



Modélisation d'ordre non entier des transferts thermiques dans les poumons pour des opérations de chirurgie cardiaque

Jean-François Duhé

► To cite this version:

Jean-François Duhé. Modélisation d'ordre non entier des transferts thermiques dans les poumons pour des opérations de chirurgie cardiaque. Biophysique [physics.bio-ph]. Université de Bordeaux, 2022. Français. NNT : 2022BORD0392 . tel-04077565

HAL Id: tel-04077565

<https://theses.hal.science/tel-04077565>

Submitted on 21 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE n° 209 : Sciences Physiques et de l'Ingénieur

“Automatique, Productique, Signal et Image, Ingénierie cognitive”

Par Jean-François DUHE

**Modélisation d'ordre non entier des transferts thermiques dans les poumons pour
des opérations de chirurgie cardiaque**

Soutenue le 14 Décembre 2022

M. Hugues GARNIER	Professeur	Université de Lorraine	Président
Mme. Alina VODA	Maîtresse de conférences - HDR	ENSE3 GIPSA-lab	Rapporteur
M. John LATAIRE	Professeur	Vrije Universiteit Brussel	Rapporteur
M. Marc-Olivier FISHER	PH-PU	CHU de Caen	Examineur
M. Pierre MELCHIOR	Professeur	Bordeaux INP IMS UMR 5218 CNRS	Directeur
M. François ROUBERTIE	Professeur	Université de Bordeaux IHU Lyric	Directeur
M. Stéphane VICTOR	Maître de conférences - HDR	Université de Bordeaux IMS UMR 5218 CNRS	Co-encadrant
M. Youssef ABDELMOUMEN	Docteur	Clinique Saint Augustin	Co-encadrant
M. Fernando MERCHAN SPIEGEL	Associate Professor	UTP Panama	Invité

IMS - UMR 5218 CNRS, Université de Bordeaux/Bordeaux INP
351 Cours de la Libération, 33405 Talence CEDEX, France

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des notations	xiv
Introduction Générale	1
1 La dérivation non entière pour la modélisation en biologie	5
1.1 Introduction	5
1.1.1 Caractéristiques des objets fractals	6
1.1.2 La dimension fractale	6
1.1.3 Loi de Richardson	8
1.1.4 Phénomènes de transport dans des milieux à géométrie fractale	10
1.2 Dérivation non entière	10
1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville	10
1.2.2 Vers la dérivée non entière de Riemann-Liouville	12
1.2.3 Définition de Caputo	13
1.2.4 Définition de Grünwald-Letnikov	13
1.2.5 Transformée de Laplace d'une dérivée non entière	14
1.2.6 Système dynamique non entier	15
1.2.7 La fonction de Mittag-Leffler et l'équation de relaxation	16
1.2.8 Stabilité des systèmes non entiers	17
1.2.9 Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et intégrateur d'ordre non entier	20
1.2.10 Élément à phase constante	21
1.2.11 Dérivateur et intégrateur borné en fréquences	22
1.2.12 Lien entre dimension fractale et dérivation non entière	23
1.3 Modélisation des fonctions biologiques	24
1.3.1 Modèle à paramètres concentrés du système circulatoire humain	24

1.3.2	Modèle non entier de l'interface entre le tissu cardiaque et l'électrode .	25
1.3.3	Multi-modèle pour la relaxation d'un muscle	27
1.3.4	Application de la spectroscopie en odontologie	28
1.3.5	Modèle non entier pour la propagation électrique cardiaque	29
1.4	Conclusions	31
2	Physiologie respiratoire et modèles du système respiratoire	33
2.1	Introduction	33
2.2	Physiologie respiratoire	34
2.2.1	Fonctions du système respiratoire	34
2.2.2	Anatomie et mécanique de la respiration	35
2.2.3	Structure des poumons	38
2.2.4	Diffusion et perfusion des poumons	38
2.3	Modélisation mathématique du système respiratoire	39
2.3.1	La fractalité des poumons	39
2.3.2	Modèle pneumatique de Hildebrandt	40
2.3.3	Modèles pneumatiques par analogie en circuit	42
2.3.4	Modèle pneumatique de bifurcation de Kuwahara	44
2.3.5	Modèle pneumatique d'impédance respiratoire mécanique de Ionescu .	45
2.3.6	Modèle pneumatique de diffusion de Copot	48
2.3.7	Modèle thermique avec une fonction d'Havriliak-Negami	49
2.3.8	Modèles pneumatique à éléments finis	50
2.4	Conclusions	51
3	Modélisation des transferts thermiques	53
3.1	Introduction	53
3.2	Analogie entre l'électricité et les transferts thermiques	53
3.3	Formalisme mathématique du quadripôle thermique	56
3.3.1	Comportements en basses fréquences	58
3.3.2	Comportements en hautes fréquences	59
3.3.3	Approximations des impédances	59
3.3.4	Simulation dans le domaine temporel avec les différentes approxima- tions des impédances	76
3.4	L'équation de bio-chaleur	77
3.4.1	Le bio-quadripôle	78
3.4.2	Comportement asymptotique de l'impédance Z_1	80
3.4.3	Comportement asymptotique de l'impédance de shunt Z_3	81
3.4.4	Réponses fréquentielles de $Z_{1,n}$ et $Z_{3,n}$	86
3.4.5	Modèle global du poumon	89
3.4.6	Conclusions	92

4	Identification récursive par modèle non entier	93
4.1	Introduction	93
4.2	Formulation du problème	96
4.3	Estimation des coefficients	97
4.3.1	Moindres carrés récurrents avec filtre à variable d'état (RLSSVF)	97
4.3.2	Méthode à erreur de prédiction récursive (RPEM)	99
4.3.3	Contribution avec la méthode à erreur de prédiction récursive à mémoire longue (LMRPEM)	100
4.3.4	Extension de la variable instrumentale simplifiée, raffinée et récursive à temps continu (RSRIVCF) pour les systèmes non entiers	101
4.4	Simulations et résultats pour l'estimation des coefficients	103
4.4.1	Description du vrai système	103
4.4.2	Résultats de l'estimation des coefficients	103
4.4.3	Influence de l'ordre commensurable	105
4.5	Estimation récursive des coefficients et des ordres de dérivation	107
4.5.1	Estimation des ordres de dérivation	107
4.5.2	Estimation des ordres de dérivation et des coefficients : algorithmes hybrides	109
4.5.3	Simulations et résultats pour l'estimation de tous les paramètres	110
4.6	Problème de la mémoire longue d'un système non entier	113
4.6.1	Principe de mémoire courte	114
4.6.2	Etude de la fonction cosinus	115
4.6.3	Simulations et résultats	116
4.6.4	Relaxation d'un système non entier	119
4.6.5	Application à un cas d'identification de systèmes dynamiques	123
4.7	Conclusions	128
5	Simulations et analyse des modèles thermiques du poumon	129
5.1	Introduction	129
5.2	Impédance thermique équivalente d'une bronche humaine	129
5.2.1	Approximation de Z_1	130
5.2.2	Approximation de Z_3	132
5.2.3	Simulations temporelles	133
5.3	Impédance thermique équivalente des poumons	135
5.3.1	Identification des modèles d'impédance équivalente	137
5.4	Conclusions	149
	Conclusion Générale et perspectives	151
	Bibliographie	155

Liste des figures

1.1	Création du triangle de Sierpinski	6
1.2	Triangle de Sierpinski à l'itération de rang k	7
1.3	Courbe différentielle	7
1.4	Courbe de Von Koch	7
1.5	Carré divisé en petits sous-objets carrés auto-similaires à l'objet global	8
1.6	Construction en étapes pour la courbe de Von Koch	9
1.7	Plan en x et y pour l'intégration	11
1.8	Dérivée non entière de Grünwald-Letnikov pour une fonction rampe	14
1.9	Evolution de la fonction de Mittag-Leffler pour des ordres γ différents avec $\lambda = 1$	17
1.10	Représentation de la zone de stabilité des pôles p_k dans le plan complexe ($0 < \nu < 1$)	18
1.11	Diagrammes de gain et de phase pour le dérivateur non entier	21
1.12	Diagrammes asymptotiques de Bode de $D(j\omega)$ et $D_N(j\omega)$	23
1.13	Circuits équivalents pour les segments du système circulatoire pour le cas élastique (A,B) et visco-élastique (C,D)	26
1.14	Modèle de circuit équivalent pour la modélisation de l'interface électrode-tissu (extrait de Ovia et Zavitz [1998])	27
1.15	Plan de Nyquist pour deux éléments à phase constante en série avec une résistance (extrait de Magin et Ovia [2008])	27
1.16	Modèles de circuits dentaires	29
1.17	(a) Modèle d'impédance de double dispersion de Cole, (b) modèle d'impédance récurrente avec $n = 2$ bifurcations (extrait de Herencsar et al. [2020])	30
1.18	Évolution du potentiel de membrane cardiaque du chien durant une phase de dépolariation approché par un modèle standard ($\alpha = 2$) et par des modèles non entiers ($\alpha = 1.75$ et $\alpha = 1.5$) (extrait de Bueno-Orovio et al. [2014]) . . .	30
2.1	Schéma du réseau de transport d'oxygène (O_2) avec toutes les structures et leurs fonctions (Wagner [2015])	35
2.2	Système respiratoire supérieur (Paramothayan [2019])	36
2.3	Système respiratoire inférieur (Paramothayan [2019])	36

2.4	Volumes pulmonaires	37
2.5	Structure des poumons (Paramothayan [2019])	38
2.6	Mesures des diamètres moyens des conduits du poumon (Weibel [2014])	39
2.7	Courbes de pression-volume pour deux patients différents (Bourke et Burns [2015])	41
2.8	Dépendance du ratio pression-volume et le logarithme du temps découvert par Hildebrandt (Hildebrandt [1969])	41
2.9	Modèle de circuit de DuBois avec inertie de l'air, résistance des voies aériennes et élasticité (extrait de DuBois et al. [1956])	43
2.10	Modèle visco-élastique de Navajas avec R_{VE} et C_{VE} étant les éléments visco-élastiques (extrait de Navajas et al. [1990])	43
2.11	Modèle RLC amélioré de Diong (extrait de Diong et al. [2007])	43
2.12	Structure arborescente du réseau respiratoire (extrait de Kuwahara et al. [2009])	44
2.13	Structure arborescente du réseau respiratoire (extrait de Ionescu [2009])	45
2.14	Circuit gamma équivalent du modèle de circuit de Ionescu (extrait de Ionescu [2009])	46
2.15	Représentation de 5 alvéoles qui conforment une unité (à gauche), et une unité avec des alvéoles endommagés (à droite) (extrait de Copot [2018])	49
2.16	Schéma de poumon avec les emplacements des capteurs de température (extrait de Pellet et al. [2011])	50
2.17	Schéma de conduit alvéolaire tel qu'exposé par DeGroot	50
3.1	Système thermique à une dimension	56
3.2	Circuit équivalent du quadripôle thermique du mur plan	57
3.3	Diagramme de gain de Z_1 et son approximation asymptotique	63
3.4	Diagramme de phase de Z_1 et son approximation asymptotique	63
3.5	Critère J criterion versus le nombre de cellules N_{cells} de l'approximation	65
3.6	Critère PIC en fonction du nombre de cellules N_{cells}	65
3.7	Diagramme de gain de Z_1 et de l'approximation $Z_{1-approx}$ avec $N_{cells} = 3$	66
3.8	Erreur en gain pour l'approximation asymptotique $Z_{1-asymp}$ et celle avec pôles et zéros $Z_{1-approx}$	66
3.9	Diagramme de gain de Z_1 et ses approximations	68
3.10	Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ pour les différentes approximations de Z_1	69
3.11	Diagramme de gain de Z_3 et de son approximation par capacitance	70
3.12	Erreur absolue $\epsilon(j\omega)$ associée à l'approximation de capacitance de Z_3	70
3.13	Diagrammes de gain de Z_3 et ses approximations	73
3.14	Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ pour les différentes approximations de Z_3	73
3.15	Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ de l'approximation à pôles réduits et pôles libres de Z_3	75
3.16	Réponses temporelles pour une onde thermique	77
3.17	Système bio-thermique à une dimension	78

3.18	Quadripôle thermique avec fluctuation de température sanguine et génération de chaleur métabolique	83
3.19	Schéma du poumon	84
3.20	$R_{1-bio,n}$ et $C_{s,n}$ pour différents niveaux de branchement	85
3.21	$R_{3-bio,n}$ pour différents niveaux de branchement	85
3.22	Réponse fréquentielle $Z_{1,n}$ pour des différents niveaux n	87
3.23	Réponse fréquentielle $Z_{3,n}$ pour des différents niveaux n	87
3.24	Réponse fréquentielle $H_{T_{a,n}}(p)$ pour différents niveaux n	88
3.25	Modèle global de circuit du poumon	90
3.26	Impédance équivalente d'entrée pour $n = 0$ (gauche) et $n = 12$ (droite) . . .	91
4.1	Diagramme de Bode du vrai système (4.41)	104
4.2	Données d'entrées-sorties utilisées pour l'identification récursive avec $RSB = 15dB$	105
4.3	Critère J pour des différents ordres commensurables ν ($SNR = 20 dB$) . . .	107
4.4	Estimation des paramètres avec l'algorithme hybride LMRPEM-2 ($RSB = 20dB$)	111
4.5	Estimation des paramètres avec l'algorithme hybride LMRPEM-IV ($RSB = 20dB$)	112
4.6	Résultats avec l'algorithme <i>LMRPEM-IV</i> pour $RSB = 20 dB$ avec une suite de données d'entrée plus longue (3000 points)	113
4.7	Erreur maximale en fonction de la fréquence pour différentes longueurs de troncature	117
4.8	Erreur maximale en fonction de la fréquence pour différents facteurs X	118
4.9	Erreur maximale en fonction de l'ordre de dérivation α pour des facteurs X différents	119
4.10	Système non-entier avec deux entrées	120
4.11	Relaxation d'un système à dérivées non entières après l'application d'un créneau d'une durée T	122
4.12	Temps de relaxation du système non-entier en fonction du temps de charge .	123
4.13	Données entrée-sortie pour $RSB = 15dB$	124
4.14	Identification du système par LMRPEM sans troncature	125
4.15	Temps de calcul en fonction du nombre d'itération	125
4.16	Identification par LMRPEM (avec troncature $L = 128s$)	126
4.17	Temps de calcul par rapport au nombre d'itération	126
4.18	Identification par LMRPEM (avec troncature $L = 256s$)	127
4.19	Temps de calcul par rapport au nombre d'itérations	127
5.1	Critère PIC en fonction du nombre de cellules N_{cells} pour l'exemple de la bronche	130
5.2	Gain exact de Z_1 et de ses approximations pour l'exemple de la bronche . . .	131

5.3	Courbe d'erreur des approximations de Z_1 pour l'exemple de la bronche . . .	131
5.4	Gain exact de Z_3 et de ses approximations pour l'exemple de la bronche . . .	132
5.5	Courbe d'erreur pour les approximations de Z_3 pour l'exemple de la bronche	133
5.6	Simulations temporelles pour l'exemple de la bronche	134
5.7	Réponses fréquentielles de l'impédance thermique d'entrée pour les modèles <i>Mix</i> et <i>Bio</i>	136
5.8	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Bio</i>	138
5.9	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Mix</i> . . .	139
5.10	Estimation des coefficients pour une entrée multi sinus pour le modèle <i>Bio</i> . .	139
5.11	Estimation des coefficients pour une entrée multi sinus pour le modèle <i>Mix</i> .	140
5.12	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 1000s$	141
5.13	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 2000s$	141
5.14	Temps de calcul pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 1000s$	142
5.15	Temps de calcul pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 2000s$	142
5.16	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 4000s$	143
5.17	Estimation des coefficients pour une entrée <i>SBPA</i> pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 6000s$	143
5.18	Temps de calcul pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 4000s$	144
5.19	Temps de calcul pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 6000s$	144
5.20	Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle <i>Bio</i> . .	145
5.21	Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle <i>Mix</i> . .	146
5.22	Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 2000s$	146
5.23	Temps de calcul pour le modèle <i>Bio</i> avec un fenêtrage $L = 2000s$	147
5.24	Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 6000s$	147
5.25	Temps de calcul pour le modèle <i>Mix</i> avec un fenêtrage $L = 6000s$	148

Liste des tableaux

3.1	Analogie entre l'électricité et la thermique	54
3.2	Paramètres de simulation pour l'exemple académique	60
3.3	Approximations des paramètres de Z_1 pour l'impédance de Butterworth non entière	67
3.4	Valeurs extrêmes et moyennes de l'erreur absolue pour les approximations de Z_1	69
3.5	Valeurs extrêmes et moyennes de l'erreur pour les approximations de Z_3 . . .	74
3.6	Valeurs des pôles et critère J pour les approximations de Z_3	75
3.7	Modèles utilisés pour les simulations temporelles	76
3.8	Paramètres de simulation pour l'impédance thermique des poumons	84
3.9	Propositions de modèles globaux du poumon	90
4.1	Simulations de Monte-Carlo (100 essais) pour l'estimation des coefficients avec différents niveaux de RSB . $\bar{\theta}$ indique la valeur moyenne du paramètre et $\hat{\sigma}_\theta$ l'écart-type	106
4.2	Paramètres des algorithmes hybrides	111
4.3	Résultats des simulations de Monte-Carlo (100 essais) pour l'estimation de tous les paramètres avec différents niveaux de RSB . $\bar{\theta}$ indique la valeur moyenne du paramètre et $\hat{\sigma}_\theta$ les écarts-types.	112
5.1	Valeurs extrêmes et moyennes de l'erreur absolue pour les approximations de Z_1 pour la bronche	132
5.2	Valeurs extrêmes et moyen de l'erreur pour les approximations de Z_3 pour l'exemple de la bronche	133
5.3	Modèles pour les simulations temporelles	134
5.4	Erreurs d'amplitude	135
5.5	Paramètres pour les essais d'identification	137

Liste des notations

a	Diffusivité thermique
a_k	K-ème paramètre k du dénominateur
$A(p)$	Polynôme du dénominateur
$B(p)$	Polynôme du numérateur
c	Capacité calorifique
c_{bl}	Capacité calorifique du fluide de perfusion
C	Capacité thermique au sens général
d_n	Diamètre de la branche n
${}_0^{RL}D^\alpha$	Dérivée d'ordre α selon la définition de Riemann-Liouville
$E_\gamma(z)$	Fonction de Mittag-Leffler monovariante à l'ordre γ
ϵ	Signal d'erreur au sens général
$\tilde{\epsilon}$	Signal d'erreur étendue
$F(p)$	Filtre passe-bas au sens général
$F^{opt}(p)$	Filtre optimale pour la variable instrumentale
$F^{iter}(p)$	Filtrage estimé pour la variable instrumentale
ϕ	Flux de chaleur
φ	Vecteur de regression avec données bruitées
φ^*	Vecteur de regression mesuré
J	Critère d'erreur au sens général
k	Conductivité thermique
k_{bl}	Conductivité thermique du fluide de perfusion
ℓ	Distribution de vol de Lévy
$LSSVF$	Méthode des moindres carrés avec filtre à variable d'état (Least Squares with State Variable Filter)
$LMRPEM$	Méthode récursive à erreur de prédiction à mémoire longue (Long Memory Prediction Error Method)
λ	Facteur d'oubli

M	Nombre de coefficients du numérateur
$MIMO$	Multiplés entrées et multiples sorties (Multiple Input Multiple Output)
$MISO$	Multiplés entrées et une seule sortie (Multiple Input Single Output)
N	Nombre de coefficients du dénominateur
p_b	Probabilité de basculement de l'algorithme de pollinisation de la fleur (Flower Pollination Algorithm)
PIC	Critère d'Information de Pham
q_m	Chaleur métabolique
q_{ext}	Chaleur externe
R	Résistance thermique
$RIVC$	Méthode de la variable instrumentale raffinée à temps continu (Refined Instrumental Variable for Continuous-time)
$RLSSVF$	Moindres carrés récursifs avec filtre à variable d'état (Recursive Least Squares with State Variable Filter)
$RPEM$	Méthode à erreur de prédiction récursive (Recursive Prediction Error Method)
$RSRIVC$	Méthode de variable instrumentale optimale récursive (Recursive Simplified Refined Instrumental Variable for Continuous-time systems)
ψ_ρ	Gradient de l'erreur pour l'estimation des coefficients
ψ_μ	Gradient de l'erreur pour l'estimation des ordres de dérivation
S_n	Surface transversale de la n -ème branche
SSE	Somme des erreurs au carré
T	Température au sens général
T_a	Température de l'artère
T_b	Température du corps
$\tilde{T}$	Variation de température par rapport à celle du corps $\tilde{T} = T - T_b$
θ	Vecteur de paramètres au sens large
ν	Ordre de dérivation commensurable
ω	Fréquence au sens large
ω_{bl}	Coefficient de perfusion
y^*	Vecteur de sortie mesurée

$\tilde{Y}^*$	Sortie mesurée étendue
$\hat{y}$	Vecteur de sortie estimée
$\tilde{\hat{Y}}$	Sortie estimée étendue
Z	Impédance thermique

Introduction générale

Contexte

La présente thèse a été conduite dans le cadre d'une bourse ministérielle suite à un appel à projet pluridisciplinaire au sein de l'Université de Bordeaux. Elle est le fruit de la collaboration entre l'équipe CRONE du laboratoire IMS, UMR 5218 CNRS et l'institut LYRIC consacré à la recherche sur l'électrophysiologie et sur la modélisation du cœur. Le laboratoire IMS se situe sur le campus de Talence de l'Université de Bordeaux et le laboratoire LYRIC sur le campus de Pessac de cette même Université au CHU de Bordeaux. Les travaux ont été effectués sous la direction de Pierre Melchior, Professeur des Universités à Bordeaux INP/ENSEIRB-MATMECA et François Roubertie, Professeur des Universités au CHU de Bordeaux. Les co-encadrants pour cette thèse sont Stéphane Victor, Maître de Conférences-HDR à l'Université de Bordeaux et Youssef Abdelmoumen, médecin réanimateur à la Clinique Saint Augustin à Bordeaux.

Les objectifs de ces travaux sont d'étendre les outils et connaissances de la modélisation mathématique en biologie, et plus particulièrement dans le domaine des transferts thermiques dans les poumons et de développer de nouvelles méthodes d'identification des systèmes en temps-réel. Les travaux s'inscrivent dans la continuité des travaux de l'équipe CRONE, notamment les thèses de Sommacal [2007] et de Pellet [2013].

Dérivation non entière et modélisation en biologie

Le formalisme mathématique du calcul non entier a été établi au cours du XIX^{ème} siècle par plusieurs mathématiciens tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy. Au cours du XX^{ème} siècle, cet outil mathématique a montré son utilité en Automatique pour la synthèse de correcteurs robustes, ainsi que pour la modélisation de phénomènes physiques, notamment la diffusion et la propagation. La non-localité des opérateurs non entiers permet une modélisation plus précise des phénomènes à mémoire longue tel que la diffusion thermique, la viscoélasticité ou la diffusion électrochimique. De plus, il permet de garder une parcimonie paramétrique.

Il existe un lien entre la dérivation non entière et la fractalité, d'où l'intérêt de celle-ci pour l'étude des systèmes dont la géométrie fractale conditionne la dynamique. Des géométries de

ce type sont particulièrement présentes en biologie. Chez plusieurs animaux, des structures arborescentes sont présentes pour plusieurs sous-systèmes : l'irrigation sanguine, le système nerveux et le système respiratoire. Les poumons sont un parfait exemple de l'arborescence en biologie, ce qui a motivé les recherches de cette thèse où l'on applique la dérivation non entière dans le cadre du poumon.

Objectifs

Cette thèse comporte deux parties différentes. La première partie s'appuie sur la continuité des travaux de Pellet [2013] sur les transferts thermiques dans les poumons. Le but de ces travaux consistait à identifier des modèles du transfert thermique dans le poumon au cours d'une opération à cœur ouvert, grâce à des mesures obtenues sur des poumons de mouton. Ces premiers travaux exploitent des modèles de type boîte noire, ce qui entraîne une perte de sens physique pour les paramètres. L'un des objectifs est de développer des modèles thermiques à partir d'équations de la physique, tout en prenant en compte une diffusion pure et en y ajoutant les effets dus à des phénomènes physiologiques. Des modèles théoriques peuvent permettre à travers la simulation d'établir des liens entre des variations de quantités réelles, notamment des longueurs, des surfaces, des flux sanguins, et des variations de modèles mathématiques obtenus. Pour cela, l'étude des transferts thermiques à travers des modèles de circuit a été réalisée en utilisant la dérivation non entière comme un outil de modélisation.

La deuxième partie se concentre sur l'identification des modèles dynamiques. Ces travaux ont pour objectif l'obtention de modèles thermiques simples qui puissent être exploités en temps-réel durant les procédures cardiaques afin de minimiser l'endommagement des tissus pulmonaires. Par conséquent, les modèles doivent être accompagnés d'algorithmes d'identification des systèmes dynamiques pouvant être appliqués en temps-réel. En partant des techniques classiques d'identification récursive, des algorithmes récursifs pour l'identification de modèles non entiers à temps continu sont proposés et testés dans ces travaux. L'aspect pratique de l'implémentation est également pris en compte, et des premières analyses issues de la théorie et des simulations sont exposées afin d'appliquer des fenêtrages aux opérateurs de dérivation non entière des algorithmes afin de limiter le temps de chaque itération. Dans une perspective plus longue, une combinaison des structures de modèles thermiques avec des algorithmes d'identification pourrait être appliquée à un jeu de données expérimentales afin d'acquérir des connaissances empiriques supplémentaires telles que les ordres de grandeur des paramètres afin de s'approcher au mieux des situations réelles.

Contributions et organisation de la thèse

La manuscrit de cette thèse se divise en cinq chapitres dont les contenus sont explicités dans la suite.

Le *chapitre 1* présente en première instance les caractéristiques principales des objets fractals et de la dérivation non entière. Les définitions importantes de l'opérateur de dérivation non entière sont présentées et accompagnées de quelques exemples illustratifs. Le lien entre la fractalité et la dérivation non entière est aussi établi. Dans un second temps, plusieurs exemples concernant la modélisation mathématique en biologie sont présentés. Cela permet de mettre en valeur l'utilité de la dérivation non entière en biologie, que ce soit en spectroscopie, électrochimie, transfert thermique ou bien pour d'autres phénomènes.

Le *chapitre 2* se concentre sur la physiologie respiratoire. Dans un premier temps, les fonctions du système respiratoire sont expliquées et sa structure est également explorée d'une manière brève. La deuxième partie montre d'une façon chronologique les différentes expériences menées sur des poumons afin de modéliser leur dynamique. La plupart de ces études se concentrent sur l'impédance mécanique. Dès les premiers travaux, pour étudier l'élasticité des poumons lors de la respiration, le calcul non entier apparaît d'une façon naturelle (voir les travaux de Hildebrandt [1969, 1970]). Par la suite, des modèles de circuits divers sont proposés afin d'améliorer la compréhension de la dynamique pulmonaire.

Le *chapitre 3* porte sur la modélisation des transferts thermiques. Tout d'abord, le formalisme mathématique du quadripôle thermique (Maillet et al. [2000]) est présenté. Sur la base de ce dernier, des approximations d'impédances thermiques sont proposées en faisant appel à la dérivation non entière dans le but d'obtenir des modèles rationnels exploitables par la suite dans un contexte d'identification. La première partie se focalise sur l'équation de la chaleur. Dans une deuxième instance, l'équation de bio-chaleur (Pennes [1948]) est aussi employée afin d'obtenir des modèles d'impédances thermiques. Cette équation permet la prise en compte du flux sanguin et de la chaleur émise par la respiration cellulaire. Finalement, les deux types de quadripôles sont utilisés pour proposer différents types de modèles de circuit thermique pour les poumons.

Le *chapitre 4* est dédié à l'identification de modèles non entiers dynamiques. En premier lieu, des algorithmes récursifs pour l'identification de modèles non entiers à temps continu sont proposés. Les différents algorithmes sont testés et leurs performances sont comparées. En second lieu, l'identification récursive d'un ordre de dérivation est aussi prise en compte. Pour cette thèse, l'identification de l'ordre de dérivation reste limitée à un ordre commensurable. Des algorithmes à deux étapes sont proposés et testés afin d'évaluer leur performances concernant cette identification plus complexe. En dernier, le problème lié au temps de calcul notamment en vue d'une implémentation en temps-réel est abordé en analysant le principe de mémoire courte ainsi que le phénomène de relaxation non entière. Cela permet d'imposer un fenêtrage qui limite le temps de calcul de chaque itération afin de garantir le fonctionnement de ces algorithmes pour un cas en temps-réel.

Enfin, le *chapitre 5* reprend des éléments des deux chapitres précédents. Avant tout, l'exemple simple d'un quadripôle thermique isolé pour une bronche humaine est analysé au moyen des outils développés au chapitre 3. Puis, des modèles d'impédance thermique équivalente sont issus du chapitre 3 afin d'analyser leurs réponses fréquentielles et de les exploiter

comme des modèles de simulation pour tester les algorithmes d'identification. Cette partie permet de mieux saisir les limites des modèles proposés dans cette thèse et de proposer des perspectives afin d'améliorer ces modèles, que ce soit d'une manière théorique ou au moyen de l'obtention de données.

Chapitre 1

La dérivation non entière pour la modélisation en biologie

1.1 Introduction

Les mathématiques accompagnent l'homme dans son développement intellectuel depuis des siècles. L'une des inventions les plus importantes fut celle du calcul différentiel, et on peut notamment remarquer les contributions majeures de Newton et Leibniz dans ce domaine. Le concept de la dérivation et de l'intégration ont permis le développement *a posteriori* d'un langage adapté pour la description de la nature à travers la physique. Dès l'origine du calcul différentiel, Leibniz et Newton avaient réussi à définir correctement l'opérateur de dérivation à des ordres entiers (dérivée première, dérivée seconde et les dérivées entières successives). De plus, ces deux scientifiques s'interrogèrent sur l'existence d'un opérateur de dérivation à des ordres non entiers. Bien qu'ils n'aient pas résolu cette intrigue, celle-ci ouvre la voie aux développements du formalisme sur le calcul non entier (ou fractionnaire).

Au cours du XIX^{ème} siècle, les mathématiciens se penchèrent sur la question de la dérivation à l'ordre non entier. Le formalisme fut établi à cette époque-là, notamment avec les contributions de Riemann [1876], Liouville [1832], Grünwald [1867] et Letnikov [1868]. Malheureusement, ce formalisme sera vite assimilé à un concept abstrait sans intérêt pratique et il tombera quasiment dans l'oubli jusqu'à la seconde moitié du XX^{ème} siècle. Cet opérateur mathématique s'avère être exploitable pour la commande robuste (notamment le PID non entier et la commande CRONE), mais aussi pour la modélisation des phénomènes complexes de diffusion, l'identification et la planification de trajectoire. La nature non locale des opérateurs non entiers les rend particulièrement adaptées pour la modélisation des phénomènes diffusifs.

Tout comme le calcul entier qui le précède, le calcul non entier trouve également sa place pour la description de la nature. Son lien étroit avec les phénomènes de diffusion ainsi qu'avec la fractalité (Oustaloup [1995]) permet de modéliser naturellement les systèmes dynamiques en biologie. Les exemples de géométries complexes qui se rapprochent des fractales sont

nombreux en biologie, car les êtres vivants dévoilent souvent une complexité géométrique remarquable, qui permet d’optimiser les transferts d’énergie et de flux de masse.

Ce chapitre a pour but de présenter les objets fractals, la dérivation non entière et de multiples exemples de modélisation en biologie, c’est pourquoi il fait fréquemment appel à cet opérateur dans ce manuscrit.

1.1.1 Caractéristiques des objets fractals

Définition 1.1.1 (Irrégularité à toutes les échelles). *Quel que soit l’agrandissement sur une partie de l’objet en question, aucune surface ni aucun volume lisse ne peut jamais être aperçu.*

Définition 1.1.2 (Auto-similitude). *Supposons un objet F divisé en multiples sous-objets $F_1, F_2, \dots, F_N$. Un sous-objet F_i est auto-similaire à l’objet global F s’il est possible d’établir un facteur de dilatation s_f de telle sorte qu’à partir de l’objet F_i on peut reconstruire l’objet F .*

La figure 1.1 illustre la création progressive d’un objet fractal nommé triangle de Sierpinski.



FIGURE 1.1 – Création du triangle de Sierpinski

En partant d’un seul triangle noir (voir la figure 1.1, première figure à gauche), la première itération conduit à la figure 1.1 (seconde figure à partir de la gauche) où l’on observe $N = 3$ triangles noirs. Le facteur de dilatation s_f est alors de 2. Une itération de plus conduit à $N = 9$ et $s_f = 4$. Une itération au rang k conduit à $N = 3^k$ et 2^k (voir la figure 1.2).

1.1.2 La dimension fractale

On utilise le terme *dimension* pour parler des degrés de liberté. D’une façon générale, il correspond au nombre d’informations nécessaires pour définir la position d’un point. Dans un segment, une seule information est nécessaire, alors que pour définir la position d’un point à l’intérieur d’un carré, deux informations sont indispensables.

La figure 1.3 montre une courbe différentielle. Il suffit d’une seule information pour localiser un point sur la courbe par rapport à un point de référence O sur cette courbe.

La figure 1.4 illustre un type d’objet fractal très connu : la courbe de Von Koch. Vu qu’il s’agit d’une courbe, une seule information devrait suffire mais son auto-similarité nous en empêche. On pourrait alors proposer d’utiliser deux informations. Or, cette figure illustre une courbe et non une surface, ce qui suggère que deux informations sont “excessives”. C’est

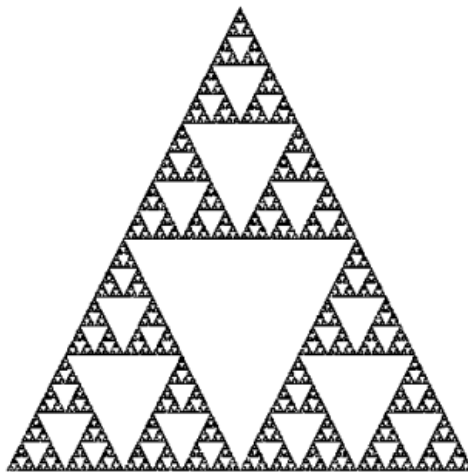


FIGURE 1.2 – Triangle de Sierpinski à l'itération de rang k



FIGURE 1.3 – Courbe différentielle

justement ce genre de questionnement qui incite à utiliser le concept de dimension pour des objets auto-similaire. Observons alors le concept de dimension d'une façon différente afin de

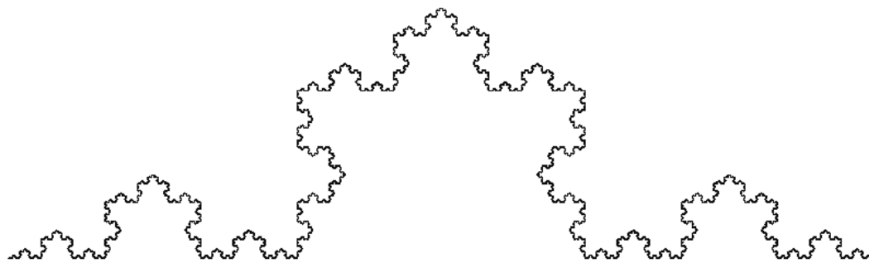


FIGURE 1.4 – Courbe de Von Koch

traiter les objets auto-similaires. Commençons par un exemple très simple : un carré (voir la figure 1.5).

De manière intuitive, on sait qu'un carré est un objet à deux dimensions. Dans la figure 1.5, on constate que le carré est composé de $N = 9$ carrés plus petits. De plus, le facteur de dilatation $s_f = 3$. Le lien entre N et s_f correspond à :

$$N = s_f^2. \quad (1.1)$$

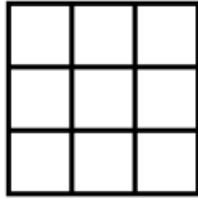


FIGURE 1.5 – Carré divisé en petits sous-objets carrés auto-similaires à l'objet global

En généralisant ce résultat, on peut poser l'expression suivante :

$$N = s_f^d, \quad (1.2)$$

où d est la dimension de l'objet en question. On peut donc en tirer facilement une définition mathématique générale pour une dimension :

$$d = \frac{\log N}{\log s_f}. \quad (1.3)$$

C'est cette dernière expression qui permet effectivement de calculer la dimension fractale d'un objet auto-similaire.

Pour la courbe de Von Koch, en suivant une démarche similaire à celle du triangle de Sierpinski, on obtient $N = 4^k$ et $s_f = 3^k$. Sa dimension correspond donc à :

$$d = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2618. \quad (1.4)$$

Il est logique d'obtenir une valeur supérieure à 1, puisque la courbe de Von Koch est effectivement plus complexe qu'un segment et ne correspond pas non plus à une surface.

1.1.3 Loi de Richardson

Vu que l'on possède une manière de traiter le concept de dimension pour les objets auto-similaires à travers la dimension fractale d , il s'avère intéressant de réfléchir aux longueurs des courbes fractales comme celle de Von Koch. Pour un pas élémentaire de mesure λ , la longueur $L(\lambda)$ d'une courbe auto-similaire se régit par la loi de Richardson :

$$L(\lambda) = L_0^d \lambda^{1-d}, \quad (1.5)$$

où L_0 est un invariant géométrique homogène à une longueur, une surface ou un volume pour les cas entiers.

En prenant le logarithme dans l'expression de la loi de Richardson :

$$\log L(\lambda) = d \log L_0 + (1 - d) \log \lambda, \quad (1.6)$$

la dimension fractale peut alors être aussi définie comme suit :

$$d = \frac{\log L(\lambda) - \log \lambda}{\log L_0 - \log \lambda}. \quad (1.7)$$

Dans le cas d'une longueur unitaire ($L_0 = 1$), on obtient :

$$d = 1 - \frac{\log L(\lambda)}{\log \lambda}. \quad (1.8)$$

1.1.3.1 Longueurs pour la courbe de Von Koch à des étapes différentes

La figure 1.6 montre les premières étapes qui mènent à la construction de la courbe de Von Koch. On s'intéresse à la longueur à chaque étape k en prenant, pour cet exemple, $L_0 = 1$.

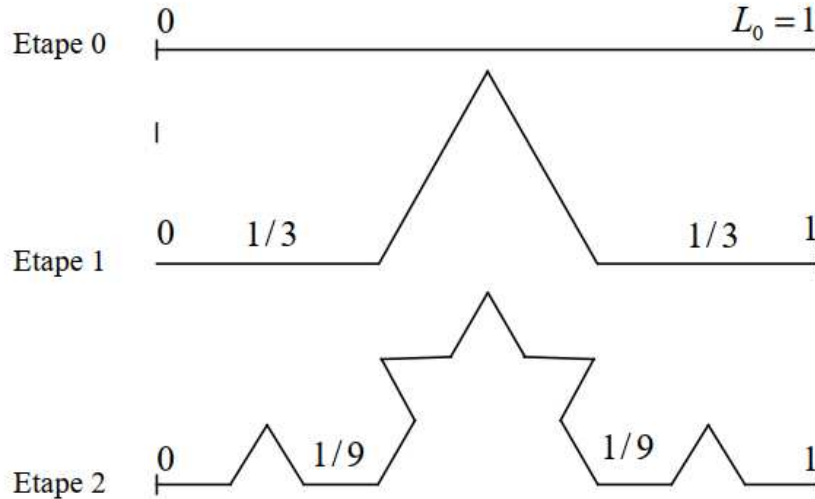


FIGURE 1.6 – Construction en étapes pour la courbe de Von Koch

Le pas élémentaire de mesure à une itération k est donné par :

$$\lambda_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k. \quad (1.9)$$

Le logarithme de la longueur à une étape k s'écrit alors :

$$\log L = k \left(\frac{\log 4}{\log 3} - 1 \right) \log 3. \quad (1.10)$$

Pour des objets auto-similaires, lorsque k tend vers l'infini, la longueur tendra également vers l'infini. Une courbe fermée de type auto-similaire peut donc avoir une longueur qui tend vers l'infini tout en gardant une surface finie.

1.1.4 Phénomènes de transport dans des milieux à géométrie fractale

Le transfert thermique à travers un milieu fractal peut être utile pour l'analyse de certaines structures complexes, voire même pour la conception d'échangeurs de chaleur. Pour rappel, la loi de Fourier se définit par :

$$\vec{\phi} = -k\nabla T, \quad (1.11)$$

où $\vec{\phi}$ est le champ de flux de chaleur, k la conductivité thermique et T la température.

Bien qu'à une échelle plus petite (autour du nanomètre) la loi de Fourier ne soit plus valide, on suppose que l'on est encore dans les limites de validité de cette célèbre loi de la physique dans le cas présent.

Un bilan d'énergie dans une surface fermée permet d'arriver à l'équation de la chaleur sous forme différentielle :

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = -\psi, \quad (1.12)$$

où $a = \frac{k}{\rho c}$ est la diffusivité thermique du milieu, k la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la capacité calorifique. D'autre part, la fonction ψ représente une source d'énergie interne du système.

Les travaux de Stillinger [1977] pour des milieux à dimension fractale ont permis de proposer une définition particulière de l'opérateur du Laplacien lorsqu'on se trouve dans un milieu fractal d'une dimension quelconque d dans le cas d'une symétrie sphérique :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.13)$$

Ce type de démarche est utilisé dans les travaux théoriques de Lin, Wuxi and Huang, Sheng-peng and Ren, Jie [2020] afin de fournir des solutions analytiques dans certains scénarios pour le transitoire thermique dans des milieux fractals.

1.2 Dérivation non entière

Dans cette section, des définitions pertinentes dans le calcul fractionnaire, ainsi que des propriétés de ces opérateurs et leur représentation dans le domaine de Laplace seront présentées. En partant d'une représentation dans le domaine fréquentiel, des définitions liées à l'application de la dérivation non entière pour l'étude des systèmes dynamiques seront aussi expliquées.

1.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Il est commun de parler de "dérivation non-entière" et de se pencher sur la notion de dérivée. Cependant, au niveau historique, la naissance de ce formalisme a plutôt débuté à partir d'une intégrale. Comme J-C. Trigeassou (Trigeassou et Maamri [2011]) le rappelle,

Riemann et Liouville définissent en première instance une intégrale. Ce rappel s'avèrera très utile plusieurs années plus tard en ce qui concerne l'initialisation des équations différentielles non-entières.

Soit une fonction $f(t)$ avec des conditions initiales nulles. Si on définit $F(p)$ comme la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, l'expression

$$\frac{1}{p^n} F(p), \quad (1.14)$$

définit une intégration d'ordre n de la fonction $f(t)$ où p est la variable de Laplace.

La primitive de $f(t)$ est définie par :

$$\mathcal{J}^1 f(t) = \int_0^t f(x) dx. \quad (1.15)$$

Si l'on applique à nouveau cet opérateur d'intégration, on obtient :

$$\mathcal{J}^2 f(t) = \int_0^t \left(\int_0^x f(y) dy \right) dx. \quad (1.16)$$

Les bornes d'intégration peuvent être représentées visuellement dans la figure 1.7.

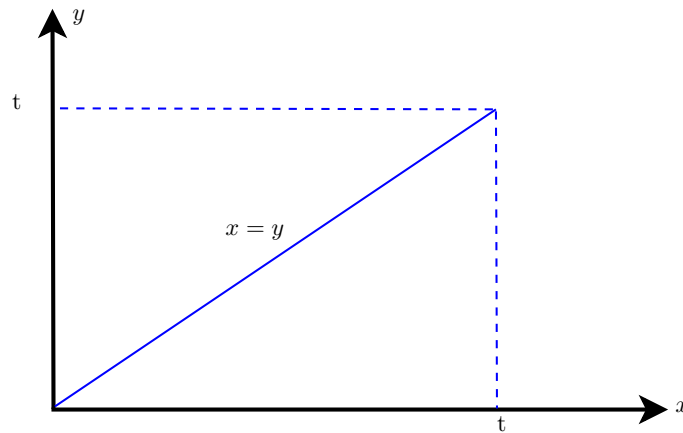


FIGURE 1.7 – Plan en x et y pour l'intégration

En changeant judicieusement les limites des intégrales, il est donc possible d'inverser l'ordre des opérations :

$$\mathcal{J}^2 f(t) = \int_0^t \int_y^t f(y) dx dy. \quad (1.17)$$

Etant donné que $f(y)$ est constante par rapport à x , la première intégrale se calcule facilement selon :

$$\mathcal{J}^2 f(t) = \int_0^t (t - y) f(y) dy \quad (1.18)$$

L'application successive de cet opérateur pour un nombre n de fois :

$$\mathcal{J}^n f(t) = \int_0^t \dots \int_0^t f(y) dy \dots dy = \int_0^t \frac{(t-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y) dy. \quad (1.19)$$

Il est curieux d'observer comment une intégration répétée n fois est équivalente à une seule intégrale avec une fonction de pondération. Cette équation reçoit le nom d'intégrale de Cauchy. Généraliser cette intégrale pour $\gamma \in \mathbb{R}^+$ donne l'intégrale non entière de Riemann-Liouville :

$$\mathcal{J}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-y)^{\gamma-1} f(y) dy. \quad (1.20)$$

La fonction gamma d'Euler se définit comme :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1.21)$$

pour $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$.

1.2.2 Vers la dérivée non entière de Riemann-Liouville

De l'équation (1.20) on serait tenter de remplacer directement l'ordre γ par son opposé $-\gamma$ afin de trouver la définition d'une dérivée non entière. Il est impératif de procéder avec beaucoup de prudence afin de se diriger vers un opérateur de dérivation non entière, car on cherche à assurer la convergence des intégrales dans la définition (1.19), ainsi qu'à la conservation de propriétés mathématiques pour la dérivée d'ordre entier (linéarité, commutativité, intégrabilité, ...).

Pour le cas entier, l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ constitue une inverse uniquement à gauche de l'intégration $\mathcal{J}^n$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}^n \mathcal{J}^n = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^n \mathcal{D}^n \neq \mathbb{I}, \quad (1.22)$$

où $\mathbb{I}$ indique l'identité.

Afin de conserver la cohérence vis-à-vis des opérateurs entiers, le nombre m est introduit et défini comme un entier positif qui satisfait $m-1 \leq \gamma < m$. La dérivée d'ordre non entier de Riemann-Liouville se définit alors comme :

$${}^{RL}\mathcal{D}^\gamma f(t) = \mathcal{D}^m \mathcal{J}^{m-\gamma} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-m+1}} d\tau \right]. \quad (1.23)$$

Remarque : bien que cette définition impose une limite inférieure égale à 0 dans l'intégrale, celle-ci peut en fait être une valeur $c < t$, ce qui mène à une écriture encore plus précise pour la dérivée non entière de Riemann-Liouville : ${}_c^{RL}\mathcal{D}^\gamma f(t)$. Sauf indication, il sera supposé que $c = 0$ comme dans l'équation (1.23).

1.2.3 Définition de Caputo

Plus récemment, une autre définition, la dérivée de Caputo, a été introduite (Caputo [1967]) :

$${}^C \mathcal{D}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\gamma)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-m+1}} d\tau. \quad (1.24)$$

Bien que très populaire, cette définition est beaucoup plus contraignante que celle de Riemann-Liouville. Elle implique la condition d'intégrabilité de la dérivée d'ordre m de la fonction $f(t)$. Elle peut être vue comme le résultat de l'inversion des opérateurs de dérivation et d'intégration par rapport à ceux de Riemann-Liouville :

$${}^{RL} \mathcal{D}^\gamma f(t) = \mathcal{D}^m \mathcal{I}^{m-\gamma} f(t) \neq \mathcal{I}^{m-\gamma} \mathcal{D}^m f(t) = {}^C \mathcal{D}^\gamma f(t). \quad (1.25)$$

D'une manière générale, ces deux définitions ne sont pas équivalentes. Si à l'instant $t = 0^+$ la fonction $f(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ sont également nulles, alors les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes.

Pendant plusieurs décennies, la dérivée non entière de Caputo s'est largement répandue en raison de l'illusion qu'elle offre pour l'établissement des conditions initiales. En effet, une interprétation inadéquate des conditions initiales peut mener à des résultats erronés (Trigeassou et Maamri [2011]).

1.2.4 Définition de Grünwald-Letnikov

Grünwald [1867] et Letnikov [1868] ont proposé une définition de la dérivation non entière en partant du concept des différences récurrentes :

$${}^{GL} D^\gamma f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\gamma}{j} f(t-jh) \quad (1.26)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ indique la partie entière et $\binom{\gamma}{j}$ désigne le binôme généralisé de Newton :

$$\binom{\gamma}{j} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\gamma-j+1)}. \quad (1.27)$$

Ces coefficients binomiaux convergent vers zéro quand j croît, ce qui apporte la propriété de mémoire longue dans cette définition.

En remplaçant h par la période d'échantillonnage T_s , cette définition peut être assimilée à une somme pondérée de valeurs discrètes du passé de la fonction $f(t)$:

$${}^{GL} D^\gamma f(t) \approx \frac{1}{T_s^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{T_s} \rfloor} (-1)^j \binom{\gamma}{j} f(t-jT_s) + O(T_s). \quad (1.28)$$

Compte tenu de sa simplicité, cette définition est facilement implémentable d'un point de vue informatique. Dans la suite de ce mémoire, les simulations numériques seront effectuées à partir de la définition de Grünwald-Letnikov.

Remarque : les définitions pour la dérivée non entière présentées dans ce chapitre sont les plus connues. Néanmoins, une multitude de définitions alternatives à celles présentées sont disponibles dans la littérature (Garrappa et al. [2019]; Kilbas et al. [2006]; Samko [1993]).

1.2.4.1 Exemple : dérivation non entière d'une rampe

Soit la fonction rampe $f(t) = t$, le calcul de la dérivée non entière pour différents ordres γ est effectué avec une période d'échantillonnage $T_s = 0.1s$ en utilisant l'équation (1.28) .

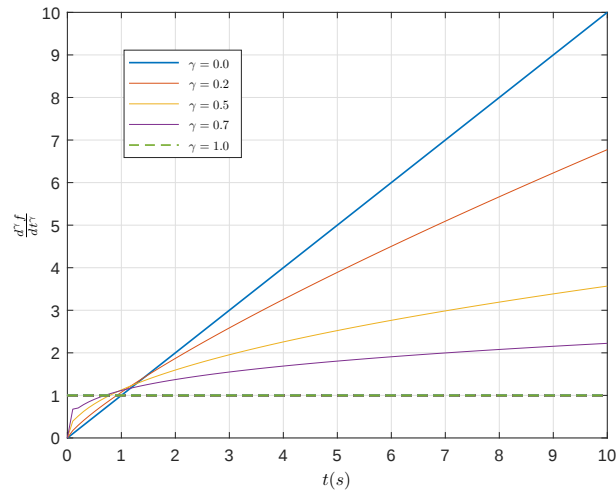


FIGURE 1.8 – Dérivée non entière de Grünwald-Letnikov pour une fonction rampe

Il est possible d'observer que la dérivée non entière à l'ordre $0 \leq \gamma < 1$ permet d'obtenir une continuité des résultats intermédiaires entre la dérivée d'ordre 0 et sa dérivée d'ordre 1.

1.2.5 Transformée de Laplace d'une dérivée non entière

Une façon alternative de déduire cette intégrale consiste à prendre la transformée de Laplace inverse de l'intégration d'ordre γ :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^\gamma} \right] = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}. \quad (1.29)$$

L'intégrale de Riemann-Liouville peut alors être considérée comme le produit de la convolution entre cette dernière expression et la fonction $f(t)$:

$$\mathcal{I}^\gamma f(t) = \left[\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \right] * f(t). \quad (1.30)$$

La transformée de Laplace de l'intégrale non entière s'écrit :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{I}^\gamma f(t)\} = p^{-\gamma} F(p). \quad (1.31)$$

L'application de la transformée de Laplace à la définition de Riemann-Liouville donne :

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}\mathcal{D}^\gamma f(t)\} = p^\gamma F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^k \left[{}^{RL}\mathcal{D}^{\gamma-k-1} f(t) \right]_{t=0}. \quad (1.32)$$

et à la définition de Caputo, donne :

$$\mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}^\gamma f(t)\} = p^\gamma F(p) - \sum_{k=0}^{m-1} p^{\gamma-k-1} f^{(k)}(0). \quad (1.33)$$

La transformée de Laplace de ces deux dérivées permet de mieux illustrer les conditions initiales requises pour chacune des définitions. Pour le cas de la définition de Riemann-Liouville, les dérivées non entières à $t = 0$ sont requises, alors que pour celle de Caputo, les dérivées d'ordre entier sont nécessaires.

Remarque : il est à noter que ces conditions initiales ne concernent que l'opérateur et non celles du système.

Si les conditions initiales sont nulles, alors :

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}\mathcal{D}^\gamma f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^C\mathcal{D}^\gamma f(t)\} = p^\gamma F(p). \quad (1.34)$$

1.2.6 Système dynamique non entier

Tout comme dans les systèmes entiers, les équations différentielles sont aussi utilisées dans le cas non entier afin d'établir une relation mathématique entre l'entrée et la sortie d'un système. Dans un cas à une seule entrée $u(t)$ et une seule sortie $y(t)$, une équation différentielle ordinaire d'ordre non entier constitue la base des modèles dynamiques non entiers linéaires et s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 \frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}} y(t) + \dots + a_{m_A} \frac{d^{\alpha_{m_A}}}{dt^{\alpha_{m_A}}} y(t) = \\ b_0 \frac{d^{\beta_0}}{dt^{\beta_0}} u(t) + b_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} u(t) + \dots + b_{m_B} \frac{d^{\beta_{m_B}}}{dt^{\beta_{m_B}}} u(t) \end{aligned} \quad (1.35)$$

où (a_i, b_j) sont des nombres réels et $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m_A}$ ainsi que $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{m_B}$ peuvent être des nombres positifs non entiers.

Si l'on prend la transformée de Laplace de chaque côté de l'équation (1.35) en supposant des conditions initiales nulles, on obtient :

$$\begin{aligned} Y(p) + a_1 p^{\alpha_1} Y(p) + \dots + a_{m_A} p^{\alpha_{m_A}} Y(p) = \\ b_0 p^{\beta_0} U(p) + b_1 p^{\beta_1} U(p) + \dots + b_{m_B} p^{\beta_{m_B}} U(p). \end{aligned} \quad (1.36)$$

La fonction de transfert d'ordre non entier est alors définie par :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_B} b_i p^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j p^{\alpha_j}}. \quad (1.37)$$

Définition 1.2.1. *Un modèle d'ordre non entier est dit commensurable à l'ordre ν si chaque ordre de dérivation est un multiple entier d'un réel positif ν :*

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_B} b_i p^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^{m_A} a_j p^{j\nu}}. \quad (1.38)$$

1.2.7 La fonction de Mittag-Leffler et l'équation de relaxation

La fonction de Mittag-Leffler est nécessaire pour l'étude temporelle des systèmes non entiers. Elle est même considérée comme la “reine des fonctions du calcul non entier” (Mainardi [2020]). Elle est définie par la série suivante, qui est convergente dans la totalité du plan complexe :

$$E_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\gamma n + 1)}, \quad \gamma > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.39)$$

Cette équation se ramène à une représentation en série d'une exponentielle pour $\gamma = 1$. Avec le changement de variable $z = -t^\gamma$, on a :

$$e_\gamma(t) = E_\gamma(-t^\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{\gamma n}}{\Gamma(\gamma n + 1)}, \quad t > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (1.40)$$

La transformée de Laplace de cette fonction conduit à :

$$\mathcal{L}\{e_\gamma(t)\} = \frac{p^{\gamma-1}}{p^\gamma + 1}. \quad (1.41)$$

Etant donné que cette fonction est une généralisation de la fonction exponentielle, il est logique de l'associer aux transitoires des systèmes non entiers. Soit un système très simple défini par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^\gamma + \lambda}. \quad (1.42)$$

Le calcul de la réponse indicielle donne dans le domaine de Laplace :

$$C(p) = \frac{1}{p(\lambda + p^\gamma)} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{p} + \frac{p^{\gamma-1}}{p^\gamma + \lambda} \right], \quad (1.43)$$

ou encore dans le domaine temporel :

$$c(t) = \frac{1}{\lambda} [1 - E_\gamma(-\lambda t^\gamma)] u(t). \quad (1.44)$$

On remarque que la fonction de Mittag-Leffler représente le transitoire du système. Elle est souvent utilisée afin de modéliser des phénomènes de relaxation (Berberan Santos [2005]). La figure 1.9 montre l'allure de la fonction de Mittag-Leffler pour des ordres différents de dérivation avec $\lambda = 1$.

