l'information préférentielle ordinaire $\{P, I\}$ peut être représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. L'étape suivante de la procédure, confirmera ou non cette possibilité.

Cas 2. La solution optimale de $PLMI_1$ est $Z_1^* > 0$: dans ce cas il n'existe pas d'intégrale de Sugeno 2-maxitive compatible avec $\{P, I\}$.

Étape 2. Ici, $PLMI_2$ assure l'existence d'une intégrale de Sugeno 2-maxitive compatible avec $\{P, I\}$, lorsque la solution optimale de $PLMI_1$ est $Z_1^* = 0$. Par rapport au précédent $PLMI$, dans cette formulation, nous avons juste supprimé les variables non négatives α_{xy}^+ et α_{xy}^- (nous les avons en effet mises à zéro) et nous avons changé la fonction objectif, de manière à maximiser la valeur de la variable d'écart ε , afin de satisfaire les relations de préférences strictes.

$$\text{Max } Z_2 = \varepsilon \quad PLMI_2$$

Sous les contraintes :

$$S_\mu(u(x)) - S_\mu(u(y)) \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x P y \quad (1a)$$

$$S_\mu(u(x)) - S_\mu(u(y)) = 0 \quad \forall x, y \in X \text{ tels que } x I y \quad (1b)$$

$$\mu(N) = 1 \quad (1c)$$

$$\mu_i \geq 0, \mu_{ij} \geq \mu_i, \mu_{ij} \geq \mu_j \quad \forall i, j \in N \quad (1d)$$

$$\mu(S) = \bigvee_{i,j \in S} \mu_{ij} \quad \forall S \subsetneq N, |S| \geq 3 \quad (1e)$$

$\varepsilon \geq 0$.

Notons que $PLMI_2$ n'est résolu que si $Z_1^* = 0$. Ainsi, $PLMI_2$ est toujours réalisable avec une solution finie (il n'est pas restrictif de supposer que $S_\mu(u(x)) \in [0, 1], \forall x \in X$). Nous avons donc l'un des deux cas suivants :

Cas 1. Le programme $PLMI_2$ est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* = 0$: dans ce cas il n'existe pas d'intégrale de Sugeno 2-maxitive compatible avec l'information préférentielle $\{P, I\}$.

Cas 2. La solution optimale de $PLMI_2$ est $Z_2^* > 0$: dans ce cas l'information préférentielle $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive.

Étape 3. À cette étape, nous supposons que l'information préférentielle ordinaire $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive, c'est-à-dire $Z_2^* > 0$. Nous voulons à présent savoir si l'interaction entre les critères i et j est nécessairement nulle (resp. positive) relativement aux informations préférentielles fournies par le décideur. Pour cela, au programme $PLMI_2$, nous ajoutons la contrainte $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$ (resp. $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$) et nous obtenons le programme linéaire mixte noté $PLMI_{NN}^{ij}$ (resp. $PLMI_{NP}^{ij}$). Après sa résolution, nous avons l'une des trois conclusions possibles suivantes.

1. Si $PLMI_{NN}^{ij}$ (resp. $PLMI_{NP}^{ij}$) n'est pas réalisable, alors l'interaction entre i et j est nécessairement positive (resp. nulle). En effet, comme $PLMI_2$ est réalisable avec une solution optimale $Z_2^* > 0$, la contradiction sur la représentation de $\{P, I\}$ ne vient que de l'introduction de la contrainte $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$ (resp. $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$).
2. Si $PLMI_{NN}^{ij}$ (resp. $PLMI_{NP}^{ij}$) est réalisable de solution optimale $Z_3^* = 0$, alors les contraintes $S_\mu(u(x)) - S_\mu(u(y)) \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in X$ telles que $x P y$ ne peuvent être satisfaites pour $\varepsilon > 0$. C'est-à-dire qu'il n'est pas possible de modéliser les préférences strictes en ajoutant la contrainte $\bar{I}_{ij}^\mu > 0$ (resp. $\bar{I}_{ij}^\mu = 0$) dans $PLMI_{NN}^{ij}$ (resp. $PLMI_{NP}^{ij}$). Par conséquent, nous pouvons conclure que l'interaction entre i et j est nécessairement positive (resp. nulle).
3. Si $PLMI_{NN}^{ij}$ (resp. $PLMI_{NP}^{ij}$) est réalisable de solution optimale $Z_3^* > 0$, alors l'interaction entre i et j n'est pas nécessairement nulle (resp. positive).

Le nombre de contraintes de monotonie pour ($3 \leq n \leq 12$) reste le même que celui du Tableau 2.7 de la Section 2.5 du Chapitre 2. Par contre, à la liste des variables de décision du Tableau 2.6, il faut rajouter toutes les variables binaires introduites dans les différentes linéarisations. Le nombre de variables augmente donc, mais la résolution reste possible avec un solveur classique.

Nous donnons à présent un exemple illustratif.

4.5.3 Exemple

Considérons les préférences données par le décideur dans l'exemple de la Sous-section 4.3.1 de ce chapitre. Dans cette dernière, nous avons prouvé que ces préférences sont représentables par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Le programme linéaire mixte $PLMI_{MS}^{NN}$ suivant correspondant au test de l'existence d'une interaction nulle nécessaire entre le critère Mathématique (1) et le critère Statistique (3).

$$\text{Max } Z_3 = \varepsilon$$

Données de l'exemple

$$a_1 = 0.3; a_2 = 0.25; a_3 = 0.6; b_1 = 0.3; b_2 = 0.6; b_3 = 0.25; c_1 = 0.7; c_2 = 0.25; c_3 = 0.6;$$

$$d_1 = 0.7; d_2 = 0.6; d_3 = 0.25; S_\mu(a) \geq S_\mu(b) + \varepsilon; S_\mu(d) \geq S_\mu(c) + \varepsilon; \varepsilon \geq 0.1$$

Contraintes relatives à la linéarisation de $S_\mu(x) = \max(\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{x3}, \alpha_{x12}, \alpha_{x13}, \alpha_{x23})$, avec l'introduction des variables binaires $\delta_1^x, \delta_2^x, \delta_3^x, \delta_{12}^x, \delta_{13}^x, \delta_{23}^x$, où $x \in \{a, b, c, d\}$.

$$S_\mu(x) \geq \alpha_{x1}; S_\mu(x) \geq \alpha_{x2}; S_\mu(x) \geq \alpha_{x3}; S_\mu(x) \geq \alpha_{x12}; S_\mu(x) \geq \alpha_{x13}; S_\mu(x) \geq \alpha_{x23}; S_\mu(x) \leq \alpha_{x1} + 500\delta_1^x; S_\mu(x) \leq \alpha_{x2} + 500\delta_2^x; S_\mu(x) \leq \alpha_{x3} + 500\delta_3^x; S_\mu(x) \leq \alpha_{x12} + 500\delta_{12}^x; S_\mu(x) \leq \alpha_{x13} + 500\delta_{13}^x; S_\mu(x) \leq \alpha_{x23} + 500\delta_{23}^x; \delta_1^x + \delta_2^x + \delta_3^x + \delta_{12}^x + \delta_{13}^x + \delta_{23}^x = 5; \delta_1^x, \delta_2^x, \delta_3^x, \delta_{12}^x, \delta_{13}^x, \delta_{23}^x \in \{0, 1\}.$$

Contraintes relatives à la linéarisation de $\alpha_{xi} = \min(x_i, \mu_i)$, avec l'introduction des variables binaires $\delta_{i1}^x, \delta_{i2}^x$, où $x \in \{a, b, c, d\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\alpha_{xi} \leq x_i; \alpha_{xi} \leq \mu_i; \alpha_{xi} \geq x_i - 500\delta_{i1}^x; \alpha_{xi} \geq \mu_i - 500\delta_{i2}^x; \delta_{i1}^x + \delta_{i2}^x = 1; \delta_{i1}^x, \delta_{i2}^x \in \{0, 1\}.$$

Contraintes relatives à la linéarisation de $\alpha_{xij} = \min(x_i, x_j, \mu_{ij})$, avec l'introduction des variables binaires $\delta_{ij1}^x, \delta_{ij2}^x, \delta_{ij3}^x$, où $x \in \{a, b, c, d\}$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$.

$$\alpha_{xij} \leq x_i; \alpha_{xij} \leq x_j; \alpha_{xij} \leq \mu_{ij}; \alpha_{xij} \geq x_i - 500\delta_{ij1}^x; \alpha_{xij} \geq x_j - 500\delta_{ij2}^x; \\ \alpha_{xij} \geq \mu_{ij} - 500\delta_{ij3}^x; \delta_{ij1}^x + \delta_{ij2}^x + \delta_{ij3}^x = 2; \delta_{ij1}^x, \delta_{ij2}^x, \delta_{ij3}^x \in \{0, 1\}.$$

Contraintes de 2-maxitivité

$$\mu_{12} \geq \mu_1; \mu_{12} \geq \mu_2; \mu_{13} \geq \mu_1; \mu_{13} \geq \mu_3; \mu_{23} \geq \mu_2; \mu_{23} \geq \mu_3; \mu_{123} = \max(\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}).$$

Contraintes de normalisation $\mu_{123} = 1$.

Contraintes relatives à la linéarisation de $\mu_{123} = \max(\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23})$, avec l'introduction des variables binaires $\delta^1, \delta^2, \delta^3$.

$$\mu_{123} \geq \mu_{12}; \mu_{123} \geq \mu_{13}; \mu_{123} \geq \mu_{23}; \mu_{123} \leq \mu_{12} + 500\delta^1; \mu_{123} \leq \mu_{13} + 500\delta^2; \\ \mu_{123} \leq \mu_{23} + 500\delta^3; \delta^1 + \delta^2 + \delta^3 = 2; \delta^1, \delta^2, \delta^3 \in \{0, 1\}.$$

Contraintes de positivité de \bar{I}_{13}^μ

$$\mu_{13} \geq \mu_1 + \varepsilon; \mu_{13} \geq \mu_3 + \varepsilon; \varepsilon \geq 0.1.$$

Les résultats obtenus en résolvant $PLMI_{NN}^{MS}$ sont donnés au Tableau 4.4. Nous pouvons conclure que l'interaction entre les critères Mathématique et Statistique n'est pas nécessairement nulle, car la solution optimale de $PLMI_{NN}^{MS}$ est $Z_3^* = 0.1 > 0$. De plus, nous avons $S_\mu(a) = 0.4$, $S_\mu(b) = 0.3$, $S_\mu(c) = 0.5$ et $S_\mu(d) = 0.6$.

	$Z_3 = \varepsilon$	1	2	3	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
Solution optimale Z_3^*	0.1	–	–	–	–	–	–	
Capacité μ	–	0	0	0.4	0.6	0.5	1	1
Indice d'interaction \bar{I}_{ij}^μ	–	–	–	–	0.6	0.5	1	–

TABLEAU 4.4 – Résultats de $PLMI_{NN}^{MS}$: interaction entre Mathématique et Statistique

4.6 Synthèse et perspectives

4.6.1 Synthèse

Ce chapitre propose et étudie la notion d'interaction entre deux critères dans un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Il s'inscrit dans le prolongement des Chapitres 2 et 3. Comme dans ces derniers, nous considérons que le décideur donne des informations préférentielles ordinales sur un ensemble fini d'alternatives, contrairement au cas continu étudié dans [103; 104].

La capacité 2-maxitive élicitée dans un tel cadre n'est pas unique, donc l'interprétation de l'interaction entre deux critères exige une certaine prudence. En effet, nous avons donné des exemples dans lesquels le signe de l'indice d'interaction dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités 2-maxitives compatibles avec l'information préférentielle ordinale recueillie. Seules les interactions nécessaires sont robustes puisque leur signe et, par conséquent, leur interprétation, ne varient pas dans l'ensemble de toutes les capacités 2-maxitives représentatives.

Dans le cadre des alternatives binaires, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une information préférentielle ordinale, ne contenant aucune indifférence soit représentable par une intégrale de Sugeno 2-maxitive. Ce résultat est similaire à celui obtenu au Chapitre 2, dans le cadre d'un modèle d'intégrale de Choquet.

Sous les conditions du précédent résultat, dans le cadre des alternatives binaires, si l'information préférentielle ordinale ne contient pas d'indifférence, nous montrons qu'il est toujours possible de la représenter par une intégrale de Sugeno 2-maxitive, dont les indices d'interaction entre deux critères sont tous strictement positifs. Ce résultat est similaire à celui obtenu au Chapitre 2, dans le cadre d'un modèle d'intégrale de Choquet.

En dehors du cadre des alternatives binaires, en utilisant la linéarisation des fonctions min et max, nous proposons un modèle de programmation linéaire mixte permettant de tester si l'interprétation des indices d'interaction est ambivalente ou non.

4.6.2 Perspectives

Nous présentons à présent des limites et perspectives relatives à ce chapitre.

- Ici, nous travaillons uniquement avec les alternatives binaires, mais ces alternatives sont rarement réelles, mais sont plutôt le plus souvent fictives.
- Tout ce chapitre se consacre au cas où l'information préférentielle ordinale du décideur ne contient aucune indifférence. Dans nos futurs travaux, nous allons étudier le cas général, avec des éventuelles relations d'indifférence. Nous savons à priori que certains résultats précédents ne seront plus valides. En particulier, celui induisant les synergies positives pour toutes les paires de critères. En effet, si le décideur est par exemple indifférent entre les alternatives a_1 et a_{12} , alors les critères 1 et 2 ne pourront plus être en synergie positive car $\bar{I}_{12}^\mu = 0$ pour toute capacité $\mu \in S_{2\text{-max}}$.
- Dans ce chapitre, nous avons proposé, à la lumière de certains arguments, un indice pouvant capter les phénomènes d'interactions dans un modèle de l'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Nous allons nous intéresser au cas d'un modèle de l'intégrale de Sugeno, utilisant une capacité k -maxitive, avec $k \geq 3$.
- Tout ce chapitre se fonde sur les alternatives binaires, avec deux niveaux de références : le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i . Nous envisageons faire un travail similaire, avec un modèle d'intégrale de Choquet bipolaire (utilisant une bicapacité) se fondant sur les alternatives ternaires, avec trois niveaux de références : le niveau mauvais -1_i , le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i .

Une étude pilote sur le nutri-score

5.1 Introduction

Le nutri-score est un système nutritionnel présent sur certains emballages. Il ne concerne pas les produits non transformés : fruits, légumes frais, viandes crues, miel... Il n'est non plus adapté aux produits pour bébé de 0 à 3 ans.

De nombreux travaux [85; 88; 107] ont été menés afin de valider la pertinence du système nutri-score concernant sa bonne perception et compréhension par les consommateurs, ainsi que sa capacité à les guider vers des choix alimentaires plus favorables à la santé du point de vue nutritionnel. Cette pertinence du nutri-score a été démontrée en France [1], conduisant à son adoption en octobre 2017. Trois ans après son adoption, 415 entreprises étaient engagées dans la démarche nutri-score en juillet 2020 en France, soit environ 50% des parts de marché en volumes de ventes d'après le bilan de l'Oqali [1]. D'après une enquête de Santé publique France [2] en septembre 2020, l'on dénombre désormais près de 500 entreprises engagées en faveur du logo, près de 94% des Français déclarent être favorables à sa présence sur les emballages, et plus d'un français sur deux déclare avoir changé des habitudes d'achat grâce au nutri-score.

À la suite d'une étude pilote menée à l'Université Paris Dauphine, ce chapitre se consacre à l'application, grâce aux données recueillies, de certains de nos résultats des Chapitres 2 et 3. Notamment sur l'interaction et le degré de non-additivité des critères retenus dans la conception du nutri-score. Les résultats du Chapitre 4 ne sont pas concernés ici car nous sommes dans un contexte cardinal et non ordinal.

Après avoir fait une brève présentation du nutri-score, nous présentons un modèle additif

équivalent au score nutritionnel. Nous achevons ce chapitre par les résultats d'une enquête pilote menée auprès des étudiants de deuxième année Master MIAGE Informatique Décisionnelle (M2 MIAGE ID).

5.2 Présentation du nutri-score

5.2.1 Historique

Les informations de cette sous-section sont tirées du site de Santé Publique France <https://www.santepubliquefrance.fr>, le 14 Avril 2022 à 17h34.

Le règlement européen EU numéro 1169/2011, dit règlement INCO (INformation du COnsommateur), établit les règles quant à l'information des consommateurs, leur permettant ainsi d'accéder à des informations de bases telles que la déclaration nutritionnelle ou la liste des ingrédients. Afin de faciliter la compréhension de ces informations, d'autres formes d'expression et de présentation ou d'information volontaire peuvent être fournies en complément de la déclaration nutritionnelle obligatoire en accord avec les articles 35 à 37 du règlement INCO.

Après une demande du Ministère des Solidarités et de la Santé, Santé publique France a créé un système d'étiquetage nutritionnel à l'avant des emballages : le nutri-score, qui peut être apposé par les producteurs sur leurs produits sur la base du volontariat. Le nutri-score a été développé pour faciliter la compréhension des informations nutritionnelles par les consommateurs et ainsi de les aider à faire des choix éclairés.

Le nutri-score a été mis en place pour la première fois en France en 2017, en se basant sur les travaux de l'équipe du Pr. Serge Hercberg ainsi que l'expertise de l'Agence nationale de sécurité sanitaire (ANSES) et du Haut Conseil de la Santé Publique (HCSP). Depuis son lancement en France, plusieurs pays ont décidé de recommander son utilisation : la Belgique, la Suisse, l'Allemagne, l'Espagne, les Pays-Bas et le Luxembourg.

5.2.2 Algorithme du nutri-score

Le système nutri-score nous informe de manière simplifiée de la qualité nutritionnelle d'un aliment. Plusieurs études scientifiques [85; 88; 107] ont permis de valider tout d'abord l'algorithme nutritionnel sous-jacent au nutri-score, concernant sa capacité à distinguer la qualité nutritionnelle des aliments en cohérence avec les recommandations alimentaires, son association avec la qualité du régime et, enfin, son association avec l'état de santé des consommateurs.

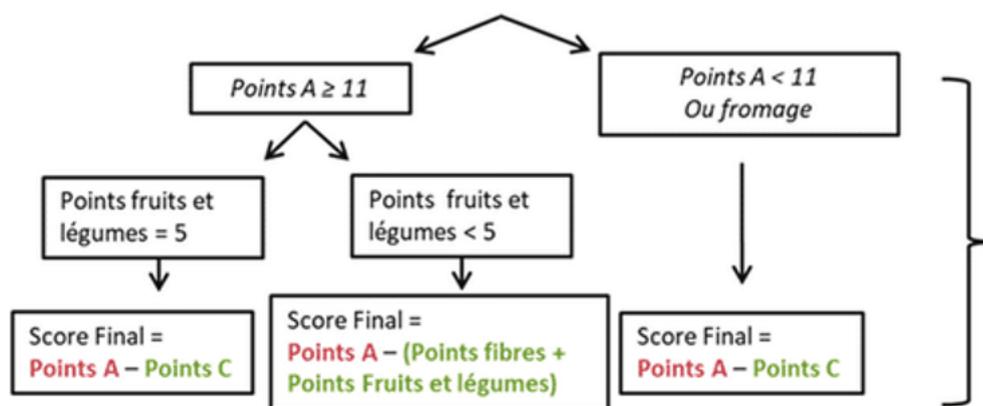
Il est construit sur la base d'un score nutritionnel élaboré initialement par une équipe de l'Université d'Oxford pour la Food Standard Agency (FSA) du Royaume-Uni. Il se fonde sur 5 couleurs associées aux lettres *A*, *B*, *C*, *D* et *E* : le vert *A* étant la meilleure qualité nutritionnelle et le rouge *E* la moins bonne. Ce score est fondé sur les compositions nutritionnelles de 100g du produit tel que vendu et allie deux types de composantes :

- des **facteurs nutritionnels à limiter** (en cas de consommation excessive) : l'énergie ($kJ/100g$), les acides gras saturés ($g/100g$), les sucres simples ($g/100g$) et le sel ($mg/100g$);
- des **facteurs nutritionnels à favoriser** : les fibres ($g/100g$), les protéines ($g/100g$), les fruits et légumes ($g/100g$).

On attribut des points pour chacune des composantes en fonction des seuils résumés dans les Figures 5.1 et 5.2. Les points issus des composantes à limiter (points négatifs) sont notés **points A**, et ceux issus des composantes à favoriser (points positifs) sont notés **points C**. En général, le score final est la soustraction entre points A et points C. L'attribution des points A et détermination du score final se font selon la Figure 5.1.

1. Attribution des points selon la composition du produit pour 100g ou 100ml

Points	Points A		Grille spécifique Boissons		Grille spécifique: Matières grasses		Sodium (mg)
	Energie (kJ)	Sucres simples (g)	Energie (kJ)	Sucres simples (g)	Acides gras saturés (g)	Acides gras saturés/Lipides (%)	
0	≤ 335	≤ 4,5	≤ 0	≤ 0	≤ 1	< 10	≤ 90
1	> 335	> 4,5	≤ 30	≤ 1.5	> 1	< 16	> 90
2	> 670	> 9	≤ 60	≤ 3	> 2	< 22	> 180
3	> 1005	> 13,5	≤ 90	≤ 4.5	> 3	< 28	> 270
4	> 1340	> 18	≤ 120	≤ 6	> 4	< 34	> 360
5	> 1675	> 22,5	≤ 150	≤ 7.5	> 5	< 40	> 450
6	> 2010	> 27	≤ 180	≤ 9	> 6	< 46	> 540
7	> 2345	> 31	≤ 210	≤ 10.5	> 7	< 52	> 630
8	> 2680	> 36	≤ 240	≤ 12	> 8	< 58	> 720
9	> 3015	> 40	≤ 270	≤ 13.5	> 8.9	< 64	> 810
10	> 3350	> 45	> 270	> 13.5	> 10	≥ 64	> 900
	0-10 (a)	0-10 (b)	0-10 (a)	0-10 (b)	0-10 (c)	0-10 (c)	0-10 (d)
Total	Points A = (a) + (b) + (c) + (d) [0 – 40]						



2. Score Final entre -15 et 40 points.

FIGURE 5.1 – Attribution des points A et détermination du score final

L'attribution des points C, évoqués dans la Figure 5.1, est explicitée dans la Figure 5.2, ainsi que l'attribution finale des classes. Les Figures 5.1 et 5.2 sont tirées de [3].

