



HAL
open science

Développement et études de performances de nouveaux détecteurs/filtres rang faible dans des configurations RADAR multidimensionnelles

Mélanie Boizard

► **To cite this version:**

Mélanie Boizard. Développement et études de performances de nouveaux détecteurs/filtres rang faible dans des configurations RADAR multidimensionnelles. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2013. Français. NNT : 2013DENS0063 . tel-04081247

HAL Id: tel-04081247

<https://theses.hal.science/tel-04081247>

Submitted on 25 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

présentée par

Mélanie Boizard

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine : Traitement du signal

Sujet de la thèse :

Développement et études de performances de nouveaux détecteurs/filtres rang faible dans des configurations RADAR multidimensionnelles

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 13 décembre 2013, devant le jury composé de :

MARCOS Sylvie	Directrice de Recherche	Rapporteur
COMON Pierre	Directeur de Recherche	Rapporteur
BRIE David	Professeur	Examineur
CHEVALIER Pascal	Professeur	Président du jury
GINOLHAC Guillaume	Professeur	Examineur (Encadrant)
PASCAL Frédéric	Professeur Assistant	Examineur (Encadrant)
FORSTER Philippe	Professeur	Examineur (Directeur de thèse)

Résumé

Dans le cadre du traitement statistique du signal, la plupart des algorithmes couramment utilisés reposent sur l'utilisation de la matrice de covariance des signaux étudiés. En pratique, ce sont les versions adaptatives de ces traitements, obtenues en estimant la matrice de covariance à l'aide d'échantillons du signal, qui sont utilisés. Ces algorithmes présentent un inconvénient : ils peuvent nécessiter un nombre d'échantillons important pour obtenir de bons résultats.

Lorsque la matrice de covariance possède une structure rang faible, le signal peut alors être décomposé en deux sous-espaces orthogonaux. Les projecteurs orthogonaux sur chacun de ces sous-espaces peuvent alors être construits, permettant de développer des méthodes dites rang faible. Les versions adaptatives de ces méthodes atteignent des performances équivalentes à celles des traitements classiques tout en réduisant significativement le nombre d'échantillons nécessaire.

Par ailleurs, l'accroissement de la taille des données ne fait que renforcer l'intérêt de ce type de méthode. Cependant, cet accroissement s'accompagne souvent d'un accroissement du nombre de dimensions du système. Deux types d'approches peuvent être envisagées pour traiter ces données : les méthodes vectorielles et les méthodes tensorielles. Les méthodes vectorielles consistent à mettre les données sous forme de vecteurs pour ensuite appliquer les traitements classiques. Cependant, lors de la mise sous forme de vecteur, la structure des données est perdue ce qui peut entraîner une dégradation des performances et/ou un manque de robustesse. Les méthodes tensorielles permettent d'éviter cet écueil. Dans ce cas, la structure est préservée en mettant les données sous forme de tenseurs, qui peuvent ensuite être traités à l'aide de l'algèbre multilinéaire. Ces méthodes sont plus complexes à utiliser puisqu'elles nécessitent d'adapter les algorithmes classiques à ce nouveau contexte. En particulier, l'extension des méthodes rang faible au cas tensoriel nécessite l'utilisation d'une décomposition tensorielle orthogonale.

Le but de cette thèse est de proposer et d'étudier des algorithmes rang faible pour des modèles tensoriels. Les contributions de cette thèse se concentrent autour de trois axes. Un premier aspect concerne le calcul des performances théoriques d'un algorithme MUSIC tensoriel basé sur la *Higher Order Singular Value Decomposition* (HOSVD) et appliqué à un modèle de sources polarisées. La deuxième partie concerne le développement de filtres rang faible et de détecteurs rang faible dans un contexte tensoriel. Ce travail s'appuie sur une nouvelle définition de tenseur rang faible et sur une nouvelle décomposition tensorielle associée : l'*Alternative Unfolding* HOSVD (AU-HOSVD). La dernière partie de ce travail illustre l'intérêt de l'approche tensorielle basée sur l'AU-HOSVD, en appliquant ces algorithmes à configuration radar particulière : le Traitement Spatio-Temporel Adaptatif ou *Space-Time Adaptive Process* (STAP).

Mots clés : Traitement d'antenne, Méthode rang faible, Algèbre multilinéaire, Décomposition tensorielle, STAP, Analyse de perturbations.

Abstract

Most of statistical signal processing algorithms, are based on the use of signal covariance matrix. In practical cases this matrix is unknown and is estimated from samples. The adaptive versions of the algorithms can then be applied, replacing the actual covariance matrix by its estimate. These algorithms present a major drawback : they require a large number of samples in order to obtain good results.

If the covariance matrix is low-rank structured, its eigenbasis may be separated in two orthogonal subspaces. Thanks to the LR approximation, orthogonal projectors onto these subspaces may be used instead of the noise CM in processes, leading to low-rank algorithms. The adaptive versions of these algorithms achieve similar performance to classic ones with less samples.

Furthermore, the current increase in the size of the data strengthens the relevance of this type of method. However, this increase may often be associated with an increase of the dimension of the system, leading to multidimensional samples. Such multidimensional data may be processed by two approaches : the vectorial one and the tensorial one.

The vectorial approach consists in unfolding the data into vectors and applying the traditional algorithms. These operations are not lossless since they involve a loss of structure. Several issues may arise from this loss : decrease of performance and/or lack of robustness.

The tensorial approach relies on multilinear algebra, which provides a good framework to exploit these data and preserve their structure information. In this context, data are represented as multidimensional arrays called tensor. Nevertheless, generalizing vectorial-based algorithms to the multilinear algebra framework is not a trivial task. In particular, the extension of low-rank algorithm to tensor context implies to choose a tensor decomposition in order to estimate the signal and noise subspaces.

The purpose of this thesis is to derive and study tensor low-rank algorithms. This work is divided into three parts. The first part deals with the derivation of theoretical performance of a tensor MUSIC algorithm based on Higher Order Singular Value Decomposition (HOSVD) and its application to a polarized source model. The second part concerns the derivation of tensor low-rank filters and detectors in a general low-rank tensor context. This work is based on a new definition of tensor rank and a new orthogonal tensor decomposition : the Alternative Unfolding HOSVD (AU-HOSVD). In the last part, these algorithms are applied to a particular radar configuration : the Space-Time Adaptive Process (STAP). This application illustrates the interest of tensor approach and algorithms based on AU-HOSVD.

Keywords : Sensor array processing, Low-rank algorithm, Multilinear algebra, Tensor decomposition, STAP, Perturbation analysis.

Table des matières

Introduction	17
1 Les outils d’algèbre multilinéaire	23
1.1 Définition d’un tenseur	23
1.2 Représentations vectorielles et matricielles	24
1.3 Opérateurs usuels	25
1.3.1 Produit scalaire	25
1.3.2 Norme euclidienne	26
1.3.3 Produit extérieur	26
1.3.4 Produit n -mode	26
1.4 Statistiques tensorielles et estimation	27
1.4.1 Cas vectoriel	27
1.4.2 Cas tensoriel	27
1.5 Décompositions tensorielles	28
1.5.1 Notion de rang	28
1.5.2 Candecomp/Parafac	30
1.5.3 Higher Order Singular Value Decomposition	31
1.6 Synthèse	34
2 Performances théoriques d’un algorithme MUSIC tensoriel basé sur la HOSVD et appliqué à des sources polarisées	37
2.1 MUSIC unidimensionnel	37
2.1.1 Modèle	37
2.1.2 Algorithme MUSIC vectoriel	39
2.1.3 Performances théoriques	40
2.1.4 Synthèse	42
2.2 Algorithmes MUSIC pour des sources polarisées	43
2.2.1 Modèle	43
2.2.2 Algorithmes MUSIC polarimétriques	44
2.3 Performances théoriques des algorithmes MUSIC polarimétriques	47
2.3.1 LV MUSIC	47
2.3.2 TMUSIC	48
2.4 Résultats	51

TABLE DES MATIÈRES

2.4.1	Paramètres	51
2.4.2	$P = 1$ source	52
2.4.3	$P = 2$ sources	52
2.5	Synthèse	55
3	Alternative Unfolding HOSVD	61
3.1	Motivations	61
3.2	Nouveaux opérateurs	62
3.2.1	Extension des n -rangs	62
3.2.2	Un nouveau type de dépliement	63
3.2.3	Un nouveau produit tensoriel	63
3.3	<i>Alternative Unfolding</i> HOSVD	64
3.3.1	Définition et existence	64
3.3.2	Cas particuliers	67
3.4	Projection orthogonale	68
3.5	Synthèse	69
4	Filtrage et détection de données multidimensionnelles comportant une structure rang faible	71
4.1	Méthodes vectorielles	71
4.1.1	Modèle	71
4.1.2	Algorithmes sans hypothèse rang faible	72
4.1.3	Algorithmes rang faible	74
4.2	Méthodes tensorielles	76
4.2.1	Modèle	76
4.2.2	Algorithmes sans hypothèse rang faible	76
4.2.3	Algorithmes rang faible	79
4.3	Synthèse	83
5	Application à des configurations STAP multidimensionnelles	87
5.1	STAP 2D classique	87
5.1.1	Présentation du radar	87
5.1.2	Modèle des signaux	89
5.1.3	Modèle du signal cible	90
5.1.4	Modèle du bruit total	91
5.1.5	Traitements rang faible adaptatifs	92
5.1.6	Synthèse	92
5.2	STAP polarimétrique	93
5.2.1	Modèle	93
5.2.2	Étude des partitions	94
5.2.3	Résultats	94
5.2.4	Synthèse	102
5.3	STAP MIMO	102
5.3.1	Modèle	103

5.3.2	Étude des partitions	106
5.3.3	Résultats	107
5.3.4	Synthèse	112
5.4	Synthèse	112
Conclusion et perspectives		115
A	Annexes du chapitre 2	121
A.1	Développement de Taylor d'un projecteur orthogonal	121
A.2	Preuve du lemme 2.3.2	124

Table des figures

1.1	Tenseur d'ordre trois, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$	24
1.2	Représentation des sept dépliements possibles pour un tenseur d'ordre trois.	26
1.3	Illustration de la décomposition CP pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$	30
1.4	Illustration de la HOSVD pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, $\mathcal{A} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}$	32
1.5	Illustration de la réduction de rang pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \times_2 \mathbf{U}_0^{(2)} \times_3 \mathbf{U}_0^{(3)}$	34
2.1	Arrivée d'une onde plane sur une Antenne Linéaire Uniforme (ALU).	38
2.2	EQM sur la direction d'arrivée, estimée avec l'algorithme MUSIC en fonction du RSB, pour une source de paramètre $\theta = 3^\circ$. L'antenne est linéaire uniforme et est composée de $N_x = 10$ capteurs. La matrice de covariance est estimée à partir de $K = 300$ échantillons. 42	42
2.3	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. La direction d'arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\boldsymbol{\rho}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $3K = 900$, $N_{rea} = 1000$	53
2.4	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. La direction d'arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\boldsymbol{\rho}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	53
2.5	Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. La direction d'arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\boldsymbol{\rho}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	54
2.6	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	55
2.7	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	56

2.8	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	56
2.9	EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	57
2.10	Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	57
2.11	Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$	58
3.1	Représentation des sept dépliements possibles pour un tenseur d'ordre trois.	62
3.2	Représentation des cinq AU-HOSVD possibles pour un tenseur d'ordre trois, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$	65
5.1	Principe et intérêt du filtrage spatio-temporel : dans cet exemple, un traitement spatial ou temporel seul ne permet pas de distinguer la cible. En revanche, en combinant ces deux informations, la cible peut être détectée.	88
5.2	Géométrie du STAP : la cible est repérée par les angles θ et ϕ . ψ_c représente l'angle entre l'antenne et la plate-forme. Dans ce travail, on prendra $\psi_c = 0$ (configuration <i>side-looking</i>).	89
5.3	Data Cube STAP et arrangement de données. Chaque case distance, de dimension $N \times M$ est mise sous forme de vecteur de taille NM afin d'être traitée.	90
5.4	SINR <i>losses</i> en fonction du nombre de données secondaires K . Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $CNR = 40 \text{ dB}$, $SNR = 45 \text{ dB}$. La cible est située à la position $(\theta = 0^\circ, v = 10 \text{ m.s}^{-1})$	97
5.5	SINR <i>losses</i> en fonction du nombre de données secondaires K . Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $CNR = 40 \text{ dB}$, $SNR = 45 \text{ dB}$. La cible est située à la position $(\theta = 0^\circ, v = 10 \text{ m.s}^{-1})$	98
5.6	SINR <i>losses</i> en fonction du CNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $N_{rea} = 1000$, $SNR = 45 \text{ dB}$. La cible est située à la position $(\theta = 0^\circ, v = 10 \text{ m.s}^{-1})$	98
5.7	SINR <i>losses</i> en fonction du CNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $N_{rea} = 1000$, $SNR = 45 \text{ dB}$. La cible est située à la position $(\theta = 0^\circ, v = 10 \text{ m.s}^{-1})$	99

TABLE DES FIGURES

5.8	SINR <i>losses</i> en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB, $K = 180$, $N_{rea} = 1000$. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ$).	99
5.9	SINR <i>losses</i> en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB, $K = 180$, $N_{rea} = 1000$. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ$).	100
5.10	P_{fa} en fonction du seuil. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB.	100
5.11	P_{fa} en fonction du seuil. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB.	101
5.12	P_d en fonction du SNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $P_{fa} = 10^{-2}$	101
5.13	P_d en fonction du SNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $P_{fa} = 10^{-2}$	102
5.14	Schéma représentant une configuration MIMO cohérente. Les émetteurs sont noté TX et les récepteurs RX . Cette configuration sera dite colocalisée si les émetteurs et les récepteurs sont situés au même endroit.	104
5.15	Exemple de formation d'une antenne virtuelle à partir d'un réseau de trois émetteurs et d'un réseau de quatre récepteurs pour une configuration MIMO cohérente colocalisée. Les formes d'onde sont supposées parfaitement orthogonales. Le cas présenté correspond à une configuration <i>sparse</i> . L'antenne virtuelle formée est plus longue que le réseau physique de réception.	104
5.16	Data cube MIMO STAP formé de N_e data cubes STAP.	105
5.17	STAP MIMO filled : SNR <i>loss</i> en fonction du nombre de données secondaires. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$	109
5.18	STAP MIMO filled : SNR <i>loss</i> en fonction du nombre de données secondaires, agrandie autour de -3 dB). Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$	110
5.19	STAP MIMO sparse : SNR <i>loss</i> en fonction du nombre de données secondaires. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$	110
5.20	STAP MIMO sparse : SNR <i>loss</i> en fonction du nombre de données secondaires, agrandie autour de -3 dB). Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$	111
5.21	STAP MIMO filled : SNR <i>loss</i> en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB.	111
5.22	STAP MIMO sparse : SNR <i>loss</i> en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB.	112

Acronymes

ALU	Antenne Linéaire Uniforme
AU-HOSVD	Alternative Unfolding Higher Order Singular Value Decomposition
CP	Candecomp/PARAFAC
CNR	Clutter to Noise Ratio
DoA	Direction of Arrival
EQM/MSE	Erreur Quadratique Moyenne/ Mean Square Error
HOSVD	Higher Order Singular Value Decomposition
LV MUSIC	Long-Vector MUSIC
MIMO	Multiple Inputs Multiple Outputs
MUSIC	MUltiple Signal Classification
RSB/SNR	Rapport Signal à Bruit/Signal to Noise Ratio
SAR	Synthetic Aperture Radar
SCM	Sample Covariance Matrix
SCT	Sample Covariance Tensor
SIMO	Single Input Multiple Outputs
SINR	Signal to Interference plus Noise Ratio
STAP	Space-Time Adaptive Process
SVD	Singular Value Decomposition
T MUSIC	Tensor MUSIC
TRVG	Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé

Symboles

Symboles généraux

\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
a	représente un scalaire
\mathbf{a}	représente un vecteur
\mathbf{A}	représente une matrice
\mathcal{A}	représente un tenseur
\mathbb{D}	représente l'ensemble des index des dimensions d'un tenseur
T	représente l'opérateur transposée
H	représente l'opérateur hermitien
$\delta_{i,j}$	représente le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
*	représente l'opérateur conjugué
\sim	signifie "distribué selon",
\otimes	représente le produit de Kronecker
\circ	représente le produit extérieur
\times_n	représente le produit n -mode
vec	est l'opérateur qui transforme une matrice $m \times n$ en un vecteur de taille mn , en concaténant ces n colonnes en une seule colonne
$E[.]$	désigne l'espérance mathématique
\mathbf{I}_m	est la matrice identité de taille $m \times m$
$\ \cdot\ $	indique la norme de Euclidienne.
P_{fa}	Probabilité de fausse alarme.
P_{nd}	Probabilité de non détection.
P_d	Probabilité de détection.

TABLE DES FIGURES

Introduction

Le principe général du traitement du signal est d'extraire de l'information à partir d'un ensemble de signaux (numériques ou analogiques), le plus fréquemment électriques mais pouvant être issus de différents types de capteurs : électromagnétiques, acoustiques, optiques . . . Le signal peut généralement se scinder en deux parties : le signal d'intérêt (lié aux informations recherchées) et une seconde partie contenant les perturbations telles que le bruit thermique, les interférences, le fouillis, les brouilleurs ... Selon le type d'informations recherchées, on parle de différentes méthodes : détection (qui permet de répondre à la question : "le signal est-il présent?"), le filtrage (pour faire ressortir le signal d'intérêt), l'estimation (qui consiste à extraire des paramètres du signal d'intérêt).

Afin de rendre compte de la réalité physique (fluctuations dues aux composants électroniques, parties du signal inconnues . . .), on utilise généralement un modèle de signal probabiliste. Par ailleurs, les signaux considérés sont des signaux numériques, généralement échantillonnés en temps. C'est pourquoi les signaux étudiés sont modélisés par des vecteurs aléatoires, gaussiens en règle générale. La plupart des algorithmes courants en traitement du signal sont basés sur ce type de modèle et reposent souvent sur l'utilisation de la matrice de covariance du signal et/ou du bruit : filtre adapté, détecteur basé sur le Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé, classificateurs . . . En pratique, la matrice de covariance du signal n'est pas connue et doit être estimée. Cette estimation est réalisée à partir de plusieurs réalisations du même vecteur aléatoire. On obtient alors des algorithmes adaptatifs. Cependant, ces algorithmes présentent un inconvénient : ils peuvent nécessiter un nombre d'échantillons important (en lien avec la taille des données) pour obtenir de bons résultats, ceci à cause des propriétés asymptotiques à partir desquels les algorithmes sont construits.

Dans certains cas, il est possible de réduire le nombre d'échantillons nécessaire en exploitant la structure du modèle. La structure peut notamment être utilisée pour faire de l'estimation structurée. Des méthodes ont été développées pour différents types de structure : Toeplitz [19], persymétrie [70, 69] (propriété de symétrie de la matrice de covariance par rapport à l'antidiagonale) ... Il existe également des méthodes d'estimation pour des bruits non gaussiens : vraisemblance empirique [73], estimateur de la matrice du point fixe [71, 72], M-estimateurs [64]... Dans ce travail, on s'intéresse à des signaux aléatoires dont la matrice de covariance est de rang faible. Il est alors possible de décomposer le signal en deux sous-espaces orthogonaux à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD). Les projecteurs orthogonaux sur chacun de ces sous-espaces peuvent alors être construits, permettant de développer des méthodes dites à sous-espace ou rang faible. On distingue deux types de cas. Soit le modèle du signal d'intérêt possède une structure qui se retrouve dans la matrice de covariance. C'est ce type de modèle qui est utilisé pour l'algorithme MUSIC [81] afin d'estimer des directions d'arrivée. Dans d'autres cas,

c'est le bruit qui a une structure particulière. Par exemple, le bruit peut se diviser en deux parties : une partie bruit blanc et une partie bruit (partiellement ou totalement) corrélé de rang faible. Le bruit rang faible peut alors être supprimé par projection orthogonale. C'est notamment le cas pour le filtre rang faible [45, 37] et pour le détecteur rang faible [80] en radar. Il a été montré [45, 37] que ces méthodes permettent d'obtenir des performances équivalentes à celles des traitements classiques tout en réduisant significativement le nombre d'échantillons nécessaire.

L'accroissement de la taille des données ne fait que renforcer l'intérêt de ce type de méthode. Toutefois cet accroissement s'accompagne souvent d'un accroissement du nombre de dimensions du système. C'est le cas pour de nombreuses applications : flux vidéo, imagerie hyperspectrale, configuration MIMO en télécommunication [78, 74] ... En traitement d'antenne, on peut citer les capteurs capables d'émettre/recevoir dans plusieurs polarisations [82, 66, 35], les configurations MIMO [31, 8, 62]. Les données considérées sont alors qualifiées de multidimensionnelles. Deux types d'approches peuvent être envisagées pour traiter ces données : les méthodes vectorielles et les méthodes tensorielles. Les méthodes vectorielles sont les plus simples à mettre en œuvre. Elles consistent à mettre les données sous forme de vecteurs pour ensuite appliquer les traitements classiques : filtres, détecteurs, méthodes rang faible [66], etc ... Elles comportent deux défauts. La taille des vecteurs étant plus importante que dans les cas classiques, les versions adaptatives de ces méthodes nécessitent un nombre d'échantillons important qui peut devenir irréaliste dans des cas pratiques. De plus, lors de la mise sous forme de vecteur, la structure des données est perdue ce qui peut entraîner une dégradation des performances et/ou un manque de robustesse. Les méthodes tensorielles permettent d'éviter cet écueil. Dans ce cas, la structure est préservée en mettant les données sous forme de tableaux multidimensionnels appelés tenseurs. Ces tenseurs peuvent ensuite être traités à l'aide de l'algèbre multilinéaire [47]. En revanche, ces méthodes sont plus complexes à utiliser puisqu'elles nécessitent d'adapter les algorithmes classiques à ce nouveau contexte.

Il convient dans un premier temps de définir ce que sont des données rang faible tensorielles. On trouve dans la littérature deux définitions de rang tensoriel. La première est une extension de la définition matricielle [40, 38] : le rang correspond au nombre minimum de tenseurs d'ordre un qu'il faut sommer pour obtenir le tenseur considéré. Cette définition présente un désavantage : il n'existe pas de méthodes qui permettent d'estimer le rang tensoriel dans le cas général [39]. Selon l'autre définition, un tenseur ne possède plus un rang mais autant de rang que le tenseur possède de dimensions. On parle alors de n -rangs d'un tenseur [52, 58]. Ces deux définitions aboutissent à deux familles de décompositions tensorielles : Candecomp/Parafac [38] et ses dérivées d'un côté, et les décompositions de Tucker [87], en particulier la HOSVD [58] de l'autre. En effet, il a été montré dans [53] qu'il n'existe pas, dans le cas général, de décomposition tensorielle qui possède toutes les propriétés de SVD. Ainsi le choix de la décomposition sera fortement lié à l'application considérée.

Plus précisément, Candecomp/Parafac (CP) consiste à décomposer un tenseur comme une somme de tenseur d'ordre un (le nombre de terme étant le rang du tenseur). Cette décomposition possède des conditions d'identifiabilité faibles, ce qui permet de l'utiliser pour faire de l'estimation, en particulier pour des modèles paramétriques où le rang du tenseur est connu. En particulier, CP a été utilisé en psychométrie [20, 38], en chimiométrie [2], en traitement d'antenne [85, 67], en télécommunications [84, 86, 56].

CP a également été utilisé pour faire de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) [57]. Toutefois, CP possède des contraintes rédhibitoires pour les méthodes rang faibles. Les éléments de CP ne sont pas orthogonaux entre eux. De plus, contrairement au cas matriciel avec la SVD [27], la meilleure approximation de rang R' d'un tenseur n'est pas obtenue en sommant R' éléments de ces décompositions [47].

L'*Higher Order Singular Value Decomposition* (HOSVD), introduite par De Lathauwer [58] permet de décomposer un tenseur sous la forme d'un tenseur noyau et d'autant de matrices unitaires que le nombre de dimensions du tenseur. Contrairement à CP les éléments de la HOSVD sont simples à calculer. Elle permet aussi d'étendre facilement la notion de réduction de rang, en utilisant la notion de n -rangs [59]. Grâce à cette propriété, la HOSVD a été utilisée, entre autres, en traitement d'antenne [61, 7, 66, 36], en traitement d'image [68], en vision par ordinateur [88], en *data mining* [79] et en compression vidéo [89]. Enfin, il est possible d'étendre le concept de projection orthogonale aux tenseurs en utilisant la HOSVD [7].

Les contributions de cette thèse se concentrent autour de trois axes. De nombreux algorithmes de traitement d'antenne basés sur une projection ont été adaptés au cas tensoriel grâce à la HOSVD : MUSIC [16, 15], ESPRIT [36] ... Dans le cas vectoriel, les propriétés de ces algorithmes ont été étudiés théoriquement. En particulier, les performances de MUSIC ont été calculées grâce à la méthode des perturbateurs [42, 49]. En revanche, il n'existe pas d'études théoriques pour les algorithmes tensoriels. Dans [58], De Lathauwer a proposé une analyse des perturbations à l'ordre un de la HOSVD, mais ce travail est resté sans suites. Un des buts de cette thèse est donc de calculer l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) des directions d'arrivées de sources pour un algorithme MUSIC tensoriel basé sur la HOSVD. Cet algorithme sera appliqué à un modèle de sources polarisées. Le calcul sera validé à l'aide de simulations de Monte-Carlo.

Un autre aspect de ce travail concerne le développement de filtres rang faible et de détecteurs rang faible dans un contexte tensoriel. Il serait envisageable de faire ce travail en utilisant la HOSVD. Toutefois, un examen de la manière dont la réduction de rang est réalisée avec la HOSVD fait ressortir que seul un certain type de structure rang faible peut être exploité par la HOSVD. En effet, par construction, lorsque aucun des n -rangs d'un tenseur n'est déficient, la HOSVD ne permet pas de faire de la réduction de rang. Or il existe des données dont les n -rangs ne sont pas déficients mais qui présentent une structure rang faible. Cette structure se situe alors dans une combinaison de dimensions. Afin de formaliser cette notion, une nouvelle définition de rang tensoriel est introduite. A partir de cette nouvelle structure, une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'*Alternative Unfolding HOSVD* (AU-HOSVD) est ensuite proposée. Contrairement à la HOSVD, l'AU-HOSVD n'est pas une décomposition mais un ensemble de décompositions différentes selon la manière de combiner les dimensions entre elles. Enfin, en combinant l'AU-HOSVD avec la nouvelle notion de rang, il est possible d'étendre le concept de projection orthogonale tensorielle à ces nouvelles structures rang faible. Cette nouvelle décomposition peut sembler s'éloigner des propriétés classiques des données (chaque dimension correspondant à une quantité physique : capteurs, fréquence, polarisation, données secondaires ...). Cependant, au prix d'une complexité légèrement supérieure, elle permet une amélioration des performances des traitements dans de nombreux cas de figures, comme cela sera illustré dans ces travaux de thèse. Cette décomposition débouchera sur un nouvel ensemble de filtres et de détecteurs rang faible.

Dans un troisième temps, ces nouveaux algorithmes basés sur l'AU-HOSVD seront appliqués à une configuration radar particulière : le Traitement Spatio-Temporel Adaptatif ou *Space-Time Adaptive Pro-*

cess (STAP) en anglais. Le STAP est utilisé dans des configurations radar aéroporté afin de détecter une cible mobile au sol noyée dans un fouillis (*clutter*) de sol [90]. Les configurations STAP classiques comportent deux dimensions : une dimension spatiale et une dimension temporelle. Pour ces configurations une approche vectorielle, rang faible ou non, est utilisée. Étant donné que le nombre de dimensions est égale à deux, les méthodes tensorielles ne présentent pas vraiment d'intérêt. En revanche, de nouvelles configurations STAP sont apparues récemment qui comportent des dimensions supplémentaires (on peut citer par exemple la polarisation [82] ou encore le MIMO [65]). L'approche tensorielle paraît alors pertinente pour ce type de configuration. Deux configurations STAP multidimensionnelles seront étudiées pour une approche vectorielle et une approche tensorielle : le STAP polarimétrique [82] et le STAP MIMO [65]. Des simulations de Monte-Carlo permettront de valider l'intérêt de l'approche tensorielle.

Cette thèse est organisée de la manière suivante. Le chapitre 1 dresse un état de l'art non exhaustif des résultats en analyse tensorielle pour le traitement de signal. Plus précisément, le but de ce chapitre est de définir le cadre nécessaire à l'élaboration de traitements rang faible. Après avoir rappelé la définition d'un tenseur et les différents opérateurs tensoriels usuels, les outils de statistiques tensoriels utilisés sont introduits. Ce chapitre se termine par une présentation des deux principales décompositions tensorielles : Candecomp/Parafac et la HOSVD. Cette partie permet de montrer que la HOSVD possède les propriétés nécessaires pour développer des traitements rang faible, contrairement à CP.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un premier traitement rang faible tensoriel basé sur la HOSVD : une extension tensorielle de l'algorithme MUSIC. Cet algorithme est appliqué à un modèle de sources polarisées [66]. Deux modèles de sources polarisées sont introduits : un vectoriel et un tensoriel. Un algorithme MUSIC est ensuite proposé pour chacun de ces modèles. Le premier consiste à mettre les données sous forme de vecteurs et à appliquer l'algorithme MUSIC vectoriel. Le second consiste à mettre les données sous la forme de matrices et à appliquer une version tensorielle de MUSIC basée sur la HOSVD, adaptée de [16]. Le but de ce chapitre est de comparer ces deux approches. Cette comparaison s'appuie sur le calcul théorique de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) sur les directions d'arrivée pour les deux algorithmes, mené à l'aide d'une analyse des perturbations [49], ainsi que sur des simulations de Monte-Carlo.

Le chapitre 3 amorce un travail plus général. Une nouvelle définition de rang tensoriel, qui généralise la notion de n -rang, est proposée. A partir de cette nouvelle structure, une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'AU-HOSVD est ensuite introduite. Les propriétés de cette nouvelle décomposition sont étudiées. En particulier, on montre qu'il est possible d'étendre le concept de projection orthogonale tensorielle à ces nouvelles structures rang faible.

Dans le chapitre 4, un modèle de données multidimensionnelles général est proposé et s'appuie sur le modèle de données rang faible développé au chapitre 3. En utilisant l'AU-HOSVD, un nouvel ensemble de filtres et de détecteurs rang faible est ensuite développé. Notons que l'AU-HOSVD offre un cadre plus général de décompositions orthogonales et qu'en contre-partie, la difficulté majeure résidera dans le choix de la manière de combiner les dimensions (sans avoir à tester toutes les possibilités, ce qui serait impossible en pratique). Des éléments de réponses seront donc proposés pour sélectionner les combinaisons de dimensions pertinentes.

Le chapitre 5 est l'occasion d'appliquer les traitements développés dans les chapitres 3 et 4 à deux configurations STAP multidimensionnelles : le STAP polarimétrique [82] et le STAP MIMO [65]. Pour ces deux configurations, un modèle tensoriel est proposé. Enfin des simulations de Monte-Carlo permet-

tront d'illustrer l'intérêt de l'approche tensorielle par rapport à une approche vectorielle.

Ce manuscrit se termine par une synthèse générale et des perspectives. La synthèse permet de faire le point sur les principaux travaux et résultats présentés dans cette thèse. Les perspectives détaillent, de manière non exhaustive, les travaux qui pourraient être menés à partir des résultats de cette thèse.

Chapitre 1

Les outils d'algèbre multilinéaire

Le but de ce chapitre est de définir les principaux opérateurs et outils couramment utilisés en algèbre multilinéaire qui seront nécessaires à l'étude des algorithmes de traitement d'antenne proposés dans cette thèse. En d'autres termes, il s'agit de constituer une "boîte à outils" tensorielle qui permettra de développer des algorithmes de traitement d'antenne tensoriels rang faible. Après avoir rappelé brièvement la définition d'un tenseur, on s'intéressera à la notion de représentation matricielle d'un tenseur, notion qui se révélera importante dans la suite de ce travail. On introduira ensuite les différents opérateurs tensoriels utilisés. On poursuivra par une présentation des outils de statistiques tensoriels. On terminera par une présentation des deux principales décompositions tensorielles : Candecomp/Parafac et la HOSVD. La majorité des exemples cités dans ce chapitre proviennent de l'article de Kolda et Bader [48] qui constitue une excellente "porte d'entrée" dans l'algèbre multilinéaire et particulièrement dans le domaine des décompositions tensorielles.

1.1 Définition d'un tenseur

Les outils d'algèbre linéaire et plus particulièrement les vecteurs et les matrices, permettent d'indexer des données à l'aide d'un ou deux indices. Lorsque le nombre de dimensions d'un système est supérieur à deux, il est naturel d'introduire un nouvel outil : le tenseur.

Définition 1.1.1 \mathcal{A} , un tenseur d'ordre P , est un tableau à P dimensions défini par :

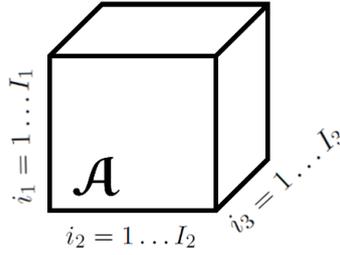
$$\mathcal{A} = \{a_{i_1, \dots, i_P}\}_{i_1 \in I_1, \dots, i_P \in I_P} \quad (1.1)$$

où a_{i_1, \dots, i_P} est un scalaire et I_1, \dots, I_P sont des sous-ensembles de \mathbb{N} . De plus, un tenseur possède aussi la propriété de multilinéarité [63, 23] lors d'un changement de coordonnées.

On note $\mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ l'ensemble des tenseurs d'ordre P de dimensions $I_1 \times \dots \times I_P$ à valeurs complexes.

Afin d'illustrer cette notion de multilinéarité, on considère $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ un tenseur d'ordre trois et $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{I_1 \times J_1}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{I_2 \times J_2}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{I_3 \times J_3}$ trois matrices inversibles qui définissent un changement de coordonnées. Alors le tenseur $\mathcal{A}' \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times J_3}$ dans le nouveau système de coordonnées peut s'écrire en fonction de \mathcal{A} :

$$a'_{j_1 j_2 j_3} = \sum_{i_1, i_2, i_3} e_{i_1 j_1} f_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} a_{i_1 i_2 i_3}. \quad (1.2)$$


 FIGURE 1.1 – Tenseur d'ordre trois, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$.

On peut facilement définir deux premiers opérateurs sur les tenseurs : l'opérateur somme et la multiplication par un scalaire. La somme de deux tenseurs est définie comme la somme élément par élément. De même, la multiplication par un scalaire est définie comme la multiplication élément par élément. L'ensemble des tenseurs d'ordre P de dimensions $I_1 \times \dots \times I_P$, muni de ces deux opérateurs, forme un espace vectoriel.

Cette définition englobe les outils d'algèbre linéaire : un scalaire est un tenseur d'ordre zéro, un vecteur un tenseur d'ordre un et une matrice un tenseur d'ordre deux. La plupart des exemples proposés dans ce travail concerneront les tenseurs d'ordre trois qui permettent d'appréhender les caractéristiques propres aux tenseurs (contrairement aux vecteurs ou aux matrices) tout en étant faciles à représenter (sous forme de cube, voir figure 1.1).

Enfin, de manière analogue au cas matriciel, il existe des structures particulières pour les tenseurs : diagonale, symétrique, hermitienne ... Dans ce travail on n'utilisera que la notion de tenseur hermitien.

Définition 1.1.2 Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre $2P$. \mathcal{H} est hermitien si et seulement si ses éléments respectent la condition suivante :

$$h_{i_1, \dots, i_P, j_1, \dots, j_P} = h_{j_1, \dots, j_P, i_1, \dots, i_P}^* \quad \text{pour tout } i_1, \dots, i_P \text{ et } j_1, \dots, j_P. \quad (1.3)$$

1.2 Représentations vectorielles et matricielles

Afin de faciliter l'application de certains opérateurs, il peut être pertinent de réarranger les éléments d'un tenseur sous forme de matrice. On parle alors de dépliement et de matrice dépliant. On ne considère pas tous les déploiements matriciels possibles mais seulement ceux qui préservent les dimensions du tenseur.

Définition 1.2.1 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P , $\mathbb{D} = \{1, \dots, P\}$ l'ensemble des indices des dimensions de \mathcal{A} et \mathbb{D}_l un sous ensemble de \mathbb{D} . On note $I_{\mathbb{D}}$ pour $\prod_{p=1}^P I_p$ et de manière similaire $I_{\mathbb{D}_l}$ pour le produit des dimensions associées aux éléments de \mathbb{D}_l :

$$I_{\mathbb{D}_l} = \prod_{p \in \mathbb{D}_l} I_p. \quad (1.4)$$

Grâce à ces notations il est possible de réécrire simplement tous les dépliements considérés dans [48].

On note $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}$, la matrice dépliant de taille $I_{\mathbb{D}_l} \times I_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_l}$. On note d_1, \dots, d_G les éléments de \mathbb{D}_l et e_1, \dots, e_H les éléments de $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_l$. Grâce à ces notations, on peut décrire les éléments de la matrice dépliant $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}$ en fonction du tenseur \mathcal{A} :

$$([\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l})_{jk} = a_{i_1 \dots i_P} \quad (1.5)$$

avec

$$j = 1 + \sum_{g=1}^G \left((i_{d_g-1}) \prod_{g'=1}^{g-1} I_{g'} \right) \text{ et } k = 1 + \sum_{h=1}^H \left((i_{e_h-1}) \prod_{h'=1}^{h-1} I_{h'} \right) \quad (1.6)$$

Pour un tenseur d'ordre P , il existe $2^P - 1$ dépliements de ce type possibles. La figure 1.2 représente les sept dépliements possibles pour un tenseur d'ordre trois. L'opérateur inverse existe toujours à condition de connaître \mathbb{D} et \mathbb{D}_l .

Pour des raisons de clarté, on donne un nom particulier aux dépliements suivants.

Définition 1.2.2 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$. Le dépliement $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}}$ transforme le tenseur \mathcal{A} en vecteur. Il est noté $\text{vec}(\mathcal{A})$. L'opérateur inverse est noté $\text{vec}^{-1}(\mathcal{A})$.

Définition 1.2.3 Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \dots \times I_P \times I_1 \times I_2 \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre $2P$ et $\mathbb{D}_l = \{1, \dots, P\}$. Le dépliement $[\mathcal{R}]_{\mathbb{D}_l}$ est une matrice carrée de taille $I_1 \dots I_P \times I_1 \dots I_P$. Il est noté $\text{SqMat}(\mathcal{R})$.¹ On note SqMat^{-1} l'opérateur inverse.

1.3 Opérateurs usuels

En plus de l'addition et la multiplication par un scalaire définies précédemment, on a recours à un certain nombre d'opérateurs tensoriels classiques [48] dont les définitions sont données ci-dessous.

1.3.1 Produit scalaire

Afin de pouvoir parler de tenseur de rang faible, il est nécessaire de définir une notion d'orthogonalité entre tenseurs. Pour cela, on considère l'espace vectoriel des tenseurs muni du produit scalaire suivant.

Définition 1.3.1 Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ deux tenseurs. Leur produit scalaire, $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, est défini comme suit :

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \triangleq \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_P} b_{i_1 i_2 \dots i_P}^* a_{i_1 i_2 \dots i_P} \quad (1.7)$$

On reconnaît le produit scalaire usuel. De plus, en utilisant l'opérateur vec , il se réécrit :

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \text{vec}(\mathcal{B})^H \text{vec}(\mathcal{A}). \quad (1.8)$$

Les tenseurs munis de ce produit scalaire constituent un espace euclidien et on peut donc définir la norme associée.

1. Cet opérateur est particulièrement utile pour transformer un tenseur hermitien en matrice hermitienne.

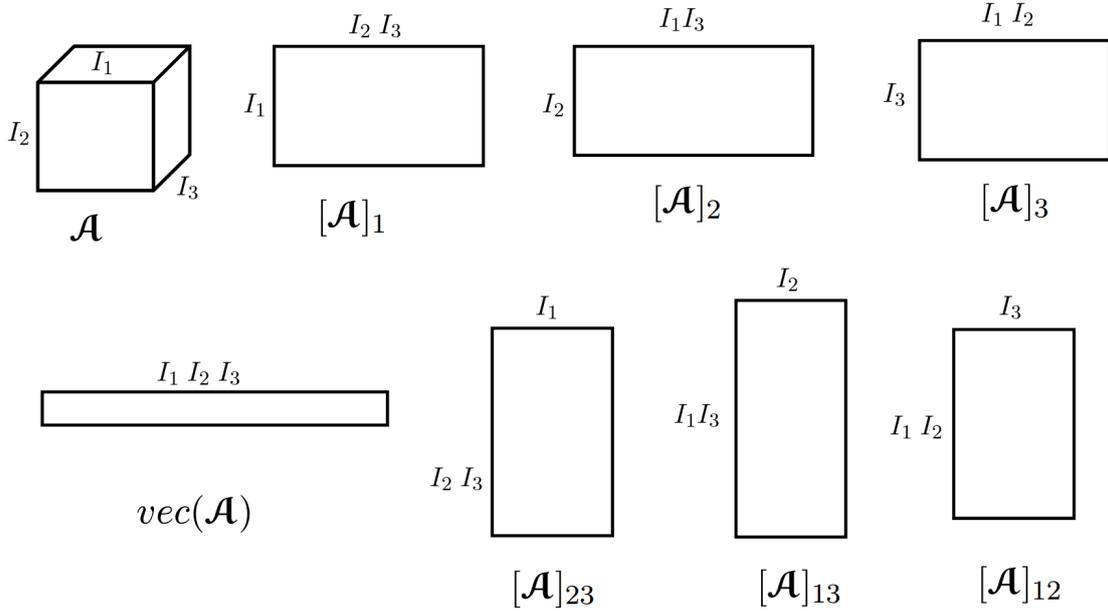


FIGURE 1.2 – Représentation des sept dépliements possibles pour un tenseur d'ordre trois.

1.3.2 Norme euclidienne

Définition 1.3.2 A l'aide du produit scalaire, on définit la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$, d'un tenseur \mathcal{A} de la manière suivante :

$$\|\mathcal{A}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle} \quad (1.9)$$

1.3.3 Produit extérieur

Définition 1.3.3 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \dots \times J_{P'}}$ deux tenseurs d'ordre P et P' . Le produit extérieur de ces deux tenseurs, noté $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times J_1 \times \dots \times J_{P'}}$ est un tenseur d'ordre $(P + P')$. Les éléments de ce tenseur sont définis de la manière suivante :

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{i_1 \dots i_P j_1 \dots j_{P'}} \triangleq a_{i_1 \dots i_P} b_{j_1 \dots j_{P'}} \quad (1.10)$$

1.3.4 Produit n -mode

Définition 1.3.4 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$, un tenseur d'ordre P et $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$, une matrice. Le produit n -mode entre \mathcal{A} et \mathbf{E} est noté \times_n . Il permet de multiplier un tenseur par une matrice selon la n -ème dimension :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{A} \times_n \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times J_n \times \dots \times I_P} \\ \iff (\mathcal{G})_{i_1 \dots j_n \dots i_P} &\triangleq \sum_{i_n} a_{i_1 \dots i_n \dots i_P} e_{j_n i_n} \\ \iff [\mathcal{G}]_n &= \mathbf{E}[\mathcal{A}]_n \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le tenseur résultant, \mathcal{G} est aussi d'ordre P .

