HAL
open science

Flots d'Anosov en dimension trois construits par recollements de blocs

Neige Paulet

To cite this version:

Neige Paulet. Flots d'Anosov en dimension trois construits par recollements de blocs. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2023. Français. NNT : 2023PA131009 . tel-04087927

HAL Id: tel-04087927

https://theses.hal.science/tel-04087927v1

Submitted on 3 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD
École Doctorale Sciences, Technologies, Santé Galilée

Flots d'Anosov en dimension trois construits par recollements de blocs

THÈSE DE DOCTORAT
présentée par

Neige PAULET
Laboratoire Analyse, Géométrie et Application

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

soutenue le 12 avril 2023 devant le jury d'examen composé de :

BARBOT Thierry, Université d'Avignon ..... Rapporteur

BARTHELME Thomas, Queen's University ..... Rapporteur

BÉGUIN François, Université Sorbonne Paris Nord ..... Directeur de thèse

BONATTI Christian, CNRS, Université de Bourgogne ..... Examinateur

DEHORNOY Pierre, Université Grenoble Alpes ..... Examinateur

MANN Kathryn, Cornell University ..... Examinatrice

RECHTMAN Ana, Université de Strasbourg ..... Examinatrice

ZHANG Zhiyuan, CNRS, Université Sorbonne Paris Nord ..... Examinateur

Remerciements

C'est un remerciement profond et sincère que j'adresse pour commencer à mon directeur de thèse François Béguin. Je suis heureuse d'avoir cette place pour l'exprimer. J'ai pu au cours de ces années constater la justesse et l'intelligence de tes conseils pour m'amener à chacune des étapes, très variées, d'une thèse. Non seulement par ton expérience et ton professionnalisme, mais aussi par l'observation et l'analyse de mon propre fonctionnement particulier : là où il fallait insister, faire attention, ce qu'il fallait me dire et quand. Ce regard complet et sincère sur ma façon de travailler m'a permis de te faire une confiance absolue, dans une entreprise où souvent le doute s'empare brutalement de tout, où l'incapacité paralyse. J'ai pu m'appuyer dessus lorsqu'il fallait revenir en arrière, dans ces moments vertigineux où mieux valait ne pas se poser trop de questions, reprendre ajuster corriger et finalement trouver un chemin. Puis, après l'engloutissement, sortir la tête en ayant compris quelque chose. Merci pour tes innombrables relectures, sur lesquelles j'ai compté avec soulagement et sécurité. Pour ta concentration infatigable quand il s'agit de trouver une solution à un problème. Pour ton exigence maniaque sur la qualité de la rédaction, qui m'a fait produire, avec quelques gouttes de sueur, un résultat dont je suis vraiment fière. Ton encadrement a été exceptionnel pour moi. Merci enfin pour ta constance, chose précieuse pendant un doctorat, notamment quand celui-ci a traversé les confinements, les couvre-feu, le grand vide. De zoom en parcs et en cafés, de ne jamais me laisser sans nouvelles.

Aux doctorant·es du LAGA. Les angoisses inévitables se dissolvent dans nos habitudes quotidiennes, qui n'ont rien d'exaltant mais qui font de ce lieu une maison dans laquelle je me suis sentie libre d'être entièrement moi-même. Je veux vous dire l'admiration que j'ai de chacun·e d'entre vous, et du lien qui nous unit sans besoin de se trouver de raison. À celles et ceux qui ont été là presque tous les jours pendant ces années. Croiser le regard plein de compréhension de Hugo, me blottir contre Mouna, rire aux blagues d'Arthur et aux gifs de Wassim. Donner mes premiers TD avec Amine dans la franche rigolade. Passer la tête dans le bureau de Moussa pour son sourire. À Happy pour les trois mois de lune de miel qui ont changé ma vie au labo. À Elie, pour la belle personne que tu es, parce que nos vies sont mêlées depuis longtemps et que grâce à toi un peu de notre monde existe ici. Merci aussi à l'équipe administrative, Yolande pour ta présence familière chaque jour.

Je suis très reconnaissante à Thierry Barbot et Thomas Barthelmé d'avoir accepté de faire un rapport de ce long mémoire de thèse. Merci pour la lecture attentive, les idées enthousiastes, les retours chaleureux. Merci à Christian Bonatti, Pierre Dehornoy, Kathryn Mann, Ana Rechtman et Zhiyuan Zhang, d'avoir accepté de prendre part au jury. C'est un honneur pour moi. Aux autres membres de la famille Anosov du groupe de travail, Sergio Fenley, Mario Shannon, Inti Cruz, Ioannis Iakovoglou et Théo Marty. Pour les zooms hebdomadaires quand il n'y avait plus rien, votre recherche et votre enthousiasme à nous la partager m'ont rendu les mathématiques réelles, quand ce n'était encore pour moi qu'un domaine de cours à l'université. Tout particulièrement aux bébés Anosov, Ioannis et Théo. Vous avez adouci l'entrée, pas toujours facile, dans le monde des conférences et de la recherche par votre amitié complice, parce que je peux compter sur vos réponses à toutes mes questions. Aux organisateurs et organisatrices de l'école d'hiver d'Aussois, où j'ai fait mon premier exposé pétrie d'angoisse et que j'y ai trouvé de l'encouragement et de la bienveillance. Merci de réussir à changer un fonctionnement trop vieux et rigide. Merci Pierre pour me donner l'opportunité de travailler avec toi l'année prochaine, et pour me faire confiance. C'est avec une précieuse tranquillité

d'esprit concernant l'avenir proche, chose bien peu commune pour une thésarde, que j'ai pu finir cette année.

À ma mère, pour m'avoir recueillie et soignée quand j'en avais besoin. Ainsi qu'à Didier pour la résidence de deux mois d'été, où j'ai nagé dans le golfe de Morbihan et dans les mathématiques avec une liberté que je ne me connaissais pas.

À mon père pour la connivence, nos livres partagés et commentés, lus dans la ligne H de Paris Nord à Villetaneuse comme un fil sur tous les derniers mois de ma thèse. Ces découvertes littéraires qui nous font nous découvrir l'un l'autre.

Aux Lèvres Revoltées, pour chanter l'affirmation et la liberté, et m'avoir révélé beaucoup à moi-même.

À Nattie, ma colocataire. Merci pour les mots sur le frigo, les fleurs, les multiples attentions. Merci pour ta présence calme et apaisante pendant les longues soirées de travail et de rédaction, pour la simplicité et la joie que c'est de vivre avec toi, pour tout ce que tu fais pour la créer. À nos deux autres colocataires, qui emplissent la maison de poils et de bonheur.

Enfin, à mes ami·es. Quand paradoxalement mes activités en tout genre se sont interrompues, que le monde s'est un peu arrêté, car il fallait bien finir cette thèse, s'est dessiné autour de moi avec encore plus de précision une famille intime, présente, solide. Pour m'accueillir entièrement dans ces transformations brutes. Vous voir à mes côtés aujourd'hui plus que jamais est un cadeau immense. Coline, à toute notre histoire qui est l'histoire de nos vies. Merci pour ta générosité. Zein, tes couleurs chatoyantes, ta gentillesse exceptionnelle et ta tendresse. Alix, ton talent et ton humour ravageur. Théo, de notre jeune adolescence à aujourd'hui, traversée par ta poésie. Nina, ton énergie flamboyante, et Noël avec toi. Ella, pour être ensemble mathématiciennes dans un monde de mathématiciens. Lisa, la flamme et le vertige.

À mon grand copain Mathieu, à qui je dédie cette thèse, parce que je l'ai faite avec toi du début à la fin, de façon autant abstraite que concrète. Que je sais que tu en mesures le travail, l'épreuve et ses métamorphoses dans ses moindres détails. À ta passion, ton interêt profond, ta fidelité, et la merveille qu'est notre amitié.

Résumé

On s'intéresse aux flots d'Anosov, qui forment une famille très importante de systèmes dynamiques chaotiques. La stabilité structurelle de ces flots en fait des candidats privilégiés à une classification des classes d'équivalence orbitale, ce qui est encore aujourd'hui la motivation de nombreux travaux. Les flots d'Anosov sont également remarquables pour les interactions qui apparaissent entre la dynamique du flot et la topologie de la variété qui le porte, et ce particulièrement en dimension trois. Cette thèse s'inscrit dans cet angle d'étude.

L'objet principal de cette thèse est de démontrer un résultat permettant de construire des flots d'Anosov en dimension trois en recollant des *blocs de constructions*. Pour nous, un bloc de construction sera une variété de dimension trois compacte à bord, munie d'un champ de vecteurs, tel que l'ensemble maximal invariant du flot engendré est hyperbolique, et dont le bord est *quasi-transverse* au champ de vecteurs, c'est-à-dire transverse en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques contenues dans le bord. Dans la première partie de cette thèse, on montre qu'il existe des conditions générales suffisantes pour recoller les bords de blocs de construction et obtenir une variété fermée munie d'un flot d'Anosov induit par le champ de vecteurs initial.

Ce théorème de recollement généralise un théorème prouvé il y a quelques années par F. Béguin, C. Bonatti et B. Yu qui considéraient seulement des blocs de constructions dont le bord est transverse au champ de vecteurs. Cette généralisation est naturelle dans la mesure où T. Barbot et S. Fenley ont montré que tout tore incompressible plongé dans un flot d'Anosov en dimension trois est homotope à un tore quasi-transverse au flot. Ce résultat, allié à la décomposition JSJ des variétés de dimension trois permet d'obtenir (modulo des éventuelles singularités) un découpage canonique d'un flot d'Anosov en blocs de construction dont le bord est quasi-transverse au flot. Notre théorème de recollement peut alors se voir comme une sorte de réciproque du théorème de décomposition de T. Barbot et S. Fenley.

Dans une seconde partie, on étudie les applications de ce théorème de recollement. On montre un résultat de réalisation de *bi-feuilletage quasi-transverse* sur un tore incompressible plongé dans un flot d'Anosov transitif. On étudie les propriétés dynamiques des blocs de constructions, et l'on donne un critère nécessaire et suffisant pour qu'un *type géométrique abstrait* soit réalisé sur une partition de Markov dans un bloc de construction vérifiant de bonnes propriétés. On montre que l'on peut réaliser des complémentaires d'orbites périodiques de flot d'Anosov ou pseudo-Anosov en tant que pièces JSJ de flot d'Anosov transitif. Pour finir on montre que l'on peut, sous des conditions minimales, recoller des pièces découpées le long d'une collection de tores incompressibles plongés dans un flot d'Anosov alignable penché.

