



HAL
open science

Contributions à l'analyse de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser : application au traitement du signal

Yves Préaux

► **To cite this version:**

Yves Préaux. Contributions à l'analyse de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser : application au traitement du signal. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2022. Français. NNT : 2022BRES0052 . tel-04065194

HAL Id: tel-04065194

<https://theses.hal.science/tel-04065194>

Submitted on 11 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE
DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ECOLE DOCTORALE N° 598

Sciences de la mer et du littoral

Spécialité : Acoustique sous-marine et Traitement du signal

Par

Yves PRÉAUX

Contributions à l'Analyse de l'Opérateur d'Énergie de Teager-Kaiser Application au Traitement du Signal

Thèse présentée et soutenue à Lanvéoc, le 07 juillet 2022

Unité de recherche : Institut de recherche de l'École navale – EA 3634

Rapporteurs avant soutenance :

Pierre BORGNAT,
Directeur de Recherche CNRS,
ENS Lyon, Laboratoire de Physique

Yannick DEVILLE,
Professeur des Universités,
IRAP, Université Paul Sabatier Toulouse 3

Composition du Jury :

Président :

Thierry CHONAVEL, Professeur (HdR),
Lab-STICC, IMT Atlantique,

Rapporteurs :

Pierre BORGNAT, Directeur de Recherche CNRS,
ENS Lyon, Laboratoire de Physique

Yannick DEVILLE, Professeur des Universités,
IRAP, Université Paul Sabatier Toulouse 3

Examineurs :

Karim ABED-MERAIM, Professeur des Universités,
PRISME, Université d'Orléans

Michel BERTHIER, Professeur des Universités,
MIA, Université de La Rochelle

Laurent DAUDET, Professeur des Universités,
Université Paris Cité

Angélique DRÉMEAU, Maître de Conférences,
Lab-STICC, ENSTA Bretagne

Directeur de thèse :

Abdel-Ouahab BOUDRAA, Professeur des Universités,
IRENav, École Navale

Invité :

Pierre AILLIOT, Maître de Conférences des Universités,
Laboratoire de Mathématiques, UBO

Remerciements

*« Aucun de nous, en agissant seul,
ne peut atteindre le succès. »*

Nelson Mandela

S'il est consacré par une reconnaissance personnelle, un travail de thèse est une œuvre collective, pour son contenu scientifique qui se fonde sur l'état de l'art et se nourrit d'échanges, mais aussi et surtout pour l'environnement humain qui permet son déroulement, depuis sa mise en œuvre jusqu'à son aboutissement.

Je tiens ainsi, avant tout, à dédier mes travaux à ma famille ; à mon épouse, Sabine, qui bien qu'ayant dû subir mon manque de disponibilité ces dernières années, m'a cependant encouragé et fourni un soutien sans faille et sans qui je n'aurai pu mener mes recherches à bien ; à mes filles Danaé et Hélène que j'encourage à toujours faire preuve de curiosité envers le monde qui les entoure et à continuer à apprendre tout au long de leur vie.

Je tiens également, tout particulièrement, à remercier mon directeur de thèse, Abdel Ouahab Boudraa, pour la persévérance et la pédagogie dont il a fait preuve pour m'éclairer sur les problématiques et l'état de l'art des aspects abordés du traitement du signal lors de mes travaux de recherche. Au-delà de cet apport scientifique, je lui sais grès, plus encore, de la confiance qu'il m'a accordé et de l'amitié que nous avons développé, qui ont fondé les conditions d'un travail efficace et productif.

Mes remerciements vont ensuite vers Thomas Damay et François Kany, avec qui j'ai partagé la direction de la formation scientifique de l'école, pour leur disponibilité et leur appui quotidien, vers Thierry Chonavel et Antoine Laroche de Roussane pour la qualité et la richesse des échanges que nous avons menés, ainsi que vers mes rapporteurs, Yannick Deville et Pierre Borgnat pour leurs précieux conseils.

Je remercie également, pour les aménagements qui m'ont permis de mener de front mon activité professionnelle et mes travaux de recherche, la direction de l'École navale et de son institut de recherche, en particulier Benoît Baudonnière, François Lagrange, Jacques-André Astolfi, Éric Pagès et Sébastien Parisse. Le bon déroulement de ma thèse doit aussi beaucoup à l'École doctorale des sciences de la mer et du littoral, au sein de laquelle ma gratitude va à M^{mes} Elisabeth Bondu et Aurélie Claudepour leur disponibilité, leur efficacité et leur gentillesse.

Je remercie enfin tous mes collègues de l'École navale et de l'IRENav : enseignants-chercheurs, personnels détachés de l'éducation nationale, doctorants, contractuels, personnels civils et militaires. Cette diversité des parcours et des statuts a constitué un environnement de travail stimulant et convivial, propre à l'humilité et à la remise en question permanente, fondements d'une démarche de recherche.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Liste des figures	7
Liste des tableaux	11
Introduction	13
Publications et communications	16
1 Teager-Kaiser : un opérateur d'énergie	17
1.1 Le concept d'énergie	18
1.2 L'opérateur de Teager-Kaiser	21
1.3 Quelques propriétés de l'opérateur de Teager-Kaiser	26
1.4 Conclusion	46
2 Positivité de l'opérateur	47
2.1 Introduction	48
2.2 Influence de la concavité	49
2.3 Signaux de type AM-FM	53
2.4 Cas quadratique	61
2.5 Application des critères à un signal AM-FM quadratique	70
2.6 Application à un signal réel	72
2.7 Conclusion	80
3 Prise en compte du pas	87
3.1 motivation	88
3.2 Opérateur d'énergie prenant en compte le pas	89
3.3 Méthode ESA revisitée	103
3.4 Opérateur ${}^h\mathbf{T}$	108
3.5 Démodulation des signaux AM-FM	111
3.6 Mise en œuvre et comparaison des opérateurs ${}^h\mathbf{\Psi}$ et \mathbf{R}_{21}	112
3.7 Signal bruité et mise en œuvre de ${}^h\mathbf{T}$	117
3.8 Conclusion	124
4 Étude des densités	127
4.1 Introduction	128
4.2 Résultats préliminaires	130
4.3 Moments du signal bruité	139
4.4 Estimation du rapport signal sur bruit et détection	142
4.5 Comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser en présence d'un bruit gaussien	159
4.6 Conclusion	174

5 Bilan et perspectives	177
A Compléments sur les densités et les moments	181
A.1 Variables aléatoires semblables et densités homothétiques	181
A.2 Moments de la somme de deux variables aléatoires	183
A.3 Moments des puissances d'une loi normale	184
B Procédure de Savitsky-Golay	189
B.1 Position du problème	189
B.2 Discrétisation régulière	190
B.3 Fenêtrage	191
B.4 Polynôme glissant	192
B.5 Procédure de lissage de Savitsky-Golay	192
B.6 Calcul des coefficients de Savitsky-Golay	194
B.7 Exemple d'application	198

Liste des figures

1.1	Approximation linéaire de la fonction sinus dans l'intervalle $[0, \pi/4]$.	23
1.2	Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un bruit blanc.	27
1.3	Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un signal AM et détection de son enveloppe (superposé sur le signal AM).	29
1.4	Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un signal FM.	31
1.5	Réponse fréquentielle de l'opérateur de Teager-Kaiser.	34
1.6	Détection des pics d'un signal bruité par l'opérateur de Teager-Kaiser.	35
1.7	Démodulation d'un signal AM-FM par l'algorithme DESA-1a.	41
2.1	Signal pseudo-harmonique	49
2.2	Application de l'opérateur à un signal pseudo-harmonique	50
2.3	Limite de positivité dans le cas discret positif	51
2.4	Limite de positivité dans le cas discret négatif	51
2.5	Limite de courbure pour la positivité de l'opérateur	53
2.6	Limite de courbure pour la positivité de l'opérateur : zoom	53
2.7	Décomposition AM-FM d'un signal quelconque	54
2.8	Hyperboles obtenues en fonction de la phase du signal.	59
2.9	Quatre régions de positivité illustrant la dépendance de la sortie de ${}^c\Psi x(t)$ en fonction de $\theta(t)$.	59
2.10	Région de positivité dans le cas d'une phase linéaire délimitée par la courbe de $f(t)$.	60
2.11	Condition CS3 .	61
2.12	Interprétation géométrique de la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser appliqué à un signal quadratique.	64
2.13	Sortie négative de l'opérateur de Teager-Kaiser.	65
2.14	Intervalle critique de positivité de l'opérateur de Teager-Kaiser.	67
2.15	Région de positivité pour un signal quadratique défini sur \mathbb{R}^+ .	68
2.16	Chirp linéaire	69
2.17	Sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ pour un chirp quadratique.	71
2.18	Sortie de l'opérateur pour un signal vérifiant le Corollaire 3.3 .	71
2.19	Intervalle critique pour un signal ne vérifiant pas le Corollaire 3.3 .	72
2.20	Signal d'écholocalisation de chauve-souris	72
2.21	Teager-Kaiser logarithmique d'un signal réel	73
2.22	Teager-Kaiser logarithmique d'un signal réel lissé	73
2.23	Représentation logarithmique du signal démodulé et du critère de positivité	74
2.24	Approximation analytique de $\rho(t)$	75
2.25	Approximation analytique de $\omega(t)$ using $g_k(t)$	75
2.26	Critère CS1 appliqué à un signal analytique	76
2.27	Critère CS1 appliqué à un signal analytique - zoom	76
2.28	Comparaison du critère CS1 et de l'opérateur appliqué à un signal analytique	77
2.29	Comparaison du critère CS1 et de l'opérateur appliqué à un signal analytique	78
2.30	Comparaison du critère CS1 et de l'opérateur suréchantillonné	78
2.31	Rapport d'échantillonnage du signal de chauve-souris	79

2.32	Sensibilité de la positivité de l'opérateur à la phase initial du signal d'entrée	79
2.33	Influence des extrema locaux de la phase Φ	80
2.34	Etapas de la démodulation	83
3.1	Erreur relative due à l'approximation $\sin^2(\Omega) \simeq \Omega^2$ en fonction de r_e	88
3.2	$a^2\omega^2$ en fonction de r_e	89
3.3	${}^h\Psi$ en fonction de r_e pour un signal harmonique	91
3.4	${}^h\Psi$ pour un rapport d'échantillonnage petit	92
3.5	Reconstruction par Shannon	93
3.6	Influence sur Shannon de la largeur de fenêtre	93
3.7	Influence sur Shannon de la phase initiale	94
3.8	Influence sur Shannon du rapport d'échantillonnage	95
3.9	Sensibilité de la sortie de l'opérateur	96
3.10	Sensibilité de ${}^h\Psi s_n$ au fenêtrage	96
3.11	Sensibilité de ${}^h\Psi s_n$ au fenêtrage : coefficient de variation	97
3.12	Sensibilité de ${}^h\Psi$ au coefficient de rééchantillonnage	97
3.13	Sensibilité de la sortie de l'opérateur	98
3.14	Sortie de l'opérateur après rééchantillonnage ($r_e = 34, 1, N_F = 51$)	99
3.15	Sortie de l'opérateur après rééchantillonnage ($r_e = 19, 7, N_F = 51$)	100
3.16	Sortie de l'opérateur après rééchantillonnage ($r_e = 19, 7, N_F = 301$)	100
3.17	Signal à deux composantes	101
3.18	${}^h\Psi$ pour un signal à deux composantes	102
3.19	Filtrage par ${}^h\Psi$ d'un signal à deux composantes	102
3.20	Signal test AM-FM	112
3.21	Composantes du signal test AM-FM	113
3.22	Démodulation par ${}^d\Psi$ du signal test AM-FM échantillonné à 1 kHz	113
3.23	Démodulation du signal test AM-FM échantillonné à 440 Hz avec et sans rééchantillonnage	114
3.24	Rapports d'échantillonnage du signal test avant et après sur-échantillonnage	114
3.25	Démodulation par ${}^h\Psi$ du signal test AM-FM, échantillonné à 440 Hz puis sur-échantillonné	115
3.26	Comparaison des démodulations du signal test AM-FM par ${}^h\Psi$ et \mathbf{R}_{21}	115
3.27	Démodulations du signal test AM-FM par \mathbf{R}_{21} pour une fréquence d'échantillonnage de 700 Hz	116
3.28	Sur-échantillonnage du signal test AM-FM pour éviter le décrochage de l'opérateur \mathbf{R}_{21}	117
3.29	Efficacité comparée de la démodulation du signal test AM-FM, bruité à RSB=27 dB	118
3.30	Efficacité comparée de la démodulation du signal test AM-FM, bruité à RSB=15	118
3.31	Démodulation en amplitude du signal test AM-FM, bruité à RSB=17 dB, lissé et non lissé	119
3.32	Influence du bruit sur la démodulation	120
3.33	Influence du bruit sur la démodulation	120
3.34	Efficacité comparée de la démodulation du signal test AM-FM, bruité à RSB = 12 dB - version optimisée	121
3.35	Démodulation par ${}^h\Psi$ du signal test AM-FM, bruité à RSB = 2 dB, pour une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz - version optimisée	122
3.36	Variation du rapport signal sur bruit rectifié en fonction du rapport d'échantillonnage	123
3.37	Rapport signal sur bruit rectifié pour le signal test AM-FM	124
4.1	Densité d'un signal harmonique d'amplitude 1	128
4.2	Densité d'un bruit gaussien d'écart-type 1	129
4.3	Densités de probabilité d'un signal harmonique bruité par un bruit gaussien lorsque RSB varie de $-\infty$ à $+\infty$	129
4.4	Densités de probabilité d'un signal harmonique	134

4.5	κ de la somme d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien en fonction de RSB	142
4.6	Asymptotes de $\kappa(H + B)$	143
4.7	Asymptotes de $\kappa(H + B)$ - focus	143
4.8	Biais du Kurtosis empirique de $H + B$	144
4.9	Biais du kurtosis empirique de $H + B$ - focus	144
4.10	Variabilité des mesures du Kurtosis empirique	145
4.11	Dispersion des valeurs du Kurtosis empirique - échantillon de 500 points	146
4.12	Dispersion des valeurs du Kurtosis empirique - échantillon de 5000 points	147
4.13	Détection du signal source bruité à partir du Kurtosis empirique	147
4.14	Moments d'ordre 6 et 8 de la somme d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien en fonction de RSB	148
4.15	Comparaison des moments de $H + B$ en fonction de RSB	149
4.16	Comparaison des moments de $H + B$ en fonction de RSB - focus	149
4.17	Variance des moments d'un bruit gaussien en fonction de l'ordre	151
4.18	Variance relative des moments d'un bruit gaussien en fonction de l'ordre	152
4.19	Méthode des moments appliquée au Kurtosis de $H + B$ pour $RSB = 0$ dB	153
4.20	Méthode des moments appliquée au moment d'ordre 6 de $H + B$ pour $RSB = 0$ dB	154
4.21	Méthode des moments appliquée au moment d'ordre 8 de $H + B$ pour $RSB = 0$ dB	154
4.22	Méthode des moments appliquée au Kurtosis de $H + B$ pour $RSB = -3$ dB	155
4.23	Méthode des moments appliquée au Kurtosis et moment d'ordre 6 de $H + B$ pour $RSB = -5$ dB	155
4.24	Coefficient de variation de $ H + B $ en fonction de RSB	156
4.25	Skeweness et Kurtosis de $ H + B $ en fonction de RSB	157
4.26	Comparaison des kurtosis de $H+B$ et de $ H+B $	158
4.27	Comparaison des moments de $ H + B $	158
4.28	Densité du carré d'une loi normale	160
4.29	Densité d'une loi de Bessel	161
4.30	Densité de la sortie de l'opérateur appliqué à un bruit gaussien	161
4.31	Similarité de la loi de ${}^d\Psi B$ avec une loi log-Laplace asymétrique translatée	162
4.32	Densité de ${}^d\Psi B$ comparée à une loi normale	162
4.33	Comparaison des densités de la sortie de l'opérateur appliqué à des bruits gaussien pour différents écarts-types	163
4.34	Densités de la sortie de l'opérateur hD1a appliqué à un bruit gaussien	166
4.35	Partie conforme de la densités de la sortie de l'opérateur hD1a appliqué à un bruit gaussien	167
4.36	Comparaison des densités des opérateurs DESA appliqués à un bruit gaussien	168
4.37	Densité de R_{21} appliqué à un bruit gaussien	168
4.38	Densité de Δ_{pq} appliqué à un bruit gaussien	169
4.39	Densité de hT_D appliqué à un bruit gaussien	169
4.40	Densité de hT_D appliqué à un bruit gaussien	170
4.41	Utilisation directe de la méthode des moments dans des conditions de détections défavorables	171
4.42	Utilisation par l'intermédiaire de ${}^h\Psi$ de la méthode des moments dans des conditions de détections défavorables	172
4.43	Détection par la méthode du moment d'énergie	173
4.44	Variation du coefficient de variation de ${}^h\Psi S$ en fonction du rapport d'échantillonnage	173
4.45	Variation du coefficient de variation de ${}^h\Psi S$ en fonction du rapport signal sur bruit	173
4.46	Détection alternative par Δ_{21} pour les valeurs faibles de ${}^h\Psi$	174
4.47	Détection optimisée par la méthode du moment d'énergie	174
A.1	Densité de probabilité de la loi normale ($m = 2, \sigma = 1$)	181

B.1 Lisage par la procédure de Saviysky-Golay avec un polynôme d'ordre 2 et une fenêtre de 21 points	199
B.2 Lisage par la procédure de Saviysky-Golay avec un polynôme d'ordre 1 et une fenêtre de 25 points	199

Liste des tableaux

4.1	Comparaison des seuils de référence de détection d'un signal harmonique au sein d'un bruit gaussien pour différents moments	152
4.2	Comparaison des seuils de référence de détection d'un signal harmonique au sein d'un bruit gaussien en utilisant la valeur absolue du signal	157
4.3	Exemple de la répartition des valeurs non démodulables	170
A.1	Moments des puissances d'un bruit gaussien réduit	187
A.2	Moments des puissances d'un bruit gaussien d'écart-type σ	187
B.1	Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 2 et 3	197
B.2	Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 4 et 5	197
B.3	Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 6 et 7	198

Introduction

*« La contradiction existe au sein
du plus petit grain d'énergie. »*

Stéphane Lupasco

Sommaire

Le dictionnaire Larousse définit un signal comme tout signe, geste, cri, son, etc., destiné à avertir, à donner une consigne, un ordre. Ainsi, plus généralement, tout support d'une information peut être considéré comme un signal : la parole, l'image, la vidéo, les ondes électromagnétiques, ... Par extension encore, toute forme de données porteuses d'information peut être qualifiée de signal. Au-delà de l'existence d'un signal, la définition du Larousse fait également apparaître que l'information portée par ce signal doit être émise, captée et interprétée. L'interprétation, en particulier, peut être délicate car un signal capté peut provenir de sources multiples, être atténué, déformé, bruité,... d'où le besoin de traiter le signal afin d'en extraire l'information.

Depuis que Joseph Fourier (1768-1830) a interprété la diffusion de la chaleur comme une superposition d'harmoniques et développé une méthode d'analyse de ces composantes harmoniques [1], la nature des capteurs s'est diversifiée mais aussi et surtout, l'informatique est devenue le support privilégié de l'information. Indépendamment de leur interprétation physique, d'un point de vue mathématique, toute série de valeurs numériques peut alors être considérée comme la version discrète d'un signal et toute fonction d'une ou plusieurs variables, à valeurs dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , comme la version continue d'un signal. Traiter un signal initial vu comme une fonction discrète ou continue en le modifiant en une autre fonction discrète ou continue revient donc à l'application d'un ou plusieurs opérateurs agissant entre des espaces fonctionnels.

De nombreuses méthodes de traitement du signal s'attachent ainsi à « débruiter » des données, à les « séparer » en constituants significatifs, et à les « reconstruire » en tenant compte de la résolution limitée des instruments d'acquisition. L'opérateur de Teager-Kaiser présente la particularité d'estimer l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée d'un signal à partir de l'expression ponctuelle d'une fonction, dans sa version continue, ou de seulement trois occurrences d'une série de valeurs, dans sa version discrète. Il est ainsi bien adapté pour extraire l'information d'un signal dont les caractéristiques varient relativement rapidement au cours du temps. En raison de sa simplicité de mise en œuvre et de son excellente résolution temporelle, l'opérateur de Teager-Kaiser a ainsi donné lieu à de nombreux travaux de recherche et à une multitude d'applications concernant le traitement de la parole [2], [3], [4], [5], les télécommunications [6], [7], [8], [9], [10], [11], le multimédia [12], [13], [14], [15], [16], l'optique [17], le diagnostic [18], la biologie [19], [20], [21], [22] et l'acoustique [23], [24], [25].

La construction de l'opérateur de Teager-Kaiser est fondée sur une démarche inhabituelle, à savoir la prise en compte de l'énergie requise pour générer le signal et non directement l'information véhiculée par ce signal. Nous allons ainsi aborder, au chapitre 1, le concept d'énergie, quantité physique permettant de quantifier la capacité d'un système à modifier son état et produire du travail, avant de considérer la notion d'énergie au sens "traitement du signal" liée, elle, au contenu en information véhiculée. Nous nous intéresserons ensuite à l'énergie au sens de Teager et présenterons la genèse de l'opérateur dit de Teager-Kaiser, dont la sortie est proportionnelle à la quantité d'énergie nécessaire pour générer le signal. Nous examinerons ensuite le comportement de l'opérateur appliqué à différents signaux élémentaires, tels les signaux modulés. Puis, nous détaillerons et illustrerons la méthode de démodulation ESA (Energy Separation Algorithm) permettant, combinée à l'opérateur, d'estimer l'amplitude et la fréquence instantanées d'un signal. Nous présenterons enfin, dans ce premier chapitre, différentes extensions mathématiques de l'opérateur, adaptées à l'analyse de signaux uni-dimensionnels et multi-dimensionnels, à valeurs réelles ou complexes.

La nature différentielle et non-linéaire de l'opérateur de Teager-Kaiser ainsi que sa capacité à être combiné avec d'autres outils de traitement du signal (filtrage en sous-bandes, classification,...) soulèvent plusieurs difficultés pour lesquels des verrous scientifiques restent à lever. C'est le cas, en particulier, de la positivité de la sortie de l'opérateur qui, si elle est garantie dans le cas d'un signal harmonique ne l'est pas dans le cas général, ce qui rend problématique une interpréta-

tion en termes d'énergie. Le chapitre 2 est ainsi dévolu à la question de la positivité de l'opérateur. Nous étendrons les résultats déjà obtenus sur cette question [26], [27] et nous énoncerons un certain nombre de critères permettant de mieux cerner les caractéristiques des signaux pour lesquels la positivité de la sortie de l'opérateur peut être garantie. Nous nous intéresserons plus particulièrement à son application à des signaux AM-FM. Nous illustrerons ces critères en les appliquant à des signaux "chirp" [28] et à un signal réel. A l'occasion de cet exemple réel nous mettrons en évidence les causes de non positivité de la sortie de l'opérateur dues au bruit et à la [fréquence d'échantillonnage](#).

Nous nous intéresserons ensuite à la démodulation du signal. Les méthodes usuelles de démodulation d'un signal discrétisé s'appuient sur une suite de valeurs indicées considérées, à un changement de variable près, comme une suite temporelle de pas de discrétisation égal à 1. Ces méthodes ont été détaillées par Maragos et al. [29],[30]. Le pas de discrétisation influe pourtant sur la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser et le choix d'un pas égal à 1 n'exploite pas cette influence. C'est pourquoi nous proposerons une version revisitée de l'opérateur : ${}^h\Psi$, prenant en compte le pas. D'une part, combiné à un ré-échantillonnage du signal par la formule de Shannon [31], cet opérateur permettra d'adapter l'échantillonnage aux caractéristiques du signal; d'autre part, ${}^h\Psi$, en exploitant les sorties de l'opérateur pour différents pas, nous amènera à proposer de nouvelles versions de l'opérateur. En particulier nous introduirons l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ permettant d'éliminer, statistiquement, le bruit et ainsi d'obtenir une meilleure qualité de démodulation de l'amplitude et de la fréquence instantanée d'un signal en environnement bruité.

Puis, bien que l'opérateur de Teager-Kaiser soit, par construction, un opérateur local, nous nous intéresserons aux propriétés statistiques d'un signal, en entrée et en sortie de l'opérateur, dans un environnement bruité. La prise en compte du bruit est, en effet, directement liée à une approche statistique et l'étude des moments statistiques permet d'extraire des informations sur la nature du signal utile et sur celle du bruit. Or l'opérateur de Teager-Kaiser possède la propriété de diminuer la dispersion relative des valeurs à sa sortie et permet ainsi une meilleure discrimination des informations présentes dans le signal. En nous appuyant sur cette propriété nous serons ainsi amenés, à proposer une méthode de détection d'un signal faible en environnement bruité.

Enfin, nous présenterons les conclusions des résultats obtenus et dégagerons les perspectives ouvertes pour de futurs travaux.

Publications et communications

Revue Internationale

Y. Préaux, A.O. Boudraa and K.G. Larkin, "On the positivity of Teager-Kaiser's energy operator," *Signal Processing* (Accepté).

Y. Préaux and A.O. Boudraa, "Statistical behavior of Teager-Kaiser energy operator in presence of white Gaussian noise," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 27, no. 1, pp. 635-639, 2020.

Conférence Internationale

E.S. Diop, N.N. Gueye, **Y. Préaux** and A.O. Boudraa "Analysis of 2D Teager-Kaiser operator for Gaussian noisy images", *EUSIPCO 2022* (Soumis).

Conférences Nationales

Y. Préaux et A.O. Boudraa, "Discrétisation de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser revisitée" *GRETSI 2022* (Accepté)

A.O. Boudraa, **Y. Préaux**, J.C. Cexus, I. Fujino et L. Guillon, "Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée," *GRETSI, 4 pages, 2017, Juan Les Pins, France*.

Y. Préaux et A.O. Boudraa, "Sur la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser" *GRETSI, 4 pages, 2017, Juan Les Pins, France*.

Chapitre 1

Teager-Kaiser : un opérateur d'énergie

*« La contradiction existe au sein
du plus petit grain d'énergie »*

Stéphane Lupasco

Sommaire

1.1 Le concept d'énergie	18
1.1.1 Définition de l'énergie	18
1.1.2 Énergie et puissance d'un signal	19
1.1.3 Énergie de Teager-Kaiser	20
1.2 L'opérateur de Teager-Kaiser	21
1.2.1 Genèse d'un opérateur d'énergie	21
1.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser	22
1.2.3 Définitions de l'opérateur de Teager-Kaiser	24
1.3 Quelques propriétés de l'opérateur de Teager-Kaiser	26
1.3.1 Comportement de l'opérateur vis à vis d'un bruit	26
1.3.2 Application de l'opérateur à des signaux simples	27
1.3.3 Filtrage en sous-bandes	31
1.3.4 Analyse fréquentielle de l'opérateur de Teager-Kaiser	33
1.3.5 Séparation en énergie - cas continu	36
1.3.6 Séparation en énergie - cas discret	37
1.3.7 Exemples de démodulation	40
1.3.8 Les extensions de l'opérateur de Teager-Kaiser	42
1.3.9 Opérateurs d'énergie d'ordre supérieur	44
1.4 Conclusion	46

1.1 Le concept d'énergie

Le concept scientifique d'énergie est apparu avec Aristote ("Une force en action") et a fortement évolué au cours du temps [32], [33], [34], [35]. Thomas Young est le premier à avoir introduit, en 1800, le mot "énergie" en physique [36] puis on doit à Gustave Gaspard de Coriolis et à Jean-Victor Poncelet la définition, en 1828, du terme "travail", qui est une des formes "palpables" de l'énergie [37]. Vient ensuite la formulation, entre 1842 et 1847, de ce que nous appelons aujourd'hui la loi de conservation de l'énergie par Julius Robert von Mayer, James Prescott Joule et Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz. Ainsi, l'énergie ne peut être ni créée ni détruite; elle peut seulement être transformée d'une forme à une autre. L'exploitation du mot "énergie", en 1852, pour désigner toute sorte de "force" dans toutes les branches de la science revient à William Thomson Kelvin et William Rankine [38],[39]. Enfin, en 1905, Albert Einstein avec sa théorie de la relativité a établi l'équivalence générale de l'énergie et de la masse [40],[41]. Depuis cette date, le concept d'énergie a été généralisé sous la forme que nous utilisons aujourd'hui. Pour autant, l'énergie reste un concept abstrait [42],[43]. Bien qu'elle soit liée à la matière, l'énergie ne peut être définie qu'indirectement. La quantité d'énergie peut être associée à tout système (physique, biologique,...) et elle est fonction de divers paramètres caractérisant l'état de ce système. Pour être assimilé, le concept d'énergie suppose ainsi une familiarisation avec ses divers aspects et avec les phénomènes au sein desquels il intervient. Le prix Nobel, Richard Feynman déclara lors de ses conférences dans les années soixante : *"It is important to realize that in physics today we have no knowledge of what energy is"* [44]. Plus récemment, l'extension du concept d'énergie à de nouveaux domaines tels le traitement du signal ou la finance, atteste du caractère "universel" de cette quantité [45], [46], [47].

1.1.1 Définition de l'énergie

Le mot "énergie" vient du Grec ancien *energhia* qui signifie "force en action", c'est-à-dire la capacité à produire un mouvement et, donc, la capacité à effectuer un travail (une force agit et génère un changement). L'énergie peut être ainsi définie comme une grandeur physique qui représente et quantifie la capacité d'un système à modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, un rayonnement électromagnétique ou de la chaleur. L'énergie pure n'existe pas; suivant le système considéré, on associera à ce système, par exemple, une énergie mécanique, une énergie thermique ou une énergie électrique. La propriété fondamentale de l'énergie est de pouvoir se transférer d'un système à un autre ou, plus exactement, se convertir d'une forme en une autre, en vérifiant le principe de conservation suivant lequel, dans tous les cas, l'énergie totale d'un système isolé est conservée. Comme un système peut évoluer de différentes manières sous l'action de forces différentes, l'énergie se manifeste de différentes manières. L'énergie est ainsi observée indirectement par, par exemple, des variations de vitesse, de pression ou d'intensité électrique. En effet, la manifestation d'un phénomène tel le mouvement sous l'action d'une force implique non seulement que le système considéré possède de l'énergie intrinsèque, mais aussi qu'il y a transfert d'énergie. Pour autant, ce que l'on mesure n'est pas l'énergie en elle-même, mais sa variation. Lorsqu'on effectue le bilan d'énergie d'un système physique, on définit son énergie mécanique comme la somme de son énergie cinétique et de ses énergies potentielles. L'énergie totale du système s'écrit ainsi comme la somme de l'énergie mécanique et d'une énergie appelée énergie interne. En mécanique, l'énergie interne n'est pas prise en compte et l'énergie totale est alors la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. C'est sur ces deux quantités physiques qu'est fondé l'opérateur de Teager-Kaiser ainsi que nous le verrons plus loin. Puisque, dans un système isolé, l'énergie totale est toujours conservée (premier principe de la thermodynamique), toute consommation ou déperdition d'énergie est exclue.

Une autre quantité physique associée à un système et liée à l'énergie est la puissance, qui reflète la vitesse à laquelle un travail est fourni [48]. La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps que fournit un système à un autre système. On parle alors de débit d'énergie. Ainsi, si

deux systèmes différents fournissent le même travail, le plus puissant des deux est celui dont le délai d'accomplissement de ce travail est le plus faible.

1.1.2 Énergie et puissance d'un signal

Les notions d'énergie et de puissance, appliquées au domaine des signaux, sont très importantes en transmission et traitement de l'information véhiculée par un signal [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57]. En effet, toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie (Télécommunications) et dès lors qu'on effectue une mesure, le dispositif de mesure (métrologie et instrumentation) prélève de l'énergie au processus mesuré [50], [55]. De plus, dès lors qu'on aborde les propriétés des signaux ou leur classification, on est amené à faire appel aux concepts d'énergie et de puissance [52], [53], [54]. Différents systèmes physiques peuvent être utilisés pour introduire ces concepts [54]. Appuyons nous sur l'exemple, simple, d'un circuit électrique.

Considérons un système constitué d'un dipôle électrique parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une différence de potentiel $u(t)$. La puissance instantanée fournie à ce dipôle s'écrit

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (1.1)$$

et dans le cas d'une résistance linéaire R , la puissance est donnée par

$$p(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{1}{R} \cdot u^2(t) \quad (1.2)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ est l'intégrale de cette puissance instantanée, mesurée en joules :

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt, \quad (1.3)$$

et la puissance moyenne sur la durée $[t_1; t_2]$, mesurée en watts, s'écrit :

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{1}{R \cdot (t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad (1.4)$$

Par analogie, on définit l'énergie normalisée et la puissance moyenne normalisée d'un signal réel $x(t)$, calculée sur l'intervalle $[t_1; t_2]$, par les quantités quadratiques suivantes :

$$E_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt, \quad (1.5)$$

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt. \quad (1.6)$$

Ainsi, la puissance moyenne normalisée possède une dimension égale au carré de celle du signal $x(t)$. En multipliant encore par l'unité de temps, on obtient la dimension de l'énergie normalisée. Si le signal $x(t)$ est un courant ou une tension électrique, les relations (1.5) et (1.6) correspondent respectivement à l'énergie et la puissance dissipées par une résistance R de valeur 1 ohm, obtenues par les relations (1.2) et (1.3).

En étendant l'intervalle de temps à \mathbb{R} tout entier, les relations (1.5) et (1.6) se généralisent à tous les signaux, qu'ils soient à valeurs réelles ou complexes sous la forme :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.8)$$

La quantité $|x(t)|^2$ est appelée *puissance instantanée normalisée* du signal $x(t)$ à l'instant t car elle est implicitement rapportée à une résistance normalisée R de 1 ohm. Si l'intégrale de la relation (1.7) est convergente, on dit que le signal est à énergie finie, ce qui correspond aux signaux physiques et permet d'interpréter la quantité E_x comme une énergie dans de nombreuses situations physiques. On est cependant amené à manipuler également des signaux pour lesquels la quantité E_x est infinie. L'exemple le plus commun est celui des signaux périodiques qui sont très souvent utilisés comme modèles de phénomènes physiques. Pour cette classe de signaux, dits à puissance moyenne finie, on utilisera la relation (1.8). Cette quantité n'a pas d'utilité pour les signaux d'énergie finie qui possèdent une puissance moyenne nulle.

Pour les signaux d'énergie finie, la transformée de Fourier et son inverse sont définies, ce qui permet d'établir une nouvelle définition de l'énergie d'un signal $x(t)$. Soit ainsi,

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1.9)$$

on peut alors utiliser la valeur absolue au carré $|X(f)|^2$ des différentes fréquences comme mesure du niveau d'énergie rapporté à ces fréquences : la quantité $|X(f)|^2$ correspond à l'énergie que le signal contient à la fréquence f ; on parle de densité d'énergie par unité de fréquence. Le lien entre l'énergie calculée en temps et en fréquence est alors donné par la relation de Parseval :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df. \quad (1.10)$$

L'interprétation de la relation (1.10) est immédiate d'un point de vue physique : puisque l'énergie ne dépend pas du mode d'observation " t " ou " f ", cette relation traduit le fait que la quantité E_x est l'invariant énergie du signal dans les représentations temporelle et fréquentielle.

Remarque :

formellement, l'utilisation de la transformée de Fourier et de son inverse suppose que $x(t) \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$. Nous considérerons, comme c'est l'usage, que cette condition est vérifiée dans le cadre d'une application à des phénomènes physiques.

1.1.3 Énergie de Teager-Kaiser

Quand bien même les relations (1.7) et (1.8) permettent de mesurer l'activité d'un signal, il n'est pas immédiat d'appréhender comment le contenu en fréquence de ce signal intervient dans le calcul de son énergie et de sa puissance. En effet, la relation (1.10) montre que tous les échantillons, aussi bien en temps qu'en fréquence sont traités de manière indifférenciée, ce qui est physiquement surprenant. Par ailleurs, la définition de l'énergie en traitement du signal diffère de celle utilisée en physique, qui est une mesure du travail effectué (ou qui peut potentiellement être effectué), sans connaître directement ni avoir accès au système qui génère le signal. Enfin, la définition donnée par la relation (1.7) ne fait intervenir ni l'énergie potentielle ni l'énergie cinétique du signal ; elle est uniquement fondée sur le calcul des amplitudes du signal.

Cette limitation du concept d'énergie, au sens de la physique, en traitement du signal a été mise en avant dans le domaine du traitement de la parole par Herbert et Shushan Teager [58], [59], ainsi que par James Kaiser [60], [61]. Sur la base de preuves expérimentales, Herbert Teager et Shushan Teager ont mis en évidence la présence de processus non linéaires comme principaux mécanismes de production du son dans le conduit vocal pendant la phonation. En effet, les résultats présentés par les auteurs et en particulier la courbe d'énergie nécessaire à la production de la parole, ont montré que cette production provient de l'interaction, pendant la phonation, entre le vortex tourbillonnaire du flux d'air et la géométrie confinée du conduit vocal, cette interaction jouant le rôle d'oscillateur actif dans la réalisation des modulations [58], [59], [62]. Le modèle en résultant est ainsi fondamentalement non linéaire. Cependant, l'algorithme ou la méthode de calcul de l'énergie du système ayant généré le signal de parole n'a pas été explicitement présenté par les auteurs [59]. Ces mêmes auteurs ont également montré que les résonances (fréquences propres) ou formants du conduit vocal du signal de parole peuvent varier rapidement en fréquence et en amplitude [199], ces variations de caractéristiques du signal de parole pouvant être modélisées comme une combinaison linéaire de signaux AM-FM.

L'absence dans les travaux de Herbert et Shushan Teager de la méthode de calcul de l'énergie associée au signal de la parole a suscité l'intérêt de James Kaiser. Ce dernier [60] est parti du constat suivant : deux signaux acoustiques d'amplitude unité, l'un avec une fréquence de 1 Hz et le second à 1000 Hz ont la même énergie d'après la relation (1.7). Cependant l'énergie, vue comme le travail fourni nécessaire pour générer le signal acoustique de 1000 Hz, est bien plus importante que celle pour générer celui de 1 Hz [60]. Il a également observé, en étudiant une équation différentielle du second ordre, que l'énergie nécessaire pour générer une simple sinusoïde dépend à la fois de l'amplitude et de la fréquence. Il y a ainsi une différence fondamentale entre l'énergie véhiculée par le signal, ne prenant en compte que l'amplitude, et l'énergie produite par un système source pour générer ce signal. Afin de mieux comprendre la différence entre ces deux énergies, nous présentons dans ce qui suit le processus de génération du signal introduit par Herbert Teager et Shushan Teager [58],[59] ainsi que le calcul de l'énergie associée.

James Kaiser, pour expliquer cette différence d'énergie, s'appuie sur l'exemple simple d'un système constitué d'un oscillateur harmonique, au sein duquel l'énergie nécessaire pour créer le signal oscillant est proportionnelle au carré du produit de l'amplitude et de la fréquence du signal. Ce modèle correspond à celui de l'énergie nécessaire à la création d'un signal. James Kaiser a proposé ainsi une mesure de l'énergie, s'appuyant sur les travaux de Herbert et Shushan Teager, qui prend en compte non seulement l'amplitude mais également la fréquence du signal [60]. En utilisant cette définition, dite de Teager-Kaiser, des signaux d'amplitude unitaire possédant des fréquences différentes, présentent également des énergies différentes. Cette approche diffère également de la mesure usuelle de l'énergie car il s'agit d'une mesure instantanée et non sur un intervalle de temps. On dispose alors d'une énergie instantanée, fonction du temps, permettant de suivre les changements de l'énergie du signal et, donc, du système.

1.2 L'opérateur de Teager-Kaiser

1.2.1 Genèse d'un opérateur d'énergie

Beaucoup de systèmes physiques réels pour lesquels l'influence des frottements est négligeable se comportent comme des systèmes oscillants et peuvent être modélisés par des oscillateurs harmoniques [63]. Le système masse-ressort constitue un modèle simplifié d'oscillateur harmonique permettant d'introduire dans de nombreux domaines des phénomènes plus complexes, par exemple en mécanique, en électricité, en électronique ou en optique. Cet oscillateur permet de décrire l'évolution du système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable par une fonction oscillante dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques du système et dont l'amplitude est constante. Pour calculer l'énergie totale d'un signal, James Kaiser suppose ainsi que

le modèle de la source est analogue à ce simple système ressort-masse, pour lequel la physique newtonienne décrit l'énergie totale du système en mouvement comme la somme de l'énergie potentielle du ressort et de l'énergie cinétique de la masse.

Considérons l'oscillateur mécanique libre formé par une masse m suspendue à un ressort de raideur K . La position de la masse à l'instant t , repérée par rapport à sa position d'équilibre est notée $x(t)$. L'application du principe fondamental de la dynamique à ce système permet d'écrire :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{K}{m} x(t) = 0. \quad (1.11)$$

Cette équation différentielle du second ordre (Eq. 1.11) décrit un mouvement d'oscillation de la masse autour de sa position d'équilibre. La fréquence d'oscillation de ce mouvement est donnée par $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et ne dépend pas de l'amplitude initiale de déplacement de la masse. La solution de l'équation différentielle (Eq. 1.11) est une oscillation donnée par

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (1.12)$$

où A est l'amplitude des oscillations et ϕ la phase initiale. Le mouvement est qualifié d'harmonique, de pulsation propre ω_0 , caractéristique du système.

En multipliant la relation (1.11) par $\frac{dx(t)}{dt}$ on obtient

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{K}{m} \frac{dx(t)}{dt} x(t) = 0. \quad (1.13)$$

Soit encore, en multipliant par m

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} x^2(t) \right]}_{=\text{Constante}} = 0. \quad (1.14)$$

La quantité entre crochets, n'est autre que l'énergie totale E_x du système oscillateur harmonique, c'est à dire la somme de l'énergie cinétique de la masse et l'énergie potentielle du ressort :

$$E_x = \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{K}{2} x^2(t). \quad (1.15)$$

La relation (1.15) traduit le fait qu'il y a conservation de l'énergie totale du système. En remplaçant la solution $x(t)$ donnée par (1.12) dans (1.14) on obtient

$$E_x = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \propto \omega_0^2 A^2. \quad (1.16)$$

La relation (1.16) montre que l'énergie de l'oscillateur est proportionnelle au carré de l'amplitude et au carré de la pulsation des oscillations [60]. La valeur de E_x correspond à l'énergie du système masse-ressort nécessaire pour générer le signal sinusoïdal $x(t)$. Ce résultat coïncide avec les observations expérimentales de Herbert et Shushan Teager et va conduire à la genèse de l'opérateur, dit de Teager-Kaiser.

1.2.2 Algorithme de Teager-Kaiser

Herbert et Shushan Teager se sont alors intéressés à un signal harmonique discrétisé. Soit $x(nT_e)$ la version discrète de l'oscillation de $x(t)$ où T_e est la période d'échantillonnage et $f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage. Par un changement d'échelle ramenant les abscisses à des valeurs entières, nous allons noter le signal discrétisé sous la forme

$$x(n) = A \cos(\Omega n + \phi) \quad (1.17)$$

où $\Omega = \frac{2\pi f}{f_e}$ est la pulsation en radians par échantillon et f la fréquence continue. La relation (1.17) a trois paramètres à savoir, A , Ω et ϕ qu'il est possible d'estimer moyennant trois échantillons, par exemple $x(n-1)$, $x(n)$ et $x(n+1)$ dont les valeurs correspondantes du signal sont données par

$$\begin{aligned} x(n-1) &= A \cos(\Omega(n-1) + \phi) \\ x(n) &= A \cos(\Omega n + \phi) \\ x(n+1) &= A \cos(\Omega(n+1) + \phi) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \quad (1.19)$$

avec $\alpha = \Omega n + \phi$ et $\beta = \Omega$, on obtient

$$\cos^2(\Omega n + \phi) - \cos(\Omega(n+1) + \phi) \cos(\Omega(n-1) + \phi) = \sin^2 \Omega. \quad (1.20)$$

Il suffit alors de multiplier les deux membres de la relation (1.20) par A pour identifier les expressions de $x(n)$, $x(n+1)$ et $x(n-1)$ (relations 1.18) et obtenir

$$x^2(n) - x(n-1)x(n+1) = A^2 \sin^2(\Omega). \quad (1.21)$$

Notons que, pour une valeur du membre de gauche de l'égalité (1.21) fixée, il existe une infinité de valeurs de Ω vérifiant l'égalité. Cette valeur est unique en restreignant les solutions à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui revient à supposer le rapport d'échantillonnage $r_e = \frac{f_e}{f}$ au moins égal à 4.

Par ailleurs, pour des faibles valeurs de Ω , nous avons l'approximation $\sin(\Omega) \approx \Omega$. Si nous nous limitons à des valeurs de Ω telles que $\Omega < \frac{\pi}{4}$, et donc $r_e > 8$, l'erreur relative commise $\frac{|\sin(\Omega) - \Omega|}{\sin(\Omega)}$ en approchant $\sin(\Omega)$ par Ω reste inférieure à 10%; ce résultat est illustré par la figure (1.1).

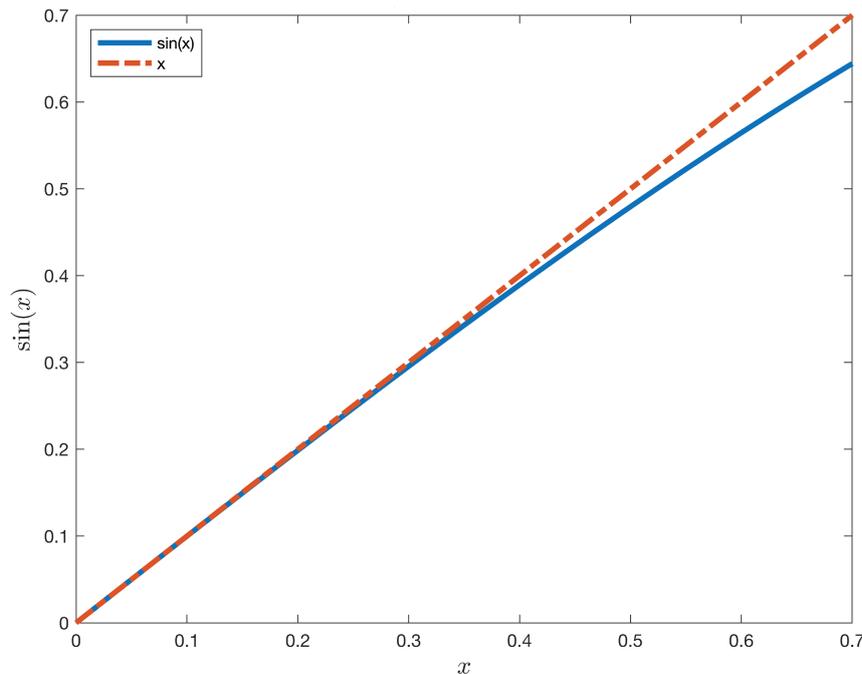


FIGURE 1.1 – Approximation linéaire de la fonction sinus dans l'intervalle $[0, \pi/4]$.

Ainsi, en acceptant cette erreur relative, l'expression (1.21) est approchée par

$$E_x(n) = x^2(n) - x(n-1)x(n+1) \approx A^2\Omega^2. \quad (1.22)$$

La quantité $E_x(n)$, donne ainsi une mesure interprétable comme l'énergie du signal $x(n)$ dès lors que le rapport d'échantillonnage est supérieur à 8, c'est-à-dire dès lors que la fréquence d'échantillonnage est supérieure à quatre fois la fréquence de Shannon. L'estimation de l'énergie instantanée du signal par la formule

$$E_x(n) \approx x^2(n) - x(n-1)x(n+1). \quad (1.23)$$

est qualifiée d'algorithme de Teager-Kaiser. On considère usuellement que l'approximation est acceptable pour une erreur inférieure à 10%, c'est à dire pour une fréquence d'échantillonnage au moins égale à 4 fois la fréquence de Shannon [64], ce qui revient également à disposer d'au moins deux échantillons dans chaque quart du cycle de l'oscillation sinusoïdale. Notons que l'estimation de l'énergie E_x suppose que le signal $x(t)$ est mono-composante. L'algorithme est facile et rapide à mettre en œuvre car il ne nécessite que trois échantillons. Enfin, notons la différence entre l'énergie véhiculée par le signal et celle pour le générer :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^2(n) \neq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x^2(n) - x(n-1)x(n+1)) \quad (1.24)$$

1.2.3 Définitions de l'opérateur de Teager-Kaiser

Opérateur continu

Bien qu'historiquement la version discrète de l'opérateur de Teager-Kaiser ait été définie avant la version continue, il est plus naturel de commencer par présenter cette dernière.

Définition L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser d'un signal à temps continu et à valeurs réelles, ${}^c\Psi$ est défini par :

$${}^c\Psi : x \longmapsto {}^c\Psi x : t \longmapsto \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - x(t) \frac{dx^2(t)}{dt^2}. \quad (1.25)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et afin d'alléger les notations nous noterons la sortie de l'opérateur ${}^c\Psi x(t)$ au lieu de $({}^c\Psi x)(t)$.

La relation (1.25) montre que l'opérateur de Teager-Kaiser est un opérateur différentiel non-linéaire dont l'expression fait intervenir le signal ainsi que ses dérivées première et seconde. On parle d'opérateur instantané.

Appliquons maintenant l'opérateur ${}^c\Psi$ à un signal sinusoïdal $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. On a

$$\begin{aligned} {}^c\Psi x(t) &= A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) - A \sin(\omega t + \phi) \times -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) \\ &= A^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

En combinant (1.16) et (1.26) on a ainsi

$$E_x = \frac{m}{2} \cdot {}^c\Psi x(t). \quad (1.27)$$

En d'autres termes, lorsque ${}^c\Psi$ est appliqué à un signal harmonique, la sortie est constante et égale à l'énergie de la source produisant l'oscillation. Pour cette raison ${}^c\Psi$ est qualifié d'opérateur d'énergie.

Opérateur discret

Plusieurs schémas aux différences finies permettent de discrétiser la version continue de l'opérateur ${}^c\Psi$. Nous allons procéder comme suit. Soit un pas de discrétisation h , pour un temps t quelconque, en notant $x_{n-1} = x(t-h)$, $x_n = x(t)$ et $x_{n+1} = x(t+h)$, on a

$$\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_n - x_{n-1}}{h} \simeq \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \quad (1.28)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \simeq \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2}. \quad (1.29)$$

$$(1.30)$$

Par conséquent

$${}^c\Psi x(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - x(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} \simeq \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{h} \right) \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{h} \right) - x_n \cdot \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2}, \quad (1.31)$$

d'où, en développant

$${}^c\Psi x(t) \simeq \frac{x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{h^2} \quad (1.32)$$

En considérant x_{n-1} , x_n et x_{n+1} comme trois échantillons consécutifs de $x(t)$ et procédant à un changement de variable, comme pour (1.17), ramenant à l'unité l'écart h entre les échantillons, on obtient alors la définition de l'opérateur discret de Teager-Kaiser.

Définition Soit $x(n)$ un signal discret à valeurs réelles, la version discrète ${}^d\Psi$ de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser est définie par :

$${}^d\Psi x(n) = x^2(n) - x(n-1)x(n+1). \quad (1.33)$$

Dans le cas d'un signal harmonique, on retrouve par la relation (1.21), la propriété, similaire à celle de l'opérateur continu :

$${}^d\Psi x(n) = A^2 \sin^2(\Omega) \simeq A^2 \Omega^2 \text{ pour } \Omega \text{ petit}. \quad (1.34)$$

La relation (1.33) montre une propriété importante de l'opérateur de Teager-Kaiser qui est son caractère instantané dans le sens où trois échantillons seulement, à savoir $x(n-1)$, $x(n)$ et $x(n+1)$, suffisent à estimer l'énergie à chaque instant discrétisé. Cette résolution temporelle permet de capturer les fluctuations d'énergie et, également, d'estimer la fréquence instantanée d'un signal non-stationnaire. La plupart des travaux de la littérature portant sur l'opérateur de Teager-Kaiser et ses différentes extensions d'ordre supérieur se limitent à des schémas de discrétisation avec un pas de discrétisation (ou pas temporel) $h = 1$. L'opérateur dans sa formulation est fonction de valeurs indicées qui ne tiennent pas compte directement de la fréquence d'échantillonnage. Nous généralisons au chapitre 3 les schémas de discrétisations de l'opérateur avec un pas temporel h correspondant à la période d'échantillonnage du signal, revisitant ainsi la version classique de l'opérateur et les méthodes de démodulation associées.

Précisions sur les notations :

Soit $[[1; N]]$ un intervalle de \mathbb{N} , un signal discret est une suite $(x_n)_{n \in [[1; N]]}$ de l^2 telle que $x_n = x(t_n)$ où x est un signal continu et où $(t_n)_{n \in [[1; N]]}$ est une suite arithmétique de raison h . h est le pas (fixe) d'échantillonnage et $f_e = \frac{1}{h}$ la fréquence d'échantillonnage.

L'opérateur discret de Teager Kaiser, ${}^d\Psi$, est défini formellement par :

$$\begin{aligned}
 {}^d\Psi &: l^2(\llbracket 1; N \rrbracket) \rightarrow l^2(\llbracket 2; N-1 \rrbracket) \\
 (x_p) &\mapsto ({}^d\Psi(x_p))_n \quad \text{avec} \quad {}^d\Psi(x_p)_n = x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et afin d'alléger les notations nous noterons, par abus de langage, ${}^d\Psi x_n$ la suite des valeurs de sortie de l'opérateur au lieu de $({}^d\Psi(x_p))_n$ et ${}^d\Psi x(n)$ au lieu de ${}^d\Psi(x_p)_n$.

1.3 Quelques propriétés de l'opérateur de Teager-Kaiser

1.3.1 Comportement de l'opérateur vis à vis d'un bruit

L'opérateur, par sa nature différentielle, est sensible au bruit. Afin d'analyser le comportement de l'opérateur ${}^c\Psi$ lorsqu'il est appliqué à un signal bruité, il est utile auparavant de considérer la situation dans laquelle il est excité uniquement par du bruit. Soit $b(t)$ un processus gaussien de moyenne nulle, stationnaire au sens large (SSL), l'opérateur s'écrit :

$${}^c\Psi b(t) = \dot{b}^2(t) - b(t)\ddot{b}(t). \tag{1.36}$$

Les dérivées de ce processus, $\dot{b}(t)$ et $\ddot{b}(t)$, dans ce cas, sont également des processus gaussiens SSL [65] et on a :

$$\mathbf{E}[{}^c\Psi b(t)] = \mathbf{E}[\dot{b}^2(t)] - \mathbf{E}[b(t)\ddot{b}(t)]. \tag{1.37}$$

Par ailleurs, la corrélation croisée des dérivées respectives d'ordre m et d'ordre n de processus SSL $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par la relation suivante [65] :

$$\mathbf{E}[x^{(m)}(t+\tau)y^{(n)}(t)] = (-1)^n \frac{d^{m+n}R_{xy}(\tau)}{d\tau^{m+n}}. \tag{1.38}$$

En combinant (1.37) et (1.38), on obtient alors

$$\mathbf{E}[{}^c\Psi b(t)] = -R_{bb}^{(2)}(0) - R_{bb}^{(2)}(0) \tag{1.39}$$

$$= -2R_{bb}^{(2)}(0). \tag{1.40}$$

Ainsi, l'espérance mathématique du processus aléatoire $\Psi(b(t))$ est le double de la variance du processus $\dot{b}(t)$. Si $b(t)$ un est processus gaussien SSL et centré avec une fonction d'auto-corrélation $R_{bb}(\tau) = q^2\delta(\tau)$, l'espérance mathématique du processus $\Psi(b(t))$ est donnée par

$$\mathbf{E}[\Psi(b(t))] = -2q^2\delta(0) = -2q^2 \tag{1.41}$$

La figure (1.2) représente la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser $\mathbb{E}[\Psi(b(t))]$ pour $b(t)$ un bruit blanc gaussien. À une normalisation près, c'est une impulsion de Dirac à l'origine. Ce résultat est analogue à celui de l'auto-corrélation d'un bruit blanc.

Faisons maintenant le même calcul sur la sortie de l'opérateur à un signal $s(t)$ entaché d'un bruit additif $b(t)$. Soit l'observation suivante

$$x(t) = s(t) + b(t) \tag{1.42}$$

où $s(t)$ est un signal non bruité et $b(t)$ un bruit blanc gaussien centré de variance $R_{bb}(0)$. Les signaux $s(t)$ et $b(t)$ sont supposés statiquement indépendants. L'espérance mathématique de $\Psi(x(t))$ est donnée par

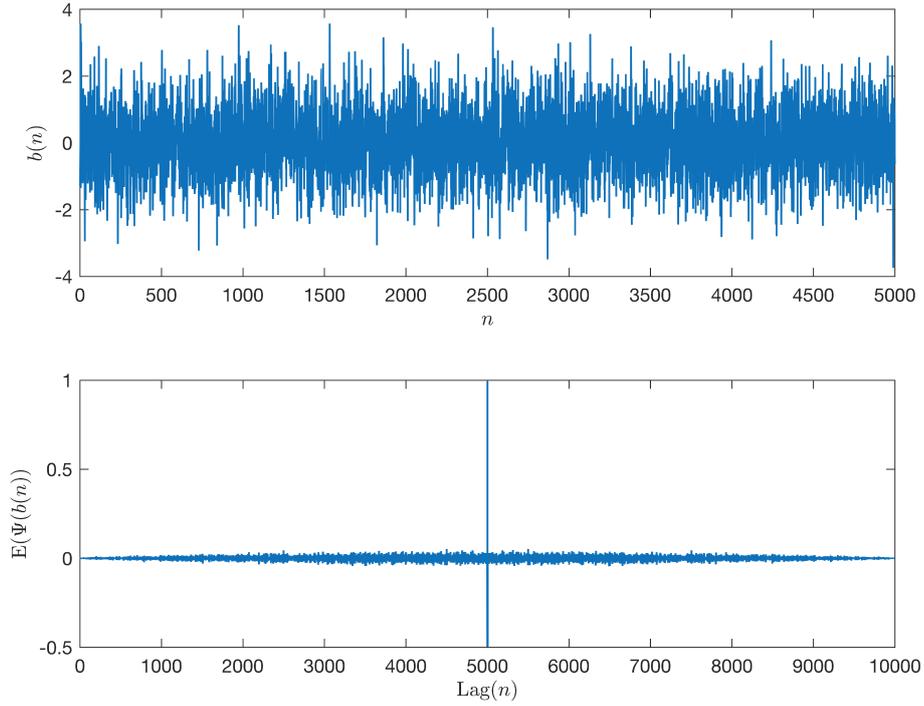


FIGURE 1.2 – Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un bruit blanc.

$$\mathbf{E}[\Psi(x(t))] = \mathbf{E}[\Psi((\dot{s}(t) + \dot{b}(t))^2)] - \mathbf{E}[\Psi(((s(t) + b(t)))(\ddot{s}(t) + \ddot{b}(t)))] \quad (1.43)$$

$$= \mathbf{E}[\Psi(s(t))] + \mathbf{E}[\Psi(b(t))] + \underbrace{\mathbf{E}[\Psi(2\dot{b}(t)\dot{s}(t) - s(t)\ddot{b}(t) - b(t)\ddot{s}(t))]}_{\text{Termes-croisés}} \quad (1.44)$$

Comme $s(t)$ et $b(t)$ sont indépendants, les termes croisés sont nuls. Ainsi,

$$\mathbf{E}[\Psi(x(t))] = \mathbf{E}[\Psi(s(t))] - 2R_{bb}^{(2)}(0). \quad (1.45)$$

En environnement bruité, l'estimation de l'énergie de Teager-Kaiser est biaisée par le double de la variance du processus $\dot{b}(t)$. En général, l'opérateur de Teager-Kaiser est sensible au bruit car c'est un opérateur différentiel. Nous présenterons au chapitre 4 une analyse détaillée du comportement de l'opérateur en présence d'un bruit blanc, donnerons l'expression de sa densité probabilité et calculerons ses statistiques d'ordre supérieur. À notre connaissance, c'est la première analyse statistique de la littérature sur le comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser [66].

1.3.2 Application de l'opérateur à des signaux simples

La construction de l'opérateur de Teager-Kaiser est fondée au départ sur les propriétés des oscillations sinusoïdales dont les paramètres d'amplitude, de fréquence et de phase sont des constantes. Nous allons présenter dans cette sous-section, le comportement de la sortie de l'opérateur lorsqu'il est appliqué à des signaux dont la fréquence ou l'amplitude varie dans le temps ou les deux en même temps. Considérons en premier lieu le comportement de l'opérateur ${}^c\Psi$ appliqué au produit de deux signaux.

Produit de deux signaux

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à valeurs réelles. La sortie de l'opérateur est donnée par

$${}^c\Psi[xy](t) = \left(\frac{d}{dt}(x(t)y(t)) \right)^2 - \frac{d^2}{dt^2}(x(t)y(t)), \quad (1.46)$$

ce qui, en développant, conduit immédiatement à la relation

$${}^c\Psi[xy](t) = x^2(t){}^c\Psi y(t) + y^2(t){}^c\Psi x(t). \quad (1.47)$$

Cette propriété est utile pour l'application de l'opérateur à un certain nombre de signaux, en particulier à des signaux modulés : AM, FM, PM et AM-FM.

Signal d'amplitude exponentielle modulé par une sinusoïde

Considérons en premier lieu un signal exponentiel de la forme $e(t) = e^{-at}$. On constate immédiatement que $(\dot{e}(t))^2 - e(t)\ddot{e}(t) = 0$. On a donc

$${}^c\Psi e(t) = 0 \quad (1.48)$$

Soit maintenant un signal de la forme $x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \phi)$. En posant $e(t) = e^{-at}$ et $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, on a alors $x(t) = e(t)y(t)$ et en appliquant la relation (1.47) et le résultat (1.48) précédent, on a alors

$${}^c\Psi x(t) = e^2(t){}^c\Psi y(t) + y^2(t){}^c\Psi e(t) = e^2(t){}^c\Psi y(t) = e^{-2at} A^2 \omega^2 = e^{-2at} {}^c\Psi [A \cos(\omega t + \phi)]. \quad (1.49)$$

L'expression obtenue est valable quel que soit le signe de a mais seul $a > 0$, correspond, en dehors éventuellement d'intervalles de temps limités, à des signaux physiques. Pour $a > 0$ la sortie de l'opérateur appliquée à $x(t)$ est un amortissement de celle appliquée à un signal purement sinusoïdal :

$${}^c\Psi [e^{-at} . A \cos(\omega t + \phi)] = e^{-2at} . {}^c\Psi [A \cos(\omega t + \phi)]. \quad (1.50)$$

Signaux modulés

La transmission d'un signal porteur d'informations (message, signal utile ou signal informatif) dans la bande passante d'un canal de communication (fibres optiques, radio mobiles, ...), impose de transposer la gamme de fréquence occupée par le signal dans la bande passante propre du canal [54]. La modulation est une méthode permettant de transformer un signal utile sous une forme qui lui permette d'être transmis dans un tel canal de transmission. En effet, le signal utile est limité en largeur de bande fréquentielle et un moyen de réaliser cette transposition consiste à moduler un signal appelé porteuse par le signal contenant l'information, c'est-à-dire de faire varier une des caractéristiques (amplitude, phase ou fréquence) de cette porteuse en fonction du signal utile. On qualifie le signal obtenu de porteuse modulée, le signal utile de signal modulant et le domaine spectral occupé par le signal utile est appelé signal en bande de base (spectre centré en zéro).

La valeur de la fréquence de la porteuse est en général beaucoup plus élevé que celle du signal utile. Les types usuels de modulation sont : la modulation d'amplitude (AM pour amplitude modulation), la modulation de phase (PM pour phase modulation), la modulation de fréquence (FM pour frequency modulation) et la modulation en amplitude et en fréquence (AM-FM pour amplitude and frequency modulations). Pour chacun de ces types de modulation nous allons calculer la sortie de l'opérateur. Nous présenterons un peu plus loin (paragraphe 1.3.5) la méthode de démodulation ESA (Energy Separation Algorithm), adaptée à ces types de signaux .

Signal AM

Soit $x(t)$ un signal AM, obtenu en modifiant la porteuse par une fonction linéaire :

$$x(t) = A \underbrace{[1 + \kappa m(t)]}_{a(t)} \cos(\omega_c t + \phi) \quad (1.51)$$

où $m(t)$ est le signal modulant ($-1 \leq m(t) \leq +1$), A est l'amplitude du signal, κ est le facteur de modulation ($0 \leq \kappa \leq +1$), $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est la fréquence de la porteuse et ϕ est la phase initiale. La fonction $a(t)$ est l'amplitude instantanée du signal modulé $x(t)$. $a(t)$ est un signal enveloppe - on parle d'enveloppe AM - qui varie plus lentement que la porteuse. .

En utilisant la propriété (1.47), la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser, ${}^c\Psi$, appliqué à un tel signal AM s'écrit alors

$${}^c\Psi x(t) = a^2(t) {}^c\Psi[\cos(\omega_c t + \phi)] + \cos^2(\omega_c t + \phi) {}^c\Psi[a(t)] \quad (1.52)$$

$$= \underbrace{a^2(t)\omega_c^2}_{D(t)} + \underbrace{\cos^2(\omega_c t + \phi) {}^c\Psi a(t)}_{E_r(t)} \quad (1.53)$$

$$= a^2(t)\omega_c^2 \left[1 + \cos^2(\omega_c t + \phi) \frac{{}^c\Psi a(t)}{a^2(t)\omega_c^2} \right] \quad (1.54)$$

$$= a^2(t)\omega_c^2 [1 + \epsilon(t)]. \quad (1.55)$$

Dans ce contexte, la sortie de l'opérateur permet d'estimer l'enveloppe du signal, à savoir $|a(t)|$, qui est comprise dans le terme $D(t)$. La condition $E_r(t) \ll D(t)$, équivalente à $\Psi[a(t)] \ll (a(t)\omega_c)^2$, est vérifiée si $a(t)$ est un signal à bande étroite dont la fréquence maximale ω_a vérifie $\omega_a \ll \omega_c$ [30], [29]. Ainsi, si le signal AM $x(t)$ (ou $a(t)$) est à bande étroite, nous avons

$${}^c\Psi x(t) \approx a^2(t)\omega_c^2, \quad (1.56)$$

ce qui permet d'en déduire

$$|a(t)| \propto \sqrt{{}^c\Psi x(t)}. \quad (1.57)$$

L'opérateur de Teager-Kaiser agit ainsi comme un *détecteur d'enveloppe* quand il excité par un signal AM à bande étroite. La figure (1.3) illustre la réponse de l'opérateur à un signal AM dont l'enveloppe est une fonction sinusoïdale. Notons la capacité de poursuite de la modulation AM par l'opérateur (Fig. 1.3(b)) ainsi que la détection d'enveloppe (Eq. 1.57) illustrée par la figure (1.3(c)).

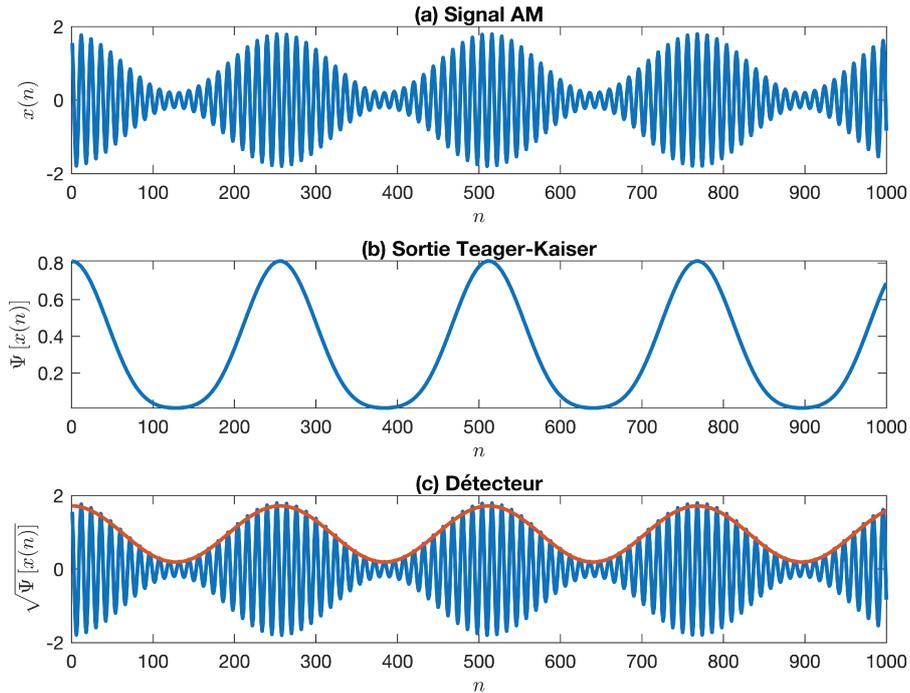


FIGURE 1.3 – Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un signal AM et détection de son enveloppe (superposé sur le signal AM).

Signal FM

Soit $x(t)$ un signal FM, modélisé par la combinaison d'une porteuse et d'un signal modulant en bande de base; la fréquence de la porteuse étant modifiée comme suit par le signal modulant :

$$x(t) = A \cos(\phi(t)) = A \cos\left(\omega_c t + \omega_m \int_0^t m(\tau) d\tau + \theta\right), \quad (1.58)$$

avec

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_c + \omega_m m(t), \quad (1.59)$$

$$\phi(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau + \theta, \quad (1.60)$$

où $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est la fréquence de la porteuse, $m(t)$ est le signal modulant à bande de base ($-1 \leq m(t) \leq +1$), A est l'amplitude du signal, $\omega_i(t)$ est la fréquence instantanée du signal, $\phi(t)$ est la phase instantanée du signal et $\theta = \phi(0)$ est la phase initiale. ω_m est la déviation maximale en fréquence ($\omega_m < \omega_c$) de $\omega_i(t)$ par rapport à ω_c . On a ainsi $0 < \omega_c - \omega_m \leq \omega_i(t) \leq \omega_c + \omega_m < 2\omega_c$. La déviation est choisie de manière à ce que le signal modulant varie lentement en fréquence par rapport au signal de la porteuse $\cos(\omega_c t)$.

La sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ pour un tel signal FM est alors

$${}^c\Psi x(t) = A^2 \dot{\phi}^2(t) \sin^2(\phi(t)) - A \cos(\phi(t)) \left[-A \cos(\phi(t)) \dot{\phi}^2(t) - A \sin(\phi(t)) \ddot{\phi}(t) \right] \quad (1.61)$$

$$= A^2 \dot{\phi}^2(t) + A^2 \cos(\phi(t)) \sin(\phi(t)) \ddot{\phi}(t) = \underbrace{A^2 \dot{\phi}^2(t)}_{D(t)} + \underbrace{A^2 \ddot{\phi}(t) \frac{\sin(2\phi(t))}{2}}_{E_r(t)} \quad (1.62)$$

$$= A^2 \dot{\phi}^2(t) \left[1 + \frac{\ddot{\phi}(t)}{2\dot{\phi}^2(t)} \sin(2\phi(t)) \right] = A^2 \dot{\phi}^2(t) \left[1 + \epsilon(t) \right] \quad (1.63)$$

L'opérateur de Teager-Kaiser, appliqué à un signal FM, permet d'estimer la fréquence instantanée de ce signal par la démodulation en fréquence de ce signal. En effet, comme dans le cas d'un signal AM, la condition $E_r(t) \ll D(t)$, équivalente à $\ddot{\phi}(t) \ll 2\dot{\phi}^2(t)$, est vérifiée lorsque $x(t)$ est un signal à bande étroite ($\omega_m \ll \omega_c$) [30], [29]. Ainsi, si le signal FM $x(t)$ (ou $m(t)$) est à bande étroite, la sortie de l'opérateur est approchée par la relation

$${}^c\Psi x(t) \propto \dot{\phi}^2(t) = \omega_i^2(t) \quad (1.64)$$

Cette relation est illustrée par la figure (1.4) qui présente la réponse de l'opérateur à une entrée de type chirp. Nous observons une sortie quadratique conforme à l'approximation (1.64). Nous constatons ici la capacité de l'opérateur à poursuivre la modulation du signal chirp et, également, l'estimation de la fréquence instantanée.

Signal AM-FM

Rappelons que les signaux AM-FM permettent de modéliser de très nombreux phénomènes physiques et biologiques, tels, par exemple, des systèmes de transmission et de détection comme le Radar et le Sonar. La modélisation d'un tel signal, $x(t)$ consiste en un signal FM dont l'amplitude varie comme l'enveloppe d'un signal AM :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t)) = a(t) \cos\left(\omega_c t + \omega_m \int_0^t m(\tau) d\tau + \theta\right) \quad (1.65)$$

En utilisant les relations (1.47) et (1.64), la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser pour ce type de signal s'écrit alors

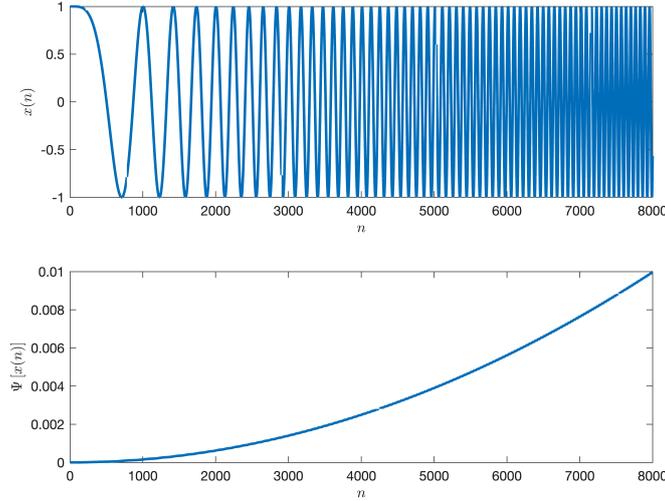


FIGURE 1.4 – Réponse de l'opérateur de Teager-Kaiser à un signal FM.

$${}^c\Psi x(t) = a^2(t) \left[\dot{\phi}^2(t) + \ddot{\phi}(t) \frac{\sin(2\phi(t))}{2} \right] + \cos^2(\phi(t)) {}^c\Psi a(t) \quad (1.66)$$

$$= \underbrace{a^2(t)\dot{\phi}^2(t)}_{D(t)} + \underbrace{a^2(t)\ddot{\phi}(t) \frac{\sin(2\phi(t))}{2} + \cos^2(\phi(t)) {}^c\Psi a(t)}_{E_r(t)} \quad (1.67)$$

$$= a^2(t)\dot{\phi}^2(t) \left[1 + \frac{\ddot{\phi}(t)}{2\dot{\phi}^2(t)} \sin(2\phi(t)) + \frac{{}^c\Psi a(t)}{a^2(t)\dot{\phi}^2(t)} \cos^2(\phi(t)) \right] \quad (1.68)$$

$$= a^2(t)\dot{\phi}^2(t) [1 + \epsilon(t)] \quad (1.69)$$

Comme dans les deux cas précédents, la condition $E_r(t) \ll D(t)$, qui est équivalente à $\ddot{\phi}(t) \ll 2\dot{\phi}^2(t)$ et $\Psi[a(t)] \ll a^2(t)\dot{\phi}^2(t)$, est vérifiée si $a(t)$ et $m(t)$ sont des signaux à bande étroite dont la fréquence la plus élevée est très petite par rapport à ω_c . Ainsi, si le signal AM-FM $x(t)$ est à bande étroite, la sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ conduit à l'approximation :

$${}^c\Psi x(t) \approx a^2(t)\dot{\phi}^2(t) \quad (1.70)$$

Le résultat illustré par relation (1.70) généralise les deux résultats précédents, à savoir la détection de l'enveloppe du signal et l'estimation de sa fréquence instantanée. Il montre aussi et surtout l'intérêt de l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser pour la poursuite des modulations AM et FM des signaux non-stationnaires. Cette aptitude de l'opérateur à poursuivre les amplitudes et fréquences instantanées représente son intérêt majeur et l'essentiel de son utilisation. L'exploitation de cette capacité de l'opérateur et son extension à plusieurs autres types de signaux (images,...) ont donné lieu à de nombreux travaux de recherche [67].

1.3.3 Filtrage en sous-bandes

On a pu voir que pour des signaux harmoniques et des signaux AM, FM ou AM-FM à bandes étroites, c'est-à-dire tels que $\omega_m \ll \omega_c$ ou $\frac{f_{cn}}{2B}$ avec f_{cn} la fréquence centrale du signal et $2B$ sa largeur de bande, la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser est une bonne approximation du carré du produit de l'amplitude instantanée et de la fréquence instantanée du signal. Cette propriété s'applique aussi aux signaux mono-composantes, qui ne comportent qu'une seule loi de fréquence : [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78]. Notons que cette condition de bande

étroite s'applique également à des méthodes comme par exemple la transformée de Hilbert pour l'estimation de l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée. Comme pour cette transformée, l'utilisation de l'opérateur, pour autant, n'est pas réduite aux signaux précités. En effet il peut-être appliqué aux signaux large bande ou multi-composantes sous réserve de procéder au préalable à une décomposition en sous-bandes du signal d'entrée [79], [69], [80], [81].

L'exemple, présenté ci-après, de l'application de l'opérateur à une somme de deux sinusoïdes, illustre le besoin d'un filtrage préalable en sous-bandes. Soit

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \alpha_1 \cos(2\pi f_1 t) + \alpha_2 \cos(2\pi f_2 t). \quad (1.71)$$

La sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ pour ce signal s'écrit

$${}^c\Psi x(t) = {}^c\Psi x_1(t) + {}^c\Psi x_2(t) + \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 [1 - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)] [\cos(2\pi(f_1 - f_2)t)]}_{\text{Termes croisés}} \quad (1.72)$$

En raison des termes croisés, on ne peut extraire les quantités d'énergie ${}^c\Psi x_1(t)$ et ${}^c\Psi x_2(t)$ à partir de ${}^c\Psi x(t)$. Cette restriction provient du caractère quadratique de l'opérateur qui limite ainsi la poursuite des modulations ou de l'énergie aux signaux mono-composante. Pour un signal large bande, il est ainsi nécessaire de décomposer ce signal en sous-bandes et d'appliquer l'opérateur séparément à chaque sous-bande extraite.

Dans le cas, donc, d'un signal multi-composantes $x(t)$ le filtrage du signal peut s'effectuer, pour chaque sous-bande considérée, par un filtre de réponse impulsionnelle $h_i(t)$. L'expression de l'opérateur appliquée à une sous-bande étroite et donc à une composante $x_i(t)$, en utilisant la commutation entre la dérivation et le produit de convolution, s'écrit alors

$${}^c\Psi [x(t) * h_i(t)] = \left(x(t) * \frac{dh_i(t)}{dt} \right)^2 - (x(t) * h_i(t)) \left(x(t) * \frac{dh_i^2(t)}{dt^2} \right). \quad (1.73)$$

Notons que les dérivations s'appliquent à la réponse impulsionnelle et non au signal $x(t)$, ce qui permet d'avoir une robustesse de l'opérateur au bruit quand le signal $x(t)$ est très bruité.

L'équation (1.73) nécessite toutefois le calcul de trois produits de convolution, ce qui augmente notablement le temps de calcul. Afin de réduire ce temps, le calcul peut être effectué dans le domaine fréquentiel via la transformée de Fourier :

$$\frac{d^n h_i(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n \mathcal{F}[h_i(t)], \quad (1.74)$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier. Soient $X(f)$ et $H_i(f)$ les transformées de Fourier respectives de $x(t)$ et $h_i(t)$. La version de l'expression (1.73) utilisant la transformée Fourier est alors donnée par :

$${}^c\Psi [x(t) * h(t)] = \left(\mathcal{F}^{-1}[j2\pi f X(f) H_i(f)] \right)^2 - \left(\mathcal{F}^{-1}[X(f) H_i(f)] \right) \left(\mathcal{F}^{-1}[-4\pi f^2 X(f) H_i(f)] \right), \quad (1.75)$$

où \mathcal{F}^{-1} est la transformée de Fourier inverse. La sortie ${}^c\Psi [x(t) * h_i(t)]$ est alors calculée en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT).

Nous verrons au chapitre 3 que, dans le cas d'un signal à deux composantes, l'opérateur de Teager-Kaiser avec prise en compte du pas de discrétisation permet d'éviter ce recours au filtrage en sous-bandes.

Multi-résolution discrète

La définition de l'opérateur discret ${}^d\Psi$ utilise trois échantillons consécutifs, séparés temporellement d'un écart d'indice 1 dans la suite des valeurs échantillonnées (1.33 et 1.34). Choisissons maintenant des échantillons séparés par un écart d'indice $p \geq 1$ ([82]) :

$$x_{n-p} = A \cos(\Omega(n-p) + \phi) \quad (1.76)$$

$$x_n = A \cos(\Omega n + \phi) \quad (1.77)$$

$$x_{n+p} = A \cos(\Omega(n+p) + \phi) \quad (1.78)$$

En utilisant la relation trigonométrique (1.19), on a

$$x_{n-p}x_{n+p} = A^2 \cos^2(\Omega n + \phi) - A^2 \sin^2(p\Omega), \quad (1.79)$$

d'où

$$A^2 \sin^2(p\Omega) = x_n^2 - x_{n-p}x_{n+p} \quad (1.80)$$

De manière similaire au cas d'indices consécutifs ($p = 1$), pour $p\Omega$ suffisamment petit, nous avons l'approximation $\sin(p\Omega) \approx p\Omega$. Si nous nous limitons à des valeurs de $p\Omega$ telles que $p\Omega < \frac{\pi}{4}$, et donc $r_e = \frac{f_e}{f} > 8p$, la relation (1.80) est approchée comme suit :

$$p^2 A^2 \Omega^2 \approx x_n^2 - x_{n-p}x_{n+p} \quad (1.81)$$

La quantité $p^2 A^2 \Omega^2$ peut donc être vue comme l'énergie de l'opérateur pour générer le signal avec la résolution p . La relation (1.81) correspond ainsi à une analyse multi-résolution en terme d'énergie du signal, sachant que pour $p = 1$, nous retrouvons l'énergie requise pour générer le signal sinusoïdal de fréquence Ω . L'analyse fréquentielle de l'opérateur par l'utilisation de la relation (1.81) permet par exemple de séparer deux harmoniques dont les fréquences sont très proches [82]. Combiné avec un filtrage en sous-bandes, cet opérateur est également exploité en traitement de la parole et en biomédecine pour la détection de pointes [19], [83], [84], [85], [86], [87], [88].

1.3.4 Analyse fréquentielle de l'opérateur de Teager-Kaiser

Une analyse fréquentielle permet de mieux comprendre le comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser. Rappelons que l'opérateur de Teager-Kaiser peut être considéré comme un filtre de Volterra et également comme un filtre quadratique. Cette analyse fréquentielle de l'opérateur va ainsi pouvoir s'appuyer sur les propriétés de ces filtres.

