



HAL
open science

Les fonctions rationnelles bornées en géométrie algébrique réelle

Victor Delage

► **To cite this version:**

Victor Delage. Les fonctions rationnelles bornées en géométrie algébrique réelle. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Rennes, 2022. Français. NNT : 2022REN1S085 . tel-04087171

HAL Id: tel-04087171

<https://theses.hal.science/tel-04087171>

Submitted on 3 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Victor DELAGE

Les fonctions rationnelles bornées

en géométrie algébrique réelle

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 2 décembre 2022

Unité de recherche : Institut de recherche mathématiques de Rennes

Rapporteurs avant soutenance :

Guillaume ROND Maître de conférences, Université Aix Marseille
Ludovico PERNAZZA Ricercatore, Università di Pavia

Composition du Jury :

Présidente :	Marie-Françoise ROY	Professeure, Université de Rennes 1
Examineurs :	Jean-Philippe MONNIER	Maître de conférences, Université d'Angers
	Frédéric MANGOLTE	Professeur, Université d'Aix-Marseille
	Guillaume ROND	Maître de conférences, Université Aix Marseille
	Ludovico PERNAZZA	Ricercatore, Università di Pavia
Dir. de thèse :	Goulwen FICHOU	Maître de conférences, Université de Rennes 1

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier Goulwen Fichou, mon directeur, pour sa disponibilité, pour l'accueil dont j'ai toujours pu bénéficier dans son bureau, pour son écoute et sa compréhension, et pour la patience dont il a fait preuve pour la relecture du présent manuscrit. Je remercie chaleureusement Guillaume Rond et Ludovico Pernazza pour leur lecture attentive et pour les retours constructifs qu'il ont apporté au travail effectué. Un grand merci à Marie-Françoise Roy, dont la carrière est un exemple pour toute personne s'intéressant aux mathématiques, et dont la présence dans ce jury est un honneur pour moi. Un grand merci à Frédéric Mangolte, qui m'a montré à plusieurs reprises qu'on peut allier brillance et simplicité, en mathématiques comme dans la vie. Enfin, j'adresse un immense remerciement à Jean-Phillipe Monnier, qui a été sans doute l'interlocuteur le plus à même de comprendre les mathématiques que j'ai pu développer; et avec qui j'ai pu avoir des discussions mathématiques et sur la thèse en général qui ont été indispensables pour ce travail.

J'adresse aussi un sincère remerciement à mon autre CSI, Florian Mehats, qui m'a suivi aussi pendant mes études et dont l'écoute attentive et les conseils m'ont régulièrement aidé et soutenu. Un grand merci aussi à Benoit Cadre pour la compréhension et l'empathie dont il a fait preuve. Merci à Ronand Quarez pour avoir supervisé une partie des travaux que j'ai effectué, et pour m'avoir fait rencontrer Markus Schweighofer, que je remercie aussi pour l'accueil qu'il ma réservé dans les magnifiques hauteurs de Constance.

Je remercie chaleureusement l'équipe administrative de l'IRMAR, qui représente pour moi la bonne humeur du laboratoire, notamment Hélène Rousseau, Marie-Aude Verger, Xhensila Lachambre, Dominique Hervé. Un remerciement particulier à Nelly Loton pour sa patience et sa gentillesse face à une organisation personnelle parfois chaotique. Un grand merci aussi aux personnes dont on oublie jusqu'au nom mais qui nous permettent d'avoir un espace de travail propre.

Je remercie celles et ceux qui sont passés du statut d'enseignant-e-s encourageant-e-s à celui de collègues inspirant-e-s, notamment Dominique Cerveau, Bernard Le Stum, François Castella, Alain Herreman, Jérémy Le Borgne, Guillaume Poly, Matthieu Romagny, Miguel Rodrigues, Jürgen Angst, David Cachera, François Schwarzentruher, Benjamin Boutin, Rozenn Texier...

Merci à Thierry Coquand et à Luck Darnière pour les accueils qu'ils m'ont réservé et pour le temps précieux qu'ils ont passé à m'encadrer en stage étudiant.

J'adresse de grands remerciements aux professeur·e·s inspirant·e·s de ma jeunesse, dont Pierre Guitet, Monsieur Frénéhard, Monsieur Bahot, Monsieur Le Gall, Monsieur Bourneuf, Monsieur Hunger, Monsieur Devaux. Un immense bravo à Monsieur Dutrieux pour une qualité des cours frisant la perfection.

Je remercie les doctorant·e·s et ami·e·s qui ont animé ma vie à l'IRMAR pendant ces années, notamment Andres, Mercedes, Chloé, Fabien, Titouan, Lucien, Victor, Alice, Marc, Josselin, Pierre, Mario, Youenn, María, Olivier, Sam. Longue vie au Pampers, même si c'était mieux avant! Je remercie aussi les doctorant·e·s des autres laboratoires qu'il me faisait toujours joie de croiser ici et là, comme François, Fabien, Anh, Théo, Ouriel, Gurvan, Axel, Pierre... Un grand merci à Vincent pour ces moments passés sous le même toit dont je garde un souvenir joyeux et une recette rituelle de pâtes à la crème.

Merci aux étudiant·e·s qui ont rythmé les TDs que j'ai donné, qui ont pu m'aider en temps de covid à me lever le matin pendant que la majorité restait dans son lit, et qui devraient éviter de rester trop longtemps à nav.

Je remercie les co-étudiants qui ont rythmé ma vie rennaise et normalienne, notamment Valentin, Adrien, Baptiste, Thibault, Emily, Sophie, Solana, Hugo, Simon.

I would like to thank my beloved Amsterdam friends, Gaia, Julia, Mrinalini, Silvan, Santiago, Dean, Noor, Simone, Leon, Isa, Hadrien... Also the inspiring professors of the ILLC, like Benedikt Löwe or Ivanno Ciardelli. My year there was wonderful, and I wish I was better to keep contact with people living that far away.

Ma vie a toujours jonglé entre les maths et la musique. Je remercierai d'abord mon professeur de percussion, Lionel Le Fournis, pour la patience, la pédagogie, la finesse musicale qu'il m'a transmise. Merci aux copains et copines des vacances percutantes. Merci à l'orchestre Melting'Notes pour m'avoir donné des marques musicales Rennaises et pour me retrouver avec tant de chaleur à chaque fois que je repasse. Un grand merci aux splendides Zécléctiques Acoustiques, qui m'ont tant motivé à sortir mon violoncelle en toutes occasions, et sur tous terrains, et qui m'ont fait sortir la tête hors du covid quand c'était nécessaire.

Je remercie d'ailleurs mes ami·e·s du folk, beaucoup trop nombreux-se pour être listé·e·s (même si ils et elles le méritent amplement). Notamment l'équipe de choc de la Balette Sau-

cisse et celle des Balilas, avec qui j'ai pris tant de plaisir à organiser des soirées aussi folles. Enfin, la nourriture, si chère à mes yeux, n'aurait pas été la même sans la super team de l'AMAP Beaulieu, les pains de Michel et les légumes de Tanguy. Ellwen, Noémie, Svan, Camille, Erwann, Florence, Adrien, Léo, Mathieu, Anaïs, Rémi, cette vie rennaise n'aurait pas eu autant de saveur sans vous.

Merci à Émeline d'avoir apporté tant de douceur à cette dure période de fin de rédaction. Je remercie toute la team de prépa; Martin, Bobus, Gaël, Noisette, Joaquim, Eric, Kevin et tou-te-s les autres. Je suis heureux d'avoir eu une ambiance aussi folle à l'époque et de pouvoir encore compter sur vous à ce jour. Je remercie bien entendu tous mes ami-e-s du Mans, Florian, Lucas, Bastien, Ugo, Margaux, Paulo, Kayou, Val, Nico, Nora, Aina, Maxime, Anais, Cha, Guillaume, Léo, Thomas...

Un gigantissime merci aux amitiés les plus proches et sincères que j'ai pu développer, qui ont pu m'aider à trouver le sens que je donne à ma vie; Myriam, Coline. Merci aussi à Cyril, Paul, Nathan, qui ont donné beaucoup de sens à ma vie enfantine. Merci à tou-te-s les ami-e-s qu'internet m'a permis de rencontrer. À tous ceux et toutes celles avec qui j'ai pu partager des sessions de jeux, en ligne ou en physique, des discussions passionnantes (et non-passionnantes). Merci à tou-te-s les musicien-ne-s avec qui j'ai pu partager un moment. Merci aussi à ceux et celles dont la musique est disponible gratuitement sur internet, qui se sont retrouvé-e-s dans mes oreilles lors de la rédaction du présent manuscrit. Merci à toutes les personnes qui ont relu un bout ou un autre du présent manuscrit, ou qui m'ont servi de cobaye quand j'avais besoin de m'entraîner pour un oral. Merci bien sûr aux nombreuses personnes que je regrettais longtemps d'avoir oublié.

J'ai conscience d'avoir une famille extraordinaire, sur laquelle je pourrais toujours me reposer. Merci à Pierre pour m'avoir montré très tôt les voies de la recherche. Merci à Patrick mon plus grand fan mathématique. Merci à tous mes cousins et toutes mes cousines qui pourraient être listé-e-s dix fois dans cette liste tant je tiens à elles et à eux. Merci à mes grand mères; Mamie Thérèse pour son amour inconditionnel, ses légumes, ses fleurs, ses brioches. Merci à Mamie Gabie qui aurait été sans doute la plus heureuse personne à me voir devenir docteur. Je remercie chaleureusement mes parents dont l'éducation, le soutien et l'amour inconditionnel sont sans aucun doute ce qui m'a porté jusqu'ici. Je remercie enfin mon grand frère Lucas; j'ai toujours du mal à mesurer la chance que j'ai d'avoir quelqu'un d'aussi proche de moi avec qui je peux partager autant de passions, notamment celle des mathématiques et des sciences en général.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	9
Vers la géométrie réelle	9
Fonctions régulières et fonctions rationnelles bornées	12
Les résultats	14
1 Résultats préliminaires	25
1.1 Corps réel clos	25
1.2 Variété algébrique	28
1.3 Géométrie algébrique réelle	32
1.4 La levée des indéterminées	33
1.5 Géométrie semi-algébrique	36
1.6 Espaces d'arcs semi-algébriques	38
1.7 Fonctions régulières	40
1.8 Anneaux des fonctions bornées	43
2 Les fonctions rationnelles bornées	45
2.1 Les fonctions rationnelles localement bornées	45
2.2 Les fonctions rationnelles globalement bornées	50
2.3 Lien avec les éclatements	53
2.4 Propriétés élémentaires des fonctions rationnelles bornées	58
3 Étude géométrique	65
3.1 Un ensemble des zéros pour une fonction rationnelle	65
3.2 Caractérisation par éclatements	72
3.3 Propriétés des fermés rationnels bornés	75
3.4 L'image d'une fonction rationnelle bornée	84
4 Géométrie dans un espace d'arcs	89
4.1 Lieu des zéros d'un idéal	89
4.2 Une inégalité de Łojasiewicz	93

TABLE DES MATIÈRES

4.3 Zéros dans les espaces d'arcs	97
4.4 Résultats algébriques	100
5 Le cas de la dimension deux	107
5.1 Création d'exemples	107
5.2 Propriété de substitution et spectre réel	112
5.3 Défaut d'unicité	117
Bibliographie	123

INTRODUCTION

Vers la géométrie réelle

On retrace les débuts de la géométrie algébrique dans les débuts de la géométrie analytique, quand les mathématiciens se sont rendus compte que les problèmes grecs posés en termes géométriques pouvaient se résoudre en manipulant des équations. Un bon exposé historique de cette approche serait La géométrie de Descartes [Des37], publiée avec le fameux discours de la méthode.

Un lieu géométrique dans \mathbb{R}^n , et par extension dans K^n pour K un corps, est alors la solution d'un système d'équations. Se posent alors deux questions essentielles et liées : quel corps, et quelles fonctions utiliser dans les équations ?

La réponse algébrique est de prendre un corps algébriquement clos et les polynômes. Le choix des polynômes semble naturel puisqu'il s'agit sûrement de l'ensemble de fonctions le plus simple : tout ce que l'on peut construire avec addition, soustraction et multiplication. Pour travailler avec eux, on préférera alors naturellement un corps algébriquement clos, histoire d'éviter de passer à côté de zéros de nos polynômes à cause seulement d'un manque de racines dans le corps de base. Le corps algébriquement clos de référence reste \mathbb{C} des complexes, mais faire la théorie sur d'autres corps algébriquement clos de caractéristique 0 permet des méthodes de transfert, et le cas des corps p -adiques \mathbb{C}_p permet de développer de puissants outils géométriques pour étudier l'arithmétique.

L'idée de prendre un cadre facilement décrivable suit une tendance plutôt largement développée : plus on simplifie, plus on obtient des théorèmes puissants qui s'appliquent partout. On a en effet de bons outils pour généraliser les résultats trouvés ; d'un côté les ensembles définis avec plus de fonctions peuvent trouver un représentant (à déformation contrôlée près) défini avec des polynômes, d'un autre, des théorèmes de type GAGA en géométrie complexe par exemple, nous assureront que les propriétés algébriques seront encore vraies analytiquement.

Le corps \mathbb{R} , l'ensemble des nombres-distances, le premier sur lequel on a fait de la géométrie, n'est pas algébriquement clos. En pratique, sans être algébriquement clos, le corps est réel clos, ce qui d'un point de vue logique, le place à la même hauteur : celle d'une théorie com-

plète (donc pour laquelle toutes les formules du premier ordre sont vraies et prouvables, ou fausses et réfutables). Cela amène aussi des qualités : par exemple, l'existence possible d'un ordre amène une richesse de la géométrie semi-algébrique qui n'est pas permise dans \mathbb{C} . Elle permet notamment la construction par morceaux des éléments géométriques, et s'approche beaucoup plus fidèlement des utilisations dans la vie quotidienne ou industrielle. Il sera ainsi difficile de faire un exemple aussi sympathique que [BCR13, 2.1.4] donné en figure 1 par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} < 1 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y > -4 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y > -4 \\ (x^2 + y^2 - 2y \neq 8 \text{ ou } y > -1) \end{array} \right.$$

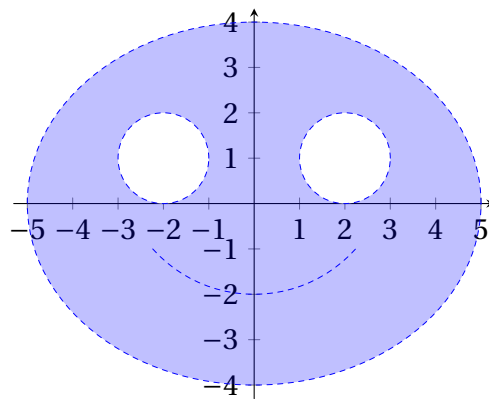


FIGURE 1 – Un semi-algébrique bien sympathique

Mais même en termes de géométrie algébrique, le réel possède une richesse. Citons d'abord le théorème de Nash-Tognoli : pour toute variété \mathcal{C}^∞ compacte sans bord, on peut trouver une variété algébrique (projective) dont le lieu réel lui soit difféomorphe [BCR13, 14.1.8 & 14.1.10]. Rappelons aussi que \mathbb{C} a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, donc la géométrie sur \mathbb{C} peut être étudiée à partir d'arguments réels.

De plus, toujours dans le réel, les grassmanniennes, et en particulier l'espace projectif, sont des variétés affines, [BCR13, 3.4.4]. Enfin, un ouvert de Zariski d'une variété réelle peut être muni d'une structure de variété affine [BCR13, 3.2.10]. Conclusion : en étudiant les variétés affines réelles, on étudie toutes les variétés \mathcal{C}^∞ compactes sans bord, toutes les variétés quasi-projectives réelles ou complexes, et encore d'autres.

Cette richesse vient bien entendu avec un inconvénient : le spectre réel, analogue (se ba-

sant sur l'inégalité) au spectre d'anneau (se basant sur l'égalité), développé entre autres par Michel Coste et Marie-Françoise Roy pour fournir un analogue réel au topos étale, possède beaucoup trop d'éléments, notamment transcendants. On ne sait notamment pas encore bien lister tous les éléments de $\text{Sper } \mathbb{R}[X, Y]$.

Ainsi, la géométrie algébrique réelle est vue comme moins naturelle, plus archaïque, plus complexe (sans mauvais jeu de mots), que les algèbres sur des corps algébriquement clos, qui s'en trouvent bien plus financées, étudiées et développées. Le constat fait il y a 50 ans par R.Thom [Tho74], rappelé à la fin de l'introduction de [BCR13], est toujours d'actualité : la focalisation sur une théorie trop belle nous fait peut-être passer à côté des phénomènes que nous cherchons à expliquer.

Devant cet état d'abandon du cas réel et de sophistication du cas complexe, se posent trois possibilités pour les géomètres réels. La première est celle des géométries tropicales et symplectiques qui consistent à décomposer les variétés en simplexes (ce que fait la triangulation en dimension 2). Cette approche est très utile topologiquement mais perd facilement une partie de la vue algébrique que l'on peut chercher à garder.

La deuxième est de voir \mathbb{R} comme sous-ensemble de \mathbb{C} qui est, lui, algébriquement clos. Ainsi notre géométrie dans \mathbb{R}^n est une sous-géométrie d'une autre géométrie de \mathbb{C}^n . Un principe du parapluie : on plonge notre variété réelle dans une variété complexe, on applique les résultats de géométrie complexe, et on redescend.

Cette approche amène beaucoup de résultats intéressants, et beaucoup sont les experts du domaine à affirmer « on ne peut regarder une variété réelle sans en regarder ses points complexes » ; mais cette approche possède aussi des limitations. Il existe en effet des variétés réelles ayant des plongements complexes non isomorphes, voir l'exemple du tore dans quelques paragraphes. Réciproquement, il existe des variétés complexes admettant des structures réelles non isomorphes, voir par exemple [Bot21]. Ainsi les informations de la structure complexes ne peuvent pas entièrement déterminer les informations de la structure réelle associée.

Ce manuscrit découle de la dernière approche qui consiste à essayer de copier au cas réel les méthodes de géométrie algébrique, et chercher des résultats de même veine que ceux que l'on connaît dans les cas algébriquement clos. Une nécessité est alors de changer l'ensemble des fonctions utilisées. En effet, regarder un polynôme équivaut à regarder ses racines, qu'elles soient réelles ou complexes, et donc à revenir à la précédente manière de faire de la géométrie. Pour étendre les polynômes, on peut ainsi regarder les fonctions régulières, à savoir ajouter la division dans nos outils, mais à la condition de s'assurer de ne jamais di-

viser par zéro. Par exemple, $\frac{1}{1+x^2}$ est une fonction réelle régulière.

Exemple 1. Prenons par exemple (voir [BCR13, 3.2.8]) le tore $T_1 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ et notons T_2 ce qu'on obtient en faisant tourner un cercle autour d'un axe, par exemple avec l'équation dans \mathbb{R}^3 :

$$16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2$$

L'anneau de polynômes de T_1 est régulier, celui de T_2 ne l'est pas. Ainsi, au niveau des polynômes, ces deux objets sont différents. Pourtant, si l'on regarde du point de vue régulier :

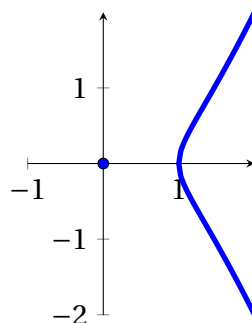
$$\varphi(t, u, v, w) = (t(2+v), u(2+v), w)$$

Cette fonction a un inverse régulier. Ces deux objets sont donc les mêmes du point de vue régulier, et ce malgré une singularité complexe polynomiale.

Fonctions régulières et fonctions rationnelles bornées

Dans un corps algébriquement clos, (et sur une variété lisse) l'extension de l'anneau des fonctions polynomiales vers celui des fonctions régulières n'en est pas une : un polynôme s'annule toujours, c'est le théorème fondamental de l'algèbre, donc les fonctions régulières sont polynomiales. Chez les réels, on ajoute beaucoup de fonctions à nos outils algébriques, cependant on ne change pas les lieux des zéros qu'on peut définir. En effet, un quotient s'annule quand son numérateur s'annule. Or la géométrie polynomiale possède elle aussi beaucoup de défauts. Prenons la courbe de la figure 2; on peut décrire le point isolé comme lieu des zéros par $x = y = 0$; cependant la partie de droite ne peut être décrite sans le point. Il y a une sorte de défaut d'irréductibilité : $X = A \cup B$ (union disjointe) est un fermé, A est un fermé, mais B n'est pas un fermé.

C'est dans ce contexte que sont arrivées les fonctions régulières, dont l'exemple typique est $\frac{x^3}{x^2+y^2}$. On s'autorise ainsi à diviser par zéro, mais en imposant la prolongeabilité par continuité. Dit autrement, quand le dénominateur s'annule, le numérateur s'annule, et gagnera la bataille de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On obtient alors une géométrie qui pourra décrire la courbe de droite de la figure 2 sans son point isolé via $\frac{x^3}{x^2+y^2} = 1$. La topologie ainsi construite est, de plus, noetherienne, et l'algèbre a une bonne structure d'idéaux premiers. Ainsi, les problèmes algébriques dus à la non-noetherianité de l'anneau peuvent se résoudre par un aller-retour algèbre \rightarrow géométrie \rightarrow algèbre car la géométrie, elle, est noetherienne. Même

FIGURE 2 – La courbe de $x^3 = x^2 + y^2$

si un idéal n'est pas de type fini, on peut alors trouver une fonction qui décrit exactement toutes les annulations de toutes les fonctions de cet idéal. Elle génère ainsi radicalement le radical de l'idéal en question. Cela fournit aussi le premier exemple d'extension rationnelle des fonctions régulières qui vérifient des théorèmes A et B de Cartan. Ces théorèmes impliquent par exemple que des fonctions définies sur une sous-variété sont toujours prolongeables; ils ont été utilisés historiquement pour montrer les théorèmes GAGA, et ont de fortes conséquences topologiques.

La condition qui définit la manière « plus forte » chez les régulières est une condition d'analyse : on demande à ce que la fonction soit continue (ou prolongeable par continuité). L'intégralité de ce manuscrit se propose d'étudier le relâchement, de l'hypothèse « plus forte (strictement) » à l'hypothèse « au moins aussi forte ». Concrètement, on remplace le caractère continu par le caractère borné, et l'exemple typique est $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ qui est partout de valeur absolue inférieure à 1.

Au-delà de la curiosité naturelle qui nous amène à explorer tous les anneaux de fonctions jusqu'à trouver les plus intéressants, il y a des motivations géométriques pour étudier les fonctions rationnelles bornées, qui sont données par la normalisation. Contrairement à la désingularisation, qui consiste à enlever d'une variété non lisse toutes ses singularités, la normalisation enlèvera les singularités cuspidales mais gardera les auto-intersections. Les fonctions rationnelles bornées sont ainsi très liées à ces questions de normalisation, voir [FMQ21]. Pour en savoir plus sur cette voie, il restera à explorer les cas singuliers qui ont été soigneusement écartés de ce manuscrit. Ces cas singuliers sont les seuls qui sont intéressants dans un corps algébriquement clos¹, puisque le théorème de prolongement de

1. [Loj13, VII.16.5] montre d'ailleurs que les fonctions rationnelles bornées d'une variété sont la clôture intégrale de l'anneau de polynômes de cette variété dans son corps des fractions, et donc génèrent l'anneau de

Riemann nous assure qu'une fonction méromorphe bornée sur une variété lisse (ou même normale) est holomorphe. Dans le cadre réel, l'étude de ces fonctions sur une variété régulière amène déjà une grande complexité, comme on le verra.

Un autre concept lié à cet anneau de fonctions, cette fois plus algébrique, est l'étude des anneaux d'éléments bornés, aussi appelés anneaux d'holomorphie dans la littérature. En effet, les fonctions rationnelles bornées étant... bornées, cet anneau coïncide avec l'anneau des éléments bornés de l'ensemble des fonctions rationnelles.

On retrouve enfin ces fonctions dans d'autres contextes, par exemple analytiquement dans [KP12] où on les voit comme arc-méromorphes. Elles fournissent aussi les exemples les plus simples de fonctions non-continues à plusieurs variables, que l'on découvre en première ou deuxième année post-bac, avec toutes leurs variations : continues le long des droites, continues mais pas différentiables, etc. Notons que ces fonctions ont été étudiées dans [KR96], en préambule d'une étude sur les fonctions Nash-méromorphes (qui sont très similaires).

Les résultats

L'anneau des fonctions rationnelles bornées

Ce manuscrit fait donc l'étude des fonctions rationnelles bornées. Nous travaillons sur un corps réel clos quelconque (les énoncés de cette introduction seront cependant donnés avec \mathbb{R} pour une meilleure lisibilité). L'ensemble géométrique de base (\mathbb{R}^n dans cette introduction) sera une variété algébrique réelle irréductible, affine (plongée), et non singulière. Contrairement au cas complexe, il n'est pas restrictif de considérer une variété affine car les variétés réelles quasi-projectives sont affinement plongeables.

Définition 2. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert de Zariski. Une fonction rationnelle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite rationnelle localement bornée si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un voisinage euclidien V_x de x tel que $f(V_x \cap U)$ est un sous-ensemble borné de \mathbb{R} .

On note $R_b(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions rationnelles localement bornées sur \mathbb{R}^n .

L'exemple typique est la fonction rationnelle $\frac{x^2}{x^2+y^2}$. Elle n'est pas définie en $(0, 0)$, et est régulière (donc \mathcal{C}^∞) en dehors. De plus, sur un voisinage de l'origine, $x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$. Les fonctions régulières ou régulières sont, elles aussi, rationnelles localement bornées. Un

polynômes de la normalisation de cette variété. On retrouve aussi les fonctions régulières en seminormalisation, voir [Ber21].

exemple de fonction qui n'est pas bornée serait $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. En effet, $f(t, 0) = \frac{1}{t}$ n'est pas bornée quand t est proche de 0.

Nous étudions plusieurs caractérisations équivalentes de la définition. D'abord une caractérisation par des compacts, où les voisinages de la définition sont remplacés par des compacts. Puis une caractérisation par des arcs, qui est à voir comme la forme semi-algébrique de la caractérisation séquentielle.

On s'intéresse aussi aux fonctions uniformément bornées, où là aussi plusieurs caractérisations sont possibles. Cependant, comme leur algèbre est très liée, voir 2.2.6, et que leur géométrie est identique, voir 3.2.4, l'étude géométrique se concentrera sur les fonctions rationnelles localement bornées, même si les résultats concerneront les deux anneaux. Les fonctions rationnelles globalement bornées font cependant un lien plus naturel avec les anneaux des éléments bornés (ou anneaux d'holomorphie), voir 1.8.3.

Le théorème des résolutions des singularités d'Hironaka, et son pendant, le théorème des résolutions d'indéterminations pour les fonctions rationnelles, nous est d'une grande utilité. Un éclatement remplace une sous-variété lisse d'une variété donnée en l'ensemble des directions qui y pointent. C'est l'exemple le plus typique de transformation birationnelle. Ce théorème nous permet, en éclatant l'espace de départ, de résoudre les lieux d'indéterminations de toute fonction rationnelle, pour la rendre régulière.

Pour résoudre $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0, il faudra aussi ajouter un infini à l'espace d'arrivée (donc le rendre projectif). Cependant, les fonctions bornées n'ont pas besoin de cet ajout et cela les caractérise :

Théorème 3 (2.3.2 & 2.3.3). *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rationnelle, avec U ouvert de Zariski.*

f est rationnelle bornée ssi f est régulière (à valeur dans \mathbb{R}) après éclatements.

C'est-à-dire il existe une variété lisse X et une composition d'éclatements à centres lisses $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ \varphi$ est régulière sur X .

Il se trouve aussi, encore par des arguments d'éclatements, que l'anneau des fonctions rationnelles bornées est un invariant birationnel propre. Ainsi, chaque fonction rationnelle bornée peut être rendue régulière par éclatements, mais chaque éclatement laisse un anneau de fonctions rationnelles bornées dans le même état.

Théorème 4 (2.3.7). *Tout morphisme birationnel propre $\varphi : X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme entre les anneaux des fonctions rationnelles bornées de X et de Y .*

Lieu d'annulation

On aborde alors la question géométrique : peut-on définir l'ensemble de zéros d'une fonction qui n'est pas définie partout mais presque ? Et si oui, est-ce que cela nous apporte des informations ?

L'exemple de $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$, dont on montre le graphe en figure 3, nous montre qu'il ne faut pas regarder seulement en dehors du lieu d'indétermination : il y a un phénomène d'annulation en l'origine (unique lieu d'indétermination), en effet si l'on s'en approche par $x = 0$, on obtient $\frac{y^4}{y^2}$ qui tend vers 0. Mais aucune annulation dans le domaine de la fonction ne peut attester de ce phénomène d'annulation en l'origine. Ainsi, les informations au niveau du lieu d'indéter-

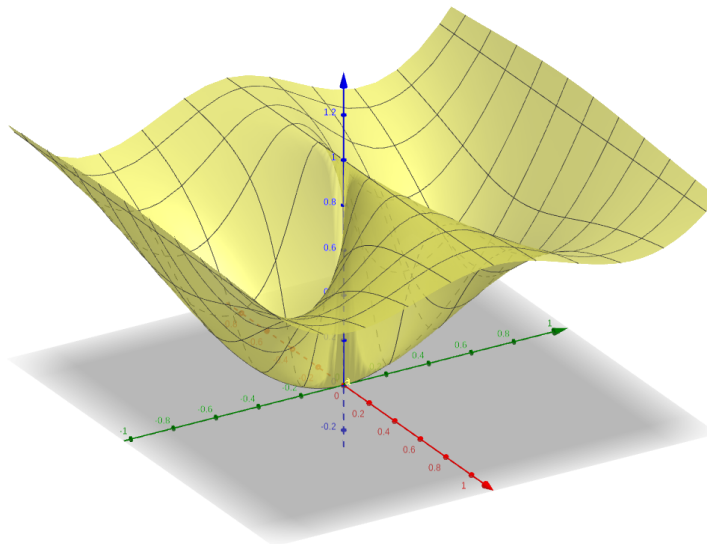


FIGURE 3 – Graphe de $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$

mination important. On donne alors trois définitions équivalentes du lieu des zéros d'une fonction f (3.1.3), la première utilise les arcs semi-algébriques, et elle fonctionne comme une définition séquentielle : pour $(x_k)_k$ une suite convergente, si $f(x_k)_k$ tend vers 0, alors la limite est une annulation de f . Ainsi dans notre exemple, l'arc (t^2, t) , sur lequel la fonction vaut $\frac{t^4+t^4}{t^4+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ ce qui tend bien vers 0, témoigne d'une annulation de notre fonction.

La deuxième définition est donnée via les éclatements, car tout phénomène d'annulation devient une annulation d'une fonction régulière vivant sur un espace éclaté. Ce point de l'espace éclaté témoigne alors du phénomène d'annulation. La dernière définition est plus graphique :

Définition 5. Pour $f \in R_b(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Z}(f)$ est l'intersection de la clôture euclidienne (dans \mathbb{R}^{n+1}) du graphe $\{y = f(x)\}$ avec l'hyperplan $\{y = 0\}$

L'observation de la figure 3 nous montre alors l'annulation : $\{(0, 0, 0)\}$ est bien dans la clôture euclidienne du graphe de la fonction.

Il est possible de poser cette définition pour une fonction rationnelle quelconque; et il se trouve alors (voir 3.2.3) qu'un tel lieu des zéros pour une fonction rationnelle quelconque peut en fait se décrire avec une fonction rationnelle qui est de plus bornée, localement voire uniformément.

Un exemple parlant est donné en figure 4 où est décrit le parapluie de Whitney sans son manche comme un fermé rationnel borné.

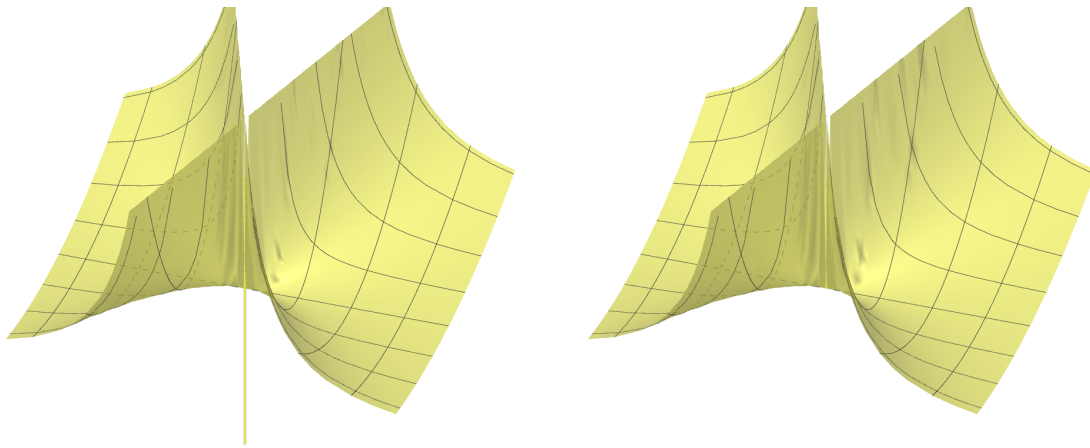


FIGURE 4 – Lieu des zéros
polynomial de $zx^2 - y^2$.

Lieu des zéros rationnel
borné de $z\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}$

Nous donnons alors divers descriptions des ensembles ainsi décrits. Ils coïncident avec les contractions de fermés de Zariski (3.2.1 et 3.2.2), ils sont semi-algébriques fermés (3.3.1), et étendent strictement les fermés Zariski et régulus. Par exemple, un segment dans \mathbb{R}^3 (3.3.7) est annulation de

$$\left(z - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)^2 + x^2 + y^2$$

Similairement on peut avoir une demi-droite dans \mathbb{R}^3 , voir 3.3.8. Ces objets ne sont cependant pas des fermés rationnels bornés de \mathbb{R} et la montée de dimension est importante. Monter de dimension permet ainsi d'obtenir tous les fermés semi-algébriques :

Théorème 6 (3.3.11). *Tout ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n est en bijection via une projection sur les n premières coordonnées avec un fermé rationnel borné de \mathbb{R}^{n+k} pour un certain $k \in \mathbb{N}$.*

On fera aussi une définition puis une étude de l'image d'une fonction rationnelle bornée, cependant cette étude sera courte car on montrera vite qu'il s'agit des images régulières (3.4.6), dont l'étude a été amorcée notamment par Fernando, voir par exemple [FG06], [FGU11], [FGU17] ou [Fer+18],

Vers un nullstellensatz

Après la définition d'un lieu des zéros pour une seule fonction, on souhaite en introduire une pour un idéal, et définir aussi l'idéal annulateur. Cependant, avec $n \geq 3$, pour toute fonction f et tout arc dans son lieu d'annulation, il existe une fonction dans l'idéal engendré par f qui a cet arc entièrement inclus dans son lieu d'indétermination, voir 4.1.2. Cela nous amènera à nous concentrer régulièrement sur le cas de la dimension 2, où ce genre de pathologies peut aisément être évité. L'exemple qui illustre la difficulté dans la définition d'un idéal annulateur est le suivant :

$$f := \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ et } g := \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}$$

Les deux fonctions ont la même annulation en $(0,0)$ mais avec des témoins différents. Ainsi, en voulant définir l'ensemble annulateur de l'origine, f et g seraient dans $\mathcal{A}(\{(0,0)\})$ mais pas $f + g = 1 + \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$. En fait, une définition de l'ensemble annulateur dans \mathbb{R}^n ne lui donne pas une structure d'idéal. Cela nous donne une motivation pour établir une géométrie dans des espaces d'arcs : en retenant les directions d'annulation on pourra retrouver la structure d'idéal, au moins en dimension 2.

La suite logique de ces définitions est alors d'aller vers un Nullstellensatz. On peut montrer une version faible avec notre définition du lieu des zéros, exprimant qu'avoir un lieu des zéros vide implique d'être inversible. Cependant ce n'est vrai que pour une seule fonction (3.3.17) ou un idéal de type fini (4.4.2). Le cas non de type fini ayant un contre-exemple en (5.1.7). Pour avoir un Nullstellensatz général, en suivant la méthode régulue, deux éléments sont essentiels : l'inégalité de Łojasiewicz et la noetherianité de la topologie.

La première est fautive pour la topologie que l'on a créé (4.2.2). Il faudra donc se souvenir des témoins d'annulation pour pouvoir obtenir une inégalité de Łojasiewicz en 4.2.3 (pour des témoins par éclatements) ou en 4.2.5 (pour des témoins d'arcs). Cela nous a encouragé à définir un lieu d'annulation dans les espaces d'arcs en section 4.3. $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$ est ainsi l'ensemble des arcs γ tels que la composée $f \circ \gamma$ est de limite nulle. Notons qu'en prenant les limites des arcs de $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$ on obtient le $\mathcal{Z}(f)$ précédemment défini (voir 4.3.8).

Cette définition nous permet d'avoir une inégalité de Łojasiewicz ressemblant à la version classique :

Théorème 7 (4.3.3). *Soient f, g deux fonctions rationnelles bornées de X dans \mathbb{R} . Si $\widehat{\mathcal{Z}}(g) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(f)$ alors il existe un entier N tel que $\frac{f^N}{g}$ soit rationnelle bornée.*

Ainsi, dans les espaces d'arcs en dimension 2, lieux des zéros pour un idéal et idéal annulateur peuvent être définis sans difficulté. Les résultats algébriques peuvent tomber : radicale principalité (4.4.7), Nullstellensatz faible (4.4.2) et fort (4.4.4). Mais ces résultats sont valables pour les idéaux de type fini. Pour les idéaux généraux il nous manque le deuxième ingrédient essentiel précédemment évoqué : la noetherianité géométrique. Or cette dernière n'est vraie ni dans les espaces de points (3.3.16), ni dans les espaces d'arcs (5.1.7), et surprenamment pour des raisons très différentes.

Spectre réel de $R_b(\mathbb{R}^2)$

Les contre-exemples donnés pour des Nullstellensatz non de type fini et pour la noetherianité dans les espaces d'arcs sont les mêmes idéaux. On donne en section 5.1 une procédure pour en construire, à partir d'une idée géométrique : prendre un arc, potentiellement non semi-algébrique voire non convergent. Puis créer des idéaux emboîtés pour lesquels les arcs annulateurs s'approchent de l'arc donné jusqu'à un certain degré. Et faire tendre ce degré vers l'infini en avançant dans la suite d'idéaux. Enfin, prendre la réunion de tous ces idéaux. Avec un bon choix d'arc au départ, aucun arc semi-algébrique n'est contenu dans le lieu des zéros (d'arcs) de l'idéal ainsi obtenu, pourtant non-plein.

Les idéaux ainsi engendrés sont maximaux, et nous emmènent vers une étude des idéaux maximaux réels de $R_b(\mathbb{R}^n)$. Donnée en termes de spectre réel et de substitution, on obtient le résultat suivant :

Théorème 8 (5.2.11). *Un morphisme $\varphi : \mathbb{R}[\mathbb{R}^2] \rightarrow F$ avec F réel clos quelconque, peut être prolongé à $R_b(\mathbb{R}^n)$ tout entier. Ce prolongement est unique si l'image de φ n'est pas uniquement \mathbb{R} .*

Autrement dit, le morphisme $\text{Sper } R_b(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Sper } \mathbb{R}[\mathbb{R}^2]$, est surjectif, et bijectif en dehors des points.

La question de comprendre le défaut d'unicité du morphisme s'avère alors être similaire à la question de décrire tous les idéaux maximaux de $R_b(\mathbb{R}^2)$. Une étude de cas nous montre

alors un phénomène surprenant : pour comprendre $\text{Spec } R_b(\mathbb{R}^2)$, il semble qu'il faille comprendre le spectre réel des polynômes sur \mathbb{R}^2 . Or une énumération du spectre réel de $\mathbb{R}[X, Y]$ aussi complète que pour celui de $\mathbb{R}[X]$ n'existe pas dans la littérature, ce qui limite notre étude.

Les résultats algébriques qui ressortent de cette étude sont alors : l'anneau n'est pas noethérien (2.4.12), mais il est intégralement clos (2.4.13). L'idéal engendré par x n'est pas premier, mais on peut quand même montrer que la dimension de Krull coïncide avec la dimension attendue :

Théorème 9 (4.4.10 & 4.4.12).

L'anneau des fonctions rationnelles bornées sur \mathbb{R}^n a pour dimension de Krull n .