Grille spécifique Boissons				
Points C				
Points	Fruits, leg (%)	Fruits, leg (%)	Fibres (g)	Protéines (g)
0	≤ 40	≤ 40	≤ 0.7	≤ 1,6
1	> 40		> 0.7	> 1,6
2	> 60	>40	> 1.4	> 3,2
3	-		> 2.1	> 4,8
4	-	>60	> 2.8	> 6,4
5	> 80		> 3.5	> 8,0
6				
7				
8				
9				
10		> 80		
	0-5 (a)	0-10 (a)	0-5 (b)	0-5 (c)
Total	Points C = (a) + (b) + (c) [0 – 15]			

3. Attribution des classes:

Aliments solides (points)	Boissons (points)	Couleur
Min à -1	Eau	Vert foncé
0 à 2	Min à 1	Vert clair
3 à 10	2 à 5	Jaune
11 à 18	6 à 9	Orange clair
19 à Max	10 à Max	Orange foncé

Vert : meilleure qualité Orange foncé : moins bonne qualité



FIGURE 5.2 – Attribution des Points C et des classes

5.2.3 Un exemple pratique de calcul du nutri-score d'un aliment.

Nous allons déterminer le nutri-score des fourrés chocolat noir BIO dont une image est donnée par la Figure 5.3. Quant à ses informations nutritionnelles, elles sont résumées au Tableau 5.1. Nous les avons prises sur le site <https://fr.openfoodfacts.org/>, le 14 Avril 2022 à 18h56.



FIGURE 5.3 – Paquet de 2 fourrés chocolat noir BIO

	Informations nutritionnelles pour 100g
1 : énergie (kj)	2 004
2 : sucre (g)	27
3 : acides gras saturés (g)	7
4 : sel (g)	0,5
5 : protéines (g)	7,1
6 : fibres (g)	4,8
7 : fruits et légumes (%)	0

TABLEAU 5.1 – Informations nutritionnelles du fourré Chocolat noir BIO BJORG

Notons qu'il est indiqué sur cette étiquette que 100g des fourrés chocolat noir BIO, contient 0,5g de sel. Attention car cela n'est pas équivalent à la quantité de sodium ! Pour obtenir la quantité de sodium, il faut diviser la quantité de sodium par 2,5. De sorte que, sodium = $0,5\text{g} \div 2,5 = 0,2\text{g}$, c'est-à-dire 200mg de sodium.

En outre, le taux de fruits et légumes n'est pas indiqué sur l'étiquette. Il est estimé à 0%. Cette estimation figure sur le site <https://fr.openfoodfacts.org/>.

Points positifs : points C = 9

- **Protéines : 4 / 5** (valeur = $7,1 \in]6,4; 8,0]$).
- **Fibres alimentaires : 5 / 5** (valeur = $4,8 > 3,5$).
- **Fruits, légumes : 0 / 5** (valeur = $0 \leq 40$).

Points négatifs : point A = 18

- **Énergie : 5 / 10** (valeur = 2004 \in]1675; 2010]).
- **Sucres : 5 / 10** (valeur = 27 \in]22, 5; 27]).
- **Graisses saturées : 6 / 10** (valeur = 7 \in]6; 7]).
- **Sodium : 2 / 10** (valeur = 200 \in]180; 270]).

Comme le nombre de points négatifs est supérieur ou égal à 11, et le taux de fruits et légumes vaut $0 < 5$, alors d'après la Figure 5.1 du choix de la méthode de calcul du score final, ce dernier vaut **points A – (points fibres + points fruits et légumes)**, c'est-à-dire les points pour les protéines ne sont pas comptés. Ainsi, le score nutritionnel = $18 - 5 = 13$. Ce produit étant un aliment solide, on déduit de la Figure 5.2 que le nutri-score des fourrés chocolat noir est **D**. Ceci est conforme au nutri-score affiché sur l'emballage du paquet de fourrés chocolat noir BIO BJORG (voir Figure 5.3).

5.3 Un modèle additif équivalent au score nutritionnel

5.3.1 Modèle

À ce stade, nous connaissons déjà comment déterminer le score nutritionnel d'un aliment. Dans cette section nous montrons que cette détermination peut se faire de manière équivalente en utilisant un modèle additif.

Ce problème peut être vu comme un problème d'AMCD, où l'ensemble des alternatives A est l'ensemble des aliments, à évaluer sur 7 critères, correspondant aux 7 composantes nutritionnelles citées ci-dessus.

Pour les critères à minimiser [resp. à maximiser] $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (énergie, sucre, acides gras saturés, sodium), [resp. $i \in \{5, 6, 7\}$ (protéines, fibres, fruits et légumes)], pour tout aliment $x = (x_1, \dots, x_7)$, nous définissons les fonctions d'utilités marginales u_i par $u_i(x_i) = 10 -$ points obtenus par x sur le critère i [resp. par $u_i(x_i) = 2 \times$ points obtenus par x sur le critère i], selon la Figure 5.1. Nous donnons en annexes (Pages 134 – 143), les figures attribuant les points pour chaque critère, via l'algorithme du nutri-score, ainsi que les fonctions d'utilités marginales u_i , avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définissons la fonction F comme suite : pour tout aliment x ,

$$F(u(x)) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3) + u_4(x_4) + 0,5(u_5(x_5) + u_6(x_6) + u_7(x_7)). \quad (5.1)$$

Considérons trois aliments solides a, b et c donnés au Tableau 5.2.

	a	b	c
1 : énergie(kJ)	1435	2 004	2 591
2 : sucre(g)	0,8	27	5,1
3 : acides gras saturés (g)	1,3	9,7	3,1
4 : sodium (g)	192	200	0
5 : protéines (g)	18	7,1	29
6 : fibres (g)	11	4,8	5,5
7 : fruits et légumes (%)	4	0	100

TABLEAU 5.2 – Quelques aliments

	Valeurs (pour 100g)	Points	Fonctions d'utilité u_i
1 : énergie(kJ)	1435	4/10	$u_1(a) = 6$
2 : sucre(g)	0,8	0/10	$u_2(a) = 10$
3 : acides gras saturés (g)	1,3	1/10	$u_3(a) = 9$
4 : sodium (mg)	192	2/10	$u_4(a) = 8$
5 : protéines (g)	18	5/5	$u_5(a) = 10$
6 : fibres (g)	11	5/5	$u_6(a) = 10$
7 : fruits et légumes (%)	4	0/5	$u_7(a) = 0$

TABLEAU 5.3 – Exemple pour $a = (1435; 0,8; 1,3; 192; 18; 11; 4)$

Nous avons $F(u(a)) = 6 + 10 + 9 + 8 + 0,5(10 + 10 + 0) = 43$.

	a	b	c
Points négatifs A	7	18	11
Points positifs C	10	9	15
Score nutritionnel	-3	13	-4
Label du nutri-score	A	D	A
Notre modèle additif F	43	31	36,5

TABLEAU 5.4 – Agrégation des aliments

Un modèle additif équivalent au score nutritionnel est donné par :

$$\text{Score Nutritionnel}(u(x)) = 40 - F(u(x)) \quad (5.2)$$

où $F(u(x)) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3) + u_4(x_4) + 0,5(u_5(x_5) + u_6(x_6) + u_7(x_7))$.

La fonction F étant additive, alors la fonction $40 - F$ l'est aussi. Ainsi, le Score Nutritionnel d'un aliment peut-être retrouvé grâce à un modèle additif.

Dans cette sous-section, nous venons de voir que le nutri-score peut être calculé à partir d'un modèle additif. Cela met en exergue des limites du nutri-score, qui feront l'objet de la sous-section suivante.

5.3.2 Quelques limites du nutri-score

Le nutri-score étant équivalent à un modèle additif, cela induit que tous les critères sont indépendants (au sens des préférences). En particulier, les critères énergie, sucre, protéines et fibres sont indépendants. Ce qui ne nous semble pas correct car la quantité d'énergie est entre autre dépendante de la quantité de sucre, des protéines et des fibres. En effet, comme indiqué dans [66], 100 grammes d'un aliment ont un apport énergétique (en kcal) donné par la formule ci-dessous.

$$\begin{aligned} \text{énergie} = & (4 \times \text{sucre}) + (9 \times \text{acides gras saturés}) + (7 \times \text{alcool}) + (4 \times \text{protéines}) + \\ & (2,4 \times \text{acides organiques}) + (2,4 \times \text{polyols}) + (2 \times \text{fibres}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, il n'est pas possible de modéliser certaines préférences qui mettent en exergue certaines dépendances (au sens des préférences). En effet, considérons des aliments a, b, c et

d donnés au Tableau 5.5.

Critères i	a	b	c	d
1 : énergie(kJ)	1800	350	1800	350
2 : sucre(g)	10	10	10	10
3 : acides gras saturés (g)	9	9	9	9
4 : sodium (mg)	2	2	2	2
5 : protéines (g)	8	5	8	5
6 : fibres (g)	12	9	12	9
7 : fruits et légumes (%)	0	0	30	30

TABLEAU 5.5 – Valeurs nutritionnelles des aliments a, b, c et d .

Sachant qu'on trouve très souvent les fibres dans les fruits et légumes, considérons un consommateur pour lequel :

- Si un aliment est insatisfaisant en fruits et légumes, alors les fibres sont plus importantes que les protéines.
- Si un aliment est satisfaisant en fruits et légumes, alors les protéines sont plus importantes que les fibres.

Ce consommateur préfère donc l'aliment a à l'aliment b et l'aliment d à l'aliment c . C'est-à-dire $a P b$ et $d P c$. Il n'est malheureusement pas possible d'obtenir un score nutritionnel induisant ces deux préférences $a P b$ et $d P c$. En effet, supposons cela possible, alors puisque le Score Nutritionnel (SN) est lié à un modèle additif, alors il existe des poids (normalisés) $q_1, \dots, q_7 \in [0, 1]$, associés respectivement à chacun des éléments nutritionnels (critères), de telle sorte que le score nutritionnel d'un aliment quelconque x soit donnée par $SN(x) = \sum_{i=1}^7 q_i u_i(x_i)$ où u_i est une fonction d'utilité du critère $i \in N$. La préférence $a P b$ implique :

$$q_1 u_1(1800) + q_2 u_2(10) + q_3 u_3(9) + q_4 u_4(2) + q_5 u_5(8) + q_6 u_6(12) + q_7 u_7(0) > q_1 u_1(350) + q_2 u_2(10) + q_3 u_3(9) + q_4 u_4(2) + q_5 u_5(5) + q_6 u_6(9) + q_7 u_7(0).$$

De telle sorte que,

$$q_1 u_1(1800) + q_5 u_5(8) + q_6 u_6(12) > q_1 u_1(350) + q_5 u_5(5) + q_6 u_6(9). \quad (5.3)$$

La préférence $d P c$ implique :

$$\begin{aligned} q_1 u_1(350) + q_2 u_2(10) + q_3 u_3(9) + q_4 u_4(2) + q_5 u_5(5) + q_6 u_6(9) + q_7 u_7(30) > \\ q_1 u_1(1800) + q_2 u_2(10) + q_3 u_3(9) + q_4 u_4(2) + q_5 u_5(8) + q_6 u_6(12) + q_7 u_7(30). \end{aligned}$$

De telle sorte que,

$$q_1 u_1(350) + q_5 u_5(5) + q_6 u_6(9) > q_1 u_1(1800) + q_5 u_5(8) + q_6 u_6(12). \quad (5.4)$$

Les équations 5.3 et 5.4 sont incompatibles. Ainsi, le score nutritionnel est incapable de satisfaire un consommateur dont les principes conduisent à ces deux préférences $a P b$ et $d P c$. Ceci nous semble être une limite du nutri-score.

5.4 Une enquête pilote sur le nutri-score

5.4.1 Recueil des données

Dans un premier temps, nous avons souhaité rencontrer des nutritionnistes dans le cadre de notre travail, mais des mesures imposées par la pandémie de COVID-19 n'ont pas facilité cela. En effet, les rendez-vous obtenus étaient non seulement lointains (il fallait patienter près de deux mois), mais aussi incertains (car ils pouvaient être annulés suivant l'évolution de la pandémie). C'est ainsi que la sélection des étudiants de deuxième année Master MIAGE Informatique Décisionnelle (M2 MIAGE ID) a été faite comme décideurs, sachant que certains de ces étudiants ont des connaissances du nutri-score dans le cadre de leurs cours de transparence des algorithmes pour l'aide à la décision.

L'enquête pilote a eu lieu le vendredi 21 Janvier 2022, de 13h45 à 14h30 en salle P521 de l'Université Paris-Dauphine. Le questionnaire (Page 127 en annexes) a été distribué sur papier aux 19 étudiants présents. La première partie de ce questionnaire porte sur une brève évaluation des connaissances des décideurs (étudiants) sur le nutri-score. Dans sa seconde partie, des consignes sont données pour faciliter la comparaison des aliments fictifs du tableau. Comme nous avons 7 critères, l'ensemble des alternatives binaires généralisées contient 128 aliments fictifs $\mathcal{B} = \{a_0, a_1, \dots, a_{1234567}\}$. Nous avons choisi de partitionner ces aliments en 19 sous-ensembles, de sorte que chacun des 19 étudiants se prononce sur

exactement l'un d'eux. Cela nous permet de fusionner leurs préférences et de considérer tous ces étudiants comme étant un seul et même décideur. Dans la suite, nous parlerons parfois du décideur et non des décideurs.

5.4.2 Traitement des données

5.4.2.1 Mise en évidence des incohérences

Les informations préférentielles recueillies du décideur contiennent plusieurs incohérences car la relation binaire $P \cup M \cup I$ contient plusieurs cycles stricts. Nous donnons ci-après des cycles stricts détectés pour certains étudiants :

- **Étudiant 1.** **c1** : $a_0 P a_1 M a_0$, **c2** : $a_0 P a_2 M a_0$, **c3** : $a_0 P a_{12} M a_0$, **c4** : $a_1 P a_{12} M a_1$,
c5 : $a_0 P a_{12} M a_1 M a_0$, **c6** : $a_0 P a_{12} M a_2 M a_0$, **c7** : $a_7 P a_{27} M a_7$.
- **Étudiant 2.** **c1** : $a_7 P a_{27} M a_7$, **c2** : $a_6 P a_{27} M a_7 I a_6$, **c3** : $a_4 P a_{13} M a_3 I a_4$.
- **Étudiant 3.** **c1** : $a_{14} P a_{15} P a_{14}$, **c2** : $a_{15} P a_{67} P a_{14} P a_{15}$, **c3** : $a_{67} I a_{25} P a_{15} P a_{67}$, **c4** :
 $a_{45} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25} P a_{45}$, **c5** : $a_{45} P a_{35} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25} P a_{45}$,
c6 : $a_{25} P a_{45} P a_{15} P a_{67} I a_{25}$, **c7** : $a_{67} P a_{35} P a_{15} P a_{67}$, **c8** : $a_{25} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25}$,
c9 : $a_{45} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25} P a_{45}$, **c10** : $a_{45} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25} P a_{45}$,
c11 : $a_{35} P a_{14} P a_{34} P a_{67} P a_{35}$, **c12** : $a_{45} P a_{14} P a_{34} P a_{67} I a_{25} P a_{45}$,
c13 : $a_{35} P a_{34} P a_{67} P a_{35}$, **c14** : $a_{25} P a_{35} P a_{34} P a_{67} I a_{25}$, **c15** : $a_{14} P a_{34} P a_{67} P a_{14}$,
c16 : $a_{67} I a_{25} P a_{34} P a_{67}$, **c17** : $a_{25} P a_{35} P a_{34} P a_{67} I a_{25}$.
- **Étudiant 5.** **c1** : $a_{23} P a_{57} P a_{26} P a_{23}$, **c2** : $a_{24} P a_{46} P a_{26} P a_{24}$, **c3** : $a_{26} P a_{23} P a_{57} P a_{26}$,
c4 : $a_{26} P a_{23} P a_{37} P a_{57} P a_{26}$, **c5** : $a_{26} P a_{23} P a_{46} P a_{26}$, **c6** : $a_{57} P a_{26} P a_{23} P a_{57}$, **c7** :
 $a_{26} P a_{23} P a_{46} P a_{37} P a_{57} P a_{26}$, **c8** : $a_{46} P a_{26} P a_{23} P a_{46}$, **c9** : $a_{46} P a_{26} P a_{24} P a_{46}$,
c10 : $a_{37} P a_{57} P a_{26} P a_{37}$, **c11** : $a_{37} P a_{26} P a_{37}$, **c12** : $a_{37} P a_{57} P a_{26} P a_{24} P a_{46} P a_{37}$,
c13 : $a_{37} P a_{57} P a_{26} P a_{23} P a_{37}$, **c14** : $a_{37} P a_{57} P a_{26} P a_{24} P a_{37}$,
c15 : $a_{57} P a_{26} P a_{24} P a_{57}$, $a_{46} P a_{57} P a_{46}$, $a_{23} P a_{36} P a_{23}$.
- **Étudiant 6.** **c1** : $a_{156} P a_{126} P a_{156}$, **c2** : $a_{157} P a_{257} P a_{157}$.
- **Étudiant 7.** **c1** : $a_{234} I a_{236} I a_{245} P a_{234}$, **c2** : $a_{234} I a_{345} P a_{236} I a_{245} P a_{234}$,
c3 : $a_{234} I a_{345} P a_{245} P a_{234}$, **c4** : $a_{234} I a_{345} P a_{346} P a_{234}$, **c5** : $a_{345} P a_{346} P a_{234} I a_{345}$,
c6 : $a_{345} P a_{346} P a_{245} P a_{234} I a_{345}$, **c7** : $a_{345} P a_{346} P a_{236} I a_{245} P a_{234} I a_{345}$.
- **Étudiant 8.** **c1** : $a_{145} P a_{146} P a_{145}$, **c2** : $a_{167} P a_{147} P a_{167}$.

- **Étudiant 9. c1** : $a_{137} P a_{356} P a_{267} P a_{137}$.
- **Étudiant 11. c1** : $a_{2456} P a_{1267} P a_{2456}$, **c2** : $a_{2345} P a_{1347} P a_{2356} P a_{2345}$,
c3 : $a_{1367} P a_{3567} I a_{1267} P a_{1367}$, **c4** : $a_{2456} P a_{1367} P a_{2456}$, **c5** : $a_{2356} P a_{1347} P a_{2356}$.
- **Étudiant 13. c1** : $a_{1246} P a_{1467} P a_{1234} P a_{1246}$, **c2** : $a_{1246} P a_{1467} P a_{1235} P a_{1246}$,
c3 : $a_{1467} P a_{1235} P a_{2357} P a_{1467}$, **c4** : $a_{1246} P a_{1467} P a_{1235} P a_{1357} P a_{1246}$,
c5 : $a_{1234} P a_{1235} P a_{2357} P a_{1234}$, **c6** : $a_{1357} P a_{2357} P a_{1467} P a_{1234} P a_{1357}$,
c7 : $a_{1235} P a_{1246} P a_{1467} P a_{1235}$, **c8** : $a_{2357} P a_{1246} P a_{1467} P a_{1235} P a_{2357}$,
c9 : $a_{1246} P a_{1467} P a_{1235} P a_{1246}$, **c10** : $a_{1235} I a_{1257} P a_{1467} P a_{1235}$,
c11 : $a_{1257} P a_{1246} P a_{1467} P a_{1234} P a_{1257}$.
- **Étudiant 14. c1** : $a_{3467} P a_{1346} I a_{3467}$, **c2** : $a_{3467} P a_{1457} I a_{3467}$, **c3** : $a_{3467} P a_{1345} I a_{3467}$,
c4 : $a_{3457} P a_{2457} P a_{3457}$, **c5** : $a_{1346} P a_{1256} P a_{1346}$, **c6** : $a_{3457} P a_{1345} I a_{3467} P a_{3457}$, **c7** :
 $a_{1256} P a_{2457} P a_{1256}$, **c8** : $a_{1346} P a_{1345} P a_{1346}$, **c9** : $a_{3457} P a_{1256} P a_{3467} P a_{3457}$,
c10 : $a_{1346} P a_{1457} P a_{1346}$, **c11** : $a_{1457} P a_{1345} I a_{1457}$, **c12** : $a_{2457} P a_{1345} P a_{2457}$, **c13** :
 $a_{3467} P a_{1346} I a_{3467}$, **c14** : $a_{1457} P a_{3457} P a_{1256} P a_{1457}$, **c15** : $a_{1345} I a_{1457} P a_{1345}$, **c16** :
 $a_{1256} P a_{1345} P a_{2457} P a_{1256}$, **c17** : $a_{1457} P a_{2457} P a_{1256} P a_{1457}$,
c18 : $a_{1346} P a_{3457} P a_{1256} P a_{1346}$, **c19** : $a_{1346} P a_{2457} P a_{1256} P a_{1346}$.
- **Étudiant 16. c1** : $a_{13467} P a_{13457} P a_{12467} P a_{13467}$, **c2** : $a_{12456} I a_{12467} P a_{13467} I a_{12456}$,
c3 : $a_{23457} P a_{12456} I a_{12467} P a_{13467} P a_{23457}$, **c4** : $a_{23457} P a_{12467} P a_{13467} P a_{23457}$.
- **Étudiant 17. c1** : $a_{12567} P a_{23467} I a_{23456} P a_{12567}$.
- **Étudiant 19. c1** : $a_{234567} P a_{12357} P a_{234567}$.

Nous déduisons de la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2 que l'information préférentielle $\{P, I\}$, recueillie auprès des étudiants n'est pas représentable par une intégrale de Choquet, car elle contient des cycles stricts.