Abstract

In this thesis, we are concerned with Anosov flows, a very important family of chaotic dynamical systems. As these flows are structurally stable, one would hope to obtain a complete classification of their orbital equivalence classes, indeed this goal continues to motivate reseachers. Anosov flows showcase also remarkable interactions between the dynamics of the flow and the topology of the underlying manifold, specifically in dimension three.

In short, the primary goal of this thesis is to prove a result allowing one to construct Anosov flows in dimension three by gluing *building blocks*. In our setting, a building block is a compact three-manifold with boundary equipped with a vector field, such that the maximal invariant of the generated flow is hyperbolic, and whose boundary is *quasi-transverse* to the vector field, i.e. transverse except for a finite number of periodic orbits contained in the boundary. In the first part of this thesis, we provide sufficient conditions to glue the boundary components of building blocks, so that the resulting manifold is closed and equipped with an Anosov flow induced by the initial vector field.

This gluing theorem generalizes a recent result of F. Béguin, C. Bonatti, and B. Yu. Their result only applied to building blocks whose boundary is transverse to the vector field. Our generalization is natural since T. Barbot and S. Fenley have shown that every incompressible torus embedded in a three-dimensional Anosov flow is homotopic to a torus that is quasi-transverse to the flow. Together with the JSJ decomposition of three-manifolds, this result implies (passing over some possible singularities) a canonical decomposition of Anosov flows into building blocks with quasi-transverse boundaries. Our gluing theorem can thus be seen as a kind of converse to this decomposition theorem of T. Barbot et S. Fenley.

In the second part, we study applications of this gluing theorem. We show a realization result for *quasi-transverse bi-foliations* on an incompressible torus embedded in a transitive Anosov flow. We study the dynamical properties of building blocks, giving necessary and sufficient criterion for an abstract geometric type to be realized on a Markov partition in a well-behaved building block. We then show that one can realize complementaries of periodic orbits of an Anosov or pseudo-Anosov flow as JSJ pieces of a transitive Anosov flow. Finally, we show that, under minimal conditions, one can glue pieces cut along a collection of incompressible tori embedded in a skewed $\mathbb{R}$-covered Anosov flow.

Table des matières

Introduction **vii**
Généralités sur les flots d'Anosov . . . vii
Flots d'Anosov et topologie des 3-variétés . . . ix
Blocs de construction *versus* blocs de décomposition . . . xiv
Présentation du théorème principal . . . xvi
Applications . . . xx
Organisation de la thèse . . . xxiii

I Théorème de recollement **1**

1 Blocs de construction et recollements **2**
1.1 Blocs de construction . . . 2
1.2 Lamination de bord . . . 3
1.3 Recollements . . . 13
1.4 Équivalence . . . 16
1.5 Énoncé du théorème de recollement et organisation de la preuve . . . 21

2 Normalisation des blocs de construction et des recollements **23**
2.1 Définitions et énoncé de la proposition principale . . . 23
2.2 Section affine . . . 29
2.3 Valeurs propres des orbites périodiques . . . 33
2.4 Paire de feuilletages affines invariants . . . 35
2.5 Recollements inachevés et forte isotopie . . . 37
2.6 Redressement du bord d'un bloc de construction . . . 41
2.7 Normalisation du recollement . . . 43
2.8 Preuve de la proposition 2.1.10 . . . 55

3 Dilatation de l'application de passage près de la lamination **57**
3.1 Définition et énoncé de la proposition principale . . . 57
3.2 Lemmes préliminaires . . . 60
3.3 Décomposition de l'application de passage . . . 64
3.4 Preuve de la proposition 3.1.2 . . . 65

4 Diffusion de la dilatation de l'application de passage **71**
4.1 Énoncé de la proposition principale . . . 72
4.2 Action de l'holonomie . . . 76
4.3 Preuve du lemme 4.1.5 . . . 81

5 Choix des paramètres et construction de champs de cônes **87**
5.1 Énoncé de la proposition principale et résumé de la preuve 88
5.2 Paramètres λ_0, ϵ_0 et cônes sur P^{in} 97
5.3 Cônes sur Σ et entier N_Σ 102
5.4 Entier N_0 108
5.5 Paramètre δ_0 114
5.6 Entier N_1 114
5.7 Preuve de la proposition 5.1.4 117
5.8 Résultat additionnel 122

6 Preuve du théorème de recollement et critère de transitivité **124**
6.1 Recollement et champs de cônes invariants sur une section globale 124
6.2 Décomposition hyperbolique sur une section globale 128
6.3 Preuve du théorème 1 132
6.4 Critère de transitivité 134

II Applications **137**

7 Bloc de construction avec lamination de bord prescrite **138**
7.1 Recollements partiels 139
7.2 Type combinatoire de lamination quasi-Morse-Smale 143
7.3 Bloc de construction non transitif avec feuilletage de bord prescrit 147
7.4 Transitivité par la méthode d'*Éclatement – Excision – Recollement* 158
7.5 Réalisation de bi-feuilletage quasi-transverse dans un flot d'Anosov 163

8 Plonger un bloc selle plein dans un flot d'Anosov **166**
8.1 Feuilletage quasi-transverse à un feuilletage quasi-Morse-Smale donné 166
8.2 Preuve de la proposition E 167

9 Réalisation d'un type géométrique abstrait dans un bloc selle plein **170**
9.1 Blocs intermédiaires 173
9.2 Bloc de construction et bloc de Béguin-Bonatti-Yu 178
9.3 Preuve de la proposition F 181
9.4 Exemples de modèles de partition de Markov 183

10 Complémentaire d'orbite périodique comme pièce JSJ **186**
10.1 Bloc de construction construit par *Double-éclatement – Excision* 188
10.2 Ajout de feuille compacte par recollement de bloc élémentaire 191
10.3 Preuve de la proposition G 197
10.4 Complémentaires de noeuds dans $\mathbb{S}^3$ en tant que pièces JSJ atoroïdales 199

11 Recollement de pièces de flot d'Anosov alignables penchés **203**

Introduction

Généralités sur les flots d'Anosov

Définition Un flot X^t de classe $\mathcal{C}^1$ sur une variété fermée (compacte, sans bord) $\mathcal{M}$ est dit *d'Anosov* si la variété qui le porte admet une *décomposition hyperbolique* pour le flot, autrement dit s'il existe une décomposition X^t-invariante du fibré tangent en la somme

$$T\mathcal{M} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$$

où X est le champ de vecteurs qui engendre le flot X^t, les vecteurs de E^{ss} sont exponentiellement dilatés et les vecteurs de E^{uu} exponentiellement contractés par la différentielle du flot dans le futur. Formellement, cela signifie qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 1$, tel que :

- pour tout $v \in E^{ss}$ et $t \geq 0$, $\|X_*^t v\| \leq C^{-1}\lambda^{-t}\|v\|$,
- pour tout $v \in E^{uu}$ et $t \geq 0$, $\|X_*^t v\| \geq C\lambda^{t}\|v\|$,

où $\|\cdot\|$ est une norme riemannienne quelconque sur $\mathcal{M}$. On dira aussi de manière équivalente que X est un *champ de vecteurs Anosov*. On appelle E^{ss} le *fibré stable fort*, et E^{uu} le *fibré instable fort* du flot d'Anosov, et la somme $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ et $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ le *fibré stable faible* et *instable faible* respectivement. On renvoie à [FH19] pour une bonne référence générale sur le sujet.

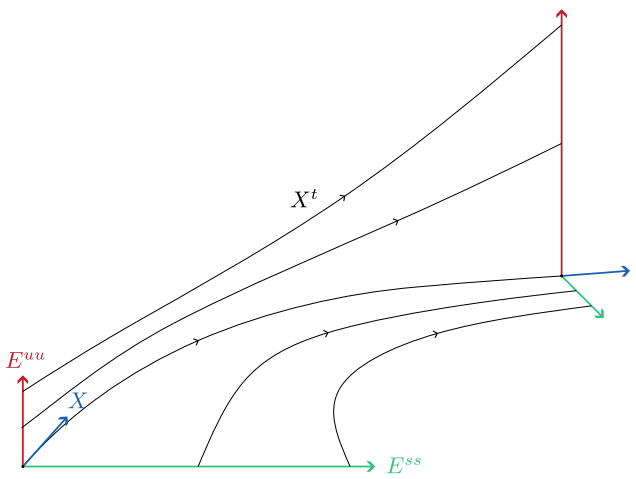


FIGURE 1 – Image locale d'une orbite d'un flot d'Anosov

Deux exemples fondamentaux Les flots d'Anosov admettent deux familles d'exemples typiques, que l'on cite dès maintenant afin d'avoir quelques images en tête.

- **Flot géodésique d'une variété riemannienne à courbure négative :** Soit (M, g) une variété riemannienne fermée de dimension $n \geq 2$. Le *flot géodésique de* M est le flot $X_g^t \colon T^1M \to T^1M$ sur le fibré unitaire tangent de M, qui envoie le couple $(p, v) \in T^1M$ sur le couple $X_g^t(p, v) = (c(t), c'(t))$ correspondant à la position et la vitesse au temps t de l'unique géodésique $c \colon \mathbb{R} \to M$ telle que $(c(0), c'(0)) = (p, v)$ (figure 2). Si *la métrique riemannienne* g *est à courbure négative*, alors *le flot géodésique* X_g^t *sur* $\mathcal{M} := T^1M$ *est Anosov.*

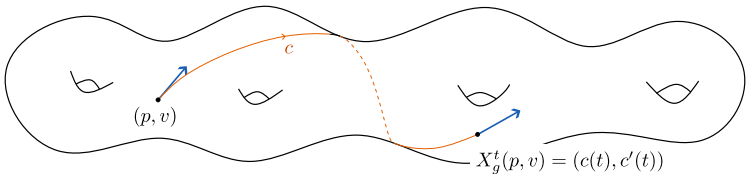


FIGURE 2 – Flot géodésique d'une surface hyperbolique

- **Suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore :** Soit $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers et déterminant 1, $n \geq 2$. Alors A préserve le réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$, et passe au quotient en un automorphisme $\bar{A}$ sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. La *variété de suspension de* A est la variété fermée de dimension $n+1$, définie par le quotient $\mathcal{M}_A := \mathbb{T}^n \times [0, 1]/(x, 1) \sim (\bar{A}x, 0)$. Le *flot de suspension de* A noté $X_A^t \colon \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ est le passage au quotient sur $\mathcal{M}_A$ du flot horizontal engendré par le champs $\partial/\partial t$ sur le produit $\mathbb{T}^n \times [0, 1]$ muni des coordonnées (x, t). Si *la matrice* $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ *est hyperbolique*, autrement dit elle n'admet pas de valeurs propres de module 1, alors *le flot de suspension de* A *est Anosov* (figure 3).