La relation entre l'opérateur de Teager-Kaiser et les opérateurs non-linéaires de Volterra a été établie par Moore et al. [89]. L'opérateur de Volterra à une dimension (1D) s'applique à un signal réel à temps discret $x(n)$ et sa sortie $y(n)$ est obtenue par la convolution 2D des produits d'échantillons $x(n_1).x(n_2)$ et d'un noyau 2D $h_2(n_1, n_2)$:

$$y(n) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} h_2(n_1, n_2) x(n - n_1) x(n - n_2) \quad (1.82)$$

En comparant les relations (1.33) et (1.82), on reconnaît dans l'expression de ${}^c\Psi$ un filtre de Volterra dont le noyau, qu'on appelle également réponse impulsionnelle du filtre, est donné par

$$h_2(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2) - \delta(n_1 + 1, n_2 - 1) \quad (1.83)$$

où $\delta(\cdot)$ est l'impulsion de Dirac

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.84)$$

En considérant donc, d'après la relation (1.83), l'opérateur ${}^c\Psi$ comme un filtre de Voltera 2D [90], nous pouvons obtenir la réponse fréquentielle de ce filtre, en appliquant la transformée de Fourier à $h_2(n_1, n_2)$. On obtient alors :

$$H_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1 - e^{-j(\omega_2 - \omega_1)}, \quad (1.85)$$

$$\left| H_2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \right| = \sqrt{2(1 - \cos(\omega_1 - \omega_2))}. \quad (1.86)$$

Les relations (1.85) et (1.86) montrent ainsi que l'opérateur de Teager-Kaiser a un comportement de filtre passe-haut.

L'opérateur de Teager-Kaiser peut également être vu comme un cas particulier de la classe des filtres ou opérateurs quadratiques qui sont définis par [91] :

$$E_x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(n+m)x(n-m)h(m) \quad (1.87)$$

où $h(m)$ représente les coefficients du filtre quadratique. On identifie alors les coefficients du filtre en comparant les relations (1.33) et (1.87) :

$$h_{TK}(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ -1 & m = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.88)$$

La réponse impulsionnelle en fréquence est donnée ainsi par

$$\left| H(e^{j\omega}) \right|^2 = \left| \sum_{m=0}^{M-1} h_{TK}(m)e^{-j\omega m} \right|^2 = 2(1 - \cos(\omega)). \quad (1.89)$$

La figure (1.5) représente la réponse fréquentielle de l'opérateur de Teager-Kaiser. On y observe un comportement analogue à celui d'un filtre passe-haut pour lequel la sortie du filtre contient principalement les hautes fréquences de l'entrée. En appliquant l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser à un signal comportant deux composantes sinusoïdales dont une basse fréquence, l'influence de la composante basse fréquence sur la sortie de l'opérateur sera très faible.

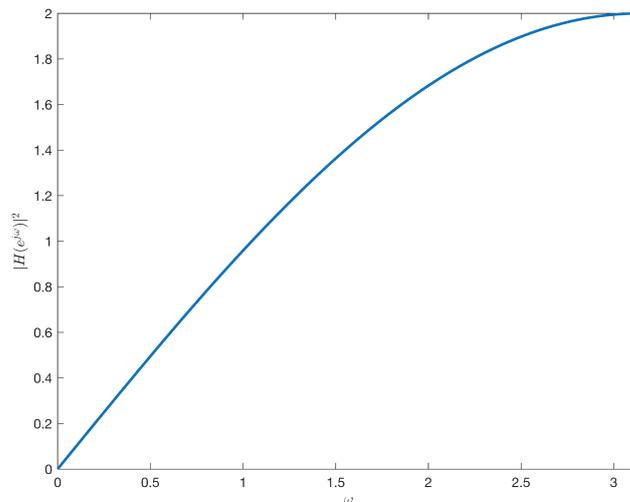


FIGURE 1.5 – Réponse fréquentielle de l'opérateur de Teager-Kaiser.

L'aspect filtre passe-haut de l'opérateur de Teager-Kaiser est lié à la nature différentielle de l'opérateur et a motivé l'intérêt porté à ce dernier pour la détection de pointes (spikes) et des transitoires [91], [92], [93], [20], [9]. La figure (1.6) illustre l'application de l'opérateur sur un signal de trains

d'impulsions Gaussiennes entaché d'un bruit blanc Gaussien avec un rapport signal sur bruit de 17 dB, où les pics du signal sont bien détectés par l'opérateur.

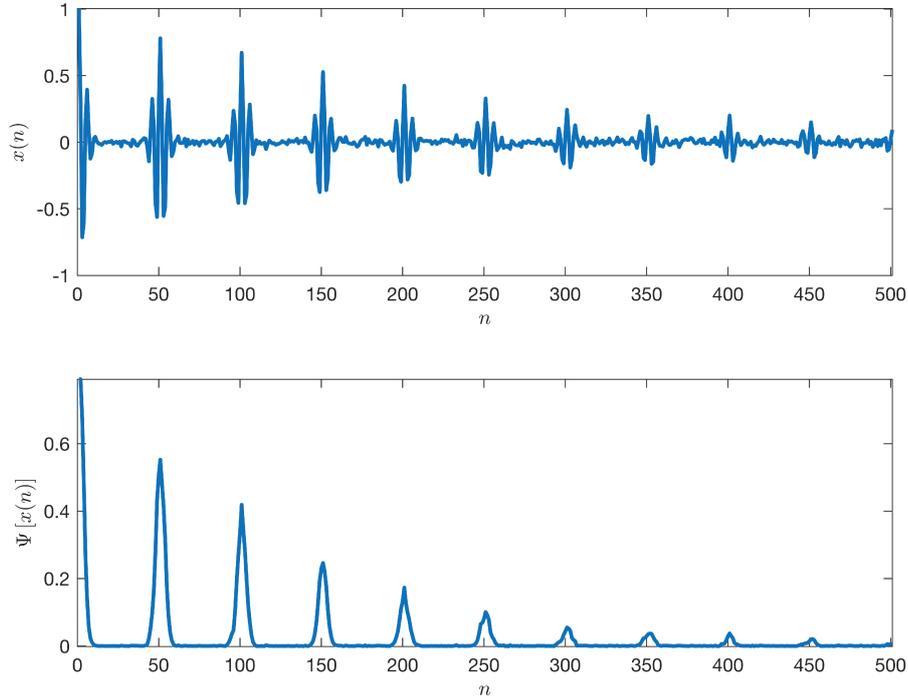


FIGURE 1.6 – Détection des pics d'un signal bruité par l'opérateur de Teager-Kaiser.

Le comportement passe-haut de l'opérateur peut être mis en évidence différemment, en considérant sa version discrète ${}^d\Psi$ appliquée à un signal d'entrée $x(n)$, de moyenne μ . En notant $x_1(n) = x(n) - \mu$ la version centrée de ce signal, on a :

$${}^d\Psi x(n) = (x_1(n) + \mu)^2 - (x_1(n-1) + \mu)(x_1(n+1) + \mu) \quad (1.90)$$

$$= \underbrace{\mu(2x_1(n) - x_1(n-1) - x_1(n+1))}_{y_1(n)} + {}^d\Psi x_1(n). \quad (1.91)$$

Afin de s'intéresser aux ordres de grandeur supposons, pour simplifier, que $x_1(n)$ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-\Delta, +\Delta]$. Notons $y_2(n) = {}^d\Psi x_1(n) = x_1(n)x_1(n-1) - x_1(n+1)$. $\{y_1(n)\}$ et $\{y_2(n)\}$ forment deux séries de valeurs. En assimilant ces valeurs à des occurrences indépendantes de la variable aléatoire, les variances de $\{y_1(n)\}$ et $\{y_2(n)\}$ sont

$$\mathbf{V}(y_1(n)) = 2\mu^2\Delta^2 \quad (1.92)$$

$$\mathbf{V}(y_2(n)) = \frac{\Delta^4}{5}, \quad (1.93)$$

donc

$$\frac{\mathbf{V}(y_1(n))}{\mathbf{V}(y_2(n))} = \frac{10\mu^2}{\Delta^2}. \quad (1.94)$$

Si $\mu \gg \Delta$, le terme dominant de l'équation (1.91) est alors $y_1(n)$ [94], et on peut approcher la sortie de l'opérateur par celui-ci :

$${}^d\Psi x(n) \approx \mu(2x(n) - x(n-1) - x(n+1)). \quad (1.95)$$

Comme ${}^d\Psi x(n)$ dépend uniquement de l'échantillon constitué des trois valeurs $x(n-1)$, $x(n)$ et $x(n+1)$, on peut estimer μ à partir de la moyenne empirique de l'échantillon ; à savoir

$$\mu \approx \frac{1}{3}(x(n-1) + x(n) + x(n+1)). \quad (1.96)$$

L'opérateur est ainsi approché par un filtre passe-haut pondéré par la valeur moyenne locale du signal :

$${}^d\Psi x(n) \approx (\text{Moyenne locale}) \times (\text{Filtre passe-haut}) \quad (1.97)$$

Compte tenu de son aspect quadratique, le comportement de l'opérateur n'est cependant pas aussi simple que celui d'un filtre passe-haut linéaire classique. La relation (1.97) confirme le fait que l'opérateur a un comportement, certes, de filtre passe-haut, mais différent d'un filtre passe-haut linéaire classique. L'approximation (Eq. 1.97) est valable tant que la valeur moyenne locale du signal est beaucoup plus importante que la variance du signal.

1.3.5 Séparation en énergie - cas continu

On a pu voir que l'opérateur de Teager-Kaiser permet de poursuivre les modulations en amplitude et en fréquence des signaux à bande étroite, et que sa sortie est une bonne approximation du carré du produit de l'amplitude instantanée et de la fréquence instantanée du signal d'entrée sous réserve de respecter la condition de bande étroite. L'intérêt de l'utilisation de l'opérateur réside dans la possibilité de pouvoir reconstituer les amplitude et fréquence instantanées du signal par la méthode de démodulation [ESA](#) (Energy Separation Algorithm) :

Pour un signal harmonique $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$, on a vu (relation 1.26) que ${}^c\Psi x(t) = A^2 \omega^2$. La dérivée de $x(t)$ est alors

$$\dot{x}(t) = -A\omega_c \sin(\omega_c t + \phi) \quad (1.98)$$

et on a donc par la relation (1.26) :

$${}^c\Psi \dot{x}(t) = A^2 \omega^4. \quad (1.99)$$

En combinant les relations (1.26) et (1.99) on obtient alors

$$\omega = \sqrt{\frac{{}^c\Psi \dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)}}, \quad (1.100)$$

$$A = \frac{{}^c\Psi x(t)}{\sqrt{{}^c\Psi \dot{x}(t)}}. \quad (1.101)$$

L'algorithme [ESA](#) continu est ainsi défini par les relations (1.100) et (1.101).

Soit maintenant $x(t)$ un signal AM-FM décrit par

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t)) \quad (1.102)$$

De même que dans la relation (1.65), supposons que $\ddot{\phi}(t) \ll 2\dot{\phi}^2(t)$ et $\Psi[a(t)] \ll a^2(t)\dot{\phi}^2(t)$ sont vérifiées, c'est à dire que $a(t)$ et $m(t)$ sont des signaux à bande étroite dont la fréquence la plus élevée est très petite par rapport à ω_c [79], [29]. Nous pouvons alors utiliser les approximations suivantes :

$${}^c\Psi x(t) \approx a^2(t)\dot{\phi}^2(t), \quad (1.103)$$

$${}^c\Psi \dot{x}(t) \approx a^2(t)\dot{\phi}^4(t). \quad (1.104)$$

En combinant les relations (1.103) et (1.104), nous généralisons les relations (1.100) et (1.101) de l'ESA à l'amplitude et la fréquence instantanées, variant dans le temps.

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{{}^c\Psi\dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)}}, \quad (1.105)$$

$$a(t) = \frac{{}^c\Psi x(t)}{\sqrt{{}^c\Psi\dot{x}(t)}}. \quad (1.106)$$

A chaque instant t l'algorithme ESA, défini par les relations (1.105) et (1.106) estime donc l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée, uniquement à partir des sorties instantanées de l'opérateur appliqué au signal et à sa dérivée. L'intérêt de l'opérateur de Teager-Kaiser réside ainsi dans son aspect local lié à sa forme différentielle. Ce caractère local présente une différence fondamentale avec d'autres outils tel le signal analytique de Gabor, reposant sur la transformation de Hilbert qui, par son approche intégrale [95], demande d'utiliser toute la durée du signal pour estimer l'amplitude et la fréquence.

L'ESA présente néanmoins des limitations. Pour les signaux à large bande, il est nécessaire de procéder au préalable à une décomposition en sous-bandes. Par ailleurs, l'aspect local de l'opérateur, s'il est son point d'attrait majeur, le rend également moins robuste au bruit que l'approche signal analytique de Gabor qui est une opération globale (filtrage passe-bas). De plus, l'ESA suppose que les sorties de l'opérateur sont positives; nous reviendrons au chapitre 2 sur le problème de la positivité de l'opérateur, en particulier pour la classe des signaux AM-FM. Enfin, un recentrage du signal peut s'avérer nécessaire. En effet, considérons un signal $x(t)$ dont l'expression est

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi) + \lambda \quad (1.107)$$

où λ est une constante. Il est facile de vérifier que l'algorithme ESA ne permet de calculer ni la fréquence ni l'amplitude du signal :

$$\omega_c^2 = \left(\sqrt{\frac{{}^c\Psi\dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)}} \right)^2 \frac{A + \lambda \cos(\omega_c + \phi)}{A} \quad (1.108)$$

$$A^2 = \left(\frac{{}^c\Psi x(t)}{\sqrt{{}^c\Psi\dot{x}(t)}} \right)^2 - \lambda^2 \cos(\omega_c + \phi) + 2A\lambda \cos(\omega_c + \phi) \quad (1.109)$$

Ainsi, pour pouvoir estimer l'amplitude et la fréquence du signal, la constante λ doit être nulle. Le signal d'entrée doit donc être centré avant sa démodulation par l'ESA du second d'ordre. Notons que cette difficulté a également été soulevée par Huang et al. [68],[96] dans le cas de la démodulation d'un signal non centré via le calcul du signal analytique (transformée Hilbert). Nous verrons plus loin que cette contrainte sera relaxée en utilisant l'algorithme ESA basée sur l'extension de l'opérateur de Teager-Kaiser aux ordres supérieurs.

1.3.6 Séparation en énergie - cas discret

Nous avons présenté l'algorithme ESA en lien avec l'opérateur continu ${}^c\Psi$. L'adaptation de l'algorithme à un signal discret et, donc, à l'opérateur discret de Teager-Kaiser ${}^d\Psi$, peut se faire de différentes manières. Maragos et al. ont proposé plusieurs versions d'algorithmes DESA (Discrete Energy Separation Algorithm) : DESA-1a et DESA-1 s'appuyant sur des différences finies d'ordre 1, asymétriques pour DESA-1a, ainsi que DESA-2 utilisant des différences finies d'ordre 2 [29], [30].

Algorithme DESA-1a appliqué à un signal harmonique

Soit $(x(t))_n$ un signal harmonique discret, d'amplitude constante A et de pulsation par échantillon Ω constante :

$$x_n = A \cos(\Omega n + \theta) \quad (1.110)$$

où $\Omega = \frac{\omega}{f_e}$, f_e étant la **fréquence d'échantillonnage**. Les échantillons indicés apparaissent ainsi comme correspondant à pas de discrétisation h égal à 1. L'approximation de la dérivée $\dot{x}(t)$ avec une différence finie rétrograde est alors donnée par

$$y_n = x_n - x_{n-1} = A [\cos(\Omega n + \theta) - \cos(\Omega(n-1) + \theta)] \quad (1.111)$$

$$= -2A \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \sin\left(\Omega n - \frac{\Omega}{2} + \theta\right). \quad (1.112)$$

L'application de l'opérateur de Teager-Kaiser aux signaux y_n and x_n donne

$${}^d\Psi x_n = A^2 \sin^2(\Omega) \quad (1.113)$$

$${}^d\Psi y_n = 4A^2 \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) \sin^2(\Omega). \quad (1.114)$$

En combinant les équations (1.113) et (1.114) on obtient

$$\frac{{}^d\Psi y_n}{2 {}^d\Psi x_n} = 1 - \cos(\Omega). \quad (1.115)$$

Des relations (1.113) et (1.115), on peut ainsi calculer l'amplitude et la fréquence du signal x_n , qui sont constantes, comme suit :

$$G(n) = 1 - \frac{{}^d\Psi [x_n - x_{n-1}]}{2 {}^d\Psi x_n} \quad (1.116)$$

$$|A| = \sqrt{\frac{{}^d\Psi x_n}{1 - (G(n))^2}} \quad (1.117)$$

$$\Omega = \arccos(1 - G(n)) \quad (1.118)$$

Remarque

Les relations (1.116), (1.117) et (1.118) peuvent également être établies en utilisant une différence finie progressive $y_n = x_{n+1} - x_n$.

Algorithme DESA-1a appliqué à un signal AM-FM

Soit $x(t)$ un signal AM-FM à valeurs réelles, dont la version discrète est donnée par

$$x_n = \underbrace{A[1 + \kappa m(n)]}_{a(n)} \cos \left[\underbrace{\Omega_c n + \Omega_m \int_0^n m(k) dk + \theta}_{\phi(n)} \right], \quad (1.119)$$

où $a(n)$ est l'amplitude instantanée du signal modulé (x_n). $a(n)$ est un signal enveloppe variant plus lentement que la porteuse, A est l'amplitude du signal, κ est le facteur de modulation ($0 \leq \kappa \leq +1$), $f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi}$ est la fréquence par échantillon de la porteuse, $m(n)$ est le signal modulant à bande de base ($-1 \leq m(k) \leq +1$), $\phi(n)$ est la phase instantanée du signal et θ est la phase initiale, $\theta = \phi(0)$. La pulsation instantanée de $x(n)$ est décrite par

$$\Omega_i(n) = \frac{d\phi(n)}{dn} = \Omega_c + \Omega_m m(n). \quad (1.120)$$

Le signal modulant $m(n)$ varie lentement par rapport au signal de la porteuse $\cos(\Omega_c n)$, et ω_m est la déviation maximale en fréquence ($\Omega_m < \Omega_c$) de $\Omega_i(n)$ par rapport à Ω_c : $0 < \Omega_c - \Omega_m \leq \Omega_i(n) \leq$

$\Omega_c + \Omega_m < 2\Omega_c$, $\Omega_m \in [0, \Omega_c]$ la déviation en fréquence.

En utilisant la condition de bande étroite et l'approximation asymétrique de la dérivée $\dot{x}(t)$, $y_n = x_n - x_{n-1}$, les sorties de l'opérateur de Teager-Kaiser à ces signaux sont données par [29],[30] :

$${}^d\Psi x_n \approx a^2(n) \sin^2(\Omega_i(n)) \quad (1.121)$$

$${}^d\Psi y_n \approx 4a^2(n) \sin^2(\Omega_i(n-0.5)/2) \cdot \sin^2(\Omega_i(n-0.5)) \quad (1.122)$$

L'approximation $\Omega_i(n) \approx \Omega_i(n-0.5)$, et la combinaison des relations (1.121) et (1.122) permettent d'obtenir un algorithme qui estime l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée :

$$G(n) = 1 - \frac{{}^d\Psi [x_n - x_{n-1}]}{2 {}^d\Psi x_n} \quad (1.123)$$

$$|a(n)| = \sqrt{\frac{{}^d\Psi x_n}{1 - (G(n))^2}} \quad (1.124)$$

$$\Omega_i(n) = \arccos(1 - G(n)) \quad (1.125)$$

Les relations (1.124) et (1.125) sont similaires aux relations (1.117) et (1.118) obtenues dans le cas harmonique. Elles constituent l'algorithme DESA-1a, où "a" et "1" font référence au fait que l'approximation de la dérivée est asymétrique et utilise une discrétisation du premier ordre.

Algorithme DESA-1

Nous avons vu que l'algorithme DESA-1a était basé sur l'approximation de la dérivée $\dot{x}(t)$ par une différence finie rétrograde. On peut espérer améliorer les résultats de démodulation en symétrisant la sortie de l'opérateur [29],[30], ce qui est possible en utilisant une différence finie centrée, ce qui revient à utiliser la moyenne des sorties de l'opérateur pour les différences rétrograde y_n et progressive z_n :

$$y_n = x_n - x_{n-1} \text{ et } z_n = x_{n+1} - x_n = y_{n+1}. \quad (1.126)$$

Sous l'hypothèse de bande étroite, on obtient pour z_n :

$${}^d\Psi z_n \approx 4a^2(n) \sin^2(\Omega_i(n+0.5)/2) \cdot \sin^2(\Omega_i(n+0.5)) \quad (1.127)$$

La moyenne des termes (1.122) et (1.127) conduit alors à l'approximation

$$\frac{{}^d\Psi y_n + {}^d\Psi z_n}{2} \approx 4a^2(n) \sin^2(\Omega_i(n)/2) \cdot \sin^2(\Omega_i(n)) \quad (1.128)$$

Ainsi l'application de l'opérateur sur des dérivées asymétriques est partiellement symétrisée en moyennant les sorties ${}^d\Psi y_n$ et ${}^d\Psi z_n$. La combinaison des termes (1.122) et (1.127) permet d'obtenir l'algorithme DESA-1 :

$$G(n) = 1 - \frac{{}^d\Psi y_n + {}^d\Psi y_{n+1}}{4 {}^d\Psi x_n} \quad (1.129)$$

$$\Omega_i(n) \approx \arccos(1 - G(n)) \quad (1.130)$$

$$|a(n)| \approx \sqrt{\frac{{}^d\Psi x_n}{1 - (G(n))^2}} \quad (1.131)$$

$$(1.132)$$

$$G(n) = 1 - \frac{d\Psi y_n + d\Psi y_{n+1}}{4 d\Psi x_n} \quad (1.133)$$

$$|a(n)| = \sqrt{\frac{d\Psi x_n}{1 - (G(n))^2}} \quad (1.134)$$

$$\omega_i(n) = \arccos(1 - G(n)) \quad (1.135)$$

Le "1" fait référence à l'approximation par une différence finie d'ordre 1. L'estimation de la fréquence instantanée suppose que $0 < \Omega_i(n) < \pi$, ainsi, l'algorithme [DESA-1](#) peut estimer les fréquences instantanées jusqu'à $f_e/2$, où f_e est le [nombre de valeurs mesurées par seconde pour un signal discret](#).

Algorithme DESA-2

Une autre façon d'éviter les fractions d'échantillons, comme dans les termes (1.122) et (1.127), est d'approcher la dérivée première par une différence finie symétrique. Pour ce faire on utilise une différence à deux échantillons :

$$s_n = [(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1})]/2 = [x_{n+1} - x_{n-1}]/2 \quad (1.136)$$

En utilisant la relation (1.119) et la condition de bande étroite on obtient :

$$s_n \approx -a(n) \sin(\omega_i(n)) \sin(\phi(n)) \quad (1.137)$$

$$d\Psi z_n \approx a^2(n) \sin^4(\omega_i(n)) \quad (1.138)$$

La combinaison des relations (1.121), (1.137) et (1.138) permet d'obtenir les estimations de l'amplitude et de la fréquence instantanées :

$$|a(n)| \approx \frac{2 d\Psi x_n}{\sqrt{d\Psi [x_{n+1} - x_{n-1}]}} \quad (1.139)$$

$$\omega_i(n) \approx \frac{1}{2} \arccos\left(1 - \frac{d\Psi [x_{n+1} - x_{n-1}]}{2 d\Psi x_n}\right) \quad (1.140)$$

Les relations (1.139) et (1.140) constituent l'algorithme DESA-2 où "2" fait référence à l'approximation de la dérivée avec deux échantillons. L'estimation de la fréquence instantanée suppose que $0 < \omega_i(n) < \pi/2$. Ainsi, l'algorithme DESA-2 peut estimer les fréquences instantanées jusqu'à $F_e/4$. Cela étant, en sur-échantillonnant le signal à $2F_e$ l'algorithme DESA-2 peut estimer les fréquences instantanées jusqu'à $F_e/2$.

1.3.7 Exemples de démodulation

Considérons, à titre d'exemple, un signal AM-FM possédant une phase polynomiale et une modulation d'amplitude gaussienne :

$$x(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{\gamma}\right) \cos(\phi(t)), \quad (1.141)$$

où $\phi(t) = 2\pi(\alpha t^2 + \beta)$, $0 \leq t \leq 250$, $A = 10$, $\gamma = 2000$, $t_0 = 128$, $\alpha = 0.0005$ et $\beta = 0.01$.

Les résultats de la démodulation du signal $x(t)$ par l'algorithme [DESA-1a](#) sont représentés sur la figure (1.7). Ces résultats montrent la capacité de l'opérateur de Teager-Kaiser à suivre les modulations du signal AM-FM en donnant une bonne estimation des amplitude et fréquence instantanées du signal.

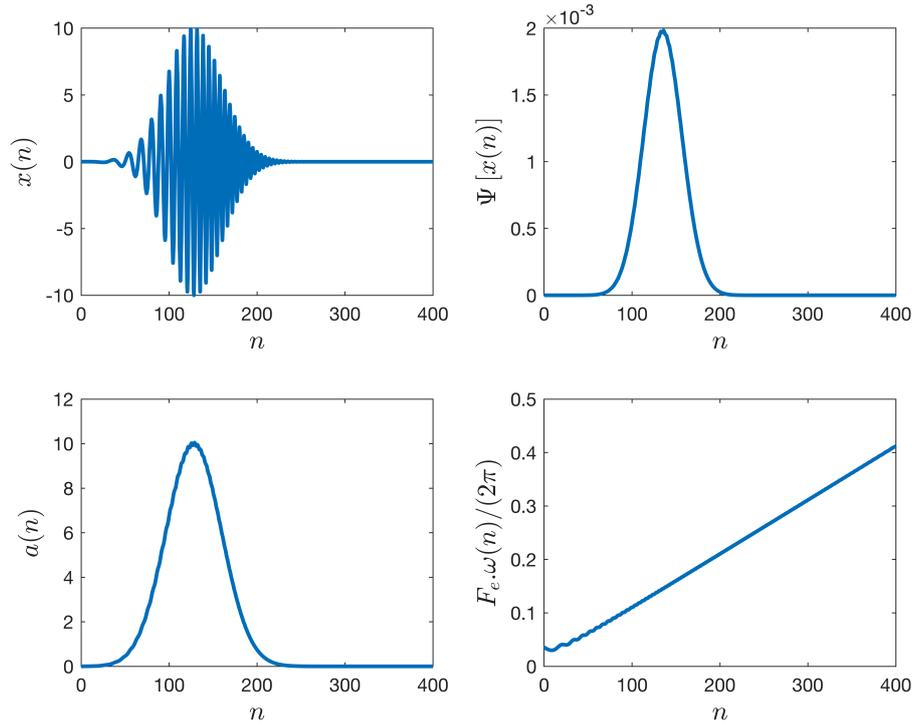


FIGURE 1.7 – Démodulation d'un signal AM-FM par l'algorithme DESA-1a.

Signal exponentiel modulé par une sinusoïde

Considérons le cas particulier d'un signal $x(t)$ décrivant une exponentielle décroissante modulée par une sinusoïde :

$$x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega_c t + \phi), \quad (1.142)$$

où les paramètres A , a , ω_c et ϕ sont supposés constants. La sortie de l'opérateur pour les signaux $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ est alors :

$${}^c\Psi x(t) = A^2 \omega_c^2 e^{-2at} \quad (1.143)$$

$${}^c\Psi \dot{x}(t) = A^2 \omega_c^4 e^{-2at} \left(1 + \frac{a^2}{\omega_c^2}\right) \quad (1.144)$$

En supposant $\left(\frac{a}{\omega_c}\right)^2 \ll 1$, l'algorithme ESA conduit à

$$\sqrt{\frac{{}^c\Psi \dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)}} = \omega_c \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_c^2}} \approx \omega_c, \quad (1.145)$$

$$\frac{{}^c\Psi x(t)}{\sqrt{{}^c\Psi \dot{x}(t)}} = \frac{|A|e^{-at}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_c^2}}} \approx |A|e^{-at}. \quad (1.146)$$

Ainsi, si la constante de décroissance de l'exponentiel $|a|$ est très petite par rapport à la fréquence ω_c , l'algorithme ESA permet d'estimer l'amplitude et la fréquence d'un signal exponentiel modulé par une sinusoïde.

1.3.8 Les extensions de l'opérateur de Teager-Kaiser

L'opérateur de Teager-Kaiser a été initialement défini pour des signaux unidimensionnel (1D) à valeurs réelles. Différentes extensions de cet opérateur ont depuis été proposées pour les images, les signaux multidimensionnels, les signaux à valeurs complexes et également pour mesurer les interactions entre deux signaux (mesure de similarité).

Signaux complexes

Les signaux à valeurs complexes sont beaucoup utilisés dans des domaines comme l'analyse temps-fréquence, le traitement d'antenne et dans des applications comme l'optique et le Radar. De plus, l'extension au cas complexe de l'opérateur de Teager-Kaiser permet d'établir un lien avec les fonctions d'auto-corrélation et de corrélation croisée instantanées, qui interviennent dans différentes représentations temps-fréquences [97], [98]. A notre connaissance la première version complexe, discrète, ψ_c de l'opérateur a été introduite par Lin et Chitrapu [99] :

$$\psi_c x(n) = x(n)x^*(n) - 0.5 \left[x(n+1)x^*(n-1) + x^*(n+1)x(n-1) \right]. \quad (1.147)$$

Une version complexe, continue, a ensuite été introduite par Hamila et al. [100] :

$$\psi_c x(t) = \dot{x}(t)\dot{x}^*(t) - 0.5 \left[\ddot{x}(t)x^*(t) + x(t)\ddot{x}^*(t) \right] \quad (1.148)$$

La version complexe ψ_c de l'opérateur présente plusieurs propriétés intéressantes. Soit $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ un signal complexe. La sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser d'un signal complexe est une quantité réelle, égale à la somme des sorties de l'opérateur réel ${}^c\Psi$ aux parties réelle et imaginaire du signal [101], [102] :

$$\psi_c x(t) = {}^c\Psi x_r(t) + {}^c\Psi x_i(t). \quad (1.149)$$

Soit $R_{xx}(t, \tau)$ la fonction d'auto-corrélation instantanée de $x(t)$:

$$R_{xx}(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (1.150)$$

on peut en déduire la relation [102] :

$${}^c\Psi x(t) = -2 \left. \frac{\partial^2 R_{xx}(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (1.151)$$

La relation (1.151) relie l'opérateur de Teager-Kaiser et l'auto-corrélation et établit, par conséquent, un lien entre l'opérateur et les transformations temps-fréquence, telles la transformation de Wigner-Ville ou la fonction d'ambiguïté [97], [98], [101], [102]. Par exemple, l'opérateur est lié à la transformation Wigner-Ville $W_x(t, \nu)$ comme suit :

$${}^c\Psi x(t) = 8\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 W_x(t, \nu) d\nu \quad (1.152)$$

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t, \tau) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau \quad (1.153)$$

La relation (1.152) permet de calculer le moment d'ordre deux en fréquence de la transformation de Wigner-Ville du signal $x(t)$. Ce moment est utilisé, par exemple, pour la classification des signaux [103], [104].

Interaction entre deux signaux complexes

Kaiser a proposé une extension de l'opérateur, $\Psi_{\mathbb{R}}$, appelée **opérateur de Teager-Kaiser croisé**, faisant intervenir deux signaux [61]. De manière similaire à une fonction d'inter-corrélation, l'opérateur croisé permet de quantifier l'interaction entre deux signaux :

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t), y(t)] = \dot{x}(t)\dot{y}(t) - x(t)\ddot{y}(t) \quad (1.154)$$

Cet opérateur présente cependant l'inconvénient de ne pas être commutatif :

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t), y(t)] \neq \Psi_{\mathbb{R}}[y(t), x(t)]. \quad (1.155)$$

Cexus et Boudraa ont développé une extension complexe, $\Psi_{\mathbb{B}}$, de l'opérateur [101], [102], [105] permettant de mesurer l'interaction entre deux signaux complexes tout en conservant la symétrie :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x(t), y(t)] = 0.5 \left[\Psi_{\mathbb{C}}[x(t), y(t)] + \Psi_{\mathbb{C}}[y(t), x(t)] \right], \quad (1.156)$$

où

$$\Psi_{\mathbb{C}}[x(t), y(t)] = 0.5 \left[\dot{x}^*(t)\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\dot{y}^*(t) \right] - 0.5 \left[x(t)\ddot{y}^*(t) + \ddot{x}^*(t)y(t) \right]. \quad (1.157)$$

Lorsque $y(t) = x(t)$, on retrouve immédiatement la définition de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{C}}$ donnée par la relation (1.148) : $\Psi_{\mathbb{B}}[x(t), x(t)] = \Psi_{\mathbb{C}}[x(t), x(t)] = \Psi_{\mathbb{C}}x(t)$. Des applications de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ ont été développées pour l'analyse temps-fréquence [47], [97], [98], la démodulation [106], la détection des signaux [93], [107], les transitoires [108], l'estimation des temps de retards [109] et la mesure de similarité pour la coalescence des signaux [110], [111], [112].

Une version hermitienne, $\Psi_{\mathbb{H}}$, de l'opérateur de Teager-Kaiser croisé, permettant d'avoir une expression de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ plus compacte, et donc plus commode à manipuler, a été également développée [113] :

$$\Psi_{\mathbb{H}}[x(t), y(t)] = \dot{x}(t)\dot{y}^*(t) - 0.5 \left[x(t)\ddot{y}^*(t) + \ddot{x}(t)y^*(t) \right]. \quad (1.158)$$

On peut aisément vérifier que cet opérateur est hermitien car sesquelinéaire à droite et possédant une symétrie hermitienne. Un tel opérateur présente l'intérêt de pouvoir mesurer l'interaction entre deux signaux, aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel [113].

Cas des images

La capacité de l'opérateur de Teager-Kaiser à démoduler des signaux non-stationnaires, en particulier ceux représentés par un modèle AM-FM, a suscité l'intérêt de la communauté du traitement des images. Les images réelles sont, en général, non-stationnaires, présentant des textures et des contrastes variables. La richesse du domaine de l'image en terme de contenu fréquentiel variable a ainsi conduit Bovik et al. [114], [115], [116] à étendre l'opérateur de Teager-Kaiser au cas 2D en l'appliquant à des images modélisées sous forme AM-FM.

Soit $I(x, y)$ une image à valeurs réelles. En notant $\mathbf{u} = (x, y)$, l'opérateur de Teager-Kaiser 2D, Φ_2 , s'écrit :

$$\Phi_2[I(\mathbf{u})] = \|\nabla I(\mathbf{u})\|^2 - I(\mathbf{u}) \cdot \nabla^2[I(\mathbf{u})], \quad (1.159)$$

où $\nabla I(\mathbf{u})$ est le gradient de $I(\mathbf{u})$

$$\nabla[I(\mathbf{u})] = \left[\frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right]^T. \quad (1.160)$$

La relation (1.159) peut également s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\Phi_2[\mathbf{I}(\mathbf{u})] = [\nabla \mathbf{I}(\mathbf{u})][\nabla \mathbf{I}(\mathbf{u})]^T - \mathbf{I}(\mathbf{u})^T \mathbf{H} \mathbf{I}(\mathbf{u}), \quad (1.161)$$

où $\mathbf{H} = \nabla \nabla^T$ désigne la matrice Hessienne.

Une version discrète de l'opérateur (1.159) s'obtient en appliquant l'opérateur de Teager-Kaiser 1D (1.33) à une version discrète de l'image $I(m, n)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, selon les deux axes du repère [117] :

$$\Phi_2(m, n) = 2I^2(m, n) - I(m-1, n)I(m+1, n) - I(m, n-1)I(m, n+1). \quad (1.162)$$

Les axes peuvent être les axes horizontal et vertical usuels mais d'autres directions sont possibles, par exemple, le long des directions diagonales de l'image [94], [118]. De manière similaire à la relation (1.97), l'opérateur de Teager-Kaiser 2D donné par la relation (Eq. 1.162) peut être approché comme suit [94] :

$$\Phi_2(m, n) \approx \mu(m, n) \times (4I(m, n) - I(m, n-1) - I(m, n+1) - I(m+1, n) - I(m-1, n)) \quad (1.163)$$

où $\mu(m, n)$ est la moyenne locale. Alors que l'opérateur de Teager-Kaiser 1D se comporte comme un filtre passe-haut pondéré par la valeur locale du signal, l'équation (1.163) montre que la version 2D de l'opérateur se comporte, elle, comme un filtre moyennneur local pondéré par un filtre passe-bande :

$$\Phi_2(m, n) \approx (\text{Filtre moyennneur local}) \times (\text{Filtre passe-bande}). \quad (1.164)$$

Cette relation intéressante rappelle la loi de Weber qui stipule que la "différence de juste perceptible" (JND pour Just Noticeable Difference) de la luminosité du système visuel humain est proportionnelle à l'intensité moyenne des pixels environnants. Ainsi, le fait que l'opérateur de Teager-Kaiser soit performant pour extraire l'information locale de l'image, explique sa capacité à améliorer le contraste d'une image, qui repose sur une information locale, par comparaison à la méthode de rehaussement de contraste conventionnel, dite de masque flou, basée elle sur un filtre 2D passe-haut. L'opérateur Teager-Kaiser 2D a donné lieu à de nombreuses applications dans le domaine 2D comme la démodulation [67], [119], [120], [121], [122], [123], [124], [125], le rehaussement de contraste [94], [118], [126], [127], [128], la segmentation et le seuillage des images [129], [130], [131], [132] et la mesure de saillance [133], [134].

1.3.9 Opérateurs d'énergie d'ordre supérieur

Nous avons vu plus haut que l'opérateur de Teager-Kaiser permet de mesurer l'interaction entre deux signaux $x(t)$ and $y(t)$, comme le traduisent les relations (Eqs. (1.154) et (1.156)). Une approche alternative pour quantifier ce couplage est possible en utilisant un commutateur défini comme suit par un crochet de Lie $L[x(t), y(t)]$:

$$L[x(t), y(t)] = \dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t). \quad (1.165)$$

Cette expression permet en effet de mesurer à chaque instant le taux relatif de variation entre les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ [135]. Compte tenu des relations (1.154) et (1.165), l'opérateur de Teager-Kaiser croisé peut ainsi s'exprimer sous la forme d'un commutateur de Lie :

$$\Psi_{\mathbb{R}}[x(t), y(t)] = L[x(t), \dot{y}(t)]. \quad (1.166)$$

La relation (1.166) quantifie ainsi l'interaction entre un signal et la dérivée d'un second signal. En choisissant $x(t) = y(t)$, on observe alors que l'opérateur ${}^c\Psi$ de Teager-Kaiser n'est autre que le commutateur de Lie d'un signal et de sa dérivée première :

$${}^c\Psi x(t) = L[x(t), \dot{x}(t)]. \quad (1.167)$$

S'appuyant sur ce constat, Maragos et Potamianos [135] ont généralisé la relation (1.167) afin de mesurer l'interaction entre le signal $x(t)$ et ses dérivées d'ordre supérieur ($k-1$) en définissant l'opérateur Γ_k :

$$\Gamma_k x(t) = L[x(t), x^{(k-1)}(t)] \quad (1.168)$$

$$= x^{(1)}(t)x^{(k-1)}(t) - x^{(0)}(t)x^{(k)}(t). \quad (1.169)$$

Γ_k est appelé opérateur différentiel d'ordre supérieur, **HODEO (Higher Order Differential Energy Operator)**. Γ_k désigne une classe d'opérateurs d'énergie indicés par l'ordre de dérivation k et, pour $k=2$, on retrouve l'opérateur différentiel d'ordre deux, ${}^d\Psi$.

La version discrète de Γ_k est donnée par

$$\Gamma_k x(n) = x(n)x(n+k-2) - x(n-1)x(n+k-1). \quad (1.170)$$

Le choix de l'ordre k peut permettre d'obtenir, selon le signal analysé, de meilleures estimations de l'amplitude et de la fréquence que l'opérateur ${}^d\Psi$ d'ordre 2 [136], [137].

Une extension plus générale des opérateurs HODEO, appelée opérateurs d'ordre supérieur généralisés **GHEO (Generalized higher energy operator)**, $\Psi_{p,q,m,l}$, a été développée par Salzenstein et al. [138], [139]. Sa définition est la suivante :

$$\Psi_{p,q,m,l} x(t) = x^{(p)}(t)x^{(q)}(t) - x^{(m)}(t)x^{(l)}(t) \quad (1.171)$$

où p, q, l et m vérifient les conditions $p+q = m+l$ et $(p, q) \neq (m, l)$. Alors que l'opérateur Γ_k quantifie l'interaction entre le signal $x(t)$ et sa dérivée d'ordre supérieur ($k-1$), l'opérateur $\Psi_{p,q,m,l}$ mesure l'interaction entre des dérivées d'ordres différents de $x(t)$. Les opérateurs $\Gamma_k = \Psi_{1,k-1,0,k}$ et ${}^c\Psi = \Psi_{1,1,0,2}$ apparaissent ainsi comme des cas particuliers de l'opérateur généralisé $\Psi_{p,q,m,l}$.

Nous avons mis en évidence au paragraphe (1.3.5) la mauvaise adaptation de l'opérateur de Teager-Kaiser aux signaux de moyennes non nulles (1.107). Appliquons maintenant l'opérateur généralisé à $x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi) + \lambda$ (Eq. 1.107). En utilisant l'algorithme de séparation d'énergie **ESA** basé sur l'opérateur $\Psi_{p,q,m,l}$, au lieu de l'opérateur ${}^c\Psi$, on obtient

$$\omega_c \simeq \sqrt{\frac{\Psi_{3,3,2,4}[x(t)]}{\Psi_{2,2,1,3}[x(t)]}} \quad (1.172)$$

$$|A| \simeq \frac{\left(\sqrt{\Psi_{2,2,1,3}[x(t)]}\right)^3}{\Psi_{3,3,2,4}[x(t)]} \quad (1.173)$$

Ainsi, l'estimation de l'amplitude ainsi que celle de la fréquence du signal obtenues par l'opérateur d'ordre supérieur sont indépendantes de la constante λ alors que ce n'était pas le cas en utilisant l'**ESA** d'ordre deux (Eqs. 1.108, 1.109).

Une extension de l'opérateur Γ_k aux cas des signaux multi-dimensionnels a été proposée par Salzenstein, Boudraa et Chonavel [140], [141]. Cette extension, motivée par le récent développement de données multi-capteurs, présente un intérêt, par exemple, pour la démodulation des images d'interférométrie optique [142]. Soit $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur à n dimensions et $I(\mathbf{u})$ un signal multi-dimensionnel, l'extension s'écrit sous forme tensorielle comme suit, ' \otimes ' représentant le produit de Kronecker :

$$\Psi_{H_{k,2p,2m+1}}[\mathbb{I}(\mathbf{u})] = \frac{d^{2m+1}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2m+1}} \otimes \left(\frac{d^{2l+1}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2l+1}} \right)^T - \frac{d^{2p}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2p}} \otimes \left(\frac{d^{2q}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2q}} \right)^T \quad (1.174)$$

dans le cas d'un tenseur pair, avec $k = 2p + 2q = 2m + 1 + 2l + 1$;

$$\Psi_{H_{k,2p,2m+1}}[\mathbb{I}(\mathbf{u})] = \frac{d^{2m+1}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2m+1}} \otimes \left(\frac{d^{2l}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2l}} \right) - \frac{d^{2p}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2p}} \otimes \left(\frac{d^{2q+1}\mathbb{I}}{d\mathbf{u}^{2q+1}} \right) \quad (1.175)$$

dans le cas d'un tenseur impair, avec $k = 2p + 2q + 1 = 2m + 2l + 1$ et $(m, l) \neq (p, q)$.

La dérivée directionnelle par rapport à \mathbf{u} définit l'opérateur $\Psi_{H_{k,2p,2m}}$ comme multi-directionnel [143],[140]. Pour le cas particulier $\mathbf{u} = (x, y)$, nous retrouvons l'extension de l'opérateur HODEO aux cas des images.

1.4 Conclusion

La genèse de l'opérateur Teager-Kaiser est fondée sur le concept d'énergie d'un système physique. Dans le cas d'un signal, l'énergie traduit alors la capacité du système à générer ce signal. Cette vision de l'énergie diffère de celle utilisée usuellement en traitement du signal liée, elle, au contenu en information véhiculée par le signal. Nous avons donc rappelé ces concepts avant de définir l'opérateur de Teager-Kaiser afin d'éclairer, d'une part la démarche conduite par Herbert et Sushan Teager, d'autre part le comportement de l'opérateur dont la sortie a vocation à être proportionnelle à la quantité d'énergie nécessaire à la génération du signal auquel il est appliqué.

Nous avons ensuite constaté l'aspect "local" de l'opérateur qui, dans sa version continue, permet d'obtenir une information ponctuelle sur le signal à partir de son expression et qui, dans sa version discrète, extrait cette information à partir de seulement trois valeurs discrétisées. Nous avons alors étudié les algorithmes permettant d'approcher la fréquence et l'amplitude instantanées du signal à partir de la sortie de l'opérateur. En appliquant l'opérateur à des signaux simples, nous avons constaté la pertinence des valeurs démodulées dans le cas de signaux modulés en amplitude et en fréquence, en particulier lorsque ces derniers sont à bande étroite.

Puis, nous avons présenté les différentes extensions de l'opérateur, développées depuis les travaux de Herbert et Sushan Teager et de James Kaiser, ainsi que la combinaison de ${}^c\Psi$ avec d'autres outils de traitement du signal (filtrage en sous-bandes, classification, ...). Nous avons ainsi pu constater sa capacité à analyser une large classe de signaux aussi bien uni-dimensionnels que multi-dimensionnels, à valeurs réelles ou complexes, ouvrant ainsi un large spectre de domaines d'application.

Nous avons pu voir, dans ce chapitre, que l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser et de ses extensions, ainsi que les outils développés autour de cet opérateur, se fondent sur la positivité supposée de sa sortie. Le chapitre 2 est ainsi consacré à la question de la positivité de l'opérateur qui est un verrou scientifique restant à lever. Nous ciblerons plus spécifiquement la classe des signaux AM-FM pour laquelle nous étudierons de manière détaillée les conditions de positivité de l'opérateur et mettrons en évidence, en particulier, l'influence de la phase initiale du signal.

Chapitre 2

Positivité de l'opérateur

*« La société ne vit point d'idées
négatives, mais d'idées positives »*

Comte de Saint-Simon

Sommaire

2.1 Introduction	48
2.2 Influence de la concavité	49
2.3 Signaux de type AM-FM	53
2.3.1 Forme AM-FM générale	53
2.3.2 Condition générale et formulation logarithmique	54
2.4 Cas quadratique	61
2.4.1 Formulation alternative de g	62
2.4.2 Interprétation géométrique	64
2.4.3 Intervalle critique et phase initiale	65
2.4.4 Modèle quadratique local	68
2.4.5 Chirp linéaire	69
2.5 Application des critères à un signal AM-FM quadratique	70
2.6 Application à un signal réel	72
2.6.1 Mise en oeuvre de l'opérateur	72
2.6.2 Modèle analytique	74
2.6.3 Influence de la fréquence d'échantillonnage	77
2.6.4 Dépendance de la phase initiale	77
2.6.5 Critère simplifié	79
2.7 Conclusion	80

2.1 Introduction

La notion de positivité de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser est intimement liée à la définition même d'un opérateur d'énergie idéal - une énergie négative n'ayant pas de signification physique - mais l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser ne fait qu'approcher cet idéal [27]. La positivité de la version idéalisée de l'opérateur, définie initialement pour un signal harmonique, $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$, est garantie car sa sortie est une quantité élevée au carré :

$${}^c\Psi x(t) = a^2 \omega^2. \quad (2.1)$$

En revanche, pour un signal quelconque, l'opérateur a vocation à approcher $a^2(t)\dot{\phi}(t)^2$ (1.70) mais la positivité n'est plus garantie, ce qui est pénalisant en raison, d'une part, de son interprétation en termes d'énergie et, d'autre part, afin de permettre l'utilisation de certaines propriétés reposant sur la positivité [67], [144]. Ainsi, la positivité de l'opérateur s'avère une propriété essentielle pour, entres autres, [26] :

1. L'interprétation de la sortie de l'opérateur en termes d'énergie d'une grandeur physique ;
2. l'algorithme ESA permettant la démodulation du signal, qui repose sur la manipulation de quantités positives [30], de même que pour la démodulation des versions de l'opérateur d'ordre supérieur [142], [70] ;
3. la version croisée de l'opérateur qui nécessite une sortie positive pour que celle-ci puisse être interprétée comme une mesure de similarité pour la classification des signaux et l'estimation des temps de retard [144], [110].

Dans toutes les applications de l'opérateur de Teager-Kaiser rapportées dans la littérature, on force sa sortie à être positive en utilisant la fonction valeur absolue. Ce pré-traitement étant justifiée par le postulat qu'un opérateur d'énergie ne peut être que positif et que les valeurs négatives proviennent du bruit et de la discrétisation. Les valeurs de sortie négatives peuvent cependant provenir de la structure même du signal, auquel cas l'utilisation de valeurs absolues introduit un biais lors de la démodulation. Il est donc particulièrement important de pouvoir préciser les caractéristiques des signaux pour lesquels la sortie de l'opérateur, appliqué dans des conditions idéales, va être positive.

A notre connaissance, très peu de travaux ont été publiés dans la littérature, concernant la question de la positivité de l'opérateur. Une première étude des conditions de positivité de la sortie de l'opérateur a été menée par Bovik et Maragos [26], rendant compte des cas les plus simples garantissant la positivité, à savoir les signaux linéaires, sinusoïdaux et exponentiels. Le cas, plus général des signaux ayant une concavité logarithmique "suffisamment douce" y est également abordé. Une étude complémentaire a été menée depuis par Larkin dans le cas où le signal d'entrée est de type AM-FM [27].

Nous allons dans ce chapitre revenir sur les cas élémentaires en mettant en relief le rôle charnière de la fonction exponentielle qui constitue une courbure frontière entre les sorties positives et négatives de l'opérateur. Nous mènerons ensuite une analyse détaillée des conditions permettant une sortie positive de l'opérateur de Teager-Kaiser en nous appuyant sur une forme AM-FM avec une **amplitude logarithmique** : $x(t) = e^{\rho(t)} \cos(\phi(t))$. Le choix de la forme AM-FM se justifie, d'une part par la large classe de signaux qu'elle modélise et, d'autre part, ainsi que nous l'exposerons au paragraphe 2.3.1, car cette forme ne restreint pas pour autant l'étude aux signaux considérés usuellement comme appartenant à la classe AM-FM. Cette étude, généralisant les résultats de Bovik et Maragos [26], permettra d'établir des conditions de positivité portant sur les composants $\rho(t)$ et $\phi(t)$ du signal. En particulier, nous retrouverons et étendrons une interprétation géométrique des conditions de positivité établie par Larkin [27].

Nous étudierons plus précisément le cas où la phase et l'amplitude logarithmique du signal sont des polynômes du second degré en t et que nous qualifierons de **signal quadratique**. Nous mettrons en évidence pour ce type de signal, correspondant également à une approximation locale d'un signal de forme plus générale, l'existence potentielle d'un temps critique et d'un intervalle critique en dehors duquel la sortie de l'opérateur est positive.

Nous montrerons ensuite, à titre d'exemple d'application, que pour un signal de type "chirp" linéaire [28] (cf. paragraphe 2.4.5), la sortie de l'opérateur est toujours positive. Puis nous appliquerons les critères de positivité à l'étude d'un signal réel : un signal d'écholocalisation de chauve-souris. Nous aborderons, à l'occasion de ce dernier exemple, les causes de non positivité n'étant pas propres à la structure du signal mais provenant du bruit et de la **fréquence d'échantillonnage** appliquée lors de la mesure du signal réel.

Remarque :

Compte tenu de l'aspect formel d'une partie de ce chapitre, nous avons opté pour une présentation de certains résultats sous forme de théorèmes et de corollaires.

2.2 Influence de la concavité

Signal pseudo-harmonique

Un signal harmonique $x(t)$ de la forme $a \cos(\omega t + \varphi)$ possède la propriété d'avoir une concavité positive lorsque $x(t)$ est positif et négative lorsque $x(t)$ est négatif. Le produit $x(t)\ddot{x}(t)$ est alors toujours positif et, a fortiori, ${}^c\Psi x(t) = (\dot{x}(t))^2 - x(t)\ddot{x}(t)$ également. La condition $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ de même signe est ainsi une condition suffisante pour que ${}^c\Psi x(t)$ soit positif. Le signal $x(t) = \sin(t^2 + t + 2)$ illustre cette propriété (figures 2.1 et 2.2).

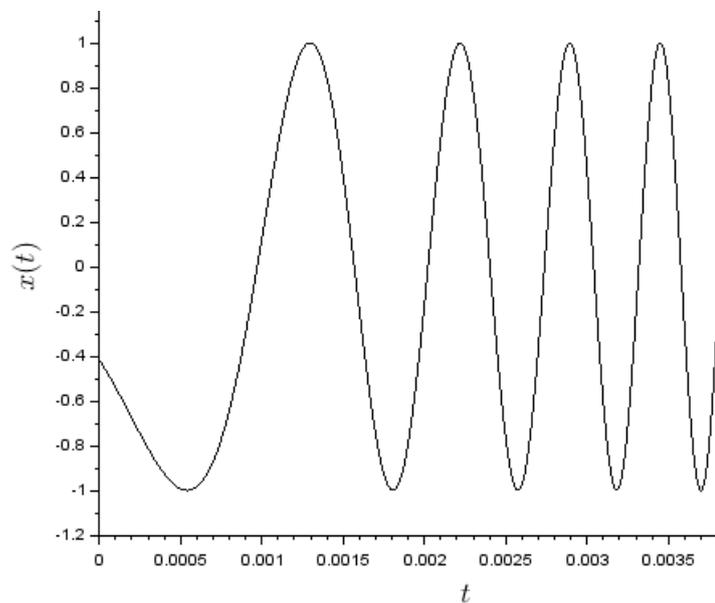


FIGURE 2.1 – Signal pseudo-harmonique.

D'une manière générale, la sortie de l'opérateur sera positive pour tout signal pseudo-périodique, c'est-à-dire conservant des signes opposés pour $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$.

Cette condition est suffisante mais pas nécessaire puisqu'il suffit que l'inégalité $[\dot{x}(t)]^2 \geq x(t)\ddot{x}(t)$, soit vérifiée pour que ${}^c\Psi x(t)$ soit positif. Nous allons donc définir plus précisément la limite de positivité en termes de concavité. Nous séparerons l'étude du cas discret et du cas continu. Le cas

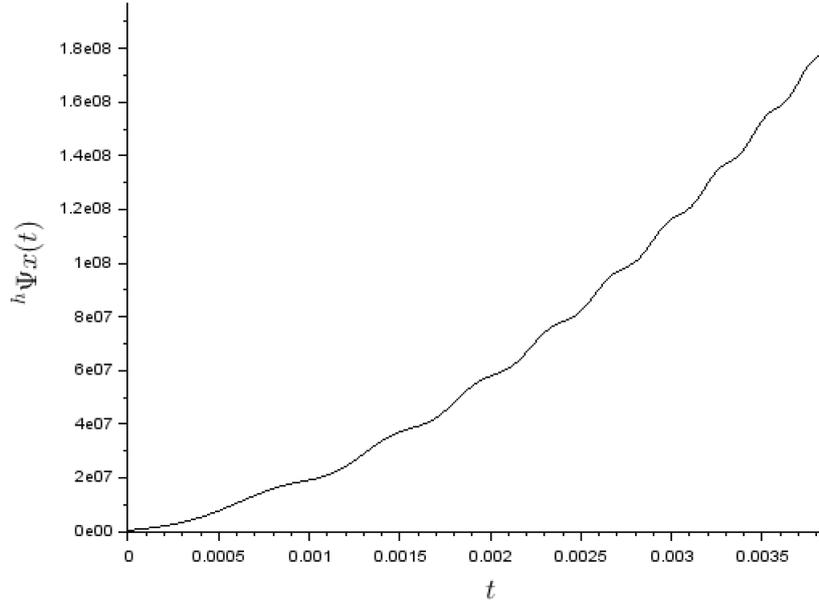


FIGURE 2.2 – Sortie de l'opérateur appliqué à un signal pseudo-harmonique.

discret n'est une conséquence du cas continu que pour un pas h , entre les valeurs temporelles discrétisées, tendant vers 0. Il est donc intéressant de disposer d'un critère s'appliquant à un signal discrétisé dont la forme continue n'est pas connue.

Concavité limite dans le cas discret

Soient $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_1 + h)$ et $x_3 = x(t_1 + 2h)$, trois valeurs consécutives d'un signal $x(t)$ discrétisé. Nous supposons h suffisamment petit pour que x_1 , x_2 et x_3 soient de même signe et, dans un premier temps, que ce signe est positif. Considérons une fonction exponentielle $y(t) = \mu e^{\lambda t}$ prenant les valeurs x_1 et x_2 aux instants t_1 et $t_2 = t_1 + h$. Une telle fonction vérifie $y(t_1) = \mu e^{\lambda t_1} = x_1$ et $y(t_1 + h) = \mu e^{\lambda(t_1 + h)} = x_2$, ce qui détermine de manière unique λ et μ en fonction de t_1 , h , x_1 et x_2 :

$$\lambda = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad \text{et} \quad \mu = \left(\frac{x_1^{t_1+h}}{x_2^{t_1}} \right)^{\frac{1}{h}} = \frac{x_1^{\frac{t_2}{h}}}{x_2^{\frac{t_1}{h}}}. \quad (2.2)$$

Il existe ainsi une fonction exponentielle et une seule dont la courbe passe par les points $(t_1; x_1)$ et $(t_2; x_2)$.

Intéressons nous maintenant à la version discrète, ${}^d\Psi$, de l'opérateur de Teager-Kaiser. La condition ${}^d\Psi x(t_2) > 0$, dans le cas considéré où x_1 , x_2 et x_3 sont positifs, s'écrit $x_3 < \frac{x_2^2}{x_1}$. Ce qui, en utilisant $x_1 = y(t_1)$ et $x_2 = y(t_2)$, équivaut à :

$$x_3 < \frac{\mu^2 e^{2\lambda(t_1+h)}}{\mu e^{\lambda t_1}} = \mu e^{\lambda(t_1+2h)} = y(t_3) \quad \text{où} \quad t_3 = t_1 + 2h. \quad (2.3)$$

Cela signifie que ${}^d\Psi x(t_2) > 0$ si et seulement si (pour x_1 , x_2 , x_3 positifs) x_3 est inférieur à la valeur en t_3 de l'exponentielle passant par x_1 et x_2 . C'est ce qu'illustre la figure (2.3).

On obtient immédiatement que pour x_1 , x_2 et x_3 négatifs, on a de manière similaire la situation présentée sur la figure (2.4).

Lorsque x_1 , x_2 et x_3 ne sont pas tous de même signe, l'interprétation exponentielle n'est plus pertinente. On a une discrétisation trop grossière par rapport aux tendances de la courbe. On peut toutefois distinguer

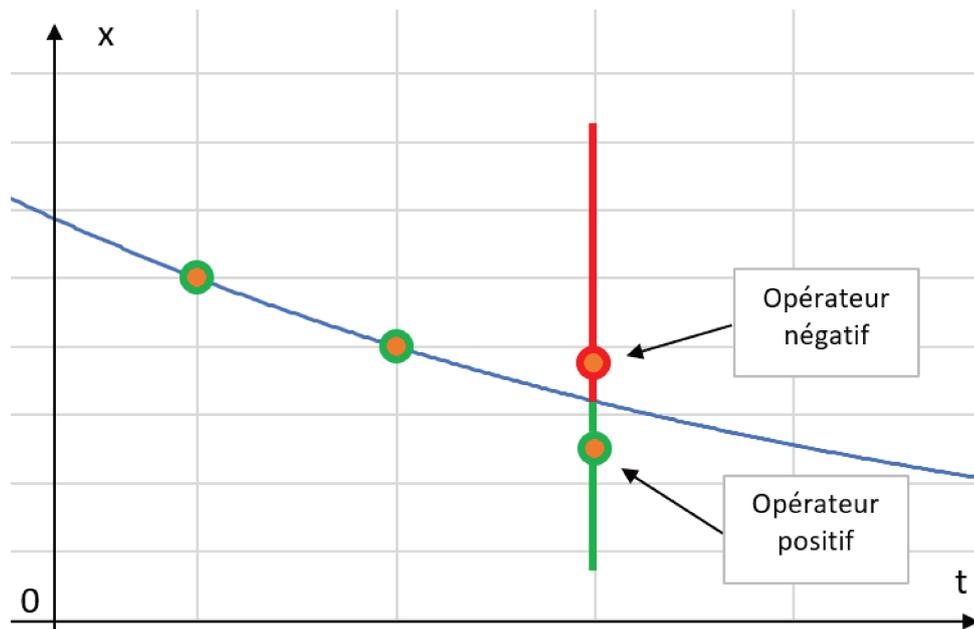


FIGURE 2.3 – Limite de positivité dans le cas discret positif.

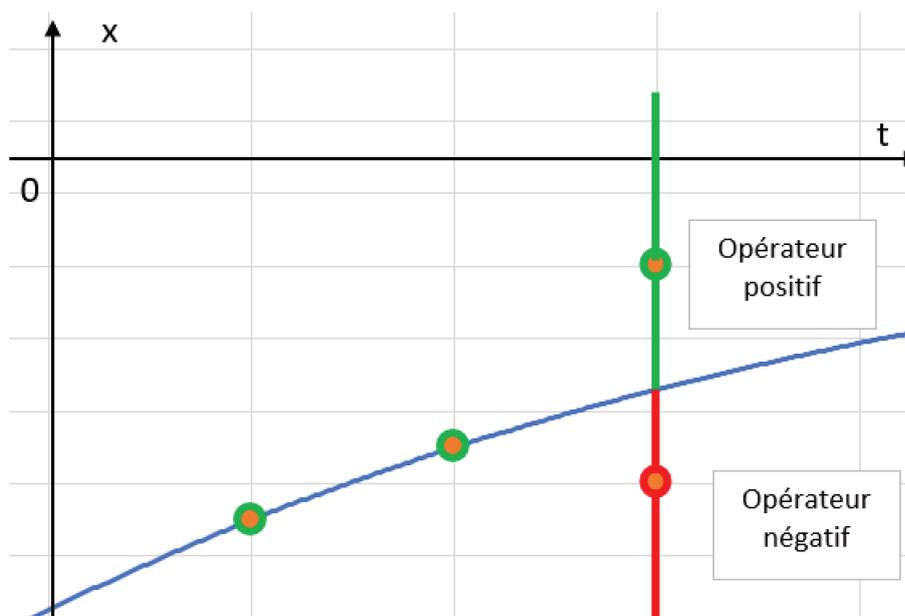


FIGURE 2.4 – Limite de positivité dans le cas discret négatif.

- le cas où on a un seul changement de signe (+ + -, + - -, - - + ou - + +), auquel cas il est immédiat que le produit $x_1 x_3$ est toujours positif et, donc, l'opérateur également.
- le cas où on a deux changements de signe (+ - + ou - + -), auquel le signe de l'opérateur est déterminé par la position de $-x_2$ par rapport à l'exponentielle passant par x_1 et x_3 .

Concavité limite dans le cas continu

Soit (E_0) l'équation différentielle $\dot{y}^2 - y\ddot{y} = 0$. L'équation (E_0) peut s'écrire sous la forme $\dot{Y} = F(t, Y)$ où Y est la fonction vectorielle (y, \dot{y}) . Cette forme permettrait de conclure, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, à l'unicité de la solution y si la fonction F était lipschitzienne en Y mais ce n'est pas le cas.

On peut toutefois résoudre l'équation (E_0) et même, plus généralement, l'équation $(E_a) : \dot{y}^2 - y\ddot{y} = a$. En effet, en dérivant les deux membres de $\dot{y}^2 - y\ddot{y} = a$, on obtient

$$\dot{y}\ddot{y} - y y^{(3)} = 0, \quad (2.4)$$

ce qui implique que y est de la forme

$$\alpha t + \beta \quad (2.5)$$

ou que

$$\frac{y^{(3)}}{\ddot{y}} = \frac{\dot{y}}{y} \quad (2.6)$$

et y doit dans ce cas vérifier

$$\ln |\dot{y}| = \ln |y| + C^{te}, \quad (2.7)$$

Le cas (2.5) et l'équation (2.7) dont la résolution est immédiate impliquent ainsi que les solutions sont d'une des formes suivantes : linéaire, sinusoïdale ou exponentielle.

La démarche ne reposant pas sur des équivalences, il nous faut vérifier que ces solutions vérifient l'équation (E_0) , ce qui conduit au final au résultat suivant (pour les solutions maximales, deux fois dérivables en tout point) :

$$\begin{cases} \text{si } a < 0 & \text{pas de solutions} \\ \text{si } a = 0 & y(t) = \mu e^{\lambda t} \\ \text{si } a > 0 & y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } A^2 \omega^2 = a \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{at} + b. \end{cases} \quad (2.8)$$

On retrouve d'une part le cas des signaux harmoniques pour lesquels la sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ est une constante et on constate d'autre part le rôle particulier des exponentielles pour lesquelles la sortie de l'opérateur est identiquement nulle. En complétant l'équation (E_0) par les conditions initiales $y(t_1) = y_1$ et $\dot{y}(t_1) = y_1'$ en un point $(t_1; y_1)$, on obtient une trajectoire exponentielle limite, $\mu e^{\lambda t}$, pour laquelle la sortie de ${}^c\Psi$ est nulle, avec

$$\lambda = \frac{y_1'}{y_1} \quad \text{et} \quad \mu = y_1 e^{-\frac{y_1'}{y_1} t_1}. \quad (2.9)$$

La forme de l'équation (E_0) ne permet toutefois pas de conclure directement que les trajectoires des solutions ne peuvent se couper et, donc, que cette exponentielle sépare les sorties positives et négatives de l'opérateur. Nous allons toutefois pouvoir parvenir à cette conclusion en utilisant le logarithme d'un signal $x(t)$. En effet, en dérivant ce dernier, on peut faire apparaître la version continue, ${}^c\Psi$, de l'opérateur de Teager-Kaiser :

$$[\log(x(t))]' = \left(\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right)' = \frac{x(t)\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)^2}{x^2(t)} = -\frac{{}^c\Psi x(t)}{x^2(t)} \quad (2.10)$$

Le signe de la sortie de l'opérateur appliqué à un signal $x(t)$ est donc égal à celui de $\ddot{u}(t)$, où $u(t) = \log(x(t))$ et la condition de positivité de la sortie de l'opérateur peut ainsi s'exprimer sous la forme

$$[\log(x(t))]'' < 0. \quad (2.11)$$

En utilisant les logarithmes des signaux et en représentant graphiquement les points $(t; u(t))_{n-1}$, la positivité de la sortie de l'opérateur correspond alors à l'inverse de la courbure de $u(t)$. Les signaux pour lesquels la sortie de l'opérateur est nulle apparaissent alors comme des droites. La fonction logarithme étant bijective, cette condition graphique se traduit localement, en un point donné, par la position de la courbe par rapport à l'exponentielle ayant même tangente et passant par ce point, c'est à dire définie par les formules (2.9).

Cette propriété est illustrée par les graphiques (2.5) et (2.6). La courbe bleue y représente une portion du signal positif $x(t) = t(t-2)+3$, dont la courbure est également positive. Pour un premier point M_1 , d'abscisse 1,25, cette courbe est au-dessus de l'exponentielle limite, en vert, et ${}^c\Psi x(t)$ est négatif au voisinage de M_1 . Pour un deuxième point M_2 , d'abscisse 3, la courbe est en-dessous de l'exponentielle limite, en rouge, et ${}^c\Psi x(t)$ est positif au voisinage de M_2 . Deux agrandissements autour de M_1 et M_2 permettent de mieux visualiser la position des courbes.

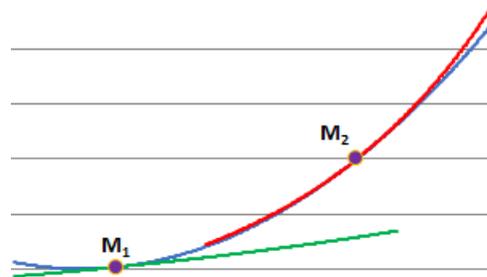


FIGURE 2.5 – Limite de courbure pour la positivité de l'opérateur.

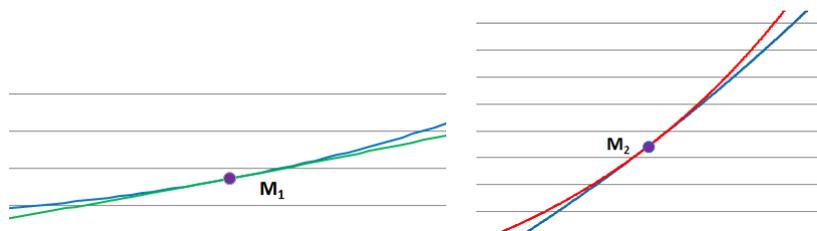


FIGURE 2.6 – Limite de courbure pour la positivité de l'opérateur : zoom.

2.3 Signaux de type AM-FM

2.3.1 Forme AM-FM générale

Afin de déterminer des conditions de positivité plus précises, nous allons travailler, dans la suite de ce chapitre, avec des signaux de la forme AM-FM, c'est-à-dire de la forme $x(t) = a(t) \sin(\Phi(t))$, où $a(t)$ est une fonction positive du temps. Il est important de noter que, d'un point de vue formel et indépendamment de son interprétation physique, toute fonction continue, deux fois dérivable, $f(t)$ peut être mise sous la forme $f(t) = a(t) \cos(\phi(t))$, où $a(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions continues, deux fois dérivables et où $a(t)$ est une fonction positive.

En effet, soit un signal $x(t)$, défini sur un intervalle de valeurs I. Notons $M = \sup_{t \in I} |x(t)|$. On a alors

$$x(t) = \frac{x(t)}{\sin\left(\frac{x(t)}{M}\right)} \sin\left(\frac{x(t)}{M}\right) = \frac{M}{\operatorname{sinc}\left(\frac{x(t)}{M}\right)} \sin\left(\frac{x(t)}{M}\right). \quad (2.12)$$

$\frac{x(t)}{M}$ est une quantité toujours comprise entre -1 et 1, ce qui garantit que $\operatorname{sinc}\left(\frac{x(t)}{M}\right) > 0$.

Ainsi, en posant

$$a(t) = M \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{x(t)}{M}\right) \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{x(t)}{M}, \quad (2.13)$$

on a bien obtenu une expression $x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$ de la forme AM-FM où $a(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions continues, de même classe que $x(t)$ et où de plus $a(t) \geq 0, \forall t \in I$.

Remarque

L'utilisation de la fonction sinus cardinal permet de garantir la stricte positivité de a mais la forme proposée n'est, bien sûr, pas unique.

Exemple

Prenons une fonction polynôme que nous qualifierons de signal. En utilisant les formules (2.13) pour $x(t) = (t-0,9)(t-1,8)(t-3)(t-4,5)$ sur $I = [0,5; 4,6]$, on obtient bien $x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$, où $a(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions continues, deux fois dérivables et où $a(t)$ est une fonction positive. Les fonctions $x(t)$, $a(t)$ et $\phi(t)$ sont représentées sur la figure 2.7.

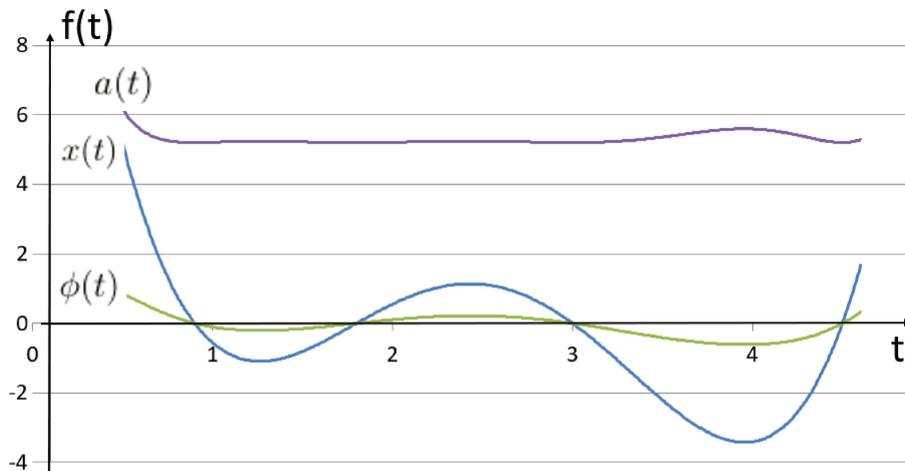


FIGURE 2.7 – Décomposition AM-FM

Les résultats établis par la suite à partir d'une forme AM-FM ne sont donc pas restreints, d'un point de vue formel, à une catégorie limitée de signaux.

2.3.2 Condition générale et formulation logarithmique

Les signaux AM-FM sont définis initialement comme des signaux modulés en amplitude et en fréquence. Ce modèle est utilisé pour la transmission d'information (radio, radar, sonar [145]) mais également dans de nombreux domaines de la physique et de la biologie (Traitement de la parole, signaux biomédicaux, image, étude des mammifères marins, ...). Par ailleurs, ainsi qu'évoqué au paragraphe (1.3.2), par construction, l'opérateur de Teager-Kaiser est bien adapté à ce type de signaux. Nous allons ainsi analyser les conditions de positivité de l'opérateur ${}^c\Psi$ pour ce type de signaux tout en gardant à l'esprit que l'écriture formelle d'un signal sous une forme AM-FM, ainsi

que présenté au paragraphe (2.3.1), est en fait générale.

Nous allons utiliser une forme exponentielle de l'amplitude instantanée pour illustrer l'interaction entre la modulation d'amplitude et la modulation de phase et allons généraliser les travaux de [26] s'appuyant déjà sur cette forme. La forme exponentielle est en effet particulièrement adaptée pour exploiter la condition (2.11) portant sur la concavité logarithmique.

Nous allons donc définir l'**amplitude logarithmique** par

$$\log(a(t)) = \rho(t); \quad (2.14)$$

et nous utiliserons alors pour l'expression d'un signal AM-FM la forme :

$$x(t) = e^{\rho(t)} \cos(\phi(t)). \quad (2.15)$$

En s'appuyant sur ce modèle, nous allons tout d'abord établir une condition générale de positivité sous la forme d'un premier théorème.

Condition générale de positivité

Théorème 1

Soit un signal $x(t) = e^{\rho(t)} \cos(\phi(t))$, la sortie ${}^c\Psi x(t)$ de l'opérateur de Teager-Kaiser est positive pour tous les $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la condition **CS1** est vérifiée :

$$\mathbf{CS1} : \dot{\phi}^2(t) > \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho}(t) + \sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \dot{\rho}^2(t)} \right). \quad (2.16)$$

Preuve

Pour la lisibilité des calculs, nous omettrons de préciser, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la variable t dans l'écriture des fonctions utilisées dans cette preuve.

Les expressions des dérivées première et seconde du signal sont :

$$\dot{x} = e^{\rho} (\dot{\rho} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \phi) \quad (2.17)$$

$$\ddot{x} = e^{\rho} [(\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 - \dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \ddot{\phi}) \sin \phi] \quad (2.18)$$

ce qui nous permet d'obtenir après simplification :

$$\dot{x}^2 - x\ddot{x} = e^{2\rho} [\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \ddot{\rho} \cos^2 \phi] \quad (2.19)$$

Par conséquent

$${}^c\Psi x(t) = e^{2\rho} g(t) \quad (2.20)$$

où la fonction g est définie par

$$g(t) = \dot{\phi}^2(t) + \ddot{\phi}(t) \sin(\phi(t)) \cos(\phi(t)) - \ddot{\rho}(t) \cos^2(\phi(t)). \quad (2.21)$$

Remarque importante

On constate à partir de l'égalité (2.20) que la positivité du premier facteur est toujours vérifiée. Par conséquent la positivité de ${}^c\Psi x(t)$ ne dépend ni de l'atténuation $\rho(t)$ ni de sa première dérivée $\dot{\rho}(t)$. Ainsi, l'étude de la positivité de ${}^c\Psi x(t)$ se ramène à l'étude de celle de $g(t)$.

Sous réserve que $\ddot{\rho}(t)$ et $\ddot{\phi}(t)$ ne sont pas simultanément nuls, on a, en utilisant les relations $\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$ et $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi)$:

$$\begin{aligned}
 g &= \dot{\phi}^2 + \frac{\ddot{\phi}}{2} \sin 2\phi - \frac{\ddot{\rho}}{2} - \frac{\ddot{\rho}}{2} \cos 2\phi \\
 &= \dot{\phi}^2 + \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}}{2} \left(\frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \sin 2\phi - \frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \cos 2\phi \right), \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

or, puisque $\left(\frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \right)^2 + \left(\frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \right)^2 = 1$, il existe un unique déphasage $\psi(t) \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos \psi = \frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}}$ et $\sin \psi = \frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}}$.

Ce déphasage vaut

$$\psi = \begin{cases} \arcsin \left(\frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \right) & \text{lorsque } \ddot{\phi} \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left(\frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \right) & \text{lorsque } \ddot{\phi} < 0 \text{ et } \ddot{\rho} \geq 0 \\ -\pi - \arcsin \left(\frac{\ddot{\rho}}{\sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2}} \right) & \text{lorsque } \ddot{\phi} < 0 \text{ et } \ddot{\rho} < 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

La fonction $g(t)$ peut donc se réécrire sous la forme

$$g(t) = \left(\dot{\phi}^2(t) - \frac{\ddot{\rho}(t)}{2} \right) + \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)}}{2} \sin(2\phi(t) - \psi(t)). \tag{2.24}$$

Cette quantité est positive si

$$\left| \dot{\phi}^2(t) - \frac{\ddot{\rho}(t)}{2} \right| > \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)}}{2}, \tag{2.25}$$

donc l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

$$\dot{\phi}^2(t) - \frac{\ddot{\rho}(t)}{2} > \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)}}{2} \tag{2.26}$$

$$-\dot{\phi}^2(t) + \frac{\ddot{\rho}(t)}{2} > \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)}}{2} \tag{2.27}$$

or l'inégalité (2.27) s'écrit également $\dot{\phi}^2(t) < \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho}(t) - \sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)} \right)$, ce qui ne peut pas être vérifié puisque, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)} > \ddot{\rho}(t)$.

La condition se ramène ainsi à

$$\dot{\phi}^2(t) > \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho}(t) + \sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)} \right), \tag{2.28}$$

ce qui achève la preuve.

Commentaire

La condition **CS1** dépend de $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, et $\ddot{\phi}$. Nous allons pouvoir obtenir une nouvelle formulation de cette condition en normalisant la relation (2.28) par $\dot{\phi}^2(t)$ ou par $|\ddot{\phi}^2(t)|$ afin de diminuer le nombre de paramètres. La normalisation par $\dot{\phi}^2(t)$ conduit à identifier une région de positivité bornée par une parabole. Cette condition parabolique de positivité, déjà identifiée par [27] va pouvoir se déduire, de manière plus directe, du **Théorème 1**. La normalisation par $|\ddot{\phi}^2(t)|$, bien que concernant une classe de signaux plus limitée, permettra une approche géométrique particulière.

Normalisation par $\dot{\phi}(t)$

Par analogie avec les taux de chirp normalisés [27], nous allons introduire les courbures normalisées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ définies par :

$$\alpha(t) = \frac{\ddot{\rho}(t)}{\dot{\phi}^2(t)} \quad \text{et} \quad \beta(t) = \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}^2(t)}. \quad (2.29)$$

En divisant les deux membres de la condition **CS1** par $\dot{\phi}(t)$, on obtient alors

$$2 - \alpha(t) > \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}. \quad (2.30)$$

Cette inégalité est équivalente à
$$\begin{cases} (2 - \alpha(t))^2 > \alpha^2(t) + \beta^2(t) \\ \alpha(t) < 2, \end{cases}$$

ce qui se ramène à l'unique inégalité

$$1 - \alpha(t) > \left(\frac{\beta(t)}{2} \right)^2. \quad (2.31)$$

On obtient ainsi une nouvelle expression de la condition de positivité :

Corollaire 1.1

Soit un signal $x(t) = e^{\rho(t)} \cos(\phi(t))$, la sortie ${}^c\Psi x(t)$ de l'opérateur de Teager-Kaiser est positive pour tous les $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la condition **CS2** est vérifiée :

$$\mathbf{CS2} : \quad |\beta(t)| < 2\sqrt{1 - \alpha(t)}. \quad (2.32)$$

Commentaire

La condition **CS2** peut s'interpréter de manière géométrique dans le plan (α, β) . En effet, dans ce plan, on constate qu'on obtient une zone de positivité délimitée par la parabole d'équation $\beta(\alpha) = 2\sqrt{1 - \alpha}$. L'étude de ces paraboles, obtenues en fonction de t , a été détaillée par Larkin [27].

Les conditions **CS1** et **CS2** ont été établies en majorant $|\sin(2\phi(t) - \psi(t))|$ par 1. Afin de compléter l'étude liée à la normalisation par $\dot{\phi}(t)$, nous allons maintenant prendre en compte la dépendance de la phase dans l'expression de $g(t)$. Nous allons ainsi établir que la positivité de l'opérateur peut être modélisée par des régions séparées par des hyperboles.

Proposition 1

Les régions de positivité de la sortie de l'opérateur sont délimitées par une famille d'hyperboles, définies par

$$\alpha_1^2(t) - \beta^2(t) = 4(1 + \tau^2(t)) \quad (2.33)$$

où $\theta(t) = 2\phi(t) - \psi(t)$, $\tau(t) = \tan(\theta(t))$ et $\alpha_1(t) = \frac{\alpha(t) - 2(1 + \tau^2(t))}{\tau(t)}$.

Preuve

Pour la lisibilité des calculs, nous omettrons de préciser, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la variable t dans l'écriture des fonctions utilisées dans cette preuve.

En introduisant α , β et $\theta = 2\phi - \psi$ dans la relation (2.24), on obtient

$$g = \frac{\dot{\phi}^2}{2} v(\alpha, \beta, \theta) \quad (2.34)$$

avec

$$v(\alpha, \beta, \theta) = \left[2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin \theta} \right]. \quad (2.35)$$

La positivité de g est la même que celle de v , elle est donc déterminée par l'inégalité

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin \theta} \geq \alpha - 2. \quad (2.36)$$

Pour une valeur de θ fixée, on obtient donc une région du plan \mathbb{R}^2 au sein de laquelle la condition est vérifiée pour les couples (α, β) et la frontière de cette région vérifie l'égalité :

$$(\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 \theta = (2 - \alpha)^2. \quad (2.37)$$

Dès lors que $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $\tau = \tan \theta$, cette égalité équivaut à

$$\left(\frac{\alpha - 2(1 + \tau^2)}{\tau} \right)^2 - \beta^2 = 4(1 + \tau^2), \quad (2.38)$$

qui n'est autre que l'équation d'une hyperbole.