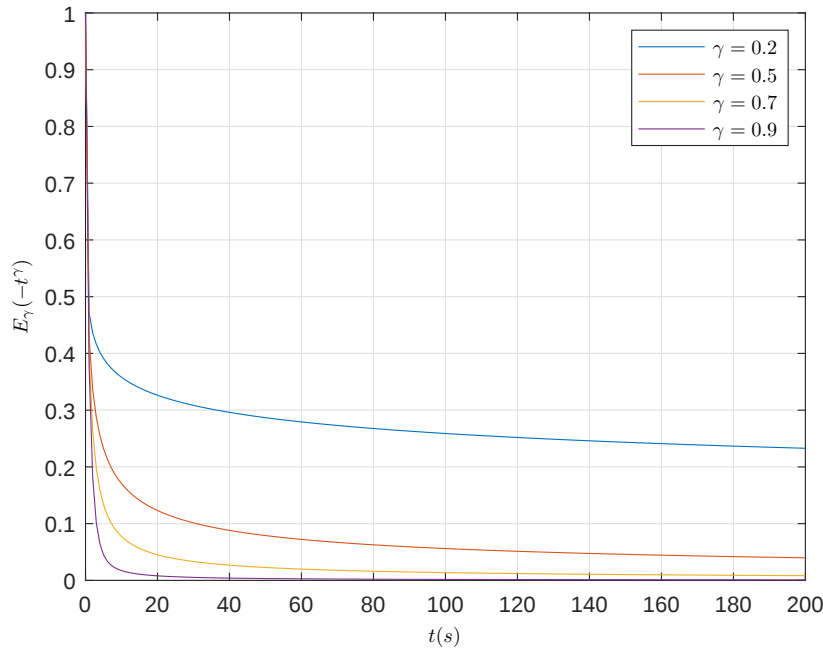


FIGURE 1.9 – Evolution de la fonction de Mittag-Leffler pour des ordres γ différents avec $\lambda = 1$

1.2.8 Stabilité des systèmes non entiers

Théorème 1.2.1 (Stabilité entrée bornée - sortie bornée). *Pour un système à une seule entrée et une seule sortie (single input single output SISO en anglais) linéaire (comme celui présenté en sous-section 1.2.6), ce système est dit entrée bornée - sortie bornée (bounded input bounded output BIBO en anglais) stable si, pour toute entrée bornée, la réponse du système est également bornée. Cela se traduit mathématiquement par l'existence d'une borne pour l'aire sous la courbe de la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système :*

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < M < \infty. \quad (1.45)$$

En entier, ceci revient normalement à être conditionné par le placement des pôles dans le plan complexe. Si les pôles sont dans le demi-plan gauche, on considère que le système est BIBO stable.

Le cas non entier est un peu plus complexe. Le critère de stabilité d'un système non entier est celui établi par Matignon (Matignon [1996]) et il permet de vérifier la stabilité d'un système commensurable à travers une analyse du placement des pôles dans le plan complexe. Matignon se sert de la transformation de variable $p_k = p^\nu$ pour réécrire le polynôme caractéristique du système et il définit la stabilité par rapport au placement des pôles p_k . La figure 1.10 illustre la zone stable des pôles p_k dans le plan complexe.

Théorème 1.2.2 (Stabilité de Matignon). *Soit $G(p)$ une fonction de transfert non entière commensurable à l'ordre ν . $G(p) = \frac{Q_\nu(p)}{P_\nu(p)}$ est stable si et seulement si :*

$$0 < \nu < 2 \quad (1.46)$$

et, pour chaque pôle p_k ($P_\nu(p_k) = 0$) :

$$|\arg(p_k)| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (1.47)$$

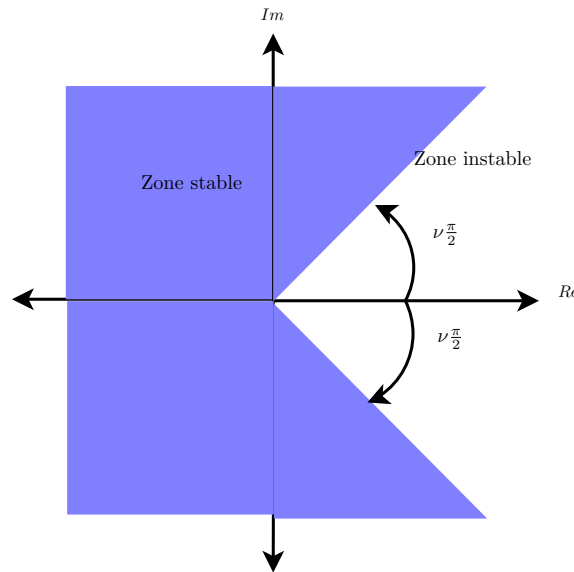


FIGURE 1.10 – Représentation de la zone de stabilité des pôles p_k dans le plan complexe ($0 < \nu < 1$)

Le critère de Matignon a été établi dans une première instance pour des ordres commensurables compris entre 0 et 1, mais l'extension pour $1 < \nu < 2$ a été développée par la suite (Moze et Sabatier [2005]). Il peut aussi être prouvé que les ordres commensurables supérieurs à 2 sont toujours instables (Malti et al. [2011]). D'autres extensions sont disponibles, telles que des critères adaptés au cas non-commensurable (Rivero et al. [2013]). Plus récemment, l'étude de stabilité pour des systèmes multi-variables et non-linéaires a aussi été faite (Lenka [2019]).

1.2.8.1 Exemple I : système non entier de première espèce

Soit la fonction de transfert de première espèce suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^\gamma + b}. \quad (1.48)$$

Cette fonction de transfert peut être vue comme un système γ -commensurable. En appliquant le théorème de stabilité de Matignon :

$$|\arg(p_k)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \quad (1.49)$$

pour le polynôme en p_k , on obtient :

$$p_k = -b \Rightarrow |\arg(-b)| = \pi. \quad (1.50)$$

En conséquence, pour cette fonction de transfert, la condition de stabilité est $\gamma < 2$ pour $b > 0$.

1.2.8.2 Exemple II : système non entier de seconde espèce

Soit la fonction de transfert non entière de seconde espèce suivante :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\zeta \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2\nu}}, \quad (1.51)$$

avec $K = 1$, $\zeta = -0.5$, $\omega_0 = 0.5\text{rad/s}$ et $\nu = 0.5$. On obtient alors :

$$G(p) = \frac{1}{1 - 1.414p^{0.5} + 2p}, \quad (1.52)$$

ou encore, avec le changement de variable $p_k = p^{0.5}$:

$$G(p_k) = \frac{1}{1 - 1.414p_k + 2p_k^2}. \quad (1.53)$$

Le théorème de Matignon donne :

$$|\arg(p_k)| > \frac{\pi}{4}. \quad (1.54)$$

Les racines sont $p_k = 0.3535 \pm 0.6124i$. Par conséquent, $|\arg(p_k)| = 1.05$. Ce système est donc stable. Il est possible de faire une analyse généralisée du système de seconde espèce afin de déterminer ces zones de stabilité (Malti et al. [2008]).

1.2.9 Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et intégrateur d'ordre non entier

Un dérivateur non entier est un système dans lequel la sortie $y(t)$ est, à un facteur près, une dérivée non entière à l'ordre γ de son entrée $u(t)$:

$$y(t) = \tau^\gamma \frac{d^\gamma u(t)}{dt^\gamma}. \quad (1.55)$$

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, on obtient :

$$Y(p) = (\tau p)^\gamma U(p), \quad (1.56)$$

ou encore, en posant $\omega_u = 1/\tau$:

$$Y(p) = \left(\frac{p}{\omega_u} \right)^\gamma U(p). \quad (1.57)$$

La fonction de transfert est alors :

$$D(p) = \left(\frac{p}{\omega_u} \right)^\gamma. \quad (1.58)$$

Pour l'étude de la réponse fréquentielle, on pose $p = j\omega$:

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u} \right)^\gamma \quad (1.59)$$

et le gain et la phase du dérivateur s'expriment par :

$$\begin{cases} |D(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^\gamma \\ Arg(D(j\omega)) = \gamma \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.60)$$

En partant de ces expressions, deux importantes remarques sont à faire. Premièrement, l'expression du gain permet de déduire qu'il s'agit d'une droite oblique de pente $20\gamma \text{ dB/dec}$. On élargit d'une façon significative les comportements asymptotiques possibles dans le domaine fréquentiel, car dans le cas entier les pentes sont contraintes à être des multiples entiers de 20 dB/dec. Avec le dérivateur non entier, la pente asymptotique d'une courbe de gain en fréquence n'est plus limitée à un spectre discret de valeurs. D'autre part, la phase est une constante égale à $\gamma \frac{\pi}{2}$, ce qui signifie que l'on permet l'existence de phases asymptotiques autres que des multiples de $\frac{\pi}{2}$. Ce dernier concept s'avère majeur en commande, notamment à travers la commande CRONE (Oustaloup [1991]). La figure 1.11 illustre les courbes de gain et de phase pour différents ordres de dérivation.

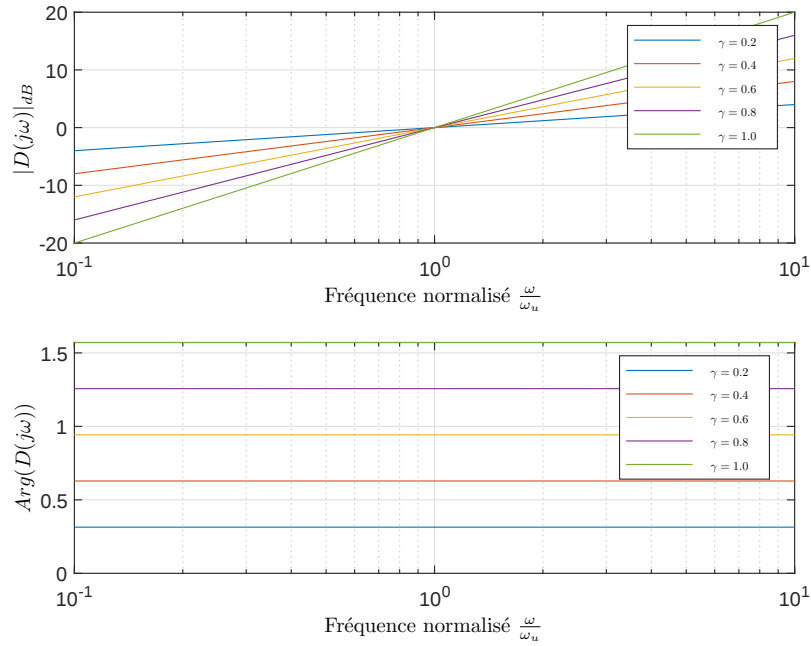


FIGURE 1.11 – Diagrammes de gain et de phase pour le dérivateur non entier

1.2.10 Élément à phase constante

En partant du dérivateur non entier, il est possible de concevoir un nouvel élément de circuit : un élément à phase constante. Ce dernier est plutôt proposé comme un intégrateur non entier et est considéré comme une généralisation d'une capacitance, décrite par :

$$Z_{CPE}(p) = \frac{1}{Cp^\gamma} \quad (1.61)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Dans une première instance, ce type d'élément de circuit a été exploité afin d'améliorer la modélisation de l'impédance des électrodes (Lasia [2022]). Les électrodes solides présentent un comportement de dispersion : ils dissipent de l'énergie tout en accumulant une partie de celle-ci. Si l'on pose la réponse fréquentielle de l'élément à phase constante :

$$Z_{CPE}(j\omega) = \frac{1}{C(j\omega)^\gamma} = \left[\frac{\cos \phi \frac{\pi}{2}}{C\omega^\gamma} \right] - j \left[\frac{\sin \gamma \frac{\pi}{2}}{C\omega^\gamma} \right], \quad (1.62)$$

c'est bel et bien la présence d'une partie résistive qui conduit à la composante dissipative.

Bien que cet élément soit utile pour la conception des modèles de circuits équivalents, il possède aussi des inconvénients. En effet, si l'on soumet un élément à phase constante à une différence de potentiel ΔE , le courant dans l'élément s'exprime par :

$$i(t) = \frac{\Delta EC}{\Gamma(1-\gamma)} t^{-\gamma}, \quad (1.63)$$

d'où l'on tire la charge :

$$Q(t) = \frac{\Delta EC}{\Gamma(1-\gamma)} t^{1-\gamma}. \quad (1.64)$$

On en déduit que le courant ne tombe jamais à zéro, ce qui signifie que l'électrode est continûment chargé, ce qui n'est physiquement pas possible. Ce type d'élément doit alors être tronqué dans le domaine temporel.

1.2.11 Dérivateur et intégrateur borné en fréquences

Une dérivée $\frac{p}{\omega_u}$ peut se limiter à un intervalle fréquentiel $[\omega_A, \omega_B]$ en utilisant la transmittance de la dérivée bornée en fréquences :

$$j \frac{\omega}{\omega_u} \approx C'_0 \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}}, \quad (1.65)$$

dans laquelle :

$$(\omega_b \omega_h)^{\frac{1}{2}} = \omega_u \quad (1.66)$$

et

$$C'_0 = \frac{\omega_b}{\omega_u} = \frac{\omega_u}{\omega_h}. \quad (1.67)$$

D'une façon plus générale, il est possible d'obtenir le transfert d'un dérivateur non entier tronqué en fréquence, à savoir :

$$D(j\omega) = \left(C'_0 \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^\gamma, \quad (1.68)$$

ou encore :

$$D(j\omega) = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\gamma \left(\frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}} \right)^\gamma. \quad (1.69)$$

La synthèse de cet opérateur de dérivation non entière consiste à obtenir un modèle rationnel qui approche la dérivation non entière sur une plage de fréquences donnée. En se basant sur la propriété de récursivité, une distribution récursive de N zéros et pôles réels est utilisé de telle sorte que :

$$D(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(j\omega) \quad (1.70)$$

avec

$$D_N(j\omega) = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\gamma \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega'_k}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_k}}. \quad (1.71)$$

Les fréquences ω_k et ω'_k correspondent aux zéros et pôles de rang k et elles sont déterminées en se basant tout d'abord sur un concept graphique. La figure 1.12 illustre la réponse en fréquences exacte d'une dérivée non entière (voir sous-section 1.2.9). D'une part, le gain du dérivateur (1.69) possède une pente de $20\gamma \text{ dB/dec}$ alors que les opérateurs entiers ont des

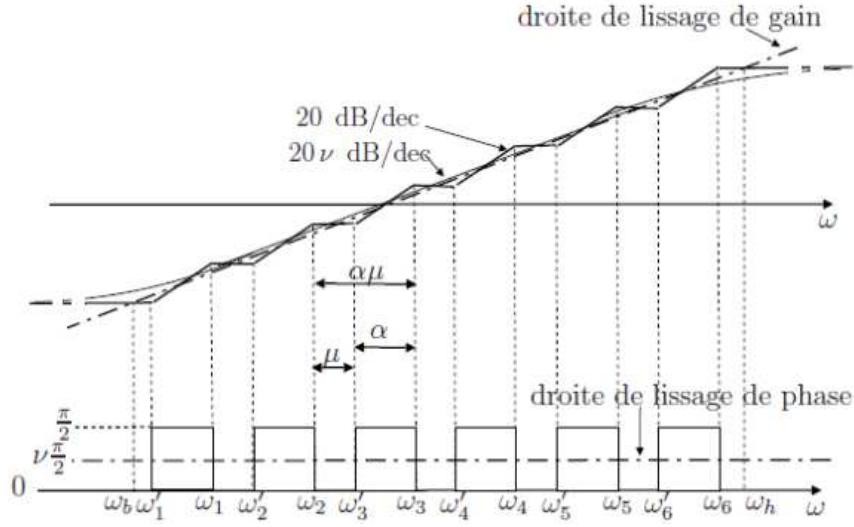


FIGURE 1.12 – Diagrammes asymptotiques de Bode de $D(j\omega)$ et $D_N(j\omega)$

pentres restreintes à des multiples entiers de 20 dB/dec . D'autre part, la phase du dérivateur (1.69) est constante et égale à $\gamma \frac{\pi}{2}$, alors que les phases asymptotiques pour les systèmes entiers sont toujours des multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$. L'opérateur de dérivation non entière est donc approché par des droites de lissage (voir figure 1.12), ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^\nu &= \left(\frac{\omega_b}{\omega_u}\right)^\nu = \frac{1}{\alpha^{N+\frac{1}{2}}} \\
 \omega'_0 &= \alpha^{-\frac{1}{2}}\omega_u \quad \omega_0 = \alpha^{\frac{1}{2}}\omega_u \\
 \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} &= \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha\eta > 1 \\
 \frac{\omega_{k+1}}{\omega'_k} &= \alpha > 0 \\
 \frac{\omega_{k+1}}{\omega'_k} &= \eta > 0 \\
 N &= \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)}
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Les rapports α et η sont appelés facteurs récurrents.

1.2.12 Lien entre dimension fractale et dérivation non entière

Vers la fin du XXème siècle, Tatom [2011] établit un lien entre une dérivée d'ordre non entier γ et une dimension fractale d :

$$\gamma = \frac{d}{2} - 1. \tag{1.73}$$

L'une des meilleures illustrations pour cette relation est celle de la relaxation de l'eau dans une digue poreuse. Oustaloup [1995] montre que le débit d'eau se relaxant sur une digue s'exprime en fonction de la dérivée non entière de la pression :

$$Q(t) = \frac{1}{\omega_0^\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} P(t). \quad (1.74)$$

Par sa géométrie fractale, il est possible de modéliser le système comme un réseau de cellules RC séries en parallèle. Le diagramme de Bode d'un tel modèle peut, à travers un lissage des courbes de gain et de phase, être assimilé à celui d'un dérivateur non entier p^γ . Il en découle donc que la dynamique de ce système à géométrie fractale est décrite par une équation différentielle d'ordre non entier.

1.3 Modélisation des fonctions biologiques

1.3.1 Modèle à paramètres concentrés du système circulatoire humain

Gul [2016] se sert de l'usage des analogies électro-mécaniques pour construire un modèle global du système circulatoire humain. Les vaisseaux sanguins permettent de distribuer le flux du sang. Il utilise dans son modèle deux critères pour créer des sous-modèles : la visco-élasticité et le fait qu'il s'agisse d'un élément terminal ou non. Chaque tronçon du système circulatoire est alors classé dans l'une de ces quatre catégories et modélisé avec un circuit.

En faisant une analogie à l'électricité telle qu'établie en Bond Graph, la tension $\mathcal{V}$ s'associe à la différence de pression ΔP qui pousse le fluide à traverser la section. Le courant électrique I est analogue au débit sanguin Q . Au niveau des composants du circuit utilisés pour développer le modèle, des résistances, inductances et capacitances sont exploitées. Chacun de ces éléments est utilisé pour prendre en compte un aspect de la physique du système.

- **Résistance** : elle modélise la résistance au flux de sang en raison de sa viscosité. Normalement, cette résistance au flux dépend du diamètre d du vaisseau, la longueur l et la viscosité ν du sang. Le diamètre du vaisseau est le paramètre le plus variable : il peut fluctuer d'une façon relativement large entre la dyastole et la systole. De plus, il peut largement impacter la valeur de la résistance. En supposant un flux en régime laminaire, la loi de Poiseuille est utilisée afin de déterminer la résistance hydraulique :

$$Q = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{8\nu l} \Delta P = \frac{1}{R} \Delta p \quad \text{avec } R = \frac{8\nu l}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}. \quad (1.75)$$

Cette équation est connue sous le nom de loi d'Ohm hydraulique.

- **Capacitance** : les vaisseaux sanguins peuvent s'étirer et se contracter quand ils sont soumis à des changements de pression ou de température. Cette élasticité est modélisée au moyen d'une capacitance C . L'inverse de cette capacitance est connue comme l'élasticité volumique $E_v = \frac{1}{C}$. La capacitance peut se définir comme le ratio entre le changement de volume du vaisseau et le gradient de pression auquel il est soumis :

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta P}. \quad (1.76)$$

Cette capacitance dépend du module d'élasticité E du tissu, ainsi que de ses propriétés géométriques :

$$C = \frac{2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 l}{Eh}. \quad (1.77)$$

- **Inductance** : l'inductance est analogue à l'inertie du sang. Ce paramètre joue un rôle dans l'accélération et la décélération du sang à chaque battement du cœur. L'inertie du sang L relie la chute de pression ΔP au ratio de changement de flux sanguin $\dot{Q}$ selon :

$$\Delta P = L \frac{dQ}{dt}. \quad (1.78)$$

La déformation d'un segment peut être reliée à l'effort mécanique appliqué à celle-ci. La loi de Hooke permet de le réaliser pour un élément entièrement élastique, à savoir :

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1.79)$$

où σ est l'effort, E le module de Young et ϵ la déformation.

Si un comportement visco-élastique est pris en compte, la relation devient alors :

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1.80)$$

où η est la viscosité du milieu.

Il est possible en partant de cette relation de créer un élément du circuit visco-élastique en associant en série une capacitance et une résistance. Gul [2016] propose deux modèles pour le système circulatoire se basant sur des réseaux simples tels qu'illustrés dans la figure 1.13. L'un des modèles utilise les réseaux A et B (modèle dit élastique) tandis que l'autre utilise les réseaux C et D (modèle visco-élastique).

1.3.2 Modèle non entier de l'interface entre le tissu cardiaque et l'électrode

Les électrodes sont des éléments indispensables en ingénierie biologique. Leur usage est souvent nécessaire dans des pacemakers, des défibrillateurs et des prothèses neuronales afin de conduire le courant à travers l'interface électrode-tissu. Les travaux d'Ovadia (Ovadia et Zavitz [1998]) permettent d'analyser l'interface tissu-électrode pour un muscle cardiaque.

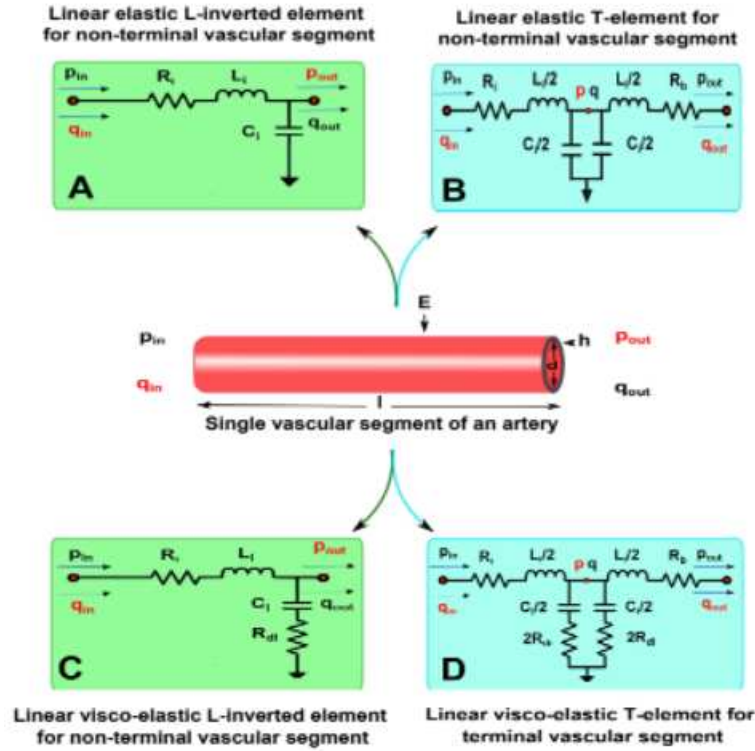


FIGURE 1.13 – Circuits équivalents pour les segments du système circulatoire pour le cas élastique (A,B) et visco-élastique (C,D)

En premier lieu, l'impédance électrique de l'interface a été modélisée avec le circuit montré dans la figure 1.14. Dans ce modèle, R_B indique la résistance du tissu, R_{a1} et R_{a2} indiquent les résistances d'accès et θ est la résistance de transfert de charge électrochimique. Dans ce premier modèle, Z_D est une combinaison de deux éléments à phase constante ($Z_{CPE}(p) = \frac{1}{Cp^\gamma}$).

Magin et Ovardia [2008] utilisent un modèle basé sur une combinaison d'éléments à phase constante afin de trouver une impédance qui s'ajuste plus précisément aux données des vraies données expérimentales. Le modèle d'impédance utilisé s'écrit :

$$Z(p) = R + \frac{1}{(Cp)^\alpha} + \frac{1}{(Cp)^\beta}. \quad (1.81)$$

L'équation (1.81) permet d'obtenir une courbe dans le plan complexe comme montré dans la figure (1.15). Les valeurs numériques sont ajustées afin d'être le plus proche possible des valeurs expérimentales obtenues dans (Ovardia et Zavitz [1998]). L'avantage de ce modèle à paramètres concentrés non entiers est la parcimonie (ou compacité) paramétrique atteinte (seulement avec 4 paramètres). Les deux éléments à phase constante correspondent aux régimes en basse et en haute fréquences.

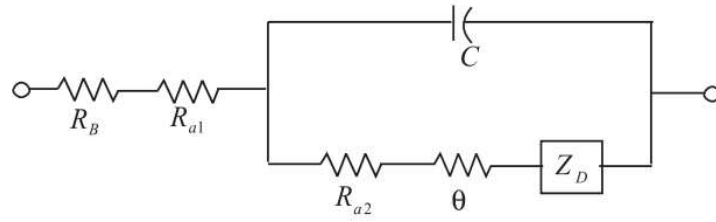


FIGURE 1.14 – Modèle de circuit équivalent pour la modélisation de l'interface électrode-tissu (extrait de Ovadia et Zavitz [1998])

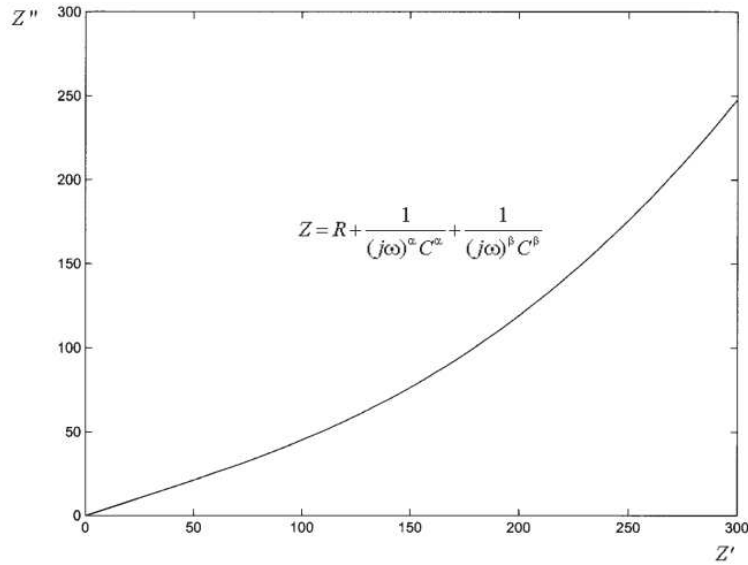


FIGURE 1.15 – Plan de Nyquist pour deux éléments à phase constante en série avec une résistance (extrait de Magin et Ovadia [2008])

1.3.3 Multi-modèle pour la relaxation d'un muscle

Dans la thèse de Sommacal [2007], un multi-modèle est développé pour les phases de contraction et relaxation d'un muscle. La complexité des cycles de contraction et relaxation incite à l'utilisation d'une approche basée sur des multi-modèles : plusieurs sous-modèles sont proposés afin de modéliser les différentes parties qui comprennent le phénomène.

Les phases de contraction et relaxation sont alors découplées, en associant un sous-modèle M_1 à la phase de contraction et un autre M_2 pour la relaxation. Lorsqu'une impulsion est appliquée, le sous-modèle M_1 est activé. Si aucune autre impulsion n'est appliquée avant le temps T_j , le modèle commute sur M_2 et sa réponse se relaxe alors depuis l'amplitude atteinte à $t = T_j$. Dès qu'une nouvelle impulsion est appliquée le sous-modèle M_1 est à nouveau sélectionné et s'ajoute au niveau de la contraction dans lequel le muscle se trouve lors de l'application de cette impulsion. La réponse de chaque sous-modèle n'est prise en compte que dans l'intervalle de temps où celui-ci est actif.

Pour la phase de contraction, un modèle de type Davidson-Cole est choisi :

$$F(p) = \frac{\delta A}{\left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right)^{\nu_c}} \quad (1.82)$$

La phase de relaxation est considérée comme une somme de deux fonctions de transfert :

- un modèle de relaxation à la réponse impulsionnelle, pris comme le complément à 1 d’une fonction de Davidson-Cole :

$$M_3(p) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_r} + 1\right)^{\nu_r}}; \quad (1.83)$$

- un modèle de différence entre la relaxation modélisée et la relaxation de la réponse impulsionnelle :

$$\delta(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_r} + 1\right)^{\nu_r}}. \quad (1.84)$$

1.3.4 Application de la spectroscopie en odontologie

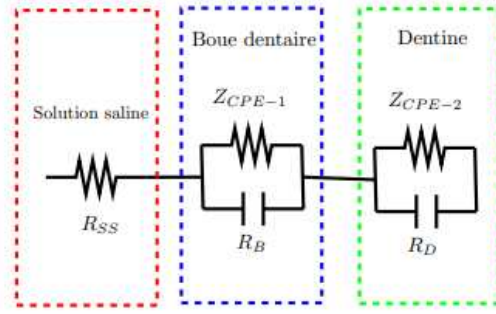
Un autre exemple intéressant qui se sert de la spectroscopie dans un cas biologique, voire spécifiquement en odontologie, est celui de l’impédance électrique dentaire. L’analyse d’impédance permet d’une façon non-invasive d’obtenir des connaissances d’un système. Dans ce cas, l’analyse de l’impédance dentaire pourrait dévoiler des défauts ou des pathologies des patients.

Il existe plusieurs études en odontologie afin d’approximer les impédances des différentes parties des dents (Herencsar et al. [2020]). La plupart de ces modèles disponibles dans la littérature se servent d’éléments à phase constante comme une composante du circuit équivalent. Ces éléments offrent une flexibilité accrue, ce qui permet de mieux approcher les réponses fréquentielles obtenues à travers l’expérimentation. L’usage d’éléments à phase constante entraîne des modèles d’impédance équivalente non entiers.

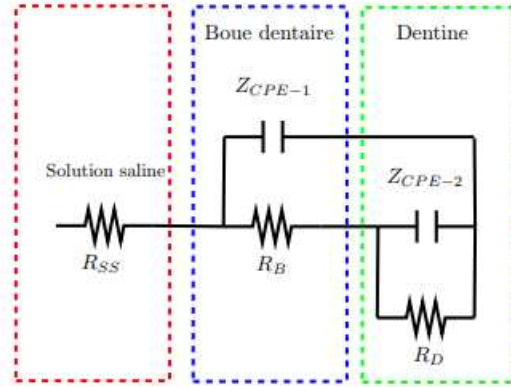
L’étude de Herencsar consiste à utiliser deux types de modèles d’impédance pour la dentine. L’un d’entre eux est un modèle dit de double dispersion de Cole, proposé initialement par Eldarrat et al. [2007]. Ce premier modèle propose d’une part que la boue dentinaire possède un comportement partiellement résistif et aussi un comportement d’élément à phase constante, et d’autre part, que le comportement de la solution saline est entièrement résistif. Ce modèle est illustré dans la figure 1.16.

Les résultats des approximations sont présentés sur le plan de Nyquist dans la figure 1.17. On observe la réponse fréquentielle des deux modèles de la figure 1.16, ainsi que la réalisation avec des cellules RC du modèle récurrent.

Même si les deux modèles proposés par les auteurs réussissent à correctement approcher les données, un nouveau défi émerge : trouver un modèle qui permet, à partir des paramètres mathématiques, remonter aux paramètres physiques d’un point de vue clinique. Ce dernier



(a) Modèle d'impédance de double dispersion de Cole



(b) Modèle d'impédance récurrente avec $n = 2$ bifurcations

FIGURE 1.16 – Modèles de circuits dentaires

point n'est pas un défi exclusif à cette étude en particulier, mais plutôt un fait très commun dans la modélisation mathématique appliquée au cadre biologique.

1.3.5 Modèle non entier pour la propagation électrique cardiaque

Dans les tissus biologiques, la transmission des impulsions électriques est modulée par la géométrie complexe du milieu. Une des techniques de modélisation considère le milieu comme continu en estimant des propriétés moyennes. Les contributions de la géométrie sont souvent considérées comme négligeables. Dans le cas du muscle cardiaque, Bueno-Orovio et al. [2014] proposent et justifient l'utilisation du Laplacien non entier afin de mieux comprendre la transmission électrique dans les muscles cardiaques.

Des modèles classiques pour la propagation électrique dans un ou deux milieux sont couramment utilisés. Afin de mieux prendre en compte l'hétérogénéité du milieu, le terme de diffusion (qui décrit le couplement du tissu) est remplacé par le Laplacien non entier. L'équation qui régit alors cette nouvelle proposition s'exprime selon :

$$\frac{\partial V_m}{\partial t} = -D_\gamma (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} V_m - \frac{1}{C_m} (I_{ion} - I_{stim}) \quad (1.85)$$

où V_m est le potentiel de la membrane, D_γ le coefficient de diffusion, C_m la capacité de la

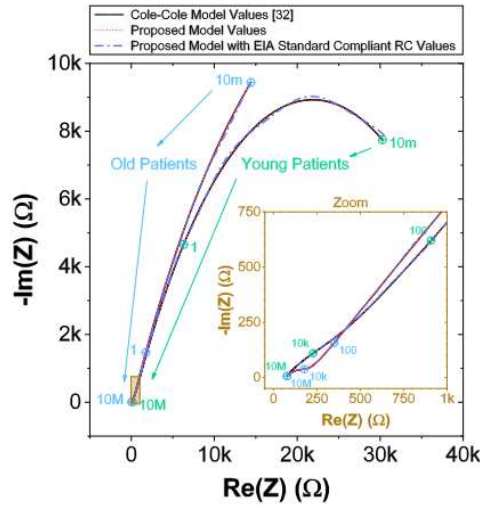


FIGURE 1.17 – (a) Modèle d'impédance de double dispersion de Cole, (b) modèle d'impédance récurrente avec $n = 2$ bifurcations (extrait de Herencsar et al. [2020])

membrane, I_{ion} et I_{stim} sont les courant trans-membrane et de stimulus, respectivement.

La diffusion est considérée comme standard lorsque $\gamma = 2$. Les courbes expérimentales montrent que, effectivement, l'ordre γ permet de mieux approcher les phénomènes de transport de charge dans la membrane. Cela se produit lors de la dépolarisation d'une membrane de tissu cardiaque de chien, pour laquelle l'évolution apparaît dans la Figure 1.18. La diffusion standard sous-estime le potentiel de la membrane dans la phase de montée. Les auteurs ont constaté que l'ordre non entier $\gamma = 1.75$ permet de mieux imiter le comportement du potentiel obtenu dans les expériences.

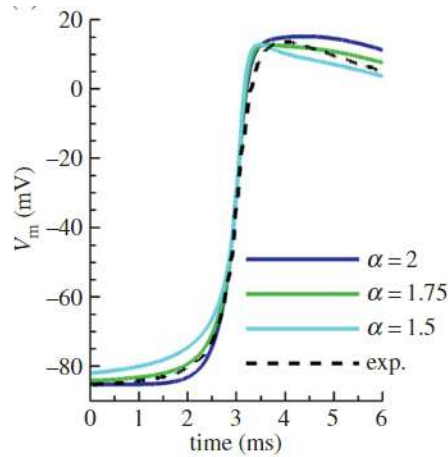


FIGURE 1.18 – Évolution du potentiel de membrane cardiaque du chien durant une phase de dépolarisation approché par un modèle standard ($\alpha = 2$) et par des modèles non entiers ($\alpha = 1.75$ et $\alpha = 1.5$) (extrait de Bueno-Orovio et al. [2014])

1.4 Conclusions

Ce chapitre permet dans un premier temps d'avoir un aperçu des principales propriétés des objets fractals et de la dérivation non entière. Bien qu'un lien entre fractalité et dérivation non entière existe, ce n'est pas toujours le cas. La dérivation non entière est un outil mathématique qui permet une modélisation souple au niveau dynamique, tandis que la fractalité est une propriété géométrique. Lorsque la dynamique d'un système est liée à sa géométrie fractale, on trouve alors des équations dynamiques d'ordres non entiers pour décrire le comportement du système.

Au moyen de quelques exemples, la troisième section du chapitre a mis en exergue l'importance et l'utilité de la modélisation mathématique en biologie. Des analogies avec les circuits électriques permettent l'assemblage de modèles simples comme celui du système circulatoire. De plus, les modèles basés sur des impédances peuvent se servir de la dérivation non entière à travers des éléments à phase constante pour aboutir à des approximations satisfaisantes tout en réduisant le nombre de paramètres à estimer.

La suite du présent ouvrage, notamment à partir du chapitre III, portera sur la modélisation des transferts thermiques dans les poumons. Même si la géométrie arborescente de celle-ci serait suffisante pour justifier l'usage de la dérivation non entière, sa modélisation se basera sur la dynamique naturelle des phénomènes de transferts thermiques, qui sont par eux-mêmes régis d'une certaine manière par la dérivation non entière.

Les deux raisons principales pour exploiter la dérivation non entière pour le cadre de cette thèse sont les suivantes : d'une part, il existe un lien intrinsèque entre la dérivation non entière et les phénomènes de diffusion (tel que le transfert thermique) et, d'autre part, ce type d'opérateur permet d'aboutir à des modèles avec une compacité paramétrique.

Chapitre 2

Physiologie respiratoire et modèles du système respiratoire

2.1 Introduction

Le système respiratoire est un exemple fascinant parmi les systèmes complexes en biologie. D'une part, la bouche et le larynx permettent un conditionnement de l'air entrant depuis l'extérieur. Par la suite, cet air entre dans l'organe centrale du système respiratoire, à savoir les poumons. Cet organe possède des caractéristiques extraordinaires, notamment sa géométrie : sa structure arborescente lui permet, dans un volume fini, d'avoir une surface incroyablement large. Il s'agit d'une caractéristique très puissante en biologie, car les phénomènes de transport (que ce soit une diffusion de masse ou un transfert thermique) sont dépendants de la surface. Cette organe incroyable possède un lien encore plus étroit avec le cœur et le système circulatoire car il possède deux réseaux de vaisseaux sanguins.

L'un des premiers objectifs de ce chapitre est d'explorer plus en détails la physiologie respiratoire. Cela comprend les fonctions du système, ainsi que son anatomie et les termes les plus importants pour décrire la respiration chez l'être humain. Dans un deuxième temps, tout comme cela a été précisé dans le chapitre I, les mathématiques ont depuis des siècles été un outil à nos côtés afin de mieux comprendre la nature. Le système respiratoire n'est pas exempt de plusieurs modélisations mathématiques qui se servent des principes de la physique et de la fractalité afin de décrire le fonctionnement de la respiration. Bien que quelques modèles de poumons puissent être extrêmement simples (comme les modèles *RC* classiques), des analyses plus approfondies et des modèles plus avancés seront présentés dans ce chapitre.

L'idée principale du présent chapitre est donc d'acquérir une connaissance des bases de la physiologie respiratoire ainsi que de mieux comprendre comment la modélisation vient en aide à la biologie. Cela permet de justifier aussi des choix de modélisation qui seront abordés dans le chapitre III.

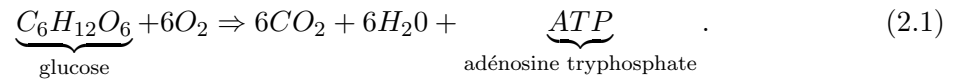
2.2 Physiologie respiratoire

Dans cette section, les concepts les plus essentiels liés au système respiratoire seront abordés : le fonctionnement, l'anatomie et les cycles de respiration. Cela permet d'avoir un bref aperçu assez global du système auquel cette thèse se consacre.

2.2.1 Fonctions du système respiratoire

La fonction principale du système respiratoire est de gérer l'échange de gaz entre l'air et le sang. Deux gaz sont les principaux fluides de travail de ce système : d'une part l'oxygène O_2 (nécessaire pour la glycolyse), et d'autre part le dioxyde de carbone CO_2 , qui est une réjection de la respiration.

Au niveau cellulaire, la respiration permet l'obtention d'énergie à partir de la glucose (obtenue par l'absorption de nourriture) et de l'oxygène. La réaction chimique qui caractérise la respiration est donnée par :



L'adénosine tryphosphate est la molécule qui accumule de l'énergie. La transformation de la glucose en ATP n'est pas parfaite : une partie du potentiel énergétique extrait du glucose se perd sous la forme de chaleur. Cela signifie que, au niveau cellulaire, la respiration induit une génération de chaleur due aux processus métaboliques, typiquement appelé q_{met} . Bien entendu, cette chaleur due au métabolisme peut avoir un impact sur les profils de température des tissus d'un corps, ce qui justifie cette définition. La chaleur de respiration est souvent prise comme une constante (Coccarelli et al. [2016]).

La respiration au sens macroscopique implique deux processus : la ventilation mécanique qui se charge de déplacer l'air vers et hors des poumons, et l'échange de gaz entre le sang et les poumons. L'équation (2.1) représente ce qu'il se passe au niveau des alvéoles du poumon, tandis que la respiration mécanique en soi, comprend les cycles d'inspiration et d'expiration. L'étroite relation entre le système respiratoire avec le système sanguin et les tissus rend souvent difficile l'analyse de manière isolée des poumons (Wagner [2015]). La figure 2.1 montre de manière schématique les principales structures et leurs fonctions physiologiques concernant le transport d'oxygène.

À la figure 2.1, on constate que, au-delà de la ventilation mécanique et de la diffusion, il y a aussi la perfusion. Cette dernière est tout simplement l'irrigation sanguine dans des différents tissus. Les poumons, eux, ne sont pas exempts de cette perfusion. De plus, c'est l'un des rares organes qui est en fait alimenté par deux réseaux circulatoires : la circulation pulmonaire et la circulation systémique. Les processus de ventilation, diffusion et perfusion sont liés par le principe de conservation de masse.

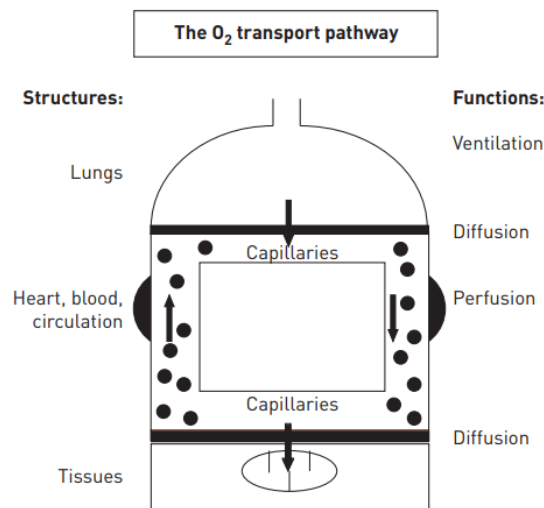


FIGURE 2.1 – Schéma du réseau de transport d’oxygène (O_2) avec toutes les structures et leurs fonctions (Wagner [2015])

2.2.2 Anatomie et mécanique de la respiration

2.2.2.1 Anatomie basique du système respiratoire

D’une façon générale, le système respiratoire est composé de deux grandes sections, à savoir :

- le système respiratoire supérieur qui comprend le nez, les cavités paranasales, l’épiglotte, le pharynx et le larynx, comme le montre la figure 2.2. Il est responsable aussi du conditionnement thermique de l’air entrant avant son arrivée dans la trachée. Des études montrent le rôle de cette partie du système respiratoire chez les petits animaux (Collins et al. [1971]).
- le système respiratoire inférieur (voir Figure 2.3) qui débute de la trachée et se prolonge jusqu’à hauteur de la sixième vertèbre. Cette partie du système respiratoire est contenu dans la cavité thoracique, qui comprend le sternum, la colonne vertébrale et le diaphragme. Ce dernier permet de séparer le système respiratoire de l’abdomen. Il s’occupe de la mécanique de la respiration.

Le thorax permet de protéger le cœur, les poumons et les vaisseaux sanguins en se servant principalement des côtes. Cela justifie qu’une fracture de plusieurs côtes puisse engendrer une détresse respiratoire.

D’autre part, le diaphragme se trouve attaché au péritoine, qui sépare les cavités abdominales de la cavité thoracique.

2.2.2.2 Mécanique respiratoire

Le processus de respiration comprend deux phases : l’inspiration et l’expiration. L’inspiration est la phase active du processus. Elle est initiée par le contrôle respiratoire dans le

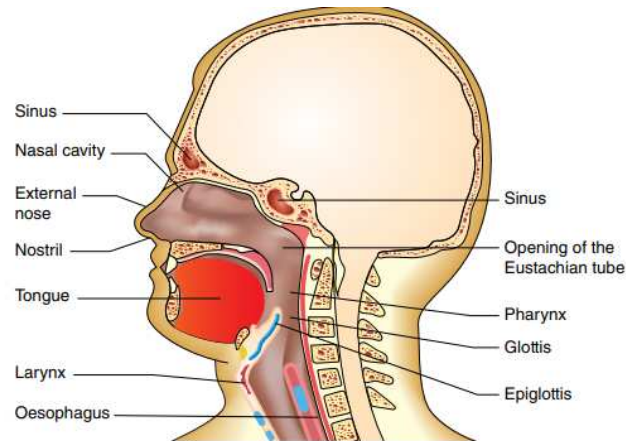


FIGURE 2.2 – Système respiratoire supérieur (Paramothayan [2019])

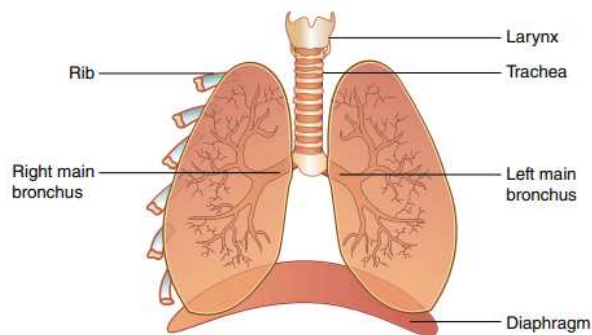


FIGURE 2.3 – Système respiratoire inférieur (Paramothayan [2019])

système nerveux. Les signaux du système nerveux engendrent la contraction du diaphragme et des muscles des entrecôtes, ce qui produit une expansion de la cavité thoracique et une chute de pression dans l'espace pleural. La contraction du diaphragme pousse celui-ci à se déplacer vers l'abdomen et produit aussi la rotation des côtes vers un plan horizontal, permettant ainsi une expansion supplémentaire du thorax. Dans une respiration normale, ce mouvement du diaphragme possède une ampleur d'environ 1 cm, mais il peut atteindre 10 cm lors d'inspirations forcées. L'inspiration permet l'entrée d'air depuis le système respiratoire supérieur jusqu'aux alvéoles. Cela se produit jusqu'à ce que la pression alvéolaire soit égale à celle qui se situe à l'entrée des voies aériennes.

L'expiration est un phénomène passif produit grâce à l'élasticité du tissu pulmonaire. En relaxant les muscles après l'inspiration, l'air est éjecté du système respiratoire à travers les voies aériennes supérieures. Quand un volume important d'air doit être dégagé rapidement ou que les voies aériennes sont trop étroites durant l'expiration (comme pour l'asthme), les muscles internes des entrecôtes et les muscles abdominaux antérieurs se contractent pour accélérer l'expiration.

2.2.2.3 Volumes pulmonaires et test de fonction pulmonaire

La respiration entraîne des changements constants de volume dans les poumons et le thorax. Au moyen du spiromètre, les médecins peuvent mesurer les volumes d'air entrants et sortants d'un patient durant les cycles de respiration. La figure 2.4 illustre les différentes quantités utilisées en physiologie respiratoire.

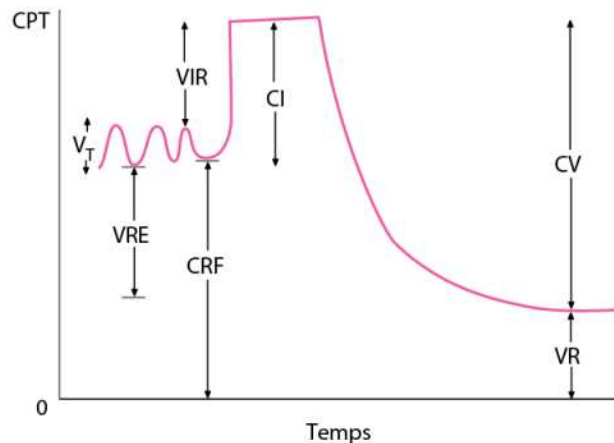


FIGURE 2.4 – Volumes pulmonaires

On peut alors définir les différentes quantités et leur valeurs moyennes :

- V_T , d'environ 0.5 L, est le volume courant lors d'une respiration normale ;
- VRE , de 1.0 L, est le volume résiduel qui peut rester dans les poumons après une exhalation plus intense que la normale ;
- VIR , pouvant atteindre les 3.0 L, est le volume après inspiration ;
- CI est la capacité totale d'inspiration. $CI = V_T + VIR$;
- CV est la capacité vitale qui prend en compte la capacité d'inspiration et le volume résiduel après expiration ;
- VR , autour de 1.5 L, est le volume résiduel qui reste toujours dans les poumons, même après une expiration forte.

Dans l'hypothèse de conditions normales et d'une symétrie entre l'inspiration et l'expiration, la respiration implique des fluctuations de volume pulmonaire d'autour de 0.25 L, tandis que le volume moyen de l'organe est de 2.75 L. En conséquence, lors d'une respiration normale, les fluctuations de volume des poumons sont relativement petites par rapport à la capacité de ces-derniers.

En plus des volumes pulmonaires, un autre paramètre important est la fréquence du cycle respiratoire, c'est-à-dire le nombre de respirations par minute. Dans des conditions normales, celui-ci se situe entre 10 et 18 respirations par minute (Cretikos et al. [2008]). La ventilation par minute V_E est définie comme le volume d'air transporté par minute. Chez une personne au repos, elle est de 4500 mL/min.

2.2.3 Structure des poumons

Strictement parlant, les deux poumons de l'être humain ne sont pas symétriques. Le poumon droit possède trois lobes, tandis que celui de gauche n'en a que deux. Différentes fissures permettent de distinguer les lobes (voir Figure 2.5) : pour les deux poumons, la fissure oblique sépare les lobes inférieures du reste des poumons. Pour le poumon droit, une fissure horizontale permet la séparation entre le lobe supérieur et le lobe moyen. Par ailleurs, le cœur se trouve plus proche du poumon gauche.

La zone de transport d'air comprends la trachée, qui se divise par la suite en deux bronches principales. Les bronches principales peuvent se diviser en bronches plus petites, allant jusqu'aux bronches dites terminales.

La trachée est une structure semi-rigide qui relie le système respiratoire supérieur au thorax. La trachée et les bronches principales possèdent du tissu cartilagineux en forme de U attaché au muscle dans la partie postérieure. Les parois antérieures et latérales de la trachée sont soutenues par des anneaux de cartilage, tandis que la paroi postérieure n'a pas de cartilage. Cela rend la trachée vulnérable. Les maladies du cartilage peuvent gravement affecter l'ensemble du système respiratoire.

La bronche droite principale est plus épaisse, courte et verticale que celle de gauche. L'air a tendance à pénétrer en majorité dans le poumon droit.

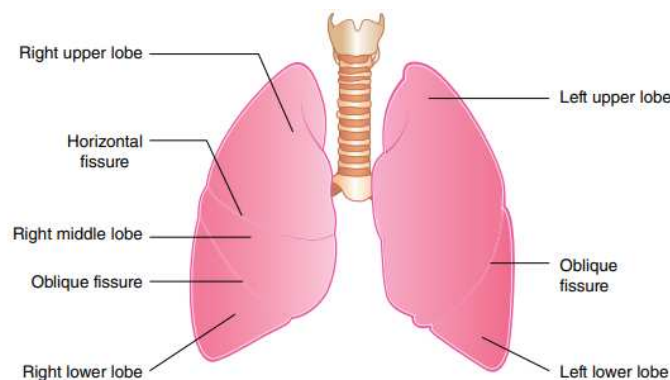


FIGURE 2.5 – Structure des poumons (Paramothayan [2019])

2.2.4 Diffusion et perfusion des poumons

Les poumons reçoivent du sang à travers le système circulatoire pulmonaire et le système systémique. L'artère pulmonaire sort du ventricule droit du cœur et se divise ensuite en deux artères pulmonaires, une à droite et l'autre à gauche. Des capillaires sont en contact avec les sacs alvéolaires afin de permettre l'échange gazeux. D'autre part, plusieurs artères des bronches viennent depuis l'aorte et sont en contact avec les bronches et les bronchioles.

L'échange entre le sang et les gaz se produit par simple diffusion de masse. L'oxygène et le dioxyde de carbone se déplacent vers des zones avec des pressions plus basses. Ce processus est passif et n'implique pas d'injection d'énergie. La quantité de gaz qui se déplace à travers

le tissu de l'organe est déterminée par la loi de Fick. La faible épaisseur du tissu pulmonaire permet cet échange avec facilité.

Les capillaires pulmonaires se trouvent autour d'un nombre significatif de sacs alvéolaires, ce qui correspond à une surface équivalente d'échange de $85 m^2$ contenu dans un volume de $4 L$.

2.3 Modélisation mathématique du système respiratoire

2.3.1 La fractalité des poumons

Une des principales caractéristiques du poumon est sa géométrie. La structure arborescente du poumon a souvent été un sujet de fascination auprès des scientifiques, notamment Benoit Mandelbrot. Malgré les irrégularités de cet organe, la réduction systématique des conduits au niveau du diamètre et des longueurs est assez remarquable. En 1977, Mandelbrot avait déjà constaté l'auto-similarité du poumon.

Pendant les années 60, des mesures sur des poumons ont été prises afin d'analyser la réduction du diamètre des conduits (Weibel [2014]). Les résultats de ces mesures sont présentés à la figure 2.6 :

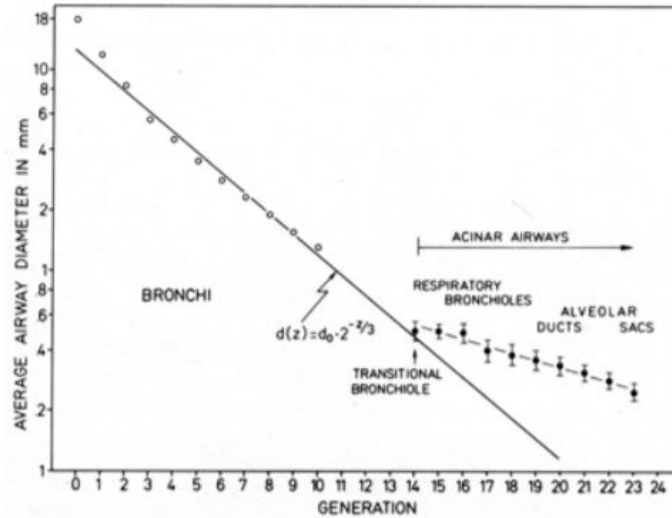


FIGURE 2.6 – Mesures des diamètres moyens des conduits du poumon (Weibel [2014])

Cette image dévoile des faits intéressants sur la récursivité dans les poumons. D'un côté, il est possible d'apprécier un comportement quasiment linéaire sur une échelle logarithmique pour les diamètres. Le diamètre se comporte selon une loi mathématique dont la forme est la suivante :

$$d = d_0 2^{-\frac{z}{3}}. \quad (2.2)$$

Cette relation est similaire à l'expression obtenue d'après la loi de Murray pour relier les diamètres des bifurcations. D'après Murray, si un conduit de fluide est divisé en deux

conduits identiques, le lien entre les diamètres afin de minimiser la perte de pression dans la bifurcation est donné par :

$$d_{n-1} = d_n 2^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.3)$$

On en déduit que le ratio optimal entre deux diamètres consécutifs serait de 0.79. Ce niveau optimal est, dans une situation réelle, très sensible à des variations paramétriques. En effet, des fortes augmentations des résistances hydrauliques peuvent se produire lors des variations paramétriques. Les mesures expérimentales ont cependant prouvé qu'autour des six premiers niveaux du poumon, le ratio entre les diamètres consécutifs se situe effectivement autour de cette valeur de 0.79, mais elle augmente de manière progressive jusqu'à la valeur de 0.90 à la génération 16. Dans les conduits plus petits ; le ratio entre les diamètres est en moyenne de 0.85.

Murray a considéré des systèmes avec une dimension $d = 3$, c'est-à-dire que le système remplit la totalité de l'espace qu'il occupe. Cependant, il est possible de généraliser son expression pour envisager le cas d'une structure fractale :

$$d_{n-1} = d_n 2^{-\frac{1}{d}} \quad (2.4)$$

où d indique la dimension fractale.

Une constante par convention qui désigne la dimension fractale n'est pas encore disponible. De nombreuses études et démarches de calcul ont été faites, mais en obtenant les résultats obtenus sont toujours différents et varient entre 2 et 3. Une des dernières études (Lamrini Uahabi et Atounti [2017]) suggère une dimension fractale du poumon de $d = 2.88$.

D'autre part, plusieurs études médicales tentent d'étudier un possible lien entre la dimension fractale des poumons et certaines pathologies. Helmberger et al. [2014] analysent la tortuosité et la dimension fractale du poumon afin d'analyser la corrélation avec la pression artérielle pulmonaire et des paramètres hémodynamiques. Leur étude indique une faible corrélation entre la dimension fractale et l'hypertension pulmonaire. Néanmoins, ils précisent que leur méthode de quantification de la dimension fractale (autour de 2.34 pour la plupart des patients dans leur étude) se base sur un comptage de boîtes en 3D. Une autre étude (Haitao et al. [2011]), basée sur des projections en 2D réussit à établir une forte corrélation entre l'hypertension et la fractalité du système respiratoire.