5.4.2.2 Gestion des incohérences et modélisation des préférences

Nous avons listé ci-dessus des cycles stricts présents dans $P \cup M \cup I$, et qui rendent impossible la représentation de $\{P, I\}$ par une intégrale de Choquet. Dans la gestion de ces incohérences, nous avons supprimé toutes les relations P et I qui figurent dans l'un de ces cycles stricts de $P \cup M \cup I$. Ces relations P et I , à supprimer, ont été surlignées en jaune dans les réponses du décideur (Pages 129 – 132 en annexes).

À présent, $P \cup M \cup I$ ne contient plus de cycle strict, la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2 nous garantit la possibilité de représenter $\{P, I\}$ par une intégrale de Choquet. Nous allons donc exhiber une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

Nous commençons par effectuer des tris topologiques, selon la construction de la preuve de la Proposition 2.4.1 du Chapitre 2, pour les préférences de chaque étudiant.

- **Étudiant 1.** $\mathcal{B}_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_{12}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_5, a_{16}, a_{17}\}$.
- **Étudiant 2.** $\mathcal{B}_0 = \{a_3, a_4, a_{13}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_6, a_7, a_{27}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{56}\}$.
- **Étudiant 3.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{14}, a_{15}, a_{25}, a_{34}, a_{35}, a_{45}, a_{67}\}$.
- **Étudiant 4.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{47}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{567}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{256}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{1567}, a_{123}, a_{124}\}$,
 $\mathcal{B}_4 = \{a_{125}\}$.
- **Étudiant 5.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{37}, a_{57}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{26}, a_{46}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{23}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{24}, a_{36}\}$.
- **Étudiant 6.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{156}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{134}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{126}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{257}\}$, $\mathcal{B}_4 = \{a_{157}\}$,
 $\mathcal{B}_5 = \{a_{127}\}$, $\mathcal{B}_6 = \{a_{2567}\}$.
- **Étudiant 7.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{234}, a_{236}, a_{245}, a_{346}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{345}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{347}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{237}\}$
- **Étudiant 8.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{145}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{146}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{147}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{456}\}$, $\mathcal{B}_4 = \{a_{457}\}$,
 $\mathcal{B}_5 = \{a_{467}\}$, $\mathcal{B}_6 = \{a_{167}\}$.
- **Étudiant 9.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{136}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{135}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{137}, a_{356}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{357}\}$,
 $\mathcal{B}_4 = \{a_{267}\}$, $\mathcal{B}_5 = \{a_{235}\}$.
- **Étudiant 10.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{246}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{247}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{1245}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{367}\}$,
 $\mathcal{B}_4 = \{a_{3456}\}$, $\mathcal{B}_5 = \{a_{1237}\}$, $\mathcal{B}_6 = \{a_{2346}\}$.
- **Étudiant 11.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{2345}, a_{2356}, a_{1347}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{2456}, a_{3567}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{1367}, a_{1267}\}$.
- **Étudiant 12.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{1456}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{4567}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{1247}, a_{1356}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{2367}, a_{2467}\}$,
 $\mathcal{B}_4 = \{a_{2347}\}$.
- **Étudiant 13.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{1467}, a_{2357}, a_{1357}, a_{1246}, a_{1257}, a_{1234}, a_{1235}\}$.
- **Étudiant 14.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{3467}, a_{3457}, a_{1256}, a_{1346}, a_{2457}, a_{1457}, a_{1345}\}$.
- **Étudiant 15.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{1236}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{12345}, a_{12346}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{12347}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{24567}\}$,
 $\mathcal{B}_4 = \{a_{34567}\}$, $\mathcal{B}_5 = \{a_{23567}\}$.
- **Étudiant 16.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{12467}, a_{14567}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{13467}, a_{23457}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{13457}\}$.
- **Étudiant 17.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{23456}, a_{23467}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{13456}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{12567}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{12457}, a_{12367}\}$.
- **Étudiant 18.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{13567}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{a_{123456}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{a_{12457}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{a_{124567}\}$.

$$\mathcal{B}_4 = \{a_{123567}\}, \mathcal{B}_5 = \{a_{123467}\}, \mathcal{B}_6 = \{a_{123457}\}.$$

• **Étudiant 19.** $\mathcal{B}_0 = \{a_{12357}\}, \mathcal{B}_1 = \{a_{134567}, a_{234567}, a_{1234567}\}.$

Les étudiants ayant fourni leurs préférences sur des sous-ensembles disjoints d'alternatives, nous pouvons fusionner les partitions précédentes en tenant compte de la relation de monotonie M . Nous obtenons ainsi la partition suivante, sur l'ensemble entier des alternatives binaires.

$$\mathcal{B}_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{14}, a_{34}\}.$$

$$\mathcal{B}_1 = \{a_5, a_6, a_7, a_{13}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{35}, a_{37}, a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{57}, a_{67}, a_{126}\} \cup \{a_{135}, a_{145}, a_{146}, a_{457}, a_{2367}\}.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{a_{23}, a_{24}, a_{36}, a_{56}, a_{134}, a_{136}, a_{147}, a_{156}, a_{234}, a_{236}, a_{245}, a_{246}, a_{256}, a_{346}, a_{467}, a_{567}\}.$$

$$\mathcal{B}_3 = \{a_{123}, a_{124}, a_{137}, a_{157}, a_{167}, a_{247}, a_{345}, a_{356}, a_{357}, a_{456}, a_{1567}\}.$$

$$\mathcal{B}_4 = \{a_{267}, a_{1456}\}.$$

$$\mathcal{B}_5 = \{a_{235}, a_{257}, a_{347}, a_{1347}, a_{2345}, a_{2356}, a_{4567}\}.$$

$$\mathcal{B}_6 = \{a_{127}, a_{367}, a_{1236}, a_{1246}, a_{1247}, a_{1267}, a_{1345}, a_{1346}, a_{1356}, a_{1357}, a_{1367}, a_{1457}, a_{1467}\} \cup \{a_{2456}, a_{2467}, a_{3456}, a_{3567}, a_{12467}, a_{13456}, a_{13567}, a_{14567}\}.$$

$$\mathcal{B}_7 = \{a_{125}, a_{1234}, a_{1235}, a_{1245}, a_{1256}, a_{1257}, a_{2346}, a_{2567}, a_{3457}, a_{12345}, a_{12346}, a_{12356}\} \cup \{a_{12456}, a_{12567}, a_{23456}, a_{123456}\}.$$

$$\mathcal{B}_8 = \{a_{237}, a_{1237}, a_{2347}, a_{2457}, a_{12347}\}.$$

$$\mathcal{B}_9 = \{a_{2357}, a_{3467}, a_{12357}, a_{12457}, a_{23457}, a_{24567}, a_{34567}, a_{124567}\}.$$

$$\mathcal{B}_{10} = \{a_{12367}, a_{13457}, a_{13467}, a_{23467}, a_{23567}, a_{123457}, a_{123467}, a_{123567}, a_{134567}, a_{234567}\} \cup \{a_{1234567}\}.$$

Nous définissons une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ de la manière suivante et l'explicitons aux Tableaux D.1 et D.2 (Pages 146 – 147 en annexes).

$$\text{Pour tout } S \subseteq N, \mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0, \\ 0.1 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_1, \\ 0.2 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_2, \\ 0.3 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_3, \\ 0.4 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_4, \\ 0.5 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_5, \\ 0.6 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_6, \\ 0.7 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_7, \\ 0.8 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_8, \\ 0.9 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_9, \\ 1 & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_{10} \end{cases}$$

Rappelons que les critères énergie, sucre, acides gras saturés, protéines et fibres sont linéairement “dépendants” par la formule :

$$\begin{aligned} \text{énergie} = & (4 \times \text{sucre}) + (9 \times \text{acides gras saturés}) + (7 \times \text{alcool}) + (4 \times \text{protéines}) + \\ & (2,4 \times \text{acides organiques}) + (2,4 \times \text{polyols}) + (2 \times \text{fibres}). \end{aligned}$$

Pour cela, nous considérons **stratégique** l'ensemble $N_s = \{\text{énergie, acides gras saturés, sucre, protéines, fibres}\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, et notre étude de l'interaction et de la non additivité y sera focalisée.

5.4.2.3 Étude de l'interaction pour notre ensemble stratégique N_s

D'abord, nous allons montrer que l'interaction positive est possible pour N_s .

- **Interaction positive possible pour notre ensemble stratégique N_s .**

L'ensemble $\{P, I\}$ est tel que pour tout $S \subseteq N$, $\text{non}(a_S TC_{I \cup M} a_N)$. On déduit de la Proposition 2.4.2 du Chapitre 2 qu'il est possible de modéliser $\{P, I\}$ par une intégrale de Choquet pour laquelle toutes les interactions sont strictement positives. En particulier, l'interaction positive est possible pour N_s , donc cette dépendance linéaire entre ces critères peut être captée dans le sens positif. C'est-à-dire qu'il est bénéfique que ces aliments soient tous satisfaisants pour l'énergie, le sucre, les acides gras saturés, les protéines et le fibres. Pour cela, utilisons la partition suivante.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{14}, a_{34}\}. \\
\mathcal{B}_1 &= \{a_5, a_6, a_7, a_{13}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{35}, a_{37}, a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{57}, a_{67}, a_{126}\} \cup \\
&\quad \{a_{135}, a_{145}, a_{146}, a_{457}, a_{2367}\}. \\
\mathcal{B}_2 &= \{a_{23}, a_{24}, a_{36}, a_{56}, a_{134}, a_{136}, a_{147}, a_{156}, a_{234}, a_{236}, a_{245}, a_{246}, a_{256}, a_{346}, a_{467}, a_{567}\}. \\
\mathcal{B}_3 &= \{a_{123}, a_{124}, a_{137}, a_{157}, a_{167}, a_{247}, a_{345}, a_{356}, a_{357}, a_{456}, a_{1567}\}. \\
\mathcal{B}_4 &= \{a_{267}, a_{1456}\}. \\
\mathcal{B}_5 &= \{a_{235}, a_{257}, a_{347}, a_{1347}, a_{2345}, a_{2356}, a_{4567}\}. \\
\mathcal{B}_6 &= \{a_{127}, a_{367}, a_{1236}, a_{1246}, a_{1247}, a_{1267}, a_{1345}, a_{1346}, a_{1356}, a_{1357}, a_{1367}, a_{1457}, a_{1467}\} \cup \\
&\quad \{a_{2456}, a_{2467}, a_{3456}, a_{3567}, a_{12467}, a_{13456}, a_{13567}, a_{14567}\}. \\
\mathcal{B}_7 &= \{a_{125}, a_{1234}, a_{1235}, a_{1245}, a_{1256}, a_{1257}, a_{2346}, a_{2567}, a_{3457}, a_{12345}, a_{12346}, a_{12356}\} \cup \\
&\quad \{a_{12456}, a_{12567}, a_{23456}, a_{123456}\}. \\
\mathcal{B}_8 &= \{a_{237}, a_{1237}, a_{2347}, a_{2457}, a_{12347}\}. \\
\mathcal{B}_9 &= \{a_{2357}, a_{3467}, a_{12357}, a_{12457}, a_{23457}, a_{24567}, a_{34567}, a_{124567}\}. \\
\mathcal{B}_{10} &= \{a_{12367}, a_{13457}, a_{13467}, a_{23467}, a_{23567}, a_{123457}, a_{123467}, a_{123567}, a_{134567}, a_{234567}\} \cup \\
&\quad \{a_{1234567}\}.
\end{aligned}$$

La capacité μ est définie comme dans la preuve de la Proposition 2.4.2.

$$\text{Pour tout } S \subseteq N, 14^{17}\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ 14^\ell, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, 9\} \\ 14^{17}, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_{10}. \end{cases}$$

La capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ est explicitement donnée aux Tableaux D.3 et D.4 (Pages 148 – 149 en annexes).

- **Interaction négative possible pour notre ensemble stratégique N_s .**

À l'aide de nos modèles de programmation linéaire (voir Chapitre 2, Section 2.5), nous exhibons une capacité pour laquelle l'interaction négative ($I_{N_s}^\mu = -0.19$) est possible pour notre ensemble stratégique N_s , donc cette dépendance linéaire entre ces critères peut aussi être captée dans le sens négatif. C'est-à-dire, il n'est pas intéressant, pour ces aliments, d'être simultanément satisfaisants pour l'énergie, le sucre, les acides gras saturés, les protéines et les fibres. Une telle capacité est donnée aux Tableaux D.5 et D.6 (Pages 150 – 151 en annexes).

- **Interaction nulle possible pour notre ensemble stratégique N_s .**

Nous allons à présent aborder le problème sous un tout autre angle. Ici, il est question d'illustrer que l'interaction est possiblement nulle (au sens de l'indice de Shapley) pour notre sous-ensemble stratégique N_s .

L'énergie étant linéairement dépendante du sucre, des acides gras saturés, des protéines et des fibres, on devrait s'attendre, pour ces critères, à obtenir une dépendance nécessaire, c'est-à-dire, une dépendance impossible, quelque soient les préférences fournies et la capacité représentative exhibée. Par contre, nous illustrons ici que cette dépendance est possible. En effet, les Tableaux D.7 et D.8 (Pages 152 – 153 en annexes) donnent une capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{N_s}^\mu = 0$. Ceci implique que l'indice de Shapley ne capte pas nécessairement l'interaction.

5.4.2.4 Étude du degré de non additivité pour notre ensemble stratégique N_s

L'information $\{P, I\}$ vérifie $\text{non}(a_0 TC_{M \cup I} a_i)$ pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$ et $i \in A$. Il résulte de la Proposition 3.2.1 du Chapitre 3 qu'il est possible de modéliser $\{P, I\}$ par un modèle de Choquet pour lequel les indices de non additivité sont tous strictement négatifs. En particulier, le degré de non additivité est négatif pour N_s . Utilisons la partition :

$$\mathcal{B}_0 = \{a_0\}.$$

$$\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{14}, a_{34}\}.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{a_5, a_6, a_7, a_{13}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{35}, a_{37}, a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{57}, a_{67}, a_{126}, a_{135}\} \cup \{a_{145}, a_{146}, a_{457}, a_{2367}\}.$$

$$\mathcal{B}_3 = \{a_{23}, a_{24}, a_{36}, a_{56}, a_{134}, a_{136}, a_{147}, a_{156}, a_{234}, a_{236}, a_{245}, a_{246}, a_{256}, a_{346}, a_{467}, a_{567}\}.$$

$$\mathcal{B}_4 = \{a_{123}, a_{124}, a_{137}, a_{157}, a_{167}, a_{247}, a_{345}, a_{356}, a_{357}, a_{456}, a_{1567}\}.$$

$$\mathcal{B}_5 = \{a_{267}, a_{1456}\}.$$

$$\mathcal{B}_6 = \{a_{235}, a_{257}, a_{347}, a_{1347}, a_{2345}, a_{2356}, a_{4567}\}.$$

$$\mathcal{B}_7 = \{a_{127}, a_{367}, a_{1236}, a_{1246}, a_{1247}, a_{1267}, a_{1345}, a_{1346}, a_{1356}, a_{1357}, a_{1367}, a_{1457}, a_{1467}, a_{2456}\} \cup \{a_{2467}, a_{3456}, a_{3567}, a_{12467}, a_{13456}, a_{13567}, a_{14567}\}.$$

$$\mathcal{B}_8 = \{a_{125}, a_{1234}, a_{1235}, a_{1245}, a_{1256}, a_{1257}, a_{2346}, a_{2567}, a_{3457}, a_{12345}, a_{12346}, a_{12356}, a_{12456}\} \cup \{a_{12567}, a_{23456}, a_{123456}\}.$$

$$\mathcal{B}_9 = \{a_{237}, a_{1237}, a_{2347}, a_{2457}, a_{12347}\}.$$

$$\mathcal{B}_{10} = \{a_{2357}, a_{3467}, a_{12357}, a_{12457}, a_{23457}, a_{24567}, a_{34567}, a_{124567}\}.$$

$$\mathcal{B}_{11} = \{a_{12367}, a_{13457}, a_{13467}, a_{23467}, a_{23567}, a_{123457}, a_{123467}, a_{123567}, a_{134567}, a_{234567}, a_{1234567}\}.$$

Définissons la capacité μ telle dans la preuve de la Proposition 3.2.1 du Chapitre 3. Pour

$$\text{tout } S \subseteq N, \mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ \frac{\ell+1}{\ell+2}, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, 10\} \\ 1, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_{11} \end{cases}$$

La capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ est explicitement donnée aux Tableaux D.9 et D.10 (Pages 154 – 155 en annexes). Nous avons arrondi à 10^{-2} près.

L'information $\{P, I\}$ est telle que la propriété A –MOPI est satisfaite pour tout $A \subseteq_{\geq 2} N$. Il résulte de la Proposition 3.2.3 du Chapitre 3 qu'il est possible de modéliser $\{P, I\}$ par un modèle de Choquet pour lequel les indices de non additivité sont tous positifs ou nuls. En particulier, le degré de non additivité de A_s est positif ou nul. Nous utilisons la partition :

$$\mathcal{B}_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{34}, a_{134}\}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{a_5, a_7, a_{37}\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{a_{57}, a_6, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{35}, a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{145}, a_{146}, a_{147}\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{a_{23}, a_{67}\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{a_{24}, a_{36}, a_{56}, a_{126}, a_{135}, a_{136}, a_{156}, a_{234}, a_{236}, a_{245}, a_{246}, a_{256}, a_{346}, a_{347}, a_{456}, a_{457}\} \cup \{a_{567}, a_{1346}, a_{1456}\}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{a_{257}\}$$

$$\mathcal{B}_6 = \{a_{123}, a_{124}, a_{137}, a_{167}, a_{247}, a_{345}, a_{356}, a_{357}, a_{467}, a_{1234}, a_{1236}, a_{1246}, a_{1467}, a_{1567}, a_{2457}\} \cup \{a_{4567}\}$$

$$\mathcal{B}_7 = \{a_{125}, a_{127}, a_{235}, a_{267}, a_{367}, a_{1235}, a_{1245}, a_{1247}, a_{1256}, a_{1257}, a_{1345}, a_{1347}, a_{1356}, a_{2345}\} \cup \{a_{2356}, a_{2467}, a_{3456}, a_{3467}, a_{12345}, a_{12356}\}$$

$$\mathcal{B}_8 = \{a_{237}, a_{1237}, a_{1267}, a_{1357}, a_{1367}, a_{1457}, a_{2346}, a_{2347}, a_{2357}, a_{2367}, a_{2456}, a_{2567}, a_{3457}, a_{3567}\} \cup \{a_{12346}, a_{12467}, a_{13456}, a_{13567}, a_{14567}, a_{23456}\}$$

$$\mathcal{B}_9 = \{a_{12357}, a_{12456}, a_{12567}, a_{123456}\}$$

$$\mathcal{B}_{10} = \{a_{12457}, a_{23457}, a_{24567}, a_{34567}, a_{124567}\}$$

$$\mathcal{B}_{11} = \{a_{12367}, a_{13457}, a_{13467}, a_{23467}, a_{23567}, a_{123457}, a_{123467}, a_{123567}, a_{134567}, a_{234567}\}$$

Définissons la capacité μ telle dans la preuve de la Proposition 3.2.3 du Chapitre 3.

$$\text{Pour tout } S \subseteq N, 14^{11}\mu(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_0 \\ 14^\ell, & \text{si } a_S \in \mathcal{B}_\ell, \ell \in \{1, 2, \dots, 11\} \end{cases}$$

La capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ est explicitement donnée aux Tableaux D.11 et D.12 (Pages 156 – 157 en annexes).

5.5 Synthèse et perspectives

5.5.1 Synthèse

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'interaction et du degré de non-additivité entre les critères retenus dans l'évaluation du nutri-score. Il trouve son fondement sur les informations préférentielles recueillies lors d'une enquête pilote, menée auprès des étudiants de deuxième année Master MIAGE Informatique Décisionnelle (M2 MIAGE ID).

Nous avons commencé par la gestion des incohérences car les informations préférentielles recueillies contenaient des cycles stricts, ensuite nous avons modélisé ces préférences par une intégrale de Choquet. Par la suite, le but était l'étude de l'interaction et du degré de non additivité. À cet effet, nous avons judicieusement choisi un sous-ensemble que nous considérons stratégique, car l'énergie est linéairement dépendante du sucre, des acides gras saturés, des protéines et des fibres. Cette dépendance linéaire étant établie, on devrait s'attendre, pour ces critères, à obtenir une dépendance nécessaire, c'est-à-dire, une indépendance impossible, quelque soient les préférences fournies et la capacité représentative. Par contre, nous avons clairement illustré que, pour ce sous-ensemble stratégique, l'interaction et le degré de non-additivité peuvent être captés dans tous les sens (négatif, nul et positif). Cela nous conforte dans l'idée selon laquelle l'indice de Shapley ne capte pas *nécessairement* l'interaction entre critères. Cependant, les conclusions obtenues ici sont relatives aux informations préférentielles recueillies auprès des étudiants.

Cette illustration serait la même pour tout autre groupe de critères. Par suite, le signe de l'indice d'interaction ainsi que celui de l'indice de non-additivité n'est pas nécessairement robuste, dans l'ensemble des capacités compatibles avec les informations préférentielles ordinales recueillies. Par conséquent, l'interprétation de l'indice de Shapley et celui de non-

additivité requière une certaine prudence, notamment lorsqu'on recueille des préférences pour des applications concrètes.

5.5.2 Perspectives

Ce chapitre présente des limites et offre des perspectives. Nous les présentons ci-dessous.