On peut donner pour les idéaux de type fini des Nullstellensatz faibles avec des espaces de points, et forts avec des espaces d'arcs. Les fonctions sont proches des régulières, et une propriété partagée, semblant à première vue la plus anodine, finit par être la plus essentielle :

Théorème 10 (2.4.3). *Soit $f = \frac{p}{q}$ rationnelle bornée sur \mathbb{R}^n , avec $p, q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ deux polynômes premiers entre eux. Alors $\text{codim } \mathcal{Z}(q) \geq 2$.*

Les conséquences de cette propriété semblent alors qu'on peut adapter les méthodes classiques de la géométrie algébrique en codimension 1, pour les hypersurfaces donc, mais dans les codimensions plus grandes, on risque de manquer d'outils pour la faire. Cette propriété donne notamment un critère qui permet de composer deux fonctions rationnelles bornées, argument essentiel pour la dimension de Krull. C'est la raison essentielle pour laquelle une partie de l'étude se concentre sur la dimension 2, car les difficultés y sont alors concentrées sur des points isolés, facilement esquivables.

Description des chapitres

Au chapitre 1, nous présenterons ce que nous avons lu dans la littérature sur différents outils utilisés, puis nous verrons au chapitre 2 les définitions des fonctions localement puis globalement bornées, avant de détailler les conséquences du théorème d'Hironaka qui nous importent, pour enfin donner les propriétés les plus simples de ces fonctions.

Le chapitre 3 commencera l'étude géométrique par l'espace des points, d'abord en définissant les lieux des zéros, puis en les caractérisant, via éclatements puis via les outils algébriques et semi-algébriques; on en profitera pour définir et étudier les images.

Le chapitre 4 présentera d'abord les obstructions aux définitions en dimension plus grande que 2, puis l'inégalité de Łojasiewicz sera présentée et démontrée en dimension quelconque, ce qui amènera à définir une géométrie dans les espaces d'arcs, et aux théorèmes algébriques qui s'ensuivent.

Enfin, le chapitre 5 présentera, en dimension 2, une procédure pour aboutir aux contre-exemples des généralisations aux idéaux non de type fini, avant d'aborder l'étude du spectre réel, d'abord via la propriété de substitution, puis sur une présentation des idéaux maximaux qui constituent le défaut d'unicité de la substitution.

Vulgarisation : ma thèse en trois pages

Les trois pages suivantes ont été publiées dans le magazine de vulgarisation mathématiques Tangente, édition Juillet-Aout 2022 [Del22]

Le doctorant a aussi participé en 3e année à la session rennaise de « ma thèse en 180 secondes ».

Voir <https://youtu.be/dP5O2JPv8MI?t=4793>

Et il a aussi eu le droit, en première année, à son édition dans l'émission « ma thèse en synthèse », organisée par le Vortex (émission de vulgarisation sur internet).

Voir <https://youtu.be/a8uunCfrf64>

Bienvenue dans la géométrie régulue

L'algèbre et la géométrie sont intimement liées. Établir une sorte de dictionnaire entre les deux domaines permet de résoudre élégamment des questions qui resteraient bien ardues sans ces éclairages complémentaires. On peut même s'amuser à construire de nouvelles géométries...



En 1637, René Descartes publie le *Discours de la méthode*. À côté du célèbre « *Je pense donc je suis* » se trouve un manuscrit, *La Géométrie*, qui décrit une avancée majeure de cette époque en mathématiques. On y observe tout d'abord comment, en utilisant un système de coordonnées, chaque objet géométrique a un pendant algébrique. Par exemple, chaque droite peut être représentée par une *équation de droite*, c'est-à-dire une égalité vérifiée par les coordonnées des points de la droite et uniquement ceux-là. Chaque construction à la règle et au compas s'associe alors à une opération algébrique. Considérer, par exemple, le point d'intersection de deux droites revient algébriquement à résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Dans un deuxième temps, il ne

restera qu'à faire de la théorie des équations pour résoudre les divers problèmes géométriques qui se posent.

En ne considérant que les équations exprimées uniquement avec des additions, des soustractions et des multiplications (donc sans puissances, sinus, cosinus...), on obtient le domaine de la *géométrie algébrique*.

+ Diviser par zéro !

Le cadre de la géométrie algébrique fonctionne très bien avec les nombres complexes. Cependant, il peine à bien apprécier des phénomènes réels, pour lesquels il est utile d'ajouter la division à nos outils. Mais la division peut être elle aussi problématique, car on risque toujours de diviser par zéro. Pour éviter cela, on divise uniquement par des quantités qui ne s'annulent jamais, comme $1 + x^2$.

Des recherches récentes ont mis en avant une classe de fonctions, dites *régulues* (quel beau nom !), dans lesquelles le dénominateur peut s'annuler. En d'autres mots, « on s'autorise à diviser par zéro » ! Cependant, pour garder le contrôle sur ces fonctions, le dénominateur ne peut valoir zéro que quand le numérateur vaut zéro aussi, et même,

Interview

Dans quel domaine de recherche votre thèse s'inscrit-elle ?

Mon domaine est la géométrie algébrique réelle, une importante branche des mathématiques. J'ai choisi le « sur-domaine » géométrie/algèbre car il est rempli des questions mathématiques et des méthodes qui me plaisent le plus, avec la logique.

Pourquoi avez-vous choisi ce sujet ?

Le choix précis du domaine s'est fait suite à la rencontre avec mon directeur, en deuxième année de master, alors que je cherchais un sujet de thèse : je faisais le tour de mon labo pour discuter avec les différents chercheurs. Lui avait de son côté posté une offre de thèse, j'y ai postulé. Le choix précis du sujet s'est fait durant la première année de thèse. Nous avions une piste pour un autre sujet mais après quatre mois elle s'est avérée infructueuse, alors on a bifurqué avec une question qu'il avait rencontrée à plusieurs étapes et qui n'était pas trop loin de la piste précédente.

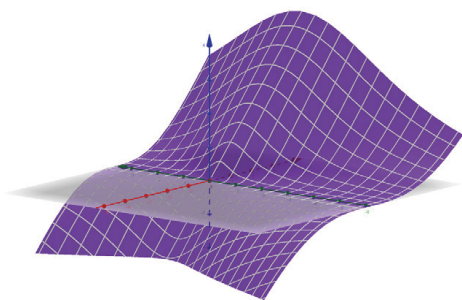
Comment cette thèse s'insère-t-elle dans vos projets ?

Mon projet, depuis déjà un moment, est de faire une thèse de mathématiques. C'est plus ou moins une fin en soi. Comme je suis dans un domaine théorique, il n'y a pas beaucoup de portes de sorties : le secteur privé ne s'intéresse pas forcément à ces thématiques et les postes de chercheur dans le public sont en chute libre depuis une vingtaine d'années.

uniquement quand c'est un zéro « plus fort ».

Par exemple, prenez la fonction définie par $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

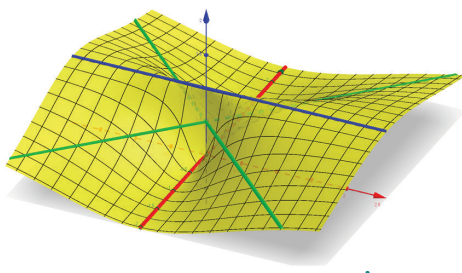
En simplifiant *via* les coordonnées polaires par $\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = r \cos^3 \theta$, on voit bien que le numérateur « gagne ». On le voit aussi sur le graphe de la fonction : même s'il y a une forme indéterminée en $(0, 0)$, la valeur est uniquement déterminée et vaut 0. En d'autres mots, la fonction est prolongeable par continuité en $(0, 0)$.



Graphes de la fonction qui au couple (x, y) associe $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

La question qui se pose alors est la suivante : que se passe-t-il si l'on remplace ce « plus fort » par « au moins aussi fort » ?

Un bon exemple de ce phénomène est donné par la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.



Graphes de la fonction qui à (x, y) associe $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

En prenant $x = 0$ (en suivant la droite rouge sur le dessin), on obtient 0. En prenant $y = 0$ (en suivant cette fois-ci la droite bleue), on obtient $\frac{x^2}{x^2} = 1$.

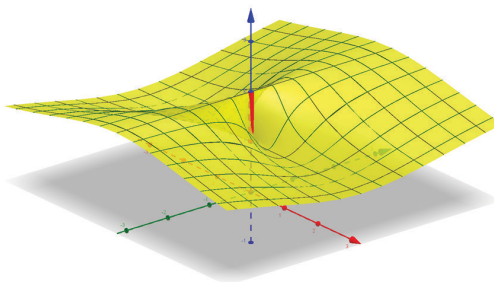
On peut aussi avoir les valeurs intermédiaires, comme $\frac{1}{2}$ par exemple, pour $x = \pm y$ (en suivant les droites vertes sur le dessin).

Mais alors quelle valeur choisir pour $(x, y) = (0, 0)$?

C'est exactement la question à laquelle il a fallu répondre pour créer une nouvelle géométrie : la *géométrie rationnelle bornée*. La réponse apportée par l'auteur est la suivante : il faut plus ou moins choisir toutes ces valeurs en même temps ! Mais pas question de choisir 2 ou -1 ; pour qu'un choix soit acceptable, il faut qu'il soit atteignable.

+ Un Eden à reconstruire

Une nouvelle géométrie est ainsi créée. À vrai dire, l'auteur a montré qu'on obtiendrait la même géométrie en autorisant toutes les divisions, et pas seulement celles dites « au moins aussi fortes ». Le premier résultat algébrique montré avec cette géométrie peut s'exprimer ainsi : si l'on n'a pas 0 comme choix acceptable pour une expression, alors il n'y aura aucun problème à diviser par toute l'expression : on gardera toujours le caractère « au moins aussi fort ». Par exemple, $\frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ n'a aucun comportement d'annulation : les valeurs sont toujours comprises entre 1 et 2, et ce même au point d'indétermination.



Graphes de la fonction qui à (x, y) associe $\frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$: toutes les valeurs entre 1 et 2 semblent être prises au point d'indétermination (en rouge).

Construire des ensembles algébriques sans utiliser de puissances

Dans le cadre de la géométrie algébrique, les opérations que l'on s'autorise à utiliser sont l'addition, la soustraction et la multiplication. Lors de l'écriture de l'expression $x^3 + 2x^2 - x + 1$, on a utilisé à deux reprises le symbole de puissance. Cependant, il est possible de réécrire la même expression sans utiliser ce symbole : $x \times x \times x + 2x \times x - x + 1$.

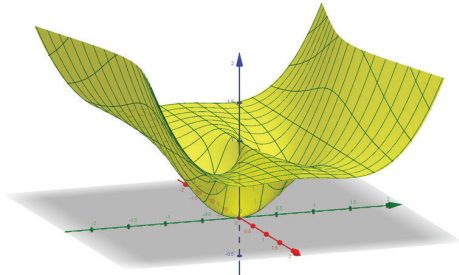
L'expression 2^x , au contraire, utilise une « vraie » puissance et n'est donc pas autorisée dans ce cadre.

Finalement, avec l'addition, la soustraction et la multiplication, on obtient donc les polynômes. Reste encore à choisir le corps dans lequel on choisit les coefficients.

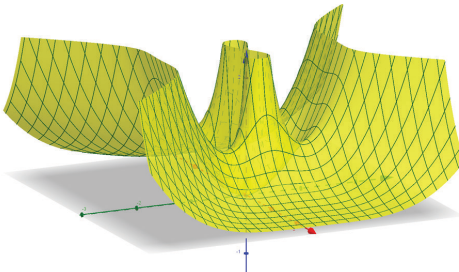


BIENVENUE DANS LA GÉOMÉTRIE RÉGULUE

Si l'on se donne deux expressions, il est possible que l'on puisse diviser l'une par l'autre en gardant le caractère « au moins aussi forte ». Et il est possible que non. Cela dépendra des deux expressions.



Graphes de g_1 . Celui de g_2 s'obtient par rotation de 90° autour de l'axe vertical.



Graphes de g_1/g_2 . On voit une « explosion » au centre, qui montre que la division n'est plus « au moins aussi forte ».

Un exemple étrange est donné par les fonctions g_1 et g_2 , définies par

$$g_1(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ et}$$

$$g_2(x) = \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Les deux fonctions ont une annulation au même endroit : en $(0, 0)$. Mais pour g_1 l'annulation se fait le long de l'axe des y alors que pour g_2 l'annulation suit l'axe des x . Si l'on essaie de diviser l'une par l'autre, alors le dénominateur l'emportera et on n'aura plus de division « au moins aussi forte ».

Un théorème important de géométrie régulue nous apprend que si les annulations de b sont aussi toutes des annulations de a , alors on

pourra diviser a par b sans perdre le « plus fort ». Ici, avec g_1 et g_2 , les deux fonctions ont la même annulation et pourtant « on ne peut pas diviser » : il faut en effet retenir la direction d'annulation. Cela a pu être montré et amené à étudier une géométrie qui retient les directions d'approche. C'est en effet dans cette géométrie, certes plus difficile à manipuler, qu'il faut chercher les équivalents des théorèmes importants de géométrie algébrique, comme le Nullstellensatz (voir encadré).

+ De nouveaux horizons

Pour avoir un Nullstellensatz dans toute sa puissance, la géométrie régulue utilisait une autre propriété, qui se résume ainsi : « si l'on regarde un lieu géométrique défini par une infinité d'équations, alors on peut décrire ce lieu avec seulement un nombre fini d'équations. » Cette propriété, nommée *noetherianité* (en l'honneur de la mathématicienne allemande Emmy Noether), est vérifiée avec les fonctions de la géométrie régulue. Mais elle ne l'est pas en géométrie rationnelle bornée. La présente thèse donne des contre-exemples en géométrie rationnelle bornée, et même une méthode pour en construire un peu à l'envi. Ces exemples dévoilent une richesse algébrique, sur la structure de l'ensemble des fonctions, qu'il faudrait encore des années pour comprendre, et pour lesquels des outils théoriques sont encore à construire. □ — V.D.

Le Nullstellensatz

Le *Nullstellensatz*, ou *théorème des zéros de Hilbert*, est sans doute le résultat le plus important et fondateur de la géométrie algébrique. Prenons une équation du type $A = B$. En réécrivant $A - B = 0$, on peut supposer qu'il n'y a pas de « terme à droite ».

Considérons donc une équation de la forme $P = 0$ et un ensemble d'équations $Q_1 = 0, Q_2 = 0 \dots Q_n = 0$.

Si l'on suppose que tous les points qui vérifient (pour tout i compris entre 1 et n) la relation $Q_i = 0$ vérifient aussi $P = 0$, alors on peut en conclure que P peut être écrit à partir des expressions $Q_1, Q_2 \dots Q_n$.

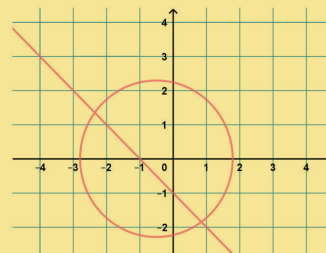
Regardons par exemple la courbe P , d'équation $P(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 2x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y - 5 = 0$.

On constate que cette courbe contient entièrement la droite Q d'équation $x + y + 1 = 0$.

Alors on pourra trouver un polynôme A de deux variables pour factoriser $P(x, y)$ sous la forme $P(x, y) = (x + y + 1) \times A(x, y)$. Et en effet, en calculant explicitement, on trouvera pour notre exemple $A(x, y) = x^2 + y^2 + x - 5$.

Pour les lecteurs un peu plus aguerris, considérons un idéal I de l'ensemble des polynômes $K[X_1, X_2, \dots, X_m]$ où K est un corps algébriquement clos. On peut alors considérer l'ensemble algébrique $V(I)$ qui est le lieu d'annulation de tous les polynômes de I dans K^m . Le Nullstellensatz affirme que si P est un polynôme qui s'annule sur $V(I)$, alors une puissance de P appartient à l'idéal I .

Ainsi, se poser un problème algébrique de factorisation, ou se demander si un polynôme est multiple d'un autre, peut avoir une résolution géométrique : si la géométrie d'une équation est « décomposable » (ici en un cercle et une droite), alors on peut aussi décomposer l'équation. Ce qui est loin d'être trivial en regardant l'équation seule !



Ensemble des points du plan vérifiant $P(x, y) = 0$.

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Avant d'aborder notre travail, on présente certaines notions que l'on utilise. On commence par présenter les corps réels clos, qui représenteront nos ensembles de nombres, puis on introduit les variétés algébriques, objets géométriques de base de la géométrie algébrique. Puis l'on présente les résultats de base de la géométrie algébrique, et quelques résultats avancés sur la résolution des singularités. Nous parlons alors de géométrie semi-algébrique, d'arcs semi-algébriques et d'espace de tels arcs. Enfin, nous présentons quelques résultats de littérature sur les fonctions régulières et sur les anneaux des éléments bornés. Un élément n'aura pas été présenté et est supposé connu du lecteur qui se penchera sur les rares parties qui en parlent, il s'agit du spectre réel, analogue réel du spectre premier des anneaux.

1.1 Corps réel clos

On commence par présenter l'analogie réel du corps algébriquement clos. L'idée, présente dans beaucoup de développements de géométrie algébrique, est de partir d'un ensemble de nombres qui soit à la fois général, qui permette ainsi des propriétés de transfert, mais qui soit aussi suffisamment contrôlé pour ne pas avoir à distinguer entre tous les cas possibles.

Le corps \mathbb{R} n'est en effet pas algébriquement clos, mais est réel clos. Et les propriétés de \mathbb{R} sont très similaires aux propriétés d'un corps réel clos quelconque. L'étude sur \mathbb{R} aurait donc été la même que l'étude présentée sur un corps réel clos quelconque, à l'exception de la démonstration d'un résultat isolé sur les compacts. Ils nous arrivera cependant dans le dernier chapitre de jongler entre différents corps réels clos, en parlant de substitution. On renvoie principalement au chapitre 1 de [BCR13] pour ce qui va suivre.

Théorème - définition 1.1.1. *Soit F un corps. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Il existe un ordre total sur F compatible avec l'addition et la multiplication*
- *Il existe un sous-ensemble strict (appelé cône), stable par multiplication et addition et contenant tous les carrés.*

- -1 n'est pas une somme de carrés
- Une somme de carrés est nulle si et seulement si l'ensemble de ses termes sont nuls.

Un tel corps est appelé réel. Il est nécessairement de caractéristique zéro.

Par exemple, \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou $\mathbb{R}(X)$ (avec beaucoup de possibilités pour la valeur de X dans l'ordre) sont des corps réels, mais \mathbb{C} ne l'est pas. \mathbb{F}_p non plus, car -1 y est la somme de $(p-1)$ fois le nombre 1^2 .

Remarque 1.1.2. Le concept peut se généraliser aux anneaux. Dans ce cas l'ordre n'est pas nécessairement antisymétrique (et on parle alors de préordre). Mais les trois autres propriétés sont identiques et on parle d'anneau réel.

Là où on peut voir un idéal comme un ensemble d'éléments annulables, les cônes fournissent alors un analogue décrivant un ensemble d'éléments positifs. Les géomètres algébristes regardent alors les idéaux premiers, et les géomètres réels regardent les cônes premiers, qui définissent le spectre réel. On renvoie aux chapitres 4 et 7 de [BCR13] pour en savoir plus; le spectre réel sera utilisé dans les dernières sections de ce manuscrit.

Théorème - définition 1.1.3. Soit F un corps. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- F est réel et il n'admet pas d'extension algébrique réelle stricte.
- F admet un ordre unique dont l'ensemble des éléments positifs coïncide avec les sommes de carrés; de plus, les polynômes de $F[X]$ vérifient le théorème des valeurs intermédiaires.
- Pour tout $a \in F$, soit a soit $-a$ est un carré. De plus, tout polynôme de degré impair de $F[X]$ a une racine dans F .
- $F(i)$ est algébriquement clos et pas F .

Un tel corps est appelé réel clos.

Exemple 1.1.4. • \mathbb{R} et \mathbb{R}_{alg} (l'ensemble des nombres algébriques réels) sont des corps réels clos.

- $\mathbb{R}(X)$ n'est pas réel clos, en effet X n'y a pas de racine carrée.
- Si R est un corps réel clos, l'ensemble des séries de Puiseux sur R ; de la forme

$$\sum_{i \geq m} a_i T^{\frac{i}{n}} \text{ avec } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a_i \in R$$

est un corps réel clos que l'on notera $R\langle\langle T \rangle\rangle$. L'ensemble de ses éléments algébriques sur $R[T]$ est le plus petit corps réel clos transcendant sur R , et il sera noté $R\langle T \rangle$. On accepte ainsi des puissances fractionnaires (mais à dénominateur borné) ainsi que des puissances négatives (mais un nombre fini). $R\langle\langle T \rangle\rangle$ contient ainsi l'ensemble $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles,

ainsi que l'ensemble $R[[X]]$ des séries formelles. On notera aussi qu'on ne s'intéresse pas aux problèmes de convergence.

Ces corps sont ordonnables ; et pour les ordonner, il faut que T soit infinitésimal, c'est-à-dire plus petit que tous les éléments de R . En effet, le classique développement limité de la racine nous indique que pour $r > 0$:

$$r\left(1 - \frac{T}{r}\right) = \left(\sqrt{r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3}{2} - k\right)}{k! r^k} T^k \right)^2$$

Ainsi $r - T$ est positif (car carré), donc $T \leq r$ pour tout r , et T est positif car $T = \left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Un résultat important que l'on reverra en 1.6.4 est que $R\langle T \rangle$ est isomorphe à l'ensemble des germes en 0 des fonctions semi-algébriques à une variable.

- Le corps des séries de Puiseux n'est pas Cauchy-complet. On peut y ajouter quelques séries en plus, par exemple la série $\sum T^{k+\frac{1}{k}}$, dont le dénominateur des puissances n'est pas borné, mais dont le support est fini à gauche¹. On ajoutera cependant pas la série $\sum T^{\frac{k}{k+1}}$, où il y a une infinité d'éléments à puissance ≤ 1 . Si le corps de base est complet, on obtient alors le corps de Levi-Civita qui sera aussi complet.

En changeant « fini à gauche » par « bien ordonné (par l'ordre des puissances croissantes) » on obtient un corps de séries de Hahn qui, lui, contient $\sum T^{\frac{k}{k+1}}$.

$\sum T^{\frac{1}{k}}$ ne fait partie d'aucun de ces corps, et chercher à l'ajouter est dangereux puisqu'il risque de rendre la multiplication mal définie.

- En prenant les suites réelles, et en ordonnant par "la suite est plus grande que l'autre à partir d'un certain rang"², on obtient un corps hyperréel. Ces corps ont été originellement introduits pour faire de l'analyse infinitésimale, et justifier la position des mathématiciens du 16^e siècle comme Newton ou Leibniz, qui traitaient la dérivabilité et l'intégrabilité sans utiliser de limite. Ces corps possèdent cependant beaucoup trop d'infinitésimaux, leur construction précise est un peu lourde. Il semble donc, après coup, que le corps de Levi-Civita soit plus indiqué pour l'analyse infinitésimale. Il existe des extensions encore plus grandes, comme des corps superréels (où on remplace les suites par des fonctions continues), ou les surréels (qui ne forment pas un ensemble dans ZFC, mais où l'on trouve une

1. Fini à gauche : l'ensemble des termes ayant une puissance plus petite qu'un rationnel donné est toujours fini.

2. La réalité est un peu plus compliquée. Il faut en effet déterminer qui, par exemple, de la suite alternée $(-1^n)_n$ et de la suite nulle $(0)_n$, serait la plus grande. Cela demande d'utiliser un ultrafiltre sur \mathbb{N} , et donc requiert l'axiome du choix. Le « plus grand à partir d'un certain rang » deviendra « l'ensemble des rangs dans lequel c'est plus grand fait partie de l'ultrafiltre ». Il faudra aussi quotienter par la relation « l'ensemble des rangs dans lequel les deux suites sont égales fait partie de l'ultrafiltre ». Des choix d'ultrafiltres différents donneront des corps non isomorphes.

copie de tous les corps réels clos).

Remarque 1.1.5. Tout corps réel admet un unique plus petit sur-corps qui soit réel clos. On parle de clôture réelle. Il semble nécessaire pour démontrer l'unicité de passer par un résultat d'analyse ; de type comptage de racines (théorème de Sturm).

La propriété qui rend les corps réels clos intéressants comme base, au même titre que les corps algébriquement clos, est la suivante :

Proposition 1.1.6. *Soit $R \subseteq K$ deux corps réels clos et ϕ une formule du premier ordre du langage des corps ordonnés, ayant des constantes uniquement dans R . Alors ϕ est vrai dans R si et seulement si elle est vraie dans K .*

Cette propriété, dite de complétude (ou de modèle-complétude), nous dit que les formules vraies ne dépendent pas du corps réel clos choisi. Les formules vraies pour nos nombres ne vont pas varier selon le choix de corps de nombres que l'on aurait pu faire.

Remarque 1.1.7. Bien sûr, en ne parlant que des formules du premier ordre, on se prive de certains concepts : connexité, Cauchy-complétude, Dedekind-complétude, compacité, etc. Par exemple, \mathbb{R} est connexe, mais ni \mathbb{R}_{alg} ni $\mathbb{R}\langle\langle T \rangle\rangle$ ne le sont. (voir [BCR13, 2.4]).

Autre exemple (voir [BCR13, 2.5]), le segment unité est compact dans \mathbb{R} , mais ni dans \mathbb{R}_{alg} ni dans $\mathbb{R}\langle\langle T \rangle\rangle$. Dans ce texte, on utilisera « fermé borné » à la place de la compacité. Comme nous travaillons en dimension finie, il n'y a pas les exemples pathologiques classiques de fermés bornés non compacts en dimension infinie, et la propriété fermé-borné colle bien à notre intuition de la compacité. La connexité sera quant à elle remplacée par la connexité semi-algébrique. Enfin, la complétude sert principalement à faire de l'analyse et de la convergence, ce qui, sans être proscrit de ce manuscrit ou de la géométrie algébrique, n'en est pas l'objet principal, et on peut s'en passer.

1.2 Variété algébrique

Maintenant que nous avons notre corps de base, un corps réel clos quelconque R , on peut définir nos objets géométriques de base :

Définition 1.2.1. *Un ensemble $X \subseteq R^n$ est dit algébrique s'il existe $A \subseteq R[X_1, \dots, X_n]$ tel que :*

$$X = \{x \in R^n, \forall f \in A, f(x) = 0\}$$

Un ensemble algébrique est ainsi le lieu d'annulation d'un ensemble de fonctions, autrement dit le lieu où un certain ensemble d'équations est vérifié.

Remarque 1.2.2. Une propriété assez importante dans toute cette étude est la propriété de noethérianité. Ici, l'anneau $R[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, et cela nous permet d'affirmer qu'un A de la définition précédente peut toujours être choisi comme étant fini.

Exemple 1.2.3. • Les droites, plans, hyperplans etc. sont des ensembles algébriques.

- Le cercle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est un ensemble algébrique.
- La spirale d'Archimède d'équation polaire $r = \theta$ n'est pas un ensemble algébrique. Un moyen de s'en rendre compte est de voir que son intersection avec une droite quelconque est un nombre infini de points. Les polynômes s'annulant sur ce nombre infini de points doivent par divisibilité s'annuler sur l'entièreté de la droite. Ainsi un polynôme s'annulant sur la spirale s'annule sur tout le plan.
- De manière similaire, les sinusoides ou les courbes de fonctions périodiques non constantes ne sont pas des ensembles algébriques.
- L'équation $y^2 = x^2(x - 1)$ donne une cubique qui a un point isolé à l'origine. L'équation $y^2 = x(x^2 - 1)$, quant à elle, donne une cubique qui possède deux composantes connexes (même après compactification dans un espace projectif). Ces deux cubiques sont irréductibles; même si leur géométrie semble dire le contraire. De tels exemples n'arrivent pas avec un corps algébriquement clos.

Remarque 1.2.4. On connaît tous la topologie euclidienne sur \mathbb{R}^n , dont les ouverts sont engendrés par les boules ouvertes. La géométrie algébrique utilise souvent une autre topologie, dite de Zariski, dont les fermés sont engendrés par les ensembles algébriques. L'intuition topologique est totalement différente, à vrai dire, et le langage très général de la topologie a été utilisé parce qu'il était adéquat, non parce que l'intuition coïncidait. Cette topologie permet entre autres de définir la notion d'irréductibilité : une variété V est réductible s'il existe deux fermés de Zariski A et B non égaux à V tels que $A \cup B = V$. En termes de définition par équation, cela revient à dire que si la variété (affine) était définie par l'équation $f = 0$, alors on peut factoriser la fonction $f = gh$, ce qui nous donne deux sous-variétés; la première, définie par $g = 0$ et la deuxième définie par $h = 0$.

Sur ces lieux géométriques, on peut ajouter une structure que l'on appelle de faisceau. Ce mot exprime simplement le fait de donner un ensemble de fonctions partant du lieu géométrique, allant dans R , et compatible avec l'opération de restriction. Par exemple, l'ensemble

des polynômes sur R^n induit par restriction un ensemble de polynômes sur tout ouvert de Zariski U de R^n . Et si l'on prend un autre ouvert de Zariski $V \subseteq U$, l'ensemble de polynômes induit est le même, qu'on le construise directement avec la restriction sur $V \subseteq R^n$ ou qu'on essaie d'en donner un à partir de $V \subseteq U$ et des polynômes donnés sur $U \subseteq R^n$. Ces faisceaux sont alors le langage idéal pour faire des recollements et définir des variétés abstraites.

De plus, le concept de schéma est souvent utilisé, qui intègre nativement cette notion de faisceaux, et qui permet aussi de faire une différence entre le lieu défini par l'équation $f = 0$ et celui défini par l'équation $f^2 = 0$. Le principe est, au lieu de partir d'un lieu géométrique et de regarder l'anneau des fonctions polynomiales dessus, on part d'un anneau quelconque et on construit une géométrie dessus à partir de ses idéaux premiers. Cette idée est inspirée des résultats de base de géométrie algébrique que l'on va aborder dans la prochaine section. Ce manuscrit n'emploie ni le langage des variétés abstraites ni celui des schémas car il n'en a pas le besoin. En [Man17, 1.3.11], on apprend qu'une variété algébrique réelle est affine si et seulement si elle est quasi-projective. Ainsi, nous travaillerons avec des variétés affines, c'est-à-dire celles dont les espaces géométriques sont les ensembles algébriques d'un R^n . On renvoie à [BCR13, Chap. 3 & 11] pour des définitions et études sur des variétés non plongées. La partie 3 de [BK89] montre aussi assez bien comment on peut généraliser des résultats donnés dans un cadre affine à un cadre de variété quelconque donné dans le langage des schémas.

Pour une variété affine quelconque, le choix du plongement, c'est-à-dire le choix d'un ensemble algébrique affine qui va nous servir de témoin, n'est pas anodin. En effet, deux variétés affines peuvent être isomorphes mais pourtant certaines propriétés de leurs anneaux de fonctions peuvent différer. Par exemple dans [BCR13, 3.2.8], rappelé en introduction, le tore a un plongement avec un anneau de polynômes régulier et un autre plongement où l'anneau de polynômes n'est pas un anneau régulier. Les variétés de ce manuscrit sont ainsi considérées affines plongées, même si l'espace ambiant n'est que rarement précisé.

Notation 1.2.5. Sur un ensemble algébrique X affine irréductible, les ensembles de fonctions qui nous intéresseront le plus dans cette étude sont les suivants :

- Les polynômes $\mathcal{P}(X)$
- Les fonctions régulières $\mathcal{R}(X)$, c'est-à-dire les fonctions qui peuvent s'écrire localement comme quotient de deux polynômes, avec le dénominateur ne s'annulant pas. Sur un corps algébriquement clos, cela coïncide avec les polynômes (voir [Man17, 1.2.50]). Sur un corps réel clos, $1 + X^2$ est un exemple de fonction qui ne s'annule jamais. À vrai dire, même avec des écritures locales, il existera toujours une écriture globale avec un polynôme qui ne s'an-

nulera jamais comme dénominateur (voir [BCR13, 3.2.3]).

- Les fractions rationnelles³ $R(X)$, qui sont les quotients de polynômes. Il ne s'agit alors pas d'un ensemble de fonctions sur X puisque ces fractions ne sont pas définies partout. On notera indet f le lieu d'indétermination d'une fonction rationnelle f , c'est-à-dire le lieu des zéros de q avec $f = \frac{p}{q}$ écrit en quotient irréductible. Le complémentaire de ce lieu, à savoir le domaine de f sera noté $\text{dom } f$
- Les fonctions semi-algébriques $\mathcal{SA}(X)$ sont une extension des fonctions régulières qui contient les racines. On les définira en détail en 1.5.5.

Remarque 1.2.6. Une application rationnelle sur X peut être aussi définie comme un couple formé d'un ouvert de Zariski non vide $U \subseteq X$ et d'une fonction régulière définie sur U . Comme les ouverts de Zariski sont denses, si l'on a $U \subseteq V \subseteq X$ deux ouverts de Zariski de X et $f : U \rightarrow R$ alors deux fonctions régulières sur V prolongeant f seront nécessairement égales. Ainsi, l'ouvert considéré n'importe pas tellement, et il est fréquent de définir les applications rationnelles comme des classes d'équivalence de tels couples.

Dans notre contexte où les variétés sont affines irréductibles, ces définitions amènent à l'écriture en quotient de deux polynômes que nous avons utilisé au dessus.

Enfin, comme les propriétés que nous allons rencontrer ne dépendent pas de l'ouvert de Zariski utilisé, voir 2.1.2 et 2.2.2, nous nous permettrons de faire une confusion entre application rationnelle $f : X \dashrightarrow R$ et fonction rationnelle $f : U \rightarrow R$ qui n'en est, normalement, qu'un représentant.

Une dernière notion qui sera importante pour nous est celle de lieu singulier. La définition géométrique de cette notion regarde l'espace tangent de la variété en un point : si la dimension de cet espace tangent est égale à la dimension de la variété, alors le point est non singulier (ou régulier, mais ce terme peut parfois entraîner confusion avec les fonctions régulières). La définition algébrique, regarde l'ensemble des fonctions régulières en ce point. Si cet anneau est régulier⁴, alors le point est non singulier. Un théorème fondateur nous permet de voir que ces notions coïncident (voir par exemple [Man17, 1.5.33], [BCR13, 3.3.5], [Har13, I, 5.1]).

Le cas réel offre bien des surprises, comme la surface de Kollár définie par $X^3 = Y^3(1 + Z^2)$ ou

3. Il pourra y avoir parfois confusion de notations entre l'ensemble des fractions rationnelles $R(X)$ sur une variété et l'ensemble $R(T)$ des fractions de polynômes à une variable, qui serait alors par théorème égal à $R(R)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur R .

4. Un anneau de fonctions régulières en un point est local, c'est-à-dire qu'il a un unique idéal maximal \mathfrak{M} ; il est alors défini comme régulier si $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$, vu comme espace vectoriel sur le corps de base, a une dimension égale à la dimension de Krull de l'anneau local.

l'exemple [Man17, 1.5.1], où un lieu singulier est entièrement inclus dans une composante lisse d'une variété. Ce qui fait que la variété est lisse (au sens où elle se déforme de manière \mathcal{C}^∞ en R^2 resp R), mais pas régulière (au sens que l'on vient d'introduire).

Comme autre surprise, on trouve des singularités qui sont complètement isolées du reste de la variété. Par exemple, la cubique $x(x^2 - 1) = y^2$ possède un point isolé qu'on a présenté en introduction dans la figure 2. Les différents parapluies trouvables en [BCR13, 3.1.2] présentent des surfaces où une droite se détache de la nappe régulière.

L'étude des fonctions rationnelles bornées étant motivée par des questions de normalisation (qui sont proches de la notion de régularité), il sera utile de les étudier dans le cadre des variétés singulières. Cependant, nous verrons par la suite que le cadre non singulier apporte déjà beaucoup de surprises. Ainsi, nous nous placerons dans toute la suite sur une variété non singulière.

1.3 Géométrie algébrique réelle

Dans cette section, notre variété X sera affine plongée et réelle.

Définition 1.3.1. Soit \mathcal{F} un symbole désignant un anneau $\mathcal{F}(X)$ de fonctions continues sur X (typiquement \mathcal{P} pour les polynômes, \mathcal{R} pour les régulières ou \mathcal{A}^0 pour les semi-algébriques continues).

Pour $A \subseteq \mathcal{F}(X)$, on notera l'ensemble des zéros de A :

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}(A) := \{x \in X \mid \forall f \in A, f(x) = 0\}$$

On notera aussi $\mathcal{Z}(f)$ au lieu de $\mathcal{Z}(\{f\})$ pour les singletons.

Le lieu de non-annulation de A , qui est le complémentaire de $\mathcal{Z}_{\mathcal{F}}(A)$, sera noté $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(A)$ avec la même convention pour les singletons.

Enfin, pour $U \subseteq X$, on notera l'idéal annulateur de U :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}(U) := \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \forall x \in U, f(x) = 0\}$$

Puisque l'on peut jongler entre plusieurs ensembles de fonctions, il est utile de préciser de quel ensemble on parle. Lorsque le contexte le rendra clair, on omettra le symbole associé. Une partie du travail de ce manuscrit est d'essayer de définir des ensembles similaires pour un anneau qui ne contient pas forcément que des fonctions sur X , et de voir si les analogues aux théorèmes qui suivent sont toujours vérifiés.

Ces définitions sont sans doute la base de la géométrie algébrique puisqu'elles établissent le pont entre la géométrie (les variétés, leurs sous-ensembles) et l'algèbre (les anneaux de

fonctions, leurs idéaux).

Précisément, un sous-ensemble U de X est une variété si et seulement si $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(U)) = U$. Pour l'autre aller-retour, introduisons d'abord la notation, pour I idéal d'un anneau A , du radical de I :

$$\sqrt{I} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in I\}$$

Théorème 1.3.2 (Nullstellensatz). *Soit X une variété affine sur K algébriquement clos, pour $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ un idéal, on a :*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(I)) = \sqrt{I}$$

Pour obtenir un pendant réel, il faut introduire une notion de réalité d'un idéal :

Définition 1.3.3. *Un idéal $I \subseteq A$ est dit réel si, pour $f_1, \dots, f_k \in A$, si $f_1^2 + \dots + f_k^2 \in I$ alors $f_i \in I$ (ce qui implique directement que $\forall i \leq k, f_i \in I$).*

En notant alors le radical réel comme

$$\sqrt[{\mathbb{R}}]{I} := \{a \in A \mid \exists m \in \mathbb{N}, \exists b_1, \dots, b_p \in A, a^{2m} + b_1^2 + \dots + b_p^2 \in I\}$$

on obtient (voir [BCR13, 4.1.4])

Théorème 1.3.4 (Nullstellensatz réel). *Soit X une variété affine sur \mathbb{R} réel clos, pour $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ un idéal, on a :*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(I)) = \sqrt[{\mathbb{R}}]{I}$$

Dans le cas réel, on peut aussi parler d'inégalité, et donc d'éléments positifs. Il existe alors des caractérisations similaires, appelées positivstellensatz (voir [BCR13, 4.4.3]). Les questions alors centrales sont : quels éléments positifs sont des sommes de carrés? Le 17^e problème de Hilbert par exemple traite de ce genre de questions.

1.4 La levée des indéterminées

La suite de cette section utilise intensément l'opération d'éclatement, on renvoie à [BCR13, 3.5.7] pour une définition pour un corps réel clos quelconque. La figure 7 en section 2.3 présentera l'éclatement d'un point du plan. Nous nous baserons sur le théorème de résolution des indéterminations, qui est une conséquence du théorème de résolution des singularités d'Hironaka [Hir64].

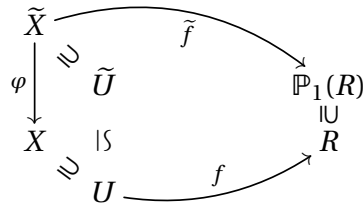
Théorème 1.4.1 (Hironaka). Soit $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}_1(R)$ une application rationnelle avec X une variété réelle non-singulière.

Il existe $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ une composition d'éclatements à centres lisses (que l'on écrira $\varphi = h_r \circ \dots \circ h_0$ avec $h_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$), qui vérifie :

- φ est un isomorphisme entre un ouvert dense de X et un ouvert dense de \tilde{X}
- $\text{indet}(f \circ \varphi) = \emptyset$

Démonstration. On doit adapter le résultat [Kol09, 3.18], corollaire du théorème 3.17 juste au-dessus, en un corollaire du théorème 3.21. Ce dernier a en effet trois conclusions. La première est en essence le théorème 3.17, qui permet le corollaire 3.18 et donc l'existence d'un morphisme birationnel vérifiant $\text{indet}(f \circ \varphi) = \emptyset$. La deuxième nous donne l'isomorphisme sur les restrictions aux ouverts de Zariski qui sont denses. Enfin, la troisième nous dit que le morphisme birationnel peut être pris comme une composition d'éclatements. \square

En écrivant $\tilde{f} := f \circ \varphi$, $U := \text{dom } f$ et $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U)$ on obtient le diagramme suivant ; avec U et \tilde{U} des ouverts de Zariski birégulièrement isomorphes, tous les deux denses euclidiennement dans leurs espaces respectifs.