2.3.2 Modèle pneumatique de Hildebrandt

Les premiers modèles dynamiques des poumons se basent sur l'élasticité de ceux-ci et tentent d'établir un lien entre la pression alvéolaire et le volume pulmonaire. Le ratio entre le volume pulmonaire et la pression alvéolaire est appelé "compliance". Au fur et à mesure que le volume augmente, la force nécessaire pour continuer à étendre l'organe augmente, elle aussi. La figure 2.7 illustre deux courbes PV (pression-volume) de deux personnes différentes. Dans les deux cas, la réduction de l'élasticité lorsque le volume augmente est observée. Néanmoins,

le patient *B* possède une élasticité inférieure à celle du patient *A*. Cela est souvent le cas chez les personnes atteintes de pathologies respiratoires telles que la fibrose.

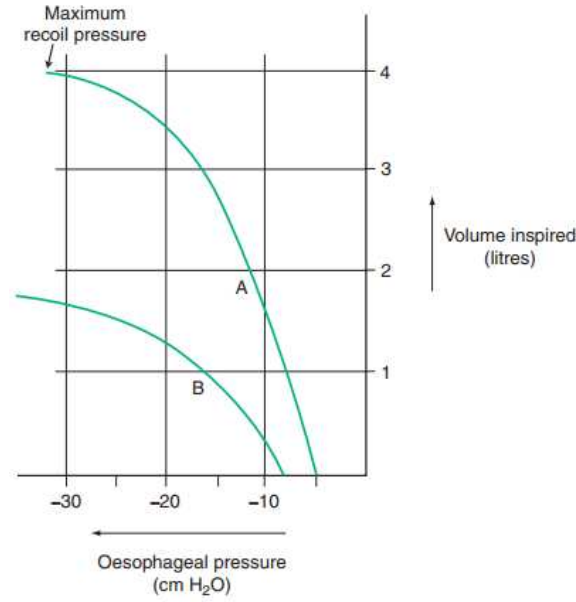


FIGURE 2.7 – Courbes de pression-volume pour deux patients différents (Bourke et Burns [2015])

Hildebrandt [1969] se base sur les propriétés visco-élastiques d'un ballon pour modéliser les poumons. Il découvre que les courbes obtenues peuvent être décrites par des fonctions potentielles. La figure montre une dépendance quasi-linéaire du ratio pression-volume et le logarithme du temps.

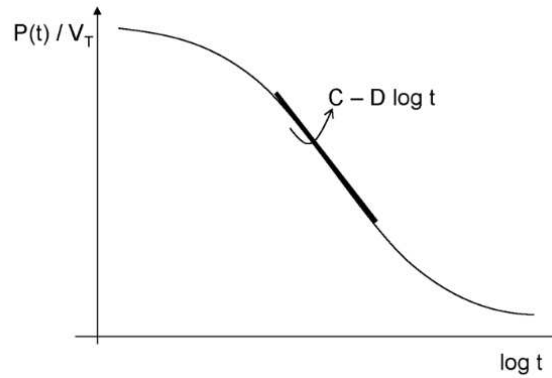


FIGURE 2.8 – Dépendance du ratio pression-volume et le logarithme du temps découvert par Hildebrandt (Hildebrandt [1969])

Hildebrandt propose alors le modèle suivant :

$$\frac{P(t)}{V_T} = At^{-n} + B \quad (2.5)$$

ou *A* et *B* sont des constantes arbitraires et *n* l'ordre.

Dans le domaine de Laplace, cela donne :

$$\frac{P(p)}{V_T} = A \frac{\Gamma(1-n)}{p^{1-n}} + \frac{B}{p}. \quad (2.6)$$

Si l'on considère une entrée de type échelon $v(t) = V_T u(t)$, alors la sortie est donnée par $P(p) = \frac{T(p)V_T}{p}$, $T(p)$ étant une fonction de transfert inconnue. En introduisant $P(p)$ dans l'équation (2.6), la fonction de transfert devient :

$$T(p) = Ap^n \Gamma(1-n) + B. \quad (2.7)$$

Si on prend en compte la masse d'air introduite dans le ballon, un terme supplémentaire apparaît dans la fonction de transfert :

$$T(p) = Ap^n \Gamma(1-n) + B + L_r p^2 \quad (2.8)$$

où L_r est une inductance mécanique.

Avec ce modèle, il est possible d'étudier le comportement du ballon face à des oscillations forcées sinusoïdales. Hildebrandt étudie l'identification de ce modèle dans le cas des poumons des chats (Hildebrandt [1970]). Il suggère d'approcher le ratio pression-volume avec une fonction de transfert ayant une partie imaginaire dépendante de la fréquence. Cela a pour objectif d'avoir une phase quasi constante lorsque la fréquence varie et constitue indirectement une proposition d'utilisation de l'élément à phase constante.

2.3.3 Modèles pneumatiques par analogie en circuit

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles d'impédance respiratoire basés sur des circuits équivalents. L'un des avantages principaux de ce type de modélisation est l'utilisation d'un nombre limité de variables.

L'un des modèles les plus anciens est celui de DuBois et al. [1956] (illustré en Figure 2.9), qui propose une analogie entre l'entrée du système respiratoire et les poumons à un tube avec un ballon. Ce modèle décrit le système comme un simple circuit *RLC* en série. On parle d'inertie d'air pour l'élément L , de résistance des voies aériennes pour R et de capacité pour C . Les essais de DuBois montrent que, pour des fréquences de respirations normales, l'inertie de l'air est négligeable. Par contre, ce paramètre augmente de façon significative lorsque la fréquence augmente. La résistance augmente aussi de manière significative avec la fréquence. Ils arrivent à la conclusion que le modèle est insuffisant et qu'il serait nécessaire de proposer un modèle mécano-acoustique afin de mieux capter le comportement des poumons.

Un modèle fortement biaisé en haute fréquences est le modèle visco-élastique proposé par Navajas et al. [1990] (Figure 2.11). Ce modèle prend en compte la résistance des voies aériennes (R_{AW}), une élasticité statique (C_S) et une combinaison en parallèle d'une capacité et d'une résistance pour la visco-élasticité du système. Ce modèle est proposé pour des

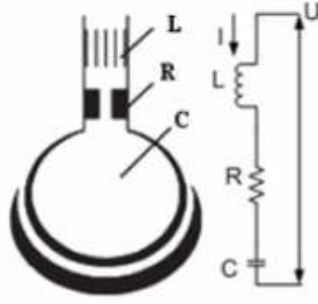


FIGURE 2.9 – Modèle de circuit de DuBois avec inertie de l'air, résistance des voies aériennes et élasticité (extrait de DuBois et al. [1956])

cas en basse fréquences, et les essais sont réalisés avec sept patients sous anesthésie et ne souffrant pas de pathologie respiratoire. La résistance équivalente est fortement dépendante de la fréquence pour tous les patients.



FIGURE 2.10 – Modèle visco-élastique de Navajas avec R_{VE} et C_{VE} étant les éléments visco-élastiques (extrait de Navajas et al. [1990])

Par la suite, l'inertie de la masse d'air est réintroduite dans le modèle de Diong et al. [2007] (L_r), lequel est une amélioration du simple modèle RLC . Les résultats initialement obtenus avec le modèle de DuBois sont améliorés avec les modifications de Diong, grâce aussi à l'introduction d'une résistance périphérique R_p .

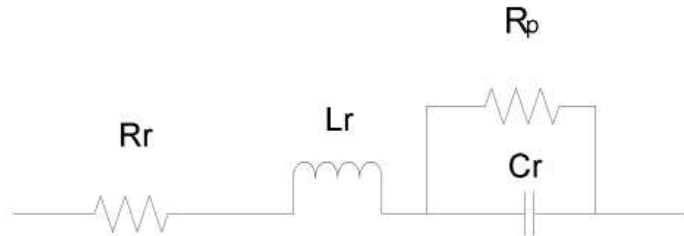


FIGURE 2.11 – Modèle RLC amélioré de Diong (extrait de Diong et al. [2007])

2.3.4 Modèle pneumatique de bifurcation de Kuwahara

C'est à partir de la loi de Murray que Kuwahara a développé un modèle mécanique pour le poumon (Kuwahara et al. [2009]). La figure 2.12 montre un schéma de la structure du réseau et la notation des dimensions des conduits utilisées dans l'étude de Kuwahara.

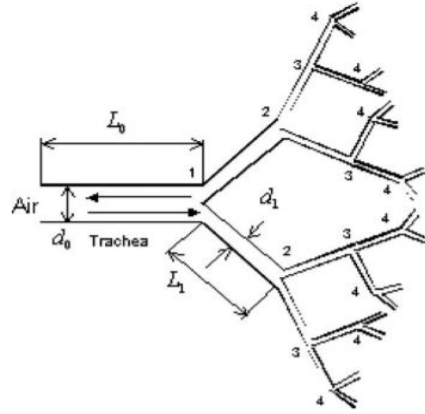


FIGURE 2.12 – Structure arborescente du réseau respiratoire (extrait de Kuwahara et al. [2009])

Le flux d'air dans les poumons est de basse vitesse, ce qui se traduit par un flux laminaire. La chute de pression dans une section n de longueur L_n et avec diamètre d_n est donnée par la Loi de Poiseuille :

$$\delta p_n = \frac{128\mu L_n}{\rho \pi d_n^4} \left(\frac{\dot{m}}{2^n} \right). \quad (2.9)$$

Afin de minimiser la résistance du flux, la loi de Murray permet d'établir un lien pour deux diamètres de sections consécutives :

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} = 2^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.10)$$

En supposant que la chute de pression durant l'inspiration est égale à celle de l'expiration, il est aussi possible de lier les longueurs des sections :

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = 2^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.11)$$

Les chutes de pression dans les bifurcations sont considérées comme négligeables pour ce modèle. Il permet alors d'établir une expression pour la chute totale de pression dans les poumons.

A part l'étude des pressions, ce modèle prend aussi en compte l'échange gazeux dans les poumons et leur possible influence sur l'aspect du flux. La perfusion sanguine et la diffusion d'oxygène sont prises en compte. Les simulations numériques conduisent à la conclusion selon laquelle la diffusion de masse au niveau alvéolaire possède un effet marginal sur le comportement mécanique des poumons. Concernant la chute de pression, ce modèle mène

à un nombre optimal de $N = 23$ bifurcations, ce qui est cohérent avec la physiologie des poumons.

2.3.5 Modèle pneumatique d'impédance respiratoire mécanique de Ionescu

Clara Ionescu aborde le problème du diagnostic des pathologies respiratoires à l'aide des modèles non entiers. Dans Ionescu et al. [2011] et Ionescu [2012], elle confronte des mesures au modèle non entier de l'impédance d'entrée du poumon se basant sur sa géométrie fractale, développé par Alain Oustaloup. L'impédance mécanique du poumon est définie comme le rapport pression sur débit d'air entrant.

Tout comme les modèles de circuits simples qui précèdent les travaux de Ionescu, ce modèle fait aussi une analogie entre l'électricité et la mécanique. Des éléments résistifs, inductifs et capacitifs sont aussi utilisés. Ce modèle considère une impédance longitudinale Zl_m^* ainsi qu'une impédance transversale Zt_m^* pour des tubes qui transportent de l'air où m indique le niveau dans la structure arborescente des poumons. Ce modèle de circuit est montré dans la figure 2.13.

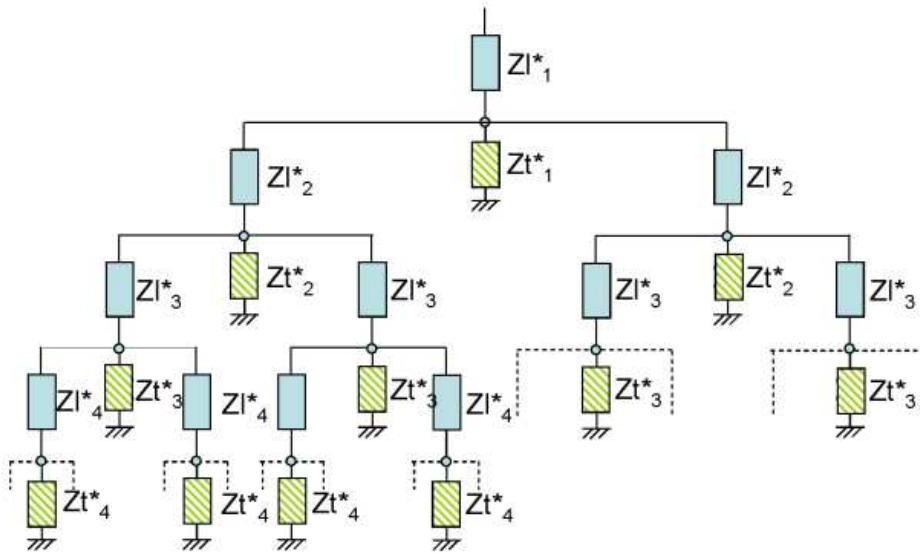


FIGURE 2.13 – Structure arborescente du réseau respiratoire (extrait de Ionescu [2009])

En supposant un flux volumique symétrique, les impédances et admittances sont des fonctions de la puissance de 2. La résistance totale à un niveau m est donnée par récursivité :

$$R_{em} = \frac{R_{em}^*}{2^{m-1}}, \quad (2.12)$$

l'inertie par :

$$L_{em} = \frac{L_{em}^*}{2^{m-1}}, \quad (2.13)$$

et la capacitance d'une seule branche par :

$$C_{em} = C_{em}^* 2^{m-1}. \quad (2.14)$$

Ces relations permettent de simplifier le circuit équivalent montré en figure 2.13 et utiliser un réseau équivalent en gamma (voir Figure 2.14).

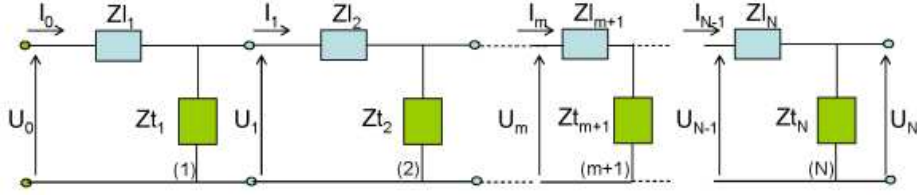


FIGURE 2.14 – Circuit gamma équivalent du modèle de circuit de Ionescu (extrait de Ionescu [2009])

L'expression des impédances de la figure 2.14 s'exprime par :

$$Zl_m(s) = R_{em} + L_{em}s. \quad (2.15)$$

Sous l'hypothèse de récursivité entre les résistances, inductances et capacitances :

$$\frac{R_{em+1}}{R_{em}} = \lambda, \quad \frac{L_{em+1}}{L_{em}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{C_{em+1}}{C_{em}} = \chi. \quad (2.16)$$

L'impédance équivalente en entrée $Z_N(s)$ peut être exprimée comme un développement en fractions continues (Oustaloup [1995]). Afin de rendre plus claire la notation, l'admittance $Y_N(s) = \frac{1}{Z_N(s)}$ sera utilisée pour les calculs.

Pour un élément m :

$$Zl_m(s) = \frac{U_{m-1}(s) - U_m(s)}{I_{m-1}(s)} \quad (2.17)$$

et

$$Zt_m(s) = \frac{U_m(s)}{I_{m-1}(s) - I_m(s)} \quad (2.18)$$

d'où l'on tire :

$$U_m(s) - U_{m+1}(s) = Zl_{m+1}(s)I_m(s) \quad (2.19)$$

ce qui donne une expression pour l'admittance équivalente :

$$\frac{U_{m+1}(s)}{I_m(s)} = \frac{Zt_{m+1}(s)}{1 + Zt_{m+1}(s) \frac{I_{m+1}(s)}{U_{m+1}(s)}}. \quad (2.20)$$

Une relation de récurrence peut alors être déduite. Lorsque $m = N$ et $N \rightarrow \infty$:

$$Y_N(s) = \frac{\frac{1}{Zl_1(s)}}{1 + \frac{\frac{Zt_1(s)}{Zl_1(s)}}{1 + \frac{\frac{Zt_2(s)}{Zl_2(s)}}{1 + \dots \frac{\frac{Zt_{N-1}(s)}{Zl_{N-1}(s)}}{1 + \frac{\frac{Zt_N(s)}{Zl_N(s)}}{1 + \dots}}}}} \quad (2.21)$$

En utilisant les relations récursives et en prenant en compte les approximations suivantes :

$$L_{e1} \ll R_{e1}|s| < \frac{1}{R_{e1}C_{e1}} \text{ et } |s| \ll \frac{R_{e1}}{L_{e1}} \quad (2.22)$$

et

$$\alpha\chi > 1, \quad \alpha\lambda > 1, \quad \lambda > 1 \text{ et } \chi > 1 \quad (2.23)$$

l'impédance s'approche par :

$$Y_N(s) \approx \frac{W_n(s)}{1 + g(W_d(s), \lambda, \chi)} \quad (2.24)$$

où :

$$W_d(s) = \frac{1}{R_{e1}C_{e1}s}, \quad W_n(s) = \frac{1}{R_{e1}} \quad (2.25)$$

et

$$g(W_d(s), \lambda, \chi) = \frac{W_d(s)}{1 + \frac{\frac{\lambda}{W_d(s)}}{1 + \frac{\frac{\lambda\chi}{1+\dots}}}}} \quad (2.26)$$

Cela mène à l'expression approchée pour l'admittance :

$$Y_N(s) \approx \frac{W_n}{K(\lambda, \chi)(W_d(s))^n} \quad (2.27)$$

avec un ordre non entier n donné par :

$$\gamma = \frac{\log(\lambda)}{\log(\lambda) + \log(\chi)}. \quad (2.28)$$

Les valeurs de la fonction $K(\lambda, \chi)$ se déterminent avec les méthodes décrites dans Oustaloup [1995]. La conclusion principale est le lien entre le modèle de circuit avec bifurcations et l'apparition d'un ordre non entier γ . Dans le domaine fréquentiel, cet ordre fait apparaître un comportement à phase constante. La plage de fréquences sur laquelle ce comportement est valide est conditionnée par le nombre de cellules N dans le circuit équivalent. La morphologie et la géométrie font changer le coefficient ainsi que l'ordre non entier de l'élément à phase constante équivalent.

En partant de ce concept, Ionescu propose plusieurs modèles équivalents d'impédance pulmonaire. Le premier, nommé $FO1$, s'exprime selon :

$$Z_{FO1}(s) = R_r + \frac{1}{C_r s^{\beta_r}}. \quad (2.29)$$

Ce modèle prend en compte la résistance des voies aériennes et un élément à phase constante, mais néglige l'inertie de l'air. Il est conseillé pour des fréquences en dessous de 5Hz (Hantos et al. [1992]). Un deuxième modèle est proposé afin de prendre en compte l'inertie de l'air :

$$Z_{FO2}(s) = R_r + L_r s + \frac{1}{C_r s^{\beta_r}}. \quad (2.30)$$

Lorsque la fréquence augmente, la partie réelle de l'élément à phase constante décroît. Cela empêche la caractérisation correcte de l'impédance. Afin de contourner les limitations du deuxième modèle par rapport aux hautes fréquences, l'inertie est considérée aussi comme un élément à phase constante :

$$Z_{FO3}(s) = R_r + L_r s^{\alpha_r} + \frac{1}{C_r s^{\beta_r}}. \quad (2.31)$$

L'élément résistif peut être capté indirectement par les éléments à phase constante, ce qui conduit à la proposition d'un quatrième modèle plus simple :

$$Z_{FO4}(s) = L_r s^{\alpha_r} + \frac{1}{C_r s^{\beta_r}}. \quad (2.32)$$

Des essais de ventilation forcée ont été réalisés sur différents patients. L'objectif est de détecter des variations des paramètres des modèles pour différentes pathologies respiratoires.

Les modèles proposés peuvent effectivement détecter si un patient est en bonne santé ou s'il souffre d'une pathologie telle que l'asthme ou la fibrose.

2.3.6 Modèle pneumatique de diffusion de Copot

Copot [2018], en complément des travaux de Ionescu, propose une analyse théorique pour les possibles pathologies. En modélisant une seule alvéole comme une paroi fine sphérique, elle expose un exemple théorique avec 5 alvéoles qui composent une seule unité. Le flux d'air est reçu en parallèle et toutes les alvéoles sont considérées comme étant à la même pression. Cela permet d'exprimer l'admittance équivalente :

$$Y_t = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5. \quad (2.33)$$

Si toutes les alvéoles sont des éléments à phase constante avec $n = 0.5$, l'admittance de l'unité globale le sera aussi. Lorsqu'il y a une pathologie chez un patient, les propriétés mécaniques sont altérées et cela change les ordres non entiers. La structure des alvéoles change aussi, ce qui mène à différentes configurations du réseau d'alvéoles.

Deux cas sont analysés dans ces travaux :

- le cas avec deux alvéoles ayant un ordre fractionnaire $n = 0.3$; la phase dans la réponse en fréquences est différente et elle varie entre -27° et -45° ;
- le cas avec parois alvéolaires endommagées (voir Figure 2.15). La phase varie aussi entre les deux mêmes bornes que dans le cas précédent.

Les simulations réalisées par Copot suggèrent que l'ordre non entier dans l'impédance des poumons possède une origine structurelle et ses variations sont directement liées à des changements de structure.

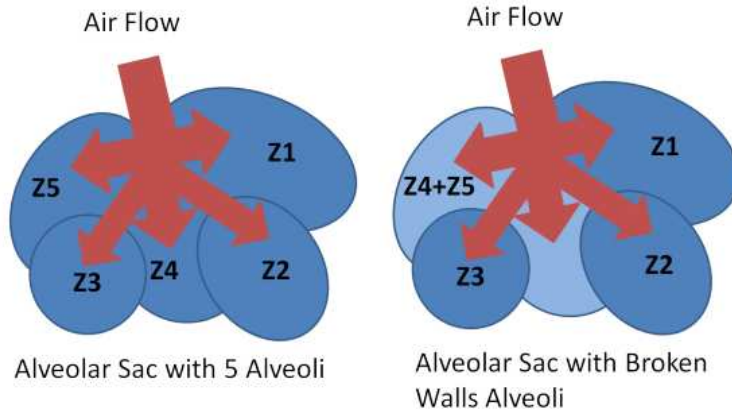


FIGURE 2.15 – Représentation de 5 alvéoles qui forment une unité (à gauche), et une unité avec des alvéoles endommagées (à droite) (extrait de Copot [2018])

2.3.7 Modèle thermique avec une fonction d'Havriliak-Negami

Pellet et al. [2011] proposent un modèle pour le transfert thermique dans les poumons. Ils proposent un modèle boîte noire qui relie des températures à différents niveaux de branchement des poumons. La structure du modèle proposée est :

$$HN(s) = K s^{\nu_0} (s^{\nu_1} + \lambda)^{\nu_2}. \quad (2.34)$$

Cette structure est une combinaison d'un dérivateur non entier à l'ordre ν_0 et d'une fonction de type Havriliak-Negami.

Dans ces études, des mesures de températures ont été réalisées en utilisant trois capteurs de température à l'intérieur d'un poumon de mouton, tel qu'illustré à la figure 2.16.

Des fonctions de transferts sont alors proposées pour relier des variations de température par rapport à celle du corps T_c :

$$H_{12}(s) = \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta T_1(s)} \quad (2.35)$$

et

$$H_{23}(s) = \frac{\Delta T_3(s)}{\Delta T_2(s)} \quad (2.36)$$

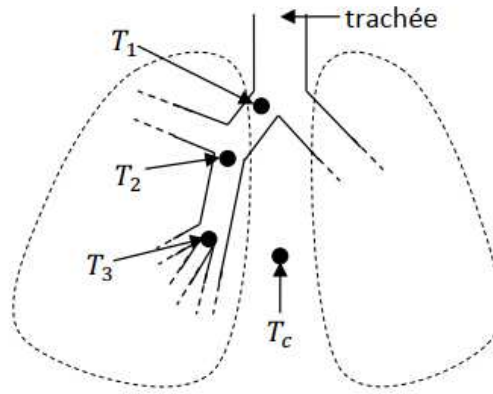


FIGURE 2.16 – Schéma de poumon avec les emplacements des capteurs de température (extrait de Pellet et al. [2011])

où

$$\Delta T_k(t) = T_k(t) - T_c(t). \quad (2.37)$$

Une injection d'air froid dans les poumons des moutons est effectuée et les températures sont prélevées. Afin d'évaluer la structure d'Havriliak-Negami, une identification est aussi réalisée avec un modèle rationnel, et des erreurs plus significatives sont obtenues.

Le principal inconvénient d'un modèle comme celui-ci réside dans le fait qu'il ne permet pas d'établir un lien entre les paramètres et une réalité physiologique.

2.3.8 Modèles pneumatique à éléments finis

Une autre approche pour l'analyse des poumons consiste à se baser sur la mécanique des milieux poreux et d'exploiter des techniques de calcul à éléments finis. DeGroot et Straatman [2018] font une analyse théorique sur un conduit alvéolaire en imposant une géométrie complexe basée sur des sacs hexagonaux (voir figure 2.17).

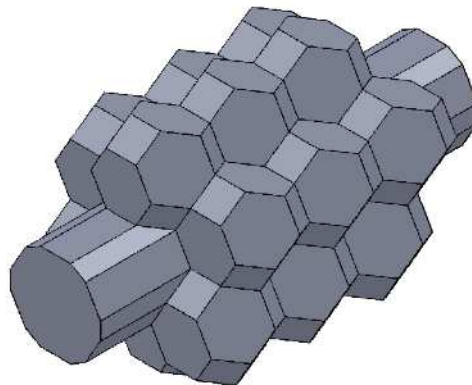


FIGURE 2.17 – Schéma de conduit alvéolaire tel qu'exposé par DeGroot

Les équations élémentaires utilisées pour cette étude proviennent de la mécanique des

fluides. Le modèle exploite l'équation de continuité et celles de Navier-Stokes pour les milieux incompressibles :

$$\nabla u = 0 \quad (2.38)$$

et

$$\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u \right) = -\nabla p + \mu_f \nabla^2 u \quad (2.39)$$

où u est le vecteur de vitesse du fluide, p la pression, ρ_f la masse volumique et μ_f la viscosité dynamique du fluide.

L'approche des milieux poreux suppose une cohabitation dans un volume de parties solides et de fluides qui le remplissent. Pour ce modèle, le fluide est l'air, tandis que le solide est le tissu du conduit alvéolaire. Pour contourner la complexité structurelle des poumons, on englobe un volume et un calcul de moyenne est réalisé sur ce volume. Bien que le volume V reste fixe, les volumes de fluide V_f et de solide V_s à l'intérieur du volume global V peuvent varier dans le temps. La porosité est définie ainsi :

$$\epsilon = \frac{V_f}{V}. \quad (2.40)$$

Une analyse exploitant le moyennage sur un volume fixe et exploitant les équations de continuité et de Navier-Stokes permettent dans les travaux de De Groot de calculer la perméabilité du conduit, ce qui est par la suite exploité dans un modèle pulmonaire en 3D avec une géométrie réaliste.

La perméabilité est comparée à celle obtenue en utilisant un modèle de Poiseuille, qui prédit une perméabilité très supérieure à celle obtenue avec la modélisation par milieu poreux. Selon ce modèle, la chute de pression dans les conduits alvéolaires est plus significative. Physiquement, cela se traduit par une dissipation d'énergie accrue en raison de la recirculation d'air dans les groupes d'alvéoles.

2.4 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter des aspects physiologiques élémentaires du système respiratoire. Il traite essentiellement des poumons car ces derniers permettent le transport d'oxygène à travers le corps par le biais de la diffusion entre les alvéoles et les capillaires. De plus, il s'agit d'un organe considérablement perfusé et c'est le seul à posséder deux systèmes circulatoires.

Le système respiratoire est divisé en deux systèmes : le système supérieur et le système inférieur. La partie supérieure permet l'entrée et le conditionnement de l'air qui sera par la suite transporté de la trachée aux poumons. Par l'intermédiaire du diaphragme, la partie inférieure se charge de la mécanique de respiration.

D'une manière stricte, l'asymétrie des poumons a aussi été présentée. Les deux poumons possèdent des géométries un peu différentes et ils n'ont pas le même nombre de lobes.

Pendant longtemps, une certaine auto-similitude a été observée dans les poumons en raison de leur structure arborescente. Des mesures prises dans les années 60 ont permis d'observer un lien entre les divers diamètres des bronches. Par la suite, le calcul de la dimension fractale des poumons ainsi que ses applications pour le diagnostic en médecine ont été explorées.

Mis à part la dimension fractale, des modèles mathématiques pour la dynamique des poumons ont été proposés depuis les années 50. Les études d'Hildebrandt sur l'élasticité des poumons permettent de proposer des essais de respiration forcée. Le modèle mathématique d'Hildebrandt était une puissance temporelle, ce qui se traduit dans le domaine de Laplace par une fonction non entière. Plusieurs modèles de circuits simples ont aussi été proposés afin de mettre en relation la pression et le volume des poumons. Ionescu se sert de l'arborescence des poumons pour introduire d'une façon explicite le comportement non entier (ce qui n'est pas le cas pour les modèles de circuit). Elle propose aussi des modèles d'impédances non entières qui permettent une caractérisation du comportement des poumons avec un nombre restreint de paramètres. Le modèle thermique d'Havriliak-Negami s'avère plus précis que les modèles rationnels, mais ses paramètres manquent d'un sens physique.

La structure complexe des poumons ainsi que sa dynamique montrent au cours de l'histoire son lien étroit avec le calcul non entier. Ce chapitre montre différentes approches mathématiques qui tentent de capter leur comportement. Par la suite, une modélisation partant des lois de la physique est proposée. L'utilisation des opérateurs non entiers permet alors de contourner la lourdeur des méthodes à éléments finis, ce qui aboutit à l'obtention de modèles relativement simples et faciles à simuler.

Chapitre 3

Modélisation des transferts thermiques

3.1 Introduction

Les deux chapitres précédents ont permis d'établir un état de l'art sur la physiologie respiratoire, ainsi que de fournir des exemples démontrant la pertinence de la modélisation mathématique en biologie. Maintenant, à partir des lois de la physique, la modélisation des transferts thermiques sera traitée.

L'étude des transferts thermiques est souvent exploitée afin de traiter des situations dans lesquelles la température est essentielle. Cela inclut la climatisation, la réfrigération industrielle, le refroidissement des dispositifs électroniques, les pertes de chaleur dans des tissus biologiques, entre autres. La complexité des processus de diffusion implique normalement l'usage des méthodes à éléments finis dans une région déterminée de l'espace. Bien qu'ils soient plus précis, les modèles basés sur les éléments finis sont souvent trop complexes en termes de calcul, ce qui n'est pas souhaitable pour les systèmes dynamiques.

Dans une première instance, l'étude classique reposera sur l'équation de la chaleur proposée par J. Fourier. Ensuite, la démarche proposée dans la première partie sera reprise afin d'explorer l'équation de la bio-chaleur. Des exemples simples seront explorés pour les deux types de modèles thermiques. Finalement, ces blocs essentiels de modélisation seront utilisés pour concevoir des modèles globaux pour les transferts thermiques dans les poumons.

3.2 Analogie entre l'électricité et les transferts thermiques

Tout comme il est courant d'établir des analogies entre l'électricité et la mécanique, il est également possible de faire ce type d'analogie pour des phénomènes naturels tels que la thermique. En effet, en suivant une approche de modélisation par Bond Graph, en électricité, les variables en jeu sont le courant électrique pour le flux et la tension électrique pour l'effort, alors qu'en thermique on a le flux de chaleur et la température respectivement (voir tableau 3.1).

De fait, cette analogie fondamentale sur les variables permet d'introduire un troisième

	électricité	thermique
Cause	V	T
Effet	i	ϕ

TABLEAU 3.1 – Analogie entre l'électricité et la thermique

concept, celui de l'impédance. En électricité, on peut aisément établir un lien entre la cause et l'effet. Normalement, l'effet est fonction de la cause. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$i = f(V). \quad (3.1)$$

En absence de tension électrique, on sait que dans un dispositif dit ohmique, aucun courant électrique ne circule, ce qui se traduit par :

$$0 = f(V = 0). \quad (3.2)$$

Pour les systèmes linéaires, on rappelle la forme mathématique simple d'une fonction linéaire qui relie une variable dépendante y avec une variable indépendante x :

$$y = ax + b \quad (3.3)$$

où a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine. Compte tenu de l'équation (3.2), on obtient $b = 0$; ce qui, logiquement, nous mène à l'équation suivante :

$$i = aV. \quad (3.4)$$

Analysons maintenant l'effet du paramètre a :

- plus a est élevé, plus la pente devient raide ; cela signifie donc qu'une tension relativement petite permet d'atteindre des valeurs de courant assez significatives ;
- plus a diminue, plus la chute de courant est significative ; en conséquence, des tensions électriques plus grandes seront nécessaires afin d'atteindre des niveaux donnés de courant.

Cette analyse implique que le paramètre a est, d'une certaine façon, une mesure de la conduction électrique du milieu. Une valeur plus grande de a indique une conduction électrique supérieure. En conséquence, le paramètre a se nomme "conductance" et est noté G . Le lien de cause à effet s'écrit alors :

$$i = GV. \quad (3.5)$$

Si l'on souhaite connaître la cause suite à un effet, on applique alors le concept de la fonction inverse :

$$V = \frac{1}{G}i. \quad (3.6)$$

L'inverse de la conductance est naturellement une résistance, typiquement noté R :

$$V = Ri. \quad (3.7)$$

Bien que jusqu'à présent, cette démonstration converge vers un R qui reste constant, il est important de remarquer que ceci n'est pas toujours vrai. En raison de l'usage répandu de R afin de nommer les éléments statiques linéaires, une autre lettre fut choisie pour nommer la mesure d'opposition au passage du courant. Il s'agit de l'impédance notée Z .

Observons maintenant l'impédance dans le cas électrique, et, plus spécifiquement, dans le domaine de Laplace :

$$Z(p) = \frac{V(p)}{I(p)}, \quad (3.8)$$

où p est la variable de Laplace.

Si l'on considère que le concept d'impédance peut s'appliquer en thermique pour lier le flux de chaleur $\phi(p)$ et la température $T(p)$, il est logique de penser que les éléments appartenant à la théorie de circuit seront utilisés à nouveau en thermique.

Les deux éléments de circuit habituellement exploités en thermique sont la résistance et la capacitance. Cela explique l'intérêt de la dynamique RC dans les circuits. En effet, il est souvent fait appel à ce type de modèle simple pour des applications très diverses, que ce soit en électronique de puissance (Künzi [2015]), en simulation des transferts dans le bâtiment (Danza et al. [2016]; Parnis [2012]) et même pour la modélisation des pertes de chaleur chez l'être humain (Ismail et al. [2018]; Jiang et al. [2004]). Les réseaux RC s'utilisent aussi pour l'analyse de bio-impédance (Chinen et al. [2015]).

Il existe cependant un inconvénient avec les modèles RC . En effet, ces modèles proviennent d'une approximation réalisée en basse fréquences. Par conséquent, compte tenu de la validité du modèle RC , le signal d'entrée est censé être en basses fréquences. Ce type d'approximation en basses fréquences se trouve également dans d'autres domaines, notamment en mécanique des fluides ou pour le transfert de masse. Si l'on souhaite une formulation mathématique qui permette d'éviter les approximations par rapport à la fréquence, il est possible d'avoir recours au quadripôle thermique (Maillet et al. [2000]). Le quadripôle offre un domaine fréquentiel de validité élargi et peut s'appliquer à des processus à des fréquences plus hautes que celles des modèles RC . De plus, ce modèle est directement obtenu en partant de l'équation de la chaleur.

Le quadripôle thermique permet de modéliser la conduction de chaleur dans une seule direction sous la forme d'un réseau en T (voir figure 3.2). Comme on peut l'observer, le circuit est composé de deux impédances $Z_1(p)$ et $Z_2(p)$, dites impédances en série. D'autre part, l'impédance $Z_3(p)$ est dite l'impédance de shunt. Les expressions pour les impédances sont complexes et non linéaires par rapport à une fréquence ω dans le cas où l'on se pencherait sur l'analyse fréquentielle. La complexité des expressions de ces impédances empêche d'aboutir à des fonctions de transfert de type rationnelles. Malgré tout, en haute fréquence, il est possible

de prouver que l'impédance thermique d'un mur plan est donnée par un intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_{thermique}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{T(j\omega)}{\phi(j\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\sqrt{j\omega}}. \quad (3.9)$$

Une expression de ce type met en évidence que le transfert thermique en hautes fréquences est effectivement modélisé de façon exacte à travers l'élément à phase constante de phase $-\frac{\pi}{4}$ rad. Ce type d'élément reçoit le nom de fractance et fait l'objet de plusieurs études (voir Krishna [2011]; Krishna et Reddy [2008]; Nakagawa et Sorimachi [1992]). De plus, les éléments à phase constante ont particulièrement été exploités en biologie et médecine. Voici quelques exemples de fonctions biologiques modélisées en se servant des éléments à phase constante :

- tissu de l'intestin (voir Elwakil [2010])
- paroi poreuse (voir Sivaramakrishna et al. [2009])
- tissu cardiaque (voir Magin et Ovadia [2008])
- mécanique des poumons (voir Copot [2018])
- transfert thermique des poumons (voir Victor et al. [2020])
- relaxation d'un muscle (voir Sommacal et al. [2008]).

On met en évidence, une fois de plus, l'importance croissante du calcul fractionnaire en ce qui concerne les applications de modélisation en biologie.

3.3 Formalisme mathématique du quadripôle thermique

Supposons que l'on ait un cas très simple et que l'on souhaite étudier le transfert thermique à l'intérieur de ce dernier. On suppose un milieu avec une conductivité thermique k , une masse volumique ρ et une capacité calorifique c . Ce milieu est de longueur L et de section S_{mur} . Les variables d'entrée et de sortie seront le flux ϕ et la température T . Pour un cas de conduction le long d'une seule direction (ce qu'on appelle conduction longitudinale), la figure 3.1 montre de façon schématique le système à étudier.

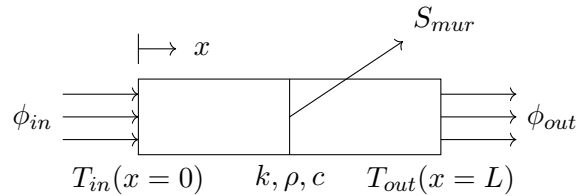


FIGURE 3.1 – Système thermique à une dimension

Vu que l'on s'intéresse à l'étude des transferts thermiques, on pose l'équation de la chaleur suivante :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T, \quad (3.10)$$

vu que la conduction se produit uniquement le long de l'axe x , on peut simplifier le laplacien dans l'équation précédente et on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

Si maintenant, on prend la transformée de Laplace de l'équation (3.11) avec l'hypothèse de conditions initiales nulles, on obtient :

$$pT(x, p) = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, p)}{\partial x^2}. \quad (3.12)$$

Considérons maintenant un flux de chaleur en entrée ($x = 0$) , ainsi qu'un autre de sortie ($x = L$). La loi de Fourier permet alors d'établir ce qui suit :

$$\begin{aligned} \phi_{in}(p) &= -kS_{mur} \frac{\partial T(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \phi_{out}(p) &= -kS_{mur} \frac{\partial T(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=L}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il est donc possible d'établir un lien entre les entrées et les sorties par le biais d'une équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_{in}(p) \\ \phi_{in}(p) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} T_{out}(p) \\ \phi_{out}(p) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cosh(\delta L) & \frac{1}{kS_{mur}\delta} \sinh(\delta L) \\ kS_{mur} \sinh(\delta L) & \cosh(\delta L) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

et

$$\delta = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad (3.16)$$

avec $a = \frac{k}{\rho c}$ comme constante correspondant à la diffusivité thermique.

Une fois de plus, ce facteur δ n'est autre que l'opérateur non entier $\sqrt{p}$, à un facteur près.

L'équation matricielle peut être représentée par un modèle de circuit en T . Le déterminant met en évidence la passivité du système et le circuit équivalent obtenu est donné en figure 3.2.

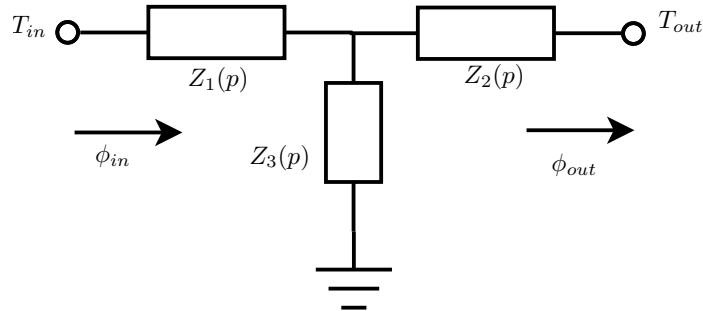


FIGURE 3.2 – Circuit équivalent du quadripôle thermique du mur plan

Pour un réseau en T , illustré à la figure 3.2, la relation entrée-sortie est donnée par :

$$\begin{bmatrix} T_{in}(p) \\ \phi_{in}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{out}(p) \\ \phi_{out}(p) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

La matrice de transmission s'exprime en fonction des impédances Z_1 , Z_2 et Z_3 où l'on a simplifié l'écriture par rapport à la variable de Laplace :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

En conséquence, les impédances s'écrivent :

$$Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}, \quad Z_3 = \frac{1}{C}. \quad (3.19)$$

Les impédances Z_1 et Z_2 s'appellent "impédance en série" en raison de leur emplacement dans le quadripôle et s'expriment par :

$$Z_1(p) = Z_2(p) = \frac{1}{kS_{mur}\delta} [\coth(\delta L) - \operatorname{csch}(\delta L)]. \quad (3.20)$$

Dans ce cas, on constate que $Z_1 = Z_2$, ce qui est dû à la géométrie spécifique du mur plan. D'autre part, pour l'impédance de shunt, on obtient :

$$Z_3(p) = \frac{1}{kS_{mur}\delta} \operatorname{csch}(\delta L) \quad (3.21)$$

où $\coth$ et csch sont respectivement les fonctions de cotangente et cosécante hyperboliques.

3.3.1 Comportements en basses fréquences

Les processus dans des applications thermiques sont souvent censés être quasi statiques. Cela implique que le comportement au niveau des impédances est seulement pris en compte autour des basses fréquences :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_1(j\omega) = \frac{L}{2kS_w} = R \quad (3.22)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_3(j\omega) = \frac{1}{\rho c L S_w j\omega} = \frac{1}{j\omega C_t} \quad (3.23)$$

où $C_t = \rho c L S_w$.

Comme on le voit, le transfert thermique en basses fréquences rejoint un réseau avec des résistances ou bien des capacitances. Les impédances en série aux basses fréquences sont une résistance, ce qui représente de la dissipation d'énergie. L'impédance de shunt est une capacitance, ce qui modélise le stockage d'énergie dans le milieu.

Tout cela est très cohérent par rapport au circuit RC classique que l'on utilise. Néanmoins,

en fonction des propriétés thermiques du milieu, il est possible de se retrouver dans des situations où le transfert se produit à des fréquences plus hautes, ce qui remet en cause la validité du modèle RC .

3.3.2 Comportements en hautes fréquences

Si maintenant on analyse les limites aux hautes fréquences, une analyse mathématique en découplant gain et phase nous permet d'obtenir :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z_1(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg |Z_1(j\omega)| = -45^\circ \quad (3.24)$$

et

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z_3(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg |Z_3(j\omega)| = -\infty. \quad (3.25)$$

L'impédance Z_1 se comporte clairement comme un filtre passe-bas en hautes fréquences. Cela est mis en évidence par son gain nul en hautes fréquences. Ce comportement pourrait nous mener à déduire qu'il s'agit d'un comportement capacitif, mais il est nécessaire d'analyser l'argument plus attentivement.

Comme on peut l'observer, l'argument en hautes fréquences de cette impédance n'est pas de -90° , mais de sa moitié. Cela permet d'en déduire que le comportement en hautes fréquences de l'impédance en série Z_1 est un élément à phase constante de -45° . Mathématiquement, on obtient :

$$Z_{1-HF}(p) = \frac{1}{C_s p^{0.5}}. \quad (3.26)$$

En premier lieu, l'impédance Z_3 semble cohérente par rapport au modèle capacitif en basses fréquences. Il est normal pour une capacitance d'avoir un gain nul aux hautes fréquence. Par contre, cet argument indique la présence d'un filtrage supplémentaire. C'est pourquoi l'argument ne tend pas vers les -90° attendus. Le modèle en haute fréquence de Z_3 peut alors être interprété comme une combinaison entre une capacitance et un filtre :

$$Z_{3-HF}(p) = \frac{1}{C_t s} H_{filter}(p). \quad (3.27)$$

Remarque : Ajouter un filtre de correction permettra d'étendre le domaine de validité pour l'approximation de Z_3 . Malheureusement, à l'heure actuelle, il est impossible de concevoir un filtre pouvant agir sur une plage de fréquence infinie. Pour un tel filtre, il faudrait un nombre infini de pôles afin de tendre vers l'argument correct.

3.3.3 Approximations des impédances

La difficulté majeure rencontrée lors de l'analyse exacte du quadripôle thermique concerne la forme mathématique des impédances. En nous servant du quadripôle, il est impossible d'obtenir une fonction de transfert valide pour ce dernier. Néanmoins, il est possible de proposer un modèle tronqué en fréquence. Ce dernier a un domaine de validité supérieur aux circuits

RC. Le modèle présenté par la suite prend en compte toutes les basses fréquences, mais il possède une meilleure approximation aux moyennes fréquences. Dans toute cette section, un exemple académique est proposé afin d'illustrer les idées principales. Les paramètres à utiliser sont récapitulés dans le tableau 3.2.

paramètre	valeur
a	$1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
k	$1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
L	1 m
S_{mur}	1 m^2

TABLEAU 3.2 – Paramètres de simulation pour l'exemple académique

Les approximations à proposer exigeront la détermination de différents paramètres afin d'approcher au mieux le comportement réel de l'impédance. Un critère d'erreur quadratique est utilisé en prenant en compte l'erreur du gain en dB :

$$J(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda^{2(N-i)} [|Z(j\omega_i)|_{dB} - |Z_{app}(j\omega_i, \theta)|_{dB}]^2 \Delta}{\log \omega_N - \log \omega_1}, \quad (3.28)$$

où $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]$ est un vecteur de fréquences avec $\omega_i \in [0.1, 100 \text{ rad/s}]$ pour $i = 1, \dots, N$, Δ est le pas entre deux fréquences consécutifs et λ est un coefficient de pondération ($0 < \lambda < 1$) qui pondère les basses ou les hautes fréquences. Si $\lambda = 1$, toutes les fréquences ont le même poids. Sauf indication contraire, ce poids sera pris comme l'unité. Ce critère (3.28) est une quantification d'erreur dans la courbe de gain en dB .

D'autre part, il est nécessaire de choisir un algorithme d'optimisation afin de minimiser ce critère. L'impédance en série Z_1 , et donc Z_2 est optimisée en se servant d'une méthode innovatrice d'optimisation basée sur la pollinisation des fleurs (Yang [2012]). Le FPA (*flower pollination algorithm* en anglais) offre deux avantages, à savoir :

- un nombre restreint de paramètres à optimiser (la taille de la population n et une probabilité p de basculement) ;
- une preuve de convergence globale pour cet algorithme (He et al. [2017]), ce qui est très rare en méta-heuristique.

Le principe de l'algorithme est plutôt simple : au départ n solutions sont proposées. Ces n solutions sont choisies initialement de manière aléatoire. Afin d'avoir un point de repère, la meilleure des solutions, g_{best} , est sélectionnée. Ensuite, une probabilité p_b de basculement entre deux opérations est choisie. Cette dernière conditionnera à chaque itération quelle opération de pollinisation est effectuée. Les deux types de pollinisation sont les suivants :

- la pollinisation globale où la génération suivante de solutions possibles est ajustée au moyen de la différence entre la solution x_i^t à l'instant t et la meilleure valeur globale

obtenue à l'itération présente g_{best} , selon

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \ell(x_i^t - g_{best}) \quad (3.29)$$

où ℓ est la distribution de vol de Levy ;

- la pollinisation locale où la génération suivante de solutions n est obtenue en utilisant un terme de correction qui prend en compte la différence entre deux solutions x_j^t et x_k^t en les multipliant par un coefficient aléatoire ϵ , selon

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \epsilon(x_j^t - x_k^t). \quad (3.30)$$

Le paramètre le plus critique lorsqu'on utilise le FPA est la probabilité de basculement p_b . Ce dernier détermine de façon statistique le nombre de fois où l'algorithme choisira la pollinisation globale ou locale. Dans la littérature, la valeur la plus courante utilisée est de $p_b = 0.8$ (Yang [2012]). Une étude mathématique (Lukasik [2015]) a prouvé que, bien que la valeur de p_b ne dégrade pas forcément les résultats finaux pour des fonctions unimodales, une plage entre 0.5 et 0.8 est préférable. Des analyses plus profondes ont aussi été menées en prenant en compte la probabilité p comme variable dans le temps (Abdelaziz et al. [2016]). La valeur optimale de p_b , pour cette étude, est une valeur constante de $p_b = 0.8$. Par conséquent, les optimisations présentées ci-dessous ont été menées avec $n = 10$ et $p_b = 0.8$. Les étapes principales du FPA sont présentées dans l'algorithme 1.

Remarque : le choix du FPA comme algorithme d'optimisation se base sur sa structure simple. Néanmoins, d'autres techniques d'optimisation peuvent très bien mener à des résultats satisfaisants, tels que l'algorithme génétique ou les essaims de particules.

Algorithm 1: Algorithme de la pollinisation des fleurs (FPA)

```

Fonction de coût  $f(\mathbf{x})$   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ ;
Initialiser une population de  $n$  fleurs avec des solutions aléatoires
Trouver la meilleure solution  $g_{best}$  parmi la population initiale
Définir une probabilité de basculement  $p_b$ 
while  $t < MaxIterations$  do
    for  $i = 1 : n$  do
        if  $rand < p$  then
            | Pollinisation globale selon l'équation (3.29)
        else
            | Pollinisation locale selon l'équation (3.30)
        end
        Mise à jour de la meilleure solution  $g_{best}$ 
    end
end

```

3.3.3.1 Approximation des impédances Z_1 et Z_2

Comme vu précédemment, les impédances en série Z_1 et Z_2 sont identiques dans le cas d'un mur plan. Elles se comportent comme une résistance en basses fréquences et comme un élément à phase constante de -45° en hautes fréquences. Pour alléger la notation, seule Z_1 sera utilisée dans cette section.

Si on observe les deux comportements asymptotiques aux basses et aux hautes fréquences, l'impédance Z_1 s'interprète comme la connexion en parallèle d'un élément à phase constante et d'une résistance. Une première approximation d'impédance est l'approximation dite asymptotique :

$$Z_{1-asympt}(p) = R // \frac{1}{C_s \sqrt{p}} = \frac{R}{1 + RC_s \sqrt{p}} \quad (3.31)$$

où $R = \frac{L}{2kS_w}$ et $C_s = \frac{kS_w}{\sqrt{a}}$.

Il est possible d'obtenir l'expression de la pulsation à -3 dB en dessous du gain statique. La réponse fréquentielle de l'approximation asymptotique s'exprime par :

$$Z_{asym}(j\omega) = \frac{R}{1 + RC_s \sqrt{j\omega}}, \quad (3.32)$$

d'où l'expression du gain suivante :

$$|Z_{asym}(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{(RC_s)^2 \omega + RC_s \sqrt{2\omega} + 1}}. \quad (3.33)$$

On observe que le gain maximum en dB pour ce système correspond à :

$$|Z_{asym}(j\omega)|_{\text{dB-max}} = 20 \log_{10}(R). \quad (3.34)$$

La fréquence à -3 dB est donc donnée par :

$$|Z_{asym}(j\omega_b)|_{-3\text{dB}} = |Z_{asym}(j\omega)|_{\text{dB-max}} - 3 \text{ dB}. \quad (3.35)$$

En remplaçant l'équation (3.33) dans (3.35), on obtient le polynôme suivant :

$$(RC_s)^2 \omega_b + \sqrt{2} RC_s \sqrt{\omega_b} + (1 - 10^{0.3}) = 0. \quad (3.36)$$

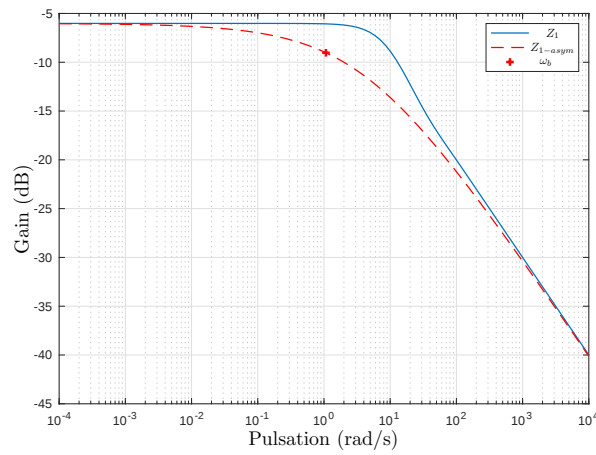
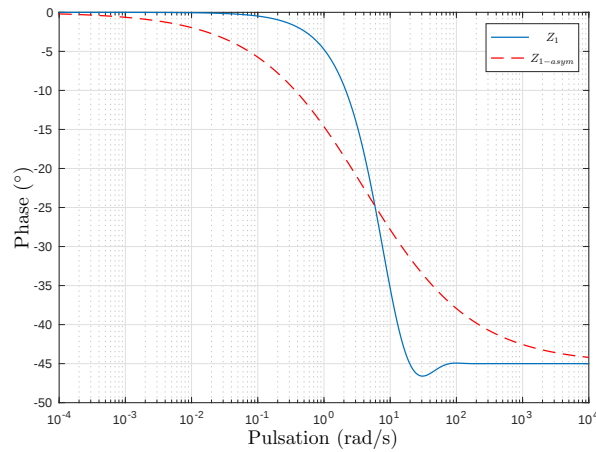
On prend l'unique solution réelle et positive ω_b :

$$\omega_b \approx \frac{0.2679}{(RC_s)^2}, \quad (3.37)$$

qui est l'expression de la bande passante. Ce paramètre peut être utilisé comme un indicateur de la rapidité du système.

Observons maintenant les figures 3.3 et 3.4 qui illustrent la courbe exacte de l'impédance

Z_1 ainsi que celle obtenue avec l'approximation asymptotique. Comme escompté, aux limites en basses et hautes fréquences, les deux courbes se rapprochent. D'autre part, des erreurs relativement importantes sont présentes aux moyennes fréquences. De plus, la fréquence ω_b est estimée avec l'approximation asymptotique autour de 1 rad/s . La Figure 3.3 montre que la vraie impédance possède une fréquence ω_b à quasiment une décade au-delà de celle prédite par l'approximation asymptotique. Cela signifie que cette approximation ralentit la dynamique thermique par rapport à la réalité. En ce qui concerne la phase, il est possible d'observer que l'approximation asymptotique possède une transition douce de l'élément résistif vers l'élément à phase constante. La phase exacte possède une pente plus marquée et la transition d'un type de comportement à l'autre se fait d'une manière beaucoup plus rapide.


 FIGURE 3.3 – Diagramme de gain de Z_1 et son approximation asymptotique

 FIGURE 3.4 – Diagramme de phase de Z_1 et son approximation asymptotique

Afin de combler l'erreur dans la plage des moyennes fréquences, des corrections possibles sont proposées pour l'approximation de Z_1 . Dans une première instance, un filtre qui multiplie

l'approximation asymptotique est proposé :

$$Z_1(p) = \frac{R}{1 + RC_s\sqrt{p}} H_{filtre}(p). \quad (3.38)$$

Vu que l'on souhaite maintenir le comportement résistif en basses fréquences et celui du demi-intégrateur en hautes fréquences, le nombre de pôles et de zéros du filtre doit être équivalent. Le filtre proposé est donc composé du produit de plusieurs cellules de pôles et de zéros :

$$H_{filtre}(p) = \prod_i^{N_{cells}} \frac{1 + \frac{p}{z_i}}{1 + \frac{p}{p_i}}. \quad (3.39)$$

On obtient donc une première approximation par pôles et zéros :

$$Z_{1-pz}(p) = Z_{1-asymp}(p) \times H_{filtre}(p) = \frac{R}{1 + RC\sqrt{p}} \prod_i^{N_{cells}} \frac{1 + \frac{p}{z_i}}{1 + \frac{p}{p_i}}. \quad (3.40)$$

Il est alors nécessaire de déterminer les paramètres pour cette approximation. Le vecteur de paramètres θ est donné par :

$$\theta = [\mathbf{p} \quad \mathbf{z}] \quad (3.41)$$

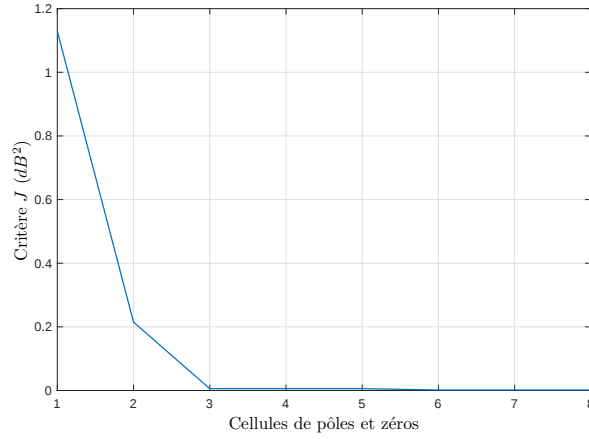
où $\mathbf{p}$ et $\mathbf{z}$ sont les vecteurs qui contiennent tous les pôles et ceux qui contiennent les zéros respectivement.