Pour obtenir une forme plus simple de cette équation, il suffit d'effectuer un changement de système de coordonnées en posant

$$\alpha_1 = \frac{\alpha - 2(1 + \tau^2)}{\tau}, \quad (2.39)$$

ce qui démontre la proposition.

On notera que le cas où $\tau(t) = 0$, écarté dans la démonstration, est trivial. La condition de positivité se réduit simplement à $\alpha(t) < 2$.

La famille d'hyperboles obtenue est décrite par la figure (2.8). Pour une même hyperbole, plusieurs cas se présentent en fonction de $\theta(t)$. Les régions de positivité de ${}^c\Psi x(t)$ sont coloriées en vert sur la figure (2.9).

Normalisation par $|\ddot{\phi}(t)|$

Une alternative pour ramener la condition **CSI** à deux paramètres est de normaliser par $|\ddot{\phi}(t)|$. Étudions auparavant le cas où $\ddot{\phi}(t)$ est identiquement nulle, c'est à dire le cas d'une phase linéaire $\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t$.

Dans ce cas, la relation (2.21) devient

$$g(t) = \phi_1^2 - \ddot{p}(t) \cos^2(\phi_0 + \phi_1 t) \quad (2.40)$$

Par conséquent, $g(t)$ est positive si et seulement si

$$\ddot{p}(t) < \frac{\phi_1^2}{\cos^2(\phi_0 + \phi_1 t)} \quad (2.41)$$

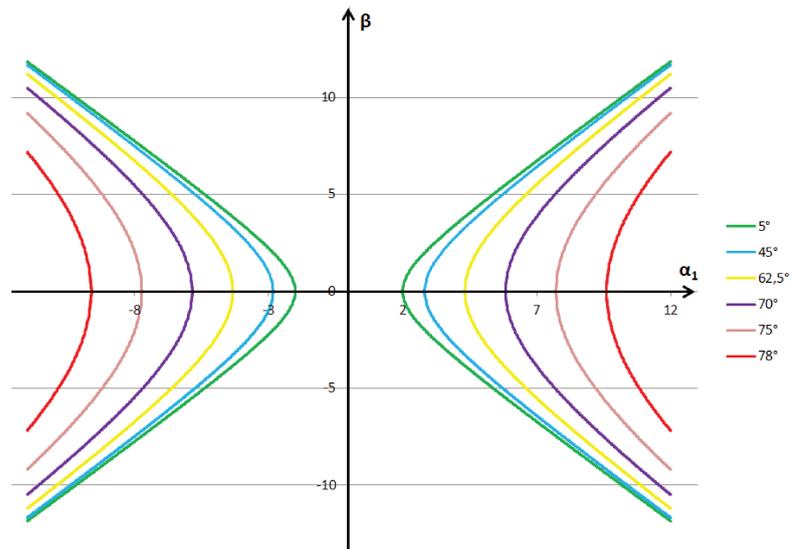


FIGURE 2.8 – Hyperboles obtenues en fonction de la phase du signal.

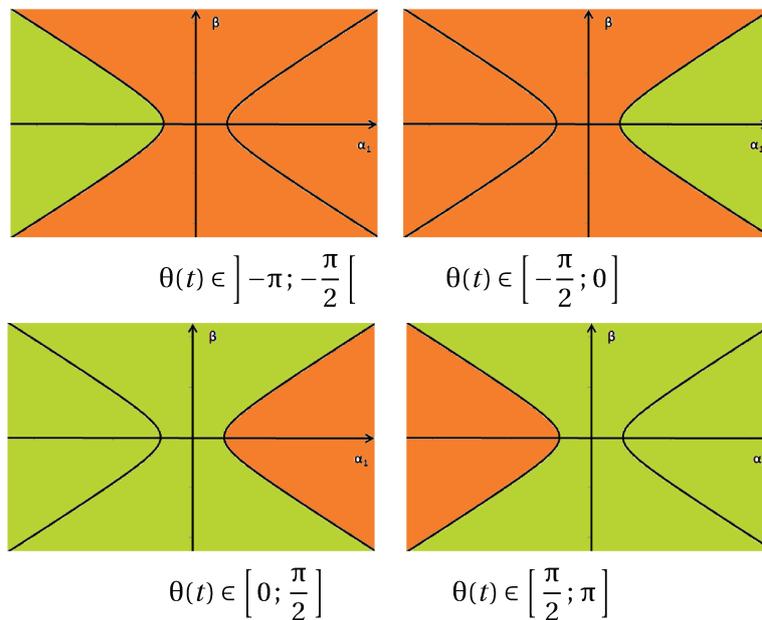


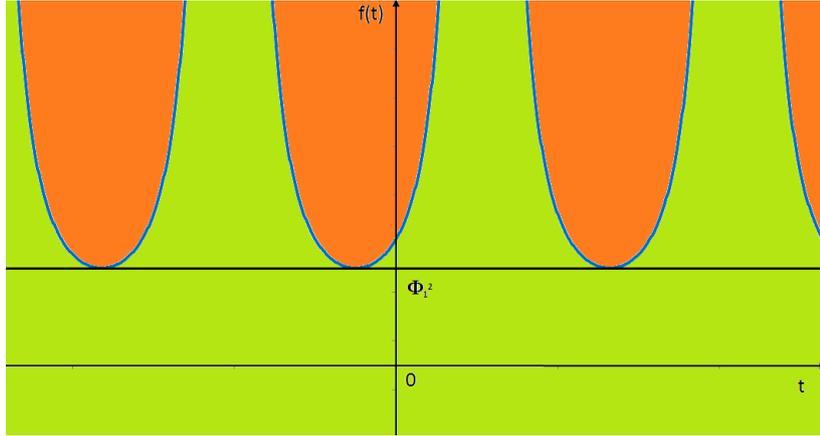
FIGURE 2.9 – Quatre régions de positivité illustrant la dépendance de la sortie de ${}^c\Psi x(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

où le second membre de l'inégalité peut éventuellement être $+\infty$. La positivité est ainsi vérifiée dès lors que $\ddot{\rho}(t) < \phi_1^2(t)$ et, plus précisément si et seulement si $\ddot{\rho}(t) < f(t)$ où $f(t)$ est la fonction

$$f(t) = \frac{\phi_1^2}{\cos^2(\phi_0 + \phi_1 t)}$$

La condition de positivité est illustrée par la figure (2.10) où les régions de positivité de ${}^c\Psi x(t)$ sont coloriées en vert.

Supposons maintenant $\ddot{\phi}(t)$ non nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de t . En divisant les deux membres de la condition **CS1** par $|\ddot{\phi}(t)|$, on obtient immédiatement la condition suivante :


 FIGURE 2.10 – Région de positivité dans le cas d'une phase linéaire délimitée par la courbe de $f(t)$.

Corollaire 1.2

Si $\ddot{\phi}(t) \neq 0$, la condition **CS1** est équivalente à la condition

$$\mathbf{CS3} : \mu(t) > h(\lambda(t)). \quad (2.42)$$

où $\mu(t) = \frac{\dot{\phi}^2(t)}{|\ddot{\phi}(t)|}$, $\lambda(t) = \frac{\ddot{\rho}(t)}{|\ddot{\phi}(t)|}$ et $h(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})$

Interprétation

La positivité de Ψ_c est ramenée à une relation entre les deux rapports

$$\lambda(t) = \frac{\ddot{\rho}(t)}{|\ddot{\phi}(t)|} \quad \text{et} \quad \mu(t) = \frac{\dot{\phi}^2(t)}{|\ddot{\phi}(t)|}. \quad (2.43)$$

La condition **CS2** garantit la positivité de ${}^c\Psi$ en dehors de la zone hachurée illustrée par la figure (2.11).

Remarque

La condition **CS3** se simplifie selon l'ordre de grandeur de λ .

- Lorsque $\lambda \sim 0$, $h(\lambda) \sim \frac{1}{2}(1 + \lambda)$;
- Lorsque $\lambda \gg 1$, $h(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\lambda + \lambda \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} \right) \sim \frac{1}{2} \left(\lambda + \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \sim \lambda$
- Lorsque $\lambda \ll -1$, $h(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\lambda - \lambda \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} \right) \sim \frac{1}{2} \left(\lambda - \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \sim -\frac{1}{4\lambda}$

En revenant aux notations ϕ et ρ , on obtient des conditions approchées, particulièrement simples dans les deux premiers cas :

- Lorsque $|\ddot{\phi}(t)| \gg |\ddot{\rho}(t)|$, **CS3** devient $\dot{\phi}^2(t) > \frac{|\ddot{\phi}(t)|}{2}$.
- Le cas $\lambda \gg 1$ conduit à exprimer une condition suffisante de positivité sous la forme :

$$\dot{\phi}^2(t) > \ddot{\rho}(t) \gg |\ddot{\phi}(t)|. \quad (2.44)$$

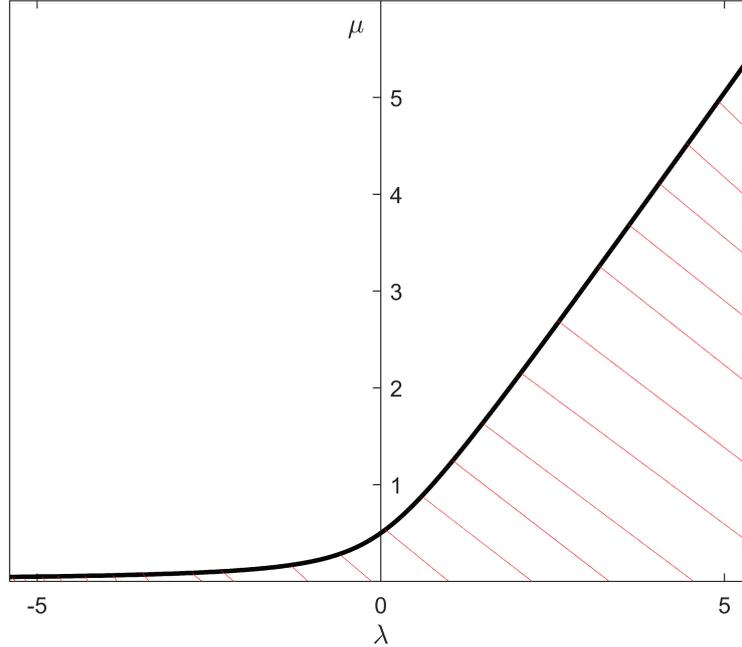


FIGURE 2.11 – Condition CS3.

2.4 Cas quadratique

La fonction g , définie par la formule (2.24), peut également être considérée comme la différence de deux fonctions, ainsi la positivité de ${}^c\Psi$ se ramène au signe de l'écart entre ces fonctions :

$$g(t) = g_2(t) - g_1(t) \quad (2.45)$$

avec

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{\ddot{\rho}(t)}{2} - \dot{\phi}^2(t) \\ g_2(t) &= \frac{\sqrt{\dot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)}}{2} \sin(2\phi(t) - \psi(t)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Selon la nature de ρ et ϕ , cette formulation du problème peut s'avérer intéressante. Nous allons l'exploiter dans le cas d'un [signal quadratique](#).

Considérons donc le cas plus particulier où l'opérateur ${}^c\Psi$ est appliqué à un signal AM-FM dont l'atténuation et la phase sont des polynômes de degré 2 en t et que nous qualifierons de quadratique :

$$x(t) = e^{\rho(t)} \cos(\Phi(t)) \quad \text{avec} \quad \rho(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 \quad \text{et} \quad \phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2. \quad (2.47)$$

où $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \phi_0, \phi_1) \in \mathbb{R}^5$ et $\phi_2 \in \mathbb{R}^*$.

Remarquons qu'un tel type d'expression peut toujours être obtenu localement, autour d'une valeur t_0 , par un développement limité de ρ et ϕ autour d'un instant t_0 donné.

Nous allons montrer dans ce cas l'existence alors d'un intervalle critique sur lequel la positivité dépend de la phase initiale du signal d'entrée et mettre en avant le rôle de la phase initiale du signal. Nous allons tout d'abord nous appuyer sur une formulation géométrique du problème.

2.4.1 Formulation alternative de g

Nous allons procéder à un changement de variable non bijectif dans l'expression de la fonction g afin d'obtenir une nouvelle formulation de la condition de positivité, dans le cas où le signal est quadratique. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 2

Lorsque le signal $x(t)$ est quadratique, la positivité ${}^c\Psi x(t)$ sur un domaine $\mathcal{D}_t \subset \mathbb{R}$ est équivalente à la satisfaction de l'inégalité

$$(au + b) - k \sin(\Omega u + \varphi) > 0 \text{ sur un domaine } \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^+ \quad (2.48)$$

où a , k et Ω sont des réels positifs.

Preuve : Dans le cas où $x(t)$ est quadratique, la relation (2.24) devient

$$g(t) = (\dot{\phi}^2(t) - \rho_2) + \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} \sin(2\phi(t) - \psi), \quad (2.49)$$

où $\psi = \psi(\rho_2, \phi_2) = C^{te}$.

Nous allons réécrire la condition $g(t) > 0$ en procédant à un changement de paramètre non bijectif mais toutefois bijectif par intervalles. En effet, dans un repère (O, t, y) , si $\phi_2 \neq 0$, la fonction $\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2$ est représentée par une parabole, symétrique par rapport à la droite $t = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$. On peut donc la découper en deux parties selon que l'inégalité $t > -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$ est vérifiée ou non et, dans chacune de ces parties, nous allons procéder à un changement de paramètre désormais bijectif.

Posons

$$d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}. \quad (2.50)$$

On a alors

$$\phi(t) = \phi_2 \cdot (t^2 - 2d t) + \phi_0 = \phi_2 \cdot (t - d)^2 + \phi_0 - \phi_2 d^2. \quad (2.51)$$

Posons maintenant

$$u = (t - d)^2, \quad (2.52)$$

d'où

$$\phi = \frac{\omega}{2} u + \psi_0 \quad \text{avec} \quad \omega = 2\phi_2 \quad \text{et} \quad \psi_0 = \phi_0 - \phi_2 d^2, \quad (2.53)$$

et, inversement,

$$t = \epsilon \sqrt{u} + d \quad \text{où} \quad \epsilon = 1 \text{ si } t \geq d \quad \text{et} \quad \epsilon = -1 \text{ si } t < d. \quad (2.54)$$

Les valeurs prises par $g(t)$ sont ainsi l'union de celles prises par $g_+(u)$ et $g_-(u)$:

$$g_+(u) = g(\sqrt{u} + d) \quad \text{et} \quad g_-(u) = g(-\sqrt{u} + d). \quad (2.55)$$

Remarque

Si t prend des valeurs sur \mathbb{R} tout entier, alors g_+ et g_- sont définies sur \mathbb{R}^+ . En revanche, si le domaine de validité de t est limité, classiquement \mathbb{R}^+ pour une variable temporelle, ce n'est plus le cas; les valeurs sur lesquelles il est nécessaire d'étudier les g_ϵ sont limitées. Dans le cas général où t prend ses valeurs sur un intervalle $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$ on a plus précisément :

- Si $-d < T_1$, $g_+(u)$ est définie sur $[(T_1 - d)^2, (T_2 - d)^2]$ et g_- n'est pas définie.
- Si $T_1 < d < T_2$, $g_+(u)$ est définie sur $[0, (T_2 - d)^2]$ et g_- sur $[0, (T_1 - d)^2]$.
- Si $-d > T_2$, $g_-(u)$ est définie sur $[(T_2 - d)^2, (T_1 - d)^2]$ et g_+ n'est pas définie.

Par ailleurs, $\dot{\phi}(t) = \phi_1 + 2\phi_2 t = 2\phi_2(t - d)$, donc $\dot{\phi}^2 = 4\phi_2^2 u$, ce qui permet d'obtenir

$$g(u) = 4\phi_2^2 u - \rho_2 + \phi_2 \sin(\omega u + 2\Psi_0) - \rho_2 \cos(\omega u + 2\Psi_0). \quad (2.56)$$

En regroupant les termes en sinus et cosinus, suivant le même processus qu'en (2.22), on obtient alors

$$g(u) = (a u + b) - k \sin(\omega u + \Psi_0), \quad (2.57)$$

avec

- $u = (t - d)^2$, où $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$
- $\omega = 2\phi_2$
- $a = 4\phi_2^2 = \omega^2$
- $b = -\rho_2$
- $k = \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} > 0$
- $\Psi_0 = 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 - \psi + \pi$ où $\psi = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) & \text{lorsque } \phi_2 \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) & \text{lorsque } \phi_2 < 0 \text{ et } \rho_2 \geq 0 \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) & \text{lorsque } \phi_2 < 0 \text{ et } \rho_2 < 0. \end{cases}$

On remarque que l'expression de g ne dépend pas de ϵ ; ce dernier influe toutefois sur le domaine d'étude dès lors que t ne décrit pas \mathbb{R} tout entier. Par ailleurs a et k sont des quantités positives (et même strictement positives dans le cas général) mais ce n'est pas le cas de ω tel que nous l'avons défini. Afin de pouvoir interpréter, dans l'expression du sinus, le facteur de t comme une pulsation, posons $\Omega = |\omega|$. Nous avons alors deux cas :

- si $\phi_2 \geq 0$, alors $\Omega = \omega$ et $\phi = \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)$ donc $\Psi_0 = 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 + \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)$ et on obtient

$$\sin(\omega u + \Psi_0) = \sin\left(\Omega u + 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 + \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)\right); \quad (2.58)$$

- si $\phi_2 < 0$, alors $\Omega = -\omega$ et $\psi = \pi - 2\delta\pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)$, avec $\delta \in \{0; 1\}$, donc $\Psi_0 = 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 - \left(\pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) + \delta 2\pi\right) + \pi \equiv 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 + \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} \sin(\omega u + \Psi_0) &= \sin\left(-\Omega u + 2\phi_0 - 2\phi_2 d^2 + \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi + \Omega u - 2\phi_0 + 2\phi_2 d^2 - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

En posant $\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) + \epsilon_1(2\phi_0 - 2\phi_2 d^2)$ et $\epsilon_1 = 1$ si $\phi_2 \geq 0$, -1 sinon, on peut donc regrouper les deux cas sous la forme $\sin(\Omega u + \varphi)$ ce qui achève la preuve.

Les différents paramètres sont donc, finalement :

- $u = (t - d)^2$, où $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$

- $\Omega = 2|\phi_2|$
- $a = 4\phi_2^2 = \Omega^2$
- $b = -\rho_2$
- $k = \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} > 0$
- $\varphi = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) + (2\phi_0 - 2\phi_2 d^2) & \text{si } \phi_2 \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\rho_2}{k}\right) - (2\phi_0 - 2\phi_2 d^2) & \text{si } \phi_2 < 0 \end{cases}$

On notera que a, b, k, Ω et φ sont des constantes ne dépendant que de Φ_0, Φ_1, Φ_2 et ρ_2 .

2.4.2 Interprétation géométrique

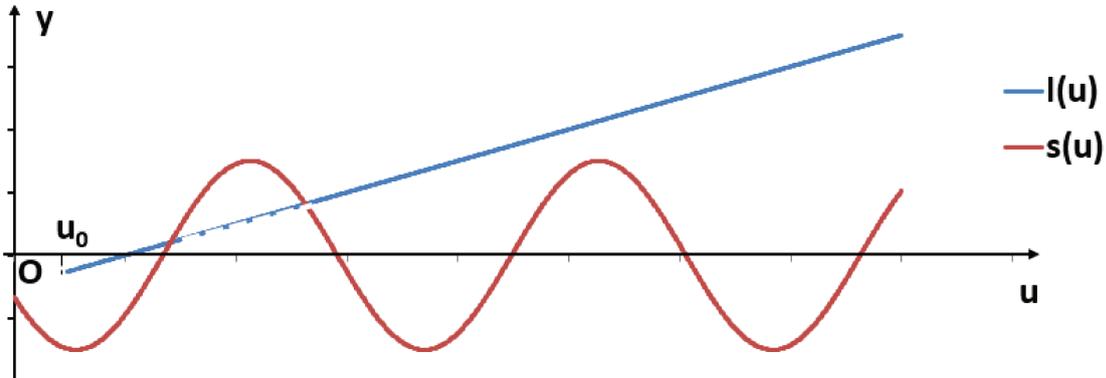


FIGURE 2.12 – Interprétation géométrique de la positivité de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser appliqué à un signal quadratique.

L'écriture de g sous la forme (2.48) va nous permettre une interprétation géométrique simple de la positivité de ${}^c\Psi x(t)$. En effet, déterminer les valeurs de t pour lesquelles la sortie de l'opérateur est positive revient à résoudre $(au + b) - k \sin(\Omega u + \Psi) > 0$ sur un domaine $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^+$ ce qui revient encore, d'un point de vue géométrique, à déterminer les valeurs de u pour lesquelles la demi-droite $l(u) = au + b$ est au-dessus de la sinusoïde $s(u) = k \sin(\Omega u + \Psi)$. La figure 2.12 illustre cette interprétation de l'écriture

$$g(u) = l(u) - s(u) \quad (2.60)$$

Remarque

Bien que le problème géométrique soit très simple, on ne sait pas déterminer analytiquement, dans le cas général, l'intersection d'une droite et d'une sinusoïde. Ce problème se ramène en effet à la résolution de $\tan x = x$ dont les solutions n'ont pas d'expressions simples. Il va donc falloir considérer des cas particuliers ou des approximations.

Compte tenu du changement de paramètre non bijectif, la demi-droite est parcourue deux fois lorsque t décrit \mathbb{R} . Elle est parcourue en totalité ou partiellement lorsque les valeurs de t sont limitées à un intervalle $[T_0; T_F]$. Plaçons nous dans le cas où t décrit \mathbb{R} , alors u décrit $]-\infty; 0]$ puis $[0; +\infty]$. La figure (2.13) illustre que dans ce cas, la sortie de l'opérateur sera négative pour deux intervalles de t , symétriques par rapport à $t = d$ qui est la valeur pour laquelle $u = 0$.

Par ailleurs $l(0) = b = -\rho_2$ appartient toujours à l'intervalle $[-k; k]$, puisque $k = \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2}$ ce qui implique qu'il existe des valeurs de la phase initiale ϕ_2 telles qu'une partie de la demi-droite

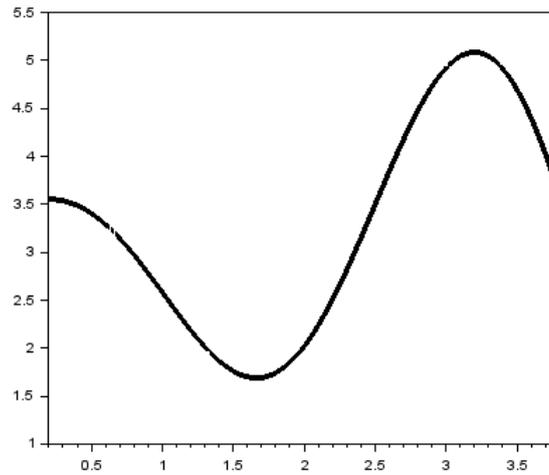


FIGURE 2.13 – Sortie négative de l'opérateur de Teager-Kaiser.

$\{(u; l(u))\}$, représentée en pointillé sur la figure (2.13), est en-dessous de la sinusoïde $s(u)$. En revanche, pour les valeurs de u pour lesquelles $l(u) > k$, la positivité de ${}^c\Psi(\cdot)$ est garantie.

Plus généralement, lorsque la phase initiale Φ_0 varie les valeurs prises par la sinusoïde $s(u)$ vont être comprises entre $-k$ et k . Dès lors que $l(u)$ sera supérieure à k , la positivité sera donc vérifiée quelle que soit la phase initiale, ce qu'illustre la figure (2.14).

Nous allons en déduire l'existence d'un intervalle critique en dehors duquel la sortie ${}^c\Psi(\cdot)$ de l'opérateur est garantie et un temps critique τ_c à partir duquel la positivité est garantie. Lorsque $\tau_c < 0$ l'opérateur sera ainsi positif sur \mathbb{R}^+ , ce qui correspond à l'interprétation usuelle de t comme une variable représentant le temps et, donc, positive.

Nous allons préciser et démontrer ces propriétés dans les paragraphes suivants et nous intéresser également au comportement de $l - u$ au voisinage de zéro, ce qui sera utile pour une interprétation locale du signal quadratique comme un développement limité.

2.4.3 Intervalle critique et phase initiale

Théorème 3

Lorsque le signal $x(t)$ est quadratique

(1) ${}^c\Psi x(t) > 0$ en dehors d'un intervalle

$$I_c = [d - \gamma, d + \gamma] \quad (2.61)$$

où

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{|\phi_2|}} \sqrt{\lambda_q + \sqrt{1 + \lambda_q^2}} \quad \text{et} \quad \lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}. \quad (2.62)$$

(2) si $t \in I_c$ il existe alors une valeur de la phase initiale ϕ_0 pour laquelle ${}^c\Psi x(t) < 0$;

Preuve (1)

En repartant de la forme (2.60), nous avons $g(u) = l(u) - s(u)$, avec $l(u) = au + b$, $s(u) = k \sin(\Omega u + \varphi)$ et $u \in I_u = [u_0; u_F] \subset \overline{\mathbb{R}^+}$. Puisque $a > 0$, $l(u)$ croît de $l(u_0)$ à $l(u_F)$. Par ailleurs, par construction, φ décrit $[-\pi; \pi]$ lorsque la phase initiale ϕ_0 décrit \mathbb{R} et $s(t) = k \sin(\Omega t + \varphi)$ décrit l'intervalle

$[-k; k]$.

Pour que $g(t) > 0$ indépendamment de ϕ_0 , on doit donc avoir

$$[l(u_0); l(u_F)] \cap [-k; k] = \emptyset. \quad (2.63)$$

Or $-\sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2} \leq -\rho_2$, donc $-k \leq b = l(0) \leq l(u_0)$, par conséquent, la condition (2.63) équivaut à $l(u_0) > k$, ce qui se traduit en fonction des variables initiales par

$$4\phi_2^2(t-d)^2 - \rho_2 > \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2}, \quad (2.64)$$

soit encore

$$|t-d| > \frac{1}{2|\phi_2|} \sqrt{\rho_2 + \sqrt{\phi_2^2 + \rho_2^2}}. \quad (2.65)$$

En notant $\lambda = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$ (cf. 2.43), on obtient

$$|t-d| > \frac{1}{2\sqrt{|\phi_2|}} \sqrt{\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (2.66)$$

La condition (2.63) équivaut donc à $[T_0; T_F] \cap [d-\gamma; d+\gamma] = \emptyset$, avec $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$ et

$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{|\phi_2|}} \sqrt{\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}$. La sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$, pour un signal quadratique, est donc positive en dehors d'un intervalle centré sur la valeur $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$.

Preuve (2)

Si $[T_0; T_F] \cap [d-\gamma; d+\gamma] \neq \emptyset$, dans les cas limites, $T_F = d-\gamma$ et $T_0 = d+\gamma$, on a ${}^c\Psi x(t) \geq 0$ et sinon, il existe des valeurs de ϕ_0 et de t pour lesquelles ${}^c\Psi x(t) < 0$. La continuité de l et s implique que ces valeurs ne sont pas isolées et qu'il existe des intervalles de valeurs de ϕ_0 et de t pour lesquelles ${}^c\Psi x(t) < 0$.

Nous qualifierons I_c d'intervalle critique. Le signe de la sortie de l'opérateur dépend de la phase initiale pour $t \in I_c$, mais pas en dehors de I_c .

Interprétation

On a montré qu'à l'intérieur d'un intervalle critique I_c la positivité de l'opérateur était sensible à la phase initiale et qu'en dehors de cet intervalle elle était garantie. Ce constat correspond géométriquement, ainsi qu'on peut le voir sur la figure (2.14), à l'intersection de la demi-droite $l(u)$ avec la bande horizontale comprise entre les ordonnées $-k$ et k , dans laquelle toutes les valeurs sont atteintes par $s(u)$ lorsque ϕ_0 varie et où, donc, on observe toujours, pour certaines valeurs de ϕ_0 , $s(u) > l(u)$.

Corollaire 3.1

Pour un signal AM-FM quadratique $x(t)$ défini sur \mathbb{R} , il existe toujours des valeurs de la phase initiale ϕ_0 pour lesquelles ${}^c\Psi x(t) < 0$.

Preuve

Puisque t décrit \mathbb{R} , la valeur $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$ est atteinte. L'intervalle critique est donc non vide, ce qui implique d'après le **Théorème 3** (2) qu'il existe des valeurs de la phase initiale ϕ_0 pour lesquelles ${}^c\Psi x(t) < 0$.

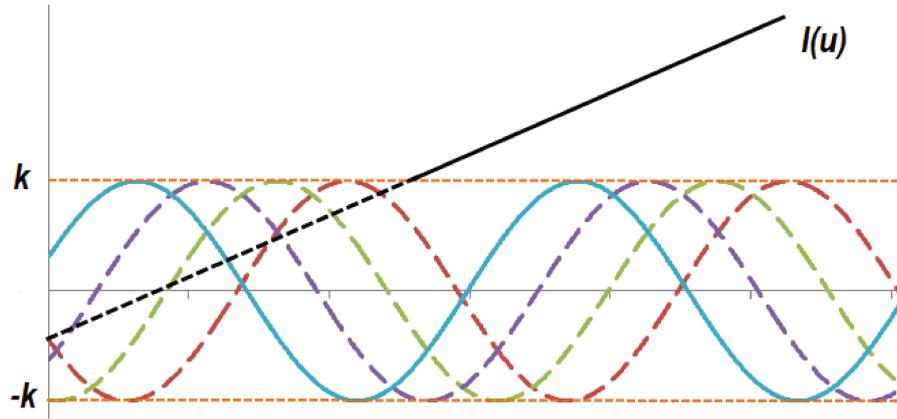


FIGURE 2.14 – Intervalle critique de positivité de l'opérateur de Teager-Kaiser.

Autrement dit, quel que soit le choix de $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2 \neq 0$, il existe des valeurs de ϕ_0 et t pour lesquelles ${}^c\Psi x(t) < 0$.

Corollaire 3.2

Pour un signal AM-FM quadratique $x(t)$, il existe une valeur critique τ_c , à partir de laquelle ${}^c\Psi x(t) > 0, \forall t > \tau_c$.

Preuve

D'après le **Théorème 3** (1), la positivité de ${}^c\Psi x(t) > 0$ est garantie en dehors de l'intervalle critique I_c , par conséquent, dès que t est plus grand que la borne supérieure de cet intervalle, on a bien ${}^c\Psi x(t) > 0$ avec

$$\tau_c = d + \gamma = -\frac{\phi_1}{2\phi_2} + \sqrt{\frac{1}{4|\phi_2|}(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})} \quad \text{où } \lambda = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}. \quad (2.67)$$

On en déduit le corollaire suivant, utile pour un signal défini sur \mathbb{R}^+ :

Corollaire 3.3

Pour un signal AM-FM quadratique $x(t)$, si ϕ_1 et ϕ_2 sont de même signe et que la condition **CS3b** est vérifiée alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a ${}^c\Psi x(t) > 0$.

$$\text{CS3b : } \mu_q > h(\lambda_q). \quad (2.68)$$

où

$$\mu_q = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2|}, \quad \lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|} \quad \text{et} \quad h(\lambda_q) = \frac{1}{2}(\lambda_q + \sqrt{1 + \lambda_q^2}).$$

Preuve

Compte tenu du **corollaire 3.2**, si $\tau_c < 0$, la positivité de la sortie de l'opérateur étant garantie pour $t > \tau$, elle l'est sur \mathbb{R}^+ . Nous allons donc expliciter la condition $\tau_c < 0$.

$\tau_c = d + \gamma$ or γ , par définition (cf. 2.62), est toujours positif, nous devons donc avoir simultanément $d < 0$ et $d^2 > \gamma^2$.

D'une part d est négatif si, et seulement si, ϕ_1 and ϕ_2 sont de même signe, d'autre part l'inégalité $d^2 < \gamma^2$ équivaut à

$$\frac{\phi_1^2}{4\phi_2^2} > \frac{1}{4|\phi_2|} \left(\lambda_q + \sqrt{1 + \lambda_q^2} \right), \quad (2.69)$$

où $\lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$. Il suffit donc de noter $\mu_q = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2^2|}$ pour obtenir le résultat recherché.

Le tracé de $h(\lambda) = \sqrt{\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}$, présenté sur la figure (2.15), indique les valeurs de μ pour lesquelles $\tau = 0$. Cela permet d'en déduire une zone, en fonction de λ et μ , dans laquelle τ est négatif et, donc, ${}^c\Psi x(t) > 0$. La zone à exclure apparaît hachurée sur la figure (2.15).

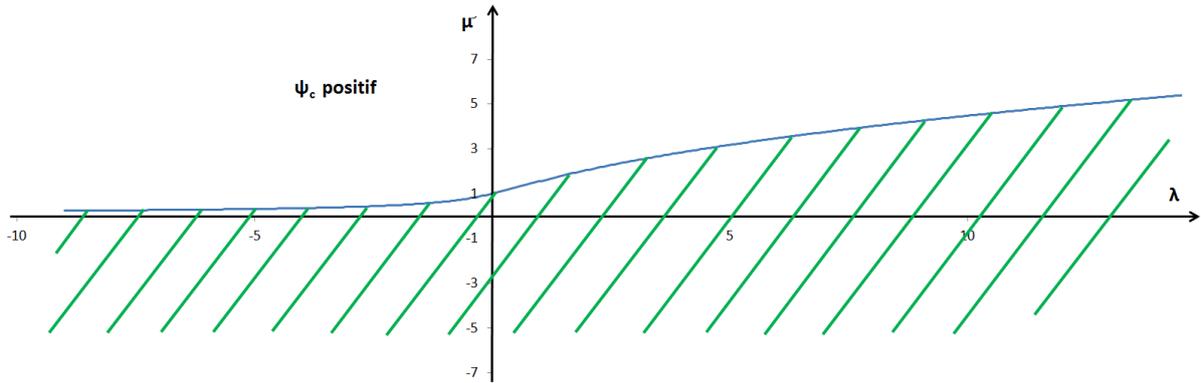


FIGURE 2.15 – Région de positivité pour un signal quadratique défini sur \mathbb{R}^+ .

Corollaire 3.4

Pour un signal quadratique, si la condition **CS3** est vérifiée, alors ${}^c\Psi x(0) > 0$.

Preuve

La valeur 0 ne doit pas appartenir à l'intervalle critique I_c , ce qui se traduit par les deux cas suivants :

1. Soit $d + \gamma < 0$, ce qui correspond à l'étude effectuée sur \mathbb{R}^+ et, donc, à la condition **CS3b**, vérifiée si $d < 0$ et si **CS3** est vérifiée;
2. soit $d - \gamma > 0$, ce qui implique $d > 0$ et conduit également à ce que la condition **CS3** soit vérifiée.

Ainsi, quel que soit le signe de d , nous sommes ramenés à la condition **CS3**. Le signe de d n'intervient pas. Ce résultat va nous être utile pour considérer le modèle quadratique local.

2.4.4 Modèle quadratique local

Revenons au cas plus général d'un signal **AM-FM** de la forme $x(t) = e^{\rho(t)} \cos \phi(t)$. En utilisant localement un développement limité d'ordre 2, nous allons nous ramener au cas quadratique. En approchant, autour d'une valeur t_0 , ρ et ϕ par leur développement limité d'ordre 2, on a

$$\phi(t) \simeq \phi(t_0) + (t - t_0)\phi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\phi''(t_0) \quad (2.70)$$

et

$$\rho(t) \simeq \rho(t_0) + (t - t_0)\rho'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\rho''(t_0) \quad (2.71)$$

En notant $\phi_0 = \phi(t_0)$, $\phi_1 = \phi'(t_0)$, $\phi_2 = \frac{1}{2}\phi''(t_0)$, $\rho_0 = \rho(t_0)$, $\rho_1 = \rho'(t_0)$ et $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho''(t_0)$, on a alors

$$x(t) \simeq x_q(t - t_0), \quad (2.72)$$

avec

$$x_q(t) = e^{\rho} \cos \phi \quad \rho_q(t) = \rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2, \quad \text{et} \quad \phi_q(t) = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2. \quad (2.73)$$

où $x_q(t)$ est un signal quadratique. La condition de la positivité de ${}^c\Psi x(t)$ en t_0 revient donc à celle de ${}^c\Psi x_q(t)$ en zéro. Cette dernière est vérifiée dès lors que zéro n'appartient pas à l'intervalle $I_c = [d - \gamma, d + \gamma]$, ce qui revient, d'après le **Corollaire 3.4**, à la vérification de la condition **CS3**. C'est à dire :

$$\mu_q > \frac{1}{2}h(\lambda_q) \quad \text{avec} \quad \mu_q = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2|}, \quad \lambda_q = \frac{\rho_2}{|\phi_2|} \quad \text{et} \quad h(\lambda) = \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}. \quad (2.74)$$

Remarque :

Compte tenu des expressions des ρ_i et des ϕ_i , on a $\mu_q = \frac{\phi'^2(t_0)}{\phi''(t_0)} = \mu(t_0)$ et $\lambda_q = \frac{\rho''(t_0)}{\phi''(t_0)} = \lambda(t_0)$. On retrouve la condition de positivité énoncée dans le cas général d'un signal AM-FM.

2.4.5 Chirp linéaire

Un signal $x(t) = a(t) \cos \phi(t)$ est qualifié de chirp s'il vérifie les conditions [28] :

$$\text{(C1)} : \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)\dot{\phi}(t)} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{(C2)} : \left| \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}^2(t)} \right| \ll 1. \quad (2.75)$$

En notant l'amplitude sous la forme $a(t) = e^{\rho(t)}$ ces conditions deviennent

$$\text{(C11)} : \left| \frac{\dot{\rho}(t)}{\dot{\phi}(t)} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{(C21)} : \left| \frac{\ddot{\phi}(t)}{\dot{\phi}^2(t)} \right| \ll 1. \quad (2.76)$$

Nous qualifierons ce chirp de linéaire si les variations de ρ et ϕ sont linéaires, c'est-à-dire si $x(t)$ est, de plus, quadratique.

La figure (2.16) présente un tel chirp, à savoir $x_1(t) = e^{\rho(t)} \cos(\phi(t))$ avec $\rho(t) = -4 + 0.2t - 0.0016t^2$ et $\phi(t) = 2 + 0.1t + 0.01t^2$.

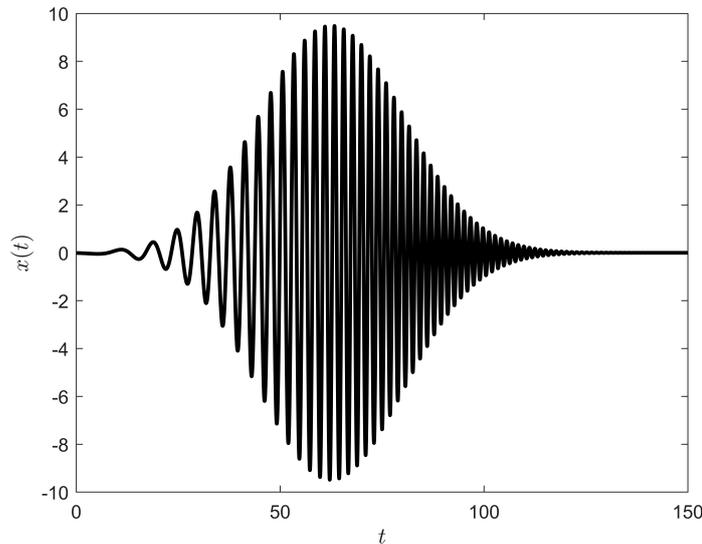


FIGURE 2.16 – Chirp linéaire

Proposition 2

La sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ est positive pour un chirp linéaire défini sur \mathbb{R}^+ .

Preuve

Pour un signal étant de plus quadratique, les conditions (C11) et (C21) deviennent

$$(C12) : \left| \frac{\rho_1 + 2\rho_2 t}{\phi_1 + 2\phi_2 t} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad (C22) : \left| \frac{2\phi_2}{(\phi_1 + 2\phi_2 t)^2} \right| \ll 1, \quad (2.77)$$

soit encore, en posant $d = -\frac{\phi_1}{2\phi_2}$, $m = -\frac{\rho_1}{2\rho_2}$ et $\lambda = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$:

$$(C13) : \left| \lambda \frac{t-m}{t-d} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad (C23) : \left| \frac{1}{2\phi_2(t-d)^2} \right| \ll 1. \quad (2.78)$$

La condition (C23) ne peut pas être vérifiée sur \mathbb{R} tout entier puisque le premier membre tend vers l'infini lorsque t est proche de d . Nous allons donc nous placer dans \mathbb{R}^+ .

D'après la condition CS3b, ${}^c\Psi x(t) > 0$ si ϕ_1 et ϕ_2 sont de même signe et si $\mu > h(\lambda)$, avec $\mu = \frac{\phi_1^2}{2|\phi_2|}$, $\lambda = \frac{\rho_2}{|\phi_2|}$ et $h(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})$.

Pour que la condition (C23) soit vérifiée sur \mathbb{R}^+ , on doit avoir $d < 0$ par conséquent

$$\phi_1 \text{ et } \rho_1 \text{ doivent être de même signe.} \quad (R1).$$

Par ailleurs, lorsque t tend vers l'infini, la condition (C13) impose $|\lambda| \ll 1$ et lorsque t est proche de zéro, la condition (C22) impose $\mu \gg 1$. On a donc $\mu \gg 1 \gg |\lambda|$. Or, pour λ petit, $h(\lambda) \sim 1$, par conséquent

$$\mu \gg h(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) \quad (R2).$$

Compte tenu de (R1) et (R2), le **Corolaire 3.4** s'applique et, donc, ${}^c\Psi x(t)$ est positif.

2.5 Application des critères à un signal AM-FM quadratique

Nous allons illustrer l'influence de la phase initiale et l'intervalle critique à partir de trois signaux AM-FM quadratiques $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$, dont les expressions sont proches mais qui ne respectent pas les mêmes critères. Pour ces trois signaux, nous allons faire varier la phase initiale et observer graphiquement le comportement de la sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ à ces variations en superposant les différentes sorties de manière à obtenir une nappe décrivant l'ensemble des valeurs prises lorsque la phase initiale décrit l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\rho_1(t)} \cos(\Phi_1(t)) \quad \text{où } \rho_1(t) = -4 + 0.2t - 0.0016t^2 \text{ et } \Phi_1(t) = \phi_{0,1} + 0.1t + 0.01t^2 \\ x_2(t) &= e^{\rho_2(t)} \cos(\Phi_2(t)) \quad \text{où } \rho_2(t) = -4 + 0.2t - 0.016t^2 \text{ et } \Phi_2(t) = \phi_{0,2} + 0.1t + 0.01t^2 \\ x_3(t) &= e^{\rho_3(t)} \cos(\Phi_3(t)) \quad \text{où } \rho_3(t) = -4 + 0.2t - 0.016t^2 \text{ et } \Phi_3(t) = \phi_{0,3} + 0.11t - 0.01t^2, \end{aligned} \quad (2.79)$$

où $\phi_{0,1}$, $\phi_{0,2}$ et $\phi_{0,3}$ sont des phases initiales dont nous allons faire varier les valeurs.

Le signal $x_1(t)$ est un chirp, à la différence de $x_2(t)$ et $x_3(t)$ pour lesquels les valeurs de $|\rho_2|$ sont plus élevées et le critère (C12) n'est pas vérifié. La figure (2.17) présente la nappe obtenue pour la sortie ${}^c\Psi x_1(t)$ lorsque $\Phi_{0,1}$ décrit $[-\pi, \pi]$. On constate que la sortie est très peu affectée par la phase initiale et que la positivité est assurée, indépendamment de la phase initiale.

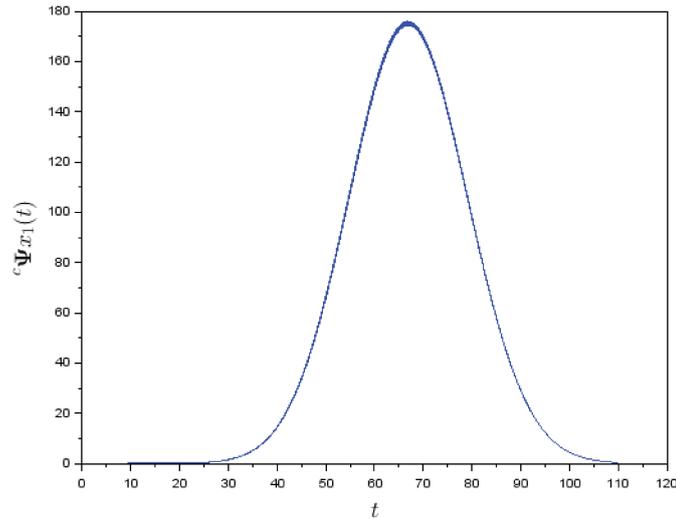


FIGURE 2.17 – Sortie de l'opérateur ${}^c\Psi$ pour un chirp quadratique.

Les signaux $x_2(t)$ et $x_3(t)$ diffèrent par le signe du coefficient de t^2 dans les expressions de $\Phi_2(t)$ et $\Phi_3(t)$. Les figures (2.18) et (2.19) présentent les nappes obtenues pour, respectivement, ${}^c\Psi x_2(t)$ et ${}^c\Psi x_3(t)$. Dans les deux cas le critère **CS3b** est respecté mais, dans le cas de $x_2(t)$, les coefficients de t et de t^2 sont de même signe alors que ce n'est pas le cas pour $x_3(t)$.

Ainsi, conformément au **corollaire 3.3**, la positivité de ${}^c\Psi x_2(t)$ est indépendante de la phase initiale $\phi_{0,2}$ alors que celle de ${}^c\Psi x_3(t)$ fait apparaître un intervalle critique de valeurs de t : ($I_c = [2.5, 7.5]$), centré autour de $d = -\phi_1/2\phi_2 = 5$, au sein duquel la positivité dépend de la phase initiale $\phi_{0,3}$.

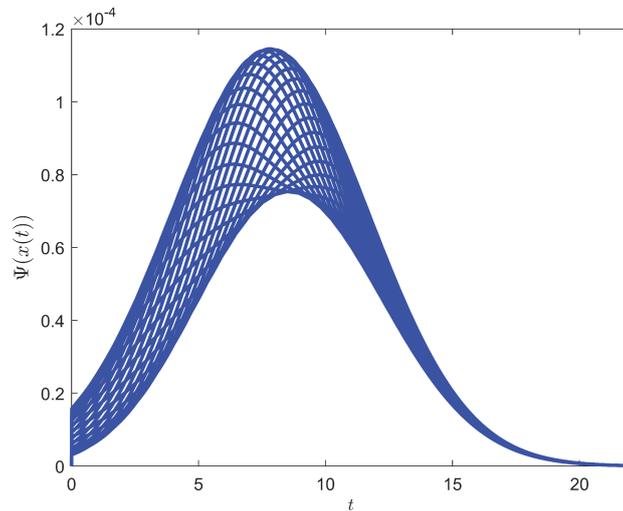


FIGURE 2.18 – Corollaire 3.3 vérifié pour $x_2(t)$.

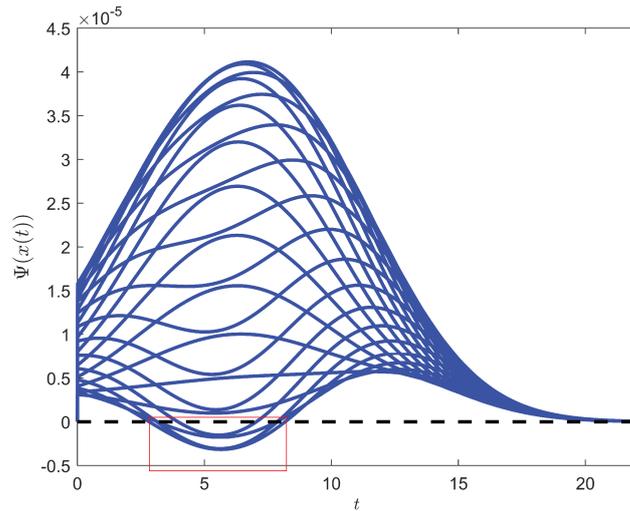


FIGURE 2.19 – Corollaire 3.3 non vérifié pour $x_3(t)$. L'intervalle critique est encadré.

2.6 Application à un signal réel

Les conditions de positivité de l'opérateur ont été établies pour un signal AM-FM continu. Nous allons vérifier l'application de ces conditions pour un enregistrement (discret, réel) d'un signal provenant d'une chauve-souris. Ce signal d'écholocation a été enregistré à une fréquence d'échantillonnage de 230,6 kHz et couvre une bande passante effective de 8 à 80 kHz. Cette émission d'écholocation est de type AM-FM. Pour faciliter la lecture et, en particulier l'utilisation d'un modèle analytique du signal (paragraphe 2.6.2), les échelles de temps ont été exprimées en centisecondes.

2.6.1 Mise en oeuvre de l'opérateur

L'enregistrement initial apparaît sur la figure (2.20).

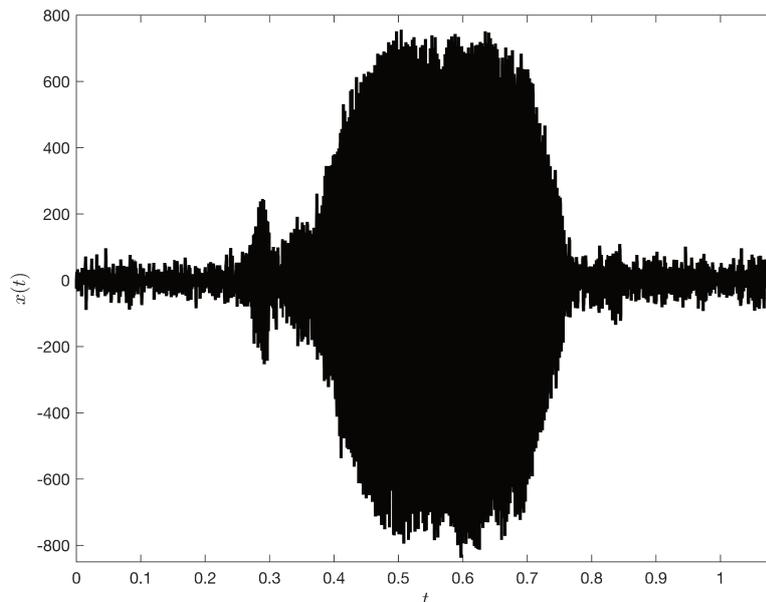


FIGURE 2.20 – Signal d'écholocation de chauve-souris.

L'application de la version discrète, ${}^d\Psi$, de l'opérateur fait apparaître un certain nombre de valeurs négatives. Pour mettre en lumière les valeurs positives ou négatives de la sortie de l'opérateur, nous avons utilisé pour la figure (2.22) une représentation logarithmique signée de l'opérateur :

$$\log_s {}^d\Psi(\cdot) = \text{sign}({}^d\Psi(\cdot)) \log_{10} \left(1 + \left| {}^d\Psi(\cdot) \right| \right). \quad (2.80)$$

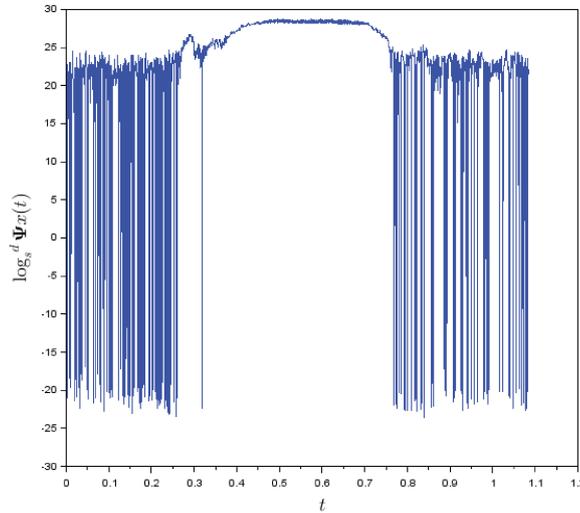


FIGURE 2.21 – Teager-Kaiser logarithmique d'un signal réel.

La figure (2.21) laisse apparaître deux domaines temporels au sein desquels l'opérateur ${}^d\Psi$, appliqué au signal réel $x(t)$, prend des valeurs négatives. Un lissage du signal, effectué dans le cas présent par le filtre de Savitsky-Golay [146], [147] (cf. Annexe B), avec un fenêtrage et une largeur de fenêtre adaptés, permet cependant d'obtenir une sortie de l'opérateur positive sur tout l'intervalle de mesure (Fig. 2.22). La procédure détaillée de lissage et de démodulation du signal est décrite en [appendice 1](#)

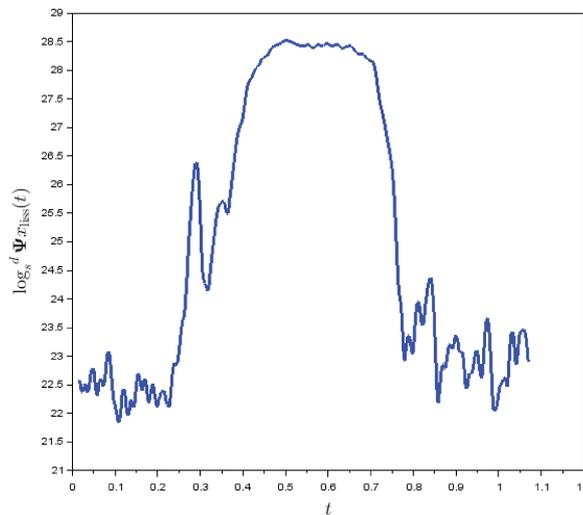


FIGURE 2.22 – Teager-Kaiser logarithmique d'un signal réel lissé.

Pour tester les conditions de positivité, nous avons défini la fonction critère suivante, positive lorsque la condition CS1 est respectée.

$$\text{CS}_1(t) = \dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho}(t) + \sqrt{\ddot{\phi}^2(t) + \ddot{\rho}^2(t)} \right). \quad (2.81)$$

A partir des pulsation et phase instantanées obtenues par l'algorithme DESA [67], nous avons constitué les suites (ρ_n) et (Φ_n) permettant de reconstituer le signal sous la forme AM-FM donnée par la relation (2.15). Ces suites nous ont également permis, par un calcul de taux d'accroissement,

de déterminer les dérivées premières et seconde de ρ et Φ et donc de calculer $CS_1(t)$ en chaque point de discrétisation.

La figure (2.23) présente, sur un même graphique, la fonction critère $CS_1(t)$ (en noir) ainsi que la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser discret, ${}^d\Psi$, appliqué à un signal AM-FM reconstruit après démodulation (en rouge).

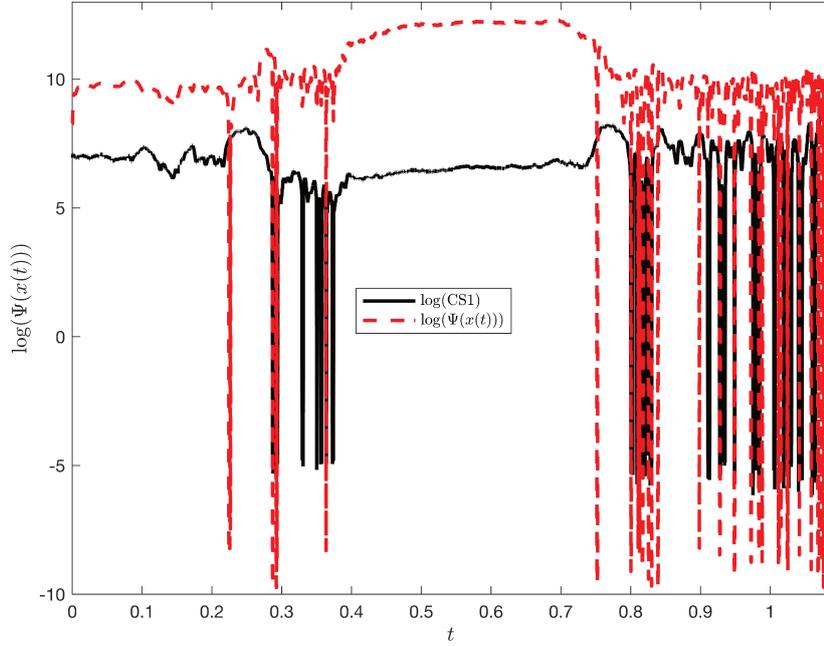


FIGURE 2.23 – Représentation logarithmique du signal démodulé et du critère de positivité.

La fonction critère CS_1 met en évidence les zones au sein desquelles des valeurs négatives de la sortie de l'opérateur sont susceptibles d'apparaître. Toutefois les valeurs négatives que l'on peut observer sur la figure (2.23) ne semblent pas cohérentes avec le lien attendu entre la positivité de CS_1 et celle de la sortie de l'opérateur. Différentes raisons en sont potentiellement la cause : la contamination du signal par le bruit, la fréquence d'échantillonnage du signal ou sa phase initiale. Pour comprendre l'influence des différents facteurs et apporter une solution aux problèmes qu'ils posent, nous allons approcher le signal par un modèle mathématique adapté.

2.6.2 Modèle analytique

Nous avons construit un modèle analytique représentant la loi empirique sous-tendant le jeu de données constituant le signal. Ce modèle est destiné à mettre en lumière ce qui, dans la positivité de la sortie de l'opérateur, relève du type de signal et non d'autres causes. Nous avons ainsi construit un signal analytique¹ x_{Appr} modélisant le signal réel, sous la forme

$$x_{\text{Appr}} = e^{\rho_{\text{Appr}}(t)} \cos(\Phi_{\text{Appr}}(t)) \quad (2.82)$$

où $\rho_{\text{Appr}}(t)$ et $\Phi_{\text{Appr}}(t)$ approchent les composantes modulées $\rho(t)$ et $\Phi(t)$ du signal réel :

$$\begin{aligned} \rho(t) \simeq \rho_{\text{Appr}}(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \\ \omega(t) \simeq \omega_{\text{Appr}}(t) &= g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les expressions mathématiques des fonctions $f_i(t)$ and $g_k(t)$ et de leur dérivées sont détaillées en [appendice 2](#). Les approximations $\rho_{\text{Appr}}(t)$ et $\Phi_{\text{Appr}}(t)$ de $\rho(t)$ et $\Phi(t)$ sont présentées sur les figures

1. Nous ne faisons pas référence ici au signal analytique au sens de Gabor.

(2.24) et (2.25).

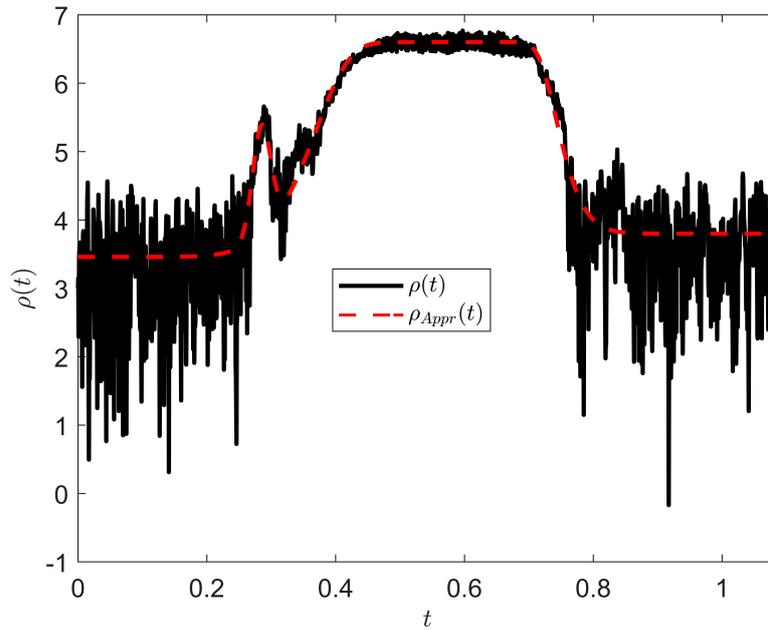


FIGURE 2.24 – Approximation de $\rho(t)$ par les fonctions $f_i(t)$.

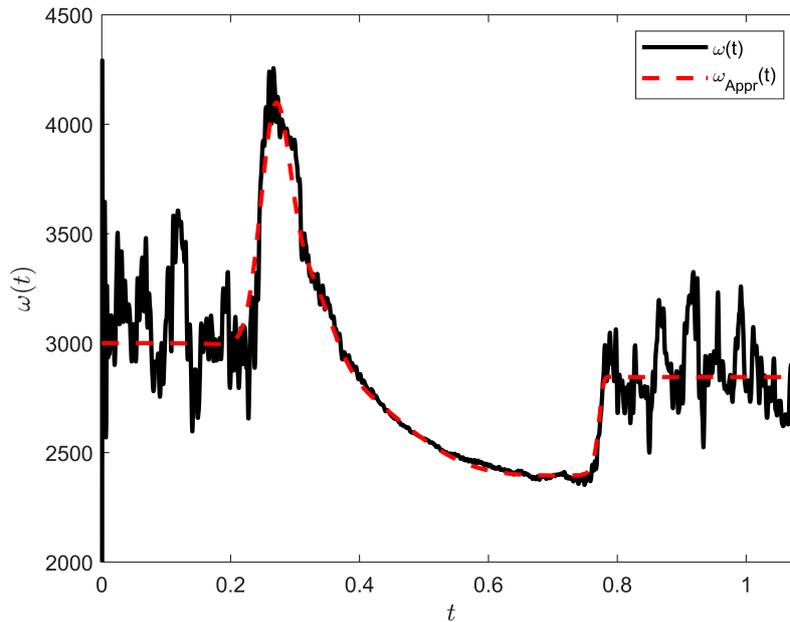


FIGURE 2.25 – Approximation de $\omega(t)$ par les fonctions $g_k(t)$.

La figure (2.26) permet de constater que l'établissement du critère **CS1** à partir du modèle analytique du signal prévoit deux intervalles sur lesquels la positivité n'est pas garantie. Un zoom sur l'intervalle de temps $[0.25, 0.35]$ (figure 2.27) permet de mieux mettre en évidence la zone concernée.

Comparons maintenant la sortie de l'opérateur appliqué au signal analytique et la prédiction établie par le critère **CS1**. La figure (Fig. 2.28) et l'agrandissement opéré sur l'intervalle de temps $[0.25, 0.35]$ (figure 2.27) montrent que la sortie de l'opérateur prend bien des valeurs négatives sur les deux intervalles pour lesquels le critère **CS1** n'est pas vérifié. Cependant, des valeurs négatives

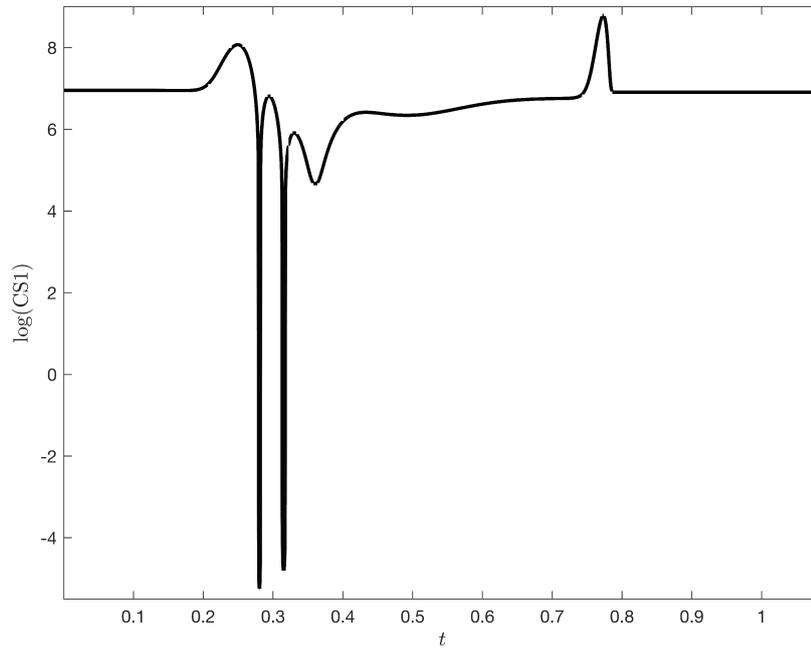


FIGURE 2.26 – Représentation logarithmique du critère de positivité **CS1** appliqué au modèle analytique approchant le signal.

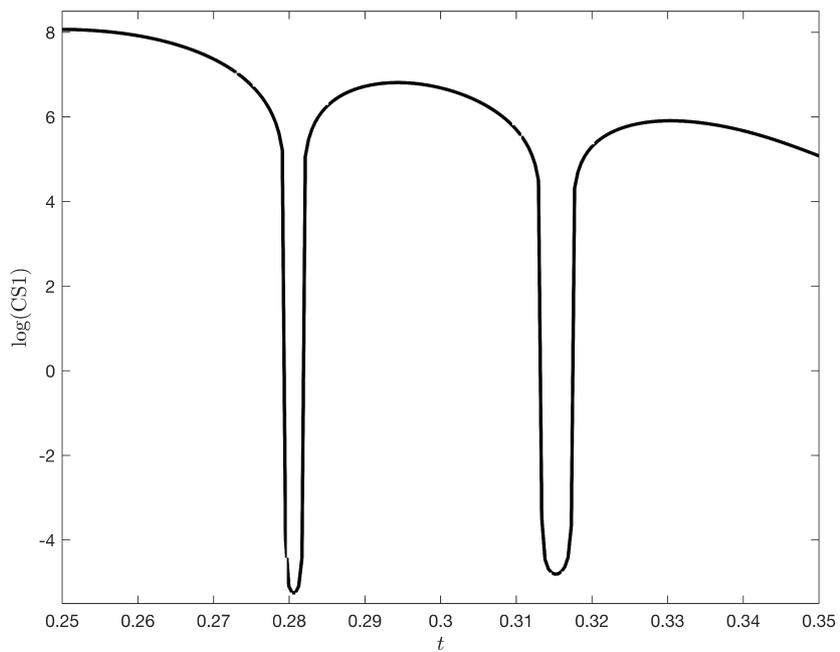


FIGURE 2.27 – Zoom sur l'intervalle de temps $[0.25, 0.35]$ de $CS_1(t)$.

apparaissent également sur d'autres intervalles pour lesquels le critère est pourtant respecté, ce qui semble en contradiction avec la validité du critère. Ce phénomène est en fait dû au pas de discrétisation dont nous allons étudier l'influence.

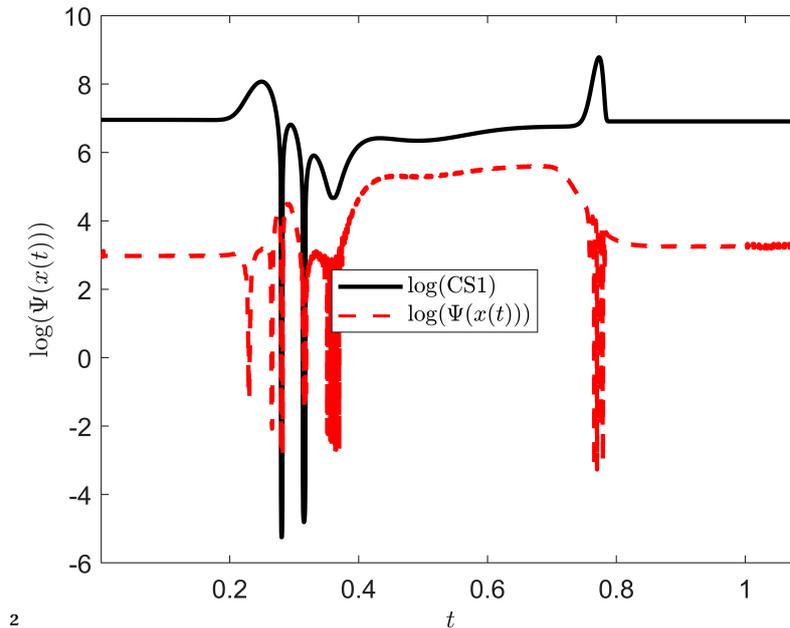


FIGURE 2.28 – Représentation logarithmique du critère de positivité **CS1** et de la sortie de l'opérateur appliqué au modèle analytique approchant le signal.

2.6.3 Influence de la fréquence d'échantillonnage

Pour représenter l'opérateur appliqué au signal analytique sur les figures (2.28) et (2.29) nous avons, par défaut, pris le même pas de discrétisation que celui du signal réel, pas correspondant à une fréquence d'échantillonnage de 230,6 kHz. Puisque nous disposons de l'expression analytique, nous pouvons en fait choisir librement ce pas. La figure (2.30) présente les mêmes éléments que la figure (2.28) mais le pas a désormais été divisé par 4.

Nous constatons que, désormais, dès lors que la condition **CS1** est respectée, la sortie de l'opérateur est effectivement positive. Les seules valeurs négatives apparaissent sur l'un des deux intervalles, le second, sur lesquels **CS1** n'est pas respectée. La sortie reste positive sur le premier intervalle ce qui ne contredit pas la condition **CS1** qui est suffisante mais pas nécessaire.

La figure (2.31) représente le **rapport d'échantillonnage** initial $r_e = \frac{f_e}{f}$, obtenu d'une part par la démodulation du signal réel (en bleu) et d'autre part à partir du signal analytique (en rouge). On constate qu'il est faible (compris en 3,5 et 6,1). Pour un signal idéal, dès lors que $r_e > 2$, qui est la valeur minimale de reconstitution du signal établie par le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon, on peut utiliser la relation (1.34). Toutefois, dès lors que la fréquence et l'amplitude du signal varient, pour capter la pulsation et l'amplitude instantanée, le **rapport d'échantillonnage** doit être d'autant plus grand que ces variations sont fortes. Dans notre exemple et en général dans le cas des signaux **AM-FM**, il est souhaitable d'avoir $r_e > 8$ (cf. paragraphe 1.2.2). C'est le cas de la figure (2.30) où nous avons augmenté le rapport r_e , dont le minimum est alors de 14. Les valeurs négatives liées à un échantillonnage trop faible ont disparu; nous reviendrons plus en détail sur le rôle de la fréquence d'échantillonnage au chapitre 3.

2.6.4 Dépendance de la phase initiale

L'influence de la phase initiale du signal d'entrée doit également être prise en compte. Pour un pas de discrétisation en temps h donné, modifier la phase initiale revient à décaler les échantillons

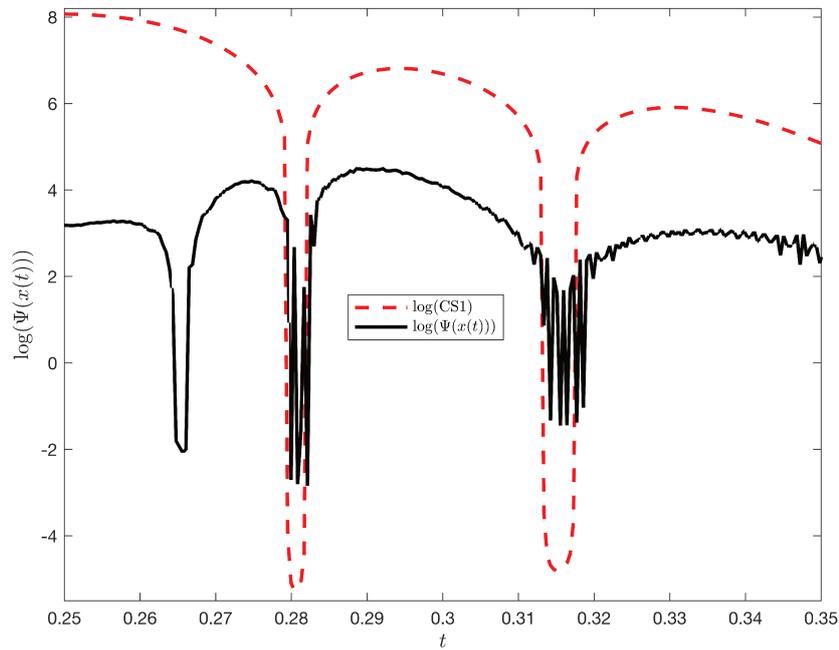


FIGURE 2.29 – Représentation logarithmique du critère de positivité **CS1** et de la sortie de l'opérateur appliqué au modèle analytique approchant le signal.

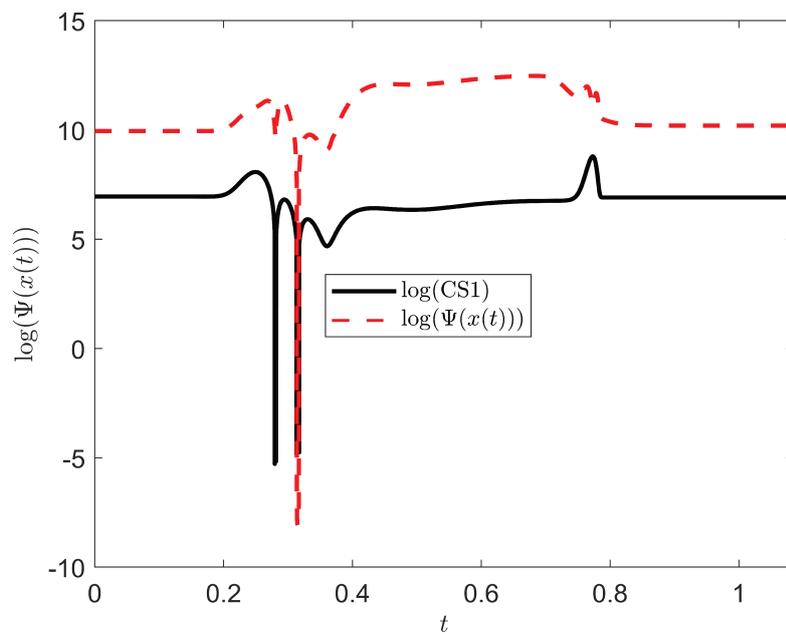


FIGURE 2.30 – Comparaison du critère **CS1** et de l'opérateur avec un facteur de suréchantillonnage de 4.

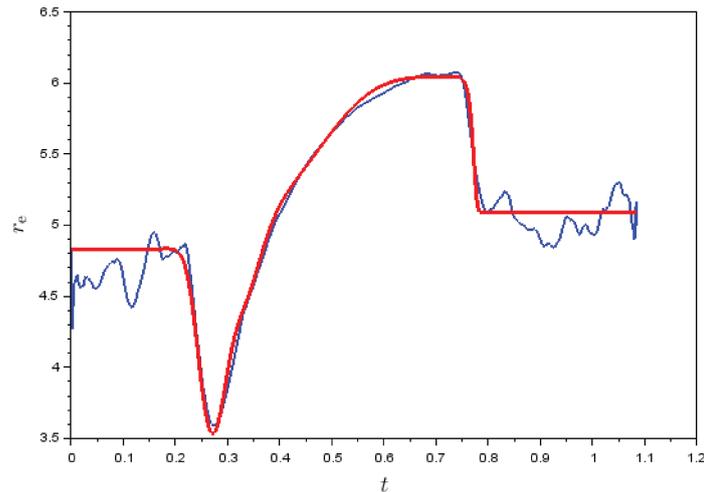


FIGURE 2.31 – Rapport d'échantillonnage du signal de chauve-souris.

d'une valeur inférieure à h . Il s'avère que la sortie de l'opérateur dépend de cet alignement de la grille de discrétisation temporelle.

La figure (2.32), représente la famille de courbes obtenues en faisant varier les valeurs de phase initiale de $-\pi$ à π . Ces courbes mettent en évidence la sensibilité de la sortie de l'opérateur à la valeur de phase initiale du signal d'entrée. Cette sensibilité à la phase initiale n'a d'influence sur le signe de l'opérateur que sur les intervalles de temps où le critère de positivité n'est pas satisfait.

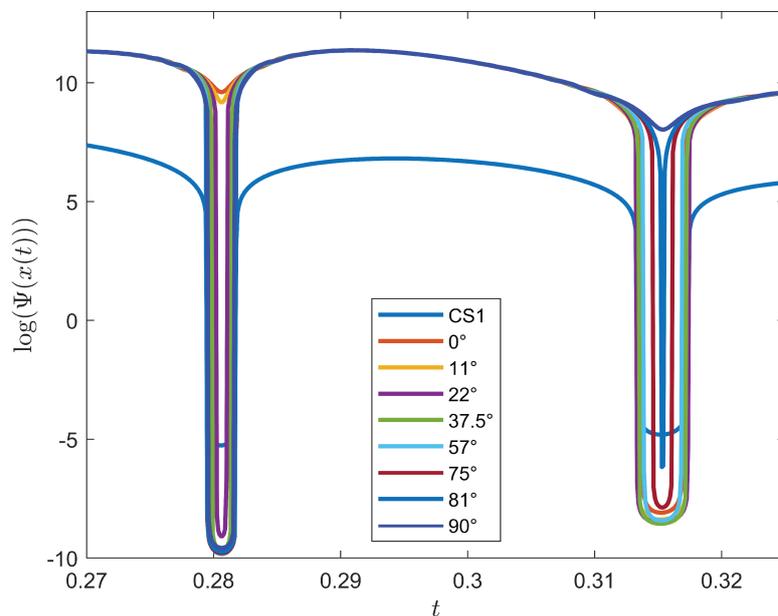


FIGURE 2.32 – Comparaison du critère **CS1** et de l'opérateur pour différentes valeurs de la phase initiale du signal.

2.6.5 Critère simplifié

Revenons sur l'expression de la condition **CS1** : $\dot{\phi}^2 > \frac{1}{2} \left(\ddot{\rho} + \sqrt{\ddot{\phi}^2 + \ddot{\rho}^2} \right)$.

Dès lors que $\dot{\phi} = 0$, la condition ne peut être vérifiée. Plus généralement, lorsque $\dot{\phi} \rightarrow 0$ elle risque de ne pas être vérifiée et, même si elle l'est, la sortie sera très sensible aux perturbations (bruit, rap-

port d'échantillonnage faible). Le graphique (2.33) présente $\Phi(t)$ pour le signal de chauve-souris sur l'intervalle de temps $[0,25; 0,35]$. On constate la présence de deux extrema pour lesquels $\dot{\Phi} = 0$ correspondant aux deux intervalles sur lesquels la condition CS1 n'est pas vérifiée.

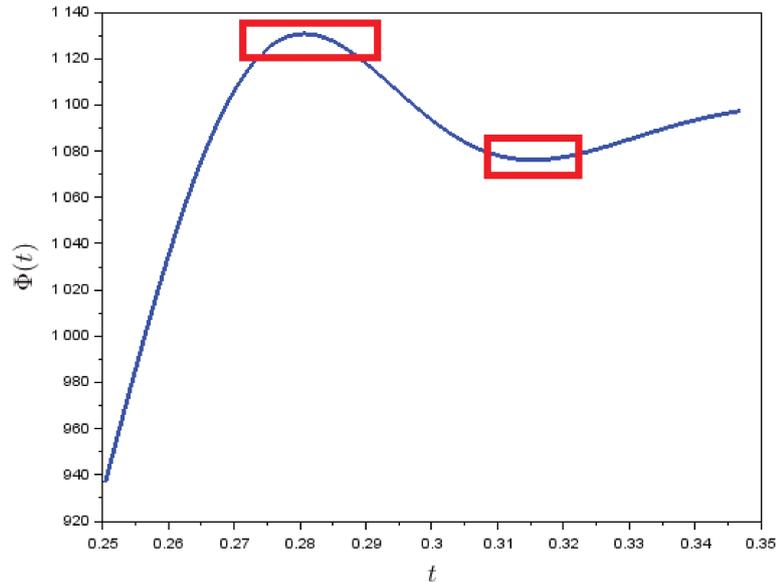


FIGURE 2.33 – Extrema locaux de Φ .

La non vérification de la condition CS1 n'implique pas que la sortie de l'opérateur soit négative et cette condition peut ne pas être vérifiée sans que $\dot{\Phi} \rightarrow 0$, néanmoins, la présence de valeurs t_i pour lesquelles $\dot{\Phi} = 0$ est un indicateur simple de la présence d'intervalles pour lesquels la sortie de l'opérateur risque d'être négative.

Remarque :

$\dot{\Phi} \ll 1$ correspond également, dans le cas du signal étudié, à $\left| \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}^2} \right| \gg 1$ et $\left| \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} \right| \gg 1$; le signal ne remplit plus les conditions pour être considéré comme un "Chirp".

2.7 Conclusion

Conditions de positivité

Nous avons établi des conditions générales de positivité d'un signal $x(t)$, fondées sur l'écriture de ce signal sous une forme modulée en amplitude et en fréquence et utilisant l'amplitude logarithmique (2.15). Cette forme, correspondant aux signaux AM-FM, pour lesquels l'opérateur de Teager-Kaiser est bien adapté, ne restreint toutefois pas la portée de l'étude puisque, ainsi qu'on a pu le voir au paragraphe 2.3, tout signal peut être écrit sous cette forme (2.12). Ces conditions générales restant toutefois complexes à exploiter, nous avons étudié de manière plus détaillée leur application à un signal quadratique, cas particulier qui présente l'avantage d'être une modélisation locale d'un signal.

A notre connaissance, il s'agit de la première étude détaillée portant sur la positivité de la sortie de l'opérateur. Les conditions que nous avons établies permettent de cibler au mieux les catégories de signaux pour lesquels l'opérateur ${}^c\Psi$ est particulièrement bien adapté. Nous avons appliqué les conditions de positivité à des signaux de type "chirp" [28], pour lesquels nous avons pu montrer que la positivité de la sortie de l'opérateur était garantie. La démarche que nous avons adoptée peut être reproduite pour d'autres classes de signaux afin d'évaluer l'opportunité de leur appliquer

l'opérateur de Teager-Kaiser et peut être étendue au cas des images. Nous avons également, au cours de cette étude, mis en évidence le rôle de la phase initiale qui, pour certains signaux, peut influencer sur la positivité de la sortie de l'opérateur.

Application à un cas réel

Les critères de positivité que nous avons établis permettent de déterminer si, pour un type de signal donné, en modélisant celui-ci sous une forme AM-FM, l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser est susceptible ou non de générer des valeurs négatives dont nous avons exposé les inconvénients en introduction. L'utilisation de signaux "modèles" permet de déterminer si le modèle théorique respecte les critères sur un intervalle de temps donné. Cette première conclusion s'applique toutefois à un signal idéal; l'application à un cas réel, en l'occurrence à un signal d'écholocation de chauve-souris, a mis en évidence deux autres causes d'apparition de valeurs négatives, à savoir le [rapport d'échantillonnage](#) et le bruit.

Le problème de la positivité de l'opérateur ne peut être totalement appréhendé sans prendre en compte la sensibilité de l'opérateur au bruit et au pas d'échantillonnage. Nous étudierons au chapitre 3 l'influence du pas sur la sortie de l'opérateur et proposerons une version revisitée $h\Psi$ de l'opérateur qui s'adapte mieux aux caractéristiques du signal que la version standard. En exploitant $h\Psi$ pour différents pas, nous proposerons de nouveaux opérateurs, plus robustes au bruit et permettant ainsi une meilleure qualité de la démodulation en environnement bruité.

Appendice 1 : Procédure de démodulation et reconstruction du signal

Le traitement du signal x_{bat} d'écholocation de chauve-souris a été effectué suivant la procédure suivante, établie plus généralement pour des signaux réels.