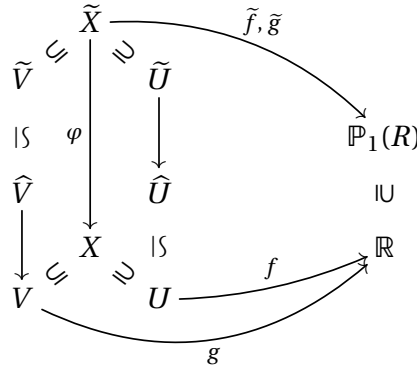


Définition 1.4.2. Dans toute la suite, on appellera résolution une composition d'éclatements à centres lisses qui satisfait aux conditions du théorème 1.4.1.

Une résolution $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ étant donnée, avec \tilde{X} et X lisses, on appelle lieu exceptionnel l'ensemble des points de \tilde{X} sur lequel φ n'est pas une bijection.

Lemme 1.4.3. Pour f, g rationnelles de X , variété réelle régulière, dans R , il existe une résolution commune, à savoir un espace \tilde{X} et une composition d'éclatements à centres lisses $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que $\text{indet } f \circ \varphi = \text{indet } g \circ \varphi = \emptyset$.

Démonstration. Cela se fait en utilisant deux fois le théorème d'Hironaka, par exemple selon le schéma suivant :



On pose $U := \text{dom } f$ et $V := \text{dom } g$, et $W := U \cap V$. On peut commencer par éclater f pour obtenir (\widehat{X}, ψ) , avec $\text{indet } f \circ \psi = \emptyset$, puis considérer $\widehat{g} := g \circ \psi$. ψ étant un isomorphisme au-dessus de U , et donc en particulier au-dessus de W , on peut voir \widehat{g} comme fonction rationnelle bornée définie sur $\widehat{W} := \psi^{-1}(W)$. On peut alors appliquer le théorème d'Hironaka sur cette fonction (ou sur son extension à un domaine \widehat{V} qui se surjecterait sur V via ψ). On obtient alors une autre résolution (\widetilde{X}, χ) vérifiant $\text{indet } \widehat{g} \circ \chi = \emptyset$. Comme $f \circ \psi$ n'a pas de lieu d'indétermination, on en déduit que $\widetilde{f} := f \circ \psi \circ \chi$ n'en a pas non plus. On a donc la résolution recherchée avec $\varphi := \psi \circ \chi$. \square

Avec exactement la même argumentation et un peu plus d'éclatements, on obtient une version à n fonctions :

Proposition 1.4.4. *Pour f_1, \dots, f_k rationnelles de X , variété réelle régulière, dans R , il existe une résolution commune, à savoir un espace \widetilde{X} et une composition d'éclatements à centres lisses $\varphi : \widetilde{X} \rightarrow X$ telle que $\forall i, \text{indet } f_i \circ \varphi = \emptyset$.*

Démonstration. Similaire au lemme précédent. \square

La proposition suivante est un condensé de deux informations : la première est qu'un morphisme birationnel est défini sur et a pour image des ouverts de Zariski. La deuxième est que tout ouvert de Zariski est dense pour les topologies de Zariski et Euclidiennes. On l'écrit ainsi car c'est sous cette forme condensée qu'on l'utilisera.

Proposition 1.4.5. *Soit φ un morphisme birationnel entre deux variétés lisses irréductibles X, Y . On note C, D les lieux d'indéterminations de respectivement φ et φ^{-1} , et U, V , les complémentaires respectifs. Alors, U et V sont denses dans respectivement X et Y , pour la topologie de Zariski et la topologie euclidienne.*

Démonstration. Par symétrie on ne traitera que le cas de φ . L'ensemble C est inclus dans le lieu d'annulation du dénominateur des écritures de φ , qui est un fermé de Zariski. L'ensemble U contient (voire est) un ouvert de Zariski non vide. On note A sa fermeture dans

X . On a alors $X = A \cup C$, à savoir un irréductible écrit comme la réunion de deux fermés. Comme $C \neq X$ on a nécessairement $X = A$ ce qui veut dire que U est dense dans X pour la topologie de Zariski.

Pour la topologie euclidienne, remarquons que C est de codimension ≥ 1 (même ≥ 2 mais la codimension 1 suffit). Or un ouvert euclidien autour d'un point de C est nécessairement de dimension maximale, donc un tel ouvert ne peut être entièrement inclus dans C . Ainsi, les ouverts autour des points du complémentaire de U intersectent U . \square

1.5 Géométrie semi-algébrique

À la différence des ensembles algébriques qui se définissent avec des équations, les ensembles semi-algébriques se définissent à partir d'inéquations et d'équations.

Définition 1.5.1. *Les ensembles semi-algébriques (parfois abrégés s-a) de R^n forment la plus petite collection de parties de R^n contenant toutes les parties de la forme $\{x \in R^n, f(x) > 0\}$ (pour f polynomiale), et stable par intersection, union, et passage au complémentaire. Autrement dit, un ensemble semi-algébrique est l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) qui vérifient une formule (de la théorie des anneaux/corps ordonnés), sans quantificateur, ayant comme variables les x_i (et donc comme symboles $+, \times, =, >$ ainsi que les symboles de logique et/ou/négation).*

On note que cette définition comprend les équations, puisque $\{f = 0\}$ est le complémentaire de $\{f > 0\} \cup \{f < 0\}$.

Remarque 1.5.2. Le fait que la théorie des corps soit modèle-complète se montre en général à l'aide d'une propriété appelée l'élimination des quantificateurs. Cette propriété revient à dire que toute formule avec quantificateur est équivalente à une formule sans quantificateur. Cela veut dire aussi que l'on aurait pu ne pas interdire les quantificateurs dans notre reformulation logique. Ainsi un ensemble semi-algébrique d'un espace de dimension n est l'ensemble des points qui vérifient une formule du premier ordre à n variables libres.

Cela offre une diversité d'ensembles nettement plus importante, en permettant notamment la construction "par morceaux".

Exemple 1.5.3. Les ensembles algébriques, les segments, les carrés, cubes, et autres hypercubes, les simplexes, les polygones, les n -gones, le smiley de la figure 1 sont tous des ensembles semi-algébriques.

Remarque 1.5.4. On peut réaliser les boules (ouvertes ou fermées) comme des ensembles semi-algébriques. La boule ouverte de centre $x = (x_1, \dots, x_n)$ et de rayon r est en effet le semi-algébrique :

$$B_x := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < r^2\}$$

Et similairement pour la boule fermée avec un \leq au lieu du $<$.

On peut ainsi définir la topologie euclidienne dans \mathbb{R}^n , et dans ses sous-ensembles, pour un corps réel clos quelconque, en utilisant les boules ouvertes comme base d'ouverts.

La classe des ensembles semi-algébriques est stable par passage à l'adhérence et à l'intérieur⁵. Elle est aussi stable par projection.

Définition 1.5.5. Soient A, B des ensembles semi-algébriques. Une fonction $f : A \rightarrow B$ est semi-algébrique si son graphe $\mathcal{G}_f \subseteq A \times B$ est semi-algébrique.

Exemple 1.5.6. • Les polynômes et les fonction régulières sont semi-algébriques.

- Les fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmes, ne sont pas semi-algébriques.
- La fonction $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est semi-algébrique. En effet, son graphe peut être écrit comme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$$

- En fait, toute fonction décrite, même par morceaux (en nombre fini), à partir de racines, d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, est semi-algébrique.
- Cependant, vu que les racines de polynômes de degré ≥ 5 ne sont pas toutes décrivables à partir de radicaux, il est vain d'espérer définir toutes les fonctions semi-algébriques avec les racines n^e et les quatre opérations élémentaires.
- La fonction valeur absolue est semi-algébrique, mais la fonction partie entière ne l'est pas. En effet, la première se fait en deux demi-droites $y = -x, y = x, y \geq 0$ alors que la deuxième demande un nombre infini de morceaux.

Ces fonctions semi-algébriques seront souvent utilisées dans ce manuscrit comme des chemins permettant d'accéder à une limite donnée, de la même manière qu'on utilise les suites dans \mathbb{R}^n pour aboutir à leur limite. Les suites posent en effet problème dans la mesure où, pour pouvoir les utiliser dans un corps réel clos quelconque, il faudrait les indexer par

5. Attention, il ne suffit pas de relâcher les inégalités strictes pour obtenir l'adhérence. Par exemple l'adhérence de $x^3 > x^2 + y^2$ diffère d'un point de $x^3 \geq x^2 + y^2$: le fameux point isolé de la cubique.

des ordinaux cofinaux dans ce corps réel clos, et pas par des entiers naturels.

Pour utiliser les arcs semi-algébriques, deux outils nous sont essentiels. Le premier nous dit que l'adhérence d'un semi-algébrique est atteignable par chemins semi-algébriques (voir [BCR13, 2.5.5]) :

Lemme 1.5.7 (de sélection des courbes, ou « des petits chemins »).

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique. Soit $x \in \overline{A}^{euc}$. Il existe une fonction semi-algébrique continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(0) = x$ et $f(]0, 1]) \subseteq A$.

Le second nous dit que toute fonction semi-algébrique continue, définie sur un intervalle ouvert, à image bornée, possède une limite (voir [BCR13, 2.5.3]).

Lemme 1.5.8 (de prolongement des arcs bornés). *Soit R corps réel clos et $\alpha :]0, r] \rightarrow R$ une fonction semi-algébrique continue et bornée définie sur $]0, r] \subseteq R$. Alors α peut être prolongée continûment en 0.*

Un résultat important sur ces fonctions est qu'elles n'ont pas de croissance plus grande que les croissances polynomiales (ou rationnelles pour les explosions locales). Cela veut ainsi dire que deux croissances sont comparables à une puissance $n \in \mathbb{N}^*$ près. Ce résultat permet alors de prolonger certaines fonctions semi-algébriques qui sont le produit d'une puissance d'une fonction qui s'annule en un endroit et d'une fonction qui explose en cet endroit (voir [BCR13, 2.6.4]) :

Théorème 1.5.9 (inégalité de Łojasiewicz). *Soit A un ensemble semi-algébrique localement fermé, et $f : A \rightarrow R$ une fonction semi-algébrique continue.*

Soit g une fonction semi-algébrique continue définie sur $\{x \in A, f(x) \neq 0\}$

Alors il existe un entier $N > 0$ tel que $f^N g$ prolongée par 0 quand $f = 0$ est continue sur A

Par exemple, si l'on prend $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ (qui est toujours définie quand $x \neq 0$), alors avec $N = 3$ on trouve $\frac{x^3}{x^2 + y^2}$ qui est prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

Le mot « inégalité » dans la nomination du théorème découle d'une autre formulation du résultat, où l'on minore localement la croissance de $\frac{1}{g}$ par la croissance de f^n à une constante près.

1.6 Espaces d'arcs semi-algébriques

Nous travaillerons dans certaines sections sur les espaces d'arcs. Nous suivrons les notations de [BPR06] :

Définition 1.6.1. On note $R\langle\langle T \rangle\rangle$ le corps des séries de Puiseux sur R , c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles de la forme :

$$a = \sum_{i \geq m} a_i T^{\frac{i}{n}} \text{ avec } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R$$

L'ensemble des séries de Puiseux algébriques sur $R(X)$ seront notées $R\langle T \rangle$.

Ces ensembles sont des corps réels clos, voir [BPR06, §2.6] pour une explication détaillée sur la méthode des diagrammes de Newton, permettant de trouver les racines d'un polynôme de $R\langle\langle T \rangle\rangle[X]$. L'ordre naturel de ces corps réels clos rend T positif et infinitésimal. Il existe une valuation naturelle sur ces ensembles :

Définition 1.6.2. Pour $a \in R\langle\langle T \rangle\rangle$ une série de Puiseux, on notera $v(a)$ l'ordre de a , le plus petit degré en T apparaissant dans l'écriture de a . Par convention, l'ordre de 0 vaut $+\infty$

Le coefficient associé est appelé coefficient initial.

Proposition - définition 1.6.3 ([BPR06, 2.121 & 2.122]). Dans $R\langle T \rangle$, l'ensemble des éléments d'ordre positif forme un anneau de valuation, l'anneau des séries de Puiseux bornées que l'on notera $R\langle T \rangle_b$. Cet anneau est exactement l'ensemble des éléments qui sont bornés par un élément de R , et qui s'écrivent donc $r + i$ avec $r \in R$ et i un infinitésimal.

Il existe un morphisme d'anneau $\lim : R\langle T \rangle_b \rightarrow R$ qui à un élément associe son coefficient d'indice 0.

L'ensemble ainsi algébriquement défini a une interprétation en termes de germe de fonctions semi-algébriques, qui seront régulièrement utilisées dans ce manuscrit :

Proposition 1.6.4. $R\langle T \rangle$ est isomorphe à l'ensemble des germes à droite des fonctions $f :]0, \epsilon[\rightarrow R$ semi-algébriques continues.

Suivant cet isomorphisme, $R\langle T \rangle_b$ est alors l'ensemble des germes de fonctions semi-algébriques continues bornées, et \lim est alors l'opération limite qui à un germe associe sa limite en 0, par 1.5.8. Ainsi, une fonction semi-algébrique continue bornée $f :]0, \epsilon[\rightarrow R^n$ est canoniquement associée à un élément de $(R\langle T \rangle_b)^n$. On peut alors définir les germes de fonctions semi-algébriques à valeur dans une variété affine X et voir qu'ils s'agit exactement des séries de Puiseux qui vérifient l'extension à $R\langle T \rangle_b$ de l'équation sur R qui définit la variété X . Voir [BPR06, 3.19 & 3.20]

En confondant les éléments correspondants via cet isomorphisme, ainsi qu'en confondant un germe et son représentant, on obtient alors la définition suivante :

Définition 1.6.5. Soit des $P_i \in R[T_1, \dots, T_n]$, et soit $X \subseteq R^n$ une variété algébrique donnée par

$$X = \{x \in R^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_k(x) = 0\}$$

On appellera un arc semi-algébrique de $X \subseteq R^n$, au choix :

- Une fonction $[0, 1] \rightarrow X$ semi-algébrique continue
- Un germe en 0 d'une fonction semi-algébrique continue de R dans X .
- Un n -ulpet de séries de Puiseux $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ vérifiant pour tout i l'équation

$$P_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0$$

Pour nos résultats en dimension 2, il sera utile d'enlever les arcs constants (ou de manière équivalentes les séries n'ayant que leur terme d'indice 0 qui soit non nul). Pour simplifier la notation, et parce que ça n'enlève pas de généralité, on enlèvera ces arcs constants dans tous nos espaces d'arcs.

Notation 1.6.6. Dans ce manuscrit, on notera \widehat{X} l'ensemble des germes d'arcs de X bornés et non constants. En regardant

$$X = \{x \in R^n \mid p_1(x) = \dots = p_k(x) = 0\}$$

on aura alors :

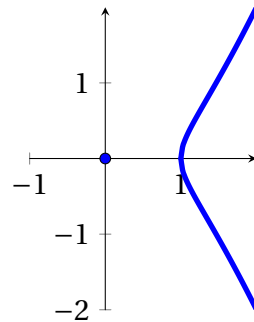
$$\widehat{X} = \{\alpha \in (R\langle T \rangle_b)^n \mid p_1(\alpha) = \dots = p_k(\alpha) = 0\} \setminus R^n$$

Où $R^n \subseteq (R\langle T \rangle_b)^n$ est vu comme les séries ayant un seul coefficient, en la puissance T^0 .

On remarquera qu'une série de Puiseux bornée s'écrit $a \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^{k/n}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $a(T^n)$ où l'on substitue T par T^n dans l'écriture, est une série formelle. Comme elle est algébrique, elle représente un germe de fonction de Nash ([BCR13, 8.1.5]). On retrouve ce résultat entre autres en [BCR13, 8.1.16]. Notre travail aurait donc entièrement pu être réalisé avec les arcs Nash développés dans [BCR13, Chap 8].

1.7 Fonctions régulières

Le travail de ce manuscrit est en grande partie inspiré de [Fic+16], qui introduit et étudie les fonctions régulières. Une autre base de définition a été donnée dans [KZ18], et plus récemment dans [KK21] pour les corps réels clos quelconques. Une motivation d'étude pour ces fonctions vient de la variété algébrique $x^3 = x^2 + y^2$ dont la représentation est donnée en figure 5.

FIGURE 5 – La courbe de $x^3 = x^2 + y^2$

Le point isolé peut en effet être décrit à l'aide de l'équation $x^2 + y^2 = 0$, alors qu'il n'existe aucune équation polynomiale qui permette de décrire la courbe sans le point. Pour la décrire, il faut en effet utiliser l'équation $\frac{x^3}{x^2 + y^2} = 1$ qui n'est ni une équation polynomiale, ni une équation régulière.

Définition 1.7.1. Soit X une variété algébrique affine réelle plongée irréductible et non singulière.

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite régulière si elle est rationnelle sur un ouvert de Zariski dense $U \subseteq X$ et si elle est continue sur X .

En d'autres termes, une fonction rationnelle de $U \subseteq X$ dans \mathbb{R} et prolongeable par continuité sur $X \setminus U$ est régulière. On rappelle que notre variété X est ici supposée affine plongée, irréductible, et surtout régulière. Sur une variété singulière, on aurait seulement défini les fonctions rationnelles continues. Pour définir une fonction régulière, il aurait fallu utiliser une autre propriété essentielle :

Proposition 1.7.2. Soit X une variété algébrique affine réelle plongée irréductible et non singulière.

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière si et seulement si elle est continue et s'il existe une stratification⁶ $X = \bigcup S_i$ telle que $f|_{S_i}$ est régulière.

On peut aussi définir les fonctions k -régulières, en demandant \mathcal{C}^k au lieu de \mathcal{C}^0 . On remarque alors [Kuc09, 2.1] qu'une fonction ∞ -régulière est en fait régulière.

Définition 1.7.3. Soit X une variété algébrique affine réelle plongée irréductible et non singulière.

6. Une stratification est un découpage de l'espace en des ensembles localement Zariski fermés disjoints.

L'ensemble des zéros d'une fonction f régulue sur X est défini comme

$$\mathcal{Z}(f) := \{x \in X, f(x) = 0\}$$

On définit sur X la topologie régulue en utilisant les complémentaires des $\mathcal{Z}(f)$, où f est régulue sur X , comme base d'ouverts.

La topologie régulue coïncide alors (voir [Fic+16, 4.12]) avec la topologie constructible, dont les fermés sont (fermés euclidiens et) constructibles à l'aide de l'intersection, l'union et le complémentaire, à partir des fermés de Zariski. Autrement dit, ce sont des réunions finies d'ensembles localement fermés au sens de Zariski. On aurait obtenu les mêmes fermés avec les fonctions k -régulues.

Proposition 1.7.4. *La topologie régulue est noetherienne : il n'existe pas de chaîne infinie décroissante de fermés régulus*

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \dots \supsetneq X_k \supsetneq \dots$$

L'anneau des fonctions régulues n'est pas noetherien. Cela limite a priori beaucoup la description algébrique de cet anneau. Cette noetherianité topologique nous permet de nous sortir de bien des difficultés algébriques, en effet, si l'on a un idéal I qui n'est pas de type fini, on peut regarder son lieu des zéros, qui lui sera un lieu géométrique généré avec un nombre fini d'équations. On reviendra alors dans la théorie des anneaux avec un idéal J , lui de type fini, qui a le même lieu des zéros, ce qui veut alors dire que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. C'est l'un des ingrédients clés pour obtenir le Nullstellensatz k -régulu :

Théorème 1.7.5. *Soit I un idéal de l'anneau des fonctions régulues sur X . Alors $\mathcal{S}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$*

De manière encore plus forte, une astuce⁷ propre au réel nous permet d'avancer que tout idéal de l'anneau des fonctions régulues est radicalement principal, à savoir qu'il existe toujours $f \in I$ tel que $\sqrt{I} = \sqrt{\langle f \rangle}$.

L'autre ingrédient clé dans l'établissement de ce Nullstellensatz et de cette radicale principalité est une version régulue de l'inégalité de Łojasiewicz :

Théorème 1.7.6. *Soient n et k des entiers naturels. Soit f une fonction k -régulue sur \mathbb{R}^n . Si $g : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ est k -régulue, alors il existe un entier naturel N tel que l'extension à \mathbb{R}^n par 0 de $f^N g$ est k -régulue.*

7. Pour un ensemble fini de fonctions f_1, \dots, f_k , la fonction $f_1^2 + \dots + f_k^2$ a pour ensemble de zéros l'intersection des $\mathcal{Z}(f_i)$, à savoir le $\mathcal{Z}(J)$, où J est l'idéal engendré par ces f_i .

Cette inégalité est la clé qui permet de voir que si pour deux fonctions f, g on a $\mathcal{Z}(f) \subseteq \mathcal{Z}(g)$ alors il existe un entier N tel que $h = \frac{g^N}{f}$ est régulue. C'est ainsi un outil puissant pour créer de nouvelles fonctions réguliues. De plus, l'écriture $g^N = fh$ nous permet de voir que $g \in \sqrt{\langle f \rangle}$.

Une conséquence remarquable de la théorie des fonctions réguliues est un analogue des théorèmes A et B de Cartan. Le théorème A dit essentiellement que les fonctions réguliues définies sur une carte d'une variété algébrique abstraite sont en fait issues de fonctions réguliues globales définies sur l'entièreté de la variété. Le théorème B est une reformulation cohomologique de cette affirmation. Ni les fonctions Nash, ni les fonctions régulières ne vérifiaient ce théorème, et les fonctions réguliues sont ainsi les premières fonctions rationnelles permettant de faire de la géométrie algébrique réelle avec des analogues de ces théorèmes.

1.8 Anneaux des fonctions bornées

Dans la littérature, on trouve diverses études de ce qui est appelé "anneau d'holomorphie". Suivant [Sch03], nous préférons la terminologie "anneau des éléments bornés" puisque le lien avec les fonctions holomorphes est plutôt historique que concret.

Nous aurons besoin d'une version relative de la définition.

Définition 1.8.1. *Soit A , un anneau, B un sous-anneau. On appelle anneau des éléments bornés de A relativement à B l'ensemble*

$$H(A, B) := \{a \in A \mid \exists k \in B, (k \pm a) \text{ sont des sommes de carrés dans } A\}$$

On notera aussi $H(A) := H(A, \mathbb{Z}) = H(A, \mathbb{Q})$ l'anneau des éléments bornés de A , qu'on pourra appeler « anneau absolu » ou « anneau des éléments absolument bornés »

Dans ce qui nous intéresse, A sera un corps de fractions rationnelles sur une variété affine et B sera ou bien R le corps réel clos sur lequel est construit la variété, ou bien l'anneau de polynômes de la variété.

Un premier théorème [Bec82a, 1.12] nous permet de voir que $H(A, B)$ est l'ensemble des anneaux de valuation de A qui contiennent B . Il nous permet aussi de voir que l'anneau absolu est lié à l'anneau relatif par (voir aussi [Sch82a, premier lemme]) :

$$H(A, B) = B \cdot H(A)$$

La définition 1.8.1 est utilisée dans [Bec82a], [BK89], [Kuc91] ou [KR96], mais on trouve aussi une version, par exemple dans [Sch03] ou [Mon98] où l'on remplace « être une somme de carrés » par « être positif sur le spectre réel de A ». Notre définition de base 1.8.1 devient alors l'anneau des éléments arithmétiquement bornés. Cette différence est importante quand A est un anneau, mais ne l'est pas pour un corps. En effet, la solution du 17^e problème de Hilbert [Art27, Satz 1], donnée en [BCR13, 6.1.9-10] pour le cas des fonctions rationnelles, nous affirme que dans nos cas, les éléments positifs partout sont exactement les sommes de carrés. On a donc :

Proposition 1.8.2. *Si A est le corps des fractions rationnelles sur X , et B un sous-anneau de A alors $H(A, B) = \{f \in A, \exists k \in B, \forall x \in \text{dom } f \cap \text{dom } k, (k - f)(x) \geq 0 \text{ et } (k + f)(x) \leq 0\}$*

Le cas qui nous intéresse se révèle ainsi par l'énoncé suivant, donné avec $R = \mathbb{R}$ par [BK89, 1.2], et en [Sch82a, premier théorème] pour le cas des fonctions uniformément bornées :

Proposition 1.8.3. *Si A est l'anneau de fractions rationnelles sur X , et B l'anneau des polynômes de X (resp. $B = R$), alors $H(A, B)$ est l'ensemble des fonctions rationnelles bornées (localement, resp. uniformément) sur X (au sens de notre définition 2.1.1)*

Il a ainsi été montré en [Bec82a, 1.22] que cet anneau est de dimension de Krull $\leq n$. On développera ces points entre 4.4.10 et 4.4.12, et on montrera que cette dimension vaut exactement n dans notre cas.

Proposition 1.8.4 ([BK89]). *Soit $A = R(X)$ et $B = R[X]$ avec X une variété réelle affine de dimension d . $H(A, B)$ est un anneau de Prüfer, et ses idéaux de type finis peuvent être engendrés par $d + 1$ éléments. La borne peut être descendue à d si $X(\mathbb{R})$ ne contient aucune composante connexe compacte. Ces bornes sont optimales.*

Enfin, nous nous devons de rappeler qu'il a été montré en [KR96, 2.1] (cas $R = \mathbb{R}$ pour les localement bornées), et en [Sch82a, §4] (cas R quelconque pour les uniformément bornées) que les fonctions rationnelles bornées sont régulières après éclatements, ce qui a été un des premiers travaux de notre thèse, voir 2.3.2

LES FONCTIONS RATIONNELLES BORNÉES

Dans toute ce chapitre, comme dans les autres chapitres à l'exception du dernier, et sauf mention contraire pour des résultats isolés, X est une variété algébrique réelle, affine plongée, non singulière et irréductible sur un corps R réel clos.

Dans ce chapitre, on va définir puis donner les premiers outils d'analyse de l'objet de cette étude : les fonctions rationnelles bornées. On commence par donner une définition locale, puis on aborde le cas des fonctions globalement bornées, qui correspond à l'anneau des éléments bornés, plus connu sous la terminologie « anneau d'holomorphie », voir 1.8.3. Ensuite on établit les bases de l'étude par éclatements ainsi que la manière dont va s'interpréter dans notre cas le théorème d'Hironaka sur la résolution des singularités (ou plutôt des indéterminations dans ce qui nous concerne). Enfin, on donne les premières propriétés de notre anneau, celles qui ne découlent pas d'arguments géométriques.

2.1 Les fonctions rationnelles localement bornées

Plusieurs choix s'offrent à nous pour définir les fonctions rationnelles localement bornées. On a choisi une définition locale, pour mettre les autres choix possibles en caractérisation. On rappelle que la notion de topologie euclidienne peut être définie pour un corps réel clos quelconque, voir 1.5.4. Les fonctions rationnelles sont définies sur des ouverts de Zariski, donc sur le lieu total à une ou plusieurs équations près. Ces ouverts sont dense, car nous sommes dans le cadre d'une variété irréductible.

Définition 2.1.1. *Soit U un ouvert de Zariski de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ variété algébrique irréductible non singulière. Une fonction rationnelle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite rationnelle bornée sur X si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage euclidien V_x de x tel que $f(V_x \cap U)$ est un sous-ensemble borné de \mathbb{R} .*

On note $R_b(X)$ l'ensemble des fonctions rationnelles bornées sur X .

Le lemme suivant nous permettra de faire la confusion entre fonction et application :

Lemme 2.1.2. Soit $g : W \rightarrow R$ une fonction rationnelle définie sur un ouvert de Zariski (dense) $W \subseteq X$, et soit $U \subseteq W$ un ouvert de Zariski dense. Si $f := g|_U$ est rationnelle bornée sur X , alors g est rationnelle bornée.

Ainsi, les représentants d'une même application rationnelle sont soit tous rationnels bornés, soit tous non bornés.

Démonstration. g rationnelle bornée $\Rightarrow f$ rationnelle bornée est le sens trivial. Montrons le sens inverse :

Soit $x \in X$. Par hypothèse, il existe un voisinage $V_x \subseteq X$ de x tel que $f(V_x \cap U)$ est borné par un nombre que l'on notera M . Un tel voisinage peut être choisi ouvert (euclidien).

Soit $y \in W \cap V_x$. Si $y \in U$ alors $|g(y)| = |f(y)| \leq M$. Sinon, g est définie donc régulière donc continue en y . On utilise la définition de continuité avec $\epsilon = 1$. On obtient un η vérifiant :

$$\forall z, |y - z| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - g(z)| \leq 1$$

Par densité (euclidienne) de U dans X , on sait qu'il existe un z à distance $\leq \eta$ de y qui soit dans U . On peut même prendre un tel z dans $U \cap V_x$, ayant choisi un V_x ouvert. Alors

$$|g(y)| \leq |g(z)| + 1 \leq M + 1$$

On a donc bien $g(W \cap V_x)$ borné par $M + 1$, et g est donc bien rationnelle bornée. \square

Exemple 2.1.3. Les fonctions polynomiales, régulières et régulières sont rationnelles bornées.

Exemple 2.1.4. L'exemple qui nous servira de base pour toute cette étude est le suivant :

$$\begin{aligned} f : R^2 &\rightarrow R \\ (x, y) &\mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

dont le graphe est donné en figure 6

On observe que la fonction n'est pas définie en $(0, 0)$: si, dans R^2 , on souhaite s'approcher de l'origine selon la droite $y = ax$ (en voyant la droite verticale comme le cas $a = \infty$), on obtiendra $\frac{x^2}{x^2 + a^2 x^2} = \frac{1}{1 + a^2}$ dont les valeurs varient continûment entre 1 (cas $a = 0$) et 0 (cas $a = \infty$).

Proposition 2.1.5. Soit $X \subseteq R^n$ une variété algébrique irréductible non singulière. $R_b(X)$ est un sous-anneau du corps $R(X)$ des fractions rationnelles sur X

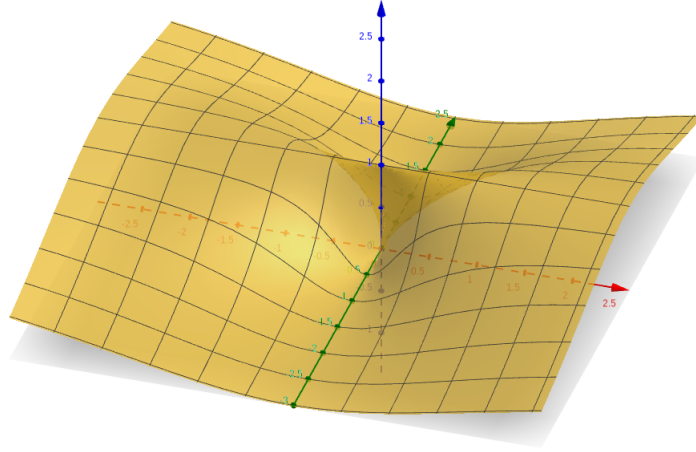


FIGURE 6 – Graphe de $\frac{x^2}{x^2+y^2}$

Démonstration. Si f et g sont bornées par M et N sur des voisinages V_x et W_x , alors $f + g$ et fg sont bornées par respectivement $M + N$ et MN sur $V_x \cap W_x$. Or le lieu de définition de ces deux fonctions contient $V_x \cap W_x$ comme sous-ensemble dense, donc on peut appliquer 2.1.2 pour conclure.

Similairement, $-f$ est bornée par M sur V_x ; et enfin la fonction unitaire et la fonction nulle sont bornées. □

Corollaire 2.1.6. *Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ une variété algébrique irréductible non singulière. $R_b(X)$ est un anneau intègre.*

Démonstration. C'est en effet un sous-anneau d'un anneau intègre. □

On donne ensuite une caractérisation par des arcs. Nous travaillerons pour la quasi-intégralité de cette étude avec les arcs semi-algébriques. Le choix de prendre un corps réel clos quelconque restreint en effet les possibilités; nous aurions cependant pu prendre les arcs Nash, même si en pratique les deux ne diffèrent pas beaucoup (voir [BCR13, 8.1.16]).

Proposition 2.1.7 (caractérisation par des arcs). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction rationnelle sur X , avec U ouvert de Zariski de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ variété algébrique irréductible non singulière. f est rationnelle bornée ssi pour tout arc semi-algébrique continu $\gamma :]0, 1[\rightarrow X$ vérifiant $\gamma(]0, 1[) \subseteq U$, l'arc $f \circ \gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est borné.*

Notons qu'une condition « $\gamma :]0, 1] \rightarrow U$ continu et borné » implique que γ peut se prolonger en fonction de $[0, 1]$ dans X par [BCR13, 2.5.3], et donc suffit à obtenir le contexte d'arc précité.

Démonstration. \Leftarrow

On procède par contraposée. On suppose donc qu'il existe un $x \in X$ tel que tout voisinage V_x de x vérifie que $f(V_x \cap U)$ est non borné, et on veut montrer qu'il existe un arc dont la composition avec f est non-bornée.

On choisit, pour $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ fixé, comme voisinage de x la boule ouverte de rayon η $B(x, \eta)$.

La fonction étant non bornée par hypothèse, il existe $y_\eta \in B(x, \eta)$ telle que $|f(y_\eta)| \geq \frac{1}{\eta}$.

On pose $A := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^* \mid |f(x)| \geq 1/y\} \subseteq X \times \mathbb{R}$. Cet ensemble est semi-algébrique de la manière dont il est construit, et on montre que $(x, 0) \in \overline{A}$, comme limite en 0 de la fonction (non semi-algébrique) qui à η associe (y_η, η) .

En effet, soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta := \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Soit $\eta < \delta$. On a alors :

$$\sqrt{\|y_\eta - x\|^2 + \eta^2} \leq \sqrt{\eta^2 + \eta^2} < \epsilon$$

On peut ainsi appliquer le lemme de sélection des courbes pour trouver une fonction semi-algébrique continue dans A ayant pour limite $(x, 0)$. Les n premières coordonnées de ce chemin définissent un chemin $\gamma :]0, 1] \rightarrow X$ d'image incluse dans U . Ce γ est semi-algébrique par projection de semi-algébrique, et la limite de la dernière coordonnée nous montre que $f \circ \gamma$ n'est pas borné.

\Rightarrow

Soit $\gamma :]0, 1] \rightarrow X$ un arc semi-algébrique continu borné vérifiant $\gamma(]0, 1]) \subseteq U$

On pose $x = \gamma(0)$. Par hypothèse sur f , il existe V_x voisinage euclidien de x dans X tel que f est bornée, disons par M , sur $V_x \cap U$.

Quitte à prendre un voisinage plus petit, on peut supposer que V_x est ouvert.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = x$, on peut trouver un $\epsilon > 0$ vérifiant que $\gamma(]0, \epsilon[)$ est entièrement inclus dans V_x . Et alors $f(\gamma(]0, \epsilon[))$ est bornée par M

Par hypothèse sur γ , on a de plus $\gamma(] \epsilon, 1]) \subseteq U$. Donc $f(\gamma(] \epsilon, 1]))$ est l'image d'un fermé borné par une application continue (car régulière sur U), c'est donc borné aussi. D'où $f \circ \gamma$ est un arc borné. \square

Comme la majorité de ce travail est pensée sur \mathbb{R} , nous avons préféré garder comme nom "caractérisation par des compacts" pour la proposition suivante. Même si en pratique on fait

une caractérisation par les fermés bornés. La preuve dans le cas $R = \mathbb{R}$ avec la compacité sera d'ailleurs étudiée.

Proposition 2.1.8 (caractérisation par des compacts). *Soit $f : U \rightarrow R$ une fonction rationnelle sur X , avec U ouvert de Zariski de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ variété algébrique irréductible non singulière. f est rationnelle bornée ssi pour tout fermé borné K de X , $f(K \cap U)$ est un sous-ensemble borné de R , i.e. $\exists M \in R_{>0}, \forall x \in K \cap U, -M \leq f(x) \leq M$*

La démonstration du sens direct sera faite dans un premier temps dans le cas $R = \mathbb{R}$.

Démonstration. Commençons par le sens réciproque : pour $x \in X$, on considère un voisinage fermé borné de x et on applique notre hypothèse dessus.

Pour le sens direct, on montre d'abord une preuve dans le cas $R = \mathbb{R}$.

K hérite de la topologie (euclidienne) venant de X . Pour chaque $x \in K$ on utilise la définition 2.1.1 pour trouver un voisinage V_x , que l'on peut supposer ouvert (quitte à en prendre un plus petit), tel que f soit bornée sur $V_x \cap \text{dom } f$; on note M_x la borne associée.

On écrit alors K comme un recouvrement $K = \bigcup_{x \in K} V_x$. Comme $R = \mathbb{R}$ ici, K est compact, donc on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini : $K = \bigcup_{i \leq k} V_{x_i}$.

Alors $f(K \cap U) = \bigcup_i f(V_{x_i} \cap U)$. On peut donc borner $f(K \cap U)$ par $\max_{i \leq k} M_{x_i}$. \square

Remarque 2.1.9. La preuve pour un corps réel clos quelconque utilise les éclatements et sera donc donnée après la proposition 2.3.2. Elle est cependant utilisée entre les deux. Il nous appartient donc de vérifier qu'il n'y a aucune circularité. On fait référence au lemme 2.2.6 qui n'est ensuite utilisé qu'en 3.2.4; donc heureusement après la démonstration promise. Ce lemme n'est donc pas utilisé dans la preuve promise.

Il n'y a qu'une autre utilisation de cette caractérisation : en 4.2.3, donc après la preuve aussi.

Enfin, si nous avons pour l'instant défini les fonctions rationnelles bornées comme étant des fonctions à valeur dans R , on peut en donner une version plus générale :

Définition 2.1.10. *Une fonction $f : R^n \rightarrow R^m$ est dite rationnelle bornée si toutes ses fonctions coordonnées le sont. Il en sera de même pour des applications entre variétés algébriques réelles affines régulières irréductibles $f : X \rightarrow Y$. On notera $R_b(X, Y)$ l'ensemble des fonctions rationnelles bornées de X dans Y .*

Nous n'aborderons pas dans cette étude le cas des ensembles non lisses ou non irréductibles qui amènent leurs lots de difficultés déjà dans des cadres plus simples; et les fonctions rationnelles bornées de \mathbb{R}^n amènent déjà elles aussi un nombre considérable de problèmes.

Le choix a été fait de prendre un corps réel clos de base quelconque. La généralité est en effet une qualité intéressante en toute circonstance, et n'a rendu la chose délicate qu'à un endroit : en 2.1.8 où il a fallu de plus gros outils pour arriver à nos fins. Ceci dit, les spécificités des corps de base différents de \mathbb{R} seront peu abordées.

2.2 Les fonctions rationnelles globalement bornées

Dans cette partie, on va s'intéresser à définir les fonctions globalement bornées. Elles seront peu étudiées par la suite, car les anneaux ne diffèrent pas énormément, que ce soit géométriquement (voir 3.3) ou algébriquement (voir 2.2.6). Ceci dit, le lien entre les fonctions rationnelles bornées et les anneaux de fonctions bornées (aussi appelés anneaux d'holomorphic dans la littérature), est plus naturel avec les fonctions globalement bornées, puisqu'il s'agit de l'anneau absolu et non pas d'un anneau relatif, voir 1.8.3.

On rappelle que dans cet exposé, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est une variété algébrique irréductible non singulière.

Définition 2.2.1. Une fonction rationnelle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert de Zariski $U \subseteq X$ est dite globalement bornée si $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble borné. On notera $R_\infty(X)$ l'ensemble des fonctions globalement bornées sur X .

De la même manière que pour les fonctions localement bornées, les différents représentants d'une application rationnelle sont soit tous bornées, soit aucun. Ainsi on se permettra aussi une confusion entre application rationnelle et fonction rationnelle.

Lemme 2.2.2. Si l'un des représentants d'une application rationnelle est globalement borné, alors tous ses représentants le sont.

Démonstration. Soit $U, V \subseteq X$ des ouverts de Zariski. On peut supposer $U \subseteq V$ quitte à prendre l'intersection. Si f est bornée sur V alors elle est bornée sur U . Supposons maintenant que f n'est pas bornée sur V , et montrons qu'elle n'est pas bornée sur U . Soit $M > 0$. Comme f n'est pas bornée sur V il existe $x \in V$ telle que $|f(x)| \geq M + 1$. Par continuité de f sur V on peut trouver un δ tel que :

$$|a - b| \leq \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq 1$$

Enfin, par densité (euclidienne) de U dans V on peut trouver un point $y \in U$ tel que $|y - x| \leq \delta$. Alors par inégalité triangulaire $|f(y)| \geq (M + 1) - 1 = M$. \square

Bien que la définition soit de nature assez différente de celle des localement bornées, on peut aussi donner une caractérisation par des arcs, et les démonstrations sont très similaires.