Le produit n -mode possède les deux propriétés suivantes :

— Associativité : Pour deux matrices, $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$ et $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{K_n \times J_n}$ on a

$$\mathcal{A} \times_n \mathbf{E} \times_n \mathbf{F} = \mathcal{A} \times_n \mathbf{FE}. \quad (1.12)$$

— Commutativité : pour deux matrices, $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{J_{n'} \times I_{n'}}$ et $n \neq n'$ on a

$$\mathcal{A} \times_n \mathbf{E} \times_{n'} \mathbf{G} = \mathcal{A} \times_{n'} \mathbf{G} \times_n \mathbf{E}. \quad (1.13)$$

1.4 Statistiques tensorielles et estimation

Pour être en mesure de proposer un modèle de signal aléatoire tensoriel, il convient de définir ce qu'est un tenseur aléatoire gaussien ainsi que le tenseur de covariance associé. De plus, comme dans le cas vectoriel, la covariance des données n'est pas connue. Il est donc nécessaire de proposer un estimateur de ce tenseur de covariance.

1.4.1 Cas vectoriel

Soit \mathbf{x} un vecteur gaussien aléatoire centré de matrice de covariance $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$. Soit $\mathbf{x}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, $k = 1 \dots K$, K vecteurs aléatoires suivant la même loi que \mathbf{x} . Dans ce cas, l'estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) de la matrice de covariance est donné par la Sample Covariance Matrix (SCM), couramment utilisée et dont les propriétés sont parfaitement caractérisées. L'estimée de \mathbf{R} , notée $\hat{\mathbf{R}}$, est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \quad (1.14)$$

1.4.2 Cas tensoriel

Définition

Dans le cadre de cette thèse, on définit un tenseur aléatoire gaussien comme suit. Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P et $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre $2P$. \mathcal{X} est un tenseur aléatoire gaussien centré, de tenseur de covariance \mathcal{R} si et seulement si $\text{vec}(\mathcal{X})$ est un vecteur gaussien aléatoire centré, de matrice de covariance $\text{SqMat}(\mathcal{R})$. Cette définition est compatible avec la définition de tenseur de covariance introduite dans [66] : $\mathcal{R} = E[\mathcal{X} \circ \mathcal{X}^*]$.

Tenseur de covariance et estimation

Afin d'estimer le tenseur de covariance, on utilisera l'extension de la SCM, le *Sample Covariance Tensor*. L'estimée de \mathcal{R} est notée $\hat{\mathcal{R}}$. Soit \mathcal{X}_k , $k = 1 \dots K$, K tenseurs aléatoires gaussiens de même loi que \mathcal{X} . La SCT est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathcal{X}_k \circ \mathcal{X}_k^* \quad (1.15)$$

Cet estimateur a été proposé dans [36]. On pose $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathcal{X})$, $\mathbf{x}_k = \text{vec}(\mathcal{X}_k), \forall k$, $\mathbf{R} = \text{SqMat}(\mathcal{R})$ et $\hat{\mathbf{R}}$ la SCM de \mathbf{R} . La définition de \mathcal{X} et l'équation (1.15) permettent de déduire la relation entre la SCM et la SCT :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \quad (1.16)$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \text{SqMat}(\mathcal{X}_k \circ \mathcal{X}_k^*) \quad (1.17)$$

$$= \text{SqMat}(\hat{\mathcal{R}}). \quad (1.18)$$

Ce résultat permet de conclure que le SCT a les mêmes propriétés statistiques que la SCM.

1.5 Décompositions tensorielles

L'extension des méthodes rang faible à des modèles tensoriels nécessite de pouvoir factoriser le tenseur de covariance. Dans le cas matriciel, on utilise la SVD qui permet de décomposer une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$ comme suit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H, \quad (1.19)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices unitaires et $\mathbf{\Sigma}$ une matrice diagonale.

En notant r le rang de \mathbf{A} , λ_i , $i = 1 \dots r$ les valeurs propres non nulles de \mathbf{A} , \mathbf{u}_i , $i = 1 \dots r$ les colonnes de \mathbf{U} et \mathbf{v}_i , $i = 1 \dots r$ les colonnes de \mathbf{V} , on peut réécrire la SVD comme la somme de r matrices de rang un :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H, \quad (1.20)$$

avec $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{i,j}$ et $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$, $i = 1 \dots r$, $j = 1 \dots r$, où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, puisque les matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} forment chacune une base orthogonale, la SVD s'interprète géométriquement comme un changement de base.

Dans le cadre de l'algèbre multilinéaire la situation est différente. En effet, il a été montré dans la thèse de De Lathauwer [53] qu'il n'existe pas, dans le cas général, de décomposition tensorielle qui possède toutes les propriétés de SVD. Plusieurs décompositions tensorielles ont donc été proposées. Elles peuvent être classées en deux grandes familles : Candecomp/Parafac [38] et ses dérivées d'un côté, et les décompositions de Tucker [87], en particulier la HOSVD [58] de l'autre.

1.5.1 Notion de rang

Avant de détailler ces deux familles de décompositions tensorielles, il convient de définir la notion de rang. Contrairement au cas matriciel, il existe plusieurs façons de définir le rang d'un tenseur. On donne ici les deux principales. Une nouvelle définition sera proposée dans le chapitre 4.

Extension du rang matriciel

Le rang d'une matrice peut se définir de plusieurs manières qui donnent toutes le même résultat. Il s'agit à la fois du nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants, du nombre de valeurs propres non nulles de cette matrice, du nombre minimal de matrices de rang un (pouvant s'écrire sous la forme d'un produit de deux vecteurs colonnes $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$) à sommer pour obtenir cette matrice ... Une première définition de rang tensoriel a été proposée par Hitchcock [40].

Définition 1.5.1 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P . \mathcal{A} est un tenseur d'ordre un si et seulement si il existe P vecteurs, $\mathbf{a}^{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1}, \dots, \mathbf{a}^{(P)} \in \mathbb{C}^{I_P}$, tels que :

$$\mathcal{A} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(P)}. \quad (1.21)$$

Cette définition est le prolongement naturel de la notion de matrice de rang un (en remarquant que pour deux vecteurs colonnes $\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}$).

Définition 1.5.2 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P . Le rang de \mathcal{A} est défini comme le nombre minimum de tenseur d'ordre un à sommer pour obtenir \mathcal{A} . En d'autres termes, un tenseur \mathcal{A} est de rang R si R est le plus petit entier qui vérifie :

$$\mathcal{A} = \sum_{r=1}^R \mathcal{A}_r \quad (1.22)$$

où les $\mathcal{A}_r, r = 1 \dots R$, sont des tenseurs d'ordre un.

Cette définition prolonge un des aspects du rang matriciel mais présente un désavantage : il n'existe pas de méthodes qui permettent d'estimer le rang tensoriel dans le cas général [39]. Il peut cependant être calculé pour certaines configurations particulières (voir [52, 5, 6] pour le cas des tenseurs d'ordre trois).

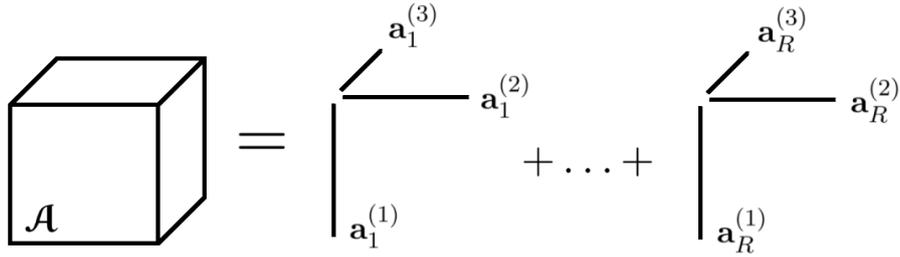
n -rangs

Une autre définition du rang a été proposée par Kruskal [52], puis reprise par De Lathauwer [58]. Selon cette définition, un tenseur ne possède plus un rang mais autant de rang que le tenseur possède de dimensions.

Définition 1.5.3 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P . \mathcal{A} est un tenseur de n -rangs (r_1, \dots, r_P) si et seulement si :

$$r_p = \text{rank}([\mathcal{A}]_p) \quad \forall p = 1 \dots P. \quad (1.23)$$

Même si les n -rangs ne peuvent pas être vus comme une extension directe du rang matriciel, ils présentent l'avantage de pouvoir être calculés facilement puisqu'ils sont égaux au rang de la matrice dépliant le tenseur dans la n -ème direction.


 FIGURE 1.3 – Illustration de la décomposition CP pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$.

1.5.2 Candecomp/Parafac

En reprenant la première définition du rang donnée dans la section précédente, une première décomposition tensorielle a été proposée : Candecomp/Parafac (CP). Cette décomposition a d'abord été introduite dans la communauté mathématiques par Hitchcock [40] sous le terme de *polyadic decomposition*, puis en psychométrie par Harshman [38] sous le nom de *PARAllel FACTors* (PARAFAC). Afin d'unifier les dénominations, le terme de *CANonical DECOMPosition* (CANDECOMP)/PARAFAC (CP) a été proposé par Kiers [44]. Son introduction en traitement du signal est due à Sidiropoulos au début des années 2000 [85, 84]. Elle consiste à décomposer un tenseur \mathcal{A} en une somme de tenseurs d'ordre un, le nombre de termes étant le rang du tenseur (voir figure 1.3).

$$\mathcal{A} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_r^{(P)} \quad (1.24)$$

On note $\mathbf{A}^{(p)} = [\mathbf{a}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{a}_R^{(p)}]$, $p = 1 \dots P$. Contrairement à la SVD, les éléments issus de la décomposition CP ne sont pas orthogonaux entre eux. De même, la meilleure approximation de rang R' d'un tenseur n'est pas obtenue en sommant R' éléments de la décomposition [47]. En revanche, les conditions d'unicité sur CP sont beaucoup plus faibles que sur la SVD puisque les matrices $\mathbf{A}^{(p)}$ sont uniques (à une permutation des colonnes et à un facteur d'échelle près) sous certaines conditions. Il est donc possible d'identifier les éléments de CP.

Toutefois la mise en œuvre de CP présente plusieurs difficultés. D'une part, pour que sa décomposition CP soit unique, un tenseur doit vérifier la condition de Kruskal [51, 83]. Pour énoncer cette condition, on définit le k -rang d'une matrice \mathbf{A} , noté $k_{\mathbf{A}}$ comme le nombre k maximum, tel que toute famille issue de k colonnes de \mathbf{A} soit une famille libre. La décomposition CP d'un tenseur \mathcal{A} d'ordre P est unique si l'inégalité suivante est respectée :

$$\sum_{p=1}^P k_{\mathbf{A}^{(p)}} \geq 2R + (P - 1). \quad (1.25)$$

D'autre part, la connaissance de R est aussi nécessaire à la décomposition. Par ailleurs, la question du calcul des éléments de CP se pose. La méthode la plus souvent utilisée repose sur un algorithme des moindres carrés alternés [38] même si d'autres méthodes plus performantes sont apparus récemment [29, 1]. De plus, étant donné que le rang d'un tenseur ne peut pas être calculé dans le cas général,

l'algorithme est testé pour des valeurs croissantes de rang jusqu'à ce que $\|\mathcal{A} - \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_r^{(P)}\|$ soit arbitrairement proche de zéro. Néanmoins il y a des cas où cette méthode ne fonctionne pas. En effet, il existe des tenseurs pour lesquels on peut trouver une suite de tenseurs de rang inférieur qui peuvent être arbitrairement proche du tenseur décomposé.

La propriété d'identifiabilité de CP permet de l'utiliser pour faire de l'estimation, en particulier pour des modèles paramétriques où le rang du tenseur est connu. En particulier, CP a été utilisé en psychométrie [20, 38], en chimiométrie [2], en traitement d'antenne [85, 67], en télécommunications [84, 86, 56]. CP a également été utilisé pour faire de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) [57].

Des extensions de CP ont été introduites, en particulier en télécommunications : Constrained Tucker [25], CONFAC [24], PARATUCK [26, 30]. Ces décompositions ajoutent des contraintes sur les matrices $\mathbf{A}^{(p)}$. Ces contraintes permettent entre autres de mieux modéliser l'application et d'améliorer les performances en terme d'estimation.

Toutes ces décompositions ont des caractéristiques communes :

- Elles ont des conditions d'unicité suffisamment faibles pour pouvoir faire de l'identification de modèle, et donc de l'estimation.
- Elles sont faciles à mettre en œuvre pour des modèles paramétriques.
- Leurs éléments ne sont pas orthogonaux entre eux.
- Contrairement au cas matriciel avec la SVD [27], la meilleure approximation de rang R' d'un tenseur n'est pas obtenue en sommant R' éléments de ces décompositions (voir l'exemple donné par Kolda dans [47]).

Par ailleurs, De Lathauwer a proposé un nouvel ensemble de décompositions tensorielles : les *block term decompositions* [55, 54, 60]. Cette approche permet d'unifier CP et ses extensions ainsi que la décomposition de Tucker. Toutefois les décompositions issues de cet ensemble ne sont pas, en général, orthogonales.

Dans la suite de ce travail, on étudiera des modèles non paramétriques présentant une structure rang faible. Ces décompositions ne seront donc pas utilisées.

1.5.3 Higher Order Singular Value Decomposition

Décomposition de Tucker

La décomposition de Tucker a été introduite en psychométrie dans [87]. Elle décompose un tenseur \mathcal{A} de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{B}^{(1)} \dots \times_P \mathbf{B}^{(P)}, \quad (1.26)$$

avec $\mathbf{B}^{(p)} \in \mathbb{C}^{I_p \times J_p}$, $p = 1 \dots P$ et $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \dots \times J_P}$. Cette décomposition peut s'interpréter comme un changement de base du tenseur \mathcal{A} . En particulier si $J_p < I_p$, il est possible de faire de la compression de données. En revanche, contrairement à CP, la décomposition de Tucker n'est pas unique. En effet si on considère une matrice orthogonale $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_1}$, le tenseur \mathcal{A} peut aussi être décomposé de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{G} \times_1 \mathbf{D}) \times_1 \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^H \dots \times_P \mathbf{B}^{(P)}. \quad (1.27)$$

En général, les éléments de la décomposition de Tucker n'ont pas de structures particulières mais des contraintes peuvent être ajoutées, conduisant à des cas particuliers [50, 41, 58, 88]. Dans la suite de ce

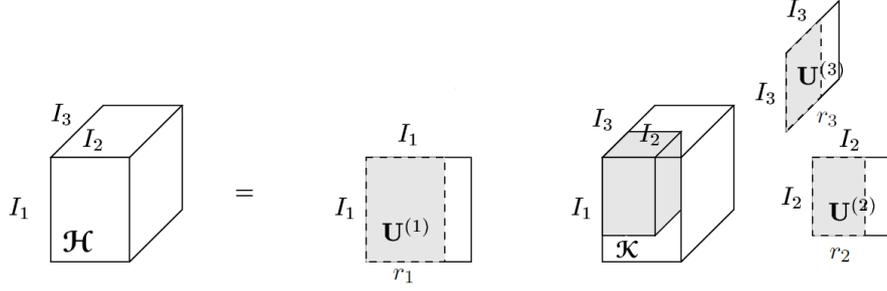


FIGURE 1.4 – Illustration de la HOSVD pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, $\mathcal{A} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}$.

travail on ne s'intéressera qu'à un cas particulier de décomposition de Tucker : la HOSVD.

HOSVD

Dans [58], De Lathauwer a introduit un cas particulier de décomposition de Tucker en ajoutant des contraintes d'orthogonalité sur les matrices.

Définition 1.5.4 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P . La HOSVD permet de décomposer \mathcal{A} de la manière suivante (voir exemple figure 1.4) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_P \mathbf{U}^{(P)}, \quad (1.28)$$

où $\forall p = 1 \dots P$, $\mathbf{U}^{(p)}$ est unitaire. \mathcal{K} est appelé le tenseur noyau. Le sous tenseur de \mathcal{K} , obtenu en fixant le p -ème indice à α , est noté $\mathcal{K}_{i_p=\alpha}$ et possède les propriétés suivantes pour $p = 1 \dots P$:

- $\langle \mathcal{K}_{i_p=\alpha}, \mathcal{K}_{i_p=\beta} \rangle = 0$ lorsque $\alpha \neq \beta$
- $\|\mathcal{K}_{i_p=1}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{K}_{i_p=I_p}\|$.

Contrairement à CP les éléments de la HOSVD sont simples à calculer. Les matrices sont obtenues à partir de la SVD du dépliement de \mathcal{A} dans la p -ème direction, $[\mathcal{A}]_p = \mathbf{U}^{(p)} \mathbf{\Sigma}^{(p)} \mathbf{V}^{(p)H}$. Le tenseur noyau s'obtient de la manière suivante :

$$\mathcal{K} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)H} \dots \times_P \mathbf{U}^{(P)H}. \quad (1.29)$$

En revanche le coût calculatoire de la HOSVD est important. Elle nécessite de calculer autant de SVD que l'ordre du tenseur, soit un nombre d'opérations égale à (voir [58]) :

$$4 \left(\prod_{p=1}^P I_p \right) \left(\sum_{p=1}^P I_p \right). \quad (1.30)$$

Enfin, on peut déceler une première limite de la HOSVD. En effet, seules les matrices singulières gauches $\mathbf{U}^{(p)}$ sont utilisés, ce qui correspond à l'information contenue dans les dimensions du tenseur prises indépendamment les unes des autres. On peut se demander si il ne serait pas possible, par exemple, d'intégrer les matrices singulières droites afin d'extraire d'autres types d'informations.

Cas particulier : tenseurs hermitiens

Si $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ est un tenseur d'ordre $2P$ hermitien, la HOSVD de \mathcal{H} à la forme suivante [36] :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_P \mathbf{U}^{(P)} \times_{P+1} \mathbf{U}^{(1)*} \dots \times_{2P} \mathbf{U}^{(P)*}. \quad (1.31)$$

Meilleure approximation de rang (r_1, \dots, r_P)

A la différence de CP, la HOSVD permet d'étendre facilement la notion de réduction de rang, en utilisant la notion de n -rangs. On cherche à approximer un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ d'ordre P par un tenseur $\hat{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$, qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \dots \times_P \mathbf{U}_0^{(P)}. \quad (1.32)$$

où $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{r_1 \times \dots \times r_P}$ est un tenseur d'ordre P et les matrices $\mathbf{U}_0^{(p)} \in \mathbb{C}^{I_p \times r_p}$ sont unitaires. De Lathauwer a montré dans [59] que le tenseur \mathcal{B} qui minimise la fonction $f(\mathcal{B}) = \|\hat{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\|^2$ est de la forme

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_P \mathbf{U}_0^{(P)H}. \quad (1.33)$$

Les matrices $\mathbf{U}_0^{(p)} \in \mathbb{C}^{I_p \times r_p}$ minimisent la fonction de coût $f(\mathcal{B}) = \|\mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \dots \times_P \mathbf{U}_0^{(P)} - \mathcal{A}\|^2$. Afin d'obtenir un résultat optimal, elles doivent donc être calculées grâce à un algorithme des moindres carrés alternés [59].

Cependant en prenant $\mathbf{U}_0^{(p)} = [\mathbf{u}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{r_p}^{(p)}]$, avec $\mathbf{U}^{(p)} = [\mathbf{u}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{I_p}^{(p)}]$ obtenue à partir de la HOSVD de \mathcal{A} , on obtient une approximation beaucoup moins couteuse en terme de calculs. En pratique cette approximation est dans la plupart des cas proche du résultat optimal [36, 11]. Cette approximation sera utilisée dans tout ce travail de thèse.

Ce résultat a deux conséquences :

- Un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ peut être décrit par un tenseur $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{r_1 \times \dots \times r_P}$ de même ordre mais de dimensions plus petites.
- Le tenseur $\hat{\mathcal{A}}$ est la meilleure approximation de rang (r_1, \dots, r_P) du tenseur \mathcal{A} (au sens des moindres carrés).

On peut donc se servir de la HOSVD pour faire de la compression de données. En particulier la HOSVD a été utilisée en traitement d'antenne [61, 7, 66, 36], en traitement d'image [68], en vision par ordinateur [88], en *data mining* [79] et en compression vidéo [89].

Extension du concept de projection orthogonale

A l'aide des résultats du paragraphe précédent, il est possible d'étendre le concept de projection orthogonale aux tenseurs.

Soit \mathcal{A} , \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_c trois tenseurs d'ordre P tels que :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_c. \quad (1.34)$$

On suppose que \mathcal{A}_c possède une structure rang faible, c'est à dire qu'il existe au moins un entier p compris entre 1 et P tel que $r_p = \text{rank}([\mathcal{A}_c]_p) < I_p$.

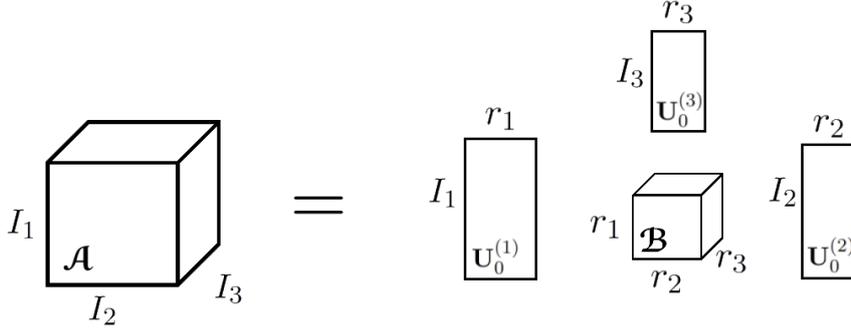


FIGURE 1.5 – Illustration de la réduction de rang pour un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \times_2 \mathbf{U}_0^{(2)} \times_3 \mathbf{U}_0^{(3)}$.

Grâce aux résultats de De Lathauwer [59], Le Bihan a montré dans [7] que l'on peut approximer \mathcal{A}_0 de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_0 \approx \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \dots \times_P \mathbf{U}_0^{(P)} \mathbf{U}_0^{(P)H} \quad (1.35)$$

avec $\mathbf{U}_0^{(p)} \in \mathbb{C}^{I_p - r_p \times I_p}$. On utilisera la même approximation que celle décrite dans le paragraphe précédent. On prendra donc $\mathbf{U}_0^{(p)} = [\mathbf{u}_{r_p+1}^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{I_p}^{(p)}]$, avec $\mathbf{U}^{(p)} = [\mathbf{u}_1^{(p)}, \dots, \mathbf{u}_{I_p}^{(p)}]$ obtenue à partir de la HOSVD de \mathcal{A} .

1.6 Synthèse

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires pour proposer un cadre tensoriel pour le traitement d'antenne. Grâce aux notions de tenseurs aléatoires et de tenseurs de covariance, il est possible d'introduire un modèle statistique de signal tensoriel. La HOSVD, avec ses propriétés d'orthogonalité va permettre de développer des méthodes rang faible. Tous ces outils vont être mis à contribution dans le chapitre suivant afin d'étudier une version tensorielle de l'algorithme MUSIC. Le chapitre 3 sera l'occasion de discuter des limites de la HOSVD, ce qui conduira au développement de nouveaux outils d'algèbre multilinéaire plus généraux, et plus particulièrement sur une nouvelle décomposition tensorielle. Cette décomposition sera appliquée dans le chapitre 4 à un modèle général de données multidimensionnelles rang faible.

Chapitre 2

Performances théoriques d'un algorithme MUSIC tensoriel basé sur la HOSVD et appliqué à des sources polarisées

On propose ici une première application de l'algèbre multilinéaire au traitement d'antenne. On va étudier une extension tensorielle de l'algorithme MUSIC [81]. Dans le cas classique, on cherche à estimer les directions d'arrivées de différentes sources à partir des ondes émises par celles-ci et reçues sur un réseau de capteurs. L'algorithme MUSIC consiste alors à construire une fonctionnelle à partir du projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace signal, qui permet ensuite d'estimer les directions d'arrivée. Si on dispose de capteurs capables de recevoir dans plusieurs polarisations sous la forme de plusieurs canaux, il est possible d'adapter l'algorithme MUSIC de deux manières. Une première méthode consiste à mettre les données sous forme de vecteurs et d'appliquer l'algorithme MUSIC vectoriel. La seconde méthode consiste à mettre les données sous la forme de matrices et d'appliquer une version tensorielle de MUSIC adapté de [16] basé sur la HOSVD. Le but de ce chapitre est de calculer les performances théoriques des ces deux algorithmes. Ce calcul est basé sur une analyse de perturbations, qui a déjà été utilisée pour la version classique de MUSIC [49]. Ces calculs seront ensuite validés par des simulations de Monte-Carlo, qui permettront également de comparer les deux approches. Une partie de ce travail a fait l'objet d'un article de conférence [15].

2.1 MUSIC unidimensionnel

Depuis son introduction dans les années 80 [81], l'algorithme *MUltiple SIgnal Classification* (MUSIC) s'est imposé comme l'algorithme haute résolution de référence pour la localisation de source. Dans cette section, les principaux résultats concernant MUSIC sont rappelés ainsi que le calcul théorique de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) des directions d'arrivée des sources.

2.1.1 Modèle

On considère un champ d'onde qui arrive sur un réseau de capteurs (voir figure 2.1). L'antenne formée par le réseau de capteurs est supposée linéaire et uniforme. Elle est composée de N_x capteurs

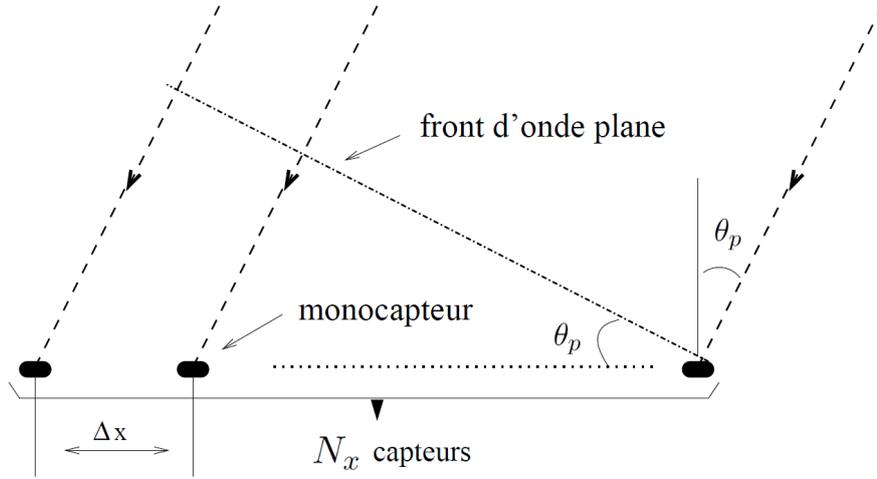


FIGURE 2.1 – Arrivée d'une onde plane sur une Antenne Linéaire Uniforme (ALU).

omnidirectionnels. La distance inter-capteurs est notée Δx . La dimension de l'antenne est très inférieure à la distance entre les sources et l'antenne et à la longueur d'onde des signaux reçus, ce qui permet d'approximer le front d'onde par un front d'onde plan.

P sources émettent en direction de l'antenne avec $P < N_x$. L'angle d'incidence de l'onde issue de la p -ème source dans le plan de l'antenne est noté θ_p (voir figure 2.1). Le but de l'algorithme MUSIC est de localiser les sources en estimant ces angles θ_p .

Le signal reçu sur le premier capteur de l'antenne provenant de la p -ème source à un instant t est noté $s_p(t)$. Ces signaux sont modélisés par des variables aléatoires gaussiennes centrées, non corrélées. Le milieu de propagation étant supposé homogène, isotrope et la distance inter-capteurs étant constante, le retard du signal issu de la p -ème source entre deux capteurs consécutifs, noté τ_p , est constant. A partir de la géométrie de l'antenne, ce retard peut être calculé :

$$\tau_p = \frac{\Delta x \sin \theta_p}{v_p}, \quad (2.1)$$

où v_p désigne la vitesse de l'onde issue de la p -ème source.

La contribution de la p -ème source sur l'antenne est modélisée par un vecteur $\mathbf{s}_p(t) \in \mathbb{C}^{N_x}$:

$$\mathbf{s}_p(t) = \begin{pmatrix} s_p(t) \\ s_p(t - \tau_p) \\ \vdots \\ s_p(t - (N_x - 1)\tau_p) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Le vecteur $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^{N_x}$, qui contient la superposition des signaux reçus sur l'antenne à un instant t , est obtenu en sommant les contributions des P sources :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{s}_p(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2.3)$$

où $\mathbf{b}(t)$ représente le bruit thermique affectant les capteurs. Il est modélisé par un vecteur aléatoire gaussien centré, spatialement et temporellement blanc, non corrélé avec les sources.

Le problème se simplifie en appliquant la transformée de Fourier à l'équation (2.3) :

$$\mathbf{x}(\nu) = \sum_{p=1}^P \mathbf{s}_p(\nu) + \mathbf{b}(\nu) \quad (2.4)$$

avec

$$\mathbf{s}_p(\nu) = \begin{pmatrix} s_p(\nu) \\ s_p(\nu)e^{-2i\pi\tau_p} \\ \vdots \\ s_p(\nu)e^{-2i\pi(N_x-1)\tau_p} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

La fréquence est supposée constante, $\nu = \nu_0$, afin de supprimer la dépendance en ν . En posant $\theta_p = 2\pi\nu_0\tau_p$ et

$$\mathbf{a}(\theta_p) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i2\pi\nu_0 \frac{\Delta x \sin \theta_p}{v_p}} \\ \vdots \\ e^{-i2\pi(N_x-1)\nu_0 \frac{\Delta x \sin \theta_p}{v_p}} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

l'équation (2.4) s'écrit finalement :

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^P s_p(\nu_0)\mathbf{a}(\theta_p) + \mathbf{b}(\nu), \quad (2.7)$$

où $s_p(\nu_0)$ désigne l'amplitude complexe de la p -ème source. La puissance de la p -ème source est notée $\sigma_p^2 = E[s_p(\nu_0)s_p(\nu_0)^*]$. La puissance du bruit est notée σ^2 , $E[\mathbf{b}\mathbf{b}^H] = \sigma^2\mathbf{I}_{N_x}$. Le vecteur $\mathbf{a}(\theta_p)$, qui modélise la propagation du signal issu d'une source le long de l'antenne, est appelé *steering* vecteur. Le but de l'algorithme MUSIC est finalement d'estimer les paramètres θ_p , $p = 1 \dots P$, à partir d'observations du vecteur \mathbf{x} .

2.1.2 Algorithme MUSIC vectoriel

D'après le modèle de signal donné par l'équation (2.7), le vecteur \mathbf{x} est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{a}(\theta_p)\mathbf{a}^H(\theta_p) + \sigma^2\mathbf{I}_{N_x}, \quad (2.8)$$

avec $\sigma_p^2 = E[s_p s_p^*]$.

A partir de la matrice \mathbf{R} , il est possible de construire une base du sous-espace orthogonal au sous-espace signal. En effet, la matrice \mathbf{R} peut être décomposée à l'aide de la SVD :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H, \quad (2.9)$$

avec $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_x}]$. Une base du sous-espace orthogonal au sous-espace signal est obtenue en tronquant \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}_0 = [\mathbf{u}_{P+1}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}]. \quad (2.10)$$

Il est alors possible de montrer que la matrice \mathbf{U}_0 vérifie l'égalité suivante $\forall p = 1 \dots P$:

$$\mathbf{U}_0^H \mathbf{a}(\theta_p) = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

L'algorithme MUSIC peut finalement être introduit à l'aide de cette propriété. En effet les paramètres θ_p peuvent être estimés en maximisant la fonction $h(\theta)$:

$$h(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.12)$$

avec $\mathbf{\Pi} = \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H$ le projecteur orthogonal sur le sous-espace bruit. Le critère MUSIC s'écrit alors :

$$\hat{\theta}_p = \arg \max_{\theta} (h(\theta)). \quad (2.13)$$

Pour pouvoir utiliser ce critère, il est nécessaire de connaître le nombre de sources. De plus, en pratique, la matrice \mathbf{R} n'est pas connue et doit être estimée. En disposant de K observations du vecteur \mathbf{x} , notées $\mathbf{x}(k)$, la matrice \mathbf{R} peut être estimée à l'aide de la SCM :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k). \quad (2.14)$$

$\hat{\mathbf{R}}$ est ensuite décomposée avec la SVD :

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^H \quad (2.15)$$

La matrice $\hat{\mathbf{U}}$ est alors tronquée en $\hat{\mathbf{U}}_0$ en ne conservant que les $(N_x - 1)$ dernières colonnes. La version adaptative de MUSIC s'obtient finalement en remplaçant $\mathbf{\Pi}$ par son estimée $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H$:

$$\hat{\theta}_p = \arg \max_{\theta} \left(\frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}} \mathbf{a}(\theta)} \right). \quad (2.16)$$

Dans la suite, les performances de cet algorithme seront évaluées en calculant l'Erreur de Quadratique Moyenne (EQM) sur les paramètres θ_p :

$$EQM(\hat{\theta}_p) = E[(\theta_p - \hat{\theta}_p)^2]. \quad (2.17)$$

Ce critère sera également utilisé pour évaluer et comparer les performances des autres algorithmes MUSIC présentés dans ce chapitre. L'EQM peut être obtenue à partir de simulations de Monte-Carlo. Il est également possible de le calculer de manière théorique. Ce calcul est l'objet du paragraphe suivant.

2.1.3 Performances théoriques

Proposition 2.1.1 Soit $\dot{\mathbf{a}}(\theta_p) = \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}(\theta_p)$ la dérivée du steering vector par rapport à θ et $\mathbf{S}^\dagger \in \mathbf{C}^{N_x \times N_x}$ la matrice définie comme suit :

$$\mathbf{S}^\dagger = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p - \sigma^2} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H \quad (2.18)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_P$ sont les P premières valeurs propres de \mathbf{R} et $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P$ les P premiers vecteurs propres associés. L'EQM de la p -ème source est alors égale à [49] :

$$E[(\Delta\theta_p)^2] = \frac{\sigma^2 (\mathbf{a}^H(\theta_p) \mathbf{S}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{a}(\theta_p))}{2K (\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p) \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{a}}(\theta_p))} \quad (2.19)$$

Preuve 2.1.1 Le calcul présenté a été proposé par Krim dans [49]. Ce paragraphe contient les principales étapes du calcul. Le lecteur peut se référer à [49] et à [32] pour les détails.

Le calcul repose sur une analyse des perturbations au premier ordre des directions d'arrivée estimées. Il s'agit d'abord de relier l'erreur d'estimation de chaque source à l'erreur d'estimation de la matrice de covariance. L'erreur d'estimation de la p -ème source est notée $\Delta\theta_p = \hat{\theta}_p - \theta_p$ et l'erreur d'estimation de la matrice de covariance est notée $\Delta\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$. Les propriétés statistiques de $\Delta\mathbf{R}$ sont ensuite étudiées. Elles permettent finalement de remonter à celles de $\Delta\theta_p$, et en particulier sa variance (qui est égale à l'EQM).

Avant de pouvoir relier $\Delta\theta_p$ à $\Delta\mathbf{R}$, une étape intermédiaire est nécessaire, dans le but de relier $\Delta\theta_p$ à l'erreur d'estimation du projecteur $\Delta\Pi = \Pi - \hat{\Pi}$. Cette relation s'obtient grâce à la dérivée de $h(\theta)$. En effet, les $\theta = \theta_p$ sont des extrema locaux de $h(\theta)$ ce qui fait que la dérivée de $h(\theta)$ s'annule pour $\theta = \theta_p$:

$$\frac{dh(\theta)}{d\theta}(\theta_p) = \dot{\mathbf{a}}^H(\hat{\theta}_p)\hat{\Pi}\mathbf{a}(\hat{\theta}_p) + \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_p)\hat{\Pi}\dot{\mathbf{a}}(\hat{\theta}_p) \quad (2.20)$$

$$= 0, \quad (2.21)$$

où $\dot{\mathbf{a}}(\theta)$ est la dérivée première de $\mathbf{a}(\theta)$ par rapport à θ . Il faut ensuite développer au premier ordre $\dot{\mathbf{a}}^H(\hat{\theta}_p)$ et $\mathbf{a}(\hat{\theta}_p)$:

$$\mathbf{a}(\hat{\theta}_p) = \mathbf{a}(\theta_p) + \Delta\theta_p\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p) \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(\hat{\theta}_p) = \dot{\mathbf{a}}(\theta_p) + \Delta\theta_p\ddot{\mathbf{a}}(\theta_p) \quad (2.23)$$

où $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ est la dérivée seconde de $\mathbf{a}(\theta)$ par rapport à θ .

La relation entre $\Delta\theta_p$ et $\Delta\Pi$ s'obtient en injectant les équations (2.22) et (2.23) dans l'équation (2.21) et en utilisant le fait que $\Pi\mathbf{a}(\theta_p) = \mathbf{0}$:

$$\Delta\theta_p = \frac{Re(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\Delta\Pi\mathbf{a}(\theta_p))}{\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\Pi\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)}. \quad (2.24)$$

Par ailleurs la relation entre $\Delta\mathbf{R}$ et $\Delta\Pi$ est donnée par la formule de la proposition A.1.1 (avec $\Delta\Pi = -\Delta\Pi_b$) :

$$\Delta\Pi = \Pi\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger + \mathbf{S}^\dagger\Delta\mathbf{R}\Pi. \quad (2.25)$$

avec

$$\mathbf{S}^\dagger = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p - \sigma^2} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H \quad (2.26)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_P$ sont les P premières valeurs propres de \mathbf{R} et $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_P$ les P premiers vecteurs propres associés.

En combinant les équations 2.24 et 2.25, on obtient [49] :

$$\Delta\theta_p = \frac{Re(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\Pi\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{a}(\theta_p))}{\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\Pi\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)}. \quad (2.27)$$

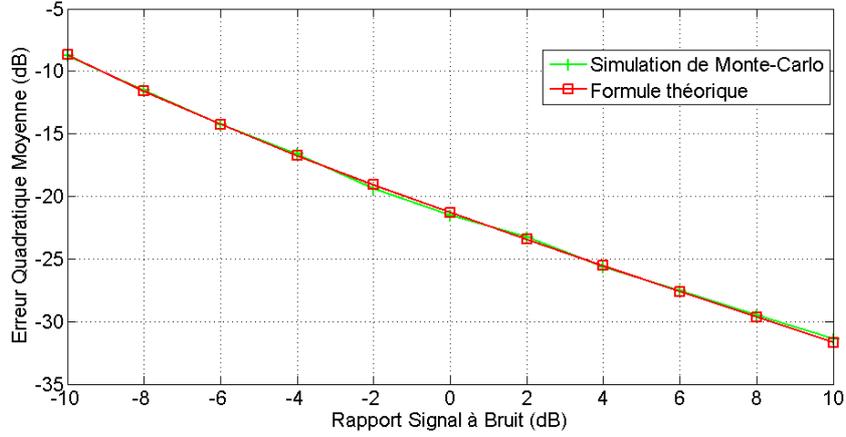


FIGURE 2.2 – EQM sur la direction d'arrivée, estimée avec l'algorithme MUSIC en fonction du RSB, pour une source de paramètre $\theta = 3^\circ$. L'antenne est linéaire uniforme et est composée de $N_x = 10$ capteurs. La matrice de covariance est estimée à partir de $K = 300$ échantillons.

De plus, la matrice $\hat{\mathbf{R}}$ étant estimée avec la SCM pour K observations, la statistique de $\Delta\mathbf{R}$ est parfaitement caractérisée. $\Delta\mathbf{R}$ suit une loi de Wishart complexe, centrée, à K degrés de liberté. En particulier, pour toutes matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$, la relation suivante est vérifiée :

$$E[\text{tr}(\Delta\mathbf{R}\mathbf{A})\text{tr}(\Delta\mathbf{R}\mathbf{B})] = \frac{1}{K}\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{B}) \quad (2.28)$$

A ce stade, il ne reste plus qu'à calculer $E[(\Delta\theta)^2]$. Cette partie du calcul ne pose pas de problème particulier. En partant de l'équation (2.27), en utilisant la propriété de l'équation (2.28) et le fait que $\mathbf{\Pi}\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \sigma^2$ et $\mathbf{\Pi}\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{0}$, la formule suivante est obtenue [49, 32] :

$$E[(\Delta\theta_p)^2] = \frac{\sigma^2(\mathbf{a}^H(\theta_p)\mathbf{S}^\dagger\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger\mathbf{a}(\theta_p))}{2K(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}\dot{\mathbf{a}}(\theta_p))} \quad (2.29)$$

Afin de montrer l'intérêt de cette formule, on considère l'exemple suivant. Soit une antenne linéaire uniforme composée de $N_x = 10$ capteurs et $P = 1$ source de paramètre $\theta = 3^\circ$. La matrice de covariance est estimée à partir de $K = 300$ échantillons. L'EQM obtenue par l'équation (2.19) est comparée avec celle obtenue à partir d'une simulation de Monte-Carlo à $N_{ra} = 1000$ réalisations pour différentes valeurs de Rapport Signal à Bruit (RSB). Le RSB est défini comme suit :

$$RSB = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}. \quad (2.30)$$

La figure 2.2 représente l'EQM en fonction du RSB pour les deux méthodes. Les deux courbes coïncident, ce qui confirme la véracité du calcul théorique.

2.1.4 Synthèse

Les principaux résultats concernant la localisation de source avec l'algorithme MUSIC pour un modèle de source à une dimension ont été rappelés. En particulier, les principales étapes du calcul

théorique de la précision d'estimation des directions d'arrivée des sources ont été détaillées. Ces résultats vont être étendus dans la suite de ce chapitre à un modèle de sources polarisées pour une approche vectorielle et une approche tensorielle.

2.2 Algorithmes MUSIC pour des sources polarisées

On considère maintenant un modèle de sources polarisées. Les sources sont supposées émettre dans N_c composantes de polarisations différentes et les capteurs sont capables de recevoir ces différentes composantes. En plus de la direction d'arrivée, les sources sont également caractérisées par leurs paramètres de polarisations, qui seront supposés inconnus et qui devront donc être estimés.

Deux modèles de données sont considérés, donnant lieu à deux algorithmes MUSIC associés : un modèle vectoriel auquel l'algorithme MUSIC présenté dans la partie précédente est appliqué et un modèle tensoriel auquel un algorithme MUSIC tensoriel sera appliqué.

2.2.1 Modèle

Soit une antenne linéaire, uniforme, composée de N_x capteurs, capables de recevoir dans N_c polarisations. On considère P sources. Comme dans la partie précédente, la propagation d'une composante polarimétrique de la p -ème source de paramètre θ_p le long de l'antenne se modélise de la manière suivante :

$$\mathbf{a}(\theta_p) = (1, \dots, e^{i(N_x-1)\theta_p})^T. \quad (2.31)$$

Sur un capteur, le signal reçu sur chaque composante polarimétrique est le même à un amplification et à un déphasage prêt, qui seront stockés dans un vecteur $\boldsymbol{\rho} = (1, \rho_1, \dots, \rho_{N_c-1})$ et un vecteur $\boldsymbol{\varphi} = (0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N_c-1})$. La réponse du signal issu de la p -ème source sur les différentes composantes polarimétriques du capteur peut être modélisée à l'aide du *steering* vecteur suivant :

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) = (1, \rho_1^p e^{i\varphi_1^p}, \dots, \rho_{N_c-1}^p e^{i\varphi_{N_c-1}^p})^T, \quad (2.32)$$

Selon la manière de combiner ces deux *steering* vecteurs, deux modèles différents sont obtenus : un modèle vectoriel et un modèle tensoriel. Ces modèles ont notamment été utilisés par Miron dans [66]. D'autres modèles de sources polarisés existent, on peut voir par exemple [67, 35].