Le nombre de cellules N_{cells} utilisé pour la correction dépendra de chaque cas spécifique. Il faut remarquer que chaque cellule supplémentaire ajoute un pôle et un zéro à la fonction de transfert de Z_1 . Un nombre très élevé de cellules pourra alors donner des approximations très précises mais risque de rendre le modèle thermique trop complexe et mener à des problèmes d'identifiabilité.

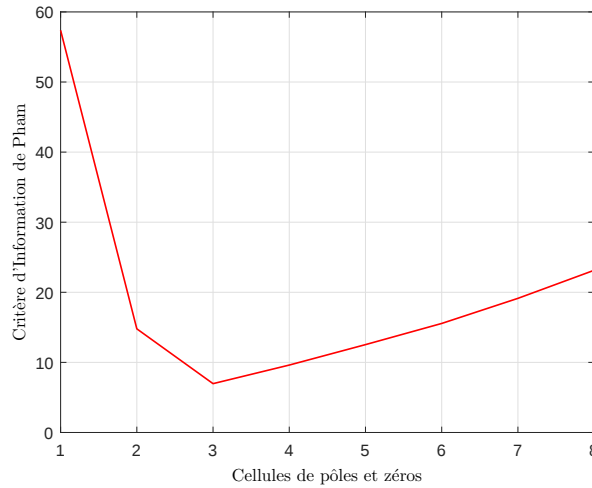
Afin de déterminer le nombre optimal de cellules pour le cas traité dans ce chapitre, une optimisation est réalisée par rapport au critère $J(\theta)$. L'optimisation peut s'avérer un peu compliquée car nous avons en réalité deux critères différents : d'un côté, la précision de l'approximation et de l'autre, le nombre de paramètres. Il est préférable d'éviter une explosion de paramètres trop importante. Observons d'abord l'évolution du critère J en fonction du nombre de cellules N_{cells} dans la figure 3.5.

Avec la figure 3.5, il est possible d'observer qu'il n'y a pas d'amélioration importante par rapport au critère au-delà de $N_{cells} = 3$. Néanmoins, afin d'avoir un critère qui équilibre le nombre de paramètres et qui minimise l'erreur d'estimation, on utilise le critère d'information de Pham (Pham [2019]). Ce critère est calculé afin de choisir un nombre adéquat de cellules. Il est défini par :

$$PIC = SSE + k \left[\frac{n-1}{n-k} \right], \quad (3.42)$$


 FIGURE 3.5 – Critère J criterion versus le nombre de cellules N_{cells} de l'approximation

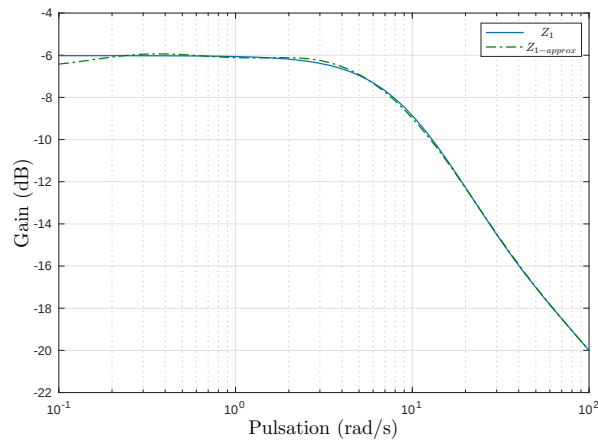
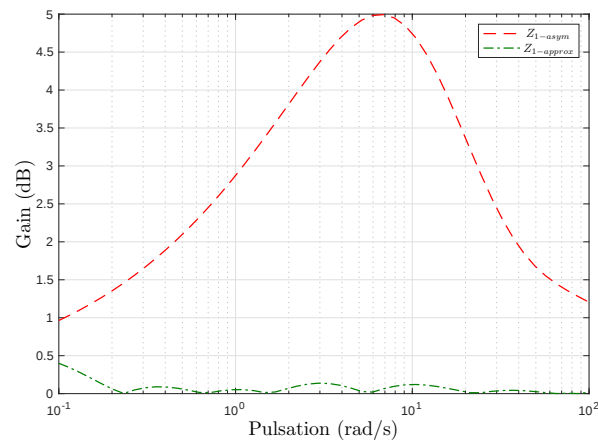
où SSE est la somme des erreurs quadratiques, k le nombre de paramètres et n le nombre d'observations. Le graphique du critère est présenté dans la figure 3.6.


 FIGURE 3.6 – Critère PIC en fonction du nombre de cellules N_{cells}

Comme on peut l'observer, le minimum du critère PIC apparaît à $N_{cells} = 3$, ce qui correspond finalement au nombre de cellules choisi pour les simulations. On doit remarquer que l'expression pour cette impédance peut être assez complexe. Pour ce cas, $\dim(\theta) = 6$ (3 pôles et 3 zéros). La figure 3.7 montre les courbes de gain pour l'expression exacte et l'approximation avec pôles et zéros. D'autre part, la figure 3.8 permet de comparer les erreurs obtenues avec l'approximation asymptotique et celles avec les pôles et zéros. L'erreur est définie par :

$$\epsilon(j\omega) = ||Z_{1-exact}(j\omega)||_{dB} - ||Z_{1-approx}(j\omega)||_{dB}. \quad (3.43)$$

On peut observer que cette approximation avec correction se rapproche beaucoup plus de la réponse en fréquences de l'impédance exacte. On constate une erreur maximale de


 FIGURE 3.7 – Diagramme de gain de Z_1 et de l'approximation $Z_{1-approx}$ avec $N_{cells} = 3$

 FIGURE 3.8 – Erreur en gain pour l'approximation asymptotique $Z_{1-asymp}$ et celle avec pôles et zéros $Z_{1-approx}$

0.4dB pour cette approximation tandis que l'approximation asymptotique peut atteindre une erreur maximale de 5dB. De plus, sur toute la plage de fréquences d'intérêt, l'approximation asymptotique est toujours au-delà de 1dB alors qu'elle n'est jamais supérieure à 0.5dB pour le cas des pôles et zéros.

Bien que l'approximation avec les pôles et zéros permette d'atteindre des résultats satisfaisants au niveau de la précision, le nombre de paramètres pour l'optimisation reste plutôt important. Hormis un cas avec 1 ou 2 cellules, on sera toujours confronté à une optimisation avec un vecteur de paramètres θ comportant une dimension importante. Si l'on observe la courbe de gain exacte de Z_1 , on constatera qu'avant la fréquence de coupure ω_b , la réponse est considérablement plate. Ce gain statique plat suggère un comportement similaire à un filtre de Butterworth (Butterworth [1930]). Malheureusement, les filtres de Butterworth ont des pentes en hautes fréquences égales à des multiples entiers de 20dB/dec. Dans ce cas, la pente en hautes fréquences est de -10dB/dec . En conséquence, en nous inspirant de Ali

et al. [2013], un filtre de Butterworth non entier peut être utilisé comme une approximation alternative :

$$Z_{1-BW}(p) = \frac{d}{p^{\alpha+\beta} + ap^{\alpha} + bp^{\beta} + c}. \quad (3.44)$$

Ce nouveau type d'approximation ne consiste pas à multiplier l'approximation asymptotique par un autre terme. L'équation (3.44) contiendra les limites asymptotiques tout en permettant d'approcher Z_1 .

On prend la limite en basses fréquences :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_{1-BW}(j\omega) = \frac{d}{c} = R \quad (3.45)$$

et celle en hautes fréquences :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_{1-BW}(j\omega) = \frac{d}{(j\omega)^{\alpha+\beta}}. \quad (3.46)$$

Une identification terme à terme permet d'établir les relations suivantes :

$$\alpha + \beta = 0.5 \quad (3.47)$$

$$c = \frac{1}{RC} \quad (3.48)$$

$$d = \frac{1}{C}. \quad (3.49)$$

Pour ce type d'approximation, le vecteur de paramètres est de dimension 3 :

$$\theta = [\alpha \quad a \quad b]. \quad (3.50)$$

L'impédance de Butterworth offre des avantages évidents par rapport à celle des pôles et zéros : une structure plus simple avec moins de paramètres à optimiser. Néanmoins, elle a aussi des inconvénients, notamment le manque de stabilité. De fait, une approximation de type Butterworth peut converger vers un modèle stable, mais cela n'est pas garanti. Dans Ali et al. [2013], il est indiqué que les paramètres a et b doivent être égaux ou inférieurs à zéro afin de garantir la stabilité du modèle. D'autre part, les ordres α et β sont tous les deux positifs et leur somme doit être de 0.5. Ils sont alors bornés entre 0 et 1.

Le tableau 3.3 montre les paramètres obtenus ainsi que la valeur du critère $J(\theta)$ lorsque l'on applique l'approximation de Butterworth non entière.

a	b	α	$J(\theta)(dB^2)$
0	-0.859	0.226	0.790

TABLEAU 3.3 – Approximations des paramètres de Z_1 pour l'impédance de Butterworth non entière

Pour ce cas particulier, le paramètre a vaut zéro. Cela simplifie encore plus la fonction

de transfert de cette impédance. La forme mathématique de l'impédance est alors de :

$$Z(p) = \frac{d}{p^{0.5} + bp^\beta + c}. \quad (3.51)$$

Il est également possible d'exprimer l'admittance pour ce type d'approximation :

$$Y(p) = \frac{p^{0.5}}{d} + \frac{bp^\beta}{d} + \frac{c}{d}. \quad (3.52)$$

En partant de cette dernière expression, l'impédance Z_1 peut en fait être interprétée comme la combinaison parallèle entre un demi-intégrateur, une résistance et un élément d'ordre non entier qui, lui, peut être exprimé selon :

$$Z_{new}(p) = \frac{G_0}{p^\alpha} \quad \text{où} \quad G_0 < 0. \quad (3.53)$$

Des études plus approfondies s'avèrent nécessaires afin de donner un sens physique pour ce dernier élément et cela inclut aussi une recherche d'un sens pour le gain négatif de cet élément.

Afin d'observer clairement les avantages et les inconvénients de toutes les approximations présentées ci-dessous, les courbes de gain et les erreurs associées sont présentées dans les figures 3.9 et 3.10 respectivement. De plus, les valeurs moyennes, minimales et maximales des erreurs sont exposées dans le tableau 3.4.

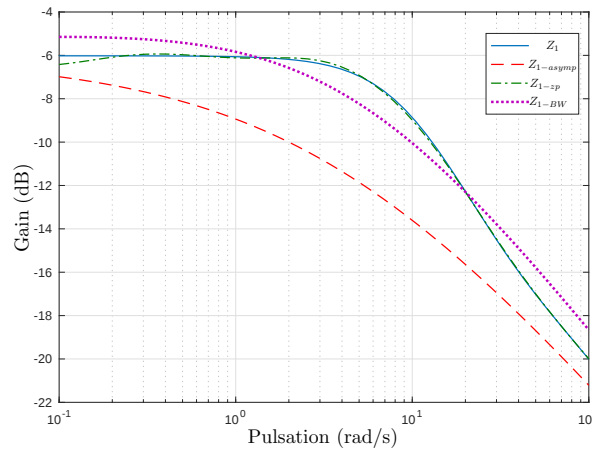
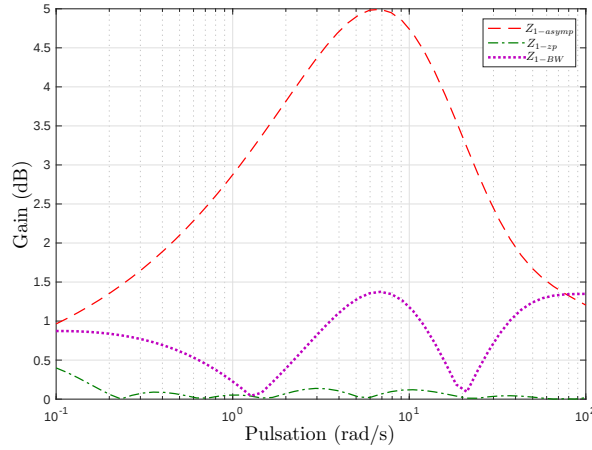


FIGURE 3.9 – Diagramme de gain de Z_1 et ses approximations

L'erreur moyenne pour l'approximation asymptotique est proche de 3 dB et sa plus petite valeur est de 1 dB, ce qui implique une approximation moins précise pour les moyennes fréquences. En ajoutant les cellules de pôles et zéros, l'erreur moyenne est réduite d'un facteur de 3. Le signal d'erreur se rapproche de zéro, ce qui est mis en évidence avec la valeur minimale de l'erreur autour de 10^{-4} . L'approximation de Butterworth offre des résultats intermédiaires. Son pic d'erreur reste acceptable, mais il est cependant 4 fois plus élevé que


 FIGURE 3.10 – Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ pour les différentes approximations de Z_1

Approximation	Max (dB)	Moyen (dB)	Min (dB)
Asymptotique	4.99	2.84	0.96
Pôle-zéro	0.39	0.08	0.00
Butterworth	1.37	0.78	0.04

 TABLEAU 3.4 – Valeurs extrêmes et moyennes de l'erreur absolue pour les approximations de Z_1

le pic d'erreur obtenu avec l'approximation par pôles et zéros. Si un résultat plus précis est nécessaire, la technique des pôles et zéros s'avère plus adéquate. La structure simple du filtre de Butterworth non entier permet d'obtenir un modèle avec une précision relativement correcte sans avoir à utiliser un nombre important de paramètres.

3.3.3.2 Approximation de l'impédance Z_3

Dans la section 3.3, le comportement asymptotique de l'impédance de shunt Z_3 a été présentée. On sait que cette impédance se comporte comme une capacitance pure aux basses fréquences. Cela implique que, tout du moins dans les basses fréquences, c'est effectivement cet élément qui est responsable du stockage d'énergie thermique. Malheureusement, le comportement asymptotique n'est pas aussi simple à traiter lorsqu'on se penche sur les hautes fréquences. La première des approximations sera celle de la capacitance :

$$Z_{3-cap}(p) = \frac{1}{C_t p}, \quad (3.54)$$

avec $C_t = \frac{kLS_w}{a}$.

On observe alors dans la figure 3.11 la courbe de gain exacte et celle obtenue en utilisant l'approximation par capacitance.

La pente de -20 dB/dec observée autour des basses fréquences confirme une fois de plus le comportement de capacitance de Z_3 pour les dynamiques lentes. On peut remarquer

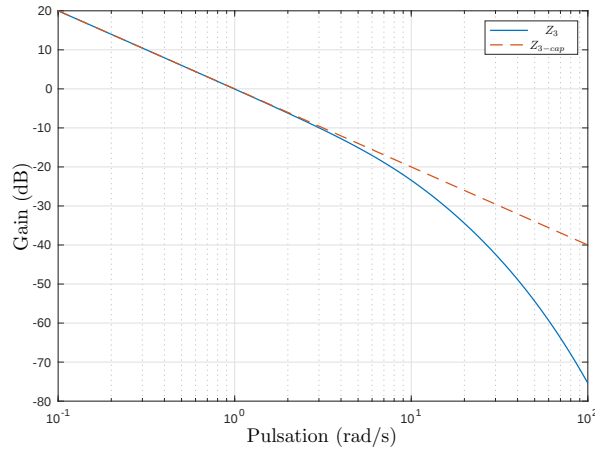


FIGURE 3.11 – Diagramme de gain de Z_3 et de son approximation par capacitance

néanmoins une augmentation de cette pente au fur et à mesure que la fréquence augmente. L'impédance Z_3 se comporte comme un court-circuit aux hautes fréquences. Même si un modèle de capacitance a tendance à se comporter comme un court-circuit aux hautes fréquences, le modèle de capacitance possède plusieurs inconvénients :

- la pente de gain n'est pas augmentée pour un modèle de capacitance ;
- la courbe d'erreur explose pour cette approximation.

La figure 3.12 met en évidence l'erreur obtenue lorsque l'on utilise l'approximation de capacitance, notamment aux hautes fréquences.

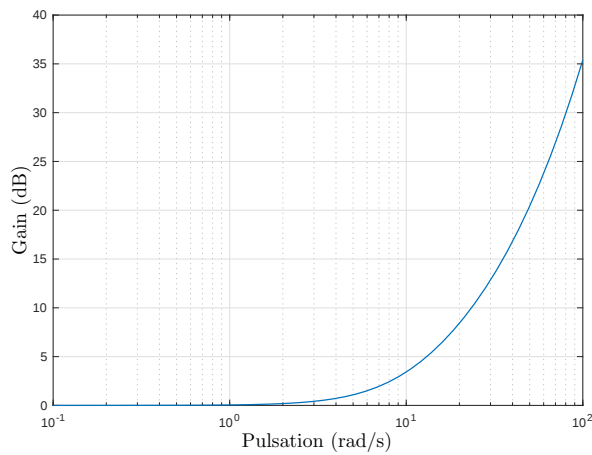


FIGURE 3.12 – Erreur absolue $\epsilon(j\omega)$ associée à l'approximation de capacitance de Z_3

Si le système thermique que l'on étudiera risque d'être excité (thermiquement) aux moyennes fréquences, il est préférable de prendre en compte l'augmentation de la pente de gain de Z_3 . Pour l'exemple académique traité dans ce chapitre, on peut calculer la valeur de cette pente aux limites des basses et des hautes fréquences (pour la plage de fréquences

choisie pour les simulations) :

$$\left. \frac{d|Z_3(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=0.1} = -20.00 \text{ dB/dec} \quad (3.55)$$

et

$$\left. \frac{d|Z_3(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega=100} = -78.28 \text{ dB/dec}. \quad (3.56)$$

La différence entre les pentes initiale et finale est de pratiquement -60 dB/dec . Afin de corriger cette erreur de pente, un simple filtre non entier est proposé comme terme multiplicateur du modèle de capacitance :

$$Z_{3-frac}(p) = \frac{1}{C_{tp}} \left[\frac{1}{1 + (\tau p)^\phi} \right]. \quad (3.57)$$

Cette correction proposée permet d'augmenter l'amplitude de la pente de gain en hautes fréquences par un facteur ϕ , notamment $-20\phi \text{ dB/dec}$. Le terme $1/\tau$ indique la fréquence transitionnelle à partir de laquelle ce terme de correction commence à avoir une influence importante. Une estimation initiale pour ϕ est de 2.90 afin d'être proche de la pente de -78.28 dB/dec en hautes fréquences. Le vecteur de paramètre pour ce cas est :

$$\theta_{frac-slope} = [\tau \quad \phi]. \quad (3.58)$$

Le filtre de correction dans l'équation (3.57) possède la forme mathématique suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1 + (\tau p)^\phi} = \frac{b}{p^\alpha + b}. \quad (3.59)$$

Ce type de filtre peut être considéré comme une fonction de transfert commensurable avec un ordre commensurable α . Cela nous permet alors d'appliquer le théorème de stabilité de Matignon (Matignon [1996]) :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (3.60)$$

où, pour $\lambda = s^\alpha$, λ_i sont les racines du polynôme caractéristique en λ .

Pour la structure générale présentée dans l'équation (3.59), on a :

$$\lambda_i = -b \Rightarrow |\arg(-b)| = \pi. \quad (3.61)$$

En conséquence, pour ce type de filtre, la condition de stabilité est que $\alpha < 2$ pour $b > 0$.

Le théorème de stabilité de Matignon nous montre que l'ordre non entier du filtre est contraint à $\alpha < 2$, ce qui limite la pente supplémentaire du filtre non entier de première espèce. Dans le cas extrême où α tend vers 2, le filtre non entier apporte en hautes fréquences une pente de -40 dB/dec . Afin de pouvoir dépasser cette pente de -40 dB/dec tout en

respectant le théorème de stabilité, on propose l'utilisation de pentes non entières multiples :

$$Z_{3-mult-frac}(p) = \frac{1}{C_t p} \prod_{i=1}^{N_m} \frac{1}{1 + (\tau_i p)^\nu}. \quad (3.62)$$

Le nombre de cellules N_m dépend de la pente additionnelle à ajouter. Comme chaque cellule peut ajouter jusqu'à -40 dB/dec, le scénario traité dans ce chapitre implique que $N_m = 2$.

En observant la courbe de gain et de sa pente en hautes fréquences, on peut proposer un terme de correction différent. Ajouter des pôles entiers permet aussi de prendre en compte la variation de la pente de gain. On commence par calculer la différence des pentes dans la bande de fréquences choisie :

$$\tilde{N} = \left\lfloor \frac{|pente_{init} - pente_{final}|}{20} \right\rfloor, \quad (3.63)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction de nombre entier le plus proche et donne le nombre de pôles à ajouter. Une nouvelle approximation pour l'impédance de shunt s'exprime par :

$$Z_{3-rec-poles}(p) = \frac{1}{C_t p} \prod_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{1}{1 + \tau_i p} \quad (3.64)$$

avec un vecteur de paramètres :

$$\theta_{poles} = [\tau]. \quad (3.65)$$

Si le nombre de pôles nécessaires est plutôt bas, on pourrait simplement utiliser cette approximation en prenant chaque pôle τ_i comme une variable supplémentaire à estimer afin d'obtenir le terme de correction. Néanmoins, on peut avoir affaire à des cas pour lesquels le nombre de pôles à ajouter est très important et le calcul risque de devenir trop complexe (problème de convergence vers des minimums locaux). Dans ce cas, une relation arbitraire peut être établie entre les pôles afin de réduire la dimension du vecteur de paramètres :

$$\tau_{i+1} = \tau_1^{i\gamma}, \quad (3.66)$$

où tous les pôles sont liés au premier pôle τ_1 en suivant la relation (3.66).

Le principal avantage de cette correction est l'utilisation d'un vecteur de paramètres toujours limité à deux variables :

$$\theta_{red} = [\tau_1 \quad \gamma]. \quad (3.67)$$

L'espace paramétrique sera alors toujours un espace à deux dimensions. Le principal inconvénient est la perte de flexibilité par rapport au cas où les pôles ne sont pas liés.

Tout comme avec l'impédance Z_1 , une comparaison entre toutes ces approximations proposées a été réalisée avec le modèle classique de capacitance.

On remarque que, afin d'aider la convergence de l'algorithme FPA pour avoir une meilleure

approximation en hautes fréquences, le facteur d'oubli λ est de 0.95 dans le critère (3.28) pour le modèle à pente non entière et celui à pentes multiples non entières.

La figure 3.13 montre les gains pour le cas exact ainsi que pour les différentes approximations proposées pour Z_3 . D'autre part, les signaux d'erreur sont présentés dans la figure 3.14.

Les valeurs minimales, maximales et moyennes de l'erreur pour les quatre approximations sont résumées dans le tableau 3.5.

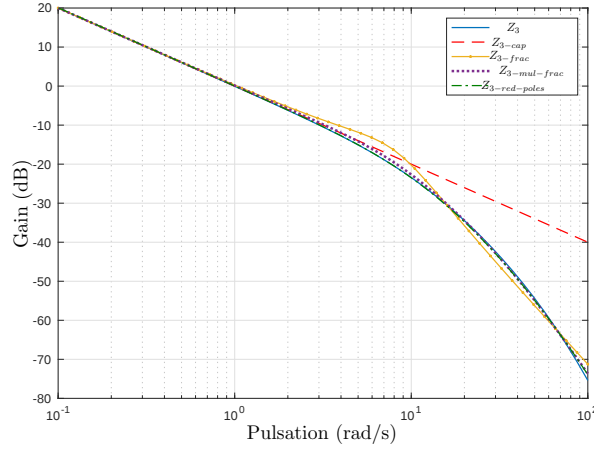


FIGURE 3.13 – Diagrammes de gain de Z_3 et ses approximations

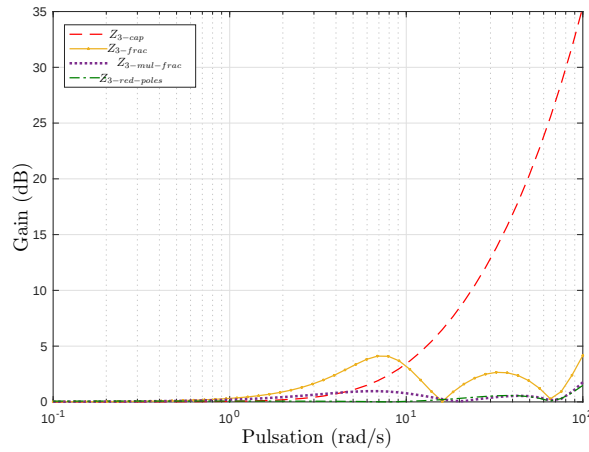


FIGURE 3.14 – Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ pour les différentes approximations de Z_3

Malgré une erreur qui peut atteindre 4.16 dB avec le modèle de pente non entière, l'erreur reste toutefois réduite si on la compare avec celle du modèle de capacitance $Z_{3\text{-cap}}$. Pour cet exemple, l'ordre non entier après l'optimisation est de $\phi = 1.45$. Ce résultat est plutôt surprenant. L'optimisation n'a pas mené cette approximation d'impédance au cas limite $\phi = 2$ malgré le fait que le facteur d'oubli donne plus de poids aux hautes fréquences. La valeur $1/\tau = 8.22 \text{ rad/s}$ est cohérente avec la plage de fréquences attendue de $[1 - 10] \text{ rad/s}$

Approximation	Max (dB)	Moyen (dB)	Min (dB)
Capacitance	35.40	5.69	0.0004
Pente non-entière	4.16	1.32	0.0100
Multi pente non entière	1.76	0.39	0.0137
Pôles réduits	1.48	0.18	0.0027

TABLEAU 3.5 – Valeurs extrêmes et moyennes de l’erreur pour les approximations de Z_3

dans laquelle l’erreur devient importante (voir figure 3.14).

L’optimisation mène à de meilleurs résultats pour le modèle par pentes multiples non entières. D’une façon très approximative, il existe un facteur de 3 entre les erreurs moyennes de ce modèle et celui avec une seule pente non entière. L’ordre commensurable trouvé est de $\nu = 1.13$, ce qui implique un ordre en haute fréquence de $2\nu = 2.26$. La flexibilité supplémentaire fournie par le filtre non entier à cellules multiples permet à l’ordre d’aller au-delà de la limite de 2 en hautes fréquences, tout en respectant le théorème de stabilité de Matignon.

L’approximation des pôles réduits donne des résultats encore plus précis en conservant la même dimension pour l’espace de recherche que le modèle par pentes multiples non entières. Il y a une différence significative au point autour duquel l’approximation commence à agir. Les pôles récursifs donnent un premier pôle à $\tau_1 = 0.033 \text{ rad/s}$. Ce pôle est deux décades en dessous de la valeur optimale obtenue pour le modèle à pente non entière. Cette approximation permet une approche plus prédictive par rapport à la réduction de l’erreur qui peut dépasser celle obtenue par le modèle de pente non entière, ainsi que celle obtenue par le modèle de pentes multiples non entières.

3.3.3.3 Comparaison entre l’approximation à pôles réduits et l’approximation à pôles libres

Après avoir observé les résultats encourageants obtenus avec l’approximation des pôles réduits de l’équation (3.68), il s’avère judicieux de tester un modèle avec des pôles libres, sans contraintes de récursivité. Aucune relation mathématique n’est imposée entre les différents pôles. La contrainte décrite dans l’équation (3.66) sera alors relâchée afin de pouvoir optimiser tous les paramètres de manière indépendante.

Mathématiquement, on peut exprimer cette approximation de l’impédance de shunt comme suit :

$$Z_{3-all-poles}(p) = \frac{1}{C_t p} \prod_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{1}{1 + \tau_i p}, \quad (3.68)$$

avec un vecteur de paramètres plus général :

$$\theta_{pôles} = [\boldsymbol{\tau}], \quad (3.69)$$

où tous les τ_i sont indépendants et représentés ensemble sous le symbole $\boldsymbol{\tau}$.

L'algorithme de pollinisation de la fleur (FPA) a été utilisé avec l'approximation à pôles réduits, tandis que l'approximation avec pôles libres a été optimisée en utilisant une méthode classique de descente de gradient.

Comme escompté, les deux approximations fournissent des résultats satisfaisants.

La figure 3.15 montre une comparaison entre les erreurs obtenues pour ces deux approximations.

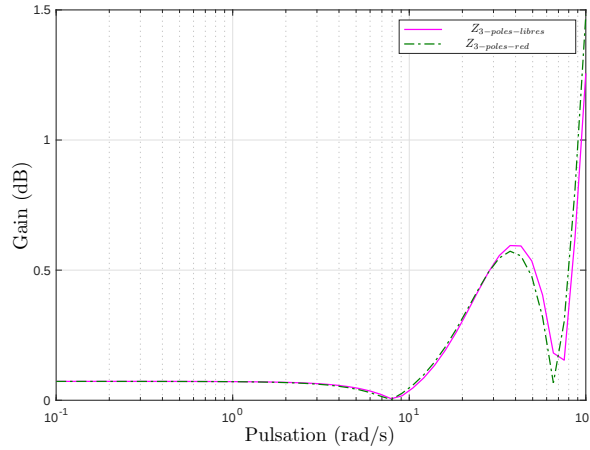


FIGURE 3.15 – Erreurs absolues $\epsilon(j\omega)$ de l'approximation à pôles réduits et pôles libres de Z_3

Sur la figure (3.15), on constate qu'il est effectivement difficile de distinguer une amélioration importante pour cet exemple. Rendre les pôles libres semble avoir un effet peu significatif sur l'erreur d'estimation. Le tableau 3.6 montre les valeurs des pôles ainsi que la valeur du critère J pour les deux approximations.

	Pôles réduits	Pôles libres
Pôles	9.91 30.16 98.31	9.94 30.34 92.16
$J(dB^2)$	0.033	0.0286

TABEAU 3.6 – Valeurs des pôles et critère J pour les approximations de Z_3

Bien que l'on puisse apprécier une légère amélioration dans le critère J , l'approximation avec des pôles libres augmente la dimension du vecteur de paramètres (trois fois plus de paramètres que dans le cas réduit) alors que l'amélioration du critère est très faible. D'autre part, on observe que l'approximation à pôles libres donne des pôles très proches de ceux obtenus par l'approximation à pôles réduits. Cela signifie que, pour cet exemple, les valeurs optimales de pôles pour l'approximation à pôles libres sont très proches de ceux obtenus avec l'approximation à pôles réduits. Cela pourrait donc justifier l'utilisation d'un modèle à pôles réduits pour des cas complexes afin de réduire la dimension du vecteur de paramètres.

3.3.4 Simulation dans le domaine temporel avec les différentes approximations des impédances

Afin d'illustrer dans le domaine temporel l'utilité des approximations présentées précédemment dans ce chapitre, un scénario simple est proposé.

En prenant le même mur thermique plan utilisé pour les approximations jusqu'à présent, on considère un scénario avec l'isolation thermique à $x = L$ ($\phi_{out} = 0$). On considère une entrée de fluctuation de température du type sinusoïdal à l'entrée du système à $x = 0$ (voir Figure 3.2) :

$$T_{in}(t) = T_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.70)$$

où $T_0 = 1\text{K}$ et $\omega_0 = 6\text{rad/s}$.

La fonction de transfert qui relie les températures d'entrée et de sortie est obtenue à travers un simple diviseur de tension :

$$\frac{T_{out}(p)}{T_{in}(p)} = \frac{Z_3(p)}{Z_1(p) + Z_3(p)}. \quad (3.71)$$

En combinant différentes approximations pour Z_1 et Z_3 , trois modèles sont proposés dans cette sous-section à titre illustratif. Les combinaisons choisies pour les modèles d'impédance sont définies au tableau 3.7 et les résultats des simulations sont illustrés à la figure 3.16.

Modèle	Z_1	Z_3
<i>A</i>	$Z_{1-asympt}$	Z_{3-cap}
<i>B</i>	$Z_{1-approx}$	$Z_{3-frac1}$
<i>C</i>	$Z_{1-approx}$	$Z_{3-frac2}$

TABLEAU 3.7 – Modèles utilisés pour les simulations temporelles

On constate que le modèle A présente une amplitude de gain plus grande que la courbe exacte car Z_{3-cap} ne prend pas en compte la perte progressive de gain qui est bel et bien présente à la réponse fréquentielle de l'impédance exacte de Z_3 . Le modèle B présente une légère amélioration de l'amplitude de gain par rapport au modèle A, mais le pic de résonance apparent dans $Z_{3-frac1}$ étant très proche de la fréquence ω_0 de l'onde thermique (3.70), l'amplitude de gain du modèle B reste toujours aussi élevée par rapport à la réponse exacte. L'amplitude de gain est plus réduite pour le modèle C, car les approximations des réponses fréquentielles de Z_1 et de Z_3 sont très proches des courbes réelles. On constate aussi qu'au début de l'application de l'onde thermique, la réponse temporelle du modèle A est plus rapide que celles des deux autres modèles : sans aucun retard avec le modèle A, un retard de 0.03s avec les modèles B et C, et un retard de 0.06s avec le modèle exact. Ces résultats suggèrent que les modèles B et C reproduisent mieux le phénomène typique de retard lié à l'accumulation d'énergie thermique.

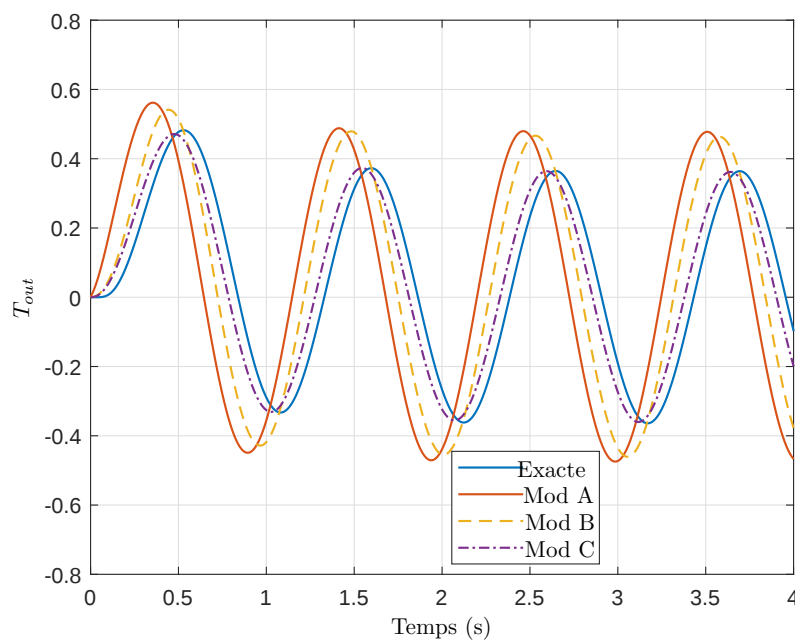


FIGURE 3.16 – Réponses temporelles pour une onde thermique

3.4 L'équation de bio-chaleur

Jusqu'à présent, l'analyse présentée sur la modélisation thermique se basait entièrement sur l'équation de la chaleur et l'exemple traité était un cas académique. Pourtant, on souhaite appliquer les concepts fondamentaux de la modélisation thermique dans un cadre médical.

Dans des scénarios médicaux, les fluctuations de températures admissibles possèdent souvent une variation très restreinte. Les êtres vivants, en moyenne, sont si sensibles que des changements de température assez modérés peuvent considérablement endommager les tissus. Dans des conditions normales, les organes de l'être humain sont assez proches de la température dite corporelle, qui est normalement autour de 37°C . Néanmoins, dans le cadre d'une chirurgie à cœur ouvert, le thorax est ouvert et les organes sont exposés à l'air libre. Les pertes de chaleur sont non négligeables et les organes subissent une baisse de la température. Très souvent, des surfaces chauffantes ou du réchauffement artificiel du tissu sous perfusion sont utilisés afin de compenser ces pertes énergétiques. Ces techniques sont souvent empiriques, et une meilleure compréhension des transitoires thermiques dans ces scénarios permettrait d'améliorer le contrôle de la température des poumons.

Sur des tissus vivants, il existe des phénomènes additionnels non pris en compte dans l'équation de la chaleur classique. L'un d'entre eux concerne la circulation sanguine, qui permet de nourrir des tissus ainsi que d'échanger des gaz. A travers ces phénomènes diffusifs, les fonctions des organes sont assurées. Le flux sanguin joue également un rôle de régulateur thermique naturel. D'autre part, la respiration des cellules et les processus internes liés au métabolisme peuvent aussi générer de la chaleur. En 1948, le physiologue H.H Pennes (Pennes

[1948]) proposa une modification simple de l'équation de la chaleur afin de prendre en compte les phénomènes biologiques. Mathématiquement, l'équation de la bio-chaleur s'exprime selon :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl} (T_a - T) + q_m + q_{ext} \quad (3.72)$$

où $\rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl} (T_a - T)$ est le terme de perfusion sanguine, q_m représente la génération de chaleur métabolique et q_{ext} est une source externe de chaleur.

Il serait faux d'affirmer que l'équation de Pennes est la seule à tenter de capter les phénomènes de bio-chaleur. Plusieurs modèles de bio-chaleur, souvent plus précis que celui de Pennes sont disponibles dans la littérature (Hristov [2019]). Ces modèles introduisent soit des non-linéarités, soit ils se basent sur la mécanique de milieux poreux (solution très complexe des équations différentielles) rendant difficile l'obtention d'un modèle simple. En conséquence, l'équation de Pennes reste largement utilisée dans la communauté médicale. Des modèles en régime statique de l'équation de Pennes ont été utilisés pour modéliser de façon globale le transfert thermique dans un corps humain (Fiala et al. [1999]), voire même la modélisation thermique d'un oeil humain pour lequel est prise en compte la perte de chaleur par radiation (Ooi et al. [2006]). Le transitoire de température dans la peau humaine a aussi été analysé en se servant de l'équation de Pennes en régime statique comme point de départ (voir Ratovoson et al. [2010] et Strakowska et al. [2015]).

3.4.1 Le bio-quadripôle

Le scénario reste un simple mur plan comme dans les sections précédentes. Cette fois-ci, le milieu est un tissu avec du transfert thermique longitudinal selon l'axe x comme illustré à la figure 3.17. La longueur du tissu est de L et la section S_w . Ce mur plan possède une conductivité thermique k , une masse volumique ρ et une capacité calorifique c . Il est soumis à un fluide de perfusion de masse volumique ρ_{bl} de capacité calorifique c_{bl} . Le coefficient de perfusion ω_{bl} représente le quotient entre le flux volumique du fluide de perfusion $\dot{V}_b$ et le volume total du tissu sous perfusion V_t :

$$\omega_{bl} = \frac{\dot{V}_b}{V_t} \quad (3.73)$$

Il y a aussi une génération de chaleur métabolique q_m et une source externe de chaleur q_{ext} .

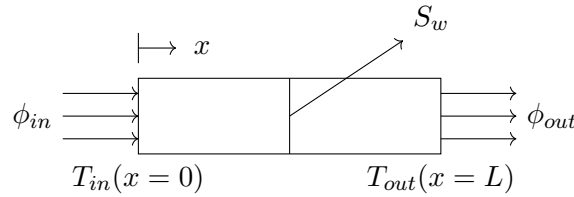


FIGURE 3.17 – Système bio-thermique à une dimension

Si l'on considère un scénario sans source externe et que l'influence de la génération métabolique de chaleur est négligeable, l'équation (3.72) devient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl} (T_a - T). \quad (3.74)$$

Dans un contexte médical, il est typique de considérer que la température d'un organe interne est très proche de celle "du centre du corps" T_b , autour de $37^\circ C$. Il serait intéressant de se pencher sur la variation de température par rapport à cette température de référence T_b :

$$\tilde{T} = T - T_b. \quad (3.75)$$

Comme T_b est supposée constante, les dérivées spatiales et temporelles de $\tilde{T}$ et T sont équivalentes. D'autre part, dans une situation normale (en dehors d'une chirurgie à cœur ouvert), le sang tendra à avoir une température proche de celle de référence :

$$T_a \approx T_b. \quad (3.76)$$

L'équation de bio-chaleur s'écrit alors :

$$\rho c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} - \rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl} \tilde{T}. \quad (3.77)$$

Si l'on définit maintenant la diffusivité thermique a et le coefficient de chaleur par perfusion h_b :

$$a = \frac{k}{\rho c}, \quad h_b = \frac{\rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl}}{k}, \quad (3.78)$$

l'équation (3.77) devient :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} - h_b \tilde{T}. \quad (3.79)$$

En prenant la transformée de Laplace de (3.79) et en assumant des conditions initiales nulles, on obtient alors :

$$\left[\frac{p}{a} + h_b \right] \tilde{T}(x, p) = \frac{d^2 \tilde{T}(x, p)}{dx^2}. \quad (3.80)$$

Si l'on considère une entrée de chaleur à $x = 0$ et une sortie de chaleur à $x = L$:

$$\begin{aligned} \phi_{in}(p) &= -k S_w \frac{\partial T(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \phi_{out}(p) &= -k S_w \frac{\partial T(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (3.81)$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_{in}(p) \\ \phi_{in}(p) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} T_{out}(p) \\ \phi_{out}(p) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cosh(\delta L) & \frac{1}{kS_w\delta} \sinh(\delta L) \\ kS_w \sinh(\delta L) & \cosh(\delta L) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{p}{a} + h_b}$. Cette équation matricielle peut être représentée par un circuit en T, comme celui de la figure 3.2.

Les expressions pour les impédances s'expriment alors par :

$$Z_1(p) = Z_2(p) = \frac{1}{kS_w\delta} [\coth(\delta L) - \operatorname{csch}(\delta L)] \quad (3.84)$$

et

$$Z_3(p) = \frac{1}{kS_w\delta} \operatorname{csch}(\delta L). \quad (3.85)$$

3.4.2 Comportement asymptotique de l'impédance Z_1

En basses fréquences, l'expression de l'impédance tend vers :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_1(j\omega) = \frac{\coth(\sqrt{h_b}L) - \operatorname{csch}(\sqrt{h_b}L)}{kS_w\sqrt{h_b}} = R_{1-bio}. \quad (3.86)$$

Pour ce cas, le comportement en basses fréquences est le même que dans un cas sans perfusion : une résistance. Néanmoins, la résistance en basses fréquences pour le milieu non-perfusé est donnée par :

$$R_{non-perf} = \frac{L}{2kS_w}. \quad (3.87)$$

Lorsque les coefficients de perfusion sont très petits, on obtient :

$$\lim_{h_b \rightarrow 0} R_{1-bio} = \frac{L}{2kS_w}. \quad (3.88)$$

Si la perfusion est très petite, on obtient alors l'expression suivante :

$$\coth(\sqrt{h_b}L) - \operatorname{csch}(\sqrt{h_b}L) \approx 1 \quad (3.89)$$

et

$$R_{1-bio} \approx \frac{1}{kS_w\sqrt{h_b}}. \quad (3.90)$$

Cela signifie que la perfusion réduit le gain statique des impédances Z_1 et Z_2 .

En hautes fréquences, on obtient :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z_1(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg|Z_1(j\omega)| = -45^\circ, \quad (3.91)$$

ce qui peut être interprété comme un élément à phase constante :

$$Z_{1-HF}(p) = \frac{1}{C_s\sqrt{p}}, \quad (3.92)$$

avec $C_s = \frac{kS_w}{\sqrt{a}}$.

Pour des fréquences plus hautes, l'impédance Z_1 montre le même comportement qu'un élément à phase constante pour un cas non-perfusé.

3.4.3 Comportement asymptotique de l'impédance de shunt Z_3

En basses fréquences, on obtient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_3(j\omega) = \frac{\text{csch}(\sqrt{h_b}L)}{kS_w\sqrt{h_b}} = R_{3-bio}. \quad (3.93)$$

Ce résultat indique que le bio-quadripôle thermique en basses fréquences est un réseau entièrement résistif au lieu de correspondre à un circuit RC classique. Lors d'un cas avec de l'isolation thermique en sortie, une variation constante de température $\tilde{T}_{in}$ engendrera une température de sortie constante mais inférieure à celle appliquée à l'entrée. Ceci est logique étant donné que ce modèle considère qu'un flux sanguin est là pour évacuer la chaleur de façon constante.

Quand la perfusion tend vers zéro, on obtient un circuit ouvert :

$$\lim_{h_b \rightarrow 0} R_{3-bio} = \infty. \quad (3.94)$$

Quand la perfusion tend vers l'infini, on obtient un court-circuit :

$$\lim_{h_b \rightarrow \infty} R_{3-bio} = 0. \quad (3.95)$$

Ces limites sont cohérentes avec le modèle non-perfusé car Z_3 , dans ce dernier cas, est une capacitance pure (ce qui correspond à une impédance infinie en basses fréquences). La limite de haute perfusion indique que, même pour des fluctuations thermiques très lentes, un important flux sanguin bloquera la propagation d'une variation thermique en entrée.

En hautes fréquences, on obtient :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z_3(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg|Z_3(j\omega)| = -\infty, \quad (3.96)$$

ce qui correspond au même résultat obtenu pour les modèles non-perfusés.

3.4.3.1 Fluctuation de la température du sang et prise en compte de la chaleur métabolique

Le bio-quadripôle présenté jusqu'à présent ne considère pas la génération de chaleur métabolique ni les sources externes de chaleur. Une hypothèse additionnelle faite dans le bio-quadripôle est de supposer que la température sanguine est la même que celle du corps $T_a = T_b$.

Dans un scénario plus réaliste, des fluctuations de température sanguines peuvent se produire durant une opération chirurgicale. Le fluide de perfusion est typiquement contrôlé

par le chirurgien et peut, à certains moments, être à une température plus élevée que T_b afin de compenser les pertes de chaleur produites par l'exposition de l'organe à la salle de chirurgie lorsque le patient est en opéré à cœur ouvert. On peut considérer la température du fluide de perfusion comme la somme de la température corporelle et d'une variation dynamique :

$$T_a = T_b + \Delta T_a(t). \quad (3.97)$$

En prenant en compte la variation de température sanguine et la chaleur métabolique, l'équation (3.79) devient :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} - h_b \tilde{T} + h_b \Delta T_a + \frac{q_m}{k}. \quad (3.98)$$

Ces termes additionnels peuvent être traités comme une source interne de chaleur. L'inclusion des sources de chaleur est aussi bien documentée (Pailhes et al. [2012]). Une fonction de source $g(x, t)$ est maintenant définie :

$$g(x, t) = kh_b \Delta T_a + q_m. \quad (3.99)$$

Si ΔT_a et q_m sont indépendants de la position, cette génération de chaleur mène à une source additionnelle de chaleur dans le modèle de circuit donné par l'expression :

$$\phi_d(p) = \int_0^L S_w G(p) \cosh(\delta x) dx \quad (3.100)$$

ou encore

$$\phi_d(p) = G(p) F(p) \quad (3.101)$$

avec $G(p) = kh_b \Delta T_a(p) + q_m(p)$ et $F(p) = \frac{S_w \sinh(\delta L)}{\delta}$.

La figure 3.18 illustre le quadripôle modifié avec le terme additionnel de source de chaleur.

3.4.3.2 Application aux poumons

Les poumons sont l'un des organes les plus affectés durant une chirurgie cardiaque. Ceci est dû à la circulation extra-corporelle. Comme cela a été montré précédemment, le coefficient de perfusion a une forte influence sur le comportement thermique. Cela signifie qu'une adéquate combinaison de la température du fluide de perfusion ΔT_a et de son flux volumique (qui changera la valeur de ω_b) peuvent permettre de maintenir la température normale de l'organe durant une intervention chirurgicale. Néanmoins, les poumons exhibent une géométrie très complexe, car il s'agit d'une structure arborescente. Un schéma du poumon est montré dans la figure 3.19.

La complexité de cette structure arborescente peut être étudiée en analysant les bifurcations lorsqu'on passe d'un niveau n au niveau $n + 1$. Kuwahara et al. [2009] proposent une élégante simplification : les modèles du poumon sont considérés comme géométriquement

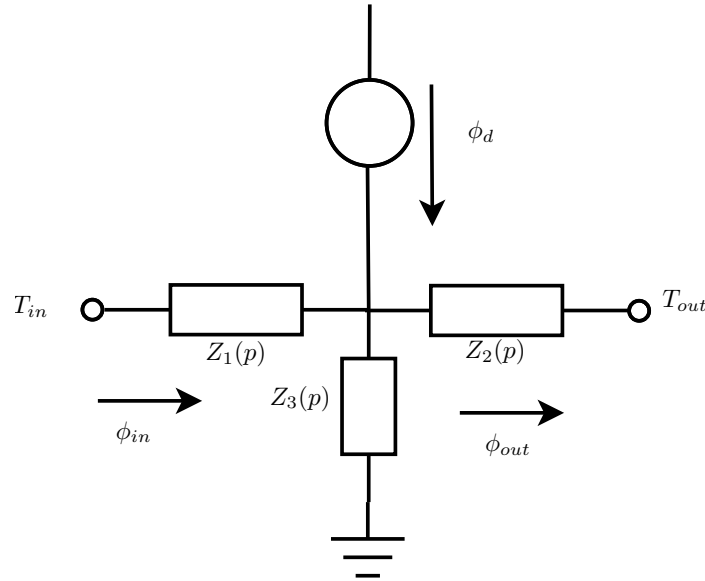


FIGURE 3.18 – Quadripôle thermique avec fluctuation de température sanguine et génération de chaleur métabolique

distributed afin de fournir une résistance aérodynamique équivalente optimale pour le flux d'air. Cela signifie que les pertes de pression à travers les multiples bifurcations du poumon sont minimisées. En conséquence, en appliquant la loi de Murray pour les bifurcations, il est possible de trouver des relations récurrentes pour les diamètres des sections :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 2^{-\frac{1}{3}}, \quad (3.102)$$

les sections transversales :

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 2^{-\frac{2}{3}}, \quad (3.103)$$

et les longueurs :

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 2^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.104)$$

De cette manière, il est possible de fournir des expressions pour les impédances du bio-quadripôle pour un niveau généralisé n de la manière suivante :

$$Z_{1,n}(p) = \frac{2^{\frac{2n}{3}}}{kS_0\delta} [\coth(2^{-\frac{n}{3}}L_0\delta) - \operatorname{csch}(2^{-\frac{n}{3}}L_0\delta)] \quad (3.105)$$

et

$$Z_{3,n}(p) = \frac{2^{\frac{2n}{3}}}{kS_0\delta} \operatorname{csch}(2^{-\frac{n}{3}}L_0\delta). \quad (3.106)$$

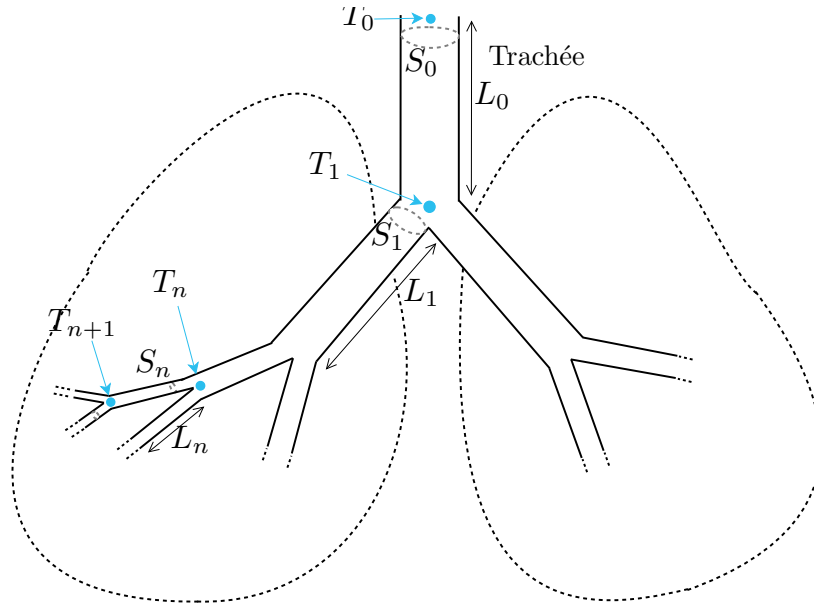


FIGURE 3.19 – Schéma du poumon

ρ	550 [kg][m ⁻³]	ρ_{bl}	1060 [kg][m ⁻³]
c	3718 [J][kg ⁻¹][K ⁻¹]	c_{bl}	3900 [J][kg ⁻¹][K ⁻¹]
k	0.28 [W][m ⁻¹][K ⁻¹]	ω_{bl}	0.0043 s ⁻¹
L_0	0.1 m	d_0	1.4 cm

TABLEAU 3.8 – Paramètres de simulation pour l'impédance thermique des poumons

3.4.3.3 Résistance et fractance dans les poumons

Le tableau 3.8 montre les paramètres utilisés pour les simulations. Ces valeurs numériques ont été définies afin d'être en concordance avec les propriétés du corps humain. Les évolutions des paramètres plus importants tels que les résistances en basses fréquences $R_{1-bio,n}$ et $R_{3-bio,n}$, ainsi que le paramètre à phase constante $C_{s,n}$ pour les impédances $Z_{1,n}$ et $Z_{3,n}$ en fonction du niveau n de bifurcation sont présentées aux figures 3.20 et 3.21.

Si l'on considère uniquement les comportements asymptotiques en basses et hautes fréquences pour Z_1 , il est possible de proposer une approximation asymptotique d'impédance :

$$Z_{1-bio,n}(p) = \frac{R_{1-bio,n}}{1 + R_{1-bio,n}C_{p,n}\sqrt{p}}. \quad (3.107)$$

En conséquence, $R_{1-bio,n}C_{s,n}$ représente une constante de temps. La figure 3.20 montre que la résistance augmente quand les niveaux se rapprochent des alvéoles ($n = 23$). On constate que cette progression est hautement non-linéaire car les voies aériennes possèdent une résistance très basse jusqu'au niveau $n = 10$ et la résistance augmente ensuite de manière exponentielle. La fractance $C_{s,n}$ décroît de façon exponentielle jusqu'au niveau $n = 10$. Afin de saisir plus

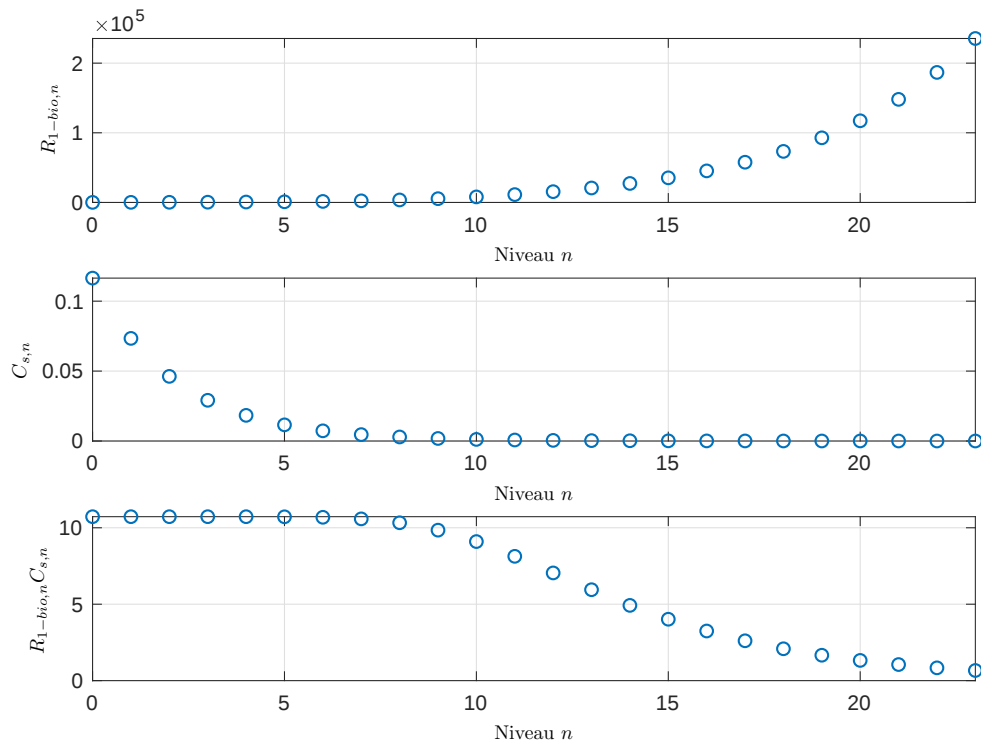


FIGURE 3.20 – $R_{1-bio,n}$ et $C_{s,n}$ pour différents niveaux de branchement

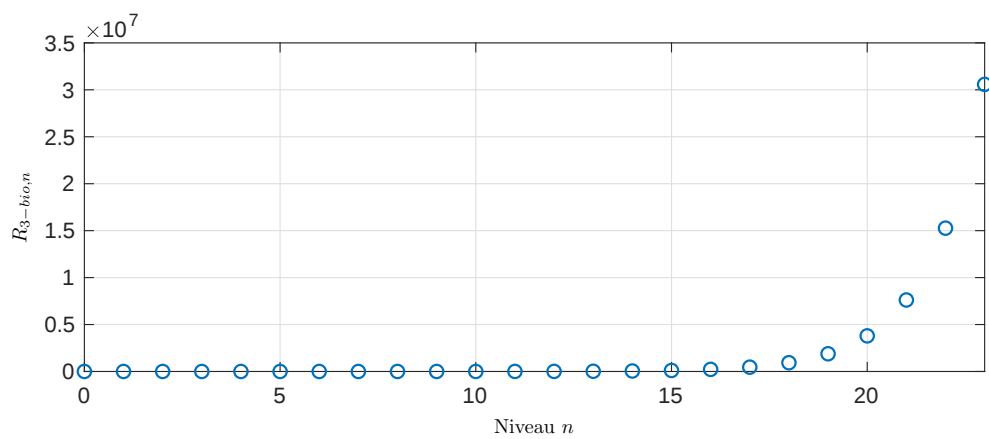


FIGURE 3.21 – $R_{3-bio,n}$ pour différents niveaux de branchement

précisément cette dynamique des impédances, la constante de temps $R_{1-bio,n}C_{s,n}$ est aussi présentée. Cette constante de temps montre que, malgré l'augmentation dramatique de la résistance à partir de $n = 10$, la fractance $C_{s,n}$ est si petite qu'elle permet d'éviter une fluctuation brusque de la constante de temps le long du poumon entier. Au fur et à mesure qu'on se rapproche des niveaux plus petits, la constante de temps devient plus rapide, mais la progression reste plutôt lente (les valeurs initiales et finales ont un facteur de 10 entre elles). Il faut remarquer que la constante de temps est constante pour toute la section d'entrée du poumon (jusqu'au niveau $n = 6$).