Proposition 2.2.3. *Soit $f : U \rightarrow R$ une fonction rationnelle définie sur un ouvert de Zariski de X .*

f est globalement bornée ssi pour tout arc semi-algébrique $\gamma :]0, 1[\rightarrow X$ (pas nécessairement borné), $f \circ \gamma$ est un arc borné de R .

Démonstration. Si f est globalement bornée, alors pour tout arc $\gamma :]0, 1[\rightarrow \text{dom } f$, on a :

$$f(\gamma(]0, 1[)) \subseteq f(\text{dom } f)$$

Or $f(\text{dom } f)$ est borné. D'où le résultat.

Réciproquement, on suppose par contraposée que f n'est pas bornée et on va chercher un arc semi-algébrique dont la composition avec f n'est pas bornée.

On note \widehat{X} le compactifié d'Alexandroff semi-algébrique de X .

Si l'on considère alors le graphe $\mathcal{C}_f \subseteq X \times R$ et qu'on le plonge dans $\widehat{X} \times \mathbb{P}_1(R)$, dire que f n'est pas bornée revient à dire qu'il y a un point $x \in \widehat{X}$ tel que (x, ∞) est valeur d'adhérence de \mathcal{C}_f .

On peut alors appliquer le lemme des petits chemins [BCR13, 2.5.5] pour trouver un arc semi-algébrique γ à image dans $\widehat{X} \times \mathbb{P}_1(R)$, vérifiant $\gamma(]0, 1[) \subseteq \mathcal{C}_f$ et $\gamma(0) = (x, \infty)$.

En prenant α la projection de γ sur \widehat{X} , on pourra alors remarquer que $\alpha(]0, 1[) \subseteq X$. On obtient donc un arc semi-algébrique α tel que $f \circ \alpha$ n'est pas borné. \square

Corollaire 2.2.4. *Une fonction globalement bornée est localement bornée.*

Démonstration. Il suffit d'observer les deux caractérisations par arcs : une fonction globalement bornée est bornée sur tous les arcs semi-algébriques, a fortiori sur les arcs bornés. \square

Proposition 2.2.5. *Soient X et \widehat{X} deux variétés algébriques réelles affines lisses et irréductibles.*

- *Si X est fermé borné, alors $R_\infty(X) = R_b(X)$*
- *Soit $i : X \hookrightarrow \widehat{X}$ immersion ouverte, avec \widehat{X} fermé borné, et $i(X)$ est (Zariski) dense dans \widehat{X} .*

L'immersion $X \hookrightarrow \widehat{X}$ induit un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} R_b(\widehat{X}) & \xrightarrow{\sim} & R_\infty(X) \\ f & \mapsto & f \circ i \end{array}$$

Le \widehat{X} ainsi proposé est à voir comme une compactification lisse de X (automatiquement irréductible si X l'est). Par exemple projectivisation, ou compactification d'Alexandroff suivi d'une résolution de singularité.

Démonstration.

- Si X est fermée bornée, alors tout arc semi-algébrique continu de X est borné. Il peut donc, par le lemme 1.5.8, être prolongé en 0. Ainsi, les conditions « pour tout arc semi-algébrique borné » et « pour tout arc semi-algébrique (pas forcément borné) » des deux caractérisations par arcs coïncident.

- L'image de X est Zariski dense dans \widehat{X} donc ces deux ensembles ont les mêmes fonctions rationnelles.

De plus, pour une fonction rationnelle, être (globalement) bornée ne dépend pas du choix du représentant, voir 2.2.2, d'où $R_\infty(X) \simeq R_\infty(\widehat{X})$.

Enfin par le point précédent $R_\infty(\widehat{X}) = R_b(\widehat{X})$, ce qui conclut. □

Les fonctions localement bornées et globalement bornées sont étroitement liées :

Proposition 2.2.6. *Soit $X \subseteq R^n$ une variété algébrique irréductible non singulière et $f \in R_b(X)$. En écrivant l'anneau de polynômes de X comme $R[X_1, \dots, X_n] / \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(X)$, et en écrivant x_i les images des X_i par le passage au quotient, on a :*

$$\forall f \in R_b(X), \exists N \in \mathbb{N}, \frac{f}{(1 + \sum x_i)^N} \in R_\infty(X)$$

Ainsi, on a $R_b(X) = \mathcal{P}(X) \cdot R_\infty(X)$, on a même $R_b(X) = \{(1 + \sum x_i)^N \mid N \in \mathbb{N}\} \cdot R_\infty(X)$.

Ce résultat est une conséquence directe de [BCR13, 2.6.2]. On choisit de détailler le point à la main :

Démonstration. Soit f une fonction rationnelle bornée. On regarde la fonction :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n(R) & \rightarrow & R \\ [x_0, \dots, x_n] & \mapsto & \frac{x_0^2}{\sum_{x=0}^n x_i^2} \end{array}$$

Le système étant en coordonnées homogènes, le dénominateur ne peut pas s'annuler et la fonction est bien définie. h est clairement continue et le lieu des zéros de h est l'espace projectif $x_0 = 0$, isomorphe à un $\mathbb{P}_{n-1}(R)$, qui correspond à l'espace projectif des infinis de la carte $\{x_0 \neq 0\}$. Cette carte étant isomorphe à R^n on peut faire l'identification naturelle, et on aura dessus :

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \sum_{x=1}^n x_i^2}$$

On rappelle maintenant que $\mathbb{P}_n(R)$ est un ensemble algébrique affine (cf [BCR13] 3.4.4). On a ainsi :

$$X \subseteq R^n = \mathbb{P}_n(R) \setminus \mathbb{P}_{n-1}(R) \subseteq \mathbb{P}_n(R)$$

On note alors \overline{X} la clôture euclidienne de X dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

f est une fonction semi-algébrique définie et continue (car régulière) sur $\text{dom } f$, a fortiori (comme h ne s'annule jamais) sur $\mathcal{D}(h) \cap \text{dom } f \subseteq \overline{X}$ on peut alors appliquer sur \overline{X} l'inégalité de Łojasiewicz dans sa version semi-algébrique ([BCR13] 2.6.4).

Il existe alors un entier N tel que le prolongement par 0 sur $\overline{X} \setminus X$ de $\frac{f}{(1+\sum x_i)^N}$ est continu, ce qui veut dire que, sur X , les limites de cette fraction en l'infini sont toutes nulles. En appliquant la définition de limite avec $\epsilon = 1$ en tous les points de $\overline{X} \setminus X$, on trouve un ensemble de voisinages (qu'on peut supposer ouverts) à l'intérieur duquel

$$\left| \frac{f}{(1+\sum x_i)^N} \right| \leq 1$$

Le complémentaire de l'union de ces voisinages est alors un fermé borné de X et en utilisant la caractérisation par des compacts, on peut borner à l'intérieur de ce fermé borné. Il ne reste plus qu'à prendre le maximum entre 1 (pour les voisinages de l'infini) et la borne donnée (pour l'intérieur du fermé borné), et on aura borné uniformément la fonction sur X . \square

2.3 Lien avec les éclatements

Exemple 2.3.1. Si l'on essaie de résoudre les indéterminations de l'exemple 2.1.4, on éclate l'origine en un $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ pour obtenir un ruban de Mœbius infini, voir figure 7.

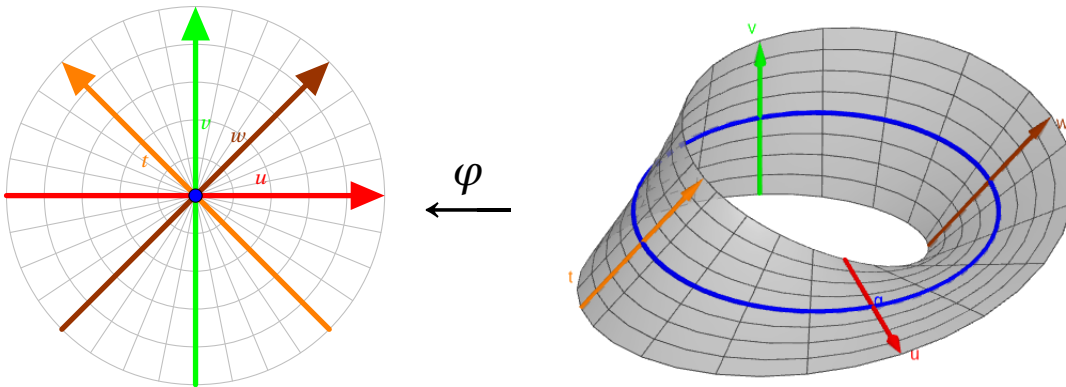


FIGURE 7 – Éclatement du point dans le plan.

Si l'on enlève une droite, on peut se placer dans une carte affine de type \mathbb{R}^2 . Par exemple, en enlevant l'axe des x , on obtient un changement de variable de type $x = u$ et $y = uv$. La fonction $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ devient alors $\frac{u^2}{u^2+u^2v^2} = \frac{1}{1+v^2}$ qui est régulière (et dont le prolongement sur

notre ruban de Mœbius est aussi régulière).

Si l'on regarde le théorème de résolution des indéterminations (voir 1.4.1), il y a essentiellement deux choses à faire pour obtenir une fonction régulière :

- On éclate l'espace de départ aux bons endroits afin de faire disparaître les singularités dans le graphe de la fonction.
- On ajoute des points infinis dans l'espace d'arrivée pour ne plus avoir d'explosion vers les infinis en des ensembles bornés. L'exemple typique pour ce cas est $f(x) = \frac{1}{x}$, où, après résolution, on a $f(0) = \infty$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Dans cette section, on étudiera comment le 2^e cas n'est pas utile pour les fonctions rationnelles bornées et comment cela peut les caractériser.

On commence avec un résultat qui, on l'a découvert après en avoir fait la preuve, existait déjà dans la littérature, voir [KR96, 2.3]. La démonstration est identique, même si nous en donnons une version valable pour un corps réel clos quelconque.

Proposition 2.3.2. *Toute fonction rationnelle bornée est régulière, à valeur dans R , après éclatements.*

C'est-à-dire que si $f \in R_b(X)$, alors il existe $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ composition d'éclatements à centres lisses telle que $f \circ \varphi : \tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}_1(R)$ est régulière sur \tilde{X} tout entier, et $f \circ \varphi(\tilde{X}) \subseteq R$

Démonstration. L'existence d'une composition d'éclatements $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ rendant f régulière nous est donné par le théorème d'Hironaka 1.4.1. Cependant, il faut pour cela prolonger d'abord le domaine d'arrivée de f , pour la rendre à valeur dans $\mathbb{P}_1(R)$. La fonction $\tilde{f} := f \circ \varphi$ sera alors à valeur dans $\mathbb{P}_1(R)$ et il nous reste à montrer que l'image de cette fonction sera bien incluse dans R .

On montre cela par contraposée. On suppose donc qu'il existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tel que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \infty$. Comme $\tilde{U} := \varphi^{-1}(\text{dom } f)$ est (euclidiennement) dense dans \tilde{X} , voir 1.4.5, on peut utiliser le lemme des petits chemins, [BCR13, 2.5.5], pour trouver un arc semi-algébrique $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ et $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq \tilde{U}$.

Soit maintenant $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$ et observons son comportement autour de $x := \varphi(\tilde{x})$:

$$f \circ \gamma = f \circ \varphi \circ \tilde{\gamma} = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}$$

On obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)) = \infty$$

Par la caractérisation par arcs, f n'est donc pas rationnelle bornée. □

En corollaire de ce résultat, on peut donner la preuve de 2.1.8 dans le cadre général :

Si f est rationnelle bornée, alors pour tout K fermé borné de X , $f(K \cap U)$ est borné.

Soit K un fermé borné et soit $f \in R_b(X)$. Si l'on note \tilde{K} l'image réciproque de K par une résolution de f la rendant régulière (une telle résolution existe, c'est ce que l'on vient de montrer dans la proposition 2.3.2), et \tilde{f} la fonction définie sur l'espace éclaté, on a

$$f(K \cap U) = \tilde{f}(\tilde{K} \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{f}(\tilde{K})$$

Or $\tilde{f}(\tilde{K})$ est borné comme image d'une fonction continue sur un fermé borné (\tilde{K} est lui-même borné car l'éclatement est une application propre et respecte les fermés bornés en image réciproque). \square

Ce que l'on a mis en valeur en proposition 2.3.2 permet de donner une caractérisation des fonctions rationnelles bornées :

Théorème 2.3.3. *Soit f une fonction rationnelle sur $X \subseteq \mathbb{R}^n$ irréductible non singulière.*

- *Si f est régulière après éclatements et que les valeurs après éclatements sont dans R , alors f est rationnelle bornée.*
- *Si f est régulière après éclatements et qu'il existe $M \in R$ tel que les valeurs après éclatements sont dans $[-M, M]$, alors f est globalement bornée.*

Démonstration. • Soit $f : X \rightarrow R$ une fonction régulière après éclatements. Soit $(\tilde{X}, \tilde{f}, \varphi)$ une résolution la rendant régulière. On pose \tilde{U} le complémentaire du lieu exceptionnel et $U := \varphi(\tilde{U})$.

Comme φ est un isomorphisme sur \tilde{U} et que \tilde{f} est régulière sur \tilde{X} et donc sur \tilde{U} , f est régulière sur U , ouvert dense par 1.4.5. Donc f est bien rationnelle et $U \subseteq \text{dom } f$. Il reste à prouver que si les valeurs sont dans R , alors f est rationnelle bornée (la résolution étant encore à ce jour à valeur dans $\mathbb{P}_1(R)$).

Par contraposée, supposons que f n'est pas bornée, et montrons que les valeurs après éclatement ne sont pas dans R .

Selon la caractérisation par des arcs, il existe $x \in X$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ vérifiant $\gamma(]0, 1]) \subseteq U$ et $\lim \gamma = x$, tel que $f \circ \gamma$ n'est pas bornée. Comme γ est borné et que f est continue sur $\text{dom } f$, on sait que c'est à sa limite que $f \circ \gamma$ n'est pas bornée. Comme que cette limite ne peut pas être dans $\text{dom } f$, a fortiori elle n'est pas dans U .

Comme φ est un isomorphisme sur \tilde{U} , on peut définir $\tilde{\gamma} := \varphi^{-1}\gamma$ sur $]0, 1]$, puis on pourra prolonger par continuité via par le lemme de prolongement [BCR13, 2.5.3] : comme l'image

de γ est bornée, l'antécédent $\tilde{\gamma}(\]0, 1])$ est aussi borné, car φ est une composition d'éclatements qui sont des applications propres.

En notant alors $\tilde{x} := \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(t)$, on remarque que

$$\begin{aligned} \lim \tilde{f} \circ \tilde{\gamma} &= \lim f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma \\ &= \lim f \circ \gamma \\ &= \infty \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \infty$ et donc que \tilde{f} n'est pas à valeur dans R .

- Avec les mêmes notations de résolution, on sait que $\tilde{f}(\tilde{X}) \subseteq [-n, n]$.

Or $f(U) = \tilde{f}(\tilde{U}) \subseteq \tilde{f}(\tilde{X})$. Ainsi, $f(U) \subseteq [-n, n]$ et f est globalement bornée. \square

Dans [Fer+18, 3.15], il est donné une caractérisation pour le cas $X = \mathbb{R}^2$ utilisant la propriété de relèvement des arcs, qui intervient entre autres dans l'étude de l'équivalence blow-analytique, voir [Cos+07]. On va généraliser ce résultat en toutes dimensions. Cela permettra aussi de généraliser, en passant de « une résolution » à « une application qui relève les arcs », le cas $R = \mathbb{R}$ du théorème 2.3.3 précédent.

Rappelons d'abord la définition :

Définition 2.3.4. Soit X, \tilde{X} deux \mathbb{R} -variétés algébriques affines régulières irréductibles.

Une application $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ relève les arcs si pour tout arc analytique $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, p)$ (où $p \in X$) il existe un arc analytique $\tilde{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{p})$ tel que $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Notons qu'une application qui relève les arcs est nécessairement surjective.

Théorème 2.3.5. Soit X une \mathbb{R} -variété algébrique affine régulière irréductible.

Soit $f : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction rationnelle.

f est rationnelle bornée ssi il existe \tilde{X} et $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ régulière relevant les arcs telle que $f \circ \varphi$ est régulière.

Notons qu'une telle application n'a pas besoin d'être propre. Par exemple, la fonction suivante relève les arcs :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

En effet, si l'on prend un arc $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, y)$, alors sur le segment $]y, y + 2\pi]$ on trouvera un point x sur lequel $f(x) = y$ et sur lequel la fonction sera localement bijective, ce qui permettra de relever l'arc.

Mais f n'est pas propre : la préimage de 0 est non bornée.

Démonstration. Le sens direct est une conséquence de 2.3.2 et du fait qu'un éclatement relève les arcs (voir [FP08, §4]), étudions donc le sens réciproque : soit φ relevant les arcs et tel que $f \circ \varphi$ est régulière. Supposons par l'absurde que f n'est pas rationnelle bornée. Par 2.1.7 on sait qu'il existe un arc semi-algébrique (donc analytique) borné $\gamma :]0, 1[\rightarrow \text{dom } f$, avec $f \circ \gamma$ non borné.

On utilise alors la propriété de relèvement des arcs pour trouver

$$\tilde{\gamma} :]0, 1[\rightarrow \tilde{X} \text{ tel que } \varphi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$$

Sur $]0, 1[$ on a alors

$$f \circ \varphi \circ \tilde{\gamma} = f \circ \gamma$$

Donc $f \circ \varphi$ n'est pas bornée le long de l'arc $\tilde{\gamma}$. Ce qui est absurde : $f \circ \varphi$ est continue (car régulière) donc l'image du segment borné $]0, 1[$ doit être bornée. \square

Remarque 2.3.6. La démonstration peut s'adapter au cas R quelconque avec une propriété de relèvement des arcs semi-algébriques (et pas analytiques). Cependant, cette propriété semble moins répandue dans la littérature.

Enfin, on finit cette section avec un résultat liant les fonctions rationnelles bornées de l'espace de départ et celles de l'espace éclaté :

Théorème 2.3.7. *Tout morphisme birationnel propre entre deux variétés algébriques réelles affines non singulières irréductibles $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ induit un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} R_b(X) &\xrightarrow{\sim} R_b(\tilde{X}) \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

Démonstration. La composition $f \mapsto f \circ \varphi$ induit un morphisme entre les corps de fractions rationnelles $R(X) \rightarrow R(\tilde{X})$.

C'est en effet un morphisme car la composition par φ respecte somme, produit, produit par scalaire, et que de plus $\varphi \circ 0 = 0$ et $\varphi \circ 1 = 1$ (où 0 et 1 désignent les éléments nuls et unités des algèbres correspondantes, donc des fonctions constantes).

Ce morphisme est un isomorphisme, c'est en effet l'essence de la propriété de birationalité. On montre alors que ce morphisme, restreint à $R_b(X)$, est à valeur dans $R_b(\tilde{X})$. Puis on montrera que le morphisme inverse, à savoir la composition par φ^{-1} , restreint à $R_b(\tilde{X})$, est à valeur dans $R_b(X)$.

Soit $f \in R_b(X)$, on veut montrer que $\tilde{f} := f \circ \varphi \in R_b(\tilde{X})$.

D'abord soit $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U)$. Comme f est régulière sur U et que φ est surjective, \tilde{f} est définie et

régulière sur \tilde{U} . Soit $\tilde{\gamma}$ un arc semi-algébrique de \tilde{X} vérifiant $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq \tilde{U}$. On définit $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$. C'est un arc semi-algébrique de X et il vérifie $\gamma([0, 1]) \subseteq U$. Comme f est rationnelle bornée, $f \circ \gamma$ est bornée. Or $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Donc \tilde{f} est rationnelle bornée par la caractérisation par arcs.

Réciproquement, si $\tilde{f} \in R_b(\tilde{X})$, on veut montrer que $f := \tilde{f} \circ \varphi^{-1} \in R_b(X)$

Soit K un fermé borné de X . Comme φ est propre, $\tilde{K} := \varphi^{-1}(K)$ est aussi un fermé borné de \tilde{X} . De plus, $f(K) \subseteq \tilde{f}(\tilde{K})$ qui est borné par application de la définition. Donc $f(K)$ est aussi borné et f est rationnelle bornée par la caractérisation par des compacts. \square

Ce théorème se reformule ainsi en "l'ensemble des fonctions rationnelles bornées est un invariant birationnel propre".

Remarque 2.3.8. Une démonstration similaire montrerait que $R_\infty(\tilde{X}) \simeq R_\infty(X)$. Les morphismes n'ont alors pas besoin d'être propres; la chose a été remarquée par Schülting dans [Sch82b].

2.4 Propriétés élémentaires des fonctions rationnelles bornées

On montre ici une diversité de résultats élémentaires des fonctions rationnelles bornées. Les premiers résultats montrent une proximité entre ces fonctions et les fonctions régulières :

Proposition 2.4.1. Soit $f = \frac{p}{q}$ une fonction rationnelle bornée définie sur $X \subseteq \mathbb{R}^n$ variété algébrique. Alors $g := \frac{p^2}{q}$ est rationnelle continue.

Démonstration. Bien sûr, en dehors de $\text{indet}(f) = \mathcal{Z}(q)$ il n'y a aucun problème. Soit $x \in \mathcal{Z}(q)$; montrons que g est continue en x : déjà, remarquons que $p(x) = 0$, sinon le comportement de f aux abords de x serait divergent (on formule la chose plus précisément au théorème 2.4.3 qui n'utilise pas ce résultat).

Soit $\epsilon > 0$. Soit V_x un voisinage ouvert de x ; il vient avec une borne M de f sur $V_x \cap \text{dom } f$. Comme p est continue (car polynomiale) et que $p(x) = 0$, on sait qu'il existe W_x un voisinage ouvert de x inclus dans V_x tel que p est borné par $\frac{\epsilon}{M}$ sur cet ouvert. Alors g , qui par définition vaut $p \cdot f$ est bornée sur $W_x \cap \text{dom } f$ par $\frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon$. Ainsi la limite de g en x existe et vaut 0, et donc g est prolongeable par continuité en x .

Ainsi, on peut prolonger sur tout $\text{indet } f$ par 0. La fonction ainsi définie sera bien continue. \square

Remarque 2.4.2. Si l'on dérive l'exemple de base de fonction régulue, alias $\frac{x^3}{x^2+y^2}$, dérivation selon la variable x , on obtient $3\frac{x^2}{x^2+y^2} + \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2$ qui est rationnelle bornée ; cet exemple n'est pas isolé.

On peut alors se demander s'il y a un lien différentiel entre les fonctions rationnelles bornées et les fonction régulues. Dit d'une autre manière : peut-on voir les fonctions rationnelles bornées comme les fonctions -1 -régulues ?

Dans le sens direct, est-ce que toute dérivée partielle d'une fonction régulue est rationnelle bornée ? Ce n'est pas le cas, comme l'atteste le premier contre-exemple 3.2 de [FMQ17a] : $\frac{yx^2}{x^2+y^4}$ prolongée continûment par 0 en $(0,0)$, dont la dérivée partielle selon x n'est pas bornée au voisinage de $(0,0)$.

Et pour la réciproque ? Est-ce que toute fonction rationnelle bornée est la dérivée d'une fonction régulue ? De ce côté là, les effets d'intégration, à partir du moment où l'on a des quotients en jeu, font naturellement intervenir des logarithmes et des arctangentes, qui sont de nature non rationnelles. Par exemple, si l'on cherche une fonction dont la dérivée partielle selon y est $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, on est en droit de la chercher sous la forme

$$\int \frac{x^2}{x^2+t^2} dt + g(x) = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}} dt + g(x)$$

Or la première intégrale fait apparaître un $x \arctan(\frac{y}{x})$. En supposant par l'absurde que la primitive

$$f(x, y) = x \arctan(\frac{y}{x}) + g(x)$$

puisse être une fraction rationnelle, en prenant x_0 un point qui n'est pas un pôle de g , on obtient que

$$f(x_0, \cdot) : y \mapsto x_0 \arctan(\frac{y}{x_0}) + g(x_0)$$

est une fonction rationnelle à une variable. Ce qui aboutit au fait que \arctan soit une fonction rationnelle, ce qui est absurde.

Le résultat suivant concerne la codimension du lieu d'indétermination. On le retrouve aussi chez les fonctions régulues, [Fic+16] (prop. 3.5) qui donne une preuve très similaire à ce que l'on montre ici. Pour notre cas, ce résultat s'avère beaucoup plus important qu'il n'en a l'air.

Théorème 2.4.3. Soit $f \in R_b(X)$ avec $X \subseteq \mathbb{R}^n$ une variété algébrique irréductible non singulière d'idéal annulateur I . On écrit $f = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in R[X_1, \dots, X_n]/I$ deux polynômes premiers entre eux.

Alors $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$ et $\text{codim}_X \mathcal{Z}(q) \geq 2$.

Démonstration. Commençons par la preuve de l'inclusion : soit $x \in \mathcal{Z}(q)$. Comme q n'est pas identiquement nul, $\mathcal{Z}(q)$ est un fermé de Zariski strictement inclus dans X , en particulier on peut appliquer le lemme des petits chemins et trouver un arc semi-algébrique $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma([0, 1]) \cap \mathcal{Z}(q) = \emptyset$.

Pour $t \neq 0$ on a alors $p(\gamma(t)) = f(\gamma(t))q(\gamma(t))$. L'arc γ ayant pour limite x , c'est un arc borné, donc f est bornée dessus. La fonction q étant continue et valant 0 en x on a $\lim_{t \rightarrow 0} q(\gamma(t)) = 0$

D'où $\lim_{t \rightarrow 0} p(\gamma(t)) = 0$ par limite de produit.

Par continuité de p , on a donc $p(x) = 0$.

Pour la codimension, on suppose par l'absurde $\text{codim} \mathcal{Z}(q) \leq 1$. Comme q ne s'annule pas identiquement sur X on a nécessairement $\text{codim} \mathcal{Z}(q) = 1$. Ainsi, il existe un diviseur irréductible q' de q avec encore $\text{codim} \mathcal{Z}(q') = 1$. On peut alors utiliser le théorème 4.5.1 de [BCR13] pour voir que l'idéal engendré par q' dans $R[X_1, \dots, X_n]/I$ est un idéal réel. Par irréductibilité, il est aussi radical.

Comme $\mathcal{Z}(q') \subseteq \mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$ on a $p \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(q'))$ ce qui implique que q' divise p ; et cela contredit l'hypothèse « p et q sont premiers entre eux ». \square

Les corollaires qui suivent ce résultat dans [Fic+16] sont alors vrais aussi pour les fonctions rationnelles bornées :

- Corollaire 2.4.4.**
- Une fonction rationnelle bornée sur R est régulière
 - Une fonction rationnelle bornée sur R^2 est régulière sauf en un nombre fini de points.

Démonstration. Pour la dimension 1, il est impossible d'être de codimension 2 donc $\mathcal{Z}(q)$ doit être vide.

Pour la dimension 2, être de codimension 2 veut dire être de dimension 0 donc être un nombre fini de points. Or en dehors de $\mathcal{Z}(q)$ la fonction $\frac{p}{q}$ est régulière. \square

Un autre corollaire parle de la composition d'applications rationnelles bornées :

Corollaire 2.4.5. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions rationnelles bornées entre variétés affines réelles irréductibles non singulières.

Si l'image de f est de codimension ≤ 1 , alors la composée $g \circ f$ est rationnelle bornée.

Notons que la codimension de l'image de f ne dépend pas de l'ouvert considéré. En effet, si $U \subseteq V \subseteq X$ sont Zariski denses, et que f est définie au moins sur V , alors il y a aussi densité euclidienne. Et alors, par continuité, il y aura densité euclidienne de $f(U)$ dans $f(V)$. En

effet, soit $y \in F(V)$ et x un antécédent. Par densité de U dans V on pourra trouver un chemin γ tel que $\gamma([0, 1]) \subseteq U$ et $\gamma(0) = x$. Alors on aura $f(\gamma([0, 1])) \subseteq f(U)$ et $f(\gamma(0)) = y$ par continuité. Or, par [BCR13, 2.8.2] la dimension de l'adhérence de $f(U)$ (à savoir $f(V)$), est égale à la dimension de $f(U)$. Il en sera alors de même pour la codimension.

Pour démontrer ce corollaire 2.4.5, on utilise le résultat plus général suivant, classique si on enlève le mot « bornées » de la proposition :

Lemme 2.4.6. *Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions rationnelles bornées, avec X et Y irréductibles. Si $f(\text{dom}(f))$ n'est pas inclus dans $\text{indet } g$, alors la composée $f \circ g$ est rationnelle bornée.*

Preuve du lemme. Remarquons pour commencer que $f^{-1}(\text{dom } g)$ est un ouvert de Zariski. C'est équivalent à voir que l'image réciproque d'un fermé de Zariski par une application rationnelle est un fermé de Zariski. Or l'image réciproque d'une application rationnelle est égale à l'image réciproque de la fonction régulière définie sur l'ouvert maximal ; et l'image réciproque d'un fermé de Zariski par une fonction régulière est un fermé de Zariski.

Comme $f^{-1}(\text{dom } g)$ est un ouvert de Zariski, alors $\text{dom } f \cap f^{-1}(\text{dom } g)$ aussi, comme intersection de deux ouverts. Or l'hypothèse de non-inclusion nous dit que $\text{dom } f \cap f^{-1}(\text{dom } g)$ n'est pas vide, il est donc dense, et la restriction de $f \circ g$ à $\text{dom } f \cap f^{-1}(\text{dom } g)$ est une fonction régulière comme composée de fonction régulière. D'où $f \circ g$ est rationnelle.

Il reste donc à montrer que la composée est bornée en plus d'être rationnelle. Cela se fait en utilisant la caractérisation par les arcs : un arc borné de X est transformé par f en un arc borné de Y qui sera transformé par g en un arc borné de Z . □

Preuve du corollaire. Si l'image de f est de codimension ≤ 1 , alors elle ne peut être incluse dans le lieu d'indétermination de g qui est de codimension ≥ 2 . □

Une autre application du lemme de composition nécessite l'introduction du concept d'idéal réel.

Définition 2.4.7. *Un idéal I d'un anneau commutatif unitaire A est dit réel si, pour $f_1, \dots, f_k \in A$, si $f_1^2 + \dots + f_k^2 \in I$ alors $f_1 \in I$*

On remarque que, avec les mêmes notations, cela implique $\forall i \leq k, f_i \in I$.

Remarque 2.4.8. Tout idéal réel est radical. Voir [BCR13, 4.1.5]. L'idée est que si $a^n \in I$ idéal réel, si n pair on a par réalité

$$\left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 \in I \Rightarrow a^{\frac{n}{2}} \in I$$

De même avec $a^{\frac{n+1}{2}}$ si n est impair. Dans les deux cas, on a un exposant petit de a qui est dans I et on peut itérer environ $\ln_2(n)$ fois le raisonnement pour obtenir $a \in I$

Proposition 2.4.9. Soit $I \subseteq R_b(X)$ un idéal radical. Alors I est réel.

Démonstration. On suppose $f_1^2 + \dots + f_k^2 \in I$. Quitte à retirer un terme de l'écriture, on peut supposer que les f_i sont non nuls.

Pour $i \leq k$ on a $\frac{f_i^2}{\sum_{j=1}^k f_j^2} \in R_b(X)$ comme composition des f_i avec $\frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^k x_j^2}$ (on peut composer car le seul lieu d'indétermination de $\frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^k x_j^2}$ est l'origine, et la seule fonction qui a une image incluse dedans est la fonction nulle).

D'où $f_1^2 = \left(\frac{f_1^2}{\sum_{j=1}^k f_j^2}\right)(f_1^2 + \dots + f_k^2) \in I$, et comme I est radical, $f_1 \in I$. □

Remarque 2.4.10 (semi-algéblicité). Une fonction rationnelle bornée de X dans R n'est pas nécessairement une fonction de X dans R à proprement parler : ou alors il faudrait pouvoir la considérer comme multivaluée à certains endroits. Ceci dit, il est évident que le graphe de f sur $\text{dom } f$ est semi-algébrique. Et comme l'adhérence d'un semi-algébrique est semi-algébrique, [BCR13, 2.2.2] on peut y penser comme si f était fonction semi-algébrique sur X ; parfois multivaluée.

Si $R = \mathbb{R}$, en tant que fonction de $\text{dom } f$ dans \mathbb{R} , une fonction rationnelle bornée est analytique par arcs (car elle est régulière). Sur X tout entier, avec la terminologie de [KP12, 2.1], f est arc-méromorphe. Mais on peut trouver une propriété un peu plus fine qui permet d'y penser comme si f était une fonction arc-analytique sur X .

Proposition 2.4.11. Soit $f \in R_b(X)$, avec $R = \mathbb{R}$. Soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow X$ un arc analytique vérifiant $\gamma(] -\epsilon, 0[\cup] 0, \epsilon[) \subseteq \text{dom } f$. Alors $f \circ \gamma$, prolongé par continuité en 0, est aussi un arc analytique.

La preuve utilise des outils de relèvement d'arcs et de résolution des indéterminées, on en réfère au théorème 2.3.5 et à toute sa section.

Démonstration. Si l'on résout les indéterminées de f par $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$, l'arc $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow X$ se relève en un arc analytique $\tilde{\gamma} :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \tilde{X}$; en effet les éclatements à centres lisses vérifient la propriété de relèvement des arcs analytiques; voir [FP08, §4]

On a donc, pour $t \in]-\epsilon, 0[\cup] 0, \epsilon[$, l'égalité $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f \circ \gamma(t) &= f \circ (\varphi \circ \tilde{\gamma})(t) \\ &= (f \circ \varphi) \circ \tilde{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Or $(f \circ \varphi)$ est régulière donc continue et analytique sur \tilde{X} tout entier, donc $(f \circ \varphi) \circ \tilde{\gamma}$ se prolonge analytiquement en 0. \square

Cependant, ce que nous allons par la suite définir comme les fermés rationnels bornés (pour la topologie des points) ne sont pas symétriques par arcs. En effet, rien que dans notre exemple le plus simple, on verra que le segment vertical $[(0,0,0), (0,0,1)]$ est contenu dans $\mathcal{X}\left(z - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$, mais pas le reste de la droite verticale dans lequel il est contenu. Ainsi l'arc $(0,0,t)$ est dans ce fermé pour ses valeurs positives, mais pas pour ses valeurs négatives.

Proposition 2.4.12. *L'anneau $R_b(R^n)$ n'est pas noethérien pour $n \geq 2$.*

La preuve donnée est adaptée de [[Kur88] 6.11]

Démonstration. On pose $f_k := \frac{x^2}{x^2+(y-k)^2}$ et I_k l'idéal de $R_b(R^n)$ engendré par f_1, \dots, f_k .

Supposons par l'absurde qu'il existe k tel que $f_{k+1} \in I_k$,

c'est-à-dire qu'il existe une écriture $f_{k+1} = \sum_i g_i f_i$ (où les g_i sont rationnelles bornées).

En se restreignant à la courbe C paramétrée par $(t, k+1, 0, \dots, 0)$ que l'on identifie par ce paramétrage à R , on obtient l'égalité

$$1 = \sum_i (g_i)|_C (f_i)|_C$$

Or les fonctions f_i s'annulent au point $(0, k+1, 0, \dots, 0)$. Comme les g_i sont bornés la somme doit s'annuler, contradiction. Ainsi, la chaîne d'idéal $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ est strictement croissante et non stationnaire. \square

Proposition 2.4.13. *$R_b(X)$ et $R_\infty(X)$ sont intégralement clos dans $R(X)$*

Démonstration. Soit f rationnelle, $n \in \mathbb{N}$ et $g_0, \dots, g_{n-1} \in R_b(X)$ tels que :

$$f^n + g_{n-1}f^{n-1} + \dots + g_0 = 0$$

Quitte à restreindre les domaines de définitions (voir lemme 2.1.2), on peut voir toutes ces fonctions comme allant d'un ouvert de Zariski commun $U \subseteq X$ dans R . Soit $x \in U$ et M_0, \dots, M_{n-1} des bornes des g_i sur un voisinage commun V_x (chaque borne nous donne un voisinage, on peut alors en prendre l'intersection). Alors f est bornée sur V_x par $\max\{1, M_0 + \dots + M_{n-1}\}$ En effet, si l'on suppose que pour un $y \in V_x \cap U$ on ait $|f(y)| \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} |f(y)^n| &\leq |g_{n-1}(y)| \cdot |f^{n-1}(y)| + \dots + |g_1(y)| \cdot |f(y)| + |g_0(y)| \\ &\leq M_{n-1} \cdot |f^{n-1}(y)| + \dots + M_1 \cdot |f(y)| + M_0 \\ &\leq M_{n-1} \cdot |f^{n-1}(y)| + \dots + M_1 \cdot |f^{n-1}(y)| + M_0 \cdot |f^{n-1}(y)| \end{aligned}$$

On peut conclure en divisant les deux côtés par $|f^{n-1}(y)|$ qui est non-nul car ≥ 1 .

Pour la preuve de $R_\infty(X)$ on utilisera le fait que le compactifié d'Alexandroff \widehat{X} de X ait un anneau de fraction rationnelles isomorphe à celui de X ainsi que la proposition [2.2.5](#) qui nous dit que $R_\infty(X) \simeq R_b(\widehat{X})$ sous le même isomorphisme. \square

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

Le but de cette section est de créer une géométrie à partir des fonctions rationnelles bornées. Pour commencer, nous mettons en place une définition permettant de donner sens à une équation définie avec des fonctions rationnelles même en ses points d'indétermination. La première section utilise les fonctions rationnelles pas forcément bornées, et ce dans un but précis : montrer en deuxième section qu'on obtient la même géométrie, d'un côté en prenant toutes les fonctions rationnelles ou de l'autre prenant seulement les fonctions rationnelles bornées.

En section 2 et 3 on donne ainsi une description aussi complète que possible de la géométrie ainsi créée.

Enfin, en section 4, on s'intéresse aux images possibles des fonctions rationnelles, en donnant une définition la plus adaptée et en montrant que les images sont en fait réalisables à partir de fonctions régulières seulement.

3.1 Un ensemble des zéros pour une fonction rationnelle

Dans cette section, f est une fonction rationnelle de X variété algébrique affine réelle irréductible non singulière, et f n'est pas nécessairement bornée ; on cherche alors à définir un lieu des zéros pour f afin de créer une topologie de type Zariski.

Bien sûr, il est facile d'en définir un sur $\text{dom } f$, l'ensemble des zéros d'une fonction régulière étant déjà défini ; voir [BCR13, 3.2.2]. Cependant ça ne permet pas d'en dériver une topologie, puisque l'ensemble des zéros vit dans un ensemble qui dépendrait de la fonction choisie. On cherche donc à pouvoir en l'étendre en une définition sur l'espace X tout entier.

La première définition qui nous viendrait à l'esprit serait la suivante : pour $f : U \rightarrow R$, si l'on prenait comme ensemble des zéros de f la clôture (euclidienne) de $\mathcal{Z}(f|_U)$?

Exemple 3.1.1. En suivant l'exemple 2.1.4, soit $f := \frac{x^2}{x^2+y^2}$ définie sur $U := R^2 \setminus \{(0,0)\}$

Son ensemble des zéros dans U est l'axe des y privé de l'origine (qui est en fait $\text{indet}(f)$). Alors l'ensemble des zéros de f serait l'axe des y tout entier.

Cependant, cette définition peine à prendre en compte des comportements de zéros isolés, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 3.1.2. Soit $f := \frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ sur le même $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, voir figure 8.

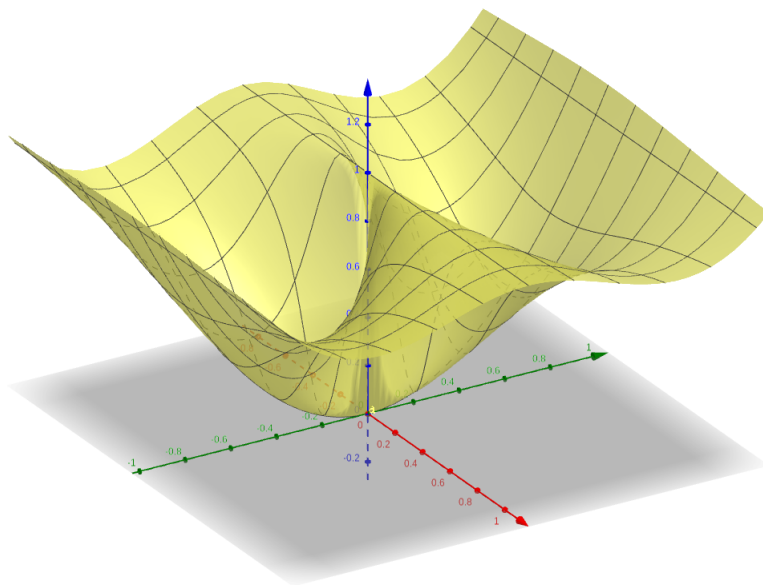


FIGURE 8 – Graphe de $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$

Ici, la fonction est strictement positive en dehors de l'origine. Ainsi, $\mathcal{Z}(f|_U) = \emptyset$. Notre ensemble des zéros serait donc vide ? Cependant, $f(0, \cdot) : y \mapsto y^2$ s'annule en zéro. Il y a donc un comportement d'annulation. Nous retrouverons cet exemple à maintes reprises ultérieurement.