Modèle vectoriel

La méthode vectorielle consiste à concaténer les données issues des différentes composantes des capteurs en un seul vecteur de dimension $N_x N_c$. Le *steering* vecteur global de ce modèle, noté $\mathbf{d}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p)$ est égal à :

$$\mathbf{d}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) = \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \otimes \mathbf{a}(\theta_p). \quad (2.33)$$

L'observation $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_x N_c}$, qui contient la superposition des P sources s'écrit alors :

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{d}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) + \mathbf{b}, \quad (2.34)$$

où $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{N_x N_c}$ est un bruit blanc gaussien, de puissance σ^2 . Le modèle est analogue au modèle vectoriel donné par l'équation (2.7).

La matrice de covariance du signal est notée \mathbf{R} et s'écrit comme suit :

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \sum_{p=1}^P \sigma_p \mathbf{d}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \mathbf{d}^H(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_x N_c}. \quad (2.35)$$

En pratique, la matrice \mathbf{R} n'est pas connue et doit être estimée. A l'aide de K vecteurs $\mathbf{x}(k)$, indépendants et distribués selon la même loi que \mathbf{x} , la matrice \mathbf{R} peut être estimée :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k). \quad (2.36)$$

Modèle tensoriel

En mettant les données sous la forme de matrice de taille $N_x \times N_c$, on préserve leur structure. La *steering* matrice associée, notée $\mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) = \mathbf{a}(\theta_p) \circ \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p). \quad (2.37)$$

L'observation $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$, qui contient la superposition des P sources s'écrit alors :

$$\mathbf{X} = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) + \mathbf{B}, \quad (2.38)$$

où $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$ est un bruit blanc gaussien, de puissance σ^2 . Le tenseur de covariance du signal est noté \mathcal{R} et s'écrit comme suit :

$$\mathcal{R} = E[\mathbf{X} \circ \mathbf{X}^*] \quad (2.39)$$

$$= \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \circ \mathbf{D}^*(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) + \sigma^2 \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{I}_{N_x N_c}) \quad (2.40)$$

$$= \mathcal{R}_{sources} + \mathcal{R}_{bruit}. \quad (2.41)$$

$\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times N_x \times N_c}$ est un tenseur d'ordre quatre, hermitien. L'algorithme MUSIC associé à ce modèle repose sur l'utilisation de \mathcal{R} , ce qui explique le que l'on parle d'algorithme MUSIC tensoriel.

En pratique le tenseur de covariance n'est pas connu. A l'aide de K matrices $\mathbf{X}(k)$, indépendantes et distribuées selon la même loi que \mathbf{X} , le SCT du tenseur \mathcal{R} s'écrit :

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \circ \mathbf{X}^*(k). \quad (2.42)$$

2.2.2 Algorithmes MUSIC polarimétriques

Deux algorithmes MUSIC vont maintenant être présentés, correspondant chacun à un des modèles de sources polarisées présentés.

MUSIC vectoriel

Le modèle étant similaire à celui de l'équation (2.7), l'algorithme MUSIC présenté dans la section précédente peut être directement appliqué. Les paramètres $\theta_p, \rho_p, \varphi_p$ sont alors estimés en maximisant la fonction $h_{polar}(\theta, \rho, \varphi)$:

$$h_{polar}(\theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{d}^H(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi)}, \quad (2.43)$$

avec $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{u}_{P+1}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}]$, obtenue à partir de la matrice des vecteurs propres de \mathbf{R} ,
 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_x N_c}]$.

En notant $\hat{\theta}_p, \hat{\rho}_p, \hat{\varphi}_p$, les estimées des paramètres de la p -ème source, le critère MUSIC s'écrit alors [66] :

$$(\hat{\theta}_p, \hat{\rho}_p, \hat{\varphi}_p) = \arg \max_{\theta, \rho, \varphi} (h_{polar}(\theta, \rho, \varphi)). \quad (2.44)$$

Dans la suite, cette version de MUSIC sera désignée sous le terme de *Long Vector MUSIC* (LV-MUSIC).

La version adaptative de LV-MUSIC s'obtient en remplaçant \mathbf{U}_0 par son estimée $\hat{\mathbf{U}}_0$ obtenue avec la SVD de $\hat{\mathbf{R}}$:

$$(\hat{\theta}_p, \hat{\rho}_p, \hat{\varphi}_p) = \arg \max_{\theta, \rho, \varphi} \left(\frac{1}{\mathbf{d}^H(\theta, \rho, \varphi) \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi)} \right). \quad (2.45)$$

MUSIC tensoriel

De manière analogue au cas vectoriel, la version tensorielle de MUSIC repose sur l'utilisation du tenseur de covariance \mathcal{R} . La première étape de l'algorithme consiste à le décomposer à l'aide de la HOSVD :

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(1)*} \times_4 \mathbf{U}^{(2)*}, \quad (2.46)$$

$\mathbf{U}^{(1)} = [\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}^{(1)}] \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ et $\mathbf{U}^{(2)} = [\mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{N_c}^{(2)}] \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$ sont respectivement issus de la SVD de $[\mathcal{R}]_1$ et $[\mathcal{R}]_2$.

Il faut ensuite s'intéresser aux n -rangs de $\mathcal{R}_{sources}$, notés (r_1, r_2, r_3, r_4) , avec $r_1 = r_3$ et $r_2 = r_4$ puisque $\mathcal{R}_{sources}$ est hermitien. Il suffit donc d'étudier $r_1 = \text{rang}([\mathcal{R}_{sources}]_1)$ et $r_2 = \text{rang}([\mathcal{R}_{sources}]_2)$. Le dépliement dans la première direction, $[\mathcal{R}_{sources}]_1$ s'écrit :

$$[\mathcal{R}_{sources}]_1 = \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 [\mathbf{D}(\theta_p, \rho_p, \varphi_p) \circ \mathbf{D}^*(\theta_p, \rho_p, \varphi_p)]_1 \quad (2.47)$$

$$= \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 [\mathbf{a}(\theta_p) \circ \mathbf{p}(\rho_p, \varphi_p) \circ \mathbf{a}^*(\theta_p) \circ \mathbf{p}^*(\rho_p, \varphi_p)]_1 \quad (2.48)$$

$$= \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{a}(\theta_p) \circ (\mathbf{p}(\rho_p, \varphi_p) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_p) \otimes \mathbf{p}^*(\rho_p, \varphi_p)) \quad (2.49)$$

Les matrices $\mathbf{a}(\theta_p) \circ (\mathbf{p}(\rho_p, \varphi_p) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_p) \otimes \mathbf{p}^*(\rho_p, \varphi_p))$ sont de rang un. Ainsi, si les directions d'arrivée ou les paramètres de polarisation de chaque source sont différents, $r_1 = P$. Un raisonnement similaire permet de conclure que $r_2 = P$.

$\mathcal{R}_{sources}$ est donc un tenseur de rangs faible (r_1, r_2) . En utilisant le résultat du paragraphe 1.5.3 et par analogie avec le cas vectoriel, un couple de projecteur sur le sous-espace bruit $(\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2)$ peut être proposé :

$$\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H}, \quad \mathbf{U}_0^{(1)} = [\mathbf{u}_{r_1+1}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}^{(1)}] \quad (2.50)$$

$$\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{U}_0^{(2)} \mathbf{U}_0^{(2)H}, \quad \mathbf{U}_0^{(2)} = [\mathbf{u}_{r_2+1}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{N_c}^{(2)}] \quad (2.51)$$

On a alors la propriété suivante pour tout $p = 1 \dots P$:

$$\mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \times_1 \mathbf{\Pi}_1 \times_2 \mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Les paramètres des sources peuvent alors être estimés en maximisant la fonction suivante :

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\|\mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \times_1 \mathbf{\Pi}_1 \times_2 \mathbf{\Pi}_2\|^2}. \quad (2.53)$$

Le critère MUSIC tensoriel peut alors s'écrire :

$$(\hat{\theta}_p, \hat{\boldsymbol{\rho}}_p, \hat{\boldsymbol{\varphi}}_p) = \arg \max_{\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}} (H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})). \quad (2.54)$$

Un algorithme similaire a été proposé par Boyer dans [16] mais pour une décomposition différente et un autre modèle de source. L'utilisation de notre algorithme nécessite de connaître le nombre de sources. A priori, l'algorithme ne peut fonctionner que si $P < \min(N_x, N_c)$. Dans la suite, cet algorithme sera désigné sous le terme de *Tensor MUSIC* (TMUSIC). Le lemme qui suit permet de simplifier l'écriture du critère MUSIC et facilite le calcul des performances théoriques.

Lemme 2.2.1 *La fonction $H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ peut se réécrire de la manière suivante :*

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{a}(\theta)) \text{tr}(\mathbf{p}^T(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2^T \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}))} \quad (2.55)$$

La maximisation de la fonction $H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ revient donc à maximiser les deux fonctions suivantes de manière indépendantes :

$$h_1(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{a}(\theta)} \quad (2.56)$$

$$h_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{(\mathbf{p}^H(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2 \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}))^*} \quad (2.57)$$

En d'autres termes, l'estimation des directions d'arrivée des sources et l'estimation des paramètres de polarisation peuvent se faire de manière indépendante. Il est donc possible d'estimer les directions d'arrivée de $(N_x - 1)$ sources et les paramètres de polarisation de $(N_c - 1)$ sources.

Preuve 2.2.1 *D'après la section précédente la fonction $H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ s'écrit de la manière suivante :*

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\|\mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \times_1 \hat{\mathbf{\Pi}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{\Pi}}_2\|^2}. \quad (2.58)$$

En utilisant la définition du produit n -mode, l'équation peut être réécrite :

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2^*\|^2}. \quad (2.59)$$

Par définition de la norme euclidienne matricielle associée au produit scalaire usuelle, la fonction devient :

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{\Pi}}_2^T \mathbf{D}^H(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2^*)}. \quad (2.60)$$

En utilisant une propriété de la trace ($\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$) et le fait que $\hat{\mathbf{\Pi}}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}}_1 = \hat{\mathbf{\Pi}}_1$, l'expression devient :

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2^T \mathbf{D}^H(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}))}. \quad (2.61)$$

L'expression donnée par l'équation 2.55 est finalement obtenue en remplaçant $\mathbf{D}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ par $\mathbf{a}(\theta) \circ \mathbf{p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{a}(\theta) \mathbf{p}^T(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ et en réutilisant les propriétés de la trace :

$$H_{polar}(\theta, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_1 \mathbf{a}(\theta)) \text{tr}(\mathbf{p}^T(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_2^T \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}))}. \quad (2.62)$$

La version adaptative de TMUSIC est obtenue en remplaçant $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ par leurs estimées $\hat{\mathbf{\Pi}}_1$ et $\hat{\mathbf{\Pi}}_2$:

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_0^{(1)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(1)H}, \quad \hat{\mathbf{U}}_0^{(1)} = [\hat{\mathbf{u}}_{r_1+1}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_x}^{(1)}] \quad (2.63)$$

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_2 = \hat{\mathbf{U}}_0^{(2)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(2)H}, \quad \hat{\mathbf{U}}_0^{(2)} = [\hat{\mathbf{u}}_{r_2+1}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_c}^{(2)}], \quad (2.64)$$

avec $\hat{\mathbf{U}}^{(1)} = [\hat{\mathbf{u}}_1^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_x}^{(1)}]$ et $\hat{\mathbf{U}}^{(2)} = [\hat{\mathbf{u}}_1^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_c}^{(2)}]$ issues de la HOSVD de $\hat{\mathcal{R}}$.

Les performances théoriques de ces deux algorithmes vont maintenant être calculées en reprenant la même méthode qu'au paragraphe 2.1.3.

2.3 Performances théoriques des algorithmes MUSIC polarimétriques

On propose maintenant de calculer les EQM théoriques pour l'estimation des directions d'arrivée des sources pour les deux algorithmes. Les paramètres de polarisation des sources ne seront pas étudiés. En effet, cela complexifierait le calcul alors qu'en pratique ce sont plutôt les directions d'arrivée qui nous intéressent. Les hypothèses suivantes sont faites. Le nombre de sources est égale à P et K observations des signaux sont reçus sur l'antenne. Les paramètres de polarisation des sources sont connus. En d'autres termes les valeurs des paramètres $\boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p$ sont connues et n'ont donc pas besoin d'être estimées. Sans cette hypothèse, le calcul des performances de LV-MUSIC paraît compliqué, et rendrait difficile la comparaison avec TMUSIC.

2.3.1 LV MUSIC

Proposition 2.3.1 L'EQM de la direction d'arrivée pour la p -ème source estimée avec LV-MUSIC est donnée par la formule suivante :

$$E[(\Delta\theta_p)^2] = \frac{\sigma^2(\mathbf{d}^H(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \mathbf{S}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{d}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p))}{2K(\dot{\mathbf{d}}^H(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) \mathbf{\Pi} \dot{\mathbf{d}}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p))} \quad (2.65)$$

Preuve 2.3.1 *La démonstration est évidente. Les paramètres ρ_p, φ_p sont connus, on est exactement dans le cas du paragraphe 2.1.3 avec un steering vecteur différent. Il suffit donc de remplacer $\mathbf{a}(\theta_p)$ par $\mathbf{d}(\theta_p, \rho_p, \varphi_p)$ dans la formule donnée par l'équation (2.19).*

2.3.2 TMUSIC

Remarques préliminaires

Les deux lemmes suivants ont pour but de faciliter le calcul des performances théoriques de TMUSIC.

Lemme 2.3.1 *Soit $\mathbf{R}_1 = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] \in \mathbb{N}_x \times \mathbb{N}_x$ et $\hat{\mathbf{R}}_1$ sa moyenne empirique, obtenue à partir de K échantillons $\mathbf{X}(k)$, basés sur le modèle donné par l'équation (2.38), indépendants et identiquement distribués :*

$$\hat{\mathbf{R}}_1 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k) \quad (2.66)$$

Alors les vecteurs propres de $[\mathcal{R}]_1$ sont égaux à ceux de la matrice \mathbf{R}_1 . Il est en de même pour $[\hat{\mathcal{R}}]_1$ et $\hat{\mathbf{R}}_1$. En d'autres termes, le projecteur $\mathbf{\Pi}_1$ et $\hat{\mathbf{\Pi}}_1$ peuvent être obtenus indifféremment à partir de $[\mathcal{R}]_1$, respectivement $[\hat{\mathcal{R}}]_1$ et \mathbf{R}_1 , respectivement $\hat{\mathbf{R}}_1$.

Preuve 2.3.2 *Soit $\mathbf{\Pi}_1$ le projecteur sur le sous-espace bruit dans la dimension spatiale. $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{U}_0^{(1)}\mathbf{U}_0^{(1)H}$ est issu de la SVD de $[\mathcal{R}]_1 \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c N_x N_c}$ le dépliement de \mathcal{R} dans la première direction :*

$$[\mathcal{R}]_1 = \mathbf{U}^{(1)}\mathbf{\Sigma}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)H} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{U}_0^{(1)} = [\mathbf{u}_{r_1+1}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{N_x}^{(1)}] \quad (2.68)$$

Soit $\hat{\mathbf{\Pi}}_1$ l'estimée de $\mathbf{\Pi}_1$ obtenue à partir du SCT de \mathcal{R} . $\hat{\mathbf{\Pi}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_0^{(1)}\hat{\mathbf{U}}_0^{(1)H}$ est issu de la SVD de $[\hat{\mathcal{R}}]_1 \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c N_x N_c}$ le dépliement de $\hat{\mathcal{R}}$ dans la première direction :

$$[\hat{\mathcal{R}}]_1 = \hat{\mathbf{U}}^{(1)}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{(1)}\hat{\mathbf{V}}^{(1)H} \quad (2.69)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_0^{(1)} = [\hat{\mathbf{u}}_{r_1+1}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{N_x}^{(1)}] \quad (2.70)$$

Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c \times K}$, le tenseur qui contient toutes les observations matricielles $\mathbf{X}(k)$ reçues sur l'antenne. D'après [36], les vecteurs propres de $[\hat{\mathcal{R}}]_1$ sont les mêmes que les vecteurs propres gauches de $[\mathcal{X}]_1$:

$$[\hat{\mathcal{R}}]_1 = \hat{\mathbf{U}}^{(1)}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{(1)}\hat{\mathbf{V}}^{(1)H} \quad (2.71)$$

$$[\mathcal{X}]_1 = \hat{\mathbf{U}}^{(1)}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^H \quad (2.72)$$

De plus, les vecteurs propres gauches de $[\mathcal{X}]_1$ sont obtenus en diagonalisant la matrice $[\mathcal{X}]_1[\mathcal{X}]_1^H$. Or la matrice $[\mathcal{X}]_1[\mathcal{X}]_1^H$ se réécrit de la manière suivante :

$$[\mathcal{X}]_1[\mathcal{X}]_1^H = \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k) \quad (2.73)$$

$$= K \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k). \quad (2.74)$$

$$= K\hat{\mathbf{R}}_1 \quad (2.75)$$

On en déduit que $\hat{\mathbf{R}}_1$ et $[\hat{\mathcal{R}}]_1$ ont les mêmes vecteurs propres. La démonstration est analogue pour \mathbf{R}_1 et $[\mathcal{R}]_1$.

Lemme 2.3.2 Soit $\Delta\mathbf{R}_1 = \hat{\mathbf{R}}_1 - \mathbf{R}_1$ l'erreur d'estimation sur \mathbf{R}_1 . Les propriétés statistiques de $\Delta\mathbf{R}_1$ sont les suivantes :

$$E[\Delta\mathbf{R}_1] = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} KE(\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j')) &= \sum_{p, p'=1}^P \sigma_p \sigma_{p'} (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p'}^H)(i, j) (\mathbf{D}_{p'} \mathbf{D}_p^H)(i', j') \\ &+ \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) \sigma^2 \delta(j, i') + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i', j) \sigma^2 \delta(j', i) \\ &+ N_c \sigma^4 \delta(i', j) \delta(j, i'), \quad \forall i, j, i', j' = 1 \dots N_x. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Preuve 2.3.3 La preuve de ce lemme est détaillée dans l'annexe A.2.

Calcul de l'EQM sur les directions d'arrivée des sources

Proposition 2.3.2 L'Erreur Quadratique Moyenne de la direction d'arrivée de la p -ème source, θ_p , estimée avec TMUSIC, est donnée par la formule suivante :

$$EQM(\theta_p) = \left(\sum_{i, j, i', j'=1}^{N_x} Re[E(\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j'))\mathbf{C}(j, i)\mathbf{C}(j', i')] + E(\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j'))\mathbf{C}(j, i)\mathbf{C}^*(i', j') \right) \frac{1}{2(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\dot{\mathbf{a}}(\theta_p))^2}, \quad (2.78)$$

où $\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)$ désigne la dérivée de $\mathbf{a}(\theta_p)$ par rapport à θ et

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_1^\dagger \mathbf{a}(\theta_p) \dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p) \mathbf{\Pi}_1 \quad (2.79)$$

désigne une matrice déterministe connue.

Preuve 2.3.4 La structure de la preuve est analogue au cas vectorielle. Elle se déroule en deux temps. La première étape établit le lien entre l'erreur d'estimation de $\hat{\theta}_p$, $\Delta\theta_p = \hat{\theta}_p - \theta_p$ et l'erreur d'estimation du projecteur $\hat{\mathbf{\Pi}}_1$, $\Delta\mathbf{\Pi}_1 = \hat{\mathbf{\Pi}}_1 - \mathbf{\Pi}_1$ puis à l'erreur d'estimation de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_1$, $\Delta\mathbf{R}_1 = \hat{\mathbf{R}}_1 - \mathbf{R}_1$. Grâce à cette relation la covariance de $\Delta\theta_p$ (égale à l'EQM de $\hat{\theta}_p$) peut être calculée, dans un deuxième temps, en fonction de $E(\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j'))$.

Le lemme 2.2.1 permet de voir que les directions d'arrivées peuvent être obtenues indépendamment des paramètres de polarisation en maximisant la fonction suivante :

$$h_1(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Pi}}_1\mathbf{a}(\theta)}. \quad (2.80)$$

Ce résultat permet de déduire que la relation donnée par l'équation (2.24) est aussi vraie dans ce cas :

$$\Delta\theta_p = \frac{Re(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\Delta\mathbf{\Pi}_1\mathbf{a}(\theta_p))}{\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)}. \quad (2.81)$$

De plus, \mathbf{R}_1 étant hermitienne, le résultat de la proposition A.I.1 (cf annexes) s'applique à $\hat{\mathbf{\Pi}}$. L'erreur d'estimation au premier ordre de $\hat{\mathbf{\Pi}}_1$ s'écrit donc :

$$\Delta\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger + \mathbf{S}_1^\dagger\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{\Pi}_1, \quad (2.82)$$

avec

$$\mathbf{S}_1^\dagger = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p - \sigma^2} \mathbf{u}_p^{(1)} \mathbf{u}_p^{(1)H} \quad (2.83)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_P$ sont les P premières valeurs propres de \mathbf{R}_1 et $\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_P^{(1)}$ les P premiers vecteurs propres de \mathbf{R}_1 .

Cette expression est similaire à l'équation (2.25). Le résultat donné par l'équation (2.27) peut donc être repris :

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re}(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p))}{\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)}. \quad (2.84)$$

La fin de la preuve concerne le calcul de la variance de $\Delta\theta_p$, $E[\Delta\theta_p^2]$ afin d'obtenir une expression où le terme $E(\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j'))$ est isolé. On pose $A = \dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p)$ et $B = \dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\dot{\mathbf{a}}(\theta_p)$, ce qui permet d'écrire :

$$\Delta\theta_p = \frac{(A + A^*)}{2B}, \quad (2.85)$$

puisque $A + A^* = 2\text{Re}(A)$. Le terme B est déterministe, la variance de $\Delta\theta_p$ s'écrit donc :

$$E[(\Delta\theta)^2] = \frac{1}{4B^2} E[(A + A^*)(A + A^*)] \quad (2.86)$$

$$= \frac{1}{4B^2} E[A^2 + (A^2)^* + A^*A + AA^*] \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{4B^2} E[2\text{Re}(A^2) + 2|A|^2] \quad (2.88)$$

$$= \frac{1}{2B^2} E[\text{Re}(A^2) + |A|^2], \quad (2.89)$$

ce qui revient à calculer $E[\text{Re}(A^2)]$ et $E[|A|^2]$, par linéarité de $E[\cdot]$. $E[\text{Re}(A^2)]$ se développe comme suit :

$$E[\text{Re}(A^2)] = E[\text{Re}(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p)\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p))] \quad (2.90)$$

$$= E[\text{Re}(\text{tr}(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p))\text{tr}(\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p)))] \quad (2.91)$$

puisque $\text{tr}(A) = A$ pour A scalaire. En utilisant la propriété de la trace, $\text{tr}(\mathbf{CD}) = \text{tr}(\mathbf{DC})$, $E[\text{Re}(A^2)]$ devient :

$$E[\text{Re}(A^2)] = E[\text{Re}(\text{tr}(\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{C})\text{tr}(\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{C}))] \quad (2.92)$$

avec $\mathbf{C} = \mathbf{S}_1^\dagger\mathbf{a}(\theta_p)\dot{\mathbf{a}}^H(\theta_p)\mathbf{\Pi}_1$, une matrice déterministe. En utilisant la définition de l'opérateur trace, l'équation devient :

$$E[\text{Re}(A^2)] = E[\text{Re}(\sum_{i,j,i',j'=1}^{N_x} \Delta\mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{C}(j, i)\Delta\mathbf{R}_1(i', j')\mathbf{C}(j', i'))]. \quad (2.93)$$

En commutant l'opérateur $Re(\cdot)$ et $E[\cdot]$, il est possible d'isoler le terme en $\Delta\mathbf{R}_1$

$$E[Re(A^2)] = Re\left[\sum_{i,j,i',j'=1}^{N_x} E(\Delta\mathbf{R}_1(i,j)\Delta\mathbf{R}_1(i',j'))\mathbf{C}(j,i)\mathbf{C}(j',i')\right] \quad (2.94)$$

De manière similaire, $E(|A|^2)$ est égal à :

$$E[|A|^2] = E[tr(\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{C})tr(\Delta\mathbf{R}_1\mathbf{C}^H)], \quad (2.95)$$

qui s'écrit finalement :

$$E[|A|^2] = \sum_{i,j,i',j'=1}^{N_x} E[\Delta\mathbf{R}_1(i,j)\Delta\mathbf{R}_1(i',j')]\mathbf{C}(j,i)\mathbf{C}^H(j',i'). \quad (2.96)$$

La combinaison des équations (2.89), (2.95) et (2.96) permet d'obtenir l'équation (2.78) et ainsi de conclure la preuve.

2.4 Résultats

2.4.1 Paramètres

On considère une antenne linéaire uniforme composée de $N_x = 10$ capteurs, capable de recevoir en polarisation H et V sous la forme de $N_c = 3$ canaux. La longueur d'onde des sources est égale à $\lambda_0 = 0.1m$. La distance inter-capteurs est égale à $\Delta x = \frac{\lambda_0}{2}$. Le nombre d'observations est égal à $K = 300$. La puissance est la même pour toutes les sources, elle est notée σ_{source}^2 . La puissance du bruit est fixée à $\sigma_{bruit}^2 = 1$. Le Rapport Signal à Bruit est défini de la façon suivante :

$$RSB = \frac{\sigma_{source}^2}{\sigma_{bruit}^2}. \quad (2.97)$$

Dans la suite, les performances des trois algorithmes suivants sont comparées : MUSIC vectoriel unidimensionnel (VMUSIC), MUSIC vectoriel pour des sources polarisées (noté LVMUSIC) et MUSIC tensoriel pour des sources polarisées (noté TMUSIC). Les performances sont comparées à l'aide de l'EQM sur les paramètres en fonction du RSB. Deux scénarios sont envisagés. Un premier scénario où les paramètres de polarisation sont connus et où seul les directions d'arrivée des sources sont estimées. Dans ce cas, les EQM théoriques des directions d'arrivée (obtenus à partir des équations (2.19), (2.65) et (2.78)) et les EQM des directions d'arrivée obtenus à partir de simulations de Monte-Carlo sont étudiés. Dans le second scénario, tous les paramètres sont estimés et c'est la moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB qui est étudiée. Pour les deux scénarios les simulations de Monte-Carlo sont réalisées avec $N_{rea} = 1000$ réalisations.

Concernant les n -rangs nécessaires pour TMUSIC, le nombre de sources est supposé connu, les rangs utilisés pour TMUSIC sont donc $r_1 = r_2 = P$.

2.4.2 $P = 1$ source

Dans cette partie, le cas $P = 1$ source est étudié. Sa direction d'arrivée est égale à $\theta_1 = -3^\circ$, et ses paramètres de polarisation sont les suivants $\rho_1 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les résultats présentés sur les figures 2.3 et 2.4 correspondent à des simulations où les paramètres de polarisation ρ_1 et φ_1 sont connus.

La figure 2.3 présente l'EQM de θ_1 obtenue par la formule théorique et par simulation de Monte-Carlo en fonction du RSB pour les algorithmes suivants : VMUSIC, VMUSIC avec $K' = 3K$ observations et TMUSIC. Les résultats issus des formules théoriques coïncident avec les résultats issus des simulations numériques. De plus, les performances de TMUSIC sont meilleures que celle de VMUSIC pour un nombre d'observations égal, illustrant l'apport du modèle de sources polarisées. Néanmoins, en comparant TMUSIC et VMUSIC à K' , le gain de performances de TMUSIC est du même ordre que celui d'un MUSIC unidimensionnel calculé avec $N_c = 3$ fois plus d'observations.

La figure 2.4 représente l'EQM de θ_1 obtenue par la formule théorique et par simulation de Monte-Carlo en fonction du RSB pour les algorithmes suivants : LVMUSIC et TMUSIC. Les résultats issus des formules théoriques coïncident avec les résultats issus des simulations numériques. Dans ce cas, TMUSIC et LVMUSIC ont des performances similaires pour des valeurs de RSB importantes. Lorsque le RSB est faible, le résultat théorique de TMUSIC présente un gain par rapport à LVMUSIC.

La suite de l'étude concerne un cas où les paramètres de polarisation sont inconnus ; cinq paramètres doivent donc être estimés. La figure 2.5 représente la moyenne des EQM de ces cinq paramètres en fonction du RSB. Dans ce cas, les performances de TMUSIC sont légèrement supérieures à celle de LVMUSIC. Ce gain est dû au fait que l'estimation de la direction d'arrivée et les paramètres de polarisation peuvent être estimés indépendamment avec TMUSIC contrairement à LVMUSIC où tous les paramètres sont estimés en même temps.

Ces différents résultats montrent que l'ajout de la polarisation permet d'améliorer la précision d'estimation mais que ce gain est essentiellement dû à un nombre de données équivalent, plus important pour TMUSIC. De plus, dans le cas où le nombre de source est égal à un, les performances de TMUSIC sont asymptotiquement égales à celles de LVMUSIC.

2.4.3 $P = 2$ sources

Le nombre de sources est maintenant égal à $P = 2$. Deux situations pour les directions d'arrivée sont considérées :

- Un cas où les sources sont plus éloignées : $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$.
- Un cas où les sources sont plus proches : $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$.

De même, deux scénarios pour les paramètres de polarisation sont étudiés :

- Un premier cas où les paramètres de polarisation sont différents : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$.
- Un second cas, où les paramètres de polarisation sont égaux : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$.

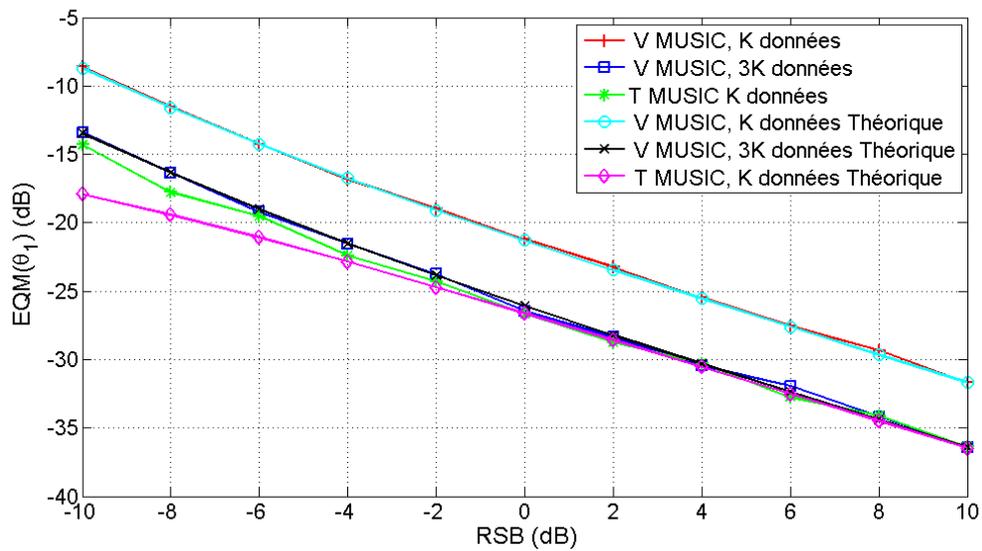


FIGURE 2.3 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. La direction d’arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $3K = 900$, $N_{rea} = 1000$.

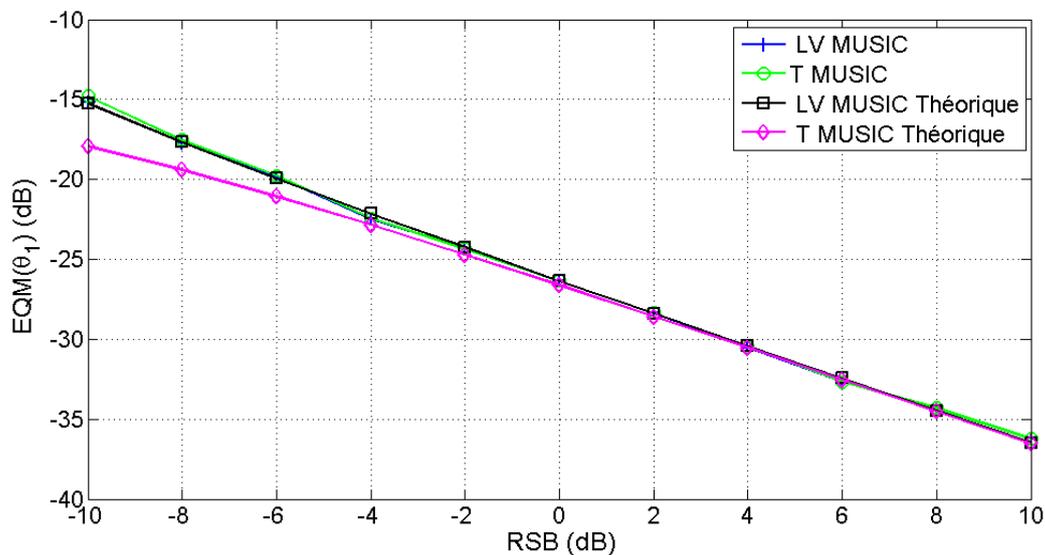


FIGURE 2.4 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. La direction d’arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

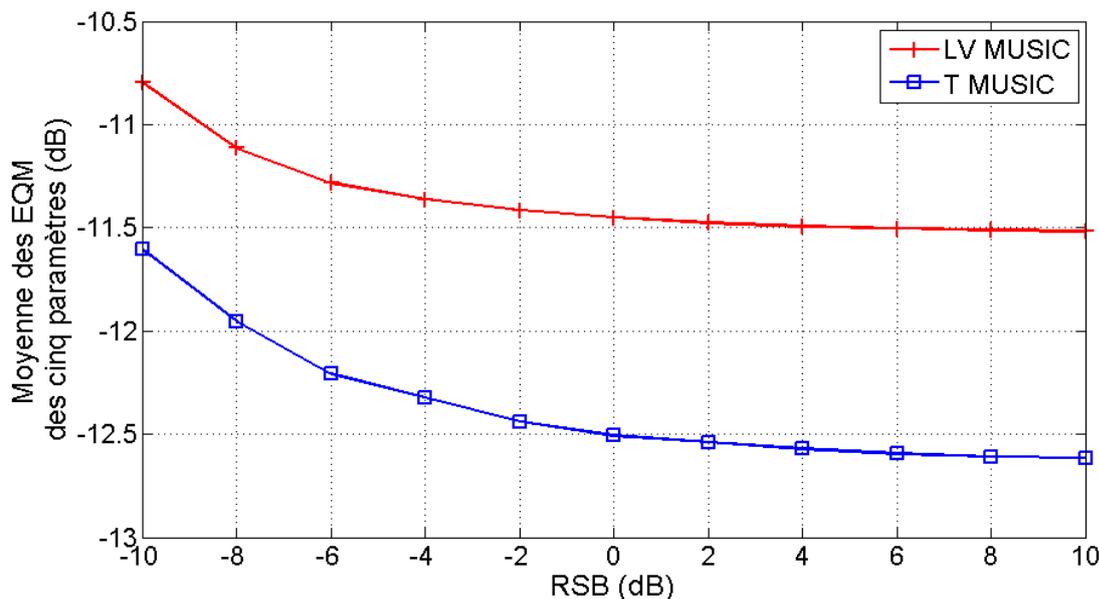


FIGURE 2.5 – Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. La direction d'arrivée de la source est égale à $\theta_1 = -3^\circ$. Ses paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.2 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

Pour ces quatre cas, les performances de TMUSIC et LVMUSIC pour la première source sont étudiées.

Les figures 2.6 et 2.7 correspondent au cas où les sources sont éloignées ($\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$) pour les différentes configurations de polarisation ($\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_1 \neq \varphi_2$). Dans les deux cas, les résultats issus des formules théoriques coïncident avec les résultats issus des simulations numériques pour des RSB importants. Puisque les sources sont éloignées, les résultats sont équivalents à ceux pour une source : les performances de TMUSIC et de LVMUSIC sont les mêmes.

Les figures 2.8 et 2.9 correspondent au cas où les sources sont proches ($\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$) pour les différentes configurations de polarisation ($\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_1 \neq \varphi_2$). Lorsque le RSB est faible, il y a un décrochement entre les simulations de Monte-Carlo et les formules théoriques, dû à la proximité des deux sources. Les comportements des algorithmes sont différents selon la valeur des paramètres de polarisation. Lorsque les paramètres sont très différents, LVMUSIC estime mieux les directions d'arrivée. En effet puisque les paramètres de polarisation sont connus et différents, l'algorithme LVMUSIC revient à discriminer deux sources dont les *steering* vecteurs sont différents (en pratique on trace la fonction h_{polar} pour $\mathbf{d}(\theta, \rho_1, \varphi_1)$ et $\mathbf{d}(\theta, \rho_2, \varphi_2)$) contrairement à TMUSIC où les directions d'arrivée et les paramètres de polarisation sont estimés indépendamment. En revanche lorsque les paramètres de polarisation sont les mêmes pour les deux sources, les performances de LVMUSIC se dégradent alors que celles de TMUSIC restent les mêmes. TMUSIC paraît donc plus robuste que LVMUSIC aux paramètres de polarisation des sources.

Les figures 2.10 et 2.11 correspondent à des cas où les paramètres de polarisation sont inconnus.

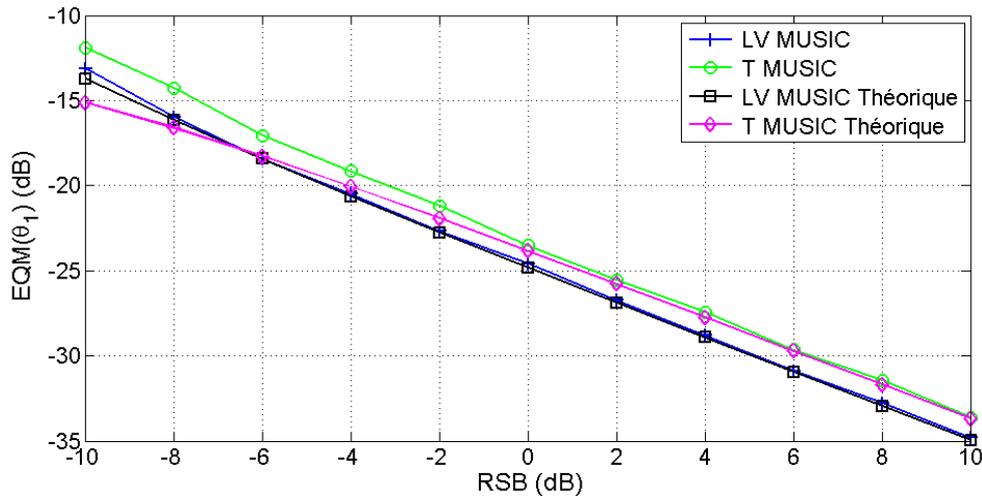


FIGURE 2.6 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d’arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

Elles représentent la moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. Dans les deux cas, les performances de TMUSIC sont supérieures à celles de LVMUSIC.

En conclusion, les performances (théoriques et en simulation de Monte-Carlo) de TMUSIC et de LVMUSIC sont les mêmes que pour le cas à une source lorsque les deux sources sont éloignées. En les rapprochant, un décrochement apparaît entre performances théoriques et simulations numériques. Dans le cas où les paramètres de polarisation sont connus, les performances de TMUSIC sont les mêmes que LVMUSIC à fort RSB. A faibles valeurs de RSB, TMUSIC est meilleur que LVMUSIC dans certains cas. En revanche, les performances de TMUSIC sont meilleures que celles de LVMUSIC lorsque tout les paramètres sont estimés, ce qui correspond à une situation réaliste.