- Pré-traitement
 - Lissage Savitsky-Golay (SG) [146] - Non activé pour x_{bat}
 - Suréchantillonnage par la formule de Shannon [31] - Non activé pour x_{bat}
- Teager-Kaiser
 - Application de l'algorithme de Teager-Kaiser discret $d\Psi$
 - 1^{er} lissage SG - Polynôme d'ordre 2 - fenêtre de 31 points
 - 2nd lissage SG - Polynôme d'ordre 1 - fenêtre de 51 points
- Détermination de cos ESA
 - Calcul des différences $y_n = x_n - x_{n-1}$
 - Application de l'algorithme de Teager-Kaiser discret $d\Psi$ à y
 - 1^{er} lissage SG - Polynôme d'ordre 2 - fenêtre de 11 points
 - 2nd lissage SG - Polynôme d'ordre 1 - fenêtre de 51 points
 - calcul du cosinus.
- DESA pour la pulsation - Application de l'algorithme pour ω
 - 1^{er} lissage SG - Polynôme d'ordre 2 - fenêtre de 21 points
 - 2nd lissage SG - Polynôme d'ordre 1 - fenêtre de 101 points
- DESA pour l'amplitude
- Sortie des fichiers au format csv.

Remarques

- L'application d'un lissage par un polynôme d'ordre 2 avant celui par polynôme d'ordre 1 permet d'améliorer le lissage tout en limitant l'atténuation des variations effectives du signal.
- Le lissage de la sortie de l'opérateur permet de ramener l'essentiel des valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$ avant d'appliquer un arc cosinus.
- L'amplitude ne subit pas de lissage après démodulation car étant reconstruite à partir de la pulsation lissée, elle a subi le même niveau de lissage que ω .

Le graphique (2.34) présente l'application de la procédure au signal d'écholocation de chauve-souris x_{bat} .

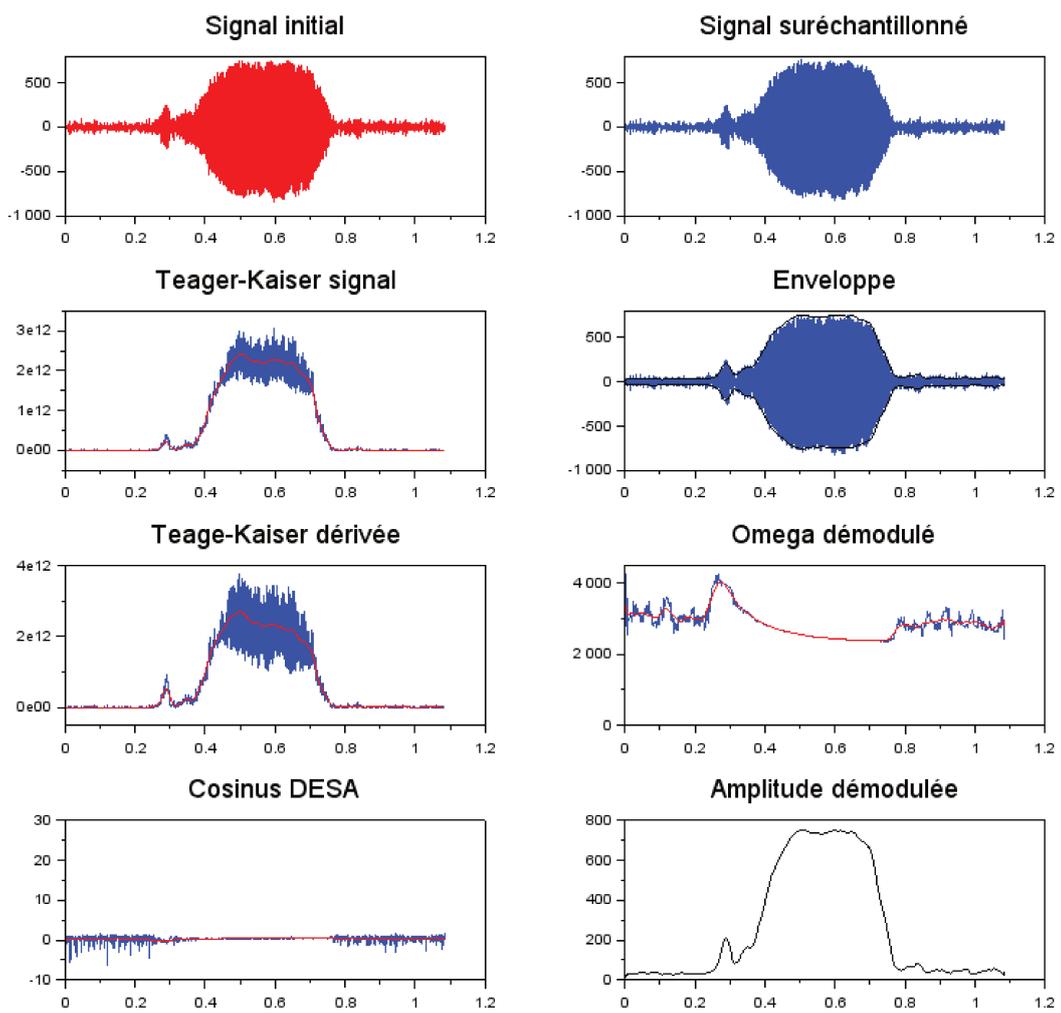


FIGURE 2.34 – Etapes de la démodulation.

Appendice 2 : modélisation analytique du signal de chauve-souris

L'amplitude exponentielle ρ et la pulsation ω ont été modélisée par les fonctions suivantes :

$$\rho(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \quad \text{et} \quad \omega(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) \quad \text{avec}$$

$$f_1(t) = (M_1 - m_1) \left[1 - e^{-\left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{k_1}} \right], \quad f_2(t) = m_1 - (M_1 - m_2) e^{-\left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{k_2}},$$

$$f_3(t) = \frac{a_1}{s_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t-e_1}{s_1}\right)^2}, \quad g_1(t) = (M_3 - m_3) e^{u_3 \left(\frac{t-t_3}{\lambda_3}\right)^{k_3}}$$

$$g_2(t) = (M_3 - m_4) \left[1 - e^{u_4 \left(\frac{t-t_4}{\lambda_4}\right)^{k_4}} \right], \quad g_3(t) = m_3 + \frac{a_3}{s_3 \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t-e_3}{s_3}\right)^2},$$

$$\text{et } g_4(t) = \frac{a_4}{s_4 \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t-e_4}{s_4}\right)^2}$$

où $M_1 = 6,6$, $m_1 = 3,46$, $m_2 = 3,8$, $t_1 = 0$, $\lambda_1 = 0,375$, $k_1 = 8$, $t_2 = 1,05$, $\lambda_2 = 0,31$, $k_2 = 12$, $a_1 = 0,08$, $s_1 = 0,02$, $e_1 = 0,285$, $M_3 = 3000$, $m_3 = 2395$, $m_4 = 2550$, $t_3 = 0$, $\lambda_3 = 0,5$, $k_3 = 5$, $u_3 = -1,3$, $t_4 = 0,073$, $\lambda_4 = 0,7$, $k_4 = 120$, $u_4 = -1$, $a_3 = 46$, $s_3 = 0,05$, $e_3 = 0,32$, $a_4 = 80$, $s_4 = 0,032$, $e_4 = 0,269$.

On a alors $\dot{\rho}(t) = \dot{f}_1(t) + \dot{f}_2(t) + \dot{f}_3(t)$, $\dot{\omega}(t) = \dot{g}_1(t) + \dot{g}_2(t) + \dot{g}_3(t) + \dot{g}_4(t)$, $\ddot{\rho}(t) = \ddot{f}_1(t) + \ddot{f}_2(t) + \ddot{f}_3(t)$,
et $\ddot{\omega}(t) = \ddot{g}_1(t) + \ddot{g}_2(t) + \ddot{g}_3(t) + \ddot{g}_4(t)$ avec :

$$\dot{f}_1(t) = (M_1 - m_1) \frac{k_1}{\lambda_1} \left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{k_1-1} e^{-\left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{k_1}},$$

$$\dot{f}_2(t) = (M_1 - m_2) \frac{k_2}{\lambda_2} \left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{k_2-1} e^{-\left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{k_2}},$$

$$\dot{f}_3(t) = -\frac{2a_1}{s_1^3 \sqrt{2\pi}} (t-e_1) e^{-\left(\frac{t-e_1}{s_1}\right)^2}$$

$$\dot{g}_1(t) = (M_3 - m_3) \frac{k_3 u_3}{\lambda_3} \left(\frac{t-t_3}{\lambda_3}\right)^{k_3-1} e^{-\left(\frac{t-t_3}{\lambda_3}\right)^{k_3}},$$

$$\dot{g}_2(t) = -(M_3 - m_4) \frac{k_4 u_4}{\lambda_4} \left(\frac{t-t_4}{\lambda_4}\right)^{k_4-1} e^{-\left(\frac{t-t_4}{\lambda_4}\right)^{k_4}},$$

$$\dot{g}_3(t) = -\frac{2a_3}{s_3^3 \sqrt{2\pi}} (t-e_3) e^{-\left(\frac{t-e_3}{s_3}\right)^2},$$

$$\dot{g}_4(t) = -\frac{2a_4}{s_4^3 \sqrt{2\pi}} (t-e_4) e^{-\left(\frac{t-e_4}{s_4}\right)^2},$$

$$\ddot{f}_1(t) = (M_1 - m_1) \frac{k_1}{\lambda_1} \left[\frac{k_1-1}{\lambda_1} \left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{k_1-2} - \frac{k_1}{\lambda_1} \left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{2k_1-2} \right] e^{-\left(\frac{t-t_1}{\lambda_1}\right)^{k_1}},$$

$$\ddot{f}_2(t) = (M_1 - m_2) \frac{k_2}{\lambda_2} \left[\frac{k_2-1}{\lambda_2} \left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{k_2-2} - \frac{k_2}{\lambda_2} \left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{2k_2-2} \right] e^{-\left(\frac{t-t_2}{\lambda_2}\right)^{k_2}},$$

$$\dot{f}_3(t) = \frac{2a_1}{s_1^3 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{s_1^2} (t - e_1)^2 - 1 \right] e^{-\left(\frac{t - e_1}{s_1}\right)^2}$$

$$\ddot{g}_1(t) = (M_3 - m_3) \frac{k_3 u_3}{\lambda_3} \left[\frac{k_3 - 1}{\lambda_3} \left(\frac{t - t_3}{\lambda_3}\right)^{k_3 - 2} + \frac{k_3 u_3}{\lambda_3} \left(\frac{t - t_3}{\lambda_3}\right)^{2k_3 - 2} \right] e^{u_3 \left(\frac{t - t_3}{\lambda_3}\right)^{k_3}},$$

$$\ddot{g}_2(t) = -(M_3 - m_4) \frac{k_4 u_4}{\lambda_4} \left[\frac{k_4 - 1}{\lambda_4} \left(\frac{t - t_4}{\lambda_4}\right)^{k_4 - 2} + \frac{k_4 u_4}{\lambda_4} \left(\frac{t - t_4}{\lambda_4}\right)^{2k_4 - 2} \right] e^{u_4 \left(\frac{t - t_4}{\lambda_4}\right)^{k_4}},$$

$$\dot{g}_3(t) = \frac{2a_3}{s_3^3 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{s_3^2} (t - e_3)^2 - 1 \right] e^{-\left(\frac{t - e_3}{s_3}\right)^2},$$

$$\dot{g}_4(x) = \frac{2a_4}{s_4^3 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{2}{s_4^2} (t - e_4)^2 - 1 \right] e^{-\left(\frac{t - e_4}{s_4}\right)^2}.$$

On détermine alors $\phi(t) = \omega(t).t$, $\dot{\phi}(t) = \dot{\omega}(t).t + \omega(t)$ et $\ddot{\phi}(t) = \ddot{\omega}(t).t + 2\dot{\omega}(t)$.

Chapitre 3

Prise en compte du pas

« Nous sommes obligés de penser que les choses ne sont pas et ne se passent pas comme nous les voyons, que certaines que nous sommes contraints de penser immuables ou égales sont variables ou inégales. »

Paul Valéry

Sommaire

3.1 motivation	88
3.2 Opérateur d'énergie prenant en compte le pas	89
3.2.1 L'opérateur ${}^h\Psi$	89
3.2.2 Modification du pas par la formule de Shannon	92
3.2.3 Application de ${}^h\Psi$ à un signal rééchantillonné	95
3.2.4 Extraction de fréquences avec ${}^h\Psi$	99
3.3 Méthode ESA revisitée	103
3.3.1 Opérateurs Δ_{pq} et \mathbf{R}_{pq}	103
3.3.2 Démodulation par les opérateurs ${}^h\text{DESA}$	104
3.3.3 Démodulation avec \mathbf{R}_{21}	107
3.4 Opérateur ${}^h\mathbf{T}$	108
3.4.1 Opérateur Δ_{pq} et débruitage statistique	108
3.4.2 ${}^h\mathbf{T}$: un opérateur de débruitage statistique	109
3.5 Démodulation des signaux AM-FM	111
3.6 Mise en œuvre et comparaison des opérateurs ${}^h\Psi$ et \mathbf{R}_{21}	112
3.6.1 Mise en œuvre de ${}^h\Psi$	113
3.6.2 Application de \mathbf{R}_{21}	115
3.7 Signal bruité et mise en œuvre de ${}^h\mathbf{T}$	117
3.7.1 Démodulation de la fréquence instantannée	117
3.7.2 Démodulation de l'amplitude instantannée	119
3.7.3 Sensibilité au bruit de l'opérateur de Teager-Kaiser	121
3.8 Conclusion	124

3.1 motivation

L'étude d'un signal réel repose sur son acquisition sous forme discrète qui fait ainsi intervenir une **fréquence d'échantillonnage**, f_e . Cette fréquence est importante à plusieurs titres, en particulier en raison du théorème de Nyquist-Shannon qui démontre qu'on ne peut récupérer (du moins pas avec certitude) les fréquences d'un signal qui ne sont pas au plus deux fois inférieures à f_e . L'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser, non seulement ne contourne pas cette limite, mais fait apparaître deux autres difficultés. D'une part l'apparition d'un terme en sinus carré limite la capacité de résolution de l'opérateur à des fréquences quatre fois supérieures à f_e , ainsi qu'exposé au paragraphe 1.2.2. D'autre part, l'interprétation de la sortie de l'opérateur comme égale au produit des carrés de l'amplitude et de la fréquence instantanées du signal (1.70) est une approximation, introduisant une erreur supérieure à 10 % pour des fréquences n'étant pas inférieures à huit fois f_e (cf. 1.1). En effet, la démodulation s'appuie sur l'approximation $\sin^2 \Omega \simeq \Omega^2$, où $\Omega = \frac{2\pi}{r_e}$ est la pulsation par échantillon et $r_e = \frac{f_e}{f}$ le **rapport d'échantillonnage**. L'approximation est légitime lorsque la pulsation Ω est petite mais introduit dans le cas général l'erreur relative présentée en fonction de r_e sur le graphique (3.1). L'incidence de cette approximation reste limitée car les algorithmiques de démodulation font intervenir des rapports entre quantités ainsi biaisées ce qui diminue l'influence sur la précision du résultat.

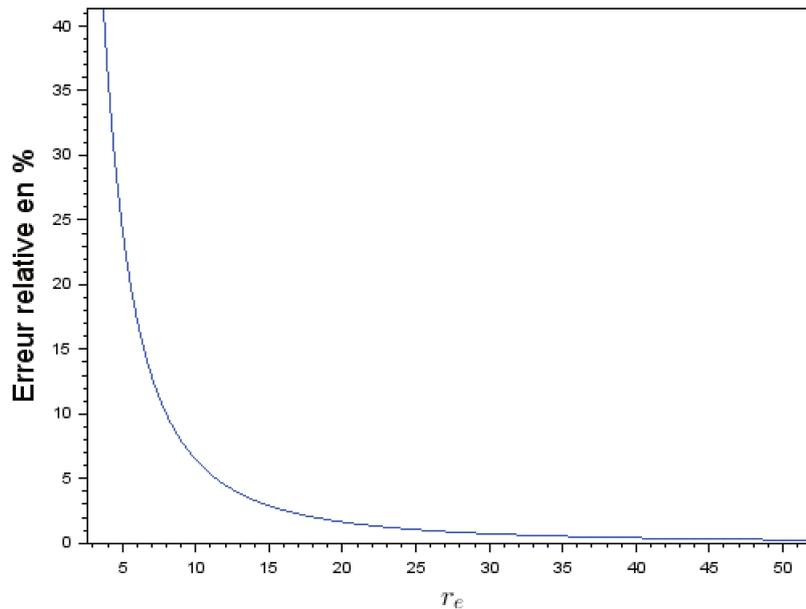
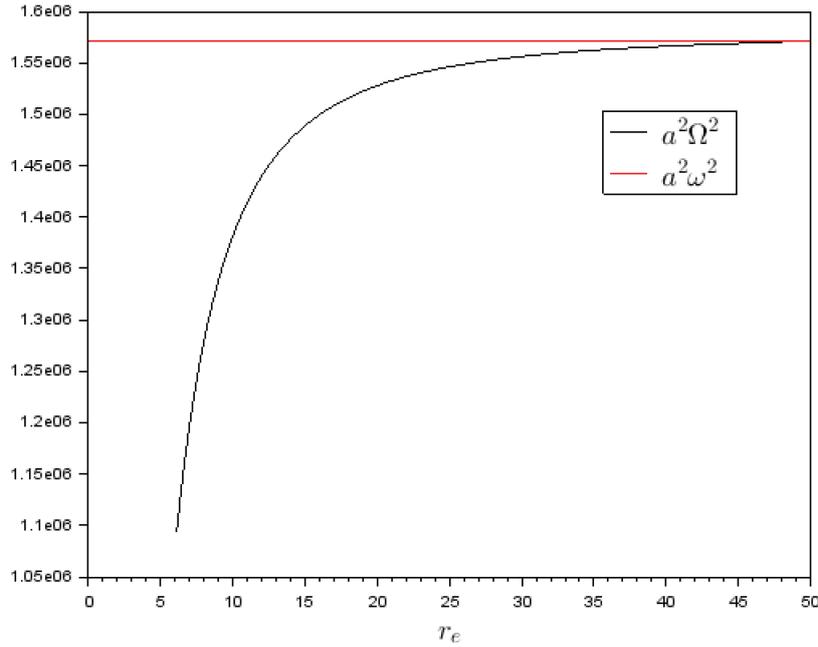


FIGURE 3.1 – Erreur relative due à l'approximation $\sin^2(\Omega) \simeq \Omega^2$ en fonction de r_e .

Ces inconvénients, liés à l'opérateur de Teager-Kaiser, ne se posent pas lorsque la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, c'est-à-dire lorsque l'ordre de grandeur de la fréquence d'un signal étudié est connue et que la fréquence d'échantillonnage a été établie en conséquence. Ce n'est toutefois pas toujours le cas, en particulier si le signal n'est pas à bande étroite ou dans le cas d'enregistrement provenant de capteurs placés dans un environnement complexe comme, par exemple, des capteurs placés sur les fonds océaniques et susceptibles d'enregistrer des passages de bateaux, des sons de mammifères marins, des ondes sismiques, dont les fréquences ne sont maîtrisées a priori. Par ailleurs, la variation de la sortie de l'opérateur en fonction de la **fréquence d'échantillonnage** est également une source d'information. Plusieurs acquisitions d'un même signal effectuées avec des fréquences d'échantillonnage différentes, ou bien le rééchantillonnage d'un enregistrement, génèrent des sorties différentes de l'opérateur et ces différences peuvent être exploitées pour mieux analyser le signal.

L'expression de l'opérateur de Teager-Kaiser discret, $d\Psi$, repose sur une suite discrète de va-


 FIGURE 3.2 – Approximation de $a^2\omega^2$ en fonction du rapport d'échantillonnage

leurs indicées par des entiers naturels : $(x_n)_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}$. Son expression ne fait pas apparaître la **fréquence d'échantillonnage** et, à notre connaissance, les travaux de la littérature ne font pas intervenir directement le lien entre la suite des valeurs indicées $(x_n)_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}$ et la suite temporelle $(t_n)_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}$ des échantillons dans la mise en œuvre de l'opérateur. Cela entraîne qu'une partie de l'information disponible n'est pas utilisée par l'opérateur ${}^d\Psi$ et ne permet pas la comparaison directe de signaux échantillonnés à des fréquences différentes. Ce chapitre a pour objectif de revisiter la discrétisation de l'opérateur et les algorithmes de démodulation associés. Pour ce faire, nous allons introduire l'opérateur, ${}^h\Psi$, prenant en compte le pas de discrétisation.

La prise en compte du pas est liée à la capacité de disposer de versions du signal échantillonnées à différentes résolutions. Ce peut être le cas si plusieurs mesures, effectuées avec des fréquences d'échantillonnage différentes sont disponibles, mais aussi et surtout si une même mesure est exploitée de différente manière. Cette dernière approche est possible en sélectionnant un pas multiple du pas initial et nous explorerons cette voie en introduisant deux nouveaux opérateurs, notés Δ_{pq} et \mathbf{R}_{pq} . C'est également possible en ré-échantillonnant le signal par l'utilisation de la formule de Shannon et nous développerons cette approche.

Nous verrons que les opérateurs Δ_{pq} , en exploitant la différence de comportement du signal en fonction de la **fréquence d'échantillonnage**, permettent d'éliminer, statistiquement, l'influence du bruit sur la sortie de l'opérateur. Ils nous permettront d'introduire un autre opérateur, noté ${}^h\mathbf{T}$, exploitant cette propriété et permettant de démoduler les fréquences et amplitudes instantanées avec plus de précision que les algorithmes de démodulation (DESA) usuels présentés au paragraphe 1.3.6.

3.2 Opérateur d'énergie prenant en compte le pas

3.2.1 L'opérateur ${}^h\Psi$

La sortie de la version discrète, ${}^d\Psi$, de l'opérateur, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, ne converge pas vers la sortie de la version continue, ${}^c\Psi$. Nous allons introduire l'opérateur

${}^h\Psi$ qui, en rendant comparables les valeurs de sortie pour des pas variables, va remédier à ce problème de convergence et rendre possible une analyse multi-échelle.

La version continue ${}^c\Psi$ de l'opérateur, lorsqu'appliquée à un signal harmonique $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, possède la propriété

$${}^c\Psi x(t) = a^2 \omega^2. \quad (3.1)$$

La version discrète utilise un pas unitaire qui se traduit par un changement d'échelle horizontale et en posant $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_e}$, on a alors

$${}^d\Psi x(t) = a^2 \sin^2 \Omega. \quad (3.2)$$

Pour $f_e \gg f$, on peut approcher $\sin \Omega$ par Ω . La sortie de l'opérateur approche alors $a^2 \omega^2$ et non $a^2 \omega^2$:

$${}^d\Psi x(t) \simeq a^2 \Omega^2. \quad (3.3)$$

Notons h le pas d'échantillonnage, on a alors $h = \frac{1}{f_e}$ et $\Omega = h\omega$. La sortie de l'opérateur peut donc s'écrire

$${}^d\Psi x(t) = a^2 \sin^2(\omega h). \quad (3.4)$$

Par conséquent

$${}^d\Psi x(t) \simeq a^2 h^2 \omega^2 \quad \text{pour } h\omega \ll 1. \quad (3.5)$$

Cette expression ne converge pas vers la sortie continue de l'opérateur lorsque h tend vers zéro. Elle tend vers zéro, ce qui correspond au fait que, dans ce cas, $x_n \simeq x_{n-1} \simeq x_{n+1}$. Afin d'obtenir une sortie de l'opérateur discret convergent vers la sortie de l'opérateur continu, à savoir $a^2 \omega^2$ dans le cas d'un signal harmonique, il est donc intéressant de définir, comme suit, un nouvel opérateur discret :

Définition : l'opérateur de Teager-Kaiser à pas variable, ${}^h\Psi$, est défini par

$${}^h\Psi x_n = \frac{1}{h^2} {}^d\Psi x_n = \frac{1}{h^2} (x_n^2 - x_{n-1} x_{n+1}). \quad (3.6)$$

A notre connaissance, c'est la première fois dans la littérature que l'opérateur de Teager-Kaiser est formulé et analysé en fonction du pas d'échantillonnage h .

En utilisant la fonction sinus cardinal, définie par $\text{sin}_c \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, on a alors, pour un signal harmonique :

$${}^h\Psi x_n = \frac{1}{h^2} a^2 \sin^2(h\omega) = a^2 \omega^2 \text{sin}_c^2(h\omega). \quad (3.7)$$

L'opérateur ${}^h\Psi$ possède ainsi, pour un signal harmonique, la propriété

$$\lim_{h \rightarrow 0} {}^h\Psi x(t) = a^2 \omega^2 = {}^c\Psi x. \quad (3.8)$$

Plus généralement

$${}^h\Psi x(t) \simeq \frac{x_n^2 - x_{n-1} x_{n+1}}{h^2} = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{h} \right) \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{h} \right) - x_n \cdot \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n+1}}{h^2} \quad (3.9)$$

or

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \dot{x}(t_n) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}}{h^2} = \ddot{x}(t_n) \quad (3.10)$$

donc, pour tout signal $x(t)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} {}^h\Psi x(t) = {}^c\Psi x(t). \quad (3.11)$$

Les valeurs prises par la sortie de ${}^h\Psi$ restent dépendantes du rapport d'échantillonnage r_e en raison de l'approximation de sin_c par 1 (3.7), mais elles sont désormais comparables entre elles et à la valeur attendue $a^2\omega^2$. La figure (3.3) présente la sortie de l'opérateur ${}^h\Psi$ appliqué à un signal harmonique discrétisé d'amplitude $a = 1$ et de fréquence $f = 200$ Hz obtenue en faisant varier la fréquence d'échantillonnage, f_e et, donc, le rapport d'échantillonnage $r_e = \frac{f_e}{f}$. Lorsque r_e devient grand et donc que le pas de discrétisation h tend vers zéro, la sortie de l'opérateur a pour asymptote la valeur $a^2\omega^2$ correspondant à la sortie de l'opérateur continu. Lorsque r_e devient petit et donc que h tend vers l'infini, la sortie de l'opérateur tend vers zéro. La figure (3.3) permet également d'observer l'effet filtrant de l'opérateur ${}^h\Psi$ sur les fréquences proches ou inférieures à la fréquence d'échantillonnage. Nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 3.2.4.

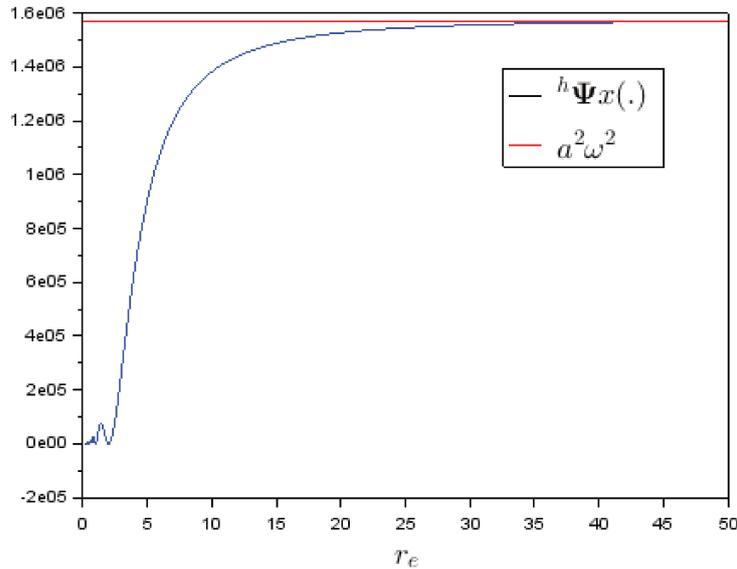
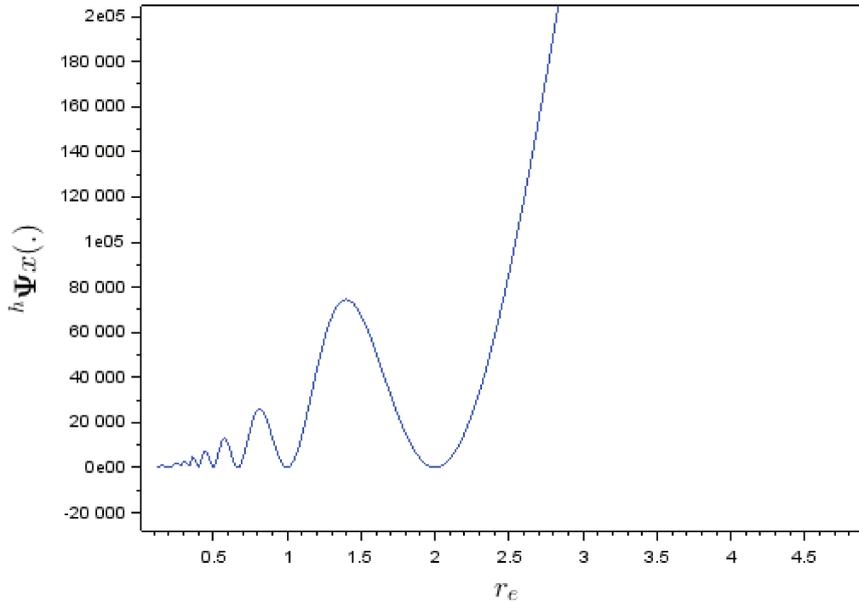


FIGURE 3.3 – Sortie de ${}^h\Psi$ en fonction de r_e pour un signal harmonique.

La figure (3.4), agrandissement de la figure (3.3), permet d'observer les lobes apparaissant lorsque r_e est inférieur à 2. Ils proviennent du terme sinus cardinal. La sortie l'opérateur décroît quand r_e décroît jusqu'à s'annuler pour $r_e = 2$. On a alors $\omega h = 2\pi f / f_e = \pi$ et, donc, $\text{sin}_c(\omega h) = 0$. Cette valeur correspond au critère de Nyquist-Shannon $f_e > 2f$; les valeurs de r_e inférieures à 2 ne sont plus interprétables en terme de pulsation.

Définir l'opérateur ${}^h\Psi$ est intéressant lorsqu'on peut faire varier la valeur h du pas d'échantillonnage or, en général, on ne dispose que d'un unique enregistrement réalisé avec un pas h fixe. Nous allons contourner ce problème par une meilleure exploitation de l'information disponible dans un signal discret initial. Nous allons utiliser la formule de Shannon pour créer, à partir de ce signal discrétisé initial, de nouveaux signaux discrétisés possédant un pas quelconque.


 FIGURE 3.4 – Sortie de $h\Psi$ pour un rapport d'échantillonnage petit.

3.2.2 Modification du pas par la formule de Shannon

Formule de Shannon

La formule de Shannon [31] est un cas particulier de la formule sommatoire de Poisson, obtenue par une égalité entre les valeurs d'une fonction et ses coefficients de Fourier. Elle concerne essentiellement les signaux à bandes étroites, c'est à dire dont les variations en fréquence sont faibles autour d'une fréquence centrale. Pour que le signal puisse être entièrement reconstruit à partir des échantillons, il faut et il suffit alors que la fréquence d'échantillonnage vérifie $f_e > 2f_{\max}$.

Soit un signal échantillonné formé d'une série discrète de couples de valeurs (t_n, x_n) . Si le signal initial $x(t)$ respecte la condition $f_e > 2f_{\max}$, on a alors :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_i \operatorname{sin}_c(\pi f_e(t - t_i)). \quad (3.12)$$

En pratique, pour reconstituer la valeur du signal à un instant t , on applique la formule sur un intervalle discret de valeurs échantillonnées, centré sur une valeur t_j proche de t . Un tel intervalle est de la forme $[[j - N_F; j + N_F]]$. Afin de simplifier les écritures, nous décalerons les indices et noterons l'intervalle $[-N_F; N_F]$ en le qualifiant de fenêtre et gardant en mémoire que les indices effectifs dépendent de l'instant t considéré. On a alors

$$x(t) \simeq s_{N_F}(t) = \sum_{-N_F}^{N_F} x_i \operatorname{sin}_c(\pi f_e(t - t_i)). \quad (3.13)$$

Par abus de langage, on appellera N_F la largeur de fenêtre dans le cas d'un intervalle discret de largeur $2N_F + 1$, de la forme $[-N_F; N_F]$.

Reconstruction du signal

La reconstruction du signal par la formule de Shannon demande, en théorie, une fenêtre infinie mais, pour des signaux usuels à bande limitée, converge rapidement en fonction de N_F vers sa limite. L'approximation est ainsi de bonne qualité, y compris pour des largeurs de fenêtre assez faibles. La figure (3.5) est tirée d'une reconstruction à partir d'une fenêtre de largeur $N_F = 55$.

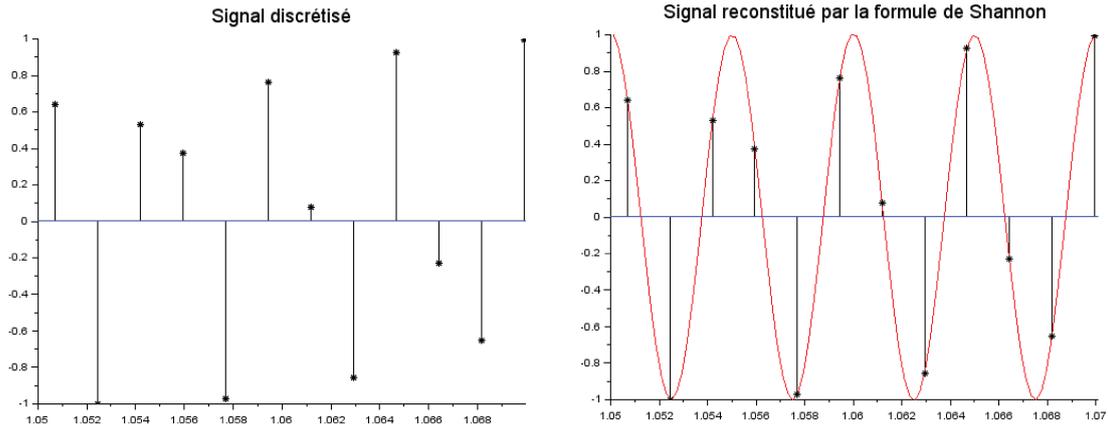


FIGURE 3.5 – Comparaison des signaux discret et reconstitué.

L'écart entre le signal réel x et celui x_s reconstitué par la formule de Shannon à partir d'un échantillonnage x_e de x dépend de plusieurs paramètres dont il est utile d'estimer l'influence avant de mettre en œuvre la formule :

- le **rapport d'échantillonnage** initial $r_e = f_e/f$ entre x_e et x ;
- le déphasage entre le signal et l'échantillonnage, c'est-à-dire le positionnement de la première valeur échantillonnée (t_1, x_1) au sein du signal réel x ;
- la largeur de fenêtre N_F choisie;
- le **coefficient de rééchantillonnage**, $c_{re} = h_s/h$, représentant le rapport entre le pas d'échantillonnage initial, h , et celui, h_s , du signal reconstitué par la formule de Shannon.

Seule la largeur de fenêtre s'avère en fait significative. La figure (3.6) présente l'erreur maximale commise entre x et x_e en fonction de N_F , pour un signal harmonique d'amplitude $a = 1$ et de fréquence $f_s = 100$ Hz, un rapport d'échantillonnage $r_e=3,1$, un coefficient de ré-échantillonnage $c_{re} = 31$. L'erreur considérée est l'écart relatif maximal, exprimé en pourcentage, observé sur une période de 0,5 s au niveau des extrêmes locaux du signal.

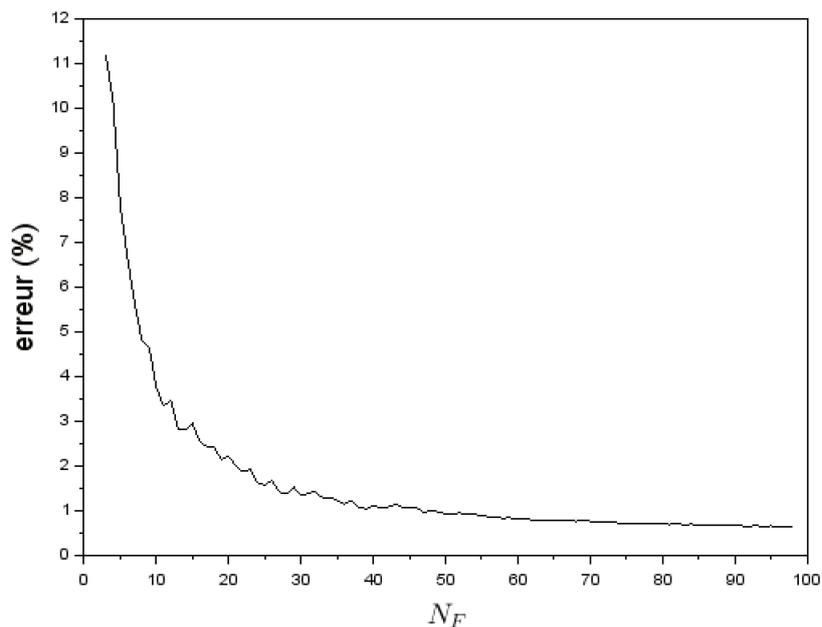


FIGURE 3.6 – Erreur de reconstruction en fonction de N_F .

L'irrégularité de la courbe (3.6) provient du déphasage dont l'influence reste cependant faible. La figure (3.7) représente l'erreur, pour un fenêtrage étroit ($N_F = 15$), en fonction du déphasage. Le signal initial est harmonique d'amplitude $a = 1$ et de fréquence $f = 200$ Hz, échantillonné à 573 Hz. Le coefficient de rééchantillonnage est $c_{re} = 8$. Le signal x apparaît en noir et les signaux x_s , pour différentes phases, en bleu; les écarts sont peu significatifs.

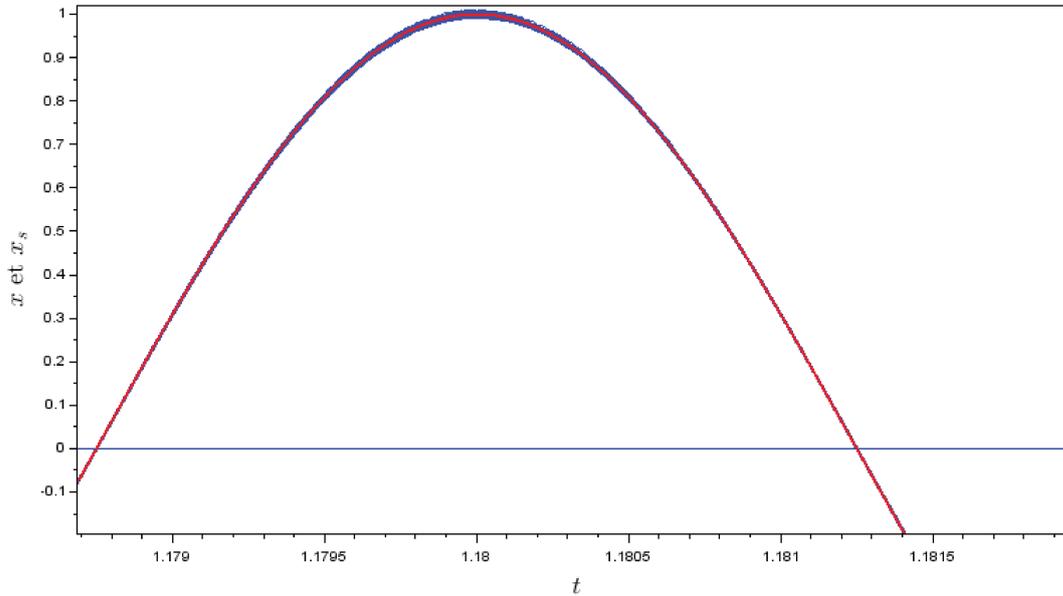
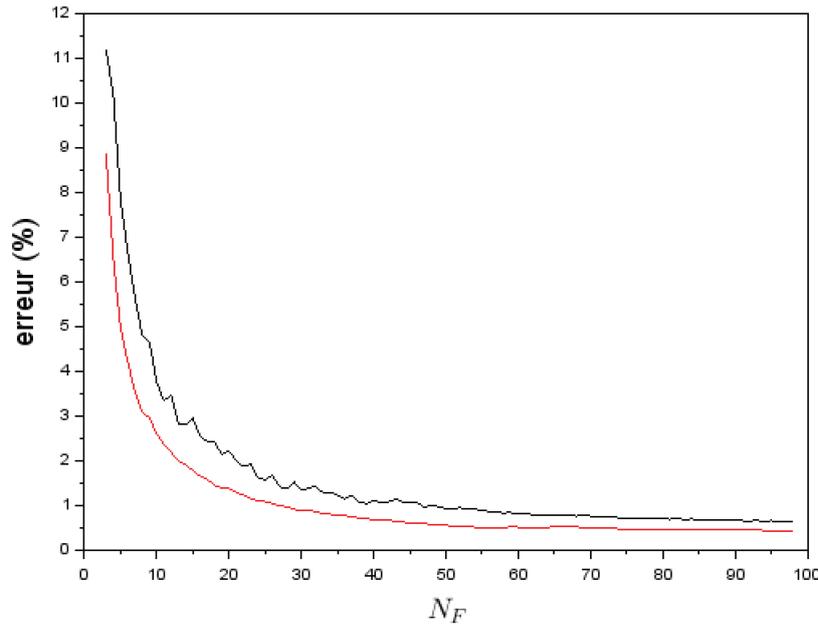


FIGURE 3.7 – Erreur de reconstruction en fonction du déphasage.

Le **coefficient de rééchantillonnage** s'appliquant sur une même information récupérée a très peu d'influence lorsqu'il est supérieur à 1. Il diminue cependant l'erreur commise pour des signaux sous-échantillonnés ($c_{re} < 1$). Son rôle sera détaillé au paragraphe 3.2.3.

Le **rapport d'échantillonnage** initial influe sur la qualité du résultat puisque, plus ce rapport est élevé, plus le nombre de valeurs initiales par unité de temps est élevé et plus nous disposons ainsi d'information initiale, ce qui induit une meilleure qualité du signal reconstitué. Pour différentes valeurs de r_e , le comportement en fonction de la taille de la fenêtre reste similaire, ainsi qu'on peut le constater sur la figure (3.8) où sont tracées, en fonction de N_F , les erreurs commises pour deux rapports d'échantillonnage $r_e = 3, 1$ (courbe noire) et $r_e = 11$ (courbe rouge).

En pratique, en l'absence d'information sur le signal initial, le rapport d'échantillonnage r_e n'est pas connu et nous ne pouvons agir sur celui-ci. Pour rééchantillonner un signal, notre choix va porter sur le coefficient de rééchantillonnage, c_{re} , qui n'a qu'une faible influence sur la qualité des résultats, ainsi que sur la largeur de fenêtre N_F . Ce dernier choix doit tenir compte de deux éléments contradictoires. Lorsque le signal est harmonique, l'erreur résultant de la reconstruction diminue d'autant plus que la largeur de fenêtre augmente, toutefois, lorsque la fréquence du signal varie avec le temps, la pertinence des informations provenant des points de discrétisation diminue lorsque ces derniers sont éloignés du centre de la fenêtre, ce qui incite à diminuer N_F . Nous opterons par la suite pour des tailles de fenêtre allant de 15 à une cinquantaine de points. Nous verrons toutefois que dans certains cas des tailles de fenêtre plus élevées peuvent s'avérer utiles.


 FIGURE 3.8 – Erreur de reconstruction pour différents c_{re} .

3.2.3 Application de ${}^h\Psi$ à un signal rééchantillonné

Sensibilité

L'opérateur de Teager-Kaiser est très sensible aux variations de courbure. Même dans le cas d'un signal harmonique, les faibles écarts entre le signal reconstitué $s_N(t)$ et le signal réel $s(t)$ suffisent à générer de fortes variations sur la sortie de l'opérateur. La figure (3.9) présente la sensibilité de cette sortie pour un signal initial harmonique d'amplitude $a = 1$ et de fréquence $f = 200$ Hz, échantillonné à 1573 Hz. Le coefficient de rééchantillonnage est $c_{re} = 10$, la largeur de fenêtre est $N_F = 55$. La valeur $a^2\omega^2$ attendue pour la sortie de l'opérateur est tracée en rouge sur le graphique.

La dispersion des valeurs diminue lorsque la largeur de fenêtre augmente. C'est ce que présente la figure (3.10). L'opérateur ${}^h\Psi_{s_N}$ a été appliqué à un signal rééchantillonné avec un **coefficient de rééchantillonnage** valant $c_{re} = 8$ et pour des largeurs N_F de fenêtre variant de 15 à 65. Le signal initial a été choisi harmonique, d'amplitude $a = 1$, de fréquence $f = 200$ Hz, échantillonné initialement à 1573 Hz. La figure présente la valeur de sortie moyenne de l'opérateur, en noir, ainsi que cette moyenne augmentée et diminuée d'un écart-type (courbes rouges).

Pour quantifier l'erreur relative statistique, nous pouvons également utiliser le **coefficient de variation** défini comme le rapport de l'écart-type sur la moyenne et que nous emploierons à plusieurs reprises au chapitre 4. Pour une variable aléatoire X , ce coefficient est défini comme étant le rapport de l'écart-type à la moyenne de cette variable :

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}. \quad (3.14)$$

La sensibilité à N_F , pour le même signal que sur la figure (3.10), est présenté sur la figure (3.11) en illustrant cette sensibilité par le **coefficient de variation**. Les valeurs mesurées sont représentées en noir et la courbe de tendance en rouge.

L'utilisation du **coefficient de variation** permet de mettre en relief le comportement de l'opérateur ${}^h\Psi$ lorsqu'on fait varier le **coefficient de rééchantillonnage**. En appliquant la même logique de représentation que la figure (3.11), la figure (3.12) présente, pour différentes valeurs du coefficient c_{re} , les courbes de tendance du **coefficient de variation** en fonction de la largeur de fenêtre.

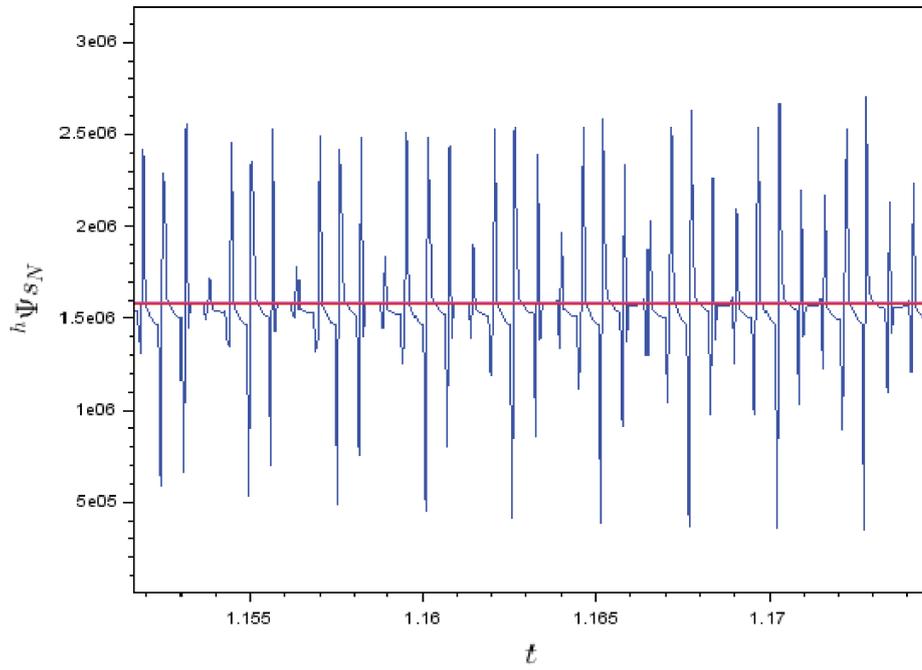


FIGURE 3.9 – Sensibilité de la sortie de l’opérateur.

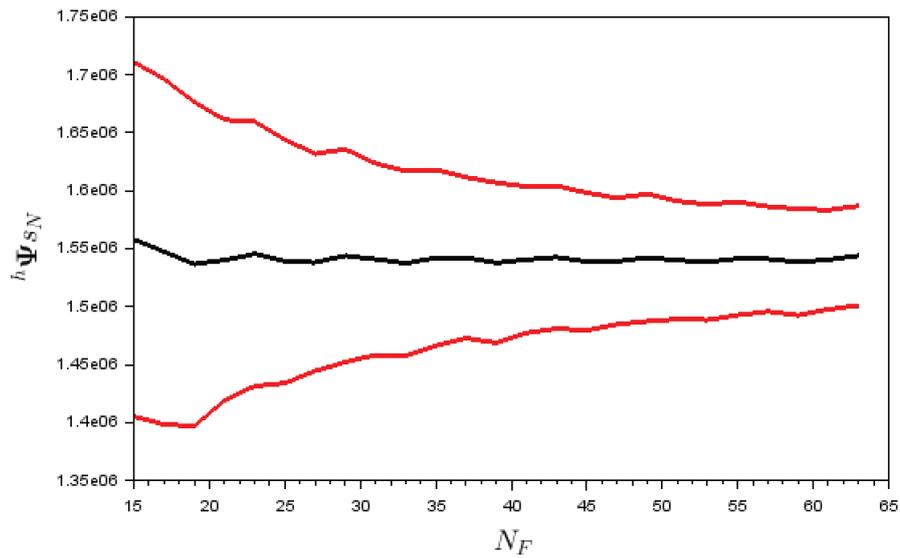


FIGURE 3.10 – Sensibilité de $h\Psi_{SN}$ à N_F .

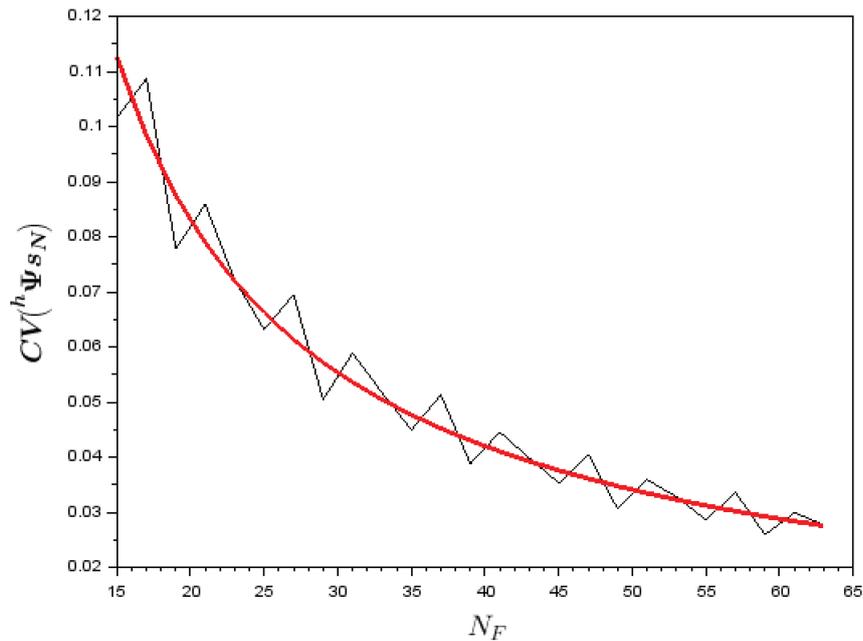


FIGURE 3.11 – Sensibilité de $h\Psi_{SN}$ à N_F : coefficient de variation.

- Lorsque $c_{re} = 1$, le signal n'est pas rééchantillonné, l'écart-type est nul et, donc, **CV** également.
- Lorsque le signal est sous-échantillonné, on observe avec les courbes figurées en pointillé, que **CV** augmente mais reste faible, pour $c_{re} = 0,1$, c'est-à-dire pour un signal sous-échantillonné avec un facteur 10, **CV**, qui indique l'erreur statistique relative, ne dépasse pas 4 % pour une largeur de fenêtre de 15.
- En revanche, la dispersion augmente fortement avec c_{re} pour un signal sur-échantillonné. On observe (courbe magenta) que pour $c_{re} = 0,1$, **CV** atteint 15 % pour une largeur de fenêtre $N_F = 30$.

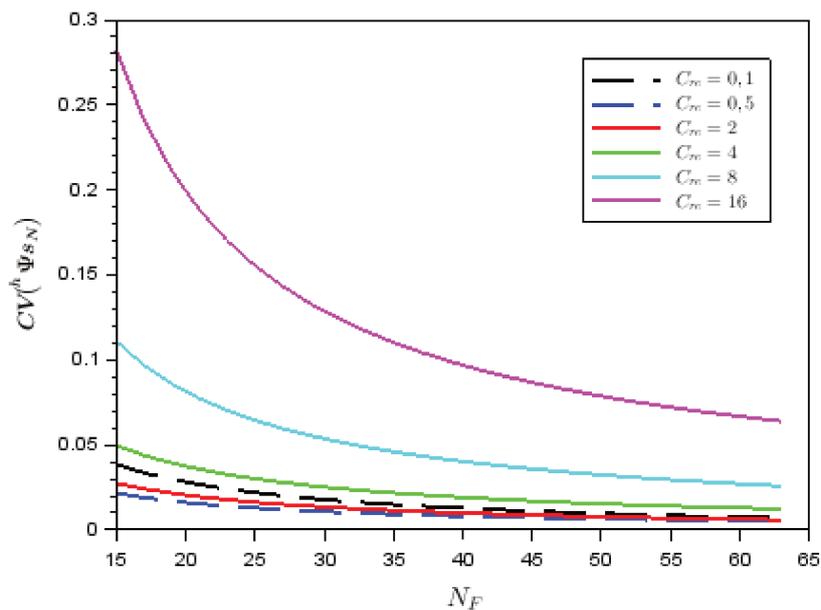


FIGURE 3.12 – Sensibilité de $h\Psi$ au coefficient de rééchantillonnage.

La dispersion des valeurs doit ainsi être prise en compte en utilisant un fenêtrage plus large lorsque le signal est sur-échantillonné; c'est l'exception à l'usage de fenêtre de largeur de 15 à 50

points évoquée à la fin du paragraphe 3.2.2. Le biais dû à la dispersion des valeurs est cependant peu pénalisant car il peut être, pour l'essentiel, compensé par l'utilisation d'une moyenne glissante des valeurs de sortie de ${}^h\Psi$. En effet, bien que l'opérateur de Teager-Kaiser soit intéressant pour sa capacité à récupérer les caractéristiques instantanées du signal, en sur-échantillonnant le signal, le nombre de points a été multiplié; l'utilisation d'une moyenne appliquée à une fenêtre limitée pénalise donc peu le caractère instantané du résultat. De plus, on constate sur la figure (3.9) que la dispersion des résultats due à l'utilisation de la formule de Shannon présente une régularité qui rend très efficace l'utilisation d'une moyenne glissante effectuée sur peu de points. La figure (3.13) présente le même signal que la figure (3.9). On y représente ainsi un signal rééchantillonné avec un facteur 10 avant que ${}^h\Psi$ soit appliqué. En rouge, apparaît la moyenne glissante des valeurs de sortie de l'opérateur, effectuée sur une fenêtre de demi-largeur 5, c'est-à-dire sur 11 points. On constate que la dispersion a été à peu près compensée tout en ne perdant pas l'aspect instantané de l'opérateur puisque l'ordre de grandeur du fenêtrage de la moyenne correspond à celui d'échantillonnage initial du signal. Finalement, le seul facteur dimensionnant dans l'utilisation de la formule de Shannon est ainsi la largeur de fenêtre.

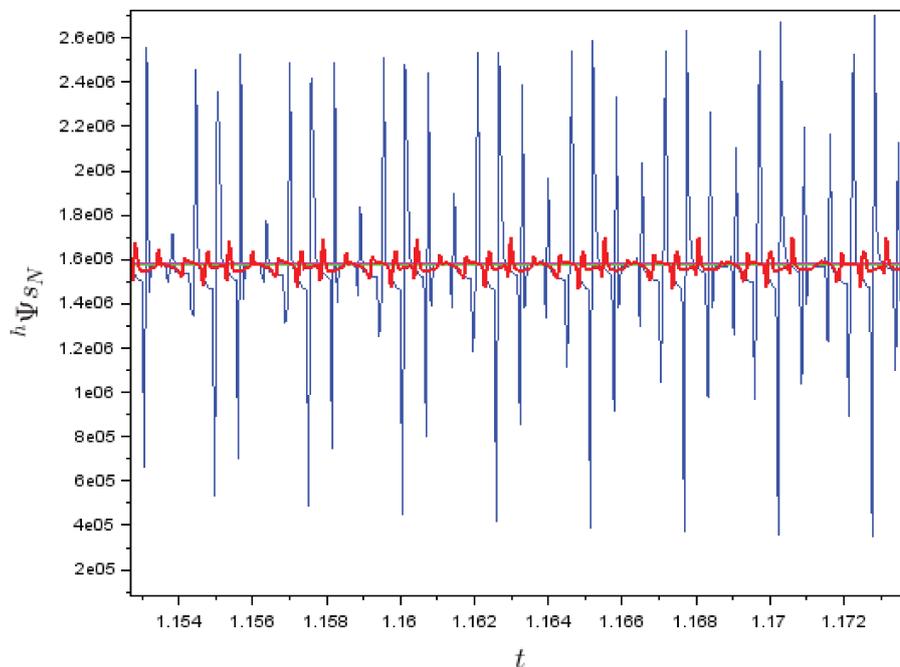


FIGURE 3.13 – Sensibilité de la sortie de l'opérateur.

Convergence asymptotique

Nous avons vu qu'un signal x , échantillonné avec un rapport d'échantillonnage r_{e1} , peut être rééchantillonné par l'utilisation de la formule de Shannon afin d'obtenir un nouveau signal discret s_N ayant un rapport d'échantillonnage r_{e2} , où $r_{e2} = c_{re} \cdot r_{e1}$, c_{re} étant coefficient de rééchantillonnage. Nous avons étudié au paragraphe précédent l'effet combiné de la formule de Shannon et de l'opérateur de Teager-Kaiser à pas variable, ${}^h\Psi$ pour un signal initial échantillonné avec un même rapport d'échantillonnage proche de 8. Nous allons maintenant étudier l'incidence du rapport d'échantillonnage initial sur la sortie de l'opérateur.

Pour un signal initial, harmonique, d'amplitude $a = 1$ et de fréquence $f = 200$ Hz, échantillonné sur une seconde, nous avons simulé l'application successive de la formule de Shannon et de ${}^h\Psi$ pour deux discrétisations initiales différentes. $r_e = 34,1$ pour la figure (3.14) et $r_e = 19,7$ pour la figure (3.15). Dans les deux cas, la largeur de la fenêtre est de 51 points et la figure présente, en noir, la sortie de l'opérateur en fonction du rapport d'échantillonnage final r_{e2} obtenu.

La valeur cible $a^2\omega^2$ et la valeur de sortie attendue $a^2\omega^2 \sin_c^2(h\omega)$ sont tracées en rouge. Le rapport d'échantillonnage initial est rappelé sur chaque figure par un segment vertical en vert. Sur la figure (3.14), on constate que lorsque le rapport d'échantillonnage est élevé, la sortie est conforme au résultat attendu : la sortie en noir est à peu près confondue avec la courbe rouge correspondant à la figure (3.3), tendant vers la valeur asymptotique $a^2\omega^2$ lorsque le rapport d'échantillonnage croît.

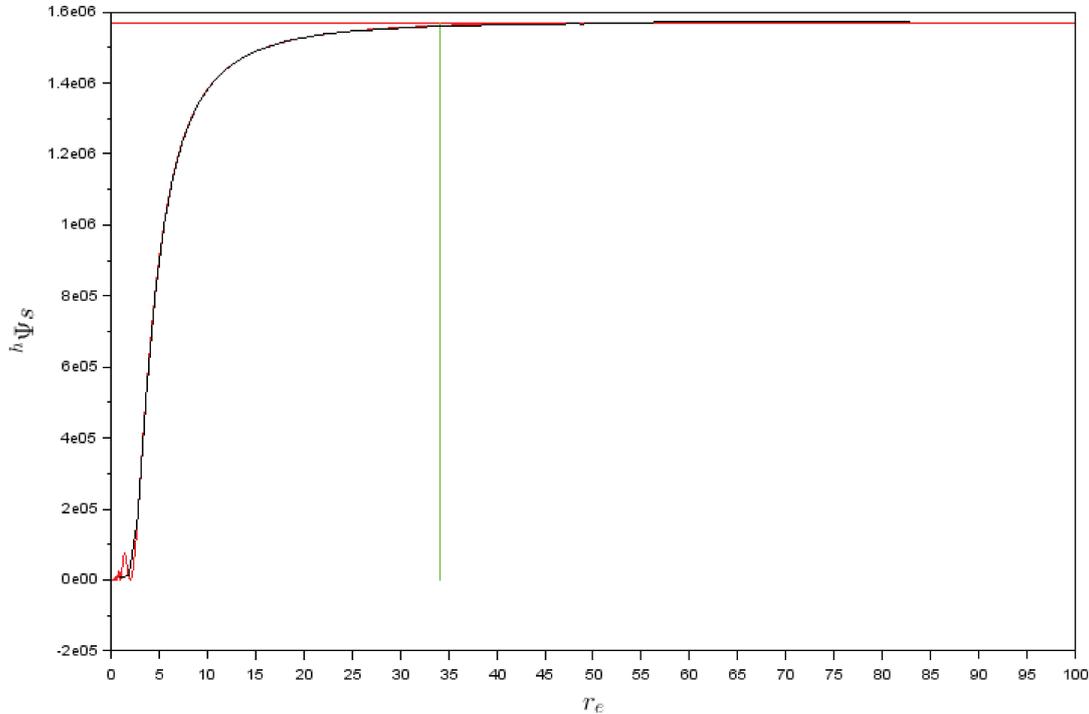


FIGURE 3.14 – Rééchantillonnage pour $r_e = 34, 1$ et $N_F = 51$.

En revanche lorsque r_{e1} diminue, les valeurs sous-échantillonnées ne sont pas notablement impactées mais les valeurs sur-échantillonnées surestiment la valeur asymptotique. Ce phénomène provient de la diminution de la période temporelle couverte par la fenêtre lorsque c_{re} croît et, donc, à une moins bonne approximation par le signal reconstitué x_N du signal initial x . En augmentant la largeur de fenêtre on améliore toutefois le comportement asymptotique. La figure (3.16) reprend le cas de la figure (3.15) pour une taille de fenêtre augmentée à 301 points.

Ces résultats montrent que, ne connaissant a priori le rapport d'échantillonnage d'un signal échantillonné x_e , on peut le sur-échantillonner pour, en appliquant l'opérateur ${}^h\Psi$, faire tendre la sortie vers la valeur $a^2\omega^2$ et obtenir ensuite des caractéristiques plus précises du signal par démodulation. Toutefois, dans ce cas, il peut être nécessaire de recourir à des largeurs de fenêtre N_F plus élevées pour conserver une sortie fiable.

3.2.4 Extraction de fréquences avec ${}^h\Psi$

En sur-échantillonnant le signal initial, on a vu qu'on gagnait en précision sur l'estimation de ses caractéristiques. En le sous-échantillonnant, en revanche, l'information diminue et, pour un signal harmonique $x(t) = a \cos(2\pi f_s t)$, la sortie de l'opérateur ${}^h\Psi$ tend vers 0. La fréquence f_s a été complètement atténuée.

Considérons maintenant un signal composite $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ constitué de deux harmoniques $x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t)$ et $x_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t)$. On a alors :

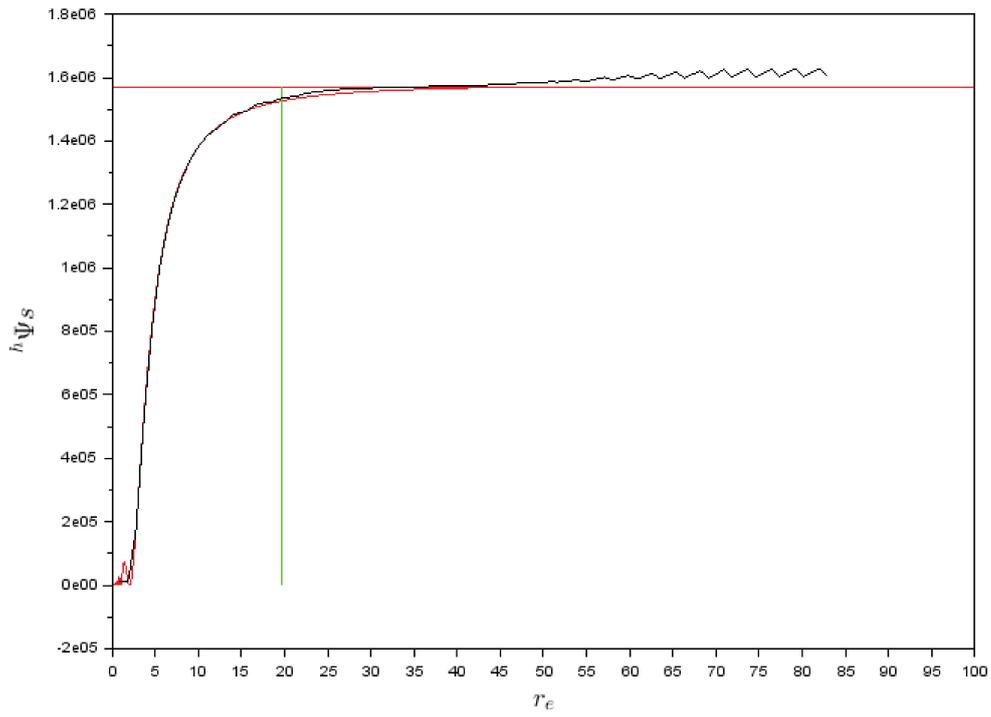


FIGURE 3.15 – Rééchantillonnage pour $r_e = 34, 1$ et $N_F = 51$.

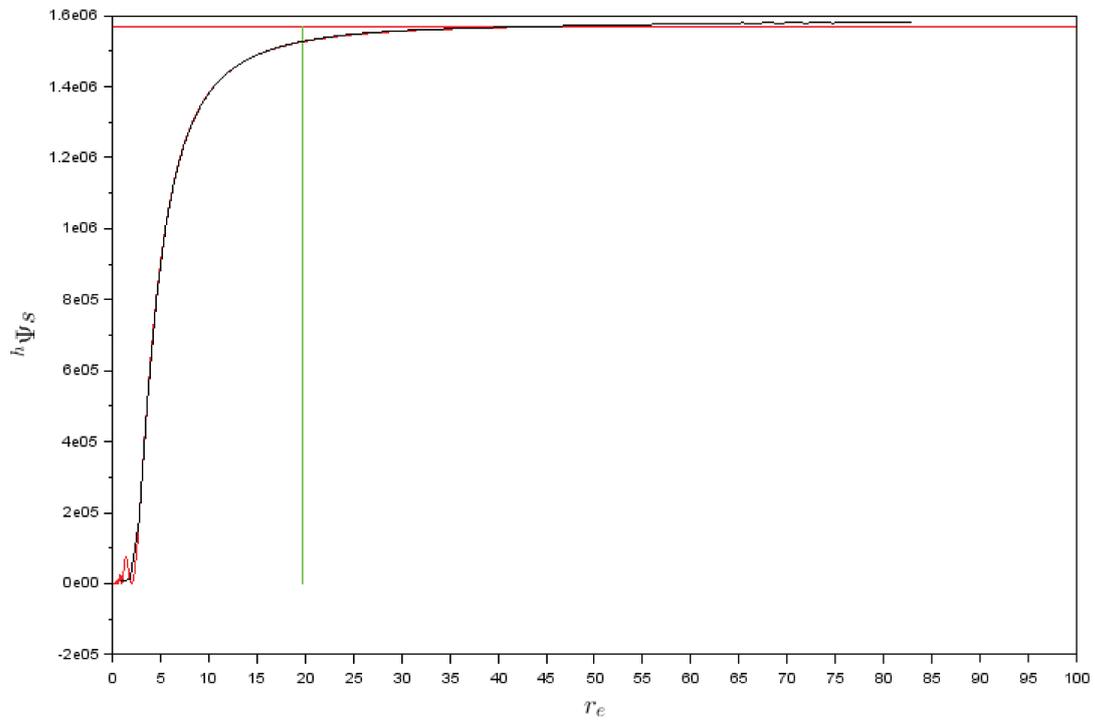


FIGURE 3.16 – Rééchantillonnage pour $r_e = 34, 1$ et $N_F = 301$.

$$\begin{aligned}
 {}^c\Psi x(t) &= {}^c\Psi x_1(t) + {}^c\Psi x_2(t) + 2\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - x_1(t)\ddot{x}_2(t) - x_2(t)\ddot{x}_1(t). \\
 &= {}^c\Psi x_1(t) + {}^c\Psi x_2(t) + \underbrace{\frac{a_1 a_2}{2} [(\omega_1 - \omega_2)^2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + (\omega_1 + \omega_2)^2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]}_{\text{Terme croisé}}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

L'espérance du terme $\frac{a_1 a_2}{2} [(\omega_1 - \omega_2)^2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + (\omega_1 + \omega_2)^2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$ étant nulle, on a donc

$$\mathbf{E}({}^h\Psi x) = \mathbf{E}({}^h\Psi x_1) + \mathbf{E}({}^h\Psi x_2) = a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2.
 \tag{3.16}$$

Par conséquent, la sortie de l'opérateur ne permet pas de distinguer a priori les composantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$. En revanche, en sous-échantillonnant le signal $x(t)$, nous allons pouvoir filtrer la composante de plus haute fréquence ainsi que présenté dans l'exemple suivant :

Considérons le signal $s(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t)$, où $a_1 = 5$, $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 300$ Hz, $a_2 = 0.9$, $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3700$ Hz, échantillonné à 50 kHz, représenté sur la figure (3.17). La sortie de l'opérateur discret ${}^d\Psi$, appliqué à $s(t)$ est représentée sur la figure (3.18). La moyenne de cette sortie, tracée en vert, vaut $a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2$ conformément au calcul d'espérance précédent.

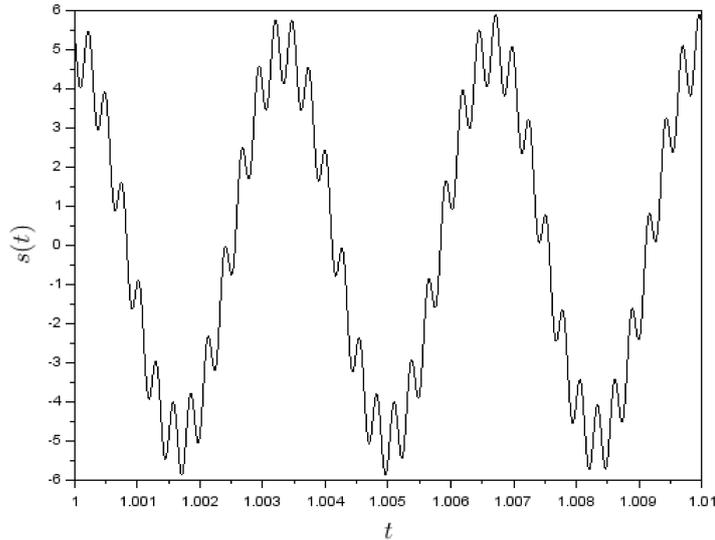


FIGURE 3.17 – Signal à deux composantes.

Le graphique (3.19) présente la sortie de l'opérateur ${}^h\Psi$ obtenue en rééchantillonnant le signal pour des valeurs du coefficient c_{re} comprises entre 0,025 et 10. L'axe des abscisses a été gradué en échelle logarithmique afin de mettre en valeur le rôle du sous-échantillonnage. Les sorties $a_1^2 \omega_1^2$, $a_2^2 \omega_2^2$ et $a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2$ sont représentées respectivement en magenta, vert et rouge. On voit apparaître sur le graphique un plateau de valeurs pour $\log(c_{re})$ compris entre -1 et -2,5 : on récupère ainsi l'information $a_1^2 \omega_1^2$ concernant le signal $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t)$ dont la fréquence est moins élevée. La plus haute fréquence, $x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t)$, a été filtrée par ${}^h\Psi$. L'information $a_2^2 \omega_2^2$, correspondant à x_2 se déduit par la différence entre l'asymptote (en rouge) et l'estimation de $a_1^2 \omega_1^2$ correspondant au plateau.

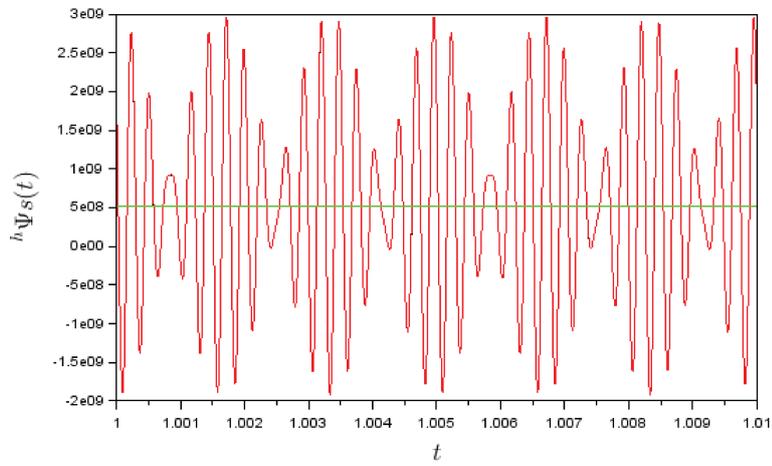


FIGURE 3.18 – $h\Psi$ pour un signal à deux composantes

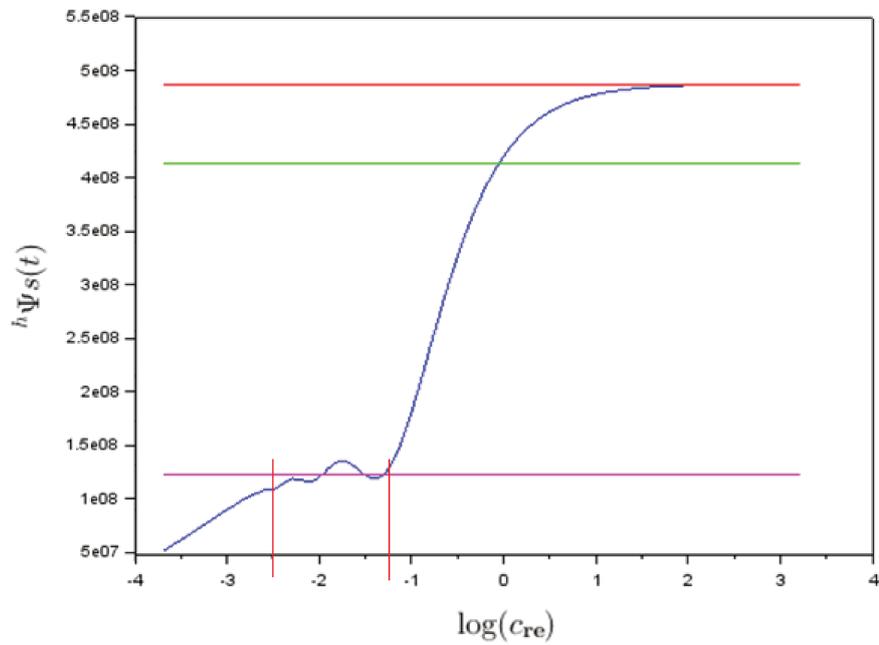


FIGURE 3.19 – Filtrage par $h\Psi$ d'un signal à deux composantes.

3.3 Méthode ESA revisitée

La variation de la sortie de l'opérateur en fonction de l'échantillonnage est une source d'information. Nous allons en tirer profit en introduisant de nouveaux opérateurs, les opérateurs Δ_{pq} , s'appuyant sur la différence entre deux rééchantillonnages d'un même signal, et les opérateurs \mathbf{R}_{pq} s'appuyant sur les rapport de ces rééchantillonnages. Leur construction permet de tirer parti des variations de la sortie de l'opérateur ${}^h\Psi$ induites par la prise en compte du pas.

3.3.1 Opérateurs Δ_{pq} et \mathbf{R}_{pq}

Les nouveaux opérateurs Δ_{pq} et \mathbf{R}_{pq} sont construits à partir de ${}^h\Psi$. Ils sont définis, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\Delta_{pq} = p^2 \times {}^{(ph)}\Psi - q^2 \times {}^{(qh)}\Psi \quad (3.17)$$

et

$$\mathbf{R}_{pq} = \frac{{}^{(ph)}\Psi}{{}^{(qh)}\Psi}. \quad (3.18)$$

Dans ce paragraphe nous nous contenterons d'exprimer simplement leur expression de sortie pour un signal harmonique, nous justifierons plus loin leur utilisation pour la démodulation et également le débruitage des signaux AM-FM.

Soient p et q deux entiers positifs non nuls, en appliquant l'opérateur ${}^h\Psi$ à un signal $x(t) = a \cos(\omega t)$ discrétisé avec les pas ph et qh , on a :

$${}^{(ph)}\Psi x_n = \frac{1}{(ph)^2} \left[(a \cos(\omega t_n))^2 - (a \cos(\omega(t_n + ph))) (a \cos(\omega(t_n - ph))) \right] = \frac{a^2}{(ph)^2} \sin^2(ph\omega) \quad (3.19)$$

$${}^{(qh)}\Psi x_n = \frac{1}{(qh)^2} \left[(a \cos^2(\omega t_n))^2 - (a \cos(\omega(t_n + qh))) (a \cos(\omega(t_n - qh))) \right] = \frac{a^2}{(qh)^2} \sin^2(qh\omega) \quad (3.20)$$

on en déduit immédiatement l'expression suivante, indépendante de n , de $\mathbf{R}_{pq} x_n$:

$$\mathbf{R}_{pq} x_n = \left(\frac{q}{p} \times \frac{\sin(ph\omega)}{\sin(qh\omega)} \right)^2. \quad (3.21)$$

Remarquons par ailleurs que $\frac{p^2 \times {}^{(ph)}\Psi x_n}{\sin^2(ph\omega)} = \frac{a^2}{h^2}$ ne dépend pas de p . On a ainsi

$$\begin{aligned} h^2 \Delta_{pq} x_n &= (ph)^2 \times {}^{(ph)}\Psi \bar{x}_n - (qh)^2 \times {}^{(qh)}\Psi \bar{x}_n \\ &= a^2 \left(\sin^2(ph\omega) - \sin^2(qh\omega) \right) \\ &= a^2 \left(\sin(ph\omega) - \sin(qh\omega) \right) \left(\sin(ph\omega) + \sin(qh\omega) \right) \\ &= 4a^2 \sin\left(\frac{p-q}{2} h\omega\right) \sin\left(\frac{p+q}{2} h\omega\right) \cos\left(\frac{p-q}{2} h\omega\right) \cos\left(\frac{p+q}{2} h\omega\right) \\ &= a^2 \sin((p-q)h\omega) \sin((p+q)h\omega) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\cos(2qh\omega) - \cos(2ph\omega) \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

D'où, finalement :

$$\Delta_{pq} x_n = \frac{a^2}{2h^2} \left(\cos(2qh\omega) - \cos(2ph\omega) \right). \quad (3.23)$$

3.3.2 Démodulation par les opérateurs ${}^h\mathbf{DESA}$

Ainsi que présenté en introduction, la fréquence instantanée et l'amplitude instantanée du signal sont obtenues par des algorithmes de démodulation, qualifiés d'**ESA** (Energie Separation Algorithm) dans le cas continu et de **DESA** (Discrete Energie Separation Algorithm) dans le cas discret.

Pour obtenir la démodulation du signal, ces algorithmes utilisent la fonction arc cosinus qui n'est définie que sur l'intervalle $[-1; 1]$, or dans le cas général et en particulier pour des signaux bruités, les valeurs obtenues avant l'application d'arc cosinus ne sont pas toujours dans cet intervalle. Afin de distinguer la démarche de démodulation conduisant à un cosinus du processus d'exploitation des valeurs par arc cosinus, nous allons revisiter les opérateurs de démodulation.

Les algorithmes les plus utilisés sont **DESA-1a**, **DESA** et **DESA-2**, présentés au paragraphe 1.3.6. Les opérateurs correspondants, que nous noterons respectivement ${}^h\mathbf{D}_{1a}$, ${}^h\mathbf{D}_1$ et ${}^h\mathbf{D}_2$ obtenus en tenant compte du pas avec ${}^h\Psi$ et que nous qualifierons d' ${}^h\mathbf{DESA}$, sont obtenus de manière similaire. Nous ne détaillerons le calcul que dans le cas ${}^h\mathbf{D}_{1a}$ ce qui permettra également d'explicitier la séparation en un opérateur de démodulation et un algorithme final.

Opérateur ${}^h\mathbf{D}_{1a}$

Les algorithmes **DESA** s'appuient sur la propriété $\frac{{}^c\Psi \dot{\bar{x}}}{{}^c\Psi \bar{x}} = C^{te} = \omega^2$ lorsque \bar{x} est harmonique. Dans le cas discret on retrouve, en tenant compte du pas h , la propriété équivalente comme suit :

Notons $x_n = a \cos(\omega t)$, $x_{n-1} = a \cos(\omega(t-h))$ et plus généralement $x_{n+p} = a \cos(\omega(t+ph))$, $n \in \mathbb{Z}$, on définit la suite $(y)_n$ par

$$y_n = x_n - x_{n-1}. \quad (3.24)$$

On a alors, en utilisant la relation (3.6) :

$$\begin{aligned} h^2 \cdot {}^h\Psi y_n &= (x_n - x_{n-1})^2 - (x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n+1} - x_n) \\ &= (x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}) + (x_{n-1}^2 - x_{n-2}x_n) + x_{n+1}x_{n-2} - x_nx_{n-1} \\ &= h^2 \cdot {}^h\Psi x_n + h^2 \cdot {}^h\Psi x_{n-1} + (x_{n+1}x_{n-2} - x_nx_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Par conséquent, puisque ${}^h\Psi x_n = {}^h\Psi x_{n-1} = C^{te}$, on obtient

$${}^h\Psi y_n = 2 \cdot {}^h\Psi x_n + \frac{1}{h^2} (x_{n+1}x_{n-2} - x_nx_{n-1}). \quad (3.26)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} x_{n+1}x_{n-2} - x_nx_{n-1} &= a^2 \left[\cos(\omega(t+h)) \cos(\omega(t-2h)) - \cos(\omega t) \cos(\omega(t-h)) \right] \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\cos(\omega(2t-h)) + \cos(3\omega h) - (\cos(\omega h) + \cos(\omega(2t-h))) \right] \\ &= \frac{a^2}{2} [\cos(3\omega h) - \cos(\omega h)] \\ &= -a^2 \sin(2\omega h) \sin(\omega h) \\ &= -2a^2 \sin^2(\omega h) \cos(\omega h) \\ &= -2h^2 \cdot {}^h\Psi x_n \cos(\omega h). \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

En combinant (3.41) et (3.44), on obtient donc

$${}^h\Psi y_n = 2 {}^h\Psi x_n - 2 {}^h\Psi x_n \cos(\omega h) \quad (3.29)$$

soit encore

$$\cos(\omega h) = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n}{2 {}^h\Psi x_n}, \quad (3.30)$$

Ce qui permet d'en déduire

$$\omega = \frac{1}{h} \left[\pm \arccos \left(1 - \frac{{}^h\Psi y_n}{2 {}^h\Psi x_n} \right) + 2k\pi \right]. \quad (3.31)$$

Ainsi qu'évoqué plus haut, l'utilisation de la fonction arccos suppose que les valeurs en entrée de cette fonction soient entre -1 et 1. Afin d'utiliser un opérateur bien défini (sauf pour ${}^h\Psi x_n = 0$) et de séparer la gestion des valeurs non incluses dans $[-1; 1]$, nous préférons définir l'opérateur ${}^h\mathbf{D}_{1a}$ par

$${}^h\mathbf{D}_{1a}x_n = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n}{2 {}^h\Psi x_n} \quad \text{où} \quad y_n = x_n - x_{n-1}. \quad (3.32)$$

La pulsation instantannée du signal est alors obtenue par

$$\omega_n = \frac{1}{h} \left[\pm \arccos \left({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n \right) + 2k\pi \right]. \quad (3.33)$$

En remarquant que $1 - ({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n)^2 = \sin^2(\omega_n h)$ et en utilisant (3.7), on obtient l'amplitude instantannée du signal :

$$a_n = h \cdot \sqrt{\frac{{}^h\Psi x_n}{1 - ({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n)^2}} \quad (3.34)$$

Levée d'ambiguïté

La résolution mathématique de $\cos t = \alpha$ admet une infinité de solutions. Dans le cas présent plusieurs valeurs de la pulsation ω , de la forme (3.31) existent et, donc, plusieurs valeurs de la fréquence f sont a priori possibles. Nous allons lever cette ambiguïté.