$R_{3-bio,n}$ est faible jusqu'à $n = 15$, ce qui implique que les variations de température à l'entrée de la section sont absorbées à travers le tissu et n'altèrent pas de façon importante la température à la sortie. Néanmoins, lorsque n augmente, cette résistance explose jusqu'à des valeurs qui dépassent largement les valeurs obtenues pour $R_{1-bio,n}$: une entrée de température pourra alors être transmise plus facilement jusqu'au bout d'une section donnée. Au fur et à mesure que les deux résistances explosent pour les niveaux plus profonds, un modèle global du poumon aura tendance à se comporter de manière approximative comme un circuit ouvert. En conséquence, la structure globale du poumon n'est pas forcément nécessaire afin d'obtenir un modèle thermique du poumon suffisamment précis.

3.4.4 Réponses fréquentielles de $Z_{1,n}$ et $Z_{3,n}$

Durant la respiration, la chaleur et la température varient dans le temps. Cela justifie l'analyse des réponses fréquentielles des sections des poumons à condition de rester dans une plage de fréquences réaliste. La respiration humaine n'est pas un phénomène rapide, mais elle peut atteindre 20 respirations par minute sous des conditions normales. La respiration lente est considérée dans la plage de fréquences $[0.07 - 0.16]$ Hz (voir Russo et al. [2017]). Au-delà de 14 respirations par minute (0.23Hz), la respiration peut déjà être considérée comme anormale (voir Cretikos et al. [2008]). De plus, les simulations seront réalisées dans la plage de fréquences $[0.01 - 10]$ rad/s afin de couvrir la plage de la respiration normale. Les figures 3.22 et 3.23 montrent les réponses fréquentielles en gain pour $Z_{1,n}$ et $Z_{3,n}$.

Pour les premiers niveaux du poumon, $Z_{1,n}$ se comporte comme une fractance pure. Lorsqu'on avance vers les niveaux plus profonds, le comportement résistif devient plus évident. Quand n augmente, la fréquence de coupure devient de plus en plus rapide.

Pour $Z_{3,n}$, les niveaux bas ont des gains très faibles et ils peuvent être quasiment interprétés comme des courts-circuits. Ceci est logique car une section longue aura plus de volume disponible pour l'évacuation de la chaleur. Quand le niveau n augmente, le gain statique augmente aussi.

Dans la plage de fréquences choisie, le comportement résistif en basses fréquences n'est pas visible. D'autre part, on peut constater que, en basses fréquences, pour les courbes à $n = 15$ et $n = 20$, la pente initiale est autour de -20 dB/dec, ce qui implique un comportement capacitif. Quand la fréquence augmente, cette pente augmente aussi, ce qui est cohérent avec le concept du filtrage en hautes fréquences pour l'impédance de shunt.

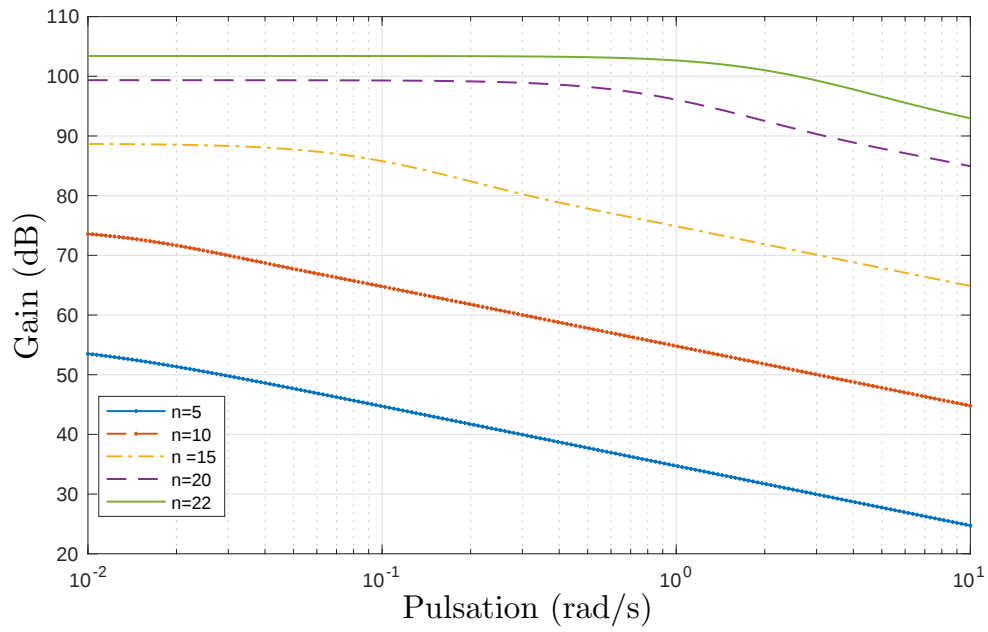


FIGURE 3.22 – Réponse fréquentielle $Z_{1,n}$ pour des différents niveaux n

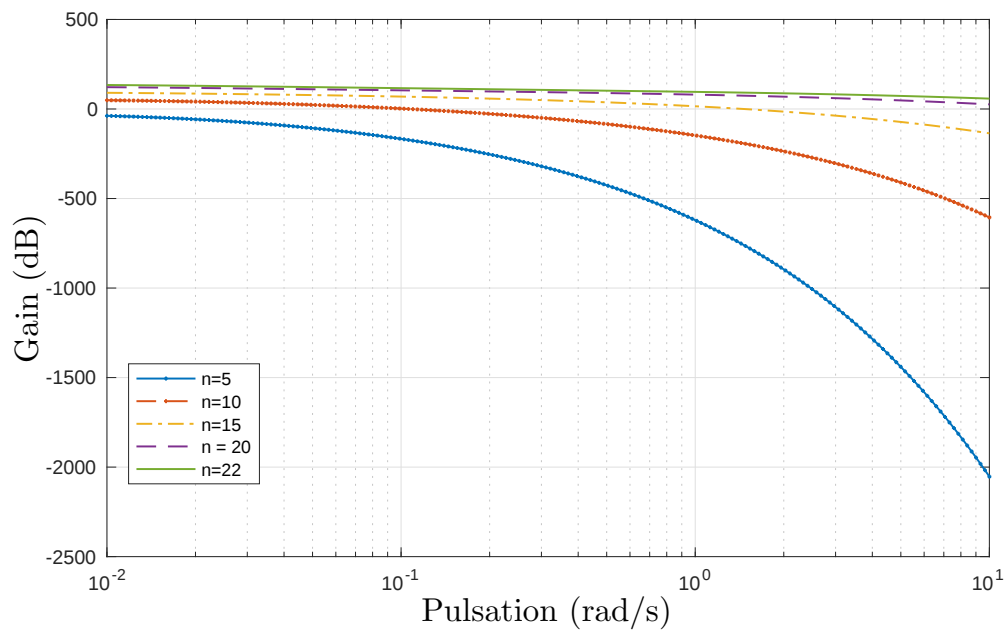


FIGURE 3.23 – Réponse fréquentielle $Z_{3,n}$ pour des différents niveaux n

3.4.4.1 Variation de la température du fluide de perfusion

Un scénario académique simple est proposé afin d'observer la sensibilité du système face à une variation dans la température du fluide de perfusion. L'entrée sera considérée comme étant la température moyenne du corps $\tilde{T}_{in} = 0$ et la sortie sera supposément isolée thermiquement ($\phi_{out} = 0$). En conséquence, la fonction de transfert qui relie la variation de température en sortie $\tilde{T}_{out,n}$ (à un niveau donné n) avec la variation de température ΔT_a du fluide de perfusion sera :

$$H_{T_{a,n}}(p) = \frac{\tilde{T}_{out,n}(p)}{\Delta T_a(p)} = \frac{kh_b S_w \sinh(\delta L) Z_{1,n}(p) Z_{3,n}(p)}{\delta [Z_{1,n}(p) + Z_{3,n}(p)]}. \quad (3.108)$$

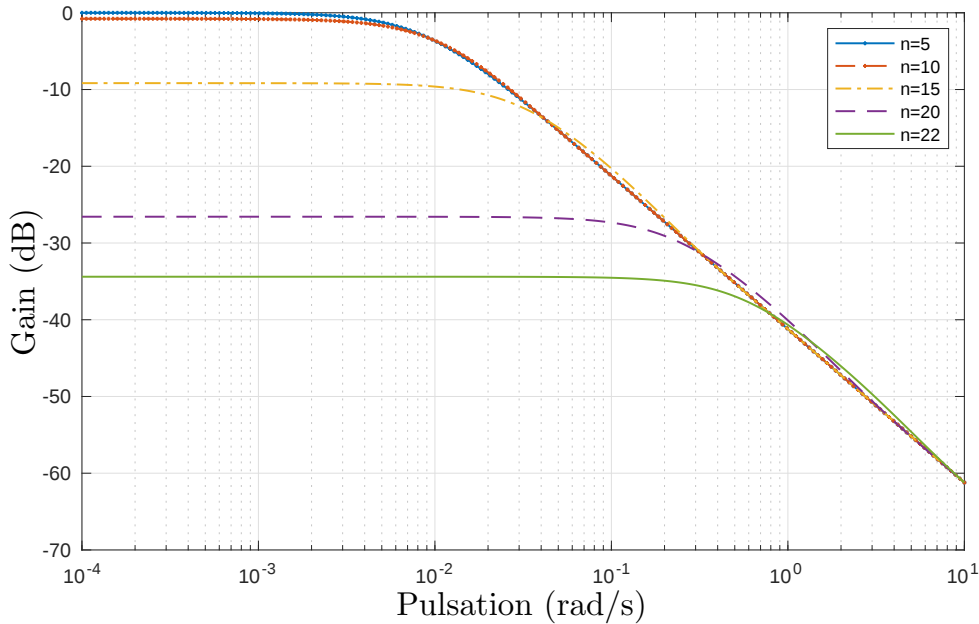


FIGURE 3.24 – Réponse fréquentielle $H_{T_{a,n}}(p)$ pour différents niveaux n

La figure 3.24 illustre les réponses fréquentielles en gain de $H_{T_{a,n}}$ pour différents niveaux n .

Pour les premiers niveaux d'entrée, la différence de longueur n'est pas pertinente étant donné que les gains statiques pour $n = 5$ et $n = 10$ sont quasiment identiques. Ces deux niveaux peuvent être considérés comme suffisamment longs afin de compenser l'entrée nulle par la température du fluide de perfusion. Pour ces deux courbes, le gain statique est de 0 dB : les variations lentes de température du fluide de perfusion peuvent facilement affecter la totalité du système. Au fur et à mesure que l'on descend vers des emplacements plus profonds, le gain statique diminue en raison des dimensions réduites des sections profondes du poumon. Il est évident qu'il y a un comportement qui ressemble au comportement d'un filtre passe-bas de première espèce non entier (avec un ordre commensurable de 0.5) pour

tous les niveaux.

3.4.5 Modèle global du poumon

Compte-tenu de toute la théorie de la modélisation thermique explorée dans ce chapitre, on souhaite maintenant appliquer les concepts du quadripôle et du bio-quadripôle afin d'obtenir un modèle thermique global pour les poumons. En considérant le schéma présenté dans la figure 3.19 et le fait qu'il est nécessaire de prendre en compte des millions (voir même des milliards!) de composants qui constituent les poumons, on peut proposer un modèle relativement simple en faisant des hypothèses simplificatrices. Il faut remarquer que des modèles bien plus précis du poumon peuvent aussi être proposés, mais l'objectif de ces travaux est d'aboutir à un modèle simple qui permettra par la suite une identification en temps-réel afin de guider les chirurgiens lors d'une intervention chirurgicale (l'identification des systèmes dynamiques sera abordée dans le chapitre IV).

Mises à part les relations entre les sections et les longueurs tirées de la loi de Murray et du modèle pulmonaire de Kuwahara, on suppose aussi une symétrie entre les deux poumons et des bifurcations qui se produiront toujours sur la base du nombre 2. Ceci n'est pas exactement vrai, mais la même hypothèse a été utilisée dans le modèle de Kuwahara (voir Kuwahara et al. [2009]) et elle permet d'obtenir un modèle simple et suffisamment pertinent.

Considérons qu'à un niveau de profondeur n du poumon, on a 2^n éléments en parallèle. On considère alors que la trachée est l'élément à $n = 0$, car on a une ($2^0 = 1$) seule trachée. Les bronches principales correspondent à $n = 1$ car on a deux ($2^1 = 2$) bronches principales (chacune étant l'entrée d'un des deux poumons). Si on considère qu'à chaque niveau de profondeur n , les 2^n éléments sont en connexion parallèle (c'est à dire 2^n quadripôles en parallèle), on peut alors exprimer les impédances équivalentes de toute une couche n pour Z_1 et Z_3 :

$$Z_{i-eq,n}(p) = \frac{Z_{i,n}(p)}{2^n} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad \text{et } n = 0, 1, \dots, 23. \quad (3.109)$$

La figure 3.25 illustre le schéma du circuit utilisé pour la modélisation globale du poumon.

3.4.5.1 Simulations du modèle global du poumon

La circulation sanguine dans les poumons est souvent non-uniforme. Normalement, les premières branches sont considérées comme un espace mort qui sert uniquement pour le transport passif d'air. La zone où des échanges gazeux se produisent commence autour du niveau $n = 14$. En conséquence, on propose trois modèles différents qui seront simulés et comparés. Les structures de ces trois modèles sont présentées au tableau 3.9. Différentes combinaisons des deux quadripôles sont proposées. Lorsqu'on indique "Classique" sur le tableau, cela signifie qu'un quadripôle classique basé sur les propriétés thermiques de l'air

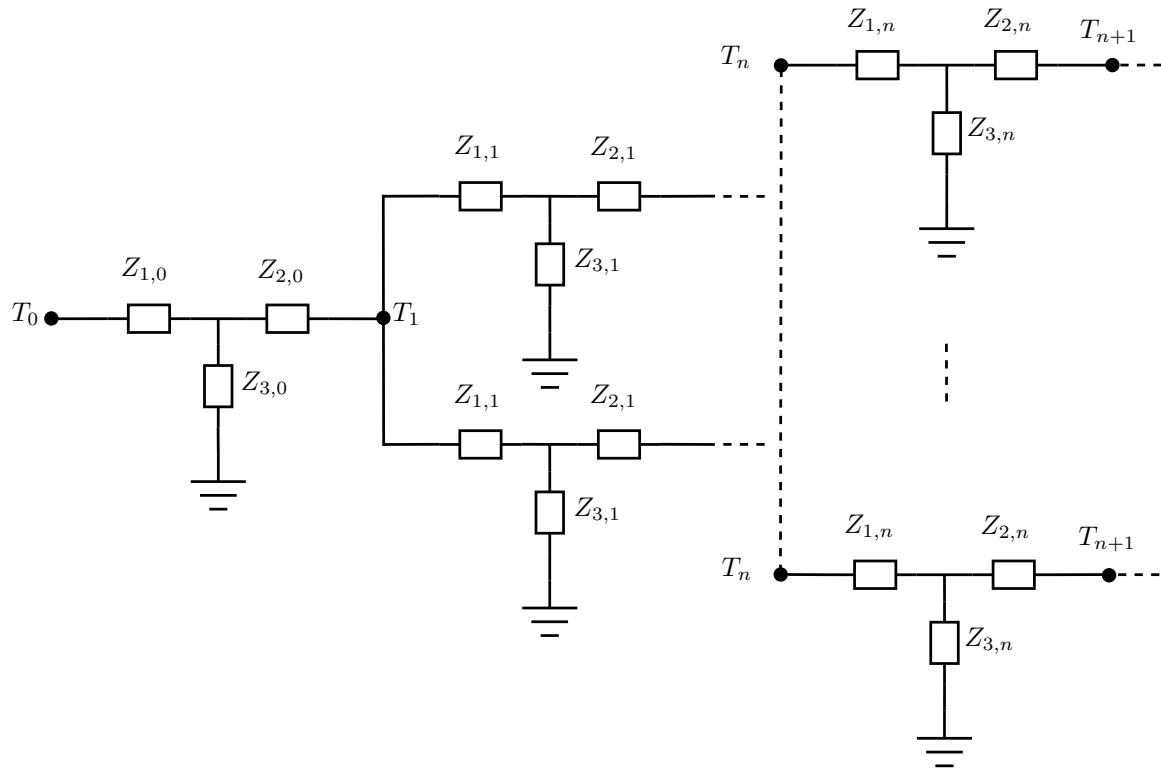


FIGURE 3.25 – Modèle global de circuit du poumon

sera utilisé dans cette zone. De la même manière, l'indication “Bio-chaleur” indique qu'à ces niveaux là, des bio-quadrupôles seront utilisés pour ce modèle proposé. Cela signifie alors que :

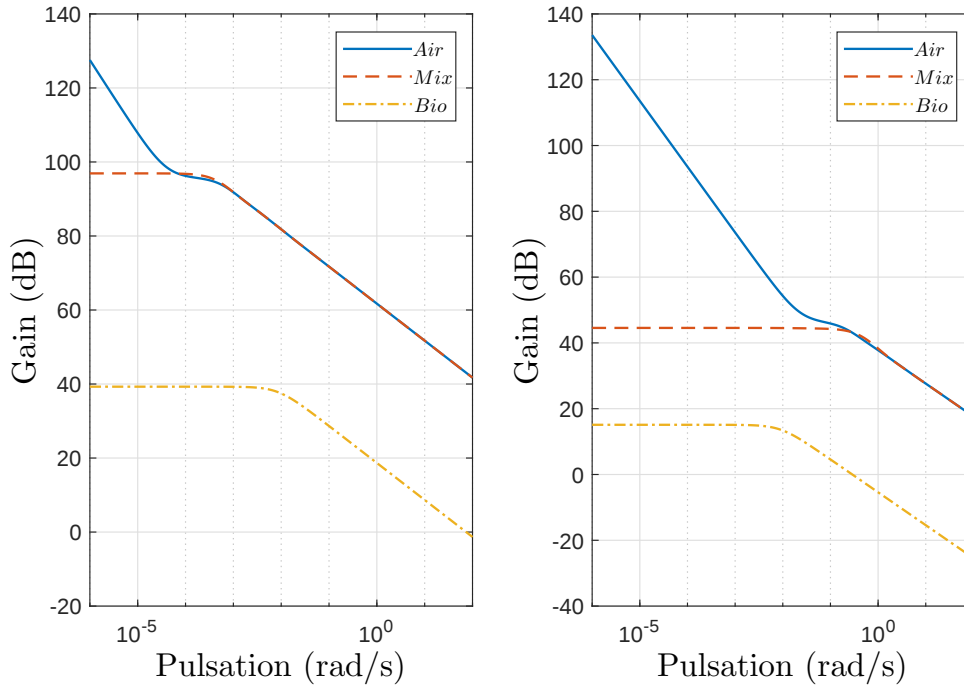
- le modèle dit “*air*” considère la totalité du poumon comme des voies aériennes sans perfusion ;
- le modèle dit “*mix*” considère qu'une partie du poumon est perfusée et l'autre non (modèle médicalement plus réaliste) ;
- le modèle dit “*bio*” considère que la totalité du poumon est sous perfusion.

Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 3.8, où l'indice t correspond au tissu, b au sang et a à l'air.

Modèle	Espace mort ($n < 14$)	Espace d'échange ($n \geq 14$)
<i>Air</i>	Classique	Classique
<i>Mix</i>	Classique	Bio-chaleur
<i>Bio</i>	Bio-chaleur	Bio-chaleur

TABLEAU 3.9 – Propositions de modèles globaux du poumon

La figure 3.26 montre l'impédance équivalente pour les trois modèles depuis la trachée ($n = 0$) et depuis le niveau $n = 12$ (intérieur du poumon).


 FIGURE 3.26 – Impédance équivalente d'entrée pour $n = 0$ (gauche) et $n = 12$ (droite)

Selon la figure 3.26, le modèle *Air* se comporte comme une capacitance à basses fréquences, ce qui permettrait des perturbations thermiques suffisamment lentes de se propager entièrement à travers les poumons. Les modèles *Mix* et *Bio* possèdent un gain statique constant et un comportement similaire, mais la perfusion plus élevée du modèle *Bio* a par conséquent un gain statique inférieur. Le comportement en hautes fréquences coïncide pour le modèle *Air* et le modèle *Mix*, ce qui signifie que l'espace mort alvéolaire joue le rôle d'un court-circuit thermique pour cette plage de fréquences. L'impédance équivalente pour $n = 12$ est illustrée sur la figure 3.26 afin de souligner les différences à l'intérieur des poumons. Au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'espace d'échange gazeux, le comportement capacitif est plus présent pour le modèle *Air*, ce qui se traduit par une accumulation d'énergie majeure pour ce modèle.

Les trois modèles proposés présentent une pente de -10 dB/dec pour la limite en hautes fréquences, ce qui confirme que les trois impédances équivalentes exhibent un comportement non entier. En observant la figure 3.26, on peut en déduire la structure générale de l'impédance pour les deux modèles (les modèles *Mix* et *Bio* ayant la même structure mathématique) :

$$Z_{eq-air}(p) = \frac{K(1 + ap)}{p(1 + \tau\sqrt{p})} \quad (3.110)$$

et

$$Z_{eq-mix-bio}(p) = \frac{K}{1 + \tau\sqrt{p}}. \quad (3.111)$$

3.4.6 Conclusions

Ce chapitre a introduit la modélisation thermique, ses approximations et leurs interprétations. Tout d'abord, les analogies entre la thermique et l'électricité s'avèrent utiles, car il s'agit d'un outil de modélisation. Cette analogie permet de contourner l'approche plus classique par la résolution d'équations à dérivées partielles.

Afin d'éviter des limites dans le domaine de validité imposées par l'utilisation de circuits RC , le quadripôle thermique est choisi comme outil. Ce dernier permet de représenter la diffusion thermique comme un circuit sans restreindre le domaine de validité en fréquences. En revanche, les expressions exactes des impédances s'avèrent très complexes en vue d'une identification en temps-réel.

Différentes approximations sont proposées en se servant du calcul fractionnaire afin d'avoir des représentations plus simples de ces impédances. Même si ces approximations limitent le domaine de validité en fréquence (notamment en raison de la pente de gain pour Z_3), celui-ci reste supérieur à celui qui est obtenu en utilisant des circuits RC . De plus, il devient possible d'exprimer des fonctions de transfert comme des rapports de polynômes non entiers qui remplacent les fonctions hyperboliques.

L'analyse du quadripôle thermique est dans un second temps étendue afin de prendre en compte des phénomènes physiologiques. Une approche montre comment se servir de la technique du quadripôle en utilisant l'équation de bio-chaleur. Premièrement, cela permet une prise en compte d'un milieu soumis à une perfusion sanguine. De plus, l'utilisation de sources de chaleur externes permet de prendre en compte des fluctuations sanguines de température ainsi que la chaleur émise par la respiration cellulaire.

Finalement, les techniques d'approximation ainsi que le développement du bio-quadripôle ont été mises en œuvre afin d'obtenir un modèle simple du transfert thermique dans les poumons. Un lien a été établi entre le gain statique de l'impédance thermique et la perfusion, ce qui prouve une fois de plus le rôle thermo-régulateur du système circulatoire. Des fonctions de transfert simples ont finalement été proposées et justifiées afin de modéliser l'impédance thermique des poumons.

Chapitre 4

Identification récursive par modèle non entier

4.1 Introduction

A partir de connaissances physiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement de la nature, il est parfois nécessaire de déterminer les valeurs numériques de certains paramètres. L'art de traiter des données d'entrée-sortie pour déterminer les valeurs numériques des paramètres du modèle porte le nom d'*identification de systèmes dynamiques*. L'objectif est de pouvoir capter de la manière la plus fidèle possible le comportement dynamique du système et que les paramètres identifiés puissent avoir un sens physique.

Les modèles mathématiques utilisées comme structure de base peuvent être classés selon trois groupes différents :

- un modèle de connaissance, aussi appelé modèle “boîte blanche” ; il s'agit d'un modèle construit sur la base d'une analyse physique, chimique, biologique (ou autre) en appliquant les lois concernées. Ces lois peuvent être des principes prouvés théoriquement, tels que ceux de l'électromagnétisme et de la thermodynamique, ou bien des lois empiriques (c'est le cas en finance ou en économie, par exemple) ;
- un modèle “boîte noire” ; ils se basent essentiellement sur des mesures d'entrées et de sorties ; pour ce type de modèle, la structure mathématique est souvent arbitraire et les paramètres du modèle n'ont aucun sens physique : celui-ci implique un domaine de validité restreint en raison d'un manque de connaissances de la nature ;
- un modèle “boîte grise” ; pour certains systèmes, des équations formelles peuvent être disponibles, mais elles sont insuffisantes pour concevoir un modèle de connaissances. La modélisation semi-physique prend alors en considération les connaissances *a priori* et les mesures ; ce type de modèle est un juste milieu entre la compréhension fournie par un modèle de connaissance et la souplesse d'un modèle boîte noire.

Une fois la structure du modèle posée, l'étape d'identification peut commencer. Norma-

lement, celle-ci commence par une planification d'expérience : les grandeurs d'entrées et de sorties significatives sont déterminées et mesurées. C'est aussi à cette étape que les signaux d'excitation sont choisis.

Ensuite, un modèle candidat est sélectionné. D'une manière générale, ce modèle peut être linéaire ou non-linéaire, et il peut prendre en compte du bruit de mesure. En se servant de la norme d'un signal d'erreur, un critère d'estimation paramétrique est choisi. Il en existe plusieurs : quadratique, en valeur absolue, maximum de vraisemblance, Young et bien d'autres. L'estimation des paramètres s'ensuit en minimisant le critère sélectionné. Des techniques de programmation linéaire, telles que les moindres carrés ou la variable instrumentale, sont souvent utilisées pour des modèles linéaires. Les techniques de programmation non-linéaires telles que la méthode du gradient et toutes ses variantes sont aussi fréquemment utilisées. Le modèle obtenu est validé ou invalidé par des tests d'invalidation. Des connaissances *a priori* du système peuvent être exploitées à toutes ces étapes.

Depuis quatre décennies, la théorie de l'identification s'est développée particulièrement pour les modèles linéaires à temps discret (voir les travaux de Ljung [1998]). De nombreux ouvrages traitent cette théorie. L'utilisation des calculateurs numériques a fortement favorisé l'usage des modèles discrets. Cela est aussi cohérent avec l'acquisition des données qui est échantillonnée. Malgré la facilité d'usage des modèles discrets et une littérature abondante sur ce sujet, des problèmes peuvent apparaître lorsqu'on choisit ce type de modèle : le problème des zéros d'échantillonnage (Zeng et Liang [2015]), ainsi qu'une perte du sens physique des paramètres du modèle.

Si l'on souhaite éviter une perte potentielle d'information due à la discrétisation, une approche à temps continu doit être envisagée. Depuis les années 90, les modèles à temps continu ont suscité un regain d'intérêt, notamment avec le développement de certaines boîtes à outil comme CAPTAIN (Taylor et al. [2013]) ou CONTSID (Garnier [2002]). Ces modèles permettent d'identifier les paramètres physiques d'un système. Si les données sont sur-échantillonnées, ces modèles améliorent l'estimation paramétrique (les erreurs numériques d'arrondi sont moindres). Les erreurs dues au passage des modèles continus vers des modèles discrets sont aussi éliminées. Les algorithmes à temps discret sont très coûteux au niveau calculatoire. De plus, ils n'offrent pas de garantie de convergence vers le minimum global. L'initialisation supérieure qui se fait avec un modèle continu permet d'obtenir une meilleure convergence vers l'optimum global. Malgré tous les avantages de l'identification de modèles continus, celle-ci n'est pas exempte de défis. L'une des principales difficultés est le besoin d'approximer les dérivées des entrées et sorties afin de calculer le vecteur de régression φ (voir Garnier et Wang [2008]). Si l'on souhaite estimer des modèles non entiers à temps continu, des approximations pour les dérivées non entières des entrées et sorties seront nécessaires.

Comme cela a déjà été constaté aux chapitres précédents, le calcul fractionnaire a déjà largement fait ses preuves comme outil puissant pour la modélisation de phénomènes physiques. Un clair exemple est son utilisation pour la modélisation de phénomènes diffusifs dans différentes géométries (Oldham et Spanier [1970, 1974]). De plus, les processus de transport

par diffusion peuvent être captés en nous servant de modèles par fonctions de transfert non entières avec des ordres de dérivation multiples de 0.5. En électrochimie, la diffusion des charges électriques dans des batteries d'acide est régie par le modèle de Randles, lequel emploie un intégrateur non entier (Alavi et al. [2015]). La présence d'un ordre non entier 0.5 est aussi présente pour les transferts thermiques, que ce soit dans des modèles infinis (Malti et al. [2009]), ou bien des milieux finis (Maillet et al. [2000]). Ces phénomènes physiques ont aussi mené à la conception de l'élément à phase constante (Krishna [2011]; Krishna et Reddy [2008]; Nakagawa et Sorimachi [1992]), qui est souvent utilisé dans des modèles de circuit. Cet élément est présent dans des modèles de circuit pour des intestins (Elwakil [2010]), du tissu cardiaque (Magin et Ovadia [2008]), ou pour le comportement pulmonaire (Ionescu et al. [2011]).

Les travaux sur l'identification par modèle non entier ont commencé dans les années 90. Les premiers travaux se concentraient essentiellement sur l'identification des coefficients d'une fonction de transfert d'ordre non entier. Nous pouvons remarquer les contributions faites par Oustaloup [1995], Mathieu et al. [1996] et LeLay [1998]. Les premières méthodes développées dépendent largement de la façon dont les dérivées non entières sont calculées. LeLay [1998] discrétise l'équation différentielle en appliquant la définition de *Grünwald* de la dérivée non entière. Ensuite, il calcule des paramètres discrets d'un modèle ARX et il revient aux paramètres continus. Dans les travaux d'Oustaloup (Oustaloup [1995]), une approximation de l'opérateur non entier borné en fréquence est appliquée. Pour cette approximation, on considère une distribution récursive des pôles et zéros et on emploie deux paramètres récur-sifs : α et η . Les coefficients du modèle rationnel ainsi que α et η sont estimés. L'inconvénient principal de ces premières méthodes est la dépendance du schéma de simulation de la dérivée non entière. Par exemple, la méthode développée par Le Lay ne peut pas s'appliquer avec un opérateur non entier borné en fréquence. De même, la méthode d'Oustaloup ne permet pas l'utilisation de l'opérateur non entier discrétisé.

Suite à ces premiers travaux, deux axes de recherche ont été mis en avant : d'une part, le souhait de développer des méthodes d'identification indépendantes du schéma de simulation de la dérivée non entière et, d'autre part, l'utilisation de méthodes plus modernes déjà appliquées dans l'identification des modèles linéaires discrets. L'identification par modèle non entier s'est alors penchée sur les modèles à temps continu et sur la recherche d'indépendance du schéma de calcul de la dérivée. L'utilisation du filtre à variable d'état a été introduite, ainsi que des techniques d'optimisation basées sur les moindres carrés et la variable instrumentale (Cois et al. [2001]; Narang et al. [2011]; S.Victor et al. [2013]).

La plupart des méthodes d'identification par modèle non entier sont réalisées hors-ligne. Cela signifie que le modèle est estimé avec la totalité des données d'entrées-sorties une fois que l'expérience est finie. Dans certains scénarios, la possibilité d'estimer en-ligne les paramètres est souhaitée, voire nécessaire. Cela se produit en chirurgie cardiaque à cœur ouvert, car le modèle thermique pulmonaire peut être utile afin de minimiser les risques de nécrose des cellules pulmonaires. La méthode la plus connue pour l'identification en ligne est celle des

moindres carrés récurrents (Young [2011]). Des méthodes récursives à erreur de prédiction sont aussi disponibles dans la littérature (Ljung [1981a, 1998]). Padilla [2017] fournit dans sa thèse les versions récursives pour les moindres carrés avec filtres à variables d'état (LSSVF pour *Least Square with State Variable Filter* en anglais) et la variable instrumentale continue raffinée (RIVC pour *Refined Instrumental Variable in Continuous-time* en anglais). La thèse de Padilla traite ces méthodes pour des fonctions de transfert à temps continu d'ordre entier. Djouambi et al. [2007] se basent sur la méthode de Le Lay et sur des concepts d'estimation en ligne pour proposer une méthode qui estime les coefficients d'une fonction de transfert non entière. Les modèles non entiers peuvent aussi impliquer l'estimation de plusieurs ordres de dérivation non entiers. Pour le cas hors-ligne, cela a déjà été étudié en utilisant la méthode du gradient (Idiou et al. [2014]). Idiou propose une extension à la méthode d'identification en ligne de Djouambi afin d'identifier un ordre de dérivation de façon similaire à celle de S.Victor et al. [2013].

Ce chapitre propose l'étude des méthodes d'identification par modèle non entier continu en-ligne. Les méthodes présentées sont restreintes aux systèmes linéaires, invariants dans le temps, monovariabiles (mono-entrée, mono-sortie), causaux et initialement au repos. De plus, tout au long de la thèse, l'excitation est supposée suffisamment persistante et l'échantillonnage des signaux d'entrée et de sortie est uniforme. Il est possible d'étendre ces méthodes pour les systèmes à entrées multiples (MISO pour *Multiple-Input Single-Output* en anglais), ainsi que pour des systèmes multivariabiles (MIMO pour *Multiple-Input Multiple-Output* en anglais). Dans une première instance, l'estimation en ligne des coefficients d'une fonction de transfert non entière sera abordée. Ensuite, pour un cas précis, l'inclusion de l'estimation d'un ordre de dérivation sera incluse. Finalement, des difficultés d'implémentation en temps-réel seront abordés et une solution sera proposée.

4.2 Formulation du problème

Supposons qu'une entrée $u(t)$ et sa sortie libre de bruit $y(t)$ sont liées par le modèle compact suivant :

$$G(p, \theta) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j p^{\alpha_j}} \quad (4.1)$$

où $A(p)$ et $B(p)$ sont supposés premiers entre eux et le système est supposé stable. Les données sont collectées aux instants $T_s, 2T_s, \dots$, en allant de $t = 0$ jusqu'à l'instant présent $t = kT_s$. On suppose aussi que les données de sortie sont entachées d'un bruit blanc additif gaussien $\xi(t)$ de moyenne nulle et de variance σ^2 . Ce bruit représente les imperfections du capteur ainsi que des erreurs durant l'expérience pour un scénario réaliste. L'équation complète peut

s'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} y(t) = G(p, \theta)u(t) \\ y^*(t) = y(t) + \xi(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Lorsqu'on utilise le modèle (4.1), le vecteur de paramètres θ est défini par :

$$\theta = [\rho \quad \mu]^T \quad (4.3)$$

où ρ est le vecteur des $N + M + 1$ coefficients :

$$\rho = [b_0, b_1, \dots, b_M, a_1, a_2, \dots, a_N]^T \quad (4.4)$$

et μ est le vecteur des $N + M + 1$ ordres de dérivation :

$$\mu = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_M, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T. \quad (4.5)$$

Le nombre total de paramètres à estimer est alors $2 \times (N + M + 1)$. Si N ou M sont trop élevés, la complexité peut être trop élevée et les algorithmes d'optimisation non-linéaire peuvent échouer dans la convergence vers un minimum.

Afin de réduire le nombre de paramètres, un modèle commensurable (1.38) peut être choisi, où μ se réduit à un seul ordre de dérivation ν . Dans ce cas, le vecteur de paramètres θ se limite à $N + M + 2$ paramètres.

4.3 Estimation des coefficients

En premier lieu, l'identification récursive des modèles non entiers se fera exclusivement en calculant les coefficients. Les ordres de dérivation seront supposés connus et constants. En conséquence, le vecteur de paramètres à estimer $\hat{\theta}$ se réduit à :

$$\hat{\theta} = \hat{\rho} = [\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_M, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N]^T. \quad (4.6)$$

4.3.1 Moindres carrés récurrents avec filtre à variable d'état (RLSSVF)

La méthode d'identification en ligne la plus connue est celle des moindres carrés récurrents. Tout comme pour les moindres carrés classiques, cette méthode est fortement biaisée lorsqu'il y a du bruit de mesure. Les filtres à variables d'état sont introduits afin de réduire l'effet de ce bruit.

Tout d'abord, la sortie estimée s'exprime sous une forme linéaire selon :

$$\hat{y}(t) = \varphi^*(t)^T \hat{\theta}, \quad (4.7)$$

le vecteur de regression s'exprime par :

$$\varphi^*(t)^T = \begin{bmatrix} p^{\beta_0} u(t), \dots, p^{\beta_M} u(t), \\ -p^{\alpha_1} y^*(t), \dots, -p^{\alpha_N} y^*(t) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

On définit une fonction d'erreur adéquate :

$$\epsilon(t) = y^*(t) - \varphi^*(t)^T \hat{\theta}, \quad (4.9)$$

le vecteur de paramètres $\hat{\theta}$ minimise la fonction d'erreur quadratique :

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^k \epsilon(hT_s)^2, \quad (4.10)$$

ou bien, mis sous la forme d'un problème d'optimisation, on obtient :

$$\hat{\theta}(t) = \arg \min_{\theta} \sum_{h=1}^k \epsilon(h)^2. \quad (4.11)$$

Pour limiter l'effet du bruit (qui provoque du biais dans l'estimation des paramètres), un filtre à variable d'état est utilisé afin d'obtenir une entrée filtrée $u_f(t)$, ainsi qu'une sortie filtrée $y_f(t)$. Ce filtrage permet de réduire l'influence du bruit dans l'estimation et s'exprime selon un filtre passe-bas. Ce filtre doit être ajusté afin de mettre en avant une bande passante choisie par l'utilisateur. Un choix typique est le filtre passe-bas de Poisson :

$$F(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_f}\right)^{N_f}}. \quad (4.12)$$

Ce filtre doit être synthétisé en considérant la contrainte suivante (S.Victor et al. [2013]) :

$$N_f > \lceil \max(\beta_M, \alpha_N) \rceil, \quad (4.13)$$

où $\lceil \cdot \rceil$ est l'opérateur de partie entière supérieure. Il a déjà été démontré dans De Wit [1986] que la fréquence de coupure ω_f peut avoir une influence dans la convergence de l'algorithme. La période d'échantillonnage et la persistance du signal d'excitation peuvent, eux aussi, avoir une influence. Cette fréquence est normalement choisie afin d'être un peu plus élevée que la bande passante du système (Padilla [2017]). Cela implique qu'une estimation *a priori* de la bande passante du système est nécessaire afin d'obtenir de meilleurs résultats.

La fonction d'erreur $\epsilon(t)$ est maintenant filtrée par la fonction d'erreur filtrée $\epsilon_f(t)$:

$$\epsilon_f(t) = y_f^*(t) - \varphi_f^*(t)^T \hat{\theta} \quad (4.14)$$

où le vecteur de regression filtré $\varphi_f^*(t)$ est donné par :

$$\varphi_f^*(t)^T = \begin{bmatrix} p^{\beta_0} u_f(t), \dots, p^{\beta_M} u_f(t), \\ -p^{\alpha_1} y_f^*(t), \dots, -p^{\alpha_N} y_f^*(t) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

L'entrée filtrée $u_f(t)$, ainsi que la sortie $y_f(t)$ sont définies selon :

$$\begin{aligned} u_f(t) &= F(p)u(t) \\ y_f^*(t) &= F(p)y^*(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

En s'inspirant de la méthode classique des moindres carrés récurrents Ljung [1998], l'algorithme des moindres carrés récurrents avec filtre à variable d'état (RLSSVF) pour des systèmes non entiers est donné par :

$$\begin{cases} L(k) = \frac{F(k-1)\varphi_f^*(kT_s)}{\lambda(k) + \varphi_f^*(kT_s)^T F(k-1)\varphi_f^*(kT_s)} \\ F(k) = \frac{1}{\gamma(k)} \left[I - L(k)\varphi_f^*(kT_s)^T \right] F(k-1) \\ \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k) \left[y_f^*(kT_s) - \varphi_f^*(kT_s)^T \hat{\theta}(k-1) \right] \end{cases} \quad (4.17)$$

où γ est un facteur d'oubli qui peut donner plus ou moins de poids au passé récent des signaux et F est la matrice de covariance.

Remarque : le facteur d'oubli γ peut aussi être une fonction du temps et être adaptatif pendant que l'identification est en cours (X.Sun et al. [2019]). Dans cette étude, il sera pris comme constant et égal à l'unité car le facteur d'oubli est naturellement présent dans la définition de la dérivation non entière (1.28) au moyen du binôme de Newton généralisé.

4.3.2 Méthode à erreur de prédiction récurrente (RPED)

En suivant la méthode classique à erreur de prédiction, une fonction d'erreur adaptée est donnée par l'erreur de sortie :

$$\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t), \quad (4.18)$$

où la sortie estimée $\hat{y}(t)$ est calculée de la façon suivante :

$$\hat{y}(t) = G(p, \hat{\theta})u(t). \quad (4.19)$$

La fonction d'erreur quadratique définie dans (4.10) est minimisée. En prenant le gradient du critère :

$$\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = \sum_{h=1}^k \psi_p(hT_s) \epsilon(hT_s) \quad (4.20)$$

avec

$$\psi_p(hT_s) = -\frac{\partial \epsilon(hT_s)}{\partial \theta}, \quad (4.21)$$

la sensibilité à l'erreur est calculée selon :

$$\frac{\partial \epsilon(hT_s)}{\partial \hat{\theta}} = - \left[\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_0}, \dots, \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_M}, \frac{\partial \hat{y}}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \hat{y}}{\partial a_N} \right]^T \quad (4.22)$$

où

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_i} = \frac{p^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j p^{\alpha_j}} u(hT_s) \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial a_\ell} = - \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^{\beta_i + \alpha_\ell}}{\left(1 + \sum_{j=1}^N a_j p^{\alpha_j}\right)^2} u(hT_s) \quad (4.24)$$

pour $i = 0, \dots, M$ et $\ell = 1, \dots, N$.

En s'inspirant de la méthode des moindres carrés récurrents (voir Ljung [1998]), l'algorithme de la méthode à erreur de prédiction récursif (RPEM) est obtenu pour des systèmes non entiers selon :

$$\begin{cases} \epsilon(kT_s) = y^*(kT_s) - \hat{y}(kT_s) \\ R(k) = R(k-1) + \gamma_\rho \left[\psi_\rho(kT_s) \psi_\rho^T(kT_s) - R(k-1) \right] \\ \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma_\rho R^{-1}(k) \psi_\rho(kT_s) \epsilon(kT_s) \end{cases} \quad (4.25)$$

où γ_ρ est un gain raffiné analogue au pas pour une descente de gradient. Ce facteur d'oubli γ_ρ peut en fait être adapté durant l'identification ou bien être une fonction du temps. Néanmoins, la détermination d'un gain γ_ρ adéquat peut être très complexe, telle qu'établi dans Ljung [1981b]. Pour les travaux ici présentés, il sera pris comme une constante.

4.3.3 Contribution avec la méthode à erreur de prédiction récursive à mémoire longue (LMRPEM)

Les systèmes non entiers possèdent de façon naturelle un comportement de mémoire longue. Cela s'explique par la nature non-locale de l'opérateur non entier qui utilise en permanence la totalité du passé d'un signal afin de calculer sa dérivée non entière. Cette propriété de l'opérateur mène à la proposition de l'utilisation d'une fonction d'erreur étendue (dite "erreur à mémoire longue") pour mieux capter la propriété de mémoire longue de ces systèmes :

$$\tilde{\epsilon}(k) = [\epsilon(0), \epsilon(T_s), \epsilon(2T_s), \dots, \epsilon(kT_s)]^T. \quad (4.26)$$

Le signal d'erreur $\tilde{\epsilon}$ contient les erreurs à tous les instants allant de $t = 0$ jusqu'à $t = kT_s$. Ce signal d'erreur sera augmenté d'une valeur à chaque itération. En conséquence, le gradient

résultant $\tilde{\psi}_\rho(kT_s)$ est maintenant une matrice :

$$\tilde{\psi}_\rho(kT_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial b_0} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial b_0} & \frac{\partial \epsilon(2T_s)}{\partial b_0} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial b_0} \\ \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial b_1} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial b_1} & \frac{\partial \epsilon(2T_s)}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial b_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial a_N} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial a_N} & \frac{\partial \epsilon(2T_s)}{\partial a_N} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial a_N} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

où k indique l'itération présente.

En introduisant la sortie mesurée étendue $\tilde{Y}^*(kT_s)$ et la sortie estimée étendue $\tilde{Y}(kT_s)$:

$$\tilde{Y}^*(kT_s) = [y^*(0), y^*(T_s), y^*(2T_s), \dots, y^*(kT_s)]^T \quad (4.28)$$

$$\tilde{Y}(kT_s) = [\hat{y}(0), \hat{y}(T_s), \hat{y}(2T_s), \dots, \hat{y}(kT_s)]^T, \quad (4.29)$$

la méthode à erreur de prédiction récursive à mémoire longue (LMRPPEM) est proposée pour les systèmes non entiers :

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}(kT_s) = \tilde{Y}^*(kT_s) - \tilde{Y}(kT_s) \\ R(k) = R(k-1) + \gamma_\rho [\tilde{\psi}_\rho(kT_s)\tilde{\psi}_\rho^T(kT_s) - R(k-1)] \\ \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma_\rho R^{-1}(k)\tilde{\psi}_\rho(kT_s)\tilde{\epsilon}(kT_s). \end{cases} \quad (4.30)$$

4.3.4 Extension de la variable instrumentale simplifiée, raffinée et récursive à temps continu (RSRIVCF) pour les systèmes non entiers

L'algorithme de variable instrumentale simplifiée, raffinée et récursive à temps continu (SRIVC) est obtenue en partant de la variable instrumentale simplifiée et raffinée (SRIV) pour le cas hors-ligne et pour des modèles à temps discret. Une estimation du maximum de vraisemblance a évolué vers une forme pseudo-linéaire qui utilise des filtres optimaux (Young [2011]). La similitude algébrique et statistique permet l'usage de ces concepts dans le cadre particulier de cette étude.

En suivant la méthode à erreur de prédiction, la fonction d'erreur ϵ peut être définie par l'erreur de sortie :

$$\epsilon(t, \hat{\theta}) = y^*(t) - \frac{B(p, \hat{\theta})}{A(p, \hat{\theta})} u(t) \quad (4.31)$$

qui peut aussi se réécrire comme :

$$\epsilon(t, \hat{\theta}) = A(p, \hat{\theta}) \left(\frac{1}{A(p, \hat{\theta})} y^*(t) \right) - B(p, \hat{\theta}) \left(\frac{1}{A(p, \hat{\theta})} u(t) \right) \quad (4.32)$$

$$= A(p, \hat{\theta}) y_f^*(t) - B(p, \hat{\theta}) u_f(t) \quad (4.33)$$

où

$$\begin{aligned} u_f(t) &= \frac{1}{A(p, \hat{\theta})} u(t) \\ y_f^*(t) &= \frac{1}{A(p, \hat{\theta})} y^*(t). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ces derniers résultats montrent qu'un tel filtrage permet d'aller d'une forme à erreur de sortie (4.31) vers celle d'une équation d'erreur (4.33).

Le filtrage optimal qui mène aux estimés optimaux par variable instrumentale est donné par :

$$F^{opt}(p) = \frac{1}{A(p, \theta)}, \quad (4.35)$$

où θ est le vrai vecteur de paramètres. En pratique, $A(p, \theta)$ est inconnu, et son estimation est calculée de façon itérative :

$$F^{iter}(p) = \frac{1}{A(p, \hat{\theta})} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m_A} \hat{a}_j p^{\alpha_j}}. \quad (4.36)$$

Les paramètres estimés avec la sortie non-bruitée sont obtenus au moyen d'un modèle auxiliaire avec les coefficients estimés de façon itérative :

$$\hat{x}_{IV}^{iter}(t) = \frac{B(p, \hat{\theta})}{A(p, \hat{\theta})} u(t). \quad (4.37)$$

Un vecteur instrumental $\zeta(t, \hat{\theta})$ est défini par :

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} p^{\beta_0} u(t), \dots, p^{\beta_M} u(t), \\ -p^{\alpha_1} \hat{x}_{IV}^{iter}(t), \dots, -p^{\alpha_N} \hat{x}_{IV}^{iter}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (4.38)$$

L'instrument filtré $\zeta_f(t, \hat{\theta})$ est alors :

$$\zeta_f(t) = F^{iter}(p, \hat{\theta}) \begin{bmatrix} p^{\beta_0} u(t), \dots, p^{\beta_M} u(t), \\ -p^{\alpha_1} \hat{x}_{IV}^{iter}(t), \dots, -p^{\alpha_N} \hat{x}_{IV}^{iter}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (4.39)$$

Finalement, l'algorithme de la variable instrumentale simplifiée, raffinée et récursive à temps continu (RSRIVC) est donné pour les systèmes non entiers par :

$$\begin{cases} L(k) &= \frac{F(k-1)\zeta_f(kT_s)}{1 + \varphi_f^*(kT_s)^T F(k-1)\zeta_f(kT_s)} \\ F(k) &= [I - L(k)\varphi_f^*(kT_s)^T] F(k-1) \\ \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + L(k) [y_f^*(k) - \varphi_f^*(kT_s)^T \hat{\theta}(k-1)]. \end{cases} \quad (4.40)$$

4.4 Simulations et résultats pour l'estimation des coefficients

4.4.1 Description du vrai système

Considérons le vrai modèle de système suivant :

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2\zeta \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^{2\nu}}. \quad (4.41)$$

La structure générale de ce système représente un système non entier de seconde espèce (Malti et al. [2008]). Les valeurs des vrais paramètres sont données par $K = 1$, $\zeta = -0.5$, $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$ et $\nu = 0.5$.

La forme générale du modèle (4.41) est donnée par :

$$G(p) = \frac{b_0}{a_2 p^{2\nu} + a_1 p^\nu + 1}, \quad (4.42)$$

avec les vraies valeurs $b_0 = K = 1$, $a_2 = \frac{1}{\omega_0^{2\nu}} = 2$ et $a_1 = \frac{2\zeta}{\omega_0^\nu} = -1.414$. L'entrée est un signal binaire pseudo-aléatoire qui oscille entre -5 et 5 et contient 1000 points avec une période d'échantillonnage de $T_s = 0.01 \text{ s}$.

Par rapport à la description du système (4.2), la sortie $y(t)$ est entachée par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle $\xi(t)$ avec un rapport signal sur bruit (RSB) défini par :

$$RSB = 10 \log \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|\xi(t)\|_2^2}. \quad (4.43)$$

Toutes les simulations sont initialisées avec $\rho_0^T = [1, 0.5, 2.5]$. Pour la méthode des moindres carrés, $F_0 = \frac{1}{5}I$ avec I étant la matrice identité. Pour les autres méthodes, $R_0 = I$.

Le diagramme de Bode du vrai système ainsi que les données d'entrée-sortie pour la simulation sont illustrées aux figures 4.1 et 4.2.

Toutes les simulations ont été réalisées en utilisant la toolbox CRONE développée sous Matlab®. Cette toolbox est dédiée au calcul fractionnaire, à la simulation des systèmes à dérivées non entières et à l'identification par modèle non entier¹.

4.4.2 Résultats de l'estimation des coefficients

Pour cette sous-section, l'ordre commensurable du système est supposé connu et égal à sa vraie valeur $\nu = 0.5$.

En partant de la figure 4.1, nous constatons que le vrai système est résonant dans la bande passante $[1 - 10] \text{ rad/s}$. En conséquence, le filtre de Poisson (4.12) aura une fréquence de coupure $\omega_f = 10 \text{ rad/s}$ ainsi que $\max(\beta_M, \alpha_N) = 1$, donc $N_f = 2$.

1. La nouvelle version de la toolbox CRONE, parue en 2022, est une version orientée objet avec plusieurs classes définies pour des modèles non entiers (LTI, forme explicite, forme implicite, ZPK, représentation d'espace d'état, etc.). Cette toolbox CRONE est disponible gratuitement sur le lien <http://archive.ims-bordeaux.fr/CRONE/toolbox/>

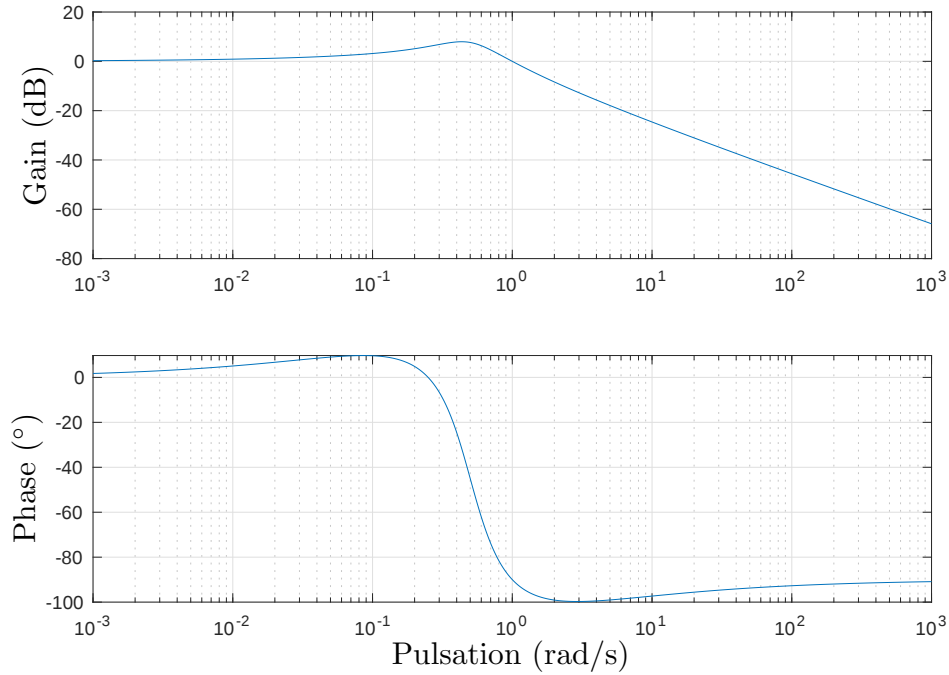


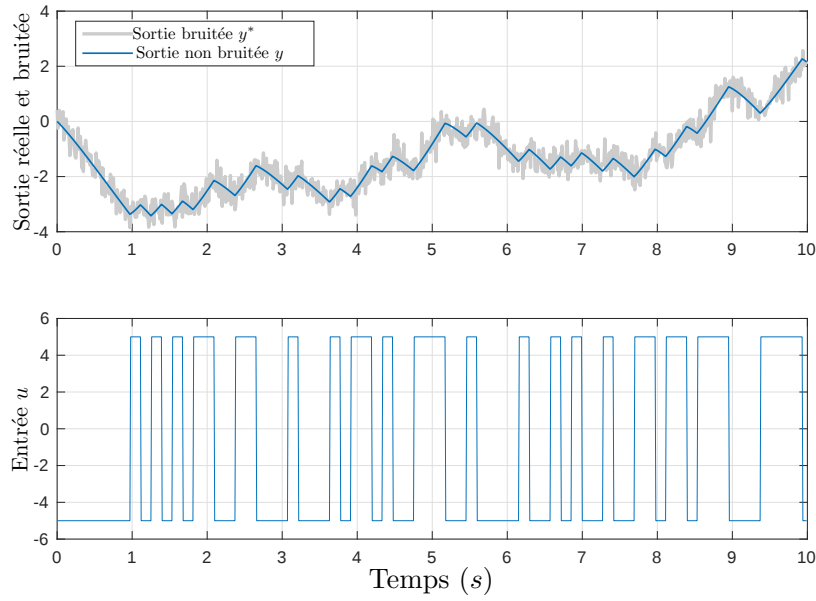
FIGURE 4.1 – Diagramme de Bode du vrai système (4.41)

On remarque que, dans un scénario réaliste, cette information peut être indisponible. Dans ces cas-là, une estimation empirique de la bande passante du système sera nécessaire afin d'ajuster les paramètres du filtre.