2.5 Synthèse

Ce chapitre a été consacré à l’étude d’algorithmes MUSIC pour un modèle de sources polarisées. Dans le cas classique, l’algorithme MUSIC permet d’estimer la direction d’arrivée d’une ou plusieurs sources à partir d’un réseau de capteurs à une composante. Avec ce modèle de sources polarisées, les paramètres de polarisation de chaque source doivent aussi être estimés, tout en disposant de plusieurs composantes sur chaque capteur. Deux modèles de sources polarisées ont été proposés : un modèle vectoriel et un modèle tensoriel. Ces deux modèles ont donné lieu à deux extensions de l’algorithme MUSIC : une version vectorielle (LVMUSIC) et une version tensorielle basée sur la HOSVD (TMUSIC). Le calcul de l’Erreur Quadratique Moyenne (EQM) des directions d’arrivée a été proposé pour ces deux algorithmes. Ce calcul est basé sur une analyse des perturbations, déjà mise en œuvre pour l’algorithme MUSIC classique [49]. Ces calculs ont ensuite été validés en les comparant à des simulations de Monte-

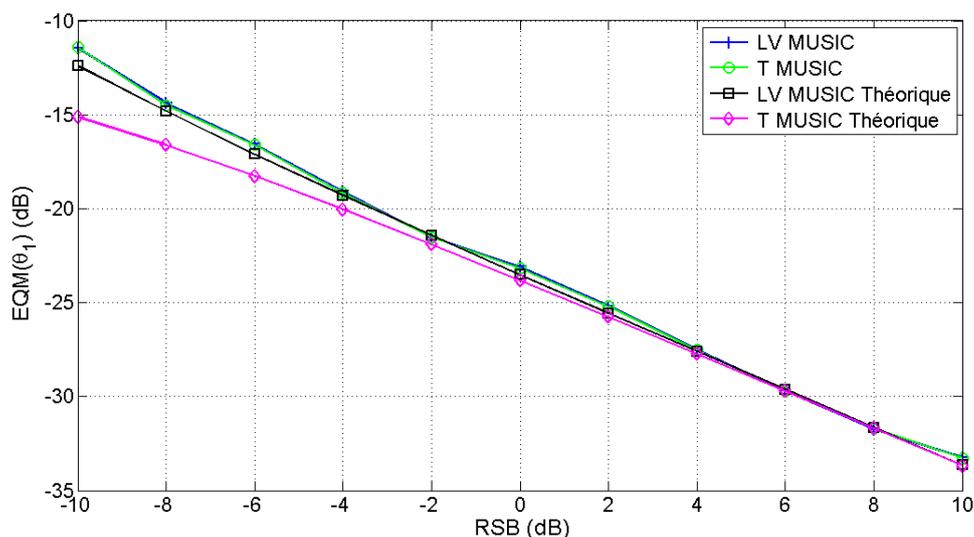


FIGURE 2.7 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

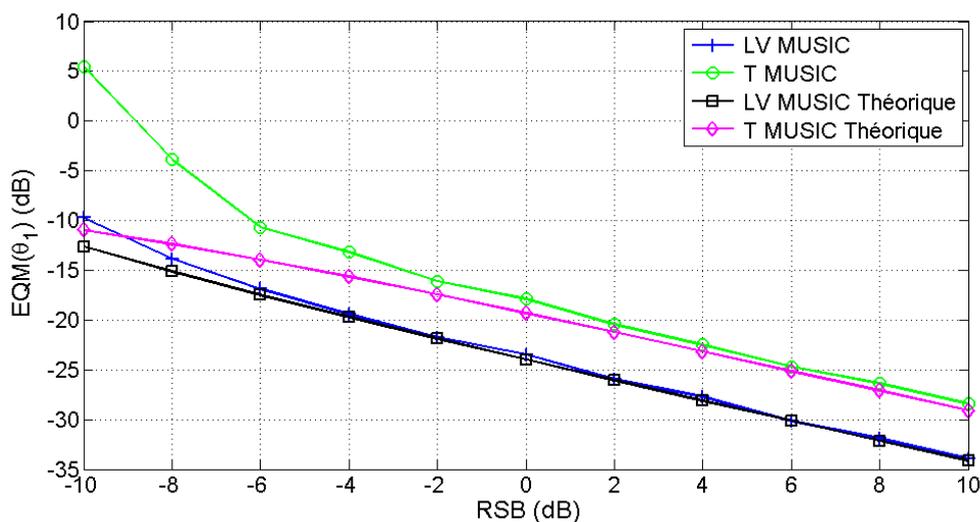


FIGURE 2.8 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

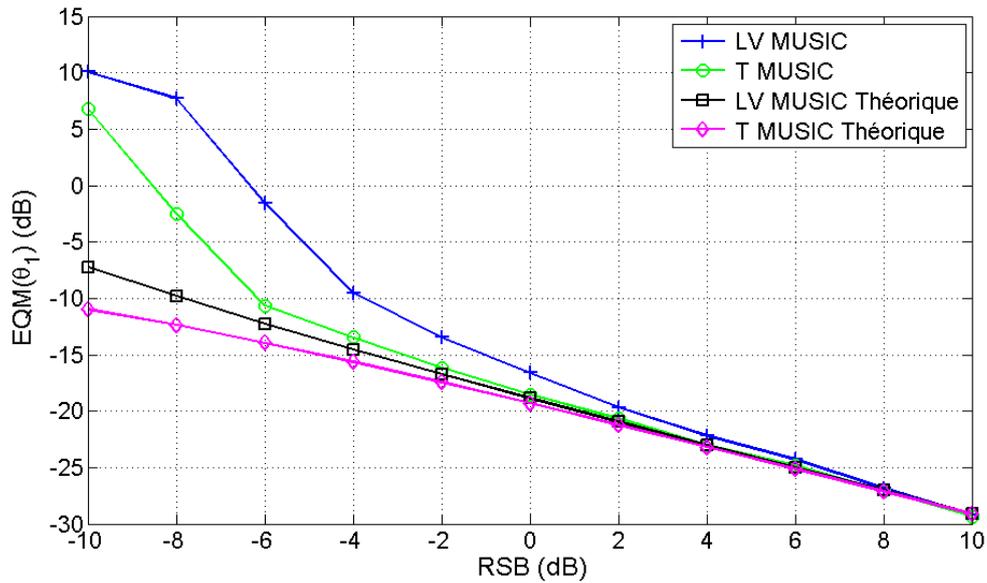


FIGURE 2.9 – EQM de la DoA de la première source en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

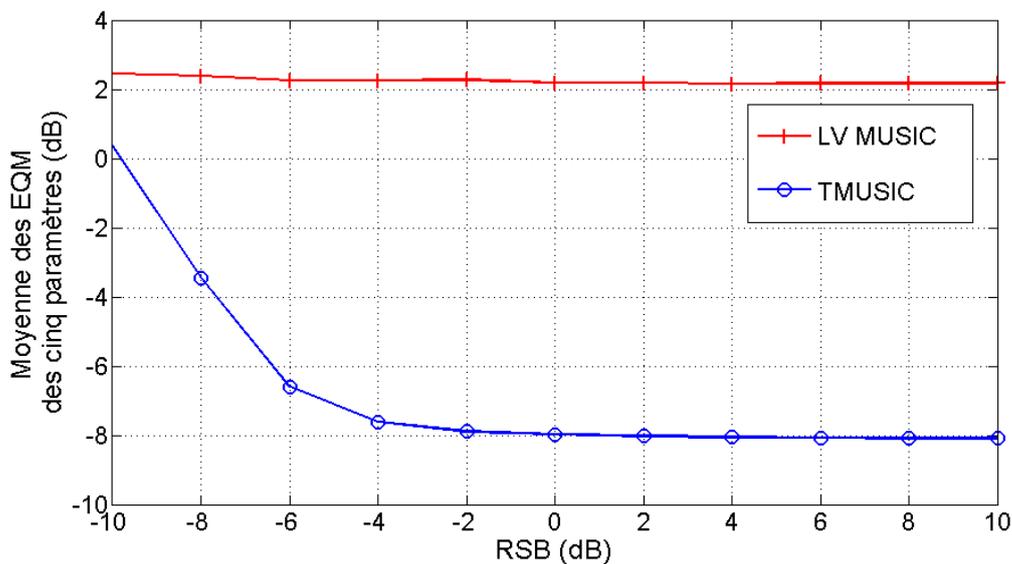


FIGURE 2.10 – Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$, $\varphi_2 = (0, 0.7 \text{ rad}, -0.5 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

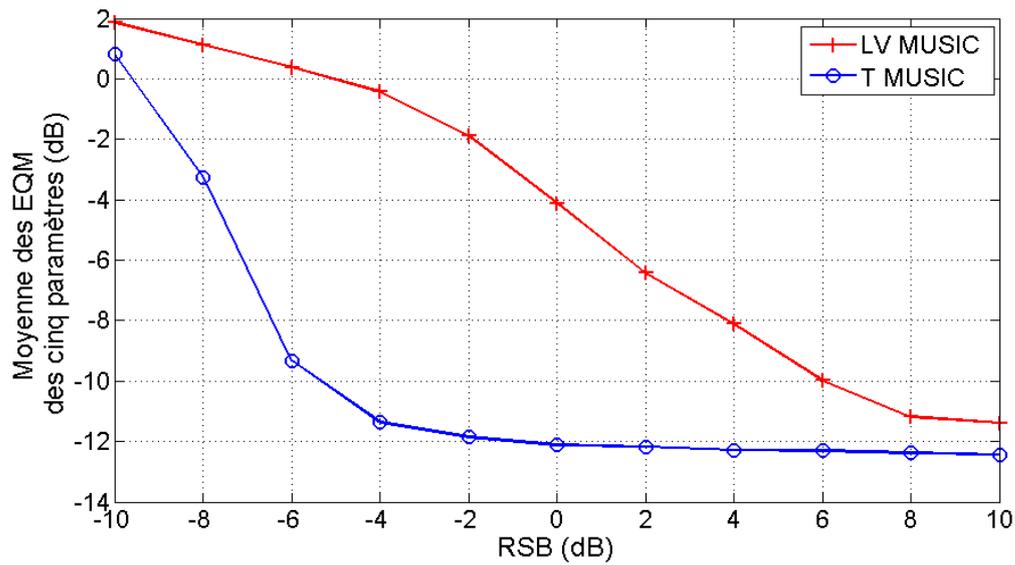


FIGURE 2.11 – Moyenne des EQM des cinq paramètres en fonction du RSB. Les directions d'arrivée des sources sont égales à $\theta_1 = -3^\circ$ et $\theta_2 = 3^\circ$. Les paramètres de polarisation sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2 = (1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = (0, -0.2 \text{ rad}, 0.25 \text{ rad})$. Les autres paramètres de la simulation sont : $K = 300$, $N_{rea} = 1000$.

Carlo. Ces simulations ont permis de montrer que les performances de TMUSIC sont meilleures que celles de LVMUSIC dans les situations les plus réalistes.

Chapitre 3

Alternative Unfolding HOSVD

Le chapitre 2 a montré que la HOSVD pouvait permettre d'adapter les algorithmes rang faible à des contextes tensoriels. Néanmoins, la projection orthogonale associée à la HOSVD est limitée car elle prend en compte une structure rang faible tensorielle particulière. C'est pourquoi une nouvelle définition de rang tensoriel, qui généralise la notion de n -rang, est proposée dans ce chapitre. A partir de cette nouvelle structure, une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'AU-HOSVD est ensuite introduite. Les propriétés de cette nouvelle décomposition sont étudiées. En particulier, on montre qu'il est possible d'étendre le concept de projection orthogonale tensorielle à ces nouvelles structures rang faible. Cette contribution a fait l'objet d'un article soumis dans la revue IEEE Transactions on Signal Processing [13].

3.1 Motivations

Dans le chapitre précédent, une illustration de l'utilisation de l'algèbre multilinéaire en traitement d'antenne pour l'estimation de direction d'arrivée a été présentée. Dans ce cas l'utilisation, de la HOSVD s'est révélée plus ou moins pertinente, avec dans certains cas, un gain en terme de performances par rapport à l'approche vectorielle. Toutefois, cette décomposition n'est pas la mieux adaptée à tous les types de données.

Le calcul des éléments de la HOSVD repose sur la décomposition en valeurs singulières d'un seul type de matrice dépliant. Dans le cas d'un tenseur \mathcal{A} d'ordre trois, seules trois matrices dépliantes sont utilisées, $[\mathcal{A}]_1$, $[\mathcal{A}]_2$ et $[\mathcal{A}]_3$, alors que sept déploiements sont possibles (voir figure 3.1). Ces trois matrices sont obtenues en dépliant le tenseur dans chaque dimension prise séparément, ne permettant d'utiliser qu'un certain type de structure. Dans le cadre de la réduction de rang, cela se traduit par l'utilisation des n -rangs (voir paragraphe 1.5.3). Ainsi, si aucun des n -rangs d'un tenseur n'est déficient, la HOSVD ne permet pas de faire de la réduction de rang. Dans ce cas, l'approche tensorielle n'apporte aucune amélioration par rapport à une approche vectorielle.

Par ailleurs, il existe des données dont les n -rangs ne sont pas déficients mais qui présentent une structure rang faible. Cette structure se situe alors dans une combinaison de dimensions, qui correspond aux matrices dépliantes laissées de côté par la HOSVD. On peut aussi imaginer des cas où certains des n rangs sont déficients mais où les rangs "associés à une combinaison de dimensions" permettent de mieux estimer le sous-espace de rang faible. Pour prendre en compte ces cas, il paraît pertinent de proposer une

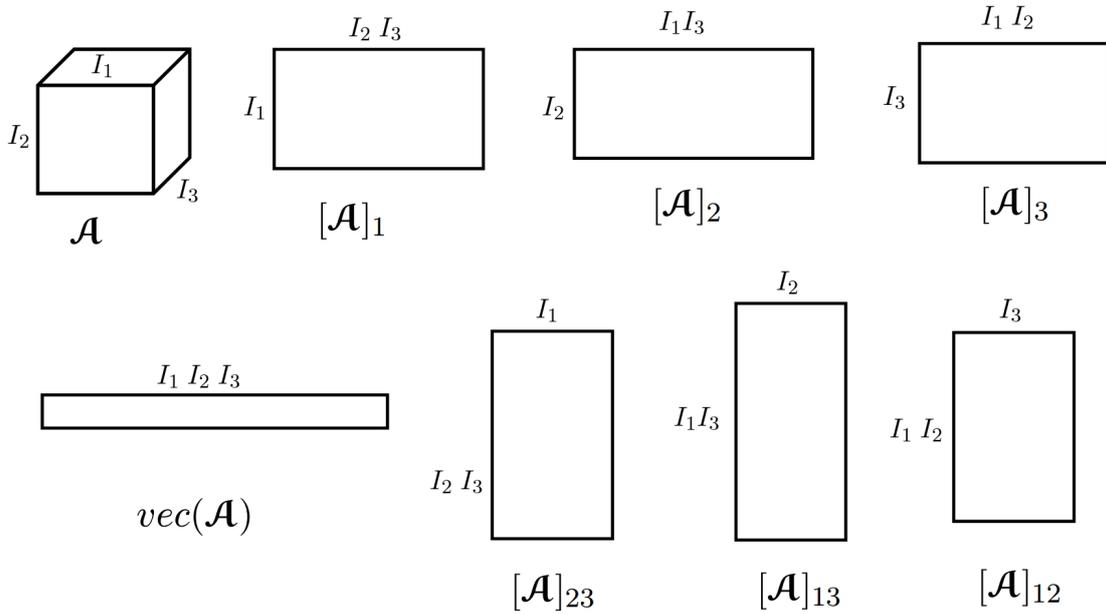


FIGURE 3.1 – Représentation des sept dépliements possibles pour un tenseur d'ordre trois.

extension de la HOSVD qui intègre toutes les matrices dépliantes : l'*Alternative Unfolding* HOSVD.

Dans ce but, une extension du concept de n -rang est nécessaire afin de permettre de formaliser cette idée d'information liée à une combinaison de dimensions et ainsi définir une structure rang faible tensorielle plus générale. Ensuite, deux nouveaux opérateurs tensoriels seront présentés : ils seront utiles pour définir l'AU-HOSVD. Il sera alors possible d'étendre le concept de projection orthogonale tensorielle à ces nouvelles structures rang faible.

On reprend les notations du paragraphe 1.2 : pour un tenseur \mathcal{A} d'ordre P , $\mathbb{D} = \{1, \dots, P\}$ désigne l'ensemble des indices des dimensions de \mathcal{A} et \mathbb{D}_l un sous-ensemble de \mathbb{D} .

3.2 Nouveaux opérateurs

L'introduction de l'AU-HOSVD nécessite de formaliser le concept de "combinaison de dimensions" évoqué dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, on va être amené à proposer un nouveau type de rang tensoriel. Ensuite, deux nouveaux opérateurs vont être proposés : une nouvelle façon de déplier les tenseurs et un nouveau produit entre un tenseur et une matrice.

3.2.1 Extension des n -rangs

Comme on l'a expliqué dans le paragraphe 3.1, la notion de n -rang ne permet pas de considérer tous les types d'information contenus dans un tenseur. On propose donc une nouvelle notion de rang tensoriel, permettant de prendre en compte n'importe quelle matrice dépliant.

Définition 3.2.1 Soit \mathcal{A} un tenseur d'ordre P , $\mathbb{D} = \{1, \dots, P\}$ et \mathbb{D}_l un sous-ensemble de \mathbb{D} . On notera $r_{\mathbb{D}_l}$ le rang du tenseur \mathcal{A} associé à la combinaison de dimensions \mathbb{D}_l et définit comme suit :

$$r_{\mathbb{D}_l} \triangleq \text{rank}([\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}). \quad (3.1)$$

Cette notion généralise la définition de n -rang. Dans la suite, un tenseur \mathcal{A} sera de rang faible si il existe un sous ensemble \mathbb{D}_l tel que $r_{\mathbb{D}_l} < I_{\mathbb{D}_l}$.

3.2.2 Un nouveau type de dépliement

Les dépliements classiques transforment un tenseur en matrice. Un nouvel opérateur est proposé. Cet opérateur transforme un tenseur en un tenseur contenant les mêmes éléments mais d'ordre inférieur afin de pouvoir regrouper des dimensions entre elles.

Définition 3.2.2 Soit $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} c'est à dire L sous-ensembles de \mathbb{D} tels que :

- $\bigcup_{l=1}^L \mathbb{D}_l = \mathbb{D}$
- les \mathbb{D}_l , $l = 1 \dots L$ sont deux à deux disjoints :

$$\mathbb{D}_k \cap \mathbb{D}_l = \emptyset, \text{ si } k \neq l$$

L'opérateur, qui transforme un tenseur \mathcal{A} d'ordre P en un tenseur d'ordre L est noté *Reshape* :

$$\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_1} \times \dots \times I_{\mathbb{D}_L}}. \quad (3.2)$$

De même que pour les matrices dépliantes, il est possible de définir l'opérateur inverse noté Reshape^{-1} , à condition de connaître la partition $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$.

A l'aide de cet opérateur, il est possible de faire le lien entre les dépliements selon une dimension et ceux selon une combinaison de dimensions. Soit \mathcal{A} un tenseur d'ordre P , $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} . Par définition de l'opérateur *Reshape* et des dépliements, on a alors l'égalité suivante :

$$\forall l \in [1, L], [\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l} = [\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l \quad (3.3)$$

3.2.3 Un nouveau produit tensoriel

Le produit n -mode est utilisé pour la HOSVD car il permet de multiplier un tenseur et une matrice le long d'une dimension. Pour formaliser l'AU-HOSVD, une généralisation de ce produit est nécessaire afin de pouvoir multiplier un tenseur et une matrice selon une combinaison de dimensions.

Définition 3.2.3 (Produit multimode) Soit \mathcal{A} un tenseur d'ordre P , \mathbb{D}_l un sous-ensemble de \mathbb{D} et $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_1} \times I_{\mathbb{D}_1}}$ une matrice carrée. Le produit multimode noté $\times_{\mathbb{D}_l}$ est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{E} \iff [\mathcal{B}]_{\mathbb{D}_l} = \mathbf{E}[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}, \quad (3.4)$$

La proposition suivante permet de faire le lien entre le produit multimode et le produit n -mode.

Proposition 3.2.1 Soit \mathcal{A} un tenseur d'ordre $P, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} et $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_1} \times I_{\mathbb{D}_1}}$. Les égalités suivantes sont vérifiées pour $l = 1 \dots L$:

$$\text{Reshape}(\mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{E}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = \text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_l \mathbf{E} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{E} = \text{Reshape}^{-1}(\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_l \mathbf{E}) \quad (3.6)$$

Preuve 3.2.1 On pose $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{E}$. A l'aide de l'équation (3.3), on en déduit les égalités suivantes :

$$[\mathcal{B}]_{\mathbb{D}_l} = [\text{Reshape}(\mathcal{B}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l \quad (3.7)$$

et

$$[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l} = [\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l. \quad (3.8)$$

En combinant ces deux équations avec l'équation (3.4), on obtient :

$$[\text{Reshape}(\mathcal{B}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l = \mathbf{E}[\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l, \quad (3.9)$$

On reconnaît la définition du produit n -mode (voir paragraphe 1.3.4), l'équation (3.9) est donc équivalente à :

$$\text{Reshape}(\mathcal{B}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = \text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_l \mathbf{E}.$$

Par définition de \mathcal{B} , on a finalement :

$$\text{Reshape}(\mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{E}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = \text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_l \mathbf{E} \quad (3.10)$$

La seconde égalité est obtenue en appliquant l'opérateur Reshape^{-1} à l'équation (3.10).

La proposition 3.2.1 et la commutativité du produit n -mode, permettent de déduire que le produit multimode est commutatif pour deux sous-ensembles différents. En d'autres termes, pour deux sous-ensembles \mathbb{D}_k et \mathbb{D}_l d'intersection vide et deux matrices, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_k} \times I_{\mathbb{D}_k}}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_l} \times I_{\mathbb{D}_l}}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_k} \mathbf{B} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{C} = \mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_l} \mathbf{C} \times_{\mathbb{D}_k} \mathbf{B}. \quad (3.11)$$

3.3 Alternative Unfolding HOSVD

3.3.1 Définition et existence

A l'aide des outils définis précédemment, il est désormais possible d'introduire l'AU-HOSVD.

Théorème 3.3.1 (Alternative Unfolding HOSVD) Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P et $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} .

L'Alternative Unfolding Higher Order Singular Value Decomposition (AU-HOSVD) permet d'écrire le tenseur \mathcal{A} sous la forme suivante (voir exemple figure 3.2) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_L)}, \quad (3.12)$$

où les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_l} \times I_{\mathbb{D}_l}}$, $\forall l \in [1, L]$, sont unitaires et définies de la façon suivantes. Pour un l fixé, $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)}$ est obtenue à partir de la SVD de la matrice dépliant $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l} = \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} \mathbf{\Sigma}^{(\mathbb{D}_l)} \mathbf{V}^{(\mathbb{D}_l)H}$.

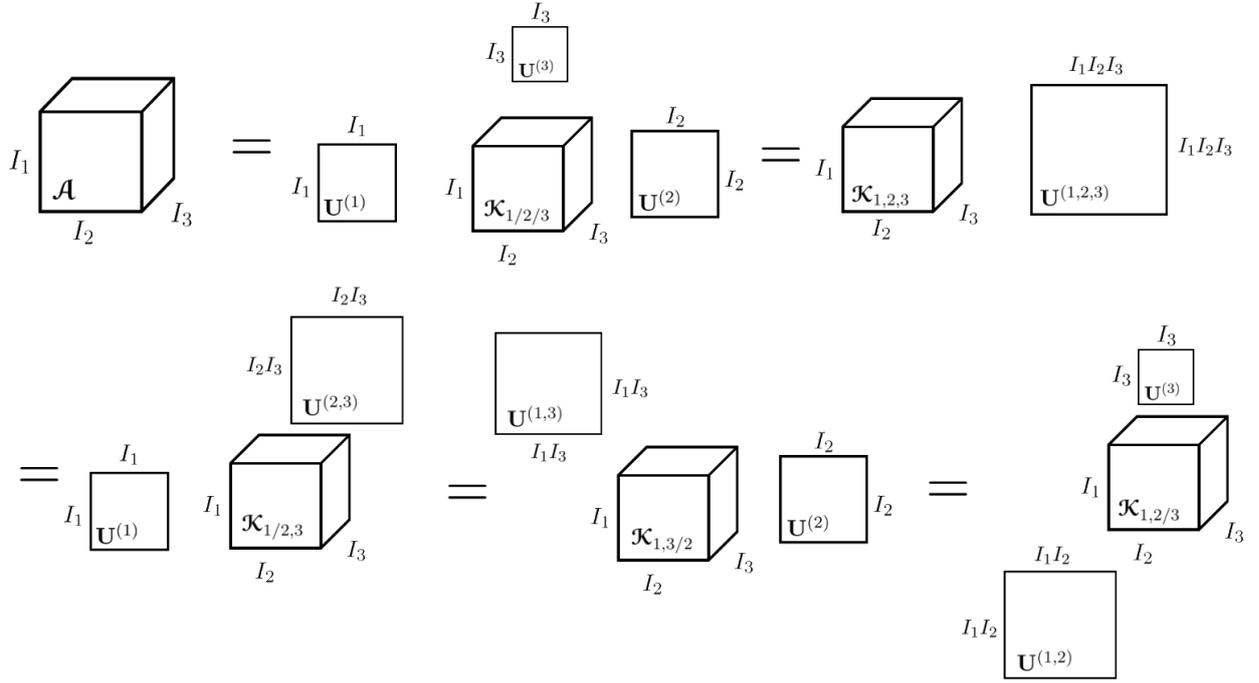


FIGURE 3.2 – Représentation des cinq AU-HOSVD possibles pour un tenseur d'ordre trois, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$.

$\mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ représente le tenseur noyau. Il possède les mêmes propriétés que le tenseur noyau de la HOSVD. On note $\mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L, i_p=\alpha}$, le sous-tenseur obtenu en fixant le p -ième indice à α . Le tenseur noyau $\mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L}$ possède les propriétés suivantes pour $p = 1 \dots P$:

- $\langle \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L, i_p=\alpha}, \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L, i_p=\beta} \rangle = 0$ lorsque $\alpha \neq \beta$
- $\|\mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L, i_p=1}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L, i_p=I_p}\|$.

Preuve 3.3.1 Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$, un tenseur d'ordre P et $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} . On applique l'opérateur Reshape au tenseur \mathcal{A} avec la partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$.

$$\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_1} \times \dots \times I_{\mathbb{D}_L}}. \quad (3.13)$$

$\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)$ est donc un tenseur d'ordre L que l'on peut décomposer avec la HOSVD :

$$\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_L \mathbf{U}^{(L)}, \quad (3.14)$$

où les matrices $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{D}_l} \times I_{\mathbb{D}_l}}$ sont obtenues à partir de la SVD de :

$$[\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l = \mathbf{U}^{(l)} \boldsymbol{\Sigma}^{(l)} \mathbf{V}^{(l)H} \quad (3.15)$$

L'opérateur Reshape^{-1} est ensuite appliqué à l'équation (3.14) :

$$\mathcal{A} = \text{Reshape}^{-1}(\mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_L \mathbf{U}^{(L)}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \quad (3.16)$$

Grâce à la proposition 3.2.1, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{Reshape}^{-1}(\mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_L \mathbf{U}^{(L)}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = \text{Reshape}^{-1}(\mathcal{K}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}^{(L)}. \quad (3.17)$$

L'équation (3.16) se réécrit alors :

$$\mathcal{A} = \text{Reshape}^{-1}(\mathcal{K}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(1)} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}^{(L)}. \quad (3.18)$$

La preuve de l'existence de l'AU-HOSVD est obtenue en posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} &= \mathbf{U}^{(l)} \\ \text{et} \\ \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_L} &= \text{Reshape}^{-1}(\mathcal{K}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L). \end{aligned}$$

En remarquant que $[\text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)]_l = [\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}$, on en déduit que les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)}$ peuvent être obtenues à partir de la SVD de la matrice dépliant $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l} = \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} \mathbf{\Sigma}^{(\mathbb{D}_l)} \mathbf{V}^{(\mathbb{D}_l)H}$. Ceci conclut la preuve du théorème.

Cette preuve et en particulier les équations (3.14) et (3.18) permettent de constater que l'AU-HOSVD est effectivement une extension de la HOSVD. De plus, ce lien fournit une méthode pour calculer les éléments de l'AU-HOSVD.

L'AU-HOSVD n'est pas une décomposition mais un ensemble de décompositions différentes selon la manière de combiner les dimensions entre elles. En effet, il n'est pas possible de proposer une décomposition qui prend en compte toutes les matrices dépliantes d'un tenseur puisque cela reviendrait à "utiliser" plusieurs fois les mêmes dimensions.

Il y a donc plusieurs manières de décomposer un même tenseur avec l'AU-HOSVD. Le résultat de la décomposition sera différent pour chaque choix de partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$. Pour un tenseur d'ordre P , le nombre d'AU-HOSVD possibles est égal au nombre de partition que l'on peut obtenir avec un ensemble à P éléments. Ce nombre, connu sous le nom de nombre de Bell, noté B_P est donné par la formule suivante [77] :

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 \\ B_{P+1} &= \sum_{k=1}^P \binom{P}{k} B_k \end{aligned}$$

Ainsi les traitements basés sur l'AU-HOSVD qui seront proposés par la suite dépendront du choix de la partition. Ce choix posera un certain nombre de questions. Faut-il tester toutes les partitions ? Peut-on en éliminer certaines en fonction de l'application ? ... Des éléments de réponses seront donnés dans le chapitre suivant.

Concernant le coût calculatoire de l'AU-HOSVD, pour l fixé, le nombre d'opérations nécessaires pour extraire la matrice $\mathbf{U}_{\mathbb{D}_l}$, issu de la SVD de la matrice dépliant $[\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}$, est égale à :

$$4I_{\mathbb{D}_l}^2 I_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_l} \quad (3.19)$$

TABLE 3.1 – Coûts calculatoires des différentes AU-HOSVD pour un tenseur d'ordre trois $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$

Partition	Coût
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2, 3\}$	$4(I_1 I_2 I_3)^2$
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}, \mathbb{D}_3 = \{3\}$	$4(I_1 I_2 I_3)(I_1 + I_2 + I_3)$
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2\}, \mathbb{D}_2 = \{3\}$	$4(I_1 I_2 I_3)(I_1 I_2 + I_3)$
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2, 3\}$	$4(I_1 I_2 I_3)(I_1 + I_2 I_3)$
$\mathbb{D}_1 = \{1, 3\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}$	$4(I_1 I_2 I_3)(I_1 I_3 + I_2)$

Le nombre d'opérations nécessaires pour une partition donnée est donc égale à (voir table 3.1 pour le cas d'un tenseur d'ordre trois) :

$$\begin{aligned}
 N_{operations} &= \sum_{l=1}^L 4I_{\mathbb{D}_l}^2 I_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_l} \\
 &= \sum_{l=1}^L 4I_{\mathbb{D}_l} I_{\mathbb{D}_l} I_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_l} \\
 &= 4 \left(\prod_{p=1}^P I_p \right) \left(\sum_{l=1}^L I_{\mathbb{D}_l} \right). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

3.3.2 Cas particuliers

On propose d'étudier dans ce paragraphe quelques cas particuliers de AU-HOSVD.

HOSVD Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur d'ordre P . On considère la partition suivante : $\mathbb{D}_1 = \{1\}, \dots, \mathbb{D}_P = \{P\}$. L'AU-HOSVD associée à cette partition permet de décomposer \mathcal{A} sous la forme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_P} \times_1 \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \dots \times_P \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_P)}, \tag{3.21}$$

avec les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} \in \mathbb{C}^{I_l \times I_l}$ pour $l = 1 \dots P$, qui sont donc les mêmes que pour la HOSVD de \mathcal{A} . On constate alors que la HOSVD peut être vue comme un cas particulier d'AU-HOSVD.

Tenseur hermitien Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur hermitien d'ordre $2P$. Soit $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_{2L}$ une partition de $\{1, \dots, 2P\}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $\mathbb{D}_l, \dots, \mathbb{D}_L$ est une partition de $\{1, \dots, P\}$
- $I_{\mathbb{D}_l} = I_{\mathbb{D}_{L+l}}$ pour $l = 1 \dots L$.

Alors l'AU-HOSVD de \mathcal{H} s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_{2L}} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_L)} \times_{\mathbb{D}_{L+1}} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)*} \dots \times_{\mathbb{D}_{2L}} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_L)*}. \tag{3.22}$$

Ainsi la partition $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$ de $\{1, \dots, P\}$ suffit pour définir ce type d'AU-HOSVD. Dans la suite, on parlera donc d'AU-HOSVD associée à la partition $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L$.

Lien avec la SVD Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ un tenseur hermitien d'ordre $2P$ et la partition $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ telle que $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \{1, \dots, P\}$. On est dans la configuration du paragraphe précédent, l'AU-HOSVD de \mathcal{H} associée à cette partition s'écrit donc :

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\mathbb{D}_2} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \times_{\mathbb{D}_2} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_2)} \quad (3.23)$$

avec $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_2)} = \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)*}$ et $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P \times I_1 \times \dots \times I_P}$ issue de la SVD de $[\mathcal{H}]_{\mathbb{D}_1} = SqMat(\mathcal{H}) = \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{\Sigma}^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)H}$. Ce cas permet de montrer le lien avec la SVD matricielle puisque les matrices issues de cette décomposition sont les mêmes que celles obtenues pas la SVD de $SqMat(\mathcal{H})$.

3.4 Projection orthogonale

L'existence et les propriétés de base de l'AU-HOSVD ayant été démontrées, on peut maintenant s'intéresser à ses propriétés pour des tenseurs rang faible. Il est naturel de s'appuyer sur le rang donné par la définition 3.2.1 et donc de considérer un tenseur de rang faible $(r_{\mathbb{D}_1}, \dots, r_{\mathbb{D}_L})$. Cependant, on ne peut pas envisager l'existence d'un tenseur de dimensions réduites. En effet, les rangs étant associés à une combinaison de dimensions, il n'est pas possible de prévoir comment chaque dimension associées à un rang donné seraient réduite. Il n'est pas possible d'obtenir une formule pour faire de la réduction de rang avec l'AU-HOSVD. En revanche, on va voir dans la proposition suivante qu'il est possible de proposer une extension de la notion de projection orthogonale proposée pour la HOSVD (voir paragraphe 1.5.3).

Proposition 3.4.1 (Projection orthogonale) Soit $\mathcal{A}, \mathcal{A}_c, \mathcal{A}_0 \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$ trois tenseurs d'ordre P qui vérifient l'égalité suivante :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{A}_0. \quad (3.24)$$

Soit $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} . On suppose que \mathcal{A}_c est un tenseur rang faible (au sens de la définition 3.2.1), c'est à dire qu'il existe au moins un sous-ensemble \mathbb{D}_l tel que $r_{\mathbb{D}_l} < I_{\mathbb{D}_l}$.

Sous ces conditions, le tenseur \mathcal{A}_0 peut être approximé à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{\mathcal{A}}_0 \approx \mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (3.25)$$

Par analogie avec le cas de la HOSVD, les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)}, \dots, \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)}$ sont construites de manière à minimiser la fonction de coût $f(\mathcal{A}) = \|\hat{\mathcal{A}}_0 - \mathcal{A}_0\|^2$. Étant donné le lien entre AU-HOSVD et HOSVD (voir preuve du théorème 3.3.1), on suppose que les remarques du paragraphe 1.5.3 restent valables. Ainsi, même si les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)}$ doivent être calculées grâce à un algorithme des moindres carrés alternés afin d'obtenir un résultat optimal, on utilisera la même approximation que celle du paragraphe 1.5.3.

Dans la suite, les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)} \in \mathbb{C}^{(I_{\mathbb{D}_l} - r_{\mathbb{D}_l}) \times I_{\mathbb{D}_l}}$ seront calculées de la manière suivante : $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)} = [\mathbf{u}_{r_{\mathbb{D}_l}+1}^{(\mathbb{D}_l)}, \dots, \mathbf{u}_{I_{\mathbb{D}_l}}^{(\mathbb{D}_l)}]$, avec $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)} = [\mathbf{u}_1^{(\mathbb{D}_l)}, \dots, \mathbf{u}_{I_{\mathbb{D}_l}}^{(\mathbb{D}_l)}]$ obtenue à partir de l'AU-HOSVD de \mathcal{A} pour la partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$.

Preuve 3.4.1 On applique l'opérateur Reshape à l'équation (3.24), qui devient :

$$Reshape(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) = Reshape(\mathcal{A}_c, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) + Reshape(\mathcal{A}_0, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L). \quad (3.26)$$

Le tenseur d'ordre L $\text{Reshape}(\mathcal{A}_c, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)$ est alors un tenseur de rang faible au sens de la partie 1.5.3. On peut donc appliquer la formule donnée par l'équation (1.35) :

$$\text{Reshape}(\mathcal{A}_0, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \approx \text{Reshape}(\mathcal{A}, \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L) \times_1 \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_L \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}$$

Pour finir la preuve, on applique l'opérateur Reshape^{-1} à l'équation (3.27) :

$$\mathcal{A}_0 \approx \mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}.$$

3.5 Synthèse

Dans ce chapitre, on a proposé une nouvelle définition de rang tensoriel, permettant de généraliser le concept de n -rang afin de pouvoir prendre en compte d'autres types de données rang faible que celles prises en compte par la HOSVD. De plus, on a introduit deux nouveaux outils tensoriels : un nouveau type de dépliement et une extension du produit n -mode.

Ces outils ont permis d'introduire une des contributions principales de ce travail : une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'AU-HOSVD.

On a finalement montré qu'il est possible d'étendre la notion de réduction de rang en utilisant l'AU-HOSVD afin de faire de la projection orthogonale.

Dans le chapitre suivant on va pouvoir appliquer cette décomposition dans un contexte de filtrage/détection de données multidimensionnelles rang faible.

Chapitre 4

Filtrage et détection de données multidimensionnelles comportant une structure rang faible

Ce chapitre est consacré au développement de filtres et de détecteurs pour des données multidimensionnelles comportant une structure rang faible. On suppose que les données étudiées comportent P dimensions : $I_1 \dots I_P$. On se place dans un cas où on cherche à filtrer/détecter un signal noyé dans du bruit. On envisage deux approches pour traiter ces données : une approche vectorielle et une approche tensorielle.

L'approche vectorielle consiste à mettre les données sous forme de vecteurs afin d'obtenir un modèle classique de traitement d'antenne. On peut alors appliquer les détecteurs et les filtres couramment utilisés. Le rappel de ces méthodes sera l'objet d'une première partie.

L'approche tensorielle, qui sera étudiée dans une seconde partie, consiste à préserver la structure des données en les mettant sous forme de tenseurs. On sera alors amené à proposer un modèle tensoriel rang faible qui s'appuiera sur la notion de rang introduite dans le chapitre précédent. Les filtres et les détecteurs tensoriels basés sur l'AU-HOSVD seront ensuite proposés.

Le bruit considéré sera composé de deux composantes additives : un bruit blanc gaussien plus un bruit gaussien de rang faible.

Cette contribution a fait l'objet d'un article soumis dans la revue IEEE Transactions on Signal Processing [13].

4.1 Méthodes vectorielles

4.1.1 Modèle

Dans cette partie, on étudie une approche vectorielle pour traiter ces données multidimensionnelles. Les données vont donc être mises sous forme de vecteur. Le problème revient alors à filtrer/détecter un signal s perturbé par un bruit \mathbf{d} au sein d'une observation \mathbf{x} . Le bruit \mathbf{d} est supposé être gaussien, centré, de matrice de covariance \mathbf{R} , considérée connue dans un premier temps, et indépendant de s . On suppose, de plus, que l'on dispose de K données secondaires \mathbf{x}_k qui ne contiennent que du bruit \mathbf{d}_k . Ces

K données sont indépendantes, identiquement distribuées et suivent la même loi que \mathbf{d} . Le modèle peut alors se résumer à l'aide des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha \mathbf{s} + \mathbf{d}, \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k, \quad k \in [1, K], \end{cases} \quad (4.1)$$

où α désigne l'amplitude complexe du signal, inconnue et $\mathbf{x}, \mathbf{x}_k, \mathbf{s}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_k \in \mathbb{C}^{I_1 \dots I_P}$. A partir de ce modèle, on va d'abord proposer un filtre et un détecteur qui utilisent la matrice de covariance totale \mathbf{R} ainsi que leur version adaptative. On proposera ensuite un filtre et un détecteur qui prennent en compte la structure rang faible des données ainsi que leur version adaptative.

4.1.2 Algorithmes sans hypothèse rang faible

Filtre

Avec le modèle donné par les équations (5.23) et (5.23), on est dans le cas où l'on cherche à filtrer un signal \mathbf{s} connu, perturbé par un bruit additif gaussien, centré, de matrice de covariance \mathbf{R} connu. Ce cas est bien connu. On cherche alors le filtre \mathbf{w}_{opt} qui maximise le RSB en sortie de filtre :

$$RSB_{sortie} = \frac{|\langle \mathbf{w}_{opt}, \mathbf{x} \rangle|^2}{\mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{opt}} \quad (4.2)$$

C'est le filtre adapté qui vérifie cette condition :

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s} \quad (4.3)$$

$$y = |\langle \mathbf{w}_{opt}, \mathbf{x} \rangle|, \quad (4.4)$$

où y désigne la sortie du filtre. Ce filtre est aussi appelé filtre optimal, \mathbf{w}_{opt} , puisqu'il maximise le RSB de sortie. Il servira de référence lorsque l'on voudra comparer les performances des autres filtres.

Détecteur

Le modèle donné par les équations (5.23) et (5.23) peut aussi être vu comme un problème de détection. Il s'agit alors de choisir entre deux hypothèses :

- H_0 : l'observation \mathbf{x} ne contient pas le signal \mathbf{s} .
- H_1 : l'observation \mathbf{x} contient le signal \mathbf{s} .

Ce qu'on peut réécrire comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k, \quad k \in [1, K] \\ H_1 : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{s} + \mathbf{d}, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k, \quad k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.5)$$

L'objectif de la détection est de déterminer laquelle de ces deux hypothèses est la plus vraisemblable, de manière à

- maximiser la probabilité de détection (P_d) qui désigne la probabilité de détecter le signal (hypothèse H_1) lorsqu'il est présent.
- minimiser la probabilité de fausse alarme (P_{fa}) qui désigne la probabilité de détecter le signal (hypothèse H_1) lorsqu'il n'est pas présent.

Cependant, il est impossible de minimiser les deux critères simultanément. Un bon compromis est donné par le critère de Neymann-Pearson qui cherche à maximiser la P_d pour une P_{fa} fixée. Dans le cas où α est inconnu, le test optimal est donné par le Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) suivant :

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{s}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (4.6)$$

η est le seuil auquel on compare le TRVG afin de choisir entre les deux hypothèses. Pour le TRVG la relation entre le seuil η et la P_{fa} est connue [43]

$$\eta = -\ln(P_{fa}) \quad (4.7)$$

Versions adaptatives

En pratique, il n'est pas réaliste de considérer \mathbf{R} connue. On utilise alors les données secondaires \mathbf{x}_k pour l'estimer. Étant donnée la nature du bruit, la SCM, en tant qu'estimateur du maximum de vraisemblance sera utilisée. Ainsi, l'estimée de la matrice de covariance, notée $\hat{\mathbf{R}}$ est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H. \quad (4.8)$$

Les versions adaptatives du filtre et du détecteur présentées sont obtenues en remplaçant \mathbf{R} par son estimée $\hat{\mathbf{R}}$. Pour le filtre, on obtient alors la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s} \quad (4.9)$$

$$\hat{y} = |\langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle|. \quad (4.10)$$

Pour le détecteur, la version adaptative, appelée *Adaptive Matched Filter* (AMF) a été introduite et étudiée par Robey [76] :

$$\hat{\Lambda} = \frac{|\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (4.11)$$

Dans ce cas la relation entre η et P_{fa} est connue (voir [76] pour le détail de cette relation).

Critères de performance

Afin d'évaluer les performances de ces algorithmes adaptatifs, il est nécessaire d'utiliser un critère.

Pour les filtres, le *Signal to Noise Ratio loss* (SNR loss), noté ρ_{loss} sera utilisé. Ce critère mesure la perte d'un filtre $\hat{\mathbf{w}}$ en terme de SNR de sortie par rapport à celui du filtre adapté :

$$\rho_{loss} = \frac{|\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{s}|^2}{(\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{R} \hat{\mathbf{w}})(\mathbf{s}^H \mathbf{R} \mathbf{s})} \quad (4.12)$$

En pratique, un filtre adaptatif atteint de "bonnes" performances lorsque $\rho_{loss} = -3dB$. Pour les filtres rang faible, on parlera plutôt de *Signal to Interference plus Noise Ratio loss* (SINR loss).

Pour les détecteurs, on s'intéressera à la relation entre P_d et P_{fa} pour comparer leurs performances.

Synthèse

Ces versions adaptatives comportent un défaut majeur. Le nombre de données secondaires nécessaire pour obtenir des performances correctes est relativement important : de l'ordre de deux fois la taille des vecteurs ($2 \prod_{p=1}^P I_p$ dans notre cas). Selon les applications envisagées, ce nombre de données peut vite devenir totalement irréaliste : données non disponibles, bruit ne pouvant plus être considéré comme homogène ... C'est pourquoi, sous réserve d'hypothèses supplémentaires sur le bruit, d'autres type de méthodes ont été proposés. Dans la suite, on s'intéressera plus particulièrement aux méthodes rang faible.

4.1.3 Algorithmes rang faible

Cette approche suppose une hypothèse supplémentaire sur le bruit. Les \mathbf{d} , \mathbf{d}_k sont supposés se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \mathbf{c} + \mathbf{n} \\ \mathbf{d}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k \end{cases} \quad (4.13)$$

\mathbf{n} , \mathbf{n}_k sont des bruits blancs, gaussiens, centrés, de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$ et appelés bruit. \mathbf{c} , \mathbf{c}_k sont des bruits gaussiens, centrés, de matrice de covariance \mathbf{R}_c , appelés fouillis (*clutter*). La matrice \mathbf{R}_c est supposée de rang faible, $r < \prod_{p=1}^P I_p$. De plus les valeurs propres de \mathbf{R}_c sont supposées être très supérieures à σ^2 . La matrice du bruit total est donc égale à :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (4.14)$$

\mathbf{R}_c est supposée connue dans un premier temps. Cette structure va permettre d'appliquer des méthodes rang faible. Ces méthodes reposent sur une projection orthogonale qui permet d'éliminer une partie du bruit.