- L'enquête pilote portait sur des aliments binaires fictifs. Nous avons choisi de procéder ainsi car ce chapitre se veut être un terrain d'application de nos résultats, et ils sont en majorité fondés sur les alternatives binaires. Nous avons décelé des limites des alternatives binaires, qui, n'auraient pas été bien comprises par les étudiants. Par conséquent, il nous semble intéressant de mener une telle étude avec des aliments réels.
- Dans ce chapitre, nous avons montré que le système nutri-score présente plusieurs limites. En particulier, le score nutritionnel est déterminé en utilisant un modèle additif, ce qui induit que tous les critères sont indépendants (au sens des préférences). En particulier, les critères *énergie*, *sucre*, *acides gras saturés*, *protéines* et *fibres* sont indépendants. Ce qui ne nous semble pas correct car la quantité d'énergie est entre autres dépendante de la quantité de sucre, d'acides gras saturés, de protéines et de fibres. Ainsi, nous envisageons construire un score nutritionnel, en utilisant un modèle incluant des interactions. La première piste est de le bâtir grâce à un modèle d'intégrale de Choquet, dans le but de mieux agréger les valeurs nutritionnelles des aliments et de capter des interactions entre critères. Pour ce futur modèle, l'interaction pour notre ensemble stratégique N_s devra être nécessaire.

Synthèse générale

Cette thèse s’inscrivait dans le champ disciplinaire de l’Aide MultiCritère à la Décision et s’intéressait en particulier aux modèles dans lesquels des phénomènes d’interaction peuvent subvenir entre critères. L’objectif était d’élucider les capacités et d’interpréter des interactions induites entre critères, dans un modèle d’intégrale de Choquet et dans un modèle d’intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2–maxitive. Pour cela, nous avons subdivisé ce travail en cinq chapitres et nous avons fait une hypothèse selon laquelle le décideur donne ses préférences sur un ensemble fini d’alternatives, contrairement au cas continu qui a été étudié par Timonin dans [103; 104].

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé des concepts de base qui ont constitué le socle de tout ce travail. Nous avons, rappelé quelques éléments de la théorie des graphes utiles dans la modélisation des préférences. Puis, nous avons exploré des modèles de représentation que nous avons ensuite utilisé pour modéliser les préférences : le modèle additif, le modèle de l’intégrale de Choquet et celui de l’intégrale de Sugeno. En outre, nous avons rappelé quelques indices utilisés dans la littérature pour capter des phénomènes d’interaction entre critères, à savoir, l’indice d’interaction de Shapley et l’indice de non-additivité. Nous avons achevé ce premier chapitre par l’introduction de la notion d’interactions et degrés de non-additivité possibles et nécessaires.

Le deuxième chapitre quant à lui étudiait la stabilité du signe de l’indice d’interaction de Shapley, dans un modèle d’intégrale de Choquet. Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous avons caractérisé les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle de l’intégrale de Choquet. Cette caractérisation était basée

sur l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous avons joint une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, nous y avons illustré et prouvé que le signe de l'indice d'interaction de Shapley dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Par conséquent, seules les interactions nécessaires peuvent être interprétées en toute sécurité, puisque leur signe est stable dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. L'interprétation des autres interactions exige donc une certaine prudence. En outre, nous avons caractérisé les informations préférentielles ordinales sur les alternatives binaires généralisées, représentables par un modèle d'intégrale de Choquet. Cette caractérisation repose sur l'absence de cycle strict dans l'ensemble de ces informations, auquel nous avons joint une relation de monotonie. Enfin, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous avons proposé un modèle de programmation linéaire permettant de tester la stabilité de l'interprétation des phénomènes d'interaction.

Au troisième chapitre, nous avons étudié la robustesse du signe de l'indice de non-additivité. Cet indice a été proposé en 2018 par Jian-Zhang Wu et Gleb Beliakov dans [113], comme un indice alternatif, qui représenterait, mieux que l'indice d'interaction de Shapley, le type de non-additivité. C'est ainsi que nous avons choisi de travailler avec ce nouvel indice. En utilisant les caractérisations de représentation du chapitre 2, nous avons obtenu beaucoup plus de résultats qu'avec l'indice d'interaction de Shapley, dans un modèle utilisant une intégrale de Choquet. En particulier, nous avons répondu aux questions de dualité restées ouvertes au chapitre précédent, avec l'indice d'interaction de Shapley. En effet, comme au chapitre précédent, nous avons prouvé et illustré que le signe du degré de non-additivité dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités compatibles avec les préférences du décideur. Son interprétation impose donc aussi une prudence. Comme au chapitre précédent, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous avons proposé un modèle de programmation linéaire permettant de tester l'existence de certains degrés de non-additivité nécessaires.

Quant au quatrième chapitre, nous y avons proposé un indice d'interaction et avons étu-

dié la notion d'interaction entre deux critères, dans un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous avons caractérisé les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle d'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Cette caractérisation était également basée sur l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous avons joint une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, à la lumière de certains arguments, nous avons proposé un indice d'interaction entre critères, dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive. Cet indice ne tient pas compte des interactions négatives. Comme aux chapitres précédents, nous avons prouvé et illustré que le signe de cet indice d'interaction dépend du choix arbitraire d'une capacité dans l'ensemble de toutes les capacités 2-maxitives compatibles avec l'information préférentielle ordinale recueillie. Ce qui impose donc aussi une prudence dans l'interprétation de l'interaction. En outre, grâce à la linéarisation des fonctions min et max, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, comme aux chapitres précédents, nous proposons un modèle de programmation linéaire *mixte* permettant de tester si l'interprétation des indices d'interaction est ambivalente ou non.

Le dernier chapitre quant à lui était consacré à l'étude de l'interaction (avec l'indice de Shapley) et du degré de non-additivité entre les critères retenus dans l'évaluation du nutri-score. Nous avons choisi un sous-ensemble que nous avons considéré stratégique, pour lequel la dépendance linéaire est établie. Par contre, nous avons clairement illustré que, pour ce sous-ensemble stratégique, l'interaction peut être captée dans tous les sens (négatif, nul et positif). Cela nous a permis de déduire que l'indice de Shapley ne capte pas *nécessairement* l'interaction entre critères. Notons cependant que cette conclusion est relative aux informations préférentielles recueillies auprès des étudiants.

Perspectives

Au terme de ce travail, nous proposons les pistes de réflexions et d'améliorations suivantes. Certaines de ces pistes ont déjà été évoquées à la fin des chapitres.

- Tout au long de cette thèse, nous travaillons le plus souvent avec les alternatives binaires car elles nous permettent d'obtenir plus de résultats et sont compréhensibles par le décideur. Mais ces alternatives sont rarement réelles, mais sont plutôt le plus souvent fictives. Dans nos futurs travaux de recherche, nous nous attellerons à une étude axiomatique sur l'ensemble de toutes les alternatives X . En particulier, sur l'enquête pilote, nous allons nous fonder sur des aliments réels pour mener des travaux relatifs au nutri-score.
- Sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées, lorsque l'information préférentielle ordinaire du décideur ne contient aucune relation d'indifférence, nous montrons qu'obtenir une interaction positive, simultanément pour tous les groupes de critères, est possible. Le problème dual (relatif aux interactions négatives) a déjà attiré notre attention, nous n'avons pas une solution à portée de main, mais continuerons à nous y intéresser.
- Dans cette thèse, notre travail se fonde sur les alternatives binaires, avec deux niveaux de références : le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i . Nous envisageons faire un travail similaire, avec un modèle d'intégrale de Choquet bipolaire (à partir d'une bi-capacité) se fondant sur les alternatives ternaires, avec trois niveaux de références : le niveau mauvais -1_i , le niveau neutre 0_i et le niveau bon 1_i , pour chaque critère i .

- Sur l'ensemble des alternatives binaires généralisées, lorsque l'information préférentielle ordinaire du décideur contient au moins une relation d'indifférence, nous montrons qu'obtenir une interaction positive, simultanément pour tous les groupes de critères, est possible, à une condition nécessaire et suffisante que nous donnons. Par contre, notre condition ne tient que pour des cas où le nombre de critères ne dépasse pas cinq. Notre intuition est que cette condition tient toujours, quelque soit le nombre de critères. Nous allons davantage creuser pour généraliser les preuves des cas particuliers $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, au cas $n \geq 6$.
- Nous avons une intuition selon laquelle l'interaction nécessaire ne peut jamais se produire si les seules informations recueillies du décideur sont des préférences ordinaires. Nous envisageons de baliser des contours pour obtenir une interaction nécessaire. Pour cela, faudra-t-il recueillir des informations cardinales supplémentaires avec des *intensités de préférences* ?
- Dans le cas où l'information préférentielle ordinaire du décideur peut contenir une indifférence, nous avons montré que la condition A -MOPI est suffisante pour rendre non nécessaire le degré de non-additivité négatif pour la coalition de critères A . Une condition que nous n'avons pas au Chapitre 2, mais qui nous semble très "forte" car il n'est pas rare que le décideur préfère strictement une alternative a_A à une autre $a_{A \setminus B}$, mais qu'il préfère aussi strictement a_B à a_\emptyset . Il sera donc intéressant pour nous d'affaiblir certaines de nos conditions, en particulier A -MOPI.
- Dans le cas où l'information préférentielle ordinaire du décideur peut contenir une indifférence, à la Proposition 3.2.1 (respectivement 3.2.4), nous donnons une condition suffisante pour obtenir un degré de non-additivité négatif (respectivement positif). Nous avons ensuite prouvé aux Propositions 3.2.2 et 3.2.5 que chacune de ces conditions devient nécessaire pour les paires de critères. Nous envisageons étendre ces résultats pour les coalitions de plus de deux critères.
- Le chapitre 4, sur les interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant l'intégrale de Sugeno avec une capacité 2-maxitive, se consacre uniquement au cas

où l'information préférentielle ordinaire du décideur ne contient aucune indifférence. Dans nos futurs travaux de recherche, nous allons étudier le cas général, avec des éventuelles relations d'indifférence. Nous savons à priori que certains résultats précédents ne seront plus valides. En particulier, celui induisant les synergies positives pour toutes les paires de critères. En effet, si le décideur est par exemple indifférent entre les alternatives a_1 et a_{12} , alors les critères 1 et 2 ne pourront plus être en synergie positive car $\bar{I}_{12}^\mu = 0$ pour toute capacité $\mu \in S_{2\text{-max}}$.

- Au Chapitre 4, sur les interactions possibles et nécessaires dans un modèle utilisant l'intégrale de Sugeno avec une capacité 2-maxitive, nous avons proposé, à la lumière de certains arguments, un indice pouvant capter les phénomènes d'interactions dans un modèle de l'intégrale de Sugeno utilisant une capacité 2-maxitive. Dans nos futurs travaux de recherche, nous allons nous intéresser au cas d'un modèle de l'intégrale de Sugeno, utilisant une capacité k -maxitive, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.
- Au dernier chapitre, nous avons montré que le système nutri-score présente plusieurs limites. En particulier, le score nutritionnel peut être déterminé en utilisant un modèle additif, ce qui implique que tous les critères sont indépendants (au sens des préférences). En particulier, les critères *énergie*, *sucre*, *acides gras saturés*, *protéines* et *fibres* sont indépendants. Ce qui ne nous semble pas correct car la quantité d'énergie est entre autres dépendante de la quantité de sucre, d'acides gras saturés, de protéines et de fibres. Ainsi, nous envisageons construire un score nutritionnel, en utilisant un modèle incluant des interactions nécessaires. La première piste est de le bâtir grâce à un modèle d'intégrale de Choquet, dans le but de mieux agréger les valeurs nutritionnelles des aliments et de capter des interactions entre critères.

Formulaire d'enquête

Dans le cadre d'une partie de mes travaux de thèse, je vous serai gré de répondre à ce formulaire relatif au nutri score.

1. Avez-vous déjà entendu parler du nutri score d'un aliment ?
 OUI NON
2. Avez-vous une idée sur la détermination du nutri score d'un aliment ?
 AUCUNE IDÉE J'AI UNE IDÉE JE CONNAIS LA FORMULE
3. Achetez-vous des aliments sur la base du nutri score ?
 JAMAIS SOUVENT TRÈS SOUVENT TOUJOURS

Pour classer chaque aliment, le nutri score prend en compte sept critères. Pour 100g de l'aliment, il s'agit de la teneur en :

- Energie(1), sucre(2), acides gras saturés(3), sodium(4) (nutriments à limiter).
- Fruits et légumes(5), fibres(6), protéines(7) (aliments à favoriser).

Un aliment fictif a_S est jugé bon sur l'ensemble des critères de S et mauvais pour les autres. Par exemple, l'aliment a_{246} est jugé bon pour sa teneur en sucre, en sodium et celle en fibres, mais mauvais pour les autres critères. En particulier, l'aliment a_0 est mauvais sur tous les critères et l'aliment $a_{1234567}$ est bon sur tous les critères.

Veillez remplir le tableau suivant en suivant la consigne : étant donnés deux aliments fictifs a_S et a_T , vous pouvez soit être indifférent entre les deux ($a_S I a_T$), soit estimer a_S meilleur que a_T ($a_S P a_T$), ou bien estimer a_T meilleur que a_S ($a_T P a_S$), ou alors ne pas pouvoir les comparer et laisser la case vide.

Préférences des étudiants

↗	a_0	a_1	a_2	a_5	a_{12}	a_{16}	a_{17}
a_0	\	P	P		P		
a_1		\	I		P		
a_2			\	.	I		
a_5	P	P	P	\	P	I	
a_{12}		.	I		\	J	J
a_{16}	P	P	P	.	P	\	I
a_{17}	P	P	P	.	P	I	\

FIGURE B.1 – Étudiant₁

↗	a_3	a_4	a_6	a_7	a_{13}	a_{27}	a_{56}
a_3	\	I	P	P	P		
a_4	I	\			P		
a_6	P	P	\	I	P		
a_7	P	P		\	P		
a_{13}					\		
a_{27}	P	P				\	
a_{56}	P	P	P	P	P	P	\

FIGURE B.2 – Étudiant₂

↗	a_{14}	a_{15}	a_{67}	a_{25}	a_{34}	a_{35}	a_{45}
a_{14}	\	P	.	.	P	.	.
a_{15}	P	\	P
a_{67}	P	P	\	I	P	J	.
a_{25}	P	P		\	P	P	P
a_{34}	.	.	P		\	.	.
a_{35}	P	P		P		\	.
a_{45}	P	P	.	.	J	P	\

FIGURE B.3 – Étudiant₃

↗	a_{47}	a_{123}	a_{124}	a_{125}	a_{567}	a_{1567}	a_{256}
a_{47}	\						
a_{123}	P	\	I		P	I	P
a_{124}	P	I	\		P	I	P
a_{125}	P	P	P	\	P	P	P
a_{567}	P				\		
a_{1567}	P	I	I		P	\	P
a_{256}	P						\

FIGURE B.4 – Étudiant₄

	a_{23}	a_{24}	a_{26}	a_{36}	a_{37}	a_{46}	a_{57}
a_{23}		P	P	P	P	P	P
a_{24}	P		P	P	P	P	P
a_{26}	P	P		P	P	P	P
a_{36}	P	P	P		P	P	P
a_{37}	P	P	P	P		P	P
a_{46}	P	P	P	P	P		P
a_{57}	P	P	P	P	P	P	

FIGURE B.5 – Étudiant₅

	a_{125}	a_{127}	a_{134}	a_{156}	a_{157}	a_{257}	a_{2567}
a_{126}	X		P	P	P		
a_{127}	P	X	P	P	P	P	
a_{134}			X	P			
a_{156}	P			X			
a_{157}	P		P	P	X	P	
a_{257}	P		P	P	P	X	
a_{2567}	P	P	P	P	P	P	X

FIGURE B.6 – Étudiant₆

	a_{234}	a_{236}	a_{237}	a_{245}	a_{345}	a_{346}	a_{347}
a_{234}		I			I		
a_{236}				I			
a_{237}	P	P		P	P	P	P
a_{245}	P						
a_{345}		P		P		P	
a_{346}	P	P		P			
a_{347}	P	P		P	P	P	

FIGURE B.7 – Étudiant₇

	a_{145}	a_{146}	a_{147}	a_{456}	a_{457}	a_{467}	a_{167}
a_{145}		P					
a_{146}	P						
a_{147}	P	P					
a_{456}	P	P	P				
a_{457}	P	P	P	P			
a_{467}	P	P	P	P	P		
a_{167}	P	P	P	P	P	P	

FIGURE B.8 – Étudiant₈

	a_{135}	a_{136}	a_{137}	a_{267}	a_{356}	a_{357}	a_{235}
a_{135}		J		J	J	J	J
a_{136}							
a_{137}	P	P		J	P		
a_{267}			P			P	
a_{356}		P	P	P			
a_{357}	P	P	J	J	J		
a_{235}	P	J	P	J	P	P	

FIGURE B.9 – Étudiant₉

	a_{246}	a_{247}	a_{367}	a_{1245}	a_{1237}	a_{2346}	a_{3456}
a_{246}							
a_{247}	P						
a_{367}	P	P		P			I
a_{1245}	P	P				J	J
a_{1237}	P	P	P	P		P	J P
a_{2346}	P	P	P	J			P
a_{3456}	P	P	I	J			

FIGURE B.10 – Étudiant₁₀

↗	a_{1367}	a_{2356}	a_{2345}	a_{1347}	a_{1267}	a_{2456}	a_{3567}
a_{1367}		P	P	P	I	P	P
a_{2356}			P	P			
a_{2345}				P			
a_{1347}		P					
a_{1267}				P	P	P	I
a_{2456}	P	P	P	P	P		I
a_{3567}		P	P	P			

FIGURE B.11 – Étudiant₁₁

↗	a_{4567}	a_{1456}	a_{1356}	a_{1247}	a_{2367}	a_{2347}	a_{2467}
a_{4567}		P					
a_{1456}							
a_{1356}	P	P		I			
a_{1247}	P	P					
a_{2367}	P	P	P	P			
a_{2347}	P	P	P				P
a_{2467}	P	P	P				

FIGURE B.12 – Étudiant₁₂

↗	a_{1467}	a_{2357}	a_{1357}	a_{1246}	a_{1257}	a_{1234}	a_{1235}
a_{1467}		I	.	.	.	P	P
a_{2357}	P		I	P	.	P	*
a_{1357}	J	P		A	P	.	.
a_{1246}	P	.	.		I	.	.
a_{1257}	P	P	.	P	J	.	.
a_{1234}	.	.	P	P	P	I	P
a_{1235}	.	P	P	P	I	.	I

FIGURE B.13 – Étudiant₁₃

↗	a_{3467}	a_{3457}	a_{1256}	a_{1346}	a_{2457}	a_{1457}	a_{1345}
a_{3467}		I	P	P	P	P	P
a_{3457}			I	P			P
a_{1256}	P			I	P	P	P
a_{1346}	I	P	P		P	P	P
a_{2457}		P	P	J			P
a_{1457}	I	P		I	P	I	P
a_{1345}	I	J	J	P	P	I	I

FIGURE B.14 – Étudiant₁₄

↗	a_{1236}	a_{12345}	a_{12346}	a_{12347}	a_{34567}	a_{23567}	a_{24567}
a_{1236}		I	-	-	-	-	-
a_{12345}	P		I	J	-	-	-
a_{12346}	P	.		I	-	-	-
a_{12347}	P	P	J		I	-	-
a_{34567}	P	P	P	P		I	P
a_{23567}	P	P	P	P	P		I
a_{24567}	P	P	P	P	-	-	

FIGURE B.15 – Étudiant₁₅

↗	a_{23457}	a_{12456}	a_{13467}	a_{12467}	a_{14567}	a_{13457}
a_{23457}		X	X	X	X	X
a_{12456}	X		X	X	X	X
a_{13467}	P	I		X	P	P
a_{12467}	X	X	P		I	X
a_{14567}	X	X	X	X		X
a_{13457}	P	P	X	P	P	

FIGURE B.16 – Étudiant₁₆

↗	a_{23456}	a_{23467}	a_{13456}	a_{12567}	a_{12457}	a_{12367}
a_{23456}		I	P	P		
a_{23467}	I					
a_{13456}		J				
a_{12567}	P	P	P			
a_{12457}	P	P	P	P		
a_{12367}	P	P	P	P	P	

FIGURE B.17 – Étudiant₁₇

↗	a_{12457}	a_{13567}	a_{123456}	a_{123457}	a_{123467}	a_{123567}	a_{124567}
a_{12457}		P	P
a_{13567}
a_{123456}	.	P	
a_{123457}	P	P	P				P
a_{123467}	P	P	P	.			P
a_{123567}	P	P	P	.	.		P
a_{124567}	P	P		.	.	.	