Le tableau 4.1 résume le résultat de 100 essais. Pour chaque essai, les valeurs des paramètres après convergence ont été relevées.

Comme prévu, la méthode des moindres carrés (*RLSSVF*) est la plus sensible au bruit. Le niveau de variance des estimés, pour cette méthode, est assez important et le biais est présent dès le niveau de bruit le plus bas. On observe que cet algorithme n'est pas efficace car il n'arrive pas à fournir des résultats suffisamment précis pour l'estimation des paramètres. Une façon d'améliorer cette pauvre performance serait de diminuer la fréquence de coupure ω_f afin de la rapprocher de la bande passante du vrai système. Néanmoins, il est important de remarquer qu'une stratégie de ce type pourrait dégrader l'estimation dans un cas réaliste car, très souvent, nous n'avons pas d'estimation précise de la bande passante du système.

La méthode à erreur de prédiction *RPEM* (γ_p est fixé à 0.01) est plus consistante que celle des moindres carrés. Tout d'abord, nous pouvons constater une moindre présence de biais pour cette méthode. Malheureusement, on peut également constater un biais qui augmente lorsque le niveau de bruit croît. Les vraies valeurs des paramètres restent à l'intérieur des bornes imposées par l'écart-type. D'autre part, il est possible d'observer de façon approximative un facteur de 3 entre les écarts-types pour les $RSB = 20\text{dB}$ et 10dB . De la même manière qu'avec la méthode des moindres carrés, les écarts-types sont parmi les plus significatifs.


 FIGURE 4.2 – Données d’entrées-sorties utilisées pour l’identification récursive avec $RSB = 15dB$

La méthode à erreur de prédiction à mémoire longue *LMRPEM* (γ_ρ est ajusté à 0.01) fournit l’estimation la plus consistante. Le biais est négligeable et les variances d’estimation sont les plus basses pour n’importe quel niveau de bruit. Avec cette méthode, les écarts-types sont nettement plus bas.

Finalement, la méthode de la variable instrumentale simplifiée, raffinée et récursive (*RS-RIVCF*) se trouve dans une position intermédiaire entre la méthode *RPEM* et celle de la *LMRPEM*. Comme cela a été observé, cette méthode fournit des écarts-types similaires à ceux obtenues avec la méthode à mémoire longue. Même si les écarts-types sont légèrement plus élevés par rapport à la méthode à mémoire longue, ceux-ci restent nettement plus bas par rapport aux méthodes *RPEM* et *RLSSVF*. Les vraies valeurs des paramètres sont encore à l’intérieur des limites des écarts-types, mais l’estimation du paramètre a_1 est très proche de sa borne inférieure lorsqu’on le compare avec la méthode *LMRPEM*. L’avantage principal de cette méthode est l’absence du paramètre γ_ρ , qui n’est pas simple à déterminer.

4.4.3 Influence de l’ordre commensurable

En pratique, les ordres de dérivation ne sont pas toujours connus *a priori*. Un choix inadéquat de l’ordre commensurable peut avoir une influence importante sur le critère d’erreur et donc dans l’estimation des coefficients.

Afin d’évaluer l’influence de l’ordre commensurable, une fonction de coût est définie comme la norme ℓ_2 de l’erreur de sortie normalisée :

$$J(\hat{\theta}) = 10 \log \frac{\|\tilde{\epsilon}(NT_s, \hat{\theta})\|^2}{\|\hat{\tilde{Y}}(NT_s, \hat{\theta})\|^2} \quad (4.44)$$

		b_0		a_2		a_1	
	Vrai	1.000		2.000		-1.414	
Méthode	RSB	$\hat{b}_0$	$\hat{\sigma}_{b_0}$	$\hat{a}_2$	$\hat{\sigma}_{a_2}$	$\hat{a}_1$	$\hat{\sigma}_{a_1}$
RLSSVF	20	0.866	0.014	1.740	0.017	-1.317	0.016
	15	0.644	0.026	1.357	0.030	-1.110	0.059
	10	0.295	0.035	0.819	0.042	-0.764	0.138
RPEM	20	1.001	0.010	1.999	0.034	-1.414	0.031
	15	0.999	0.020	1.985	0.051	-1.403	0.050
	10	1.000	0.035	1.954	0.098	-1.374	0.102
LMRPEM	20	0.999	0.004	1.999	0.006	-1.415	0.006
	15	0.999	0.009	2.001	0.011	-1.416	0.012
	10	0.998	0.016	2.001	0.019	-1.417	0.022
RSRIVC	20	1.010	0.006	1.998	0.007	-1.392	0.008
	15	1.010	0.009	1.999	0.012	-1.393	0.013
	10	1.008	0.017	2.003	0.025	-1.393	0.026

TABLEAU 4.1 – Simulations de Monte-Carlo (100 essais) pour l'estimation des coefficients avec différents niveaux de RSB . $\hat{\theta}$ indique la valeur moyenne du paramètre et $\hat{\sigma}_\theta$ l'écart-type

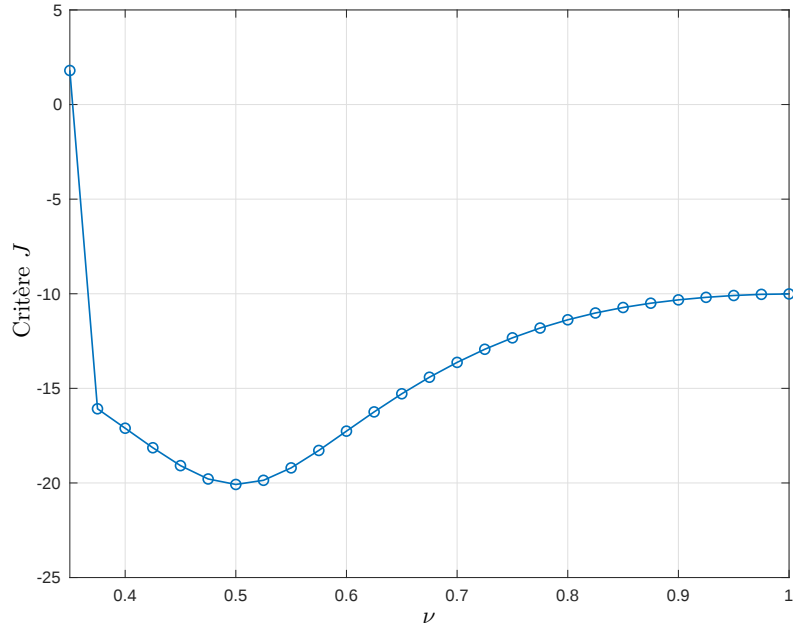
où l'on définit l'erreur à mémoire longue $\tilde{\epsilon}(NT_s, \hat{\theta})$ comme dans l'équation (4.26) :

$$\tilde{\epsilon}(NT_s, \hat{\theta}) = \tilde{Y}^*(NT_s) - \tilde{Y}(NT_s, \hat{\theta}) \quad (4.45)$$

la sortie mesurée étendue ainsi que la sortie estimée étendue étant données par les expressions (4.28) et (4.29).

La figure 4.3 montre le lien entre le critère J et l'ordre commensurable obtenu en utilisant la méthode d'erreur de prédiction à mémoire longue pour différentes valeurs de l'ordre commensurable. Dans cette simulation, le ratio bruit-signal $RSB = -20\text{ dB}$. Comme attendu, le minimum du critère est obtenu pour $\nu = 0.5$, ce qui est la vraie valeur de l'ordre commensurable. De plus, le minimum de la fonction de coût tend vers le RSB de -20 dB . Les autres valeurs de ν mène à des erreurs de modélisation non-négligeables. En plus, des ordres de dérivation erronés empêcheront la convergence des coefficients vers les vrais paramètres. Par exemple, à $\nu = 1$, la fonction de coût est autour de -10.01 dB , ce qui correspond à une erreur de modélisation autour de 10 dB .

Le résultat de cette simulation est une motivation pour l'estimation des ordres de dérivation non entiers.


 FIGURE 4.3 – Critère J pour des différents ordres commensurables ν ($SNR = 20 \text{ dB}$)

4.5 Estimation récursive des coefficients et des ordres de dérivation

4.5.1 Estimation des ordres de dérivation

La sous-section précédente met en évidence la nécessité de bien connaître les ordres de dérivation adéquats pour le modèle non entier à estimer. On se penche maintenant sur l'estimation du vecteur de paramètre général tel qu'il est décrit par l'équation (4.3).

On suppose maintenant que les ordres de dérivation sont aussi inconnus. Il est nécessaire de remarquer que, contrairement aux coefficients, les ordres de dérivation ne peuvent pas être exprimés sous une forme linéaire comme à l'équation (1.37) ou bien à l'expression (1.38). En conséquence, une fonction d'erreur doit être définie afin d'effectuer l'estimation paramétrique. Contrairement au cas entier, l'estimation récursive des ordres de dérivation fait changer l'ordre du modèle à chaque itération.

Pour cette thèse, l'estimation des ordres sera limitée aux systèmes commensurables comme ils sont définis à l'équation (1.38). En conséquence, un ordre unique de dérivation ν sera estimé.

Tout d'abord, supposons que les coefficients sont connus et que nous avons un modèle non entier $G(p, \nu)$ qui est ν -commensurable. Nous souhaitons dans ce cas estimer uniquement l'ordre ν . Pour ce scénario simplifié, le vecteur de paramètres devient :

$$\theta = \mu = \nu. \quad (4.46)$$

Y compris pour les modèles les plus simples, les ordres de dérivation sont non-linéaires

vis-à-vis des entrées et des sorties. Il est alors impossible d'établir une relation linéaire du critère vis-à-vis des ordres de dérivation. On choisit alors d'utiliser une méthode à erreur de prédiction.

En première instance, une fonction d'erreur de sortie adaptée est définie par :

$$\epsilon(t, \mu) = y^*(t) - \hat{y}(t, \mu). \quad (4.47)$$

Un terme de correction est ajouté à l'équation (4.47) afin de pouvoir estimer les ordres de dérivation de façon récursive :

$$\hat{\mu}(k) = \hat{\mu}(k-1) + \gamma_\mu R_\mu^{-1} \psi_\mu(kT_s) \epsilon(kT_s) \quad (4.48)$$

où

$$\psi_\mu(kT_s) = -\frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\mu}} = \left. \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\mu}} \right|_{t=kT_s}. \quad (4.49)$$

Les ordres de dérivation peuvent très lourdement impacter le comportement à mémoire longue des modèles non entiers (Mainardi [2014][Podlubny, 1999, Chap. 7]). Cela conduit à l'utilisation de l'erreur étendue telle qu'elle est utilisée pour la méthode *LMRPEM* :

$$\tilde{\epsilon}(kT_s) = [\epsilon(0), \epsilon(T_s), \dots, \epsilon(kT_s)]^T, \quad (4.50)$$

qui conduit la sensibilité à l'erreur en une matrice :

$$\tilde{\psi}_\mu(kT_s) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial \hat{\beta}_0} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial \hat{\beta}_0} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\beta}_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial \hat{\beta}_M} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial \hat{\beta}_M} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\beta}_M} \\ \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial \hat{\alpha}_1} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial \hat{\alpha}_1} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\alpha}_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon(0)}{\partial \hat{\alpha}_N} & \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial \hat{\alpha}_N} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\alpha}_N} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Pour l'estimation d'un ordre commensurable, le gradient s'exprime par :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\mu(kT_s) &= \tilde{\psi}_\nu(kT_s) \\ &= - \left[\frac{\partial \epsilon(0)}{\partial \hat{\nu}}, \frac{\partial \epsilon(T_s)}{\partial \hat{\nu}}, \dots, \frac{\partial \epsilon(kT_s)}{\partial \hat{\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

La fonction de sensibilité à l'erreur est définie par :

$$\frac{\partial \epsilon(hT_s)}{\partial \nu} = - \left. \frac{\partial \hat{y}}{\partial \nu} \right|_{t=hT_s}, \quad (4.53)$$

où la sensibilité de la sortie $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\nu}}$ s'exprime par :

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\nu}} = \ln(p) \frac{\sum_{i=0}^M i b_i p^{i\hat{\nu}} \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^N (i-j) b_i a_j p^{(i+j)\hat{\nu}}}{\left(1 + \sum_{j=1}^N a_j p^{j\hat{\nu}}\right)^2} u(t). \quad (4.54)$$

La présence du terme $\ln(p)$ est difficilement simulable dans le domaine temporel. En conséquence, le gradient sera calculé numériquement. La méthode *LMRPEM* est alors utilisée pour l'estimation des ordres de dérivation :

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}(kT_s) &= \tilde{Y}^*(kT_s) - \tilde{Y}(kT_s) \\ R(k) &= R(k-1) + \gamma_\nu [\tilde{\psi}_\nu(kT_s) \tilde{\psi}_\nu^T(kT_s) - R(k-1)] \\ \hat{\nu}(k) &= \hat{\nu}(k-1) + \gamma_\nu R^{-1}(k) \tilde{\psi}_\nu(kT_s) \tilde{\epsilon}(kT_s). \end{cases} \quad (4.55)$$

4.5.2 Estimation des ordres de dérivation et des coefficients : algorithmes hybrides

Considérons maintenant que les coefficients et les ordres de dérivation sont tous les deux inconnus. L'estimation des ordres de dérivation ainsi que des coefficients est effectuée en utilisant des algorithmes à deux étapes. Les algorithmes à deux étapes ont été utilisés avec succès dans différents contextes que l'on peut retrouver dans la littérature (voir *e.g.* Bai [1998]; Mukhopadhyay et al. [1991]; Rao et Unbehauen [2006]; Spinelli et al. [2006]; S.Victor et al. [2013]; Victor et al. [2022]). Malgré l'absence d'une preuve de convergence, ces références mettent en évidence que ces algorithmes convergent souvent vers un minimum.

Les deux algorithmes proposés possèdent la même étape d'estimation de l'ordre de dérivation. Par contre, pour l'estimation des coefficients, deux méthodes différentes sont appliquées : méthode *LMRPEM* et la variable instrumentale simplifiée raffinée et récursive à temps continu (*RSRIVCF*).

Les deux algorithmes semblent similaires, mais la rapidité de convergence des paramètres, à la fois des ordres de dérivation et des coefficients, n'est pas identique. De plus, les hyperparamètres à fixer ne sont pas les mêmes étant donné que le gain γ_X pour les coefficients est inexistant pour l'algorithme *LMRPEM-IV*. Comme il est établi dans Young [1981], la détermination du facteur d'oubli γ_X pour les méthodes à erreur de prédiction récursives n'est pas simple et elle influence grandement la convergence des paramètres. En conséquence, l'algorithme 2 (*LMRPEM-2*) nécessite l'ajustement de deux facteurs d'oubli (un pour les coefficients et un autre pour les ordres de dérivation), alors qu'un seul facteur est requis pour l'algorithme 3 (*LMRPEM-IV*).

On remarque une différence dans l'estimation de la sortie $\hat{y}(t)$ car dans l'algorithme *LMRPEM-IV*, la sortie estimée résulte des coefficients qui minimisent un critère à erreur d'équation, alors que pour l'algorithme *LMRPEM-2* la sortie estimée résulte des coefficients qui minimisent un critère à erreur de sortie.

Algorithm 2: Algorithme hybride LMRPEM-2

- **Initialisation**
 $k = 0$
Initialiser le vecteur de paramètres $\theta(0) = \begin{bmatrix} \rho(0) \\ \nu(0) \end{bmatrix}$
 - **Algorithme récursif**
pour $k = 1 : fin$
 - *Estimation des coefficients avec la méthode LMRPEM*
En supposant que l'ordre $\hat{\nu}(k-1)$ est connu,
calculez $\hat{\rho}(k)$ en partant de l'équation (4.30)
 - *Estimation de l'ordre de dérivation avec la méthode LMRPEM*
En supposant que le coefficient $\hat{\rho}(k)$ est connu,
calculez $\hat{\nu}(k)$ en partant de l'équation (4.55)
-

Algorithm 3: Algorithme hybride LMRPEM-IV

- **Initialisation**
 $k = 0$
Initialiser le vecteur de paramètres $\theta(0) = \begin{bmatrix} \rho(0) \\ \nu(0) \end{bmatrix}$
 - **Algorithme récursif**
pour $k = 1 : fin$
 - *Estimation des coefficients avec la méthode RSRIVCF*
En supposant que l'ordre $\hat{\nu}(k-1)$ est connu,
calculez $\hat{\rho}(k)$ en partant de l'équation (4.40)
 - *Estimation de l'ordre de dérivation avec la méthode LMRPEM*
En supposant que le coefficient $\hat{\rho}(k)$ est connu,
calculez $\hat{\nu}(k)$ en partant de l'équation (4.55)
-

4.5.3 Simulations et résultats pour l'estimation de tous les paramètres

Tout comme pour l'estimation des coefficients, on utilise le même vrai système décrit en sous-section 4.4.1.

L'entrée reste un signal binaire pseudo-aléatoire oscillant entre -5 et 5 et contenant 1000 points avec une période d'échantillonnage de $T_s = 0.01$ s.

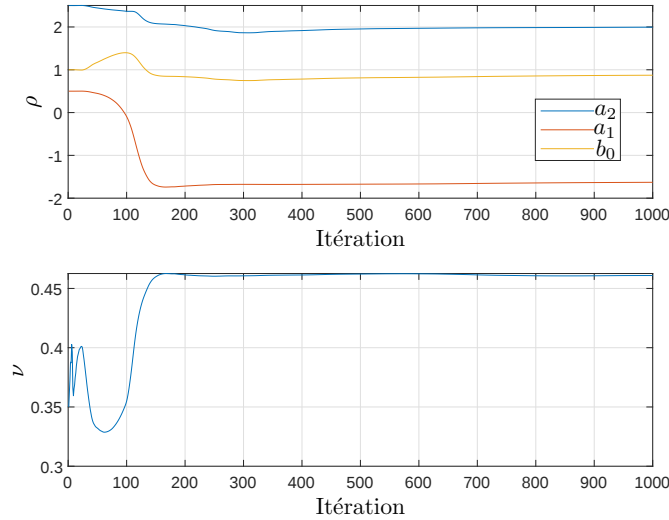
Toutes les simulations sont initialisées avec $\rho_0^T = [1, 0.5, 2.5]$ et $\nu_0 = 0.35$. Pour les coefficients, $R_0 = I$ et pour l'ordre commensurable $R_{\nu_0} = 0.1$.

4.5.3.1 Estimation de tous les paramètres : coefficients et ordres de dérivation avec les algorithmes hybrides

Pour ces sections, le réglage des paramètres γ_X a été effectué de manière empirique et les valeurs sont données au tableau 4.2.

Algorithme LMRPEM-2	$\gamma_\rho = 0.005$ et $\gamma_\nu = 0.05$
Algorithme LMRPEM-IV	$\gamma_\nu = 0.05$

TABLEAU 4.2 – Paramètres des algorithmes hybrides

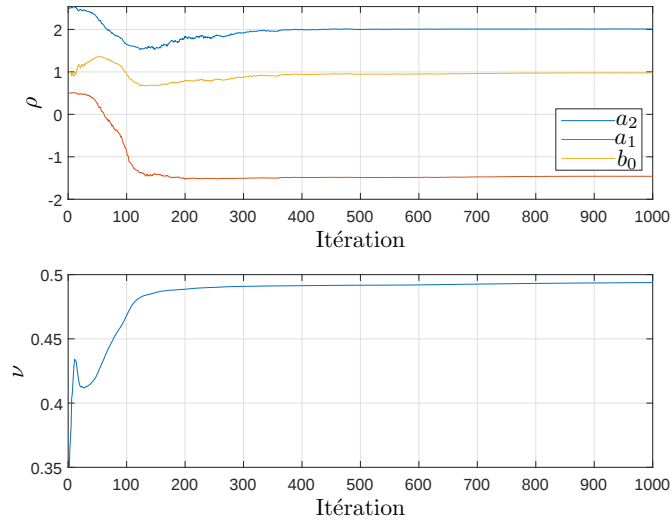

 FIGURE 4.4 – Estimation des paramètres avec l'algorithme hybride LMRPEM-2 ($RSB = 20\text{dB}$)

Un exemple d'évolution des paramètres pour un rapport signal sur bruit $RSB = 20\text{dB}$ est montré pour l'algorithme LMRPEM-2 à la figure 4.4 et pour l'algorithme LMRPEM-IV à la figure 4.5.

La rapidité de convergence est similaire pour les deux algorithmes. Des petites oscillations sont visibles dans l'estimation des paramètres pour les deux algorithmes hybrides durant la phase transitoire. Une amélioration est clairement perceptible une fois que l'ordre de dérivation converge. On remarque aussi que les deux algorithmes tendent vers la vraie valeur de l'ordre commensurable $\nu = 0.5$.

L'analyse par simulation de Monte-Carlo est fournie au tableau 4.3. Trois niveaux différents de bruit sont considérés. De plus, pour chaque niveau de bruit, 100 essais ont été réalisés.

Pour le scénario non-bruité ($RSB = \infty$), les deux algorithmes hybrides donnent des résultats similaires. Au fur et à mesure que le niveau de bruit augmente (RSB diminue), on constate que l'algorithme LMRPEM-2 présente des estimations plus consistantes. Les écarts-types, et donc les variances, sont minimaux et ne montrent pas de biais significatif. Il est important de remarquer que, si l'ordre commensurable est correctement estimé (sans biais), les coefficients le sont également. Avec l'algorithme LMRPEM-IV, les écarts-types sont plus importants qu'avec la méthode précédente. De plus, les valeurs moyennes des paramètres montrent un biais lorsque le niveau de bruit augmente. Par conséquent, l'algorithme LMRPEM-IV est plus sensible au bruit. On peut particulièrement constater que le biais dans


 FIGURE 4.5 – Estimation des paramètres avec l'algorithme hybride LMRPEM-IV ($RSB = 20\text{dB}$)

l'estimation de l'ordre commensurable est compensé par les coefficients de telle sorte que la sortie du modèle estimé reste assez proche de la sortie du vrai système.

		b_0		a_2		a_1		ν	
Vrai		1.000		2.000		-1.414		0.5	
Méthode	RSB	$\hat{b}_0$	$\hat{\sigma}_{b_0}$	$\hat{a}_2$	$\hat{\sigma}_{a_2}$	$\hat{a}_1$	$\hat{\sigma}_{a_1}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\sigma}_{\nu}$
Hybride	∞	0.991		2.001		-1.431		0.497	
LMRPEM-2	20	0.987	0.023	2.001	0.007	-1.437	0.042	0.496	0.007
	15	0.989	0.029	2.001	0.010	-1.434	0.052	0.496	0.009
Hybride	∞	0.992		2.013		-1.430		0.499	
LMRPEM-IV	20	0.956	0.045	2.015	0.008	-1.497	0.084	0.487	0.015
	15	0.934	0.085	2.012	0.015	-1.531	0.153	0.480	0.028

 TABLEAU 4.3 – Résultats des simulations de Monte-Carlo (100 essais) pour l'estimation de tous les paramètres avec différents niveaux de RSB . $\hat{\theta}$ indique la valeur moyenne du paramètre et $\hat{\sigma}_{\theta}$ les écarts-types.

4.5.3.2 Convergence des paramètres et problèmes d'implémentation

Comme cela est indiqué à la sous-section précédente, on observe un léger biais dans l'estimation du modèle pour les deux algorithmes hybrides. Cela peut être dû à une information insuffisante, car les opérateurs non entiers introduisent un comportement non-local à mémoire longue. Théoriquement parlant, les systèmes non entiers possèdent des constantes de temps infiniment lentes. Une estimation supplémentaire a été réalisée en utilisant 3000 données en entrée au lieu de 1000 pour un $RSB = 20\text{dB}$. L'évolution des paramètres avec l'algorithme hybride LMRPEM-IV est montrée à la figure 4.6 à titre uniquement illustratif.

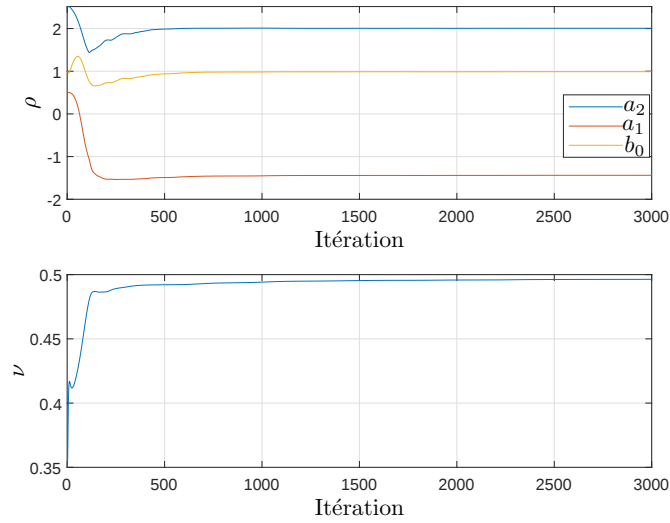


FIGURE 4.6 – Résultats avec l'algorithme *LMRPEM-IV* pour $RSB = 20\text{ dB}$ avec une suite de données d'entrée plus longue (3000 points)

Bien qu'au niveau graphique il soit difficile de constater une différence, l'ordre de dérivation continue à croître au-delà du point 1000 pour converger vers sa vraie valeur de $\nu = 0.5$. Pour l'exemple ici montré, $\hat{a}_2 = 2.007$, $\hat{a}_1 = -1.439$, $\hat{b}_0 = 0.989$ et $\hat{\nu} = 0.496$. Ces résultats sont plus proches du vrai modèle que ceux montrés au tableau 4.3. Cela montre l'impact de la longueur des données dans l'estimation des paramètres.

Même si cet exemple peut inciter à adopter l'usage de données plus longues, il s'avère nécessaire d'être prudent. Les algorithmes présentés dans cette étude sont récurrents et le but est de pouvoir les exploiter en temps-réel. Cela implique que le temps de calcul est critique pour ce type d'algorithme. L'approximation de la dérivée non entière de Grünwald-Letnikov est de plus en plus lente au fur et à mesure que les itérations avancent. Lorsque les données deviennent plus longues, la non-localité des opérateurs non entiers entraîne une augmentation significative du temps de calcul. Vers la fin des itérations, le temps de calcul d'une seule itération sera très long en raison d'un nombre de données trop important. Bien évidemment, le coût calculatoire risque d'être préjudiciable en temps-réel (le temps de calcul à une itération doit toujours être plus court que la période d'échantillonnage). Si on se permet de commettre quelques erreurs d'approximation, des solutions avec des opérateurs tronqués pourraient permettre de contourner ces soucis d'implémentation.

4.6 Problème de la mémoire longue d'un système non entier

Comme nous l'avons déjà précisé à la section 1.2, la définition de la dérivée non entière n'est pas unique (Garrappa et al. [2019]; Kilbas et al. [2006]; Samko [1993]). Néanmoins, toutes les définitions possèdent la même capacité à considérer les comportements à mémoire

longue. Le passé d'une fonction donnée $f(t)$ peut avoir une influence très importante sur sa dérivée non entière même après une longue période de temps. Les dynamiques d'ordre non entier peuvent être interprétées comme une distribution infinie de constantes de temps (Oustaloup [1995]). Malheureusement, cela implique alors l'existence de constantes de temps infiniment lentes. L'un des inconvénients majeurs concernant cette propriété est la non-localité de la dérivation non entière : une connaissance de la totalité du passé d'une fonction est nécessaire afin d'estimer sa dérivée non entière à un instant donné. Peu à peu, le passé du signal devient plus long, ce qui conduit à des temps de calcul de plus en plus longs si on conserve une définition globale de l'opérateur non entier (voir équation (1.28)). Le temps de calcul s'avère critique pour une estimation en temps-réel. L'étude qui suit porte ainsi sur une version tronquée de l'opérateur de dérivation non entière.

La dérivée non entière peut être tronquée d'une manière élégante et simple à travers le principe de mémoire courte de Podlubny ([Podlubny, 1999, Chap. 7]). Ce principe permet l'usage d'une partie du passé de la fonction tout en garantissant un niveau de précision dans l'estimation de la dérivée non entière. Malgré la garantie de précision que le principe de Podlubny apporte, la limite de troncature reste pessimiste et risque d'être insuffisante pour réduire de façon satisfaisante le temps de calcul dans un scénario à temps-réel. Les signaux d'excitation en identification de systèmes dynamiques sont persistants dans une certaine bande passante (Ljung [1998]). Par conséquent, le spectre de ce signal d'excitation pourrait influencer la longueur du passé du signal nécessaire ainsi que l'erreur induite par une troncature. On souhaite analyser à la fois l'influence du spectre du signal d'excitation ainsi que celle de l'ordre de dérivation sur l'erreur de troncature.

Mise à part la propriété de mémoire longue de la dérivation non entière, un autre problème peut surgir lorsqu'on étudie l'identification des systèmes non entiers en temps réel : l'estimation de la sortie à un instant donné. La non-localité du modèle et la présence de bruit dans les données mesurées mènent à l'utilisation d'un modèle auxiliaire pour l'estimation de la sortie. La sortie estimée tronquée peut conduire à un problème de conditions initiales. Les systèmes à dérivées non entières peuvent être représentés en utilisant la représentation d'état infini (Trigeassou et Maamri [2011]). Des méthodes formelles pour estimer la réponse d'un système à dérivées non entières avec la prise en compte des conditions initiales non nulles existent. Toutefois, ces solutions ont un coût calculatoire trop élevé pour pouvoir être exploitées en temps-réel. En conséquence, une analyse simplifiée basée sur la réponse transitoire est explorée pour un modèle non entier simple dans la suite de ce chapitre.

4.6.1 Principe de mémoire courte

Le principe de mémoire courte (*short memory principle* en anglais) se base sur la définition de Riemann et Liouville de la dérivée non entière (ref chap 1). Ce principe consiste à prendre uniquement le passé d'une fonction dans l'intervalle $[t - L, t]$ où L est la longueur de la mémoire donnée en unité temporelle.

Il est alors possible d'exprimer la dérivée non entière de Riemann-Liouville comme la

somme d'un terme à mémoire courte et d'un autre à mémoire longue :

$${}_0^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_0^{t-L} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_{t-L}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right]. \quad (4.56)$$

Si l'on applique le principe à mémoire courte, on obtient :

$${}_0^{RL}D^\alpha f(t) \approx \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t-L}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (4.57)$$

Pour un signal $f(t)$ avec une amplitude maximale donnée par M et un niveau d'erreur souhaité de ϵ , la largeur de mémoire nécessaire afin de garantir la précision voulue est donnée par l'expression suivante ([Podlubny, 1999, Chap. 7]) :

$$L \geq \left[\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.58)$$

Bien que cette expression puisse garantir la précision de l'approximation pour n'importe quelle fonction $f(t)$, elle ne prend pas en compte la forme de la fonction ni ses propriétés dans le domaine fréquentiel. En conséquence, cette limite inférieure pour la largeur de la mémoire peut être très significative.

4.6.2 Etude de la fonction cosinus

On sait que les fonctions périodiques peuvent s'exprimer comme une somme de signaux sinusoïdaux (sinus et cosinus) par le biais d'une décomposition en séries de Fourier. On considère le signal suivant :

$$f(t) = \cos(\omega t). \quad (4.59)$$

En nous servant de la définition de Riemann-Liouville, on exprime sa dérivée non entière à l'ordre α :

$${}_0^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_0^{t-L} \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^{-n+\alpha+1}} d\tau + \int_{t-L}^t \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^{-n+\alpha+1}} d\tau \right]. \quad (4.60)$$

Par rapport à Riemann et Liouville, il est possible de décomposer la dérivée non entière à un ordre $\alpha > 1$ comme la dérivée entière d'une intégrale non entière. Pour la suite de l'étude, l'analyse sera réalisée pour $0 \leq \alpha < 1$ et $n = 1$. Sous ces suppositions, la dérivée non entière devient :

$${}_0^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{t-L} \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + \int_{t-L}^t \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right]. \quad (4.61)$$

En appliquant le principe de mémoire courte :

$${}_{t-L}^{RL}D^\alpha f(t) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{t-L}^t \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (4.62)$$

Si on définit le signal d'erreur $\epsilon(t)$ comme étant la différence entre la dérivée non entière exacte et sa version approchée, on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= {}_0^{RL}D^\alpha f(t) - {}_{t-L}^{RL}D^\alpha f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^{t-L} \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \end{aligned} \quad (4.63)$$

On peut constater que la variable temporelle est incluse dans les limites de l'intégrale. En conséquence, afin d'appliquer la dérivée, on se sert de la définition suivante :

Pour

$$F(t) = \int_{a(t)=0}^{b(t)=t-L} f(t, \tau) d\tau \quad (4.64)$$

la dérivée temporelle est donnée par :

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t, t-L) + \int_0^{t-L} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau. \quad (4.65)$$

Le signal d'erreur devient :

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[L^{-\alpha} \cos(\omega(t-L)) - \alpha \int_0^{t-L} \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \right]. \quad (4.66)$$

L'amplitude maximale d'un signal de type cosinus est de 1, ce qui permet de donner une approximation de l'erreur :

$$\epsilon(t) \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[L^{-\alpha} - \alpha \int_0^{t-L} \frac{\cos(\omega\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \right]. \quad (4.67)$$

Cette expression suggère que le signal d'erreur peut aussi être conditionné par la fréquence du signal. Néanmoins, il n'existe pas d'expression analytique pour le terme intégral. En conséquence, des simulations numériques ont été réalisées afin d'estimer l'erreur liée à cette troncature.

4.6.3 Simulations et résultats

Pour cette sous-section, la définition de la dérivée de Grünwald-Letnikov (1.28) sera utilisée, compte tenu de son efficacité pour la simulation numérique. La définition tronquée pour une mémoire de longueur L est donnée par :

$${}_L p^\alpha f(t) \approx \frac{1}{T_s^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{L}{T_s} \rfloor} (-1)^j c_j f(t - jT_s). \quad (4.68)$$

L'erreur maximale est alors définie de la façon suivante :

$$\epsilon_{max} = \max |p^\alpha f(t) - {}_L p^\alpha f(t)|. \quad (4.69)$$

Pour les simulations, la fonction traitée sera un simple cosinus défini en (4.59). La période d'échantillonnage est fixée à $T_s = 0.01s$ pour la totalité de la sous-section.

La figure 4.7 montre l'erreur maximale pour des fréquences qui varient dans la plage de fréquences $[1 - 100] \text{ rad/s}$. L'erreur maximale a aussi été présentée pour différentes longueurs de mémoire en gardant l'ordre de dérivation $\alpha = 0.5$ constant. Une longueur de mémoire L plus grande mène de manière naturelle à des erreurs plus petites. Néanmoins, la fréquence du signal joue aussi un rôle important sur le maximum de cette erreur. Lorsque la fréquence augmente, une réduction importante de l'erreur pour toutes les longueurs de mémoire testées est observable. On pourrait considérer qu'une fréquence plus élevée implique un plus grand nombre de périodes de la fonction cosinus disponible pour l'estimation de la dérivée non entière. En conséquence, une réduction de l'erreur par rapport à la fréquence peut être considérée comme une conséquence naturelle de la connaissance accrue du passé de la fonction.

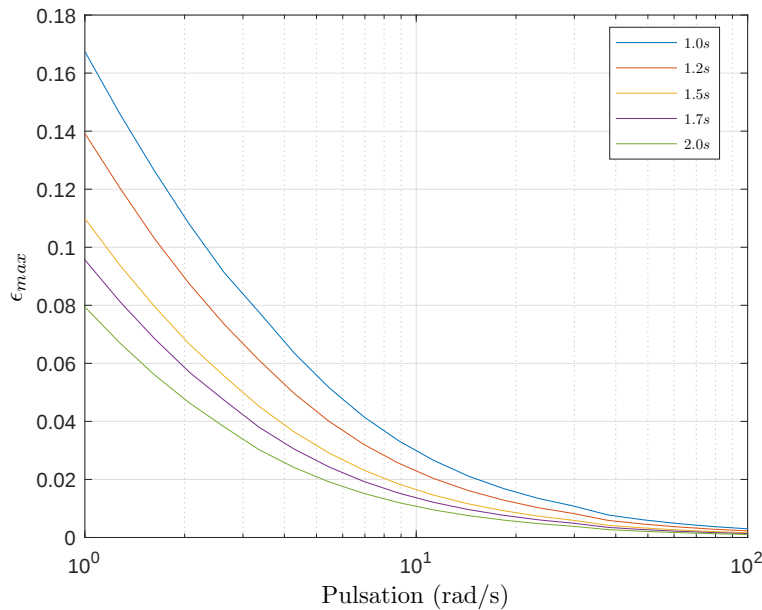


FIGURE 4.7 – Erreur maximale en fonction de la fréquence pour différentes longueurs de troncature

Ce premier résultat suggère que l'erreur reste relativement stable si le même nombre de périodes est choisi pour estimer sa dérivée non entière. Par conséquent, on choisit la longueur de troncature L définie par :

$$L = \frac{X}{\omega}. \quad (4.70)$$

où X est un facteur arbitraire et ω est la fréquence du signal. Ce choix de longueur mène à

une estimation basée sur un nombre fixe de périodes du signal au lieu d'une durée temporelle. Les résultats de ces simulations sont présentés à la figure 4.8.

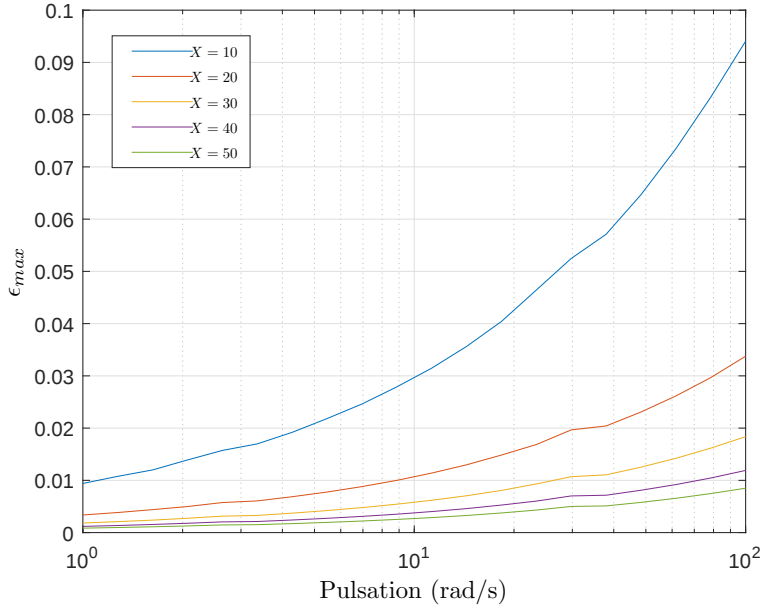
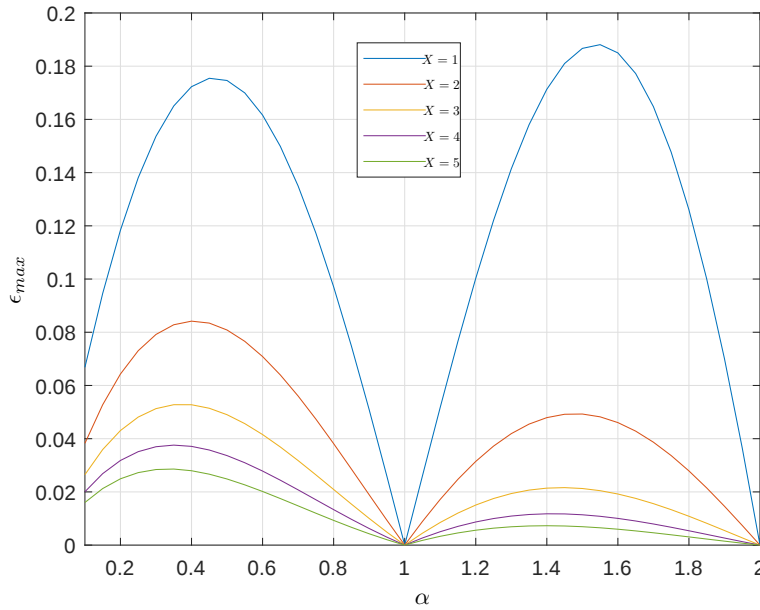


FIGURE 4.8 – Erreur maximale en fonction de la fréquence pour différents facteurs X

Même si un facteur X plus élevé permet de réduire l'erreur, l'erreur maximale n'est pas préservée en gardant un nombre constant de périodes. Comme l'indique la figure 4.8, lorsque la fréquence augmente, le fait de maintenir le même nombre de périodes pour l'estimation de la dérivée non entière provoque une augmentation considérable dans l'erreur. En revanche, il est possible d'observer qu'un nombre suffisamment important de périodes limite remarquablement l'effet de la fréquence. Dans la figure 4.8, c'est le cas pour $X = 50$.

De plus, on étudie aussi l'influence de l'ordre de dérivation α . En prenant $\omega = 1\text{rad/s}$ constant, l'erreur maximale est estimée pour des dérivées non entières tronquées avec des ordres de dérivation qui vont de 0.1 à 2.0 pour différents facteurs X . Les résultats sont présentées à la figure 4.9.

Comme prévu, les valeurs les plus élevées de X mènent à des erreurs plus petites. D'autre part, il est aussi possible d'observer que les erreurs sont minimales si on se rapproche des opérateurs entiers ($\alpha = 0, 1$ ou 2). En revanche, les erreurs maximales ne sont pas évidentes à déterminer. Des facteurs X plus petits mènent à des pics d'erreurs maximales pour des ordres α définis sur la plage $[0.4, 0.6]$. Lorsque la longueur de la troncature augmente, les courbes d'erreur se déforment et tendent à présenter des pics d'erreurs maximales pour des ordres α définis sur la plage $[0.2, 0.4]$.


 FIGURE 4.9 – Erreur maximale en fonction de l'ordre de dérivation α pour des facteurs X différents

4.6.4 Relaxation d'un système non entier

4.6.4.1 Estimation de la sortie pour l'identification de systèmes : problème des conditions initiales

Certains algorithmes d'identification de systèmes dynamiques nécessitent l'estimation de la sortie $\hat{y}$ du système étudié. Pour la méthode LMRPEM, on définit la sortie estimée par le produit de convolution suivant :

$$\hat{y}(t) = G(p)u(t). \quad (4.71)$$

Malgré le succès de cette technique pour la réduction du biais d'estimation et l'influence du bruit de mesure, l'obtention d'une estimation suffisamment rapide de la sortie pour un système non entier ne peut pas être garantie. Les simulations avec des modèles de fonctions de transfert impliquent normalement des conditions initiales nulles. Par conséquent, le calcul de la sortie estimée nécessite le produit de convolution de $t = 0$ jusqu'à l'instant présent pour chaque itération. En conséquence, l'algorithme récursif d'identification devient de plus en plus lent avec un risque d'être inexploitable en temps-réel à partir d'un jeu de données suffisamment grand. Ce problème implique le besoin d'obtenir une estimation de la sortie en utilisant une section tronquée de l'entrée du système.

Supposons une longueur de troncature L choisie afin d'estimer la sortie du système $\hat{y}$. Les calculs se basent sur l'hypothèse de conditions initiales nulles. Pour un instant donné t , la sortie est estimée en supposant qu'à l'instant $t - L$, la sortie du système est nulle, ce qui n'est pas forcément vrai. De plus, la nature non-locale des dérivées non entières implique une influence durable du passé du système.

Afin d'analyser un tel défi, une propriété simple mais puissante des opérateurs de dérivation peut être exploitée : la linéarité. La figure 4.10 montre un simple schéma bloc pour un système avec une fonction de transfert $G(p)$ et deux entrées qui s'additionnent u_1 et u_2 .

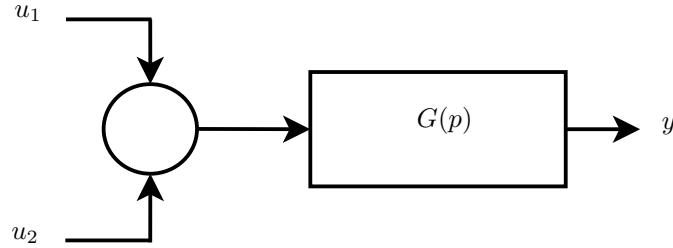


FIGURE 4.10 – Système non-entier avec deux entrées

Supposons que u_1 et u_2 correspondent respectivement au passé récent et distant d'une fonction globale d'entrée u , s'exprimant en fonction de l'instant présent t^* de la façon suivante :

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{for } 0 < t < t^* - L \\ u_2(t) & \text{for } t^* - L < t < t^*. \end{cases} \quad (4.72)$$

La sortie du système peut alors être divisée en une partie récente et une distante en nous servant de la propriété de linéarité :

$$y(t) = G(p)u_1(t) + G(p)u_2(t) = y_1(t) + y_2(t). \quad (4.73)$$

Si $y_1(t)$ devient négligeable à l'instant présent t^* , il sera alors possible d'avoir une bonne estimation de la sortie $y(t)$ par $y_2(t)$. Pour un système stable et avec suffisamment de longueur de mémoire L , on peut considérer que l'erreur induite par $y_1(t)$ sera négligeable bien que l'hypothèse de condition initiale nulle soit erronée. En conséquence, il est adéquat d'analyser le terme négligé afin de mieux définir le choix de la mémoire L .

4.6.4.2 Temps de réponse d'un système non entier et approximation de la fonction de Mittag-Leffler

Le temps de réponse peut être une référence utile afin d'analyser la réponse d'un système non entier. Pour les systèmes rationnels, il est prouvé que le temps de charge et celui de la relaxation sont liés.

Un système comme celui qui a été présenté à la sous-section précédente peut être considéré comme étant dans le régime stationnaire si sa réponse se trouve à l'intérieur d'une bande de tolérance δ autour de sa valeur en régime statique :

$$1 - E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = 1 - \delta. \quad (4.74)$$

Théoriquement, le temps de réponse t_s satisfait :

$$E_\alpha(-\lambda t_s^\alpha) = \delta. \quad (4.75)$$

Afin d'obtenir une solution approchée pour cette dernière équation, une approximation simple de la fonction de Mittag-Leffler s'avère nécessaire. Les approximations pour les temps courts et longs sont disponibles dans la littérature (Mainardi [2014]) pour le cas $\lambda = 1$. Nous proposons de prendre les célèbres approximations de Mainardi en généralisant la valeur du paramètre λ .

En développant la fonction de Mittag-Leffler à partir de sa définition, on obtient :

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = 1 + \frac{(\lambda t^\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \quad (4.76)$$

En rappelant le développement en séries de Taylor de la fonction exponentielle :

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (4.77)$$

et si on garde uniquement le premier terme des deux développements (4.76) et (4.77), la fonction de Mittag-Leffler peut être approchée par une exponentielle lorsque $t \rightarrow 0$:

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \approx e^{-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}}. \quad (4.78)$$

En conséquence, le temps de réponse peut être approché par :

$$t_s^{short} \approx -\frac{[\ln(\delta)\Gamma(1 + \alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda}. \quad (4.79)$$

Cette approximation est appelée approximation des temps courts et se limite au cas avec des temps de réponse relativement rapides. Néanmoins, le calcul fractionnaire est plutôt utilisé pour prendre en compte des processus lents comme dans la mécanique des fluides (telle que la relaxation de la digue poreuse (Oustaloup [1995])) ou dans des scénarios de bio-ingénierie. En conséquence, une approximation qui se base sur des temps infiniment longs est préférable. Mainardi fournit l'expression suivante :

$$E_\alpha(-z^\alpha) \approx \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (4.80)$$

En prenant $z = at$ et $a = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$, la fonction de Mittag-Leffler pour $t \rightarrow \infty$ donne :

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \approx \frac{t^{-\alpha}}{\lambda\Gamma(1 - \alpha)}, \quad (4.81)$$

ce qui conduit à l'approximation du temps de réponse suivant :

$$t_s^{long} \approx [\delta \lambda \Gamma(1 - \alpha)]^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.82)$$

4.6.4.3 Charge et relaxation d'un système non entier de première espèce

Supposons le système non entier de première espèce suivant :

$$G(p) = \frac{1}{p^{0.5} + 1}. \quad (4.83)$$

La figure 4.11 permet d'illustrer la façon dont les simulations ont été réalisées pour cette étude. En prenant des conditions initiales nulles, un créneau unitaire de largeur temporelle variable T est appliqué en entrée. La période d'échantillonnage est prise comme $T_s = 1s$ pour cette sous-section. Après le temps T , l'entrée est retirée et le système se relaxe. Le temps de relaxation est estimé avec un niveau de seuil $\delta = 5\%$.

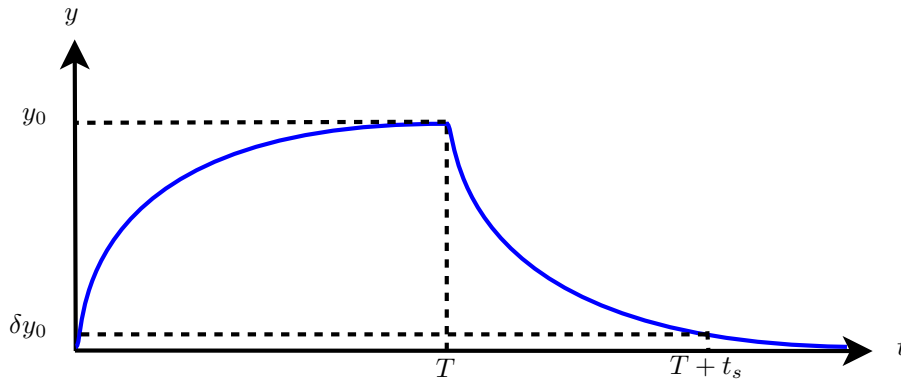


FIGURE 4.11 – Relaxation d'un système à dérivées non entières après l'application d'un créneau d'une durée T

La figure 4.12 montre la variation du temps de relaxation par rapport au temps de charge, ce qui illustre de façon claire le comportement non-local : le temps de relaxation est effectivement conditionné par le temps de charge.

Pour ce scénario simple, $\alpha = 0.5$ et $\lambda = 1$, on trouve les approximations des temps de relaxation suivantes telles qu'elle sont définies dans (Mainardi [2014]) :

— pour l'approximation de temps court :

$$t_s^{short} = -\frac{[\ln(0.05)\Gamma(1 + 0.5)]^{\frac{1}{0.5}}}{1} \approx 7.05 \text{ s} \quad (4.84)$$

— pour l'approximation de temps long :

$$t_s^{long} = [0.05 * 1 * \Gamma(1 - 0.5)]^{-\frac{1}{0.5}} \approx 127.32 \text{ s} \quad (4.85)$$

Effectivement, lorsque le système n'est pas correctement chargé (en raison d'un créneau

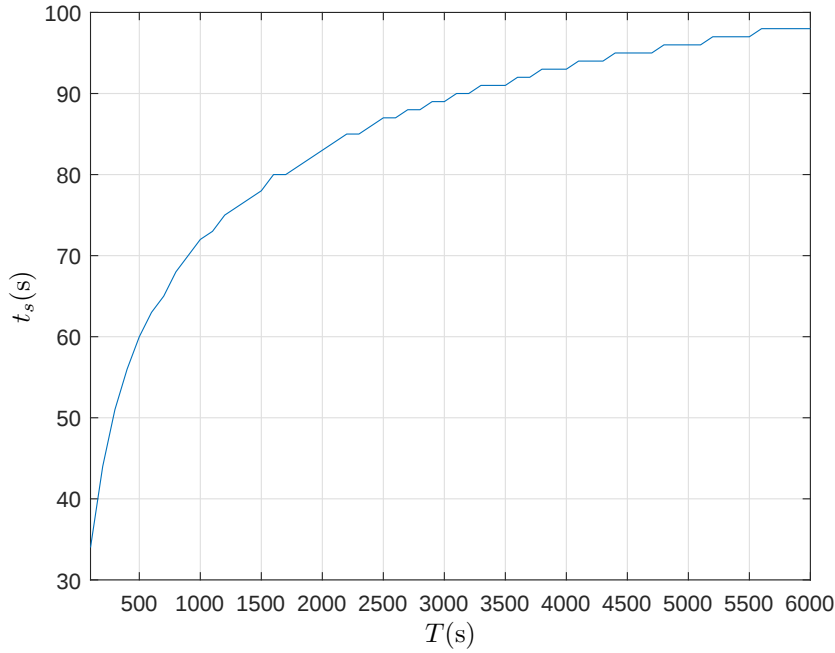


FIGURE 4.12 – Temps de relaxation du système non-entier en fonction du temps de charge

de charge trop court), le temps de relaxation t_s se rapprochera plus de l'approximation des temps courts t_s^{short} . D'autre part, lorsque la largeur du créneau augmente, on constate que le temps de relaxation t_s se rapproche progressivement de l'approximation des temps longs t_s^{long} . Le pire scénario possible serait alors d'avoir un système totalement chargé avec un créneau appliqué à partir de $t = -\infty$. Il est important de remarquer qu'un tel scénario ne serait pas réaliste car il impliquerait une injection d'énergie infinie au système. Cela nous permet alors de sélectionner l'approximation des temps longs comme une limite correcte pour la sélection de la mémoire. Il existe cependant un inconvénient : la nécessité d'avoir un minimum de connaissances préalables à l'identification du système. Cela se produit notamment pour l'ajustement des filtres à variables d'état lorsque la technique des moindres carrés récurrents filtrés est utilisée (Padilla [2017]).

4.6.5 Application à un cas d'identification de systèmes dynamiques

Pour cette section, l'algorithme LMRPEM sera utilisé afin d'estimer les paramètres d'un modèle simple dans le cadre d'un exemple académique d'identification de systèmes.

Soit le système d'ordre non entier suivant :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p^\alpha}, \quad (4.86)$$

avec les vraies valeurs $K = 1$, $\tau = 1$ et $\alpha = 0.5$. L'entrée est un signal binaire pseudo-aléatoire qui oscille entre -5 et 5 et qui contient 2000 points avec une période d'échantillonnage

$T_s = 1$ s. Toutes les simulations sont initialisées avec $\hat{K}_0 = 2$, $\hat{\tau}_0 = 4$ et l'ordre $\alpha = 0.5$ reste constant pour tous les essais. On fixe $\gamma_\rho = 0.01$ et on considère un rapport signal sur bruit de $RSB = 15$ dB. La figure 4.13 montre les données d'entrée-sortie pour les simulations.

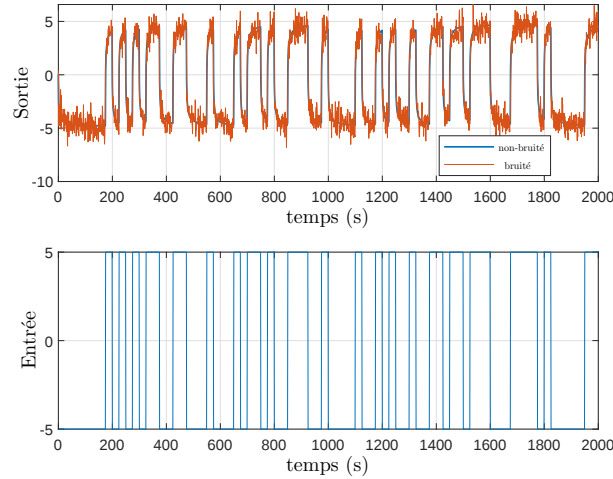


FIGURE 4.13 – Données entrée-sortie pour $RSB = 15$ dB

Remarque : le choix de la période d'échantillonnage à $T_s = 1$ s n'est pas en conflit avec la vraie valeur du modèle $\tau = 1$. Il est important de remarquer qu'ici, la période d'échantillonnage est choisie par rapport à une connaissance préalable du temps de relaxation du système qui est autour de la centaine de secondes et non uniquement par rapport à la valeur du paramètre τ .

Cas 1 : Sans troncature

En l'absence de troncature, l'estimation des paramètres est très précise. En revanche, le temps de calcul augmente de façon significative avec l'augmentation du nombre d'itérations, ce à quoi on s'attendait.

L'estimation des paramètres ainsi que l'évolution du temps de calcul sont présentées dans les figures 4.14 et 4.15, respectivement.