Ce projecteur est construit de la manière suivante. La SVD permet de décomposer \mathbf{R} comme suit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H. \quad (4.15)$$

Étant donnée l'hypothèse sur les valeurs propres de \mathbf{R}_c , le sous-espace du fouillis est généré par les vecteurs propres de \mathbf{R} associés à ses r plus grandes valeurs propres. Ainsi la troncature de $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{I_1 \dots I_P}]$ en $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{I_1 \dots I_P}]$ permet de construire un projecteur sur le sous-espace orthogonal au fouillis. L'équation (5.23), une fois multipliée par \mathbf{U}_0 , devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^H \mathbf{x} &= \alpha \mathbf{U}_0^H \mathbf{s} + \mathbf{U}_0^H \mathbf{c} + \mathbf{U}_0^H \mathbf{n} \\ &= \alpha \mathbf{U}_0^H \mathbf{s} + \mathbf{U}_0^H \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cette nouvelle équation permet de proposer un nouveau filtre et un nouveau détecteur.

Filtre

Avec l'équation (4.16), le problème revient à filtrer un signal $\mathbf{U}_0^H \mathbf{s}$ noyé dans un bruit blanc gaussien $\mathbf{U}_0^H \mathbf{n}$ au sein d'une observation $\mathbf{U}_0^H \mathbf{x}$. Le filtre de l'équation (4.3) s'applique :

$$\mathbf{w}_{lr} = \mathbf{U}_0^H \mathbf{s} \quad (4.17)$$

$$y_{lr} = | \langle \mathbf{w}_{lr}, \mathbf{U}_0^H \mathbf{x} \rangle |. \quad (4.18)$$

De plus, la sortie de filtre peut se réécrire :

$$\begin{aligned} y_{lr} &= | \langle \mathbf{w}_{lr}, \mathbf{U}_0^H \mathbf{x} \rangle | \\ &= | \mathbf{x}^H \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{s} | \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire le filtre rang faible [45, 37] :

$$\mathbf{w}_{lr} = \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{s} \quad (4.19)$$

$$y_{lr} = | \langle \mathbf{w}_{lr}, \mathbf{x} \rangle |. \quad (4.20)$$

Détecteur

A partir de l'équation (4.16), le problème revient à détecter un signal $\mathbf{U}_0^H \mathbf{s}$ noyé dans un bruit blanc gaussien $\mathbf{U}_0^H \mathbf{n}$, de puissance inconnue σ^2 , au sein d'une observation $\mathbf{U}_0^H \mathbf{x}$. On suppose de plus que α est inconnu. Ce cadre a été étudié par Scharf dans [80]. Le test qui en découle, appelé *Normalized Matched Filter test* peut alors s'appliquer. Dans le cas rang faible, le détecteur s'appelle *Low Rank Normalized Matched Filter test* et a été introduit dans [75] :

$$\Lambda_{LR-NMF} = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{s}^H \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{s})(\mathbf{x}^H \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \quad (4.21)$$

Rangaswamy a également démontré dans [75] que la relation entre P_{fa} et η est donnée par :

$$P_{fa} = (1 - \eta)^{(\prod_{p=1}^P I_p)^{-r-1}} \quad (4.22)$$

Versions adaptatives

De même que pour les algorithmes du paragraphe 4.1.2, il est possible de proposer des versions adaptatives de ces algorithmes rang faible. Pour cela, la matrice de covariance globale du bruit, notée $\hat{\mathbf{R}}$, est estimée de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H. \quad (4.23)$$

En appliquant la SVD à la matrice $\hat{\mathbf{R}}$, on obtient une estimée de la matrice \mathbf{U}_0 , notée $\hat{\mathbf{U}}_0$. Les versions adaptatives du filtre rang faible et du détecteur rang faible sont obtenues en remplaçant \mathbf{U}_0 par son estimée $\hat{\mathbf{U}}_0$. Ainsi, le filtre rang faible adaptatif est donné par la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{s} \quad (4.24)$$

$$y = | \langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle |. \quad (4.25)$$

La version adaptative du détecteur, appelée *Low Rank Adaptive Normalized Matched Filter test* est donnée par la formule suivante [75] :

$$\hat{\Lambda}_{LR-NMF} = \frac{|\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{s})(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \quad (4.26)$$

Les versions adaptatives de ces méthodes rang faible ont un avantage conséquent par rapport à celles du paragraphe 4.1.2. Le nombre de données secondaires nécessaires est beaucoup moins important. En

pratique, les performances, en terme de SINR *loss* du filtre rang faible, pour $K = 2r$ données, sont les mêmes ($\rho_{loss} = -3dB$) que pour les méthodes sans hypothèse rang faible pour $K = 2 \prod_{p=1}^P I_p$. De plus, les SINR *loss* théoriques ont été calculés dans le cas gaussien par Kirsteins [45] et Haimovich [37] et par Ginolhac pour des *Spherically Invariant Random Vector* (SIRV) [34] sous certaines hypothèses. En revanche, pour le détecteur, la relation théorique entre P_{fa} et η n'est pas connue. Toutefois des simulations de Monte-Carlo ont été faites par Rangaswamy dans [75].

Synthèse

Cette partie a permis de présenter une approche simple permettant de traiter des données multidimensionnelles avec ou sans hypothèse rang faible. Cette approche consiste à mettre les données sous forme de vecteur pour appliquer des traitements connus. En particulier, les résultats classiques concernant les performances des filtres et des détecteurs, dans leurs versions adaptatives, ont été rappelés.

Néanmoins, pour des données multidimensionnelles, l'usage des tenseurs semble plus naturel puisqu'il permet de préserver la structure. C'est pourquoi, dans la suite de ce chapitre, une autre approche, basée sur un modèle tensoriel et des outils d'algèbre multilinéaire, va être proposée.

4.2 Méthodes tensorielles

4.2.1 Modèle

Ce nouveau modèle s'applique aux mêmes données multidimensionnelles que dans la partie précédente mais elles vont maintenant être traitées sous forme de tenseur d'ordre P . Il s'agit alors de filtrer/détecter un signal \mathcal{S} perturbé par un bruit \mathcal{D} au sein d'une observation \mathcal{X} . Le bruit \mathcal{D} est supposé être gaussien (voir la définition donnée au paragraphe 1.4.2), centré, de tenseur de covariance \mathcal{R} , considéré connu dans un premier temps. On suppose, de plus, que l'on dispose de K données secondaires \mathcal{X}_k qui ne contiennent que du bruit \mathcal{D}_k . Ces K données sont indépendantes, identiquement distribuées et suivent la même loi que \mathcal{D} . Le modèle peut alors s'écrire à l'aide des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{X} = \alpha \mathcal{S} + \mathcal{D} \\ \mathcal{X}_k = \mathcal{D}_k, \quad k \in [1, K], \end{cases} \quad (4.27)$$

où α désigne l'amplitude complexe du signal et $\mathcal{X}, \mathcal{X}_k, \mathcal{D}, \mathcal{D}_k \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_P}$.

4.2.2 Algorithmes sans hypothèse rang faible

A partir de ce modèle, un filtre et un détecteur sont proposés. Ces traitements peuvent être vus comme des versions tensorielles des algorithmes données par les équations (4.3) et (4.6).

Filtre

Proposition 4.2.1 (*Filtre tensoriel lorsque le tenseur de covariance est connu*)

Lorsque \mathcal{R} est connu, le filtre tensoriel \mathcal{W}_{opt} qui maximise le SNR de sortie est donné par :

$$\mathcal{W}_{opt} = \text{vec}^{-1}(\text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1}\text{vec}(\mathcal{S})) \quad (4.28)$$

$$y_{sortie} = | \langle \mathcal{W}_{opt}, \mathcal{X} \rangle |. \quad (4.29)$$

Preuve 4.2.1 On cherche à déterminer le filtre \mathcal{W}_{opt} qui maximise le SNR_{out} en sortie de filtre. Cette quantité s'écrit de manière analogue au cas vectoriel, en utilisant les dépliements des tenseurs \mathcal{W}_{opt} , \mathcal{S} et \mathcal{R} :

$$SNR_{out} = \frac{| \langle \mathcal{W}_{opt}, \mathcal{S} \rangle |^2}{\text{vec}(\mathcal{W}_{opt})^H \text{SqMat}(\mathcal{R}) \text{vec}(\mathcal{W}_{opt})}. \quad (4.30)$$

Le numérateur de l'équation (4.30) peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & | \langle \mathcal{W}_{opt}, \mathcal{S} \rangle |^2 \\ &= | \text{vec}(\mathcal{W}_{opt})^H \text{vec}(\mathcal{S}) |^2 \\ &= | \text{vec}(\mathcal{W}_{opt})^H \text{SqMat}(\mathcal{R})^{\frac{1}{2}} \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathcal{S}) |^2 \\ &= | \langle \text{SqMat}(\mathcal{R})^{\frac{1}{2}(H)} \text{vec}(\mathcal{W}_{opt}), \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathcal{S}) \rangle |^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

La suite de la preuve s'inspire du raisonnement utilisé dans [17]. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'équation (4.31) est maximum lorsque $\text{SqMat}(\mathcal{R})^{\frac{1}{2}(H)} \text{vec}(\mathcal{W}_{opt}) = \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathcal{S})$ et donc lorsque $\text{vec}(\mathcal{W}_{opt}) = \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S})$.

En remplaçant $\text{vec}(\mathcal{W}_{opt})$ par cette valeur dans (4.30), l'équation devient :

$$\begin{aligned} SNR_{out} &= \frac{| \text{vec}(\mathcal{S})^H \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S}) |^2}{\text{vec}(\mathcal{S})^H \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{SqMat}(\mathcal{R}) \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S})} \\ &= | \text{vec}(\mathcal{S})^H \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S}) | \\ &= SNR_{max} \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'expression de \mathcal{W}_{opt} donnée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz maximise effectivement le SNR en sortie de filtre, ce qui permet de conclure la preuve.

Détecteur

Les équations (4.27) et (4.27) peuvent se réécrire comme un test d'hypothèse. Il s'agit alors de choisir entre deux hypothèses :

- H_0 : l'observation \mathcal{X} ne contient pas le signal \mathcal{S} .
- H_1 : l'observation \mathcal{X} contient le signal \mathcal{S} .

Ce qui se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathcal{X} = \mathcal{D}, & \mathcal{X}_k = \mathcal{D}_k, k \in [1, K] \\ H_1 : \mathcal{X} = \alpha \mathcal{S} + \mathcal{D}, & \mathcal{X}_k = \mathcal{D}_k, k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.33)$$

Toutes les hypothèses restent les mêmes. En supposant le tenseur de covariance \mathcal{R} connu, il est possible d'écrire une version tensorielle du *Matched Filter test*.

Proposition 4.2.2 (*détecteur*)

Le détecteur dans le cas tensoriel est donné par la formule suivante :

$$\Lambda = \frac{|vec(\mathbf{S})^H SqMat(\mathcal{R})^{-1}vec(\mathcal{X})|^2}{vec(\mathbf{S})^H SqMat(\mathcal{R})^{-1}vec(\mathbf{S})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (4.34)$$

Preuve 4.2.2 En appliquant l'opérateur vec , l'équation (4.33) devient :

$$\begin{cases} H_0 : vec(\mathcal{X}) = vec(\mathcal{D}), & vec(\mathcal{X}_k) = vec(\mathcal{D}_k), k \in [1, K] \\ H_1 : vec(\mathcal{X}) = \alpha vec(\mathbf{S}) + vec(\mathcal{D}), & vec(\mathcal{X}_k) = vec(\mathcal{D}_k), k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.35)$$

Par définition, $vec(\mathcal{D})$ est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance $SqMat(\mathcal{R})$. \mathcal{R} est supposé connu et α est inconnu. Le Matched Filter test présenté au paragraphe 4.1.2 s'applique :

$$\Lambda = \frac{|vec(\mathbf{S})^H SqMat(\mathcal{R})^{-1}vec(\mathcal{X})|^2}{vec(\mathbf{S})^H SqMat(\mathcal{R})^{-1}vec(\mathbf{S})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (4.36)$$

On retrouve bien la formule de l'équation (4.34).

Versions adaptatives

En pratique, le tenseur de covariance est inconnu. Il est donc nécessaire de l'estimer. Étant donnée la nature gaussienne des données, il est légitime d'estimer \mathcal{R} à l'aide du SCT présenté dans la section 1.4.2. Les versions adaptatives du filtre et du détecteur présentés précédemment sont alors obtenues en remplaçant \mathcal{R} par son estimé $\hat{\mathcal{R}}$.

Le filtre adaptatif est donc donné par la formule suivante :

$$\mathcal{W}_{opt} = vec^{-1}(SqMat(\hat{\mathcal{R}})^{-1}vec(\mathbf{S})). \quad (4.37)$$

Le détecteur adaptatif s'obtient de manière similaire :

$$\Lambda = \frac{|vec(\mathbf{S})^H SqMat(\hat{\mathcal{R}})^{-1}vec(\mathcal{X})|^2}{vec(\mathbf{S})^H SqMat(\hat{\mathcal{R}})^{-1}vec(\mathbf{S})}. \quad (4.38)$$

Critères de performance

Afin d'étudier les performances des filtres tensoriels, on propose de généraliser la notion de SNR *loss*. On reprend une définition du SNR *loss* d'un filtre tensoriel \mathcal{W}' analogue à celle du cas vectoriel :

$$\rho_{loss} = \frac{SNR_{out}}{SNR_{max}}, \quad (4.39)$$

où SNR_{out} désigne le SNR en sortie du filtre \mathcal{W}' et SNR_{max} le SNR en sortie du filtre \mathcal{W}_{opt} . SNR_{out} est égal à :

$$\begin{aligned} SNR_{out} &= \frac{|\langle \mathcal{W}_{lr}, \mathbf{S} \rangle|^2}{\mathbf{E}[|\langle \mathcal{W}', \mathcal{D} \rangle|^2]} \\ &= \frac{|vec(\mathcal{W}')^H vec(\mathbf{S})|^2}{vec(\mathcal{W}')^H E[vec(\mathcal{D})vec(\mathcal{D})^H] vec(\mathcal{W}')} \\ &= \frac{|vec(\mathcal{W}')^H vec(\mathbf{S})|^2}{vec(\mathcal{W}')^H SqMat(\mathcal{R})vec(\mathcal{W}')} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le SNR_{out} est maximum lorsque $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{opt} = \text{vec}^{-1}(\text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1}\text{vec}(\mathcal{S}))$. Tout calcul fait, le SNR $loss$ est égal [12] :

$$\rho_{loss} = \frac{|(\text{vec}(\mathbf{W}')^H \text{vec}(\mathcal{S}))|^2}{\text{vec}(\mathbf{W}')^H \text{SqMat}(\mathcal{R}) \text{vec}(\mathbf{W}') \text{vec}(\mathcal{S})^H \text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S})} \quad (4.41)$$

Pour les détecteurs, on s'intéressera aussi à la relation entre P_d et P_{fa} pour comparer leur performance.

Limites de cette approche

Les méthodes présentées dans cette partie sont une manière d'étendre les méthodes classiques de filtrage et de détection à un modèle tensoriel. Toutefois, tels quels, ces algorithmes n'apportent rien par rapport à leurs homologues vectoriels. En effet, le filtre et le détecteur tensoriel sont égaux à leur équivalent vectoriel. Ce résultat est logique étant donné la définition de tenseur aléatoire utilisée et l'équivalence entre produit scalaire tensoriel et vectoriel (voir equation 1.8).

Cependant ces deux algorithmes n'exploitent pas la structure du bruit. Dans la suite, l'exploitation de cette structure rang faible va permettre de développer des filtres et des détecteurs différents de leurs homologues vectoriels.

4.2.3 Algorithmes rang faible

Cette approche nécessite une hypothèse sur le bruit, analogue à celle proposée au paragraphe 4.1.3. Les tenseurs \mathcal{D} , \mathcal{D}_k peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \mathcal{C} + \mathcal{N} \\ \mathcal{D}_k = \mathcal{C}_k + \mathcal{N}_k. \end{cases} \quad (4.42)$$

Les tenseurs \mathcal{N} , \mathcal{N}_k , \mathcal{C} , \mathcal{C}_k ont les caractéristiques suivantes :

- \mathcal{N} , \mathcal{N}_k sont des tenseurs aléatoires gaussiens centrés, appelés "bruit", de tenseur de covariance,

$$\sigma^2 \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{I}_{I_1 \dots I_p}).$$

- \mathcal{C} , \mathcal{C}_k sont des tenseurs aléatoires gaussiens centrés, appelés fouillis, de tenseur de covariance,

$$\mathcal{R}_c \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_p \times I_1 \times \dots \times I_p}.$$

En d'autres termes $\text{vec}(\mathcal{N})$, $\text{vec}(\mathcal{N}_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{I_1 \dots I_p})$ et $\text{vec}(\mathcal{C})$, $\text{vec}(\mathcal{C}_k) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \text{SqMat}(\mathcal{R}_c))$. On note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c + \sigma^2 \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{I}_{I_1 \dots I_p})$ le tenseur de covariance du bruit total.

Le tenseur de covariance \mathcal{R}_c est de rang faible, au sens de la définition 3.2.1. En d'autres termes, il existe au moins un sous-ensemble \mathbb{D}_l tel que $r_{\mathbb{D}_l} < I_{\mathbb{D}_l}$. Cette définition comprend donc les cas où les n -rangs sont déficients (\mathbb{D}_l est alors un singleton) mais elle comprend aussi des situations qui ne peuvent pas être modélisées avec les n -rangs.

Ce modèle va permettre de proposer des algorithmes de filtrage et de détection basés sur l'AU-HOSVD.

Filtres
Proposition 4.2.3 (*Filtre tensoriel rang faible*)

Soit $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ une partition de \mathbb{D} . Le filtre tensoriel rang faible basé sur l'AU-HOSVD associée à cette partition, noté $\mathcal{W}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)}$ est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{W}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)} = \mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.43)$$

$$y = | \langle \mathcal{W}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)}, \mathbf{X} \rangle | \quad (4.44)$$

Les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)}$ sont obtenues en tronquant les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_i)}$ issues de l'AU-HOSVD de \mathcal{R} , $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)} = [\mathbf{u}_{r_{\mathbb{D}_i}+1}^{(\mathbb{D}_i)} \dots \mathbf{u}_{I_{\mathbb{D}_i}}^{(\mathbb{D}_i)}]$.

Un filtre différent est obtenu pour chaque choix de partition. Pour une configuration à P dimensions, il existe B_P filtres différents basés sur l'AU-HOSVD.

La preuve de la proposition 4.2.3 repose sur le résultat intermédiaire suivant, dont la preuve est évidente.

Lemme 4.2.1 Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux tenseurs d'ordre P et \mathbb{D}_l un sous-ensemble de \mathbb{D} . Par définition du produit scalaire tensoriel, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\langle [\mathcal{A}]_{\mathbb{D}_l}, [\mathcal{B}]_{\mathbb{D}_l} \rangle = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle. \quad (4.45)$$

Preuve 4.2.3 Le filtre tensoriel rang faible associé à la partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ est obtenu par les étapes suivantes. Le tenseur de covariance \mathcal{R} est tout d'abord décomposé avec l'AU-HOSVD associée à la partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$ (voir paragraphe 3.3.2 pour le cas des tenseurs hermitiens) :

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}_{\mathbb{D}_1/\dots/\mathbb{D}_{2L}} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_L)} \times_{\mathbb{D}_{L+1}} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)*} \dots \times_{\mathbb{D}_{2L}} \mathbf{U}^{(\mathbb{D}_L)*} \quad (4.46)$$

Les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_l)}$, $l = 1 \dots L$ sont alors tronquées pour obtenir les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)} = [\mathbf{u}_{r_{\mathbb{D}_l}+1}^{(\mathbb{D}_l)}, \dots, \mathbf{u}_{I_{\mathbb{D}_l}}^{(\mathbb{D}_l)}]$.

La proposition (3.25) peut ensuite s'appliquer, avec $\mathcal{A} = \mathbf{X}$, $\mathcal{A}_c = \mathcal{C}$ et $\mathcal{A}_0 = \alpha \mathbf{S} + \mathcal{N}$:

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \approx \alpha \mathbf{S} + \mathcal{N} \quad (4.47)$$

Le problème de filtrage est modifié. Il s'agit maintenant de filtrer le signal \mathbf{S} perturbé par un bruit blanc \mathcal{N} . Le filtre de la proposition (4.2.1) s'applique avec $\mathcal{R} = \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{I}_{1 \dots I_p})$:

$$y = | \langle \mathbf{S}, \mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \rangle |. \quad (4.48)$$

Il ne reste plus qu'à réécrire l'équation (4.48) afin de retrouver l'équation (4.44).

Le lemme 4.2.1, pour $l = 1$, permet de réécrire l'équation (4.48), ce qui donne

$$y = | \langle [\mathbf{S}]_{\mathbb{D}_1}, [\mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}]_{\mathbb{D}_1} \rangle | \quad (4.49)$$

Soit encore, par définition du produit multimode :

$$y = | \langle [\mathbf{S}]_{\mathbb{D}_1}, \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} [\mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_2} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}]_{\mathbb{D}_1} \rangle | \quad (4.50)$$

L'équation (4.50) se réécrit en utilisant la définition du produit scalaire usuel entre deux matrices :

$$\begin{aligned} y &= | \text{Tr}((\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} [\mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_2} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}]_{\mathbb{D}_1})^H [\mathbf{S}]_{\mathbb{D}_1}) | \\ &= | \text{Tr}([\mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_2} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}]_{\mathbb{D}_1}^H \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} [\mathbf{S}]_{\mathbb{D}_1}) | \end{aligned} \quad (4.51)$$

Par ailleurs, par définition du produit multimode : $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} [\mathbf{S}]_{\mathbb{D}_1} = [\mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H}]_{\mathbb{D}_1}$. L'équation (4.51) peut donc être réécrite de la façon suivante :

$$y = | \langle \mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H}, \mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_2} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_2)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \rangle | \quad (4.52)$$

Ces étapes sont répétées pour $l = 2 \dots L$, ce qui permet d'obtenir l'équation (4.44) :

$$\mathcal{W}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)} = \mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.53)$$

$$y = | \langle \mathcal{W}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)}, \mathbf{X} \rangle |, \quad (4.54)$$

et de conclure la preuve.

Détecteurs

En appliquant les équations (4.42) et (4.42) à l'équation (4.33), on considère le test d'hypothèse suivant

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{X} = \mathbf{C} + \mathbf{N}, & \mathbf{X}_k = \mathbf{C}_k + \mathbf{N}_k, k \in [1, K] \\ H_1 : \mathbf{X} = \alpha \mathbf{S} + \mathbf{C} + \mathbf{N}, & \mathbf{X}_k = \mathbf{C}_k + \mathbf{N}_k, k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.55)$$

Proposition 4.2.4 (Détecteur tensoriel rang faible)

Le détecteur tensoriel rang faible obtenu avec l'AU-HOSVD est donné par :

$$\Lambda_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \frac{| \langle \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle |^2}{\langle \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle \langle \mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle} \quad (4.56)$$

avec

$$\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathbf{X} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.58)$$

Les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)}$ sont obtenues en tronquant les matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_i)}$ issues de l'AU-HOSVD de \mathcal{R} , $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)} = [\mathbf{u}_{r_{\mathbb{D}_i}+1}^{(\mathbb{D}_i)} \dots \mathbf{u}_{I_{\mathbb{D}_i}}^{(\mathbb{D}_i)}]$.

Preuve 4.2.4 Afin de prouver la proposition 4.2.4, on rappelle le test d'hypothèse correspondant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{X} = \mathbf{C} + \mathbf{N}, & \mathbf{X}_k = \mathbf{C}_k + \mathbf{N}_k, k \in [1, K] \\ H_1 : \mathbf{X} = \alpha \mathbf{S} + \mathbf{C} + \mathbf{N}, & \mathbf{X}_k = \mathbf{C}_k + \mathbf{N}_k, k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.59)$$

Les données sont pré-traitées en appliquant la proposition 3.4.1 dans le but de supprimer la partie rang faible du bruit. La notation suivante $\mathcal{A}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}$ désigne la projection du tenseur \mathcal{A} sur le sous-espace orthogonal au sous-espace fouillis $\mathcal{A} \times_{\mathbb{D}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_L)H}$. Le test d'hypothèse se réécrit alors comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, & \mathbf{X}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathbf{N}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, k \in [1, K] \\ H_1 : \mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \alpha \mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} + \mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, & \mathbf{X}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathbf{N}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, k \in [1, K] \end{cases} \quad (4.60)$$

L'opérateur *vec* est ensuite appliqué à l'équation (4.60), ce qui donne :

$$\begin{cases} H_0 : \text{vec}(\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) = \text{vec}(\mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), & \text{vec}(\mathbf{X}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) = \text{vec}(\mathbf{N}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \\ H_1 : \text{vec}(\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) = \alpha \text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) + \text{vec}(\mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), & \text{vec}(\mathbf{X}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) = \text{vec}(\mathbf{N}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \end{cases} \quad (4.61)$$

avec $\text{vec}(\mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), \text{vec}(\mathbf{N}_{k, \mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{I_1 \dots I_p})$. Le problème revient alors à détecter un signal $\text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L})$ perturbé par un bruit blanc, gaussien, $\text{vec}(\mathbf{N}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L})$. Puisque α et σ^2 sont inconnus, l'Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF) [80] s'applique :

$$\Lambda_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \frac{|\langle \text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), \text{vec}(\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \rangle|^2}{\langle \text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), \text{vec}(\mathbf{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \rangle \langle \text{vec}(\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}), \text{vec}(\mathbf{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}) \rangle} \quad (4.62)$$

Le lemme 4.2.1, appliqué pour $\mathbb{D}_l = \mathbb{D}$, permet de supprimer l'opérateur *vec* de la formule du détecteur et retrouver la formule de la proposition 4.2.4.

Cas particuliers

D'une part en choisissant la partition $\mathbb{D}_1 = \{1\}, \dots, \mathbb{D}_P = \{P\}$, l'AU-HOSVD associée est équivalente à la HOSVD (voir paragraphe 3.3.2). Le filtre tensoriel rang faible obtenu est donc le même que celui issu de la HOSVD.

D'autre part, considérons la projection obtenue lorsque l'on choisit la partition constituée d'un seul sous-ensemble $\mathbb{D}_1 = \{1, \dots, P\}$. D'après le paragraphe 3.3.2, la matrice $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_1)}$ issue de l'AU-HOSVD associée à cette partition provient de la SVD de $SqMat(\mathcal{R})$. On retrouve ainsi le même filtre que celui obtenu en rang faible vectoriel. Les algorithmes issus de l'approche vectorielle rang faible peuvent donc être obtenus par l'approche tensorielle rang faible.

Version adaptative

Les versions adaptatives de ces algorithmes rang faible sont obtenues en remplaçant \mathcal{R} par $\hat{\mathcal{R}}$ obtenue avec le SCT. De même que dans le cas vectoriel, les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)}$ sont remplacées par celles obtenues avec l'AU-HOSVD de $\hat{\mathcal{R}}$, notées $\hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_l)}$.

On obtient alors le filtre suivant :

$$\hat{\mathbf{W}}_{lr(\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_L)} = \mathbf{S} \times_{\mathbb{D}_1} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.63)$$

$$y = |\langle \hat{\mathbf{W}}_{\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_P}, \mathbf{X} \rangle| \quad (4.64)$$

et le détecteur :

$$\hat{\Lambda}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \frac{|\langle \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathcal{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle|^2}{\langle \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle \langle \mathcal{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L}, \mathcal{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} \rangle} \quad (4.65)$$

avec

$$\mathcal{X}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathcal{X} \times_{\mathbb{D}_1} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.66)$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L} = \mathcal{S} \times_{\mathbb{D}_1} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_1)H} \dots \times_{\mathbb{D}_L} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)} \hat{\mathbf{U}}_0^{(\mathbb{D}_L)H} \quad (4.67)$$

En terme de performances, on ne dispose pas de relations théoriques. Pour le SINR *loss* en combinant l'approche de Ginolhac [34] avec celle développée dans le chapitre 2 pour la résolution de l'algorithme MUSIC tensoriel, il semble possible d'obtenir cette relation. En revanche pour les détecteurs, la relation entre η et P_{fa} n'étant pas connue dans le cas vectoriel adaptatif, il paraît compliqué de la calculer dans le cas tensoriel. On peut néanmoins supposer que, de manière analogue au cas vectoriel, les performances du détecteur et du filtre seront liées aux rangs et, en particulier, au fait qu'ils soient déficients ou non.

Comment choisir les partitions ?

Par construction, la décomposition d'un tenseur à l'aide de l'AU-HOSVD dépend du choix de la partition $\mathbb{D}_1 \dots \mathbb{D}_L$. Comme expliqué au paragraphe 3.3.1, le nombre d'AU-HOSVD différentes pour un tenseur d'ordre P est égal à B_p . Sachant que ce nombre devient rapidement très grand, il est nécessaire de développer une stratégie afin de présélectionner (ou d'éliminer) un certain nombre de partition pour une application donnée.

Pour faire ce choix, on propose une procédure en deux étapes.

La première étape consiste à utiliser l'information a priori dont on dispose sur l'application considérée afin d'éliminer des partitions. Dans certaines applications, en connaissant la structure des données reçues, il est facile de savoir que les rangs associés à certaines combinaisons de dimensions sont pleins. Or, les traitements basés sur l'AU-HOSVD que l'on a proposés reposent sur une projection orthogonale. Lorsque l'un des rangs, $r_{\mathbb{D}_l}$ est plein, la matrice $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_l)H}$ est égale à l'identité. Pour que la projection ait lieu, il est donc nécessaire qu'au moins un des rangs associés à une partition soit déficient (i.e. $r_{\mathbb{D}_l} < I_{\mathbb{D}_l}$). Les partitions qui ne vérifient pas cette condition pourront alors être éliminées.

Si, à l'issue de cette étape, il reste encore plusieurs partitions, on procédera comme suit. Après avoir testé toutes les partitions restantes, on gardera la meilleure en fonction d'un critère, qui sera lui-même choisi en fonction de l'application. Pour du filtrage on cherchera par exemple la partition qui maximisera le SINR *Loss*, pour de la détection, celle qui maximise la probabilité de détection ...

4.3 Synthèse

Dans ce chapitre, on s'est intéressé au filtrage et à la détection de données multidimensionnelles comportant une structure rang faible. On a proposé un modèle vectoriel et un modèle tensoriel aboutissant à deux approches différentes.

Dans le cadre de l'approche vectorielle, on a rappelé les principaux résultats concernant les filtres et les détecteurs rang faible ainsi que leurs versions adaptatives.

On a ensuite proposé un modèle tensoriel rang faible général basé sur la définition de rang tensoriel proposée dans le chapitre 3. A partir de ce modèle on a proposé des traitements rang faible tensoriels

basés sur l’AU-HOSVD. On a montré que ces traitements permettaient à la fois de retrouver le cas vectoriel et de traiter des structures rang faible tensorielles plus générales.

Cependant, ce type de méthode présente un défaut. Étant donné qu’il existe autant de AU-HOSVD que de partitions possibles de l’ensemble des dimensions du tenseur considéré, le coût calculatoire peut devenir très important. On a donc proposé une méthodologie permettant de présélectionner un certain nombre de partitions en fonction de l’application.

Dans le chapitre suivant, on va voir un exemple d’utilisation de ces méthodes pour deux configurations STAP multidimensionnelles.

Chapitre 5

Application à des configurations STAP multidimensionnelles

On va maintenant appliquer les algorithmes présentés dans le chapitre précédent à une configuration radar particulière : le Traitement Spatio-Temporel Adaptatif ou Space-Time Adaptive Process (STAP) en anglais. Le STAP est utilisé dans des configurations radar aéroporté afin de détecter une cible mouvante au sol, noyée dans un fouillis de sol. Les configurations STAP classiques comportent deux dimensions : une dimension spatiale et une dimension temporelle. Pour ces configurations une approche vectorielle, rang faible ou non, est utilisée. Étant donné que le nombre de dimensions est égal à deux, les méthodes tensorielles ne présentent pas vraiment d'intérêt. En revanche, de nouvelles configurations STAP sont apparues récemment et comportent des dimensions supplémentaires : polarimétrie, MIMO ... L'approche tensorielle paraît alors pertinente pour ce type de cas. Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans une première partie, on présente la configuration STAP standard à deux dimensions, le modèle vectoriel associé, ainsi que les filtres et les détecteurs couramment utilisés. La seconde partie est consacrée à la présentation du STAP polarimétrique et l'application des méthodes tensorielles rang faible à cette configuration. Enfin la dernière partie, réalisée en collaboration avec Frédéric Brigui, est consacrée à la présentation et aux résultats obtenus sur une configuration MIMO. Ces travaux ont fait l'objet de divers articles de conférence [10, 11, 12, 9, 14] et d'un article soumis dans la revue IEEE Transactions on Signal Processing [13].

5.1 STAP 2D classique

On présente ici de manière succincte le STAP dans sa configuration classique à deux dimensions ainsi que les méthodes de filtrage et de détection couramment utilisées. Pour de plus amples détails, on se référera à [90], [46] et [4].

5.1.1 Présentation du radar

Dans le cadre d'un radar aéroporté utilisé dans le but de détecter des cibles mobiles, les performances des filtres et des détecteurs utilisant uniquement l'information temporelle (décalage *Doppler*) sont faibles à cause de l'étalement *Doppler* de la réponse du sol (appelé fouillis ou *clutter*) induit par la

vitesse de la plate-forme. Par exemple, les cibles à faible vitesse sont alors indétectables. Une solution pour remédier à ce problème est d'ajouter une information spatiale en utilisant une antenne composée de plusieurs capteurs sur la plate-forme aéroportée. En utilisant conjointement les deux informations, temporelle et spatiale, il est alors possible de détecter des cibles mobiles même celles à basse vitesse [17] comme le montre la figure 5.1. On voit aussi que l'étalement *Doppler* du *clutter* forme une droite, que l'on désignera sous le terme de *clutter ridge*.

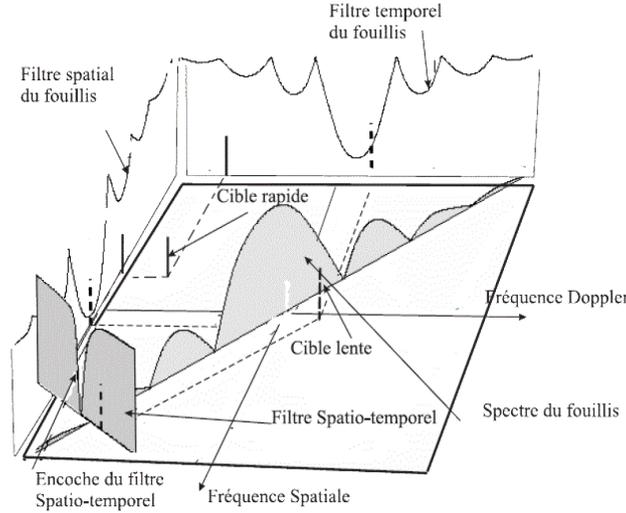


FIGURE 5.1 – Principe et intérêt du filtrage spatio-temporel : dans cet exemple, un traitement spatial ou temporel seul ne permet pas de distinguer la cible. En revanche, en combinant ces deux informations, la cible peut être détectée.

La géométrie d'un système STAP classique est présentée sur la figure 5.2. Nous considérons qu'il est composé d'un radar à impulsions *Doppler* émettant M impulsions cohérentes à une fréquence de répétition f_r et qu'il est embarqué sur une plate-forme aéroportée volant à une altitude h et à une vitesse uniforme v_p . L'antenne radar est constituée de N capteurs uniformément répartis (d est l'espacement inter-capteurs) orientés vers la direction du mouvement de la plate-forme (configuration *side-looking* qui est la plus simple). A la réception, les retours radar sur chaque élément d'antenne après transformation en bande de base et filtrage adapté sont échantillonnés à une fréquence f_e . La fréquence spatiale du radar est notée $\lambda = \frac{c}{f_0}$ avec c la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et f_0 la fréquence centrale des signaux émis. On se place dans le cadre d'un signal émis bande étroite.

Le vecteur de position du n -ième élément d'antenne est donné par :

$$\mathbf{d}_n = (n - 1)d\mathbf{u}_x, \quad (5.1)$$

où \mathbf{u}_x est un vecteur unitaire du système de coordonnées cartésienne dans l'axe x . Le vecteur de vitesse de la plate-forme est donné par :

$$\mathbf{v}_p = v_p\mathbf{u}_x, \quad (5.2)$$

Dans la suite de ce chapitre, la position d'un point sera représentée par un vecteur unitaire \mathbf{u}_k décrit par les angles azimut et élévation (ϕ, θ) :

$$\mathbf{u}_k(\phi, \theta) = \cos\theta\sin\phi\mathbf{u}_x + \cos\theta\cos\phi\mathbf{u}_y + \sin\theta\mathbf{u}_z, \quad (5.3)$$

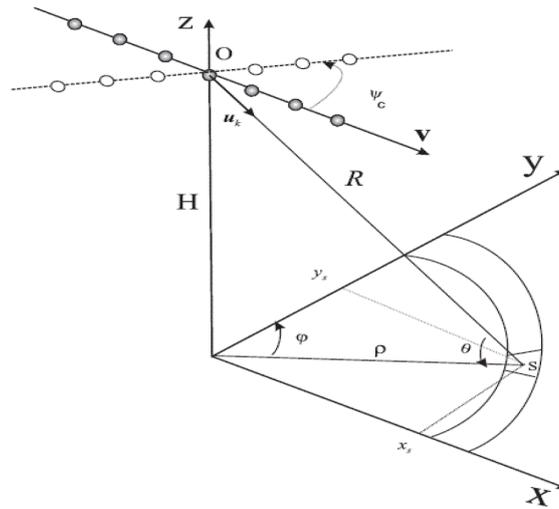


FIGURE 5.2 – Géométrie du STAP : la cible est repérée par les angles θ et ϕ . ψ_c représente l'angle entre l'antenne et la plate-forme. Dans ce travail, on prendra $\psi_c = 0$ (configuration *side-looking*).

où \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z sont des vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésiennes dans les axes y et z .

5.1.2 Modèle des signaux

Les données STAP forment ce qu'on appelle un data cube contenant les réponses spatio-temporelles des $K + 1$ différentes cases distances de la scène illuminée par le radar. Pour chaque case distance k , les informations temporelles et spatiales sont concaténées dans un vecteur comme illustré sur la figure 5.3 pour former un vecteur du signal reçu $\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{NM}$.

Ce signal reçu, \mathbf{x}_k , dans la cellule distance k est un mélange de différents signaux (on ne tient pas compte ici de possibles brouilleurs) :

- éventuellement le signal désiré provenant de la cible,
- le *clutter* provenant de la réponse du sol,
- le bruit blanc causé par l'électronique.

La cible est supposée présente dans une seule case distance, appelée la donnée sous test et notée \mathbf{x} . Sous l'hypothèse de présence de cible, le signal reçu s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{n}, \quad (5.4)$$

où \mathbf{d} , \mathbf{c} et \mathbf{n} sont respectivement le signal provenant de la cible, du *clutter* et du bruit blanc. On dispose également d'un ensemble de K signaux contenant uniquement le fouillis et le bruit blanc :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k \text{ avec } k = 1, \dots, K \quad (5.5)$$

Ces signaux sont communément appelés les données secondaires. Elles sont supposées indépendantes et de même distribution que $\mathbf{c} + \mathbf{n}$.

Les deux sous-sections suivantes contiennent les modèles de signaux provenant de la cible et du bruit (*clutter* et bruit blanc).

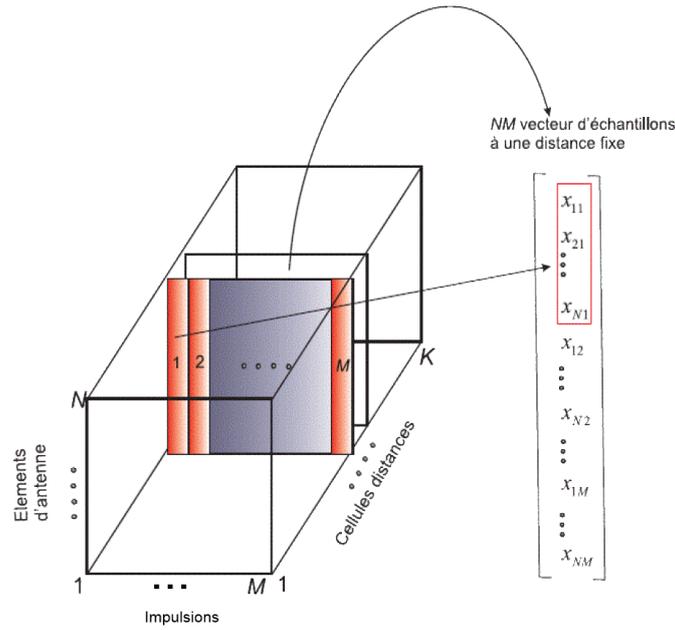


FIGURE 5.3 – Data Cube STAP et arrangement de données. Chaque case distance, de dimension $N \times M$ est mise sous forme de vecteur de taille NM afin d'être traité.

5.1.3 Modèle du signal cible

Soit une cible définie comme étant un point s mobile à une vitesse v_t . Sa position est décrite dans l'Eq. (5.3) par le vecteur $\mathbf{u}_k(\phi_t, \theta_t)$ avec (ϕ_t, θ_t) l'azimut et l'élévation de la cible.

A partir de ce vecteur de position, la fréquence *Doppler* de la cible peut être calculée :

$$f_t = \frac{2}{\lambda} \mathbf{u}_k(\phi_t, \theta_t)^T (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_t), \quad (5.6)$$

où \mathbf{v}_p (définie dans l'Eq. (5.2)) et \mathbf{v}_t sont les vecteurs vitesse de la plate-forme et de la cible. Le plus souvent, c'est la fréquence *Doppler* normalisée ω_t qui est utilisée :

$$\omega_t = \frac{f_t}{f_r} \quad (5.7)$$

Le vecteur directionnel temporel $\mathbf{b}(\omega_t)$ est alors donné par la formule suivante :

$$\mathbf{b}(\omega_t) = \left[1 e^{j2\pi\omega_t} \dots e^{j2\pi(M-1)\omega_t} \right]^T \quad (5.8)$$

Dans la dimension spatiale, la fréquence spatiale de la cible ν_t est définie ci-dessous :

$$\nu_t = \frac{d}{\lambda} \cos\theta_t \sin\phi_t \quad (5.9)$$

et le vecteur directionnel spatial $\mathbf{a}(\nu_t)$ associé s'écrit :

$$\mathbf{a}(\nu_t) = \left[1 e^{j2\pi\nu_t} \dots e^{j2\pi(N-1)\nu_t} \right]^T \quad (5.10)$$

A partir de ces deux vecteurs, le vecteur de direction spatio-temporelle $\mathbf{s}(\omega_t, \nu_t)$, de taille $m = NM$, est défini comme étant la réponse d'une cible à une fréquence spatiale ν_t et à une fréquence *Doppler* normalisée ω_t :

$$e\mathbf{s}(\omega_t, \nu_t) = \mathbf{b}(\omega_t) \otimes \mathbf{a}(\nu_t) \quad (5.11)$$

La réponse de cible peut donc s'écrire :

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{s}(\omega_t, \nu_t) \quad (5.12)$$

où α représente l'atténuation de l'onde après propagation et réflexion sur la cible.