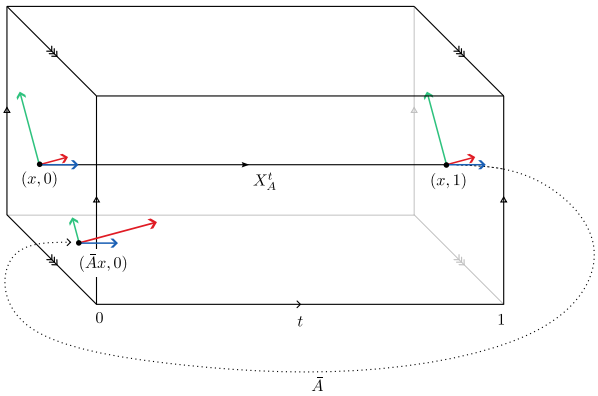


FIGURE 3 – Suspension d'une matrice hyperbolique $A \in SL_2(\mathbb{Z})$

Histoire La définition générale d'un flot d'Anosov apparaît dans les années 60, lorsque D. Anosov étudie les propriétés dynamiques qualitatives du flot géodésique sur les variétés riemannienne à courbure négative dans son texte fondateur [Ano67], devenu par la suite l'exemple prototype

d'un flot d'Anosov. On peut remonter aux travaux pionniers de J. Hadamard ([Had98]), puis M. Morse et H. Poincaré dans les années 20 pour les premières découvertes autour du flot géodésique sur les surfaces à courbure négative constante, et témoignages du comportement *chaotiques* de ces systèmes : bien que déterministes, ces systèmes sont sensibles aux conditions initiales, et par conséquent imprévisibles. Parmi leurs propriétés remarquables, on peut citer par exemple la densité des orbites périodiques, l'existence d'une orbite dense et l'existence d'une mesure ergodique ([Ano63]), marqueurs de la complexité de la dynamique. Paradoxalement, ces flots possèdent des propriétés de rigidité : ils sont orbitalement équivalents entre eux pour différentes métriques à courbure négative (M. Morse ([Mor21],[Mor24]) dans le cas des surfaces, puis par M. Gromov et D. Anosov dans le cas général), et la dynamique persiste sous l'effet de petites perturbations. Cette dernière propriété est la propriété de *stabilité structurelle* d'un système. Introduite en 1937 par A. Andronov and L. Pontryagin, qui parlaient alors de *systèmes grossiers*, elle est montré pour le flot géodésique en courbure négative en 1962 par D. Anosov ([Ano62]). L'étude de ces systèmes chaotiques a donné naissance à la *théorie des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques* avec l'école de S. Smale d'une part ([Sma67]), et D. Anosov, Y. Sinai et V. Arnold d'autre part, dont le but principal était de caractériser la propriété de stabilité structurelle, et dont les flots d'Anosov sont les exemples paradigmatiques.

Propriétés dynamiques Dans le cadre de cette théorie, les flots d'Anosov ont été intensivement étudiés, et leur comportement dynamique est aujourd'hui bien compris. Parmi les propriétés importantes on peut citer par exemple que les flots d'Anosov appartiennent à la famille des *flots Axiome A*, qu'ils sont *orbitalement expansifs*, qu'ils vérifient le *lemme de pistage*, et qu'ils possèdent une *mesure d'entropie maximale* (voir [FH19]). Les deux propriétés suivantes sont fondamentales dans ce mémoire.

- **Intégrabilité des fibrés stables et instables :** Le théorème de Hadamard-Perron, aussi appelé *théorème de la variété stable*, implique que les fibrés E^{ss} et E^{uu} de la décomposition hyperbolique d'un flot d'Anosov X^t sont uniquement intégrables, et induisent donc des feuilletages $\mathcal{F}^{ss}$ et $\mathcal{F}^{uu}$ sur la variété $\mathcal{M}$. De même, les fibrés $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ et $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ s'intègrent de façon unique en feuilletages transverses $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur $\mathcal{M}$, invariant par le flot de X. On appelle ces derniers les *feuilletages stable* et *instable (faible)* du flot d'Anosov.

- **Stabilité structurelle :** Pour tout champ d'Anosov X sur $\mathcal{M}$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de X dans l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{M}$ muni de la topologie $\mathcal{C}^1$, tel que tout élément $Y \in \mathcal{U}$ est *orbitalement équivalent* à X, autrement dit pour lesquels il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ qui envoie les orbites orientées du flot engendré par Y sur les orbites orientées du flot de X. Un tel champ est dit $\mathcal{C}^1$*-structurellement stable.*

Cette dernière propriété implique que les classes d'équivalences de flots d'Anosov sur une variété $\mathcal{M}$ donnée sont au plus dénombrables, ce qui suggère la possibilité d'une *classification à équivalence orbitale près* par un nombre fini d'invariants combinatoire. Une telle classification en dimension 3 (la dimension minimale pour un flot d'Anosov), est encore aujourd'hui la motivation de nombreux travaux, et est loin d'être achevée.

Flots d'Anosov et topologie des 3-variétés

Cette thèse se restreint à l'étude des flots d'Anosov en dimension 3, à équivalence orbitale près. Les flots d'Anosov sont remarquables pour les interactions qui apparaissent entre la dynamique du flot et la topologie de la variété qui le porte, et ce particulièrement en dimension 3. Cette thèse s'inscrit dans cet angle d'étude.

Des contraintes pour porter un flot d'Anosov Pour illustrer, on peut citer un certain nombre d'obstructions d'ordre topologique sur une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3 pour qu'elle admette un flot d'Anosov X^t.

- $\mathcal{M}$ admet une paire de feuilletages *tendus*, une classe importante de feuilletage (voir par exemple [Nov65]), qui sont les feuilletages stables et instables du flot X^t. L'existence de ces feuilletages est un élément clé pour les propositions qui suivent.
- Le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ ([Ver74], [Pal78]).
- Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M})$ est à croissance exponentielle (prouvé par G. Margulis dans l'appendice de [AS67], puis revisité par J. Plante et W. Thurston [PT72]).
- Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M})$ admet une action sur le cercle $\mathbb{S}^1$ par homéomorphismes qui préservent l'orientation ([CD03], [Fen12]). Or il existe une famille de 3-variétés fermées dont le groupe fondamental ne peut pas agir sur le cercle ([CD03], [Fen07]).

Signalons aussi qu'il est montré dans [RSS03] qu'il existe une infinité de 3-variétés hyperboliques qui n'admettent pas de feuilletages tendus.

Rigidité : quand la topologie détermine la dynamique Les flots d'Anosov en dimension 3 ont ceci d'intéressant qu'ils présentent de fortes propriétés de *rigidité*. On parle ici de rigidité quand des propriétés d'ordre purement topologiques suffisent à décrire complètement les classes d'équivalences orbitales des flots d'Anosov vérifiant ces propriétés communes, autrement dit lorsque la topologie de la variété suffit à décrire la dynamique des flots d'Anosov qu'elle peut porter. Les résultats suivants en témoignent.

- J. Plante montre dans [Pla81] que les seuls flots d'Anosov sur les variétés qui admettent une *fibration en tores au dessus du cercle* sont (à équivalence orbitale près) les suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore. Une telle variété possède alors au plus deux classes d'équivalence orbitale de flot d'Anosov (la suspension de l'automorphisme linéaire et son inverse). La preuve, incomplète, est revue par T. Barbot dans sa thèse [Bar92], qui donne un énoncé plus général.
- E. Ghys montre dans [Ghy84] que seuls les flots d'Anosov sur les variétés qui admettent une *fibration en cercle au dessus d'une surface* sont (à équivalence orbitale près) les revêtements finis du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique. Ce résultat est étendu par T. Barbot pour les *variétés de Seifert*, autrement dit les fibrés en cercle au dessus d'une orbifold de dimension 2, dans [Bar96] : les seuls flots d'Anosov sont les (revêtement finis) de *flots géodésiques généralisés*. Dans [BF22], T. Barbot et S. Fenley précisent ce résultat et prouvent qu'une telle variété porte au plus deux classes d'équivalence de flots d'Anosov.
- T. Barbot et S. Fenley entreprennent dans [BF13b] l'analyse systématique des flots d'Anosov (et pseudo-Anosov) dans les variétés toroïdales, et en restriction aux pièces de la *décomposition torique* (ou *décomposition JSJ*) qui sont de type Seifert. Ils décrivent dans [BF15] l'ensemble des classes d'équivalences de flot d'Anosov sur les *variétés graphées* dont chaque pièce de Seifert est *périodique* (la fibre $\mathbb{S}^1$ est homotope à une orbite périodique du flot). Notons que l'on trouve déjà un résultat similaire, moins général, dans [Bar98]. Ils décrivent ensuite dans [BF21] les flots d'Anosov restreints à une pièce de Seifert *libre* (non périodique).

Les revêtements finis de flots géodésiques d'une surface hyperbolique (ou plus généralement d'une 2-orbifold hyperbolique) et les suspensions des automorphismes linéaires hyperboliques du tore $\mathbb{T}^2$ présentent donc des points communs : la variété qui les porte est *fibrée*, ils sont *transitifs*, les fibrés stable et instable sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, *etc.* Ils peuvent aussi se construire comme l'action d'un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G, agissant sur un quotient homogène de G par un réseau. Un tel flot est appelé *flot algébrique*. P. Tomter ([Tom70]) a montré que ces deux exemples sont en fait les seuls flots d'Anosov dans cette famille en dimension trois.

Flexibilité : abondance de flots d'Anosov À la même période que les premiers résultats de rigidité sur les flots algébriques, apparaissent aussi les premiers exemples de flots d'Anosov *non algébriques* (autrement dit qui n'est ni une suspension, ni un flot géodésique). Cela nécessite des opérations de *chirurgies topologiques* sur des flots algébriques, et des *recollements de blocs de constructions*. Ces exemples témoignent du fait que le problème de classification des flots d'Anosov en dimension 3 ne peut pas se réduire facilement, à cause de phénomènes de *flexibilité* : il existe de nombreux flots d'Anosov ne présentant pas les qualités communes au flot d'Anosov algébriques, et il existe des variétés portant de nombreux flots d'Anosov dont la dynamique n'est pas équivalente, voire même très éloignée.