FIGURE B.18 – Étudiant₁₈

↗	a_{12357}	a_{134567}	a_{234567}	$a_{1234567}$
a_{12357}			P	
a_{134567}	P			
a_{234567}	P			
$a_{1234567}$				

FIGURE B.19 – Étudiant₁₉

Points nutritionnels et fonctions d'utilités marginales

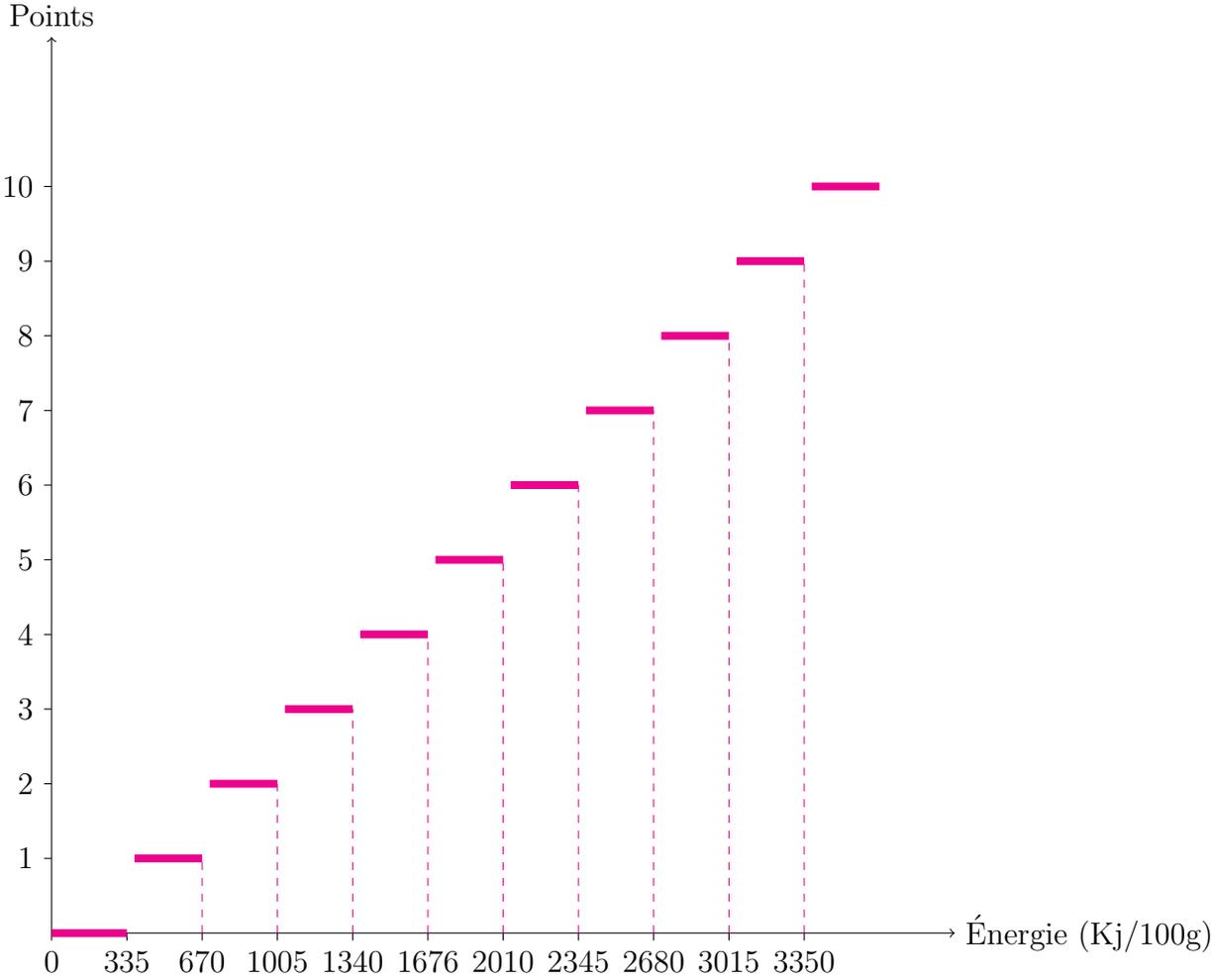


FIGURE C.1 – Points obtenus par un aliment sur la composante énergie

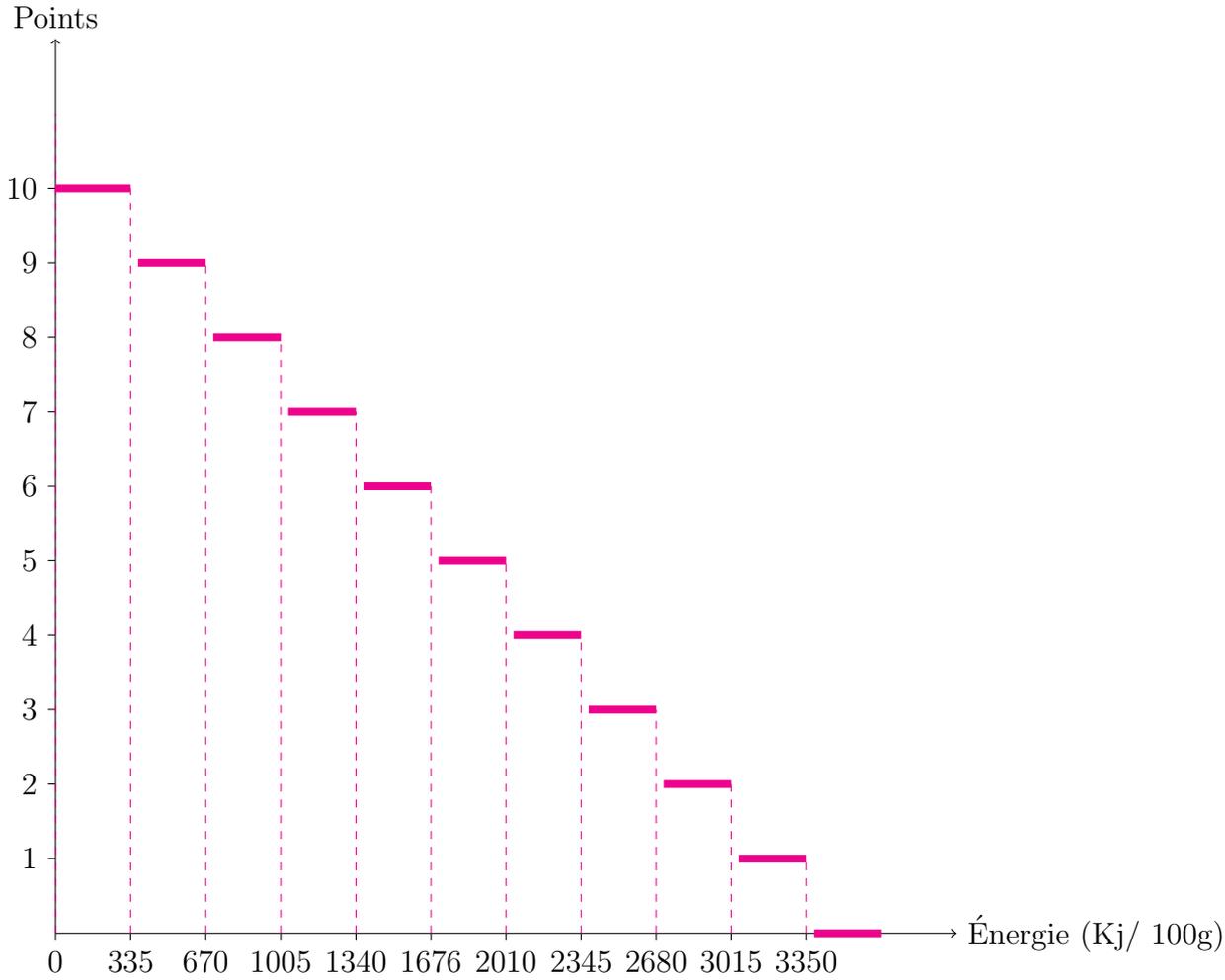


FIGURE C.2 – Fonction d'utilité marginale u_1

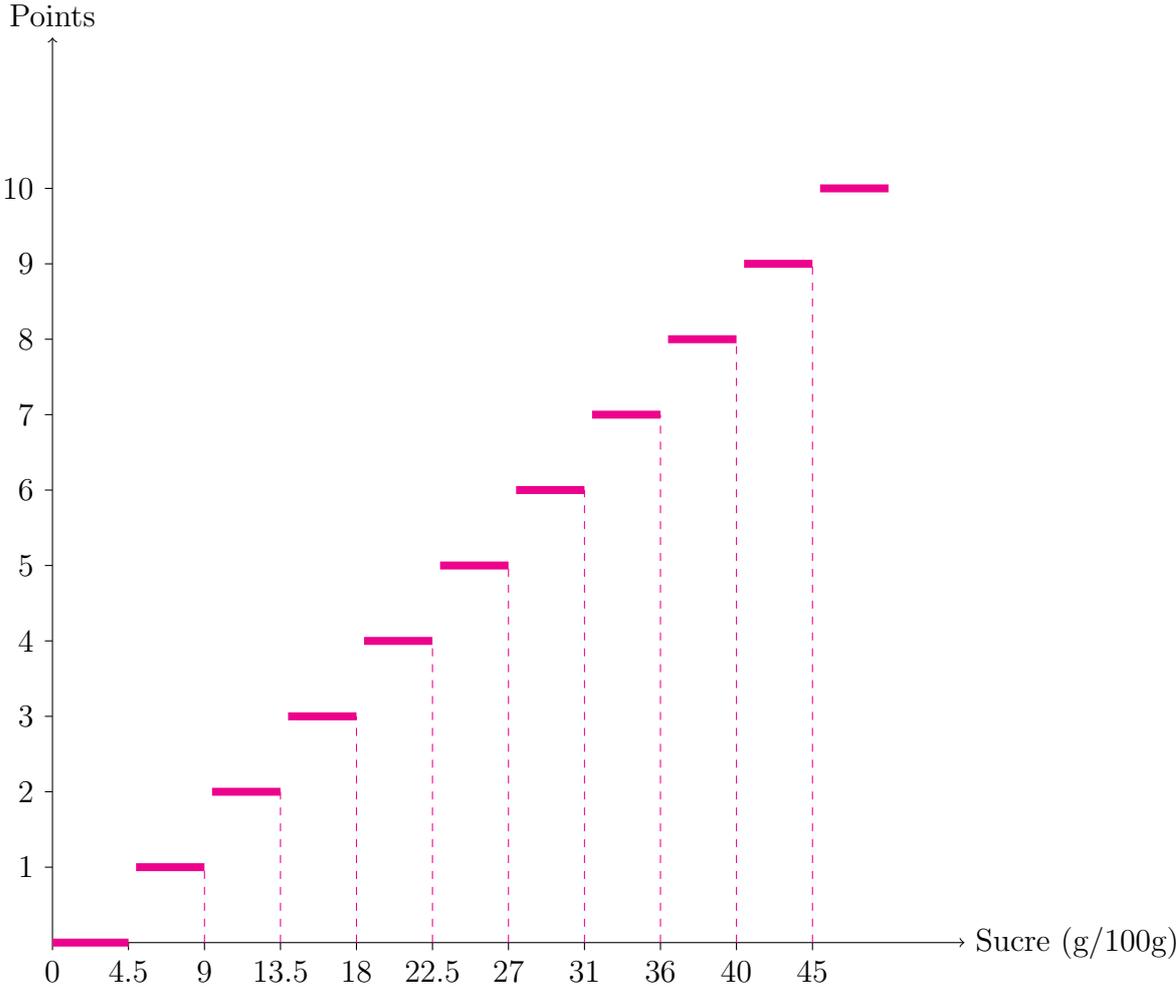


FIGURE C.3 – Points obtenus par un aliment pour la composante sucre

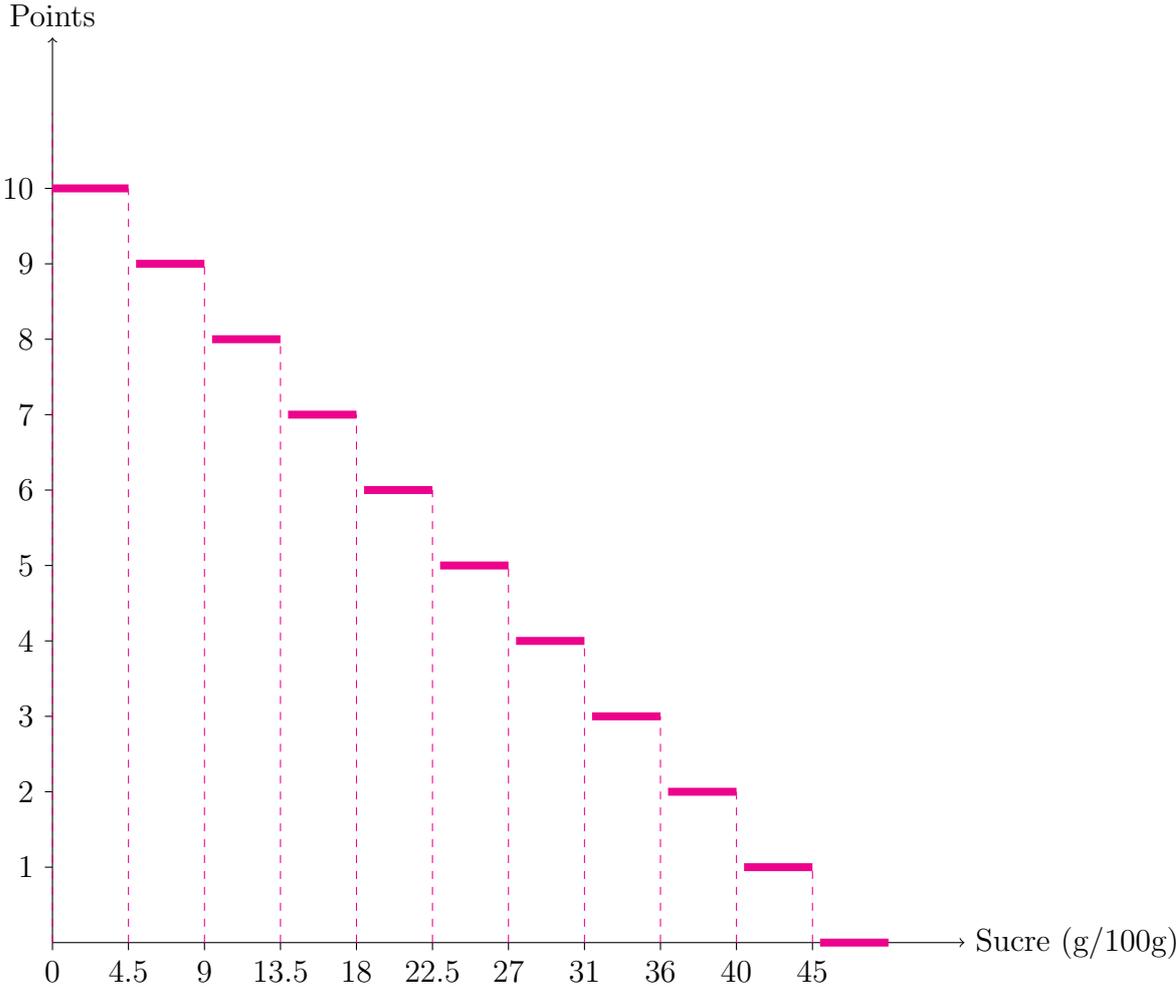


FIGURE C.4 – Fonction d'utilité marginale u_2

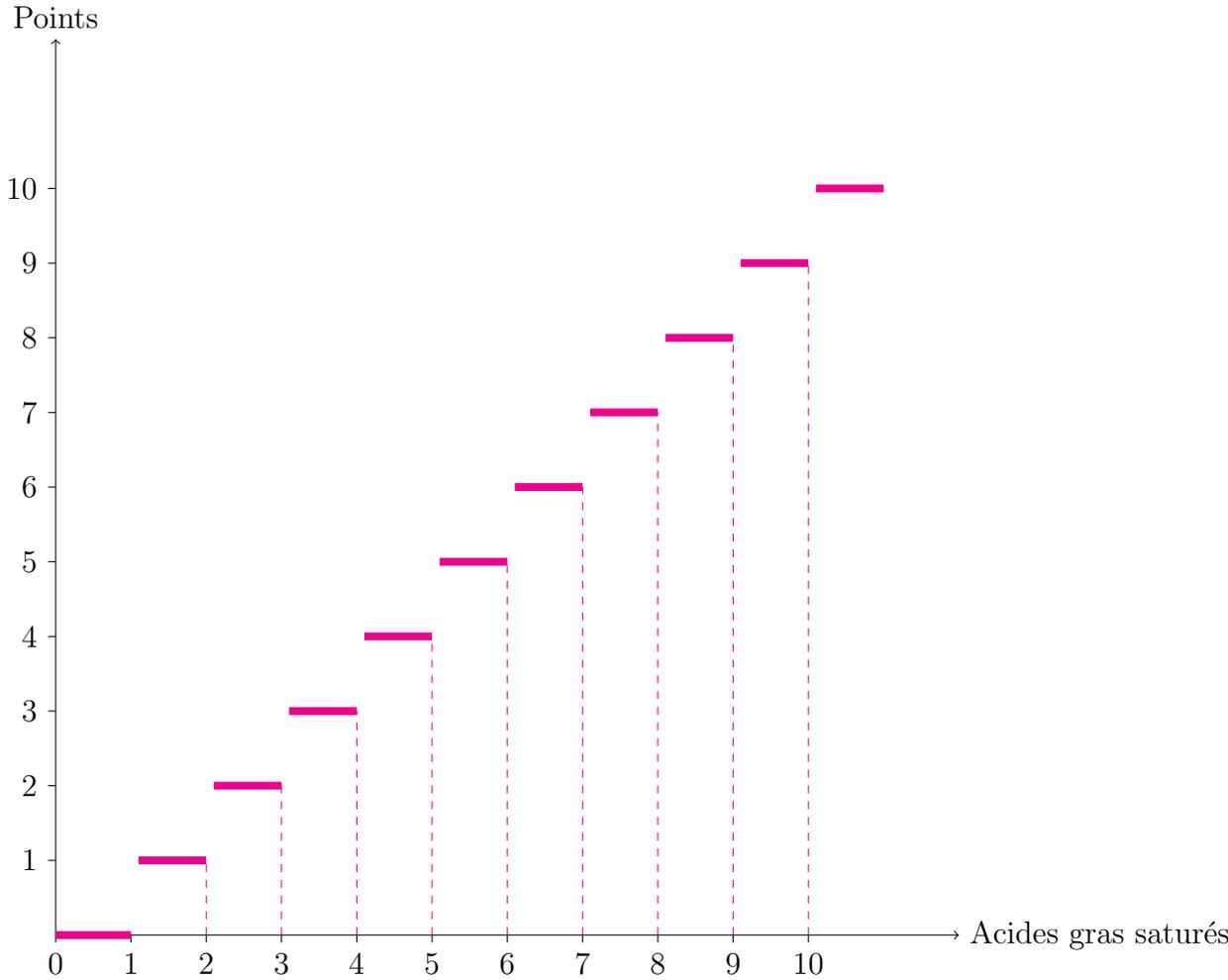


FIGURE C.5 – Points obtenus par un aliment pour la composante acides gras saturés