5.1.4 Modèle du bruit total

Le bruit total est composé de deux bruits additifs, gaussiens, centrés. Les caractéristiques de ces deux bruits sont détaillées ci-dessous ainsi que les caractéristiques du bruit total.

Bruit blanc

Le bruit blanc \mathbf{n} (ou \mathbf{n}_k) est modélisé par un vecteur aléatoire complexe Gaussien $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ centré blanc de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}_m$.

Fouillis

Le fouillis est supposé uniquement dû à la réponse du sol. Le vecteur de fouillis \mathbf{c} (ou \mathbf{c}_k) est la superposition d'un large nombre de points (appelés *clutter patches*) distribués autour du radar à une distance fixe. Comme le sol est immobile, il existe une relation entre la fréquence spatiale et la fréquence *Doppler* normalisée :

$$\begin{aligned} \nu_i &= \frac{d}{\lambda} \cos\theta_i \sin\phi_i \\ \omega_i &= \beta \nu_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\beta = \frac{2v_p}{df_r}$. Ainsi, β correspond à la pente du *clutter ridge*. Sa valeur influe aussi sur le rang de la dimension spatiale et sur le rang de la dimension temporelle. Lorsque $\beta = 1$, aucun de ces rangs ne sera déficient.

Dans ce cadre, la réponse du *clutter* peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{c}_k = \sum_{i=1}^{N_c} \gamma_{i,k} \mathbf{s}(\omega_i, \nu_i) \quad (5.14)$$

où N_c est le nombre de *clutter patch* et $\gamma_{i,k}$ est l'amplitude complexe aléatoire du *patch* i . Les $\gamma_{i,k}$ sont supposés décorrélés entre eux.

Dans ce travail, le *clutter* \mathbf{c} (ou \mathbf{c}_k) est supposé homogène [75]. La puissance du *clutter* est donc la même pour toutes les cellules k et pour la cellule sous test : les processus \mathbf{c} et \mathbf{c}_k sont alors modélisés comme des vecteurs aléatoires complexes gaussiens $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_c)$ centrés de matrice de covariance \mathbf{R}_c :

$$\mathbf{R}_c = E[\mathbf{c}\mathbf{c}^H] = E[\mathbf{c}_k\mathbf{c}_k^H] \quad (5.15)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_c} E[\gamma_i \gamma_i^*] \mathbf{s}(\omega_i, \nu_i) \mathbf{s}^H(\omega_i, \nu_i). \quad (5.16)$$

Structure de la matrice de covariance du bruit total

La matrice de covariance de $\mathbf{c} + \mathbf{n}$ (ou $\mathbf{c}_k + \mathbf{n}_k$) est alors :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \sigma^2 \mathbf{I}_m \quad (5.17)$$

Dans le contexte du STAP classique (en configuration *side-looking*), nous pouvons évaluer le rang du *clutter* à l'aide de la formule de Brennan [18] qui nous assure une structure rang réduit pour le *clutter*.

$$\text{rang}(\mathbf{R}_c) = r = N + \beta(M - 1) \ll m \quad (5.18)$$

5.1.5 Traitements rang faible adaptatifs

Grâce aux modèles de cible et de bruit proposés, les traitements rang faible vectoriels adaptatifs, rappelés dans le paragraphe 4.1.3, peuvent être appliqués à cette configuration STAP. L'estimée de la matrice \mathbf{R} , obtenue à partir de la SCM sur K données secondaires, est notée $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H. \quad (5.19)$$

Filtre rang faible adaptatif

Le filtre adaptatif rang faible s'écrit alors [45] (voir équation (4.19)) :

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{s} \quad (5.20)$$

$$y = |\langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle|, \quad (5.21)$$

où $\hat{\mathbf{U}}_0$ est obtenue à partir de la SVD de $\hat{\mathbf{R}}$.

Détecteur rang faible adaptatif

Le détecteur adaptatif rang faible s'écrit alors [75] (voir équation (4.21)) :

$$\hat{\Lambda}_{LR-NMF} = \frac{|\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{s})(\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{U}}_0 \hat{\mathbf{U}}_0^H \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta \quad (5.22)$$

où $\hat{\mathbf{U}}_0$ est obtenue à partir de la SVD de $\hat{\mathbf{R}}$.

5.1.6 Synthèse

Le principe du STAP à deux dimensions, le modèle rang faible associé, ainsi que le filtre et le détecteur rang faible adaptatifs viennent d'être rappelés. Dans la suite, cette configuration ne sera pas étudiée de manière précise. Toutefois, ce modèle va permettre d'introduire les deux configurations STAP multidimensionnelles étudiées dans la suite de ce chapitre : le STAP polarimétrique et le STAP *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO). De plus, les performances des traitements STAP rang faible 2D serviront de points de comparaison pour étudier les performances des deux autres configurations.

5.2 STAP polarimétrique

On propose maintenant d'appliquer les traitements tensoriels rang faible basés sur l'AU-HOSVD à une première configuration STAP multidimensionnelle : le STAP polarimétrique. On commence par introduire le modèle de cette configuration. On poursuit par une étude des partitions et des rangs des AU-HOSVD associées à cette configuration. On termine par une étude des filtres et des détecteurs rang faible tensoriels associés à cette configuration à partir de simulations de Monte-Carlo.

5.2.1 Modèle

Comme dans la configuration STAP à deux dimensions, le récepteur radar se compose de N capteurs émettant chacun M impulsions cohérentes. On suppose maintenant que chaque élément de l'antenne est capable d'émettre et de recevoir en polarisation H et V, sous forme de trois canaux de polarisation (HH, VV, HV/VH). Les données issues de cette configuration comportent trois dimensions. On propose donc de les mettre sous forme de tenseurs d'ordre trois.

Il s'agit alors de détecter/filtrer une cible, représentée par un *steering* tenseur \mathcal{S} , noyée dans deux bruits additifs \mathcal{N} et \mathcal{C} au sein d'une observation \mathcal{X} . On dispose de K données secondaires \mathcal{X}_k , indépendantes, ne contenant que du bruit ($\mathcal{C}_k + \mathcal{N}_k$), et suivant la même loi ($\mathcal{C} + \mathcal{N}$). Ces données secondaires permettent d'estimer le tenseur de covariance du bruit total. On est donc dans le cas décrit par les équations (4.27) et (4.27) :

$$\begin{cases} \mathcal{X} = \alpha\mathcal{S} + \mathcal{C} + \mathcal{N} \\ \mathcal{X}_k = \mathcal{C}_k + \mathcal{N}_k, \quad k \in [1, K], \end{cases} \quad (5.23)$$

avec $\mathcal{X}, \mathcal{X}_k \in \mathbb{C}^{M \times N \times 3}$. Les modèles du *steering* tenseur \mathcal{S} et du *clutter* \mathcal{C} et \mathcal{C}_k ont été adaptés à partir du travail de Showman [82].

Modèle du signal cible

Le *steering* tenseur \mathcal{S} est construit comme suit :

$$\mathcal{S}(\omega_t, \nu_t) = \text{vec}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{HH}(\omega_t, \nu_t) \\ \alpha_{VV}\mathbf{s}_{HH}(\omega_t, \nu_t) \\ \alpha_{VH}\mathbf{s}_{HH}(\omega_t, \nu_t) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

où $\mathbf{s}_{HH}(\omega_t, \nu_t)$ est égal au *steering* vecteur de la configuration à deux dimensions [90] (voir équation (5.11)). α_{VV}, α_{VH} sont deux coefficients complexes qui sont supposés connus. Il s'agit d'une hypothèse classique lorsque l'on traite une cible particulière (diffusions surfacique, par double rebonds, volumique, ...).

Modèle du bruit

Les bruits tensoriels \mathcal{N} et \mathcal{N}_k , provenant des composants électriques du radar, sont modélisés par un tenseur aléatoire gaussien, blanc, centré, de puissance σ^2 .

Le tenseur de covariance du *clutter*, noté \mathcal{R}_c est construit comme suit :

$$\mathcal{R}_c = SqMat^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_c & \rho\sqrt{\gamma_{VV}} \mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \rho^* \sqrt{\gamma_{VV}} \mathbf{R}_c & \gamma_{VV} \mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma_{VH} \mathbf{R}_c \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

où $\mathbf{R}_c \in \mathbb{C}^{MN \times MN}$ est la matrice de covariance du *clutter* du canal HH, construite de manière similaire au cas classique à deux dimensions, connue pour posséder une structure rang faible [90]. γ_{VV} et γ_{VH} sont deux coefficient relatifs à la nature du sol. ρ désigne le coefficient de corrélation entre les canaux HH et VV. Étant donnée la structure du tenseur \mathcal{R}_c , la structure rang faible du *clutter* est préservée.

Le tenseur de covariance du bruit total ($\mathcal{C} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{C}_k + \mathcal{N}_k$), noté $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{M \times N \times 3 \times M \times N \times 3}$, est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{R} = SqMat^{-1}(\mathbf{R}_{pc} + \sigma^2 \mathbf{I}_{3MN}), \quad (5.26)$$

Ce modèle est du même type que celui décrit dans le paragraphe 4.2.3. Il est donc possible d'appliquer les traitements rang faible tensoriels basés sur l'AU-HOSVD. Afin de pouvoir étudier ces traitements, il est nécessaire d'étudier les partitions de cette configuration, ainsi que les rangs associés.

5.2.2 Étude des partitions

Pour la configuration STAP polarimétrique, $P = 3$ et $\mathbb{D} = \{1, 2, 3\}$ ce qui donne $B_3 = 5$ partitions possibles et donc, 5 filtres et détecteurs rang faible. Les différentes partitions possibles, ainsi que les rangs associés à ces partitions sont présentés dans la table 5.1. Tout ces filtres et détecteurs sont obtenus à partir de l'AU-HOSVD. Cependant, les deux premières partitions présentées constituent deux cas particuliers, comme expliqué dans le paragraphe 4.2.3. Lorsque $\mathbb{D}_1 = \{1, 2, 3\}$, on retrouve les algorithmes vectoriels rang faible. Lorsque $\mathbb{D}_1 = \{1\}$, $\mathbb{D}_2 = \{2\}$, $\mathbb{D}_3 = \{3\}$, on retrouve le même filtre rang faible et le même détecteur rang faible qu'en utilisant la HOSVD.

Les rangs relatifs à toutes les partitions sont décrits ci-dessous :

- Le rang r_1 est le rang de la dimension spatiale et r_2 est le rang de la dimension temporelle. Ils dépendent des paramètres du radar et ne sont pas, dans la plupart des cas, déficients.
- r_3 est le rang de la dimension polarimétrique. Il peut être déficient selon la nature des données et en particulier selon la valeur du coefficient de corrélation ρ entre les canaux polarimétriques.
- r_{12} est le même que pour une configuration à deux dimensions. Il peut donc être calculé grâce à la loi de Brennan [18] (voir paragraphe 5.1.4).
- r_{123} est déficient et dépend des rangs r_3 et r_{12} .
- r_{13} et r_{23} peuvent être déficients selon la valeur des rangs r_1 , r_2 et r_3 .

5.2.3 Résultats

On présente ici des résultats de simulations sur les filtres rang faible et les détecteurs rang faible basés sur l'AU-HOSVD, appliqués à des données STAP polarimétriques. Pour les filtres, le SINR *loss* va être étudié en fonction de divers paramètres. Pour les détecteurs, la relation entre P_d et P_{fa} ainsi que celle entre P_d et SNR vont être étudiées. Dans les deux cas, étant donné que les relations théoriques ne sont pas connues, les études seront faites à partir de simulations de Monte-Carlo. De plus, les performances

TABLE 5.1 – Description des filtres rang faible et des détecteurs rang faible obtenus grâce à l’AU-HOSVD pour des données de STAP polarimétrique.

Partition	Filtres	Détecteurs	Rangs associés	Méthodes
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2, 3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2,3)}$	$\hat{\Lambda}_{(1,2,3)}$	r_{123}	Vectorielle
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}, \mathbb{D}_3 = \{3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2/3)}$	$\hat{\Lambda}_{(1/2/3)}$	r_1, r_2, r_3	HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2\}, \mathbb{D}_2 = \{3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2/3)}$	$\hat{\Lambda}_{(1,2/3)}$	r_{12}, r_3	AU-HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2, 3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2,3)}$	$\hat{\Lambda}_{(1/2,3)}$	r_1, r_{23}	AU-HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1, 3\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,3/2)}$	$\hat{\Lambda}_{(1,3/2)}$	r_{13}, r_2	AU-HOSVD

TABLE 5.2 – Valeurs des rangs pour les deux scénarios : $\rho = 1, \rho = 0.5$. Les autres paramètres du radar sont les suivants : $N = 8, M = 8, V = 100 \text{ m.s}^{-1}, \beta = 1$.

	r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{13}	r_{123}
$\rho = 1$	plein	plein	2	15	16	16	30
$\rho = 0.5$	plein	plein	plein	15	plein	plein	45

des filtres et des détecteurs rang faible tensoriels seront comparées à celles obtenues par une approche vectorielle rang faible dans une configuration STAP 2D.

Paramètres

Les simulations ont été réalisées avec les paramètres suivants. La cible est caractérisée par une direction d’arrivée, $\theta = 0^\circ$ et par une vitesse $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à un cas où une configuration STAP 2D est inefficace puisque la cible est proche du *clutter ridge*. Le récepteur radar est composé de $N = 8$ capteurs émettant $M = 8$ impulsions. La vitesse de la plate-forme, V est égale à 100 m.s^{-1} .

Pour les paramètres du *clutter*, on considère deux cas, correspondant à deux coefficients de corrélation ρ différents :

- $\rho = 1$, ce qui signifie que le *clutter* dans les canaux HH et VV est entièrement corrélé.
- $\rho = 0.5$, ce qui signifie que le *clutter* dans les canaux HH et VV est partiellement corrélé.

Dans les deux cas le SNR est égale à 45 dB et le *Clutter to Noise Ratio* (CNR) est égal à 40 dB .

Les rangs r_1, r_2, r_3 and r_{12} sont calculés en se basant sur la configuration du radar. r_{13} dépend de la valeur de ρ . r_{123} et r_{23} sont estimés en se basant sur les valeurs propres des matrices dépliantes de \mathcal{R} correspondantes. Ces différents résultats sont présentés dans la table 5.2.

Toutes les simulations de Monte-Carlo sont réalisées avec $N_{rea} = 1000$ réalisations pour chaque point, à l’exception des courbes de P_{fa} où $N_{rea} = 100$ pour des raisons de temps de calculs.

Résultats de SINR *losses*

Les figures 5.4 et 5.5 représentent les SINR *losses* pour chaque filtre en fonction du nombre de données secondaires K . Les SINR *losses* sont obtenus grâce à des simulations de Monte-Carlo et en utilisant l'équation (4.41). Sur les deux figures, le SINR *loss* pour une configuration STAP 2D (avec les mêmes paramètres) est représenté à des fins de comparaisons. On retrouve le résultat connu : le SINR *loss* atteint -3 dB lorsque $K = 2r_{12} = 30$ et tends vers 0 dB lorsque K augmente. De manière similaire, le SINR *loss* de $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2,3)}$ atteint -3 dB lorsque $K = 2r_{123}$ (60 pour $\rho = 1$ et 90 pour $\rho = 0.5$). La taille des données étant plus importante, il est logique que la configuration STAP polarimétrique nécessite plus de données secondaires que la configuration 2D pour obtenir des performances similaires.

Lorsque $\rho = 1$, tous les filtres rang faible ont des performances correctes, étant donné que tout les rangs, à l'exception r_1 de r_2 sont déficients. En d'autres termes, pour chaque filtre, il existe au moins un rang associé déficient. $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2/3)}$ (issu de la HOSVD), $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,3/2)}$ (pouvant être obtenus uniquement à partir de l'AU-HOSVD), ont de meilleures performances que $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2,3)}$. De plus leurs performances sont également meilleures que celles du STAP 2D lorsque le nombre de données secondaires est faible (situation plus réaliste puisque l'hypothèse d'homogénéité des données n'est plus vérifiée lorsque K est trop grand). Ces résultats sont dus à la très forte contrainte imposée au *clutter* lorsque ρ est égal à un. Enfin, $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2/3)}$, pour lequel les deux rangs associés sont déficients, n'a pas de performances très intéressantes pour ce scénario, ce qui laisse penser que la projection orthogonale ne fonctionne bien que lorsque un seul rang est déficient.

Lorsque $\rho = 0.5$, $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2/3)}$ a de meilleures performances que $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2,3)}$ et que le STAP 2D quel que soit le nombre de données secondaires. De plus ce scénario est plus réaliste puisqu'il considère que les canaux HH et VV ne sont pas entièrement corrélés. $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2/3)}$, $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,3/2)}$ ont des SINR *loss* très faibles. Cela s'explique par le fait qu'aucun des rangs associés à ces filtres n'est déficient, et donc qu'aucune projection n'a lieu comme expliqué dans le paragraphe 4.1.3. C'est pourquoi ces filtres (pour $\rho = 0.5$) ne seront plus étudiés pour les autres simulations.

Les figures 5.6 et 5.7 représentent le SINR *loss* en fonction du *CNR* pour $K = 2r_{12} = 30$ données secondaires. Cette valeur de K correspond à un cas où le SINR *loss* est quasiment égal pour les filtres STAP polarimétrique (à l'exception du filtre vectoriel et des filtres qui ne sont plus étudiés suite aux simulations de SINR *loss*/Données secondaires) et le filtre STAP 2D. Elles permettent de voir que les filtres qui ne peuvent être obtenus que par l'AU-HOSVD, sont plus robustes à la puissance du *clutter* que le filtre vectoriel rang faible pour une configuration STAP polarimétrique. En effet, pour ces filtres, le SINR *loss* reste quasiment constant par rapport au *CNR*, ce qui n'est pas le cas de $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,2,3)}$.

Les figures 5.8 et 5.9 représentent le SINR *loss* en fonction de la vitesse de la cible pour $K = 180$. Selon ce critère, un filtre aura de bonnes performances si la vitesse en dessous de laquelle le SINR *loss* commence à chuter est faible. On parle de vitesse minimum détectable. Dans les deux cas, les performances du STAP 2D sont celles attendues. Pour $\rho = 1$, la différence de propriétés polarimétriques entre la cible et le *clutter* est exploitée par les filtres $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2/3)}$, $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\mathbf{W}}_{lr(1,3/2)}$, puisque r_3 est déficient. Ainsi, lorsque la cible est dans le *clutter ridge*, le SINR *loss* dépasse (en particulier pour

$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2/3)}$, $\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,3/2)}$) celui du filtre STAP 2D rang faible. Au contraire, lorsque $\rho = 0.5$, le filtre STAP 2D rang faible est meilleur que $\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2/3)}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2,3)}$, puisque r_3 n'est pas déficient. Ces résultats sont dus à la valeur de K , nécessaire à l'obtention de résultats cohérents pour des faibles vitesses. Pour une valeur de K plus faible, les résultats de $\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2/3)}$ seront similaires à ceux du STAP 2D.

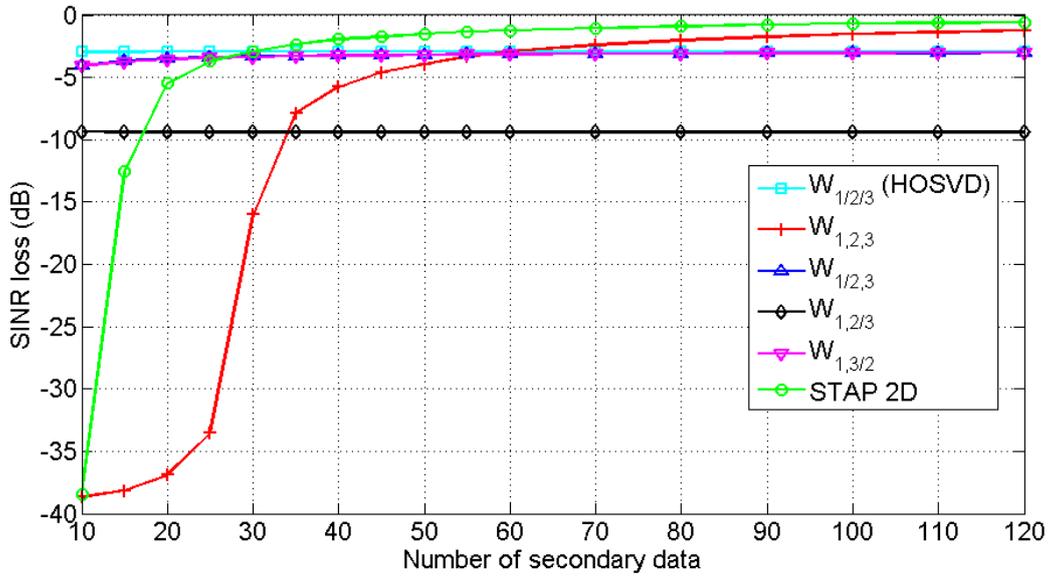


FIGURE 5.4 – SINR losses en fonction du nombre de données secondaires K . Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB. La cible est située à la position $(\theta = 0^\circ, v = 10m.s^{-1})$.

Résultats de P_{fa} et de P_d

La P_{fa} en fonction du seuil η est représentée sur les figures 5.10 et 5.11. La P_d en fonction du SNR est représentée sur les figures 5.12 et 5.13 pour $K = 30$ données secondaires. Les seuils sont choisis de manière à avoir une P_{fa} égale à 10^{-2} en s'appuyant sur les figures 5.10 et 5.11. Lorsque $\rho = 1$, les performances de $\hat{\Lambda}_{lr(1/2/3)}$, $\hat{\Lambda}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\Lambda}_{lr(1,3/2)}$, qui ne peuvent être obtenus qu'avec l'AU-HOSVD, sont meilleures que celles de $\hat{\Lambda}_{lr(1,2,3)}$ et du LRNMF pour le 2D STAP. Par exemple, la P_d est égale à 90% lorsque le SNR est égal à : 15 dB pour $\hat{\Lambda}_{lr(1/2/3)}$, $\hat{\Lambda}_{lr(1/2,3)}$ et $\hat{\Lambda}_{lr(1,3/2)}$, 20 dB pour le LRNMF 2D STAP et 33 dB pour $\hat{\Lambda}_{lr(1,2,3)}$. Lorsque $\rho = 0.5$, c'est $\hat{\Lambda}_{lr(1,2/3)}$ qui a de meilleures performances que celles de $\hat{\Lambda}_{lr(1,2,3)}$ et du LRNMF pour le 2D STAP. Par exemple, la P_d est égale à 90% lorsque le SNR est égal à : 16 dB pour $\hat{\Lambda}_{lr(1,2/3)}$, 20 dB pour le LRNMF 2D STAP et 54 dB pour $\hat{\Lambda}_{lr(1,2,3)}$.

Ces résultats sur les P_d confirment les résultats obtenus sur les SINR losses concernant les partitions les plus efficaces pour les deux scénarios envisagés. En particulier, on a montré que les meilleurs résultats sont obtenus pour des filtres et des détecteurs qui ne peuvent être obtenus que par une approche tensorielle (pour les deux scénarios), voir même uniquement par l'AU-HOSVD (pour le scénario $\rho = 0.5$).

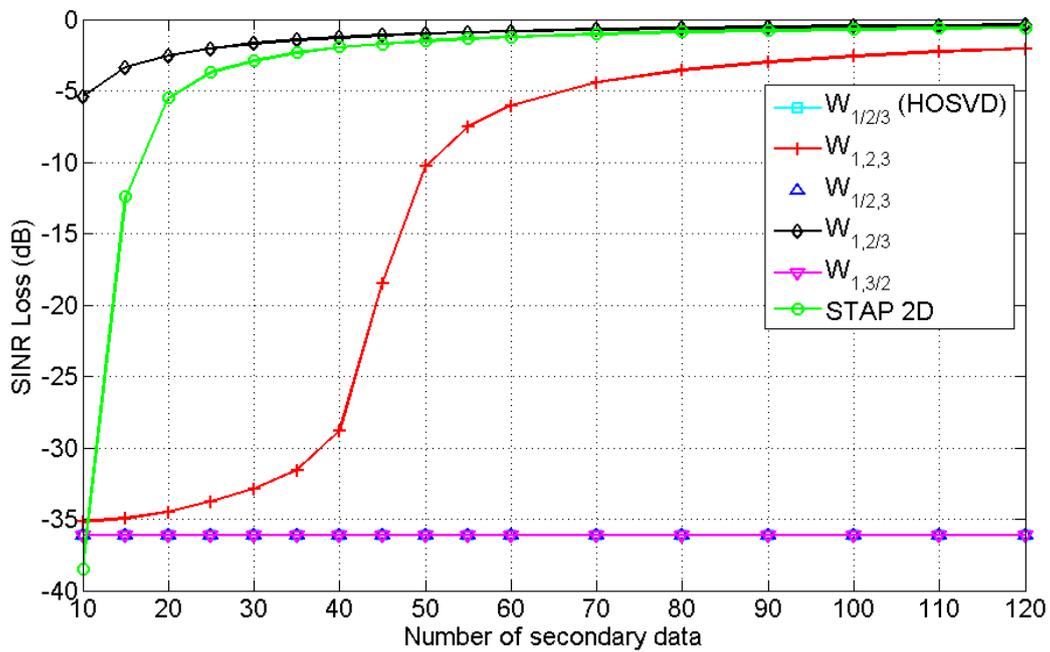


FIGURE 5.5 – SINR losses en fonction du nombre de données secondaires K . Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ, v = 10m.s^{-1}$).

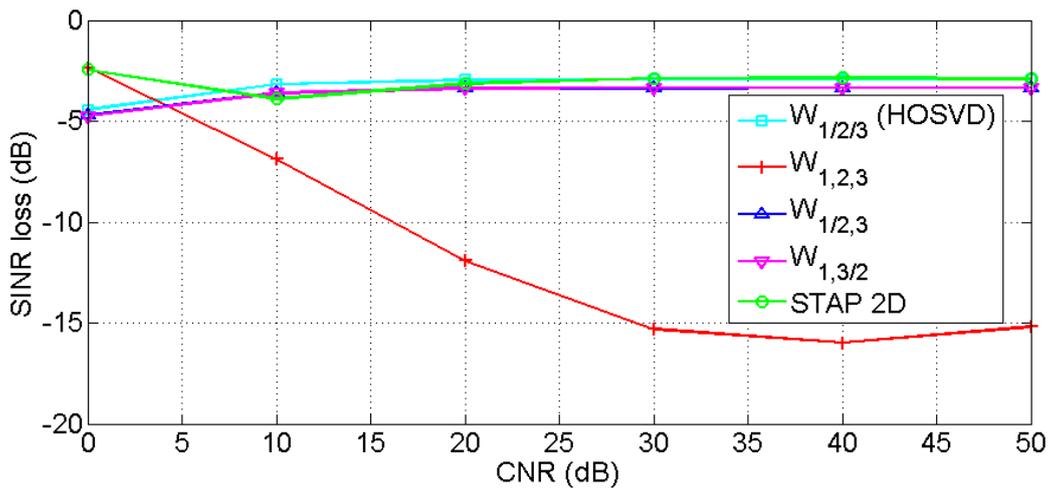


FIGURE 5.6 – SINR losses en fonction du CNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $N_{rea} = 1000$, $SNR = 45$ dB. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ, v = 10m.s^{-1}$).

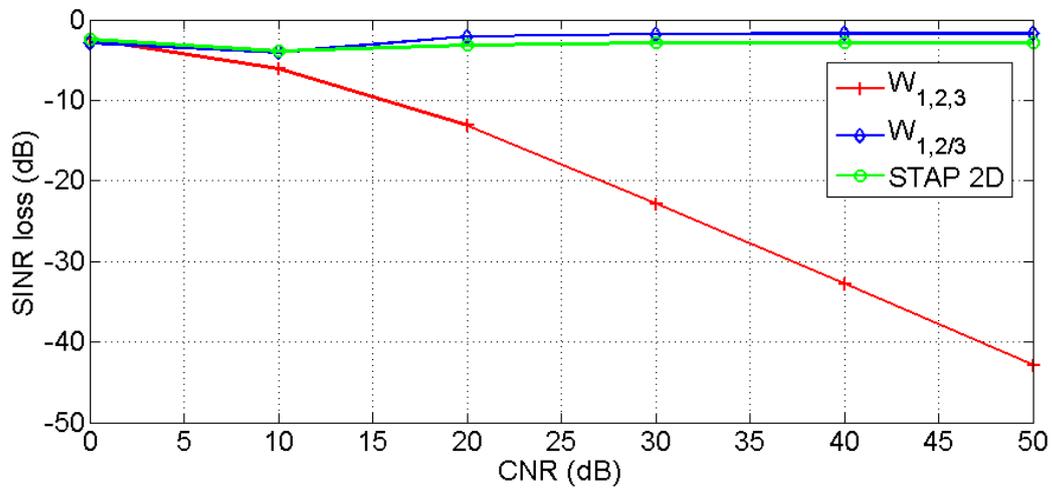


FIGURE 5.7 – SINR losses en fonction du CNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $N_{rea} = 1000$, $SNR = 45$ dB. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ, v = 10$ m.s $^{-1}$).

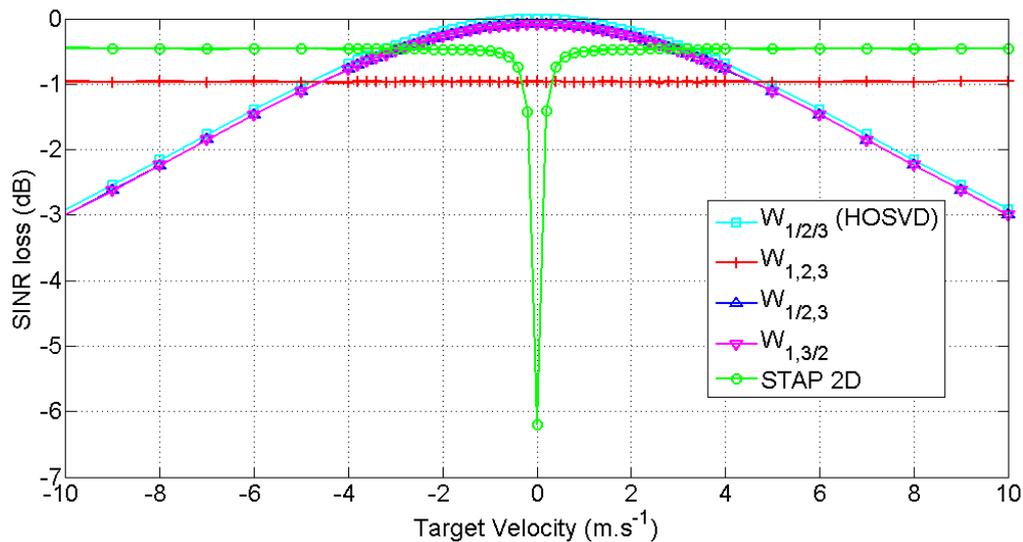


FIGURE 5.8 – SINR losses en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB, $K = 180$, $N_{rea} = 1000$. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ$).

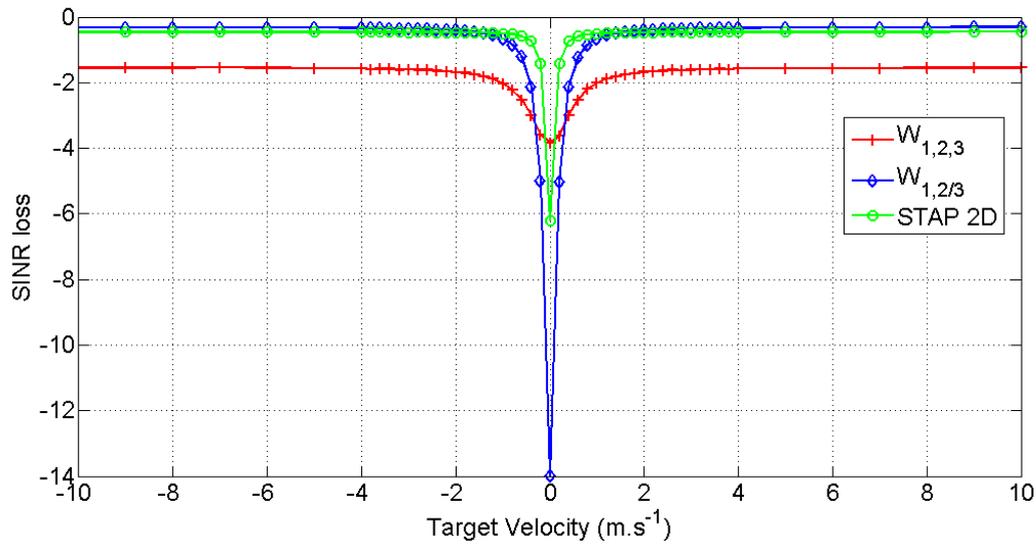


FIGURE 5.9 – SINR losses en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB, $K = 180$, $N_{rea} = 1000$. La cible est située à la position ($\theta = 0^\circ$).

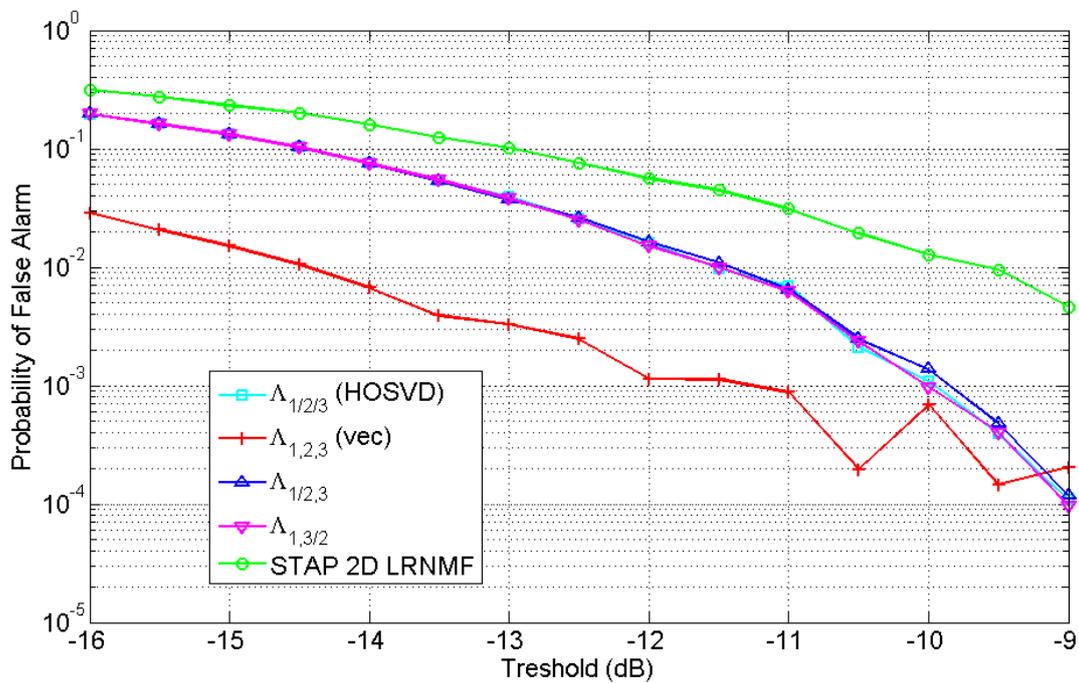


FIGURE 5.10 – P_{fa} en fonction du seuil. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $SNR = 45$ dB.

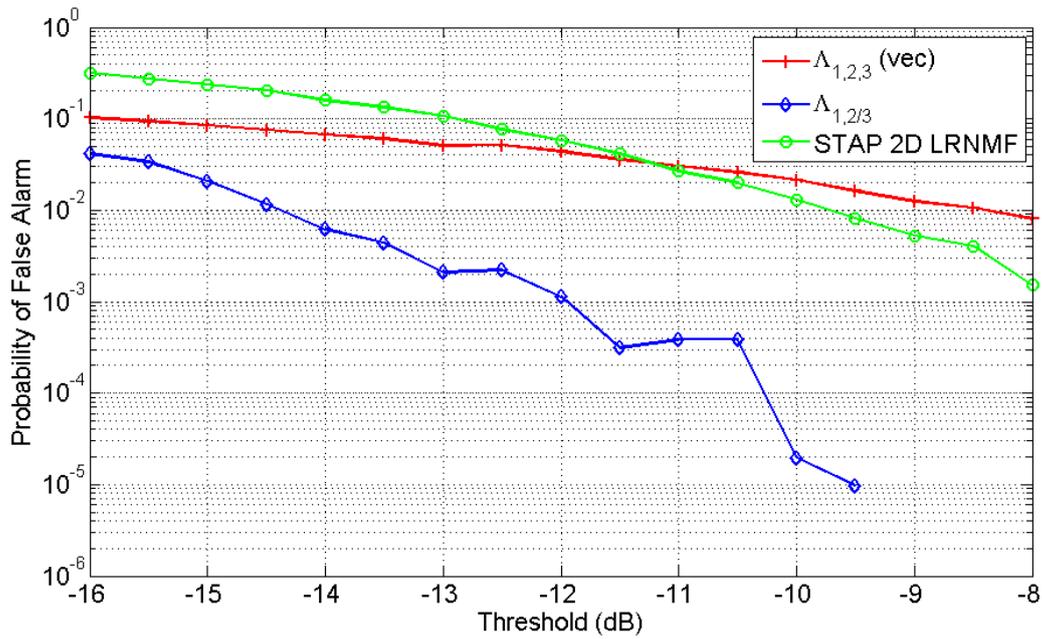


FIGURE 5.11 – P_{fa} en fonction du seuil. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $CNR = 40 \text{ dB}$, $SNR = 45 \text{ dB}$.

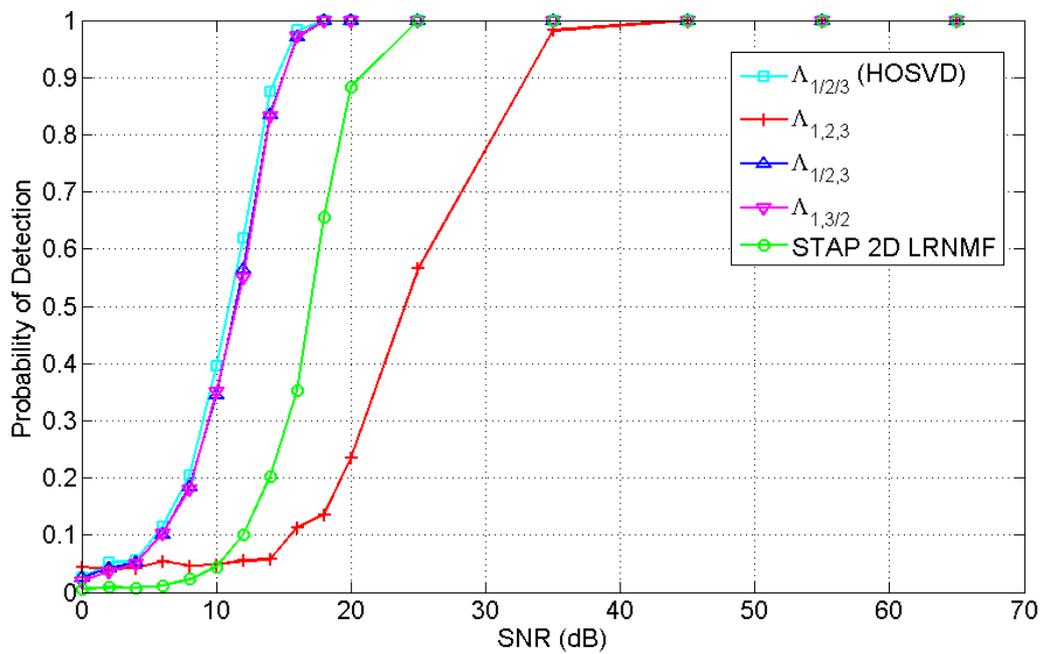


FIGURE 5.12 – P_d en fonction du SNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 1$, $K = 30$, $CNR = 40 \text{ dB}$, $P_{fa} = 10^{-2}$.

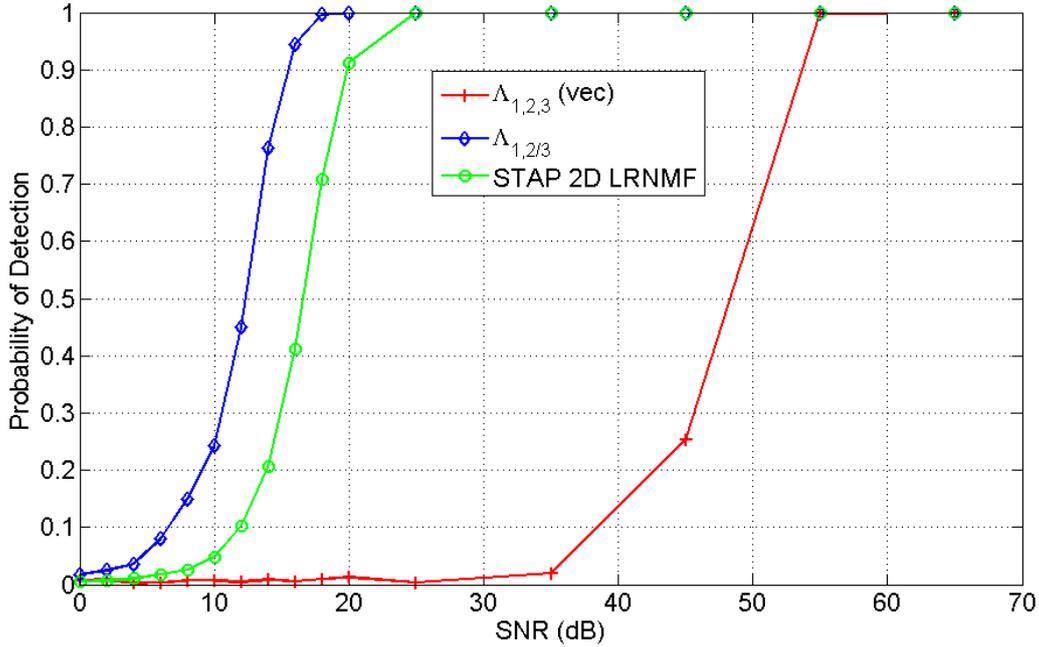


FIGURE 5.13 – P_d en fonction du SNR. Les paramètres de la simulation sont les suivants : $\rho = 0.5$, $K = 30$, $CNR = 40$ dB, $P_{fa} = 10^{-2}$.

5.2.4 Synthèse

Dans cette partie, on a étudié une première configuration STAP multidimensionnelle : le STAP polarimétrique. Après avoir proposé un modèle de signal et de bruit pour cette configuration, on a montré que les traitements tensoriels rang faible développés dans le chapitre 4 pouvaient s'appliquer à cette configuration. Afin de pouvoir appliquer ces traitements, on a ensuite étudié les rangs associés aux différentes partitions des dimensions.