Notons f_0 la solution que nous qualifierons de naturelle :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi h} \arccos({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n) \quad (3.35)$$

La fonction arc cosinus ne prend que des valeurs positives et ω doit prendre des valeurs positives. Les fréquences solutions forment alors deux suites $(f_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n^-)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$f_k^+ = \frac{1}{2\pi h} \left(\arccos({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n) + 2k\pi \right) = f_0 + \frac{k}{h} \quad (3.36)$$

et

$$f_k^- = -\frac{1}{2\pi h} \left(\arccos({}^h\mathbf{D}_{1a}x_n) + 2k\pi \right) = -f_0 + \frac{k}{h}. \quad (3.37)$$

En notant $r_k^+ = \frac{f_e}{f_k^+}$ et $r_k^- = \frac{f_e}{f_k^-}$ les rapports d'échantillonnages correspondants et en utilisant $\frac{1}{h} = f_e$ on obtient

$$\frac{1}{r_k^+} = k + \frac{1}{r_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_k^-} = k - \frac{1}{r_0}. \quad (3.38)$$

Les rapports d'échantillonnage forment ainsi deux suites telles que

$$r_k^+ = \frac{r_0}{kr_0 + 1} \quad \text{et} \quad r_k^- = \frac{r_0}{kr_0 - 1}. \quad (3.39)$$

Les deux suites sont décroissantes. Si $r_0 < 2$, tous les termes le sont également et si $r_0 > 2$, on constate immédiatement que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $r_k^{(+)} < 1$ et $r_k^{(-)} < 2$. Ainsi, en dehors, éventuellement, de la solution "naturelle" f_0 , toutes les autres fréquences obtenues sont trop élevées pour respecter le critère de Nyquist-Shannon. On peut donc lever l'ambiguïté de la relation 3.33 et on écrira :

$$\omega_n = \frac{1}{h} \arccos \left({}^h\mathbf{D}_{1a} x_n \right). \quad (3.40)$$

Opérateur ${}^h\mathbf{D}_1$

En procédant comme pour ${}^h\mathbf{D}_{1a}$, pour lequel les indices sont asymétriques, on définit l'opérateur ${}^h\mathbf{D}_1$ reposant, de même que l'algorithme DESA-1 sur une symétrisation des indices, par :

$$\boxed{{}^h\mathbf{D}_1 x_n = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n + {}^h\Psi y_{n+1}}{4 {}^h\Psi x_n}} \quad \text{où} \quad y_n = x_n - x_{n-1}. \quad (3.41)$$

Les caractéristiques instantanées du signal sont alors obtenues par

$$\omega_n = \frac{1}{h} \arccos \left({}^h\mathbf{D}_1 x_n \right). \quad (3.42)$$

et

$$a_n = h \cdot \sqrt{\frac{{}^h\Psi x_n}{1 - ({}^h\mathbf{D}_1 x_n)^2}} \quad (3.43)$$

Opérateur ${}^h\mathbf{D}_2$

On définit également l'opérateur ${}^h\mathbf{D}_2$ reposant, de même que DESA-2 sur une discrétisation d'ordre supérieur de la dérivée, par :

$$\boxed{{}^h\mathbf{D}_2 x_n = 1 - \frac{3 {}^d\Psi z_n}{2({}^d\Psi x_{n-1} + {}^d\Psi x_n + {}^d\Psi x_{n+1})}} \quad \text{où} \quad z_n = x_{n+1} - x_{n-1}. \quad (3.44)$$

Les caractéristiques instantanées du signal sont alors obtenues par

$$\omega_n = \frac{1}{2h} \arccos \left({}^h\mathbf{D}_2 x_n \right). \quad (3.45)$$

et

$$a_n = h \cdot \sqrt{\frac{{}^h\Psi x_n}{1 - ({}^h\mathbf{D}_2 x_n)^2}} \quad (3.46)$$

Remarque

L'ambiguïté pour l'utilisation de la fonction arc cosinus dans le cas de ${}^h\mathbf{D}_{1a}$ et ${}^h\mathbf{D}_2$ se lève avec le même raisonnement que celui présenté pour ${}^h\mathbf{D}_1$.

3.3.3 Démodulation avec \mathbf{R}_{21}

Nous avons défini l'opérateur \mathbf{R}_{pq} au paragraphe 3.3.1. Dans le cas où $p = 1$ et $q = 2$ nous pouvons obtenir une expression explicite des caractéristiques du signal.

Proposition

Pour tout $n \in \llbracket 2; N-1 \rrbracket$:

$$\boxed{\mathbf{R}_{21} x_n = \cos^2(h\omega)} \quad (3.47)$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{h} \arccos\left(\sqrt{\mathbf{R}_{21} x_n}\right)} \quad (3.48)$$

$$\boxed{a_n = \frac{h}{|\sin(h\omega)|} \sqrt{h\Psi x_n} = \frac{2h}{|\sin(2h\omega)|} \sqrt{2h\Psi x_n}}. \quad (3.49)$$

Preuve

On obtient la relation (3.47) par

$$\mathbf{R}_{21} x_n = \frac{2h\Psi x_n}{h\Psi x_n} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin(2h\omega)}{\sin(h\omega)}\right)^2 = \left(\frac{2\sin(h\omega)\cos(h\omega)}{2\sin(h\omega)}\right)^2 = \cos^2(h\omega). \quad (3.50)$$

On a alors

$$\cos(\omega h) = \sqrt{\mathbf{R}_{21} x_n}, \quad (3.51)$$

ce qui permet d'obtenir la relation (3.48).

On en déduit alors que

$$a_n^2 = \frac{h^2}{\sin^2(h\omega)} h\Psi x_n = \frac{4h^2}{\sin^2(2h\omega)} 2h\Psi x_n, \quad (3.52)$$

d'où la relation (3.49).

Formulation alternative pour la pulsation instantanée :

Afin d'éviter l'apparition dans la relation (3.48) de termes négatifs sous la racine, on peut utiliser la relation $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$. On démodule alors l'opérateur \mathbf{R}_{21} , appliqué à un signal x , par

$$\omega_n = \pm \frac{1}{2h} \left[\arccos(2\mathbf{R}_{21} x_n - 1) + 2k\pi \right]. \quad (3.53)$$

Remarque 1

En raison du facteur $\frac{1}{2h}$ et non plus $\frac{1}{h}$, la levée d'ambiguïté est incomplète. Deux solutions sont possibles; nous y reviendrons au paragraphe 3.4.2.

Remarque 2

La démodulation à partir de l'opérateur $\mathbf{\Delta}_{21}$ est possible mais peu pratique; elle implique la résolution d'une équation du second degré bicarrée et, donc, plusieurs cas à traiter. Nous ne la détaillons pas ici et nous préférons utiliser l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ (cf. paragraphe 3.4.2) car l'intérêt principal des propriétés de $\mathbf{\Delta}_{21}$ réside dans la construction de l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$.

3.4 Opérateur ${}^{h\mathbf{T}}$

3.4.1 Opérateur Δ_{pq} et débruitage statistique

Si les caractéristiques statistiques du bruit sont indépendantes du pas, Δ_{pq} permet, statistiquement, de débruiter le signal car **l'espérance de Δ_{pq} ne dépend pas du bruit**. En effet, considérons un signal $x(t)$ composé d'une partie déterministe $s(t)$ et d'un bruit blanc $b(t)$ d'espérance nulle : $x(t) = s(t) + b(t)$. Alors :

$$\begin{aligned}
 {}^{(ph)}\Psi x_n &= {}^{(ph)}\Psi (s + b)_n \\
 &= \frac{1}{(ph)^2} [(s_n + b_n)^2 - (s_{n-1} + b_{n-1})(s_{n+1} + b_{n+1})] \\
 &= \frac{1}{(ph)^2} [s_n^2 + b_n^2 - 2s_n b_n - s_{n-1}s_{n+1} - b_{n-1}b_{n+1} - s_{n-1}b_{n+1} - s_{n+1}b_{n-1}] \\
 &= \frac{1}{(ph)^2} [(s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1}) + (b_n^2 - b_{n-1}b_{n+1}) - (2s_n b_n + s_{n-1}b_{n+1} + s_{n+1}b_{n-1})] \\
 &= {}^{(ph)}\Psi s_n + {}^{(ph)}\Psi b_n - (R_p(s, b))_n,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

où

$$(R_p(s, b))_n = \frac{1}{(ph)^2} (2s_n b_n + s_{n-1} b_{n+1} + s_{n+1} b_{n-1}). \tag{3.55}$$

En considérant l'espérance de ces quantités, on a donc

$$\mathbf{E}({}^{ph}\Psi x) = \mathbf{E}({}^{ph}\Psi s) + \mathbf{E}({}^{ph}\Psi b) - \mathbf{E}(R_p(s, b)), \tag{3.56}$$

or, le bruit étant indépendant du signal déterministe, on a

$$p^2 h^2 \mathbf{E}(R_p(s, b)) = 2\mathbf{E}(s)\mathbf{E}(b) + \mathbf{E}(s)\mathbf{E}(b) + \mathbf{E}(s)\mathbf{E}(b) = 4\mathbf{E}(s)\mathbf{E}(b). \tag{3.57}$$

Puisque $\mathbf{E}(b) = 0$, on a ainsi $\mathbf{E}(R_p(s, b)) = 0$, d'où la relation :

$$\mathbf{E}({}^{ph}\Psi x) = \mathbf{E}({}^{ph}\Psi s) + \mathbf{E}({}^{ph}\Psi b). \tag{3.58}$$

Intéressons nous maintenant à $\mathbf{E}({}^{ph}\Psi b)$. Dès lors que chaque réalisation de b est indépendante des autres, puisque ${}^{ph}\Psi b_n = \frac{1}{(ph)^2} (b_n^2 - b_{n-p} b_{n+p})$, on a

$$\mathbf{E}({}^{ph}\Psi b) = \frac{1}{(ph)^2} [\mathbf{E}(b^2) - (\mathbf{E}(b))^2] = \frac{1}{(ph)^2} \mathbf{E}(b^2), \tag{3.59}$$

Remarque

Notons que, d'après la formule de Huyguens, $\mathbf{E}(b^2) - (\mathbf{E}(b))^2 = \mathbf{V}(b)$, d'où la relation découlant de (3.59) établie à l'occasion de ce calcul :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \mathbf{E}({}^h\Psi b) = \frac{1}{h^2} \mathbf{V}(b). \tag{3.60}$$

On déduit également de (3.59) que $\mathbf{E}({}^{ph}\Psi b)$ et $\mathbf{E}({}^{qh}\Psi b)$ sont liées par la relation

$$\mathbf{E}({}^{qh}\Psi b) = \frac{p^2}{q^2} \mathbf{E}({}^{ph}\Psi b). \tag{3.61}$$

Pour $\Delta_{pq} = p^2 {}^{ph}\Psi - q^2 {}^{qh}\Psi$, on a donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\Delta_{pq}x) &= p^2 \mathbf{E}(p^h \Psi x) - q^2 \mathbf{E}(q^h \Psi x) \\
 &= p^2 [\mathbf{E}(p^h \Psi s) + \mathbf{E}(p^h \Psi b)] - q^2 [\mathbf{E}(q^h \Psi s) + \mathbf{E}(q^h \Psi b)] \\
 &= \mathbf{E}(p^2 p^h \Psi s - q^2 q^h \Psi s) + p^2 \mathbf{E}(p^h \Psi b) - q^2 \mathbf{E}(q^h \Psi b) \\
 &= \mathbf{E}(\Delta_{pq} s) + p^2 \mathbf{E}(p^h \Psi b) - q^2 \mathbf{E}(q^h \Psi b) \\
 &= \mathbf{E}(\Delta_{pq} s).
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

L'espérance de la sortie de l'opérateur Δ_{pq} n'est donc pas modifiée par le bruit.

Remarque :

Ce résultat est lié à l'hypothèse selon laquelle chaque réalisation du bruit est indépendante des autres et, donc, que les caractéristiques statistiques du bruit ne dépendent pas du pas de discrétisation. Cette hypothèse peut ne s'avérer que partiellement vérifiée par les caractéristiques du bruit mais aussi, et surtout, ne pas être vérifiée par la modélisation du bruit et les traitements opérés sur un signal discret lors de son étude.

3.4.2 ${}^h\mathbf{T}$: un opérateur de débruitage statistique

Puisque Δ_{pq} , statistiquement, donne une caractérisation du signal indépendante du bruit, nous allons chercher à démoduler le signal en utilisant uniquement l'opérateur Δ_{pq} . En effectuant le rapport de deux opérateurs de ce type (Δ_{pq} et $\Delta_{p'q'}$), nous allons éliminer l'amplitude a et obtenir la pulsation ω . Une fois ω connue, a s'obtiendra alors facilement.

Débruitage statistique :

Pour un signal $\bar{x}(t) = a \cos(\omega t)$ harmonique, on a

$$\Delta_{21} \bar{x}_n = 4 \cdot (2h) \Psi \bar{x}_n - h \Psi \bar{x}_n = \frac{a^2}{h^2} (\sin^2(2h\omega) - \sin^2(h\omega)) \tag{3.63}$$

et

$$\Delta_{31} \bar{x}_n = 9 \cdot (3h) \Psi \bar{x}_n - h \Psi \bar{x}_n = \frac{a^2}{h^2} (\sin^2(3h\omega) - \sin^2(h\omega)) \tag{3.64}$$

Soit ${}^h\mathbf{T}$ l'opérateur défini par

$${}^h\mathbf{T} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}}, \tag{3.65}$$

on obtient alors l'expression suivante :

$${}^h\mathbf{T} \bar{x}_n = \frac{\Delta_{31} \bar{x}_n}{\Delta_{21} \bar{x}_n} = \frac{\sin^2(3h\omega) - \sin^2(h\omega)}{\sin^2(2h\omega) - \sin^2(h\omega)}, \tag{3.66}$$

expression qui ne dépend pas de a .

En utilisant maintenant dans la relation 3.66, les expressions trigonométriques

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4 \sin^2 x) \tag{3.67}$$

et

$$\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 x(3 - 4 \sin^2 x), \tag{3.68}$$

on a alors

$${}^h\mathbf{T}\bar{x}_n = \frac{(3 - 4\sin^2(h\omega))^2 - 1}{3 - 4\sin^2(h\omega)} = u - \frac{1}{u}, \quad (3.69)$$

avec

$$u = 3 - 4\sin^2(h\omega) = 1 + 2\cos(2h\omega). \quad (3.70)$$

u doit vérifier l'équation

$$u^2 - {}^h\mathbf{T}\bar{x}_n u - 1 = 0 \quad (3.71)$$

qui admet deux solutions réelles

$$u_+ = \frac{{}^h\mathbf{T}\bar{x}_n + \sqrt{({}^h\mathbf{T}\bar{x}_n)^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad u_- = \frac{{}^h\mathbf{T}\bar{x}_n - \sqrt{({}^h\mathbf{T}\bar{x}_n)^2 + 4}}{2}, \quad (3.72)$$

d'où

$$u = \frac{{}^h\mathbf{T}\bar{x}_n \pm \sqrt{({}^h\mathbf{T}\bar{x}_n)^2 + 4}}{2}, \quad (3.73)$$

et on a la relation

$$\cos(2h\omega) = \frac{u - 1}{2}. \quad (3.74)$$

La pulsation ω doit donc être de la forme

$$\omega_n = \frac{1}{2h} \left[\pm \arccos\left(\frac{u_n - 1}{2}\right) + 2k\pi \right] \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n \pm \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}. \quad (3.75)$$

Levée d'ambiguïté

De même qu'au paragraphe (3.3.2), nous rencontrons une ambiguïté dans la résolution de l'équation (3.74) que nous allons étudier avant de nous intéresser aux deux expressions possibles de u : u_+ et u_- (cf. 3.72).

En notant $U = \frac{u - 1}{2}$ et en reprenant les notation de (3.37), on obtient pour les rapports d'échantillonnage.

$$r_k^+ = \frac{4}{2k + \frac{1}{\pi} \arccos(U)} \quad \text{et} \quad r_k^- = \frac{4}{2k - \frac{1}{\pi} \arccos(U)} \quad (3.76)$$

Les rapports devant être supérieurs à 2 pour respecter le critère de Nyquist-Shannon et $\arccos(U)$ appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$, seules deux expressions sont possibles :

$$r_0^+ = \frac{4\pi}{\arccos(U)} \quad \text{qui peut prendre des valeurs sur} \quad [4, +\infty] \quad (3.77)$$

et

$$r_1^- = \frac{4\pi}{2\pi - \arccos(U)} \quad \text{qui peut prendre des valeurs sur} \quad [2, 4]. \quad (3.78)$$

En prenant en compte, de plus, les valeurs que peut prendre U compte tenu de expressions de u_+ et u_- et de la positivité de ${}^h\mathbf{T}x_n$, on obtient finalement quatre expressions possibles pour la démodulation

$$\omega_n^{(1)} = \frac{1}{2h} \arccos\left(\frac{u_n^- - 1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad u_n^- = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n - \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}, \quad (3.79)$$

$$\omega_n^{(2)} = \frac{1}{2h} \arccos\left(\frac{u_n^+ - 1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad u_n^+ = \frac{h\mathbf{T}x_n + \sqrt{(h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}. \quad (3.80)$$

$$\omega_n^{(3)} = \frac{1}{2h} \left[2\pi - \arccos\left(\frac{u_n^- - 1}{2}\right) \right] \quad \text{avec} \quad u_n^- = \frac{h\mathbf{T}x_n - \sqrt{(h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}, \quad (3.81)$$

$$\omega_n^{(4)} = \frac{1}{2h} \left[2\pi - \arccos\left(\frac{u_n^+ - 1}{2}\right) \right] \quad \text{avec} \quad u_n^+ = \frac{h\mathbf{T}x_n + \sqrt{(h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}. \quad (3.82)$$

Chacune des expressions traque la pulsation instantanée pour un rapport d'échantillonnage situé dans une gamme donnée :

$$\omega_n^{(2)} \text{ pour } r \in [6; +\infty], \quad \omega_n^{(1)} \text{ pour } r \in [4; 6], \quad \omega_n^{(3)} \text{ pour } r \in [3; 4], \quad \omega_n^{(4)} \text{ pour } r \in [2; 3]. \quad (3.83)$$

Dès lors que l'échantillonnage est suffisant pour avoir un **rapport d'échantillonnage** supérieur à 6, on utilisera ainsi la démodulation par $\omega_n^{(2)}$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de sur-échantillonner le signal par la formule de Shannon pour se ramener au cas précédent. Nous utiliserons donc systématiquement $\omega_n^{(2)}$ par la suite.

Nous ne donnons pas ici de démodulation spécifique pour $h\mathbf{T}$. Il suffit d'utiliser la même démodulation que pour \mathbf{R}_{21} (3.49) dont le calcul des différents éléments est effectué lors de l'utilisation de $h\mathbf{T}$. Nous proposerons une méthode alternative au paragraphe 3.7, justifiée par la précision de la démodulation de la pulsation par $h\mathbf{T}$.

Remarque importante :

Les résultats précédents ont été présentés pour des signaux harmoniques. Notre objectif est bien de les étendre aux signaux **AM-FM**. Nous allons ainsi nous intéresser à de tels signaux à partir du paragraphe suivant.

3.5 Démodulation des signaux AM-FM

Nous avons présenté la démodulation, pour les opérateurs $h\Psi$, \mathbf{R}_{21} et $h\mathbf{T}$ dans le cas d'un signal harmonique $x_h = A \cos(\omega t)$. Dans le cas d'un signal **AM-FM**, $x(t) = a(t) \cos(\Phi(t))$, de même que pour l'opérateur discret de Teager-Kaiser, ${}^d\Psi$, les algorithmes de démodulation reposent sur l'approximation $h\Psi x(t) \simeq a^2(t) \sin_c^2(h\dot{\Phi}(t))$. Cette approximation est valide dans le cas d'un signal à bande étroite (cf. 1.3.2) et son application aux algorithmes **DESA** a été détaillée par Maragos et al. [29], [30]. Les valeurs A et ω obtenues en sorties des algorithmes sont alors a_n et $\dot{\Phi}_n$. Plus généralement l'approximation est valable lorsque $\ddot{\Phi}(t) \ll 2\dot{\Phi}^2(t)$ et $h\Psi a(t) \ll a^2(t)\dot{\Phi}^2(t)$. Ces dernières conditions, établies au paragraphe **AM-FM** pour un signal modulé en amplitude et en fréquence, s'appliquent en fait à tout signal écrit sous la forme **AM-FM**. En effet, nous avons vu au paragraphe 2.3.1 que tout signal pouvait s'écrire sous cette forme et la démonstration suivante suppose uniquement que l'écriture du signal est $x(t) = a(t) \cos(\Phi(t))$.

Notons $c(t) = \cos(\Phi(t))$, on a alors $x(t) = a(t)c(t)$ et, en utilisant la formule (1.47), on obtient

$$h\Psi x(t) = h\Psi a(t) \times c^2(t) + a^2(t) h\Psi c(t), \quad (3.84)$$

qui revient au facteur h^{-2} près, à

$${}^c\Psi x(t) = {}^c\Psi a(t) \times c^2(t) + a^2(t) {}^c\Psi c(t). \quad (3.85)$$

Or

$$\begin{aligned} {}^c\Psi c(t) &= \dot{\Phi}^2(t) \sin^2(\Phi(t)) + \ddot{\Phi}(t) \sin(\Phi(t)) \cos(\Phi(t)) + \dot{\Phi}^2(t) \cos^2(\Phi(t)) \\ &= \dot{\Phi}^2(t) + \ddot{\Phi}(t) \sin(\Phi(t)) \cos(\Phi(t)). \end{aligned} \quad (3.86)$$

d'où

$${}^h\Psi x(t) = {}^h\Psi a(t) \times c^2(t) + a^2(t) \left[\dot{\Phi}^2(t) + \ddot{\Phi}(t) \sin(\Phi(t)) \cos(\Phi(t)) \right]. \quad (3.87)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left| {}^h\Psi x(t) - a^2(t) \dot{\Phi}^2(t) \right| &= \left| {}^h\Psi a(t) c^2(t) + a^2(t) \ddot{\Phi}(t) \sin(\Phi(t)) \cos(\Phi(t)) \right| \\ &< \left| {}^h\Psi a(t) \right| + a^2(t) \left| \ddot{\Phi}(t) \right|. \end{aligned} \quad (3.88)$$

L'approximation suivante est donc valide dès lors que $|\ddot{\Phi}(t)| \ll \dot{\Phi}^2(t)$ et $\left| {}^h\Psi a(t) \right| \ll a^2(t) \dot{\Phi}^2(t)$.

$${}^h\Psi x(t) \simeq a^2(t) \dot{\Phi}^2(t) \quad (3.89)$$

3.6 Mise en œuvre et comparaison des opérateurs ${}^h\Psi$ et \mathbf{R}_{21}

Afin d'évaluer l'efficacité des différents opérateurs, nous avons généré un signal test AM-FM $x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$ (figure 3.20) dont les amplitudes et fréquences instantanées sont présentées sur la figure (3.21). Nous allons utiliser ce signal pour illustrer la mise en œuvre des opérateurs ${}^h\Psi$ et \mathbf{R}_{21} , ainsi que de l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ dans la section 3.7.

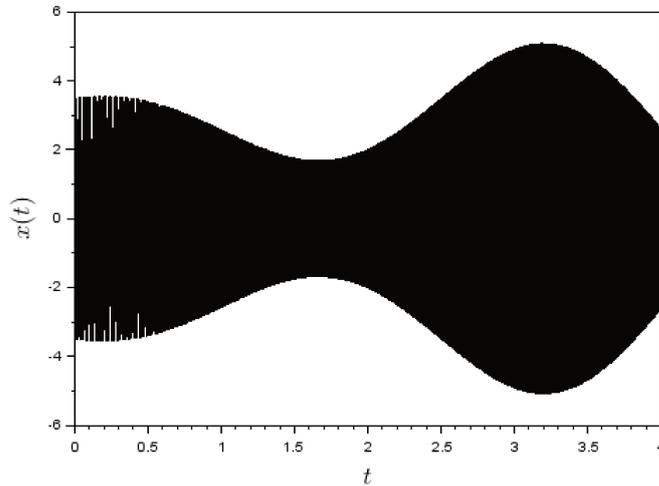


FIGURE 3.20 – Signal test AM-FM.

Les composantes du signal $x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$ sont

$$a(t) = \frac{t+1}{2} \cos(2t) + 3 \quad (3.90)$$

et

$$\phi(t) = 200t \sqrt{5t+4} + 0.8 \cos(5t). \quad (3.91)$$

La fréquence instantannée de $x(t)$ est obtenue par $f(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$.

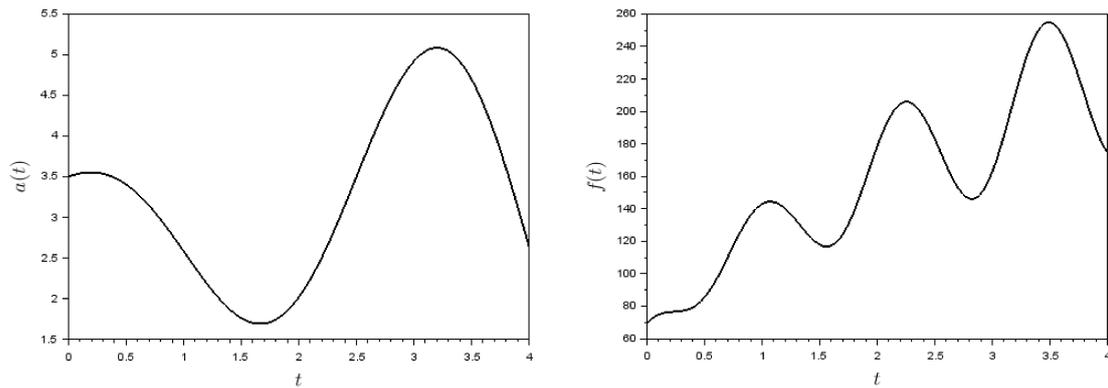
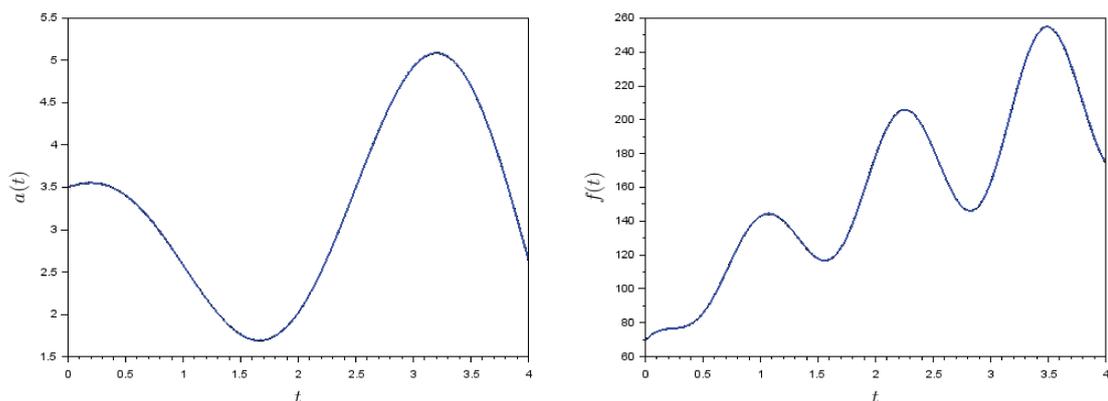


FIGURE 3.21 – Composantes du signal test AM-FM.

3.6.1 Mise en œuvre de $h\Psi$

Dans un premier temps le signal a été échantillonné à une fréquence $f_e = 1$ kHz. La mise en œuvre de l’algorithme discret de Teager-Kaiser, ${}^d\Psi$, combiné avec l’algorithme de démodulation, permet de reconstituer avec précision les caractéristiques du signal test. Les valeurs obtenues par démodulation apparaissent en bleu sur la figure (3.22). Elles sont à peu près confondues avec les valeurs exactes en noir. L’erreur relative maximale est de 0,26 %.


 FIGURE 3.22 – Démodulation par ${}^d\Psi$ du signal test AM-FM échantillonné à 1 kHz.

Dans un deuxième temps le signal $x(t)$ a été échantillonné à une fréquence $f_e = 440$ Hz. Le rapport d’échantillonnage, devient alors trop faible pour pouvoir reconstituer les parties du signal pour lesquelles r_e est inférieur à 2 où très légèrement supérieur à 2, ainsi qu’on peut l’observer sur la figure (3.23), sur laquelle sont tracées la fréquence instantanée du signal en noir, la fréquence démodulée en bleu et la fréquence limite $\frac{1}{2}f_e$ en rouge.

En revanche, en combinant l’opérateur à pas variable $h\Psi$ avec un sur-échantillonnage par Shannon, avec ici un coefficient $c_{re} = 2$, les caractéristiques du signal sont de nouveau estimées avec précision par la démodulation. La figure (3.24) présente le rapport d’échantillonnage initial, en noir, et celui obtenu après sur-échantillonnage en magenta. La limite $r_e = 2$ est tracée en rouge.

Les fréquence et pulsation instantanées obtenues après sur-échantillonnage sont présentées sur la figure (3.25) en magenta. Les décrochages observés sur la figure (3.23) ont disparu et les valeurs démodulées sont presque confondues avec les valeurs exactes ; l’erreur relative maximale est de 0,27%.

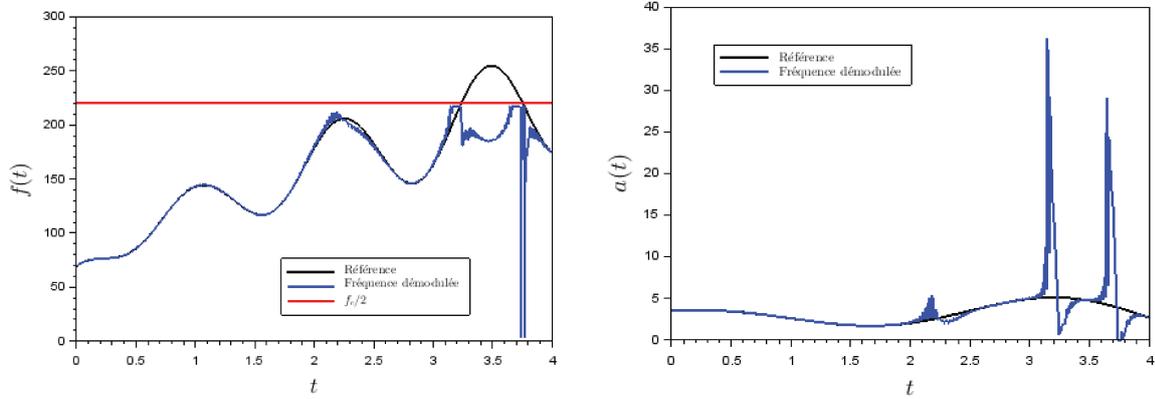


FIGURE 3.23 – Démodulation par $d\Psi$ du signal test AM-FM échantillonné à 440 Hz.

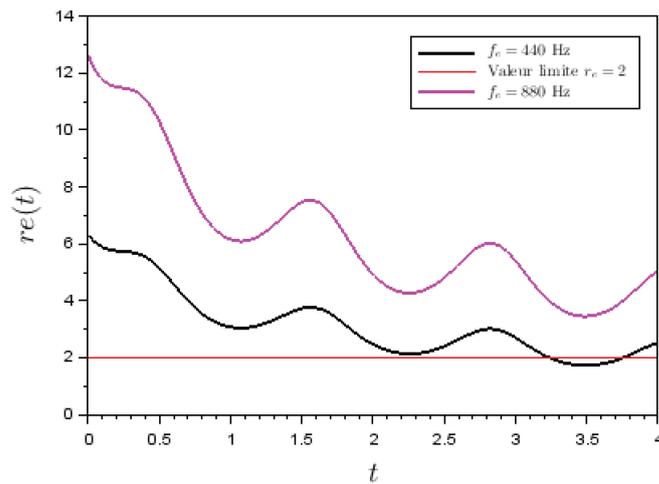


FIGURE 3.24 – Rapports d'échantillonnage du signal test avant et après sur-échantillonnage.

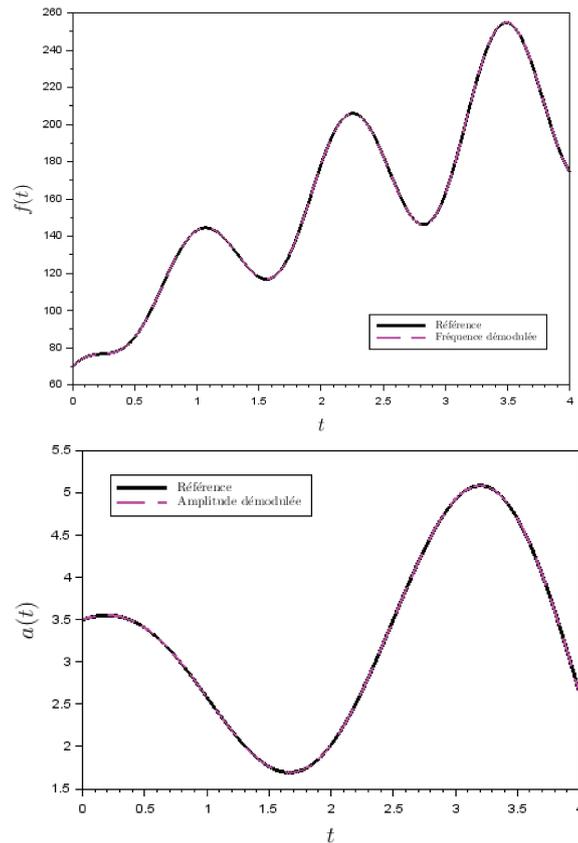


FIGURE 3.25 – Démodulation par ${}^h\Psi$ du signal test AM-FM, échantillonné à 440 Hz puis sur-échantillonné ($C_{re} = 2$).

3.6.2 Application de \mathbf{R}_{21}

L'opérateur \mathbf{R}_{21} est plus précis que ${}^d\Psi$ (ou que ${}^h\Psi$ qui n'apporte pas de précision particulière par rapport à ${}^d\Psi$). La reconstitution de la fréquence et de l'amplitude instantanées, pour un signal non bruité, étant déjà précise (cf. figure 3.23), cette différence est peu apparente en présentant l'ensemble du signal, c'est pourquoi la figure (3.26) présente des focales de ces fonctions sur de faibles intervalles de temps. La précision obtenue avec \mathbf{R}_{21} est, en moyenne, environ dix fois supérieure à celle de l'opérateur de Teager-Kaiser classique et, au niveau des extrémums locaux de la fréquence instantanée, l'erreur due à la démodulation par \mathbf{R}_{21} approche 0.

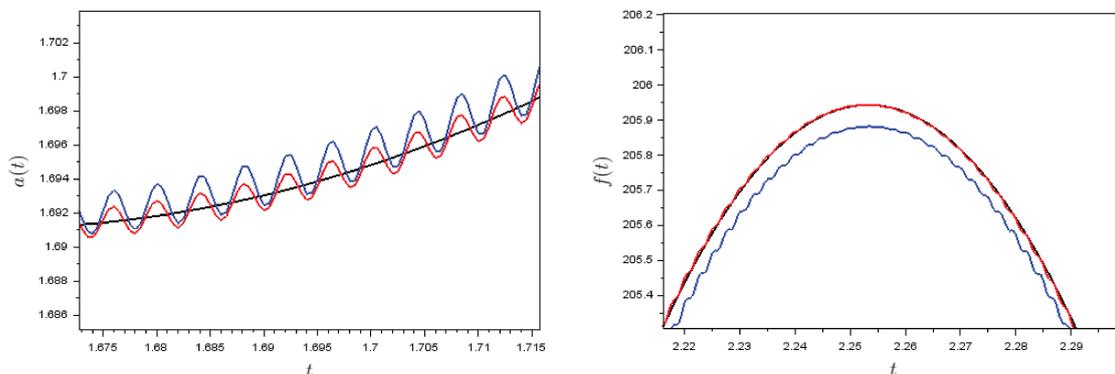


FIGURE 3.26 – Comparaison des démodulations du signal test AM-FM par ${}^h\Psi$ (en bleu) et \mathbf{R}_{21} (en rouge).

Cependant, l'opérateur \mathbf{R}_{21} est plus sensible que ${}^h\Psi$ au rapport d'échantillonnage en raison de l'ambiguïté évoquée au paragraphe 3.3.3 ainsi qu'on peut l'observer sur la figure 3.27 qui repré-

sente la fréquence instantanée du signal test AM-FM, en noir, et celle obtenue par démodulation avec \mathbf{R}_{21} en magenta. L'horizontale tracée en rouge, correspond à 4 fois la fréquence d'échantillonnage, soit un **rapport d'échantillonnage** égal à 4. Lorsque la fréquence instantanée du signal est supérieure à $\frac{f_e}{4}$, l'algorithme ne récupère plus la valeur effective de la dérivée de la phase et, donc, de la fréquence instantanée. La démodulation de l'amplitude instantanée n'est toutefois pas affectée.

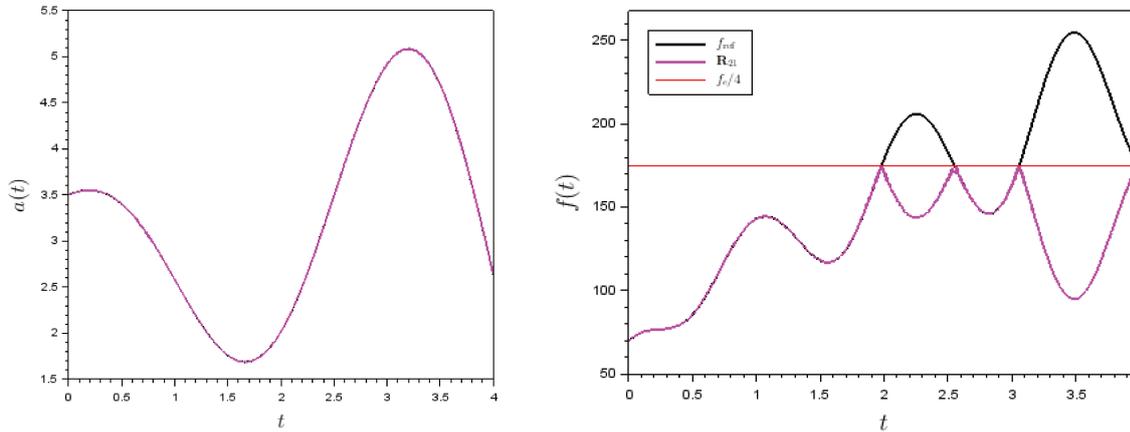
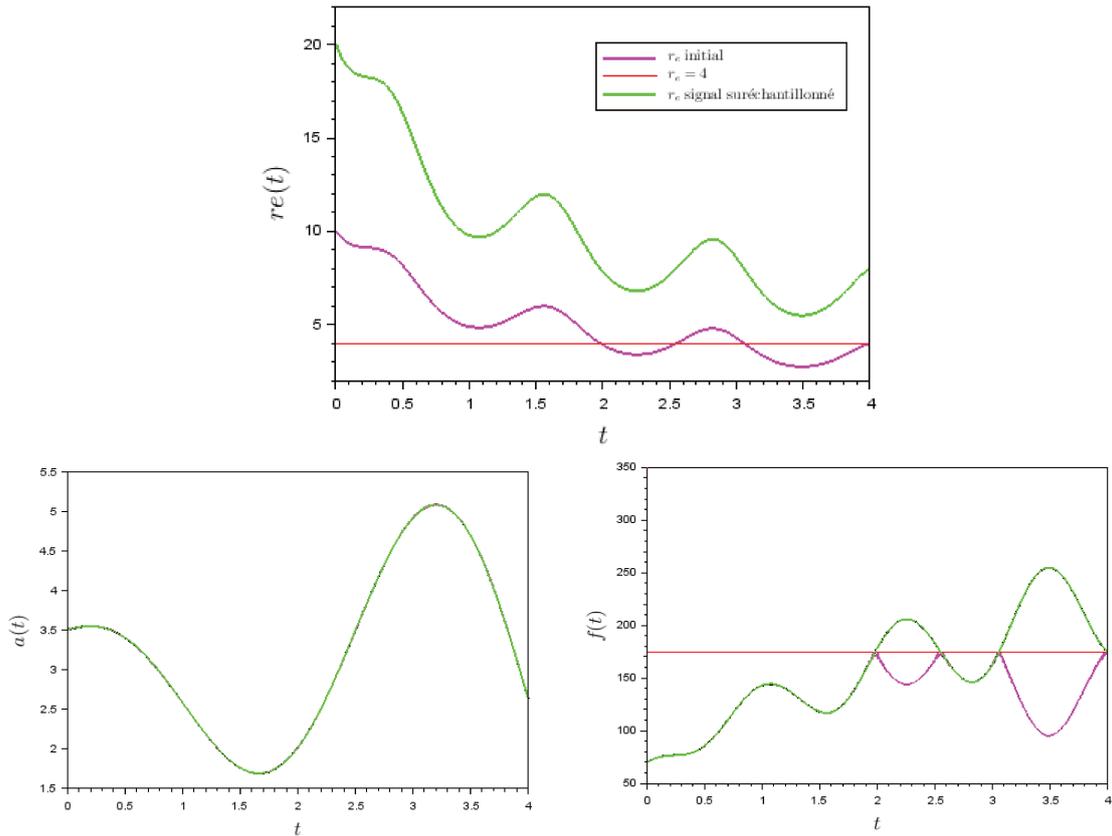


FIGURE 3.27 – Démodulations du signal test AM-FM par \mathbf{R}_{21} pour une fréquence d'échantillonnage de 700 Hz.

Cette plus grande difficulté de l'opérateur \mathbf{R}_{21} à récupérer l'information d'un signal faiblement échantillonné peut être compensée par un sur-échantillonnage. Les graphiques de la figure (3.28) présentent le **rapport d'échantillonnage** avant et après sur-échantillonnage par un facteur 2. Les valeurs après sur-échantillonnage sont indiquées en vert. Le "décrochage" de la fréquence instantanée estimée constaté en magenta sur la figure (3.27), a disparu après sur échantillonnage.


 FIGURE 3.28 – Sur-échantillonnage du signal test AM-FM pour éviter le décrochage de l’opérateur \mathbf{R}_{21} .

3.7 Signal bruité et mise en œuvre de ${}^h\mathbf{T}$

L’intérêt de l’opérateur ${}^h\mathbf{T}$ est de permettre l’élimination statistique du bruit. Nous allons constater ici sa grande efficacité pour l’estimation de la fréquence instantanée et en déduire une démodulation alternative de l’amplitude instantanée.

Pour la génération du bruit, nous avons ajouté un bruit gaussien, appliqué chaque échantillon. Le niveau de bruit a été quantifié par le **rapport signal sur bruit** défini, en décibel, par

$$\text{RSB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{a(t)}{\sigma \sqrt{2}} \right), \quad (3.92)$$

où $a(t)$ est l’amplitude instantanée du signal et σ l’écart-type du bruit gaussien. Le niveau de bruit appliqué au signal est évalué en prenant la valeur moyenne de $a(t)$ sur l’intervalle de temps étudié.

Nous reviendrons au paragraphe 3.7.3 sur la pertinence de la valeur de ce rapport dans le cadre de la démarche proposée.

3.7.1 Démodulation de la fréquence instantanée

La figure (3.29) présente les fréquences et amplitudes instantanées obtenues après démodulation, pour le signal test AM-FM faiblement bruité avec $\text{RSB} = 27$ dB, auquel ont été appliqués les opérateurs ${}^h\mathbf{D}_1$, \mathbf{R}_{21} et ${}^h\mathbf{T}$. La qualité de la démodulation est bonne, quel que soit l’opérateur utilisé. Une focale sur les fréquences instantanées démodulées autour de $t = 1,55$ s permet d’observer que \mathbf{R}_{21} et ${}^h\mathbf{T}$ sont plus efficaces que ${}^h\mathbf{D}_1$ mais l’intérêt de l’utilisation de ${}^h\mathbf{T}$ n’est pas mis en évidence.

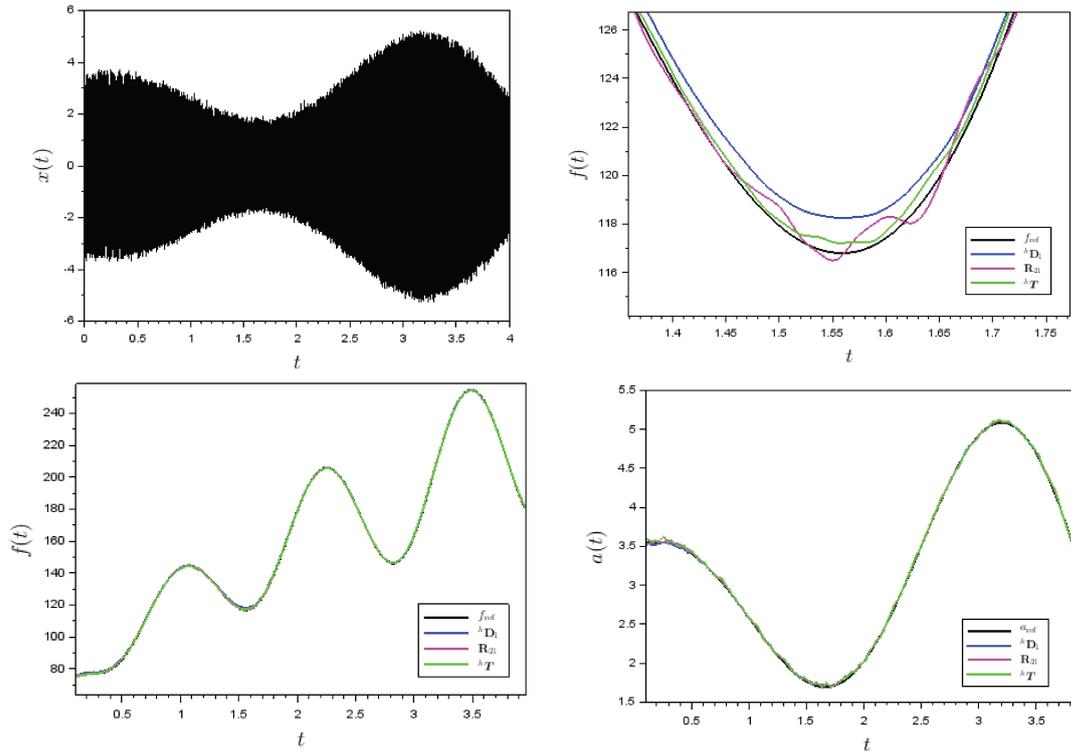


FIGURE 3.29 – Efficacité comparée de la démodulation du signal test AM-FM, bruité à $RSB=27$ dB, pour une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz.

En revanche, lorsque le bruit augmente, l'opérateur hT s'avère nettement plus efficace que les autres. La figure (3.30) présente les mêmes sorties que la figure (3.29) avec cette fois un rapport signal sur bruit $RSB=12$ dB. On constate que la fréquence instantanée démodulée avec hT est très proche de la fréquence instantanée exacte alors que, sur certaines parties du signal, la précision de la démodulation par hD_1 et R_{21} n'est pas bonne. L'erreur relative maximale lors de la démodulation avec hT est de 3,6 %, alors qu'elle atteint 20 % avec R_{21} et 36 % avec hD_1 .

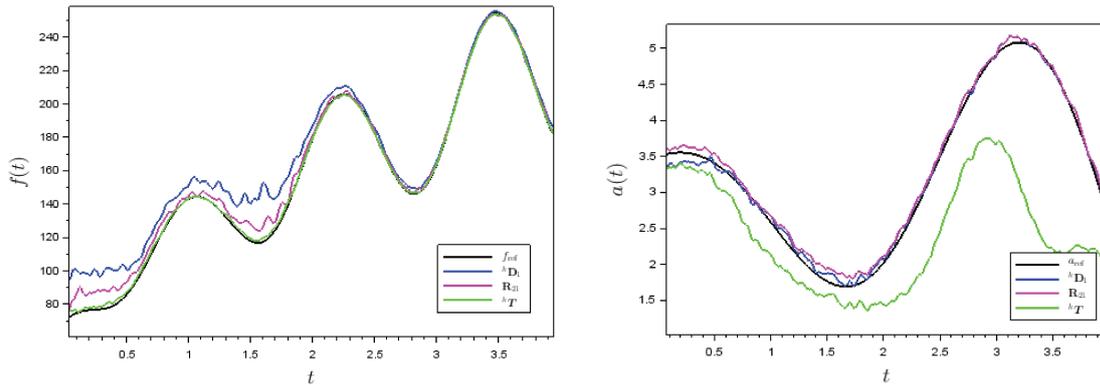


FIGURE 3.30 – Efficacité comparée de la démodulation du du signal test AM-FM, bruité à $RSB=12$ dB, pour une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz.

Remarque :

Les choix effectués pour lisser le signal en tenant compte des particularités de celui-ci, ainsi que le lissage et des étapes intermédiaires de la démodulation permettent d'optimiser l'utilisation de chaque opérateur mais la supériorité de l'opérateur hT reste avérée.

Ainsi qu'évoqué au paragraphe 3.4.2, nous n'avons pas défini d'algorithme de démodulation spécifique de l'amplitude instantanée par hT mais proposé par défaut d'utiliser l'amplitude ins-

tantannée démodulée par \mathbf{R}_{21} . Nous avons cependant fait apparaître sur les figures (3.29) et (3.30), une amplitude démodulée associée à ${}^h\mathbf{T}$. Elle a été calculée par la formule

$$a(t) \simeq \frac{h}{|\sin(h\dot{\Phi})|} \sqrt{{}^h\Psi x(t)}, \quad (3.93)$$

déduite de la relation (3.7). Cette démodulation de mauvaise qualité va nous permettre d'aborder l'influence du lissage du signal et de proposer ensuite un algorithme de démodulation.

3.7.2 Démodulation de l'amplitude instantanée

Influence du lissage du signal

Les fréquences et amplitudes démodulées présentées sur les graphiques (3.29) et (3.30) ont été obtenues en appliquant les différents opérateurs sur un signal lissé. Ce lissage améliore la démodulation de la fréquence mais son influence sur la démodulation de l'amplitude par les opérateurs ${}^h\mathbf{D}_1$ et \mathbf{R}_{21} est faible et fausse la démodulation associée à l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ par la formule (3.93) dès lors que le bruit est significatif. En revanche, en appliquant la formule (3.93) au signal non lissé, la précision de la démodulation obtenue est comparable à celle des opérateurs ${}^h\mathbf{D}_1$ et \mathbf{R}_{21} . La figure (3.31) présente la démodulation de l'amplitude instantanée du signal test AM-FM, bruité avec $\text{RSB} = 17$ dB en utilisant la formule (3.93) au signal lissé et non lissé.

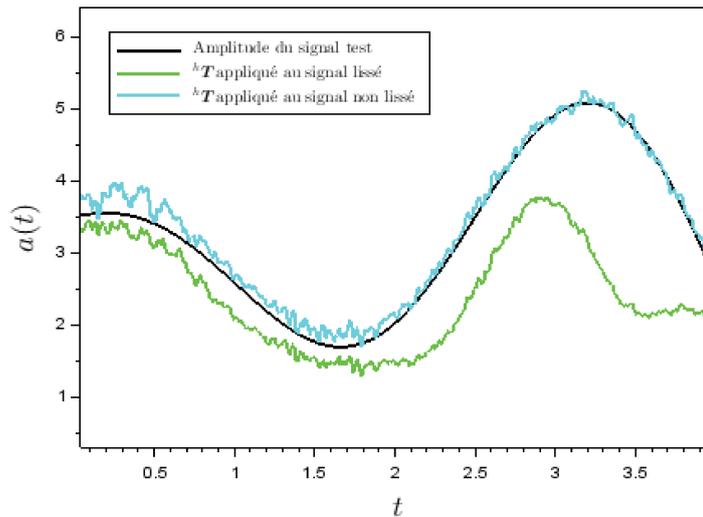


FIGURE 3.31 – Démodulation en amplitude du signal test AM-FM, bruité à $\text{RSB} = 17$ dB, lissé et non lissé.

Cet exemple illustre l'influence importante du lissage du signal sur la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser. La figure (3.32) montre, dans le cas de cet exemple où $\text{RSB} = 17$ dB, les sorties de l'opérateur ${}^h\Psi$ pour un signal test AM-FM lissé et non lissé. La sortie de l'opérateur, pour le signal x_b bruité, non lissé, est proche de celle du signal non bruité x_0 , elle même décalée par rapport à la sortie "idéale" $a(t)\dot{\Phi}(t)$ en raison du facteur $\text{sinc}^2(h\dot{\Phi})$ (cf. 3.1). La sortie correspondant au signal lissé est, elle, notablement différente.

Néanmoins, la démodulation fait intervenir le rapport $\frac{{}^{2h}\Psi x(t)}{{}^h\Psi x(t)}$ pour \mathbf{R}_{21} (3.21) ou $\frac{{}^h\Psi y_n}{{}^h\Psi x_n}$ pour ${}^h\mathbf{D}_1$ (3.30), or le rapport effectif de ces quantités pour le signal non bruité est mieux approché en utilisant le signal lissé que le signal non lissé car ${}^{2h}\Psi x(t)$ et ${}^h\Psi x(t)$ sont affectés de manière similaire par le lissage ainsi qu'on peut l'observer sur la figure (3.33). Le lissage doit toutefois être modéré car son influence est plus importants sur l'amplitude instantanée que sur la fréquence instantanée.

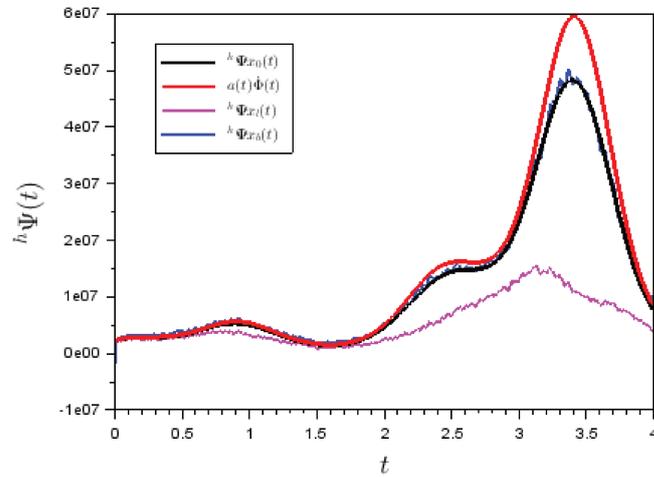


FIGURE 3.32 – Influence du bruit sur la démodulation.

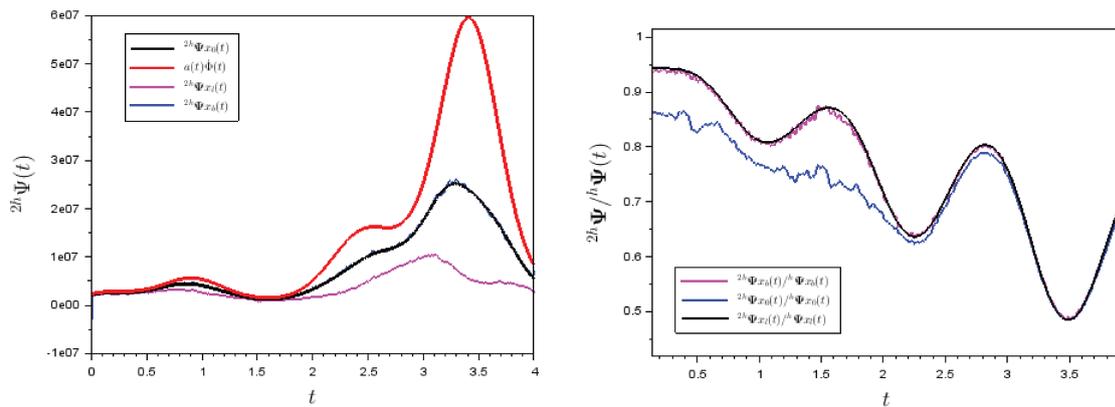


FIGURE 3.33 – Influence du bruit sur la démodulation.

Démodulation optimisée

La démodulation de la fréquence instantanée par ${}^h\mathbf{T}$ est statistiquement indépendante du bruit et estime cette fréquence avec une excellente précision. Nous allons utiliser ces caractéristiques pour obtenir une démodulation alternative de l'amplitude.

Pour un signal bruité, de la forme $x = s + b$, où s est le signal non bruité, on a vu (3.62) que la sortie des opérateurs Δ_{pq} est statistiquement indépendante du bruit :

$$\mathbf{E}(\Delta_{pq}x) = \mathbf{E}(\Delta_{pq}s), \quad (3.94)$$

On a alors, pour $\Delta_{21}x(t)$

$$\Delta_{21}x(t) = 4 \cdot ({}^{2h})\Psi x(t) - h\Psi x(t) \simeq \frac{a^2(t)}{h^2} [\sin^2(2h\dot{\Phi}(t)) - \sin^2(h\dot{\Phi}(t))] \quad (3.95)$$

d'où

$$a(t) \simeq h \sqrt{\frac{4 \cdot ({}^{2h})\Psi x(t) - h\Psi x(t)}{\sin^2(2h\dot{\Phi}(t)) - \sin^2(h\dot{\Phi}(t))}} \quad (3.96)$$

La figure (3.34) présente les sorties démodulées du signal AM-FM, bruité avec $\text{RSB} = 15$ dB, de même que pour la figure (3.30) où la sortie " ${}^h\mathbf{T}$ initial" correspond cette fois-ci à l'application de la formule (3.93) au signal non lissé. La démodulation optimisée de l'amplitude instantanée par ${}^h\mathbf{T}$ et la formule (3.96) est tracée en rouge. La figure met en évidence la précision supérieure de cette dernière méthode sur les autres méthodes de démodulation de l'amplitude.

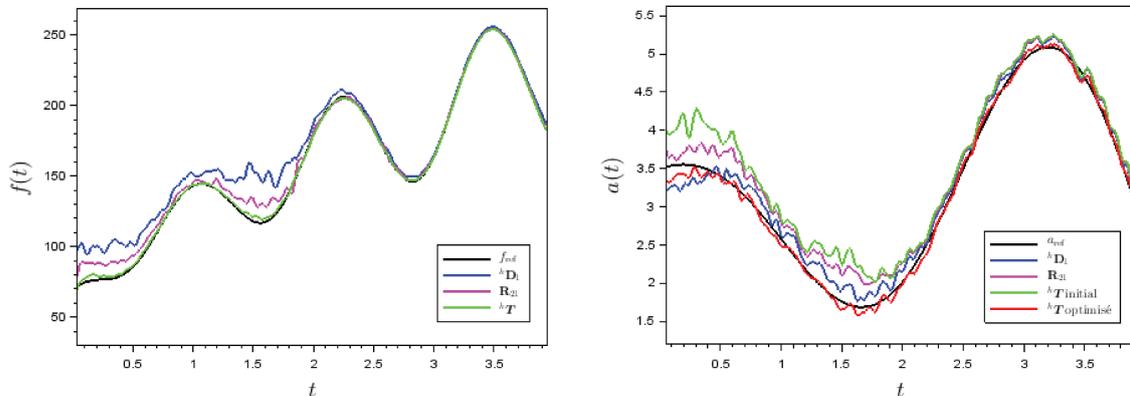


FIGURE 3.34 – Efficacité comparée de la démodulation du signal test AM-FM, bruité à $\text{RSB} = 12$ dB, pour une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz - version optimisée.

Avec la formule (3.96), la démodulation par ${}^h\mathbf{T}$ s'avère efficace en environnement bruité. La figure (3.35) présente les fréquences et amplitudes instantanées démodulées par ${}^h\mathbf{T}$ du signal test AM-FM bruité avec $\text{RSB} = 2$ dB.

3.7.3 Sensibilité au bruit de l'opérateur de Teager-Kaiser

L'étude du bruit et de ses caractéristiques statistiques est détaillée au chapitre 4. Pour ce qui nous intéresse ici, la puissance d'un bruit gaussien $b(t)$, d'écart type σ vaut $\mathbf{E}(B^2) = \sigma^2$. Considérons un signal harmonique $s(t) = a \cos(\omega t)$; la puissance d'un tel signal vaut $\frac{a^2}{2}$. Ces deux résultats étant statistiquement indépendants de l'échantillonnage, on obtient dans ce cas le **rapport signal sur bruit**

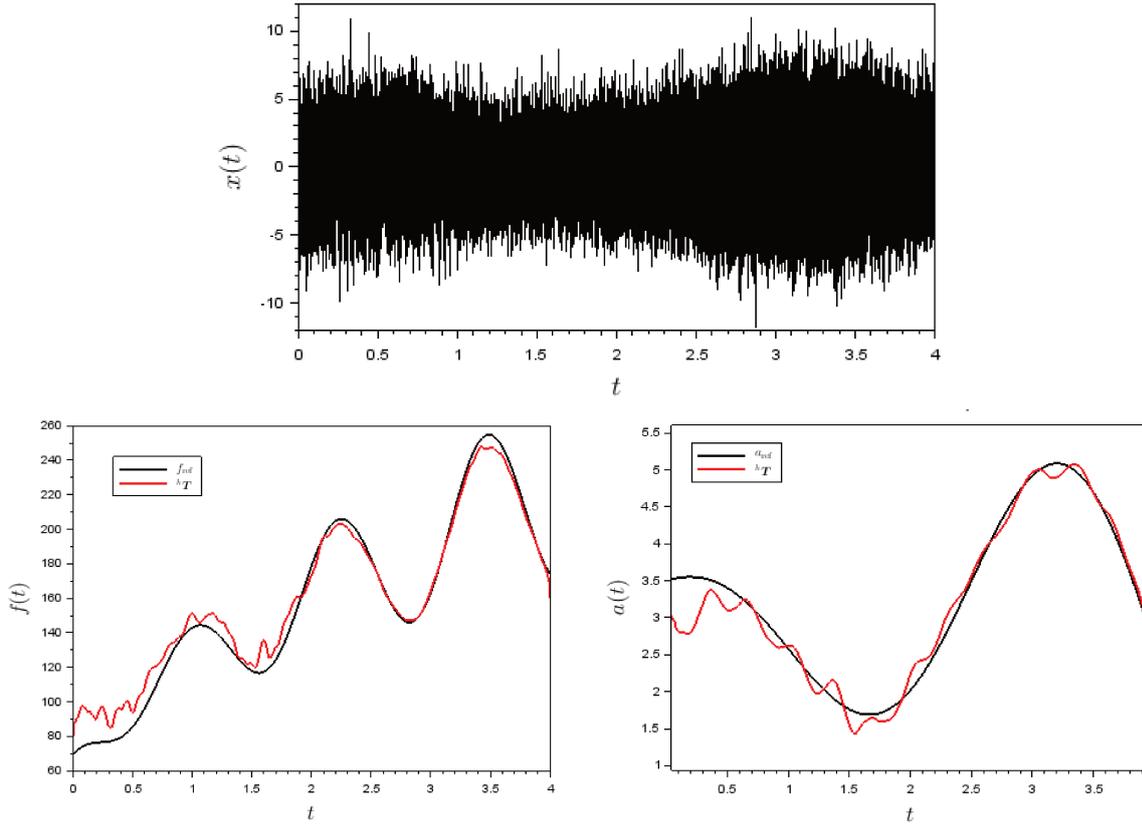


FIGURE 3.35 – Démodulation par ${}^h\mathbf{T}$ du signal test AM-FM, bruité à $\text{RSB}=2$ dB, pour une fréquence d'échantillonnage de 2000 Hz - version optimisée.

$$\text{RSB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (3.97)$$

Toutefois, l'opérateur de Teager-Kaiser, par sa nature différentielle, fait intervenir les dérivées première et seconde du signal et s'avère très sensible au bruit. En augmentant l'échantillonnage du signal, l'introduction du bruit sur chaque échantillon augmente les variations des dérivées pour un même rapport RSB , tel que défini ci-dessus. Ce paradoxe apparent est lié à la construction de l'opérateur ${}^c\Psi$ comme un opérateur d'énergie, prenant en compte l'énergie totale du système. Reprenons le signal harmonique $s(t)$ ainsi que le bruit gaussien $b(t)$ et considérons la sortie de l'opérateur appliqué à $s(t)$ et $b(t)$ sous cette vision énergétique.

On a vu précédemment (3.58) et ce sera développé au chapitre 4, que pour le signal $x(t) = s(t) + b(t)$, on a

$$\mathbf{E}({}^h\Psi x(t)) = \mathbf{E}({}^h\Psi s(t)) + \mathbf{E}({}^h\Psi b(t)). \quad (3.98)$$

L'influence du bruit sur la sortie de l'opérateur appliqué à $x(t)$ est donc donnée par la sortie de l'opérateur appliqué à $b(t)$. Or

$$\mathbf{E}({}^h\Psi s(t)) = a^2 \omega^2 \sin_c^2(h\omega) \quad (3.99)$$

et

$$\mathbf{E}({}^c\Psi b(t)) = \frac{1}{h^2} \sigma^2 \quad (\text{cf. chapitre 4}). \quad (3.100)$$

Ces deux quantités représentent les énergies de $s(t)$ et $b(t)$ au sens de Teager-Kaiser et comme elles sont constantes (statistiquement pour ${}^c\Psi b(t)$) on peut écrire

$$\frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{\text{Énergie du signal}}{\text{Énergie du bruit}} = \frac{\mathbf{E}(h\Psi s(t))}{\mathbf{E}(h\Psi b(t))} = \frac{a^2\omega^2 \sin_c^2(h\omega)}{\sigma^2}. \quad (3.101)$$

En notant $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la fréquence du signal, f_e la fréquence d'échantillonnage, $r_e = \frac{f_e}{f}$ le rapport d'échantillonnage et $h = \frac{1}{f_e}$, on obtient alors

$$\frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit}} = 2 \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{r_e} \right). \quad (3.102)$$

A notre connaissance, c'est la première fois que cette approche a été menée. Elle nous conduit à la définition suivante :

Définition : Rapport Signal sur Bruit au sens de Teager-Kaiser :

$$\text{RSB}_\Psi = 10 \log_{10} \left(\frac{h\Psi[\text{signal non bruité}]}{h\Psi[\text{Bruit}]} \right) \quad (3.103)$$

Dans le cas présent, avec $s(t)$ et $b(t)$, cette définition permet d'établir la relation suivante :

$$\text{RSB}_\Psi(r_e) = 10 \log_{10} \left(\frac{h\Psi s(t)}{h\Psi b(t)} \right) = \text{RSB} + 10 \log_{10}(2) + 20 \log_{10} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{r_e} \right) \right]. \quad (3.104)$$

Ce lien entre RSB au sens classique et au sens de Teager-Kaiser est représenté sur le graphique (3.36), qui fait apparaître l'écart entre RSB et RSB_Ψ en fonction du rapport d'échantillonnage.

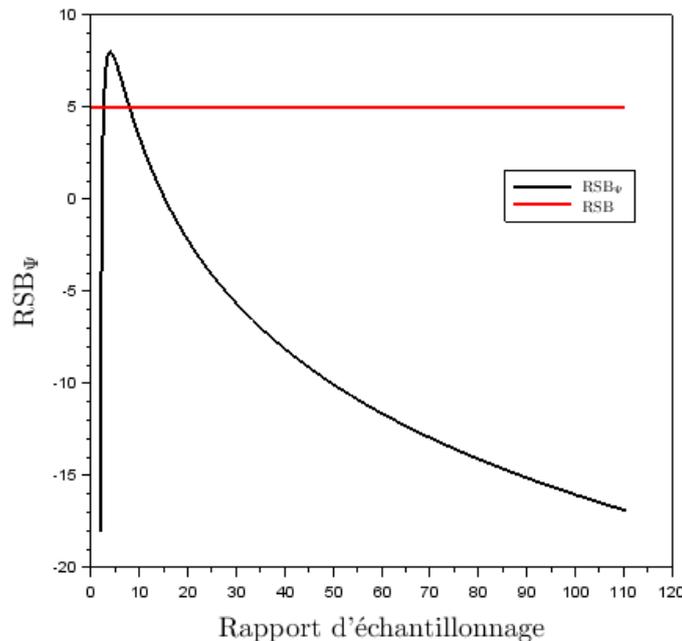


FIGURE 3.36 – Variation du rapport signal sur bruit rectifié en fonction du rapport d'échantillonnage.

On remarque également sur le graphique (3.36) que l'influence du bruit est minimale pour un rapport d'échantillonnage de 4. Cette valeur s'obtient immédiatement en dérivant $\text{RSB}_\Psi(r_e)$. En effet on obtient

$$\text{RSB}'_{\Psi}(r_e) = \frac{-40\pi \cos\left(\frac{2\pi}{r_e}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{r_e}\right)}. \quad (3.105)$$

Sur l'intervalle $]0, 8; +\infty[$ cette dérivée s'annule, une fois et une seule, pour $r_e = 4$ qui correspond ainsi au maximum de $\text{RSB}_{\Psi}(r_e)$ et au minimum de l'influence du bruit.

Cette mesure rectifiée du **rapport signal sur bruit**, appliquée au signal test AM-FM, fait apparaître (figure 3.37) une influence du bruit sensiblement plus importante sur la première moitié de l'intervalle de temps considéré (figures 3.30, 3.34 et 3.35), qui rend compte, pour l'essentiel, de la moins bonne précision des fréquences et amplitudes instantanées estimées par les différents opérateurs sur cette partie du signal. La structure des variations de l'amplitude et de la fréquence étant un autre facteur, mais secondaire.

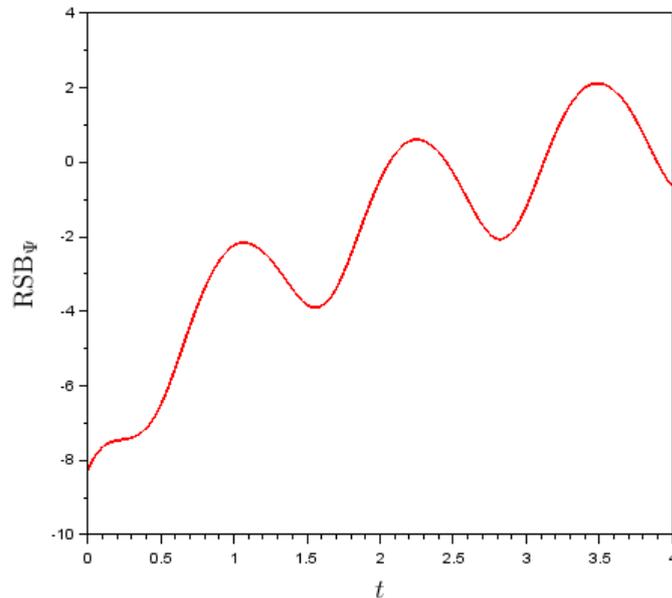


FIGURE 3.37 – Rapport signal sur bruit rectifié pour le signal test AM-FM.

Remarque

La définition (3.103) du rapport d'échantillonnage rectifié RSB_{Ψ} permet de mieux rendre compte du niveau de bruit perturbant l'opérateur de Teager-Kaiser. La formule (3.104) pour estimer RSB_{Ψ} n'est toutefois valable que pour un bruit gaussien tel que nous l'avons construit.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un nouvel opérateur, l'opérateur ${}^h\Psi$ qui, en prenant en compte le pas de discrétisation, ce qui n'est pas le cas de l'opérateur discret de Teager-Kaiser ${}^d\Psi$, exploite une information supplémentaire provenant du signal. Cet opérateur à pas variable, ${}^h\Psi$, permet, combiné à la formule de Shannon (3.12), d'adapter le pas d'échantillonnage aux caractéristiques du signal. Il permet également d'introduire de nouveaux opérateurs qui, en exploitant l'information provenant de la fréquence d'échantillonnage, conduisent à une démodulation plus précise de la fréquence et de l'amplitude instantanées du signal.

En particulier, nous avons introduit les opérateurs Δ_{pq} qui permettent d'éliminer, statistiquement, l'influence d'un bruit d'espérance nulle et à partir desquels nous avons construit l'opérateur

${}^h\mathbf{T}$, permettant une démodulation plus précise des fréquence et amplitude instantanées du signal que celle des algorithmes DESA classiques. Cette démodulation repose sur l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_n &\simeq \frac{1}{2h} \arccos\left(\frac{u_n^+ - 1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad u_n^+ = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n + \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2} \\ a_n &\simeq h \sqrt{\frac{4 \cdot ({}^{2h}\Psi x_n - {}^h\Psi x_n)}{\sin^2(2h\dot{\Phi}_n) - \sin^2(h\dot{\Phi}_n)}}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

A l'occasion de l'étude de ${}^h\mathbf{T}$, nous avons également abordé l'influence notable du bruit sur l'utilisation des différentes versions de l'opérateur de Teager-Kaiser et constaté le lien entre cette influence et la fréquence de discrétisation, ce qui nous a conduit à proposer un rapport signal sur bruit rectifié, adapté au mode opératoire suivi.

Remarquons enfin que l'introduction de l'opérateur à pas variable ${}^h\Psi$ n'est pas indispensable à la définition des opérateurs \mathbf{R}_{pq} , Δ_{pq} et ${}^h\mathbf{T}$ pour lesquels nous n'avons utilisé que des multiples du pas d'échantillonnage initial et dont des versions aux propriétés similaires auraient pu être établies à partir de ${}^d\Psi$. Nous pensons néanmoins que l'opérateur ${}^h\Psi$, combiné avec l'utilisation de la formule de Shannon, ouvre le champ des développements possibles à partir de l'opérateur de Teager-Kaiser, champ dont nous n'avons exploré ici que certains aspects. Tous les développements présentés pouvant, en particulier, être étendus au cas des opérateurs de Teager-Kaiser 2D et, donc, aux images.

Dans le chapitre suivant nous nous intéresserons aux propriétés statistiques d'un signal à l'entrée et à la sortie de l'opérateur. Nous montrerons que les moments d'ordre supérieurs centrés réduits, ainsi que le **coefficient de variation**, ne dépendent que du **rapport signal sur bruit**. En combinant l'utilisation des moments et l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser, qui possède la propriété de diminuer la dispersion relative des valeurs à sa sortie, nous établirons une stratégie de détection d'un signal d'intérêt en environnement très bruité.

Chapitre 4

Étude des densités

« Les êtres qui se sentent aimés ont une consistance, une densité, une liberté intérieure qui les rend plus ouverts. »

Jacques Salomé

Sommaire

4.1 Introduction	128
4.2 Résultats préliminaires	130
4.2.1 Généralités	130
4.2.2 Signal harmonique	133
4.2.3 Valeur absolue d'un signal harmonique	135
4.2.4 Loi normale	137
4.2.5 Valeur absolue de la loi normale	138
4.3 Moments du signal bruité	139
4.3.1 Paramétrage par le rapport signal sur bruit	139
4.3.2 Calcul des moments de B + H	140
4.4 Estimation du rapport signal sur bruit et détection	142
4.4.1 Utilisation du Kurtosis	142
4.4.2 Biais du Kurtosis	144
4.4.3 Variance du Kurtosis	145
4.4.4 Utilisation de moments d'ordre supérieur	148
4.4.5 Variance des moments empiriques	150
4.4.6 Détection par la méthode des moments	152
4.4.7 Utilisation de la valeur absolue du signal	156
4.5 Comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser en présence d'un bruit gaussien	159
4.5.1 Propriétés statistiques de $d\Psi_B$	159
4.5.2 Démodulation et densités	165
4.5.3 Méthode des moments et opérateur de Teager-Kaiser	171
4.6 Conclusion	174

4.1 Introduction

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude statistique d'un signal bruité $S(t)$, composé d'un signal source déterministe $X(t)$ et d'un bruit $B(t)$ dont les caractéristiques statistiques sont constantes : $S(t) = X(t) + B(t)$. Les lois de probabilités et moments statistiques afférents sont construits en considérant les suites de valeurs mesurées $[S(t_1); S(t_2); \dots S(t_n)]$ comme des réalisations $[s_1; s_2; \dots s_n]$ de variables aléatoires S_1, S_2, \dots, S_n indépendantes, de même loi S , et non plus comme des séries temporelles.

Nous nous appuyerons au cours de cette étude sur le cas d'un signal source harmonique $H(t)$ (nous noterons $H(t)$ plutôt que $X(t)$ le signal déterministe dès lors que ce dernier est choisi harmonique) et d'un bruit gaussien. Ce choix nous permettra de quantifier les résultats et de disposer, pour une grande part, de résultats théoriques. Les méthodes que nous développerons dans le cadre d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien ont pour objectif d'être étendues à une large gamme de signaux bruités.

Pour étayer notre propos, considérons les graphiques (4.1), (4.2) et (4.3). Le graphique (4.1) représente la densité de probabilités, f_H , d'un signal harmonique d'amplitude 1. La courbe de f_H ne dépend pas de la fréquence du signal et, à un changement d'échelle près ne dépend pas de l'amplitude. Le graphique (4.2) représente la densité de probabilités d'un bruit gaussien, f_B , dont la courbe, à un changement d'échelle près, ne dépend pas de l'écart-type.

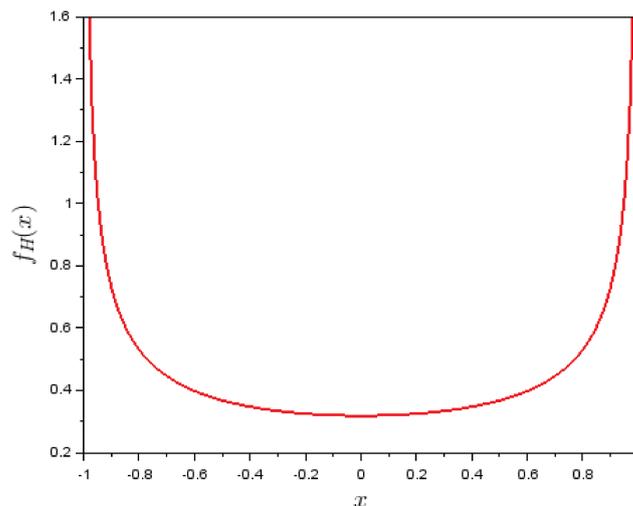


FIGURE 4.1 – Densité d'un signal harmonique d'amplitude 1.

Le graphique (4.3) présente une nappe, au sein de laquelle chaque courbe représente la densité de probabilité f_S du mélange additif $S(t) = H(t) + B(t)$ pour un rapport signal sur bruit (noté RSB) donné, renormalisée sur un intervalle de valeurs fixé à $[-1; 1]$, des valeurs prises par $S(t)$. Nous montrerons que la forme de chaque courbe ne dépend que de la valeur de RSB. Les courbes des densités obtenues en faisant varier RSB se déforment progressivement depuis la courbe de la figure (4.1) pour $RSB \rightarrow +\infty$ à celle de la figure (4.2) pour $RSB \rightarrow -\infty$.

Lorsque l'amplitude du signal harmonique est modifiée, cette nappe est identique à un changement d'échelle près. Cette invariance de la densité par changement d'échelle se traduit par une invariance des moments centrés réduits d'ordre 3 et plus. Les statistiques du signal $S(t)$, donnent donc une information sur la valeur de RSB.

Afin d'étudier les caractéristiques du signal, en particulier son coefficient de variation, son Skewness et son Kurtosis, nous allons au préalable établir certains résultats concernant les mo-

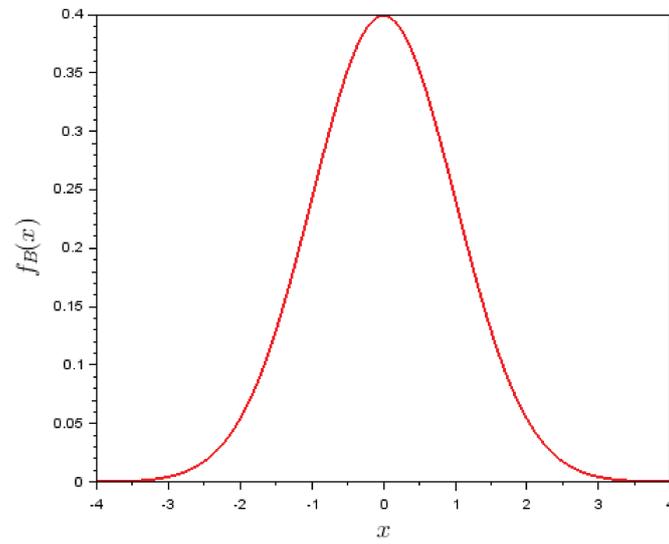


FIGURE 4.2 – Densité d'un bruit gaussien d'écart-type 1.