Il faut donc trouver une meilleure définition. On rappelle qu'on appelle « résolution de f » une composition φ d'éclatements à centre lisses vérifiant que $f \circ \varphi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est régulière (lorsque f est bornée, l'ensemble d'arrivée sera juste \mathbb{R} , voir 2.3.2).

Théorème - définition 3.1.3. Soit $f \in R(X)$ avec $U := \text{dom } f$; les ensembles suivants sont égaux :

- $\mathcal{Z}_{\text{arc}}(f) := \{x \in X \mid \text{il existe } \gamma :]0, 1[\rightarrow X \text{ semi-algébrique continu}$
avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(]0, 1[) \subseteq U$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0\}$
i.e. l'ensemble de tous les points limites d'un arc de U tels que la valeur de f le long de l'arc tend vers 0.
- $\mathcal{Z}_{\text{rés}}(f) := \{x \in X \mid \text{il existe } (\varphi, \tilde{X}) \text{ résolution, et } \tilde{x} \in \tilde{X}$
avec $\tilde{f} := f \circ \varphi$ régulière en \tilde{x} et $\varphi(\tilde{x}) = x$ tq $\tilde{f}(\tilde{x}) = 0\}$
i.e. l'ensemble de tous les points qui peuvent être remontés en des zéros d'une résolution de la fonction.
- $\mathcal{Z}_{\text{graph}}(f) := \{x \in X \mid (x, 0) \in \overline{\mathcal{C}_f}\}$
i.e. l'intersection de la clôture euclidienne (dans $X \times R$) de $\mathcal{C}_f := \{(\underline{x}, y) \in X \times R \mid \underline{x} \in U, y = f(\underline{x})\} \subseteq U \times R$ le graphe de f ; avec l'hyperplan $\{y = 0\} = X \times \{0\}$.

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{Z}(f)$ cet ensemble, que l'on appellera lieu des zéros de f ou lieu d'annulation. De plus, on appellera témoin d'annulation de x un \tilde{x} ou un γ qui suit les notations ci-dessus, c'est-à-dire un point dans l'espace éclaté par φ annulant la fonction $f \circ \varphi$, ou un arc semi-algébrique dont la composition par f a pour limite 0.

Démonstration.

$\mathcal{Z}_{\text{arc}} \subseteq \mathcal{Z}_{\text{rés}}$:

Soit $x \in \mathcal{Z}_{\text{arc}}(f)$ et soit γ un arc témoin pour x . Soit $(\varphi, \tilde{X}, \tilde{f})$ une résolution de f .

Pour $t \in]0, 1[$, on définit $\tilde{\gamma}(t) := \varphi^{-1}(\gamma(t))$; ce qui est bien défini car $\gamma(]0, 1[) \subseteq U$ et que les éclatements se font en dehors de U ou de ses préimages.

La fonction $\tilde{\gamma}$ est continue sur $]0, 1[$ comme composée car φ^{-1} est régulière sur U .

γ est continue sur $[0, 1]$ donc bornée. On peut donc faire rentrer $\gamma([0, 1])$ dans un fermé borné K . Comme φ est une application propre, on sait que $\tilde{K} := \varphi^{-1}(K)$ est aussi un fermé borné; or celui-ci contient $\tilde{\gamma}([0, 1])$. Alors $\tilde{\gamma}$ est une application semi-algébrique continue et bornée de domaine $]0, 1[$. On peut donc appliquer le lemme de prolongement, voir [BCR13, 2.5.3], pour prolonger par continuité en 0.

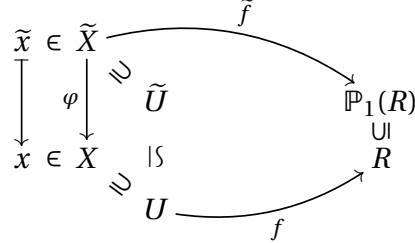
En posant ainsi $\tilde{x} := \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(t)$, on obtient :

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \varphi) \left((\varphi^{-1} \circ \gamma)(t) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$$

D'où $x \in \mathcal{Z}_{\text{rés}}(f)$

$\mathcal{I}_{rés} \subseteq \mathcal{I}_{graph}$:

Soit $x \in \mathcal{I}_{rés}(f)$ et soit $(\varphi, \tilde{X}, \tilde{f})$ une résolution associée.



On notera \tilde{x} le témoin d'annulation de x derrière cette résolution. Cela veut dire que $\tilde{f}(\tilde{x}) = 0$, ce qui peut se réécrire en $(\tilde{x}, 0) \in \mathcal{C}_{\tilde{f}}$.

On considère l'application

$$\begin{aligned}
 \varphi \times \text{Id} : \tilde{X} \times \mathbb{P}_1(R) &\rightarrow X \times \mathbb{P}_1(R) \\
 (y, z) &\mapsto (\varphi(y), z)
 \end{aligned}$$

Soit A l'intersection entre $X \times R \subseteq X \times \mathbb{P}_1(R)$ et l'image du graphe de \tilde{f} . On affirme que A est en réalité $\overline{\mathcal{C}_f}$; la clôture euclidienne du graphe de f dans $X \times R$

En effet, pour $x \in U$, il existe un unique $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tel que $f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$. Les ensembles A et $\overline{\mathcal{C}_f}$ coïncident donc sur une partie dense. De plus, l'image du graphe de \tilde{f} est (Zariski) fermée comme image d'un fermé par une application propre (donc fermée). Ainsi, A est fermé dans $X \times R$ comme restriction d'un fermé de $X \times \mathbb{P}_1(R)$ à $X \times R$ qui peut être vu comme ayant la topologie induite.

On observe alors que l'image de $(\tilde{x}, 0)$ par $\varphi \times \text{Id}$ est $(x, 0)$. D'où $(x, 0) \in \overline{\mathcal{C}_f}$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{I}_{graph}(f)$.

$\mathcal{I}_{graph} \subseteq \mathcal{I}_{arc}$:

Si $(x, 0) \in \overline{\mathcal{C}_f}$, on peut appliquer le lemme de sélection des courbes ([BCR13, 2.5.5]) pour obtenir un arc semi-algébrique $\alpha :]0, 1] \rightarrow \overline{\mathcal{C}_f}$ tel que $\alpha(]0, 1]) \subseteq \mathcal{C}_f$ et $\alpha(0) = (x, 0)$.

Soit maintenant γ les n premières coordonnées de α , i.e. $\forall t \in]0, 1], \alpha(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)))$.

Comme $\alpha(]0, 1]) \subseteq \mathcal{C}_f$ on a $\gamma(]0, 1]) \subseteq U$. Pour $t = 0$, on remarque que $\alpha(0) = (x, 0)$ veut dire très exactement que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = x$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$

□

Cette démonstration a été faite par inclusion triangulaire. Il n'était pas nécessaire de passer par le théorème d'Hironaka pour prouver l'équivalence graphe-arc, et nous avons fait ce choix par soucis de simplicité et de rapidité. Nous ferons à l'avenir l'autre choix dans une démonstration similaire; lorsque nous voudront définir l'image d'une fonction rationnelle bornée; voir 3.4.1

Remarque 3.1.4. Dans la définition par résolution, les résolutions considérées dépendent du point choisi. Ainsi il n'est pas forcément donné, vu la définition, qu'il existe une résolution qui vérifie $\mathcal{Z}(f) = \varphi(\mathcal{Z}(\tilde{f}))$, où le terme de droite serait l'ensemble des zéros d'une fonction régulière. À l'aide du théorème d'Hironaka, il est faisable de trouver une résolution qui rende la fonction régulière. Nous affirmons par le lemme suivant que cet éclatement suffit à donner des témoins pour tous les points de $\mathcal{Z}(f)$. Cela aurait pu servir de définition, et la preuve des équivalences nous permet d'affirmer qu'une telle définition n'aurait pas dépendu des éclatements choisis.

Lemme 3.1.5. Soit $f \in R(X)$; pour chaque résolution φ où $f \circ \varphi$ est régulière, on a $\mathcal{Z}(f) = \varphi(\mathcal{Z}(f \circ \varphi))$

Démonstration. Chaque point de $\varphi(\mathcal{Z}(\tilde{f}))$ est par définition un témoin via éclatement. Réciproquement, pour chaque témoin \hat{x} via une autre résolution (ψ, \hat{X}, \hat{f}) , si l'on considère un arc semi-algébrique $\hat{\gamma}$ qui tend vers \hat{x} avec $\hat{\gamma}(]0, 1]) \subseteq \hat{U}$, on pourra sur $]0, 1]$ pousser et ramener pour obtenir $\tilde{\gamma} := \varphi^{-1} \circ \psi \circ \hat{\gamma}$, puis prolonger en 0 à \tilde{x} via [BCR13, 2.5.3]. On obtient un témoin d'annulation via notre résolution originelle. En effet, comme \hat{x} est un témoin, $\hat{f} \circ \hat{\gamma}$ tend vers 0, d'où $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}(\tilde{x}) = 0$ et donc \tilde{x} est un témoin par éclatement. \square

Exemple 3.1.6. Si l'on reprend notre exemple de base 2.1.4 avec $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, on remarque bien qu'en suivant le chemin $\gamma(t) := (0, t)$ on a pour $t \in]0, 1]$, $f(\gamma(t)) = 0$ qui tend bien vers 0.

Un éclatement possible, pour retrouver le même résultat, est l'éclatement de l'origine. Une carte de l'espace éclaté, de type \mathbb{R}^2 , est donnée par $x = uv, y = v$ et notre fonction devient alors (si l'on peut se permettre l'abus de notations) $f(u, v) = \frac{u^2 v^2}{u^2 v^2 + v^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$ qui vaut bien 0 en $(0, 0)$. Ici, l'éclaté du point $(0, 0)$ est la droite projective donnée par l'équation $v = 0$ sur notre carte. Enfin, on renvoie à la figure donnée dans l'exemple 2.1.4 pour observer qu'il y a bien annulation selon le graphe.

Pour l'exemple 3.1.2, avec $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$, maintenant, on peut d'abord se convaincre par une observation de figure similaire que $(0, 0) \in \mathcal{Z}(f)$: en effet, le point $(0, 0, 0)$ est clairement dans la clôture euclidienne du graphe de f .

Pour l'éclatement et le chemin, on pourra en fait prendre les mêmes témoins que pour l'exemple précédent. On aura ainsi pour les arcs $\forall t \in]0, 1]$, $f(\gamma(t)) = t^2$ qui tend bien vers zéro, et après le même éclatement, dans la même carte, $f(u, v) = \frac{u^2+v^2}{1+u^2}$ qui vaut aussi 0 en $(0, 0)$.

Notation 3.1.7. Afin d'éviter des possibles confusions, on notera parfois \mathcal{Z}_{R_b} pour parler du lieu des zéros ainsi défini, et $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}, \mathcal{Z}_{\mathcal{R}^k}$) pour parler du lieu des zéros des polynômes (resp. fonctions régulières, resp. k-régulues).

La proposition suivante peut paraître tautologique, mais est intéressante à mettre en valeur : la construction de lieu des zéros est bien une extension du lieu des zéros classique pour les fonctions continues.

Proposition 3.1.8. Si f est un polynôme (resp. fonction régulière, fonction k-régulue) alors $\mathcal{Z}_{R_b}(f) = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(f)$ (resp. $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(f), \mathcal{Z}_{\mathcal{R}^k}(f)$).

Démonstration. En utilisant la définition par des arcs et la continuité de la fonction f , on remarque que pour un arc $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de limite $\gamma(0) =: x_0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma = f(x_0)$$

Ainsi le terme de gauche s'annule si et seulement le terme de droite aussi. □

Nous venons de définir l'ensemble des zéros d'une fonction unique. Pour faire de la géométrie algébrique, on voudrait faire une définition pour un idéal de $R_b(X)$, et aussi définir un idéal annulateur. La chose sera cependant délicate, nous verrons les problèmes rencontrés en 4.1. Avant ça, nous allons chercher à caractériser ces lieux d'annulations que l'on vient de définir.

Exemple 3.1.9. Les fonctions régulues sont capables de décrire le parapluie de Cartan sans son manche, voir [Fic+16, 6.12]. Cependant le parapluie de Whitney d'équation $zx^2 = y^2$ est, avec son manche, régulument irréductible.

Avec les fonctions rationnelles bornées, on peut le réaliser sans son manche via l'équation

$$z \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

On en donne la représentation en figure 9

Voir que la toile hors lieu d'indétermination fait partie de ce lieu est aisé, puisque que la fonction $f(x, y) = z \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ est régulière en dehors de l'axe des z , et qu'on a alors $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 z = y^2$. Pour voir qu'il y a la partie supérieure du manche, celle qui est incluse dans la toile, on prendra, pour chaque point $(0, 0, z)$ (avec $z \geq 0$) un arc semi-algébrique entièrement inclus dans la toile qui a ce point comme limite. f étant identiquement nulle sur cet arc, la limite de la composée vaut 0 et l'arc est donc témoin d'une annulation de f en $(0, 0, z)$. Dit autrement, le lieu des zéros sont des fermés euclidiens (on reviendra dessus en 3.3.1) donc la partie du manche qui est dans la toile est forcément dans $\mathcal{Z}(f)$.

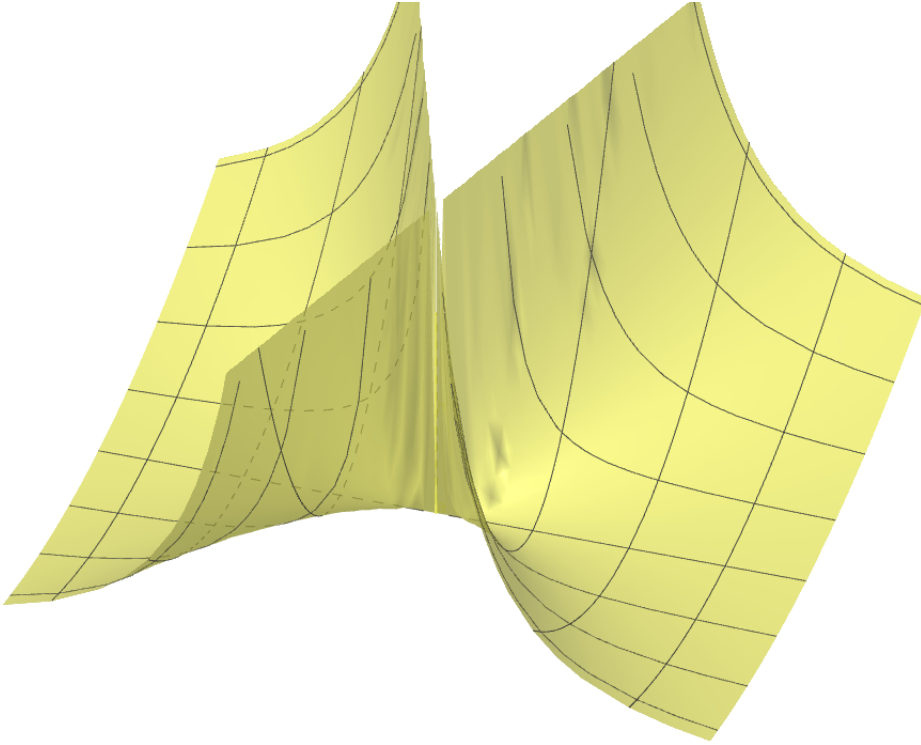


FIGURE 9 – Lieu des zéros rationnel borné de $z \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

Voir que la partie inférieure du manche ne fait pas partie du lieu des zéros de f est plus délicat. On prendra, pour $z \geq 0$, un point $P = (0, 0, -z)$ dans la partie inférieure de ce manche et on prendra $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ un arc semi-algébrique de limite P . Comme la limite de γ_z est négative strictement, on sait qu'il existe un ϵ tel que

$$\forall t \in [0, \epsilon], \gamma_z(t) < 0$$

Alors le long de cet arc,

$$f \circ \gamma(t) = \gamma_z \frac{\gamma_x^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} - \frac{\gamma_y^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$$

Se passent alors deux cas. Si $\frac{\gamma_x^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ ne tend pas vers zéro, alors en notant l la limite de cette fraction, on a

$$\gamma_z \frac{\gamma_x^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -z \cdot l < 0$$

Or $-\frac{\gamma_y^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \leq 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma(t) \leq -z \cdot l < 0$$

En particulier la limite n'est pas nulle.

L'autre cas est lorsque $\frac{\gamma_x^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ tend vers zéro. En remarquant que $\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1$ on peut alors déduire :

$$-\frac{\gamma_y^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \gamma^z \frac{\gamma_x^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} - \frac{\gamma_y^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\gamma_y^2}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = -1 < 0 \end{aligned}$$

En particulier la limite n'est pas non plus nulle.

Ainsi, aucun arc ne peut témoigner d'une annulation en $P = (0, 0, -z)$, qui n'est donc pas dans $\mathcal{Z}(f)$.

3.2 Caractérisation par éclatements

On commencera cette section avec un résultat qu'on a déjà vu dans des mots différents en 3.1.4 et en 3.1.5 : le zéro d'une fonction rationnelle est l'image d'un fermé de Zariski par une résolution; puis on montrera que cette classe d'ensembles géométriques peut en fait être décrite par seulement les fonctions rationnelles bornées.

Proposition 3.2.1. *Si $F = Z(f)$ pour f rationnelle sur X , alors il existe $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution et $Z \subseteq \tilde{X}$ un fermé de Zariski tels que $\varphi(Z) = F$.*

Démonstration. Cette proposition est une reformulation de la remarque 3.1.4, dont la démonstration se fait ainsi : d'abord voir par le théorème d'Hironaka 1.4.1 qu'il existe toujours un éclatement rendant la fonction régulière, puis voir via le lemme 3.1.5 que tout éclatement rendant la fonction régulière a les propriétés voulues. \square

On peut s'intéresser au sens réciproque. Pour celui-ci, on n'a pas besoin de n'importe quelle fonction rationnelle, en effet une fonction bornée suffit :

Proposition 3.2.2. *Si $F \subseteq X$ est l'image d'un fermé de Zariski $Z \subseteq \tilde{X}$ par une résolution $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$, alors il existe f rationnelle bornée sur X telle que $F = Z(f)$.*

Démonstration. Soit \tilde{f} une fonction régulière définie sur \tilde{X} à valeur dans R telle que l'on ait $\mathcal{Z}(f) = Z$. L'existence d'une telle fonction découle de la définition de fermé de Zariski. Soit \tilde{U} le complémentaire du lieu exceptionnel généré par φ , et $U := \varphi(\tilde{U})$. On définit $f : U \rightarrow R, x \mapsto \tilde{f}(\varphi^{-1}(x))$ (ce qui est bien défini vu que φ est bijectif sur \tilde{U}). f est rationnelle bornée par application du théorème 2.3.3, et on a bien $\mathcal{Z}(f) = \varphi(\mathcal{Z}(\tilde{f}))$ par utilisation de la définition 3.1.3 version éclatements et de la remarque 3.1.4. \square

Théorème 3.2.3. *Soit f une fonction rationnelle d'une variété $X \subseteq R^n$ irréductible non singulière. Il existe g rationnelle bornée sur X telle que $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$.*

Démonstration. Il suffit d'assembler les deux précédentes propositions. \square

On peut même faire mieux et imposer l'uniformité du caractère borné :

Proposition 3.2.4. *Soit f une fonction rationnelle bornée d'une variété $X \subseteq R^n$ irréductible non singulière. Il existe g uniformément bornée telle que $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$*

Démonstration. Si f est rationnelle localement bornée alors il va exister une puissance suffisamment grande de $1 + \sum x_i^2$ telle que $\frac{f}{(1 + \sum x_i^2)^N}$ sera globalement bornée, voir prop 2.2.6. Comme $1 + \sum x_i^2$ ne s'annule pas, la nouvelle fonction aura le même domaine que f et, bien entendu, les mêmes annulations. \square

Remarque 3.2.5. Soit $F \subseteq X$ et $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution. Si $\varphi^{-1}(F)$ est un fermé de Zariski, alors F est le lieu des zéros d'une fonction rationnelle bornée.

Démonstration. On applique la proposition 3.2.2 en remarquant que $\varphi(\varphi^{-1}(F)) = F$. \square

On notera que si l'énoncé semble très proche de la proposition 3.2.2, ils ne sont pas exactement identiques. On s'en convainc en étudiant les réciproques des énoncés. Pour la proposition 3.2.2, la réciproque est vraie, voir 3.2.1. Pour l'énoncé précédent, la réciproque est fausse :

Remarque 3.2.6. Il existe des fermés rationnels bornés qu'aucune résolution ne peut rendre Zariski fermé.

Le contre-exemple, qu'on retrouvera et détaillera par la suite en 3.3.7, est le segment donné par $S := [(0, 0, 0) ; (0, 0, 1)]$. C'est en-effet le lieu des zéros dans R^3 de :

$$\left(z - \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)^2 + x^2 + y^2$$

Si l'on éclate le segment (ce qui se fait en éclatant la droite qui la prolonge), on obtient un cylindre à bord, qui n'est pas Zariski fermé. Si l'on éclate autre part, on ne touche pas l'ensemble S . Enfin, si l'on éclate un nombre fini de points de S , ou le long d'une courbe qui intersecte S en un ou plusieurs points, on transforme ces points en des $\mathbb{P}_1(R)$ mais cela ne changera pas le fait qu'il y a dans l'image réciproque de S des segments dont la clôture de Zariski est une droite qui n'est pas entièrement incluse dans cette image réciproque.

Bien entendu, il y a des fermés de Zariski d'image le segment dans ce cylindre, comme une ellipse, voir figure 10.

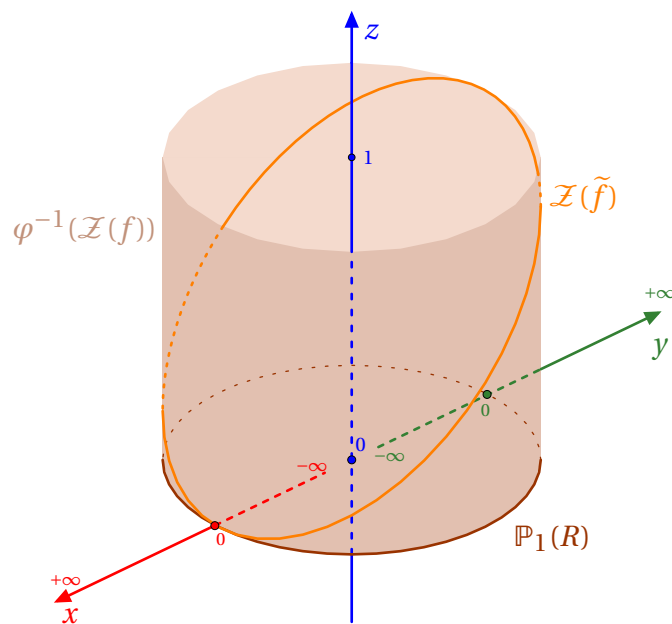


FIGURE 10 – Vue d'artiste des zéros de $(z - \frac{x^2}{x^2+y^2})^2 + (x^2 + y^2)$ dans l'espace éclaté. Notons que l'on a simplifié ce qu'il se passe en dehors du cylindre.²

2. En réalité, le cylindre n'est pas orientable, et ne sépare pas l'espace en un intérieur et un extérieur. Ainsi en faisant le tour du cylindre, les axes inversent leur sens; voir figure 7.

3.3 Propriétés des fermés rationnels bornés

Dans cette section, on va voir les propriétés générales des fermés que l'on vient de créer.

On commence par observer qu'ils sont tous semi-algébriques :

Proposition 3.3.1. *Les ensembles de la forme $\mathcal{Z}(f)$ sont des fermés (euclidiens) et sont semi-algébriques.*

Démonstration. En utilisant la définition via les graphes, $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé semi-algébrique comme intersection de deux fermés semi-algébriques : la clôture euclidienne du graphe de f sur son domaine, et l'hyperplan d'annulation de la dernière coordonnée. \square

Notons qu'on peut voir ce résultat avec des résolutions : un tel $\mathcal{Z}(f)$ est image d'un fermé de Zariski (donc semi-algébrique) par une application propre (donc qui respecte les fermés) et semi-algébrique (qui respecte les semi-algébriques).

Par suite du corollaire 2.4.4, on peut facilement décrire les fermés rationnels bornés en dimension 1 ; ce sont les fermés de Zariski, donc des unions finies (potentiellement vides) de points. Le cas de la dimension 2 est aussi facilement descriptible :

Proposition 3.3.2. *Si f est une fonction rationnelle bornée sur une variété de dimension 2, alors $Z(f)$ est un fermé régulier.*

Démonstration. Selon le corollaire 2.4.4, une fonction rationnelle bornée en dimension 2 est régulière sauf en un nombre fini de points. Ainsi un fermé rationnel borné est un fermé de Zariski modulo un nombre fini de points qui ont pu être enlevés (tout en laissant l'ensemble être fermé euclidien). C'est donc un membre de la topologie constructible, qui est la topologie régulée, voir [Fic+16, 6.4] \square

Pour la dimension supérieure, les choses deviennent beaucoup plus variées. Pour les aborder avec soin, on va commencer par voir différents outils accessibles au bricoleur rationnel borné.

Proposition 3.3.3. *Pour $f, g \in R_b(X)$, $\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$*

Si f ou g est continue, $\mathcal{Z}(f^2 + g^2) = \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$.

Pour f et g rationnelles bornées on a seulement $\mathcal{Z}(f^2 + g^2) \subseteq \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$

Démonstration. On commence par l'union. Soit $(\tilde{X}, \varphi, \tilde{f}, \tilde{g})$ une résolution simultanée de f et de g . Voir lemme 1.4.3.

On remarque que

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{X}, (fg)(\varphi(\tilde{x})) = f(\varphi(\tilde{x})) \cdot g(\varphi(\tilde{x}))$$

Ce qui veut dire que $\tilde{f}\tilde{g} = \tilde{f}\tilde{g}$.

De plus, \tilde{f} et \tilde{g} sont régulières sur \tilde{X} , et donc $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}\tilde{g}) = \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}) \cup \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{g})$. On peut alors appliquer le lemme 3.1.5 qui affirme que $\mathcal{Z}_{R_b}(f) = \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f})\right)$ et de même pour g et fg . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{R_b}(fg) &= \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}\tilde{g})\right) \\ &= \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}\tilde{g})\right) \\ &= \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}) \cup \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{g})\right) \\ &= \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f})\right) \cup \varphi\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{g})\right) \\ &= \mathcal{Z}_{R_b}(f) \cup \mathcal{Z}_{R_b}(g) \end{aligned}$$

Pour la deuxième affirmation, on va commencer par fixer g comme étant régulière et montrer

$$\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) \subseteq \mathcal{Z}(f^2 + g^2)$$

En résolvant f par $(\tilde{X}, \varphi, \tilde{f})$ et en notant $\tilde{g} := g \circ \varphi$, on remarque que si $x \in \mathcal{Z}(g)$ alors \tilde{g} est identiquement nulle sur $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(g))$. Ainsi, si $x \in \mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$, en prenant \tilde{x} un témoin d'annulation pour f , on aura nécessairement $\tilde{g}(\tilde{x}) = 0$.

Comme \tilde{f} et \tilde{g} sont régulières et qu'on vit dans un monde réel, on a $\mathcal{Z}(\tilde{f}) \cap \mathcal{Z}(\tilde{g}) = \mathcal{Z}(\tilde{f}^2 + \tilde{g}^2)$. Reste alors à utiliser le fait que $(f^2 + g^2) \circ \varphi = (f \circ \varphi)^2 + (g \circ \varphi)^2$ pour voir que \tilde{x} est aussi témoin d'annulation de $f^2 + g^2$.

L'inclusion réciproque peut se faire en généralité avec deux fonctions rationnelles bornées : on réutilise une résolution commune $(\tilde{X}, \varphi, \tilde{f}, \tilde{g})$. Alors on a toujours $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}) \supseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}(\tilde{f}^2 + \tilde{g}^2)$ et de même pour \tilde{g} , un témoin pour $f^2 + g^2$ est donc aussi nécessairement un témoin pour f et pour g . \square

Remarque 3.3.4. On donne un contre-exemple pour l'inclusion réciproque avec deux fonctions rationnelles bornées. On pose

$$f = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{ et } g = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

Ici $\mathcal{Z}(f^2 + g^2)$ est vide, et ce même si $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{Z}(g)$ contiennent l'origine (mais pas avec le même témoin). On aura en fait ici $\mathcal{Z}(\tilde{g}) \cap \mathcal{Z}(\tilde{f}) = \emptyset$ ce qui explique pourquoi la démonstration n'aurait pas pu marcher.

Avant de passer à la suite, on va tout de suite voir une application qui nous donne des propriétés assez immédiates sur ces ensembles de zéros. On rappelle que le lieu central est défini en [BCR13, 7.6.1] comme étant l'adhérence (pour la topologie euclidienne) des points non singuliers de la variété.

Proposition 3.3.5.

Soit $f = \frac{p}{q} \in R_b(X)$ écrit comme quotient de polynômes. Alors $\mathcal{Z}_{R_b}(f) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)$

Si de plus p et q sont premiers entre eux, et $\dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)) > \dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q))$, alors on a l'inclusion $\text{Cent}(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)) \subseteq \mathcal{Z}_{R_b}(f)$

On note que par 2.4.3 la condition $\dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)) > \dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q))$ est automatiquement satisfaite lorsque $\text{codim}(\mathcal{Z}(p)) = 1$

Démonstration. En remarquant que $p = fq$, la proposition 3.3.3 précédente nous permet d'obtenir

$$\mathcal{Z}_{R_b}(f) \subseteq \mathcal{Z}_{R_b}(p)$$

Or p est un polynôme, donc on a $\mathcal{Z}_{R_b}(p) = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)$ ce qui permet de conclure.

Pour le lieu central, on remarque que $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p) \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q) \subseteq \mathcal{Z}_{R_b}(f)$, en effet ce sont des lieux réguliers où la fonction s'annule. D'où $\text{Cent}(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p) \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q)) \subseteq \mathcal{Z}_{R_b}(f)$, et comme $\mathcal{Z}_{R_b}(f)$ est un fermé euclidien (voir 3.3.1),

$$\overline{\text{Cent}(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p) \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q))} \subseteq \mathcal{Z}_{R_b}(f)$$

Et comme $\dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p)) > \dim(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q))$ on a

$$\overline{\text{Cent}(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p) \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(q))} = \text{Cent}(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(p))$$

ce qui conclut. □

L'outil suivant concerne le produit cartésien :

Proposition 3.3.6. Soit $f \in R_b(X)$ et $g \in R_b(Y)$ deux fonctions rationnelles bornées sur des variétés réelles affines irréductibles non singulières.

Il existe $h \in R_b(X \times Y)$ vérifiant $\mathcal{Z}(h) = \mathcal{Z}(f) \times \mathcal{Z}(g)$

Démonstration. Notons $\Pi_X : X \times Y \rightarrow X$ et $\Pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ les projections associées au produit cartésien. On commence par remarquer que $\mathcal{Z}_{R_b}(f \circ \Pi_X) = \mathcal{Z}_{R_b}(f) \times Y$, et similairement

$$\mathcal{Z}(g \circ \Pi_Y) = X \times \mathcal{Z}(g)$$

On remarque que $\mathcal{Z}(f) \times \mathcal{Z}(g) = (\mathcal{Z}(f) \times Y) \cap (X \times \mathcal{Z}(g))$. On va donc prendre

$$h := (f \circ \Pi_X)^2 + (g \circ \Pi_Y)^2$$

La proposition 3.3.3 ne permet de montrer que l'inclusion $\mathcal{Z}(h) \subseteq (\mathcal{Z}(f) \times \mathcal{Z}(g))$

Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in \mathcal{Z}(f) \times \mathcal{Z}(g)$, et soient (α, β) deux arcs témoins de ces annulations.

En notant $\gamma = (\alpha, \beta)$, avec $\alpha = \Pi_X \circ \gamma$ et $\beta = \Pi_Y \circ \gamma$ on remarque alors

$$h \circ \gamma = (f \circ \alpha)^2 + (g \circ \beta)^2$$

Ainsi $h \circ \gamma$ tend vers zéro; d'où $x \in \mathcal{Z}(h)$ □

En plus d'outils, voyons une brique de base : un segment est un fermé rationnel borné.

Exemple 3.3.7. Si l'on reprend la courbe de l'exemple 2.1.4, alias celle de $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, et qu'on fait l'intersection avec la droite verticale $x = y = 0$, on obtient dans un R^3 le segment vertical $\{(0, 0, t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

C'est ainsi l'ensemble des zéros de la fonction $\left(z - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 + (x^2 + y^2)$. La figure 10 en montrait ses points témoins dans un espace éclaté : le cercle penché dans le cylindre devient un segment quand le cylindre se projette sur une droite.

On peut dériver cet exemple pour obtenir une demi-droite :

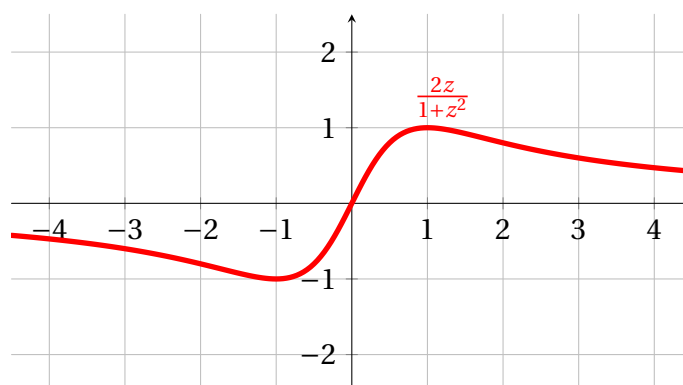
Exemple 3.3.8. Soit $f : R^3 \rightarrow R$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2z}{1+z^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 + x^2 + y^2$$

Cette fonction est rationnelle bornée comme composée d'une fonction rationnelle bornée avec une fonction régulière.

Les zéros de f coïncident avec l'intersection du terme entre parenthèses et de la droite $\{x = y = 0\}$

Pour comprendre l'annulation du terme entre parenthèses, regardons le graphe de $\frac{2z}{1+z^2}$:



Cela vaut entre 0 et -1 sur R_- et entre 0 et 1 sur R_+ . Ainsi, en demandant la condition « je veux que les valeurs atteintes soient entre 0 et 1 », on obtient R_+ , et donc une demi-droite. Une autre manière de s'en convaincre est de regarder le graphe de l'annulation du terme entre parenthèses en figure 11

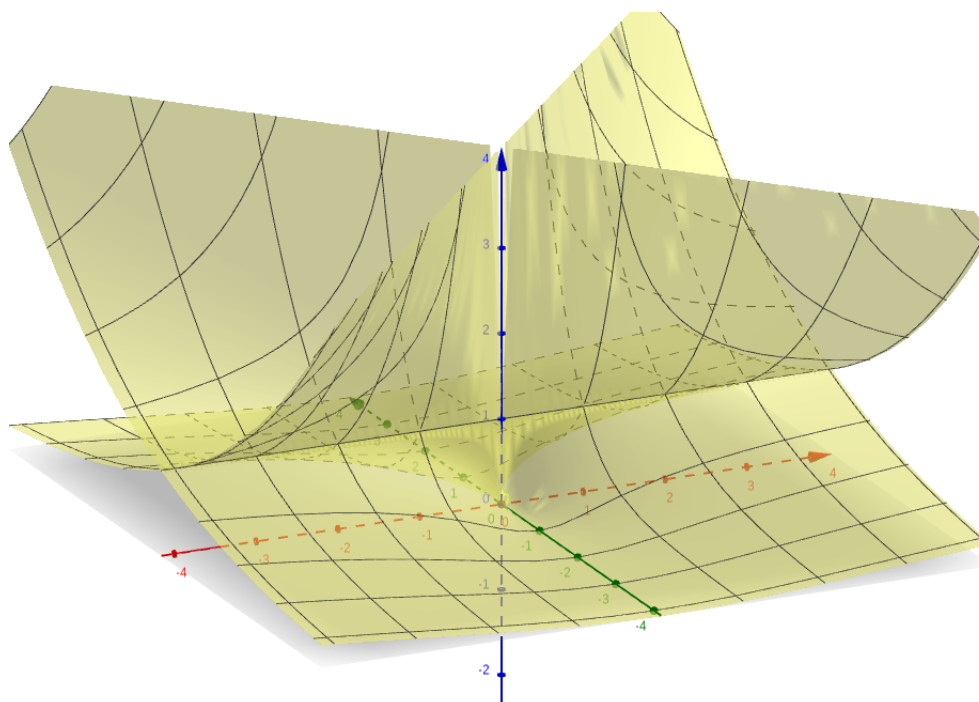


FIGURE 11 – Annulation de $\frac{2z}{1+z^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Ainsi, $\mathcal{Z}(f)$ est la demi-droite positive de l'axe des z à savoir $\{(0, 0, t) \mid t \geq 0\}$

Remarque 3.3.9. On peut aussi obtenir la demi-droite comme intersection du parapluie de Whitney sans manche, voir ex 3.1.9 avec l'axe des z .

Ces outils suffisent pour construire une famille plutôt large d'ensembles semi-algébriques :

Proposition 3.3.10. *On considère $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$ des polynômes, et le fermé semi-algébrique suivant :*

$$U = \{\underline{x} \in R^n \mid p_1(\underline{x}) \geq 0, \dots, p_k(\underline{x}) \geq 0\}$$

Il existe $h \in R_b(R^{n+3k})$ tel que $\mathcal{Z}(h) \simeq U$ (isomorphisme polynomial) via $\varphi : R^{n+3k} \rightarrow R^n$ dont le sens direct projette sur les n premières coordonnées.

Démonstration. Commençons par considérer

$$V := \left\{ (\underline{x}, \underline{y}) \in R^{n+k} \mid f_1(\underline{x}) - y_1 = 0, \dots, f_k(\underline{x}) - y_k = 0, y_1 \geq 0, \dots, y_k \geq 0 \right\}$$

Cet ensemble est polynomialement isomorphe à U via

$$\begin{aligned} \psi : \quad R^n &\rightarrow R^{n+k} \\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, p_1(\underline{x}), \dots, p_n(\underline{x})) \\ (x_1, \dots, x_n) &\leftarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \end{aligned}$$

On remarque ainsi que ψ^{-1} est la projection sur les n premières coordonnées.

Or, si l'on note $(0)_i = (0, \dots, 0)$ le i -uplet contenant i fois le nombre 0, on a

$$V \times (0)_{2k} = (E \times R^{2k}) \cap (R^n \times F \times (0)_{2k})$$

Avec E l'ensemble algébrique $\{p_i(\underline{x}) - y_i = 0\}_i$ et

$$F := \{y_1 \geq 0, \dots, y_k \geq 0\} \subseteq R^k$$

Or $F \times (0)_{2k}$ est un fermé rationnel borné de R^{3k} , comme produit cartésien (voir 3.3.6) de demi-droites (voir 3.3.8), qui doivent être construites dans R^3 , d'où l'ajout de $2k$ coordonnées.

Comme E est algébrique, il peut être décrit comme lieu d'annulation d'un polynôme (et $E \times R^{2k}$ aussi). Ainsi, par le cas d'égalité de l'intersection de la proposition 3.3.3, il existera une fonction rationnelle bornée qui s'annulera sur $V \times (0)_{2k}$. Et ce dernier ensemble est isomorphe à V polynomialement, avec l'un des morphismes qui est une projection. En composant avec ψ , on obtient le résultat souhaité. \square

Théorème 3.3.11. *Tout fermé semi-algébrique est polynomialement isomorphe (avec pour sens direct une projection) à un fermé rationnel borné.*

Démonstration. Par le théorème de finitude [BCR13, 2.7.2], tout fermé semi-algébrique est une union finie de fermés de la forme $\{\underline{x} \in R^n \mid f_1(\underline{x}) \geq 0, \dots, f_k(\underline{x}) \geq 0\}$. On utilise alors la pro-

position 3.3.3 pour l'union ainsi que la proposition précédente 3.3.10 pour la forme de base et on peut conclure. \square

On retrouve alors un résultat qui ne parle pas de fonctions rationnelles bornées.