Enfin, on a pu étudier le comportement de ces traitements à partir de simulations de Monte-Carlo. Ces simulations ont permis de montrer l'intérêt de l'approche tensorielle basée sur l'AU-HOSVD. En particulier on a montré que les traitements ne pouvant être obtenus qu'à partir de notre approche permettaient de mieux exploiter l'apport de la dimension supplémentaire (polarimétrique) qu'une approche vectorielle rang faible. On a aussi constaté que la partition qui donne le meilleur résultat dépend du scénario étudié (du coefficient de corrélation entre les canaux de polarisation dans ce cas).

5.3 STAP MIMO

Cette partie concerne l'application des algorithmes présentés dans le chapitre 4 à une autre configuration STAP multidimensionnelle : le STAP *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO). Le MIMO consiste à augmenter la diversité spatiale d'un radar en augmentant le nombre d'émetteurs. Ce type de configuration permet d'améliorer les performances (en détection et/ou estimation), la résolution spatiale,

etc ... Récemment, il a été montré que le MIMO pouvait être utilisé dans le cadre d'une configuration STAP [65] et que les traitements classiques pouvaient s'appliquer [21, 22, 28]. Il paraît donc intéressant d'appliquer les traitements basés sur l'AU-HOSVD au STAP MIMO. Pour cela, les modèles de cible et de bruit associés au STAP MIMO sont présentés. A partir du modèle, les rangs et les partitions sont ensuite étudiés. Enfin, une étude préliminaire des filtres rang faible basés sur l'AU-HOSVD et appliqués à une configuration STAP MIMO à partir de simulations de Monte-Carlo est présentée.

5.3.1 Modèle

A l'origine, le concept de MIMO a été introduit pour les télécommunications [78, 74]. Il est apparu il y a une dizaine d'années en traitement d'antenne pour le radar [31, 8, 62]. En traitement d'antenne, on dispose généralement d'un émetteur et d'un réseau de récepteur. Ce type de configuration permet d'avoir de la diversité spatiale et ainsi de pouvoir faire de la localisation contrairement à une configuration à un seul récepteur. On parle de configuration *Single-Input Multiple Output* (SIMO). L'idée du MIMO est d'améliorer les performances d'un système radar en augmentant le nombre d'émetteurs. Contrairement à un radar multistatique, chaque émetteur dans une configuration MIMO, émet une forme d'onde différente. On distingue deux types de configuration :

- Le MIMO distribué ou statistique, pour lequel les émetteurs et les récepteurs sont suffisamment espacés pour voir la cible sous différents aspects. Cette caractéristique permet d'avoir de la diversité spatiale. De plus, le fait que les formes d'onde soient différentes pour chaque émetteur permet d'avoir une diversité supplémentaire.
- Le MIMO cohérent, pour lequel la position des émetteurs et récepteurs est telle que le rayonnement de la cible reste cohérent sur les paires émetteur/récepteur (voir figure 5.14). La cohérence correspond au fait que la réponse de la cible est la même pour chaque paire émetteur/récepteur. Dans ce type de configuration, la diversité supplémentaire est obtenue grâce aux formes d'onde différentes pour chaque émetteur.

La plupart des études porte sur des radar MIMO utilisant des formes d'ondes orthogonales qui permettent entre autre d'augmenter la résolution angulaire. D'autres formes d'ondes peuvent être considérées qui généralement sont construites pour optimiser certaines performances [33] (détection, estimation, ...).

Dans ce travail, on considère une configuration MIMO cohérente, colocalisée, où les formes d'ondes des émetteurs sont orthogonales entre elles. Le système est composé de N_e émetteurs et de N_r récepteurs. Émetteurs et récepteurs forment deux réseaux d'antennes linéaires. Cette configuration est caractérisée par la longueur de l'antenne virtuelle formée par l'association des émetteurs et des récepteurs. La longueur de cette antenne virtuelle dépend du ratio entre l'espacement inter-émetteurs, noté d_T et l'espacement inter-récepteurs, noté d_R (voir figure 5.15). On note ce ratio $\gamma = \frac{d_T}{d_R}$. Deux cas particuliers seront étudiés :

- $\gamma = 1$ appelé *filled* MIMO. Elle permet de former une antenne virtuelle plus longue que l'antenne physique formée par uniquement les récepteurs en SIMO [62].
- $\gamma = N_r$ appelé *sparse* MIMO qui maximise la longueur de l'antenne virtuelle [62] et qui permet donc d'obtenir une antenne virtuelle plus longue qu'en *filled* MIMO.

Récemment, il a été montré [65, 22] qu'une configuration MIMO peut être utilisée avec une approche STAP. Les émetteurs et les récepteurs en STAP devant être situés sur la plate-forme aéroportée,

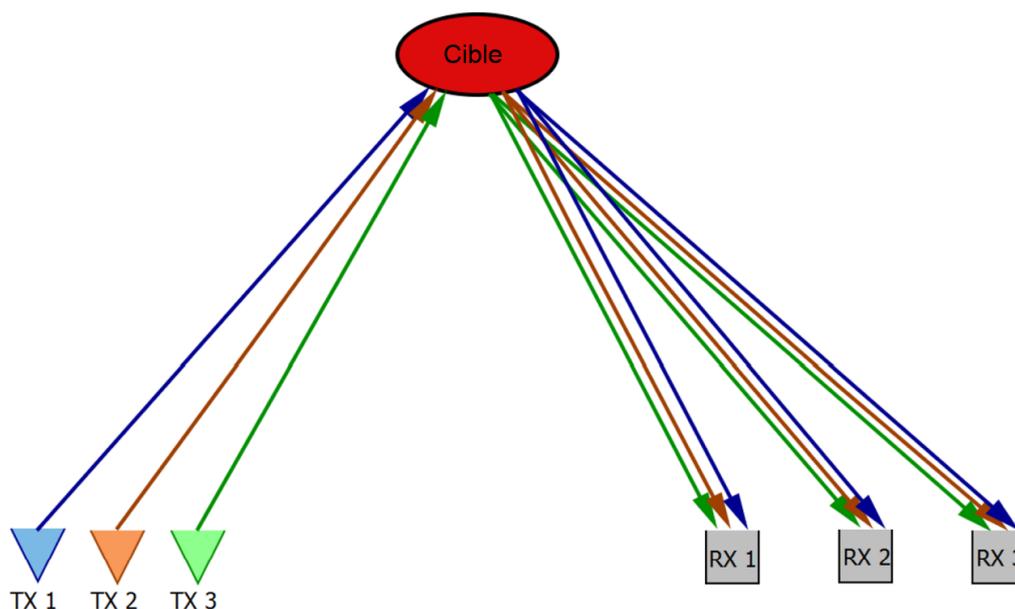


FIGURE 5.14 – Schéma représentant une configuration MIMO cohérente. Les émetteurs sont noté TX et les récepteurs RX . Cette configuration sera dite colocalisée si les émetteurs et les récepteurs sont situés au même endroit.

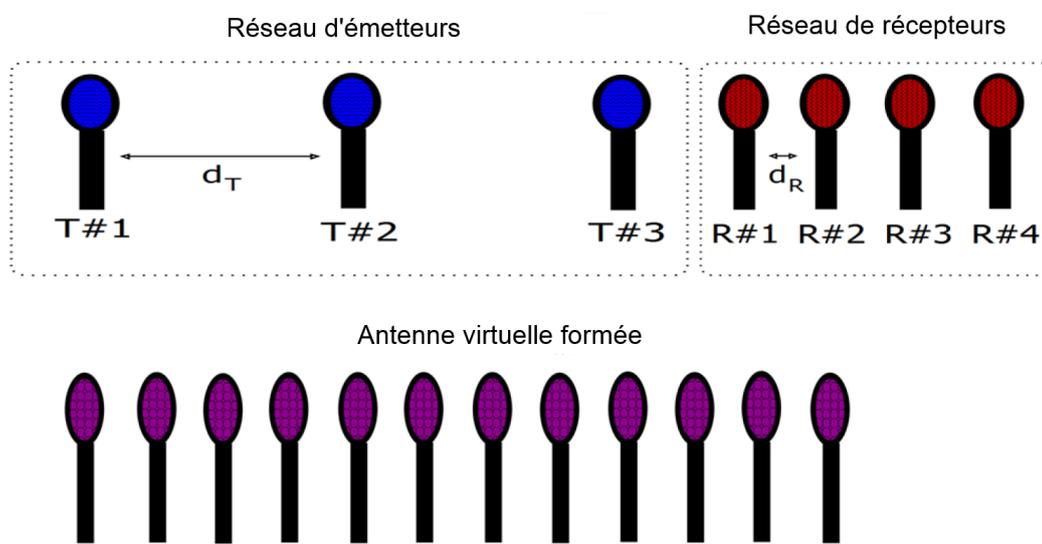


FIGURE 5.15 – Exemple de formation d’une antenne virtuelle à partir d’un réseau de trois émetteurs et d’un réseau de quatre récepteurs pour une configuration MIMO cohérente colocalisée. Les formes d’onde sont supposées parfaitement orthogonales. Le cas présenté correspond à une configuration *sparse*. L’antenne virtuelle formée est plus longue que le réseau physique de réception.

c'est donc une approche MIMO cohérente colocalisée qui sera utilisée. Il s'agit toujours de détecter une cible mobile perturbée par deux bruits additifs : le premier dû à l'électronique du système (bruit thermique) et le second dû à la réponse du sol appelée fouillis. Le radar est constitué des éléments suivants : N_e émetteurs émettant chacun M impulsions cohérentes et N_r récepteurs. On dispose aussi de K données secondaires. En supposant des formes d'ondes parfaitement orthogonales, les données peuvent se présenter sous la forme de N_e cubes de dimension $N_r \times M \times (K + 1)$ (voir figure 5.16). Chacun de ces cubes peut être vu comme une configuration STAP conventionnelle à un émetteur (voir figure 5.3).

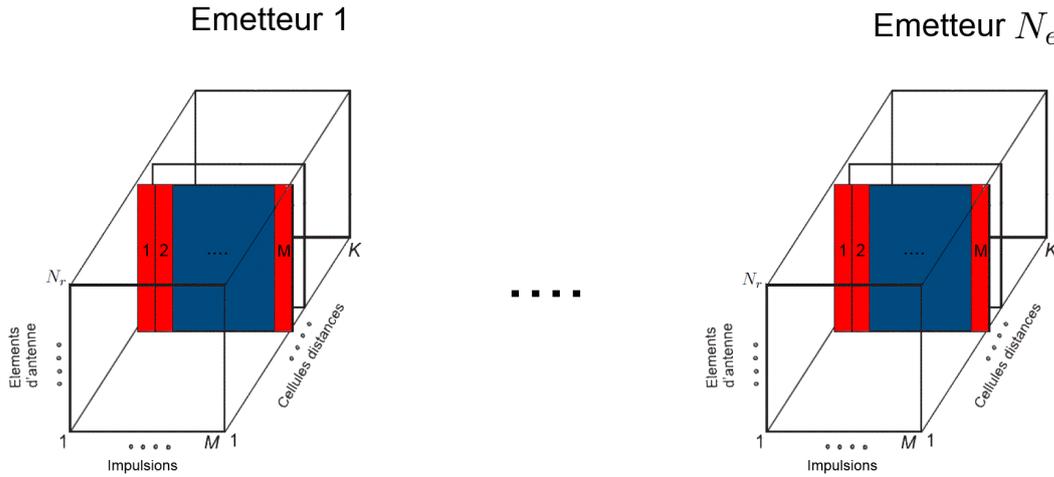


FIGURE 5.16 – Data cube MIMO STAP formé de N_e data cubes STAP.

L'approche classique consiste à former $K + 1$ vecteurs de taille $N_e N_r M$ en concaténant les réponses provenant de tous les émetteurs. Les traitements vectoriels rang faible adaptatifs [45, 65, 22] présentés dans le paragraphe 4.1.3 peuvent ensuite être appliqués. Dans la suite, seule l'approche tensorielle est étudiée. Les données vont donc être mise sous la forme de $K + 1$ tenseurs d'ordre trois et de dimensions $N_r \times N_e \times M$. Le problème peut alors se résumer avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \alpha \mathbf{S} + \mathbf{C} + \mathbf{N} \\ \mathbf{X}_k = \mathbf{C}_k + \mathbf{N}_k, \quad k \in [1, K], \end{cases} \quad (5.27)$$

avec \mathbf{X} , $\mathbf{X}_k \in \mathbb{C}^{N_r \times N_e \times M}$. \mathbf{S} désigne le *steering* tenseur et \mathbf{C} , \mathbf{N} (respectivement \mathbf{C}_k , \mathbf{N}_k) désignent les deux bruits additifs, indépendants et identiquement distribués.

Modèle du signal cible

La cible est caractérisée par un *steering* tenseur, qui s'écrit de la manière suivante [65, 22] :

$$\mathbf{S}(\omega_t, \nu_t) = \text{vec}^{-1}(\mathbf{b}(\omega_t) \otimes \mathbf{a}_t(\nu_t)) \otimes \mathbf{a}_r(\nu_t) \quad (5.28)$$

où $\mathbf{b}(\omega_t)$ et $\mathbf{a}_r(\nu_t)$ sont respectivement le *steering* vecteur temporel et le *steering* vecteur spatial des récepteurs détaillés dans les équations (5.8) et (5.10) $\mathbf{a}_t(\nu_t)$, le *steering* vecteur spatial des émetteurs,

est donné par la formule suivante :

$$\mathbf{a}_t(\nu_t) = [1 \dots e^{2i\pi\gamma\nu_t(N_e-1)}]^T \quad (5.29)$$

Modèle du bruit

Le bruit est composé de deux parties. \mathcal{N} , qui désigne la partie due à l'électronique du système, est modélisé par un tenseur aléatoire gaussien de tenseur de covariance $\sigma^2 SqMat^{-1}(\mathbf{I}_{MN_r N_e})$.

La partie *clutter* du bruit est modélisée par un tenseur aléatoire gaussien de tenseur de covariance \mathcal{R}_{mc} . Ce tenseur de covariance est construit de manière analogue à la matrice de covariance du fouillis dans le cas SIMO (voir équation 5.16) :

$$\mathcal{R}_{mc} = SqMat^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_c} E[\gamma_i \gamma_i^*] vec(\mathcal{S})(\omega_i, \nu_i) vec(\mathcal{S})^H(\omega_i, \nu_i) \right). \quad (5.30)$$

On note \mathcal{R} le tenseur de covariance du bruit total $\mathcal{C} + \mathcal{N}$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{mc} + \sigma^2 SqMat^{-1}(\mathbf{I}_{LN_r N_e}). \quad (5.31)$$

Enfin il est possible de généraliser la loi de Brennan afin de calculer le rang de $SqMat(\mathcal{R}_{mc})$ (qui correspond à la matrice de covariance du modèle vectoriel) [22] :

$$rang(SqMat(\mathcal{R}_{mc})) = r_{123} = N_r + \gamma(N_e - 1) + \beta(M - 1). \quad (5.32)$$

5.3.2 Étude des partitions

En configuration STAP MIMO, $P = 3$ et $\mathbb{D} = \{1, 2, 3\}$: on a donc $B_3 = 5$ décompositions possibles avec l'AU-HOSVD, qui permettent de construire 5 filtres rang faible. Les différentes partitions possible, ainsi que les rangs associés à ces partitions sont présentés dans la table 5.3. La première dimension représente les récepteurs, la seconde les émetteurs et la dernière le Doppler. Tout les filtres sont obtenus à partir de l'AU-HOSVD. Cependant, les deux premières partitions présentées constituent deux cas particuliers, comme expliqué dans le paragraphe 4.2.3. Lorsque $\mathbb{D}_1 = \{1, 2, 3\}$, on retrouve l'algorithme vectoriel rang faible [22]. Lorsque $\mathbb{D}_1 = \{1\}$, $\mathbb{D}_2 = \{2\}$, $\mathbb{D}_3 = \{3\}$, on retrouve le même filtre rang faible qu'en utilisant la HOSVD.

Les rangs relatifs à toutes les partitions sont décrits ci-dessous :

- Le rang r_1 est le rang de la dimension spatiale liée aux récepteurs. r_2 est le rang de la dimension spatiale liée aux émetteurs. r_3 est le rang de la dimension temporelle. Ils dépendent des paramètres du radar et ne sont pas, dans la plupart des cas, déficients.
- r_{13} est le même que pour une configuration à deux dimensions. Il peut donc être calculé grâce à la loi de Brennan [18] (voir paragraphe 5.1.4).
- r_{123} est déficient et sa valeur peut être calculée avec la loi de Brennan généralisée (voir équation (5.32)).
- Les rangs r_{12} et r_{23} peuvent être déficients. Leurs valeurs théoriques ne sont pas connues, elles seront donc estimées à l'aide des valeurs propres de $[\mathcal{R}]_{12}$ $[\mathcal{R}]_{23}$.

TABLE 5.3 – Description des filtres rang faible et des détecteurs rang faible obtenus grâce à l’AU-HOSVD pour des données de STAP MIMO.

Partition	Filtres	Rangs associés	Méthodes
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2, 3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2,3)}$	r_{123}	Vectorielle
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}, \mathbb{D}_3 = \{3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2/3)}$	r_1, r_2, r_3	HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1, 2\}, \mathbb{D}_2 = \{3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,2/3)}$	r_{12}, r_3	AU-HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1\}, \mathbb{D}_2 = \{2, 3\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1/2,3)}$	r_1, r_{23}	AU-HOSVD
$\mathbb{D}_1 = \{1, 3\}, \mathbb{D}_2 = \{2\}$	$\hat{\mathcal{W}}_{lr(1,3/2)}$	r_{13}, r_2	AU-HOSVD

TABLE 5.4 – Valeurs des rangs pour le MIMO *filled* et le MIMO *sparse*. Les autres paramètres du radar sont les suivants : $N_e = 4, N_r = 4, M = 64, V = 100 m.s^{-1}, \beta = 1, CNR = 80 dB$.

	r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{13}	r_{123}
MIMO <i>filled</i>	4 (plein)	4 (plein)	64 (plein)	7	67	67	70
MIMO <i>sparse</i>	4 (plein)	4 (plein)	64 (plein)	16 (plein)	76	67	79

5.3.3 Résultats

Configuration

On considère une configuration MIMO STAP cohérente, colocalisée. Le radar est constitué de $N_e = 4$ émetteurs, émettant chacun $M = 64$ impulsions et de $N_r = 4$ récepteurs. Le radar MIMO est en configuration *side-looking*. Les paramètres du radar sont choisis de manière à avoir $\beta = 1$. Les formes d’onde sont supposées parfaitement orthogonales et complètement dissociées au niveau de chaque récepteur. Le CNR vaut 80 dB.

Les deux configurations géométriques suivantes sont considérées :

- Une configuration MIMO *filled* avec $d_R = \frac{\lambda_0}{2}$ and $d_T = d_R$ (où λ_0 désigne la longueur d’onde des signaux émis).
- Une configuration MIMO *sparse* avec $d_R = \frac{\lambda_0}{2}$ et $d_T = N_r d_R$.

Pour ces deux configurations, les cinq filtres issus de l’AU-HOSVD seront étudiés. Une configuration SIMO avec $N_r = 4$ récepteurs et $M = 64$ pulsations sera également étudiée à des fins de comparaison. Les valeurs des différents rangs sont indiquées dans la table 5.4.

SINR losses

Les configurations *filled* et *sparse* sont étudiées à l’aide du SINR *loss* en fonction du nombre de données secondaires K (la vitesse de la cible est alors égale à $v = -40m.s^{-1}$) puis en fonction de la vitesse de la cible. Dans les deux cas la cible se situe à $\theta = 0^\circ$. Le SINR *loss* est calculé à partir de simulation de Monte-Carlo réalisées avec $N_{rea} = 100$ réalisations. Les détecteurs ne seront pas étudiés

mais font l'objet de travaux, non finalisés pour l'instant.

Les figures 5.17 et 5.19 (et les figures 5.18 et 5.20 qui représentent les versions agrandies autour de -3 dB) représentent le SINR *loss* en fonction du nombre de données secondaires K pour les configurations *filled* et *sparse*.

Pour le SIMO, on retrouve le résultat connu : le SINR *loss* atteint -3 dB lorsque $K = 2r_{23} = 134$ et tends vers 0 dB lorsque K augmente. De manière similaire, le filtre vectoriel ($\hat{\mathcal{W}}_{1,2,3}$), dans les deux configurations, a le même comportement que le SIMO : le SINR *loss* vaut -3 dB lorsque $K = 2r_{123}$ (140 en *filled* et 158 en *sparse*) et tend vers zéro lorsque K augmente. Les SINR *losses* des filtres $\hat{\mathcal{W}}_{1/2/3}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{1,2/3}$ sont très faibles. Pour $\hat{\mathcal{W}}_{1/2/3}$ (qui correspond à la HOSVD), ce résultat s'explique par le fait qu'aucun des rangs associés à ce filtres n'est déficient. Le filtre $\hat{\mathcal{W}}_{1,2/3}$ ne combine pas la dimension Doppler avec une des dimensions spatiales ce qui explique ses mauvaises performances. De plus, les filtres $\hat{\mathcal{W}}_{1,3/2}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$ sont meilleures que le filtre vectoriel lorsque K est petit (ce qui correspond à un scénario réaliste). Ces deux filtres ont exactement les mêmes performances puisque leurs rangs associés sont égaux, $r_{23} = r_{13} = 67$. Ces performances s'expliquent de manière intuitive. En effet $\hat{\mathcal{W}}_{1,3/2}$ (respectivement $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$) considère les données sous la forme de matrices de taille $N_r M \times N_e$ (respectivement $N_e M \times N_r$), ce qui peut être vu comme une configuration SIMO avec N_e (respectivement N_r) fois plus de données.

Les figures 5.21 et 5.22 représentent le SINR *loss* en fonction de la vitesse de la cible. Selon ce critère, un filtre aura de bonnes performances si la vitesse en dessous de laquelle le SINR *loss* commence à chuter est faible. On parle de vitesse minimum détectable. Le nombre de données secondaires est égal $K = 2r$ pour chaque configuration (r est le rang donné par la loi de Brennan pour le SIMO et par la loi de Brennan généralisée pour le MIMO), $r = 67$ pour le SIMO, $r = 70$ pour le *filled* et $r = 79$ pour le *sparse*. Le SINR *loss* des filtres $\hat{\mathcal{W}}_{1/2/3}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{1,2/3}$ sont tellement faibles qu'ils ne sont pas représentés sur les figures.

Pour la configuration *filled*, le filtre vectoriel $\hat{\mathcal{W}}_{1,2,3}$ est meilleure en terme de MVD que le SIMO, ce qui est un résultat attendu. Les performances de $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$, $\hat{\mathcal{W}}_{1,3/2}$ sont similaires à celle du SIMO en terme de MDV et donc inférieures à celles de $\hat{\mathcal{W}}_{1,2,3}$ (MIMO vectoriel). Cela est dû au fait que pour ces deux filtres l'antenne virtuelle n'est pas formée. Au contraire, pour la configuration *sparse*, le filtre $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$, ne pouvant être obtenu qu'avec l'AU-HOSVD, a des performances similaires à celles de $\hat{\mathcal{W}}_{1,2,3}$ (MIMO vectoriel) tout en nécessitant moins de données secondaires. Cependant, ce filtre, regroupant la dimension spatiale des émetteurs avec la dimension Doppler et la distance inter émetteurs étant égale à $d_T = N_r \frac{\lambda_0}{2}$, le théorème de Shannon n'est plus respecté. Ceci explique la présence de repliements pour le filtre $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$ sur la figure 5.22. Ce problème est bien connu pour les configurations *sparse*.

En conclusion, les filtres $\hat{\mathcal{W}}_{1/2,3}$ et $\hat{\mathcal{W}}_{1,3/2}$, qui ne peuvent être obtenus qu'avec l'AU-HOSVD, ont des meilleures performances que celles de la méthode vectorielle ($\hat{\mathcal{W}}_{1,2,3}$) en terme de SINR *loss* lorsque le nombre de données secondaires est faible. Pour la configuration *filled*, les performances de ces filtres en terme de vitesse minimum sont inférieures à celles de la méthode vectorielle. Pour une configuration *sparse* l'approche tensorielle permet d'obtenir des performances similaires à celle de l'approche vectorielle avec un nombre de données secondaires plus faible mais avec l'apparition de repliements.

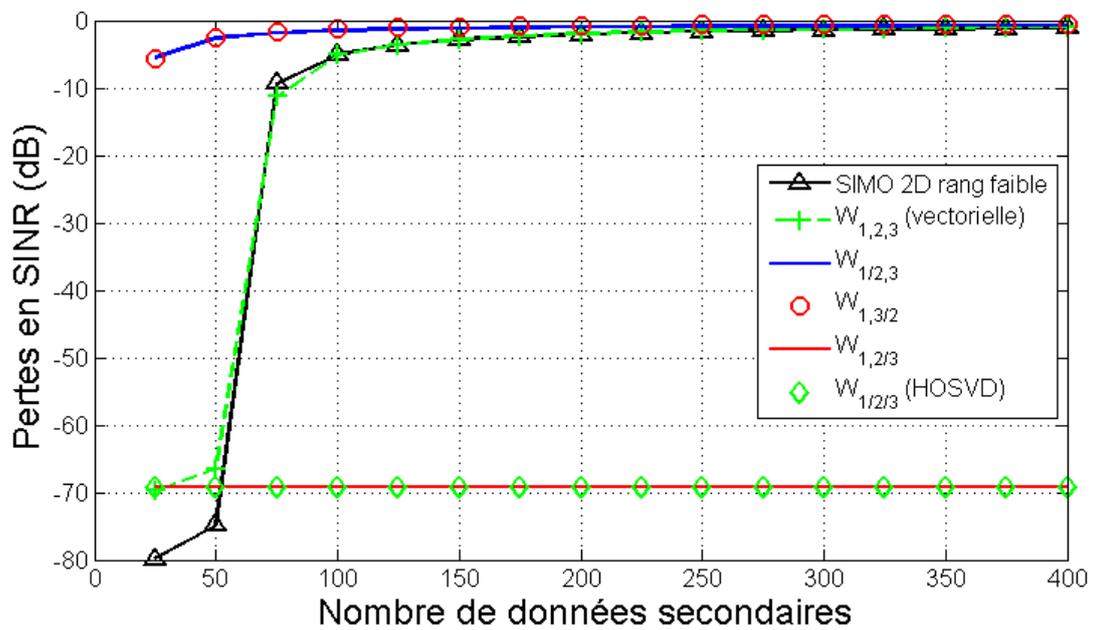


FIGURE 5.17 – STAP MIMO filled : SNR *loss* en fonction du nombre de données secondaires. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$.

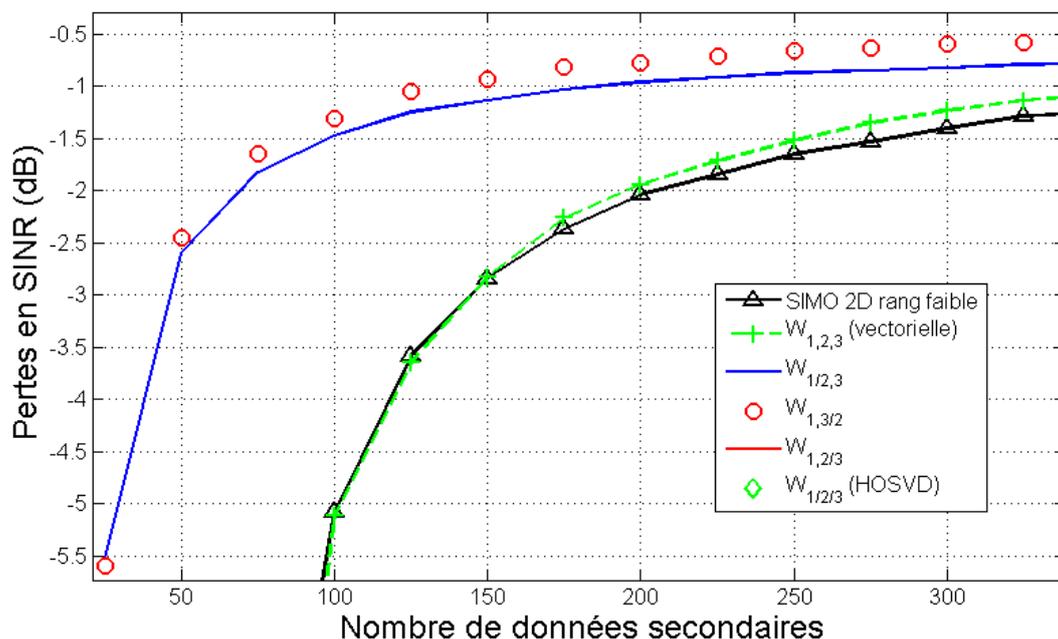


FIGURE 5.18 – STAP MIMO filled : SNR *loss* en fonction du nombre de données secondaires, agrandie autour de -3 dB). Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$.

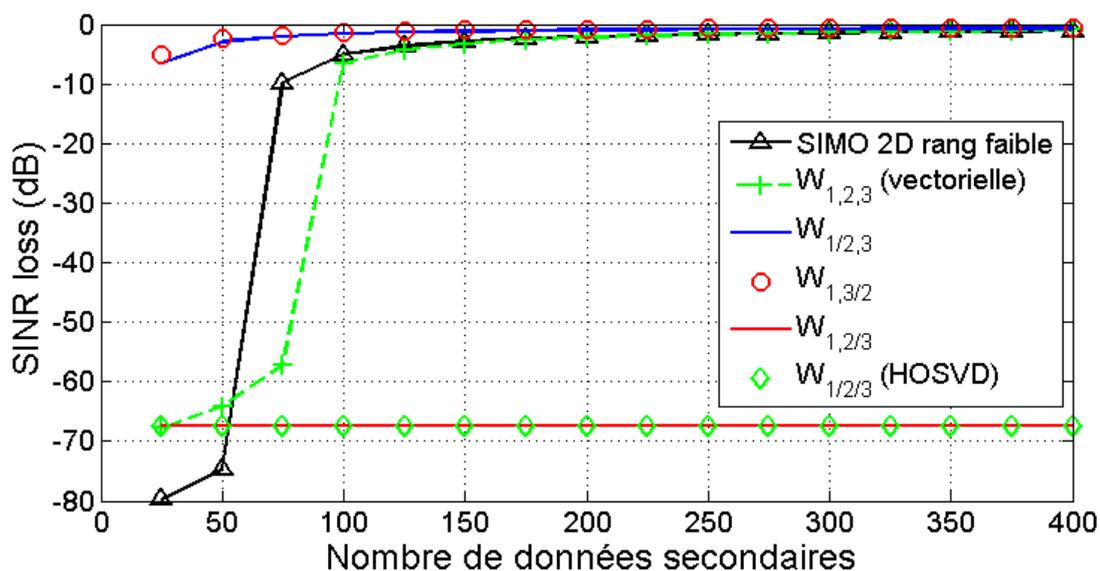


FIGURE 5.19 – STAP MIMO sparse : SNR *loss* en fonction du nombre de données secondaires. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$.

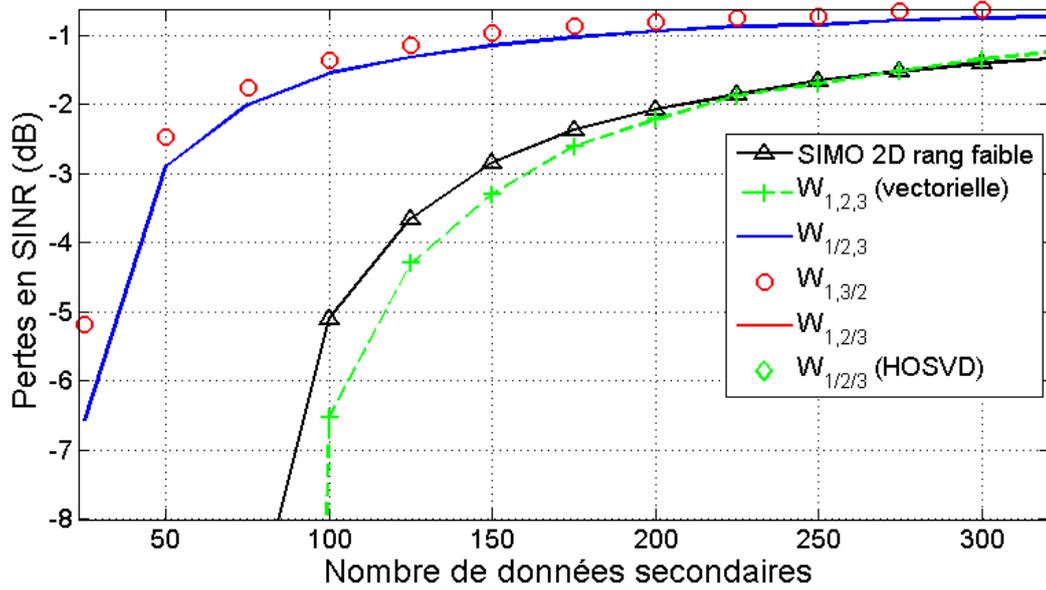


FIGURE 5.20 – STAP MIMO sparse : SNR *loss* en fonction du nombre de données secondaires, agrandie autour de -3 dB). Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB. Les caractéristiques de la cible sont : $\theta = 0^\circ$, $v = -40m.s^{-1}$.

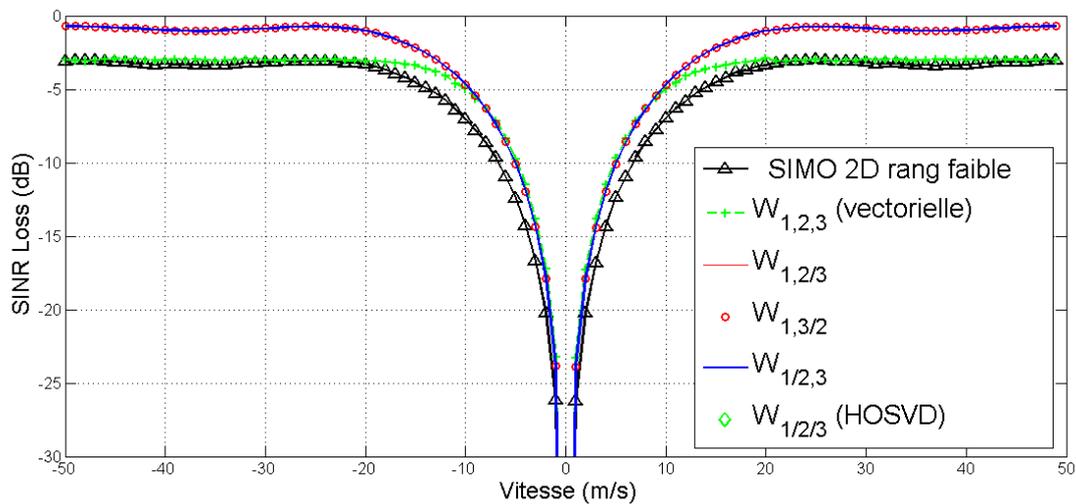


FIGURE 5.21 – STAP MIMO filled : SNR *loss* en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB.

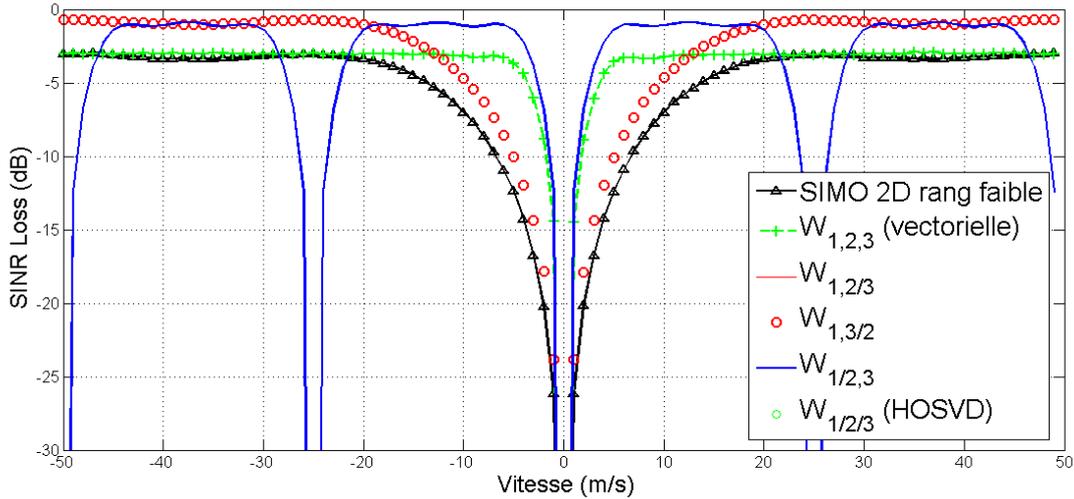


FIGURE 5.22 – STAP MIMO sparse : SNR *loss* en fonction de la vitesse de la cible. Les paramètres de simulations sont les suivants : $M = 64$, $N_r = N_e = 4$, $CNR = 80$ dB.

5.3.4 Synthèse

Dans cette partie, on a étudié une seconde configuration STAP multidimensionnelle : le STAP MIMO. Après avoir proposé un modèle de signal et de bruit pour cette configuration, on a montré que les traitements tensoriels rang faible développés dans le chapitre 4 pouvaient s'appliquer à cette configuration. Afin de pouvoir appliquer ces traitements, on ensuite étudié les rangs associés aux différents partitions des dimensions.

Enfin, on a pu étudier le comportement de ces traitements à partir de simulations de Monte-Carlo. Ces simulations ont permis de montrer l'intérêt de l'approche tensorielle basée sur l'AU-HOSVD, en particulier pour des configurations *sparse*.

5.4 Synthèse

Dans ce chapitre, on a appliqué les algorithmes présentés dans le chapitre 4 à une configuration radar particulière : le STAP. Le STAP est utilisé dans des configurations radar aéroporté afin de détecter une cible mouvante au sol noyée dans un *clutter* de sol. Les configurations STAP classiques comportent deux dimensions : une dimension spatiale et une dimension temporelle. Pour ces configurations, une approche vectorielle, rang faible ou non, est utilisée. On a d'abord rappelé les principaux résultats concernant la configuration classique à deux dimensions. On a ensuite étudié deux configurations STAP à trois dimensions : une configuration polarimétrique et une configuration MIMO. Dans la configuration polarimétrique, chaque élément de l'antenne est capable d'émettre et de recevoir en polarisation H et V, sous forme de trois canaux de polarisation (HH, VV, HV/VH). Dans la configuration MIMO, on dispose de plusieurs émetteurs, ce qui permet de créer une dimension supplémentaire.

Pour ces deux configurations, on a proposé un modèle tensorielle. Afin de pouvoir appliquer ces trai-

tements basés sur l'AU-HOSVD, on a étudié les rangs associés aux différents partitions des dimensions. Enfin, on a comparé les approches vectorielles et tensorielles à l'aide de simulations de Monte-Carlo. Ces simulations ont permis de montrer l'intérêt de l'approche tensorielle basée sur l'AU-HOSVD. Dans les deux cas, on a montré que les traitements pouvant être obtenus uniquement avec l'AU-HOSVD permettait d'avoir de meilleures performances qu'avec une approche vectorielle, en particulier pour des faibles valeurs de données secondaires. On a aussi constaté que la partition qui donne le meilleur résultat n'est pas toujours la même selon la nature des données (corrélation entre les canaux de polarisation, type de configuration MIMO ...).

Conclusion

Synthèse

Ce travail de thèse est parti du constat suivant : les algorithmes de traitement d'antenne reposent généralement sur des modèles vectoriels ou matriciels. En particulier, il est courant d'utiliser la structure rang faible des données traitées pour estimer le sous-espace signal et/ou une partie du sous-espace bruit. Cette approche permet d'obtenir des traitements (filtre, détecteurs ...) adaptatifs qui nécessitent moins de données secondaires que les traitements classiques pour des performances similaires. Par ailleurs, les données considérées dans le domaine du radar sont de plus en plus fréquemment multidimensionnelles (MIMO, polarimétrique, STAP, interférométrie ...). C'est aussi le cas de nombreux autres domaines comme la vidéo, les biostatistiques ... Il est légitime de se demander comment on peut généraliser l'approche rang faible à ce type de données. Deux types d'approche sont possibles : l'approche vectorielle et l'approche tensorielle. L'approche vectorielle consiste à mettre les données sous forme de vecteurs et d'appliquer les traitements habituels. Ce type d'approche comporte un inconvénient majeur : la structure des données disparaît lors de la concaténation, et n'est donc pas exploitée par le traitement qui suit. L'approche tensorielle consiste au contraire, à préserver la structure des données, en utilisant l'algèbre multilinéaire et en mettant les données sous forme de tenseurs. Cette méthode nécessite d'adapter les traitements au cadre tensoriel. Dans le cas des méthodes rang faible, il faut être capable de décomposer un tenseur afin d'estimer les sous-espaces associés au signal ou au bruit.

Dans le chapitre 1, les principaux outils d'algèbre multilinéaire ont été présentés : produits, norme, dépliements, décompositions tensorielles. On a vu qu'il n'existait pas d'équivalent à la SVD matricielle, mais plusieurs décompositions tensorielles qui possèdent différentes propriétés. On a rappelé les caractéristiques des deux grandes familles de décompositions existantes : Candecomp/Parafac et la HOSVD. On a montré que la HOSVD était la décomposition naturelle pour généraliser les méthodes rang faible au cas tensoriel, grâce à ses propriétés d'orthogonalité et notamment le fait de pouvoir étendre la notion de projection orthogonale. On a enfin présenté un moyen simple pour modéliser un tenseur aléatoire.

A l'aide de toutes ces notions, on a pu, dans le chapitre 2 proposer une extension tensorielle du célèbre algorithme MUSIC. Dans le cas classique, l'algorithme MUSIC permet d'estimer la direction d'arrivée d'une ou plusieurs sources à partir d'un réseau de capteurs à une composante. On a travaillé, dans ce chapitre, sur un modèle de source polarisée. Dans ce cas, on doit aussi estimer les paramètres de polarisation de chaque source tout en disposant de plusieurs composantes sur chaque capteur. A partir de ce modèle, on a pu développer une version dite *Long Vector* de MUSIC et une version tensorielle de MUSIC basée sur la HOSVD. On a ensuite calculé les Erreurs Quadratiques Moyennes théoriques des directions d'arrivées pour les deux algorithmes dans un cas particulier où les propriétés de polarisation

des sources sont connues. On a validé ces calculs en les comparant à des simulations de Monte-Carlo. De plus, on a montré que l'approche tensorielle conduit à de meilleures performances que l'approche vectorielle lorsque les sources ont des paramètres (direction d'arrivée et/ou paramètres de polarisation) proches.

Dans le chapitre 3, on a été amené à élargir notre cadre de travail. On est reparti de la définition de rang faible associée à la HOSVD. En examinant cette définition on s'est aperçu qu'elle ne permettait pas d'exploiter tout les types de structures rang faible que l'on peut rencontrer dans un cadre multidimensionnel. En particulier, la définition de rang faible associée à la HOSVD ne permet pas de prendre en compte la structure rang faible contenue dans une combinaison de dimensions. On a alors proposé une nouvelle définition de rang tensoriel permettant de mettre en valeur ce type de structure. A partir de cette définition, on a pu proposer une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale : l'AU-HOSVD. Cette décomposition nécessite de choisir une partition de l'ensemble des dimensions du tenseur que l'on souhaite décomposer. Il existe donc autant de AU-HOSVD que de partitions possibles de l'ensemble des dimensions d'un tenseur. De plus, on a montré que cette décomposition peut être vue comme une extension de la HOSVD et qu'elle permet aussi d'étendre la notion de projection orthogonale en utilisant cette nouvelle définition du rang tensoriel.