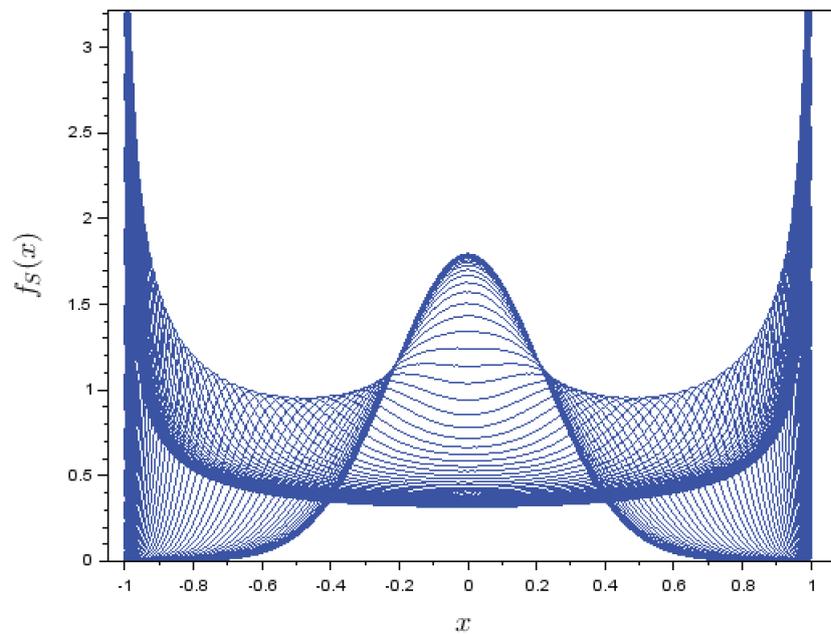


FIGURE 4.3 – Densités de probabilité d'un signal harmonique bruité par un bruit gaussien lorsque RSB varie de $-\infty$ à $+\infty$.

ments d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien. Par ailleurs, les fluctuations des valeurs des moments autour de leur valeur moyenne augmentent avec l'ordre de ces moments. La taille des échantillons permettant d'obtenir des valeurs statistiques fiables augmente donc également avec cet ordre. C'est pourquoi nous nous intéresserons également aux valeurs absolues des signaux $|H(t)|$ et $|B(t)|$ qui possèdent un [coefficient de variation](#), moment d'ordre 2, ce qui n'est pas le cas de signaux d'espérance nulle comme $H(t)$ et $B(t)$. L'étude des moments statistiques du mélange additif $S(t)$ nous amènera à développer une méthode de détection de la présence d'un signal déterministe au sein d'un bruit.

Nous nous intéresserons ensuite aux caractéristiques statistiques de la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser. Du fait de sa définition, cet opérateur a vocation à donner une information locale sur le signal puisque sa forme continue se fonde sur une unique valeur t et sa forme discrète n'utilise que 3 valeurs discrétisées successives. Néanmoins, la sortie de l'opérateur présente également un intérêt statistique, en effet, lorsque l'opérateur est appliqué à un signal harmonique, cette sortie est constante et sa densité de probabilité se traduit par une impulsion de Dirac. Lorsqu'il est appliqué à un signal [AM-FM](#) bruité, il a donc tendance à concentrer la densité de probabilité de sa sortie autour d'un intervalle de valeurs plus réduit que celui des valeurs prises par le signal initial. Cette tendance est d'autant plus marquée que les caractéristiques instantanées du signal (fréquence et amplitude) varient peu au regard de la fréquence d'échantillonnage. En nous appuyant sur cette propriété nous allons ainsi montrer son intérêt pour la détection d'un signal faible dans un environnement fortement bruité. En effet, ce signal va modifier les caractéristiques statistiques du bruit sur les intervalles de temps où il est présent et l'opérateur de Teager-Kaiser va amplifier ce phénomène, favorisant ainsi la détection du signal. Ces propriétés nous conduiront ainsi à proposer une méthode de détection d'un signal faible que nous appellerons "méthode du moment d'énergie".

Nous constaterons également, au cours de cette étude que la symétrie de la répartition des valeurs prises par de nombreux signaux, est brisée lors de l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser et provoque un biais lors de la démodulation dès lors que le bruit est important. Nous observerons que l'étude de cette dissymétrie donne alors une indication sur le [rapport signal sur bruit](#) et sur le biais induit.

4.2 Résultats préliminaires

Avant de manipuler la densité et les moments du signal additif S , nous allons établir plusieurs résultats concernant les [VAR](#) B et H suivant respectivement une loi normale et une loi harmonique.

4.2.1 Généralités

Densités de probabilité

Nous allons considérer un signal $S(t)$ comme étant une variable aléatoire réelle ([VAR](#)) S . Les valeurs prises par les échantillons d'un signal discrétisé apparaissent alors comme des réalisations de cette [VAR](#). Une telle VAR, S , peut être caractérisée par sa densité de probabilité f_S ou par sa fonction de répartition F_S , où

$$F_S(x) = \int_{-\infty}^x f_S(u) du. \quad (4.1)$$

Nous utiliserons également la densité de probabilité $f_{|S|}$ de la [VAR](#) $|S|$, dont les valeurs prises sont les valeurs absolues de celles prises par S . Cette densité s'obtient simplement à partir de celle de S . En effet, en notant $F_{|S|}$ sa fonction de répartition, on a :

$$F_{|S|}(x) = \mathbf{P}(|S| < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}(-x < S < x) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

donc

$$F_{|S|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_S(x) - F_S(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (4.3)$$

et, par dérivation :

$$f_{|S|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f_S(x) + f_S(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Dans le cas particulier où la densité f_S est paire on en déduit également l'expression suivante, qui nous sera utile par la suite :

$$f_{|S|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2f_S(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Moments

Les moments de S caractérisent sa dispersion. On distingue les moments ordinaires $\mathbf{m}_k(S)$ (on omet généralement le qualificatif ordinaire) d'ordre k , les moments centrés $\boldsymbol{\mu}_k(S)$ d'ordre k et les moments centrés réduits \mathbf{M}_k d'ordre k . Les moments ordinaires sont définis par

$$\mathbf{m}_k(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_S(x) dx \quad (4.6)$$

$\mathbf{m}_0(S)$ existe toujours et vaut 1 ; les moments d'ordre $k \geq 1$ n'existent pas toujours mais, pour un signal physique de durée finie, nous supposons sans que cela restreigne l'étude qu'ils sont définis. Par ailleurs $\mathbf{m}_1(S) = \mathbf{E}(S)$ est l'espérance de S . Les moments centrés, permettant de comparer les dispersions autour de \mathbf{VAR} ayant des espérances différentes sont, eux, définis à partir de l'espérance par

$$\boldsymbol{\mu}_k(S) = \mathbf{E} \left[(S - \mathbf{E}(S))^k \right]. \quad (4.7)$$

Par construction $\boldsymbol{\mu}_0(S) = 1$ et $\boldsymbol{\mu}_1(S) = 0$; le premier moment utile est la variance $\boldsymbol{\mu}_2(S) = \mathbf{V}(S)$, dont on déduit l'écart-type $\boldsymbol{\sigma}(S) = \sqrt{\mathbf{V}(S)}$, permettant d'exprimer la dispersion des valeurs de S dans la même unité que S :

Afin de comparer les dispersions indépendamment des unités utilisées pour la mesure d'une \mathbf{VAR} et obtenir des mesures intrinsèques à la forme de la distribution des valeurs, nous nous intéresserons aux moments centrés réduits $\mathbf{M}_k(S)$. Ces derniers sont définis par

$$\mathbf{M}_k(S) = \frac{\boldsymbol{\mu}_k(S)}{\boldsymbol{\sigma}^k(S)} = \mathbf{E} \left[\left(\frac{S - \mathbf{E}(S)}{\boldsymbol{\sigma}(S)} \right)^k \right]. \quad (4.8)$$

Nous utiliserons plus particulièrement

- le moment centré réduit d'ordre 3, qui donne une information sur la symétrie d'une distribution. Il est appelé coefficient d'asymétrie ou **Skewness** et noté $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma}(S) = \mathbf{M}_3(S) = \frac{\boldsymbol{\mu}_3(S)}{\boldsymbol{\sigma}^3(S)}; \quad (4.9)$$

- le moment centré réduit d'ordre 4, qui donne une information sur la forme d'une distribution et qui est appelé coefficient d'aplatissement ou **Kurtosis** et noté $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\boldsymbol{\kappa}(S) = \mathbf{M}_4(S) = \frac{\boldsymbol{\mu}_4(S)}{\boldsymbol{\sigma}^4(S)}. \quad (4.10)$$

Remarquons que γ et le κ sont définis pour toutes les distributions, néanmoins, leur interprétation en termes de symétrie et d'aplatissement, n'est pertinente que pour des courbes unimodales. Par ailleurs, la référence en termes d'aplatissement est souvent prise comme étant celle de la courbe de la loi normale. Pour cette dernière, on a $\kappa(\mathcal{N}) = 3$ et on définit à partir de cette valeur le **Kurtosis normalisé** :

$$\kappa_N(S) = \kappa(S) - 3. \quad (4.11)$$

Nous utiliserons également un autre indicateur de dispersion, le **coefficient de variation**, noté **CV**. En effet, l'écart-type mesure la dispersion absolue des valeurs autour de l'espérance et il s'avère fructueux d'utiliser un coefficient qui mesure, lui, la dispersion relative de ces valeurs autour de l'espérance. $CV(S)$ est défini par

$$CV(S) = \frac{\sigma(S)}{E(S)}. \quad (4.12)$$

Le **coefficient de variation** ne peut toutefois être défini que pour un signal d'espérance non nulle, ce qui nous amènera à nous intéresser également à $|S|$ lorsque l'espérance de S est nulle.

Rôle des puissances d'une VAR

Les moments centrés réduits d'ordre n d'une VAR X peuvent s'exprimer en fonction de l'écart-type de X , $\sigma(X)$ et des espérances des puissances de X . En effet :

$$\begin{aligned} \mu_n(X) &= E\left([X - E(X)]^n\right) = E\left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} [E(X)]^{n-k} X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [E(X)]^{n-k} E(X^k) \\ &= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [E(X)]^{n-k} E(X^k) - (-1)^n (n-1) [E(X)]^n, \end{aligned} \quad (4.13)$$

d'où :

$$\mathbf{M}_n(X) = \frac{1}{\sigma(X)^n} \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [E(X)]^{n-k} E(X^k) - (-1)^n (n-1) [E(X)]^n \right). \quad (4.14)$$

La formule (4.14) va ainsi nous permettre de déterminer les expression des moments \mathbf{M}_n des signaux que nous allons étudier dans la suite de cette section.

VAR semblables

Soient deux VAR X et Y reliées par une relation de proportionnalité $Y = kX$, nous les qualifieront de variables semblables car leurs densités sont homothétiques et car elles admettent les mêmes moments centrés réduits. Ces propriétés sont développées en annexe A et se résument comme suit :

VAR semblables - Synthèse :

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{k}\right), \quad (4.15)$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{x}{k}\right), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}(Y) = k\mathbf{E}(X), \quad (4.17)$$

$$\sigma_Y = k\sigma_X, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{M}_n(Y) = \mathbf{M}_n(X), \quad (4.19)$$

Remarque :

L'utilisation du qualificatif homothétique pour les densités est un abus de langage volontaire, ainsi que justifié au paragraphe A.1 de l'annexe A.

4.2.2 Signal harmonique

Densité de probabilité d'un signal harmonique

Soit un signal harmonique $h(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$. La densité de $h(t)$ est donc identique à celle obtenue sur l'intervalle $\left[-\frac{\varphi}{\omega}; \frac{2\pi - \varphi}{\omega}\right]$ et la symétrie par rapport à la droite $t = \frac{\pi - \varphi}{\omega}$ permet de réduire cet intervalle à $\left[\frac{\pi - \varphi}{\omega}; \frac{2\pi - \varphi}{\omega}\right]$ sur lequel les valeurs prises par $h(t)$ parcourent l'intervalle $[-a; a]$ avec la même densité que sur $[-\infty; \infty]$. Par translation, cette densité est la même que celle de $h_0(t) = a \cdot \sin(\omega t)$ sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2\omega}; \frac{\pi}{2\omega}\right]$.

Soient alors deux réels α et β tels que $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$, les fonctions $h_1(t)$ et $h_1^{-1}(t) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$ étant strictement croissantes, on a

$$\begin{aligned} p(h(t) \in [\alpha, \beta]) &= p\left(t \in \left[\frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\beta}{a}\right), \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right]\right) \\ &= \left[\frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\beta}{a}\right) - \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right] / \frac{\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{\beta}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La fonction de répartition de H étant définie par $F_H(x) = p(h(t) \in [-\infty, x])$, on en déduit que :

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (4.21)$$

et que la densité de H, obtenue par la dérivée de $F_H(x)$ vaut

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Le graphique (4.4) présente la densité de probabilités d'un signal harmonique d'amplitude 5.

Remarque :

la densité obtenue ne dépend pas ni de la phase initiale φ ni de la pulsation ω .

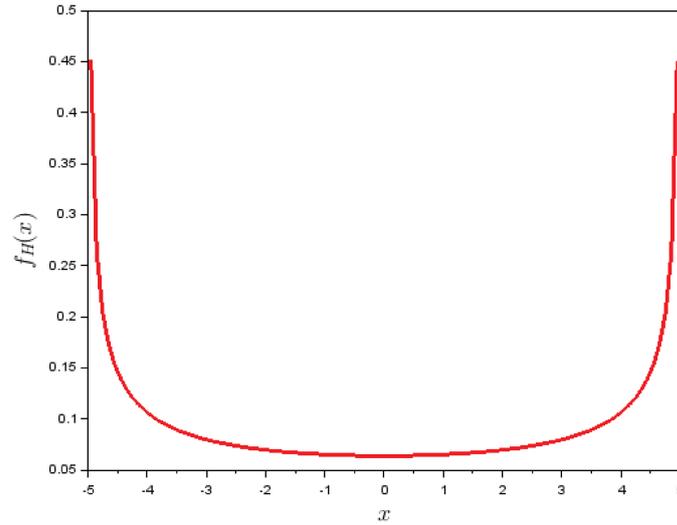


FIGURE 4.4 – Densités de probabilité d'un signal harmonique d'amplitude 5.

Moments d'un signal harmonique

Soit H une VAR suivant la loi de densité f_H . Le signal harmonique étant d'espérance nulle, le coefficient de variation de H n'est pas défini.

La densité de probabilité étant symétrique les moments impairs de H sont nuls. Pour déterminer les moments pairs, calculons $\mathbf{E}(H^{2p})$.

$$\mathbf{E}(H^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_H(x) dx = \int_{-a}^a \frac{1}{\pi} \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \quad (4.23)$$

En posant $x = a \sin y$ on obtient donc

$$\mathbf{E}(H^n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^n \sin^n y}{a \sqrt{1 - \sin^2 y}} a \cos y dy = \frac{2a^n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y dy, \quad (4.24)$$

soit encore

$$\mathbf{E}(H^n) = \frac{2a^n}{\pi} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y dy. \quad (4.25)$$

Dans le cas où n est pair, en notant $n = 2p$, la linéarisation de \sin^{2p} est donnée par la formule

$$\sin^{2p}(t) = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos[2(p-k)t] + \frac{(-1)^p}{2} \binom{2p}{p} \right\}. \quad (4.26)$$

Par intégration entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tous les termes en cosinus valent 0. On obtient donc

$$I_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \frac{(-1)^p}{2^2} \binom{2p}{p} \times \frac{\pi}{2}, \quad (4.27)$$

soit finalement

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p}, \quad (4.28)$$

ce qui entraîne, compte tenu de la relation (4.25)

$$\mathbf{E}(H^{2p}) = \left(\frac{a}{2}\right)^{2p} \binom{2p}{p}. \quad (4.29)$$

On en déduit, en particulier, la variance et l'écart-type de H :

$$\mathbf{V}(H) = \mathbf{E}(H^2) - \mathbf{E}(H)^2 = \mathbf{E}(H^2) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{a^2}{2} \quad \text{et, donc,} \quad \sigma(H) = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad (4.30)$$

Puisque $\mathbf{E}(H) = 0$, on a $\mathbf{E}([H - \mathbf{E}(H)]^{2p}) = \mathbf{E}(H^{2p})$. Compte tenu des relations (4.29) et (4.30), on en déduit les moments pairs d'ordre supérieur à 2 :

$$\mathbf{M}_{2p} = \frac{1}{\sigma^{2p}} \mathbf{E}([H - \mathbf{E}(H)]^{2p}) = \frac{1}{\sigma^{2p}} \mathbf{E}(H^{2p}) = \frac{2^p}{a^{2p}} \left(\frac{a}{2}\right)^{2p} \binom{2p}{p} = \frac{1}{2^p} \binom{2p}{p}. \quad (4.31)$$

En particulier, le **Kurtosis** $\kappa(H) = \mathbf{M}_4(H)$ et le Kurtosis normalisé $\kappa_N(H) = \kappa(H) - 3$ valent respectivement

$$\kappa(H) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \kappa_N(H) = -\frac{3}{2} \quad (4.32)$$

Signal harmonique - Synthèse :

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{E}(H) = 0 \quad \sigma(H) = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{CV}(H) \text{ non défini} \quad \gamma(H) = 0 \quad \kappa_N(H) = -\frac{3}{2}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{M}_{2p+1}(H) = 0 \quad \mathbf{M}_{2p}(H) = \frac{1}{2^p} \binom{2p}{p}. \quad (4.35)$$

Remarque

On peut constater que les moments centrés réduits d'ordre supérieur ou égal à 3 sont indépendants de l'amplitude du signal harmonique.

4.2.3 Valeur absolue d'un signal harmonique

Densité de la valeur absolue du signal harmonique

Dans le cas d'une **VAR** $|H|$ représentant la valeur absolue d'un signal harmonique, par application de la formule (4.5), on obtient :

$$f_{|H|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{si } 0 < x < a \end{cases} \quad (4.36)$$

Moments de la valeur absolue du signal harmonique

Compte tenu de (4.36) et (4.24), on a

$$\mathbf{E}(|H|^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_{|H|}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{2a^n}{\pi} I_n \quad (4.37)$$

où I_n est donné par (4.25).

Pour $n = 1$, on obtient donc, en particulier

$$\mathbf{E}(|H|) = \frac{2aI_1}{\pi} = \frac{2a}{\pi}. \quad (4.38)$$

Dans le cas où n est pair, nous avons obtenu précédemment que $I_{2p} = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p}$ (cf. 4.28). Dans le cas impair, la linéarisation de \sin^{2p+1} est donnée par la formule

$$\sin^{2p+1}(t) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{k} \sin[(2p+1-2k)t]. \quad (4.39)$$

Puisque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[(2p+1-2k)t] dt = \frac{1}{2p-2k+1}$, on a donc

$$I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2p-2k+1} \binom{2p+1}{k}. \quad (4.40)$$

Ainsi

$$\mathbf{E}(|H|^{2p}) = \left(\frac{a}{2}\right)^{2p} \binom{2p}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(|H|^{2p+1}) = \frac{(-1)^p a^{2p+1}}{2^{2p-1}\pi} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2p-2k+1} \binom{2p+1}{k}. \quad (4.41)$$

On obtient, en particulier, à partir de (4.41) que

$$\mathbf{E}(|H|^2) = \frac{a^2}{2}, \quad \mathbf{E}(|H|^3) = \frac{4a^3}{3\pi} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(|H|^4) = \frac{3a^4}{8}. \quad (4.42)$$

La formule (4.13) nous permet alors d'obtenir :

$$\mathbf{V}(|H|) = \mathbf{E}(|H|^2) - \mathbf{E}(|H|)^2 = \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{a^2}{2\pi^2}(\pi^2 - 8), \quad (4.43)$$

$$\sigma(|H|) = \sqrt{\mathbf{V}(|H|)} = \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\pi^2 - 8}, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon(|H|) = M_3(|H|) &= \frac{1}{\sigma(|H|)^3} \left(-3\mathbf{E}(|H|)\mathbf{E}(|H|^2) + \mathbf{E}(|H|^3) + 2[\mathbf{E}(|H|)]^3 \right) \\ &= \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi^2-8}} \right)^3 \left(-3\frac{2a}{\pi} \times \frac{a^2}{2} + \frac{4a^3}{3\pi} + 2\left[\frac{2a}{\pi}\right]^3 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{48-5\pi^2}{(\pi^2-8)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \kappa(|H|) = M_4(|H|) &= \frac{1}{\sigma(|H|)^4} \left(6\mathbf{E}(|H|)^2\mathbf{E}(|H|^2) - 4\mathbf{E}(|H|)\mathbf{E}(|H|^3) + \mathbf{E}(|H|^4) - 3[\mathbf{E}(|H|)]^4 \right) \\ &= \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi^2-8}} \right)^4 \left(6\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \times \frac{a^2}{2} - 4\frac{2a}{\pi} \times \frac{4a^3}{3\pi} + \frac{3a^4}{8} - 3\left(\frac{2a}{\pi}\right)^4 \right) \\ &= \frac{4\pi^4}{(\pi^2-8)^2} \left(\frac{12}{\pi^2} - \frac{32}{3\pi^2} + \frac{3}{8} - \frac{48}{\pi^4} \right) \\ &= \frac{1}{(\pi^2-8)^2} \left(\frac{3}{2}\pi^4 + \frac{16}{3}\pi^2 - 192 \right) = \frac{8}{3} \left[\frac{11}{\pi^2-8} - \frac{20}{(\pi^2-8)^2} \right] + \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

et

$$\kappa_N(|H|) = \kappa(|H|) - 3 = \frac{8}{3} \left[\frac{11}{\pi^2 - 8} - \frac{20}{(\pi^2 - 8)^2} \right] - \frac{3}{2}. \quad (4.47)$$

Les relations (4.14), (4.41) et (4.44) permettent de calculer les moments d'ordre supérieur à 4 mais, faute d'avoir établi une expression générique simple, nous ne les avons pas inclus dans la synthèse ci-après :

Valeur absolue d'un signal harmonique - Synthèse :

$$\mathbf{E}(|H|^n) = \frac{2a^n}{\pi} I_n \quad (4.48)$$

$$\text{avec } I_{2p} = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2p-2k+1} \binom{2p+1}{k},$$

$$\mathbf{E}(|H|) = \frac{2a}{\pi}, \quad \sigma(|H|) = \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\pi^2 - 8}, \quad \mathbf{CV}(|H|) = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}, \quad (4.49)$$

$$\Upsilon(|H|) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{48 - 5\pi^2}{(\pi^2 - 8)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \kappa_N(|H|) = \frac{8}{3} \left[\frac{11}{\pi^2 - 8} - \frac{20}{(\pi^2 - 8)^2} \right] - \frac{3}{2}. \quad (4.50)$$

Remarque

On peut constater que le coefficient de variation et les moments centrés réduits d'ordre supérieur ou égal à 3 sont indépendants de a .

4.2.4 Loi normale

Soit B une **VAR** suivant la loi normale centrée $\mathcal{N}(0; \sigma)$. La densité de B est donnée par la formule usuelle :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \quad (4.51)$$

Pour déterminer les moments de B , calculons au préalable $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$. En posant $t = \frac{x^2}{2\sigma^2}$, on a

$$J_n = \int_0^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sigma^n t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \frac{\sigma^2 t^{-\frac{1}{2}} dt}{\sigma\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{n-1} \sigma^{n+1} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt, \quad (4.52)$$

soit encore

$$J_n = (\sqrt{2})^{n-1} \sigma^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad (4.53)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie sur \mathbb{R}^{+*} par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4.54)$$

La densité f_B étant paire, ses moments impairs sont nuls et ses moments pairs vérifient alors

$$\mathbf{M}_{2p} = \frac{1}{\sigma^{2p}} \mathbf{E}\left([B - \mathbf{E}(B)]^{2p}\right) = \frac{1}{\sigma^{2p}} \mathbf{E}(B^{2p}) = \frac{2^p}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^p}{\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p)!}{2^p p!}. \quad (4.55)$$

Remarque :

On retrouve bien, par la formule générale, les valeurs connues des variance, écart-type, **Kurtosis** et

kurtosis normalisé de la loi normale.

Loi normale - Synthèse :

$$f_B(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \quad (4.56)$$

$$\mathbf{E}(B) = 0 \quad \boldsymbol{\sigma}(B) = \sigma, \quad \mathbf{CV}(B) \text{ non défini} \quad \boldsymbol{\gamma}(B) = 0, \quad \boldsymbol{\kappa}_N(B) = 0, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{M}_{2p+1}(B) = 0, \quad \mathbf{M}_{2p}(B) = \frac{(2p)!}{2^p p!}. \quad (4.58)$$

Remarque

On peut constater que les moments centrés réduits d'ordre supérieur ou égal à 3 sont indépendants de la variance du bruit.

4.2.5 Valeur absolue de la loi normale

Densité de la valeur absolue de la loi normale

Dans le cas d'une VAR |B| représentant la valeur absolue d'un bruit gaussien, par application de la formule (4.5), on a :

$$f_{|B|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \quad (4.59)$$

Moments de la valeur absolue de la loi normale

On déduit de (4.59) que

$$\mathbf{E}(|B|^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_{|B|}(x) dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} J_n, \quad (4.60)$$

c'est à dire, compte tenu de l'égalité (4.53) :

$$\mathbf{E}(|B|^n) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} J_n = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} (\sqrt{2})^{n-1} \sigma^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n \sigma^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \quad (4.61)$$

On en déduit alors immédiatement que

$$\mathbf{E}(|B|) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{V}(|B|) = \mathbf{E}(|B|^2) - [\mathbf{E}(|B|)]^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2\sigma^2}{\pi} = \frac{2\sigma^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} 2} - \frac{2\sigma^2}{\pi} = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right), \quad (4.63)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(|B|) = \sqrt{\mathbf{V}(|B|)} = \sigma\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}, \quad (4.64)$$

et, en utilisant la relation, (4.14), que

$$\begin{aligned}
 \Upsilon(|B|) = M_3(|B|) &= \frac{1}{\sigma(|B|)^3} \left(-3\mathbf{E}(|B|)\mathbf{E}(|B|^2) + \mathbf{E}(|B|^3) + 2[\mathbf{E}(|B|)]^3 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma^3(1-2/\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(-3\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{(\sqrt{2})^3\sigma^3}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2) + 2 \left[\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]^3 \right) \\
 &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(\pi-2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{6\sqrt{2}}{\pi} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \times 2 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned}
 \kappa(|B|) = M_4(|B|) &= \frac{1}{\sigma(|B|)^4} \left(6\mathbf{E}(|B|)^2\mathbf{E}(|B|^2) - 4\mathbf{E}(|B|)\mathbf{E}(|B|^3) + \mathbf{E}(|B|^4) - 3[\mathbf{E}(|B|)]^4 \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma^4(1-2/\pi)^2} \left(6\sigma^2\frac{2}{\pi} \times \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 4\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{(\sqrt{2})^3\sigma^3}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2) + \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \left[\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]^4 \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{(\pi-2)^2} \left(\frac{24}{\pi\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{16}{\pi} \times 1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{12}{\pi^2} \right) \\
 &= 8\frac{\pi-3}{(\pi-2)^2} + 3. \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

et, donc, que $\kappa_N(|B|) = 8\frac{\pi-3}{(\pi-2)^2}$.

Valeur absolue de la loi normale - Synthèse :

$$f_{|B|}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \tag{4.67}$$

$$\mathbf{E}(|B|) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \sigma(|B|) = \sigma\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}, \quad \mathbf{CV}(|B|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}-1}, \tag{4.68}$$

$$\Upsilon(|B|) = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_N(|B|) = 8\frac{\pi-3}{(\pi-2)^2}. \tag{4.69}$$

Remarque

On constate que le coefficient de variation et les moments centrés réduits d'ordre supérieur ou égal à 3 sont indépendants de la variance du bruit.

4.3 Moments du signal bruité

Nous allons utiliser les résultats précédents pour nous intéresser désormais à un signal $S(t) = H(t) + B(t)$ composé d'un signal harmonique $H(t)$ et d'un bruit gaussien $B(t)$. Les éléments statistiques d'un tel signal vont s'avérer utiles car, ainsi que nous allons le démontrer au paragraphe suivant, ils ne dépendent que de [RSB](#).

4.3.1 Paramétrage par le rapport signal sur bruit

Nous avons vu précédemment (cf. [4.51](#) et [4.22](#)) que les [VAR](#) B et H admettent pour densités respectives :

$$f_B(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \quad \text{et} \quad f_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Par conséquent, par convolution, $S = H + B$ admet pour densité

$$f_S(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}^{3/2}} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-x}{\sigma}\right)^2} dx. \quad (4.70)$$

Par le changement de variable $y = \frac{x}{a}$, on a alors

$$f_S(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}^{3/2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{a}{\sigma}\left(\frac{t}{a} - y\right)\right]^2} dy. \quad (4.71)$$

En introduisant le **rapport signal sur bruit** non exprimé en décibels $\rho = \frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit}} = \frac{a^2}{2\sigma^2}$, l'expression précédente peut s'écrire

$$f_S(t) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\rho}{\pi^3}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} e^{-\rho\left(\frac{t}{a} - y\right)^2} dy. \quad (4.72)$$

On a donc

$$f_S(t) = \frac{1}{a} f_{S,\rho}\left(\frac{t}{a}\right), \quad (4.73)$$

où $f_{S,\rho}$ est la densité normalisée de S :

$$f_{S,\rho}(t) = \sqrt{\frac{\rho}{\pi^3}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} e^{-\rho(t-y)^2} dy, \quad (4.74)$$

Ainsi, les densités $f_S(t)$ et $f_{S,\rho}(t)$ sont homothétiques, ce qui entraîne que les moments des **VAR** S et $S_\rho = \frac{1}{a}S$ sont semblables et que les moments centrés réduits de S sont identiques à ceux de S_ρ (cf. 4.19), qui ne dépendent que de ρ .

L'étude de S peut donc s'effectuer avec le **RSB** comme seul paramètre. Le lien entre ρ et le **rapport signal sur bruit** en décibel étant donné par **RSB** = $10\log_{10}(\rho)$. De plus en fixant, par exemple, l'amplitude à 1, les moments peuvent ne dépendre que de l'écart-type σ . Les résultats pouvant ensuite être transposés par homothétie à tout couple (a, σ) .

Remarque :

Une autre manière de présenter le résultat précédent consiste à observer que lorsque deux couples $(H_1; B_1)$ et $(H_2; B_2)$ ont un même rapport ρ , il existe alors une constante k telle que $H_2 = kH_1$ et $B_2 = kB_1$. Les **VAR** $S_1 = H_1 + B_1$ et $S_2 = S_2 + B_2$ sont donc proportionnelles : $S_2 = kS_1$. Or deux **VAR** proportionnelles ont des densités homothétiques et des moments centrés réduits égaux (A.1). Nous avons privilégié le calcul précédent à ce constat simple afin de disposer d'une expression de la densité obtenue en fonction de ρ .

4.3.2 Calcul des moments de $B + H$

A partir des moments de H et B , nous pouvons déterminer ceux de $B + H$ d'après la formule A.20 :

$$\mathbf{M}_n(X+Y) = \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} \sigma_X^k \sigma_Y^{n-k} \mathbf{M}_k(X) \mathbf{M}_{n-k}(Y).$$

En utilisant $\sigma_H = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (4.34) et $\sigma_B = \sigma$ (4.57), on a donc :

$$\mathbf{M}_n(\text{H+B}) = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{2} + \sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^k \sigma^{n-k} \mathbf{M}_k(\text{H}) \mathbf{M}_{n-k}(\text{B}). \quad (4.75)$$

En introduisant $\rho = \frac{a^2}{2\sigma^2}$, on obtient alors

$$\mathbf{M}_n(\text{H+B}) = \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} \rho^{\frac{k}{2}} \mathbf{M}_k(\text{H}) \mathbf{M}_{n-k}(\text{B}). \quad (4.76)$$

Par symétrie, les moments impairs de H+B sont nuls et on peut écrire, pour les moments pairs, que

$$\mathbf{M}_{2n}(\text{H+B}) = \frac{1}{(1+\rho)^n} \sum_{q=0}^n \binom{2n}{2q} \rho^q \mathbf{M}_{2q}(\text{H}) \mathbf{M}_{2n-2q}(\text{B}). \quad (4.77)$$

Le κ_N de B+H peut s'obtenir en utilisant la formule (4.77) pour $n=4$, mais il est plus aisé de reprendre la formule (A.19) qui s'écrit

$$\kappa(\text{H+B}) = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{2} + \sigma^2\right)^2} \left(3\sigma^4 + 3a^2\sigma^2 + 3\frac{a^4}{8}\right) \quad (4.78)$$

ce qui conduit après simplification, en introduisant $\rho = \frac{a^2}{2\sigma^2}$, à

$$\kappa(\text{H+B}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho^2 + 4\rho + 2}{(1+\rho)^2} \quad \text{et} \quad \kappa_N(\text{H+B}) = -\frac{3\rho^2}{2(1+\rho)^2}. \quad (4.79)$$

Ces résultats peuvent être synthétisés comme suit, en incluant la densité normalisée de H+B introduite par la formule (4.74) :

Somme d'un signal source harmonique et d'un bruit gaussien - Synthèse :

$$f_\rho(t) = \sqrt{\frac{\rho}{\pi^3}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} e^{-\rho(t-y)^2} dy, \quad (4.80)$$

$$\sigma(\text{B+H}) = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sigma^2}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{E}(\text{B+H}) = 0 \quad \mathbf{CV}(\text{B+H}) \text{ n'est pas défini} \quad \boldsymbol{\gamma}(\text{B+H}) = 0, \quad (4.82)$$

$$\kappa_N(\text{H+B}) = -\frac{3\rho^2}{2(1+\rho)^2}. \quad (4.83)$$

Les expressions des moments d'ordre supérieur peuvent être obtenues à partir des relation (4.77), (4.35) et (4.58). Nous avons, en particulier, déterminé les expressions de $\mathbf{M}_6(\text{H+B})$ et $\mathbf{M}_8(\text{H+B})$ en fonction de ρ que nous utiliserons plus loin. Après simplification, ces expressions sont :

$$\mathbf{M}_6(\text{H+B}) = \frac{1}{(1+\rho)^3} \left[15 + 45\rho + \frac{45}{2}\rho^2 + \frac{5}{2}\rho^3 \right] \quad (4.84)$$

et

$$\mathbf{M}_8(\text{H+B}) = \frac{1}{(1+\rho)^4} \left[105 + 420\rho + 315\rho^2 + 70\rho^3 + \frac{35}{8}\rho^4 \right]. \quad (4.85)$$

4.4 Estimation du rapport signal sur bruit et détection

4.4.1 Utilisation du Kurtosis

Le premier moment défini et non nul de la VAR $H+B$, modélisant le signal $S(t) = H(t) + B(t)$ est son Kurtosis, $\kappa(H+B)$. La figure (4.5) présente la courbe du Kurtosis (non normalisé) en fonction du rapport RSB. La courbe établie d'après la formule (4.79) est tracée en rouge, la courbe tracée en bleu représente les valeurs de $\kappa(H+B)$ obtenues par une simulation d'un signal de 50 000 points répété 400 fois afin de moyennner les valeurs obtenues. Les deux courbes sont à peu près confondues. Sachant que le signal mesuré est la somme d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien et que la courbe ne dépend que de RSB, le κ observé permet ainsi d'estimer la valeur du rapport signal sur bruit.

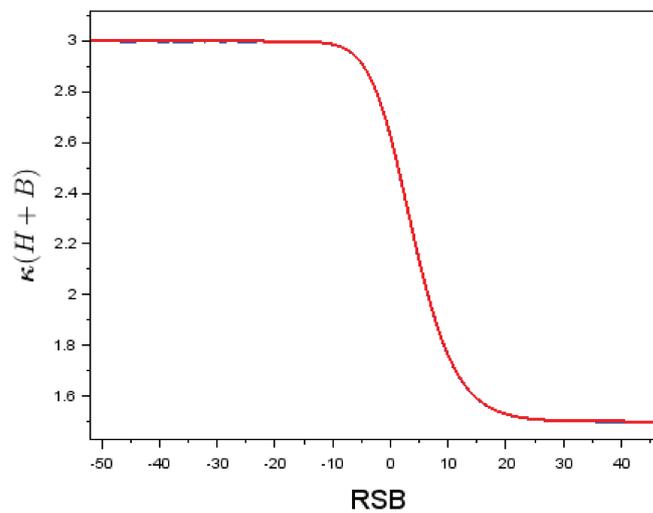


FIGURE 4.5 – Kurtosis de la somme d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien en fonction de RSB.

On constate, en particulier, que la courbe de $\kappa(H+B)$ possède deux asymptotes horizontales correspondant à $\kappa=3$ pour un bruit gaussien pur et à $\kappa=1,5$ pour un signal harmonique non bruité. Pour une précision de mesure fixée, permettant de considérer la courbe confondue avec son asymptote, la transition de la courbe d'une asymptote à l'autre s'effectue sur un intervalle de valeurs de RSB limité. Les bornes de cet intervalle (à une erreur fixée près) permettent donc de détecter l'apparition de bruit dans un signal harmonique pur mais aussi et surtout détecter l'existence d'un signal au sein du bruit gaussien. Le graphique (4.6) présente, en rouge les deux asymptotes correspondant à un bruit pur ou un signal harmonique pur. Le tracé, en bleu, de la courbe du Kurtosis, $\kappa(H+B) = \kappa_N(H+B) + 3$, où κ_N est obtenu par la formule (4.83), illustre la possibilité de détecter la présence d'un signal au sein du bruit.

Le graphique (4.7), présente un focus du graphique (4.6) sur un intervalle de valeurs de RSB centré autour de -15 dB. La précision du graphique permet une détection de la présence du signal au sein du bruit entre RSB=-17 dB et RSB=-15 dB.

Au delà du cas d'un bruit gaussien et d'un signal harmonique, pour lesquels nous avons quantifié les valeurs, Le suivi de la mesure du Kurtosis dans un environnement bruité va ainsi permettre de détecter l'apparition d'un signal au sein de ce bruit. Toutefois, les moments calculés à partir d'un échantillon mesuré ne sont pas les moments théoriques. On les qualifie de moments empiriques et leur utilisation soulève deux difficultés : le biais et la variance de ces moments.

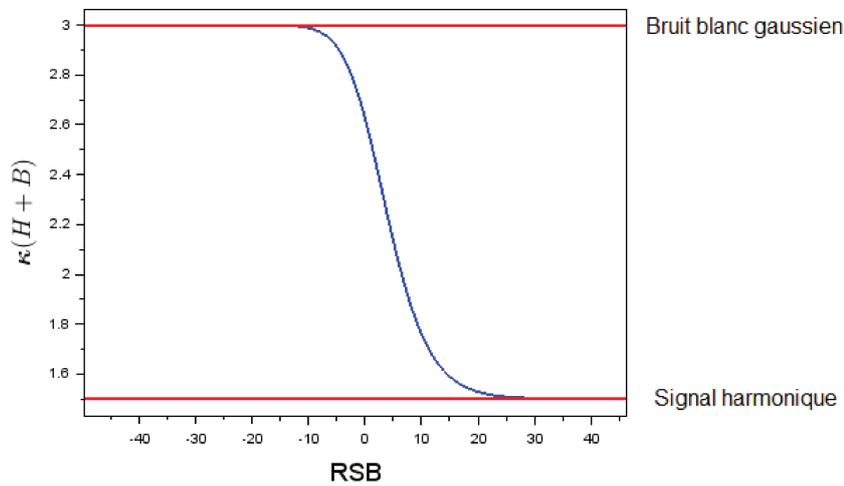


FIGURE 4.6 – Asymptotes de $\kappa(H+B)$.

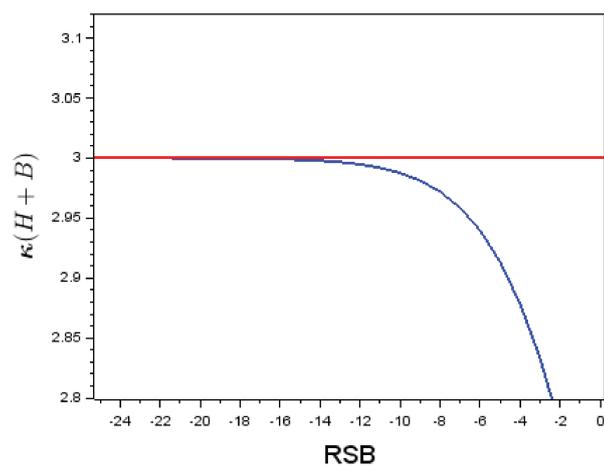


FIGURE 4.7 – Asymptotes de $\kappa(H+B)$ - focus.

4.4.2 Biais du Kurtosis

Le Kurtosis obtenu à partir d'un échantillon est d'autant plus proche de la valeur théorique attendue que la taille, n , de cet échantillon est importante. La figure (4.8) permet de constater que pour $n = 500$ les valeurs obtenues (tracées en bleu) sont éloignées de la valeur théorique attendue (tracée en rouge), alors que pour $n = 5000$, les valeurs mesurées (tracées en noir) en sont proches. La figure (4.9) permet de constater qu'un écart subsiste mais qu'il est faible.

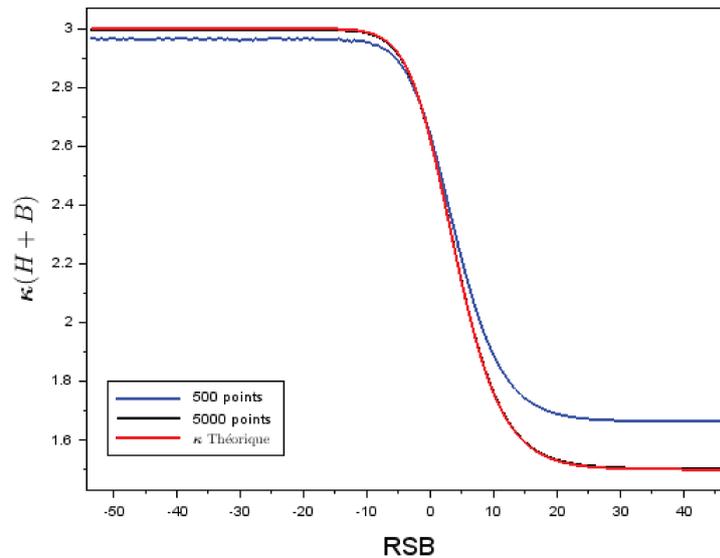


FIGURE 4.8 – Biais du Kurtosis empirique de H + B.

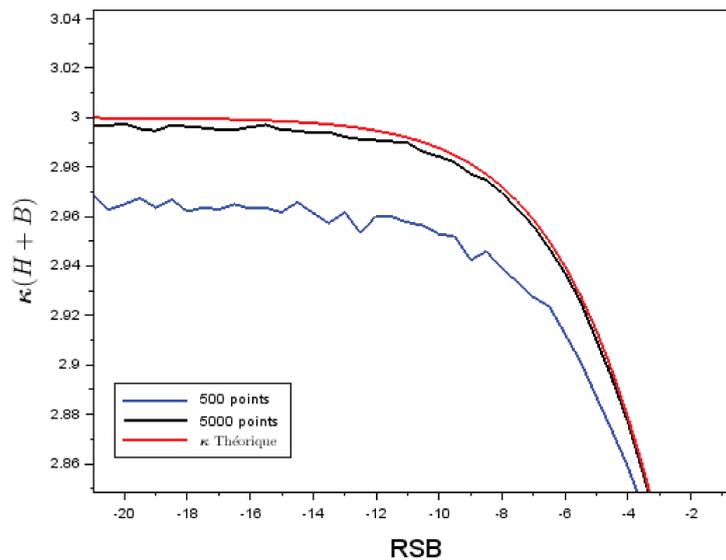


FIGURE 4.9 – Biais du kurtosis empirique de H + B - focus.

Dans une problématique de détection ce biais n'est toutefois pas pénalisant car ce n'est pas la valeur du Kurtosis qui nous intéresse, mais l'observation d'une variation de cette valeur par rapport à la valeur obtenue pour un bruit pur.

4.4.3 Variance du Kurtosis

Incertitude de la mesure de κ

Si le biais du Kurtosis est peu pénalisant dans une problématique de détection d'un signal, il en va autrement de sa variance. En effet, les courbes bleue et noire des figures (4.8) et (4.9) ont été construites en moyennant 8000 mesures de κ pour chaque point car les mesures diffèrent sensiblement entre elles en raison de la variance significative du Kurtosis empirique ainsi qu'on peut l'observer sur la figure (4.10). Cette figure montre les variations observées sur 5000 mesures simulées du Kurtosis de H+B, pour RSB = -30 dB et une taille d'échantillon de 500 en bleu, de 5000 en vert. La valeur théorique attendue du Kurtosis, $\kappa = 3$ étant indiquée en rouge.

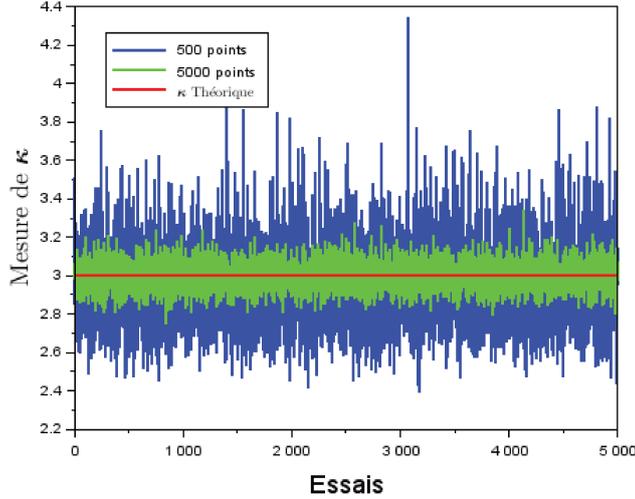


FIGURE 4.10 – Variabilité des mesures du Kurtosis empirique.

Intervalle de confiance asymptotiques

L'incertitude sur la mesure de Kurtosis empirique ne permet pas d'exploiter le seuil de détection, tel que présenté au paragraphe 4.4.1. Cette incertitude peut être toutefois être quantifiée par l'écart-type de κ empirique. En effet, lorsqu'on considère une VAR X, la moyenne empirique, correspondant à la moyenne observée \bar{X}_n d'un échantillon composé de n réalisations de cette variable est un estimateur convergent et sans biais de $E(X)$. On sait de plus, d'après le théorème central limite, que $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma(X)}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On dit alors, qu'asymptotiquement, \bar{X}_n suit la loi normale $\mathcal{N}\left(E(X), \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right)$ et un l'intervalle de confiance asymptotique pour $E(X)$ est de la forme

$$\left[\bar{X}_n - t_\alpha \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \right], \quad (4.86)$$

où α est le risque, t_α est défini par $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Le théorème de Slutsky, complète ce résultat en garantissant que, asymptotiquement, $\sigma(X)$ peut être remplacé par l'écart-type empirique S_n déduit de l'échantillon, ce qui permet d'utiliser des intervalles de la forme

$$\left[\bar{X}_n - t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]. \quad (4.87)$$

Remarque :

En utilisant un échantillon de n occurrences d'une VAR suivant une loi d'écart-type σ , il faut distinguer l'écart-type empirique S_n de l'écart-type mesuré σ_e . S_n est un estimateur de σ se déduisant de σ_e par $S_n = \sigma_e \sqrt{n}$.

Ainsi, pour une valeur de RSB fixée, les valeurs du Kurtosis mesurées pour chaque échantillon, κ_i , vont se répartir autour de leur moyenne μ_i selon une loi normale. En notant σ_i l'écart-type mesuré, on obtient ainsi qu'environ 68% des valeurs seront situées dans l'intervalle $[\mu_i - \sigma_i; \mu_i + \sigma_i]$, 95% des valeurs seront situées dans l'intervalle $[\mu_i - 2\sigma_i; \mu_i + 2\sigma_i]$ et 99% des valeurs seront situées dans l'intervalle $[\mu_i - 3\sigma_i; \mu_i + 3\sigma_i]$.

Représentation de la dispersion des mesures du Kurtosis

Les figures (4.11) et (4.12) présentent la courbe théorique de $\kappa(H + B)$ en fonction de RSB, tracée en rouge, ainsi que les courbes obtenues en augmentant et diminuant d'un écart-type mesuré (moyenné) cette courbe théorique. Cette représentation permet de visualiser la dispersion des valeurs et comment cette dispersion dépend de RSB ainsi que du nombre de mesures.

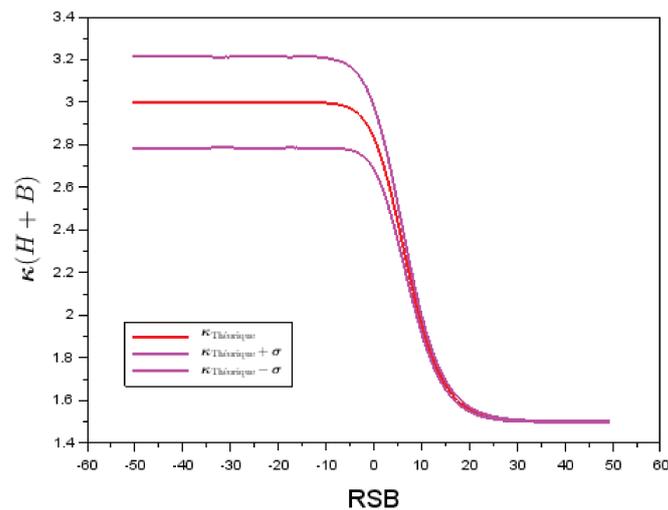


FIGURE 4.11 – Dispersion des valeurs du Kurtosis empirique - échantillon de 500 points.

Une manière de quantifier la capacité à détecter la présence d'un signal utile au sein du bruit, compte-tenu de la dispersion des valeurs, est illustrée par la figure (4.13). Compte tenu de cette dispersion des valeurs la distinction entre la courbe et son asymptote, que nous avons observée sur la figure (4.7) dès -15 dB ne s'avère plus possible. En revanche, l'intersection de l'asymptote $\kappa = 3$ avec la courbe de $\kappa_i + \sigma_i$ qui est matérialisée par les segments verts est un indicateur exploitable. Connaissant l'espérance $E(B)$ du bruit pur, l'intersection correspond à un rapport signal sur bruit pour lequel 84% des valeurs mesurées de κ seront situées en dessous de $E(B)$. La valeur de ce dernier pourcentage n'est pas importante en soi et nous verrons au paragraphe 4.4.6 comment procéder en pratique à la détection du signal sur une fenêtre glissante. Ce seuil va en fait nous servir pour comparer différents moments dans la suite de ce chapitre. Il nous indique ici une valeur du seuil de référence, pour 5 000 points, valant $RSB_s = -3,1$ dB.

L'utilisation du Kurtosis pour la détection d'un signal dans un environnement bruité demande ainsi, a priori, de disposer d'un grand nombre de points pour être utilisée avec profit. Elle nous a toutefois permis de poser le principe d'une méthode de détection par les moments, que nous allons continuer d'explorer.

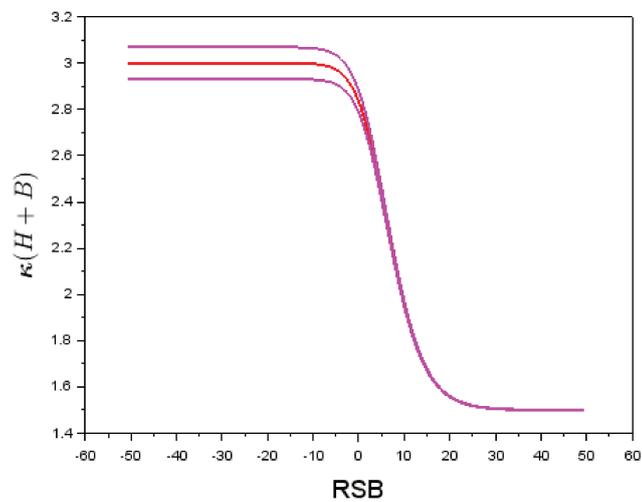


FIGURE 4.12 – Dispersion des valeurs du Kurtosis empirique - échantillon de 5000 points.

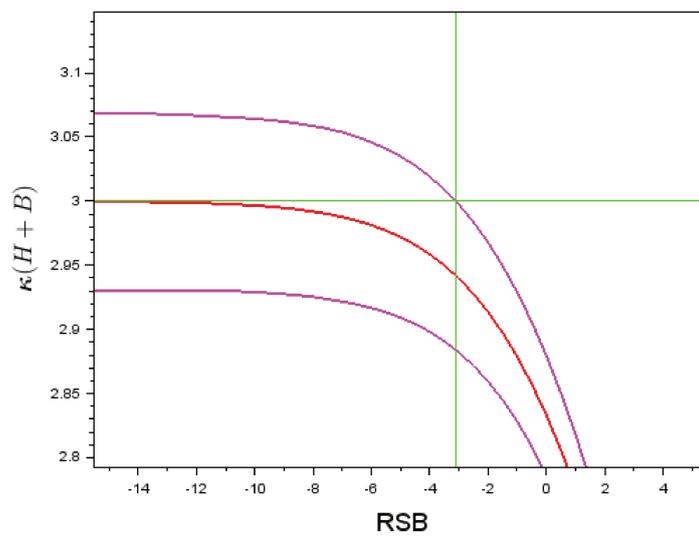


FIGURE 4.13 – Détection du signal source bruité à partir du Kurtosis empirique d'un échantillon de 5000 points.

4.4.4 Utilisation de moments d'ordre supérieur

Moments M_6 et M_8

De même que nous l'avons fait au paragraphe précédent pour le *Kurtosis*, nous pouvons tracer les moments $M_6(H+B)$ et $M_8(H+B)$ de la VAR $H+B$. La figure (4.14) présente ainsi les courbes de $M_6(H+B)$ et $M_8(H+B)$ en fonction du rapport RSB . Les courbes établies d'après les formules (4.84) et (4.85) sont représentées en rouge, celles obtenues par simulation, de même que pour $\kappa(H+B)$, figurent en bleu et sont très proches des courbes rouges. On constate que les courbes de $M_6(H+B)$ et $M_8(H+B)$ sont similaires entre elles et à celle de $\kappa(H+B)$ (figure 4.5). Les asymptotes, tracées en vert, correspondent à $M_6(B) = 15$, $M_6(H) = \frac{5}{2}$, $M_8(B) = 105$ et $M_8(H) = \frac{35}{8}$.

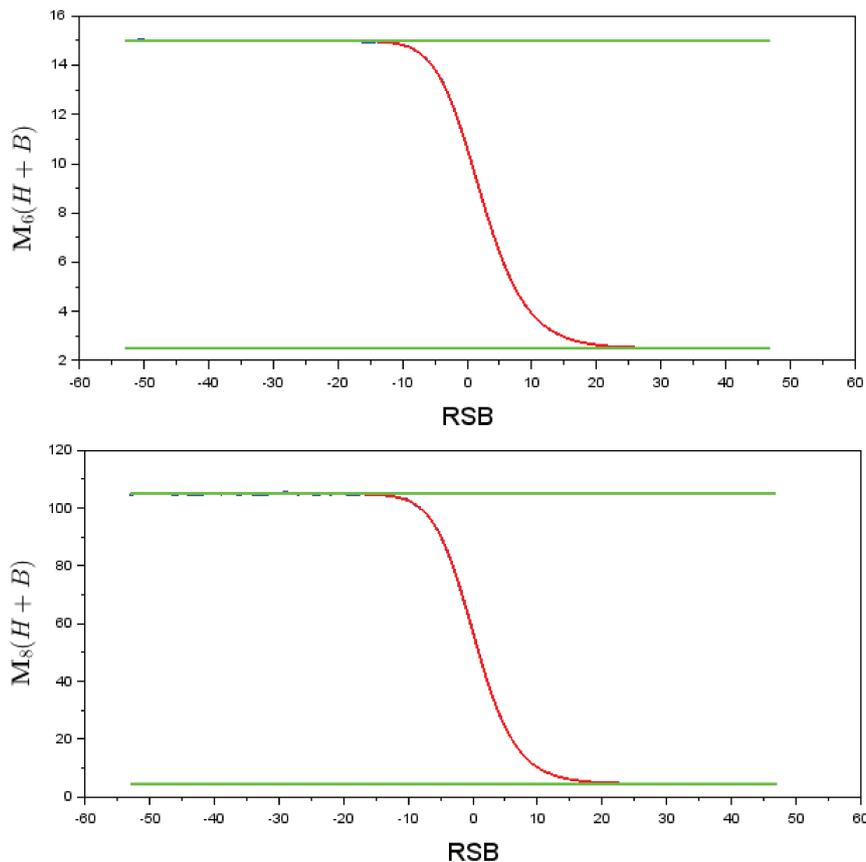


FIGURE 4.14 – Moments d'ordre 6 et 8 de la somme d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien en fonction de RSB .

L'estimation de RSB et la détection d'un signal au sein d'un bruit fort peuvent ainsi être envisagées avec les différents moments de $H+B$, de même qu'en utilisant le *Kurtosis*. Reste à comparer la qualité de l'information fournie par l'étude des différents moments.

Comparaison des moments

Afin de pouvoir comparer la capacité des moments à détecter la présence d'un signal, nous avons normalisé les différents moments de manière à ramener leur variation en ordonnée sur une échelle de variation allant de 0 pour un signal harmonique pur à 1 pour un bruit gaussien. La figure (4.15) présente sur cette échelle commune les moments d'ordre 4, 8, 12, 26 et 50 de $H+B$ en fonction de RSB . Les moments d'ordre supérieur à 8 ont été calculés à partir des formules (4.77), (4.58) et (4.35) sans expliciter leurs expression en fonction de RSB .

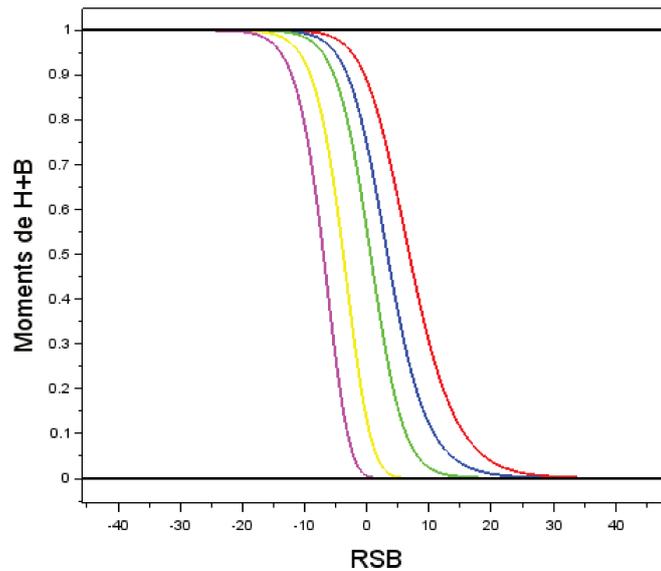


FIGURE 4.15 – Comparaison des moments de H + B en fonction de RSB - κ (rouge), M_8 (bleu), M_{12} (vert), M_{26} (jaune), M_{50} (magenta).

On constate que le seuil de détection du signal au sein du bruit est d'autant meilleur que l'ordre du moment est élevé. La figure (4.16) présente un focus de la figure (4.16) centré sur RSB=-16 dB et présentant les différentes courbes à proximité de l'asymptote horizontale d'ordonnée 1, correspondant à un bruit pur. En observant ainsi plus précisément la position des courbes on constate que, pour le moment d'ordre 50, le signal est détectable au sein du bruit pour une capacité de détection approchant RSB=-25 dB.

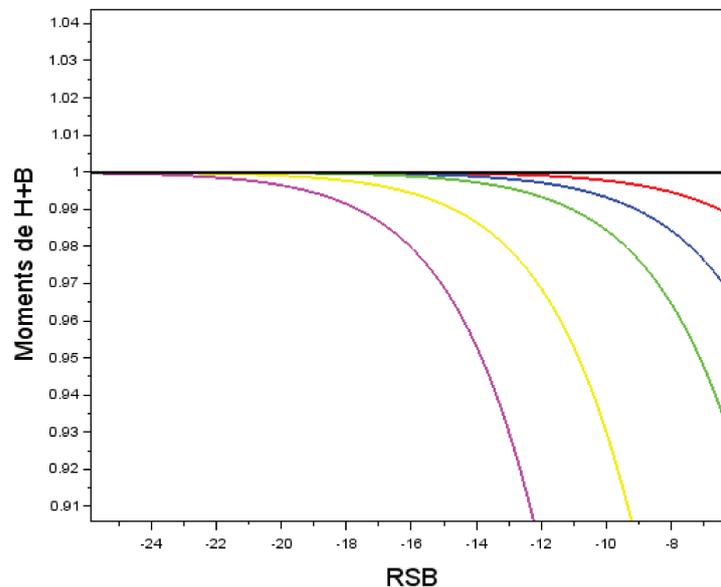


FIGURE 4.16 – Comparaison des moments de H + B en fonction de RSB - focus - κ (rouge), M_8 (bleu), M_{12} (vert), M_{26} (jaune), M_{50} (magenta).

Un moment d'ordre aussi élevé que 50 n'est pas exploitable mais illustre le potentiel des moments d'ordre élevé pour la détection d'un signal dans un environnement très fortement bruité. Nous allons toutefois être confrontés à un obstacle majeur. En effet, les résultats précédents sont établis à partir de moments théoriques dont nous connaissons les expressions, alors qu'un signal enregistré constitue un échantillon de réalisations d'une VAR et la mesure des moments de cette échantillon fournit seulement des moments empiriques. La convergence lente de ces moments

empiriques vers les moments théoriques amène une perte de précision mais, surtout, ainsi que nous avons pu le constater en étudiant le **Kurtosis** (paragraphe 4.4.1), les variations des mesures de ces moments empiriques autour de leur espérance est importante et dépend de la taille de l'échantillon considéré. Nous allons donc étudier de plus près la variance des moments empiriques.

4.4.5 Variance des moments empiriques

Moments empiriques

Les deux difficultés déjà évoquées lors de l'utilisation des moments empiriques sont l'introduction d'un biais et la variance des mesures :

- Le biais introduit par la variance empirique d'un échantillon de taille n est connu. La variance estimée d'une population s'obtient à partir de la variance empirique par l'introduction d'un facteur $\frac{n}{n+1}$. Dans le cas général le biais des moments d'ordre supérieur, en revanche, n'est connu qu'asymptotiquement ainsi que nous l'évoquerons au prochain paragraphe. Le biais n'a toutefois pas d'incidence dans une problématique de détection car l'imprécision générée est négligeable dès lors que le nombre d'échantillons n'est pas très petit.
- La variance des moments s'avère, elle, en revanche, plus pénalisante. Elle croît, en général très vite, avec l'ordre des moments, ce qui implique d'utiliser des échantillons de grande taille afin d'obtenir des résultats fiables pour estimer des moments d'ordre élevé.

Nous allons ainsi nous intéresser plus particulièrement aux premiers moments centrés, le Skewness (ordre 3) et le Kurtosis (ordre 4), ainsi qu'au **coefficient de variation** (rapport de l'espérance sur l'écart-type) dont le calcul ne fait intervenir que l'ordre 2. La moindre variance du **coefficient de variation** rend son utilisation particulièrement intéressante. Comme, toutefois, il ne peut être défini que pour un signal d'espérance non nulle, nous allons également travailler avec la valeur absolue du signal pour établir certains résultats.

Croissance de la variance avec l'ordre des moments

L'approche théorique de la variance de moments empiriques est très limitée. Nous allons l'évoquer rapidement dans ce paragraphe avant de procéder par des simulations. On dispose d'estimations de la variance des moments empiriques centrés, mais il n'y a pas de résultats généraux établis pour la variance des moments empiriques centrés réduits. Pour une variable gaussienne, les estimations des moments centrés font apparaître une croissance exponentielle de la variance de ces moments avec l'ordre. Bien que l'étude de la variance des moments réduits ne puisse être qu'expérimentale, cette tendance est confirmée par les tests que nous avons effectués.

Le biais introduit par la variance empirique est un résultat classique : $V_{\text{estimée}} = \frac{n}{n-1} V_{\text{empirique}}$. La variance de la variance estimée est également connue [148] :

$$V(V_{\text{estimée}}) = \frac{1}{n(n-1)} [(n-1)\mu_4 - (n-3)\mu_2^2] \quad \text{où } \mu_k = E\left([X - E(X)]^k\right). \quad (4.88)$$

Nous ne disposons pas de résultats généraux pour déterminer le biais introduit par la variance des moments empiriques d'ordre supérieur à 2, mais nous pouvons toutefois nous appuyer sur des résultats asymptotiques. En particulier, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{n} \frac{\mu_k^e - \mu_k}{\sqrt{k^2 \mu_{k-1} \mu_2 + 2k \mu_{k-1} \mu_{k+1} + \mu_{2k} - \mu_k^2}} \rightarrow \mathcal{N}(0; 1), \quad (4.89)$$

qui implique que $\mu_k^e \rightarrow \mu_k$ et que

$$\mathbf{V}(\mathbf{V}_{empirique}) \rightarrow \mathbf{V}_k^\ell = \frac{k^2 \mu_{k-1} \mu_2 + 2k \mu_{k-1} \mu_{k+1} + \mu_{2k} - \mu_k^2}{n}. \quad (4.90)$$

La formule (4.90) s'avère peu pratique à exploiter. Elle garantit toutefois la décroissance de $\mathbf{V}(\mathbf{V}_{empirique})$ en fonction de n et sa limite nulle lorsque n tend vers l'infini. Par ailleurs, bien que dans le cas général la formule (4.90) ne permet pas de conclure sur le comportement de $\mathbf{V}(\mathbf{V}_{empirique})$ en fonction de l'ordre k , nous l'avons appliquée à une VAR gaussienne. On constate dans ce cas une croissance exponentielle en fonction de k , proche d'une proportionnalité à $e^{3,25k}$. La figure (4.17) présente la variation de \mathbf{V}_k^ℓ en utilisant une échelle logarithmique en ordonnée. Cette quantité croît rapidement avec l'ordre du moment considéré ainsi qu'on peut le constater sur les graphiques (4.17) et (4.18) qui présentent $\log_{10}(\mathbf{V}_k^\ell)$ et $\log_{10}\left(\frac{\mathbf{V}_k^\ell}{\mu_k}\right)$

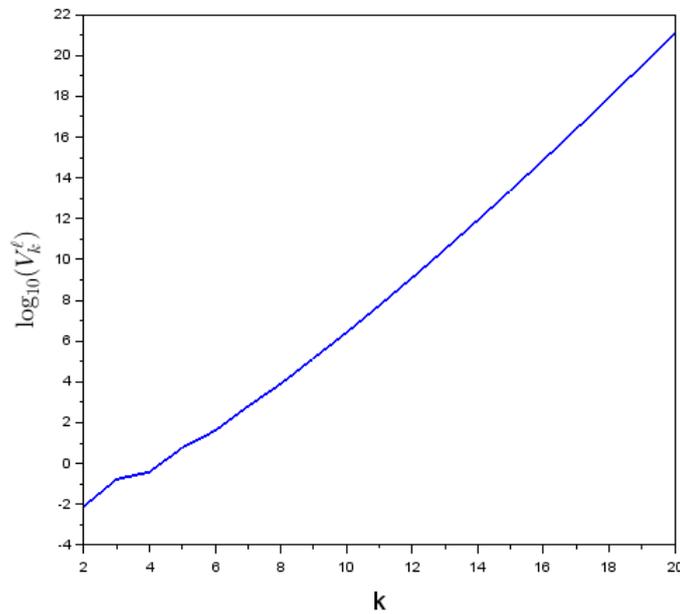


FIGURE 4.17 – Variance des moments d'un bruit gaussien en fonction de l'ordre k de ces moments.

Les valeurs prises par les moments étant également croissantes, il est en fait préférable de s'intéresser à l'erreur statistique de mesure relative plutôt qu'absolue, indiquée par $\frac{\mathbf{V}_k^\ell}{\mu_k}$. Bien que cette croissance en fonction de l'ordre k des moments soit plus faible, elle reste néanmoins exponentielle, proche d'une proportionnalité à $e^{1,9k}$. La figure (4.18) présente la variation de $\frac{\mathbf{V}_k^\ell}{\mu_k}$ en utilisant une échelle logarithmique en ordonnée.

Cette augmentation rapide de la variance des moments estimés en fonction de leur ordre, implique que la taille des échantillons nécessaires à l'estimation des moments croît également très rapidement avec l'ordre de ces derniers et rend peu exploitables, en pratique, les moments d'ordre élevé, sauf à disposer d'acquisitions du signal de taille très élevée.

Comparaison des seuils de détection de référence

Nous avons introduit au paragraphe 4.4.3, à propos du Kurtosis, un seuil de détection de référence, établi à partir d'un fenêtrage de 5 000 points. Suivant le même principe que présenté sur la figure (4.13), la prise en compte combinée de la position des courbes des moments par rapport à

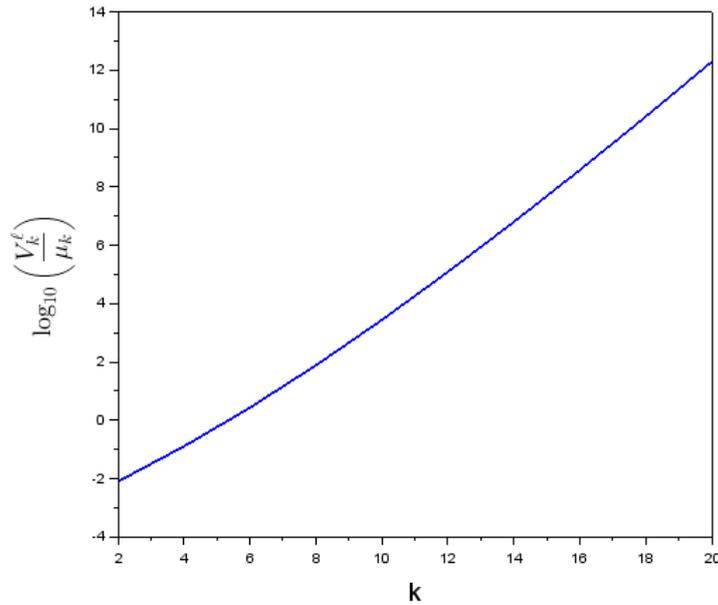


FIGURE 4.18 – Variance relative des moments d’un bruit gaussien en fonction de l’ordre k de ces moments.

leur asymptote et de la variance de ces moments conduit à établir le tableau (4.1).

TABLEAU 4.1 – Comparaison des seuils de référence de détection d’un signal harmonique au sein d’un bruit gaussien par différents moments.

Type de signal	Ordre du moment	Seuil de référence
H + B	κ	-5,9 dB
	M_6	-5,7 dB
	M_8	-5,2 dB

Ces seuils établissent une comparaison a priori sur la capacité des différents moments à détecter la présence d’un signal au sein d’un bruit. En pratique, pour évaluer les seuils effectifs et permettre cette détection, nous allons utiliser la méthode des moments décrite ci-après.

4.4.6 Détection par la méthode des moments

Utilisation du Kurtosis

Pour utiliser les propriétés des moments que nous avons développées précédemment, nous allons simuler un signal discret de la forme $S(n) = H(n) + B(n)$, composé d’un signal harmonique $H(n)$ et d’un bruit gaussien $B(n)$. Nous allons ensuite faire défiler une fenêtre glissante dont le contenu constitue un échantillon de la VAR $S = H + B$, puis nous allons calculer les moments de cet échantillon. En comparant les valeurs obtenues à celles correspondant au bruit pur, nous allons pouvoir repérer la présence d’un signal au sein du bruit.

La figure (4.19) présente le Kurtosis d’un signal S composé d’un bruit pur et d’un signal harmonique $H(t)$ qui a été superposé à ce bruit sur la période d’enregistrement allant de $T_i = 10000$ à $T_i = 20000$. La fréquence de $H(t)$ est de 100 Hz et $r_e = 50$, ces paramètres n’ayant pas d’influence, dès lors que r_e est élevé. $RSB = 0$ dB et la taille de la fenêtre glissante est de 5 000 points. Les valeurs du Kurtosis obtenues pour chaque position de la fenêtre glissante sont tracées en bleu, la moyenne $E(B)$ du signal correspondant au bruit pur est tracée en vert et elle est encadrée par les tracés, en

rouge, de $E(B) - 3\sigma(B)$ et $E(B) + 3\sigma(B)$. La bande entre les droites horizontales rouge matérialise ainsi une zone dans laquelle le tracé du bruit pur doit, très probablement se situer (la probabilité est d'environ 99% pour une valeur isolée et est d'autant plus faible que la fenêtre est large); nous appellerons cette bande "limite des 3σ ". On constate que l'intervalle du signal pendant laquelle la composante harmonique a été ajoutée correspond à des valeurs de $\kappa(S)$ sortant nettement de la limite des 3σ et indiquant ainsi la présence d'un signal utile au sein du bruit.

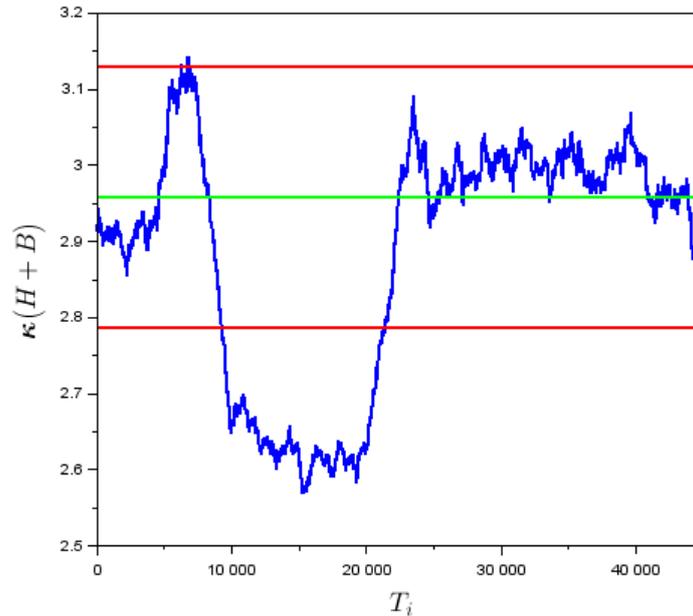


FIGURE 4.19 – Kurtosis de H + B obtenu par fenêtre glissante de 5 000 points pour RSB = 0 dB.

La capacité à discriminer la présence d'un signal utile au sein du bruit en utilisant le **Kurtosis** dépend de la taille de la fenêtre utilisée. Par exemple une fenêtre de 500 points permet une détection à 3 dB, une fenêtre de 5 000 points une détection à -3 dB, une fenêtre de 50 000 points une détection à -7 dB. Ces valeurs n'ont cependant du sens que si les signaux recherchés ont une longueur plus élevée que celle de la fenêtre. Une fenêtre large permettra ainsi de mieux détecter des signaux apparaissant sur une période de discrétisation importante dans un bruit élevé mais ne capturera pas des signaux brefs, y compris dans un bruit modéré.

Remarques :

- Nous avons choisi pour les graphiques présentant la détection du signal utile, de graduer les abscisses en indices des points de discrétisation et non en temps, afin de mieux faire apparaître l'influence de la taille de la fenêtre glissante.
- La détection du signal débute dès que la fenêtre glissante commence à recouvrir l'intervalle pendant lequel la composante harmonique a été ajoutée. Sur la figure (4.19) cela concerne ainsi les points indicés de 5 000 à 25 000. On constate que la valeur de κ , initialement proche de 3 correspondant au Kurtosis d'un bruit pur (cf. 4.11), est sensible à la variation forte des caractéristiques du signal se produisant pendant le recouvrement avant de tendre vers la valeur 2,5 correspondant à $\kappa(H + B)$ pour RSB = 0 (cf. 4.5).
- Rappelons ici que les moments centrés réduits d'un signal harmonique ne dépendent pas de la fréquence de ce signal et que ceux de de la somme d'un bruit et d'un signal d'espérance nulle ne dépendent que de RSB. Les résultats énoncés ici sont ainsi transposables directement aux signaux AM-FM.

Comparaison des moments

Nous avons vu que d'une part la capacité théorique de détection d'un signal augmente avec l'ordre théorique des moments utilisés (4.16) mais que, d'autre part, cette capacité reposait en pratique sur l'estimation des moments empiriques d'un échantillon dont la variance pénalise la détection (4.13). Pour faire la part de ces deux tendances, nous avons calculé les moments κ , \mathbf{M}_6 et \mathbf{M}_8 du même signal simulé que celui de la figure (4.19). Ils sont présentés sur les figures (4.20) et (4.21). Rappelons ici que seuls les moments pairs sont non nuls et donc exploitables pour un signal d'espérance nulle (cf. 4.31).

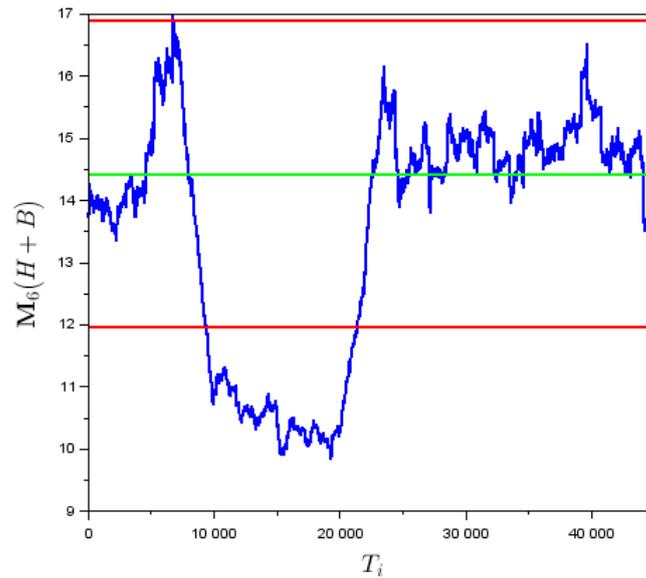


FIGURE 4.20 – Moment d'ordre 6 de $H+B$ obtenu par fenêtre glissante de 5 000 points pour $RSB = 0$ dB - comparaison des moments.

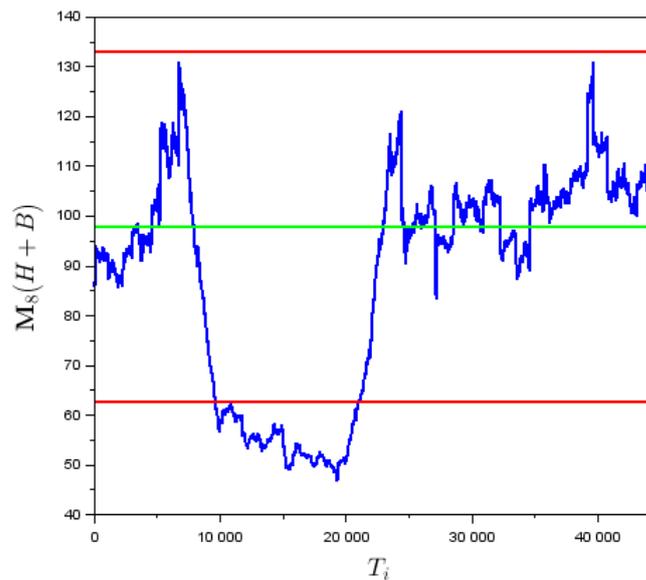


FIGURE 4.21 – Moment d'ordre 8 de $H+B$ obtenu par fenêtre glissante de 5 000 points pour $RSB = 0$ dB - comparaison des moments.

L'allure générale des graphiques (4.19), (4.20) et (4.21) est similaire, toutefois la zone des courbes des moments indiquant la présence d'un signal d'intérêt, située entre les points d'indice 10 000 et

20 000, se démarque d'autant moins de la limite des 3σ que l'ordre est élevé.

Pour une fenêtre de 10 000 points, la capacité du **Kurtosis** à discriminer le signal au sein du bruit, en fondant cette limite sur les 3σ , ne permet pas d'aller au-delà de $RSB = -3$ dB. L'utilisation de moments d'ordre supérieur diminue légèrement cette limite : -2 dB pour M_6 et -1 dB pour M_8 . Le graphique (4.22) présente $\kappa(H+B)$ avec les mêmes conditions de simulation que précédemment mais avec $RSB = -3$ dB.

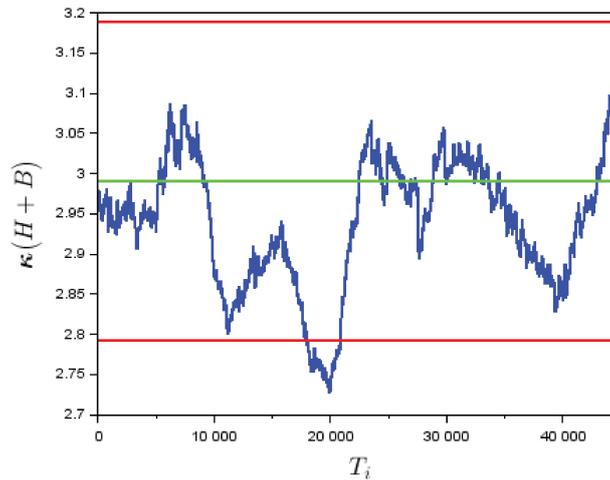


FIGURE 4.22 – Kurtosis de $H+B$ obtenu par fenêtre glissante de 5 000 points pour $RSB = -3$ dB.

En augmentant la taille de la fenêtre, on améliore le pouvoir de discrimination du signal. Cette discrimination reste toutefois d'autant meilleure que l'ordre du moment utilisé est petit. La figure (4.23) présente le Kurtosis et le moment d'ordre 6 du signal pour une fenêtre de 15 000 points et $RSB = -5$ dB qui constitue la limite de discrimination pour le Kurtosis et qui ne permet pas la détection du signal pour M_6 .

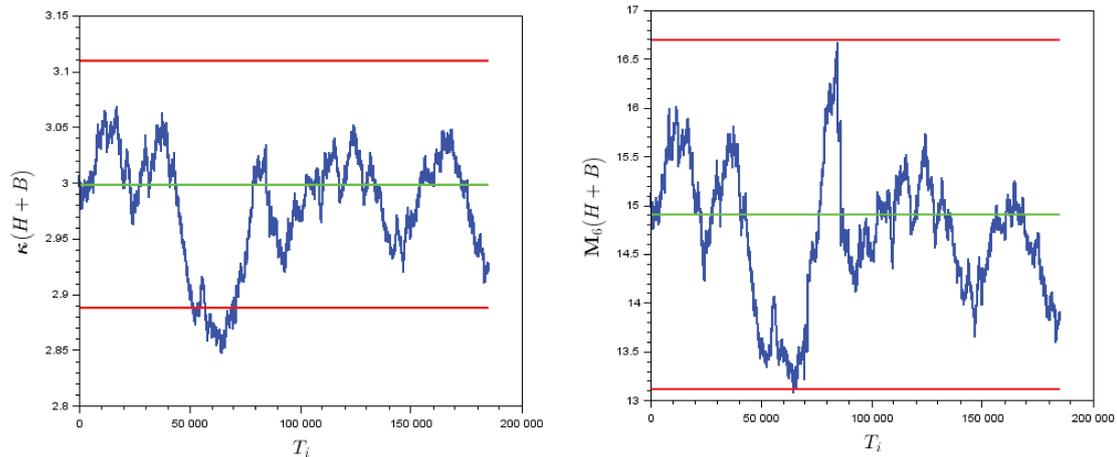


FIGURE 4.23 – Kurtosis et M_6 de $H+B$ obtenus par fenêtre glissante de 15 000 points pour $RSB = -5$ dB.

Nous avons établi le principe de la méthode des moments pour la détection d'un signal dans un environnement bruité. Cependant, son pouvoir de discrimination reste relativement faible, sauf à disposer d'enregistrements de grande taille. Nous avons également pu constater que la discrimination diminue lorsque l'ordre de moments augmente. Une première voie pour améliorer la méthode va consister à utiliser la valeur absolue du signal. En effet, l'espérance de la valeur absolue est non nulle, ce qui permet d'utiliser le **Skewness** et le **coefficient de variation** du signal.