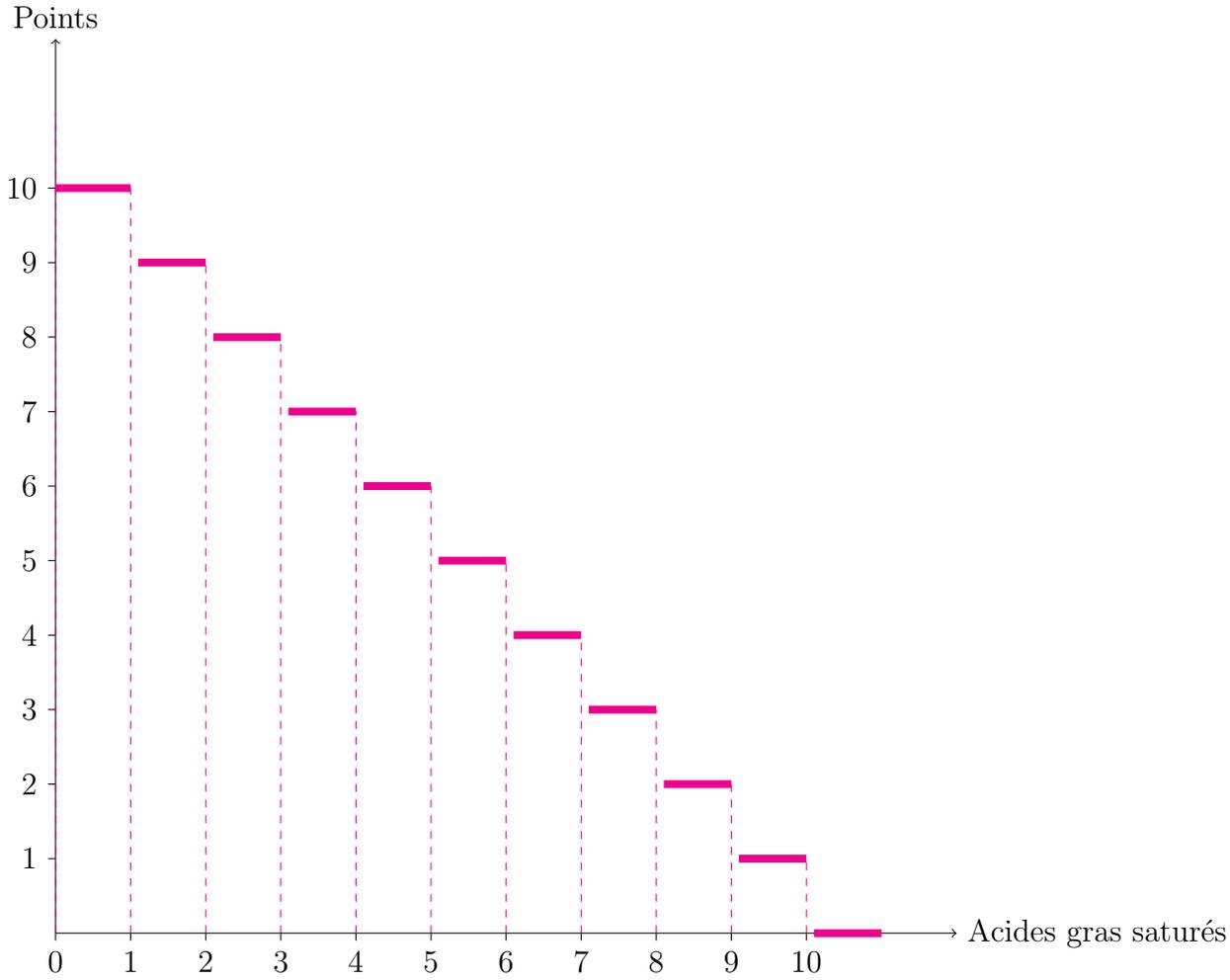


FIGURE C.6 – Fonction d'utilité marginale u_3

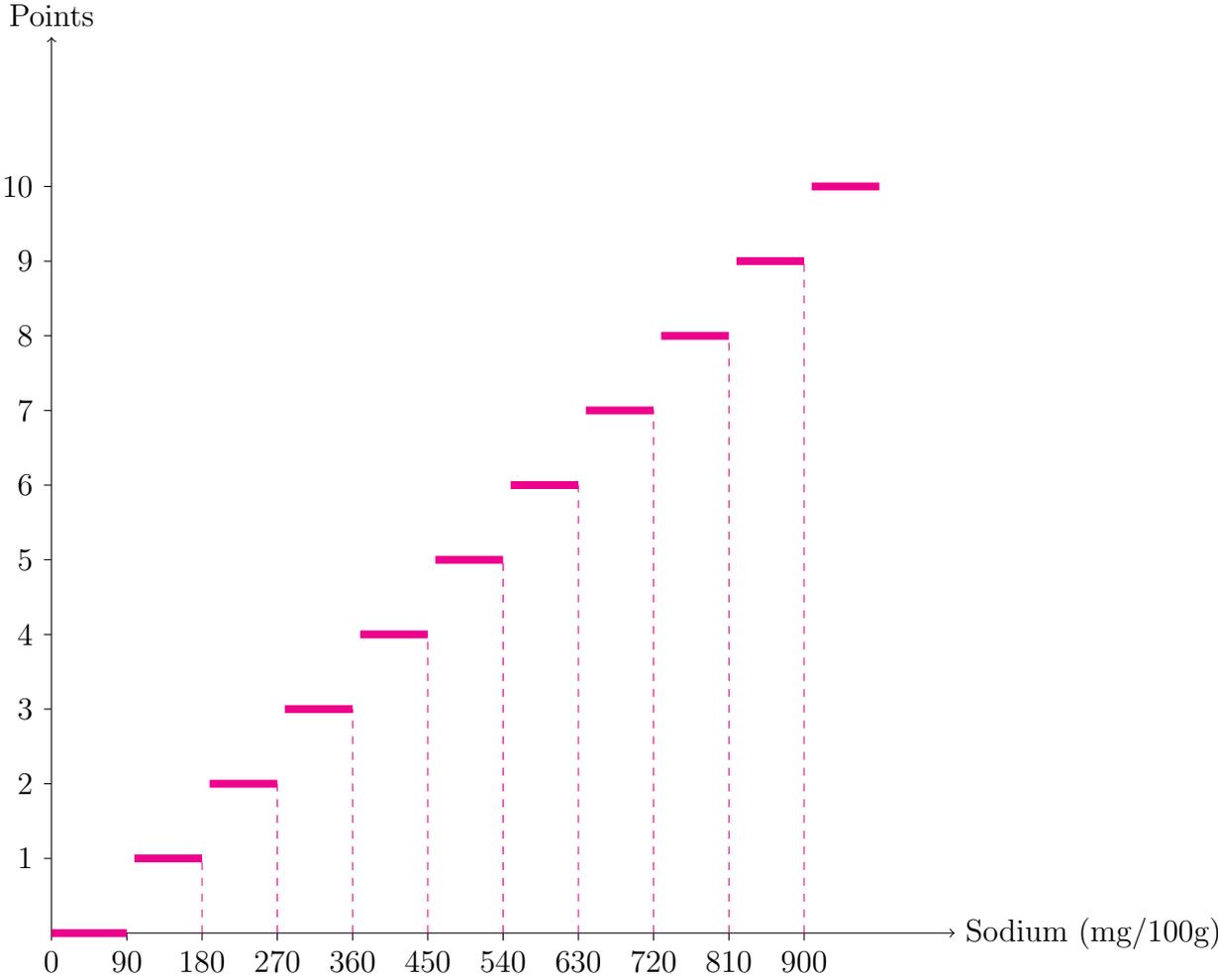


FIGURE C.7 – Points obtenus par un aliment pour la composante sodium

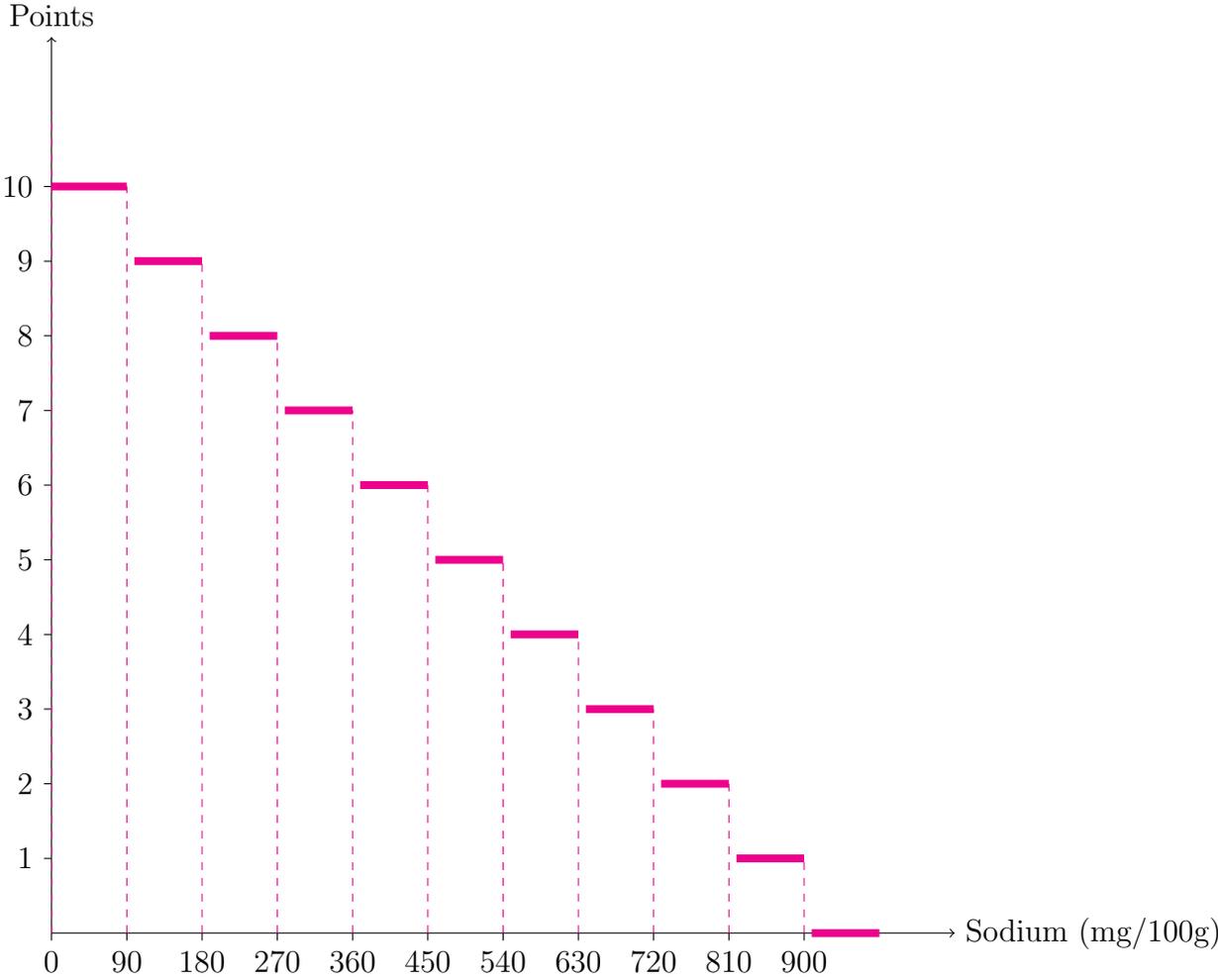


FIGURE C.8 – Fonction d'utilité marginale u_4

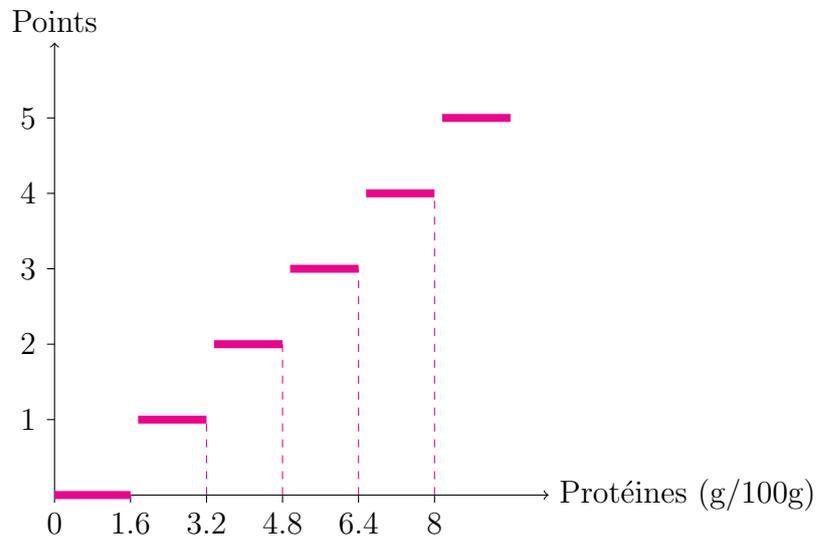
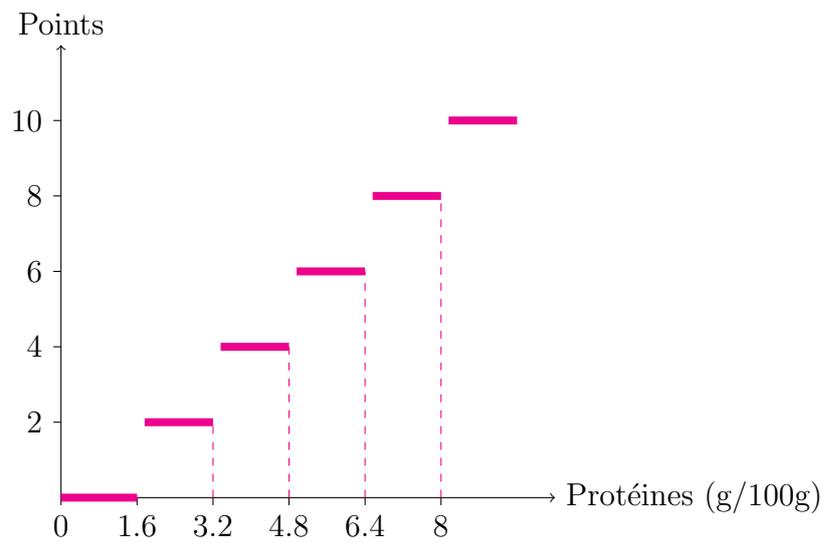


FIGURE C.9 – Points obtenus par un aliment pour la composante protéines

FIGURE C.10 – Fonction d'utilité marginale u_5

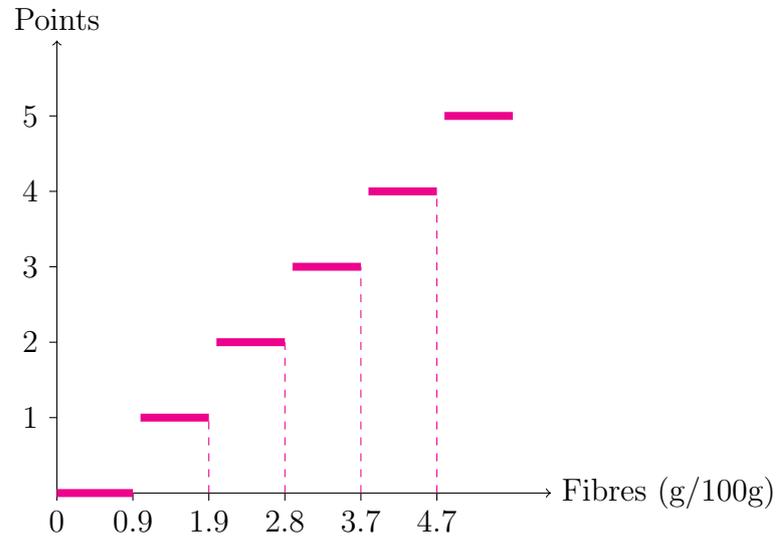
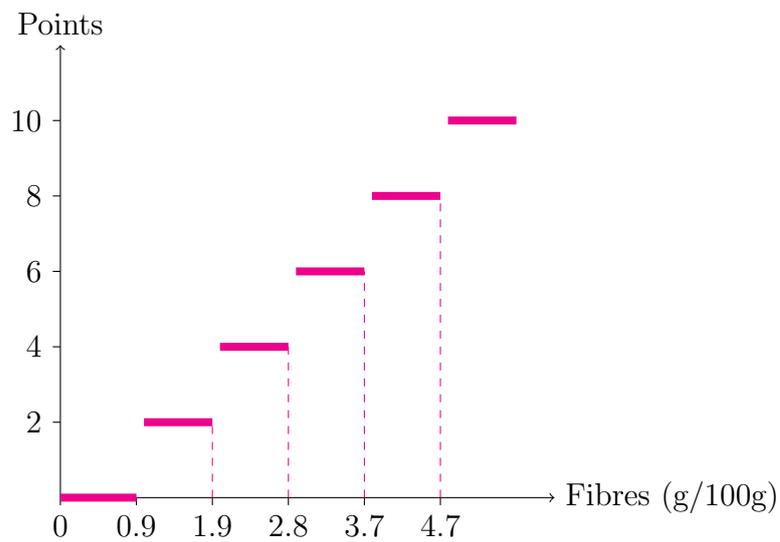


FIGURE C.11 – Points obtenus par un aliment sur la composante fibres

FIGURE C.12 – Fonction d'utilité marginale u_6

Différents tableaux de capacités

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1}	0	{3, 7}	0.1	{1, 6, 7}	0.3
{2}	0	{4, 5}	0.1	{2, 3, 4}	0.2
{3}	0	{4, 6}	0.1	{2, 3, 5}	0.5
{4}	0	{4, 7}	0.1	{2, 3, 6}	0.2
{5}	0.1	{5, 6}	0.2	{2, 3, 7}	0.8
{6}	0.1	{5, 7}	0.1	{2, 4, 5}	0.2
{7}	0.1	{6, 7}	0.1	{2, 4, 6}	0.2
{1, 2}	0	{1, 2, 3}	0.3	{2, 4, 7}	0.3
{1, 3}	0.1	{1, 2, 4}	0.3	{2, 5, 6}	0.2
{1, 4}	0	{1, 2, 5}	0.7	{2, 5, 7}	0.5
{1, 5}	0.1	{1, 2, 6}	0.1	{2, 6, 7}	0.4
{1, 6}	0.1	{1, 2, 7}	0.6	{3, 4, 5}	0.3
{1, 7}	0.1	{1, 3, 4}	0.2	{3, 4, 6}	0.2
{2, 3}	0.2	{1, 3, 5}	0.1	{3, 4, 7}	0.5
{2, 4}	0.2	{1, 3, 6}	0.2	{3, 5, 6}	0.3
{2, 5}	0.1	{1, 3, 7}	0.3	{3, 5, 7}	0.3
{2, 6}	0.1	{1, 4, 5}	0.1	{3, 6, 7}	0.6
{2, 7}	0.1	{1, 4, 6}	0.1	{4, 5, 6}	0.3
{3, 4}	0	{1, 4, 7}	0.2	{4, 5, 7}	0.1
{3, 5}	0.1	{1, 5, 6}	0.2	{4, 6, 7}	0.2
{3, 6}	0.2	{1, 5, 7}	0.3	{5, 6, 7}	0.2

TABLEAU D.1 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1, 2, 3, 4}	0.7	{2, 3, 4, 6}	0.7	{1, 2, 4, 5, 7}	0.9
{1, 2, 3, 5}	0.7	{2, 3, 4, 7}	0.8	{1, 2, 4, 6, 7}	0.6
{1, 2, 3, 6}	0.6	{2, 3, 5, 6}	0.5	{1, 2, 5, 6, 7}	0.7
{1, 2, 3, 7}	0.8	{2, 3, 5, 7}	0.9	{1, 3, 4, 5, 6}	0.6
{1, 2, 4, 5}	0.7	{2, 3, 6, 7}	0.1	{1, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 2, 4, 6}	0.6	{2, 4, 5, 6}	0.6	{1, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 2, 4, 7}	0.6	{2, 4, 5, 7}	0.8	{1, 3, 5, 6, 7}	0.6
{1, 2, 5, 6}	0.7	{2, 4, 6, 7}	0.6	{1, 4, 5, 6, 7}	0.6
{1, 2, 5, 7}	0.7	{2, 5, 6, 7}	0.7	{2, 3, 4, 5, 6}	0.7
{1, 2, 6, 7}	0.6	{3, 4, 5, 6}	0.6	{2, 3, 4, 5, 7}	0.9
{1, 3, 4, 5}	0.6	{3, 4, 5, 7}	0.7	{2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 6}	0.6	{3, 4, 6, 7}	0.9	{2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 7}	0.5	{3, 5, 6, 7}	0.6	{2, 4, 5, 6, 7}	0.9
{1, 3, 5, 6}	0.6	{4, 5, 6, 7}	0.5	{3, 4, 5, 6, 7}	0.9
{1, 3, 5, 7}	0.6	{1, 2, 3, 4, 5}	0.7	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	0.7
{1, 3, 6, 7}	0.6	{1, 2, 3, 4, 6}	0.7	{1, 2, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 4, 5, 6}	0.4	{1, 2, 3, 4, 7}	0.8	{1, 2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 4, 5, 7}	0.6	{1, 2, 3, 5, 6}	0.7	{1, 2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 4, 6, 7}	0.6	{1, 2, 3, 5, 7}	0.9	{1, 2, 4, 5, 6, 7}	0.9
{1, 5, 6, 7}	0.3	{1, 2, 3, 6, 7}	1	{1, 3, 4, 5, 6, 7}	1
{2, 3, 4, 5}	0.5	{1, 2, 4, 5, 6}	0.7	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	1

TABLEAU D.2 – Suite de la capacité du Tableau D.1.

S	$14^{17}\mu(S)$	S	$14^{17}\mu(S)$	S	$14^{17}\mu(S)$
{1}	0	{3, 7}	14	{1, 6, 7}	14^3
{2}	0	{4, 5}	14	{2, 3, 4}	14^2
{3}	0	{4, 6}	14	{2, 3, 5}	14^5
{4}	0	{4, 7}	14	{2, 3, 6}	14^2
{5}	14	{5, 6}	14	{2, 3, 7}	14^8
{6}	14	{5, 7}	14	{2, 4, 5}	14^2
{7}	14	{6, 7}	14	{2, 4, 6}	14^2
{1, 2}	0	{1, 2, 3}	14^3	{2, 4, 7}	14^3
{1, 3}	14	{1, 2, 4}	14^3	{2, 5, 6}	14^2
{1, 4}	0	{1, 2, 5}	14^7	{2, 5, 7}	14^5
{1, 5}	14	{1, 2, 6}	14	{2, 6, 7}	14^4
{1, 6}	14	{1, 2, 7}	14^6	{3, 4, 5}	14^3
{1, 7}	14	{1, 3, 4}	14^2	{3, 4, 6}	14^2
{2, 3}	14^2	{1, 3, 5}	14	{3, 4, 7}	14^5
{2, 4}	14^2	{1, 3, 6}	14^2	{3, 5, 6}	14^3
{2, 5}	14	{1, 3, 7}	14^3	{3, 5, 7}	14^3
{2, 6}	14	{1, 4, 5}	14	{3, 6, 7}	14^6
{2, 7}	14	{1, 4, 6}	14	{4, 5, 6}	14^3
{3, 4}	0	{1, 4, 7}	14^2	{4, 5, 7}	14
{3, 5}	14	{1, 5, 6}	14^2	{4, 6, 7}	14^2
{3, 6}	14^2	{1, 5, 7}	14^3	{5, 6, 7}	14^2

TABLEAU D.3 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_A^\mu > 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$.