Corollaire 3.3.12. *Tout fermé semi-algébrique de R^n est image d'un fermé de Zariski de R^{n+k} pour un certain k par une projection sur les n première coordonnées.*

Démonstration. On remarque que l'éclatement, pour un corps réel clos quelconque, peut s'écrire comme une projection, voir [BCR13, 3.5.7]. On peut alors composer la projection de 3.3.11 avec une composition d'éclatements donnée par la proposition 3.2.1. \square

Les réciproques de ce théorème et de ce corollaire sont bien entendu vraies, voir proposition 3.3.1 affirmant que les fermés rationnels bornés sont semi-algébriques, et [BCR13, 2.2.1] affirmant que la projection d'un semi-algébrique est semi-algébrique. Ceci dit, l'histoire d'agrandir l'espace ambiant n'est pas anodine, et, par exemple, les fermés semi-algébriques de R^3 ne coïncident pas avec les annulations de fonctions rationnelles bornées de R^3 . Par exemple, le carré n'est pas un fermé rationnel borné de R^3 , en effet si $f = \frac{p}{q}$ s'annule sur un carré, par le premier point de 3.3.5, $\mathcal{Z}(p)$ contient le carré donc le plan qui le prolonge, a fortiori sa dimension est ≥ 2 , et par 2.4.3, $\dim \mathcal{Z}(q) = 1$. On peut appliquer le deuxième point de 3.3.5 pour voir que $\mathcal{Z}(f)$ contient le lieu central de $\mathcal{Z}(p)$ qui contient ce plan. Il faut donc bien passer à des dimensions plus grandes pour avoir ce carré; celui-ci peut ainsi être obtenu dans R^6 à partir de

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \left(z_1 - \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} \right)^2 + \left(z_2 - \frac{x_2^2}{x_2^2 + y_2^2} \right)^2 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

Exemple 3.3.13. En fait, tout semi-algébrique fermé de R^3 qui est entièrement inclus dans une droite (disons l'axe des z) peut être réalisé comme lieu des zéros d'une fonction rationnelle bornée de R^3 . Un tel semi-algébrique étant nécessairement une union de points et d'intervalles fermés (éventuellement non bornés), il existe un polynôme à une variable, appelons-le $P(z)$, qui est positif ou nul sur ce semi-algébrique et négatif sur la droite privée de ce semi-algébrique. On pourra prendre par exemple

$$P(z) = \pm \prod_i (z - a_i)^2 \cdot \prod_j (z - b_j)$$

Où les a_i sont les coordonnées des points isolés et les b_j sont celles des bornes des intervalles, et le signe devant dépend des intervalles non bornés.

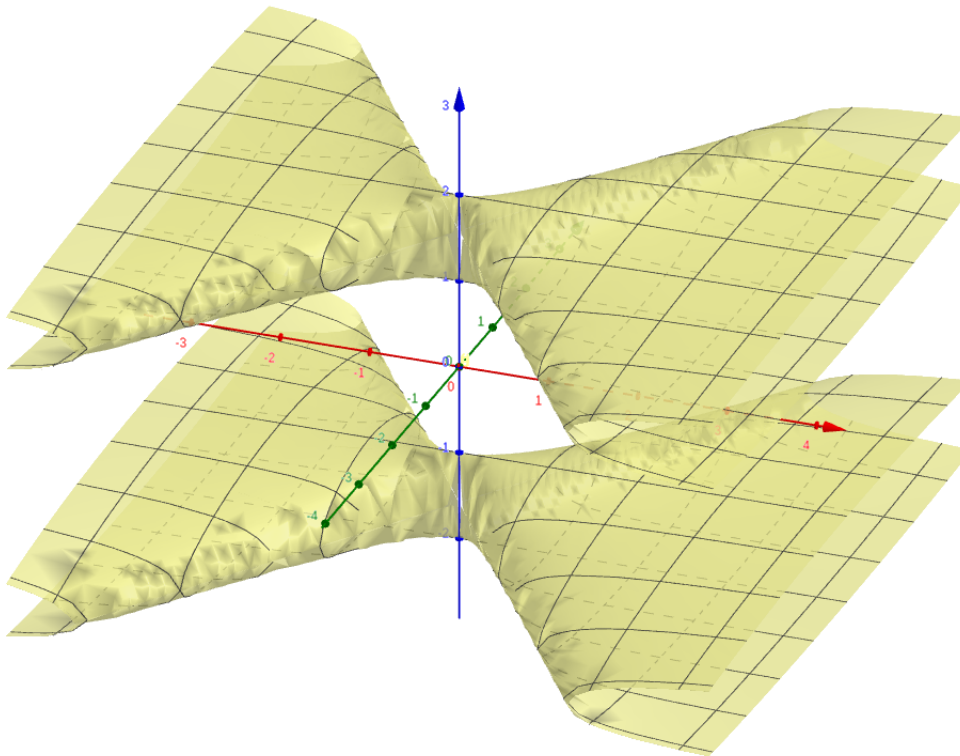


FIGURE 12 – Lieu des zéros de $\frac{x^2}{x^2+y^2}(-z^4+5z^2-4) - \frac{y^2}{x^2+y^2}$

La fonction suivante s'annule alors le long de notre semi-algébrique, sur l'axe des z dans R^3 :

$$f(x, y, z) := \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}P(z) - \frac{y^2}{x^2+y^2} \right)^2 + x^2 + y^2$$

On représente en figure 12 la fonction qui, après intersection entre son graphe et la droite verticale, permet d'obtenir les deux segments $[-2, -1] \cup [1, 2]$. Lorsque $P(z)$ est positif ou nul, $g(x, y, z) := \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}P(z) - \frac{y^2}{x^2+y^2} \right)$ a des annulations en $(0, 0, z)$, en effet g est identiquement nulle le long de la droite $t \mapsto (t, t\sqrt{P(z)}, z)$ qui passe par $(0, 0, z)$.

Lorsque $P(z)$ est strictement négatif, par contre, un argument similaire à ce qui a été développé dans l'exemple 3.1.9 avec le parapluie de Whitney permet de voir qu'aucun arc ne peut annuler l'équation.

En effet, comme $\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$, on a, lorsque $P(z) < 0$, deux cas non exclusifs. Le premier implique que $-\frac{y^2}{x^2+y^2}$ est strictement négatif aux alentours de $(0, 0)$, l'autre implique que $\frac{x^2}{x^2+y^2}P(z)$ est strictement négatif à cet endroit. Et dans tous les cas, les deux termes sont négatifs ou nuls. Leur somme tend donc vers un nombre strictement négatif, a fortiori elle

ne tend pas vers zéro.

On a donc montré que les points de $\mathcal{Z}(g)$ situés sur l'axe des z étaient exactement sur le semi-algébrique $\{P(z) \geq 0\}$ que l'on cherchait. Il reste alors à faire une somme de carrés pour passer de g à f et pour ne pas avoir de points en dehors de l'axe des z .

On a ainsi pu réaliser le fermé $\{P(z) \geq 0\} \subseteq \{x = y = 0\}$.

Proposition 3.3.14. *Les fermés (euclidiens) de la forme $\mathcal{Z}(f)$ pour $f \in R_b(X)$ ont des complémentaires qui forment une base d'ouverts d'une topologie sur X*

Démonstration. Pour montrer qu'il s'agit d'une base d'ouverts, il suffit de montrer que l'intersection de deux éléments est aussi un élément, ce qui revient à dire que l'union de deux ensembles de zéros est un ensemble de zéros. Or par la proposition 3.3.3,

$$\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(fg). \quad \square$$

Remarque 3.3.15. En fait, cette topologie « rationnelle bornée » coïncide avec la topologie « uniformément bornée » (voir 3.2.4) et avec la topologie « Zariski-Contractée » (voir 3.2.1), dont les fermés sont des images d'ensembles de Zariski par des compositions d'éclatements à centres lisses.

Exemple 3.3.16 (Cette topologie n'est pas noetherienne). En ajoutant un paramètre $\alpha > 0$ à l'exemple 3.3.7, on dérive la fonction $(z - \alpha \frac{x^2}{x^2+y^2})^2 + (x^2 + y^2)$ dont l'ensemble des zéros, dessiné dans R^3 est un segment vertical de longueur α . Ces segments sont tous les uns dans les autres et on peut ainsi en dériver une chaîne infinie strictement décroissante, par exemple en prenant des $\alpha = 1 + \frac{1}{n}$. Bien sûr, les témoins correspondants, pour les graphes ou pour les éclatements, ne correspondent pas.

Chez les fonctions régulières, il était très intéressant d'avoir une topologie noetherienne. En effet, l'algèbre des fonctions régulières n'est pas noetherienne, et les raisonnements ont du mal à utiliser un nombre potentiellement infini de générateurs d'un idéal. Mais grâce à la géométrie, on pouvait trouver un générateur radical de chaque idéal. Un exemple d'utilisation était le Nullstellensatz. À ce moment de l'étude, il est cependant encore trop tôt pour oser même en formuler (on a besoin d'idéal annulateur). On peut quand même obtenir dans le cas rationnel borné un Nullstellensatz faible :

Proposition 3.3.17. *Soit $f \in R_b(X)$.*

Si $\mathcal{Z}(f) = \emptyset$ alors f est inversible dans $R_b(X)$, c.à.d. $\langle f \rangle = R_b(X)$

Démonstration. On montre que $\frac{1}{f}$ est rationnelle bornée à l'aide de la caractérisation par arcs. En effet, si aucun chemin borné γ ne vérifie $f \circ \gamma \rightarrow 0$, alors aucun chemin borné ne peut vérifier $\frac{1}{f} \circ \gamma \rightarrow \infty$.

On a alors $1 = f \frac{1}{f} \in \langle f \rangle$, d'où $\langle f \rangle = R_b(X)$. □

Dans le cas $X = R^2$, ce résultat se généralise pour les idéaux de type fini, mais il faudra prendre des précautions. Voir [4.4.2](#)

Pour les idéaux de manière générale, les contre-exemples que l'on verra au [5.1.7](#) nous donnent dans R^2 des idéaux non pleins qui ont des ensembles de zéros vides.

3.4 L'image d'une fonction rationnelle bornée

On considère ici l'image d'une fonction rationnelle bornée. Dans cette section, X et Y sont deux variétés algébriques réelles affines plongées irréductibles non singulières. Notons que contrairement au cas du lieu d'annulation, nous n'utiliserons pas les fonctions rationnelles dans le cadre général, et nous nous restreignerons aux fonctions rationnelles bornées. La chose pourrait être faite dans le cadre général, mais nous n'avons pas trouvé cela intéressant dans cette étude.

Proposition - définition 3.4.1. Soit $f \in R_b(X, Y)$ avec $U := \text{dom } f$.

Les ensembles suivants sont égaux :

- $\text{Im}_{\text{arc}}(f) := \{a \in Y \mid \exists \gamma :]0, 1[\rightarrow X \text{ s-a avec } \gamma(]0, 1[) \subseteq U \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = a\}$
i.e. l'ensemble de toutes les limites de f composée avec un arc borné.
- $\text{Im}_{\text{graph}}(f) := \{a \in Y \mid \exists x \in X, (x, a) \in \overline{\mathcal{C}_f}\}$
i.e. la projection, sur l'ensemble Y , de la clôture euclidienne (dans $X \times Y$) du graphe de $f|_U$.

On notera cet ensemble $\text{Im}(f)$ ou $\text{Im}_{R_b}(f)$ dans la suite.

Démonstration. Soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow X$ semi-algébrique continu (donc borné) avec $\gamma(]0, 1[) \subseteq U$. On suppose ainsi $\lim f \circ \gamma = a$ et on veut montrer que a est aussi une image par graphe. On pose $x := \gamma(0)$.

On considère $(\gamma(t), f(\gamma(t)))$ comme arc de $X \times Y$. L'image de $]0, 1[$ par cet arc est dans \mathcal{C}_f . On a alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t), \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t) \in \overline{\mathcal{C}_f}$$

Le résultat découle alors du fait que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \gamma(0) = x$.

Réciproquement, si a est tel qu'il existe $x \in X$ vérifiant $(x, a) \in \overline{\mathcal{C}_f}$, on va, à l'aide du lemme des petits chemins [BCR13, 2.5.5], pouvoir trouver un arc γ semi-algébrique qui tend vers (x, a) , et qui est inclus (en dehors de $\gamma(0)$) dans $\overline{\mathcal{C}_f} \subseteq U \times Y$.

Si l'on note α ses premières coordonnées (celles dans U), et β les suivantes, on a alors pour $t \neq 0$,

$f(\alpha(t)) = \beta(t)$. De plus, en prenant la limite coordonnée par coordonnée, on a $\lim \alpha = x$ et $\lim \beta = a$, ce qui conclut. \square

De la même manière que pour le noyau, on peut caractériser l'image d'une fonction rationnelle bornée à partir d'éclatements. On aura choisi de séparer cette définition équivalente pour mettre en avant le fait qu'on n'a pas besoin de la complexité du théorème d'Hironaka pour prouver l'équivalence précédente (on notera qu'un éclatement, tel que demandé par les hypothèses de la proposition suivante, existe toujours par le théorème d'Hironaka, voir 1.4.1).

Comme on a pu le remarquer dans la remarque 3.1.4, on pourrait de manière équivalente utiliser une résolution point par point ou en utiliser une globale. On choisit ici de donner directement la version globale :

Proposition 3.4.2. *Si f est une fonction rationnelle bornée de X , et si (\tilde{X}, φ) est une résolution vérifiant $\text{indet}(f \circ \varphi) = \emptyset$ et étant un isomorphisme au-dessus de $\text{dom } f$, alors $\text{Im}_{R_b} f$ est égale à $\text{Im}_{\mathcal{R}}(f \circ \varphi)$.*

Notons qu'une telle résolution existe toujours, voir 1.4.1.

Démonstration. Soit $\gamma :]0, 1] \rightarrow X$ semi-algébrique borné avec $\gamma(]0, 1]) \subseteq U$.

On suppose que $a := \lim f \circ \gamma$ est image par arcs et on veut montrer que c'est aussi une image par éclatement.

On écrit $(\tilde{f}, \tilde{X}, \varphi)$ la résolution donnée par les hypothèses. Comme $\gamma(]0, 1]) \subseteq U$, on peut définir $\tilde{\gamma} := \varphi^{-1} \circ \gamma$ sur $]0, 1]$ et prolonger en 0 par [BCR13, 2.5.3]. On pose ainsi $\tilde{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(t)$. On a alors sur $]0, 1]$,

$$f \circ \gamma = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}$$

d'où l'égalité

$$a = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t))$$

On a alors bien $\tilde{f}(\tilde{x}) = a$ par continuité de \tilde{f} .

Réciproquement, si $(\tilde{f}, \tilde{X}, \varphi)$ est une résolution telle que proposée, et $a = \tilde{f}(\tilde{x})$.

Comme $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U)$ est dense dans \tilde{X} (voir 1.4.5), on peut trouver par [BCR13, 2.5.5] un arc semi-algébrique $\tilde{\gamma}$ ayant pour limite \tilde{x} . En posant $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$ on obtient alors un arc semi-algébrique de X dont l'image de $]0, 1]$ est dans U . On a alors :

$$a = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t))$$

D'où le résultat. □

Les définitions d'ensemble annulateur et d'image que l'on vient de faire sont similaires, et à ce titre on en trouve une certaine cohérence :

Lemme 3.4.3. *Soit $f \in R_b(X)$. On a $Z(f) = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin \text{Im}(f)$*

Démonstration. Assez immédiat pour les trois définitions/caractérisations. Prenons celle des arcs : Un arc témoin de l'annulation d'un élément de l'ensemble de départ est aussi un arc témoin du fait que $0 \in \text{Im}(f)$. □

Proposition 3.4.4. *L'image d'une fonction rationnelle bornée est semi-algébrique, fermée bornée si X l'est, semi-algébriquement connexe si X l'est (donc compacte et connexe dans le cas $R = \mathbb{R}$).*

Démonstration. En utilisant la définition par les graphes, l'image est semi-algébrique comme projection d'un semi-algébrique (voir [BCR13, 2.2.1] pour la stabilité des semi-algébriques par projection).

Le reste découle du fait qu'il existe toujours, par le théorème d'Hironaka 1.4.1, une résolution témoin, et donc que l'image de la fonction rationnelle bornée est aussi l'image d'une fonction régulière, donc continue, sur une variété lisse avec les propriétés voulues (l'opération d'éclatement respectant le caractère fermé-borné ainsi que la connexité semi-algébrique). □

Remarque 3.4.5. Si la variété X n'est pas connexe, il est possible que l'image ne le soit pas, déjà pour les polynômes. Prenons comme exemple la fonction $(x, y) \mapsto x$ sur la variété d'équation $y^2 = x^3 - x$, dont l'image contient $0, 1$ mais pas $\frac{1}{2}$.

Le théorème suivant résume l'essentiel de cette section : les images rationnelles bornées sont des images régulières. Un grand travail de description des images régulières a déjà été réalisé notamment par Fernando, voir [FG06], [FGU11], [FGU17] ou [Fer+18].

Théorème 3.4.6. *Un ensemble est une image rationnelle bornée ssi c'est une image régulière.*

Démonstration. Le sens réciproque est trivial (une fonction régulière étant rationnelle bornée) le sens direct est une conséquence de la caractérisation par des éclatements et du théorème d'Hironaka nous assurant qu'une résolution témoin est toujours trouvable. \square

Le théorème précédent a déjà été remarqué et démontré dans [Fer+18]. Il y est même donnée une version plus forte, dans le cas $X = \mathbb{R}^2$, où la fonction régulière ayant la même image étant aussi définie sur \mathbb{R}^2 . L'idée est de voir le changement de coordonnées polaires \rightarrow cartésienne comme un éclatement de l'origine. En utilisant la paramétrisation algébrique du cercle,

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$$

On peut avec elle réaliser un genre d'éclatement qui soit un revêtement double en dehors du lieu exceptionnel, mais surtout qui soit algébrique et de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

On termine avec un résultat qui généralise [Din+22, 5.1] à la dimension quelconque et au corps réel clos quelconque. En effet, si $Y = R$, un fermé borné connexe est un segment fermé $[a, b]$.

Proposition 3.4.7. *Soit $f \in R_b(X, Y)$ et soit $x \in \text{indet } f$.*

L'ensemble $f(\{x\}) := \{y \in Y \mid \exists \gamma \rightarrow x, f \circ \gamma \rightarrow y\}$ est semi-algébrique fermé borné et (semi-algébriquement) connexe.

Démonstration. On considère φ une résolution avec \tilde{f} régulière.

Pour la première affirmation, on commence par remarquer que $\{x\}$ est fermé borné, ainsi son image réciproque par φ est fermée bornée (car φ est propre). On peut alors utiliser la continuité de \tilde{f} pour conclure en utilisant [BCR13, 2.5.8] qui nous assure que l'image d'un semi-algébrique fermé borné par une application continue est aussi semi-algébrique fermé borné.

Pour la connexité, soient F_1 et F_2 deux semi-algébriques fermés de $f(\{x\})$ tels que :

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset \text{ et } F_1 \cup F_2 = f(\{x\})$$

Par continuité $\tilde{f}^{-1}(F_1)$ et $\tilde{f}^{-1}(F_2)$ sont des fermés; leur intersection est vide car $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et leur union vaut $\varphi^{-1}(\{x\})$ (pour s'en convaincre il suffit d'appliquer la commutativité du diagramme de résolution avec quelques limites et quelques définitions). Or $\varphi^{-1}(\{x\})$ est le lieu exceptionnel d'un éclatement à centres lisses et connexes, ce qui est connexe. D'où l'un des deux vaut $\varphi^{-1}(\{x\})$ ce qui permet de conclure. \square

Remarque 3.4.8. On note qu'on pourrait aussi définir $f(\{x\})$ via éclatements :

$$f(\{x\}) = \{y \in Y \mid \exists \varphi : \tilde{X} \rightarrow X \text{ résolution rendant } f \text{ régulière, } \exists \tilde{x} \in \varphi^{-1}(x), f \circ \varphi(\tilde{x}) = y\}$$

La preuve de l'équivalence serait similaire à celle de [3.4.1](#) et on trouverait donc le même résultat.

GÉOMÉTRIE DANS UN ESPACE D'ARCS

La géométrie que l'on a créé au chapitre précédent possède une force qui est aussi sa faiblesse : on a la même géométrie en prenant les fonctions rationnelles générales ou les fonctions rationnelles bornées. Si cela veut dire qu'on peut exprimer plus simplement les fermés ainsi créés, cela implique aussi qu'une telle géométrie ne peut suffire à obtenir des résultats algébriques sur l'anneau des fonctions rationnelles bornées. On commencera ce chapitre en montrant les limitations qui se posent à nous pour cette géométrie : impossibilité de construire un idéal en dimension > 2 , impossibilité de définir l'idéal annulateur. Puis nous verrons les limitations algébriques des zéros déjà définis en cherchant les bonnes hypothèses pour obtenir une inégalité de Łojasiewicz. Cela nous amènera alors à définir des ensembles de zéros dans les espaces d'arcs. Enfin, nous ferons à l'aide de tous ces outils une étude algébrique aussi complète que possible de l'anneau des fonctions rationnelles bornées. À cause des limitations données en première section, ce chapitre jonglera entre dimension quelconque (avec X une variété algébrique affine réelle lisse irréductible) et dimension 2 (où on prendra R^2 pour rendre la lecture et la différentiation plus facile).

4.1 Lieu des zéros d'un idéal

Le but de cette section est de définir quand cela est possible l'ensemble des zéros d'un idéal de fonctions rationnelles bornées.

Soit $A \subseteq R_b(X)$. Deux choix semblent s'offrir à nous pour les définitions par arcs et par éclatements. On commence avec le cas des arcs sans donner les hypothèses précises pour faciliter la lecture.

$$\mathcal{Z}_1(A) := \{x \in X \mid \forall f \in A, \exists \gamma \text{ arc}, \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0\} = \bigcap_{f \in A} \mathcal{Z}(f)$$

À savoir : le lieu où toutes les fonctions de A ont une annulation.

$$\mathcal{Z}_2(A) := \{x \in X \mid \exists \gamma \text{ arc}, \forall f \in A, \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0\}$$

À savoir : le lieu où les fonctions de A ont toutes un témoin d'annulation commun.

Étudions alors un exemple, dérivé de l'exemple 3.1.2 :

Exemple 4.1.1. On pose dans R^2 , $f(x, y) = \frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ et $g(x, y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$. Les deux fonctions ont un zéro en $\{0, 0\}$ mais selon un arc différent (ou avec un point témoin différent dans les éclatés). Ainsi, $f + g = 1 + \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ est inversible. Cependant, $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \{0, 0\}$. Autrement dit,

$$\mathcal{Z}_1(\{f, g\}) = \{0, 0\} \text{ mais } \mathcal{Z}_1(\{f, g, f + g\}) = \emptyset$$

Ainsi, la première propriété qui semble la plus intuitive ne peut pas fonctionner en codimension ≥ 2 , et ne peut faire de lien entre fonctions et idéal.

Remarque 4.1.2. Soit, pour $n \geq 3$, un arc semi-algébrique $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^n$, et $0 < \epsilon < \delta \ll 1$ tels que $\gamma([\epsilon, \delta])$ n'a pas de singularité. Par [BCR13, 3.3.9] on peut trouver $n - 1$ polynômes P_1, \dots, P_{n-1} tels que

$$\gamma([\epsilon, \delta]) \subseteq \mathcal{Z}(P_1, \dots, P_{n-1})$$

Soit $g_\gamma := \frac{P_1^2}{P_1^2 + \dots + P_{n-1}^2}$. Alors si l'on s'approche de $\gamma([\epsilon, \delta])$ via $P_1 = 0, P_i \neq 0$ la fonction g_γ aura la valeur 0 mais si l'on s'approche via $P_1 \neq 0, P_i = 0$ la fonction g_γ aura la valeur 1.

Cela nous assure que $\gamma([\epsilon, \delta])$ est contenu dans le lieu de non-continuité de g_γ . Ainsi :

$$\forall \gamma : [0, 1] \rightarrow X, \exists 0 < \epsilon < \delta < 1, \exists g_\gamma \in R_b(X), \gamma([\epsilon, \delta]) \subseteq \text{indet } g_\gamma$$

Remarque 4.1.3. En dimension ≥ 3 ; si l'on s'imagine un arc $\gamma \in \mathcal{Z}(f)$, alors pour tout ϵ on pourra trouver un δ , tels que si l'on prend un g_γ donné par la remarque précédente, alors la fonction $g_\gamma f \in \langle f \rangle$ ne sera pas définie ni prolongeable sur $\gamma([\epsilon, \delta])$.

Ainsi γ ne pourra pas faire partie de $\mathcal{Z}_2(\langle f \rangle)$ qui s'en trouvera vide.

Exemple 4.1.4. Si l'on regarde dans R^3

$$f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

On peut s'intéresser à l'arc $\gamma(t) := (0, t, 0)$ qui annule f , et on peut choisir la fonction :

$$g(x, y, z) := \frac{z^2}{z^2 + x^2}$$

Alors le produit fg est dans l'idéal engendré par f mais l'arc γ ne peut pas témoigner de son annulation. En effet, pour tout $t > 0$, on définit les arcs suivants :

$$\alpha_t : s \mapsto (s, t, 0)$$

$$\beta_t : s \mapsto (0, t, s)$$

À t fixé et s convergent vers 0, les deux arcs convergent vers $\gamma(t)$, et pourtant :

$$\begin{aligned} ((fg) \circ \alpha_t)(s) &= \frac{s^2 + t^4}{s^2 + t^2} \cdot \frac{0}{0 + s^2} \equiv 0 \\ ((fg) \circ \beta_t)(s) &= \frac{0 + t^4}{0 + t^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 0} \equiv t^2 \end{aligned}$$

On remarque ainsi que pour $t > 0$, la valeur de fg en le point $\gamma(t)$ n'est pas uniquement déterminée. Cet arc ne peut donc pas témoigner d'une annulation de fg . On remarquera cependant que l'ensemble des valeurs possibles tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Cela se justifie par : « borné \times 0 = 0 ».

On peut, de plus, perturber l'arc, et $\delta(t) := (t^2, t, t^2)$ sera bien un arc annulateur de fg :

$$((fg) \circ \delta)(t) = \frac{t^4 + t^4}{t^4 + t^2} \cdot \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{t^2}{1 + t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Cependant, il existera une autre fonction qui ne sera pas définie sur $\delta \dots$

Remarque 4.1.5. Si l'on se place dans R^2 , les indéterminations sont des points isolés, ainsi un arc ne peut être contenu dans un lieu d'indétermination que s'il est constant. En forçant les arcs à ne pas être constants, la définition numéro 2 pourra fonctionner. Ainsi, dans toute la suite, nous nous placerons sur R^2 (cas similaire au cas d'une variété de dimension 2), et nous enlèverons de notre ensemble géométrique d'arcs les arcs constants.

Dans nos définitions avec une seule fonction on pouvait toujours reparamétriser l'arc pour n'en prendre qu'une petite partie et ainsi éviter le lieu d'indétermination de f . Cependant, ici, il se peut qu'une suite de fonctions f_i vérifie $\gamma(\frac{1}{n}) \in \text{indet } f_i$. Pour éviter que ce genre de cas devienne pathologique, il faut quantifier un ϵ dans la définition. On obtient alors :

Définition 4.1.6. Soit $A \subseteq R_b(R^2)$ (pas nécessairement un idéal). On pose

$$\mathcal{Z}(A) := \left\{ x \in R^2 \mid \begin{array}{l} \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ s-a non constant avec } \gamma(0) = x \text{ tq} \\ \forall f \in A, \exists \epsilon > 0, \gamma([0, \epsilon]) \subseteq \text{dom } f \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0 \end{array} \right\}$$

En fait, cela correspond à parler de germes, et cette définition se reformule naturellement : un point est dans $\mathcal{Z}(A)$ s'il existe un germe γ de fonctions semi-algébriques ayant ce point comme limite et vérifiant que le germe $f \circ \gamma$ a pour limite 0.

Remarque 4.1.7. La manière équivalente de faire cette définition avec les éclatements est (la démonstration de l'équivalence sera similaire à celle de la définition pour une seule fonction) :

$$\mathcal{Z}(A) := \{x \in R^2 \mid \exists (\varphi, \tilde{X}, \tilde{f}) \text{ résolution, } \exists \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ avec } \varphi(\tilde{x}) = x \text{ tels que } \forall f \in A, \tilde{f}(\tilde{x}) = 0\}$$

Nous n'avons cependant pas trouvé de définition pertinente utilisant les graphes des fonctions.

Proposition 4.1.8. 1. Pour $A \subseteq R_b(\mathbb{R}^2)$ et I l'idéal engendré par A , on a $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(I)$.

2. On a $\mathcal{Z}(I) \subseteq \bigcap_{f \in I} \mathcal{Z}(f)$ mais l'inclusion inverse n'est pas vérifiée.

3. Si J est un idéal de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, alors $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}(J)$ est égal à $\mathcal{Z}_{R_b}(J \cdot R_b(\mathbb{R}^2))$.

Démonstration. 1. Si $0 \notin A$, comme la fonction nulle annule tous les arcs, on voit que l'ajout de 0 dans A n'enlèvera aucun témoin d'annulation d'un point de $\mathcal{Z}(A)$.

Si $f \in A$, et que γ vérifie $\lim f \circ \gamma = 0$ alors on aura $\lim(-f) \circ \gamma = 0$.

Enfin, si $f_1, \dots, f_k \in A$ et $g_1, \dots, g_k \in R_b(X)$, et que γ est un arc borné témoignant d'une annulation commune des f_i , étant donné que nous sommes dans \mathbb{R}^2 et que l'arc n'est pas constant, $g(\gamma_i)$ sont rationnelle bornée donc régulière (par argument de dimension, en utilisant le corollaire 2.4.5 et le fait que, $\gamma_i([0, 1])$ est de dimension 1). Et comme g_i est rationnelle bornée, g_i sera bornée le long de γ et on aura $\lim(f_i g_i) \circ \gamma = 0$. D'où

$$\lim((f_1 g_1 + \dots + f_k g_k) \circ \gamma) = 0$$

Nous avons ainsi montré que tous les témoins d'annulation communs aux fonctions de A seront aussi des témoins d'annulation communs aux fonctions de I , ce qui montre que $\mathcal{Z}(A) \subseteq \mathcal{Z}(I)$, le sens réciproque étant, comme toujours avec les lieux des zéros, assez évident, car $A \subseteq I$ donc un témoin pour toutes les fonctions de I doit a fortiori l'être pour toutes les fonctions de A .

2. Soit $f \in I$. On voit que $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(f)$ car si γ est un témoin d'annulation de I pour un point $x \in \mathcal{Z}(I)$ donné, alors on a nécessairement $\lim f \circ \gamma = 0$.

Le contre-exemple à l'inclusion réciproque sera analysé plus tard, dans une partie consacrée, quand nous aurons introduit les zéros dans les espaces d'arcs. Voir 5.1.8.

3. Pour $\mathcal{Z}(J) \subseteq \mathcal{Z}(J \cdot R_b(X))$ on peut remarquer qu'un point x de $\mathcal{Z}(J)$ annule tous les polynômes de J , ainsi pour tout arc, la limite en x d'un polynôme de J fois une fonction bornée donnera aussi zéro. Pour l'égalité, on pourra remarquer que pour chaque point qui n'est pas dans $\mathcal{Z}(J)$, on pourra trouver un polynôme de J (qui se trouvera aussi dans $J \cdot R_b(X)$) qui ne s'annulera pas en ce point, et qui donc ne s'annulera en aucun arc allant vers ce point.

□

Remarque 4.1.9. Le premier point appliqué au singleton $\{f\}$ nous dit alors que l'on a nécessairement $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(\langle f \rangle)$ comme on le désirait. En effet une rapide observation de la

définition montre que $\mathcal{Z}(f)$ au sens de 3.1.3 est égal à $\mathcal{Z}(\{f\})$ au sens de la définition de cette section.

Remarque 4.1.10. Après avoir défini l'ensemble des zéros, on a envie de définir l'idéal annulateur pour pouvoir faire les classiques allers-retours entre géométrie et algèbre. Cependant, là aussi les définitions sont délicates. En effet, on prendrait pour $W \subseteq X$ la définition suivante :

$$\mathcal{I}(W) := \{f \in R_b(X) \mid \forall x \in W, \exists \gamma \rightarrow x, f \circ \gamma \rightarrow 0\}$$

Cependant, l'ensemble obtenu n'est pas un idéal. En effet, avec un contre-exemple qu'on a déjà croisé en 4.1.1, les fonctions $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ et $\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ sont toutes les deux dans $\mathcal{I}(\{(0,0)\})$, mais leur somme ne l'est pas. Et prendre l'idéal engendré par cet ensemble revient à prendre l'ensemble entier des fonctions rationnelles bornées. Notons que ces exemples problématiques existent en codimension ≥ 2 et que la chose est envisageable pour les hypersurfaces.

Une autre option serait de remplacer le \exists par un \forall mais cela forcerait les fonctions à être continues...

Après avoir vu les principales difficultés que l'on rencontre pour l'établissement d'un dictionnaire géométrie-algèbre, on va étudier l'inégalité de Łojasiewicz, qui s'avère être une brique importante du futur Nullstellensatz, et dont les hypothèses sauront nous illustrer les spécificités géométriques dont on a besoin pour avancer.

4.2 Une inégalité de Łojasiewicz

À partir des lieux d'annulation définis au chapitre précédent, on cherche à obtenir une inégalité de Łojasiewicz. Pour rappel, voici son énoncé régulier, voir [Fic+16] Lemme 5.1.

Théorème 4.2.1. *Soient n et k des entiers naturels. Soit f une fonction k -régulière sur \mathbb{R}^n .*

Si $g : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ est k -régulière, alors il existe un entier naturel N tel que l'extension à \mathbb{R}^n par 0 de $f^N g$ est k -régulière.

Démonstration. [Fic+16] Lemme 5.1 □

La principale utilisation de ce théorème est : lorsque l'on a f, h des fonctions k -régulières qui vérifient $\mathcal{Z}(h) \subseteq \mathcal{Z}(f)$, on peut utiliser le théorème avec $g := h^{-1}$ pour trouver un entier N vérifiant que $\frac{f^N}{h}$ est k -régulière. C'est donc sous cette forme, en prenant l'inverse, que l'on écrira notre résultat.

Par exemple, $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ peut être vue comme construite à partir des fonctions $f(x, y) = x$ et $h(x, y) = x^2 + y^2$

Ainsi, l'observation géométrique $\mathcal{Z}(h) \subseteq \mathcal{Z}(f)$ nous amène à voir que $f^N = \frac{f^N}{h} \cdot h$ est dans $\langle h \rangle$, et donc que $f \in \sqrt{\langle h \rangle}$

Cet énoncé ne fonctionne pas dans le cadre de lieu d'annulation que l'on a créé précédemment :

Exemple 4.2.2. On considère, comme à l'exemple 4.1.1, $f(x, y) = \frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ et $g(x, y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$. Les deux ont un comportement d'annulation autour de leur lieu d'indétermination, ie $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g) = \{(0,0)\}$, mais les chemins qui les amènent à l'annulation, ou les points témoins sur un espace éclaté commun, sont différents.

Ainsi, pour aucun $N \in \mathbb{N}$ on ne peut obtenir de continuité, voire même de borne, autour de 0 par la fonction $\frac{f^N}{g} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{N-1}} \frac{(x^2+y^4)^N}{x^4+y^2}$

En effet, $\frac{f^N}{g}(x, 0) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ et $\frac{f^N}{g}(0, y) = y^{2N} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$.

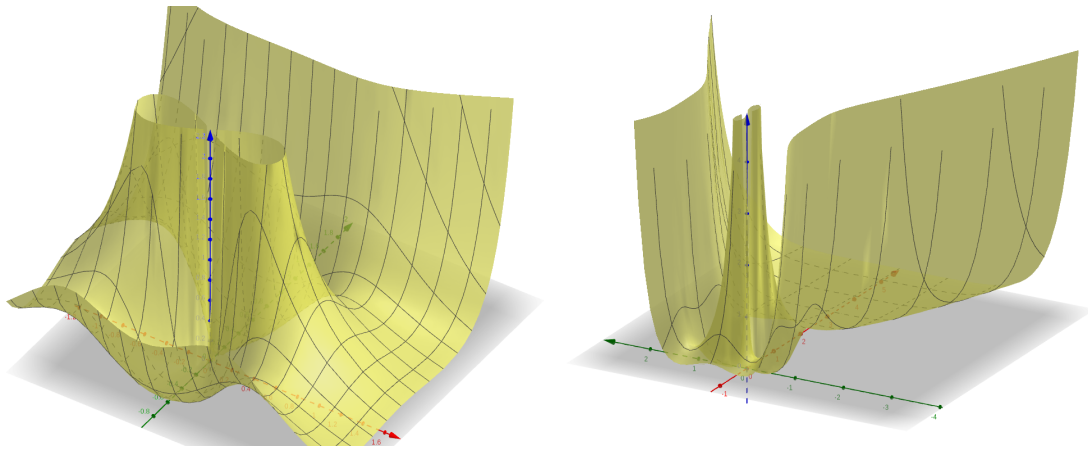


FIGURE 13 – Vue sous différents angles de $\frac{f^3}{g}$

On va donc chercher à mettre en place une bonne hypothèse pour obtenir une inégalité de Łojasiewicz. L'idée est de regarder non pas les points de R^n sur lesquels la fonction peut avoir une tendance à s'annuler, mais de conserver les témoins, et donc de regarder soit les points dans un bon espace éclaté, soit les arcs.

Théorème 4.2.3. Soient f, g deux fonctions rationnelles bornées de X dans R . On suppose qu'il existe $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ résolution vérifiant $\text{indet}(f \circ \varphi) = \text{indet}(g \circ \varphi) = \emptyset$, et tel que $\mathcal{Z}(g \circ \varphi) \subseteq$

$\mathcal{Z}(f \circ \varphi)$.

Alors il existe un entier N tel que $\frac{f^N}{g}$ soit rationnelle bornée.

Démonstration. Si $U = \text{dom } f$ et $V = \text{dom } g$, on pose $\tilde{U} := \varphi^{-1}(U)$ et $\tilde{V} := \varphi^{-1}(V)$, $W := U \cap V$. On remarque alors que $\tilde{W} := \varphi^{-1}(W)$ est égal à $\tilde{U} \cap \tilde{V}$. On note aussi $\tilde{f} = f \circ \varphi$ et $\tilde{g} = g \circ \varphi$. On aura besoin enfin par la suite de l'ouvert $Z := \{x \in W, g(x) \neq 0\} = \mathcal{D}(g)$ et de $\tilde{Z} := \varphi^{-1}(Z)$.

On remarque que φ est un isomorphisme birégulier de \tilde{W} dans W (qui sont respectivement des ouverts de Zariski de \tilde{X} et de X , voir 1.4.3). Comme la définition de fonction rationnelle bornée ne dépend pas de l'ouvert choisi (voir 2.1.2), et qu'une intersection de deux ouverts denses est aussi un ouvert dense, on peut considérer les fonctions f et g comme des fonctions de domaine W et pas de domaine U et V .

Les fonctions \tilde{f} et \tilde{g} se prolongent ainsi en des fonctions régulières sur \tilde{X} .

Par hypothèse, \tilde{g} ne s'annule pas sur $\mathcal{D}(\tilde{f}) = \{x \in \tilde{X}, \tilde{f} \neq 0\}$, donc $\frac{1}{\tilde{g}}$ est continue sur $\mathcal{D}(\tilde{f})$ (et semi-algébrique comme inverse d'une semi-algébrique).

On peut donc appliquer l'inégalité de Łojasiewicz semi-algébrique [BCR13, 2.6.4] avec \tilde{f} et $\frac{1}{\tilde{g}}$ sur \tilde{X} , pour obtenir l'existence d'un N vérifiant que $\frac{\tilde{f}^N}{\tilde{g}}$, prolongée par 0 sur $\mathcal{Z}(\tilde{f})$, est continue sur tout \tilde{X} (et semi-algébrique comme produit de semi-algébriques).

Il reste à redescendre. Pour commencer, remarquons que sur \tilde{Z} ,

$$\frac{\tilde{f}^N}{\tilde{g}} = \frac{(f \circ \varphi)^N}{g \circ \varphi} = \frac{f^N}{g} \circ \varphi = \left(\frac{f^N}{g} \right)$$

Soit K un fermé borné de X . Comme φ est propre, on a $\tilde{K} := \varphi^{-1}(K)$ fermé borné de \tilde{X} . Alors $\frac{\tilde{f}^N}{\tilde{g}}$ est continue (et semi-algébrique) sur le fermé borné \tilde{K} donc bornée (voir [BCR13] 2.5.8).

En particulier $\frac{\tilde{f}^N}{\tilde{g}}(\tilde{W} \cap \tilde{K})$ est un ensemble borné. Or $Z \subseteq W$ et $\frac{\tilde{f}^N}{\tilde{g}}(\tilde{Z} \cap \tilde{K}) = \frac{f^N}{g}(Z \cap K)$. D'où $\frac{f^N}{g}(K \cap Z)$ est un ensemble borné.