- **Chirurgie de Franks-Williams :** J. Franks et B. Williams construisent dans [FW80] le premier flot d'Anosov non transitif en dimension trois, en recollant une variété à bord P munie d'un champ de vecteurs X contenant un attracteur avec une copie $P' = P$ munie du champ de vecteurs inverse $X' = -X$. Un tel bloc de construction (P, X) est obtenu en opérant une *bifurcation* sur l'orbite périodique γ de la suspension de l'automorphisme du tore $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$, induite par le point fixe $(0, 0)$, et en excisant un petit voisinage tubulaire de l'orbite périodique répulsive γ^+ créée par bifurcation. La variété à bord P ainsi obtenue est hyperbolique et homéomorphe au complémentaire du noeud de huit dans $\mathbb{S}^3$ ([Thu97]).

- **Chirurgie de Handel-Thurston :** M. Handel et W.P. Thurston construisent dans [HT80] un flot d'Anosov transitif non algébrique en opérant une chirurgie sur le flot géodésique d'une surface hyperbolique. Le décor est le suivant. Soit Σ une surface orientable fermée hyperbolique S et une collection finie de géodésiques simples fermées $\{c_i\}$ disjointes. L'union des fibres au dessus de c_i dans le fibré unitaire tangent $\mathcal{M} = T^1\Sigma$ est un tore T_i, qui contient deux orbites périodiques du flot géodésiques X^t, et transverse au flot sur le complémentaire de ces orbites. On dit qu'il est *quasi-transverse* au flot (figure 4). La chirurgie de Handel-Thurston consiste à découper $\mathcal{M}$ le long des tores T_i, et de recoller les morceaux P_j ainsi obtenus en composant par des twist de Dehn $f_i \colon T_i \to T_i$ (non triviaux) le long de la fibre. Pour une certaine condition de positivité sur les twist f_i, le résultat est un flot d'Anosov Y^t sur une variété $\mathcal{N}$. Ce flot est toujours transitif. la variété $\mathcal{N}$ qui porte ce flot est une variété *graphée*, autrement dit un recollement de morceaux qui sont des fibrés de Seifert, mais n'a plus de structure fibrée globale. On en déduit d'après le résultat de Tomter ([Tom70]) que le flot obtenu n'est pas un flot algébrique.

- **Chirurgie de Dehn-Goodman-Fried :** S. Goodman et D. Fried présentent une technique générale de *chirurgie de Dehn* sur une orbite périodique γ d'un flot d'Anosov quelconque X^t sur une 3-variété $\mathcal{M}$, et qui permet notamment, par un résultat de W.P. Thurston ([Thu79]), d'obtenir les premiers exemples de flot d'Anosov sur des *variétés hyperboliques*. S. Goodman ([Goo83]) décrit cette chirurgie de la manière suivante : on découpe dans $\mathcal{M}$ un anneau A transverse au flot X^t dans un voisinage linéarisant de γ, et on recolle les bords ainsi créés par un twist de Dehn $f : A \to A$. D. Fried ([Fri83]) décrit pour sa

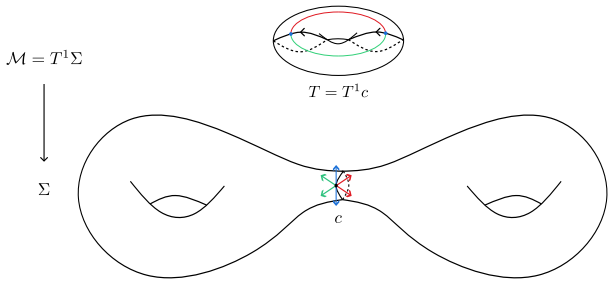


FIGURE 4 – Fibre au dessus d'une géodésique fermée simple c

part une chirurgie par un procédé d'*Éclatement – Écrasement* (*Blow-up – Blow down*) sur l'orbite γ. Celle-ci a l'avantage de garder un contrôle sur la structure des feuilletages, mais fait perdre en régularité sur le flot obtenu : on parle alors de *flot topologiquement Anosov*. Dans sa thèse [Sha20], M. Shannon montre qu'une chirurgie de Dehn-Fried sur un flot d'Anosov *transitif* aboutit bel et bien à un flot (différentiablement) d'Anosov, et orbitalement équivalent au flot obtenu par la chirurgie de S. Goodman.

- **Chirurgie de Foulon-Hasselblatt :** P. Foulon et B. Hasselblatt généralisent la chirurgie de Handel-Thurston en décrivant une chirurgie de Dehn le long d'un *noeud Legendrien* dans le fibré unitaire tangent $\mathcal{M} = T^1\Sigma$ d'une surface hyperbolique Σ, muni du flot géodésique X^t. Ils montrent dans [FH13] qu'il existe une famille de chirurgies de Dehn tel que le flot induit par X^t sur la nouvelle variété est Anosov et préserve une *forme de contact*. Ils montrent ainsi qu'il existe des *flots d'Anosov de contact* qui ne sont pas orbitalement équivalents à un flot algébrique, incluant des flots d'Anosov de contact sur des variétés hyperboliques.

- **Recollement de Bonatti-Langevin :** Le premier exemple de flot d'Anosov construit en recollant les bords d'un *bloc de construction abstrait*, c'est-à-dire une variété à bord P muni d'un champ de vecteurs X qui n'est pas obtenu par chirurgie sur un flot d'Anosov, est celui de C. Bonatti et R. Langevin. Le bloc est une variété à bord P, homéomorphe à un fibré en cercle au dessus d'un plan projectif privé de deux disques, muni d'un champ de vecteurs X transverse au bord. Le bord de P est constitué de deux tores, l'un T_1 le long duquel le flot de X entre dans P, et l'autre T_2 le long duquel le flot de X sort de P, et l'ensemble des orbites du flot incluses dans l'intérieur de P est réduit à une unique orbite périodique γ hyperbolique selle. Dans [BL94], les auteurs exhibent un recollement $\varphi\colon T_2 \to T_1$ tel que le flot induit par X sur la variété quotient $\mathcal{M} := P/\varphi$ est Anosov. C'est le premier flot d'Anosov transitif, transverse à un tore plongé, mais non équivalent à une suspension. T. Barbot généralise cette construction dans [Bar98], et donne une classification complète de cette famille de flots d'Anosov appelés *flots BL*. Il construit avec cette même méthode le premier exemple de variété $\mathcal{M}$ qui porte deux flots d'Anosov non topologiquement équivalent. L'un possède un feuilletage stable dont l'espace des feuilles dans le revêtement universel est *séparé* (Hausdorff), l'autre pas.

- **Recollement de Béguin-Bonatti-Yu :** F. Béguin, C. Bonatti, et B. Yu ont mis au point un procédé général de recollement de blocs de construction abstrait pour construire des flots d'Anosov ([BBY17]). Un *bloc de Béguin-Bonatti-Yu* est un couple (P, X) où P est une variété compacte à bord muni d'un champ de vecteurs X de classe $\mathcal{C}^1$, transverse

au bord ∂P, et tel que l'ensemble maximal invariant de X^t dans P forme un ensemble hyperbolique dont les directions stables fortes et instables fortes sont de dimension 1. Les auteurs montrent que sous des conditions très générales, il existe une façon de recoller les bords de P via un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ qui apparie les composantes du *bord de sortie* (le long duquel le flot sort de P) avec les composantes du *bord d'entrée* (le long duquel le flot entre dans P) pour obtenir une variété fermée $P_\varphi := P/\varphi$ muni d'un champ de vecteurs X_φ induit par X qui soit Anosov. Cette méthode donne de nouveaux résultats de flexibilité. Elle permet par exemple de construire une variété $\mathcal{M}$ qui porte un flot d'Anosov transitif et un flot d'Anosov non transitif, et la première famille de variétés $\mathcal{M}_N$ portant une nombre N arbitraire de flots d'Anosov deux à deux non orbitalement équivalents. Ces variétés sont obtenues en recollant deux blocs atoroïdaux avec un bloc de Seifert.

- **Recollement de Clay-Pinsky :** A. Clay et T. Pinsky construisent pour tout entier N une variété *graphée* qui porte N flots d'Anosov deux à deux non orbitalement équivalents ([CP20]). Cette variété s'obtient en recollant deux copies d'un revêtement fini de bloc de flot géodésique sur la *surface modulaire compactifiée* avec une technique similaire à la chirurgie de Handel-Thurston.

La technique générale des constructions par chirurgie et recollement est similaire : il s'agit de recoller les bords créés par chirurgie via un difféomorphisme bien choisi de sorte à ne pas détruire l'hyperbolicité déjà présente. Une condition importante est de *préserver la transversalité des feuilletages stable et instable*. Dans Handel-Thurston par exemple, on utilise un difféomorphisme de recollement qui "casse" la structure fibrée de la variété initiale $\mathcal{M}$, tout en préservant l'hyperbolicité "naturelle" du flot géodésique sur chacun des blocs. Dans le cas des recollements de blocs abstraits de Béguin-Bonatti-Yu, le recollement a un rôle plus fort : il doit aussi *créer de l'hyperbolicité*. Dans chacun de ces cas, un élément clé pour montrer l'hyperbolicité du nouveau flot après recollement est le *critère des champ de cônes invariants* (ou *critère des champs de cônes d'Alexeev*, voir [FH19]), qui garanti l'hyperbolicité de la dynamique par l'existence de champs de cônes vérifiant certaines propriétés. Il s'agit alors d'analyser l'action du recollement sur une paire de champs de cônes bien choisis.

Comme évoqué dans les exemples, la question du nombre de flot d'Anosov qu'une variété $\mathcal{M}$ donnée peut porter est intimement liée au problème de classification et aux interactions entre topologie et dynamique. On peut citer aussi le travail récent de J. Bowden et K. Mann ([BM19]), où l'auteur et l'autrice montrent l'existence, pour tout N, d'une variété *hyperbolique* $\mathcal{M}_N$ qui porte N flots d'Anosov non orbitalement équivalents. L'existence d'une variété $\mathcal{M}$ portant une infinité de flots d'Anosov non orbitalement équivalents est un problème encore ouvert.