Dans le chapitre 4, on s'est intéressé au filtrage et à la détection de données multidimensionnelles comportant une structure rang faible. On a proposé un modèle vectoriel et un modèle tensoriel aboutissant à deux approches différentes. Dans le cadre de l'approche vectorielle, on a rappelé les principaux résultats concernant les filtres et les détecteurs rang faible ainsi que leurs versions adaptatives. On a ensuite proposé un modèle tensoriel rang faible général basé sur la définition de rang tensoriel proposée dans le chapitre 3. A partir de ce modèle on a proposé des traitements rang faible tensoriels basés sur l'AU-HOSVD. On a montré que ces traitements permettaient à la fois de retrouver le cas vectoriel et de traiter des structures rang faible tensorielles plus générales. Cependant, ce type de méthode présente un défaut. Étant donné qu'il existe autant de AU-HOSVD que de partitions possibles de l'ensemble des dimensions du tenseur considéré, le coût calculatoire peut devenir très important. On a donc proposé une méthodologie permettant de présélectionner un certain nombre de partitions en fonction de l'application.

Enfin, on a appliqué ces méthodes dans le chapitre 5 à une configuration radar particulière : le STAP. Le STAP est utilisé dans des configurations de radar aéroporté afin de détecter une cible mobile au sol noyée dans un fouillis de sol additif. Les configurations STAP classiques comportent deux dimensions : une dimension spatiale et une dimension temporelle. Pour ces configurations une approche vectorielle, rang faible ou non, est utilisée. Étant donné que le nombre de dimensions est égale à deux, les méthodes tensorielles ne présentent pas vraiment d'intérêt. En revanche, de nouvelles configurations STAP sont apparues récemment et comportent des dimensions supplémentaires : polarimétrie, MIMO ... L'approche tensorielle est alors pertinente pour ce type de configurations. On a donc appliqué les méthodes développées dans le chapitre 4 à deux configurations STAP multidimensionnelles : le STAP polarimétrique et le STAP MIMO. Dans les deux cas, on a montré que les traitements pouvant être obtenus uniquement avec l'AU-HOSVD permettait d'obtenir de meilleures performances qu'avec une approche vectorielle, en particulier pour un petit nombre de données secondaires. On a aussi constaté, que la partition qui donne le meilleur résultat n'est pas toujours la même selon la nature des données (corrélation entre les canaux de polarisation, type de configuration MIMO ...).

Perspectives

Ces travaux ouvrent un certain nombre de perspectives. Tout d'abord, concernant l'algorithme MUSIC tensoriel, il serait intéressant de calculer l'EQM théorique sur les paramètres de polarisation. Cela nécessite de poser et de calculer $\Delta\Pi_2$ qui représente l'erreur d'estimation sur le projecteur de la partie polarimétrique du problème. De plus, la relation entre $\Delta\rho$, $\Delta\varphi$ et $\Delta\Pi_2$ est différente de celle liant $\Delta\theta$ et $\Delta\Pi_1$, et reste à déterminer. Par ailleurs, il serait pertinent de comparer notre algorithme tensoriel avec l'algorithme tensoriel d'estimation de direction d'arrivée basé sur la décomposition CP, développé par Miron dans [67].

Concernant les filtres basés sur l'AU-HOSVD, il est envisageable de calculer les SINR *loss* théoriques avec une méthode des perturbateurs. Le calcul a été fait dans le cas vectoriel [34] mais son extension aux filtres tensoriels est moins aisée que dans le cas MUSIC. Il est en effet nécessaire de développer l'erreur sur le projecteur jusqu'au second ordre ce qui complexifie considérablement le calcul.

Il reste aussi des points à éclaircir concernant l'AU-HOSVD. Tout d'abord, il serait utile de vérifier la validité de la troncature des matrices $\mathbf{U}^{(\mathbb{D}_i)}$ qui permet d'obtenir les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)}$. Pour cela on pourrait reprendre l'algorithme de moindres carrés alternés proposé par De Lathauwer dans [59], l'adapter à l'AU-HOSVD pour calculer les matrices $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{D}_i)}$ et vérifier que les résultats sont proches de ceux obtenus par troncature. De plus, le coût calculatoire de l'AU-HOSVD étant important, il paraît intéressant de reprendre les algorithmes rapides, initialement développés pour la HOSVD [3] et de les adapter à l'AU-HOSVD. Par ailleurs, on pourrait s'intéresser au lien entre l'AU-HOSVD et les autres décompositions tensorielles afin de proposer, si possible, une écriture unifiée à la manière de *tensor block decomposition* développée par De Lathauwer [54, 55, 60].

Il nous paraît également envisageable d'étendre encore l'idée de l'AU-HOSVD. Au lieu de chercher une structure rang faible dans une combinaison de dimensions, il semble intéressant de "casser" les dimensions existantes et de chercher une structure dans des combinaisons de ces fragments. Il faudrait alors envisager un nouveau type de matrices dépliantes, plus général. Cependant, cette approche, en multipliant les partitions possibles, augmenterait encore considérablement le coût calculatoire et nécessiterait donc de trouver un critère efficace pour présélectionner les partitions. En effet, en "oubliant" les dimensions existantes on s'affranchit de la nature physique du problème. On ne peut donc plus s'appuyer sur l'application pour définir les dimensions ou les combinaisons de dimensions ayant des rangs déficients. Dans ce contexte, avant d'utiliser cette décomposition générale et de l'appliquer, il faudrait développer une méthodologie qui permette de trouver la meilleure décomposition possible, au sens de la déficience des rangs et de l'optimisation de critères établis. Ceci ouvre un champ de recherche considérable.

Au niveau de l'application au STAP MIMO, les travaux présentés dans le chapitre 5 ne sont que des résultats préliminaires. Une collaboration est toujours en cours avec Frédéric Brigui, chercheur associé à la Nanyang Technological University de Singapour. Par exemple, le calcul théorique des valeurs des rangs associés aux différentes partitions permettrait d'avoir un critère a priori pour déterminer quelles partitions doivent être privilégiées. De plus, l'extension de l'AU-HOSVD évoquée plus haut pourrait

CONCLUSION

s'appliquer au STAP MIMO. D'autres résultats préliminaires, non publiés pour l'instant, semblent montrer l'intérêt de cette idée.

Enfin, de manière plus générale, on souhaiterait utiliser l'AU-HOSVD pour d'autres types de méthodes et/ou applications. Deux applications nous semblent particulièrement pertinentes. D'une part, l'AU-HOSVD pourrait être utilisée dans certaines configurations SAR comme le SAR multi-temporel. D'autre part, l'usage de l'AU-HOSVD pourrait se révéler intéressant en traitement vidéo et plus particulièrement pour faire de la compression.



CONCLUSION

Annexe A

Annexes du chapitre 2

A.1 Développement de Taylor d'un projecteur orthogonal

Définition A.1.1 Une matrice $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\mathbf{\Pi}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \text{ (Idempotence)} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{\Pi}^H = \mathbf{\Pi} \text{ (Auto-adjoint)} \quad (\text{A.2})$$

Lemme A.1.1 Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ une matrice hermitienne dont la plus petite valeur propre σ^2 a la multiplicité $N_x - P$ ($P < N_x$). Les valeurs propres de \mathbf{R} rangées par ordre croissant sont notées :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_P < \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_{N_x} = \sigma^2,$$

et les vecteurs propres orthonormés associés sont notés $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_x}$. \mathbf{R} peut donc s'écrire :

$$\mathbf{R} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H + \sum_{p=P+1}^{N_x} \sigma^2 \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H. \quad (\text{A.3})$$

Alors les deux matrices $\mathbf{\Pi}_s$ et $\mathbf{\Pi}_b$ définis comme suit :

$$\mathbf{\Pi}_s = \sum_{p=1}^P \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{\Pi}_b = \sum_{p=P+1}^{N_x} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H, \quad (\text{A.5})$$

sont deux projecteurs orthogonaux engendrés par les vecteurs propres de \mathbf{R} . Ils sont respectivement nommés projecteur sur le sous-espace signal et projecteur sur le sous-espace bruit. Ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{\Pi}^H = \mathbf{\Pi} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}\mathbf{R} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{\Pi}_s + \mathbf{\Pi}_b = \mathbf{I}_{N_x} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{\Pi}_s \mathbf{\Pi}_b = \mathbf{0}. \quad (\text{A.10})$$

Preuve A.1.1 Les propriétés se vérifient simplement en utilisant les équations (A.4), (A.5) et (A.3).

Lemme A.1.2 On pose :

$$\mathbf{S} = \sum_{p=1}^P (\lambda_p - \sigma^2) \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{S}^\dagger = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p - \sigma^2} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H. \quad (\text{A.12})$$

Ces matrices vérifient les égalités suivantes :

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = \mathbf{\Pi}_s \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{R}\mathbf{\Pi}_s = \mathbf{\Pi}_s\mathbf{R} = \mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{\Pi}_s \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{R}\mathbf{\Pi}_b = \mathbf{\Pi}_b\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{\Pi}_b \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{S}^\dagger\mathbf{\Pi}_s = \mathbf{\Pi}_s\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger. \quad (\text{A.16})$$

Preuve A.1.2 La preuve est évidente en utilisant les définitions des différentes matrices et l'équation (A.3).

Proposition A.1.1 Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ une matrice hermitienne dont la plus petite valeur propre σ^2 a la multiplicité $N_x - P$ ($P < N_x$). On suppose que \mathbf{R} est perturbée en $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}. \quad (\text{A.17})$$

Cette perturbation a une incidence sur $\mathbf{\Pi}_s$ et $\mathbf{\Pi}_b$, qui sont également perturbés :

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_s = \mathbf{\Pi}_s + \Delta\mathbf{\Pi}_s \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_b = \mathbf{\Pi}_b + \Delta\mathbf{\Pi}_b \quad (\text{A.19})$$

où $\hat{\mathbf{\Pi}}_s$ et $\hat{\mathbf{\Pi}}_b$ sont deux projecteurs orthogonaux engendrés par les vecteurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$.

Alors les matrices $\Delta\mathbf{\Pi}_s$, $\Delta\mathbf{\Pi}_b$ et $\Delta\mathbf{R}$ sont liées par les égalités suivantes :

$$\Delta\mathbf{\Pi}_b = -\Delta\mathbf{\Pi}_s \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta\mathbf{\Pi}_s = \mathbf{\Pi}_b\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger + \mathbf{S}^\dagger\Delta\mathbf{R}\mathbf{\Pi}_b, \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\mathbf{S}^\dagger = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\lambda_p - \sigma^2} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^H. \quad (\text{A.22})$$

Preuve A.1.3 L'équation (A.20) se déduit simplement du fait que $\hat{\mathbf{\Pi}}_s + \hat{\mathbf{\Pi}}_b = \mathbf{I}_{N_x}$:

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_b = \mathbf{I}_{N_x} - \hat{\mathbf{\Pi}}_s \quad (\text{A.23})$$

$$= \mathbf{I}_{N_x} - (\mathbf{\Pi}_s + \Delta\mathbf{\Pi}_s) \quad (\text{A.24})$$

$$= \mathbf{\Pi}_b - \Delta\mathbf{\Pi}_s. \quad (\text{A.25})$$

L'équation (A.21) est un peu plus compliquée à obtenir.

La première étape consiste à réécrire $\Delta\Pi_s$:

$$\Delta\Pi_s = (\Pi_s + \Pi_b)\Delta\Pi_s(\Pi_s + \Pi_b) \quad (\text{A.26})$$

$$= \Pi_s\Delta\Pi_s\Pi_s + \Pi_b\Delta\Pi_s\Pi_b + \Pi_b\Delta\Pi_s\Pi_s + \Pi_s\Delta\Pi_s\Pi_b, \quad (\text{A.27})$$

et à expliciter les quatre termes.

Les deux premiers termes s'obtiennent avec la propriété d'idempotence :

$$(\Pi_s + \Delta\Pi_s)(\Pi_s + \Delta\Pi_s) = \Pi_s + \Delta\Pi_s \quad (\text{A.28})$$

qui permet d'écrire :

$$\Pi_s\Delta\Pi_s\Pi_s = 0. \quad (\text{A.29})$$

De la même façon le second terme de (A.27) est égal à :

$$\Pi_b\Delta\Pi_s\Pi_b = 0. \quad (\text{A.30})$$

Les deux derniers termes s'obtiennent grâce à la commutativité de $\hat{\Pi}_s$ et $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{\mathbf{R}}\hat{\Pi}_s = (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})(\Pi_s + \Delta\Pi_s) \quad (\text{A.31})$$

$$= (\Pi_s + \Delta\Pi_s)(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) = \hat{\Pi}_s\hat{\mathbf{R}} \quad (\text{A.32})$$

En développant, on obtient :

$$\mathbf{R}\Pi_s + \mathbf{R}\Delta\Pi_s + \Delta\mathbf{R}\Pi_s + \Delta\mathbf{R}\Delta\Pi_s = \Pi_s\mathbf{R} + \Pi_s\Delta\mathbf{R} + \Delta\Pi_s\mathbf{R} + \Delta\Pi_s\Delta\mathbf{R} \quad (\text{A.33})$$

En négligeant les termes d'ordre deux et en utilisant la commutativité de \mathbf{R} et Π_s , l'expression devient :

$$\mathbf{R}\Delta\Pi_s + \Delta\mathbf{R}\Pi_s = \Pi_s\Delta\mathbf{R} + \Delta\Pi_s\mathbf{R} \quad (\text{A.34})$$

On pré-multiplie par Π_s et on post-multiplie par Π_b , ce qui donne :

$$(\mathbf{S} + \sigma^2\Pi_s)\Delta\Pi_s\Pi_b + \mathbf{0} = \Pi_s\Delta\mathbf{R}\Pi_b + \Pi_s\Delta\Pi_s\sigma^2\Pi_b \quad (\text{A.35})$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{S}\Delta\Pi_s\Pi_b = \Pi_s\Delta\mathbf{R}\Pi_b \quad (\text{A.36})$$

Il reste alors à pré-multiplier par \mathbf{S}^\dagger pour obtenir :

$$\Pi_s\Delta\Pi_s\Pi_b = \mathbf{S}^\dagger\Delta\mathbf{R}\Pi_b \quad (\text{A.37})$$

Le dernier terme s'obtient de manière similaire :

$$\Pi_b\Delta\Pi_s\Pi_s = \Pi_b\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger \quad (\text{A.38})$$

En combinant les équations (A.27), (A.29), (A.30), (A.37) et (A.38), on obtient :

$$\Delta\Pi = \mathbf{S}^\dagger\Delta\mathbf{R}\Pi_b + \Pi_b\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^\dagger, \quad (\text{A.39})$$

ce qui permet de conclure la preuve.

A.2 Preuve du lemme 2.3.2

Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$, le signal matriciel reçu sur l'antenne :

$$\mathbf{X} = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p) + \mathbf{B}, \quad (\text{A.40})$$

où $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_c}$ est un bruit blanc gaussien, centré, de puissance σ^2 et s_p est un bruit gaussien, centré de puissance $E[s_p s_p^*] = \sigma_p^2$. Pour des raisons de clarté la *steering* matrice $\mathbf{D}(\theta_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\varphi}_p)$ est notée \mathbf{D}_p dans la suite de ce paragraphe.

On pose $\mathbf{R}_1 = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H]$ et $\hat{\mathbf{R}}_1$ sa moyenne empirique, obtenue à partir de K vecteurs $\mathbf{X}(k)$, suivant la même loi que \mathbf{X} , indépendants et identiquement distribués :

$$\hat{\mathbf{R}}_1 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k). \quad (\text{A.41})$$

Le but de cette preuve est de calculer l'espérance et la covariance de la matrice $\Delta \mathbf{R}_1 = \hat{\mathbf{R}}_1 - \mathbf{R}_1$.

Les vecteurs aléatoires $\mathbf{X}(k)$ sont gaussiens et centrés, ce qui entraîne $E[\hat{\mathbf{R}}_1] = \mathbf{R}_1$. L'espérance de $\Delta \mathbf{R}_1$ est donc égale à $\mathbf{0}$.

L'espérance de $\Delta \mathbf{R}_1$ étant nulle, la covariance de $\Delta \mathbf{R}_1$ est égale à :

$$E[\Delta \mathbf{R}_1(i, j) \Delta \mathbf{R}_1^H(i', j')] = E[\Delta \mathbf{R}_1(i, j) \Delta \mathbf{R}_1(i', j')], \quad \forall i, j, i', j' = 1 \dots N_x \quad (\text{A.42})$$

puisque la matrice $\Delta \mathbf{R}_1$ est hermitienne. L'expression se développe alors comme suit :

$$E[\Delta \mathbf{R}_1(i, j) \Delta \mathbf{R}_1(i', j')] = E \left[\left(\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) - \mathbf{R}_1(i, j) \right) \left(\hat{\mathbf{R}}_1(i', j') - \mathbf{R}_1(i', j') \right) \right] \quad (\text{A.43})$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} E[\Delta \mathbf{R}_1(i, j) \Delta \mathbf{R}_1(i', j')] &= E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right] - E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \mathbf{R}_1(i', j') \right] \\ &\quad - E \left[\mathbf{R}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right] + E \left[\mathbf{R}_1(i, j) \mathbf{R}_1(i', j') \right] \\ &= E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right] - \mathbf{R}_1(i, j) \mathbf{R}_1(i', j'). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

En développant $E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right]$, l'expression devient :

$$E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right] = \frac{1}{K^2} E \left[\left(\sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k) \right) (i, j) \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k) \right) (i', j') \right] \quad (\text{A.45})$$

Par linéarité de l'espérance, l'équation A.45 se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\mathbf{R}}_1(i, j) \hat{\mathbf{R}}_1(i', j') \right] &= \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K E \left[(\mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k)) (i, j) (\mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k)) (i', j') \right] \\ &\quad + \frac{1}{K^2} \sum_{\substack{k, k'=1 \\ k \neq k'}}^K E \left[(\mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k)) (i, j) (\mathbf{X}(k') \mathbf{X}^H(k')) (i', j') \right] \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Pour $k \neq k'$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} E [(\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k))(i, j) (\mathbf{X}(k')\mathbf{X}^H(k'))(i', j')] &= E [(\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k))(i, j)] E [(\mathbf{X}(k')\mathbf{X}^H(k'))(i', j')] \\ &= \mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{R}_1(i', j'). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

De plus, les matrices $\mathbf{X}(k)$ ayant la même loi que \mathbf{X} :

$$E [(\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k))(i, j) (\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k))(i', j')] = E [(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j) (\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')], \quad \forall k = 1 \dots K. \quad (\text{A.49})$$

L'expression de $E [\hat{\mathbf{R}}_1(i, j)\hat{\mathbf{R}}_1(i', j')]$ s'écrit finalement :

$$E [\hat{\mathbf{R}}_1(i, j)\hat{\mathbf{R}}_1(i', j')] = \frac{1}{K} E [(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j) (\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')] + \frac{K^2 - K}{K^2} \mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{R}_1(i', j'). \quad (\text{A.50})$$

En injectant l'équation (A.50) dans l'équation A.44, on obtient :

$$E[\Delta\mathbf{R}_1(i, j)\Delta\mathbf{R}_1(i', j')] = \frac{1}{K} (E [(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j) (\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')] - \mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{R}_1(i', j')) \quad (\text{A.51})$$

Le calcul de $\mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{R}_1(i', j')$ ne pose pas de problèmes particuliers. En effet \mathbf{R}_1 s'écrit

$$\mathbf{R}_1 = E[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k)] = \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 \mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H + N_c \sigma^2 \mathbf{I}_{N_x}, \quad (\text{A.52})$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(i, j)\mathbf{R}_1(i', j') &= \sum_{p, p'=1}^P \sigma_p^2 \sigma_{p'}^2 (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) (\mathbf{D}_{p'} \mathbf{D}_{p'}^H)(i', j') \\ &+ \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) N_c \sigma^2 \delta(i', j') + \sum_{p=1}^P \sigma_p^2 (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i', j') N_c \sigma^2 \delta(i, j) + \sigma^4 N_c^2 \delta(i, j) \delta(i', j') \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Il ne reste plus qu'à calculer le terme $E [(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j) (\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')]$.

Tout d'abord, le terme $(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)$ s'écrit comme la somme des quatre termes suivants :

$$(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j) = \sum_{p, p'=1}^P s_p s_{p'}^* (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) + \quad (\text{A.54})$$

$$\sum_{p=1}^P s_p (\mathbf{D}_p \mathbf{B}^H)(i, j) + \quad (\text{A.55})$$

$$\sum_{p=1}^P s_p (\mathbf{B} \mathbf{D}_p^H)(i, j) + \quad (\text{A.56})$$

$$(\mathbf{B} \mathbf{B}^H)(i, j). \quad (\text{A.57})$$

TABLE A.1 – Description des termes de $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')]$. Les 0 indiquent les termes dont l'espérance est nulle.

$E[. . .]$	(A.54)'	(A.55)'	(A.56)'	(A.57)'
(A.54)	×	0	0	×
(A.55)	0	0	×	0
(A.56)	0	×	0	0
(A.57)	×	0	0	×

De manière similaire, les termes de $(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')$ sont notés (A.54)', (A.55)', (A.56)' et (A.57)'. Le calcul de $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')]$ revient donc à sommer les espérances des combinaisons entre les termes de $(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)$ et $(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')$.

Les différentes combinaisons sont présentées dans le tableau A.1. Les termes contenant des moments impairs de s_p et \mathbf{B} sont nuls, ce qui laisse six termes à calculer. Avec ces notations l'expression de $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i', j')]$ devient :

$$\begin{aligned}
 E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)(i, j)(\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k))(i', j')] &= E[(A.54)(A.54)'] + E[(A.54)(A.57)'] \\
 &+ E[(A.54)'(A.57)] + E[(A.55)(A.56)'] + E[(A.55)'(A.56)] + E[(A.57)(A.57)']. \quad (\text{A.58})
 \end{aligned}$$

Il reste donc quatre termes à calculer, les deux derniers se déduisant des autres en inversant les rôles de i, j et i', j' .

$$\begin{aligned}
 E[(A.54)(A.54)'] &= \sum_{p, p', p'', p'''=1}^P E[(s_p s_{p'}^* s_{p''} s_{p'''}^*](\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p'}^H)(i, j)(\mathbf{D}_{p''} \mathbf{D}_{p'''}^H)(i', j') \\
 &= \sum_{p, p''=1}^P \sigma_p \sigma_{p''} (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j)(\mathbf{D}_{p''} \mathbf{D}_{p''}^H)(i', j') \\
 &+ \sum_{p, p''=1}^P \sigma_p \sigma_{p''} (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p''}^H)(i, j)(\mathbf{D}_{p''} \mathbf{D}_p^H)(i', i') \quad (\text{A.59})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[(A.54)(A.57)'] &= \sum_{p, p'=1}^P E(s_p s_{p'}^*)(\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p'}^H)(i, j) E((\mathbf{B}\mathbf{B}^H)(i', j')) \\
 &= \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) N_c \sigma^2 \delta(i', j') \quad (\text{A.60})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[(A.55)(A.56)'] &= \sum_{p,p'=1}^P E(s_p s_{p'}^*) E((\mathbf{D}_p \mathbf{B}^H)(i, j) (\mathbf{B} \mathbf{D}_{p'}^H)(i', j')) \\
&= \sum_{p=1}^P \sigma_p \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_p E(\mathbf{B}^H \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{B}) \mathbf{D}_p^H \mathbf{e}_{j'} \\
&= \sum_{p=1}^P \sigma_p \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_p \sigma^2 \delta(i, j') \mathbf{I}_{N_c} \mathbf{D}_p^H \mathbf{e}_{j'} \\
&= \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j') \sigma^2 \delta(j, i') \tag{A.61}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{e}_i = (\delta(1, i), \dots, \delta(N_x, i))^T$.

$$\begin{aligned}
E[(A.57)(A.57)'] &= E((\mathbf{B} \mathbf{B}^H)(i, j) (\mathbf{B} \mathbf{B}^H)(i', j')) \\
&= N_c \sigma^4 \delta(i', j) \delta(j, i') + N_c^2 \sigma^4 \delta(i, j) \delta(i', j'). \tag{A.62}
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
E[(\mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k))(i, j) (\mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k))(i', j')] &= \sum_{p,p'=1}^P \sigma_p \sigma_{p'} (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p'}^H)(i, j) (\mathbf{D}_{p'} \mathbf{D}_p^H)(i', i') \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j) N_c \sigma^2 \delta(i', j') \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i', j') N_c \sigma^2 \delta(i, j) \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j') \sigma^2 \delta(j, i') \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i', j) \sigma^2 \delta(j', i) \\
&\quad + N_c \sigma^4 \delta(i', j) \delta(j, i') + N_c^2 \sigma^4 \delta(i, j) \delta(i', j'). \tag{A.63}
\end{aligned}$$

En combinant les équations (A.53), (A.63) et (A.50), le calcul est terminé :

$$\begin{aligned}
KE(\Delta \mathbf{R}_1(i, j) \Delta \mathbf{R}_1(i', j')) &= \sum_{p,p'=1}^P \sigma_p \sigma_{p'} (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_{p'}^H)(i, j) (\mathbf{D}_{p'} \mathbf{D}_p^H)(i', j') \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i, j') \sigma^2 \delta(j, i') \\
&\quad + \sum_{p=1}^P \sigma_p (\mathbf{D}_p \mathbf{D}_p^H)(i', j) \sigma^2 \delta(j', i) \\
&\quad + N_c \sigma^4 \delta(i', j) \delta(j, i'). \tag{A.64}
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Evrim Acar, Daniel M. Dunlavy, and Tamara G. Kolda. A scalable optimization approach for fitting canonical tensor decompositions. *Journal of Chemometrics*, 25(2) :67–86, February 2011.
- [2] C. M. Andersen and R. Bro. Practical aspects of parafac modeling of fluorescence excitation-emission data. *Journal of Chemometrics*, 17(4) :200–215, 2003.
- [3] R. Badeau and R. Boyer. Fast multilinear singular value decomposition for structured tensors. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(3) :1008–1021, 2008.
- [4] H. Belkacemi. *Approches de sous-espaces pour le traitement adaptatif spatio-temporel en radar aéroporté monostatique/bistatique*. PhD thesis, Université Paris 11, 2006.
- [5] J. M. F. Ten Berge. Kruskal’s polynomial for $2 \times 2 \times 2$ arrays and a generalization to $2 \times n \times n$ arrays. *Psychometrika*, 56(4) :631–636, 1991.
- [6] J. M.F. Ten Berge and H. A.L. Kiers. Simplicity of core arrays in three-way principal component analysis and the typical rank of $p \times q \times 2$ arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 294(1–3) :169 – 179, 1999.
- [7] N. Le Bihan and G. Ginolhac. Three-mode data set analysis using higher order subspace method : application to sonar and seismo-acoustic signal processing. *Elsevier Signal Processing*, 84(5) :919 – 942, 2004.
- [8] D.W. Bliss and K.W. Forsythe. Multiple-input multiple-output (MIMO) radar and imaging : degrees of freedom and resolution. In *Signals, Systems and Computers, 2004. Conference Record of the Thirty-Seventh Asilomar Conference on*, volume 1, pages 54–59 Vol.1, 2003.
- [9] M. Boizard, F. Brigui, G. Ginolhac, F. Pascal, S. Miron, P. Forster, and H. B. Sun. Multidimensional low-rank filter based on the AU-HOSVD for MIMO STAP. In *Proceedings of CAMSAP*, Saint-Martin , France, 2013.
- [10] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster. Développement de filtres STAP tensoriels appliques a des données multidimensionnelles. In *Proc. of the GRETSI Conf.*, Bordeaux, France, 2011.
- [11] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster. Low rank tensor STAP filter based on multilinear SVD. In *Proceedings of SAM*, Hoboken, New Jersey, USA, 2012.
- [12] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster. A new tool for multidimensional low-rank STAP filter : Cross HOSVDs. In *Proceedings of EUSIPCO*, Bucharest, Romania, 2012.
- [13] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster. Low-rank filter and detector for multidimensional data based on an alternative unfolding HOSVD. application to polarimetric STAP. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 2013. submitted.

BIBLIOGRAPHIE

- [14] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, and P. Forster. Une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'alternative unfolding hosvd. application au stap polarimétrique. In *Proc. of the GRETSI Conf.*, Brest, France, 2013.
- [15] M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, S. Miron, and P. Forster. Numerical performance of a tensor MUSIC algorithm based on HOSVD for a mixture of polarized sources. In *Proceedings of EUSIPCO*, Marrakech, Morocco, 2013.
- [16] R. Boyer. Decoupled root-MUSIC algorithm for multidimensional harmonic retrieval. In *IEEE 9th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pages 16 – 20, Recife, Brazil, 2008.
- [17] L. E. Brennan and L. S. Reed. Theory of adaptive radar. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 9(2) :237 – 252, 1973.
- [18] L. E. Brennan and F.M. Staudaher. Subclutter visibility demonstration. Technical report, RL-TR-92-21, Adaptive Sensors Incorporated, March 1992.
- [19] J.P. Burg, D.G. Luenberger, and D.L. Wenger. Estimation of structured covariance matrices. *Proceedings of the IEEE*, 70(9) :963–974, 1982.
- [20] J. Carroll and J. Chang. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of Eckart-Young decomposition. *Psychometrika*, 35(3) :283–319, 1970.
- [21] C. Y. Chen and P. P. Vaidyanathan. A subspace method for MIMO Radar Space-Time Adaptive Processing. In *ICASSP 2007. IEEE International Conference on*, pages 925 – 928, Honolulu, Hawaii, USA, 2007.
- [22] C. Y. Chen and P. P. Vaidyanathan. MIMO Radar Space-Time Adaptive Processing using prolate spheroidal wave functions. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 56(2) :623 – 635, February 2008.
- [23] P. Comon. Tensor diagonalization, a useful tool in signal processing. In *10th International Federation of Automatic Control Symposium on System Identification*, volume 1, page 77 – 82, Copenhagen, July 1994.
- [24] A. L F De Almeida, G. Favier, and J.C.M. Mota. A constrained factor decomposition with application to mimo antenna systems. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(6) :2429–2442, 2008.
- [25] A. L F De Almeida, G. Favier, and J.C.M. Mota. Constrained tensor modeling approach to blind multiple-antenna cdma schemes. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(6) :2417–2428, 2008.
- [26] A.L.F. de Almeida, G. Favier, and J. Mota. Space-time spreading-multiplexing for MIMO wireless communication systems using the PARATUCK-2 tensor model. *Signal Processing*, 89(11) :2103–2116, 2009.
- [27] C. Eckart and G. Young. The approximation of one matrix by another one of lower rank. *Psychometrika*, 1 :211–218, 1936.
- [28] R. Fa and R. C. DeLamare and P. Clarke. Reduced-rank STAP for MIMO radar based on joint iterative optimization of knowledge-aided adaptive filters. In *Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on*, pages 496–500.

- [29] N. K. M. Faber, R. Bro, and P. K. Hopkec. Recent developments in CANDECOMP/PARAFAC algorithms : a critical review. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 66(1), January 2003.
- [30] G. Favier, M.N. da Costa, A.L.F. de Almeida, and J.M.T. Romano. Tensor space time (TST) coding for MIMO wireless communication systems. *Elsevier Signal Processing*, 92 :1079 – 1092, April 2012.
- [31] E. Fishler, A. Haimovich, R. Blum, D. Chizhik, L. Cimini, and R. Valenzuela. MIMO radar : an idea whose time has come. In *Radar Conference, 2004. Proceedings of the IEEE*, pages 71–78, 2004.
- [32] P. Forster and E. Villiers. *Performances asymptotiques des méthodes HR*, chapter 9, pages 245–303. Les Méthodes à Haute Résolution. S. Marcos, Hermès, 1998.
- [33] Benjamin Friedlander. Waveform design for mimo radars. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 43(3) :1227–1238, 2007.
- [34] G. Ginolhac, P. Forster, F. Pascal, and J.P. Ovarlez. Performance of two low-rank STAP filters in a heterogeneous noise. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 61 :57–61, january 2013.
- [35] X. Gong, Z. Liu, Y. Xu, and M.I. Ahmad. Direction-of-arrival estimation via twofold mode-projection. *Elsevier Signal Processing*, 89 :831–842, may 2009.
- [36] M. Haardt, F. Roemer, and G. Del Galdo. Higher-order SVD-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensionnal harmonic retrieval problems. *IEEE Trans. on Proc. Sig. Proc.*, 56(7) :3198–3213, July 2008.
- [37] A. Haimovich. Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in an eigenanalysis-based adaptive array. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 33 :988 – 997, 1997.
- [38] R. A. Harshman. Foundation of the PARAFAC procedure : Model and conditions for an explanatory multi-mode factor analysis. *UCLA Working Papers in Phonetics*, 16 :1–84, December 1970.
- [39] J. Hastad. Tensor rank is NP-complete. *J. Algorithms*, 11 :644–654, 1990.
- [40] F.L. Hitchcock. *The Expression of a Tensor Or a Polyadic as a Sum of Products*. Contributions from the Department of Mathematics. sn., 1927.
- [41] Arie Kapteyn, Heinz Neudecker, and Tom Wansbeek. An approach ton-mode components analysis. *Psychometrika*, 51(2) :269–275, 1986.
- [42] Mostafa Kaveh and A. Barabell. The statistical performance of the music and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 34(2) :331–341, 1986.
- [43] S. Kay. *Fundamentals Of Statistical Signal Processing*. Number vol. 2. Prentice Hall PTR, 2001.
- [44] H. A. L. Kiers. Towards a standardized notation and terminology in multiway analysis. *Journal of Chemometrics*, 14(3) :105–122, 2000.
- [45] I. Kirsteins and D. Tufts. Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 30 :55 – 67, 1994.
- [46] R. Klemm. *Principles of Space-Time Adaptive Processing, 3rd Edition*. IET radar, sonar, navigation and avionics series. Institution of Engineering and Technology, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [47] T. Kolda. Orthogonal tensor decompositions. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23 :243 – 255, 2001.
- [48] T. Kolda and B. Bader. Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*, 51 :455 – 500, 2009.
- [49] H. Krim, P. Forster, and J.G. Proakis. Operator approach to performance analysis of root-MUSIC and root-min-norm. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 40(7) :1687 – 1696, July 1992.
- [50] PieterM. Kroonenberg and Jan Leeuw. Principal component analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms. *Psychometrika*, 45(1) :69–97, 1980.
- [51] J. B. Kruskal. Three-way arrays : Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics. *Linear Algebra Appl.*, 18 :95–138, 1977.
- [52] J. B. Kruskal. Multiway data analysis. chapter Rank, decomposition, and uniqueness for 3-way and n-way arrays, pages 7–18. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1989.
- [53] L. De Lathauwer. *Signal Processing based on Multilinear Algebra*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 1997.
- [54] L. De Lathauwer. Decompositions of a higher-order tensor in block terms- part I : Lemmas for partitioned matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Apl.*, 30(3) :1022–1032, 2008.
- [55] L. De Lathauwer. Decompositions of a higher-order tensor in block terms- part II : definitions and uniqueness. *SIAM J. Matrix Anal. Apl.*, 30(3) :1033–1066, 2008.
- [56] L. De Lathauwer and J. Castaing. Tensor-based techniques for the blind separation of ds–cdma signals. *Signal Processing*, 87(2) :322 – 336, 2007.
- [57] L. De Lathauwer and J. Castaing. Blind identification of underdetermined mixtures by simultaneous matrix diagonalization. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(3) :1096–1105, 2008.
- [58] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *SIAM J. Matrix Anal. Apl.*, 24(4) :1253–1278, 2000.
- [59] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. On the best rank-1 and rank- (r_1, r_2, \dots, r_n) approximation and applications of higher-order tensors. *SIAM J. Matrix Anal. Apl.*, 21(4) :1324–1342, 2000.
- [60] L. De Lathauwer and D. Nion. Decompositions of a higher-order tensor in block terms - part III : Alternating least squares algorithms. *SIAM J. Matrix Anal. Apl.*, 30(3) :1067–1083, 2008.
- [61] L. De Lathauwer and J. Vandewalle. Dimensionality reduction in higher-order signal processing and rank- (r_1, r_2, \dots, r_n) reduction in multilinear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 391(0) :31 – 55, 2004.
- [62] J. Li and P. Stoica. *MIMO Radar Signal Processing*. Wiley, 2008.
- [63] A. Lichnerowicz. *Eléments de calcul tensoriel*. Armand Colin, 1950.
- [64] M. Mahot, F. Pascal, P. Forster, and J. Ovarlez. Asymptotic properties of robust complex covariance matrix estimates. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 61(13) :3348–3356, 2013.
- [65] V. F. Mecca, D. Ramakrishnan, and J. L. Krolik. MIMO Radar Space-Time Adaptive Processing for multipath clutter mitigation. In *Sensor Array and Multichannel Processing, 2006. Fourth IEEE Workshop on*, pages 249–253, July 2006.

- [66] S. Miron, N. Le Bihan, and J. Mars. Vector-sensor MUSIC for polarized seismic sources localization. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005 :74–84, 2005.
- [67] S. Miron, X. Guo, and D. Brie. DOA estimation for polarized sources on a vector-sensor array by PARAFAC decomposition of the fourth-order covariance tensor. In *Proceedings of EUSIPCO*, Lausanne, Switzerland, August 2008.
- [68] D. Muti and S. Bourennane. Multidimensional filtering based on a tensor approach. *Elsevier Signal Processing*, 85 :2338 – 2353, 2005.
- [69] Jean-Philippe Ovarlez, Frédéric Pascal, Philippe Forster, Guillaume Ginolhac, and Mélanie Mahot. Traitement STAP et Modélisation SIRV : Robustesse et Persymétrie. *Traitement du Signal*, 28(1-2) :113–142, 2011. Numéro Spécial : Traitements Spatio-Temporels Adaptatifs (STAP).
- [70] G. Pailloux, P. Forster, J-P Ovarlez, and F. Pascal. On persymmetric covariance matrices in adaptive detection. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on*, pages 2305–2308, 2008.
- [71] F. Pascal, Y. Chitour, J.P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal. Existence and characterization of the covariance matrix maximum likelihood estimate in spherically invariant random processes. *IEE Proc. Sig. Proc.*, 56(1) :34 – 48, January 2008.
- [72] F. Pascal, P. Forster, J.P. Ovarlez, and P. Larzabal. Performance analysis of covariance matrix estimates in impulsive noise. *IEE Proc. Sig. Proc.*, 56(6) :2206 – 2217, June 2008.
- [73] Frédéric Pascal, Hugo Harari-Kermadec, and Pascal Larzabal. The empirical likelihood method applied to covariance matrix estimation. *Signal Processing*, 90(2) :566 – 578, 2010.
- [74] G.C. Raleigh and J.M. Cioffi. Spatio-temporal coding for wireless communication. *Communications, IEEE Transactions on*, 46(3) :357–366, 1998.
- [75] M. Rangaswamy, F.C. Lin, and K.R. Gerlach. Robust adaptive signal processing methods for heterogeneous radar clutter scenarios. *Elsevier Signal Processing*, 84 :1653 – 1665, 2004.
- [76] F. Robey, D. Fuhrmann, E. Kelly, and R. Nitzberg. A CFAR adaptive matched filter detector. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 28(2) :208 – 216, 1992.
- [77] Gian-Carlo Rota. The number of partitions of a set. *The American Mathematical Monthly*, 71(5) :pp. 498–504, 1964.
- [78] J. Salz. Digital transmission over cross-coupled linear channels. *ATT Technical Journal*, 64 :1147–1159, August 1985.
- [79] B. Savas and L. Eldén. Handwritten digit classification using higher order singular value decomposition. *Pattern Recognition*, 40(3) :993 – 1003, 2007.
- [80] L.L. Scharf and B. Friedlander. Matched subspace detector. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 42(8) :2146 – 2157, August 1994.
- [81] R.O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 34(3) :276–280, 1986.
- [82] G. Showman, W. Melvin, and M. Belenkii. Performance evaluation of two polarimetric STAP architectures. In *Proc. of the IEEE Int. Radar Conf.*, pages 59–65, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- [83] N.D. Sidiropoulos and R. Bro. On the uniqueness of multilinear decomposition of n -way arrays. *Journal of Chemometrics*, 14(3) :229–239, 2000.
- [84] N.D. Sidiropoulos, R. Bro, and G.B. Giannakis. Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems. *IEEE Trans. on Proc. Sig. Proc.*, 48(3) :810–823, March 2000.
- [85] N.D. Sidiropoulos, R. Bro, and G.B. Giannakis. Parallel factor analysis in sensor array processing. *IEEE Trans. on Proc. Sig. Proc.*, 48(8) :2377–2388, August 2000.
- [86] N.D Sidiropoulos and R.S. Budampati. Khatri-rao space-time codes. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(10) :2396–2407, 2002.
- [87] L.R. Tucker. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 31 :279–311, 1966.
- [88] M.A.O Vasilescu and D. Terzopoulos. Multilinear analysis of image ensembles : Tensorfaces. In Anders Heyden, Gunnar Sparr, Mads Nielsen, and Peter Johansen, editors, *Computer Vision — ECCV 2002*, volume 2350 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 447–460. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [89] M.A.O Vasilescu and D. Terzopoulos. Multilinear subspace analysis of image ensembles. In *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2003.
- [90] J. Ward. Space-time adaptive processing for airborne radar. Technical report, Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., USA, December 1994.

Publications

1. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*Développement de Filtres STAP Tensoriels Appliqués à des Données Multidimensionnelles*" (in french), Proc. GRETSI, Bordeaux, France, September 2011.
2. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*Low Rank Tensor STAP filter based on multilinear SVD*", Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), Hoboken, NJ, June 2012.
3. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*A new tool for Multidimensional Low-Rank STAP Filter : Cross HOSVDs, European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*", Bucharest, Romania, August 2012.
4. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*A new tool for Multidimensional Low-Rank STAP Filter : Cross HOSVDs*", Workshop SONDRRA, La Londe-les-Maures, France, June 2013.
5. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*Une nouvelle décomposition tensorielle orthogonale, l'Alternative Unfolding HOSVD. Application au STAP Polarimétrique*" (in french), Proc. GRETSI, Brest , France, September 2013.
6. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal, S. Miron and P. Forster, "*Numerical performance of a tensor MUSIC algorithm based on HOSVD for a mixture of polarized sources, European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*", Marrakech , Morocco, September 2013.
7. M. Boizard, F. Brigui, G. Ginolhac, F. Pascal, P. Forster and H. B. Sun, "*Multidimensional Low-Rank Filter based on the AU-HOSVD for MIMO STAP*", Worskop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), Saint Martin, December 2013.
8. M. Boizard, G. Ginolhac, F. Pascal and P. Forster, "*Low-Rank Filter and Detector for Multidimensional Data Based on an Alternative Unfolding HOSVD. Application to Polarimetric STAP*", IEEE Trans. On Signal Processing, 2013, submitted.