On peut alors appliquer la caractérisation par des compacts 2.1.8 pour conclure. \square

Afin d'obtenir la version avec des arcs, qui sera sans doute plus parlante, il ne reste qu'à démontrer l'équivalence entre les différentes conditions :

Lemme 4.2.4. *Soient f, g rationnelles bornées de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ résolution vérifiant $\text{indet}(f \circ \varphi) = \text{indet}(g \circ \varphi) = \emptyset$,*

telle que $\mathcal{Z}(g \circ \varphi) \subseteq \mathcal{Z}(f \circ \varphi)$.

ii) Pour tout arc semi-algébrique $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(]0, 1]) \subseteq \text{dom } f \cap \text{dom } g$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = 0$$

iii) Pour toute résolution $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ vérifiant $\text{indet}(f \circ \varphi) = \text{indet}(g \circ \varphi) = \emptyset$,

$$\text{on a } \mathcal{Z}(g \circ \varphi) \subseteq \mathcal{Z}(f \circ \varphi).$$

Démonstration. iii) \Rightarrow i)

La seule chose à faire ici est de montrer qu'il existe toujours une résolution double, ce qui est le propos du lemme 1.4.3.

i) \Rightarrow ii)

Soit γ un arc vérifiant de telles propriétés. On relève cet arc en dehors de 0 et on l'étend par [BCR13, 2.5.3] pour obtenir $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$. La condition $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$ implique que $\tilde{f}(\tilde{\gamma}(0)) = 0$, ce qui, par l'hypothèse i), implique $\tilde{g}(\tilde{\gamma}(0)) = 0$. Ainsi, en redescendant, $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = 0$. En résumé,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0 &\Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{g}(\tilde{x}) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow iii)

Soit $U := \text{dom } f$ et $V := \text{dom } g$. Ce sont des ouverts denses de Zariski donc leur intersection W l'est aussi.

Soit φ une résolution vérifiant les hypothèses proposées. En utilisant le lemme de densité 1.4.5, on déduit que $\varphi^{-1}(U \cap V) = \varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \tilde{U} \cap \tilde{V}$ est dense dans \tilde{X} .

Soit $\tilde{x} \in \mathcal{Z}(\tilde{f})$, on veut montrer que $\tilde{x} \in \mathcal{Z}(\tilde{g})$.

À l'aide du lemme de sélection des courbes [BCR13, 2.5.5], on choisit un arc $\tilde{\gamma} \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V}$ ayant pour limite \tilde{x} .

On pose $\gamma := \varphi \circ \tilde{\gamma}$. Par commutativité du diagramme de résolution et par continuité, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} f((\varphi \circ \tilde{\gamma})(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \varphi)(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors utiliser l'hypothèse ii) pour obtenir $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = 0$. Mais alors,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{g}(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (g \circ \varphi)(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} g((\varphi \circ \tilde{\gamma})(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{x} \in \mathcal{Z}(\tilde{g})$. □

L'inégalité de Łojasiewicz version arcs s'obtient alors immédiatement :

Théorème 4.2.5. *Soient f, g deux fonctions rationnelles bornées de X dans R . On suppose que pour tout arc semi-algébrique $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(]0, 1]) \subseteq U \cap V$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$$

Alors il existe un entier N tel que $\frac{f^N}{g}$ soit rationnelle bornée.

Démonstration. C'est le théorème 4.2.3 où on a remplacé l'hypothèse en utilisant le lemme 4.2.4 □

Cette condition nous montre qu'il sera utile de travailler dans les espaces d'arcs pour obtenir des informations algébriques à partir d'informations géométriques.

4.3 Zéros dans les espaces d'arcs

Dans cette section et dans la suivante, nos théorèmes jongleront entre la dimension 2 et la dimension quelconque. On notera donc X une variété algébrique réelle affine régulière irréductible de dimension quelconque et R^2 pour se placer dans le cadre de la dimension 2.

Nous allons maintenant construire un ensemble des zéros dans une géométrie plus détaillée que celle des points. Au vu des conditions données par les bonnes hypothèses pour l'inégalité de Łojasiewicz et des définitions pour lieu des zéros et images, il semble naturel de vouloir utiliser un espace d'arcs. Cela permettra pour le cas R^2 de construire lieux d'annulations et idéaux annulateurs. La dimension plus grande verra le même problème que dans le cas des points, voir 4.1.2 : pour toute fonction et tout arc on trouvera un élément dans l'idéal engendré qui aura cet arc entièrement dans son lieu d'indétermination. Cependant, on fera les premières définitions en dimension quelconque car quelques résultats manipulant un ensemble fini de fonctions y sont généralisables. Dans toute la suite, on suivra les notations

de la section 1.6 : pour X une variété algébrique affine irréductible réelle lisse, on notera \widehat{X} l'ensemble des arcs semi-algébriques bornés non constants de X , à savoir l'ensemble des germes de fonctions semi-algébriques continues non constantes $[0, \epsilon] \rightarrow X$. Notons que l'hypothèse « non constant » est là pour enlever les points de $\widehat{R^2}$ et n'est ni intéressante ni restrictive en dimension plus grande.

Lemme 4.3.1. $\forall f \in R_b(R^2), \forall \alpha \in \widehat{R^2}, \exists \epsilon > 0, f \circ \alpha$ est défini sur $]0, \epsilon[$ et borné : $f \circ \alpha \in R\langle X \rangle_b$

Démonstration. Par 2.4.4, $\text{indet } f$ est un ensemble fini de points. Ainsi pour tout arc non constant $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^2$ on a l'existence d'un $\epsilon > 0$ vérifiant $\gamma(]0, \epsilon[\subseteq \text{dom } f$. Comme on travaille ici avec des couples de germes, cela veut donc dire que $f \circ \alpha \in R\langle X \rangle$ est défini. Le caractère borné est alors une reformulation de la caractérisation par des arcs 2.1.7 qui nous dit qu'une fonction est rationnelle bornée si et seulement si l'image de tout arc borné est bornée. \square

On voit là aussi que plutôt que de manipuler des fonctions semi-algébriques continues sur $[0, 1]$, on manipule en réalité les germes de telles fonctions : la seule chose qui nous intéresse est le comportement en 0.

Définition 4.3.2. Soit $f \in R_b(X)$

On pose $\widehat{\mathcal{Z}}(f) := \{\alpha \in \widehat{X} \mid \exists \epsilon > 0, \gamma(]0, \epsilon[) \cap \text{indet}(f) = \emptyset \text{ et } \lim f \circ \alpha = 0\}$ l'ensemble des zéros de f dans \widehat{X} .

Notons qu'en dimension 2, si l'on force les arcs à ne pas être constants, la condition $\exists \epsilon, \gamma(]0, \epsilon[) \cap \text{indet}(f)$ est automatiquement vérifiée.

Avec cette définition, on peut reformuler plus simplement l'inégalité de Łojasiewicz de la section précédente (4.2.5) :

Théorème 4.3.3. Soient f, g deux fonctions rationnelles bornées de X dans R . Si $\widehat{\mathcal{Z}}(g) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(f)$ alors il existe un entier N tel que $\frac{f^N}{g}$ soit rationnelle bornée.

Démonstration. Immédiat. \square

Définition 4.3.4. Soit $f \in R_b(R^2)$

Pour I un idéal de $R_b(R^2)$, on pose $\widehat{\mathcal{Z}}(I) = \bigcap_{f \in I} \widehat{\mathcal{Z}}(f) = \{\alpha \in \widehat{R^2} \mid \forall f \in I, \lim f \circ \alpha = 0\}$.

Soit $\widehat{S} \subseteq \widehat{R^2}$, on peut alors définir l'idéal annulateur :

$$\widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S}) = \{f \in R_b(R^2) \mid \forall \alpha \in \widehat{S}, \lim f \circ \alpha = 0\}$$

Remarque 4.3.5. La définition de l'idéal annulateur peut se reformuler en termes de valuation; en effet $\lim f \circ \alpha = 0$ est équivalent au fait que la valuation de $f \circ \alpha$ est strictement positive (elle est déjà naturellement positive par le lemme 4.3.1).

Lemme 4.3.6. *L'idéal annulateur que l'on a défini est bien un idéal.*

Démonstration. On commence par montrer que $\widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S})$ est un groupe. Déjà, la valuation de la composition $0 \circ \alpha$ vaut $+\infty \geq 0$. On remarque aussi que pour la valuation qu'on considère, $v(f(\alpha)) = v(-f(\alpha))$. Enfin, la valuation d'une somme est supérieure au minimum des valuations, donc si $f, g \in \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S})$, alors pour $\alpha \in \widehat{S}$, on a $v(f(\alpha)) \geq 0$ et de même pour g . Ainsi :

$$v((f+g)(\alpha)) \geq \min(v(f(\alpha)), v(g(\alpha))) \geq 0$$

$\widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S})$ est donc bien un groupe. De plus, si $f \in \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S})$ et $h \in R_b(X)$, alors la valuation de $f \circ \alpha$ est strictement positive, et celle de $h \circ \alpha$ est positive ou nulle; donc la valuation du produit, à savoir la somme des valuations, est strictement positive. \square

Proposition 4.3.7.

- $\forall I, J \in R_b(R^2), I \subseteq J \Rightarrow \widehat{\mathcal{Z}}(I) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(J)$
- $\forall \widehat{S}, \widehat{T} \subseteq \widehat{R^2}, \widehat{S} \subseteq \widehat{T} \Rightarrow \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{S}) \supseteq \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{T})$
- $\forall f \in R_b(R^2), \widehat{\mathcal{Z}}(f) = \widehat{\mathcal{Z}}(\langle f \rangle)$

Démonstration. La contravariance découle, comme dans les cadres classiques, de la quantification universelle de la définition : si $\alpha \in \widehat{\mathcal{Z}}(J)$ alors $\forall f \in J, \lim(f(\alpha)) = 0$ et comme $I \subseteq J$ on a aussi $\forall f \in I, \lim(f(\alpha)) = 0$.

Similairement, si $f \in \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{T})$ alors $\forall \alpha \in \widehat{T}, \lim(f(\alpha)) = 0$ et donc par inclusion

$$\forall \alpha \in \widehat{S}, \lim(f(\alpha)) = 0$$

Pour la dernière égalité, l'inclusion $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(\langle f \rangle)$ est la partie triviale, et pour l'autre partie, si l'on prend α un arc qui annule f et $g = fh \in \langle f \rangle$; avec $h \in R_b(R^2)$; alors on aura $\lim h \circ \alpha$ borné et $\lim f \circ \alpha = 0$ et donc par produit $\lim g \circ \alpha = 0$ \square

On peut remarquer que l'opérateur de limite induit une application de l'espace des arcs bornés \widehat{X} vers l'espace des points X . Ces limites respectent d'une certaine manière les ensembles de zéros que nous avons créé ici et en 3.1.3 et 4.1.6 :

Proposition 4.3.8. *Soit $f \in R_b(X)$. Alors $\mathcal{Z}(f)$ est l'ensemble des limites des arcs de $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$. Soit I un idéal de $R_b(R^2)$. Alors $\mathcal{Z}(I)$ est l'ensemble des limites des arcs de $\widehat{\mathcal{Z}}(I)$.*

Démonstration. Découle des définitions : si $x \in \mathcal{Z}(f)$ alors il existe un arc γ de limite x tel que $\lim f \circ \gamma = 0$; ce qui veut dire $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(f)$. Réciproquement tout arc (borné) $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(f)$ est un

témoin pour l'annulation de f au point $\lim \gamma$

La démonstration est similaire pour les idéaux : si $x \in \mathcal{Z}(I)$ alors il existe un arc γ de limite x tel que pour $f \in I$ on a $\lim f \circ \gamma = 0$; ce qui veut dire $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(I)$. Réciproquement tout arc (borné) $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(I)$ est un témoin pour l'annulation de tous les $f \in I$ au point $\lim \gamma$ \square

Remarque 4.3.9. $R\langle T \rangle$ étant un corps réel clos, \widehat{X} hérite naturellement d'une topologie euclidienne et d'une topologie de Zariski. On peut alors se demander si les ensembles que l'on vient de créer ne peuvent pas déterminer une autre topologie sur \widehat{X} .

Chaque fonction f sépare l'espace des arcs en 3 sous-parties : $\widehat{\mathcal{D}}(f)$, $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$ et $\widehat{\text{indet}}(f)$. Le premier serait un ouvert, le 3e serait un fermé, donc le 2e serait un localement fermé (et pas un fermé). Or c'est bien $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$ qui transporte l'information qui nous intéresse, et qui serait le candidat pour un fermé de base. Ainsi, si topologie il y a, elle ne permettra d'aboutir à des résultats qu'en dimension 2 où l'on peut d'office écarter $\widehat{\text{indet}}(f)$.

4.4 Résultats algébriques

Dans cette section, on va étudier des propriétés algébrico-géométriques de $R_b(X)$. À défaut d'avoir une géométrie compatible avec les idéaux, beaucoup de résultats seront restreints à $R_b(R^2)$, pour lesquels les choses se passent relativement bien. La majorité des propositions évoquées ci-dessous ont des contre-exemples dans le cas où l'idéal n'est pas de type fini, et ce dès la dimension 2. On étudiera ces contre-exemples dans la partie 5.1 "créations d'exemples".

Le premier résultat est essentiellement une application de l'inégalité de Łojasiewicz, et décrit exactement le lien entre inclusion des lieux des zéros et inclusion des radicaux des idéaux engendrés :

Proposition 4.4.1. Soient $f, g \in R_b(X)$ avec X une variété algébrique réelle affine régulière irréductible de dimension quelconque.

$f \in \sqrt{\langle g \rangle}$ si et seulement si $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g)$

Par conséquent, $\sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{\langle g \rangle}$ si et seulement si $\widehat{\mathcal{Z}}(f) = \widehat{\mathcal{Z}}(g)$

Le contre-exemple 4.1.1 avec $\frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ et $\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ nous montre que cette propriété n'est pas vraie pour les espaces de points.

Démonstration. On suppose que $f \in \sqrt{\langle g \rangle}$. Soit $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(g)$.
Par hypothèse, il existe $h \in R_b(X)$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $f^N = gh$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (\lim f \circ \gamma)^N &= \lim f^N \circ \gamma \\ &= \lim (gh) \circ \gamma \\ &= (\lim g \circ \gamma) \cdot (\lim h \circ \gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, $h \circ \gamma$ est borné et $\lim g \circ \gamma = 0$ par hypothèse.

On aura remarqué que $\lim f \circ \gamma$ existe et est uniquement déterminé. Sa puissance est nulle, donc la limite est nulle.

Dit autrement, $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(f)$.

Réciproquement, si $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g)$ on peut utiliser l'inégalité de Łojasiewicz pour obtenir un N vérifiant $h := \frac{f^N}{g} \in R_b(X)$, ce que l'on peut réécrire $f^N = gh$; d'où $f \in \sqrt{\langle g \rangle}$ \square

On poursuit avec la généralisation aux idéaux de type fini du Nullstellensatz faible proposé en 3.3.17

Proposition 4.4.2. *Soit $f_1, \dots, f_k \in R_b(R^2)$. Si $\mathcal{Z}(\{f_1, \dots, f_k\}) = \emptyset$ alors $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = R_b(R^2)$*

Démonstration. On utilise 1.4.4 pour avoir une résolution commune $(\tilde{X}, \varphi, \tilde{f}_i)$. Comme toutes les \tilde{f}_i sont régulières, et que la condition sur les zéros implique que $\bigcap_i \mathcal{Z}(\tilde{f}_i) = \emptyset$, on peut appliquer le Nullstellensatz régulier¹ et voir que $1 \in \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k \rangle$

Il existe donc des fonctions \tilde{a}_i régulières sur \tilde{X} donnant la combinaison :

$$1 = \tilde{a}_1 \tilde{f}_1 + \dots + \tilde{a}_k \tilde{f}_k$$

Mais alors on a dans $R_b(R^2)$,

$$1 = a_1 f_1 + \dots + a_k f_k$$

Ici, pour chaque i , la fonction $a_i := \tilde{a}_i \circ \varphi^{-1}$ est une fonction rationnelle bornée sur X par 2.3.7, qui nous dit que la composition par φ induit un isomorphisme entre les fonctions rationnelles bornées de X et celles de \tilde{X} .

Ainsi $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = R_b(X)$. \square

On poursuit en rappelant l'astuce propre au réel pour traiter les zéros des idéaux de type fini à l'aide d'une seule fonction :

1. On pourra appliquer [BCR13, 4.4.6] avec $I := \langle \tilde{f}_i \rangle$ et $f := 1$, qui est identiquement nulle sur l'ensemble vide. On obtient alors des fonctions g_1, \dots, g_p telles que $g := 1 + \sum g_i^2$ est dans l'idéal engendré par les \tilde{f}_i . Mais comme $\frac{1}{g}$ est aussi régulière on a $1 = g \cdot \frac{1}{g} \in \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k \rangle$

Lemme 4.4.3.

Soit $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq R_b(R^2)$. Avec $f := f_1^2 + \dots + f_k^2$, on a $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I)$ et $\widehat{\mathcal{Z}}(f) = \widehat{\mathcal{Z}}(I)$.

Démonstration. Si $\gamma \in \widehat{R^2}$ est un arc non constant alors $\lim f \circ \gamma$ vaut zéro si et seulement si pour tous les i , $\lim f_i \circ \gamma = 0$ □

On peut alors maintenant énoncer le Nullstellensatz de type fini :

Théorème 4.4.4. Soit I un idéal de type fini de $R_b(R^2)$. Alors $\widehat{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{Z}}(I)) = \sqrt{I}$

Démonstration. L'inclusion $\sqrt{I} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{Z}}(I))$ est celle qui est facile à montrer : soit $f \in \sqrt{I}$ et soit n un entier tel que $f^n \in I$. Soit $\alpha \in \widehat{\mathcal{Z}}(I)$.

La composée $f \circ \alpha$ est une fonction semi-algébrique continue, elle a donc une limite. C'est en effet, à un signe près, la racine n^e de $f^n \circ \alpha$.

Comme $(f \circ \alpha)^n$ tend vers 0; on en déduit que $\lim f \circ \alpha = 0$; c'est-à-dire $f \in \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{Z}}(I))$.

Pour l'inclusion inverse, soit $f \in \widehat{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{Z}}(I))$. Cela se reformule par $\widehat{\mathcal{Z}}(I) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(f)$.

Comme I est de type fini, on peut prendre un nombre fini d'éléments g_i qui l'engendrent, et en considérant $g := \sum g_i^2$ on a un g vérifiant $\widehat{\mathcal{Z}}(g) = \widehat{\mathcal{Z}}(I)$.

Comme on a alors $\widehat{\mathcal{Z}}(g) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(f)$ on peut appliquer le théorème de Łojasiewicz pour avoir l'existence d'un N vérifiant que $\frac{f^N}{g}$ est rationnelle bornée.

Ainsi $f^N = gh \in I$ d'où $f \in \sqrt{I}$. □

On en déduit un corollaire qui généralise notre première proposition, 4.4.1.

Corollaire 4.4.5. Soit I un idéal de type fini de $R_b(R^2)$

$f \in \sqrt{I}$ si et seulement si $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(I)$

Pour un idéal non de type fini, voir thm 5.1.7 pour un contre-exemple.

Démonstration. Le sens direct est vrai dans le cas général : si $f \in \sqrt{\langle I \rangle}$ alors il existe par définition $g \in I$ tel que $f \in \sqrt{\langle g \rangle}$. Par la proposition précédente, on a alors $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g)$; or $\widehat{\mathcal{Z}}(g) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(I)$.

Pour la réciproque, on choisit par l'astuce 4.4.3 un h tel que $\widehat{\mathcal{Z}}(I) = \widehat{\mathcal{Z}}(h)$, et on peut alors appliquer la proposition 4.4.1, qui est le même résultat mais pour un idéal monogène. □

On poursuit avec des résultats sur la radicale principalité.

Lemme 4.4.6. Soit I un idéal de $R_b(R^2)$. Si $f \in I$ est telle que $\widehat{\mathcal{Z}}(f) = \widehat{\mathcal{Z}}(I)$, alors $\sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{I}$.

Démonstration. $\sqrt{\langle f \rangle} \subseteq \sqrt{I}$ est immédiat, vu que $f \in I$.

Soit $g \in \sqrt{I}$. Alors $\widehat{\mathcal{Z}}(g) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(I) = \widehat{\mathcal{Z}}(f)$, et on peut alors appliquer l'inégalité de Łojasiewicz : il existe N tel que $h := \frac{g^N}{f}$ est rationnelle bornée, et alors $g^N = fh \in \langle f \rangle$. \square

Le théorème suivant découle alors :

Théorème 4.4.7. *Tout idéal de type fini de $R_b(R^2)$ est radicalement principal; à savoir il existe $f \in I$ tel que $\sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{I}$*

Démonstration. En choisissant via l'astuce 4.4.3 $f := \sum f_i^2$ où les f_i génèrent l'idéal, on obtient un f vérifiant $\widehat{\mathcal{Z}}(f) = \widehat{\mathcal{Z}}(I)$. On peut alors conclure en utilisant le lemme précédent 4.4.6. \square

On continue avec un résultat liant un idéal d'un anneau de polynômes avec l'idéal qu'il génère dans $R_b(R^2)$.

Théorème 4.4.8. *Soit J un idéal réel de $R[X, Y] = \mathcal{P}(R^2)$. Alors $\sqrt{R_b(R^2) \cdot J} = \widehat{\mathcal{F}}\widehat{\mathcal{Z}}(J)$*

Démonstration. Soit $f \in \sqrt{R_b(R^2) \cdot J}$, càd qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r \in R_b(R^2) \cdot J$. On décompose : $f^r = gh$ avec g rationnelle bornée et $h \in J$. Par Nullstellensatz polynomial, (l'idéal J est réel), h s'annule identiquement sur $\mathcal{Z}(J)$. Soit $\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(J)$. Alors $\lim h \circ \gamma = 0$. D'où $\lim f^r \circ \gamma = 0$ et $\lim f \circ \gamma = 0$. Cela prouve bien que $f \in \widehat{\mathcal{F}}\widehat{\mathcal{Z}}(J)$.

Réciproquement, soient p_1, \dots, p_k des générateurs de J dans $R[X, Y]$.

On pose $s := p_1^2 + \dots + p_k^2$. Soit $f \in \widehat{\mathcal{F}}\widehat{\mathcal{Z}}(J)$. Cela veut dire précisément $\widehat{\mathcal{Z}}(f) \supseteq \widehat{\mathcal{Z}}(J) = \widehat{\mathcal{Z}}(s)$. En appliquant l'inégalité de Łojasiewicz on en déduit l'existence d'un entier r non nul tel que $h := \frac{f^r}{s}$ est rationnelle bornée. Alors $f^r = hs \in R_b(R^n) \cdot J$ d'où le résultat. \square

On finit enfin cette partie en commençant l'étude des idéaux premiers de $R_b(R^2)$.

Remarque 4.4.9. L'idéal engendré par x dans $R_b(R^2)$ (et a fortiori en dimension plus grande) n'est pas premier. Une manière de s'en rendre compte est de considérer $f := \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ et $g := \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

On peut vérifier que ces fonctions sont bornées en éclatant l'origine. Et ni f ni g ne sont dans $\langle x \rangle$. En effet, $\frac{y^2}{x^2+y^4}$ n'est pas bornée le long de l'arc $(0, t)$, et $\frac{xy}{x^4+y^2}$ n'est pas bornée le long de l'arc (t, t) . Cependant,

$$fg = x \left(y \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} \right)$$

Et on peut aussi vérifier que $\frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}$ est bornée en l'origine.

À vrai dire, si l'on suit [Bec82a, 1.22], et les arguments autour, aucun idéal de type fini n'est premier dans $R_\infty(X)$. Le résultat n'est pas applicable pour $R_b(X)$ car, après la preuve de 1.12, les résultats donnés dans cet article s'appliquent sur un anneau d'éléments bornés relativement à corps (on renvoie à 1.8.3 pour voir $R_b(X)$ et $R_\infty(X)$ comme des anneaux d'éléments bornés).

Le cas des fonctions régulières a été décrit dans [Cza19], les idéaux de type fini n'y sont ainsi pas premiers. On peut ainsi espérer que la situation soit similaire dans $R_b(X)$.

L'étude des idéaux premiers, notamment des chaînes d'idéaux premiers, amène naturellement à une formulation en terme de dimension de Krull de l'ensemble des fonctions rationnelles bornées. On commence avec un résultat issu de la littérature :

Théorème 4.4.10. *Soit $A \subseteq B$ deux anneaux commutatifs intègres de corps de fractions respectifs $F \subseteq K$. Si A est noethérien, alors $\dim B \leq \dim A + \text{tr}(K/F)$ (on parle ici de dimension de Krull).*

La preuve présentée est une traduction de celle de [Swa77, 5.4]. On en trouve une version avec le vocabulaire des valuations dans [ZS60, IV, § 10].

Démonstration. Considérons une chaîne $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$ d'idéaux premiers de B , et soient $x_i \in P_i \setminus P_{i-1}$. En notant $C := A[x_1, \dots, x_n]$, on remarque que les $P_i \cap C$ sont des idéaux premiers de C qui s'assemblent en une même chaîne stricte que les P_i . On peut donc se ramener au cas où B est de type fini sur A , et par récurrence au cas où $B = A[a]$. Se distinguent alors deux cas :

1. Si a est transcendant sur A , alors $\dim A[a] = \dim A + 1$
2. Sinon, $B = A[X]/I$, avec I non nul; et on peut remonter les idéaux premiers de B par le morphisme quotient et obtenir une chaîne d'idéaux premiers de $A[X]$. En ajoutant l'idéal nul au bout, on obtient une chaîne de taille $n + 1$;
d'où $\dim B = \dim A[X] - 1 = \dim A$.

□

L'inégalité dans l'énoncé vient du passage de B à C : une chaîne dans B en implique une dans C mais rien n'est dit sur le fait que la chaîne est maximale dans C .

Corollaire 4.4.11. *Les anneaux des fonctions k -régulières ($k \in \mathbb{N}$), rationnelles continues, rationnelles bornées (localement ou uniformément) sur une variété lisse de dimension n sont tous de dimension de Krull inférieure ou égale à n .*

Démonstration. Pour chaque cas il suffit de prendre, dans le théorème précédent, $B :=$ l'anneau considéré, $A :=$ l'anneau des polynômes sur la variété, et $F = K :=$ l'anneau des fonctions rationnelles sur la variété. \square

L'inégalité est en fait une égalité. Pour les fonctions régulières, voir [Fic+16, 6.11]; pour les fonctions rationnelles uniformément bornées, on peut utiliser la théorie des anneaux de fonctions de bornées, avec la proposition 1.8.3 et [Bec82a, 1.22]. Pour les fonctions rationnelles localement (ou uniformément) bornées, on peut aussi faire le raisonnement suivant :

Proposition 4.4.12. *La dimension de Krull de $R_b(R^n)$ est égale à n*

Démonstration. Le corollaire 4.4.11 précédent nous donne une des inégalités. On cherche donc à montrer que la dimension de Krull est au moins n .

On procède par récurrence sur n

L'initialisation se fait en voyant que $R_b(R^0) = R$ possède un idéal premier : l'idéal nul.

Soit $n \geq 1$, on considère le morphisme de restriction :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: R_b(R^n) & \rightarrow & R_b(R^{n-1}) \\ f & \mapsto & R^{n-1} \rightarrow R \\ & & (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \end{array}$$

φ peut aussi être vue comme le pullback de l'injection canonique

$$\begin{array}{ccc} R^{n-1} & \hookrightarrow & R^n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & \mapsto & (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \end{array}$$

Comme cette fonction a une image de codimension 1, composer avec elle ne posera pas de problèmes et le corollaire 2.4.5 nous assure que φ est bien définie.

Le noyau de φ est non-trivial. Il contient en effet l'idéal engendré par x_n et aussi des éléments comme la fonction $\frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1^2}$ pour $n \geq 2$ par exemple.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur $R_b(R^{n-1})$ pour obtenir une chaîne d'idéaux premiers

$$P_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq P_0$$

puis la tirer en arrière via φ et obtenir une chaîne d'idéaux premiers

$$\varphi^{-1}(P_{n-1}) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi^{-1}(P_0)$$

La chaîne est stricte car le morphisme est surjectif, et les idéaux sont premiers car les anneaux sont intègres.

Comme le noyau de φ n'est pas trivial, $\varphi^{-1}(P_{n-1}) \neq \langle 0 \rangle$ et on peut donc ajouter ce dernier à la chaîne

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \varphi^{-1}(P_{n-1}) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi^{-1}(P_0)$$

On obtient alors une chaîne de taille n dans $R_b(R^n)$ □

Remarque 4.4.13. Puisque, par la proposition 1.8.3, l'anneau des fonctions rationnelles bornées correspond à l'anneau des éléments bornés des fonctions rationnelles relativement aux polynômes, c'est un anneau de Prüfer (voir [Bec82b, 2.16 iii] pour les uniformément bornées), et donc ses idéaux de type finis peuvent être engendrés par $n + 1$ éléments, où n est la dimension de Krull (donc la dimension ambiante); la borne étant optimale, voir [Kuc91].

LE CAS DE LA DIMENSION DEUX

À la suite des propriétés algébriques précédemment trouvées, on s'intéresse à savoir si elles ne peuvent pas être étendues; par exemple beaucoup concernent des idéaux de type fini, peuvent-elles être étendues aux idéaux quelconques? La majorité des réponses sont négatives; et on mettra en place une construction d'idéaux permettant d'avoir facilement les contre-exemples voulus. Cette classe riche de contre-exemples nous fournit des idéaux maximaux, et donc nous renseigne énormément sur le spectre (et le spectre réel) de l'anneau étudié. Nous formaliserons les questions adaptées pour mettre en valeur cette richesse, d'abord en parlant de propriété de substitution, puis en amorçant l'étude de la richesse des substitués au-dessus des points.

Dans ce chapitre, X n'est plus une variété quelconque, puisqu'on se placera dans R^2 . Ainsi, la lettre X désignera l'indéterminée de $R[X, Y]$, de $R(X, Y)$ ou, pour suivre la cohérence de ces notations, de $R_b(X, Y) := R_b(R^2)$.

5.1 Création d'exemples

Dans cette section, on va donner explicitement des générateurs de l'idéal des fonctions rationnelles bornées qui s'annulent en 0 le long d'un arc $\gamma = (x, P(x))$ où P est d'abord un polynôme puis une série formelle. Le passage aux séries formelles se fera via les troncatures polynomiales successives de la série considérée.

Avec une série formelle transcendante on obtient ainsi des contre-exemples pour le cas non de type fini des théorèmes obtenus précédemment (Nullstellensatz, radicale principalité), et pour la noetherianité des espaces d'arc.

On commence donc par le cas polynomial. Pour $(x, P(x))$ un arc, avec P un polynôme, on regarde les annulations en 0 d'une fonction f_P bien précise.

Notation 5.1.1. Soit $P(T) \in R[T]$ un polynôme, sans terme constant (donc de limite 0), de

degré d .

On note, dans R^2 , $f_P(x, y) := \frac{(y-P(x))^2}{(y-P(x))^2 + x^{2d}}$, et $g_P := f_P^2 + x^2 + y^2$.

Cette fonction a un seul point d'indétermination, alias $(0, 0)$. Ses zéros en dehors de ce point sont situés sur la courbe d'équation $y - P(x) = 0$, mais ils ne seront pas conservés lors du passage de f_P à g_P .

Lemme 5.1.2. *Autour de $(0, 0)$,*

- *Les arcs $(x(t), y(t))$ qui annulent f_P vérifient $v(y(t) - P(x(t))) \geq d \cdot v(x(t))$*
- *Les arcs qui vérifient $v(y(t) - P(x(t))) > d \cdot v(x(t))$ annulent f_P .*

Une autre manière de voir ce lemme est qu'un arc qui annule f_P est nécessairement de la forme $(T, P(T) + O(T^d))$ et qu'un arc de la forme $(T, P(T) + o(T^d))$ annule f_P .

Démonstration. On pose $h := y - P(x)$ (par simplicité de lecture on oubliera le t , même si la valuation porte sur le degré en t). Il suffit de calculer la valuation de $f_P(x, y)$:

$$\begin{aligned} v(f_P(x, y)) &= v\left(\frac{(y-P(x))^2}{(y-P(x))^2 + x^{2d}}\right) \\ &= v\left((y-P(x))^2\right) - v\left((y-P(x))^2 + x^{2d}\right) \\ &= 2v(h) - v(h^2 + x^{2d}) \end{aligned}$$

Or $v(h^2 + x^{2d}) \geq 2 \min(v(h), d \cdot v(x))$ avec égalité si $v(h) \neq d \cdot v(x)$. Il y a alors 3 cas :

Si $v(h) > d \cdot v(x)$ alors $v(h^2 + x^{2d}) = 2d \cdot v(x)$ d'où $v(f_P(x, y)) = 2v(h) - 2d \cdot v(x) > 0$

Et donc $\lim_{t \rightarrow 0} f_P(x(t), y(t)) = 0$

Si $v(h) = d \cdot v(x)$ beaucoup de choses sont envisageables, mais l'étude de ce cas n'influe en rien sur les deux assertions que l'on cherche à montrer.

Si $v(h) < d \cdot v(x)$ alors $v(h^2 + x^{2d}) = 2v(h)$ d'où $v(f_P(x, y)) = 2v(h) - 2v(h) = 0$ et donc $f(x(t), y(t))$ a un terme constant non nul (qui se trouve être sa limite) : l'arc n'annule pas f_P .

Ainsi, le premier cas implique à une annulation, et une annulation implique le premier ou le deuxième cas. □

Lemme 5.1.3. *Si $P(T)$ est de degré d , $b > d$, $a \in R$ non nul, et qu'on note $Q := P + aT^b$, tout arc de limite $(0, 0)$ annulant f_Q annule aussi f_P .*

Par récurrence c'est aussi le cas si $Q = P + o(T^d)$.

Démonstration. Si l'on note (x, y) un tel arc, on a nécessairement $v(y - P(x) - ax^b) \geq b \cdot v(x)$ (conséquence des affirmations précédentes).

Mais on a alors $v(y - P(x)) = v(y - P(x) - ax^b + ax^b) \geq \min(v(y - P(x) - ax^b), v(ax^b))$.

Or $v(ax^b) = b \cdot v(x)$, et on a supposé $v(y - P(x) - ax^b) \geq b \cdot v(x)$.

D'où $v(y - P(x)) \geq b \cdot v(x) > d \cdot v(x)$ ce qui nous assure que l'arc annule f_p .

□

Remarque 5.1.4. Jusqu'ici, on s'est seulement concentré sur les arcs de limite $(0, 0)$. La raison est la suivante : soit $f \in R_b(R^2)$. Avec $g := f(x, y)^2 + x^2 + y^2$, on a $\widehat{\mathcal{Z}}(g) = \{\gamma \in \widehat{\mathcal{Z}}(f) \mid \lim \gamma = (0, 0)\}$.

Ainsi, avec $g_p = f_p^2 + x^2 + y^2$, le lemme 5.1.3 peut se reformuler en :

Si $Q(T) = P(T) + o(T^d)$, alors $\widehat{\mathcal{Z}}(g_Q) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g_P)$.

Par récurrence, on peut alors construire des tours infinies :

Proposition 5.1.5. Si $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^i$ est une série entière de coefficient constant nul, on pose $P_k := \sum_{i=1}^k a_i T^i$ les troncatures au degré k . Alors on a :

$$\dots \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_{k+1}}) \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_k}) \subseteq \dots \subseteq \widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_1})$$

Démonstration. On fait une récurrence sur le lemme 5.1.3, qui nous permet d'emboîter les zéros en l'origine des fonctions f_{P_k} . Or, avec la remarque 5.1.4, ce sont exactement les zéros des g_{P_k} □

Remarque 5.1.6. En appliquant la description géométrique de la proposition 4.4.1, on obtient alors immédiatement :

$$\forall i < j, g_{P_i} \in \sqrt{\langle g_{P_j} \rangle}$$

On a alors la tour inversée :

$$\sqrt{\langle g_{P_1} \rangle} \subseteq \dots \subseteq \sqrt{\langle g_{P_k} \rangle} \subseteq \sqrt{\langle g_{P_{k+1}} \rangle} \subseteq \dots$$

Le jeu va être maintenant de passer à la limite, à savoir de considérer le radical de l'idéal engendré par tous les g_{P_k} . Son ensemble des zéros vaut $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_k})$: un arc annule l'idéal si et seulement s'il annule tous les g_{P_k} .

Cependant, on a fait en sorte que $\widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_k})$ soit l'ensemble des arcs de la forme $(t, P_k(t) + o(t^k))$. Cela signifie alors que tout arc témoin d'annulation de l'idéal a le même support que $(t, S(t))$

Ce qui rend les choses intéressantes, c'est que cette construction peut se faire avec n'importe quelle série S , même une qui n'est pas semi-algébrique (ou de manière équivalente, qui n'est pas algébrique sur $R[T]$). On peut alors obtenir le résultat suivant :

Théorème 5.1.7. • Il existe un idéal $I \subsetneq R_b(R^2)$ vérifiant $\mathcal{Z}(I) = \widehat{\mathcal{Z}}(I) = \emptyset$.

- Il existe une chaîne décroissante non stationnaire de "fermés" :

$$\dots \subsetneq \widehat{\mathcal{Z}}(I_{k+1}) \subsetneq \widehat{\mathcal{Z}}(I_k) \subsetneq \dots \subsetneq \widehat{\mathcal{Z}}(I_1)$$

Ainsi, la "topologie" dans l'espace des arcs n'est pas noetherienne.

Les guillemets font référence à la remarque 4.3.9.

Démonstration.

Pour les deux affirmations, on remarquera que $R[[T]]_{\text{alg}} \neq R[[T]]$, c'est-à-dire qu'il y a des séries qui ne sont pas algébriques sur $R[T]$. Si l'on prend S une telle série, on peut poser :

$$I := \sqrt{\cup \langle g_{P_k} \rangle_k} \text{ et } I_k := \sqrt{\langle g_{P_i} \rangle_{i \leq k}}$$

Le fait que $\mathcal{Z}(I) = \widehat{\mathcal{Z}}(I) = \emptyset$ découle de la construction qui impose aux seuls arcs qui puissent être témoins d'annulation de ne pas être semi-algébrique.

Pour voir que I n'est pas plein, considérons $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$. On remarque que pour tout polynôme $P = tQ$ sans terme constant, $f(t, P(t)) = \frac{1}{1 + Q(t)^2}$, donc l'arc $(t, P(t))$ n'annule pas f . Ainsi $\widehat{\mathcal{Z}}(f)$ ne contient aucun des $\widehat{\mathcal{Z}}(g_{P_i})$ et par Nullstellensatz f n'est pas dans l'idéal engendré par les g_{P_i} , ni dans leur radical. Donc f n'est pas dans I .

Les inclusions découlent, quant à elles, directement par la proposition 5.1.5. Pour le caractère strict, remarquons que si le $k^{\text{ième}}$ terme de S n'est pas nul, alors les affirmations de 5.1.1 nous dirons que l'arc $(t, P_k(t))$ est dans $\widehat{\mathcal{Z}}(I_k)$ mais qu'il n'est pas dans $\widehat{\mathcal{Z}}(I_{k+1})$ (par observation sur le degré). En renommant alors la suite d'idéaux pour enlever les éventuels idéaux associés à un coefficient nuls dans l'écriture de S , on a une chaîne infinie strictement croissante (en effet, si elle était finie ça voudrait dire que S est un polynôme, a fortiori algébrique sur $R[T]$). □

Remarque 5.1.8. On peut remarquer que pour de tels idéaux, on a $\forall f \in I, \mathcal{Z}(f) = \{(0, 0)\}$, car l'un des arcs $(t, P_k(t))$ devra témoigner d'une annulation, mais pourtant $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ ce qui fournit bien le contre-exemple pour la réciproque de la proposition 4.1.8

Remarque 5.1.9. Si l'on fait la construction précédente avec une série entière finie (un polynôme, donc), alors la suite des idéaux est stationnaire à partir du rang le degré du polynôme. Les arcs annulateurs de l'idéal en sortie seront donc de la forme $(t, P(t) + o(t^d))$.

Il est possible de forcer les arcs annulateurs à n'être que $(t, P(t))$; pour cela, on prendra une autre fonction test :

$$k \geq d ; f_k(t) := \frac{(y - P(x) - x^k)^2 - x^{2k}}{(y - P(x) - x^k)^2 + x^{2k}}$$

On peut alors refaire la même étude pour montrer que les arcs annulateurs seront, pour $k > \deg P$, de la forme $(t, P(t) + o(t^k))$, et il ne restera plus qu'à faire tendre k vers l'infini. On ne présentera que la première affirmation, le reste des arguments étant exactement les mêmes (garder les arcs autour de zéro en changeant de fonction, voir qu'il y a inclusion des ensembles de zéros, conclure sur l'intersection de la tour d'idéaux engendrée et de la tour d'ensemble des zéros).