4.4.7 Utilisation de la valeur absolue du signal

Nous avons vu au paragraphe 4.4.1 que le premier moment utilisable de $H + B$ est son **Kurtosis**, qui est d'ordre 4. En effet, en raison de l'espérance nulle de $H + B$, son coefficient de variation n'est pas défini et, par symétrie de la densité de $H + B$, son **Skewness** est identiquement nul et n'apporte pas d'information, ainsi que ses moments impairs d'ordre supérieur. Or, nous avons également constaté qu'afin de limiter la dispersion des valeurs des moments empiriques mesurés, il est intéressant d'utiliser des moments dont l'ordre est aussi faible que possible, ce qui nous amène ainsi à nous intéresser à la valeur absolue du signal, $|S| = |H + B|$, pour laquelle le **Skewness** et le **coefficient de variation** de $|H + B|$ sont définis et porteurs d'information.

Moments de $|H + B|$

Nous ne disposons pas d'expressions explicites des moments de $|H + B|$ en fonction de ceux de $|H|$ et de $|B|$. Il est avéré utile pour les modélisations effectuées de disposer d'expression approchées de fonctions générant des courbes approchées plutôt que de les construire par des simulations répétées de **VAR**.

La figure (4.24) présente le **coefficient de variation** de $|H + B|$, figuré en vert, établi par simulation à partir d'un échantillon de 50 000 points, répétée 400 fois afin de moyennner les résultats. En l'absence d'expression analytique et afin de simplifier les simulations suivantes, la courbe de **CV**($|H + B|$), a été approchée par la courbe de la fonction f_{CV} , dont l'expression est

$$f_{CV}(\rho) = \alpha_2 CV_{|B|} + \beta_2 CV_{|H|} \quad (4.91)$$

où $\beta_2 = 1 - \alpha_2$, $\alpha_2 = \left(\frac{1}{1 + r_2}\right)^{m_2}$, $r_2 = \lambda_2^{k_2(\rho - \rho_{2,0})}$, $m_2 = 0,511$, $\lambda_2 = 1,73$, $k_2 = 0,716$, $\rho_{2,0} = 1,95$,

où $CV_{|B|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1$ et $CV_{|H|} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}} - 1$ en application des relations (4.68) et (4.49) et où la variable ρ représente **RSB** pour la commodité des écritures.

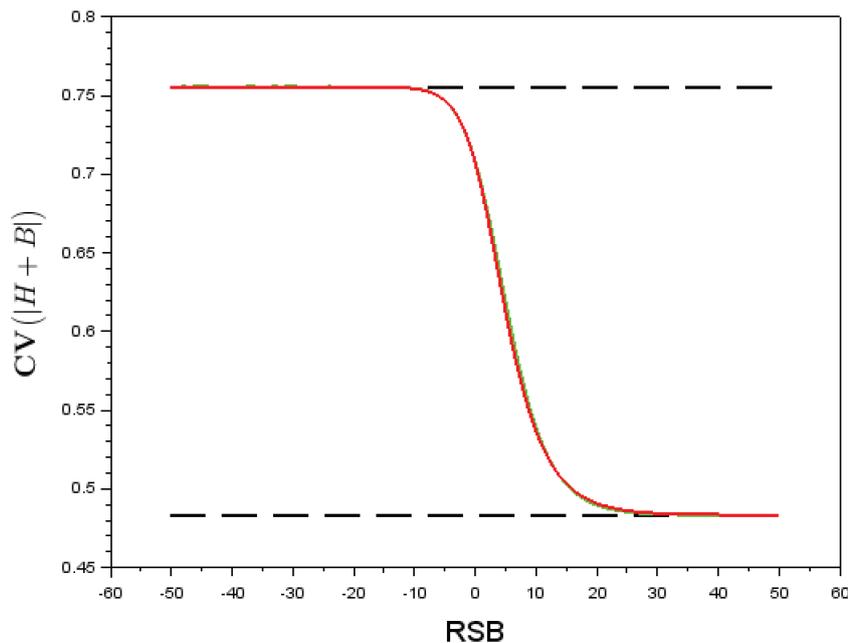


FIGURE 4.24 – Coefficient de variation de $|H + B|$ en fonction de RSB.

De même la figure (4.25) présente, tracés en vert, le **Skewness** et le **Kurtosis** de $|H + B|$ en fonction de **RSB**, établis par simulation à partir d'un échantillon de 50 000 points, répétée 2 000 fois pour γ

et 5 000 fois pour κ . Ces courbes sont approchées par les courbes, respectivement, des fonctions f_Y et f_κ , figurées en rouge, dont les expressions sont

$$f_Y(\rho) = \alpha_3 Y_{|B|} + \beta_3 Y_{|H|} \quad (4.92)$$

où $\beta_3 = 1 - \alpha_3$, $\alpha_3 = \left(\frac{1}{1+r_3}\right)^{m_3}$, $r_3 = \lambda_3^{k_3(\rho-\rho_{3,0})}$, $m_3 = 0,63$, $\lambda_3 = 1,51$, $k_3 = 0,73$, $\rho_{3,0} = 4,5$ et
 où $Y_{|B|} = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{\frac{3}{2}}}$ et $Y_{|H|} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{48-5\pi^2}{(\pi^2-8)^{3/2}}$ en application des relations (4.69) et (4.50).

et

$$f_\kappa(\rho) = \alpha_4 \kappa_{|B|} + \beta_4 \kappa_{|H|} \quad (4.93)$$

où $\beta_4 = 1 - \alpha_4$, $\alpha_4 = \left(\frac{1}{1+r_4}\right)^{m_4}$, $r_4 = \lambda_4^{k_4(\rho-\rho_{4,0})}$, $m_4 = 0,6$, $\lambda_4 = 1,63$, $k_4 = 0,716$, $\rho_{4,0} = 0,1$
 et où $\kappa_{|B|} = 8 \frac{\pi-3}{(\pi-2)^2} + 3$ et $\kappa_{|H|} = \frac{8}{3} \left[\frac{11}{\pi^2-8} - \frac{20}{(\pi^2-8)^2} \right] + \frac{3}{2}$ en application des relations (4.69) et (4.50).

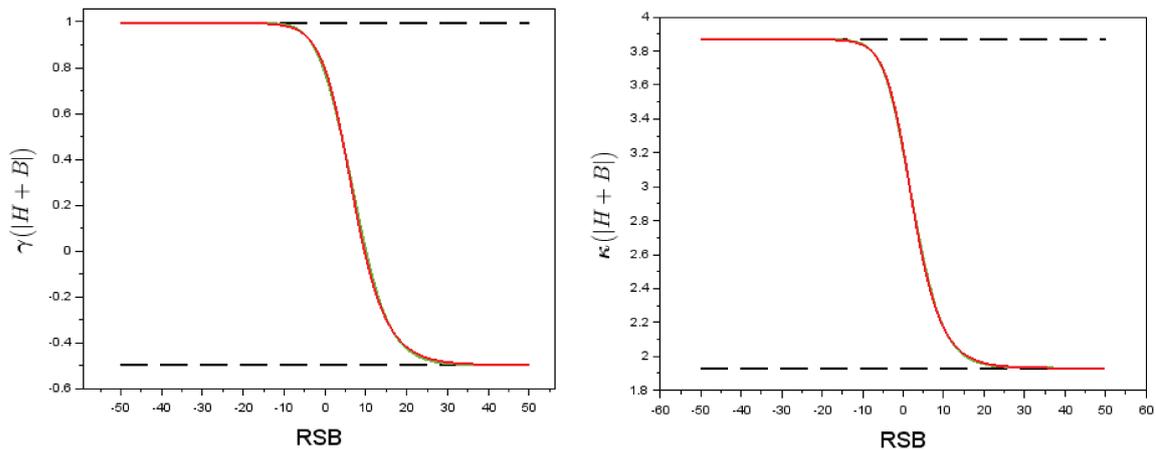


FIGURE 4.25 – Skewness et Kurtosis de $|H + B|$ en fonction de RSB.

En utilisant la méthode de détermination des seuils de référence (4.4.3), nous avons comparé la capacité de détection de moments du signal, en prenant en compte, ou non, la valeur absolue :

TABEAU 4.2 – Comparaison des seuils de référence de détection d'un signal harmonique au sein d'un bruit gaussien en utilisant la valeur absolue du signal.

Type de signal	Ordre du moment	Seuil de référence
H + B	κ	-5,9 dB
	M_6	-5,7 dB
	M_8	-5,2 dB
H + B	CV	-5,4 dB
	γ	-5,8 dB
	κ	-5,3 dB
	M_8	-4 dB

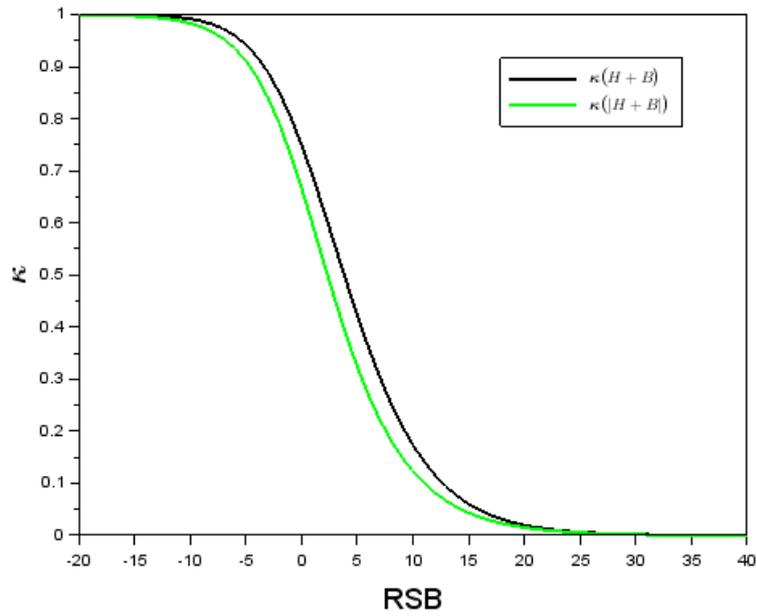


FIGURE 4.26 – Comparaison des kurtosis de $H+B$ et de $|H+B|$.

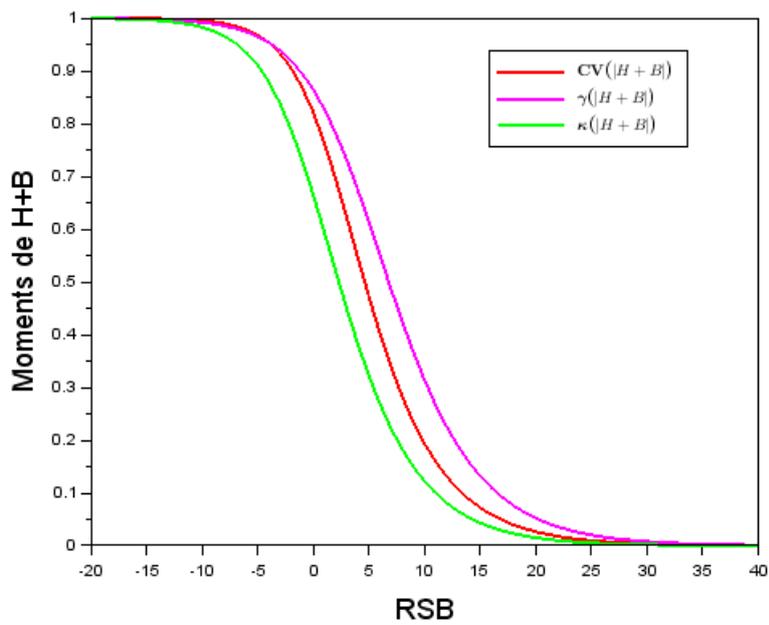


FIGURE 4.27 – Comparaison des moments de $|H+B|$.

Nous avons, jusqu'à présent, étudié dans ce chapitre les moments du signal et leur aptitude à la détection en environnement bruité. Nous allons maintenant étudier les caractéristiques statistiques de la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser et nous établirons son apport pour cette problématique de détection.

4.5 Comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser en présence d'un bruit gaussien

Ainsi que nous l'avons exposé au chapitre 1, l'opérateur de Teager-Kaiser s'applique de préférence à des signaux oscillants ou AM-FM. Cependant, quand bien même l'évolution de nombreuses grandeurs physiques peut être décrite par un tel modèle, en général leur mesure est bruitée. Or, en raison de sa nature différentielle, l'opérateur de Teager-Kaiser est sensible au bruit et son comportement est alors très différent de celui attendu, en particulier, en environnement très bruité. Très peu de travaux ont été reportés dans la littérature sur le comportement de l'opérateur Ψ vis-à-vis du bruit [79], [149], [150], [151] et ces travaux sont essentiellement basés sur le comportement de signaux bruités. Dans le but de clarifier le comportement de l'opérateur en présence de bruit, nous allons nous intéresser, dans un premier temps, à certaines caractéristiques statistiques de ${}^d\Psi$ appliqué, non pas à un signal bruité, mais à un bruit seul. Nous étudierons ensuite certaines conséquences du bruit sur les algorithmes de démodulation et aborderons ensuite l'intérêt de l'opérateur pour la détection par la méthode des moments, présentée au paragraphe 4.4.6.

4.5.1 Propriétés statistiques de ${}^d\Psi B$

Considérons un bruit gaussien $b(t)$. La sortie discrète de ${}^d\Psi$ appliqué à $b(n)$ est alors

$${}^d\Psi b_n = b_n^2 - b_{(n-1)} \cdot b_{(n+1)} \quad (4.94)$$

Nous allons considérer par la suite chaque valeur b_i prise par ce bruit comme une réalisation, indépendante des autres, d'une VAR B suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$, centrée et d'écart-type σ . La sortie de l'opérateur peut alors être considérée comme une VAR ${}^d\Psi B$, définie par

$${}^d\Psi B = B_2^2 - B_1 B_3, \quad (4.95)$$

où B_1 , B_2 et B_3 sont trois VAR indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Notons par ailleurs que les caractéristiques de ${}^h\Psi$ sont similaires à celles de ${}^d\Psi$ car les VAR ${}^h\Psi B$ et ${}^d\Psi B$ sont semblables (cf. 4.16). Nous avons préféré travailler avec ${}^d\Psi$ afin de disposer d'un référentiel de comparaisons plus simple.

Loi de ${}^d\Psi B$

Lorsqu'une VAR N suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, alors la VAR N^2 suit la loi du χ^2 à un degré de liberté, qui n'est autre que la loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ [152] dont la densité, représentée sur la figure (4.28), est donnée par

$$f_{N^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \cdot \quad (4.96)$$

Or, puisque la VAR B_2 suit $\mathcal{N}(0, \sigma)$, la VAR définie par son carré, B_2^2 , est semblable à N^2 avec un coefficient de proportionnalité $k = \sigma^2$, on en déduit donc, par la relation (4.16) que

$$f_{B_2^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.97)$$

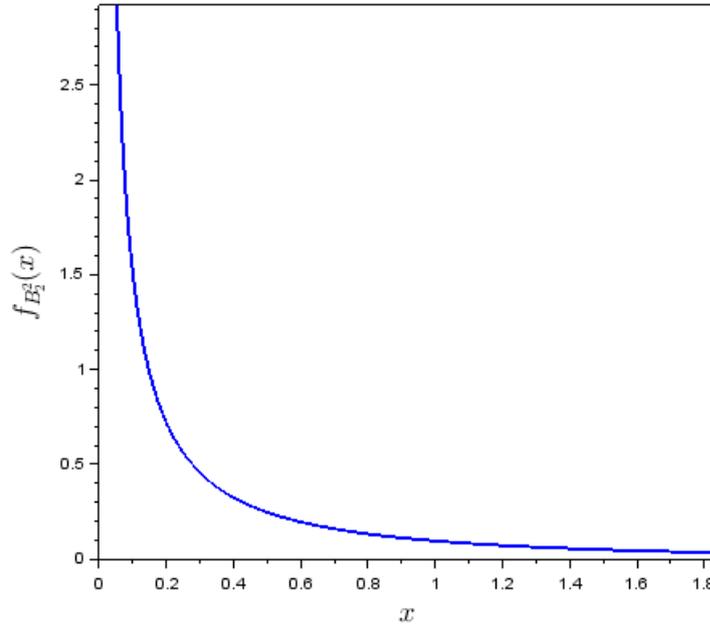


FIGURE 4.28 – Densité de la loi de B_2^2 pour $\sigma = 1$.

Par ailleurs, le produit de deux variables gaussiennes N_{σ_1} et N_{σ_2} , centrées, d'écart-types respectifs σ_1 et σ_2 , suit une loi de Bessel [153] dont la densité est

$$f_{N_{\sigma_1}N_{\sigma_2}}(x) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2} K_0\left(\frac{|x|}{\sigma_1\sigma_2}\right), \quad (4.98)$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et d'ordre 0. Cette fonction possède plusieurs expressions équivalentes [154] :

$$K_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t \cosh(x)} dx = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_0^{+\infty} \cos(t \sinh(x)) dx. \quad (4.99)$$

La loi de B_1B_3 suit donc la loi de Bessel de densité

$$f_{B_1B_3}(x) = \frac{1}{\pi\sigma^2} K_0\left(\frac{|x|}{\sigma^2}\right). \quad (4.100)$$

Cette densité est représentée sur la figure (4.29). Elle possède une asymptote verticale pour $x = 0$.

Par parité de la fonction $f_{B_1B_3}$, la **VAR** $-B_1B_3$ suit la même loi que B_1B_3 . Par conséquent, la densité de la loi de ${}^d\Psi B = B_2^2 - B_1B_3$ est le produit de convolution de $f_{B_2^2}$ et $f_{B_1B_3}$:

$$f_{{}^d\Psi B}(x) = f_{B_2^2}(x) * f_{B_1B_3}(x). \quad (4.101)$$

L'expression analytique de $f_{{}^d\Psi B}(x)$ est peu exploitable. La figure (4.30) représente cette densité pour $\sigma = 1$. On constate que la loi est asymétrique avec une queue de distribution étalée vers la droite.

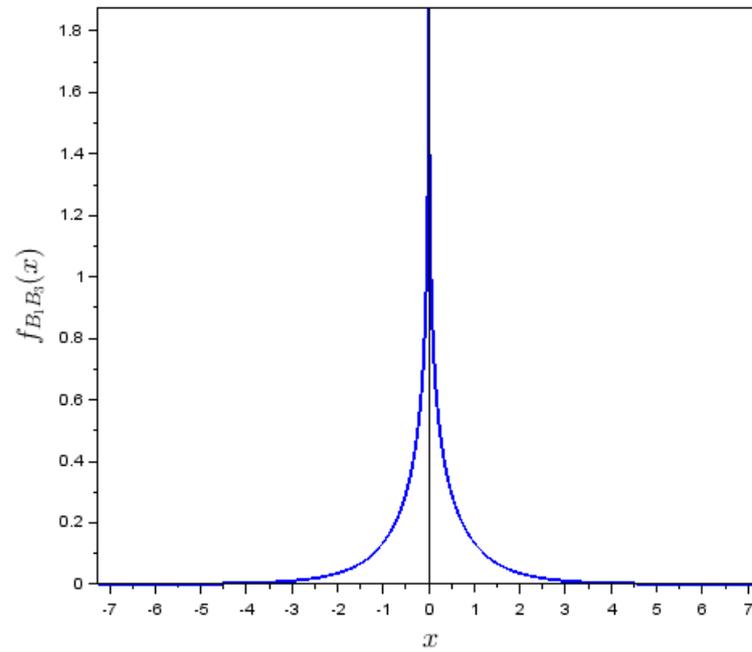


FIGURE 4.29 – Densité de la loi de $B_1 B_3$ pour $\sigma = 1$.

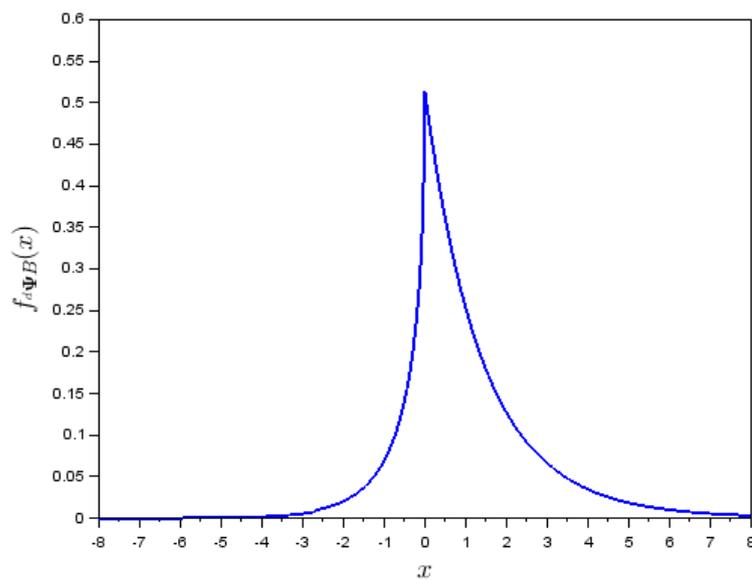


FIGURE 4.30 – Densité de la sortie de l'opérateur appliqué à un bruit gaussien pour $\sigma = 1$.

Remarque 1 :

La loi de ${}^d\Psi B$ possède des similarités avec une loi de type log-Laplace. La figure (4.31) présente, sur un même graphique, la loi de ${}^d\Psi B$, pour $\sigma = 1$ et celle d'une loi de log-Laplace asymétrique, à trois paramètres $\alpha = 2, 6, \beta = 10; \delta = 4$ [155], translatée de δ .

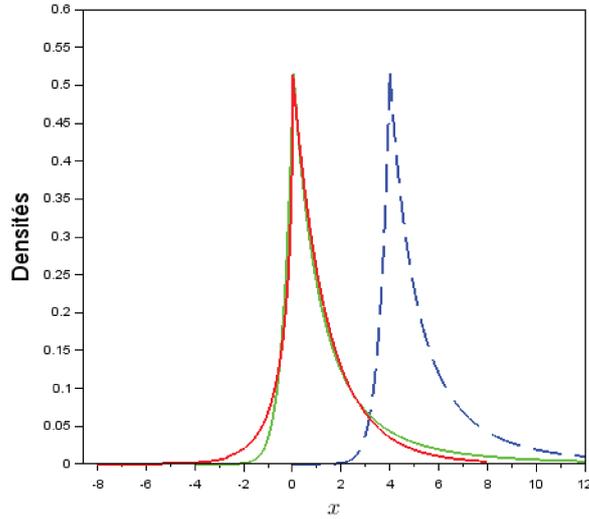


FIGURE 4.31 – Similarité de la loi de ${}^d\Psi B$ (en rouge) avec une loi log-Laplace asymétrique translatée.

Remarque 2 :

Du fait de l'asymétrie, il faut être attentif à l'interprétation des indicateurs de position de la distribution : moyenne, mode, médiane. La figure (4.32) présente, sur un même graphique, la densité de probabilités de ${}^d\Psi B$, ainsi, à titre de référence, qu'une courbe de Gauss, de mêmes moyenne et écart-type. La moyenne m_Ψ , la médiane med_Ψ et le mode mode_Ψ de ${}^d\Psi B$ sont également représentés sur la figure.

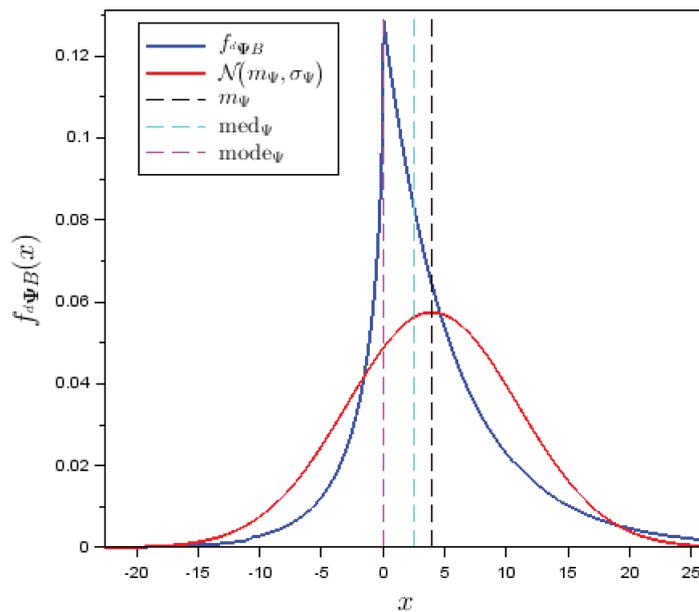


FIGURE 4.32 – Densité de ${}^d\Psi B$, pour $\sigma = 2$, comparée à une loi normale.

Remarque 3 :

Plus la variance du bruit augmente, plus l'asymétrie est prononcée, ainsi qu'on peut le constater

sur la figure (4.33).

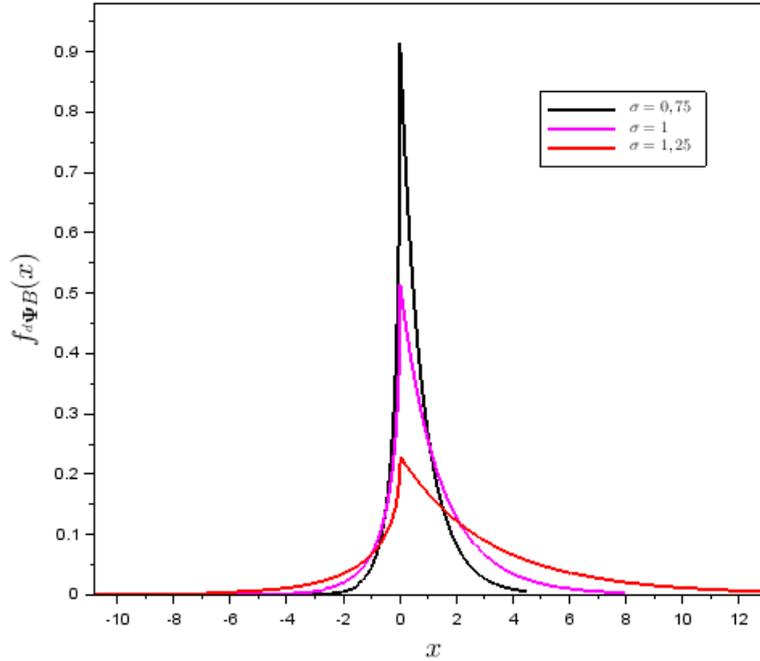


FIGURE 4.33 – Comparaison des densités de la sortie de l’opérateur appliqué à des bruits gaussien pour différents écarts-types.

Espérance de ${}^d\Psi_B$

En utilisant la formule (3.60) établie au paragraphe 3.4.1, appliquée à ${}^d\Psi$, donc pour $h = 1$, on obtient immédiatement :

$$\mathbf{E}({}^d\Psi_B) = \mathbf{V}(B) = \sigma^2. \quad (4.102)$$

Variance de ${}^d\Psi_B$

${}^d\Psi_B = B_2^2 - B_1B_3$ donc, par indépendance mutuelle de B_1 , B_2 et B_3 , on a

$$\mathbf{V}({}^d\Psi_B) = \mathbf{V}(B_2^2) + \mathbf{V}(B_1B_2) \quad (4.103)$$

B_2 suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma)$, donc la VAR $\frac{B_2}{\sigma_b}$ suit la loi $\frac{\mathcal{B}_2}{\sigma}$. Or le carré d’une VAR suivant la loi normale centrée réduite, suit la loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (cf. 4.96) dont la variance vaut 2. On a donc

$$\mathbf{V}\left(\frac{B_2^2}{\sigma^2}\right) = 2, \quad (4.104)$$

or, par les propriétés de la variance, $\mathbf{V}\left(\frac{B_2^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^4}\mathbf{V}(B_2^2)$, par conséquent

$$\mathbf{V}(B_2^2) = 2\sigma^4. \quad (4.105)$$

Par ailleurs, par la formule d’Huygens

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(B_1 B_3) &= \mathbf{E}[(B_1 B_3)^2] - (\mathbf{E}[B_1 B_3])^2 \\
 &= \mathbf{E}(B_1^2 B_2^2) - (\mathbf{E}[B_1] \mathbf{E}[B_2])^2 \\
 &= \mathbf{E}(B_1^2) \mathbf{E}(B_1^2) - 0^2 = \sigma^2 \sigma^2 = \sigma^4
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

En reportant (4.104) et (4.106) dans (4.103), on a donc $\mathbf{V}({}^d\Psi B) = 2\sigma^4 + \sigma^4 = 3\sigma^4$, d'où

$$\sigma({}^d\Psi B) = \sqrt{3}\sigma^2. \tag{4.107}$$

Coefficient de variation de ${}^d\Psi B$

On constate, à partir des relations (4.102) et (4.107), que l'écart-type et l'espérance mathématique de l'opérateur ${}^d\Psi$, dans le cas d'un bruit gaussien centré, sont proportionnelles. Le coefficient de variation de ${}^d\Psi B$ est donc constant et vaut

$$\mathbf{CV}({}^d\Psi B) = \frac{\sigma({}^d\Psi B)}{\mathbf{E}({}^d\Psi B)} = \sqrt{3}. \tag{4.108}$$

Skewness de ${}^d\Psi B$

En appliquant la formule (4.14) pour $n = 3$, nous avons

$$\Upsilon({}^d\Psi B) = \frac{1}{\sigma({}^d\Psi B)^3} \left[\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^3) - 3\mathbf{E}({}^d\Psi B)\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^2) + 2(\mathbf{E}[{}^d\Psi B])^3 \right] \tag{4.109}$$

Nous connaissons $\mathbf{E}[{}^d\Psi B] = \sigma^2$, $\sigma({}^d\Psi B) = \sqrt{3}\sigma^2$ et, par la formule de Huygens, nous avons

$$\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^2) = \mathbf{V}({}^d\Psi B) + (\mathbf{E}[{}^d\Psi B])^2 = 3\sigma^4 + \sigma^4 = 4\sigma^4, \tag{4.110}$$

d'où

$$\Upsilon({}^d\Psi B) = \frac{1}{3\sqrt{3}\sigma^6} \left[\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^3) - 10\sigma^6 \right]. \tag{4.111}$$

En notant $Z = B_1 B_3$ et $T = B_2^2$ pour simplifier les écritures, nous avons par ailleurs, par indépendance de Z et T :

$$\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^3) = \mathbf{E}([T - Z]^3) = \mathbf{E}(T^3) - 3\mathbf{E}(T^2)\mathbf{E}(Z) + 3\mathbf{E}(T)\mathbf{E}(Z^2) + \mathbf{E}(Z^3). \tag{4.112}$$

Par symétrie de la distribution de Z (4.100), nous avons $\mathbf{E}(Z^3) = \mathbf{E}(Z) = 0$, de plus, nous avons vu (cf. 4.106) que $\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(B_1^2 B_3^2) = \sigma^4$, et enfin, en utilisant le tableau (A.2), nous avons $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(B^2) = \sigma^2$ et $\mathbf{E}(T^3) = \mathbf{E}(B^6) = 15\sigma^6$,

par conséquent

$$\mathbf{E}([{}^d\Psi B]^3) = 15\sigma^6 + 3\sigma^2\sigma^4 = 18\sigma^6. \tag{4.113}$$

En reportant le résultat (4.113) dans (4.111), on obtient donc

$$\Upsilon({}^d\Psi B) = \frac{8}{3\sqrt{3}}. \tag{4.114}$$

Kurtosis de ${}^d\Psi_B$

En utilisant la relation (A.19), en conservant les notations $Z = B_1B_3$ et $T = B_2^2$ et en remarquant que, pour toute VAR X , $\sigma(-X) = \sigma(X)$ et $\kappa(-X) = \kappa(X)$, on a

$$\kappa({}^d\Psi_B) = \frac{[\sigma(T)]^4 \kappa(T) + 6[\sigma(T)]^2 [\sigma(Z)]^2 + [\sigma(Z)]^4 \kappa(Z)}{[(\sigma(T))^2 + (\sigma(Z))^2]^2} \quad (4.115)$$

Compte tenu de la relation (4.105) nous avons $\sigma(T) = \sqrt{2}\sigma^2$, compte tenu de la relation (4.106) nous avons $\sigma(Z) = \sigma^2$ et d'après le tableau (A.2) nous connaissons également $\kappa(T) = \kappa(B^2) = 15$, il nous reste donc à déterminer $\kappa(Z)$.

Par définition $\kappa(Z) = \frac{\mathbf{E}[(Z - \mathbf{E}(Z))^4]}{(\sigma(Z))^4}$, or $\mathbf{E}(Z) = 0$, par conséquent

$$\kappa(Z) = \frac{1}{(\sigma(Z))^4} \mathbf{E}(Z^4) = \frac{1}{\sigma^8} \mathbf{E}(B_1^4 B_3^4) = \frac{1}{\sigma^8} \mathbf{E}(B_1^4) \mathbf{E}(B_3^4) = \frac{[\mathbf{E}(B^4)]^2}{\sigma^8} \quad (4.116)$$

et puisque, d'après le tableau (A.2), $\mathbf{E}(B^4) = 3\sigma^4$, on obtient $\kappa(Z) = 9$. La relation (4.115) devient alors

$$\kappa({}^d\Psi_B) = \frac{4\sigma^8 \cdot 15 + 6 \cdot 2\sigma^4 \cdot \sigma^4 + \sigma^8 \cdot 9}{(2\sigma^4 + \sigma^4)^2} = 9. \quad (4.117)$$

Teager-Kaiser de la loi Normale - Synthèse :

$$f_{{}^d\Psi_B}(x) = f_{N_0^2}(x) * \frac{1}{\pi\sigma^2} K_0\left(\frac{|x|}{\sigma^2}\right), \quad (4.118)$$

$$\text{où } f_{N_0^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \cdot \quad (4.119)$$

$$\mathbf{E}({}^d\Psi_B) = \sigma^2, \quad \sigma({}^d\Psi_B) = \sqrt{3}\sigma^2, \quad \mathbf{CV}({}^d\Psi_B) = \sqrt{3}, \quad (4.120)$$

$$\Upsilon({}^d\Psi_B) = \frac{8}{3\sqrt{3}}, \quad \kappa({}^d\Psi_B) = 9. \quad (4.121)$$

Remarque :

On constate que le Kurtosis et le Skewness de ${}^d\Psi_B$ ne dépendent pas de la variance du bruit et vérifient bien l'inégalité de Pearson [156] :

$$\kappa(\Psi_\sigma) \geq \Upsilon^2(\Psi_\sigma) - 2. \quad (4.122)$$

Le coefficient de variation est également constant, indiquant ainsi que la dispersion relative des valeurs de ${}^d\Psi_B$ autour de leur moyenne est constante.

4.5.2 Démodulation et densités

Nous avons défini les opérateurs ${}^h\text{DESA}$ au paragraphe 3.3.2 où nous avons séparé le processus de démodulation en deux parties : en premier lieu l'action d'un opérateur et, en deuxième lieu, à partir de la sortie de cet opérateur, l'obtention des fréquence et amplitude instantanées approchées. Cette démarche va nous permettre de mieux caractériser l'action de l'opérateur en amont de l'utilisation de racines carrées ou de fonctions trigonométriques inverses dont les domaines de

définition sont restreints.

La construction des expressions exactes des densités des VAR associées à ces opérateurs est complexe et peu exploitable. De plus, leurs moments ne sont pas définis, ainsi que c'est généralement le cas des VAR obtenues par des quotients d'autres variables, telle la loi de Cauchy obtenue par le quotient de deux lois normales. Nous procéderons donc par simulation pour obtenir les lois et moments présentés dans ce paragraphe.

Opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$

L'opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$ a été défini par la formule (3.32). Les occurrences de la VAR ${}^h\mathbf{D}1a\mathbf{B}$ correspondant à la sortie de l'opérateur appliqué à un bruit gaussien $b(n)$, est ainsi obtenue par :

$${}^h\mathbf{D}1a\mathbf{B}_n = 1 - \frac{{}^h\Psi b'_n}{2{}^h\Psi b_n} \quad \text{où} \quad b'_n = b_n - b_{n-1}. \quad (4.123)$$

La figure (4.34) présente la densité $f_{{}^h\mathbf{D}1a\mathbf{B}}$ de la VAR ${}^h\mathbf{D}1a\mathbf{B}$. Cette VAR n'admet pas de moyenne et de Skewness, néanmoins sa médiane existe et vaut $\text{med}_{{}^h\mathbf{D}1a\mathbf{B}} \simeq 0,38$.

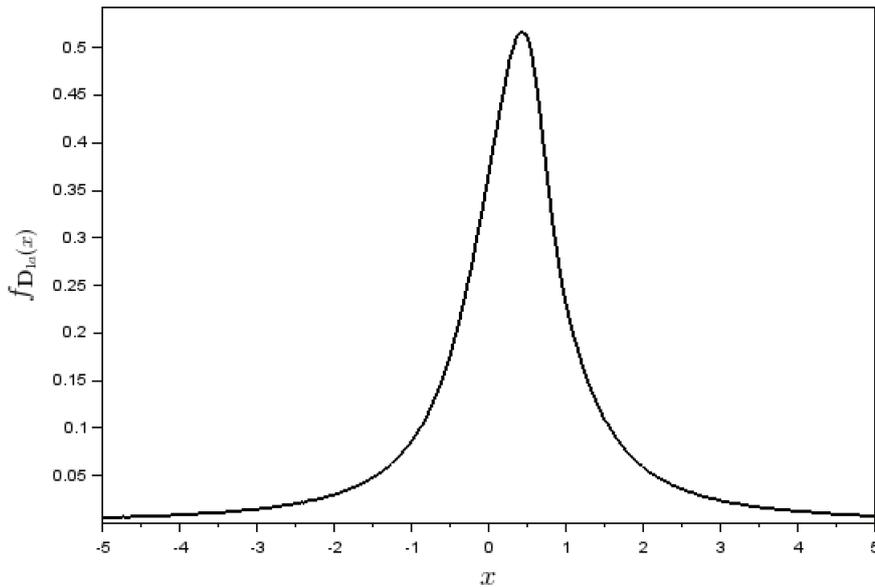


FIGURE 4.34 – Densités de la sortie de l'opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$ appliqué à un bruit gaussien.

Les caractéristiques de cette courbe ont deux conséquences sur la démodulation :

- L'opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$ permet d'obtenir les fréquence et amplitude démodulées d'un signal discret (x_n) par les formules (cf. 3.3.2) :

$$f_n = \frac{1}{2\pi h} \arccos({}^h\mathbf{D}1a x_n) \quad \text{et} \quad a_n = h \cdot \sqrt{\frac{{}^h\Psi x_n}{1 - ({}^h\mathbf{D}1a x_n)^2}}. \quad (4.124)$$

Il est ainsi nécessaire d'utiliser la fonction arc cosinus, or cette fonction n'est définie qu'entre -1 et 1. Lorsqu'un signal est bruité, une proportion des valeurs de sortie de l'opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$ ne sera pas comprise dans l'intervalle $[-1; 1]$ et ne pourra pas être interprétée. La dispersion des valeurs observées sur la figure (4.34) va influencer sur cette dispersion de manière significative, même pour des signaux faiblement bruités, en raison de la forme de la distribution d'un signal harmonique (4.4). Une forte proportion des valeurs est en effet proche de -1 ou de 1 et, donc, susceptible de sortir de l'intervalle $[-1; 1]$ sous l'effet d'une faible perturbation.

- La dissymétrie par rapport à 0 de la courbe de la figure (4.34), entraîne que la perturbation du signal par le bruit a une moyenne non nulle et, donc, qu'elle introduit un biais sur les valeurs exploitables, c'est-à-dire comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$.

La figure (4.35) présente la distribution de la sortie de l'opérateur ${}^h\mathbf{D}_1 a$ appliqué à un signal $s(t) = b(t) + h(t)$ où $b(t)$ est un bruit gaussien, $h(t)$ un signal harmonique, d'amplitude 1 et de fréquence 2 kHz. Le rapport d'échantillonnage vaut 8 et le rapport signal sur bruit vaut 20 dB. 1,9 % des valeurs de $f_{{}^h\mathbf{D}_1 a}$ sont inférieures à -1 et 15,2 % sont supérieures à 1. La moyenne des valeurs démodulables par la fonction arc cosinus est figurée par la ligne pointillée en rouge; la moyenne attendue pour un le signal non bruité est figurée par la ligne pointillée noire. Les valeurs du cosinus de la pulsation du signal sont ainsi sous-estimées et, par conséquent, la fréquence du signal obtenue par la formule (3.42) est surestimée.

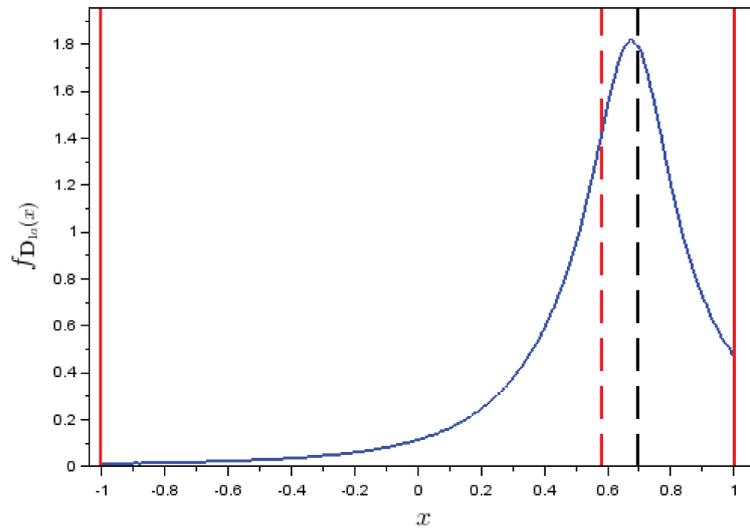


FIGURE 4.35 – Partie conforme de la densités de la sortie de l'opérateur ${}^h\mathbf{D}_1 a$ appliqué à un bruit gaussien.

Comparaison des opérateurs ${}^h\mathbf{DESA}$

Ces opérateurs, à savoir, ${}^h\mathbf{D}_{1a}$, ${}^h\mathbf{D}_1$ et ${}^h\mathbf{D}_2$, ont été définis par le formules (3.32), (3.41) et (3.44). Les occurrences des $\text{VAR } {}^h\mathbf{D}_{1a}B$, ${}^h\mathbf{D}_{1a}B$ et ${}^h\mathbf{D}_{1a}B$ correspondant aux sorties des opérateurs appliqués à un bruit gaussien $b(n)$, sont ainsi obtenues par les formules (4.123) et

$${}^h\mathbf{D}_1 B_n = 1 - \frac{{}^h\Psi b'_n + {}^h\Psi b'_{n+1}}{4 {}^h\Psi b_n} \quad \text{où } b'_n = b_n - b_{n-1}. \quad (4.125)$$

$${}^h\mathbf{D}_2 B_n = 1 - \frac{3 {}^d\Psi b''_n}{2({}^d\Psi b_{n-1} + {}^d\Psi b_n + {}^d\Psi b_{n+1})} \quad \text{où } b''_n = b_{n+1} - b_{n-1}. \quad (4.126)$$

De même que ${}^h\mathbf{D}_{1a}$, les distributions de ${}^h\mathbf{D}_1$ et ${}^h\mathbf{D}_2$ induisent des valeurs non conformes pour la démodulation par arc cosinus, ainsi qu'un biais dû à leur dissymétrie. La figure (4.36) présente, sur un même graphique, les densités des $\text{VAR } {}^h\mathbf{D}_{1a}B$, ${}^h\mathbf{D}_{1a}B$ et ${}^h\mathbf{D}_{1a}B$.

Opérateurs \mathbf{R}_{21} et ${}^h\mathbf{T}$

Une des raisons de l'efficacité des opérateurs \mathbf{R}_{21} et ${}^h\mathbf{T}$ provient d'une moindre dispersion du bruit que les opérateurs ${}^h\mathbf{DESA}$, ainsi qu'on peut l'observer sur les figures (4.37) et (4.40). La dé-

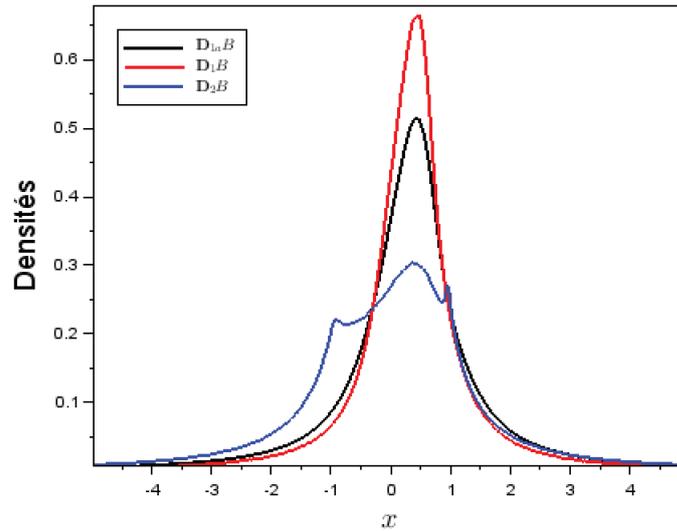
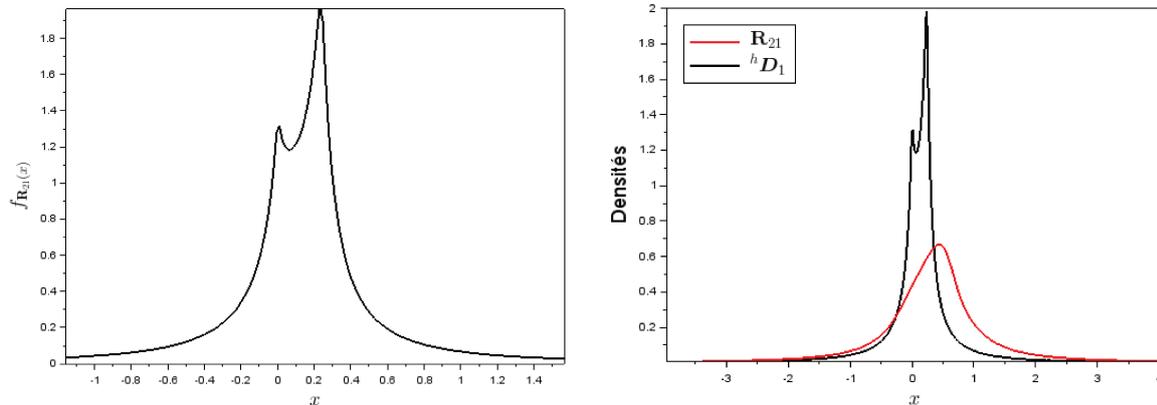


FIGURE 4.36 – Comparaison des densités des opérateurs DESA appliqués à un bruit gaussien.

modulation à partir de \mathbf{R}_{21} fait toutefois appel à la valeur absolue de la sortie de l'opérateur (cf. formule 3.48), ce qui limite les valeurs démodulables à l'intervalle $[0; 1]$ et amoindrit cette efficacité. La figure (4.37) présente la densité de \mathbf{R}_{21} ainsi qu'une comparaison entre celle-ci et celle de ${}^h\mathbf{D}_1$ qui permet d'observer la moindre dispersion des valeurs de \mathbf{R}_{21} .


 FIGURE 4.37 – Densité de \mathbf{R}_{21} appliqué à un bruit gaussien et comparaison avec la densité de ${}^h\mathbf{D}_1$.

L'utilisation de l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ fait, elle, appel à un processus plus complexe, décrit au paragraphe 3.4.2. D'une part, ${}^h\mathbf{T}$ est constitué comme le rapport des opérateurs Δ_{21} et Δ_{31} . Ces opérateurs ont tous deux, pour un bruit gaussien, la même densité en sortie, présentée sur la figure (4.38). Celle de ${}^h\mathbf{T}\mathbf{B} = \frac{\Delta_{21}\mathbf{B}}{\Delta_{31}\mathbf{B}}$ est présentée sur la figure (4.39).

La sortie de ${}^h\mathbf{T}$, à la différence des autres opérateurs étudiés, n'est toutefois pas directement démodulable par arc cosinus mais fait appel à une formule intermédiaire qui dépend du rapport d'échantillonnage. Pour un rapport supérieur à 6 (cf. 3.83), la fréquence instantanée est ainsi obtenue par

$$f_n = \frac{1}{4\pi h} \arccos\left(\frac{U_n - 1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad U_n = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n + \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2}. \quad (4.127)$$

La densité avant démodulation correspondant à l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ est alors, pour un bruit gaussien, celle de la VAR $\mathbf{T}_D\mathbf{B}$ construite comme suit :

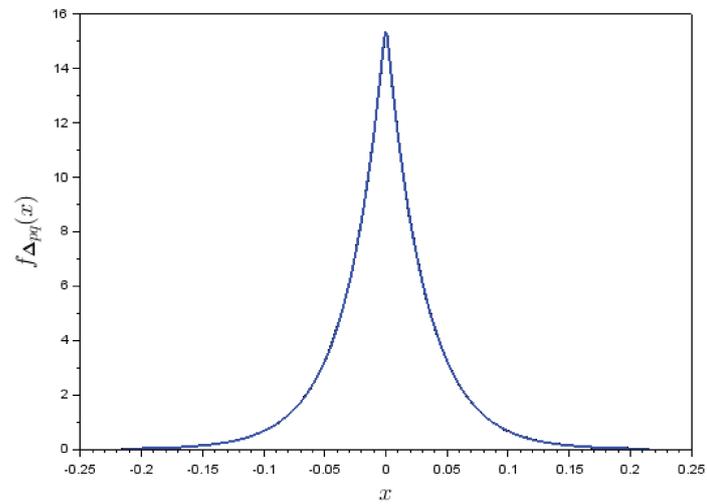


FIGURE 4.38 – Densité de Δ_{pq} appliqué à un bruit gaussien.

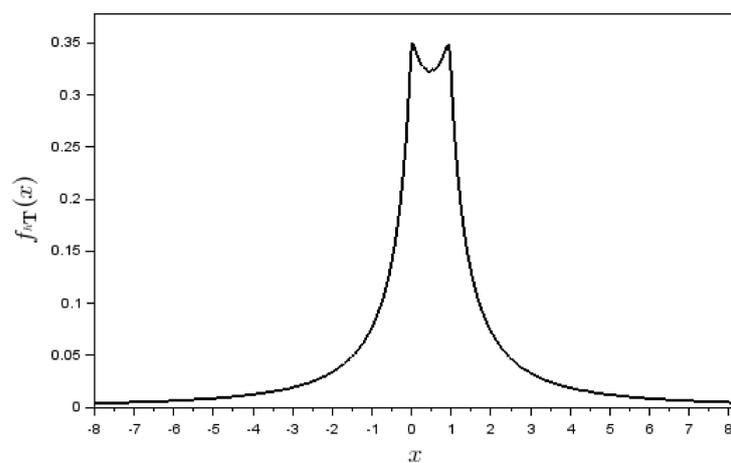


FIGURE 4.39 – Densité de hT appliqué à un bruit gaussien.

$$\mathbf{T}_{DB} = \frac{\mathbf{UB} - 1}{2} \quad \text{où} \quad \mathbf{UB} = \frac{h\mathbf{TB} + \sqrt{(h\mathbf{TB})^2 + 4}}{2}. \quad (4.128)$$

La densité de \mathbf{T}_{DB} est représentée sur la figure (4.40).

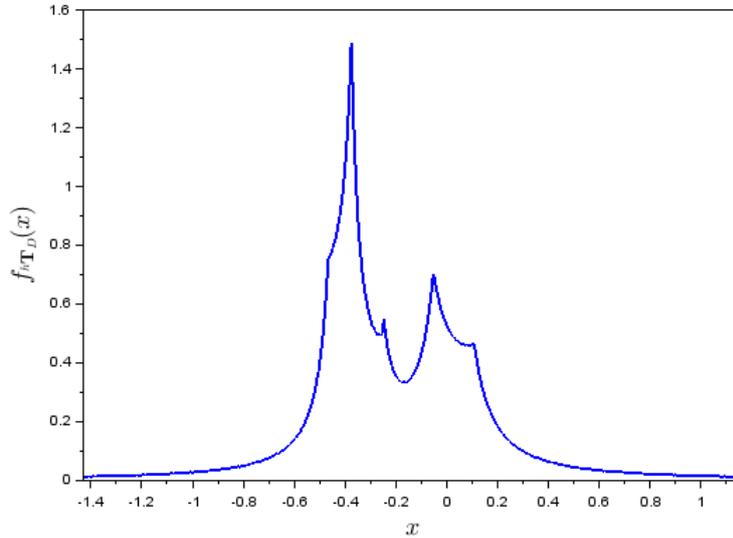


FIGURE 4.40 – Densité de ${}^h\mathbf{T}$ appliqué à un bruit gaussien.

Valeurs non conformes

Ainsi qu'évoqué dans le cas de ${}^h\mathbf{D}1a$, lors de l'enregistrement d'un signal discret (x_n), la présence de bruit entraîne l'apparition de valeurs non conformes, en ce sens qu'elles ne peuvent être démodulées par l'utilisation de la fonction arc cosinus (4.124). En effet, les algorithmes permettant la démodulation de la fréquence instantanée, s'appuient sur les égalités

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi h} \arccos({}^h\mathbf{D}1ax_n) = \frac{1}{2\pi h} \arccos({}^h\mathbf{D}1x_n) = \frac{1}{4\pi h} \arccos({}^h\mathbf{D}2x_n) \\ &= \frac{1}{2\pi h} \arccos\left(\sqrt{{}^h\mathbf{R}21x_n}\right). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Le tableau (4.3) présente les pourcentages de ces valeurs non conformes obtenues en sortie de ces différents opérateurs, pour un signal harmonique d'une fréquence de 318 Hz, échantillonné avec un rapport d'échantillonnage de 7,9, bruité par un bruit gaussien avec un rapport signal sur bruit de 15 dB.

TABLEAU 4.3 – Exemple de la répartition des valeurs non démodulables ($f = 318$ Hz, RSB = 15 dB, $r_e = 7,9$).

Opérateur	Intervalle	% gauche	% droit
${}^h\mathbf{D}1a$	$[-1; 1]$	1,9 %	15,2 %
${}^h\mathbf{D}1$	$[-1; 1]$	0,3 %	3,6 %
${}^h\mathbf{D}2$	$[-1; 1]$	8,3 %	5,1 %
$\mathbf{R}21$	$[0; 1]$	2,1 %	9,5 %

Remarque :

L'opérateur ${}^h\mathbf{T}$ n'a pas été inclus dans ce tableau car les valeurs non conformes apparaissent lors

de son utilisation ne sont pas directement comparables à celles des autres opérateurs. Elles dépendent de l’algorithme de démodulation qui dépend lui-même du rapport d’échantillonnage estimé.

Le pourcentage et la répartition gauche/droite des valeurs non conformes permettent d’estimer le [rapport signal sur bruit](#) et cette estimation permet de corriger le biais provoqué par le bruit, évoqué à propos de l’opérateur ${}^h\mathbf{D}1a$ (cf. 4.124). Cette démarche sera développée lors de travaux ultérieurs.

4.5.3 Méthode des moments et opérateur de Teager-Kaiser

La sortie de l’opérateur de Teager-Kaiser est constante lorsqu’il est appliqué à un signal harmonique et la densité de probabilité de cette sortie est alors une impulsion de Dirac. Une conséquence de cette propriété se traduit par une tendance de l’opérateur à diminuer la dispersion des valeurs du signal auquel il est appliqué. La présence d’un signal, en particulier si ce dernier est à bande étroite, au sein d’un bruit de fond va ainsi influencer fortement la variance et le coefficient de variation de la sortie de l’opérateur et, par conséquent permettre la détection de sa présence par la méthode des moments. Nous allons dans ce paragraphe étudier les moments de la sortie de l’opérateur appliqué à un bruit gaussien et en déduire son intérêt pour la détection d’un signal.

Pour utiliser la méthode des moments, présentée au paragraphe 4.4.6, nous allons simuler, sur un intervalle discret d’indices, $I = \llbracket 1; N \rrbracket$, un signal discret de la forme $S(n) = H(n) \cdot \chi_J + B(n)$, composé d’un signal harmonique $H(n)$ et d’un bruit gaussien $B(n)$. χ_J est l’indicatrice de l’intervalle discret $J = \llbracket T_1; T_2 \rrbracket \subset I$, pendant lequel le signal harmonique $H(n)$ est présent au sein du bruit $B(n)$. Nous allons ensuite faire défiler une fenêtre glissante, de longueur L , dont le contenu constitue un échantillon de la $\text{VAR } S = H + B$, puis nous allons calculer le [Kurtosis](#) de cet échantillon, qui est le moment le plus efficace pour détecter la présence du signal utile $H(n)$ au sein du bruit, ainsi que récapitulé dans le tableau (4.2).

La figure (4.41) présente le [Kurtosis](#) de S obtenu ainsi, pour un signal de fréquence 2 kHz avec un rapport d’échantillonnage de 50, bruité avec $\text{RSB} = -2$ dB, en ayant choisi les paramètres $N = 70\,000$ points, $T_2 - T_1 = 10\,000$ points, et $L = 7\,500$ points. Dans ces conditions la présence du signal n’est pas détectable, ou du moins pas avec le critère de fiabilité de 3σ que nous avons choisi.

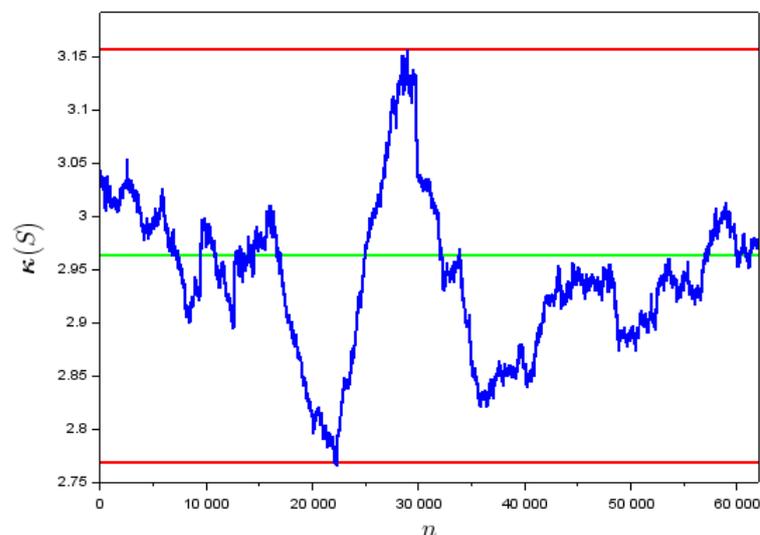


FIGURE 4.41 – Utilisation directe de la méthode des moments dans des conditions de détection défavorables.

En employant maintenant la méthode des moments, non plus sur le signal $S(n)$, mais sur la sortie ${}^h\Psi S(n)$ de l'opérateur ${}^h\Psi$ appliqué au signal, et en choisissant de la mettre en œuvre avec le **coefficient de variation** et non avec le **Kurtosis**, on observe sur la figure (4.42) que la présence du signal apparaît très nettement sur l'intervalle de valeurs où il est actif.

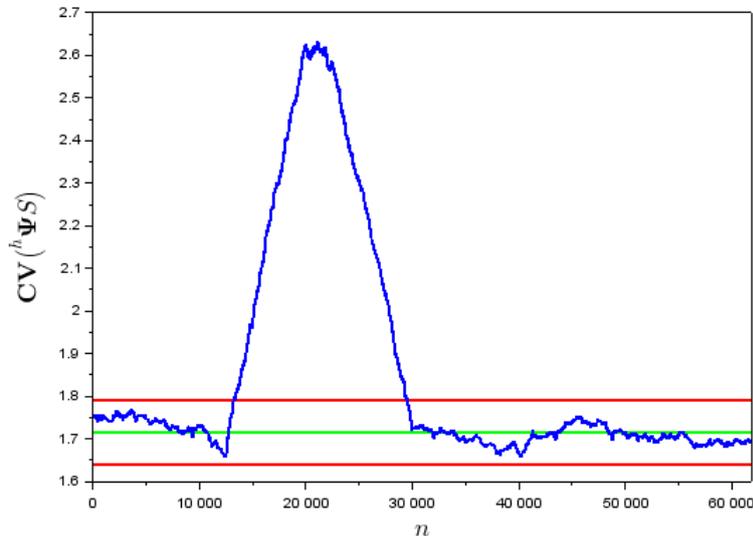


FIGURE 4.42 – Utilisation par l'intermédiaire de ${}^h\Psi$ de la méthode des moments dans des conditions de détection défavorables.

L'utilisation combinée de la méthode des moments et de l'opérateur de Teager-Kaiser permet ainsi une bien meilleure détection. La courbe de la figure (4.42) a été obtenue en appliquant la méthode avec le **coefficient de variation**, car c'est bien la capacité de l'opérateur à limiter la dispersion des valeurs qui permet cette amélioration de la détection ; l'utilisation des autres moments avec ${}^h\Psi S(n)$ s'avère effectivement inefficace. Nous qualifierons cette combinaison de la méthode des moments et du coefficient de variation de l'opérateur de Teager-Kaiser de "méthode du moment d'énergie".

En appliquant la méthode du moment d'énergie pour le même signal et les mêmes paramètres que précédemment à l'exception du **rapport signal sur bruit**, nous constatons que nous atteignons un seuil de détection pour $RSB = -14$ dB, valeur du rapport signal sur bruit en deçà de laquelle le signal n'est plus détectable au regard du critère des 3σ . La graphique limite correspondant est présenté sur la figure (4.43).

Outre la durée d'enregistrement du signal et la taille de la fenêtre, la capacité de détection dépend, non seulement de **RSB**, mais également du **rapport d'échantillonnage** r_e . Plus ce dernier est élevé - en dehors de très faibles valeurs du rapport d'échantillonnage - plus la détection est efficace. La figure (4.44) présente l'évolution de la valeur du **coefficient de variation** de ${}^h\Psi S$ en fonction de r_e , pour un signal harmonique d'amplitude 1 et de fréquence 2 kHz, bruité à 5 dB.

La variation du coefficient de variation de ${}^h\Psi S(n)$ en fonction du **rapport signal sur bruit**, présentée sur la figure (4.45), n'est toutefois pas monotone. Selon la combinaison des valeurs du rapport d'échantillonnage et de **RSB**, la méthode du moment d'énergie peut ainsi ne pas être efficace. En effet, son pouvoir de discrimination est faible pour de faibles rapports d'échantillonnage, ainsi que pour des valeurs de **RSB** proches de l'intersection de la courbe de $CV({}^h\Psi S)$ avec la droite horizontale représentant la valeur $CV = 3\sqrt{3}$, tracée en rouge sur la figure (4.45).

Nous pouvons remédier à ce problème en utilisant l'opérateur Δ_{21} . Celui-ci est en général moins

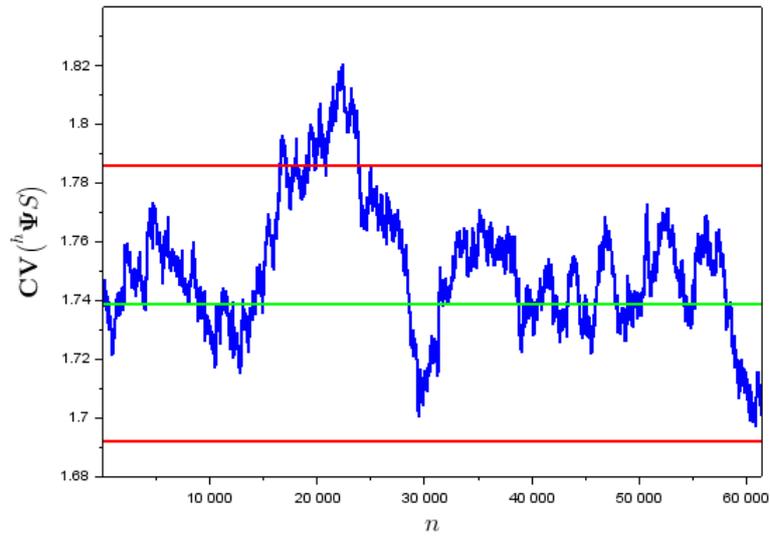


FIGURE 4.43 – Détection par la méthode du moment d'énergie.

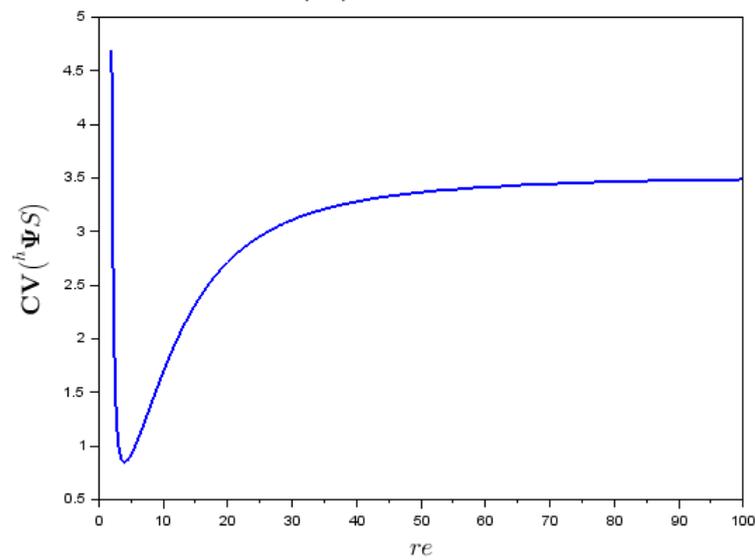


FIGURE 4.44 – Variation du coefficient de variation de $h\Psi S$ en fonction du rapport d'échantillonnage.

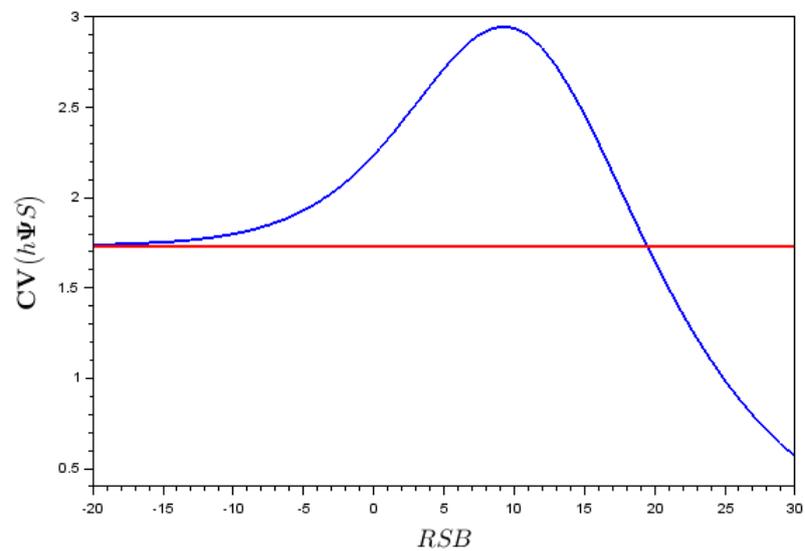


FIGURE 4.45 – Variation du coefficient de variation de $h\Psi S$ en fonction de RSB.

efficace que ${}^h\Psi$ pour la détection du signal mais ne présente pas de faiblesse de détection pour les mêmes valeurs de RSB que ${}^h\Psi$. La figure (4.46) compare la méthode du moment d'énergie appliquée avec ${}^h\Psi$ et avec Δ_{21} , pour un signal d'amplitude 1 et de fréquence 2 kHz avec un rapport d'échantillonnage de 10, bruité à -2 dB. On constate que la détection par ${}^h\Psi$ est à un seuil limite, alors que la détection par Δ_{21} est très nette.

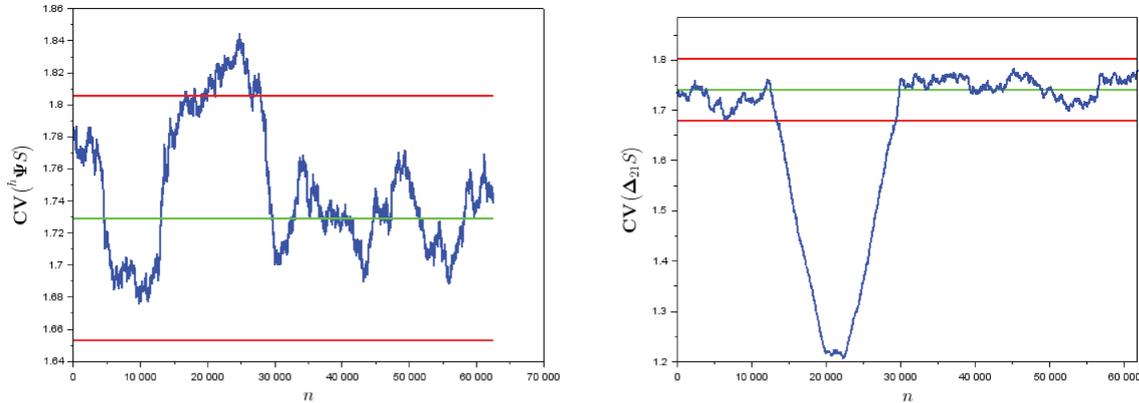


FIGURE 4.46 – Détection alternative par Δ_{21} pour les valeurs faibles de ${}^h\Psi$.

En l'absence de connaissance a priori du rapport d'échantillonnage et afin de couvrir un plus grand éventail de fréquences détectables, il est souhaitable d'utiliser la méthode du moment d'énergie conjointement avec les opérateurs ${}^h\Psi$ et Δ_{21} .

On a pu voir sur la figure (4.43) que la détection d'un signal utile était possible dans un environnement bruité à -14 dB; c'est effectivement la limite de la méthode telle que présentée. Il est toutefois possible de gagner 2 dB en élaguant les valeurs ΨS_n s'écartant beaucoup de la moyenne, imputables a priori au bruit. La figure (4.47) présente ainsi un signal d'amplitude 1, de fréquence 320 Hz, échantillonné avec un rapport d'échantillonnage de 100, présent dans un environnement bruité avec un rapport signal sur bruit de -16 dB. Les valeurs de sortie de l'opérateur présentant un écart à la moyenne de plus de $4,5\sigma$ ont été élaguées. L'intervalle sur lequel le signal harmonique est présent est délimité par les segments verticaux apparaissant en magenta sur la figure.

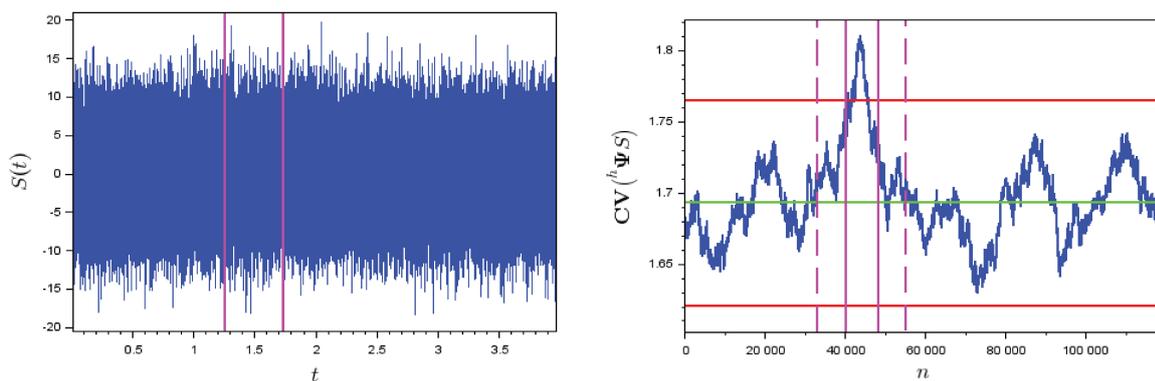


FIGURE 4.47 – Détection optimisée à -16 dB par la méthode du moment d'énergie.

4.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre, les densités et les moments statistiques d'un signal harmonique bruité par un bruit gaussien, avec et sans l'application de l'opérateur de Teager-Kaiser. Les moments centrés réduits et le coefficient de variation présentent, en effet, l'intérêt d'être indépendants de la fréquence du signal et, à un facteur d'échelle près, de son amplitude, permettant

ainsi d'asseoir l'étude des signaux continus sur la seule influence du rapport signal sur bruit en ajoutant, pour les signaux discret, l'influence du rapport d'échantillonnage.

En adoptant le point de vue, non pas d'un signal perturbé par un bruit, mais d'un bruit environnant modifié par un signal, nous avons utilisé les propriétés des moments pour proposer une méthode de détection. Cette méthode, fondée sur la perturbation des moments du bruit, permet de détecter la présence d'un signal dans un environnement bruité, jusqu'à un rapport signal sur bruit d'environ -4 à -5 dB selon la durée du signal.

En combinant cette démarche avec l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser, nous avons présenté la méthode du "moment d'énergie", permettant d'abaisser ce seuil d'environ 10 dB. En effet, l'opérateur possède la propriété de limiter la dispersion des valeurs, ce qui provient du fait que, dans le cas d'un signal harmonique, sa sortie est constante. Ainsi, si la fréquence instantanée du signal varie lentement, les valeurs de la sortie de l'opérateur se concentrent sur une plage limitée. Cette propriété se retrouve dans les valeurs prises par son coefficient de variation, rapport de l'écart-type sur l'espérance, qui varient fortement en présence d'un signal faible, permettant la détection de ce dernier.

Nous avons également mis en relief la dissymétrie de la répartition des valeurs de sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser en présence d'un bruit et l'introduction d'un biais dans l'estimation par démodulation des fréquence et amplitude instantanées du signal dû à cette dissymétrie. La quantification de la dissymétrie en sortie des opérateurs de démodulation introduits au chapitre 3 permet alors d'estimer le rapport signal sur bruit et de limiter ce biais. L'optimisation de cette démarche reste à développer dans des travaux ultérieurs.

Chapitre 5

Bilan et perspectives

« La vie est l'art de tirer des conclusions suffisantes de prémisses insuffisantes. »

Samuel Butler

Sommaire

Nous nous sommes attachés dans cette thèse à approfondir plusieurs propriétés de l'opérateur de Teager-Kaiser, à savoir sa positivité, sa discrétisation et les densités de probabilités générées par son emploi en environnement bruité. Afin de mettre en relief les propriétés de l'opérateur, nous avons adopté une approche théorique en travaillant essentiellement sur des expressions analytique du signal ou sur des signaux simulés permettant de maîtriser les paramètres de l'étude et d'en analyser les effets. Ce travail nous a permis d'apporter plusieurs contributions à l'emploi de l'opérateur.

Établissement de critères de positivité

Afin de pouvoir être interprétée en termes d'énergie, la sortie de l'opérateur doit être positive. Ce n'est pourtant pas toujours le cas. Des valeurs négatives de la sortie de l'opérateur peuvent être générées par un environnement bruité, mais nous avons montré que les caractéristiques de forme du signal ainsi que sa discrétisation peuvent être également des causes de non positivité. Au chapitre 2 nous avons établi, en prolongation des travaux menés par Bovik et Maragos [26] ainsi que par Larkin [27], des critères de positivité permettant de déterminer si, pour un type de signal donné, l'utilisation de l'opérateur de Teager-Kaiser est susceptible ou non, en dehors des perturbation dues au bruit, de générer des valeurs négatives. Ces résultats sont basés sur une forme modulée en amplitude et en fréquence du signal, utilisant l'**amplitude logarithmique** (2.15). Cette forme, correspondant aux signaux AM-FM, ne restreint toutefois pas la portée de l'étude puisque, ainsi que nous l'avons montré au paragraphe 2.3, tout signal peut, formellement, être écrit par ce modèle. Les critères que nous avons établis permettent de cibler au mieux les catégories de signaux, tels les "chirps" [28], pour lesquels l'opérateur de Teager-Kaiser est particulièrement bien adapté. La démarche que nous avons adoptée pourra ainsi être appliquée à différentes classes de signaux afin d'évaluer l'opportunité d'utiliser l'opérateur de Teager-Kaiser pour leur démodulation. Au cours de cette étude, nous avons également mis en évidence le rôle du rapport d'échantillonnage qui, s'il est inférieur à 8 peut générer des valeurs négatives, ainsi que celui de la phase initiale, susceptible de générer également des valeurs négatives sur certains intervalles. A notre connaissance ces résultats sont les premiers de la littérature mettant en évidence le rôle de la phase initiale du signal et l'existence d'un intervalle critique où cette phase a une influence sur la positivité de l'opérateur.

Introduction d'opérateurs à pas variable

L'expression discrète de l'opérateur de Teager-Kaiser repose sur une suite de valeurs indicées par des entiers naturels : $(x_n)_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}$. Ainsi, son expression ne tient pas compte du pas d'échantillonnage, pourtant porteur d'information. Ce constat nous a conduit à introduire une version revisitée de l'opérateur, que nous avons baptisée ${}^h\Psi$, tenant compte du pas. L'opérateur ${}^h\Psi$ nous a alors permis, combiné à la formule de Shannon, de démontrer la capacité de l'opérateur à extraire des fréquences.

A partir de ${}^h\Psi$, en utilisant les différences et les rapports de plusieurs sorties de l'opérateur établies par ré-échantillonnage d'un signal initial, nous avons défini de nouveaux opérateurs : \mathbf{R}_{pq} et Δ_{pq} et établi les algorithmes de démodulation associés. Ces opérateurs, en exploitant l'information provenant de la fréquence d'échantillonnage, permettent une démodulation plus précise de la fréquence et de l'amplitude instantanées du signal. Les propriétés de débruitage statistique des opérateurs Δ_{pq} nous ont alors conduit à définir l'opérateur ${}^h\mathbf{T}$, conservant cette propriété de débruitage statistique et améliorant sensiblement la précision de la démodulation en environnement bruité.

A l'occasion de l'étude de ${}^h\mathbf{T}$, nous avons également abordé l'influence notable du bruit sur l'utilisation des différentes versions de l'opérateur de Teager-Kaiser. En constatant le lien entre

cette influence et la fréquence de discrétisation, nous avons été conduits à proposer un rapport signal sur bruit rectifié, adapté à la mise en œuvre de l'opérateur, que nous avons dénommé "Rapport signal sur bruit au sens de Teager-Kaiser".

Elaboration d'une méthode de détection fondée sur les densités de probabilités

L'opérateur de Teager Kaiser, appliqué à un signal harmonique possède la propriété de produire une sortie constante, interprétable en termes d'énergie. Bien que, par construction, l'opérateur a vocation à donner une information locale sur le signal cette propriété possède un intérêt statistique. En effet, la densité de probabilité d'une constante n'est autre qu'une impulsion de Dirac et la dispersion des valeurs est alors nulle. Ainsi, en assimilant les valeurs de sortie de l'opérateur aux réalisations d'une variable aléatoire et en l'appliquant à un signal AM-FM bruité, nous avons constaté que l'opérateur tend à concentrer la densité de probabilité de sa sortie autour d'un intervalle de valeurs réduit. En adoptant le point de vue, non pas d'un signal perturbé par un bruit, mais d'un bruit environnant modifié par un signal et en nous appuyant sur cette propriété, l'utilisation du coefficient de variation de la sortie de l'opérateur nous a amenés à développer une méthode, que nous avons qualifiée de "Méthode du moment d'énergie", permettant la détection d'un signal faible dans un environnement fortement bruité. Le coefficient de variation présente, en effet, l'intérêt de ne pas dépendre de la fréquence du signal et, à un facteur d'échelle près, de son amplitude. La détection ne dépend ainsi que du rapport signal sur bruit et du rapport d'échantillonnage. Nous avons ainsi montré la capacité de la méthode à détecter un signal bruité à -16 dB.

Perspectives

- La positivité de l'opérateur s'avère une propriété essentielle pour de nombreuses applications [142], [70], [110] et nous avons montré qu'elle dépendait non seulement du bruit et de la discrétisation mais également de la structure même du signal. Toutefois, afin de s'affranchir des valeurs négatives, l'emploi usuel de l'opérateur consiste à forcer sa sortie à être positive par l'utilisation de la valeur absolue, sans tenir compte du biais ainsi généré. Cette méthode est très répandue dans la littérature car elle s'avère efficace. En effet, l'ordre de grandeur des sorties négatives est, en général, nettement plus faible que celui des sorties positives, limitant ainsi l'erreur commise. Il serait, par conséquent intéressant d'étendre l'étude, que nous avons menée, de la stricte positivité de l'opérateur à celle de sa positivité relative, en déterminant les conditions pour lesquelles les valeurs négatives peuvent légitimement être négligées. Par ailleurs, le problème de la positivité n'est pas limité à l'opérateur de Teager-Kaiser usuel, d'ordre 2. Il se pose également pour les opérateurs d'énergie d'ordre supérieur [135], [138], [139] et multidimensionnels [140], [141]. Il serait intéressant d'étendre l'analyse de la positivité à ces classes d'opérateurs qui ont de nombreuses applications en traitement d'image et pour les données multi-capteurs.
- La version revisitée de l'opérateur, ${}^h\Psi$, que nous avons proposée, ouvre un large champ d'étude. La capacité à isoler des fréquences en combinant l'opérateur avec un rééchantillonnage du signal mérite en particulier d'être développée. Par ailleurs, si nous avons proposé, à partir de ${}^h\Psi$, plusieurs opérateurs améliorant la démodulation en environnement bruité, nous n'avons pour autant exploré qu'une faible partie de l'analyse multi-échelle permise par l'introduction d'un pas variable dans l'utilisation de l'opérateur. Une direction de recherche consisterait à approfondir cette analyse multi-résolution, qui n'est pas tributaire d'une fonction pré-définie, afin de comparer l'analyse de données multi-échelles s'appuyant sur ${}^h\Psi$ à celle fondée sur une fonction pré-définie, telle la transformée en ondelettes [157].
- L'étude que nous avons menée des moments statistiques du signal bruité est restée très théorique en s'appuyant sur un signal harmonique et un bruit gaussien. Nous prévoyons d'une part d'étendre cette étude à des signaux plus complexes et à d'autres types de bruit et, d'autre part, de comparer l'efficacité de la méthode que nous avons développée du moment

d'énergie (4.5.3) à celle d'autres méthodes, en l'appliquant à des signaux réels. Les résultats portant sur le comportement de l'opérateur de Teager-Kaiser dans le cas du bruit blanc demandent à être étendus au bruit gaussien fractionnaire [158]. Ce processus stochastique, qui est une généralisation du bruit blanc, est caractérisé par son coefficient de Hurst, H , qui vaut 0,5 dans le cas du bruit blanc. L'analyse du bruit blanc fractionnaire par l'opérateur pourrait permettre, par exemple, l'estimation de H [159]. Une autre extension possible serait d'analyser le comportement de l'opérateur vis-à-vis des distributions α -stables symétriques, qui constituent un modèle de bruits impulsifs et qui sont également une généralisation de la loi gaussienne [160]. L'objectif étant alors d'estimer, à partir de la sortie de l'opérateur, les paramètres de ce type de processus, à savoir le coefficient α contrôlant la longueur des queues de distribution et le paramètre d'échelle γ [161]. L'analyse du comportement de l'opérateur en présence d'un bruit mérité, par ailleurs, d'être étendue au cas des images et des signaux multi-dimensionnels. Les récents résultats obtenus pour l'opérateur de Teager-Kaiser 2D sont prometteurs [162].