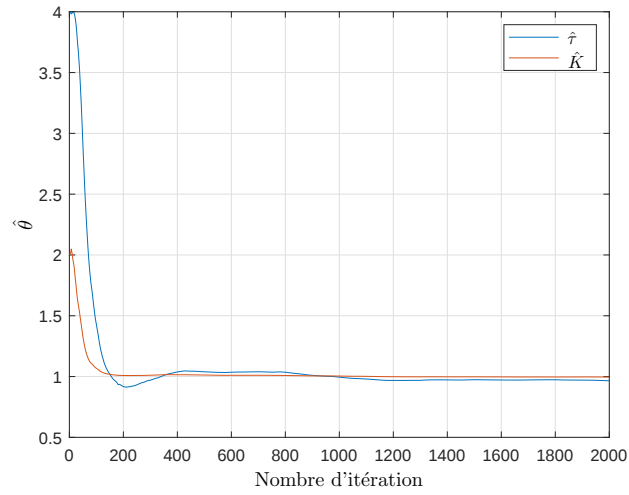


FIGURE 4.14 – Identification du système par LMRPEM sans troncature

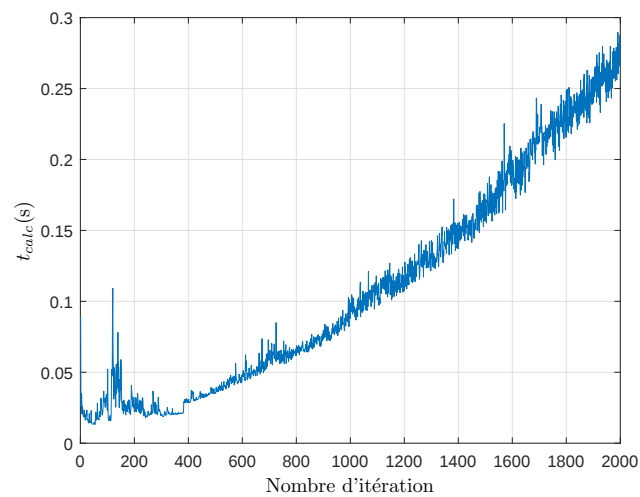


FIGURE 4.15 – Temps de calcul en fonction du nombre d'itération

Cas 2 : Troncature égale au temps de relaxation ($L = t_s$)

La largeur de la troncature est choisie avec $L = 128s$ basée sur l'approximation des temps longs. L'estimation des paramètres ainsi que le temps de calcul sont présentés dans les figures 4.16 et 4.17, respectivement. Pour ce cas, la troncature engendre des oscillations dans l'évolution des paramètres. Malgré ces oscillations, on peut observer que les paramètres restent correctement estimés. Le temps de calcul chute d'une façon très importante par rapport au cas précédent. Le temps de calcul moyen a une valeur de $t_{calc} = 14.7ms$ par itération. Elle est largement inférieure à la période d'échantillonnage, ce qui permet d'identifier ce système en temps-réel. Les fluctuations des paramètres peuvent être dues au choix de la mémoire courte L , car la méthode LMRPEM utilise un signal d'erreur étendu et l'erreur globale de relaxation n'est pas négligeable.

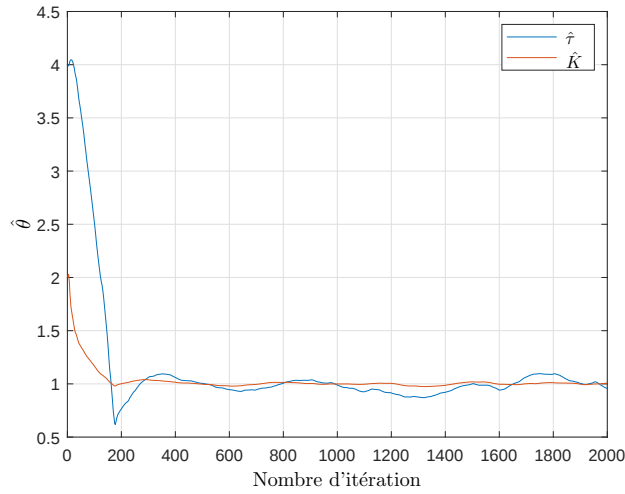


FIGURE 4.16 – Identification par LMRPEM (avec troncature $L = 128s$)

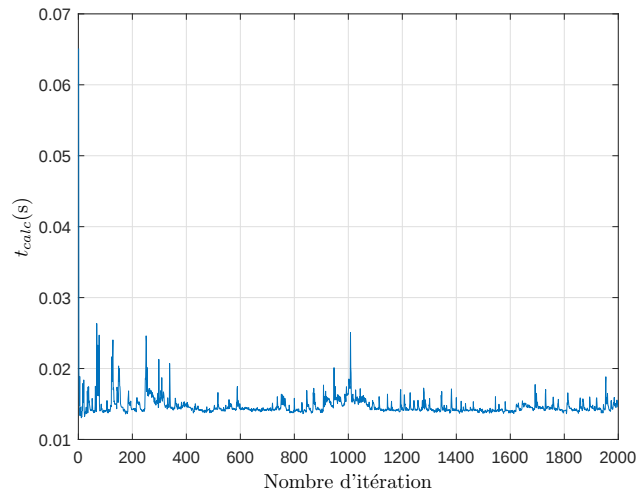


FIGURE 4.17 – Temps de calcul par rapport au nombre d'itération

Cas 3 : Troncature plus large que le temps de relaxation ($L \gg t_s$)

Afin de réduire les oscillations des estimations paramétriques observées pour le cas précédent, la longueur de troncature est choisie est la suivante $L = 256s$ (le double du temps de relaxation). L'estimation des paramètres ainsi que le temps de calcul sont présentés aux figures 4.18 et 4.19, respectivement. Dans ce cas, les oscillations sont très petites. Même si la performance n'est pas totalement identique à celle du cas non-tronqué, elle en reste assez proche. D'autre part, il est intéressant de constater que le temps de calcul n'augmente pas d'une façon significative par rapport au cas précédent. Le temps moyen de calcul est de $t_{calc} = 17.5ms$, ce qui reste encore très loin de la période d'échantillonnage. La courbe du temps de calcul montre une légère augmentation du temps de calcul durant les premiers instants, mais ce phénomène est rapidement limité par la longueur de troncature imposé.

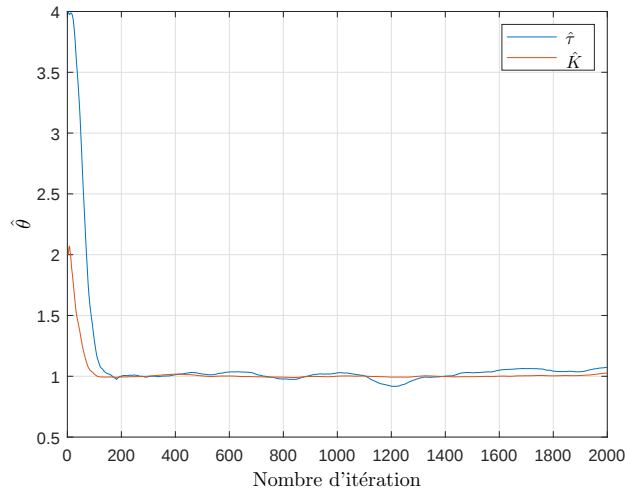


FIGURE 4.18 – Identification par LMRPEM (avec troncature $L = 256s$)

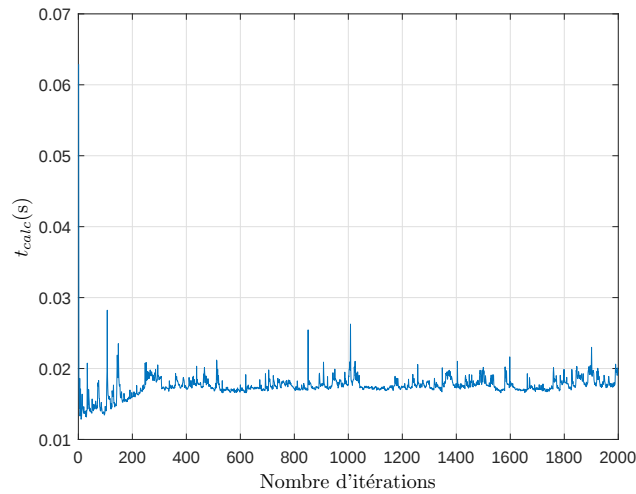


FIGURE 4.19 – Temps de calcul par rapport au nombre d'itérations

4.7 Conclusions

Ce chapitre aborde des méthodes d'identification récursive pour des modèles non entiers. L'étude est divisée en deux parties : l'estimation des coefficients et celle des ordres de dérivation. Les méthodes proposées se basent sur des méthodes récursives pour l'identification de modèles non entiers à temps continu.

Pour l'estimation des coefficients, quatre méthodes ont été comparées. Tout comme dans les systèmes rationnels, la méthode des moindres carrés récursifs est biaisée par le bruit de mesure et les variances des estimées sont très significatives. Ces dernières peuvent être limitées en utilisant un filtre à variable d'état, mais une estimation *a priori* de la bande passante est nécessaire. D'autre part, les méthodes RPEM et SRIVCF montrent des estimations plus consistantes. Les variances des estimées sont inférieures à celles obtenues avec les moindres carrés, mais elles restent toujours significatives. Finalement, la méthode LMRPEM permet, en se servant du concept d'erreur étendue, d'obtenir des estimations sans biais avec des variances minimales contrairement aux autres méthodes.

L'estimation des ordres de dérivation est basée sur la méthode LMRPEM, qui implique des calculs de gradient par rapport à l'ordre commensurable. Tout comme pour les coefficients, cette méthode introduit un facteur γ_X à déterminer. Deux méthodes hybrides (à deux étapes) ont été testées en changeant uniquement l'étape des coefficients : LMRPEM-2 et LMRPEM-IV. Les deux méthodes estiment correctement les coefficients et les ordres de dérivation et les résultats sont assez proches. La méthode LMRPEM-IV reste plus sensible au bruit.

Les méthodes testées dans ce chapitre impliquent le calcul à chaque itération d'un produit de convolution. Cela rend impossible une implémentation en temps-réel malgré la formulation récursive de ces méthodes. Une étude simple sur la troncature des opérateurs non entiers a aussi été réalisée. Elle met en évidence une dépendance de la longueur de troncature vis-à-vis de l'ordre de dérivation α et aussi du contenu fréquentiel du signal d'excitation. Finalement, une étude sur la relaxation d'un système non entier permet d'estimer (sous l'hypothèse d'un système stable) la longueur d'un fenêtrage à utiliser afin de permettre aux méthodes de ce chapitre d'être exploitées en temps-réel.

Chapitre 5

Simulations et analyse des modèles thermiques du poumon

5.1 Introduction

Le chapitre 3 s'articulait autour de la modélisation thermique des poumons avec des propositions d'approximations des impédances thermiques du formalisme du quadripôle thermique. De plus, le cas avec résistances et fractances pour les poumons ainsi que l'inclusion de l'effet du flux sanguin ont été pris en compte par le biais du bio-quadripôle. D'autre part, le chapitre 4 a permis de tester la capacité à estimer en temps-réel des paramètres pour un modèle non entier à ordre commensurable. La difficulté liée à la mémoire non entière et au temps de calcul ont aussi été explorées.

La fin du chapitre 3 présente d'une façon théorique des modèles globaux pour les poumons à travers le calcul de l'impédance équivalente. Le but de ce chapitre est de reprendre deux études précédentes : le quadripôle thermique classique et l'impédance thermique équivalente des poumons. A partir de ces modèles, les structures de modèles sont donc établies en utilisant des paramètres physiologiques de l'homme, pour définir le système générateur de données. Enfin, les algorithmes d'identification développés au chapitre 4 seront utilisés pour l'identification des paramètres réels des structures de modèles. Hormis les résultats quantitatifs, une analyse qualitative sera également effectuée. L'objectif est de lier ces simulations à de potentiels cas réalistes, d'analyser les limites des modèles présentés dans cette thèse et de pouvoir proposer des perspectives de recherche pour l'analyse des données expérimentales, que ce soit au niveau des modèles ou bien de l'implémentation des algorithmes d'identification.

5.2 Impédance thermique équivalente d'une bronche humaine

Pour rappel, le formalisme du quadripôle thermique et des impédances thermiques a été défini en section 3.3. La première partie de ce chapitre se consacre à l'analyse du quadripôle

classique pour un cas physiologique. Pour cette section, une bronche intermédiaire du côté droit des poumons sera analysée de façon isolée, de manière similaire à l'exemple académique du chapitre 3. Normalement, la cavité nasale et le larynx sont en mesure de conditionner l'air entrant au corps afin d'éviter du stress thermique au niveau des bronches. Cela se fait à travers le réchauffement et l'humidification de l'air avant son arrivée au système respiratoire inférieur (Dias et al. [2005]; Elad et al. [2008]). Des procédures chirurgicales peuvent empêcher le bon conditionnement d'air effectué normalement dans la partie supérieure.

L'analyse thermique de cette section se concentre sur une bronche de taille moyenne du côté droit des poumons. La longueur sera de $L = 0.0236 \text{ m}$ (Mi et al. [2015]) et le rayon de la section transversale $r = 0.001 \text{ m}$ (McFawn et Mitchell [1997]).

En ce qui concerne la fréquence, bien que la respiration humaine ne soit pas un phénomène rapide, sa dynamique pourrait être considérable pour les transferts thermiques. En conséquence des dimensions de la bronche de cet exemple et des caractéristiques de la respiration humaine (Cretikos et al. [2008]; Russo et al. [2017]), les approximations d'impédance seront réalisées pour une plage de $[0.01, 5] \text{ rad/s}$.

5.2.1 Approximation de Z_1

L'impédance Z_1 est approchée avec les mêmes propositions qu'au chapitre 3, paragraphe 3.3.3.1. En première instance, un critère PIC défini à l'équation (3.42) est calculé afin de déterminer un nombre optimal de cellules de pôles et zéros (voir figure 5.1). Bien qu'il soit difficilement appréciable, le nombre optimal de cellules pour ce cas est de 6 si le minima est pris d'une façon stricte (il n'y a pas d'amélioration au-delà de ce nombre de cellules). Néanmoins, un nombre de 3 est déjà assez proche du minima du critère PIC et il sera choisi pour cette section comme le nombre de cellules.

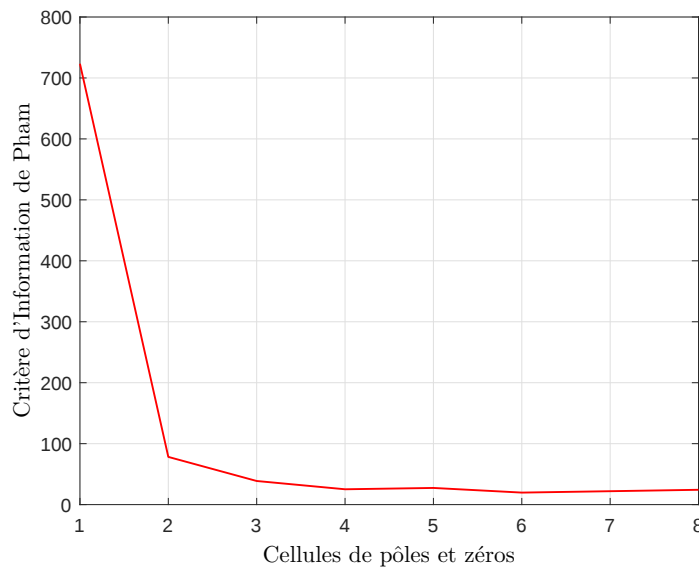


FIGURE 5.1 – Critère PIC en fonction du nombre de cellules N_{cells} pour l'exemple de la bronche

Les approximations asymptotique et de Butterworth ont aussi été calculées afin de les comparer à la réponse fréquentielle exacte à la figure 5.2. Les erreurs sont illustrées à la figure 5.3 et les erreurs moyennes, minimales et maximales sont resumées au le tableau 5.1.

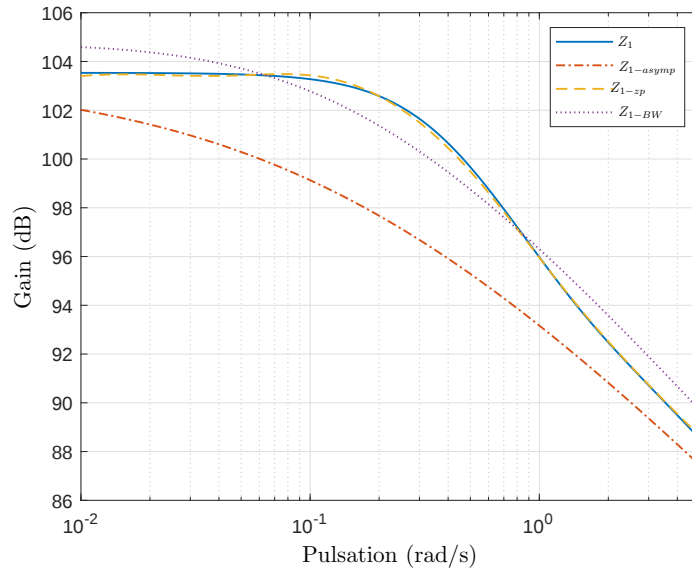


FIGURE 5.2 – Gain exact de Z_1 et de ses approximations pour l'exemple de la bronche

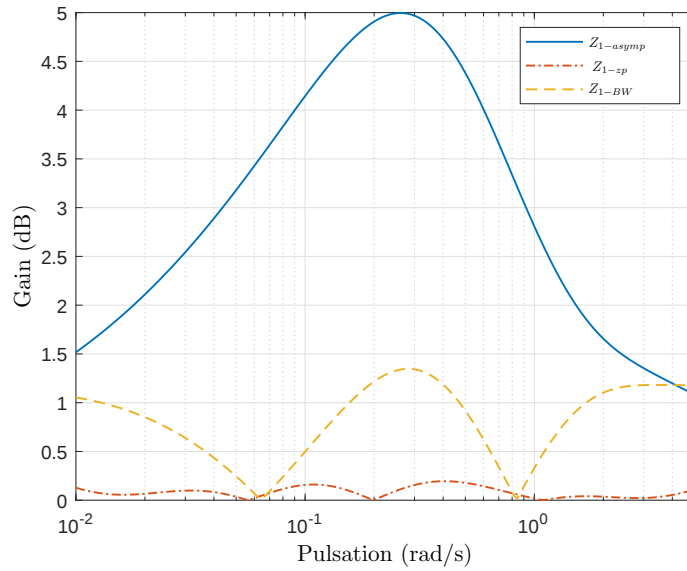


FIGURE 5.3 – Courbe d'erreur des approximations de Z_1 pour l'exemple de la bronche

Comme prévu, l'approximation asymptotique montre une erreur assez significative pour la totalité de la plage de fréquences. Cela pourrait indiquer que, pour certaines sections des poumons humains, il n'est pas possible de considérer un transfert thermique qui se rapproche du cas statique. Cette approximation montre des phénomènes dans la plage des moyennes

Approximation	Max (dB)	Moyen (dB)	Min (dB)
Asymptotique	4.99	3.05	1.0829
Pôle-zéro	0.26	0.05	0.0001
Butterworth	1.34	0.80	0.0151

TABEAU 5.1 – Valeurs extrêmes et moyennes de l’erreur absolue pour les approximations de Z_1 pour la bronche

fréquences. L’approximation par pôles et zéros réussit à approcher le plus fidèlement le comportement fréquentiel dans la totalité de la plage de fréquences, mais elle utilise un grand nombre de paramètres. L’approximation de Butterworth se situe dans une position intermédiaire, permettant une amélioration par rapport au cas asymptotique. Tout comme pour l’exemple exposé au chapitre 3, paragraphe 3.3.3.1, l’un des paramètres atteint la contrainte à zéro, ce qui réduit le nombre total de paramètres nécessaires pour cette approximation une fois de plus.

5.2.2 Approximation de Z_3

Les courbes de gain pour la réponse fréquentielle exacte de l’impédance de shunt ainsi que ses approximations sont illustrées à la figure 5.4 , tandis que les courbes d’erreur sont présentées à la figure 5.5 et les valeurs les plus importantes des erreurs sont résumées au tableau 5.2.

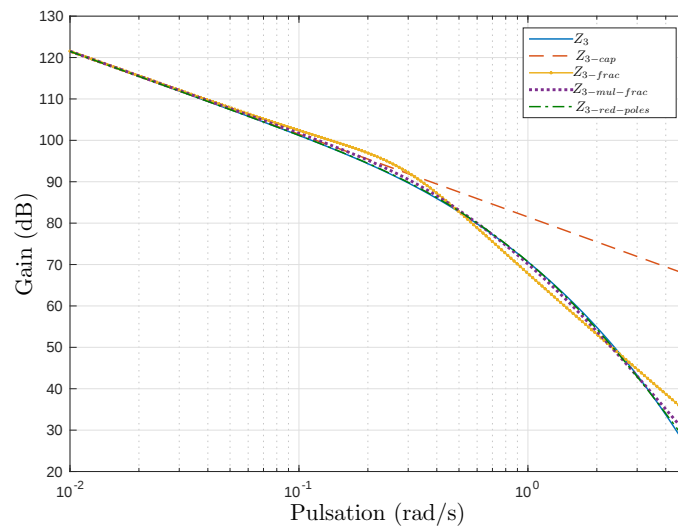


FIGURE 5.4 – Gain exact de Z_3 et de ses approximations pour l’exemple de la bronche

Le modèle de capacitance donne une approximation assez pauvre lorsque la fréquence augmente. Pour la plage de fréquence considérée, l’erreur moyenne est de 7.58 dB et il atteint 42.05 dB pour la limite de fréquence haute. Pour une fréquence de 1 rad/s qui est relativement proche de celle de la respiration humaine, l’erreur pour cette approximation

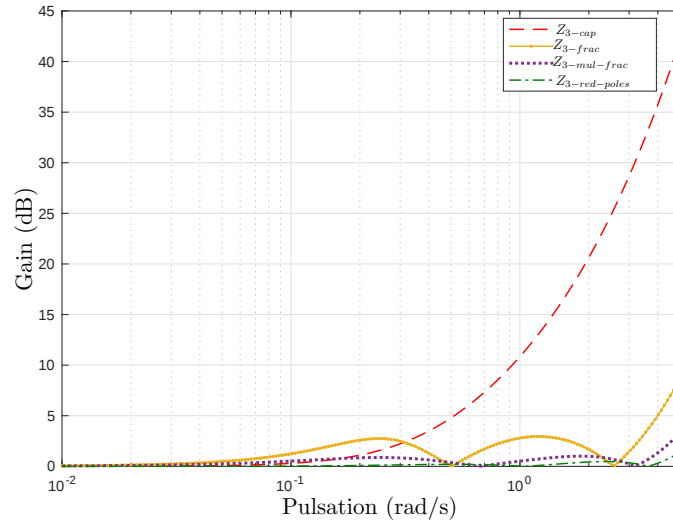


FIGURE 5.5 – Courbe d’erreur pour les approximations de Z_3 pour l’exemple de la bronche

Approximation	Max (dB)	Moyen (dB)	Min (dB)
Capacitance	42.05	7.58	0.0031
Pente non-entière	8.66	1.57	0.0494
Multi pente non entière	3.43	0.54	0.0177
Pôles réduits	1.39	0.14	0.0000

TABEAU 5.2 – Valeurs extrêmes et moyen de l’erreur pour les approximations de Z_3 pour l’exemple de la bronche

dépasse déjà les 10 dB. Les meilleurs résultats pour l’approximation de l’impédance de shunt sont, pour cette géométrie, obtenus avec l’approximation par pôles entiers réduits. Trois pôles ont été utilisés afin d’approcher la réponse de Z_3 . La pente de la courbe de gain autour de 1 rad/s est estimé à 38 dB/dec, ce qui implique que, selon cet exemple, une respiration normale se situe au-delà d’une modélisation à basses fréquences.

5.2.3 Simulations temporelles

Un cas simple avec la bronche isolée est proposé. La sortie est thermiquement isolée donc pour $x = L$, $\phi_{out} = 0$. Une onde thermique est appliquée en entrée ($x = 0$) :

$$T_{in}(t) = T_0 \sin(\omega t). \quad (5.1)$$

Pour ce cas, $T_0 = 1$ K et $\omega_0 = 0.45$ rad/s. Ce choix de fréquence reste cohérent par rapport à la plage possible de respiration humaine. La fonction de transfert qui relie la température

Modèle	Z_1	Z_3
A	$Z_{1-asymp}$	Z_{3-cap}
B	Z_{1-BW}	Z_{3-frac}
C	Z_{1-zp}	Z_{3-frac}
D	Z_{1-BW}	$Z_{3-mul-frac}$
E	Z_{1-zp}	$Z_{3-mul-frac}$

TABEAU 5.3 – Modèles pour les simulations temporelles

d'entrée et de sortie est donnée par :

$$\frac{T_{out}(p)}{T_{in}(p)} = \frac{Z_3(p)}{Z_1(p) + Z_3(p)}. \quad (5.2)$$

Des combinaisons d'approximations pour les impédances Z_1 et Z_3 permettent de proposer différents modèles de simulation montrés au tableau 5.3.

Les résultats pour la simulation temporelle sont illustrés à la figure 5.6. L'amplitude de l'onde thermique en sortie est comparée à celle du modèle exact afin de déterminer aussi les erreurs d'amplitude, qui sont présentées au tableau 5.4.

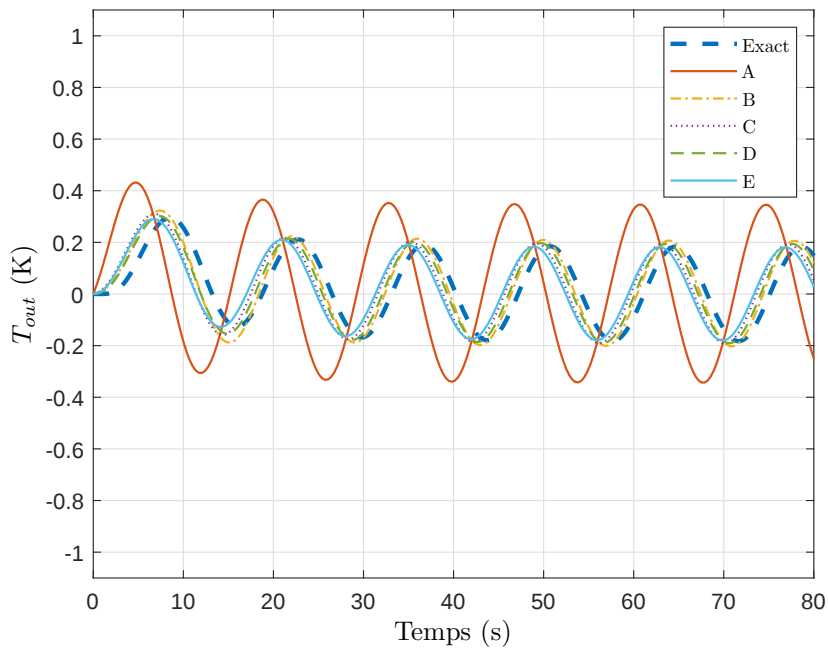


FIGURE 5.6 – Simulations temporelles pour l'exemple de la bronche

Le modèle *A* montre l'erreur la plus significative par rapport à la solution exacte. Ceci est une conséquence du manque de précision dans les deux approximations qui conforment ce modèle. Il y a pour les quatre autres modèles une amélioration par rapport à l'amplitude. Comme attendu, les modèles *B* et *D* montrent une performance plus faible par rapport aux

Modèle	Erreurr(K)
A	0.3206
B	0.0439
C	0.0213
D	0.0204
E	0.0036

TABLEAU 5.4 – Erreurs d’amplitude

modèles *C* et *D*, en raison de la correction par pôles et zéros dans ces deux derniers modèles. D’autre part, en comparant les modèles *C* et *E*, il est possible d’observer une amélioration des résultats en ajoutant une autre pente non entière.

Un inconvénient apparaît néanmoins pour tous ces modèles. Au début de la simulation, le transport de chaleur produit un retard thermique qui se présente dans la solution exacte. Les approximations proposées jusqu’à présent n’introduisent pas de retard de manière explicite. Le modèle *A* montre une augmentation quasiment instantanée de la température. Pour les autres modèles, même si un retard explicite n’est pas présent dans les expressions des impédances, il est possible d’observer un démarrage plus doux pour la réponse temporelle.

La possibilité des modèles proposés d’avoir une réponse douce malgré l’absence de retard explicite permet d’envisager des perspectives de recherche. Pour cette étude, l’optimisation à été réalisée en prenant en compte seulement le gain. Des études partant d’une approximation des impédances qui prennent en compte le gain et la phase pourraient mener à des résultats plus satisfaisants.

5.3 Impédance thermique équivalente des poumons

Dans cette section, l’impédance thermique équivalente sera analysée en prenant les résultats des réponses fréquentielles du chapitre 3. L’analyse se base sur l’impédance d’entrée pour le modèle *Mix* et le modèle *Bio* (voir sous-section 3.4.5 pour un rappel du développement théorique). Le modèle *Air* n’est pas analysé au cours de ce chapitre. Cela est dû, d’une part, à son manque de réalisme car ce modèle est capable de modéliser un système avec une capacité illimitée de stockage d’énergie (pas de dissipation prise en compte). De plus, ce manque de dissipation empêche la relaxation du système, ce qui rend l’usage d’un fenêtrage peu satisfaisant. Par conséquent, ce système ne peut pas être identifié en temps-réel avec les outils présentés dans cette thèse. L’analyse de ces deux modèles a pour objectif un aperçu plutôt conceptuelle du comportement thermique des poumons, étant donné que les modèles proposés sont à l’heure actuelle des idéalizations théoriques. Les réponses fréquentielles pour l’impédance thermique d’entrée (c’est-à-dire, au niveau de la trachée) des deux modèles sont montrées dans la figure 5.7.

La première remarque importante est la plage de fréquences. Ces réponses en fréquences

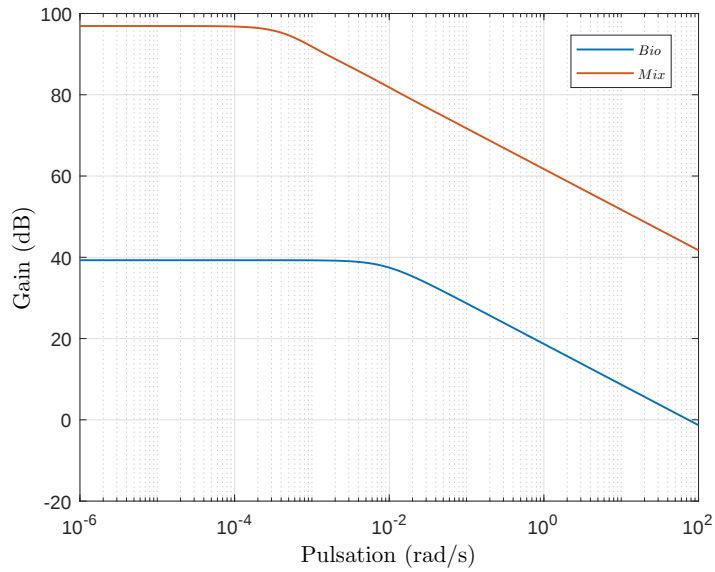


FIGURE 5.7 – Réponses fréquentielles de l'impédance thermique d'entrée pour les modèles *Mix* et *Bio*

suggèrent qu'à la fréquence de la respiration humaine, l'impédance thermique se comporte comme une fractance pure. Néanmoins, il est important de remarquer que ces modèles ont été construits sur la base de l'équation de la chaleur. Cela signifie que l'air est considéré comme quasiment statique. Un modèle plus précis partirait de l'équation d'advection et il prendrait aussi en compte le déplacement d'air, ainsi que les pertes par convection dans le système. D'autre part, un tel modèle mènerait à un modèle à paramètres variants, ce qui impliquerait une adaptation des algorithmes d'identification nécessaires pour traiter ceci. Une alternative pourrait consister à considérer une longueur de section équivalente pour les niveaux d'entrée des poumons (car ce sont les niveaux où le mouvement d'air est le plus significatif) ou bien une conductivité thermique équivalente.

D'autre part, il est aussi possible d'apprécier une énorme différence de gain. Naturellement, le modèle *Bio* montre un gain statique plus faible, car son irrigation sanguine riche permet d'évacuer rapidement les flux de chaleur entrants et cela prévient les fluctuations importantes de température. Le modèle *Mix* possède aux premiers niveaux une accumulation importante d'énergie thermique en raison du manque de perfusion dans cette zone. D'autre part, ces modèles ne prennent pas en compte les fuites de chaleur des poumons, que ce soit vers l'extérieur ou bien vers des organes voisins. Des essais expérimentaux seraient alors nécessaires afin d'estimer des valeurs réalistes pour le gain statique, ainsi que le vrai comportement fréquentiel de l'organe. Pour ce cas particulier, le gain de ce modèle *Bio* semble plus réaliste.

Le chapitre 3 propose une simple expression d'impédance thermique équivalente pour les

modèles *Mix* et *Bio* (voir sous-section 3.4.5, paragraphe 3.4.5.1) , à savoir :

$$Z_{eq-mix-bio}(p) = \frac{K}{1 + \tau\sqrt{p}}. \quad (5.3)$$

En partant des deux réponses en fréquence de la figure 5.7, des modèles simples d'impédance équivalente sont estimés. Le gain statique est prélevé directement des courbes, tandis que la valeur estimée pour τ est obtenue à travers une optimisation du gain par FPA.

Pour le modèle *Bio*, on obtient :

$$\hat{Z}_{bio}(p) = \frac{92.08}{1 + 9.191\sqrt{p}}. \quad (5.4)$$

Pour le modèle *Mix*, on obtient :

$$\hat{Z}_{mix}(p) = \frac{70120}{1 + 51.19\sqrt{p}}. \quad (5.5)$$

Le paramètre τ est plus élevé dans le modèle *Mix*, ce qui est logique. Ce paramètre est un indicateur de la dynamique du système et le modèle *Mix* est intrinsèquement plus lent que le modèle *Bio*. L'accumulation excessive d'énergie et la lenteur se traduisent par les différences dans les paramètres appréciés pour ces deux premières estimations. On remarque que l'ordre de grandeur entre les deux paramètres τ est inférieur à celui du gain, ce qui signifie une sensibilité inférieure par rapport à la dynamique.

Malgré les limitations théoriques de ces deux modèles simples, plusieurs essais de simulations seront réalisés en se basant sur eux. L'objectif est d'avoir un premier aperçu concernant l'identification des coefficients et des ordres de dérivation pour des cas qui se rapprochent un peu plus de la réalité par rapport aux exemples académiques.

5.3.1 Identification des modèles d'impédance équivalente

Des essais d'identification ont été réalisés pour les modèles (5.4) et (5.5). La dynamique et le gain étant très différents, cela mène à des choix paramétriques différents pour les deux types de tests. Les périodes d'échantillonnage choisies et les conditions initiales sont présentées au tableau 5.5.

	<i>Bio</i>	<i>Mix</i>
T_s	1 s	2 s
$\hat{K}_0$	30	30000
$\hat{\tau}_0$	10	10

TABLEAU 5.5 – Paramètres pour les essais d'identification

Les essais sont réalisés avec deux types d'entrée :

— un signal binaire pseudo-aléatoire

- et un signal multi sinus avec 10 sinus pour une plage de fréquences entre 0.005 et 0.8 fois la fréquence de Shannon.

Tous les signaux d'excitation sont entachés d'un bruit avec un rapport signal-bruit de $RSB = 20\text{dB}$.

Les méthodes utilisées pour l'identification seront la LMRPEM pour la partie des coefficients et la LMRPEM-2 pour l'estimation des coefficients et des ordres de dérivation.

5.3.1.1 Identification des coefficients

En première instance, une identification des coefficients seuls a été réalisée sans aucune troncature afin d'observer la convergence des paramètres K et τ . Les figures 5.8 et 5.9 montrent l'estimation pour une entrée de type *SBPA* et les figures 5.10 et 5.11 montrent l'estimation avec le multi sinus en entrée.

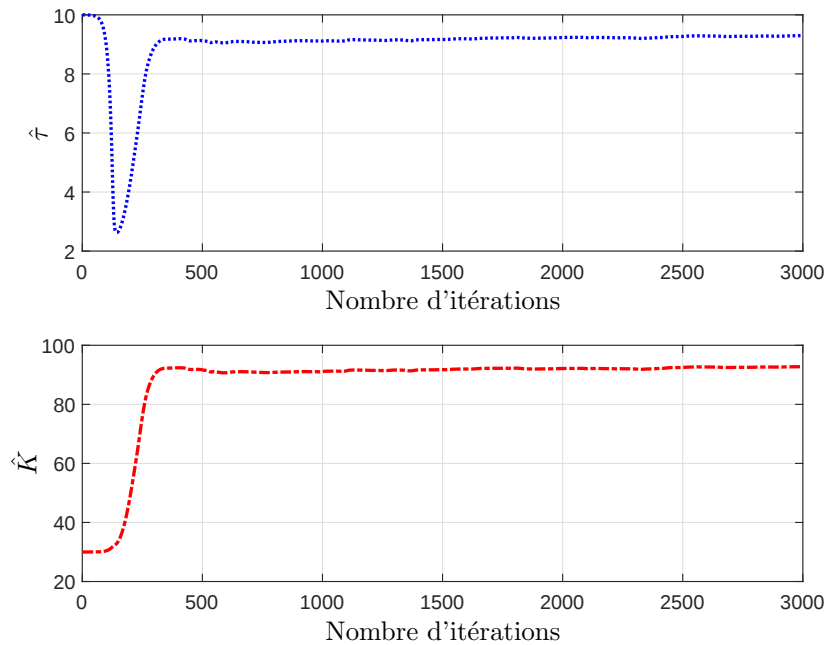


FIGURE 5.8 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Bio*

Tel que cela est démontré dans Ljung [1998], si le signal d'excitation est suffisamment persistant, l'identification du système peut conduire à des estimations convergentes. Pour les quatre cas montrés, l'estimation converge vers les vrais paramètres. Cela signifie qu'il est possible d'utiliser un multi sinus suffisamment riche en fréquences comme signal d'entrée, ce qui peut être plus réaliste dans une situation expérimentale avec des flux d'air chaud ou froid. Des très légères fluctuations des paramètres sont observables pour le modèle *Mix*, mais l'estimation reste précise.

Si l'on considère maintenant l'aspect temps-réel, l'imposition d'un fenêtrage s'avère nécessaire. Pour ces deux exemples théoriques, le temps de relaxation maximal (obtenu avec

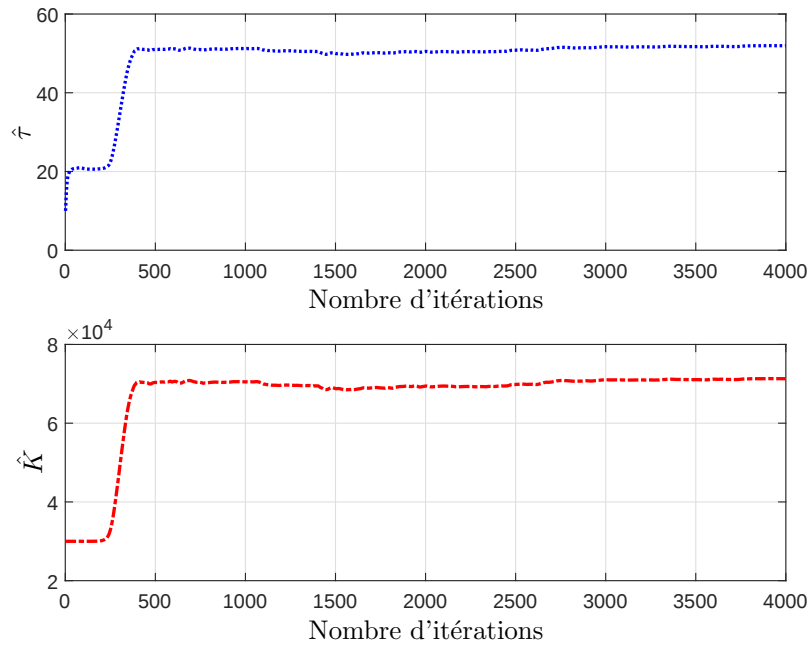


FIGURE 5.9 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Mix*

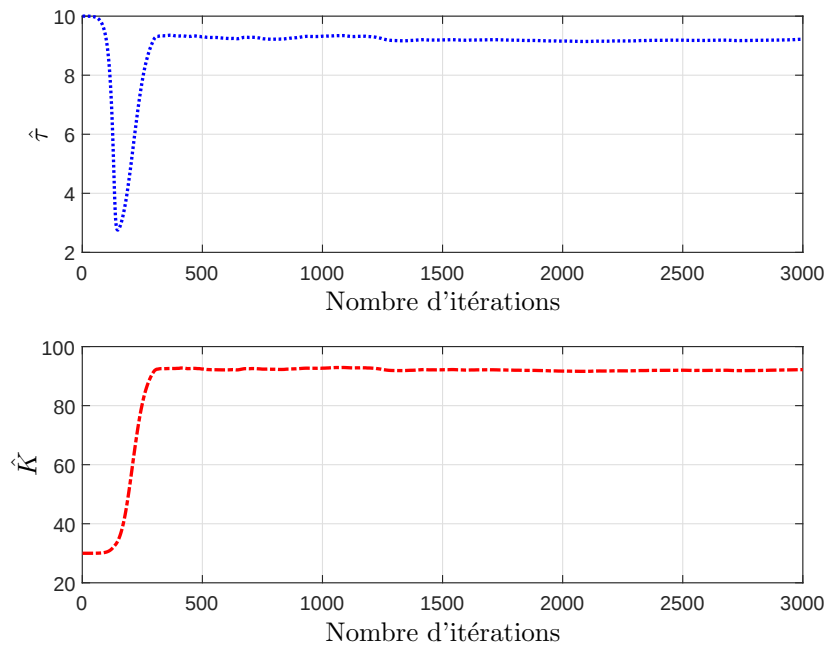


FIGURE 5.10 – Estimation des coefficients pour une entrée multi sinus pour le modèle *Bio*

l'expression (4.82)) dépasse les 10000s pour le modèle *Bio* et les 100000s pour le modèle *Mix*, ce qui implique un potentiel dilemme d'implémentation. Une fenêtre trop longue pourrait mener à des temps de calcul plus larges que la période d'échantillonnage. Si on considère

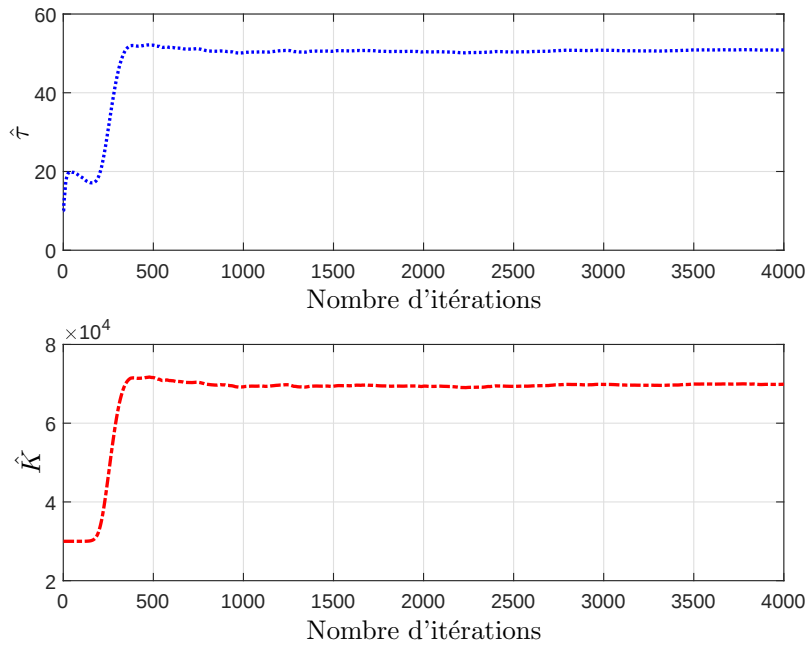


FIGURE 5.11 – Estimation des coefficients pour une entrée multi sinus pour le modèle *Mix*

qu'aucun de ces deux systèmes est entièrement chargé, il est possible qu'une largeur de fenêtrage raisonnable se trouve entre les deux bornes des temps de relaxation.

De manière empirique, des simulations sont réalisées avec le modèle *Bio* en utilisant un des deux fenêtrages différents : $L = 1000s$ et $L = 2000s$. Les courbes pour l'estimation des coefficients sont présentées aux figures 5.12 et 5.13. Les figures 5.14 et 5.15 montrent les temps de calcul.

Pour les deux cas, une oscillation des paramètres est observable lorsque le fenêtrage se met en place. Cela se produit d'une façon rapide car le fenêtrage empirique choisi est inférieur au temps de relaxation théorique du système. Un cas réaliste impliquerait des essais afin d'estimer d'une manière expérimentale l'ordre de grandeur du temps de relaxation. Les oscillations dans l'estimation se produisent autour des vraies valeurs des paramètres et à la figure 5.13, les oscillations sont réduites grâce à l'usage d'un fenêtrage plus large. Les courbes des temps de calcul montrent l'augmentation du temps de calcul au début de l'estimation et sa limitation dès que le fenêtrage se met en place. Pour le premier cas, la fenêtre limite le temps de calcul à 0.1s par itération, alors que cette valeur augmente jusqu'à 0.3s pour le deuxième cas. Les deux cas permettent une estimation des coefficients en temps-réel, mais le deuxième cas permet de maintenir une meilleure précision dans l'estimation.

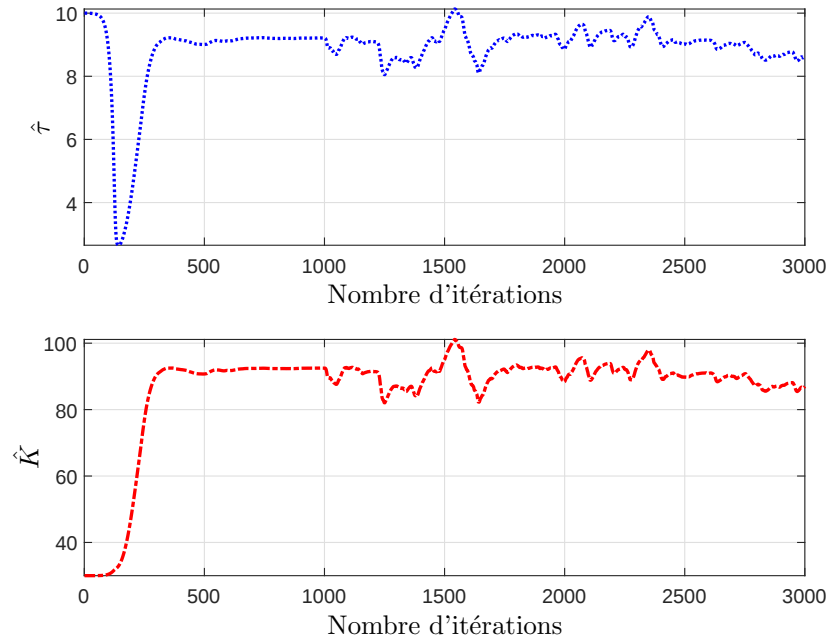


FIGURE 5.12 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 1000s$

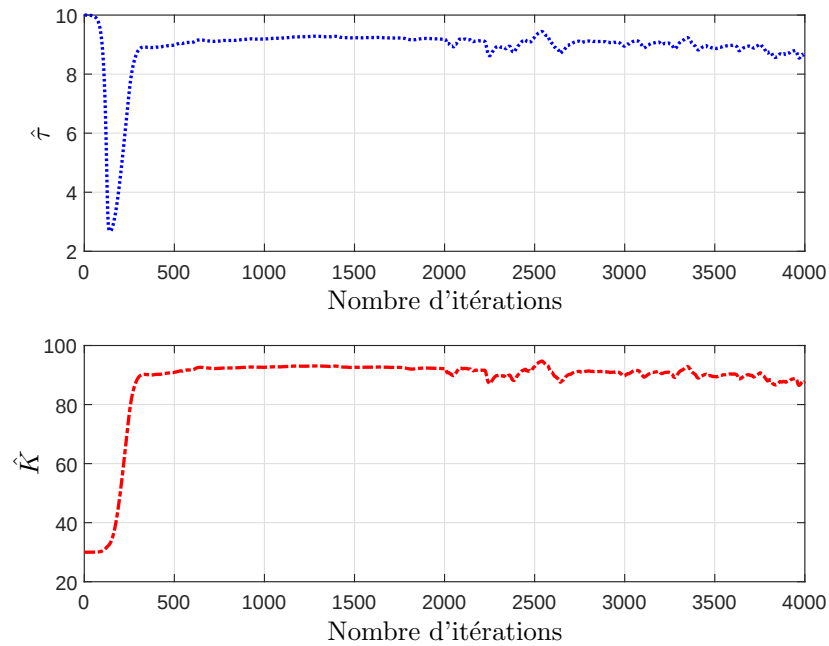


FIGURE 5.13 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 2000s$

Le modèle *Mix* présente une dynamique plus lente par rapport au *Bio*. Par conséquent, le fenêtrage devrait être plus significatif en effet. Pour ce système, deux fenêtrages ont été

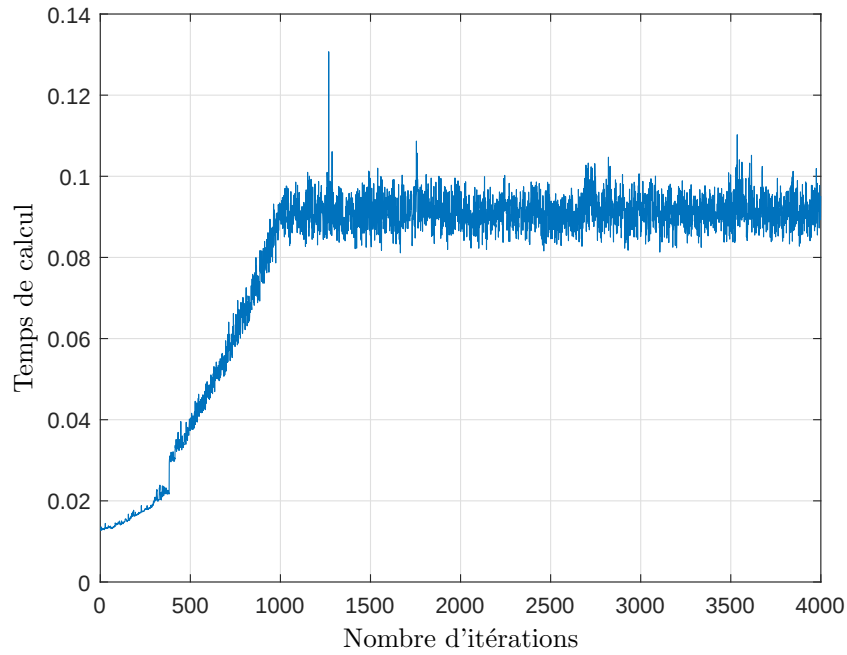


FIGURE 5.14 – Temps de calcul pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 1000s$

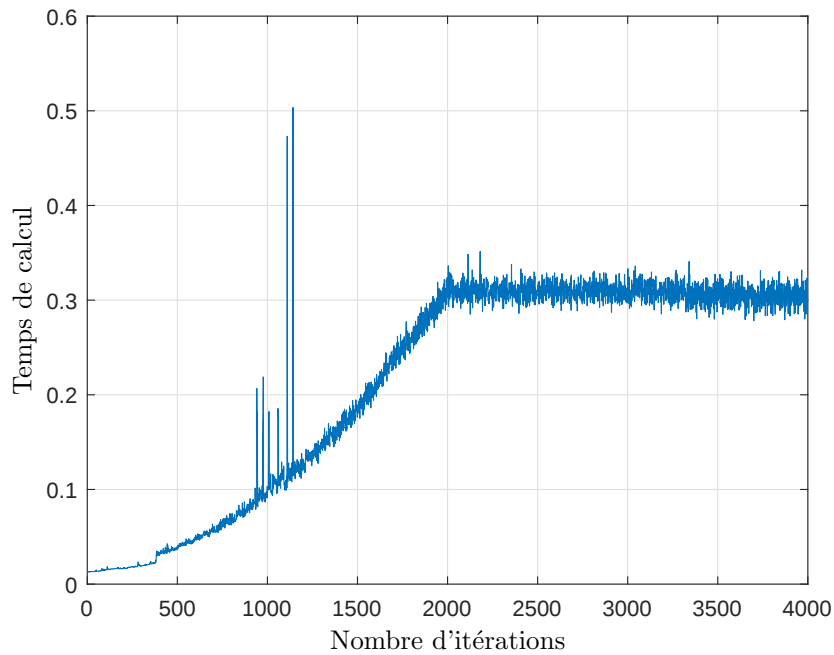


FIGURE 5.15 – Temps de calcul pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 2000s$

testés : $L = 4000s$ et $L = 6000s$. Il est important de remarquer que cela correspond à 2000 et 3000 itérations respectivement. Les estimations des coefficients pour les deux cas sont illustrées aux figures 5.16 et 5.17, et les temps de calcul aux figures 5.18 et 5.19.

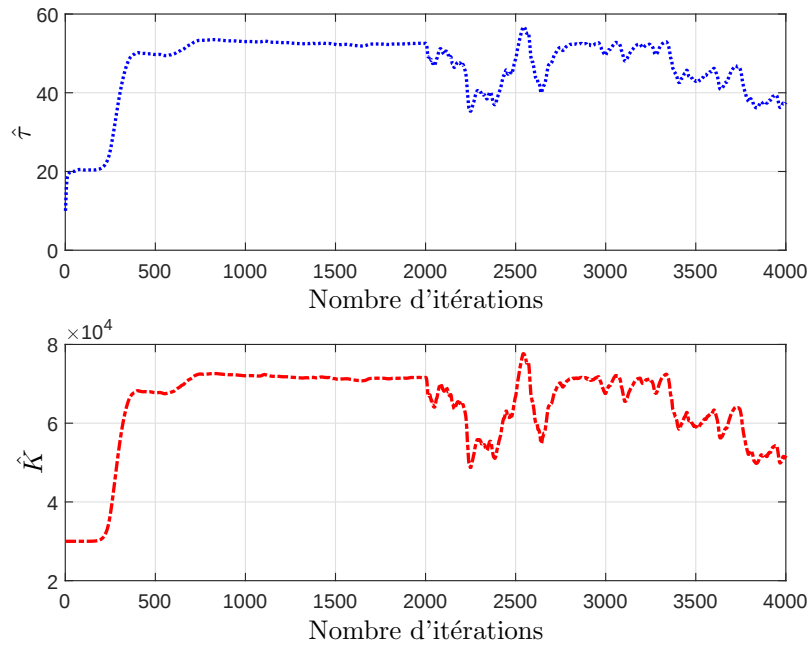


FIGURE 5.16 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 4000$ s

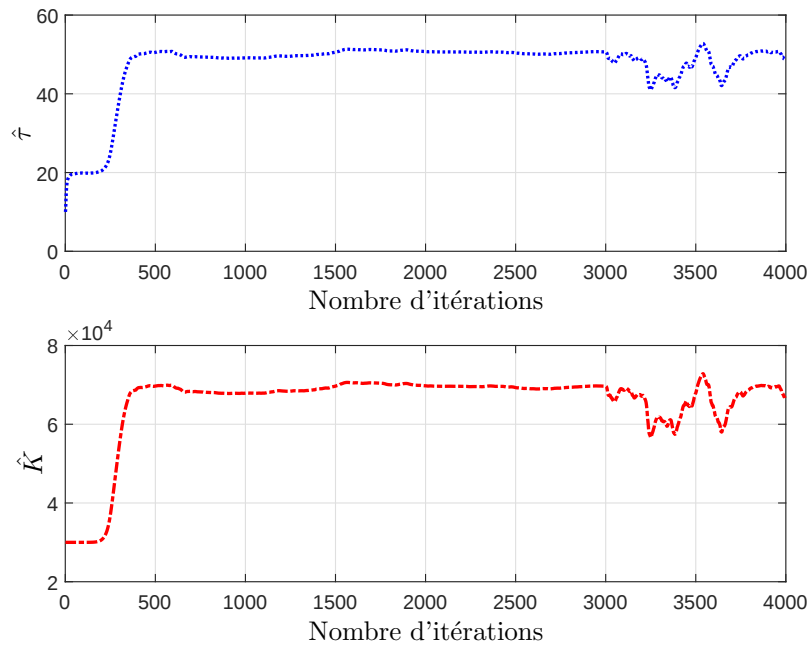


FIGURE 5.17 – Estimation des coefficients pour une entrée *SBPA* pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 6000$ s

Malgré l'usage d'une période d'échantillonnage plus lente et des fenêtres plus significatives, il est possible de remarquer une importante fluctuation dans l'estimation des para-

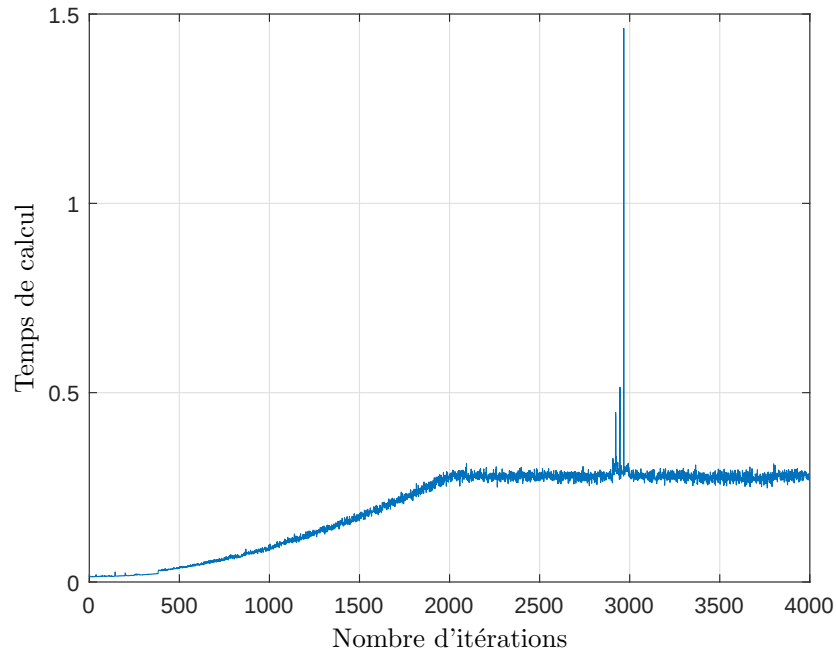


FIGURE 5.18 – Temps de calcul pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 4000$ s

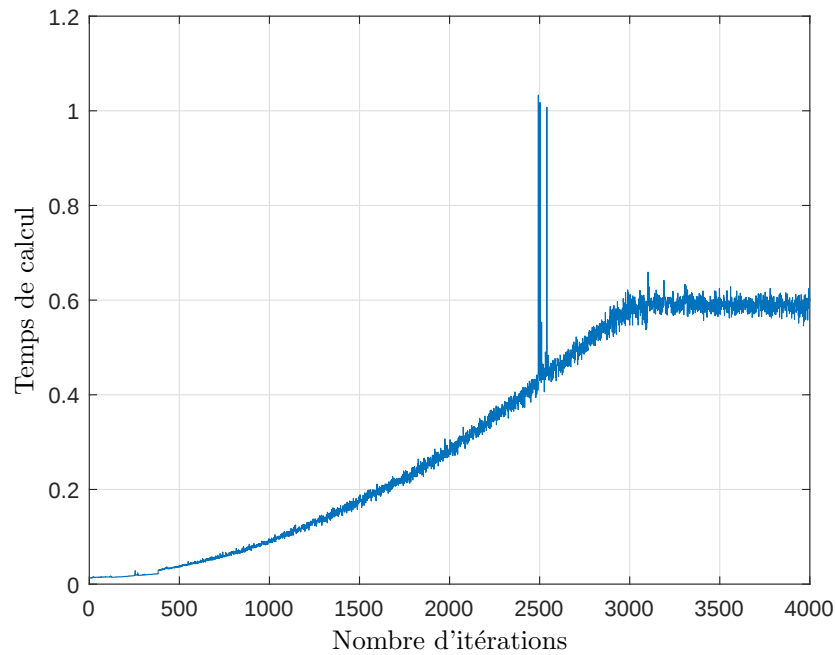


FIGURE 5.19 – Temps de calcul pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 6000$ s

mètres, notamment pour $L = 4000$ s. L'augmentation du fenêtrage permet une fois de plus de limiter ces fluctuations dans l'estimation, mais elles restent plus significatives par rapport au modèle *Bio*. D'autre part, il est possible pour ce cas d'envisager des fenêtrages encore

plus importants en raison de la période d'échantillonnage. Les courbes du temps de calcul montrent que, même pour la fenêtre à 3000 données, le temps de calcul moyen pour une itération est autour de 0.6s, ce qui permettrait d'augmenter encore plus le fenêtrage afin d'éviter des oscillations trop importantes.