Affirmation. Autour de $(0,0)$,

- Les arcs $(x(t), y(t))$ qui annulent f_k vérifient $v(y(t) - P(x(t))) \geq k \cdot v(x(t))$
- Les arcs qui vérifient $v(y(t) - P(x(t))) > k \cdot v(x(t))$ annulent f_k .

Démonstration. On pose $h := y - P(x)$ (par simplicité de lecture on oubliera encore le t). On peut recalculer la valuation de $f_k(x, y)$:

$$\begin{aligned} v(f_k(x, y)) &= v((h - x^k)^2 - x^{2k}) - v((h - x^k)^2 + x^{2k}) \\ &= v(h^2 - 2hx^k) - v(h^2 - 2hx^k + 2x^{2k}) \end{aligned}$$

Si $v(h) > k \cdot v(x)$ alors $v(h^2 - 2hx^k) = v(2hx^k) = v(h) + k \cdot v(x)$

De l'autre côté, $v(h^2 - 2hx^k + 2x^{2k}) = 2k \cdot v(x)$

La différence vaut donc $v(h) - k \cdot v(x)$ qui, dans ce cas, est strictement positive. Cela veut dire que $\lim_{t \rightarrow 0} f_P(x(t), y(t)) = 0$

Si $v(h) = k \cdot v(x)$ beaucoup de choses sont envisageables, mais l'étude de ce cas n'influe en rien sur les deux assertions que l'on cherche à montrer.

Si $v(h) < k \cdot v(x)$ alors $v(h - x^k) = v(h)$ et $v((h - x^k)^2) = 2v(h)$ d'où, en réitérant l'argument d'inégalité, $v((h - x)^2 \pm x^{2k}) = 2v(h)$

On a alors $v(f_P(x, y)) = 2v(h) - 2v(h) = 0$ et donc $f(x(t), y(t))$ a un terme constant non nul (qui se trouve être sa limite) : l'arc n'annule pas f_P .

□

Enfin, on termine cette section avec un exemple en dimension 3 qui montre que, pour un arc quelconque, la donnée de sa série de Taylor ne suffit pas à décrire le comportement de notre fonction en cet arc.

Exemple 5.1.10. Dans \mathbb{R}^3 , on considère $f(x, y, z) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ et les arcs

$$\alpha := (e^{-\frac{1}{t^2}}, 0, t), \beta := (0, e^{-\frac{1}{t^2}}, t), \gamma := (0, 0, t)$$

Un calcul rapide montre que $\lim f \circ \alpha = 1$, que $\lim f \circ \beta = 0$ et que $\gamma \in \overline{\text{indet } f}$.

Pourtant, ces trois arcs ont les mêmes développements de Taylor.

On remarquera que le seul représentant analytique de ces arcs est dans $\overline{\text{indet } f}$.

5.2 Propriété de substitution et spectre réel

Dans cette section, et dans la suivante, on note $R_b(X, Y) := R_b(R^2)$ pour pouvoir suivre la notation $R[X, Y] = \mathcal{P}(R^2)$ et $R(X, Y) = R(R^2)$.

On va chercher à établir l'existence de la propriété de substitution de $R_b(X, Y)$ sur $R[X, Y]$
 Rapellons d'abord la définition :

Définition 5.2.1. Soit A une R -algèbre et B une A -algèbre. On dit que B admet la propriété de substitution sur A si, pour tout corps réel clos F , un morphisme $A \rightarrow F$ admet un unique relevé à B , faisant donc commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ \downarrow & \nearrow & \\ B & & \end{array}$$

On parle de substitution faible lorsque les morphismes sont dans $F = R$

Remarque 5.2.2. L'ensemble $\mathcal{R}(V)$ des fonctions régulières sur une variété vérifie la propriété de substitution faible sur $\mathcal{P}(V)$.

Pour l'existence, soit $\alpha : \mathcal{P}(V) \rightarrow R$ un morphisme, et soit $f = \frac{p}{q} \in \mathcal{R}(X)$

On pose $\hat{\alpha}(f) := \frac{\alpha(p)}{\alpha(q)}$; qui est bien défini car $\alpha(q)$ ne peut pas valoir zéro puisque q ne s'annule pas sur X . On vérifie aisément que $\hat{\alpha}$ est un morphisme et qu'il prolonge bien le morphisme α .

Pour l'unicité, il faudra remarquer que pour un morphisme $\hat{\alpha}$ on a nécessairement :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right) \hat{\alpha}(q) &= \hat{\alpha}(p) \\ \hat{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right) \alpha(q) &= \alpha(p) \\ \hat{\alpha}\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{\alpha(p)}{\alpha(q)} \end{aligned}$$

Exemple 5.2.3. Les anneaux des fonctions semi-algébriques continues [Sch86], Nash [BCR13, 8.5.2], et rationnelles continues [FMQ17b] admettent la propriété de substitution sur l'anneau de polynôme associé.

Notation 5.2.4. On note :

$\text{Spec } A$ l'ensemble des idéaux premiers de A

$\text{RSpec } A$ l'ensemble des idéaux premiers réels ([BCR13, 4.1.3]) de A

$\text{Sper } A$ l'ensemble des cônes premiers réels de A , qui peuvent être vus soit comme un idéal premier réel muni d'un ordre sur le corps résiduel, soit comme un morphisme

vers un corps réel clos, soit comme un sous-ensemble P de A assimilable à un ensemble d'éléments positifs. On renvoie à [BCR13, Ch4 & Ch 7] pour plus de détails, notamment 7.1.1 pour la définition.

Remarque 5.2.5. Dire que A vérifie la propriété de substitution sur B revient à dire que le morphisme $\text{Sper } B \rightarrow \text{Sper } A$ est bijectif continu.

En effet, on peut voir un élément du spectre réel d'un anneau comme la donnée d'un corps réel clos et d'un morphisme vers ce corps. L'existence d'un relevé veut alors dire que le morphisme $\text{Sper } B \rightarrow \text{Sper } A$ est surjectif (chaque point du spectre réel, ie chaque morphisme $A \rightarrow F$, admet un antécédent, ie un relevé). L'unicité veut dire que le morphisme est injectif (deux points différents de $\text{Sper } B$, ie deux relevés, sont envoyés sur deux points différents de $\text{Sper } A$, ie deux morphismes $A \rightarrow F$). Enfin la continuité est automatique dans les morphismes de Sper associés à des morphismes d'anneaux, et découle de la définition des bases des topologies utilisées. Voir [BCR13, 7.1.7].

Lemme 5.2.6. Soit $(a, b) \in R^2$.

Les fonctions suivantes sont bien définies et sont des morphismes d'anneaux :

$$\begin{aligned} \varphi_{(a,b)} : R_b(R^2) &\rightarrow R & \psi_{(a,b)} : R_b(R^2) &\rightarrow R \\ f &\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(a+t, b) & f &\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(a, b+t) \end{aligned}$$

Démonstration. Le caractère bien défini découle de la propriété suivante, voir 4.3.1 :

$$\forall f \in R_b(X, Y), \exists \epsilon > 0,]0, \epsilon[\cap \text{indet } f = \emptyset$$

En effet, par le corollaire 2.4.4, le lieu d'indétermination est de codimension 2 et est donc un ensemble de points isolés, on peut donc l'esquiver en trouvant un ϵ assez petit. Par ce même corollaire, f est régulière donc continue sur $]0, \epsilon[$ et donc la limite en zéro existe si et seulement si f est bornée sur cet intervalle, ce qui est justement le cas.

Ce sont des morphismes d'anneaux car les limites en 0 de la fonction nulle (resp de la fonction unité) valent 0 (resp 1), et que la limite d'une somme (resp d'un produit) est la somme (resp le produit) des limites. □

Proposition 5.2.7. L'anneau $R_b(X, Y)$ vérifie la condition d'existence mais pas celle d'unicité de la propriété de substitution faible sur $R[X, Y]$

Ici on montre qu'il n'y a pas unicité en exhibant deux morphismes différents qui relèvent le même morphisme de $R[X, Y]$. Il y a, bien sûr, nettement plus que deux relevés par morphisme initial. La section suivante sera dédiée à l'étude de ce défaut d'unicité.

Démonstration. On considère les deux morphismes $\varphi_{(a,b)}$ et $\psi_{(a,b)}$ du lemme précédent. Leurs restrictions à l'anneau $R[X, Y]$ induisent par continuité le morphisme d'évaluation en (x, y) . Or l'intégralité des morphismes $R[X, Y] \rightarrow R$ sont des morphismes d'évaluation en des points. On a donc trouvé au moins un morphisme qui relève chacun de nos morphismes d'évaluation.

Il reste alors à voir que $\varphi_{(a,b)}$ et $\psi_{(a,b)}$ sont différents. On pourra pour cela considérer la fonction $f_{(a,b)} : (x, y) \mapsto \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}$ dont l'image par $\varphi_{(a,b)}$ est 1 et celle par $\psi_{(a,b)}$ est 0. \square

Les inclusions

$$R(X, Y) \supseteq R_b(X, Y) \supseteq R[X, Y]$$

induisent ainsi les morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sper } R(X, Y) & \xrightarrow{i} & \text{Sper } R_b(X, Y) & \xrightarrow{s} & \text{Sper } R[X, Y] \\ \text{supp} \downarrow & & \text{supp} \downarrow & & \text{supp} \downarrow \\ \{\{0\}\} = \text{RSpec } R(X, Y) & \xrightarrow{i} & \text{RSpec } R_b(X, Y) & \xrightarrow{s} & \text{RSpec } R[X, Y] \end{array}$$

Les morphismes du haut découlent de [BCR13, 7.1.7] (où il est même dit que ces morphismes sont continus), et juste après (7.1.8) il est dit que supp est une transformation naturelle, d'où les flèches verticales et la commutation des carrés.

On a fait et on continuera de faire un abus de notation pour nommer de la même manière le morphisme des Sper et celui des RSpec , quitte à devoir préciser ponctuellement duquel on parle. Étant donné que le support d'un cône premier est un idéal premier réel et qu'inversement un idéal premier réel est le support d'un cône premier; et étant donné que la dimension d'un cône est définie dans [BCR13, 7.5.7] comme celle de son support, on parlera des deux lignes en même temps à chaque fois.

Le but de cette section est donc de montrer que s est surjectif. On va d'abord montrer que i est injective et que $s|_{\text{Im } i} : \text{Im } i \rightarrow \text{Im } s \circ i$ est une bijection.

Proposition 5.2.8. *Le morphisme i écrit précédemment est injectif, et s est une bijection de $\text{Im } i$ sur $\text{Im } s \circ i$, où les deux images peuvent se caractériser comme les cônes premiers (resp idéaux premiers réels) de dimension 2*

Notons que le seul idéal premier réel de dimension 2 est l'idéal nul ce qui simplifie la question pour les idéaux.

Démonstration. Comme $R(X, Y)$ est le corps des fractions de $R_b(X, Y)$, l'image de i est l'ensemble des idéaux dont le support est l'idéal nul. C'est donc aussi le cas de l'image de $s \circ i$

car $s(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle$

Or (voir [BCR13, 7.5.7]) la définition de dimension d'un cône premier est celle de son support, et l'idéal nul est le seul idéal premier de $\text{RSpec } R[X, Y]$ de dimension 2.

C'est aussi le seul idéal premier de dimension 2 de $\text{RSpec } R_b(X, Y)$ car sa dimension de Krull vaut 2; voir 4.4.12

Le caractère injectif de i et de s sur l'image de i découle alors du fait que $s \circ i$ est injectif; car il est par définition égal au morphisme canonique $\text{Sper } R(X, Y) \rightarrow \text{Sper } R[X, Y]$ injectif. En effet, pour P un cône premier resp. un idéal réel,

$$(P \cap R_b(X, Y)) \cap R[X, Y] = P \cap R[X, Y]$$

Et la surjection sur l'image est une reformulation du fait que les éléments de dimension 2 sont forcément issus de $s \circ i$. \square

La substitution faible traite les points (donc la dimension 0) du spectre réel, le théorème précédent traite les éléments de dimension 2, qui proviennent de $\text{Sper } R(X, Y)$. Pour montrer que s est surjectif, i.e. que la substitution forte suit la même existence-mais-non-unicité que la substitution faible, il nous reste donc à étudier le cas des éléments de dimension 1.

Proposition 5.2.9. *Le morphisme s défini ci-dessus est bijectif sur les éléments de dimension 1 de $\text{Sper } R[X, Y]$ Autrement dit, l'anneau $R_b(X, Y)$ vérifie la propriété de substitution sur $R[X, Y]$ pour les éléments de dimension 1.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Sper } R[X, Y]$ de dimension 1. On va chercher à construire un relevé $\hat{\alpha} \in \text{Sper } R_b(X, Y)$

Si $q \in R[X, Y]$, on peut remarquer que

$$q(\alpha) = 0 \Rightarrow q \in \text{supp } \alpha \Rightarrow q \equiv 0 \text{ sur la courbe de } \text{supp } \alpha$$

Cette courbe étant de dimension 1 par hypothèse, on va pouvoir utiliser 2.4.3 pour voir que si $f = \frac{p}{q}$ est rationnelle bornée sur R^2 , comme $\dim \mathcal{Z}(q) = 0$ on a nécessairement $q(\alpha) \neq 0$.

En voyant α comme un morphisme de $R(X, Y)$ dans F la clôture réelle du corps résiduel de $R[X, Y]$ en α , on peut alors poser :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}: R_b(X, Y) &\rightarrow F \\ f &\mapsto f(\hat{\alpha}) := \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \end{aligned}$$

Et aboutir à l'existence d'un relevé. Pour l'unicité, si $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont deux relevés, nous avons pour $f = \frac{p}{q}$ l'équation suivante :

$$p(\alpha) = f(\hat{\alpha}_1)q(\alpha) = f(\hat{\alpha}_2)q(\alpha)$$

Comme $q(\alpha) \neq 0$, on peut alors simplifier pour obtenir $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ \square

Notons que la démonstration proposée fonctionnerait aussi en dimension 2 et donne une autre formulation du raisonnement que l’on a utilisé précédemment. Il ne fonctionne pas en dimension 0 par contre puisqu’on peut y avoir $q(\alpha) = 0$

Corollaire 5.2.10. *Le morphisme s respecte la dimension d’un cône premier (resp d’un idéal premier réel)*

Démonstration. Les trois propositions qui règlent le cas de chaque dimension séparée ont un message caché : un point de $\text{Sper } R[X, Y]$ est nécessairement issu d’un point de $\text{Sper } R_b(X, Y)$. Un élément de dimension 1 de $\text{Sper } R[X, Y]$ est nécessairement issu d’un élément de dimension 1 de $\text{Sper } R_b(X, Y)$ (puisque l’on en a exhibé un de dimension 1 et qu’il est unique), et un élément de dimension 2 est nécessairement issu d’un élément de dimension 2 (puisque le support est nécessairement l’idéal nul). Par principe des tiroirs, les éléments de dimension i de $\text{Sper } R[X, Y]$ sont forcément envoyés sur les éléments de dimension i de $\text{Sper } R_b(X, Y)$ \square

En résumé :

Théorème 5.2.11. *L’anneau $R_b(X, Y)$ vérifie la condition d’existence de la propriété de substitution sur $R[X, Y]$. Il vérifie aussi l’unicité si le corps réel clos d’arrivée n’est pas R . Autrement dit, $s : \text{Sper } R_b(X, Y) \rightarrow \text{Sper } R[X, Y]$ est surjectif, et bijectif en dehors des points.*

Démonstration. On utilise les théorèmes et propositions de cette section qui règlent séparément les cas de chacune des dimensions des éléments de $\text{Sper } R[X, Y]$ considérés. La proposition 5.2.7 règle le cas de la dimension 0, la proposition 5.2.9 règle celui de la dimension 1 et enfin la proposition 5.2.8 règle celui de la dimension 2. Le corollaire 5.2.10 nous assure qu’il n’y a pas d’interdimensionnalité à craindre. \square

Notons qu’on a pas besoin a priori du corollaire 5.2.10 pour faire fonctionner cette démonstration, mais qu’il faut probablement comprendre la preuve de ce corollaire pour voir qu’on en a pas besoin.

Cela nous complète le diagramme étudié précédemment :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sper } R(X, Y) & \xrightarrow{i} & \text{Sper } R_b(X, Y) & \xrightarrow{s} & \text{Sper } R[X, Y] \\ \text{supp} \downarrow & & \text{supp} \downarrow & & \text{supp} \downarrow \\ \{\langle 0 \rangle\} = \text{RSpec } R(X, Y) & \xrightarrow{i} & \text{RSpec } R_b(X, Y) & \xrightarrow{s} & \text{RSpec } R[X, Y] \end{array}$$

Remarque 5.2.12. Une question qui peut se poser est : peut-on caractériser cet anneau à partir de l’existence d’une substitution ? Il se trouve qu’il n’y a pas de plus grand anneau vérifiant l’existence d’une substitution, voir [FMQ17b, 2.15]

5.3 Défaut d'unicité

À la suite de la partie précédente, se pose naturellement la question suivante : quel est le défaut d'unicité ? Y a-t-il beaucoup de différentes substitutions au-dessus d'un point ? On commence par décrire ce défaut d'unicité en terme de valeur possible, en reprenant les anciennes notations, car elles sont plus adaptées aux éclatements et aux fonctions régulières.

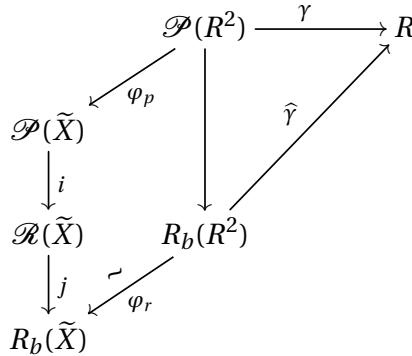
Proposition 5.3.1. *Soit $f \in R_b(R^2)$. Soit $\gamma : \mathcal{P}[R^2] \rightarrow R$ un morphisme d'évaluation associé à un point $x \in R^2$; soit $\hat{\gamma} : R_b(R^2) \rightarrow R$ un substitut de γ .*

Alors $\hat{\gamma}(f)$ est dans $f(\{(a, b)\})$ l'ensemble des valeurs de f au point (a, b) .

Démonstration. On considère une résolution de f donnée par $\varphi : \tilde{X} \rightarrow R^2$; elle donne lieu à deux morphismes :

$\varphi_p : \mathcal{P}(R^2) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{X})$ et $\varphi_r : R_b(R^2) \rightarrow R_b(\tilde{X})$. Remarquons que par 2.3.7, φ_r est un isomorphisme, et que comme φ est surjective, φ_p est une injection.

Notons aussi i, j les injection canonique des anneaux de fonctions sur \tilde{X}



Si la commutativité de carré de droite nous est donnée par la substitution, celle de gauche nous est assurée par le fait que suivre les flèches φ_p et φ_r revient à composer par φ

La composition $\hat{\gamma} \circ \varphi_r \circ j$ donne un morphisme de $\mathcal{R}(\tilde{X})$ dans R . Par application de la propriété de substitution faible (voir remarque 5.2.2), ce morphisme est issu d'un unique morphisme d'évaluation $\tilde{\gamma} : \mathcal{P}(\tilde{X}) \rightarrow R$ en un point $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Notons donc que $\tilde{\gamma} \equiv \hat{\gamma} \circ \varphi_r \circ j \circ i$

Ainsi, par commutativité des diagrammes, $\tilde{\gamma} \circ \varphi_p = \gamma$. Nous n'avons pas fini pour autant, puisqu'il reste à s'assurer que le \tilde{x} associé à cette évaluation $\tilde{\gamma}$ s'envoie bien sur x

Si tel n'était pas le cas, on pourrait trouver un polynôme P qui s'annule sur x mais pas sur $\varphi(\tilde{x})$. Mais alors on aurait $\tilde{\gamma} \circ \varphi_p(P) \neq 0$ et $\gamma(P) = 0$ ce qui casserait la commutativité du dia-

gramme. □

Remarque 5.3.2. Toutes les valeurs sont atteintes. En effet, si a est une valeur atteinte par f et si γ est un arc non constant témoin, c'est-à-dire $\gamma(0) = x$ et $f \circ \gamma(0) = a$, alors l'application $\varphi : f \mapsto \lim f \circ \gamma$ est bien définie par 4.3.1.

On peut alors vérifier que $\varphi(f) = a$ et que $\varphi|_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(x)}$ est, par continuité, l'évaluation en x .

Les démonstrations précédentes sont basées sur le fait que tout témoin possible (témoin par éclatement précédemment, témoins par arc dans ce qui arrive), génère une substitution. Ainsi tout arc semi-algébrique ou tout point situé derrière une tour d'éclatements génère une substitution. Pour formuler cette idée en terme de spectre réel, on commence par une définition :

Notation 5.3.3. Soit P un point de $\text{Sper } R[X, Y]$ et α une généralisation de P . Comme α est de dimension 1 ou 2, on peut aussi voir α comme élément de $\text{Sper } R_b(X, Y)$ par existence et unicité de la substitution pour α . On note alors P_α le point fermé de $\text{Sper } R_b(X, Y)$ qui est spécialisation de α .

Avec une telle notation, on remarque que P_α est forcément envoyé sur P via le morphisme $s : \text{Sper } R_b(X, Y) \rightarrow \text{Sper } R[X, Y]$

L'existence d'un tel P_α nous est donnée par le théorème [BCR13, 7.1.23] : chaque élément du spectre réel a un unique point fermé qui en soit spécialisation. Pour les éléments de dimension 1, on pourra de plus en donner une écriture explicite :

Remarque 5.3.4. On remarque que si α est de dimension 1, alors $\text{supp } \alpha$ définit une courbe algébrique Γ , dont P fait partie. [BCR13, 10.3.1] nous dit alors qu'il y a une bijection canonique entre les généralisations de P ayant $\text{supp } \alpha$ comme support, et les demi-branches de Γ centrées en P . La description donnée en [BCR13, 9.4.1] nous permet alors de voir une telle demi-branche comme une fonction semi-algébrique $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ qui se prolonge continûment en $\gamma(0) = P$. En voyant α comme un cône, c'est-à-dire un sous-ensemble de $R[X, Y]$, on a alors ainsi :

$$\alpha = \{f \in R[X, Y] \mid \exists \epsilon > 0 \forall t \in]0, \epsilon], f(\gamma(t)) \geq 0\}$$

On peut alors remarquer que

$$P_\alpha = \{f \in R_b(X, Y) \mid \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) \geq 0\}$$

En effet, si l'on teste un polynôme, par continuité ce sera la valeur en P que l'on regardera. Et on a bien $\alpha \subseteq P_\alpha$ car la limite d'une fonction positive est positive.

Notons qu'en choisissant un bon système de coordonnées, et en ayant α associé à la demi-branche $y = P(x)$ on trouve la construction explicite de $\text{supp } P_\alpha$ en 5.1.9 (cas où P est polynomial) et en 5.1.1 (cas où P est une série entière).

La reformulation de la question de cette section avec ces notations est alors : quand est-ce que pour $\alpha \neq \beta$, on a $P_\alpha = P_\beta$?

Remarque 5.3.5. Si α et β ont des supports différents, que ces supports sont donnés par des polynômes irréductibles P et Q , alors $f_{P,Q} := \frac{P^2}{P^2+Q^2}$ vaudra identiquement 0 sur la courbe de P et 1 sur la courbe de Q . Il en sera de même pour les limites. Ainsi, on aura $P_\alpha \neq P_\beta$

Exemple 5.3.6. Si Γ est une courbe lisse en P et qu'on regarde α et β comme étant les deux demi-branches de Γ en P , alors $P_\alpha = P_\beta$. En effet, la restriction à Γ de toute fonction rationnelle bornée est régulière (car on est en dimension 1) donc continue donc la limite à gauche est la même que la limite à droite.

Si la courbe possède un point de recoupement en P , on peut cependant avoir différence.

Exemple 5.3.7. Prenons la lemniscate $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ et 0, et $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, voir figure 14

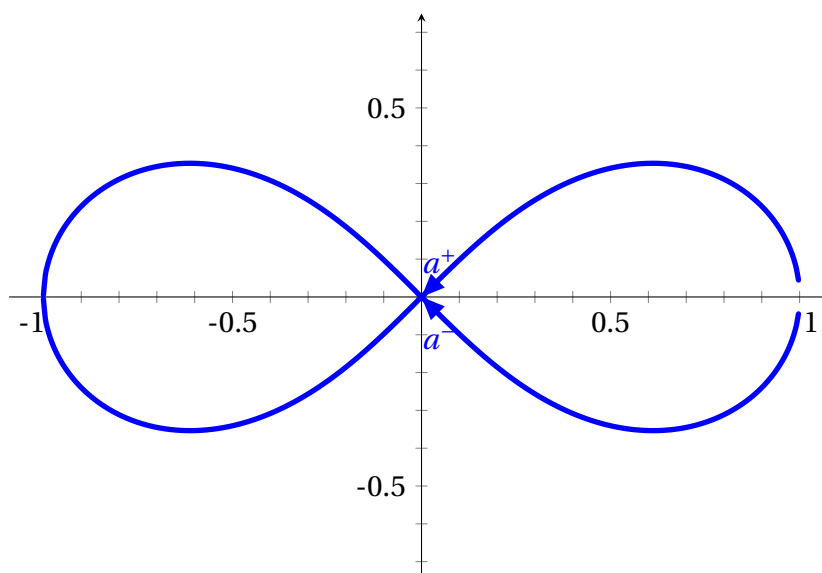


FIGURE 14 – Lemniscate avec les deux cônes premiers

Les deux demi-courbes sur la partie $x > 0$ de la lemniscate sont données par :

$$\alpha_{\pm} := \left(t, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1+8t^2} - (1+2t^2)}{2}} \right)$$

La valeur de f dessus sera ainsi

$$f(\alpha_{\pm}) = \pm \frac{t \sqrt{\frac{\sqrt{1+8t^2} - (1+2t^2)}{2}}}{t^2 + \frac{\sqrt{1+8t^2} - (1+2t^2)}{2}}$$

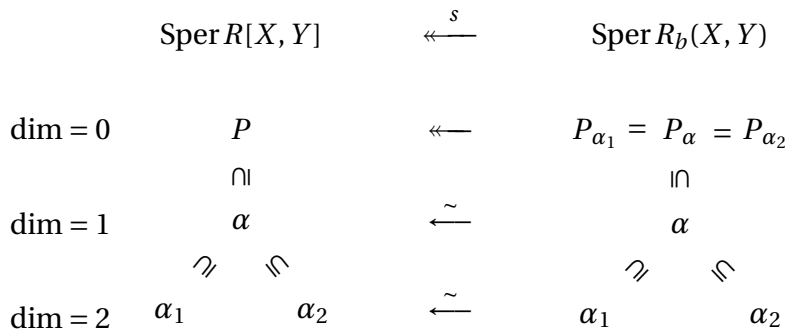
En prenant les développements limités pour t petit, on voit que $\sqrt{1+8t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1+4t^2$ et donc

$$\frac{\sqrt{1+8t^2} - (1+2t^2)}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$$

D'où $f \circ \alpha_{\pm} \sim \pm \frac{t^2}{t^2+t^2}$ ce qui vaudra ainsi $\frac{1}{2}$ sur α_+ , et $-\frac{1}{2}$ sur α_- .

Il resterait donc a priori à voir le cas des courbes cuspidales.

Remarque 5.3.8. Un cône β (borné) de dimension 2 généralisation d'un cône α de dimension 1 donne lieu au même point $P_{\beta} = P_{\alpha}$. En effet la spécialisation $\alpha \subseteq \beta$ est valable dans $\text{Sper } R[X, Y]$ comme dans $\text{Sper } R_b(X, Y)$, et le point P_{β} n'est rien d'autre que le point de $\text{Sper } R_b(X, Y)$ qui admet β comme spécialisation. Notons que [BCR13, 10.2.6] nous dit qu'il y a exactement deux tels β , nous les noterons donc α_1 et α_2 . On obtient alors le schéma suivant :



Pour les cônes β de dimension 2 qui n'ont pas de spécialisation de dimension 1, comprendre ce qu'il se passe est plus ardu. Si ce cône est donné par une demi-branche de courbe transcendante convergente, pour $R = \mathbb{R}$, alors on peut construire P_{β} ainsi que son support de la même manière qu'en 5.3.3. On remarquera encore que dans le cas où la courbe s'écrit $(x, a(x))$ avec a une série entière (par exemple l'exponentielle si $R = \mathbb{R}$), alors on a déjà donné le support de ce cône en 5.1.1; ce qui nous assure au passage que ces cônes diffèrent des P_{α} pour α de dimension 1.

Cependant il existe d'autres cônes, et il n'est pas aisé d'en donner une description complète et explicite.

Remarque 5.3.9. La partie sans doute la plus intéressante de cette étude de cas consiste probablement en se rendre compte que la richesse des substituts au-dessus des points est la même, que ce soit dans les points réels du spectre, à savoir $\text{RSpec}(\mathbb{R}_b(X, Y))$ ou dans le spectre réel, à savoir $\text{Sper}(\mathbb{R}_b(X, Y))$.

Ainsi, la description de $\text{RSpec}(\mathbb{R}_b(X, Y))$, et donc de $\text{Spec}(\mathbb{R}_b(X, Y))$, risque de découler d'une description de $\text{Sper}\mathbb{R}[X, Y]$.

La référence [Mel95] nous a été donnée lors du rapport, elle cite notamment [AGR85] qui fait une étude descriptive et approfondie de $\text{Sper}\mathbb{R}[X, Y]$, cela pourra alors nourrir la suite de cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

- [AGR85] Emilia ALONSO, José M. GAMBOA et Jesús M. RUIZ, « On orderings in real surfaces », in : *J. Pure Appl. Algebra* 36.1 (1985), p. 1-14, ISSN : 0022-4049, DOI : 10.1016/0022-4049(85)90059-3, URL : [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(85\)90059-3](https://doi.org/10.1016/0022-4049(85)90059-3).
- [Art27] Emil ARTIN, « Über die zerlegung definiter funktionen in quadrate », in : *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, t. 5, 1, Springer, 1927, p. 100-115.
- [BCR13] Jacek BOCHNAK, Michel COSTE et Marie-Françoise ROY, *Real algebraic geometry*, t. 36, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Bec82a] Eberhard BECKER, « The real holomorphy ring and sums of $2n$ -th powers », in : *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques*, Springer, 1982, p. 139-181.
- [Bec82b] Eberhard BECKER, « Valuations and real places in the theory of formally real fields », in : *Géométrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques*, Springer, 1982, p. 1-40.
- [Ber21] François BERNARD, « Seminormalization and regulous functions on complex affine varieties », in : *arXiv preprint arXiv :2109.06542* (2021).
- [BK89] MA BUCHNER et W KUCHARZ, « On relative real holomorphy rings », in : *manuscripta mathematica* 63.3 (1989), p. 303-316.
- [Bot21] Anna BOT, « A smooth complex rational affine surface with uncountably many real forms », in : *arXiv preprint arXiv :2105.08044* (2021).
- [BPR06] Saugata BASU, Richard POLLACK et Marie-Françoise ROY, *Algorithms in real algebraic geometry*, t. 10, Springer, 2006.
- [Cos+07] Michel COSTE et al., *Arc spaces and additive invariants in Real Algebraic and Analytic Geometry*, Société Mathématique de France, 2007.

-
- [Cza19] Aleksander CZARNECKI, « Maximal ideals of regulous functions are not finitely generated », in : *Journal of Pure and Applied Algebra* 223.3 (2019), p. 1161-1166, ISSN : 0022-4049, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.05.019>, URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404918301439>.
- [Del22] Victor DELAGE, « Bienvenue dans la géométrie régulue », in : *Tangente* 206 (2022), p. 44-46.
- [Des37] René DESCARTES, *La géométrie*, 1637.
- [Din+22] Si Tiep DINH et al., « Limits of real bivariate rational functions », in : *arXiv preprint arXiv:2202.04889* (2022).
- [Fer+18] José F FERNANDO et al., « On regulous and regular images of Euclidean spaces », in : *The Quarterly Journal of Mathematics* 69.4 (2018), p. 1327-1351.
- [FG06] José F. FERNANDO et J. M. GAMBOA, « Polynomial and regular images of \mathbb{R}^n », in : *Israel J. Math.* 153 (2006), p. 61-92, ISSN : 0021-2172, DOI : 10.1007/BF02771779, URL : <https://doi.org/10.1007/BF02771779>.
- [FGU11] José F FERNANDO, JM GAMBOA et Carlos UENO, « On convex polyhedra as regular images of \mathbb{R}^n », in : *Proceedings of the London Mathematical Society* 103.5 (2011), p. 847-878.
- [FGU17] José F FERNANDO, José M GAMBOA et Carlos UENO, « Polynomial, regular and Nash images of Euclidean spaces », in : *Ordered Algebraic Structures and Related Topics. Contemporary Mathematics* 697 (2017), p. 145-167.
- [Fic+16] Goulwen FICHOU et al., « Fonctions régulières », in : *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2016.718 (2016), p. 103-151.
- [FMQ17a] Goulwen FICHOU, Jean-Philippe MONNIER et Ronan QUAREZ, « Continuous functions on the plane regular after one blowing-up », in : *Mathematische Zeitschrift* 285.1-2 (2017), p. 287-323.
- [FMQ17b] Goulwen FICHOU, Jean-Philippe MONNIER et Ronan QUAREZ, « Substitution property for the ring of continuous rational functions », in : *Singularities-Kagoshima*, World Scientific, 2017, p. 71-93.
- [FMQ21] Goulwen FICHOU, Jean-Philippe MONNIER et Ronan QUAREZ, « Weak- and semi-normalization in real algebraic geometry », in : *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) 22.3 (2021), p. 1511-1558, ISSN : 0391-173X.

-
- [FP08] Toshizumi FUKUI et Laurentiu PAUNESCU, « On blow-analytic equivalence », in : *Arc spaces and additive invariants in real algebraic geometry, Panoramas et Syntheses, SMF 26* (2008), p. 87-125.
- [Har13] Robin HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, t. 52, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Hir64] Heisuke HIRONAKA, « Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero : I », in : *Annals of Mathematics 79.1* (1964), p. 109-203, ISSN : 0003486X, URL : <http://www.jstor.org/stable/1970486> (visité le 14/11/2022).
- [KK21] Wojciech KUCHARZ et Krzysztof KURDYKA, « Regulous Functions over Real Closed Fields », in : *International Mathematics Research Notices* (nov. 2021), rnab326, ISSN : 1073-7928, DOI : 10.1093/imrn/rnab326, eprint : <https://academic.oup.com/imrn/advance-article-pdf/doi/10.1093/imrn/rnab326/41300366/rnab326.pdf>, URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnab326>.
- [Kol09] János KOLLÁR, *Lectures on resolution of singularities (AM-166)*, t. 166, Princeton University Press, 2009.
- [KP12] Krzysztof KURDYKA et Adam PARUSIŃSKI, « On the non-analyticity locus of an arc-analytic function », in : *J. Algebraic Geom.* 21.1 (2012), p. 61-75, ISSN : 1056-3911, DOI : 10.1090/S1056-3911-2011-00553-5, URL : <https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2011-00553-5>.
- [KR96] Wojciech KUCHARZ et Kamil RUSEK, « On the ring of locally bounded Nash meromorphic functions », in : *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 54.3 (1996), p. 503-507.
- [Kuc09] Wojciech KUCHARZ, « Rational maps in real algebraic geometry », in : *Adv. Geom.* 9.4 (2009), p. 517-539, ISSN : 1615-715X, DOI : 10.1515/ADVGEOM.2009.024, URL : <https://doi.org/10.1515/ADVGEOM.2009.024>.
- [Kuc91] Wojciech KUCHARZ, « Generating ideals in real holomorphy rings », in : *Journal of Algebra* 144.1 (1991), p. 1-7.
- [Kur88] Krzysztof KURDYKA, « Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs », in : *Mathematische Annalen* 282.3 (1988), p. 445-462.
- [KZ18] Wojciech KUCHARZ et Maciej ZIELIŃSKI, « Regulous vector bundles », in : *Mathematische Nachrichten* 291.14-15 (2018), p. 2252-2271.

-
- [Loj13] Stanislaw LOJASIEWICZ, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser, 2013.
- [Man17] Frédéric MANGOLTE, *Variétés algébriques réelles*, t. 24, Société mathématique de France, 2017.
- [Mel95] Maria Pilar Vélez MELÓN, « La geometría de los abanicos en dimensión 2 (ISBN : 84-669-0723-8) », thèse de doct., jan. 1995.
- [Mon98] Jean-Philippe MONNIER, « Anneaux d'holomorphie et Positivstellensatz archimédien », in : *manuscripta mathematica* 97.3 (1998), p. 269-302.
- [Sch03] Markus SCHWEIGHOFER, « Iterated rings of bounded elements and generalizations of Schmüdgen's Positivstellensatz », in : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 554 (2003), p. 19-45.
- [Sch82a] Heinz-Werner SCHÜLTING, « Real holomorphy rings in real algebraic geometry », in : *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques*, Springer, 1982, p. 433-442.
- [Sch82b] Heinz-Werner SCHÜLTING, « Real points and real places », in : *Ordered fields and real algebraic geometry* 8 (1982), p. 289-295.
- [Sch86] Niels SCHWARTZ, « Real closed rings », in : *Algebra and Order* 14 (jan. 1986).
- [Swa77] Richard G SWAN, « Topological examples of projective modules », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 230 (1977), p. 201-234.
- [Tho74] René THOM, « Stabilité structurelle et morphogénèse », in : *Poetics* 3.2 (1974), p. 7-19.
- [ZS60] O ZARISKI et P SAMUEL, *Commutative algebra, II*, GTM, 29, 1960.

Titre : Fonctions rationnelles bornées en géométrie algébrique réelle

Mot clés : Géométrie algébrique réelle, fonctions rationnelles bornées, semi-algébrique, régulières, éclatements, arcs

Résumé : Ce manuscrit commence l'étude des fonctions rationnelles bornées, qui sont une extension naturelle des fonctions régulières et sont liées à la normalisation. Elles sont aussi liées aux anneaux de fonctions bornées (ou anneau d'holomorphicité) et elles fournissent les exemples les plus simples de fonctions non continues à plusieurs variables.

On montre qu'il s'agit d'un anneau non noetherien, intégralement clos, dont la dimension de Krull est la dimension géométrique. Les fonctions sont régulières après éclatements, le caractère borné est un invariant birationnel propre.

On crée une géométrie qui nous permet d'obtenir un Nullstellensatz faible, mais qui n'a rien de spécifique aux fonctions bornées, et les

fermés y coïncident avec les contractions de fermés de Zariski. On montre de plus qu'elle peut construire tout semi-algébrique quitte à monter la dimension ambiante. L'étude des bonnes conditions pour une inégalité de Łojasiewicz nous amène à créer une géométrie dans les espaces d'arcs semi-algébriques. On peut alors donner un Nullstellensatz pour les idéaux de type fini qui sont alors radicalement principaux. L'étude des contre-exemples pour le cas non de type fini nous amène à étudier les idéaux maximaux, et le défaut d'unicité de la propriété de substitution, ce qui crée un lien surprenant entre le spectre d'anneau de notre anneau et le spectre réel de l'anneau de polynôme associé.

Title: Bounded rational function in real algebraic geometry

Keywords: Real algebraic geometry, bounded rational functions, semi-algebraic, regulous, blowing-up, arcs

Abstract: This thesis starts the study of the bounded rational functions, which are a natural extension of the regulous functions, and are linked with the normalization process. They are also linked with the ring of bounded elements (or holomorphy ring) of the rational functions, and they give the easiest examples of non-continuous multi-variable functions.

We show that they form a non-Noetherian ring, but integrally closed, and its Krull dimension is equal to the geometrical dimension. The functions are regular after blowups, and the bounded property is a proper birational invariant.

We create a geometry that allows us to obtain a weak Nullstellensatz, but this geometry

is not specific to the bounded rational functions, and the obtained closed sets are exactly the blowdowns of Zariski sets. We also show that it can, provided an eventual rise up of the ambient dimension, describe any semi-algebraic set. The good hypothesis to obtain a Łojasiewicz inequality brings us to a study in the semi-algebraic arc space. We can also give a Nullstellensatz for the finite type ideals, which are then radically principal. The study of the counterexamples for the not finite type case leads us to study the maximal ideals, and the substitution property. The lack of its uniqueness gives a surprising link between the spectrum of our ring and the real spectrum of the associated polynomial functions.