S	$14^{17}\mu(S)$	S	$14^{17}\mu(S)$	S	$14^{17}\mu(S)$
{1, 2, 3, 4}	14^7	{2, 3, 4, 6}	14^7	{1, 2, 4, 5, 7}	14^9
{1, 2, 3, 5}	14^7	{2, 3, 4, 7}	14^8	{1, 2, 4, 6, 7}	14^6
{1, 2, 3, 6}	14^6	{2, 3, 5, 6}	14^5	{1, 2, 5, 6, 7}	14^7
{1, 2, 3, 7}	14^8	{2, 3, 5, 7}	14^9	{1, 3, 4, 5, 6}	14^6
{1, 2, 4, 5}	14^7	{2, 3, 6, 7}	14	{1, 3, 4, 5, 7}	14^{17}
{1, 2, 4, 6}	14^6	{2, 4, 5, 6}	14^6	{1, 3, 4, 6, 7}	14^{17}
{1, 2, 4, 7}	14^6	{2, 4, 5, 7}	14^8	{1, 3, 5, 6, 7}	14^6
{1, 2, 5, 6}	14^7	{2, 4, 6, 7}	14^6	{1, 4, 5, 6, 7}	14^6
{1, 2, 5, 7}	14^7	{2, 5, 6, 7}	14^7	{2, 3, 4, 5, 6}	14^7
{1, 2, 6, 7}	14^6	{3, 4, 5, 6}	14^6	{2, 3, 4, 5, 7}	14^9
{1, 3, 4, 5}	14^6	{3, 4, 5, 7}	14^7	{2, 3, 4, 6, 7}	14^{17}
{1, 3, 4, 6}	14^6	{3, 4, 6, 7}	14^9	{2, 3, 5, 6, 7}	14^{17}
{1, 3, 4, 7}	14^5	{3, 5, 6, 7}	14^6	{2, 4, 5, 6, 7}	14^9
{1, 3, 5, 6}	14^6	{4, 5, 6, 7}	14^5	{3, 4, 5, 6, 7}	14^9
{1, 3, 5, 7}	14^6	{1, 2, 3, 4, 5}	14^7	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	14^7
{1, 3, 6, 7}	14^6	{1, 2, 3, 4, 6}	14^7	{1, 2, 3, 4, 5, 7}	14^{17}
{1, 4, 5, 6}	14^4	{1, 2, 3, 4, 7}	14^8	{1, 2, 3, 4, 6, 7}	14^{17}
{1, 4, 5, 7}	14^6	{1, 2, 3, 5, 6}	14^7	{1, 2, 3, 5, 6, 7}	14^{17}
{1, 4, 6, 7}	14^6	{1, 2, 3, 5, 7}	14^9	{1, 2, 4, 5, 6, 7}	14^9
{1, 5, 6, 7}	14^3	{1, 2, 3, 6, 7}	14^{17}	{1, 3, 4, 5, 6, 7}	14^{17}
{2, 3, 4, 5}	14^5	{1, 2, 4, 5, 6}	14^7	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	14^{17}

TABLEAU D.4 – Suite de la capacité du Tableau D.3.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1}	0	{3, 7}	0.11	{1, 6, 7}	0.33
{2}	0	{4, 5}	0.11	{2, 3, 4}	0.22
{3}	0	{4, 6}	0.11	{2, 3, 5}	0.44
{4}	0	{4, 7}	0.11	{2, 3, 6}	0.22
{5}	0.11	{5, 6}	0.22	{2, 3, 7}	0.56
{6}	0.11	{5, 7}	0.11	{2, 4, 5}	0.22
{7}	0.11	{6, 7}	0.11	{2, 4, 6}	0.22
{1, 2}	0	{1, 2, 3}	0.33	{2, 4, 7}	0.33
{1, 3}	0.11	{1, 2, 4}	0.33	{2, 5, 6}	0.22
{1, 4}	0	{1, 2, 5}	0.44	{2, 5, 7}	0.33
{1, 5}	0.11	{1, 2, 6}	0.11	{2, 6, 7}	0.44
{1, 6}	0.11	{1, 2, 7}	0.44	{3, 4, 5}	0.34
{1, 7}	0.11	{1, 3, 4}	0.22	{3, 4, 6}	0.22
{2, 3}	0.22	{1, 3, 5}	0.11	{3, 4, 7}	0.45
{2, 4}	0.22	{1, 3, 6}	0.22	{3, 5, 6}	0.33
{2, 5}	0.11	{1, 3, 7}	0.33	{3, 5, 7}	0.33
{2, 6}	0.11	{1, 4, 5}	0.11	{3, 6, 7}	0.44
{2, 7}	0.11	{1, 4, 6}	0.11	{4, 5, 6}	0.33
{3, 4}	0	{1, 4, 7}	0.22	{4, 5, 7}	0.11
{3, 5}	0.11	{1, 5, 6}	0.22	{4, 6, 7}	0.22
{3, 6}	0.22	{1, 5, 7}	0.33	{5, 6, 7}	0.22

TABLEAU D.5 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{N_s}^\mu < 0$.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1, 2, 3, 4}	0.33	{2, 3, 4, 6}	0.55	{1, 2, 4, 5, 7}	0.78
{1, 2, 3, 5}	0.67	{2, 3, 4, 7}	0.66	{1, 2, 4, 6, 7}	0.56
{1, 2, 3, 6}	0.56	{2, 3, 5, 6}	0.45	{1, 2, 5, 6, 7}	0.67
{1, 2, 3, 7}	0.78	{2, 3, 5, 7}	0.89	{1, 3, 4, 5, 6}	0.56
{1, 2, 4, 5}	0.44	{2, 3, 6, 7}	1	{1, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 2, 4, 6}	0.33	{2, 4, 5, 6}	0.56	{1, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 2, 4, 7}	0.55	{2, 4, 5, 7}	0.33	{1, 3, 5, 6, 7}	0.56
{1, 2, 5, 6}	0.44	{2, 4, 6, 7}	0.55	{1, 4, 5, 6, 7}	0.56
{1, 2, 5, 7}	0.67	{2, 5, 6, 7}	0.67	{2, 3, 4, 5, 6}	0.67
{1, 2, 6, 7}	0.56	{3, 4, 5, 6}	0.44	{2, 3, 4, 5, 7}	0.89
{1, 3, 4, 5}	0.34	{3, 4, 5, 7}	0.45	{2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 6}	0.22	{3, 4, 6, 7}	0.89	{2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 7}	0.45	{3, 5, 6, 7}	0.56	{2, 4, 5, 6, 7}	0.89
{1, 3, 5, 6}	0.55	{4, 5, 6, 7}	0.44	{3, 4, 5, 6, 7}	0.89
{1, 3, 5, 7}	0.55	{1, 2, 3, 4, 5}	0.67	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	0.67
{1, 3, 6, 7}	0.56	{1, 2, 3, 4, 6}	0.67	{1, 2, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 4, 5, 6}	0.33	{1, 2, 3, 4, 7}	0.78	{1, 2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 4, 5, 7}	0.33	{1, 2, 3, 5, 6}	0.67	{1, 2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 4, 6, 7}	0.33	{1, 2, 3, 5, 7}	0.89	{1, 2, 4, 5, 6, 7}	0.89
{1, 5, 6, 7}	0.33	{1, 2, 3, 6, 7}	1	{1, 3, 4, 5, 6, 7}	1
{2, 3, 4, 5}	0.44	{1, 2, 4, 5, 6}	0.67	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	1

TABLEAU D.6 – Suite de la capacité du Tableau D.5.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1}	0	{3, 7}	0.11	{1, 6, 7}	0.34
{2}	0	{4, 5}	0.11	{2, 3, 4}	0.34
{3}	0	{4, 6}	0.11	{2, 3, 5}	0.45
{4}	0	{4, 7}	0.12	{2, 3, 6}	0.23
{5}	0.11	{5, 6}	0.23	{2, 3, 7}	0.56
{6}	0.11	{5, 7}	0.12	{2, 4, 5}	0.23
{7}	0.11	{6, 7}	0.23	{2, 4, 6}	0.23
{1, 2}	0	{1, 2, 3}	0.34	{2, 4, 7}	0.34
{1, 3}	0.12	{1, 2, 4}	0.34	{2, 5, 6}	0.23
{1, 4}	0.11	{1, 2, 5}	0.45	{2, 5, 7}	0.34
{1, 5}	0.11	{1, 2, 6}	0.23	{2, 6, 7}	0.55
{1, 6}	0.12	{1, 2, 7}	0.45	{3, 4, 5}	0.34
{1, 7}	0.12	{1, 3, 4}	0.23	{3, 4, 6}	0.23
{2, 3}	0.22	{1, 3, 5}	0.12	{3, 4, 7}	0.45
{2, 4}	0.23	{1, 3, 6}	0.23	{3, 5, 6}	0.34
{2, 5}	0.23	{1, 3, 7}	0.34	{3, 5, 7}	0.34
{2, 6}	0.11	{1, 4, 5}	0.11	{3, 6, 7}	0.45
{2, 7}	0.12	{1, 4, 6}	0.12	{4, 5, 6}	0.33
{3, 4}	0.23	{1, 4, 7}	0.22	{4, 5, 7}	0.12
{3, 5}	0.12	{1, 5, 6}	0.23	{4, 6, 7}	0.23
{3, 6}	0.23	{1, 5, 7}	0.34	{5, 6, 7}	0.23

TABLEAU D.7 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $I_{N_s}^\mu = 0$.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1, 2, 3, 4}	0.56	{2, 3, 4, 6}	0.56	{1, 2, 4, 5, 7}	0.78
{1, 2, 3, 5}	0.45	{2, 3, 4, 7}	0.66	{1, 2, 4, 6, 7}	0.56
{1, 2, 3, 6}	0.45	{2, 3, 5, 6}	0.45	{1, 2, 5, 6, 7}	0.66
{1, 2, 3, 7}	0.56	{2, 3, 5, 7}	0.56	{1, 3, 4, 5, 6}	0.55
{1, 2, 4, 5}	0.45	{2, 3, 6, 7}	0.66	{1, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 2, 4, 6}	0.34	{2, 4, 5, 6}	0.56	{1, 3, 4, 6, 7}	0.67
{1, 2, 4, 7}	0.55	{2, 4, 5, 7}	0.34	{1, 3, 5, 6, 7}	0.56
{1, 2, 5, 6}	0.45	{2, 4, 6, 7}	0.55	{1, 4, 5, 6, 7}	0.56
{1, 2, 5, 7}	0.56	{2, 5, 6, 7}	0.56	{2, 3, 4, 5, 6}	0.56
{1, 2, 6, 7}	0.56	{3, 4, 5, 6}	0.45	{2, 3, 4, 5, 7}	0.67
{1, 3, 4, 5}	0.55	{3, 4, 5, 7}	0.45	{2, 3, 4, 6, 7}	0.72
{1, 3, 4, 6}	0.23	{3, 4, 6, 7}	0.45	{2, 3, 5, 6, 7}	0.89
{1, 3, 4, 7}	0.45	{3, 5, 6, 7}	0.56	{2, 4, 5, 6, 7}	0.78
{1, 3, 5, 6}	0.55	{4, 5, 6, 7}	0.44	{3, 4, 5, 6, 7}	0.78
{1, 3, 5, 7}	0.34	{1, 2, 3, 4, 5}	0.56	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	0.67
{1, 3, 6, 7}	0.56	{1, 2, 3, 4, 6}	0.56	{1, 2, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 4, 5, 6}	0.33	{1, 2, 3, 4, 7}	0.67	{1, 2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 4, 5, 7}	0.34	{1, 2, 3, 5, 6}	0.55	{1, 2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 4, 6, 7}	0.34	{1, 2, 3, 5, 7}	0.56	{1, 2, 4, 5, 6, 7}	0.89
{1, 5, 6, 7}	0.34	{1, 2, 3, 6, 7}	0.77	{1, 3, 4, 5, 6, 7}	1
{2, 3, 4, 5}	0.45	{1, 2, 4, 5, 6}	0.67	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	1

TABLEAU D.8 – Suite de la capacité du Tableau D.7.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1}	0.67	{3, 7}	0.75	{1, 6, 7}	0.83
{2}	0.67	{4, 5}	0.75	{2, 3, 4}	0.8
{3}	0.67	{4, 6}	0.75	{2, 3, 5}	0.87
{4}	0.67	{4, 7}	0.75	{2, 3, 6}	0.8
{5}	0.75	{5, 6}	0.8	{2, 3, 7}	0.91
{6}	0.75	{5, 7}	0.75	{2, 4, 5}	0.8
{7}	0.75	{6, 7}	0.75	{2, 4, 6}	0.8
{1, 2}	0.67	{1, 2, 3}	0.83	{2, 4, 7}	0.83
{1, 3}	0.75	{1, 2, 4}	0.83	{2, 5, 6}	0.8
{1, 4}	0.67	{1, 2, 5}	0.9	{2, 5, 7}	0.87
{1, 5}	0.75	{1, 2, 6}	0.75	{2, 6, 7}	0.86
{1, 6}	0.75	{1, 2, 7}	0.89	{3, 4, 5}	0.83
{1, 7}	0.75	{1, 3, 4}	0.8	{3, 4, 6}	0.8
{2, 3}	0.8	{1, 3, 5}	0.75	{3, 4, 7}	0.87
{2, 4}	0.8	{1, 3, 6}	0.8	{3, 5, 6}	0.83
{2, 5}	0.75	{1, 3, 7}	0.83	{3, 5, 7}	0.83
{2, 6}	0.75	{1, 4, 5}	0.75	{3, 6, 7}	0.89
{2, 7}	0.75	{1, 4, 6}	0.75	{4, 5, 6}	0.83
{3, 4}	0.67	{1, 4, 7}	0.8	{4, 5, 7}	0.75
{3, 5}	0.75	{1, 5, 6}	0.8	{4, 6, 7}	0.8
{3, 6}	0.8	{1, 5, 7}	0.83	{5, 6, 7}	0.8

TABLEAU D.9 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_{\mu}^A < 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$.

S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$	S	$\mu(S)$
{1, 2, 3, 4}	0.9	{2, 3, 4, 6}	0.9	{1, 2, 4, 5, 7}	0.92
{1, 2, 3, 5}	0.9	{2, 3, 4, 7}	0.91	{1, 2, 4, 6, 7}	0.89
{1, 2, 3, 6}	0.89	{2, 3, 5, 6}	0.87	{1, 2, 5, 6, 7}	0.9
{1, 2, 3, 7}	0.91	{2, 3, 5, 7}	0.92	{1, 3, 4, 5, 6}	0.89
{1, 2, 4, 5}	0.9	{2, 3, 6, 7}	0.75	{1, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 2, 4, 6}	0.89	{2, 4, 5, 6}	0.89	{1, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 2, 4, 7}	0.89	{2, 4, 5, 7}	0.91	{1, 3, 5, 6, 7}	0.89
{1, 2, 5, 6}	0.9	{2, 4, 6, 7}	0.89	{1, 4, 5, 6, 7}	0.89
{1, 2, 5, 7}	0.9	{2, 5, 6, 7}	0.9	{2, 3, 4, 5, 6}	0.9
{1, 2, 6, 7}	0.89	{3, 4, 5, 6}	0.89	{2, 3, 4, 5, 7}	0.92
{1, 3, 4, 5}	0.89	{3, 4, 5, 7}	0.9	{2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 6}	0.89	{3, 4, 6, 7}	0.92	{2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 3, 4, 7}	0.87	{3, 5, 6, 7}	0.89	{2, 4, 5, 6, 7}	0.92
{1, 3, 5, 6}	0.89	{4, 5, 6, 7}	0.87	{3, 4, 5, 6, 7}	0.92
{1, 3, 5, 7}	0.89	{1, 2, 3, 4, 5}	0.9	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	0.9
{1, 3, 6, 7}	0.89	{1, 2, 3, 4, 6}	0.9	{1, 2, 3, 4, 5, 7}	1
{1, 4, 5, 6}	0.86	{1, 2, 3, 4, 7}	0.91	{1, 2, 3, 4, 6, 7}	1
{1, 4, 5, 7}	0.89	{1, 2, 3, 5, 6}	0.9	{1, 2, 3, 5, 6, 7}	1
{1, 4, 6, 7}	0.89	{1, 2, 3, 5, 7}	0.92	{1, 2, 4, 5, 6, 7}	0.92
{1, 5, 6, 7}	0.83	{1, 2, 3, 6, 7}	1	{1, 3, 4, 5, 6, 7}	1
{2, 3, 4, 5}	0.87	{1, 2, 4, 5, 6}	0.9	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	1

TABLEAU D.10 – Suite de la capacité du Tableau D.9.

S	$14^{11}\mu(S)$	S	$14^{11}\mu(S)$	S	$14^{11}\mu(S)$
{1}	0	{3, 7}	14	{1, 6, 7}	14^6
{2}	0	{4, 5}	14^2	{2, 3, 4}	14^4
{3}	0	{4, 6}	14^2	{2, 3, 5}	14^7
{4}	0	{4, 7}	14^2	{2, 3, 6}	14^4
{5}	14	{5, 6}	14^4	{2, 3, 7}	14^8
{6}	14^2	{5, 7}	14^2	{2, 4, 5}	14^4
{7}	14	{6, 7}	14^3	{2, 4, 6}	14^4
{1, 2}	0	{1, 2, 3}	14^6	{2, 4, 7}	14^6
{1, 3}	0	{1, 2, 4}	14^6	{2, 5, 6}	14^4
{1, 4}	0	{1, 2, 5}	14^7	{2, 5, 7}	14^5
{1, 5}	14^2	{1, 2, 6}	14^4	{2, 6, 7}	14^7
{1, 6}	14^2	{1, 2, 7}	14^7	{3, 4, 5}	14^6
{1, 7}	14^2	{1, 3, 4}	0	{3, 4, 6}	14^4
{2, 3}	14^3	{1, 3, 5}	14^4	{3, 4, 7}	14^4
{2, 4}	14^4	{1, 3, 6}	14^4	{3, 5, 6}	14^6
{2, 5}	14^2	{1, 3, 7}	14^6	{3, 5, 7}	14^6
{2, 6}	14^2	{1, 4, 5}	14^2	{3, 6, 7}	14^7
{2, 7}	14^2	{1, 4, 6}	14^2	{4, 5, 6}	14^4
{3, 4}	0	{1, 4, 7}	14^2	{4, 5, 7}	14^4
{3, 5}	14^2	{1, 5, 6}	14^4	{4, 6, 7}	14^6
{3, 6}	14^4	{1, 5, 7}	14^6	{5, 6, 7}	14^4

TABLEAU D.11 – Capacité $\mu \in C_{\text{Pref}}$ telle que $\eta_\mu^A > 0$ pour tout $A \subseteq N_{\geq 2}$.

S	$14^{11}\mu(S)$	S	$14^{11}\mu(S)$	S	$14^{11}\mu(S)$
$\{1, 2, 3, 4\}$	14^6	$\{2, 3, 4, 6\}$	14^8	$\{1, 2, 4, 5, 7\}$	14^{10}
$\{1, 2, 3, 5\}$	14^7	$\{2, 3, 4, 7\}$	14^8	$\{1, 2, 4, 6, 7\}$	14^8
$\{1, 2, 3, 6\}$	14^6	$\{2, 3, 5, 6\}$	14^7	$\{1, 2, 5, 6, 7\}$	14^9
$\{1, 2, 3, 7\}$	14^8	$\{2, 3, 5, 7\}$	14^8	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$	14^8
$\{1, 2, 4, 5\}$	14^7	$\{2, 3, 6, 7\}$	14^8	$\{1, 3, 4, 5, 7\}$	14^{11}
$\{1, 2, 4, 6\}$	14^6	$\{2, 4, 5, 6\}$	14^8	$\{1, 3, 4, 6, 7\}$	14^{11}
$\{1, 2, 4, 7\}$	14^7	$\{2, 4, 5, 7\}$	14^6	$\{1, 3, 5, 6, 7\}$	14^8
$\{1, 2, 5, 6\}$	14^7	$\{2, 4, 6, 7\}$	14^7	$\{1, 4, 5, 6, 7\}$	14^8
$\{1, 2, 5, 7\}$	14^7	$\{2, 5, 6, 7\}$	14^8	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	14^8
$\{1, 2, 6, 7\}$	14^8	$\{3, 4, 5, 6\}$	14^7	$\{2, 3, 4, 5, 7\}$	14^{10}
$\{1, 3, 4, 5\}$	14^7	$\{3, 4, 5, 7\}$	14^8	$\{2, 3, 4, 6, 7\}$	14^{11}
$\{1, 3, 4, 6\}$	14^4	$\{3, 4, 6, 7\}$	14^7	$\{2, 3, 5, 6, 7\}$	14^{11}
$\{1, 3, 4, 7\}$	14^7	$\{3, 5, 6, 7\}$	14^8	$\{2, 4, 5, 6, 7\}$	14^{10}
$\{1, 3, 5, 6\}$	14^7	$\{4, 5, 6, 7\}$	14^6	$\{3, 4, 5, 6, 7\}$	14^{10}
$\{1, 3, 5, 7\}$	14^8	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	14^7	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	14^9
$\{1, 3, 6, 7\}$	14^8	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	14^8	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	14^{11}
$\{1, 4, 5, 6\}$	14^4	$\{1, 2, 3, 4, 7\}$	14^8	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$	14^{11}
$\{1, 4, 5, 7\}$	14^8	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$	14^7	$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$	14^{11}
$\{1, 4, 6, 7\}$	14^6	$\{1, 2, 3, 5, 7\}$	14^9	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$	14^{10}
$\{1, 5, 6, 7\}$	14^6	$\{1, 2, 3, 6, 7\}$	14^{11}	$\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$	14^{11}
$\{2, 3, 4, 5\}$	14^7	$\{1, 2, 4, 5, 6\}$	14^9	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	14^{11}

TABLEAU D.12 – Suite de la capacité du Tableau D.11.

Bibliographie

- [1] Bilan à 3 ans de l'OQALI. https://www.oqali.fr/media/2021/12/OQALI_2020_Suivi_du_Nutri_Score_analyse_a_3ans_1-2.pdf, urldate={2022-03-11}, Novembre 2020.
- [2] Évaluation à 3 ans du logo nutritionnel nutri-score. <https://solidarites-sante.gouv.fr/IMG/pdf/nutriscorebilan3ans.pdf>, urldate={2022-03-11}, Février 2021.
- [3] H. AGUENAOU, C. JULIA, A. HAJJAB, P. GALAN, H. BERRI, M. BRAHIMI, J. BELKHADIR, J. HEIKEL et S. HERCBERG : Le logo nutritionnel nutri-score : Un outil au service du consommateur marocain. *Revue Marocaine des Sciences Agronomiques et Vétérinaires*, pages 271–276, 2018.
- [4] F. ALESKEROV, D. BOUYSSOU et B. MONJARDET : *Utility maximization, choice and preference*, volume 16 de *Studies in Economic Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2ème édition, 2007.
- [5] S. ANGILELLA, S. CORRENTE et S. GRECO : Stochastic multiobjective acceptability analysis for the Choquet integral preference model and the scale construction problem. *European Journal of Operational Research*, 240:172–182, 2015.
- [6] S. ANGILELLA, S. GRECO et B. MATARAZZO : Non-additive robust ordinal regression : A multiple criteria decision model based on the Choquet integral. *European Journal of Operational Research*, 201(1):277–288, 2010.

-
- [7] G. BELIAKOV : Construction of aggregation functions from data using linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:65–75, 2009.
- [8] G. BELIAKOV, B.S. HUMBERTO et C.S. TOMASA : *A Practical Guide to Averaging Functions*. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [9] D. BELL, H. RAIFFA et A. TVERSKY : *Decision Making : Descriptive, normative and prescriptive interactions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.
- [10] V. BELTON et T. STEWART : *Multiple Criteria Decision Analysis : An Integrated Approach*. Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
- [11] L. BERRAH et V. CLIVILLÉ : Towards an aggregation performance measurement system model in a supply chain context. *Computers in Industry*, 58(7):709–719, 2007.
- [12] D. BOUYSSOU : Building criteria : A prerequisite for MCDA. In C.A. BANA et A. CARLOS, éditeurs : *Readings in multiple criteria decision aid*, pages 58–80. Springer-Verlag, 1990.
- [13] D. BOUYSSOU et Th. MARCHANT : Ordered categories and additive conjoint measurement on connected sets. *Journal of mathematical Psychology*, 53(2):92–105, 2009.
- [14] D. BOUYSSOU et Th. MARCHANT : Additive conjoint measurement with ordered categories. *European Journal of Operational Research*, 203(1):195–204, 2010.
- [15] D. BOUYSSOU, Th. MARCHANT, M. PIRLOT, P. PERNY, A. TSOUKIÀS et Ph. VINCKE : *Evaluation and decision model : A critical perspective*. International Series in Operations Research and Management Science, Volume 32. Kluwer, Dordrecht, 1ère édition, 2000.
- [16] D. BOUYSSOU, Th. MARCHANT, M. PIRLOT, A. TSOUKIÀS et Ph. VINCKE : *Evaluation and decision models with multiple criteria : Stepping stones for the analyst*. International Series in Operations Research and Management Science, Volume 86. Springer, Boston, 1ère édition, 2006.