- L'estimation du **rapport signal sur bruit** est une étape importante pour, entre autres, caractériser un système de transmission, mesurer la qualité de la transmission d'une information, évaluer une méthode de filtrage, de débruitage ou de détection [163], [164], [165], [166]. Son évaluation reste toutefois une question délicate. La formule (4.83) établie pour le Kurtosis d'un signal additif, composé d'un signal harmonique et d'un bruit gaussien, permet de déduire la valeur de **RSB** à partir de celle du Kurtosis. Elle permet donc de résoudre cette question mais uniquement dans un cas très particulier qu'il semble difficile d'étendre; une faible variation des caractéristiques modifiant très fortement la valeur de **RSB** calculée. Nous pensons, en revanche, que la dissymétrie des valeurs obtenues en présence de bruit en sortie de l'opérateur, est un indicateur plus fiable permettant de mesurer **RSB**. Nous prévoyons de développer dans de prochains travaux l'approche consistant à quantifier la dissymétrie en sortie de l'opérateur afin d'estimer le **rapport signal sur bruit** et d'optimiser le rapport d'échantillonnage en conséquence.
- L'extraction des attributs pour la classification des signaux à partir de la sortie de l'opérateur de Teager-Kaiser 1D ainsi que les traitements d'image comme le rehaussement de contraste, basés sur la version 2D de l'opérateur mériteraient d'être revisités en adoptant la stratégie de discrétisation avec un pas variable. L'adaptation du pas au contenu en information du signal ou de l'image en entrée doit permettre d'améliorer la pertinence des attributs ou des traitements dans le cas 2D.

Annexe A

Compléments sur les densités et les moments

A.1 Variables aléatoires semblables et densités homothétiques

Exemple de la loi normale

Toutes les lois normales sont représentées par la célèbre courbe "en cloche", dite de Gauss (figure A.1). Cette courbe est la densité de probabilité de la loi normale considérée et dépend de deux paramètres, l'espérance m et l'écart-type σ de la loi.

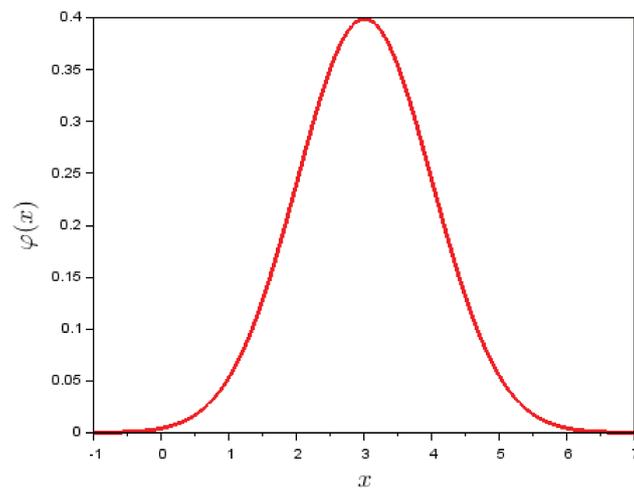


FIGURE A.1 – Densité de probabilité de la loi normale ($m = 2$, $\sigma = 1$)

Quels que soient les valeurs de ces paramètres, la forme de la courbe caractérise la loi normale. Les courbes obtenues pour différentes valeurs sont "similaires" en ce sens qu'elles se déduisent les unes des autres par translation et homothétie. Plus précisément, les calculs de probabilité concernant une variable Y , suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ se ramènent à ceux concernant la variable, dite centrée et réduite, $X = \frac{Y-m}{\sigma}$ qui suit alors la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

De telles similarités entre des densités de probabilité sont la conséquence de **VAR** liées par une relation linéaire. Nous allons les caractériser clairement afin de pouvoir les reconnaître et utiliser les propriétés qui en découlent, en particulier lors de l'utilisation des moments de ces **VAR**.

Densité translatée

La modification seule de l'espérance, pour la loi normale, se traduit géométriquement par un changement de l'origine de l'axe des abscisses. Elle correspond à des VAR égales à une constante près. Pour les densités de ces VAR, nous donnerons la définition suivante :

Définition :

Soient deux VAR X et Y de densités respectives f_X et f_Y , on qualifiera ces densités de translatées lorsqu'elles vérifient la propriété

$$\exists T \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = f_X(x - T). \quad (\text{A.1})$$

Les VAR X et Y sont alors reliées par la relation $Y = X + T$.

Densité homothétique

La modification seule de l'écart-type, pour la loi normale se traduit géométriquement par une homothétie d'un rapport k pour la variable en abscisse et $\frac{1}{k}$ pour les valeurs prises par la fonction en ordonnée. Plus généralement nous donnerons la définition suivante :

Définition :

Soient deux VAR X et Y de densités respectives f_X et f_Y , on qualifiera ces densités d'homothétiques, de rapport k , lorsqu'elles vérifient la propriété

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{x}{k}\right). \quad (\text{A.2})$$

Autrement dit, deux densités homothétiques s'obtiennent par une dilatation de rapport k de l'axe des abscisses et une normalisation par k . Cette propriété correspond à une proportionnalité des VAR X et Y. En effet, supposons que $Y = kX$, $k \in \mathbb{R}^*$, on a alors

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}\left(X < \frac{x}{k}\right) = F_X\left(\frac{x}{k}\right), \quad (\text{A.3})$$

d'où, par dérivation

$$f_Y(x) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{x}{k}\right). \quad (\text{A.4})$$

Variations semblables

La propriété précédente correspond au fait que $\frac{Y}{k}$ et X suivent la même loi de probabilité. Elle en constitue une forme "géométrique" appliquée aux fonctions de répartition. Elle peut également s'écrire avec les fonctions de répartition de X et Y : $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{k}\right)$ ou bien sous forme de probabilités : $\mathbf{P}(kY < x) = \mathbf{P}(X < x)$. En particulier, dans le cas de la loi normale, la propriété d'homothétie des densités traduit le fait que si Y suit $\mathcal{N}(0, \sigma)$, alors $\frac{Y}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pour des commodités de langage, lorsque nous serons amené à évoquer des VAR plutôt que leurs densités nous parlerons de variables homothétiques lorsque leurs densités le sont et de variables translatées lorsque leurs densités le sont. De plus nous dirons que X et Y sont **semblables** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que X et $\frac{Y - a}{b}$ admettent la même loi de probabilité.

Propriétés des variables aléatoires semblables

Soient deux VAR X et Y semblables, vérifiant $Y = kX + \tau$, $(k, \tau) \in \mathbb{R}^2$, $k > 0$, alors

$$1. \quad F_Y(x) = F_X\left(\frac{x - \tau}{k}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$2. \quad f_Y(x) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{x - \tau}{k}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$3. \quad \mathbf{E}(Y) = k\mathbf{E}(X) + \tau \quad (\text{A.7})$$

$$4. \quad \sigma_Y = k\sigma_X \quad (\text{A.8})$$

$$5. \quad \mathbf{CV}_Y = \mathbf{CV}_X \text{ lorsque } \tau = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$6. \quad \mathbf{M}_n(Y) = \mathbf{M}_n(X). \quad (\text{A.10})$$

Preuve :

Les propriétés 1. et 2. s'obtiennent immédiatement en procédant comme pour (A.3) et (A.4) avec $x + T$. La propriété 3. découle de la linéarité de l'espérance. La propriété 4. découle de la propriété usuelle de la variance : $\mathbf{V}(\lambda Z + \mu) = \lambda^2 \mathbf{V}(Z)$. Les propriétés 5. et 6. s'établissent comme suit :

$$\mathbf{CV}_Y = \frac{\sigma_Y}{\mathbf{E}(Y)} = \frac{k\sigma_X}{k\mathbf{E}(X) + T} = \frac{k\sigma_X}{k\mathbf{E}(X)} = \mathbf{CV}_X \text{ lorsque } T = 0, \quad (\text{A.11})$$

et

$$\mathbf{M}_n(Y) = \mathbf{E}\left(\left[\frac{Y - \mathbf{E}(Y)}{\sigma_Y}\right]^n\right) = \mathbf{E}\left(\left[\frac{kX + T - k\mathbf{E}(X) - T}{k\sigma_X}\right]^n\right) = \mathbf{E}\left(\left[\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma_X}\right]^n\right) = \mathbf{M}_n(X). \quad (\text{A.12})$$

La propriété 6. signifie que des VAR semblables admettent les mêmes moments centrés réduits. La propriété 5. indique que des VAR homothétiques admettent, de plus, le même coefficient de variation.

Somme de densités homothétiques

Soient deux VAR X_k et Y_k dont les densités $f_{X,k}$ et $f_{Y,k}$ sont homothétiques, de même rapport k , avec les lois f_X et f_Y de deux VAR X et Y . Alors les densités f_Z et $f_{Z,k}$ des VAR $Z = X + Y$ et $Z_k = X_k + Y_k$ sont homothétiques, de rapport k .

En effet

$$f_{Z,k}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,k}(t) f_{Y,k}(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k} f_X\left(\frac{t}{k}\right) \frac{1}{k} f_Y\left(\frac{x - t}{k}\right) dt. \quad (\text{A.13})$$

En posant $u = \frac{t}{k}$ on a donc

$$f_{Z,k}(x) = \frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y\left(\frac{x}{k} - u\right) k du = \frac{1}{k} f_Z\left(\frac{x}{k}\right). \quad (\text{A.14})$$

La propriété d'homothétie est ainsi conservée par la somme.

A.2 Moments de la somme de deux variables aléatoires

Soient X et Y deux VAR indépendantes et soit $Z = X + Y$. Par indépendance, on a $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ et, donc

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}. \quad (\text{A.15})$$

Les moments centrés réduits de Z sont définis par

$$\mathbf{M}_n(Z) = \frac{1}{(\sigma_Z)^n} \mathbf{E} \left([Z - \mathbf{E}(Z)]^n \right) \quad (\text{A.16})$$

Par linéarité de l'espérance et en utilisant (A.15), on a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n(Z) &= \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)^n} \mathbf{E} \left([X + Y - \mathbf{E}(X + Y)]^n \right) \\ &= \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{n}{2}}} \mathbf{E} \left([(X - \mathbf{E}(X)) + (Y - \mathbf{E}(Y))]^n \right) \\ &= \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} (X - \mathbf{E}(X))^k (Y - \mathbf{E}(Y))^{n-k} \\ &= \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} \sigma_X^k \sigma_Y^{n-k} \mathbf{M}_k(X) \mathbf{M}_{n-k}(Y). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

En appliquant l'expression (A.17) pour $n = 3$ et $n = 4$, on obtient immédiatement les expressions du **Skewness**, $\gamma(Z)$, et du **Kurtosis** normalisé, $\kappa_N(Z)$ de Z . Ces résultats conduisent à la synthèse suivante :

$$\gamma(Z) = \frac{\sigma_X^3 \gamma(X) + \sigma_Y^3 \gamma(Y)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.18})$$

$$\kappa_N(Z) = \frac{\sigma_X^4 (\kappa_N(X) + 3) + 6 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + \sigma_Y^4 (\kappa_N(Y) + 3)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^2} - 3, \quad (\text{A.19})$$

et, plus généralement

$$\mathbf{M}_n(Z) = \frac{1}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_0^n \binom{n}{k} \sigma_X^k \sigma_Y^{n-k} \mathbf{M}_k(X) \mathbf{M}_{n-k}(Y). \quad (\text{A.20})$$

A.3 Moments des puissances d'une loi normale

Considérons une VAR B suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Les moments de $B^1 = B$ et B^2 sont connus de manière classique (citons par exemple [152]) et ont été présentés au paragraphe 4.5.1. En revanche et bien que leur détermination soit simple, nous n'avons pas trouvé de résultats concernant les moments des puissances B^n pour $n > 2$. Ces moments nous étant utiles pour les calculs du chapitre 4 nous les avons déterminé ici.

Espérance

Par symétrie, pour n impair, l'espérance de B^n est nulle : $\mathbf{E}(B^n) = 0$. Supposons maintenant n pair et posons $p = \frac{n}{2}$. On a alors $B^n = G^p$ où G est une VAR suivant $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (cf. 4.96).

Notons $f_{G_{\alpha,\beta}}$ la densité de probabilité de la loi $\Gamma(\alpha, \beta)$:

$$f_{G_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (\text{A.21})$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(G_{\alpha,\beta}^p) &= \int_{\mathbb{R}} x^p f_{G_{\alpha,\beta}}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1+p} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)\beta} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p)} x^{(\alpha+p)-1} e^{-\beta x} dx, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

or la densité de la loi $\Gamma(\alpha+p, \beta)$ n'est autre que

$$f_{G_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\beta^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p)} x^{\alpha+p-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.23})$$

par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p)} x^{(\alpha+p)-1} e^{-\beta x} dx = 1 \quad (\text{A.24})$$

et on a donc, en reportant (A.24) dans (A.22),

$$\mathbf{E}(G_{\alpha,\beta}^p) = \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)\beta^p}. \quad (\text{A.25})$$

Puisque la fonction Γ possède la propriété $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ [152], on obtient ainsi

$$\mathbf{E}(G_{\alpha,\beta}^p) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)}{\beta^p} \quad (\text{A.26})$$

et, pour le cas $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{E}(G^p) = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p-1) = \frac{(2p)!}{2^p p!}. \quad (\text{A.27})$$

Par conséquent, pour n pair :

$$\mathbf{E}(B^n) = \mathbf{E}(G^p) = \frac{n!}{2^{n/2} (n/2)!}. \quad (\text{A.28})$$

Variance et Écart-type

On obtient la variance de B^n par la formule de Huygens : $\mathbf{V}(B^n) = \mathbf{E}(B^{2n}) - \mathbf{E}(B^n)^2$. On obtient donc, en utilisant la relation (A.28) :

$$\mathbf{V}(B^n) = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n (n)!} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2^n} \left(\frac{(2n)!}{(n)!} - \left(\frac{n!}{(n/2)!} \right)^2 \right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}. \quad (\text{A.29})$$

On en déduit immédiatement l'écart-type, puisque $\sigma(B^n) = \sqrt{\mathbf{V}(B^n)}$.

Asymétrie

Pour une VAR X son coefficient d'asymétrie, ou Skewness, est défini par

$$\gamma(X) = \frac{1}{(\sigma(X))^3} \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^3\right). \quad (\text{A.30})$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \gamma(X) &= \frac{1}{(\sigma(X))^3} \mathbf{E}\left(X^3 - 3\mathbf{E}(X)X^2 + 3\mathbf{E}(X)^2X - \mathbf{E}(X)^3\right) \\
 &= \frac{1}{(\sigma(X))^3} \left(\mathbf{E}(X^3) - 3\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X^2) + 3\mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)^3\right) \\
 &= \frac{1}{(\sigma(X))^3} \left(\mathbf{E}(X^3) - 3\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X^2) + 2\mathbf{E}(X)^3\right). \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\gamma(B^n) = \frac{1}{\sigma^{3n}} \left(\mathbf{E}(B^{3n}) - 3\mathbf{E}(B^n)\mathbf{E}(B^{2n}) + 2\left(\mathbf{E}(B^n)\right)^3\right). \tag{A.32}$$

Cette relation nous permet alors d'obtenir $\gamma(B^n)$ à partir des espérances $\mathbf{E}(B^k)$, $k = n, 2n, 3n$ établies par la formule (A.28).

Kurtosis

Procédons de même que pour l'asymétrie. Pour une VAR X son Kurtosis normalisé est défini par

$$\kappa_N(X) = \frac{1}{(\sigma(X))^4} \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^4\right) - 3. \tag{A.33}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \kappa_N(X) &= \frac{1}{(\sigma(X))^4} \mathbf{E}\left(X^4 - 4\mathbf{E}(X)X^3 + 6\mathbf{E}(X)^2X^2 - 4\mathbf{E}(X)^3X + \mathbf{E}(X)^4\right) - 3 \\
 &= \frac{1}{(\sigma(X))^4} \left(\mathbf{E}(X^4) - 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X^3) + 6\mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(X^2) - 4\mathbf{E}(X)^3\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^4\right) - 3 \\
 &= \frac{1}{(\sigma(X))^4} \left(\mathbf{E}(X^4) - 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X^3) + 6\mathbf{E}(X)^2\mathbf{E}(X^2) - 3\mathbf{E}(X)^4\right) - 3
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\kappa_N(B^n) = \frac{1}{\sigma^{4n}} \left(\mathbf{E}(B^{4n}) - 4\mathbf{E}(B^n)\mathbf{E}(B^{3n}) + 6\left(\mathbf{E}(B^n)\right)^2\mathbf{E}(B^{2n}) - 3\left(\mathbf{E}(B^n)\right)^4\right) - 3. \tag{A.34}$$

Cette relation nous permet alors d'obtenir $\kappa_N(B^n)$ à partir des espérances $\mathbf{E}(B^k)$, $k = n, 2n, 3n, 4n$ établies par la formule (A.28).

Tableau des premières valeurs

Les formules (A.28) (A.29), (A.32) et (A.34) nous permettent alors de construire les tableaux (A.1) et (A.2) :

TABLEAU A.1 – Moments des puissances d'un bruit gaussien centré réduit.

$\sigma = 1$	E	V	σ	Υ	κ_N
B	0	1	1	0	0
B ²	1	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	12
B ³	0	15	$\sqrt{3}\sqrt{5}$	0	$\frac{216}{5}$
B ⁴	3	96	$4\sqrt{2}\sqrt{3}$	$\frac{263\sqrt{2}\sqrt{3}}{64}$	204
B ⁵	0	945	$3\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7}$	0	$\frac{46000}{63}$
B ⁶	15	10 170	$3\sqrt{1130}$	$\frac{337690}{339\sqrt{1130}}$	$\frac{38749404}{12769}$

TABLEAU A.2 – Moments des puissances d'un bruit gaussien centré d'écart-type σ .

σ	E	V	σ	Υ	κ_N
B	0	σ^2	σ	0	0
B ²	σ^2	$2\sigma^4$	$\sqrt{2}\sigma^2$	$2\sqrt{2}$	12
B ³	0	$15\sigma^6$	$\sqrt{3}\sqrt{5}\sigma^3$	0	$\frac{216}{5}$
B ⁴	$3\sigma^4$	$96\sigma^8$	$4\sqrt{2}\sqrt{3}\sigma^4$	$\frac{263\sqrt{2}\sqrt{3}}{64}$	204
B ⁵	0	$945\sigma^{10}$	$3\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{7}\sigma^5$	0	$\frac{46000}{63}$
B ⁶	$15\sigma^6$	$10170\sigma^{12}$	$3\sqrt{1130}\sigma^6$	$\frac{337690}{339\sqrt{1130}}$	$\frac{38749404}{12769}$

Annexe B

Procédure de Savitsky-Golay

Nous avons eu besoin à de nombreuses reprises de lisser les courbes présentées dans ce manuscrit. Nous avons choisi pour cela la procédure de Savitsky-Golay, d'une part pour son faible coût en temps de calcul, d'autre parce qu'elle fournit en chaque point calculé des valeurs optimales. En effet, souvent présentée comme un filtre ou sous forme d'algorithme, cette méthode est en fait une optimisation polynomiale qui détermine localement la valeur du polynôme de degré choisi minimisant l'écart quadratique entre ses points et une fenêtre de valeurs mesurée de largeur choisie. La méthode a été présentée par Abraham Savitsky et Marcel Golay [146] mais l'article n'est pas complètement explicite. N'ayant pas trouvé de document exposant en détail la méthode, nous avons rédigé sa description détaillée et avons estimé utile de l'annexer à ce manuscrit de thèse.

B.1 Position du problème

Disposant d'une série de N couples de valeurs (X_i, Y_i) , on peut trouver par la méthode de Lagrange, un polynôme L passant exactement par les points $M_i : (X_i, Y_i)$. Un tel polynôme, devant vérifier les N équations $L(X_i) = Y_i$, sera alors de degré $N - 1$. Cette démarche est une forme d'optimisation mais ne permet pas de maîtriser les valeurs prises par le polynôme entre les points et conduit en général à un polynôme de degré élevé présentant de fortes variations entre les points imposés. Pour approcher un ensemble de points par un polynôme dans une optique de "lissage" nous allons donc poser le problème différemment :

Problème :

"Disposant d'une série de N couples de valeurs (X_i, Y_i) , nous allons rechercher le polynôme de degré n , $P_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, (n choisi et inférieur à N) minimisant l'écart entre les points $M_i : (X_i, Y_i)$ et les points $N_i : (X_i, P(X_i))$ ".

La méthode que nous allons employer, dite des "moindres carrés" est classique et se décrit simplement :

Notons $e_i = M_i N_i = |Y_i - P_n(X_i)|$ la distance entre M_i et N_i . Minimiser les écarts entre les M_i et les N_i s'interprète comme minimiser la norme du N -uplet e_1, \dots, e_N qu'on identifie à celle du vecteur $E(e_1, \dots, e_N)$ représentant ces distances, ce qui équivaut à minimiser le carré de la norme de E :

$$\|E\|^2 = \sum_{i=1}^N (P_n(X_i) - Y_i)^2. \quad (\text{B.1})$$

Considérons pour cela $\|E\|^2$ comme une fonction f des $n + 1$ variables a_0, a_1, \dots, a_n :

$$f(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^n a_k X_i^k - Y_i \right)^2. \quad (\text{B.2})$$

Pour minimiser cette fonction il nous faut déterminer les points critiques annulant son gradient ∇f dont les composantes sont de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial a_q} = \sum_{i=1}^N 2X_i^q \left(\sum_{k=0}^n a_k X_i^k - Y_i \right) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^n a_k X_i^{q+k} + 2 \sum_{i=1}^N Y_i X_i^q, \quad (\text{B.3})$$

soit encore, en notant $U_j = \sum_{k=1}^N X_k^j$ et $T_j = \sum_{k=1}^N Y_k X_k^j$:

$$\frac{\partial f}{\partial a_q} = 2 \sum_{k=0}^n a_k U_{q+k} - 2T_q. \quad (\text{B.4})$$

Annuler ∇f revient donc à résoudre un système de $n+1$ équations linéaires de la forme $\sum_{k=0}^n a_k U_{q+k} = T_q$.

Il suffit alors d'écrire ce système sous la forme matricielle $UA = T$:

$$\begin{pmatrix} U_0 & U_1 & \dots & U_n \\ U_1 & U_2 & \dots & U_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

pour obtenir les coefficients a_k en inversant le système. Ce sont alors les coordonnées du vecteur

$$A = U^{-1}T. \quad (\text{B.6})$$

Le lissage d'une courbe comportant un nombre de points de discrétisation élevé demande cependant de procéder à de nombreux calculs de ce type en utilisant une fenêtre glissante. Or l'inversion des matrices est coûteuse en temps de calcul et peut poser des difficultés numériques dès lors que la matrice n'est pas bien conditionnée. L'idée maîtresse d'Abraham Savitsky et Marcel Golay consiste à exploiter des propriétés issues d'une discrétisation régulière des valeurs X_i .

B.2 Discrétisation régulière

Lorsque les N valeurs X_1, \dots, X_N sont issues d'une discrétisation régulière, de pas h , on a la relation $X_p = X_1 + (p-1)h$ pour $p \in \llbracket 1; N \rrbracket$. On peut alors procéder à un changement de repère, en prenant pour origine des abscisses $X_0 = X_1 - h$ et en appliquant une dilatation des abscisses d'un facteur $\frac{1}{h}$. Les $\tilde{X}_k = \frac{X_k - X_0}{h}$ prennent alors les valeurs entières $1, 2, \dots, N$. Dans ce nouveau repère \mathcal{R}_N ,

on cherche donc maintenant à approcher les points $\tilde{M}_k(\tilde{X}_k, Y_k)$ par un polynôme $\tilde{P}_n = \sum_0^n \tilde{a}_k x^k$. On

remarque qu'alors $\tilde{U}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i^k = \sum_{i=1}^N i^k$ **ne dépend plus des valeurs** X_i et que $T_k = \sum_{i=1}^N Y_i i^k$ ne dépend que des Y_i . La matrice U ne dépend alors uniquement du nombre N de points et de l'ordre n du polynôme choisi. Son inverse U^{-1} , indépendamment du problème étudié, peut alors être **pré-calculé** pour chaque couple $(N; n)$.

Une fois obtenu ainsi le polynôme optimal $\tilde{P}_n(x) = \sum_0^n \tilde{a}_k x^k$ dans le repère \mathcal{R}_N , pour revenir au problème initial, il restera à retrouver les coefficients a_p de $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$, ce qui pourra être réalisé car

$$P_n(x) = \tilde{P}_n\left(\frac{x-X_0}{h}\right) = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \left(\frac{x-X_0}{h}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{a}_k}{h^k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} X_0^{k-j} x^j, \quad (\text{B.7})$$

d'où

$$a_p = \sum_{i=p}^n \frac{\tilde{a}_i}{h^i} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} X_0^{i-p} \quad (\text{B.8})$$

B.3 Fenêtrage

Supposons maintenant qu'on dispose d'un grand nombre N_T de points provenant d'une discrétisation régulière de pas h . On ne va pas chercher à interpoler simultanément l'ensemble des points mais plutôt rechercher une interpolation locale calculée sur une partie de ces points. On appellera ainsi fenêtre de largeur N centrée sur M_q , où $N = 2m + 1$ est impair et $m < q \leq N_T - m$, l'ensemble des points $M_{q-m}, M_{q-m+1}, \dots, M_{q+m}$.

On peut appliquer la méthode précédente sur les N points de la fenêtre mais, compte tenu de l'imparité de N , il va s'avérer plus intéressant d'apporter une légère modification à cette méthode : on va choisir pour origine des abscisses, celle du centre de la fenêtre, plutôt que celle de son premier point.

Dans ce nouveau repère \mathcal{R}_q , les $\tilde{X}_k = \frac{X_k - X_p}{h}$ prennent alors les valeurs $\tilde{X}_{p-m} = -m, \dots, \tilde{X}_{p+m} = m$. En posant $x_i = \tilde{X}_{p+i}$, on obtient ainsi $x_i = i$ pour $i \in \llbracket -m; m \rrbracket$. Ce résultat peut s'énoncer comme suit :

L'interpolation d'une fenêtre de $N = 2m + 1$ couples de valeurs (X_j, Y_j) centrée sur X_k , se ramène à celles des couples (i, y_i) avec $i \in \llbracket -m; m \rrbracket$ et $y_i = Y_{k+i}$.

L'expression des $\tilde{U}_k = \sum_{i=-m}^m i^k$ devient donc, selon k ,

$$\tilde{U}_0 = S_{N,0}, \quad \tilde{U}_k = 0 \text{ si } k \text{ est impair, } \tilde{U}_k = 2S_{m,k} \text{ si } k \text{ est pair,} \quad (\text{B.9})$$

où

$$S_{m,k} = \sum_{i=0}^m i^k \quad (\text{B.10})$$

est la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des m premiers entiers non nuls.

Nous avons vu que les coefficients du polynôme, dans \mathcal{R}_q , s'obtenaient par la relation matricielle (B.6) qui, ici, nous donne

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{U}_0 & \tilde{U}_1 & \dots & \tilde{U}_n \\ \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \dots & \tilde{U}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{U}_n & \tilde{U}_{n+1} & \dots & \tilde{U}_{2n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_1 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Si l'ordre n du polynôme est pair, on a donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} N & 0 & 2S_{m,2} & \dots & 2S_{m,n} \\ 0 & 2S_{m,2} & 0 & \dots & 0 \\ 2S_{m,2} & 0 & 2S_{m,4} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 0 & 2S_{m,n+2} & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

et si n est impair

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} N & 0 & 2S_{m,2} & \dots & 0 \\ 0 & 2S_{m,2} & 0 & \dots & 2S_{m,n+1} \\ 2S_{m,2} & 0 & 2S_{m,4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2S_{m,n+1} & 0 & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Remarque :

Le calcul des coefficients du polynôme dans le repère initial s'obtient par la même formule que précédemment, avec X_q à la place de X_0 :

$$a_p = \sum_{i=p}^n \frac{\tilde{a}_i}{h^i} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} X_q^{i-p}. \quad (\text{B.14})$$

B.4 Polynôme glissant

Dans le cas de valeurs mesurées, lorsqu'on dispose d'un grand nombre N_T de points initiaux, l'objectif, bien souvent, n'est pas d'approcher cet ensemble par une expression analytique globale ou par morceaux. On va plutôt chercher à "lisser" cet ensemble afin de diminuer l'effet de perturbations supposées ou pour extraire une information ciblée.

Pour chaque fenêtre le polynôme d'interpolation n'est alors pas un objectif en soi mais une méthode pour remplacer la valeur Y_q mesurée au centre de la fenêtre par $P(X_q)$ supposée plus pertinente. En décalant, point par point la fenêtre, on disposera alors d'un polynôme P_q pour chaque fenêtre et d'une valeur $\bar{y}_q = P_q(X_q)$ qu'on substitue à Y_q pour obtenir un nouvel ensemble de point "lissé" $\{(X_k; \bar{y}_k)\}$.

Dans le repère \mathcal{R}_q vu précédemment, **on ne s'intéresse donc qu'à la valeur du polynôme en $x = 0$** . Cette valeur n'est autre que \tilde{a}_0 et n'est pas modifiée par le retour au repère initial. Les y_k sont donc obtenus par le calcul du seul terme constant du polynôme d'interpolation.

Remarque :

Les points d'interpolation obtenus sont compris entre les indices initiaux m et $N_T - m$. La méthode doit donc être adaptée pour les points proches du premier et du dernier point de l'ensemble initial en diminuant progressivement la taille de la fenêtre.

B.5 Procédure de lissage de Savitsky-Golay

Abraham Savitsky et Marcel Golay ont publié en 1964 un article dont le titre est "Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures". La méthode proposée s'appuie sur les étapes que nous avons développés plus haut. Bien qu'elle soit qualifiée parfois de filtre, de convolution (interprétation d'ailleurs évoquée dans l'article), ou d'algorithme de Savitsky-Golay, nous préférons parler de procédure, conformément au titre de l'article, car, indépendamment du domaine d'application, cette méthode est une procédure d'interpolation optimisée.

Cette procédure s'applique au lissage d'un ensemble initial de points, régulièrement discrétisé, en approchant, point par point, le centre d'une fenêtre glissante par la valeur en l'abscisse de ce point du polynôme d'interpolation issu de la méthode des moindres carrés.

Revenons sur le vecteur \tilde{T} dont les composantes sont les $\tilde{T}_k = \sum_{i=-m}^m i^k y_i$ avec $y_i = Y_{k+i}$ et $i \in \llbracket -m; m \rrbracket$. On peut écrire

$$T = LY \quad (B.15)$$

où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -m & -m+1 & \dots & m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-m)^n & (-m+1)^n & \dots & (m)^n \end{pmatrix} \quad (B.16)$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -m & -m+1 & \dots & m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-m)^n & (-m+1)^n & \dots & (m)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-m} \\ y_{-m+1} \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix}, \quad (B.17)$$

or on a vu que $\tilde{A} = \tilde{U}^{-1}\tilde{T}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{U}_0 & \tilde{U}_1 & \dots & \tilde{U}_n \\ \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \dots & \tilde{U}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{U}_n & \tilde{U}_{n+1} & \dots & \tilde{U}_{2n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_1 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}. \quad (B.18)$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{U}_0 & \tilde{U}_1 & \dots & \tilde{U}_n \\ \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \dots & \tilde{U}_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{U}_n & \tilde{U}_{n+1} & \dots & \tilde{U}_{2n} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -m & -m+1 & \dots & m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-m)^n & (-m+1)^n & \dots & (m)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-m} \\ y_{-m+1} \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad (B.19)$$

soit encore

$$\tilde{A} = GY \quad \text{où} \quad G = \tilde{U}^{-1}L = (G)_{i,j} \quad \text{est la matrice de Savitsky-Golay.} \quad (B.20)$$

En fait, seul le calcul du coefficient \tilde{a}_0 nous intéresse, il nous suffit en fait de disposer uniquement de la première ligne de cette matrice. En notant $g_s = G_{1,s-m-1}$, on a alors

$$\bar{y} = \tilde{a}_0 = \sum_{s=-m}^m g_s y_s. \quad (B.21)$$

Puisque g_s ne dépend que de la largeur N de la fenêtre et du degré n , choisi, du polynôme d'interprétation, les coefficients g_s peuvent être pré-calculés et sont fournis dans des tables. Le calcul des \bar{y} est alors immédiat car **c'est une combinaison linéaire des valeurs des ordonnées des points de la fenêtre.**

Exemple : Recherchons \bar{y} pour la fenêtre de 5 points : (1,12; 2,44), (1,47; 2,54), (1,82; 3,16), (2,17; 3,05), (2,52; 4,1) et pour un polynôme d'ordre 3. On a

$$G = \left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{35} & \frac{12}{35} & \frac{17}{35} & \frac{12}{35} & -\frac{3}{35} \\ \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}. \quad (B.22)$$

La première ligne de G nous permet de calculer

$$\bar{y} = \frac{-3 \times 2,44 + 12 \times 2,54 + 17 \times 3,16 + 12 \times 3,05 - 3 \times 4,1}{35} \simeq 2,89. \quad (\text{B.23})$$

Plutôt que d'effectuer le calcul matriciel, la table de lissage de Savitsky-Golay indique, pour 5 points et un polynôme d'ordre 3, que les coefficients sont -3, 12, 17, 12, -3 et que la normalisation est 35, ce qui nous permet d'écrire directement la formule précédente.

B.6 Calcul des coefficients de Savitsky-Golay

B.6.1 Parité du polynôme d'interpolation

On a vu que la forme de la matrice \tilde{U} pouvait être décomposée en deux cas (B.9). Nous la noterons S_P si le degré n du polynôme d'interpolation est pair, S_I s'il est impair :

$$S_P(n, m) = \begin{pmatrix} N & 0 & 2S_{m,2} & \dots & 2S_{m,n} \\ 0 & 2S_{m,2} & 0 & \dots & 0 \\ 2S_{m,2} & 0 & 2S_{m,4} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 0 & 2S_{m,n+2} & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

et

$$S_I(n, m) = \begin{pmatrix} N & 0 & 2S_{m,2} & \dots & 0 \\ 0 & 2S_{m,2} & 0 & \dots & 2S_{m,n+1} \\ 2S_{m,2} & 0 & 2S_{m,4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2S_{m,n+1} & 0 & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Nous allons alors pouvoir exploiter la propriété suivante (non démontrée ici) :

Propriété 1 : Si une matrice carrée inversible $A_{n,n}$, n pair, est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & \dots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & \dots & 0 & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & 0 & a_{n,3} & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors A^{-1} est de la forme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \alpha_{1,3} & \dots & 0 & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & 0 & \dots & \alpha_{2,n} & 0 \\ \alpha_{3,1} & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & 0 & \alpha_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & 0 & \alpha_{n,3} & \dots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix},$$

de plus, toute matrice inversible B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & \dots & 0 & a_{1,n} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & a_{2,n} & 0 & b_{2,n+1} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & \dots & 0 & a_{3,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & 0 & a_{n,3} & \dots & 0 & a_{n,n} & 0 \\ 0 & b_{n+1,2} & 0 & \dots & b_{n+1,n-1} & 0 & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

possède alors un inverse de la forme

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \alpha_{1,3} & \dots & 0 & \alpha_{1,n} & 0 \\ 0 & \beta_{2,2} & 0 & \dots & \beta_{2,n} & 0 & \beta_{2,n+1} \\ \alpha_{3,1} & 0 & \alpha_{3,3} & \dots & 0 & \alpha_{3,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & 0 & \alpha_{n,3} & \dots & 0 & \alpha_{n,n} & 0 \\ 0 & \beta_{n+1,2} & 0 & \dots & \beta_{n+1,n-1} & 0 & \beta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Cette propriété implique que les lignes impaires sont conservées lors de l'inversion et, en particulier, que la première ligne de $S_p^{-1}(m, v)$ est identique à celle de $S_p^{-1}(m, v-1)$ complétée par un zéro. Cela va nous permettre d'obtenir une nouvelle propriété :

Propriété 2 : Pour une même fenêtre, la valeur d'interpolation \bar{y} obtenue par la procédure de Savitsky-Golay est la même pour une interpolation par un polynôme d'ordre $2p$ et par un polynôme d'ordre $2p+1$.

Preuve :

Dans le cas de l'interpolation par un polynôme de degré n pair, $S_p^{-1}(n, m)$ est de la forme

$$S_p^{-1}(n, m) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} \\ 0 & \sigma_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{3,1} & 0 & \sigma_{3,3} & \dots & \sigma_{3,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1} & 0 & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

et on a

$$G = S_p^{-1}L = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} \\ 0 & \sigma_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_{3,1} & 0 & \sigma_{3,3} & \dots & \sigma_{3,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1} & 0 & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -m & -m+1 & \dots & m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-m)^n & (-m+1)^n & \dots & (m)^n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Seule la première ligne de G est utilisée pour le calcul de \bar{y} . On obtient ainsi

$$g_k = \sum_{p=1}^n \sigma_{1,p} k^{p-1}. \quad (\text{B.28})$$

De même, dans le cas d'un polynôme de degré $n+1$ pair, on a

$$S_p^{-1}(n+1, m) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} & 0 \\ 0 & \sigma_{2,2} & 0 & \dots & 0 & \sigma_{2,n+1} \\ \sigma_{3,1} & 0 & \sigma_{3,3} & \dots & \sigma_{3,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1} & 0 & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_{n,n} & 0 \\ 0 & \sigma_{n+1,2} & 0 & \dots & 0 & \sigma_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

et \bar{y} s'en déduit de manière similaire au cas précédent. Puisque le dernier terme de la première ligne de $S_p^{-1}(n+1, m)$ est nul, on retrouve alors la formule (B.28), ce qui prouve la proposition.

Remarque :

les polynômes d'ordre $n = 2p$ et $n+1 = 2p+1$ conduisent à la même valeur de \bar{y} mais ne sont pas identiques pour autant.

B.6.2 Réduction de la dimension de la matrice

Seul le cas où n est pair nous intéresse, compte tenu du résultat précédent. On a, dans ce cas, la relation

$$\begin{pmatrix} N & 0 & 2S_{m,2} & \dots & 2S_{m,n} \\ 0 & 2S_{m,2} & 0 & \dots & 0 \\ 2S_{m,2} & 0 & 2S_{m,4} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 0 & 2S_{m,n+2} & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

qui peut se décomposer en

$$\begin{pmatrix} N & 2S_{m,2} & 2S_{m,4} & \dots & 2S_{m,n} \\ 2S_{m,2} & 2S_{m,4} & 2S_{m,6} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 2S_{m,n+2} & 2S_{m,n+4} & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_2 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

et

$$\begin{pmatrix} 2S_{m,2} & 2S_{m,4} & 2S_{m,6} & \dots & 2S_{m,n} \\ 2S_{m,4} & 2S_{m,6} & 2S_{m,8} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 2S_{m,n+2} & 2S_{m,n+4} & \dots & 2S_{m,2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_3 \\ \dots \\ \tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_3 \\ \dots \\ \tilde{T}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Puisque nous recherchons uniquement \tilde{a}_0 , il nous suffit donc de résoudre $S_P A_P = T_P$ avec

$$S_P = \begin{pmatrix} N & 2S_{m,2} & \dots & 2S_{m,n} \\ 2S_{m,2} & 2S_{m,4} & \dots & 2S_{m,n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2S_{m,n} & 2S_{m,n+2} & \dots & 2S_{m,2n} \end{pmatrix}, \quad A_P = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T_P = \begin{pmatrix} \tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_2 \\ \dots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

De manière similaire à la matrice L , on introduit alors la matrice L_P :

$$L_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (-m)^2 & (-m+1)^2 & \dots & m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-m)^n & (-m+1)^n & \dots & (m)^n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.34})$$

et on a alors

$$G_P = S_P^{-1} L_P. \quad (\text{B.35})$$

En écrivant la première ligne de G_P sous forme fractionnaire avec un dénominateur commun, qualifié de normalisation, on obtient ainsi les coefficients de Savitsky-Golay correspondant à n et m .

B.6.3 Tableaux

Les valeurs sont usuellement présentées en tableaux, néanmoins l'article initial comportait quelques erreurs d'écriture; ainsi de nombreux tableaux en usage reproduisent ces erreurs ou ne présentent que des corrections partielles. Les tableaux ci-après contiennent les valeurs que nous avons recalculées et vérifiées. L'utilisation de ces tableaux se fait conformément à l'exemple décrit au paragraphe (B.5).

Le nombre de points qu'il est nécessaire d'utiliser pour une opération de lissage peut, bien entendu, être plus élevé, voire beaucoup plus élevé que dans ces tableaux pour le lissage. Nous avons créé pour les besoins des lissages utilisés dans ce manuscrit un fichier des valeurs allant jusqu'à 241 points.

TABLEAU B.1 – Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 2 et 3.

Coefficients de lissage de Savitsky-Golay à l'ordre 2 et 3											
Points	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5
-12	-253	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11	-138	-42	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-10	-33	-21	-171	0	0	0	0	0	0	0	0
-9	62	-2	-76	-136	0	0	0	0	0	0	0
-8	147	15	9	-51	-21	0	0	0	0	0	0
-7	222	30	84	24	-6	-78	0	0	0	0	0
-6	287	43	149	89	7	-13	-11	0	0	0	0
-5	342	54	204	144	18	42	0	-36	0	0	0
-4	387	63	249	189	27	87	9	9	-21	0	0
-3	422	70	284	224	34	122	16	44	14	-2	0
-2	447	75	309	249	39	147	21	69	39	3	-3
-1	462	78	324	264	42	162	24	84	54	6	12
0	467	79	329	269	43	167	25	89	59	7	17
1	462	78	324	264	42	162	24	84	54	6	12
2	447	75	309	249	39	147	21	69	39	3	-3
3	422	70	284	224	34	122	16	44	14	-2	0
4	387	63	249	189	27	87	9	9	-21	0	0
5	342	54	204	144	18	42	0	-36	0	0	0
6	287	43	149	89	7	-13	-11	0	0	0	0
7	222	30	84	24	-6	-78	0	0	0	0	0
8	147	15	9	-51	-21	0	0	0	0	0	0
9	62	-2	-76	-136	0	0	0	0	0	0	0
10	-33	-21	-171	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-138	-42	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-253	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Normalisation	5175	805	3059	2261	323	1105	143	429	231	21	35

TABLEAU B.2 – Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 4 et 5.

Coefficients de lissage de Savitsky-Golay à l'ordre 4 et 5										
Points	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7
-12	1265	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11	-345	95	0	0	0	0	0	0	0	0
-10	-1122	-38	11628	0	0	0	0	0	0	0
-9	-1255	-95	-6460	340	0	0	0	0	0	0
-8	-915	-95	-13005	-255	195	0	0	0	0	0
-7	-255	-55	-11220	-420	-195	2145	0	0	0	0
-6	590	10	-3940	-290	-260	-2860	110	0	0	0
-5	1503	87	6378	18	-117	-2937	-198	18	0	0
-4	2385	165	17655	405	135	-165	-135	-45	15	0
-3	3155	235	28190	790	415	3755	110	0	-55	5
-2	3750	290	36660	1110	660	7500	390	60	30	-30
-1	4125	325	42120	1320	825	10125	600	120	135	75
0	4253	337	44003	1393	883	11063	677	143	179	131
1	4125	325	42120	1320	825	10125	600	120	135	75
2	3750	290	36660	1110	660	7500	390	60	30	-30
3	3155	235	28190	790	415	3755	110	0	-55	5
4	2385	165	17655	405	135	-165	-135	-45	15	0
5	1503	87	6378	18	-117	-2937	-198	18	0	0
6	590	10	-3940	-290	-260	-2860	110	0	0	0
7	-255	-55	-11220	-420	-195	2145	0	0	0	0
8	-915	-95	-13005	-255	195	0	0	0	0	0
9	-1255	-95	-6460	340	0	0	0	0	0	0
10	-1122	-38	11628	0	0	0	0	0	0	0
11	-345	95	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1265	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	30015	2185	260015	7429	4199	46189	2431	429	429	231

TABLEAU B.3 – Coefficients de Savitsky-Golay pour des polynômes d'ordre 6 et 7.

Coefficients de lissage de Savitsky-Golay à l'ordre 6 et 7									
Points	25	23	21	19	17	15	13	11	9
-12	-168245	0	0	0	0	0	0	0	0
-11	244720	-90440	0	0	0	0	0	0	0
-10	187264	153748	-9044	0	0	0	0	0	0
-9	-31920	90440	18088	-952	0	0	0	0	0
-8	-224105	-56525	7021	2261	-2275	0	0	0	0
-7	-293360	-159800	-11016	344	6500	-260	0	0	0
-6	-212240	-164220	-19908	-1918	-910	910	-770	0	0
-5	-336	-65352	-14364	-2380	-6916	-476	3388	-28	0
-4	294315	109095	3801	-679	-5215	-1085	-3605	161	-7
-3	610960	315000	28812	2492	3500	-140	-3500	-308	56
-2	889000	504700	53508	5978	15050	1750	4550	28	-196
-1	1078000	637000	71344	8624	24500	3500	14000	784	392
0	1144839	684323	77821	9605	28109	4199	18063	1157	797
1	1078000	637000	71344	8624	24500	3500	14000	784	392
2	889000	504700	53508	5978	15050	1750	4550	28	-196
3	610960	315000	28812	2492	3500	-140	-3500	-308	56
4	294315	109095	3801	-679	-5215	-1085	-3605	161	-7
5	-336	-65352	-14364	-2380	-6916	-476	3388	-28	0
6	-212240	-164220	-19908	-1918	-910	910	-770	0	0
7	-293360	-159800	-11016	344	6500	-260	0	0	0
8	-224105	-56525	7021	2261	-2275	0	0	0	0
9	-31920	90440	18088	-952	0	0	0	0	0
10	187264	153748	-9044	0	0	0	0	0	0
11	244720	-90440	0	0	0	0	0	0	0
12	-168245	0	0	0	0	0	0	0	0
0	5892945	3231615	334305	37145	96577	12597	46189	2431	1287

B.7 Exemple d'application

Les figures (B.1) et (B.2) présentent un signal bruité, représenté en bleu, lissé par la procédure de Savitsky-Golay par un polynôme d'ordre 2 et une fenêtre de 21 points pour la figure (B.1), par un polynôme d'ordre 1 et une fenêtre de 51 points pour la figure (B.2). Les courbes lissées sont représentées en rouge.

Remarque :

La procédure proposée dans l'article de 1969 de Savitsky et Golay, aborde, en sus des valeurs "lissées", le calcul des valeurs prises par les dérivées successives du polynôme d'interpolation, en chaque point sur lequel une fenêtre est centrée. Nous n'avons pas repris l'élaboration des coefficients des dérivées dans cette annexe.

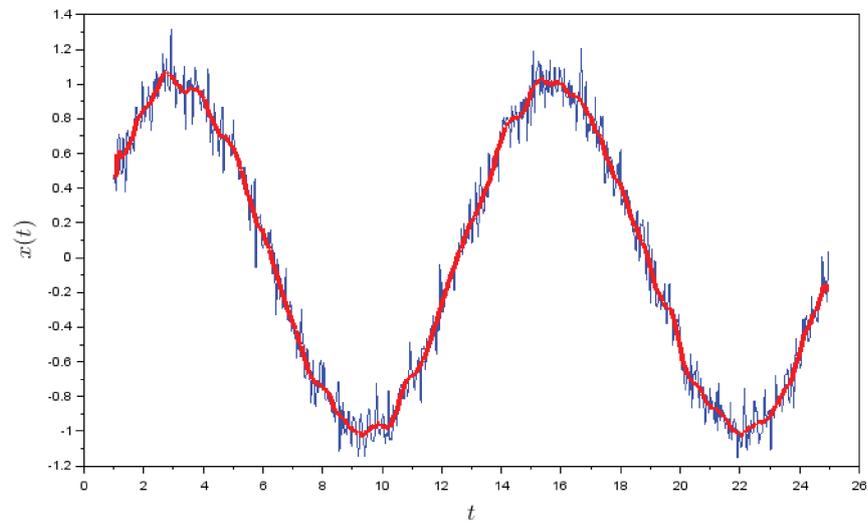


FIGURE B.1 – Lissage par la procédure de Saviysky-Golay par un polynôme d'ordre 2 et une fenêtre de 21 points.

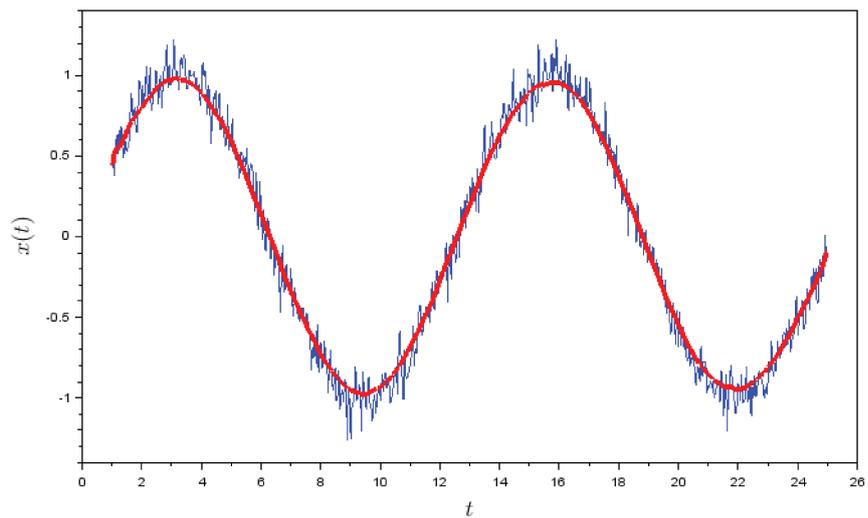


FIGURE B.2 – Lissage par la procédure de Saviysky-Golay par un polynôme d'ordre 1 et une fenêtre de 51 points.

Bibliographie

- [1] J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur. In *Firmin Didot, Paris*, 1822. [14](#)
- [2] K. Khaldi. *Traitement et analyse des signaux sonores par Transformée de Huang (EMD)*. PhD thesis, ED SICMA, Brest, 2012. [14](#)
- [3] D. Dimitriadis, P. Maragos, and A. Potamianos. Auditory Teager energy cepstrum coefficients for robust speech recognition. In *Proc. European Conf. on Speech Communication and Technology - Interspeech*, pages 3013–3013, 2005. [14](#)
- [4] A. Potamianos. *Speech processing applications using an AM-FM modulation model*. PhD dissertation, Harvard University, 1995. [14](#)
- [5] K. Khaldi, A.O. Boudraa, and A. Komaty. Speech enhancement using empirical mode decomposition and Teager-Kaiser energy operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(1) :451–459, 2014. [14](#)
- [6] R. Hamila, E. Simona Lohan, and M. Renfors. Subchip multipath delay estimation for downlink WCDMA system based on Teager-Kaiser operator. *IEEE Communications Letters*, 7(1) :1–3, 2003. [14](#)
- [7] B. Santhanam. *Multicomponent AM-FM Energy Demodulation with Applications to Signal Processing and Communications*. PhD dissertation, Georgia Institute of Technology, 1997. [14](#)
- [8] H.U. Dehner, H. Jakel, D. Burgkhardt, and F.K. Jonral. The Teager-Kaiser energy operator in presence of multiple narrowband interference. *IEEE Comm. Lett.*, 14(8) :716–718, 2010. [14](#)
- [9] Z. Xu, H. Nie, Z. Chen, H. Khani, W. Xiang, and L. Yu. On the nonlinear Teager-Kaiser operator for energy detection based impulse radio UWB receivers. *IEEE Trans. Wireless Comm.*, 13(5) :2955–2965, 2014. [14](#), [34](#)
- [10] H.U. Dehner, H. Jakel, and F.K. Jonral. On the modified Teager-Kaiser energy operator regarding narrowband interference. In *Proc. Wireless Telecommunications Symposium*, pages 1–5, 2011. [14](#)
- [11] M. Gautier, M. Laugeois, and D. Noguét. Teager-Kaiser energy detector for narrowband wireless microphone spectrum sensing. In *Proc. Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications*, pages 1–5, 2010. [14](#)
- [12] M.S. Pattichis and A.C. Bovik. Analyzing image structure by multidimensional frequency modulation. *IEEE Trans. Mach. Patt. Anal. Intell.*, 29(5) :753–766, 2007. [14](#)
- [13] J.P. Havlicek. *AM-FM image models*. PhD dissertation, The University of Texas at Austin, 1996. [14](#)
- [14] V.M. Murray Herrera. *AM-FM methods for image and video processing*. PhD dissertation, University of New Mexico, 2009. [14](#)
- [15] V. Murray. *Multidimensional AM-FM Models with Applications*. PhD dissertation, University of New Mexico, 2008. [14](#)
- [16] C. T. Nguyen. *Modulation Domain image Processing*. PhD dissertation, University of Oklahoma, 2012. [14](#)

- [17] G. Gianto. *Multi-dimensional Teager-Kaiser signal processing for improved characterization using white light interferometry*. PhD thesis, ED MSII, Strasbourg, 2018. 14
- [18] V.T. Tung, F. AlThobiani, and A. Ball. An approach to fault diagnosis of reciprocating compressor valves using teager-kaiser energy operator and deep belief networks. *Expert Systems with Applications*, 41(9) :4113–4122, 2014. 14
- [19] S. Solnik, P. Rider, K. Steinweg, P. DeVita, and T. Hortobagyi. Teager-Kaiser energy operator signal conditioning improves EMG onset detection. *Eur. J. Appl. Physiol.*, 110(3) :489–498, 2010. 14, 33
- [20] V. Kandia and Y. Stylianou. Detection of sperm whale clicks based on the Teager-Kaiser energy operator. *Appl. Acoust.*, 67(11-12) :1144–1163, 2006. 14, 34
- [21] K.P. Constantinou, I.P. Constantinou, C.S. Pattichis, and M.S. Pattichis. Medical image analysis using AM-FM models and methods. *IEEE Reviews Biomed. Eng.*, 14 :270–289, 2021. 14
- [22] M.S. Pattichis, C.S. Pattichis, M. Avraam, A.C. Bovik, and K. Kyriacou. AM-FM texture segmentation in electron microscopic muscle imaging. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 19(12) :1253–1258, 2000. 14
- [23] A. Drira. *Geoacoustic inversion : improvement and extension of the sources image method*. PhD thesis, ED EDSML, Brest, 2015. 14
- [24] A. Drira, L. Guillon, and A.O. Boudraa. Image source detection for geoacoustic inversion by the Teager-Kaiser energy operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(6) :258–264, 2014. 14
- [25] A. Bouchikhi, A.O. Boudraa, and G. Maze. Analysis of lamb waves in aluminium tube using Hilbert-Huang and Teager-Huang. In *Proc. Underwater Acoustic Measurements*, pages 1455–1460, 2009. 14
- [26] A.C. Bovik and P. Maragos. Conditions for positivity of an energy operator. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 42(2) :469–471, 1994. 15, 48, 55, 178
- [27] K.G. Larkin. On the positivity of an energy operator : the interplay of amplitude and phase modulation in the Teager-Kaiser energy operator, occasional. *Texts in the Pursuit of Clarity and Simplicity in Research*, 1(2) :1–8, 2015. 15, 48, 57, 178
- [28] E. Chassande-Mottin and P. Flandrin. On the time-frequency detection of chirps. In *Applied and Computational Harmonic Analysis*, volume 6, pages 252–281, 1999. 15, 49, 69, 80, 178
- [29] P. Maragos, T.F. Quatieri, and J.F. Kaiser. Energy separation in signal modulations with applications to speech analysis. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 41 :3024–3051, 1993. 15, 29, 30, 36, 37, 39, 111
- [30] P. Maragos, J.F. Kaiser, and T.F. Quatieri. On amplitude and frequency demodulation using energy operators. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 41(4) :1532–1550, 1993. 15, 29, 30, 37, 39, 48, 111
- [31] C.E. Shannon. Communication in the presece of noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1) :10–21, 1949. 15, 82, 92
- [32] T.M. Brown. Resource letter EEC-1 on the evolution of energy concepts from galileo to helmholtz. *American Journal of Physics*, 33 :759–765, 1965. 18
- [33] C. Smith. *The Science of Energy - a Cultural History of Energy Physics in Victorian Britain*. The University of Chicago Press, 1998. 18
- [34] R.B. Lindsay. The concept of energy and its early historical development. *Foundations of Physics*, 1(4) :383–393, 1971. 18
- [35] D. Freude. The history of the word "energy". <http://www.energy-fundamentals.org/>, 2021. 18
- [36] A. Robinson. *Thomas Young, The Last Man Who Knew Everything*. Pi Press, 2006. 18
- [37] G.G. de Coriolis. Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 13 :268–302, 1832. 18

- [38] W.J.M. Rankine. Outlines of the science of energetics. *The Edinburgh New Philosophical Journal*, 2 :120–141, 1855. [18](#)
- [39] W. Thomson. On the sources of energy available to man for the production of mechanical effect. *BAAS Rep.*, 51(5) :513–518, 1881. [18](#)
- [40] A. Einstein. On the relativity principle and the conclusions drawn from it. *Jahrbuch Radioaktivitat Elektronik*, 4 :411–462, 1907. [18](#)
- [41] A.E. Bell. The concept of energy. *Nature*, 151 :519–523, 1943. [18](#)
- [42] E. Hecht. Understanding energy as a subtle concept : A model for teaching and learning energy. *Am. J. Phys.*, 87(7) :495–503, 2019. [18](#)
- [43] R.L. Coelho. On the concept of energy : How understanding its history can improve physics teaching. *Sci. Educ.*, 18 :961–983, 2009. [18](#)
- [44] R. Feynman. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley, 1964. [18](#)
- [45] L. Cohen. *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, 1994. [18](#)
- [46] B. Boashash. *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive reference*. Elsevier Academic Press, 2 ed. edition, 2015. [18](#)
- [47] A.O. Boudraa and F. Salzenstein. In *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive reference*, chapter Teager-Kaiser Energy Operators in Time-Frequency Analysis, pages 209–217. Edited by B. Boashash, Elsevier Academic Press. [18](#), [43](#)
- [48] D.S.L. Cardwell. Some factors in the early development of the concepts of power, work and energy. *The British Journal for the History of Science*, 3(3) :209–224, 1967. [18](#)
- [49] S.D. Stearns. *Digital signal analysis*. Hayden book company, 1975. [19](#)
- [50] J. Max. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, 1977. [19](#)
- [51] J.V. Candy. *Signal processing. The modern approach*. McGraw-Hill, 1988. [19](#)
- [52] B. Picinbono. *Théorie de signaux et des systèmes*. Dunod Université, 1989. [19](#)
- [53] F. de Coulon. *Théorie et traitement de signaux*. Presses Polytechniques, 1990. [19](#)
- [54] B.P. Lathi. *Modern digital and analog communication systems*. Oxford University Press, 3 ed. edition, 1998. [19](#), [28](#)
- [55] Y. Deville. *Signaux temporels et spatiotemporels : Analyse des signaux, théorie de l'information, traitement d'antenne, séparation aveugle de sources*. Ellipses, 2011. [19](#)
- [56] A.V. Oppenheim, A.S. Wilsky, and S.H. Nawab. *Signals and Systems*. Pearson, 2014. [19](#)
- [57] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, M.T. Yoder, and W.T. Padgell. *Discrete-time signal processing*. Pearson, 2014. [19](#)
- [58] H.M. Teager and S.M. Teager. A phenomenological model for vowel production in the vocal tract. In *Speech Sciences : Recent Advances*, pages 73–109. College Hill Press, 1983. [21](#)
- [59] H.M. Teager and S.M. Teager. Evidence for nonlinear production mechanisms in the vocal tract. In *NATO Advanced Study Inst. Speech Production Speech Modeling, Bonas, France*, pages 241–261, 1990. [21](#)
- [60] J.F. Kaiser. On a simple algorithm to calculate the 'energy of a signal. In *Proc. ICASSP*, pages 381–384, 1990. [21](#), [22](#)
- [61] J.F. Kaiser. Some useful properties of Teager's energy operators. In *Proc. ICASSP*, pages 149–152, 1993. [21](#), [43](#)
- [62] H.M. Teager and S.M. Teager. Evidence for nonlinear sound production mechanisms in the vocal tract. In *NATO ASI Series, Speech Production and Speech Modelling*, pages 241–261, 1989. [21](#)

- [63] M. Moshinsky and Y.F. Smirnov. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*. Harwood academic publishers GmbH, 1996. [21](#)
- [64] E. Kvedalen. Signal processing using the Teager energy operator and other operators. Candidatus scientiarum thesis, University of Oslo, 2003. [24](#)
- [65] A. Papoulis. *Probability, Random Variable and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1991. [26](#)
- [66] Y. Preaux and A.O. Boudraa. Statistical behavior of Teager-Kaiser energy operator in presence of white gaussian noise. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 27 :635–639, 2020. [27](#)
- [67] A.O. Boudraa and F. Salzenstein. Teager-Kaiser energy methods for signal and image analysis : A review. *Digital Sig. Proc.*, 78 :338–375, 2018. [31](#), [44](#), [48](#), [73](#)
- [68] N.E. Huang, Z. Wu, S.R. Long, K.C. Arnold, X. Chen, and K. Blank. On instantaneous frequency. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(2) :177–229, 2009. [31](#), [37](#)
- [69] G. Evangelopoulos and P. Maragos. Multiband modulation energy tracking for noisy speech detection. *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Proc.*, 14(6) :2024–2038, 2006. [31](#), [32](#)
- [70] S. Liu, G. Tang, X. Wang, and Y. He. Time-frequency analysis based on improved variational mode decomposition and Teager energy operator for rotor system fault diagnosis. *Mathematical Problems Eng.*, 2016 :1–9, 2016. [31](#), [48](#), [179](#)
- [71] J.C. Cexus and A.O. Boudraa. Teager-Huang analysis applied to sonar target recognition. *Int. J. Inform. and Commun. Eng. (formerly Int. J. Sig. Proc.)*, 1(1) :111–114, 2005. [31](#)
- [72] Y. Qin. Multicomponent AM-FM demodulation based on energy separation and adaptive filtering. *Mech. Sys. Sig. Proc.*, 38 :440–459, 2013. [31](#)
- [73] J.C. Cexus and A.O. Boudraa. Nonstationary signals analysis by Teager-Huang Transform (THT). In *Proc. EUSIPCO*, pages 1–5, 2006. [31](#)
- [74] A. Bouchikhi. *Analyse des signaux AM-FM par Transformation de Huang-Teager : Application à l'acoustique sous-marine*. PhD thesis, ED MATISS, Rennes 1, 2010. [31](#)
- [75] A. Bouchikhi, A.O. Boudraa, J.C. Cexus, and Th. Chonavel. Analysis of multicomponent LFM signals by Teager Huang-Hough transform. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 50(2) :1222–1233, 2014. [31](#)
- [76] J.C. Cexus, A.O. Boudraa, and A. Bouchikhi. A combined Teager-Huang and Hough transforms for LFM signals detection. In *Proc. IEEE ISCCSP*, pages 1–5, 2010. [31](#)
- [77] J.C. Cexus, A.O. Boudraa, A. Bouchikhi, and A. Khenchaf. Analyse des échos de cibles sonar par transformation de huang-teager (tht). *Traitement du Signal*, 24(1-2) :119–129, 2008. [31](#)
- [78] A. Bouchikhi and A.O. Boudraa. Multicomponent AM-FM signals analysis based on EMD-B-splines ESA. *Signal Processing*, 92(9) :2214–2228, 2012. [31](#)
- [79] A.C. Bovik, P. Maragos, and T.F. Quatieri. AM-FM detection and separation in noise using multiband energy operators. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 41(12) :3245–3265, 1993. [32](#), [36](#), [159](#)
- [80] A. Potamianos and P. Maragos. Speech formant frequency and bandwidth tracking using multiband energy demodulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 6 :3795–3806, 1996. [32](#)
- [81] D. Dimitriadis and P. Maragos. A comparison of the energy operator and the Hilbert transform approach to signal and speech demodulation. *Sig. Proc.*, 37 :95–120, 1994. [32](#)
- [82] W. Lin, C. Hamilton, and P. Chitrapu. A generalization to the Teager-Kaiser energy function & application to resolving two closely-spaced tones. In *Proc. ICASSP*, pages 1637–1640, 1995. [33](#)
- [83] J.H. Choi and T. Kim. Neural action potential detector using multiresolution TEO. *Electron. Lett.*, 38(12) :541–543, 2002. [33](#)
- [84] K. Wu, D. Zhang, and G. Lu. Gmat : Glottal closure instants detection based on the multiresolution absolute Teager-Kaiser energy operator. *Digital Sig. Proc.*, 69 :286–299, 2017. [33](#)

- [85] S.A. Khoubroy, I.M.S. Panahi, and J.H.L. Hansen. Howling detection in hearing aids based on generalized Teager-Kaiser operator. *IEEE/ACM Trans. Audio Speech and Language Processing*, 23(1) :154–161, 2015. [33](#)
- [86] H.K. Grag and A.K. Kohli. Nonstationary-epileptic-spike detection algorithm in EEG signal using SNEO. *Biomed. Eng. Lett.*, 3 :80–86, 2013. [33](#)
- [87] A. Rajeev and J. Gotman. Adaptive segmentation of electroencephalographic data using a nonlinear energy operator. In *Proc. IEEE ISCAS*, pages 199–202, 1999. [33](#)
- [88] H. Azami and S. Sanei. Spike detection approaches for noisy neuronal data : Assessment and comparison. *Neurocomputing*, 133 :491–506, 2014. [33](#)
- [89] M. Moore, S. Mitra, and R. Bernstein. A generalization of the Teager algorithm. In *Proc. IEEE Workshop NSP*, pages 1–4, 1997. [33](#)
- [90] S. Thurnhofer. *Handbook of Image and Video Processing*, chapter Two-dimensional Teager filters, pages 167–202. San Diego : Academic Press. [34](#)
- [91] J. Fang and L.E. Atlas. Quadratic detectors for energy estimation. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 43(11) :2582–2594, 1995. [34](#)
- [92] S. Mukhopadhyay and G.C. Ray. A new interpretation of nonlinear energy operator and its efficacy in spike detection. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 45(2) :180–187, 1998. [34](#)
- [93] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, and K. Abed-Meraim. Cross ψ_b -energy operator-based signal detection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(6) :4283–4289, 2008. [34](#), [43](#)
- [94] S.K. Mitra, H. Li, I.S. Lin, and T.H. Yu. A new class of nonlinear filters for image enhancement. In *Proc. ICASSP*, volume 91, pages 2525–2528, 1991. [35](#), [44](#)
- [95] D. Gabor. Theory of communications. *J. EE (London)*, 93 :429–457, 1946. [37](#)
- [96] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, and H.H. Liu. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proc. Royal Soc. London, A*. 454(1971) :903–995, 1998. [37](#)
- [97] A.O. Boudraa. Instantaneous frequency estimation of FM signals by cross- ψ_b energy operator. *Electron. Lett.*, 47(10) :623–624, 2011. [42](#), [43](#)
- [98] A.O. Boudraa. Relationships between ψ_b -energy operator and some time-frequency representations. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 17(6) :527–530, 2010. [42](#), [43](#)
- [99] W. Lin and P. Chitrapu. Time-frequency distributions based on Teager-Kaiser energy function. In *Proc. ICASSP*, pages 1818–1821, 1996. [42](#)
- [100] R. Hamila, J. Astola, F. Alaya Cheikh, M. Gabbouj, and M. Renfors. Teager energy and the ambiguity function. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 47(1) :260–262, 1999. [42](#)
- [101] J.C. Cexus and A.O. Boudraa. Link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator. *Elect. Lett.*, 40(12) :778–780, 2004. [42](#), [43](#)
- [102] J.C. Cexus. *Analyse des signaux non-stationnaires par transformation de Huang, opérateur de Teager-Kaiser, et Transformation de Huang-Teager (THT)*. PhD thesis, ED MATISSE, Renne 1, 2005. [42](#), [43](#)
- [103] P.J. Loughlin and B. Tracet. Instantaneous frequency and the conditional mean frequency of a signal. *Signal Processing*, 60(2) :153–162, 1997. [42](#)
- [104] B. Tracet and P.J. Loughlin. Non-stationary signal classification using the joint moments of time-frequency distributions. *Pattern Recognition*, 31(11) :1635–1641, 1998. [42](#)
- [105] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, K. Abed-Meraim, and Z. Saidi. Interaction measure of AM-FM signals by cross- ψ_b -energy operator. In *Proc. ISSPA*, pages 775–778, 2005. [43](#)
- [106] F. Salzenstein, P. Montgomery, and A.O. Boudraa. Local frequency and envelope estimation by Teager-Kaiser energy operators in white-light scanning interferometry. *Optics Express*, 22(15) :18325–18334, 2014. [43](#)

- [107] L. Guillon and A.O. Boudraa. On the use of energy operator for coherence studies. In *Proc. International Conference and Exhibition on Underwater Acoustics*, pages 565–572, 2013. 43
- [108] A.O. Boudraa, S. Benramdane, J.C. Cexus, and Th. Chonavel. Some useful properties of cross- ψ_b energy operator. *Int. J. Electron. Comm.*, 63(9) :728–735, 2009. 43
- [109] Z. Saidi, A.O. Boudraa, J.C. Cexus, and S. Benrennane. Time-delay estimation using cross- ψ_b -energy operator. *Int. J. Inform. Commun. Eng. (formerly Int. J. Sig. Proc.)*, 1(1) :96–99, 2005. 43
- [110] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, M. Groussat, and P. Brunagel. An energy-based similarity measure for time series. *EURASIP Journal on Advances Sig. Proc.*, pages 1–8, 2008. 43, 48, 179
- [111] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, and H. Zaidi. Functional segmentation of dynamic nuclear images by cross- ψ_b -energy operator. *Computer Methods and Programs Biomed.*, 84(2-3) :146–152, 2006. 43
- [112] W.F. Zhang, C.C. Liu, and H. Yan. Clustering of temporal gene expression data by regularized spline regression an energy based similarity measure. *Patt. Recong.*, 43 :3969–3976, 2010. 43
- [113] A.O. Boudraa, Th. Chonavel, and J.C. Cexus. ψ_b -energy operator and cross-power spectral density. *Sig. Proc.*, 94 :236–240, 2014. 43
- [114] A. Bovik. *Handbook of Image and Video Processing*. Academic Press, 2005. 43
- [115] J.P. Havlicek, D.S. Harding, and A.C. Bovik. Multidimensional quasi-eigenfunction approximations and multicomponent AM-FM models. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 9(2) :227–242, 2000. 43
- [116] J.P. Havlicek, P.C. Tay, and A.C. Bovik. *Handbook of Image and Video Processing*, chapter AM-FM image models : fundamental techniques and emerging trends, pages 377–395. Elsevier Academic Press, Burlington, 2 ed. edition, 2005. 43
- [117] A. Restrepo and J. Quiroga. Root and pre-constant signals of the 1d teager-kaiser operator. *Signal, Image and Video Processing*, 5(3) :363–378, 2011. 44
- [118] N. Strobel G. Ramponi, S.K. Mitra, and T.H. Yu. Nonlinear unsharp masking methods for image contrast enhancement. *J. Electronic Imag.*, 5(3) :353–366, 1996. 44
- [119] E.H.S. Diop. *Modèles AM-FM et approches par équations aux dérivées partielles de la décomposition modale empirique pour l'analyse des signaux et des images*. PhD thesis, ED MATISSE, Renne 1, 2009. 44
- [120] J.P. Havlicek, D.S. Harding, and A.C. Bovik. Multidimensional quasi-eigenfunction approximations and multicomponent AM-FM models. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 9, 2000. 44
- [121] E.H.S. Diop and A.O. Boudraa. Higher order Teager-Kaiser operators for image analysis : Part II - A multicomponent image demodulation. In *Proc. ICIP*, pages 1357–1360, 2009. 44
- [122] E.H.S. Diop, A.O. Boudraa, and F. Salzenstein. A joint 2D AM-FM estimation based on higher order Teager-Kaiser energy operators. *Sig. Imag. Video Proc.*, 5(1) :61–68, 2011. 44
- [123] I. Kokkinos, G. Evangelopoulos, and P. Maragos. Texture analysis and segmentation using modulation features, generative models, and weighted curve evolution. *IEEE Trans. Patt. Anal Mach Intell.*, 31(1) :142–157, 2009. 44
- [124] P. Maragos and A.C. Bovik. Image demodulation using multidimensional energy separation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12 :1867–1876, 1995. 44
- [125] A.O. Boudraa and E.H.S. Diop. An improved image demodulation algorithm based on Teager-Kaiser operator. In *Proc. ISCCSP*, pages 876–881, Malta, 2008. 44
- [126] T.H. Yu, S.K. Mitra, and J.F. Kaiser. A novel nonlinear filter for image enhancement. In *Proc. SPIE/SPSE Sym. on Electronic Imaging : Science and Technology*, pages 303–309, 1991. 44
- [127] N. Strobel and S.K. Mitra. Quadratic filters for image contrast enhancement. In *Twenty-Eighth Asilomar Conf. Sig. Sys. and Comput.*, volume 1, pages 208–212, 1994. 44

- [128] E.H.S. Diop, A.O. Boudraa, and A. Bouchikhi. Image contrast enhancement based on 2D Teager-Kaiser operator. In *Proc. ICIP*, pages 3180–3183, San Diego, USA, 2008. [44](#)
- [129] D. De Vleeschauwer, F. Alaya Cheikh, R. Hamila, and M. Gabbouj. Watershed segmentation of image enhanced by Teager energy driven diffusion. In *Proc. Sixth Conf. Image processing and its applications*, pages 254–258, 1997. [44](#)
- [130] A.O. Boudraa, A. Bouchikhi, and E.H.S. Diop. Teager-Kaiser energy bi-level thresholding. In *Proc. ISCCSP*, pages 1086–1090, Malta, 2008. [44](#)
- [131] J.C. Cexus, A.O. Boudraa, A. Baussard, F.H. Ardeyeh, and E.H.S. Diop. 2D cross- ψ_b -energy operator for images analysis. In *Proc. ISCCSP*, pages 1–4, 2010. [44](#)
- [132] Y. Attaf, A. Adnane, M. Lahdir, A.O. Boudraa, M. Laghrouche, and Z. Ameer. An AM-FM based image segmentation : detection of clouds in msg images of algeria. *International Review on Computers and Software*, 10(7) :789–797, 2015. [44](#)
- [133] Y. Attaf, A.O. Boudraa, and C. Ray. Amplitude-based dominant component analysis for underwater mines extraction in side scans sonar. In *OCEANS MTS/IEEE*, pages 1–5, 2016. [44](#)
- [134] G. Evangelopoulos, A. Zlatintsi, A. Potamianos, P. Maragos, K. Rapantzikos, G. Skoumas, and Y. Avrithis. Multimodal saliency and fusion for movie summarization based on aural, visual and textual attention. *IEEE Trans. Multimedia*, 15(7) :1533–1568, 2013. [44](#)
- [135] P. Maragos and A. Potamianos. Higher order differential energy operators. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 2 :152–154, 1995. [44](#), [45](#), [179](#)
- [136] B.G. Iem. Generalization of an instantaneous frequency estimator based on the higher order differential energy operator. In *Proc. IEEE TENCON*, pages 1–4, 2008. [45](#)
- [137] B.G. Iem. Generalized higher order energy based instantaneous amplitude and frequency estimation and their applications to power disturbance detection. *Int. J. Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, 12(2) :162–166, 2012. [45](#)
- [138] F. Salzenstein, P.C. Montgomery, D. Montaner, and A.O. Boudraa. Teager-Kaiser energy and higher order operators in white light interference microscopy for surface measurement. *EURASIP J. Applied Signal Processing*, 17 :2804–2815, 2005. [45](#), [179](#)
- [139] F. Salzenstein, A.O. Boudraa, and J.C. Cexus. Generalized higher-order nonlinear energy operators. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24 :3717–3727, 2007. [45](#), [179](#)
- [140] F. Salzenstein, A.O. Boudraa, and Th. Chonavel. A new class of multi-dimensional Teager-Kaiser and higher order operators based on directional derivatives. *Multidimensional Sys. Sig. Proc.*, 24 :543–572, 2013. [45](#), [46](#), [179](#)
- [141] F. Salzenstein and A.O. Boudraa. Multi-dimensional higher order differential operators derived from the Teager-Kaiser energy tracking function. *Sig. Proc.*, 89(4) :623–640, 2009. [45](#), [179](#)
- [142] A.O. Boudraa, F. Salzenstein, and J.C. Cexus. 2D continuous higher energy operators. *Optical Engineering*, 44(11) :7001–7010, 2005. [45](#), [48](#), [179](#)
- [143] F. Salzenstein and A.O. Boudraa. Multi-dimensional higher order differential operators for generalizing the Teager-Kaiser function based family. *Signal Processing*, 24(4) :623–640, 2009. [46](#)
- [144] A.O. Boudraa, Y. Preaux, J.C. Cexus, I. Fujino, and L. Guillon. Mesure de similarité de signaux par opérateur d'énergie croisée. In *Colloque GRETSI*, pages 1–4, 2017. [48](#)
- [145] J. Proakis and M. Salehi. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 5 ed. edition, 2007. [54](#)
- [146] A. Savitzky and M.J.E. Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Anal. Chem.*, 36(8) :1627–1639, 1964. [73](#), [82](#), [189](#)
- [147] P.A. Gorry. General least-squares smoothing and differentiation by the convolution (savitzky-golay) method. In *Anal. Chem.*, volume 62, pages 570–573, 1990. [73](#)

- [148] O. Gaudoin. *Outils statistiques pour l'évaluation de fiabilité du logiciel*. PhD dissertation, Université Joseph Fourier - Grenoble, 1990. [150](#)
- [149] P.Kr. Banerjee and N.B. Chakrabarti. Noise sensitivity of teager-kaiser energy operators and their ratios. *Proc. Int. Conf. Adv. Comput. Comm. Inform.*, pages 2265–2271, 2015. [159](#)
- [150] M. Jabloun. A new generalization of the discrete Teager-Kaiser energy operator-application to biomedical signals. In *Proc. ICASSP*, pages 4153–4157, 2017. [159](#)
- [151] M. Jabloun, Ph. Ravier, and O. Buttelli. On the statistical properties of the generalized discrete teager-kaiser energy operator applied to uniformly distributed random signals. *IEEE Workshop on SSP*, pages 388–392, 2018. [159](#)
- [152] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 3 ed. edition, 2011. [159](#), [184](#), [185](#)
- [153] R.E. Gaunt. beta and gamma random variables : Stein operators and distributional theory. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32 :437–466, 2018. [160](#)
- [154] B. Sorin and P. Thionet. Lois de probabilités de bessel. *Revue de statistiques appliquées*, 16 :65–72, 1968. [160](#)
- [155] A. Barbiero. An alternative discrete skew laplace distribution. *Stat. Meth.*, 16 :47–67, 2017. [162](#)
- [156] J.E. Wilkins. A note on skewness and kurtosis. *Ann. Math. Stat.*, 15 :333–335, 1944. [165](#)
- [157] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'école polytechnique, 2001. [179](#)
- [158] B.B. Mandelbroot and J.W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4) :422–437, 1968. [180](#)
- [159] A. Komaty, A.O. Boudraa, P. Flandrin, P.O. Amblard, and J.A. Astolfi. On the behavior of MEMD in presence of multivariate fractional gaussian noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 69 :2676–2688, 2021. [180](#)
- [160] C.L. Nikias and M. Shao. *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience, 1995. [180](#)
- [161] A. Komaty, A.O. Boudraa, J.P. Nolan, and D. Dare. On the behavior of EMD and MEMD in presence of symmetric alpha-stable noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 22(7) :818–822, 2021. [180](#)
- [162] E.S. Diop, N.N. Gueye, Y. Preaux, and A.O. Boudraa. Analysis of 2d teager-kaiser operator for gaussian noisy images. In *EUSIPCO*, 2002 (soumis). [180](#)
- [163] D.G. Tucker. *Applied Underwater Acoustics*. Oxford Pergamon Press, 1966. [180](#)
- [164] A.B. Carlson. *Applied Underwater Acoustics*. Oxford Pergamon Press, 1966. [180](#)
- [165] A.A. Haykin. *Communication Systems*. John Wiley and Sons, 2009. [180](#)
- [166] R.E. Ziemer and W.H. Tranter. *Principles of Communications : systems, modulation and noise*. John Wiley and Sons, 1995. [180](#)

Titre : Contribution à l'analyse de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser : Application au traitement du signal.

Mots clés : Teager-Kaiser, Détection, Signal, Analyse statistique.

Résumé : La construction de l'opérateur de Teager-Kaiser est fondée sur une démarche inhabituelle, à savoir l'énergie requise pour générer un signal et non directement l'information véhiculée par ce signal. Cet opérateur est bien adapté pour extraire l'information d'un signal dont les caractéristiques varient relativement rapidement au cours du temps car il présente la particularité d'estimer l'amplitude et la fréquence instantanées d'un signal à partir de l'expression ponctuelle d'une fonction, dans sa version continue, ou de seulement trois occurrences d'une série de valeurs, dans sa version discrète. La nature différentielle et non-linéaire de l'opérateur de Teager-Kaiser soulève toutefois plusieurs difficultés, en particulier la positivité de sa sortie, la discrétisation employée et la sensibilité de l'opérateur au bruit, auxquelles nous apportons les réponses suivantes :

- Nous mettons en évidence, dans un premier temps l'existence d'intervalles critiques sur lesquels la positivité dépend de la phase initiale et du pas de discrétisation, et nous proposons des critères permettant de cibler au mieux les catégories de signaux pour lesquels l'opérateur est adapté.
- Puis nous introduisons une version revisitée de l'opérateur prenant en compte le pas de discrétisation et définissons, à partir de cette version, de nouveaux opérateurs, plus robustes au bruit et permettant une démodulation plus précise des signaux.
- Enfin, en s'appuyant sur les caractéristiques statistiques du bruit, nous avons développé une méthode de détection d'un signal faible dans un environnement fortement bruité.

Title : Contribution to the analysis of the Teager-Kaiser energy operator: Application to signal processing.

Keywords : Teager-Kaiser, Detection, Signal, Statistical analysis

Abstract : The construction of the Teager-Kaiser operator is based on an unusual approach, namely the energy required to generate a signal and not directly the information conveyed by this signal. This operator is well suited to extract information from a signal whose characteristics vary relatively quickly over time because it has the particularity of estimating the instantaneous amplitude and frequency of a signal from the specific expression of a function, in its continuous version, or of only three occurrences of a series of values, in its discrete version. The differential and non-linear nature of the Teager-Kaiser operator however raises several difficulties, in particular the positivity of its output, the discretization employed and the sensitivity of the operator to noise, for which we provide the following answers :

- We first highlight the existence of critical intervals on which the positivity depends on the initial phase and the step of discretization, and we propose criteria allowing to better target the classes of signals for which the operator is adapted.
- Then we introduce a revisited version of the operator taking into account the step of discretization and introduce, from this version, new operators, more robust against noise and allowing a more precise demodulation of the signals.
- Finally, based on the statistical characteristics of noise, we have developed a method for detecting a weak signal in a highly noisy environment.