Espaces des orbites et invariants Ce sujet n'apparaît pas dans cette thèse, mais notons qu'une des difficultés dans le problème de classification est de déterminer de manière efficiente si deux flots d'Anosov sont orbitalement équivalents ou non. Un outil puissant pour ce faire est *l'espace des orbites* : à tout flot d'Anosov X^t sur une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3 est associé un ouvert $\mathcal{O}_X$ du plan, muni d'une paire de feuilletages transverse $(\tilde{\mathcal{F}}^s, \tilde{\mathcal{F}}^u)$. C'est l'espace des orbites de relevé $\tilde{X}^t$ du flot dans le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$, autrement dit l'espace quotient de $\widetilde{\mathcal{M}}$ par la relation "être sur la même orbite du flot $\tilde{X}^t$", muni de la projection des relevés des feuilletages stable et instable du flot ([Bar95a], [Fen94]).

Dans [Bar95a], T. Barbot montre que l'action du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{M})$ sur l'espace des orbites $\mathcal{O}_X$ suffit à déterminer la classe d'équivalence orbitale du flot X^t. Depuis, l'espace des orbites (aussi appelé *plan bi-feuilleté*), ainsi que *l'espace des feuilles* qui lui est relié ([Fen98]),

ont été intensivement étudié principalement par T. Barbot, S. Fenley et T. Barthelmé. Il permet de montrer de nombreuses propriétés intéressantes liées aux chirurgies sur les flots d'Anosov ([Fen94], [BI20]), aux tores incompressibles ([Bar95b], [Fen03]), aux classes d'homotopies des orbites périodiques ([Fen94], [BF14b], [BF17]), *etc.* Plus récemment, T. Barthelmé, S. Frankel et K. Mann montrent dans [BFM22] que la classe d'homotopie libre $\mathcal{P}(X)$ des orbites périodiques (non orientées) d'un flot d'Anosov transitif en dimension 3, associée à une donnée discrète sur l'espace des orbites, constitue un invariant complet. Dans [Iak22], I. Iakovoglou construit pour de tels flots un équivalent de *partition de Markov* dans l'espace des orbites, et un objet combinatoire fini associé qui caractérise sa classe d'équivalence orbitale.

Blocs de construction *versus* blocs de décomposition

Comme son titre l'indique, cette thèse s'intéresse plus particulièrement aux flots d'Anosov construits par recollements de blocs abstraits, autrement dit des couples (P, X) où P est une variété à bord, et X est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur P, dans la lignée des recollements de Béguin-Bonatti-Yu. Comme vus précédemment dans les exemples, le recollement de tels blocs le long de leur bord est une technique puissante pour montrer la flexibilité des flots d'Anosov, et permet de construire des dynamiques Anosov sur des variétés ayant une topologie riche et compliquée, en recollant des blocs topologiquement et dynamiquement "simples".

Découpage d'un flot d'Anosov Le pendant de cette opération de recollement consiste à trouver une bonne manière de décomposer un champ de vecteurs Anosov donné Z sur une 3-variété orientable fermée $\mathcal{M}$ le long de tores en blocs de constructions (P_i, X_i), à la façon de la décomposition JSJ des variétés irréductibles de dimension 3. Moralement, on veut que les morceaux soient "élémentaires", en bonne position par rapport au champ Z, et que cette décomposition soit unique. Le champ d'Anosov Z sur $\mathcal{M}$ peut alors se reconstituer comme recollement des blocs (P_i, X_i) le long des bords.

Découpage le long de tores transverses : un genre de décomposition spectrale Une première idée est de décomposer un flot d'Anosov le long de tores *transverses au flot*. Si Z est un champ d'Anosov sur une variété $\mathcal{M}$ construit par la méthode générale de recollement d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (P, X) ([BBY17]), alors la projection de ∂P dans $\mathcal{M}$ est une collection $\mathcal{T}$ de tores plongés dans $\mathcal{M}$, transverses à Z. En découpant $\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{T}$, on retrouve le bloc (P, X). Plus généralement, les même auteurs montrent dans [BBY15] que tout champ d'Anosov (transitif ou non) Z sur une 3-variété orientable $\mathcal{M}$ se décompose en blocs de Béguin-Bonatti-Yu (P_i, X_i) en découpant la variété $\mathcal{M}$ le long d'une collection de tores $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ plongés dans $\mathcal{M}$, incompressibles, deux à deux disjoints et non parallèles. Les tores $T_1, \dots, T_n$ séparent des ensembles invariants localement maximaux et transitifs Λ_i du flot de Z, qui sont les "plus petits" possibles, et qui ne dépendent que du champ de vecteurs Z. La décomposition (P_i, X_i) en blocs de Béguin-Bonatti-Yu est "presque unique" à équivalence orbitale près.

Cette décomposition est une sorte d'analogue pour un champ de vecteurs Anosov en dimension 3 de la *décomposition spectrale de Smale* de l'ensemble non-errant Ω d'un champ de vecteurs Axiome A non transitif en pièces basiques $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, et de l'existence de *filtrations* associés ([Sma67], [Shu87]). Malheureusement, cette décomposition semble peu utile en pratique, car elle demande de connaître la collection de tous les tores transverses plongés dans le flot d'Anosov, autrement dit il faudrait connaître au préalable la dynamique du flot, voire même sa construction en tant que recollement de blocs le long de tores transverses. En outre, un tore plongé dans un flot d'Anosov en position transverse par rapport au flot est chose peu naturelle. Par exemple, un

tore T plongé dans un flot géodésique n'est jamais transverse au flot, et même plus généralement dans un flot d'Anosov alignable penché ([Bar95a]). Un flot d'Anosov est dit *alignable penché* si l'espace des feuilles du relevé du feuilletage faible au revêtement universel est séparé, et si ce n'est pas une suspension. Cette famille de flot d'Anosov est très vaste ([Fen94], [Bar01], [BI20]).

Découpage le long de tores quasi-transverses : la décomposition JSJ modifiée À l'inverse, on peut montrer que tout tore incompressible plongé dans un (revêtement fini de) flot géodésique est isotope à un tore qui contient un nombre fini non nul d'orbites périodiques, et qui est transverse au flot en dehors de ces orbites (appelé *tore de Birkhoff* dans la littérature). Dans [Bar95b], T. Barbot montre que le même résultat est vrai pour un flot d'Anosov alignable penché. On rappelle qu'un tore est dit *incompressible* dans $\mathcal{M}$ si c'est l'image d'un plongement $f : \mathbb{T}^2 \to M$ qui induit un morphisme $f_* \colon \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(M)$ injectif.

Le travail de T. Barbot était motivé par la volonté de découper un flot d'Anosov le long de la collection de *tores JSJ* d'une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3 en pièces de Seifert et atoroïdales en bonne position par rapport au flot. Plus précisément, on rappelle le théorème de Jaco-Shalen-Johannson ([JS78], [Joh79]) qui dit que toute variété $\mathcal{M}$ (fermée orientable connexe) irréductible de dimension 3 se découpe le long d'une collection finie minimale et unique à isotopie près de tores incompressibles $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ en pièces $P_1, \dots, P_m$ telle que chaque P_i est soit atoroïdale, soit possède une fibration de Seifert. On dit que $\mathcal{T}$ la *collection de tores JSJ* de $\mathcal{M}$ et P_i les *pièces de la décomposition JSJ* de $\mathcal{M}$. On rappelle qu'une variété P (éventuellement à bord) est dite *atoroïdale* si tout tore incompressible T plongé dans P est homotope à une composante de bord de P. Une telle variété (Haken) possède une structure hyperbolique d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston ([Thu83], [Ota96], [Kap01]). On rappelle qu'une *fibration de Seifert* sur P est une fibration en cercle au dessus d'une orbifold de dimension 2 ([Hem04]). Cette décomposition consiste à séparer $\mathcal{M}$ en morceaux qui sont, en un sens, topologiquement opposés : une pièce Seifert admet souvent beaucoup de tores incompressibles, quand une pièce atoroïdale n'en a d'autres (à homotopie près) que ses éventuelles composantes de bord torique.

Toute 3-variété $\mathcal{M}$ qui porte un champ de vecteurs Anosov X est irréductible (car son revêtement universel est $\mathbb{R}^3$), et admet donc une décomposition JSJ le long de tores incompressibles. Dans [BF13a], les auteurs étudient en détails la mise en position "optimale" par rapport au champ Anosov X d'un tore incompressible plongé T dans la variété $\mathcal{M}$, supposée orientable. On dira que le tore T est *quasi-transverse* au champ X si il contient un nombre fini (éventuellement nul) d'orbites périodiques $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ du flot, est transverse à X sur le complémentaire des orbites $\mathcal{O}_*$, et l'orientation transverse donnée par le champ X sur deux composantes adjacentes de $T \setminus \mathcal{O}_*$ ne peut pas coïncider simultanément avec une orientation transverse sur le tore T (voir figure 5).

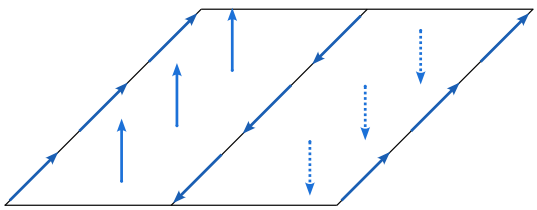


FIGURE 5 – Tore T quasi-transverse à un champ X avec deux orbites périodiques de X dans T

Ils montrent ([BF13a, Théorème 6.10]) que tout tore incompressible plongé dans une 3-

variété $\mathcal{M}$ portant champ de vecteurs Anosov X est homotope à un tore quasi-transverse à X *faiblement plongé* (plongé en dehors des orbites périodiques de X contenues dans le tore). Ce résultat permet d'avoir une *décomposition JSJ modifiée* d'un flot d'Anosov (voir [BF17, Section 2.2], pour un énoncé précis), où le défaut éventuel de plongement de la collection de tores JSJ modifiée est entièrement décrite, et qui est unique à homotopie le long du flot près.

A l'aide de ce découpage d'un flot d'Anosov en dimension 3, S. Fenley et T. Barbot ont entamé l'étude intensive des flots d'Anosov sur les variétés toroïdales ([BF13a]) et leur classification en restriction aux pièces JSJ Seifert et à certaines variétés graphées ([BF14a], [BF21], [BF22]). Soulignons que les flots d'Anosov sur les variétés atoroïdales ou en restriction aux pièces atoroïdales de la décomposition JSJ sont encore très mal compris.