5.3.1.2 Identification des coefficients et des ordres de dérivation

Finalement, dans cette section, l'estimation des coefficients ainsi que de l'ordre de dérivation est considérée. Pour ces simulations, la valeur initiale de l'ordre commensurable est fixée à $\nu_0 = 0.5$ pour les deux modèles. Les figures 5.20 et 5.21 présentent une estimation des coefficients et de l'ordre pour le modèle *Bio* et *Mix* sans aucun fenêtrage.

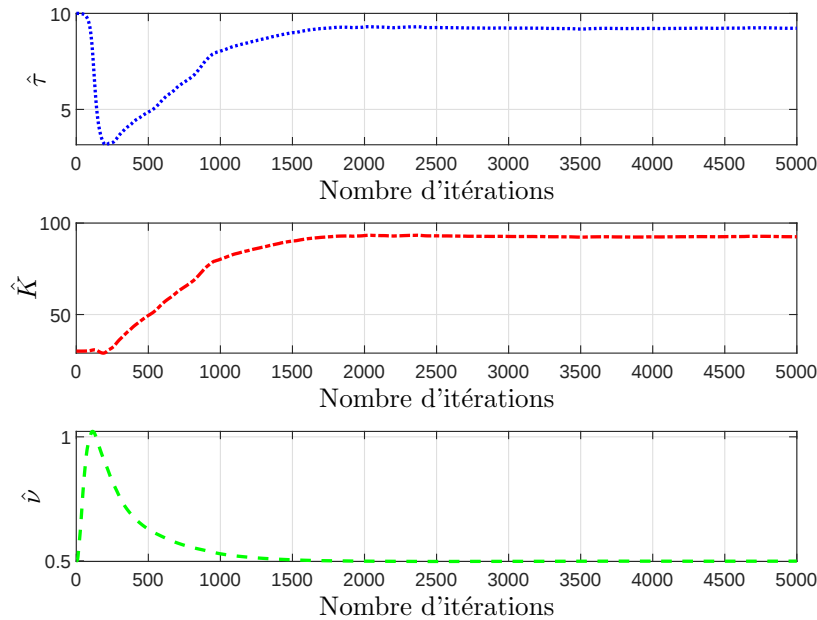


FIGURE 5.20 – Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle *Bio*

Afin d'observer l'impact du fenêtrage pour une estimation des coefficients et des ordres, des fenêtrages plus larges que la section précédente ont été pris (c'est-à-dire, $L = 2000$ s pour le modèle *Bio* et $L = 6000$ s pour le modèle *Mix*). Les estimations des paramètres sont illustrées aux figures 5.22 et 5.24, et les temps de calcul aux figures 5.23 et 5.25 respectivement.

Pour les deux cas, il est possible d'observer une convergence de l'ordre ν relativement rapide. Le fenêtrage ne provoque pas de changement significatif par rapport à l'estimation de l'ordre. Par contre, des fluctuations sont une fois de plus présentes pour l'estimation des coefficients. De plus, comme l'estimation possède deux étapes pour cette section, les temps de calcul pour les cas avec fenêtrages sont plus significatifs si l'on compare à une estimation limitée aux coefficients. Pour le modèle *Bio*, le temps de calcul moyen est passé de 0.3s pour l'estimation des coefficients à 0.6s pour l'estimation hybride. Cela se produit aussi pour le

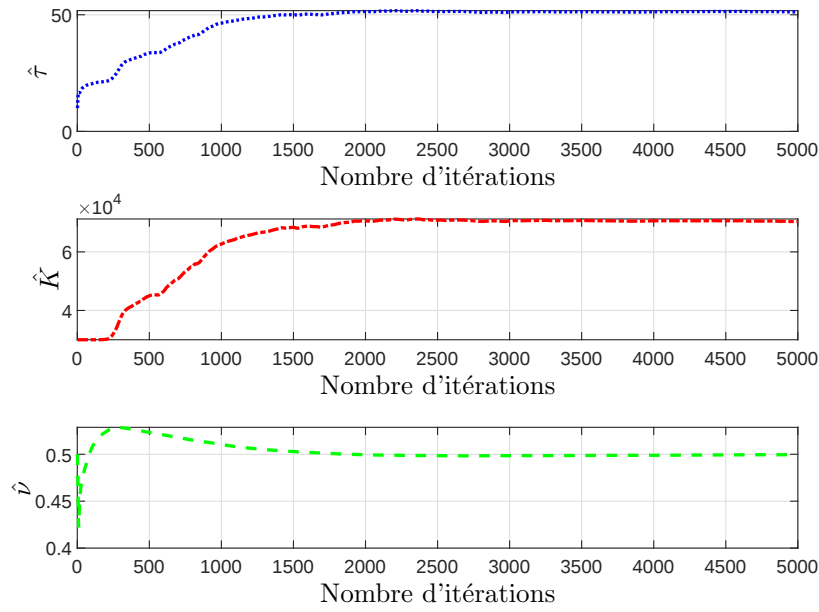


FIGURE 5.21 – Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle *Mix*

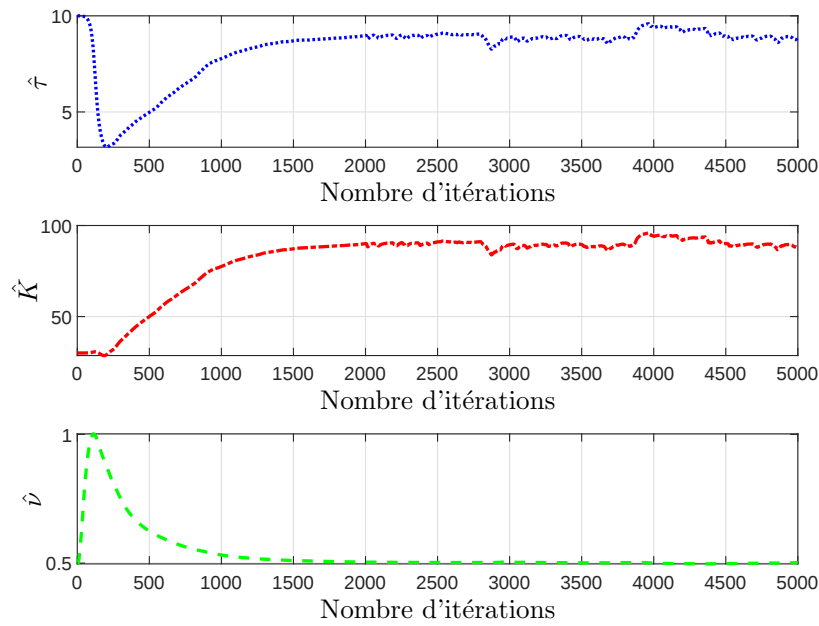


FIGURE 5.22 – Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 2000s$

modèle *Mix*, qui passe de 0.6s à 1.0s par itération.

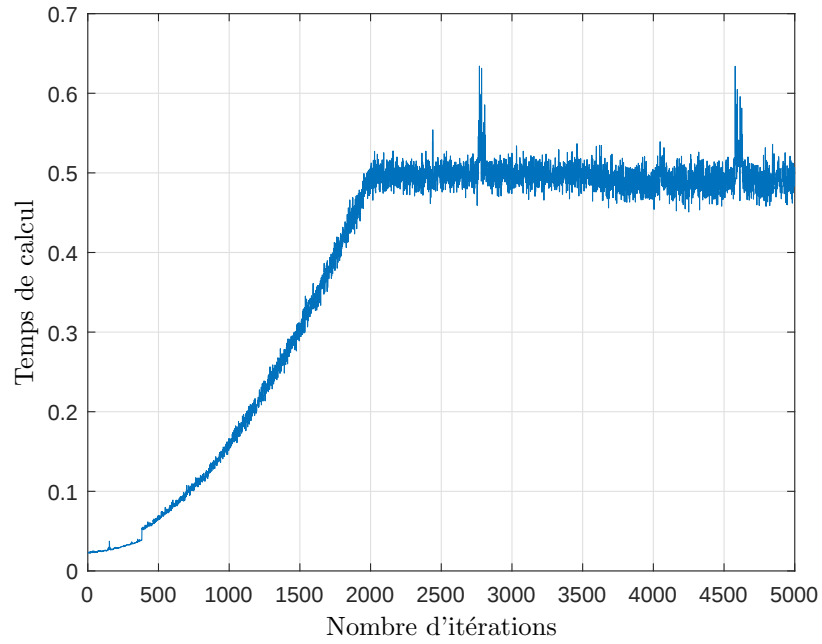


FIGURE 5.23 – Temps de calcul pour le modèle *Bio* avec un fenêtrage $L = 2000s$

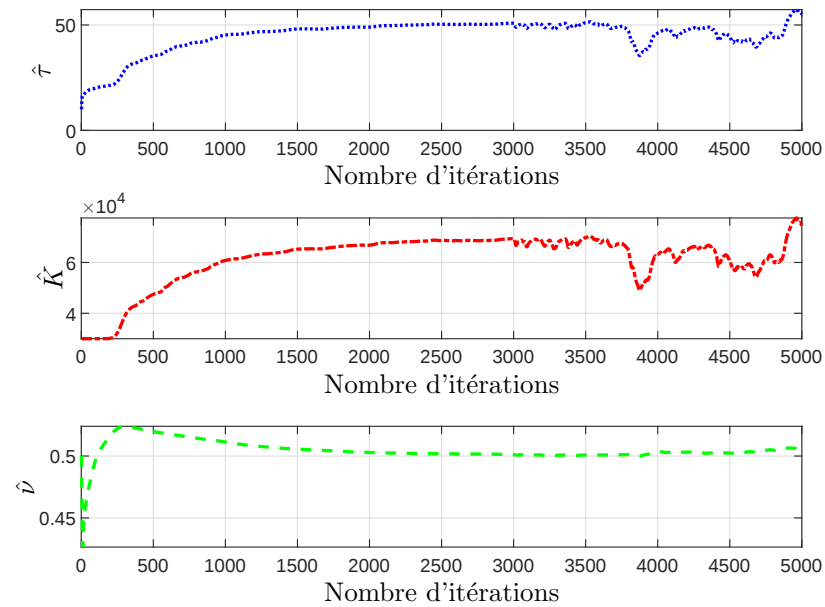


FIGURE 5.24 – Estimation des coefficients et de l'ordre de dérivation pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 6000s$

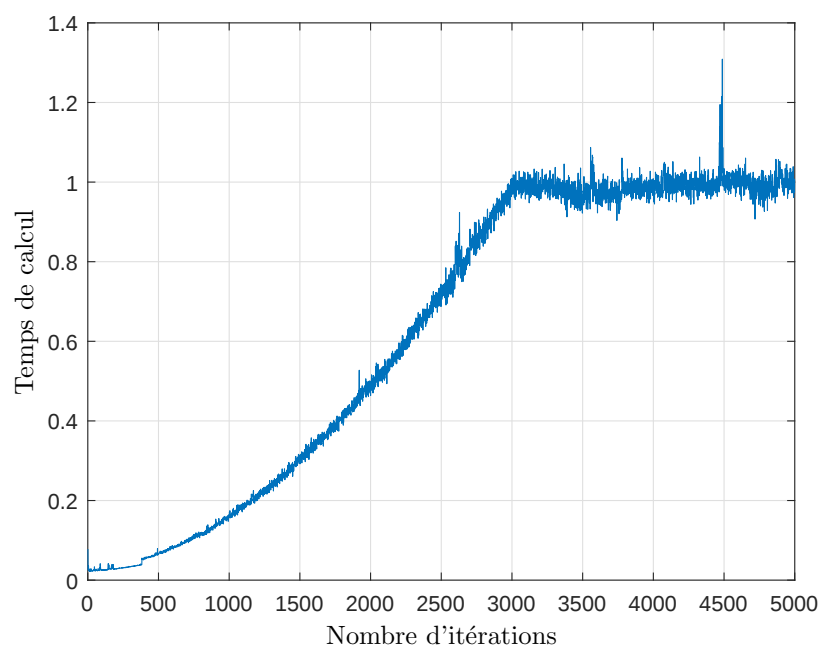


FIGURE 5.25 – Temps de calcul pour le modèle *Mix* avec un fenêtrage $L = 6000s$

5.4 Conclusions

Ce chapitre permet d'explorer le comportement thermique des poumons d'une manière théorique, ainsi que d'établir des limites pour les modèles développés au cours de cette thèse et de proposer des perspectives de recherche afin de mieux exploiter les modèles thermiques et les algorithmes d'identification.

La première partie permet d'analyser le cas d'une bronche isolée. Malgré les dimensions réduites pour la section utilisée, l'estimation des impédances Z_1 et Z_3 suggère un fonctionnement dans la plage des moyennes fréquences au lieu des basses fréquences (modèles RC). La simulation temporelle permet d'observer aussi un retard estimé autour de 1s pour la réponse thermique exacte. Une première perspective de recherche peut se concentrer sur ce phénomène de retard. L'utilisation des modèles non entiers pour Z_3 permet d'approximer le retard sans pour autant introduire de retard pur dans les expressions.

La deuxième partie se concentre sur des modèles d'impédance thermique équivalente. Une analyse des coefficients pour les modèles *Bio* et *Mix* est donnée. D'une part, l'effet de la perfusion sur le gain et sur le paramètre τ donne des résultats qualitativement logiques. Les ordres de grandeur des gains permettent de déduire des limites aux modèles développés : les gains obtenus sont trop significatifs et il est possible qu'ils ne soient pas réalistes. Ceci peut être provoqué essentiellement par deux phénomènes pas encore pris en compte : la convection thermique et les fuites de chaleur. Des tests d'identification ont aussi été réalisés pour ces deux modèles. Pour les deux cas, les temps de relaxation sont trop longs et pas atteignables avec un fenêtrage. Le réglage du fenêtrage est alors réalisé d'une manière empirique et les fluctuations observées dans les estimations sont importantes.

Ce chapitre permet de proposer plusieurs perspectives de recherche concernant les modèles théoriques, et aussi des expériences. D'une part, des modèles alternatifs pour le transfert du poumon peuvent être considérés : quadripôle avec advection (prise en compte de la convection), prise en compte des fuites thermiques. Concernant les expériences, il serait intéressant d'étudier le retard thermique dans les poumons ainsi que la relaxation thermique de celui-ci. Cela correspondrait donc à l'estimation empirique d'un fenêtrage adapté afin d'estimer correctement les paramètres.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse se décompose en cinq chapitres principaux, auxquels s'ajoutent l'introduction générale et la présente conclusion.

Le *chapitre 1* présente dans une première instance les objets fractals. Leur caractéristiques ont été définies et illustrées à travers des exemples académiques. Ensuite, la dérivation non entière a été introduite. De plus, les concepts mathématiques des systèmes dynamiques non entiers ont aussi été définis. La fractalité et la dérivation non entière sont liées : lorsque la dynamique d'un système est liée à sa géométrie fractale, cette dynamique se décrit par des équations différentielles d'ordre non entier. En biologie, il est courant de retrouver des systèmes avec des géométries complexes qui se rapprochent souvent des objets fractals. La deuxième partie du chapitre se concentre sur la présentation de différents systèmes biologiques et de leur modélisation mathématique. Pour plusieurs applications telles que la modélisation de muscles ou l'impédance dentaire, l'utilisation de modèles non entiers permet d'aboutir à des modèles performants en gardant une compacité paramétrique.

Le *chapitre 2* contient une présentation spécifique consacrée au système respiratoire humain. La première partie du chapitre a permis d'explorer les différentes fonctions du système respiratoire : ventilation mécanique, diffusion de masse et perfusion sanguine. Ensuite, la structure du système respiratoire global a été présentée. Les poumons sont l'organe principal chargé de la respiration, mais celle-ci n'est pas limitée exclusivement aux poumons. Il y a d'abord une étape de conditionnement d'air effectuée dans le système respiratoire supérieur. Les poumons sont assistés par des muscles autour de lui pour pouvoir effectuer les cycles de respiration. La deuxième partie du chapitre a permis d'explorer la modélisation mathématique des poumons. Le modèle mathématique proposé par Hilderbrandt s'est révélé être un modèle d'ordre non entier lorsqu'il est représenté dans le domaine de Laplace. D'autres modèles sont aussi présentés et comparés : modèles de circuit, modèle de Kuwahara. Des études plus récentes menés par Ionescu et Copot ont tenté de représenter les poumons comme un réseau de circuit arborescent et des impédances équivalentes qui se servent d'éléments à phase constantes ont été utilisés dans leurs travaux. Les travaux de Pellet ont permis d'analyser des données thermiques des poumons. Dans ces travaux, il propose un modèle boîte noire qui exploite les propriétés mathématiques de la fonction d'Havriliak-Negami. Bien qu'il s'agisse d'une première expérimentation concernant l'aspect thermique des poumons, ce modèle ne permet pas d'acquérir une vraie compréhension physique des transferts dans les poumons.

Tout au cours de ce chapitre, la complexité des poumons et l'utilisation du calcul non entier pour modéliser sa dynamique dès les premiers travaux expérimentaux sont mis en avant. Cet outil permet donc d'obtenir des modèles relativement simples et de contourner des modèles trop complexes, comme ce serait le cas avec les modèles à éléments finis.

Le *chapitre 3* aborde la modélisation des transferts thermiques. Bien qu'un modèle simple soit souhaitable, un juste milieu qui permet de contourner les limites fréquentielles restrictives est aussi désiré. Dans une première instance, la modélisation thermique est explorée à travers le quadripôle thermique. Ce formalisme permet la représentation des transferts thermiques en se servant des impédances thermiques. Bien que ce formalisme permette de contourner les restrictions fréquentielles imposées dans les modèles *RC*, il implique l'utilisation d'impédances thermiques avec des expressions complexes dans le domaine de Laplace. Cela empêche l'obtention, par la suite, de fonctions de transfert rationnelles. En analysant les expressions et les réponses fréquentielles des impédances du quadripôle, des approximations pour ces impédances ont été proposées en utilisant le calcul non entier. Différentes approximations ont été comparées dans un scénario académique dans le domaine fréquentiel et ensuite dans le domaine temporel. Contrairement aux approximations classiques en très basses fréquences, les approximations susmentionnées permettent d'élargir le domaine de validité fréquentiel des modèles thermiques.

Dans une deuxième instance, l'équation de bio-chaleur a été présentée afin de prendre en compte des phénomènes physiologiques, notamment la perfusion sanguine. Cette équation a été combinée avec le formalisme du quadripôle afin d'aboutir à un quadripôle thermique modifié, nommé le bio-quadripôle. Les réponses fréquentielles du bio-quadripôle permettent de confirmer d'une manière mathématique le rôle thermo-régulateur du système sanguin dans des scénarios physiologiques. De plus, il permet d'avoir une première idée sur le comportement pulmonaire à différents niveaux. Une deuxième contribution a consisté à considérer des fluctuations de température sanguine ainsi que la chaleur émise par la respiration cellulaire comme des entrées. Finalement, les deux quadripôles étudiés dans ce chapitre mènent à la proposition et simulation de trois modèles globaux du poumon et des premières simulations ont été présentées afin d'avoir une première idée sur l'impédance thermique équivalente des poumons en partant de modèles physiques.

Le *chapitre 4* est consacré à l'étude de l'identification de systèmes non entiers à temps continu. Tous les algorithmes d'identification de ce chapitre ont été étudiés sous leur forme récursive, car l'objectif est de développer des algorithmes capables de fonctionner en temps-réel. Dans un premier temps, l'identification des coefficients d'une fonction de transfert non entière a été abordée. Quatre méthodes ont été proposées : les moindres carrés avec filtre à variable d'état (RLSSVF), la méthode à erreur de prédiction (RPEM), la méthode d'erreur de prédiction à mémoire longue (LMRPEM) et la méthode avec variable instrumentale (RIVC). En réalisant des essais de Monte-Carlo, la performance de ces quatre méthodes a été comparée pour plusieurs niveaux de rapport signal sur bruit. Comme prévu, le bruit provoque un biais significatif pour la méthode des moindres carrés. Les méthodes RPEM et RIVC permettent

de contourner ce problème et d'obtenir des estimations consistantes, mais les variances restent significatives (bien qu'elles soient inférieures aux variances obtenues avec RLSSVF). C'est la méthode LMRPEM qui permet une estimation plus consistante et avec des variances moins importantes.

Dans un second temps, l'estimation récursive d'un ordre commensurable a aussi été prise en compte. La méthode LMRPEM a été alors adaptée afin de pouvoir estimer un ordre de dérivation et deux algorithmes à deux étapes ont été alors proposés, en utilisant une étape pour l'estimation des coefficients et une autre pour l'estimation des ordres de dérivation : LMRPEM-2 et LMRPEM-IV. Les essais permettant de comparer ces deux méthodes ont montré que, même si les performances sont similaires, la méthode hybride LMRPEM-2 reste moins sensible par rapport au bruit.

Finalement, l'aspect temps-réel a aussi été exploré. Malgré la formulation récursive de toutes les méthodes, le calcul de la sortie estimée à chaque itération $\hat{y}$ provoque l'augmentation du temps de calcul à chaque itération. Une étude simple sur la troncature des opérateurs non entiers a été explorée selon deux méthodes différentes : analyse de l'effet d'un fenêtrage pour la dérivation non entière d'un signal sinusoïdal et analyse de la relaxation d'un système non entier. Cette dernière méthode permet d'estimer la longueur nécessaire d'un fenêtrage pour le calcul de la sortie estimée qui permettrait d'obtenir un juste milieu entre le temps de calcul moyen pour chaque itération et la précision de l'estimation.

Le *chapitre 5* reprend des éléments des deux chapitres précédents afin d'analyser plus finement les modèles de poumons à partir de paramètres physiologiques d'un humain. Dans la première partie, un scénario simple d'une bronche moyenne isolée a été analysée. Celui-ci permet de suggérer que les transferts thermiques se trouvent proches des hautes fréquences et il met en évidence, dans des simulations temporelles, un phénomène typique de retard thermique. La deuxième partie se concentre sur les modèles d'impédance équivalente *Bio* et *Mix*. Une première analyse quantitative permet d'observer des gains qui ne sont pas réalistes, car trop significatifs. Cela est dû au fait que les modèles ici développés se basent sur la diffusion thermique et ils considèrent une accumulation d'énergie thermique trop importante. D'autre part, des données ont été générées à partir de ces deux modèles afin de tester les méthodes d'identification développées au *chapitre 4*. Pour l'identification sans fenêtrage, les tests convergent vers les vrais paramètres pour les deux modèles, que ce soit juste pour l'identification des coefficients ou bien pour l'identification des coefficients et de l'ordre de dérivation. Les essais d'identification permettent d'observer un autre aspect : le temps de relaxation théorique pour les deux modèles sont trop longs. Il est alors impossible d'utiliser un fenêtrage autour du temps de relaxation, car son temps de calcul dépasserait largement la période d'échantillonnage. Néanmoins, des fenêtrages ont été testés d'une manière empirique. Le fait qu'aucun des deux systèmes ne se rapproche d'un état dans lequel il est totalement chargé permet d'obtenir des estimations relativement consistantes des paramètres malgré les limitations quant au fenêtrage. Ces temps de relaxation pourraient aussi être moins significatifs dans la réalité.

Les perspectives de recherche pour ces travaux s'inscrivent dans la continuité des modèles et algorithmes présentés dans cette thèse.

Premièrement, pour les modèles thermiques, plusieurs propositions sont envisageables. Le modèle exploré dans ces travaux considère une conduction de chaleur longitudinale et il assemble plusieurs sections longitudinales des poumons pour l'obtention d'un modèle global. Des géométries différentes pourraient aussi être prises en compte, notamment des cylindres et des sphères creuses afin de modéliser les poumon comme un ensemble plus petit de cylindres ou sphères. D'autre part, deux phénomènes supplémentaires peuvent être pris en compte : les fuites de chaleur vers l'extérieur et la convection thermique. Un modèle qui considère la conduction et la convection en même temps pourraient être plus précis quant aux gains obtenus, mais il impliquerait une variation paramétrique (car la vitesse de flux d'air aurait une influence sur le modèle). D'autre part, des simulations exhaustives pourraient être réalisées afin de déterminer la sensibilité des paramètres des modèles mathématiques par rapport à des variables physiques, telles que des longueurs, des flux sanguins ou des conductivités thermiques.

En ce qui concerne les algorithmes d'identification, plusieurs extensions sont envisageables. Toutes les méthodes présentées dans ces travaux ont été testées exclusivement dans des scénarios SISO. Une première perspective de recherche serait alors d'étendre ces méthodes pour des modèles MIMO. De plus, le réglage des gains γ_X n'est pas simple, ce qui suggère qu'une étude peut être réalisée afin de pouvoir estimer des valeurs optimales de ces gains. La partie concernant l'estimation de l'ordre commensurable peut aussi être étendue afin d'estimer plusieurs ordres de dérivation lorsque le système n'est pas commensurable. Finalement, la flexibilité observée avec la méthode LMRPEM pourrait permettre l'identification récursive de structures mathématiques plus complexes, telles que des fonction de Davidson-Cole ou d'Havriliak-Negami. Enfin, à l'heure actuelle, nous avons considéré l'identification en temps-réel des systèmes dynamiques dont les paramètres du système ne varient pas. L'étape suivante serait d'estimer les paramètres du modèle avec des modèles linéaires à paramètres variants (LPV) afin de détecter des anomalies pendant l'intervention chirurgicale.

Finalement, une campagne plus exhaustive de mesures des températures dans les poumons peut aussi permettre d'acquérir des connaissances sur ce système d'une manière empirique. D'une part, les gains et temps de relaxation observés dans le *chapitre 5* pourraient être ajustés. De plus, une collecte plus importante des données pourrait permettre à terme de considérer l'effet provoqué par la fluctuation de température sanguine au moyen d'une identification MIMO.

Bibliographie

- Abdelaziz, A., E. Ali et S. Abd Elazim. 2016, Flower pollination algorithm to solve combined economic and emission dispatch problems, *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 61
- Alavi, S., A. Mahdi, S. Payne et D. Howey. 2015, Structural identifiability of battery equivalent circuit models. 95
- Ali, A. S., A. G. Radwan et A. M. Soliman. 2013, Fractional order butterworth filter : Active and passive realizations, *IEEE JOURNAL ON EMERGING AND SELECTED TOPICS IN CIRCUITS AND SYSTEMS*, vol. 3. 66, 67
- Bai, E.-W. 1998, An optimal two-stage identification algorithm for hammerstein–wiener nonlinear systems, *Automatica*, vol. 34, n° 3, doi :[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00198-2](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00198-2), p. 333–338, ISSN 0005-1098. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109897001982>. 109
- Berberan Santos, M. N. 2005, Properties of the mittag-leffler relaxation function, *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 38, doi :10.1007/s10910-005-6909-z, p. 629–635. 17
- Bourke, S. et G. Burns. 2015, *Respiratory Medicine : Lecture notes*, Wiley. viii, 41
- Bueno-Orovio, A., D. Kay, V. Grau, B. Rodriguez et K. Burrage. 2014, Fractional diffusion models of cardiac electrical propagation : role of structural heterogeneity in dispersion of repolarization, *J. R. Soc. Interface*, vol. 11. vii, 29, 30
- Butterworth, S. 1930, Theory of filter amplifier, *Exp. Wireless Wireless Eng*, vol. 7. 66
- Caputo, M. 1967, Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent-II, *Geophysical Journal*, vol. 13, n° 5, doi :10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x, p. 529–539.

-
- Chinen, K., I. Kinjo, A. Zamami, K. Irei et K. Nagayama. 2015, New equivalent-electrical circuit model and a practical measurement method for human body impedance, *Bio-Medical Materials and Engineering*. 55
- Coccarelli, A., E. Boileau, D. Parthimos et P. Nithiarasu. 2016, An advanced computational bioheat transfer model for a human body with an embedded systemic circulation, *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, vol. 15. 34
- Cois, O., A. Oustaloup, T. Poinot et J.-L. Battaglia. 2001, Fractional state variable filter for system identification by fractional model, dans *IEEE6th European Control Conference (ECC '2001)*, Porto, Portugal. 95
- Collins, J., P. Pilkington et K. Schmidt-Nielsen. 1971, A model of respiratory heat transfer in a small mammal, *Biophysical Journal*. 35
- Copot, D. 2018, *Fractional calculus based methods and models to characterize diffusion in the human body*, Thèse de doctorat, University of Gent. viii, 48, 49, 56
- Cretikos, M., R. Bellomo, K. Hillman, J. Chen, S. Finfer et A. Flabouris. 2008, Respiratory rate : the neglected vital sign, *The Medical Journal of Australia*, vol. 188. 37, 86, 130
- Danza, L., L. Belussi, I. Meroni, F. Salamone, F. Floreani, A. Piccinini et A. Dabusti. 2016, A simplified thermal model to control the energy fluxes and to improve the performance of buildings, *Conference of the Italian Thermal Machines Engineering Association*. 55
- De Wit, C. C. 1986, Recursive estimation of the continuous-time process parameters, dans *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2016–2020, doi :10.1109/CDC.1986.267390. 98
- DeGroot, C. et A. Straatman. 2018, A porous media model of alveolar duct flow in the human lung, *Journal of Porous Media*, vol. 21, doi :10.1615/JPorMedia.v21.i5.20, p. 405–422. 50
- Dias, N. H., J. R. C. Braz, R. H. G. Martins et L. R. Carvalho. 2005, Larynx and cervical trachea in humidification and heating of inhaled gases, *Annals of Otolaryngology & Laryngology*, vol. 114, n° 5, doi :10.1177/000348940511400514, p. 411–415. 130
- Diong, B., H. Nazeran, P. A. Nava et M. Goldman. 2007, Modeling human respiratory impedance, *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 26, p. 48–55. viii, 43
- Djouambi, A., A. V. Besançon et A. Charef. 2007, Fractional system identification using recursive algorithms approach, dans *Proceedings of the European Control Conference 2007*, Kos, Greece. 96
- DuBois, A. B., A. W. Brody, D. H. Lewis et B. F. Burgess. 1956, Oscillation mechanics of lungs and chest in man, *Journal of Applied Physiology*, vol. 8, n° 6, doi :10.1152/jappl.1956.8.6.587, p. 587–594. viii, 42, 43

-
- Elad, D., M. Wolf et T. Keck. 2008, Air-conditioning in the human nasal cavity, *Respiratory physiology and neurobiology*, vol. 163, doi :10.1016/j.resp.2008.05.002, p. 121–7. 130
- Eldarrat, A., D. Wood, G. Kale et A. High. 2007, Age-related changes in ac-impedance spectroscopy studies of normal human dentine, *Journal of materials science. Materials in medicine*, vol. 18, doi :10.1007/s10856-007-0136-z, p. 1203–10. 28
- Elwakil, A. S. 2010, Fractional-order circuits and systems : An emerging interdisciplinary research area, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 10, n° 4, p. 40–50. 56, 95
- Fiala, D., K. J. Lomas et M. Stohrer. 1999, A computer model of human thermoregulation for a wide range of environmental conditions : the passive system, *Journal of Applied Physiology*, vol. 87, n° 5, doi :10.1152/jappl.1999.87.5.1957, p. 1957–1972. 78
- Garnier, H. 2002, Continuous-time model identification of real-life processes with the contsid toolbox, ISBN 9783902661746, p. 1003–1003, doi :10.3182/20020721-6-ES-1901.01005. 94
- Garnier, H. et L. Wang. 2008, *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer. 94
- Garrappa, R., E. Kaslik et M. Popolizio. 2019, Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions : Overview and tutorial, *Mathematics*. 14, 113
- Grünwald, A. K. 1867, Über begrenzte derivationen und deren anwendung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. 12. 5, 13
- Gul, R. 2016, *Mathematical Modeling and Sensitivity Analysis of Lumped-Parameter Model of the Human Cardiovascular System*, Thèse de doctorat. 24, 25
- Haitao, S., L. Ning, G. Lijūn, G. Fei et L. Cheng. 2011, Fractal dimension analysis of mdct images for quantifying the morphological changes of the pulmonary artery tree in patients with pulmonary hypertension, *Korean Journal of Radiology*, vol. 12, p. 289 – 296. 40
- Hantos, Z., A. Adamicza, E. Govaerts et B. Daroczy. 1992, Mechanical impedances of lungs and chest wall in the cat, *Journal of Applied Physiology*, vol. 73, n° 2, doi :10.1152/jappl.1992.73.2.427, p. 427–433. 48
- He, X., X.-S. Yang, M. Karamanoğlu et Y. Zhao. 2017, Global convergence analysis of the flower pollination algorithm : A discrete-time markov chain approach, dans *ICCS*. 60
- Helmberger, M., M. Pienn, M. Urschler, P. Kullnig, R. Stollberger, G. Kovacs, A. Olschewski, H. Olschewski et Z. Bálint. 2014, Quantification of tortuosity and fractal dimension of the lung vessels in pulmonary hypertension patients, *PLOS ONE*, vol. 9, n° 1, doi :10.1371/journal.pone.0087515, p. 1–9. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0087515>. 40

-
- Herencsar, N., T. Freeborn, A. Kartci et O. Cicekoglu. 2020, A comparative study of two fractional-order equivalent electrical circuits for modeling the electrical impedance of dental tissues, *Entropy*, vol. 22, doi :10.3390/e22101117, p. 1117. vii, 28, 30
- Hildebrandt, J. 1969, Dynamic properties of air-filled excised cat lung determined by liquid plethysmograph., *Journal of Applied Physiology*, vol. 27, n° 2, doi :10.1152/jappl.1969.27.2.246, p. 246–250. viii, 3, 41
- Hildebrandt, J. 1970, Pressure-volume data of cat lung interpreted by a plastoelastic, linear viscoelastic model, *Journal of Applied Physiology*, vol. 28, n° 3, doi :10.1152/jappl.1970.28.3.365, p. 365–372. 3, 42
- Hristov, J. 2019, Bio-heat models revisited : Concepts, derivations, nondimensionalization and fractionalization approaches, *Frontiers in Physics*, vol. 7, doi :10.3389/fphy.2019.00189, ISSN 2296-424X. URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2019.00189/full>. 78
- Idiou, D., A. Charef, A. Djouambi et A. Voda. 2014, Parameters and order identification of the fundamental linear fractional systems of commensurate order, *The Second International Conference on Electrical Engineering and Control Application*. 96
- Ionescu, C. 2009, *Fractional Order Models of the Human Respiratory System*, Thèse de doctorat, University of Gent. viii, 45, 46
- Ionescu, C. 2012, Relationship between anatomical structure, fractional order models and fractal dimension in the respiratory impedance of healthy patients, ISBN 9783902823069, p. 1425–1430, doi :10.3182/20120711-3-BE-2027.00170. 45
- Ionescu, C., R. De Keyser, J. Sabatier, A. Oustaloup et F. Levron. 2011, Low frequency constant-phase behavior in the respiratory impedance, *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 6, n° 2, doi :10.1016/j.bspc.2010.10.005, p. 197–208. 45, 95
- Ismail, N., N. Ghaddara et K. Ghali. 2018, Electric circuit analogy of heat losses of clothed walking human body in windy environment, *International Journal of Thermal Sciences*. 55
- Jiang, G., T. Qu, Z. Shang et X. Zhang. 2004, A circuit simulating method for heat transfer mechanism in human body, *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. 55
- Kilbas, A., H. Srivastava et J. Trujillo. 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science. 14, 113
- Krishna, B. 2011, Studies on fractional order differentiators and integrators : A survey, *Signal Process*. 56, 95

-
- Krishna, B. et K. Reddy. 2008, Active and passive realization of fractance device of order $1/2$, *Active Passive Electronic components*. 56, 95
- Kuwahara, F., Y. Sano, J. Liu et A. Nakayama. 2009, A porous media approach for bifurcating flow and mass transfer in a human lung, *Journal of Heat Transfer*, vol. 131, n° 101013, doi :10.1115/1.3180699, ISSN 0022-1481. URL <https://doi.org/10.1115/1.3180699>. viii, 44, 82, 89
- Künzi, R. 2015, Thermal design of power electronic circuits, doi :10.5170/CERN-2015-003. 311. URL <http://cds.cern.ch/record/2038661>. 55
- Lamrini Uahabi, K. et M. Atounti. 2017, New approach to the calculation of fractal dimension of the lungs, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, vol. 44. 40
- Lasia, A. 2022, The origin of the constant phase element, *The Journal of Physical Chemistry Letters*, vol. 13, n° 2, doi :10.1021/acs.jpcclett.1c03782, p. 580–589. 21
- LeLay, L. 1998, *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I. 95
- Lenka, B. K. 2019, Fractional comparison method and asymptotic stability results for multivariable fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 69, doi :<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.09.016>, p. 398–415, ISSN 1007-5704. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100757041830296X>. 18
- Letnikov, A. 1868, Theory of differentiation with an arbitrary index, *Sbornik : Mathematics*, vol. 3. 5, 13
- Lin, Wuxi and Huang, Shengpeng and Ren, Jie. 2020, Anomalous Transient Heat Conduction in Fractal Metamaterials, *ES Energy and Environment*, vol. 7, doi :10.30919/esee8c371, p. 56–64, ISSN 2576-9898. 10
- Liouville, J. 1832, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, vol. 13. 5
- Ljung, L. 1981a, Analysis of a general recursive prediction error identification algorithm, *Automatica*, vol. 17, n° 1, p. 89 – 99. 96
- Ljung, L. 1981b, Analysis of a general recursive prediction error identification algorithm, *Automatica*, vol. 17, n° 1, doi :[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(81\)90086-8](https://doi.org/10.1016/0005-1098(81)90086-8), p. 89–99, ISSN 0005-1098. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109881900868>. 100

-
- Ljung, L. 1998, *System Identification : Theory for the User*, Pearson. 94, 96, 99, 100, 114, 138
- Lukasik, P., S. and Kowalski. 2015, Study of flower pollination algorithm for continuous optimization, *Intelligent Systems*. 61
- Magin, R. L. et M. Ovia. 2008, Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus, *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, p. 1431 – 1442. vii, 26, 27, 56, 95
- Maillet, D., A. S., J.-C. Batsale, A. Degiovanni et C. Moyne. 2000, *Thermal Quadrupoles : Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, John Wiley and sons. 3, 55, 95
- Mainardi, F. 2014, On some properties of the mittag-leffler function $e_{\alpha}(-t^{\alpha})$, completely monotone for $t > 0$ with $0 < \alpha < 1$, *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS SERIES B*, vol. 19. 108, 121, 122
- Mainardi, F. 2020, Why the mittag-leffler function can be considered the queen function of the fractional calculus ?, *Entropy*, vol. 22, n° 12, doi :10.3390/e22121359, ISSN 1099-4300. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/22/12/1359>. 16
- Malti, R., X. Moreau et F. Khemane. 2008, Resonance of fractional transfer functions of the second kind, dans *The 3th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey. 19, 103
- Malti, R., X. Moreau, F. Khemane et A. Oustaloup. 2011, Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions, *Automatica*, vol. 47. 18
- Malti, R., J. Sabatier et H. Akçay. 2009, Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, n° 10, doi :<https://doi.org/10.3182/20090706-3-FR-2004.00159>, p. 958–963, ISSN 1474-6670. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016387730>, 15th IFAC Symposium on System Identification. 95
- Mathieu, B., L. L. Lay et A. Oustaloup. 1996, Identification of non integer order systems in the time domain, dans *Proceedings IEEE-SMC CESA '96, Symposium on Control, Optimization and Supervision*, Lille, France. 95
- Matignon, D. 1996, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. 18, 71
- McFawn, P. K. et H. W. Mitchell. 1997, Bronchial compliance and wall structure during development of the immature human and pig lung., *The European respiratory journal*, vol. 10 1, p. 27–34. 130

-
- Mi, W., C. Zhang, H. Wang, J. Cao, C. Li, L. Yang, F. Guo, X. Wang et T. Yang. 2015, Measurement and analysis of the tracheobronchial tree in chinese population using computed tomography, *PLOS ONE*, vol. 10, doi :10.1371/journal.pone.0123177, p. 1–14. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0123177>. 130
- Moze, M. et J. Sabatier. 2005, Lmi tools for stability analysis of fractional systems, dans *20th ASME international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*, Long Beach, California. 18
- Mukhopadhyay, S., A. Patra et G. P. Rao. 1991, Irreducible model estimation for mimo systems, *International Journal of Control*, vol. 53, n° 1, doi :10.1080/00207179108953618, p. 223–253. 109
- Nakagawa, M. et K. Sorimachi. 1992, Basic characteristic of fractance device, *IEICE Trans. Fund.* 56, 95
- Narang, A., S. Shah et T. Chen. 2011, Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays, *IET Control Theory and Applications*, vol. 5. 95
- Navajas, D., R. Farre, J. Canet, M. Rotger et J. Sanchis. 1990, Respiratory input impedance in anesthetized paralyzed patients, *Journal of Applied Physiology*, vol. 69, n° 4, doi : 10.1152/jappl.1990.69.4.1372, p. 1372–1379. viii, 42, 43
- Oldham, K. et J. Spanier. 1970, The replacement of fick’s laws by a formulation involving semi-differentiation, *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, vol. 26. 94
- Oldham, K. et J. Spanier. 1974, *The fractionnal calculus*, Academic Press. 94
- Ooi, E., W. T. Ang et E. Ng. 2006, Bioheat transfer in the human eye : a boundary element approach. 78
- Oustaloup, A. 1991, *La commande CRONE*, Hermès. 20
- Oustaloup, A. 1995, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Hermès. 5, 24, 46, 47, 95, 114, 121
- Ovadia, M. et D. H. Zavitz. 1998, The electrode–tissue interface in living heart : Equivalent circuit as a function of surface area, *Electroanalysis*, vol. 10, n° 4, doi :[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4109\(199804\)10:4<262::AID-ELAN262>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4109(199804)10:4<262::AID-ELAN262>3.0.CO;2-W), p. 262–272. vii, 25, 26, 27
- Padilla, A. 2017, *Recursive identification of continuous-time systems with time-varying parameters*, Thèse de doctorat, Université de Lorraine. 96, 98, 123

-
- Pailhes, J., C. Pradere, J.-L. Battaglia, J. Toutain, A. Kusiak, A. Aregba et J.-C. Batsale. 2012, Thermal quadrupole method with internal heat sources, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 53, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2011.10.005>, p. 49–55, ISSN 1290-0729. 82
- Paramothayan, S. 2019, *Essential Respiratory Medicine*, Wiley. vii, viii, 36, 38
- Parnis, G. 2012, *Building Thermal Modelling Using Electric Circuit Simulation*, mémoire de maîtrise, University of New South Wales. 55
- Pellet, M. 2013, *Caractérisation non entière de systèmes biologiques : application au muscle squelettique et au poumon*, Thèse de doctorat. 1, 2
- Pellet, M., P. Melchior, Y. Abdelmoumen et A. Oustaloup. 2011, Fractional thermal model of the lungs using havriliak-negami function. viii, 49, 50
- Pennes, H. H. 1948, Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm, *Journal of Applied Physiology*, vol. 1, n° 2, doi :[10.1152/jappl.1948.1.2.93](https://doi.org/10.1152/jappl.1948.1.2.93), ISSN 8750-7587. URL <https://journals.physiology.org/doi/abs/10.1152/jappl.1948.1.2.93>. 3, 77
- Pham, H. 2019, A new criterion for model selection, *Mathematics*, vol. 7, n° 12, doi :[10.3390/math7121215](https://doi.org/10.3390/math7121215), ISSN 2227-7390. URL <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/12/1215>. 64
- Podlubny, I. 1999, *Fractional Differential Equations : an Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications.*, Academic Press. 108, 114, 115
- Rao, G. et H. Unbehauen. 2006, Identification of continuous systems, *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, vol. 153, doi :[10.1049/ip-cta:20045250](https://doi.org/10.1049/ip-cta:20045250), p. 185 – 220. 109
- Ratovoson, D., F. Jourdan et V. Huon. 2010, A study of heat distribution in human skin : use of infrared thermography, dans *14th International Conference on Experimental Mechanics*, France, p. 1–8. 78
- Riemann, B. 1876, Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*. 5
- Rivero, M., S. Rogosin, J. Tenreiro Machado et J. Trujillo. 2013, Stability of fractional order systems, *Mathematical Problems in Engineering*. 18
- Russo, M., D. Santarelli et D. O'Rourke. 2017, The physiological effects of slow breathing in the healthy human, *Breathe*, vol. 13. 86, 130
- Samko, S. 1993, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers. 14, 113

-
- Sivaramakrishna, M., S. Das, K. Biswas et B. Goswami. 2009, Characterization of a fractional order element realized by dipping a capacitive type probe in polarizable medium, *Symposium on Fractional Signals and Systems*. 56
- Sommacal, L. 2007, *Synthèse de la fonction d'Havriliak-Negami pour l'identification par modèle non entier et modélisation du système musculaire*, Thèse de doctorat. 1, 27
- Sommacal, L., P. Melchior, A. Oustaloup, J.-M. Cabelguen et A. Ijspeert. 2008, Fractional multi-models of the frog gastrocnemius muscle, *Journal of Vibration and Control*, vol. 14. 56
- Spinelli, W., L. Piroddi et M. Lovera. 2006, A two-stage algorithm for structure identification of polynomial narx models, dans *2006 American Control Conference*, doi :10.1109/ACC.2006.1656577. 109
- Stillinger, F. H. 1977, Axiomatic basis for spaces with noninteger dimension, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 18, n° 6, doi :10.1063/1.523395, p. 1224–1234. 10
- Strakowska, M., G. Mey, B. Witcek et M. Strzelecki. 2015, A three layer model for the thermal impedance of the human skin : Modeling and experimental measurements, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, vol. 15, doi :10.1142/S021951941550044X. 78
- S.Victor, R.Malti, H.Garnier et A. Oustaloup. 2013, Parameter and differentiation order estimation in fractional models, *Automatica*, vol. 49. 95, 96, 98, 109
- Tatom, F. 2011, The relationship between fractional calculus and fractals, *Fractals*, vol. 03, doi :10.1142/S0218348X95000175. 23
- Taylor, C. J., P. Young et A. Chotai. 2013, *G : The CAPTAIN Toolbox*, ISBN 9781118521212, p. 323–325, doi :10.1002/9781118535523.app7. 94
- Trigeassou, j.-c. et N. Maamri. 2011, Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations, *Signal Processing*, vol. 91, doi :10.1016/j.sigpro.2010.03.010, p. 427–436. 10, 13, 114
- Victor, S., A. Mayoufi, R. Malti, M. Chetoui et M. Aoun. 2022, System identification of miso fractional systems : Parameter and differentiation order estimation, *Automatica*, vol. 141, doi :<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110268>, p. 110 268, ISSN 0005-1098. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109822001133>. 109
- Victor, S., P. Melchior, M. Pellet et A. Oustaloup. 2020, Lung thermal transfer system identification with fractional models, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, p. 172–182. Conference Name : IEEE Transactions on Control Systems Technology. 56
- Wagner, P. D. 2015, The physiological basis of pulmonary gas exchange : implications for clinical interpretation of arterial blood gases, *European Respiratory Journal*, vol. 45,

-
- n° 1, doi :10.1183/09031936.00039214, p. 227–243, ISSN 0903-1936. URL <https://erj.ersjournals.com/content/45/1/227>. vii, 34, 35
- Weibel, E. R. 2014, Mandelbrot's fractals and the geometry of life : A tribute to benoît mandelbrot on his 80th birthday, *Fourth International Symposium on Fractals in Biology and Medicine*. viii, 39
- X.Sun, J. Ji, B. Ren, C. Xie et D. Yan. 2019, Adaptive forgetting factor recursive least square algorithm for online identification of equivalent circuit model parameters of a lithium-ion battery, *Energies*, vol. 12. 99
- Yang, X. 2012, Flower pollination algorithm for global optimization, *Unconventional Computation and Natural Computation*. 60, 61
- Young, P. 1981, Parameter estimation for continuous-time models—a survey, *Automatica*, vol. 17, n° 1, doi :[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(81\)90082-0](https://doi.org/10.1016/0005-1098(81)90082-0), p. 23–39, ISSN 0005-1098. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109881900820>. 109
- Young, P. 2011, *Recursive estimation and time-series analysis*, Springer-Verlag. 96, 101
- Zeng, C. et S. Liang. 2015, Comparative study of discretization zero dynamics behaviors in two multirate cases, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 13, p. 831–842. 94

Bibliographie de l'auteur

Publications dans des revues internationales

- [1] Jean-François DUHÉ et al. « Fractional derivative truncation approximation for real-time applications ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 119 (2023), p. 107096. ISSN : 1007-5704. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107096>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100757042300014X>.
- [2] Jean-François DUHÉ et al. « Modeling thermal systems with fractional models : human bronchus application ». In : *Nonlinear Dynamics* 108.1 (jan. 2022), p. 579-595. DOI : [10.1007/s11071-022-07239-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07239-3). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03721264>.
- [3] Stéphane VICTOR et al. « Long-memory recursive prediction error method for identification of continuous-time fractional models ». In : *Nonlinear Dynamics* 110.3 (2022), 635-648. DOI : [10.1007/s11071-022-07628-8](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07628-8).
- [4] Jean-François DUHÉ, Stéphane VICTOR et Pierre MELCHIOR. « Contributions on artificial potential field method for effective obstacle avoidance ». In : *Fractional Calculus and Applied Analysis* 24.2 (avr. 2021), p. 421-446. DOI : [10.1515/fca-2021-0019](https://doi.org/10.1515/fca-2021-0019). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03548486>.

Communications dans des congrès internationaux

- [5] Jean-François DUHÉ et al. « Thermal Modeling Using Two-Port Network Impedance Fractional-Order Approximations ». In : *17th ASME/IEEE MESA 2021 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Virtual, United States : American Society of Mechanical Engineers, août 2021. DOI : [10.1115/DETC2021-69968](https://doi.org/10.1115/DETC2021-69968). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03548461>.
- [6] Jean-François DUHÉ et al. « Recursive system identification for coefficient estimation of continuous-time fractional order systems ». In : *19th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2021)*. T. 54. 7. Padova, Italy, juill. 2021, p. 114-119. DOI : [10.1016/j.ifacol.2021.08.344](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.344). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03548450>.
- [7] Jean-François DUHÉ et al. « Two-port network modeling for bio-heat transfers in lungs ». In : *11th IFAC Symposium on Biological and Medical Systems (BMS 2021)*. T. 54. 15. Ghent, Belgium, sept. 2021, p. 169-174. DOI : [10.1016/j.ifacol.2021.10.250](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.250). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03548458>.

- [8] Jean-François DUHÉ et al. « Global Thermal Modeling of Lung Heat Transfer with Blood Perfusion ». In : *Proceedings of the International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA'21)*. Springer International Publishing, jan. 2022, p. 231-238. DOI : 10.1007/978-3-031-04383-3_26. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03717297>.
- [9] « Study on obstacle avoidance for fractional artificial potential fields ». In : *IFAC-PapersOnLine* 53.2 (2020). 21st IFAC World Congress, p. 3725-3730. ISSN : 2405-8963. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2059>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896320327002>.
- [10] Jean-François DUHÉ et al. « Truncation of fractional derivative for online system identification ». In : *8th IFAC Symposium on System Structure and Control 2022*. Montreal, Canada, 2022.

Communications dans des congrès nationaux

- [11] Jean-François DUHÉ et al. « Fractional order modeling and identification for heat transfer in lungs ». In : *Groupe de Travail Identification*. Mai 2022.

Résumé

Cette thèse se concentre sur l'étude de la fonction respiratoire, plus particulièrement celle des poumons pendant les opérations à cœur ouvert. Une meilleure compréhension des transferts thermiques dans les poumons permettrait de réduire les dommages subis par cet organe lors des interventions chirurgicales à cœur ouvert. La première partie de ces travaux se concentre sur la modélisation thermique afin de l'appliquer aux poumons. Les transferts thermiques sont analysés par le biais du quadripôle thermique. Des approximations rationnelles des impédances thermiques se servant de la dérivation non entière sont proposées et comparées. Finalement, une modification au quadripôle thermique est présentée afin de prendre en compte l'effet thermorégulateur du flux sanguin dans les tissus biologiques.

Le deuxième axe de recherche porte sur l'identification de systèmes dynamiques par modèles non entiers. L'objectif est d'estimer correctement les paramètres d'un modèle dynamique non entier à temps continu et en temps-réel. Dans un premier temps, quatre algorithmes récursifs d'identification sont proposés pour l'estimation des coefficients d'une fonction de transfert non entière. Ensuite, l'identification est étendue pour pouvoir estimer les ordres de dérivation en utilisant deux algorithmes hybrides à deux étapes. Enfin, des premières analyses ont été réalisées concernant une estimation tronquée afin de limiter le temps de calcul à une itération pour qu'elle soit opérationnelle en temps-réel.

Les perspectives de recherche pour ces travaux comprennent une conception plus précise des modèles thermiques en prenant en compte des fuites de chaleur, des géométries plus complexes ou bien les phénomènes de convection. D'autre part, l'identification récursive par modèle non entier pourrait être réalisée pour estimer, d'une façon plus générale, les ordres de dérivation quelconques, ainsi que pour l'estimation des systèmes multivariables.

Mots clés : *automatique, modélisation, identification, système non entier, diffusion thermique, temps-réel, biomédical, poumons*

Abstract

This PhD thesis deals with the analysis of the respiratory function, more specifically, the lungs during open-heart surgery. A better understanding of heat transfers in lungs may allow to reduce damage suffered by this organ during medical procedures. The first part of this work is about heat transfer modeling and its application to the lungs. Heat transfer is analyzed by using the two-port network formalism. Rational approximations of thermal impedances are proposed by using fractional derivative properties and their performances are compared. Finally, a modification to the two-port network formalism is presented in order to take into account the thermo-regulatory role of blood flow in biological tissue.

The second research axis of this work is about fractional system identification. The objective is to correctly estimate the parameters of a fractional continuous-time dynamical model in real-time. First of all, four recursive identification algorithms are proposed in order to estimate the coefficients of a fractional transfer function. Then, identification is extended to include differentiation order estimation by proposing two hybrid algorithms consisting on two stages. Finally, some simple analysis are performed in order to truncate operators to limit the calculation time per iteration as a way to guarantee real-time operation.

Research perspectives for this works include more complex thermal models: heat losses, more complex geometries or convection phenomena. Moreover, recursive identification of fractional systems may be extended to estimate differentiation orders in a more general way and to be applied to multivariable systems.

Keywords : *automatic control, modeling, system identification, fractional system, thermal diffusion, real-time, biomedical, lungs*