- [17] D. BOUYSSOU et M. PIRLOT : Conjoint measurement without additivity and transitivity. In N. MESKENS et M. ROUBENS, éditeurs : *Advances in Decision Analysis*, pages 13–29, Dordrecht, 1999. Kluwer.
- [18] D. BOUYSSOU et M. PIRLOT : Conjoint measurement tools for MCDM. A brief introduction. In J. FIGUEIRA, S. GRECO et M. EHRGOTT, éditeurs : *Multiple Criteria Decision Analysis. State of the art surveys*, pages 73–130. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [19] D. BOUYSSOU et Ph. VINCKE : Binary relations and preference modeling. In D. BOUYSSOU, D. DUBOIS, M. PIRLOT et H. PRADE, éditeurs : *Decision-making Process Concepts and Methods*, pages 49–84. ISTE/Wiley, London, 2009.
- [20] J.M. BUCHANAN : Game theory, mathematics, and economics. *Journal of Economic Methodology*, 8(1):27–32, 2001.
- [21] T. CALVO et B. DE BAETS : Aggregation operators defined by k-order additive/maxitive fuzzy measures. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 06(06):533–550, 1998.
- [22] P. CHECKLAND : *Systems thinking, systems practice*. J. Wiley, New York, New York, 1981.
- [23] G. CHOQUET : Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, 5(54):131–295, 1953.
- [24] V. CLIVILLÉ, L. BERRAH et G. MAURIS : Quantitative expression and aggregation of performance measurements based on the MACBETH multi-criteria method. *International Journal of Production economics*, 105:171–189, 2007.
- [25] M. COUCEIRO, D. DUBOIS, H. FARGIER, M. GRABISCH, H. PRADE et A. RICO : New directions in ordinal evaluation : Sugeno integrals and beyond. In M. DOUMPOS, J. FIGUEIRA, S. GRECO et C. ZOPOUNIDIS, éditeurs : *New Perspectives in Multiple Criteria Decision Making*. Springer, Cham, 2019.
- [26] M. COUCEIRO, D. DUBOIS, H. PRADE et T. WALDHAUSER : Decision-making with Sugeno integrals. *Order*, 33(3):517–535, 2016.

- [27] L. DIAS et A. TSOUKIÀS : On the constructive and other approaches in decision aiding. In C. H. ANTUNES, J. FIGUEIRA et J. CLIMACO, éditeurs : *Aide multicritère à la décision : Multiple criteria decision aiding*, pages 13–28. CCDRC/INESCC/FEUC, 2004.
- [28] D. DUBOIS, J.-L. MARICHAL, H. PRADE, M. ROUBENS et R. SABBADIN : The use of the discrete Sugeno integral in decision-making : A survey. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9:539–561, 2001.
- [29] J.S. DYER : MAUT - MultiAttribute Utility Theory. In J. FIGUEIRA, S. GRECO et M. EHRGOTT, éditeurs : *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, pages 265–285. Springer Verlag, Boston, Dordrecht, London, 2005.
- [30] P.C. FISHBURN : *Utility Theory for Decision Making*. J. Wiley and Son, New York, 1970.
- [31] K. FUJIMOTO : Cardinal-probabilistic interaction indices and their applications : A survey. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 7(2):79–85, 2003.
- [32] K. FUJIMOTO : *Representations of Importance and Interaction of Fuzzy Measures, Capacities, Games and Its Extensions : A Survey*, pages 115–126. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [33] K. FUJIMOTO, I. KOJADINOVIC et J.-L. MARICHAL : Axiomatic characterizations of probabilistic and cardinal-probabilistic interaction indices. *Games and Economic Behavior*, 55(1):72–99, 2006.
- [34] J.-L. GENARD et M. PIRLOT : Multiple criteria decision aid in a philosophical perspective. In D. BOUYSSOU, E. JACQUET-LAGRÈZE, P. PERNY, R. SLOWINSKI, D. VANDERPOOTEN et Ph. VINCKE, éditeurs : *Aiding decisions with multiple criteria : essays in honour of Bernard Roy*, pages 89–117. Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
- [35] A. GIARLOTTA et S. GRECO : Necessary and possible preference structures. *Journal of Mathematical Economics*, 49(2):163–172, 2013.

- [36] M. GONDRAN et M. MINOUX : *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 3ème édition, 1995.
- [37] M. GRABISCH : Fuzzy integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 69(3):279–298, 1995.
- [38] M. GRABISCH : A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition. *In Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems.*, volume 1, pages 145–150, 1995.
- [39] M. GRABISCH : The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*, 89(3):445–456, 1996.
- [40] M. GRABISCH : k -order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 92(2):167–189, 1997.
- [41] M. GRABISCH : Une approche constructive de la décision multicritère. *Traitement du signal*, 22(4):321–337, 2005.
- [42] M. GRABISCH : *Set Functions, Games and Capacities in Decision Making*, volume 46 de *Theory and Decision Library C*. Springer, Cham, 2016.
- [43] M. GRABISCH, J. DUCHÊNE, F. LINO et P. PERNY : Subjective evaluation of discomfort in sitting position. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(3):287–312, 2002.
- [44] M. GRABISCH, I. KOJADINOVIC et P. MEYER : A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory : Applications of the Kappalab R package. *European Journal of Operational Research*, 186(2):766–785, 2008.
- [45] M. GRABISCH et Ch. LABREUCHE : Fuzzy measures and integrals in MCDA. *In J. FIGUEIRA, S. GRECO et M. EHRGOTT, éditeurs : Multiple Criteria Decision Analysis : State of the art surveys*, pages 565–608. Springer, 2005.

- [46] M. GRABISCH et Ch. LABREUCHE : A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *Annals of Operations Research*, 175(1):247–290, 2010.
- [47] M. GRABISCH, Ch. LABREUCHE et J.-C. VANSNICK : On the extension of pseudo-Boolean functions for the aggregation of interacting criteria. *European Journal of Operational Research*, 148:28–47, 2003.
- [48] M. GRABISCH, J.-L. MARICHAL, R. MESIAR et E. PAP : *Aggregation Functions*. Numéro 127 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [49] M. GRABISCH, J.-L. MARICHAL et M. ROUBENS : Equivalent Representations of Set Functions. *Mathematics of Operations Research*, 25(2):157–178, 2000.
- [50] M. GRABISCH et M. ROUBENS : An axiomatic approach to the concept of interaction among players in cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 28(4):547–565, 1999.
- [51] S. GRECO, V. MOUSSEAU et R. SLOWIŃSKI : Ordinal regression revisited : Multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, 191(2):416–436, 2008.
- [52] L. HUANG, J.Z. WU et R.J. XI : Nonadditivity index based quasi-random generation of capacities and its application in comprehensive decision aiding. *Mathematics*, 8:301, 2020.
- [53] P. HUMPHREYS, O. SVENSON et A. VÁRI : *Analysing and aiding decision processes*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [54] E. JACQUET-LAGREZE et J. SISKOS : Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making : The UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10(2):151–164, 1982.
- [55] P. A. KALDJOB KALDJOB, B. MAYAG et D. BOUYSSOU : Study of the instability of the sign of the nonadditivity index in a Choquet integral model. In D. CIUCCI, I. COUSO,

- J. MEDINA, D. ŚLĘZAK, D. PETTURITI, B. BOUCHON-MEUNIER et R. R. YAGER, éditeurs : *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 197–209, Cham, 2022. Springer International Publishing.
- [56] P.A. KALDJOB KALDJOB, B. MAYAG et D. BOUYSSOU : Necessary and possible interaction between criteria in a general Choquet integral model. In M.-J. LESOT, S. VIEIRA, M.Z. REFORMAT, J.P. CARVALHO, A. WILBIK, B. BOUCHON-MEUNIER et R.R. YAGER, éditeurs : *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 457–466, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [57] P.A. KALDJOB KALDJOB, B. MAYAG et D. BOUYSSOU : Necessary and possible interaction in a 2–maxitive Sugeno integral model. In D. FOTAKIS et D. RÍOS INSUA, éditeurs : *ADT 2021*, pages 323–337, Cham, 2021. Springer International Publishing.
- [58] P.A. KALDJOB KALDJOB, B. MAYAG et D. BOUYSSOU : On the interpretation of the interaction index between criteria in a Choquet integral model. *Fuzzy Sets and Systems*, 2022.
- [59] P.A. KALDJOB KALDJOB, B. MAYAG et D. BOUYSSOU : On the robustness of the sign of nonadditivity index in a Choquet integral model. Accepté pour publication à *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2022.
- [60] R.L. KEENEY : *Value-focused thinking : A path to creative decision making*. Harvard University Press, Cambridge, 1992.
- [61] R.L. KEENEY et H. RAIFFA : *Decision with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, J. and Sons, New York, 1976.
- [62] A. KEIKHA, H. GARG et H. MISHMAST NEHI : An approach based on combining Choquet integral and TOPSIS methods to uncertain MAGDM problems. *Soft Computing*, 25(10):7181–7195, 2021.

- [63] D.R. KRANTZ, D.R. LUCE, P. SUPPES et A. TVERSKY : *Foundations of Measurement, Vol. I : Additive and Polynomial Representations*, volume 1 de *Foundations of Measurement*. Academic Press, New York, 1971.
- [64] Ch. LABREUCHE et G. GRABISCH : The Choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets And Systems*, 137:11–26, 2003.
- [65] R. LIDL et G. PILZ : *Applied Abstract Algebra*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [66] Geoffrey LIVESEY : A perspective on food energy standards for nutrition labelling. *British Journal of Nutrition*, 85(3):271–287, 2001.
- [67] R.D. LUCE et H. RAIFFA : *Games and Decisions*. J. Wiley and Son, New York, 1957.
- [68] M.L. MAMMERI : *Une approche d'aide multicritère à la décision pour l'évaluation du confort dans les trains : construction d'un modèle d'évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine - Paris IX, 2013.
- [69] J.-L. MARICHAL : An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):800–807, 2000.
- [70] J.-L. MARICHAL : An axiomatic approach of the discrete Sugeno integral as a tool to aggregate interacting criteria in a qualitative framework. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(1):164–172, 2001.
- [71] B. MAYAG : *Elaboration d'une démarche constructive prenant en compte les interactions entre critères en aide multicritère à la décision*. Thèse de doctorat, University of Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Paris, 2010.
- [72] B. MAYAG et D. BOUYSSOU : Necessary and possible interaction between criteria in a 2-additive Choquet integral model. *European Journal of Operational Research*, 283(1):308–320, 2020.

- [73] B. MAYAG, M. GRABISCH et Ch. LABREUCHE : A representation of preferences by the Choquet integral with respect to a 2–additive capacity. *Theory and Decision*, 71(3):297–324, 2011.
- [74] R. MESIAR : Generalizations of k –order additive discrete fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(3):423–428, 1999.
- [75] P. MEYER : *Progressive Methods in Multiple Criteria Decision Analysis*. Thèse de doctorat, University of Luxembourg and Faculty Polytechnic of Mons, 2007.
- [76] T. MUROFUSHI et S. SUGENO : Choquet integral as an integral form for a general class of fuzzy measures. pages 408–411, Tokyo, Japan, 2nd IFSA Congress, 1987.
- [77] T. MUROFUSHI et S. SUGENO : An interpretation of fuzzy measure and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy Sets And Systems*, 29(2):201–227, 1989.
- [78] M. OLGUN, E. TÜRKARSLAN, M. ÜNVER et J. YE : A cosine similarity measure based on the Choquet integral for intuitionistic fuzzy sets and its applications to pattern recognition. *Informatica*, 32(4):849–864, 2021.
- [79] M. ÖZTÜRK, A. TSOUKIÀS ET PH. VINCKE : Preference modelling. In J. FIGUEIRA, S. GRECO et M. EHRGOTT, éditeurs : *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, pages 27–71. Springer, 2005.
- [80] P. PERNY : *Modélisation, agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique du rangement : bases axiomatiques, procédures et logiciels*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine - Paris IX, 1992.
- [81] J.P. PIGNON et Ch. LABREUCHE : A methodological approach for operational and technical experimentation based evaluation of systems of systems architectures. In *Int. Conference on Software & Systems Engineering and their Applications (ICSSEA)*, Paris, France, 2007.
- [82] E.C POULTON : *Behavioral decision theory : A new approach*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [83] R. RADNER : Satisficing. *Journal of Mathematical Economics*, 2(2):253–262, 1975.
- [84] O. RAOOF et H. AL-RAWESHIDY : Theory of games : an introduction. In Q. HUANG, éditeur : *Game Theory*, chapitre 1. IntechOpen, Rijeka, 2010.
- [85] M. RAYNER : Nutrient profiling for regulatory purposes. *Proceedings of the Nutrition Society*, 76(3):230–236, 2017.
- [86] A. RICO, M. GRABISCH, Ch. LABREUCHE et A. CHATEAUNEUF : Preference modeling on totally ordered sets by the Sugeno integral. *Discrete Applied Mathematics*, 147(1): 113–124, 2005.
- [87] F.S. ROBERTS : *Measurement theory, with applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences*. Addison-Wesley, Boston, 1979.
- [88] A.J.C. ROODENBURG : Nutrient profiling for front of pack labelling : how to align logical consumer choice with improvement of products? *Proceedings of the Nutrition Society*, 76(3):247–254, 2017.
- [89] B. ROY : *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica, Paris, France, 1985.
- [90] B. ROY : Decision science or decision-aid science? *European Journal of Operational Research*, 66(2):184–203, 1993.
- [91] B. ROY : *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.
- [92] B. ROY : À propos de la signification des dépendances entre critères : quelle place et quels modes de prise en compte pour l'aide à la décision? *RAIRO - Operations Research*, 43(3):255–275, 2009.
- [93] B. ROY et D. BOUYSSOU : *Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas*. Economica, Paris, 1993.

- [94] G. SCHAFER : Savage revisited. *In* D. BELL, H. RAIFFA et A. TVERSKY, éditeurs : *Decision Making : Descriptive, normative and prescriptive interaction*, pages 193–235. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [95] A. SCHRIJVER : *Theory of Linear and Integer Programming*. J. Wiley and Sons, 1998.
- [96] L.S. SHAPLEY : A value for n -person games. *In* H.W. KUHN et A.W. TUCKER, éditeurs : *Contributions to the Theory of Games II*, Annals of Mathematics Studies, pages 307–317. Princeton University Press, 1953.
- [97] H.A. SIMON : Rational choice and the structure of the environment. *Psychological Review*, 63(2):129–138, 1956.
- [98] H.A. SIMON : Theories of bounded rationality. *In* P. EARL, éditeur : *The Legacy of Herbert Simon in Economic Analysis*, volume 1. Edward Elgar Publishing Ltd, 2001.
- [99] Y. SISKOS, E. GRIGOROUDIS et N.F. MATSATSINIS : Uta methods. *In* J. FIGUEIRA, S. GRECO et M. EHRGOTT, éditeurs : *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, pages 297–343. Springer, 2005.
- [100] P. SLOVIC, M. FINUCANE, E. PETERS et D.G. MACGREGOR : The affect heuristic. *In* T. GILOVITCH, D. GRIFFIN et D. KAHNEMAN, éditeurs : *Heuristics and biases : The psychology of intuitive judgment*, pages 397–420. Cambridge University Press, 2002.
- [101] S.S. STEVENS : On the theory of scales of measurement. *Science*, 103(2684):677–680, 1946.
- [102] M. SUGENO : *Theory of fuzzy integrals and its applications*. Thèse de doctorat, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [103] M. TIMONIN : Axiomatization of the Choquet integral for 2-dimensional heterogeneous product sets. *ArXiv e-prints*, juillet 2015. <https://arxiv.org/abs/1507.04167>.
- [104] M. TIMONIN : Conjoint axiomatization of the Choquet integral for heterogeneous product sets. *In* P.C. JOÃO, M.-J. LESOT, U. KAYMAK, M.V. SUSANA, B. BOUCHON-MEUNIER et R.Y. RONALD, éditeurs : *Information Processing and Management of Un-*

- certainty in Knowledge-Based Systems - 16th International Conference, IPMU 2016, Eindhoven, The Netherlands, 2016, Proceedings, Part I*, volume 610 de *Communications in Computer and Information Science*, pages 46–57. Springer, 2016.
- [105] M. TIMONIN : Conjoint axiomatization of the Choquet integral for heterogeneous product sets, 2016.
- [106] A. TSOUKIÀS : From decision theory to decision aiding methodology. *European Journal of Operational Research*, 187(1):138–161, 2008.
- [107] L. UNDINE, C.V. RHEINER, V. ANTONIS, G. MASSET et J. SPIELDENNER : Nutrient profiling for product reformulation : public health impact and benefits for the consumer. *Proceedings of the Nutrition Society*, 76(3):255–264, 2017.
- [108] M. ÜNVER, M. OLGUN et E. TÜRKARSLAN : Cosine and cotangent similarity measures based on Choquet integral for spherical fuzzy sets and applications to pattern recognition. *Journal of Computational and Cognitive Engineering*, 1(1):21–31, 2022.
- [109] Ph. VINCKE : *L'aide multicritère à la décision*. Ellipses-Editions de l'Université de Bruxelles, 1989.
- [110] J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERN : *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.
- [111] J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERN : *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2ème édition, 1947.
- [112] P.P. WAKKER : *Additive Representations of Preferences : A new Foundation of Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989.
- [113] J.Z. WU et G. BELIAKOV : Nonadditivity index and capacity identification method in the context of multicriteria decision making. *Information Sciences*, 467:398–406, 2018.
- [114] J.Z. WU, R.J. XI et G. BELIAKOV : Nonadditivity index oriented decision preference information representation and capacity identification. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 54:281–297, 2020.

RÉSUMÉ

Les travaux de recherche menés dans le cadre de cette thèse s'inscrivent dans le champ disciplinaire de l'Aide Multi-Critère à la Décision et s'intéressent en particulier aux modèles dans lesquels des phénomènes d'interaction peuvent subvenir entre critères. L'objectif de cette thèse est d'investiguer sur la pertinence des outils proposés pour capter les phénomènes d'interaction entre critères, dans un modèle d'intégrale de Choquet et dans un modèle d'intégrale de Sugeno 2-maxitive.

L'utilisation de l'intégrale de Choquet et celle de Sugeno implique souvent d'éliciter une capacité sur la base de préférences, données par un décideur sur des alternatives. Dans de telles circonstances, la capacité élicitée est rarement unique. Cette non unicité induit très souvent un changement de signe des indices utilisés pour capter des phénomènes d'interaction, ce qui complique leur interprétation. C'est en particulier le cas lorsque l'élicitation n'utilise que des alternatives binaires, c'est-à-dire, des alternatives qui contiennent soit un niveau neutre soit un niveau satisfaisant sur chaque critère.

Lorsque les préférences sont exprimées sur des alternatives binaires, nous caractérisons les informations préférentielles ordinales représentables par un modèle de l'intégrale de Choquet, et un modèle de l'intégrale de Sugeno. Cette caractérisation est basée sur l'absence d'un cycle strict dans l'ensemble des préférences ordinales, auquel nous joignons une relation de monotonie. Sous cette condition de caractérisation, nous montrons que l'interprétation des phénomènes d'interaction nécessite une certaine prudence car nous pouvons les capter dans un sens arbitrairement souhaité. Ensuite, lorsque le décideur fournit ses préférences ordinales en dehors du cadre des alternatives binaires, nous proposons des modèles de programmation linéaire permettant de tester la stabilité de l'interprétation des phénomènes d'interaction. Une enquête pilote basée sur le nutri-score nous a servi de champ d'application.

MOTS CLÉS

Aide MultiCritère à la Décision, Intégrale de Choquet, Intégrale de Sugeno, Capacité, Interaction.

ABSTRACT

The research work of this thesis is a part of the disciplinary field of MultiCriteria Decision Aid and focuses in particular on models in which interaction phenomena between criteria can occur. The purpose of this thesis is to investigate the relevance of the tools proposed to capture the phenomenon of interaction between criteria, in a Choquet integral model and in a 2-maxitive Sugeno integral model.

The use of the Choquet and Sugeno integrals models need to elaborate a capacity base on the preferences, over a set of alternatives, given by a decision maker. In such circumstances, the capacity elicited is rarely unique. This non-uniqueness can induces a change of the sign of the indices used to capture interaction phenomena, therefore their interpretation is not easy. This is particularly the case when the elicitation uses only binary alternatives, i.e., alternatives which have either a neutral level or a satisfactory level on each criterion.

When the preferences are expressed on binary alternatives, we characterize the ordinal preferential information representable by a Choquet integral model, and a 2-maxitive Sugeno integral model. This characterization is based on the lack of a strict cycle in the set of ordinal preferences, for which we added a monotonicity relation. Under this characterization condition, we show that the interpretation of interaction phenomena requires some caution because we can capture them in an arbitrarily desired way. Then, when the decision maker provides an ordinal preferences outside the framework of binary alternatives, we propose the linear programming models to test the stability of the interpretation of interaction phenomena. A pilot survey, based on the nutri-score served as our field of application.

KEYWORDS

MultiCriteria Decision Aid, Choquet integral, Sugeno integral, Capacity, Interaction.