Problématique de la thèse Au regard du dernier paragraphe, il est donc naturel de considérer un bloc abstrait (P, X) avec un bord ∂P *quasi-transverse* au champ de vecteurs X, et de chercher à généraliser le théorème de recollement de Béguin-Bonatti-Yu. Pour faire court, on dit que (P, X) est *bloc de construction* si c'est un bloc de Béguin-Bonatti-Yu, où les composantes de bord sont non plus transverses, mais quasi-transverses (au sens donné ci-dessus) au champ de vecteurs X. Cette définition contient formellement les blocs de Béguin-Bonatti-Yu.

Question 1. *Étant donné un bloc de construction (P, X), existe-t-il une façon de recoller les bord de P pour obtenir un flot d'Anosov ?*

Dans cette thèse, on montre qu'il existe des conditions générales suffisantes, semblables à celles du théorème de Béguin-Bonatti-Yu, pour lesquelles la réponse est oui. Notons que de tels recollement apparaissent dans la littérature comme vus précédemment, par exemple dans la chirurgie de Handel-Thurston ou dans les recollements de Clay-Pinsky. La différence avec le travail que l'on fait ici est que les blocs (P, X) de ces derniers exemples sont découpés dans le flot géodésique d'une surface hyperbolique, qui admet des coordonnées issues de la décomposition hyperbolique. L'action de la différentielle de X^t est linéaire dans ces coordonnées et hyperbolique partout, pas seulement le long des orbites du maximal invariant $\Lambda = \cap_{t\in\mathbb{R}} X^t(P)$. Le procédé de ces chirurgies est de faire en sorte que le recollement φ ne détruisent pas l'hyperbolicité déjà présente partout. Les blocs de construction abstraits ne présentent pas cette qualité : on ne sait rien de la dynamique le long des orbites du flot hors de Λ. Le recollement a donc un rôle important, c'est lui qui va créer de l'hyperbolicité le long de ces orbites.

Présentation du théorème principal

Définitions Commençons par quelques définitions. On dira que (P, X) est un *bloc de construction* si P est une variété compacte à bord, muni d'un champ X de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

i) ∂P est *quasi-transverse* à X, autrement dit ∂P contient une collection finie d'orbites périodiques $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ qui ont deux côtés dans ∂P, X est transverse à $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$, et pointe alternativement à l'intérieur de P et à l'extérieur de P sur les deux côtés d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$.

ii) L'ensemble maximal invariant $\Lambda := \cap_{t\in\mathbb{R}} X^t(P)$ est un ensemble *hyperbolique d'indice* $(1, 1)$ pour le flot de X, autrement dit il existe une décomposition $TP_{|\Lambda} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ de sous-fibrés de dimension 1, invariante par la différentielle du flot, les vecteurs de E^{uu} sont exponentiellement dilatés et ceux de E^{ss} sont exponentiellement contractés par la différentielle de X^t dans le futur.

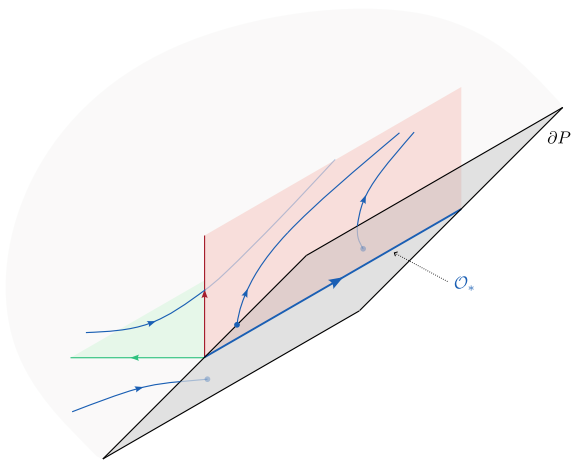


FIGURE 6 – Bord d'un bloc de construction (P, X) au voisinage d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$

Les orbites de $\mathcal{O}_*$ découpent ∂P en deux régions ouvertes, transverses au champ de vecteurs X : une sur laquelle le champ X pointe vers l'intérieur de P une sur laquelle il pointe vers l'extérieur. On les appelle respectivement *bord d'entrée* et *bord de sortie*, et on les note P^{in} et P^{out} (figure 7). Notons que la variété P n'est pas nécessairement connexe. On pourra penser

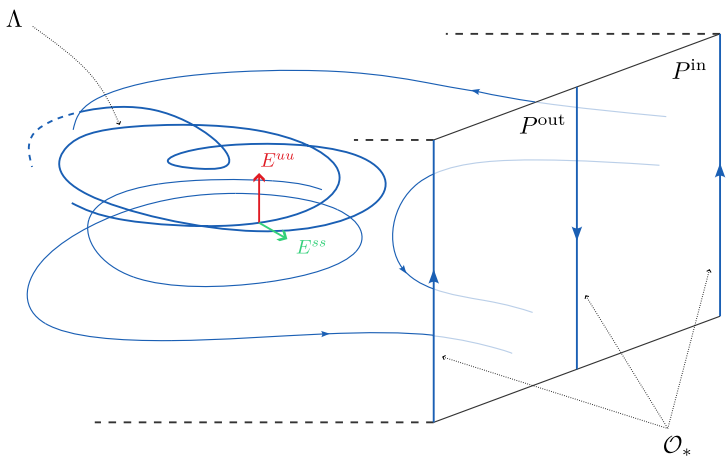


FIGURE 7 – Bord d'un bloc de construction contenant deux orbites périodiques

un bloc (P, X) comme l'union de nos pièces du jeu de construction, autrement dit comme une union d'un ou plusieurs blocs connexes que l'on veut recoller le long de leur bord.

Un *recollement de* (P, X) est une involution $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ qui identifie deux sous-ensembles disjoints de composantes connexes de ∂P, qui envoie P^{out} sur P^{in}, et les orbites orientées $\mathcal{O}_*$ sur les orbites orientées $\mathcal{O}_*$. Il est clair que ces conditions suffisent pour que l'espace quotient $P_\varphi := P/\varphi$ soit une variété lisse fermée de dimension 3, et sont nécessaires pour que le champ de vecteurs X induise un champ de vecteurs X_φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur P_φ. Dans le cas où X induit un champ de vecteurs X_φ sur P_φ, il n'y a en général aucune raison pour que le flot de X_φ soit un flot d'Anosov : le recollement peut créer par exemple un ouvert d'orbites périodiques

pour le flot de X_φ, ce qui est une obstruction évidente. Des conditions nécessaires à l'obtention d'un flot d'Anosov sont codées dans les variétés stables et instables du bloc et la façon dont on les recolle. Plus précisément, l'hyperbolicité selle de Λ implique l'existence d'une paire de laminations $(\mathcal{W}^s, \mathcal{W}^u)$ sur P qui sont respectivement les *variétés invariantes stable* et *instable* de Λ. On montre que les traces $\mathcal{W}^s \cap \partial P$ et $\mathcal{W}^u \cap \partial P$ forment une paire de laminations de dimension 1, l'une disjointe du bord de sortie P^{out} et l'autre disjointe du bord d'entrée P^{in}. Ces laminations sont disjointes sur ∂P sauf le long des orbites périodiques de X contenues dans ∂P où elles coïncident. Elles se recollent le long de ces orbites en une seule lamination de dimension 1 que l'on note $\mathcal{L} := (\mathcal{W}^s \cup \mathcal{W}^u) \cap \partial P$ et que l'on appelle la *lamination de bord* de (P, X). Si (P, X) se recolle en un champ d'Anosov X_φ sur P_φ, alors la surface ∂P se projette dans P_φ en une surface S quasi-transverse à X_φ, et tel que la projection de la paire $(\mathcal{L}, \varphi_*(\mathcal{L}))$ est une paire de sous-laminations d'une paire de feuilletages sur S, qui coïncident le long des orbites périodiques de X_φ contenues dans S, et sont transverses l'un à l'autre sur le complémentaire de ces orbites périodiques. Cette paire de feuilletages est induite par la trace des feuilletages stable et instable $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ du flot d'Anosov X_φ^t sur S. On en déduit les conditions nécessaires suivantes sur le bloc et le recollement :

i) La lamination de bord $\mathcal{L}$ se complète en un feuilletage sur ∂P. On dira que $\mathcal{L}$ est un *pré-feuilletage*. Il en découle que les composantes de bord sont des tores.

ii) La paire de lamination $(\varphi_*(\mathcal{L} \smallsetminus \mathcal{O}_*), \mathcal{L} \smallsetminus \mathcal{O}_*)$ sur $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ se complète en une paire de feuilletages transverses sur $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. On dira que ces laminations sont *fortement transverses*, et le recollement φ de (P, X) est *fortement quasi-transverse*.

Pour des raisons techniques, on aura également besoin des hypothèses (non nécessaires) suivantes.

iii) On supposera qu'aucune composante connexe du complémentaire $\partial P \smallsetminus \mathcal{L}$ n'est bordé par des feuilles compactes. On dit alors que la lamination de bord $\mathcal{L}$ est *remplissante*, ou que le bloc (P, X) est un bloc *plein*.

iv) On supposera que le maximal invariant Λ ne contient *ni attracteur ni répulseur*. On dira que (P, X) est un bloc *selle*. Cette hypothèse permet d'obtenir une forme linéarisée du flot au voisinage du maximal invariant et de contrôler l'holonomie des feuilles compactes de la lamination de bord.

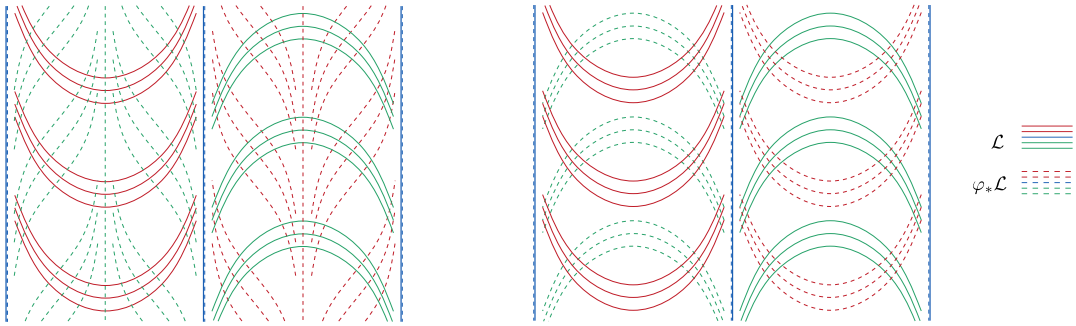


FIGURE 8 – Un exemple de recollement φ fortement quasi-transverse à gauche, et quasi-transverse mais pas fortement quasi-transverse à droite

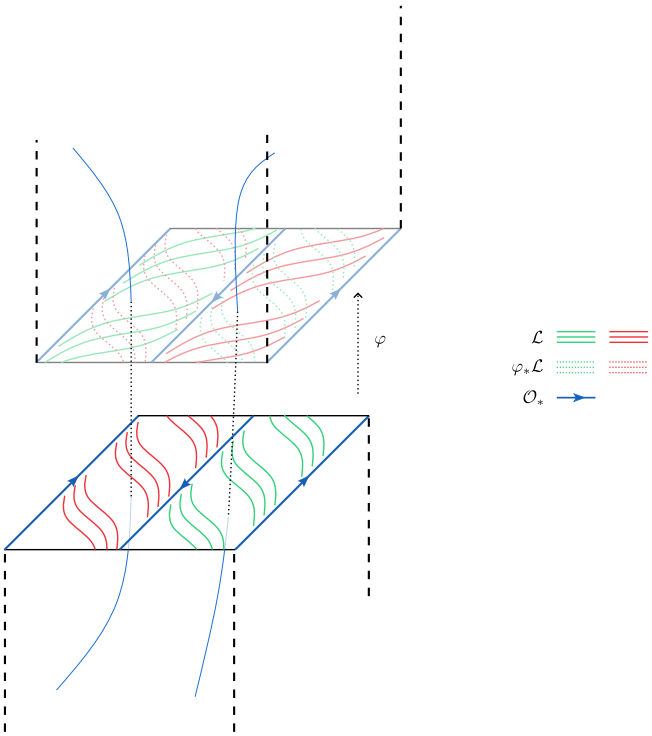


FIGURE 9 – Bloc de construction (P, X) avec lamination de bord $\mathcal{L}$ remplissante, et un recollement fortement quasi-transverse φ

Afin de montrer l'existence d'un champ d'Anosov sur la variété recollée P_φ induit par le champ initial X, on se ramène à une forme "normalisée" du bloc (P, X) par une isotopie parmi les blocs de construction. Pour un recollement fortement quasi-transverse, on veut le modifier par isotopie, et préserver le dessin de l'intersection transverse des laminations $\varphi_*\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}$. Définissons formellement la relation d'équivalence que l'on obtient. Soit (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) deux blocs de construction munis d'un recollement. On dit que les triplets sont *fortement isotopes* si

i) il existe une famille continue (P_t, X_t, φ_t) de blocs de construction munis de recollements,

ii) il existe une famille continue d'homéomorphismes $h_t \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*} \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}$ qui préservent la lamination de bord, tel que $h_0 = \mathrm{Id}$ et h_1 envoie la paire $(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*}, (\varphi_0)_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*}))$ sur la paire $(\mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{1,*}, (\varphi_1)_*(\mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{1,*}))$.

À la différence des blocs Béguin-Bonatti-Yu, on ne peut pas demander simplement une famille continue de *blocs et de recollement fortement quasi-transverses* (P_t, X_t, φ_t). La présence d'orbites périodiques contenues dans le bord fait de cette isotopie une relation d'équivalence trop rigide pour ce que l'on veut faire. Notre relation de forte isotopie ci-dessus est une version légèrement affaiblie de la relation de *forte isotopie des blocs et recollement de Béguin-Bonatti-Yu* ([BBY17]) dans le cas où la collection $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques du champ de vecteurs contenues dans le bord du bloc est vide, à cause de la régularité seulement continue de la famille h_t. Cette relation de forte isotopie de triplet est néanmoins suffisante, car elle garantie que :

- les variétés quotients P_0/φ_0 et P_1/φ_1 sont homéomorphes ;

- le dessin de l'intersection des laminations reste le même ;
- il existe des petits prolongements des blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) qui sont orbitalement équivalents.

Le dessin de l'intersection transverse des laminations $\varphi_*\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}$ est une donnée cruciale pour l'analyse de la dynamique du nouveau champ X_φ. C'est un élément clé pour construire des champs d'Anosov X_i non orbitalement équivalents sur une variété fermée $\mathcal{M}$, en recollant les bords d'un bloc (P, X) par des recollements φ_i isotopes, mais dont les dessins d'intersections transverses des laminations $\mathcal{L}$ et $\varphi_*\mathcal{L}$ ne sont *pas équivalents* ([BBY17], [CP20]). À l'inverse, c'est aussi l'élément clé du *théorème d'unicité* d'un flot d'Anosov obtenu par recollement d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu. Dans [BY19], F. Béguin et B. Yu montrent que si Z_0 et Z_1 sont deux champs de vecteurs Anosov transitifs, respectivement obtenus par recollement d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (P_0, X_0) et (P_1, X_1) via un recollement φ_0 et φ_1, et tel que les triplets associés sont fortement isotopes, alors les champs Z_0 et Z_1 sont orbitalement équivalents. Cette question n'est pas traitée dans cette thèse par manque de temps, mais il semble naturel que ce résultat d'unicité se transpose au cas où les bords des blocs sont quasi-transverses au champ de vecteurs. Plus précisément, on conjecture :

Conjecture 1. *Soit (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) deux blocs de constructions munis de recollement tel que les triplets sont fortement isotopes. Pour $i = 0, 1$, on suppose que X_i induit un champ de vecteurs Z_i de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété fermée $\mathcal{M}_i := P_i/\varphi_i$, et tel que $\mathcal{M}_i$ est orientable, et Z_i est un champ de vecteurs Anosov transitif. Alors les champs Z_0 sur $\mathcal{M}_0$ et Z_1 sur $\mathcal{M}_1$ sont orbitalement équivalents.*

Théorème de recollement On montre le théorème de recollement suivant.

Théorème A (Théorème de recollement)**.** *Soit (P, X) un bloc de construction selle plein, et φ un recollement fortement quasi-transverse de (P, X). Il existe (P_1, X_1, φ_1) un triplet fortement isotope à (P, X, φ) tel que X_1 induit un champ de vecteurs Anosov sur la 3-variété fermée $P_{\varphi_1} := P_1/\varphi_1$.*

Ce théorème est un analogue parfait du théorème de recollement de Béguin-Bonatti-Yu ([BBY17, Théorème 1.5]). Il l'élargit, car englobe en particulier les recollements de Béguin-Bonatti-Yu (dans le cas où l'ensemble $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques de X contenues dans ∂P est vide), les chirurgies de Handel-Thurston et ses généralisations. Il permet pour finir de considérer les blocs de constructions les plus naturels pour les flots d'Anosov en dimension 3, au sens où la position quasi-transverse est la position "optimale" d'une surface fermée incompressible plongée dans un flot d'Anosov d'après les travaux de T. Barbot et S. Fenley évoqués ci-dessus. La preuve de ce théorème est une généralisation de celle de Béguin-Bonatti-Yu. Bien que la preuve reprenne les même idées, la généralisation est loin d'être gratuite, et s'avère assez technique.

Critère de transitivité On montre un critère de transitivité d'un champ de vecteurs Anosov X_φ sur une variété fermée P_φ obtenu par recollement d'un bloc de construction (P, X) par un recollement φ. On définit un graphe orienté $G(P, X, \varphi)$, analogue du graphe de Smale, associé à un bloc de construction (P, X) et à un recollement φ de (P, X). Les sommets sont les pièces basiques Λ_i de l'ensemble maximal invariant hyperbolique Λ de (P, X), et il existe une arête orientée de Λ_i et Λ_j si et seulement si $W^u(\Lambda_i)$ intersecte $W^s(\Lambda_j)$, ou $\varphi(W^u(\Lambda_i))$ intersecte $W^s(\Lambda_j)$.

Proposition B (Proposition 6.4.2)**.** *Si le graphe $G(P, X, \varphi)$ est fortement connexe, alors le champ d'Anosov X_φ sur P_φ est transitif.*

Applications

On étudie ensuite les applications de ce théorème.

Bloc de construction avec lamination de bord prescrite Dans [BBY17, Théorème 1.10], il est montré que tout *feuilletage Morse-Smale* sur le tore peut être réalisé (à équivalence topologique près) en tant que feuilletage de bord d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (P, X) *transitif attractif*. Si (P, X) est un bloc de construction, et $\mathcal{L}$ la lamination de bord de P, alors $\mathcal{L}$ est une généralisation des laminations de type Morse-Smale sur une surface. Elle contient un nombre fini de feuilles compactes $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, et chaque feuille non compacte s'accumule sur une feuille compacte. Parmi les feuilles compactes, on distingue les feuilles compactes induites par les orbites périodiques de X dans ∂P, que l'on appelle *feuilles compactes marquées*. Elles ont la particularité d'avoir une holonomie contractante d'un côté et dilatante de l'autre, quand les autres ont une holonomie contractante ou dilatante de chaque côté. En général, une lamination $\mathcal{L}$ sur une surface S qui vérifie de telles propriétés sera dite *quasi-Morse-Smale*. On montre la proposition analogue suivante. On dit qu'un bloc (P, X) est *transitif* si il existe une orbite dense dans l'ensemble maximal invariant Λ. On dit que deux feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur des surfaces orientées sont *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme qui préserve l'orientation et envoie les feuilles de $\mathcal{F}_1$ sur les feuilles de $\mathcal{F}_2$.

Proposition C. *Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages quasi-Morse-Smale sur un tore orienté S_1 et un tore orienté S_2 respectivement, tel que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont un même nombre non nul de feuilles marquées. Alors il existe (P, X) un bloc de construction selle plein transitif, avec P connexe orienté, tel que ∂P est l'union de deux tores quasi-transverses T_1 et T_2, et la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ restreinte à T_i se complète en un feuilletage topologiquement équivalent à $\mathcal{F}_i$.*

On montre également un résultat de réalisation d'une paire de *feuilletages quasi-transverses* sur le tore en tant que trace des feuilletages stables et instables sur un tore quasi-transverse plongé dans un flot d'Anosov transitif. Plus précisément, si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est une paire de feuilletages quasi-Morse-Smale sur le tore $\mathbb{T}^2$ orienté, tel que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont tangents les long de leur feuilles marquées et transverses l'un à l'autre sur le complémentaire des feuilles marquées, on dit qu'ils sont *quasi-transverses* (voir figure 10). Alors on peut associer à la paire une donnée combinatoire finie $\sigma = \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, qui encode l'ordre (cyclique) des feuilles compactes de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur $\mathbb{T}_2$, et le "type" d'holonomie de chacune, parmi les 4 choix possibles : contractant-contractant, dilatant-dilatant, contractant-dilatant, ou dilatant-contractant. On dit que σ est un *type combinatoire du bi-feuilletage quasi-transverse*. On montre

Proposition D. *Soit σ un type combinatoire de bi-feuilletage quasi-transverse. Il existe un champ de vecteurs Anosov transitif Z sur une 3-variété $\mathcal{M}$ orientée et un tore incompressible T plongé dans $\mathcal{M}$, quasi-transverse à Z, tel que la trace des feuilletages stables et instables $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur T induit un bi-feuilletage quasi-transverse $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ sur T de type combinatoire σ.*

Plonger un bloc de construction dans un flot d'Anosov On montre que tout bloc orientable selle plein se plonge dans une variété fermée portant un champ d'Anosov.

Proposition E. *Pour tout bloc de construction (P, X) orientable selle plein (transitif), il existe un champ de vecteurs Anosov Z (transitif) sur une variété fermée $\mathcal{M}$ de dimension 3 orientable, tel que (P, X) est plongé dans $(\mathcal{M}, Z)$. Plus précisément, il existe une collection de tores incompressibles $\mathcal{T}$ plongés dans $\mathcal{M}$, quasi-transverses à Z, et qui découpent dans $\mathcal{M}$ une sous-variété compacte difféomorphe à P tel que la restriction de Z sur P est orbitalement équivalente à X.*

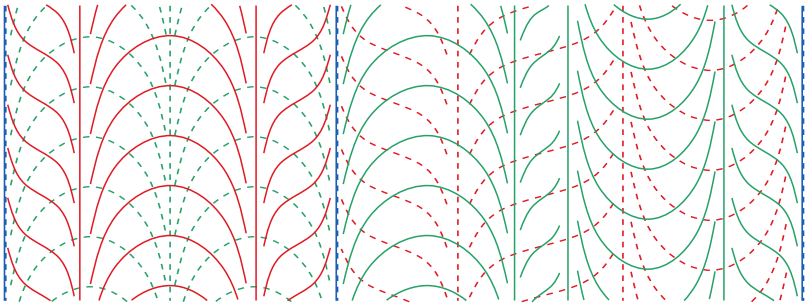


FIGURE 10 – Un exemple de bi-feuilletage quasi-transverse (compliqué) sur le tore

Il s'agit de construire un bloc (Q, Y) selle plein transitif qui se recolle avec (P, X) le long du bord pour former un flot d'Anosov en dimension 3 transitif. On utilise la proposition C afin de construire un bloc (Q, Y) tel que la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ de (Q, Y) se recolle sur une lamination fortement quasi-transverse à la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ de (P, X).

Réalisabilité de type géométrique Le *type géométrique d'une partition de Markov*, introduit par C. Bonatti et R. Langevin dans [BLJ98], est une donnée combinatoire finie $\mathscr{T}$ qui code la géométrie de l'intersection des rectangles de la partition de Markov $\mathcal{R}$ sous l'action de la dynamique. Dans [BB02], F. Béguin et C. Bonatti montrent que cette donnée caractérise le *germe* d'un champ de vecteurs X sur un compact invariant K *hyperbolique saturé* sans attracteur ni répulseur. Ils montrent que le germe de X le long de K détermine une unique (à équivalence orbitale près) variété orientable à bord U, muni d'un champ de vecteurs Y transverse au bord ∂U, qui réalise le germe de X le long de K, autrement dit si Λ est le maximal invariant de Y dans U, alors Y est X sont orbitalement équivalent sur un voisinage de Λ et de K respectivement, et cette variété à bord est en un sens "la plus simple" topologiquement parlant. Remarquons que c'est en particulier un bloc de construction, et on parlera alors de *bloc de construction modèle*. La question de la réalisabilité d'un *type géométrique abstrait* $\mathscr{T}$ est traitée dans [BBV99, Théorème 0.1], où les auteurs construisent, pour un type géométrique abstrait donné $\mathscr{T}$, un bloc modèle (U, Y) dont le maximal invariant admet une partition de Markov $\mathcal{R}$ de type géométrique $\mathscr{T}$, qui est unique à équivalence orbitale près. On parle alors du *modèle du type géométrique* $\mathscr{T}$. On s'intéresse dans ce mémoire à la question analogue de la réalisabilité d'un type géométrique abstrait $\mathscr{T}$ par un bloc de construction *selle plein*, en tant que type géométrique d'une partition de Markov du maximal invariant. On montre le critère nécessaire et suffisant suivant :

Proposition F. *Soit un type géométrique abstrait $\mathscr{T}$. Il existe un bloc de construction orientable (P, X) selle plein, qui possède une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$ si et seulement si le modèle (U, Y) du type géométrique $\mathscr{T}$ vérifie les conditions suivantes, où $\mathcal{L}^s_Y$ et $\mathcal{L}^u_Y$ désignent les laminations sur le bord d'entrée U^{in} et le bord de sortie U^{out}, et $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}^s \cup \mathcal{L}^u$ désigne la lamination de bord sur ∂U :*

1) ∂U est une union de tores et de sphères, chaque sphère contient exactement deux disques D_i et D_j bordés par deux feuilles compactes distinctes de $\mathcal{L}_Y$ et d'intérieurs disjoints de $\mathcal{L}_Y$.

2) La lamination $\mathcal{L}^s_Y$ est un pré-feuilletage sur le complémentaire $U^{\text{in}} \setminus \cup_i D_i$.

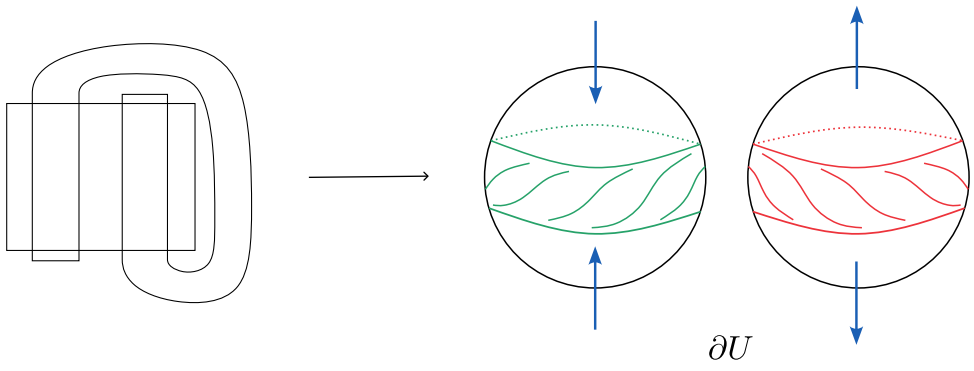


FIGURE 11 – Le bord du modèle (U, Y) du faux fer à cheval avec la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$

Un tel bloc (P, X) est alors unique à isotopie près. De plus, si on note $\mathcal{L}_X^s$ et $\mathcal{L}_X^u$ la lamination sur le bord d'entrée P^{in} et la lamination sur le bord de sortie P^{out}, et $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbites périodiques de X contenues dans ∂P, alors

- *la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$ est topologiquement équivalente à la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^s$ à $U^{\text{in}} \setminus \cup_i D_i$,*
- *la lamination $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{out}}}$ est topologiquement équivalente à la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^u$ à $U^{\text{out}} \setminus \cup_i D_i$.*

On utilisera une correspondance entre les blocs de construction et les blocs de Béguin-Bonatti-Yu donnée par un ensemble de chirurgies de type attachement et suppression d'anses. On peut vérifier les deux conditions de la proposition F à partir du type géométrique $\mathscr{T}$ à l'aide d'un algorithme simple de recollement des rectangles de la partition de Markov associée $\mathcal{R}$, qui permet de construire la surface de bord du modèle U et la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$. Cette opération est décrite dans [BBV99]. La figure 11 montre que le type géométrique du faux fer à cheval satisfait la proposition F.

Complémentaire d'orbite périodique en tant que pièce JSJ d'un Anosov transitif La proposition suivante permet de réaliser des complémentaires d'orbites périodiques de flot d'Anosov ou pseudo-Anosov en tant que pièces JSJ de champ d'Anosov transitif. On rappelle qu'un flot pseudo-Anosov est une généralisation d'un flot d'Anosov où l'on autorise un nombre fini de singularité des feuilletages stables et instables de type p-prong, $p \geq 3$ (voir par exemple [Cal07]).

Proposition G. *Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ une collection finie d'orbites périodiques d'un champ pseudo-Anosov transitif X sur une 3-variété orientable $\mathcal{M}$, contenant l'ensemble des orbites périodiques singulières de X. On suppose que le complémentaire $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$ est atoroïdal. Alors il existe une 3-variété orientable $\mathcal{N}$ munie d'un champ de vecteurs Anosov transitif Y tel que la décomposition JSJ de $\mathcal{N}$ est formée de deux pièces atoroïdales, toutes deux homéomorphes à $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$, et d'une pièce de Seifert périodique.*

Une pièce JSJ de type Seifert dans une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3 portant un champ de vecteurs Anosov X est dite *périodique* si il existe une fibration de Seifert pour laquelle la fibre régulière est homotope à un multiple d'une orbite périodique du flot de X. L'élément principal de cette preuve est une méthode dite de *Double-éclatement – Excision – Recollement*, analogue

"quasi-transverse" de la méthode *Blow-up – Excise – Glue* de [BBY17] et qui permet de réaliser des blocs de construction plein par "éclatement" d'une orbite périodique de flot d'Anosov ou pseudo-Anosov, et a l'avantage de ne pas créer d'attracteur ni de répulseur. En particulier, signalons que le flot d'Anosov Y^t sur les deux copies de $\mathcal{M}\smallsetminus\Gamma$ dans $\mathcal{N}$ est obtenu par éclatement du flot X^t sur les orbites Γ. On donne comme corollaire de cette proposition un critère pour que le complémentaire d'un *noeud hyperbolique* dans $\mathbb{S}^3$ se réalise en tant que pièce JSJ atoroïdale d'un flot d'Anosov transitif, et on décrit une construction par *plombage de Hopf* qui donne une famille de noeuds vérifiant ce critère.

Recollement de blocs découpés dans un flot d'Anosov alignable penché On montre un résultat qui permet de recoller des pièces découpées le long d'une collection de tores incompressibles dans un flot d'Anosov alignable penché sur une 3-variété toroïdale. Un flot d'Anosov sur une 3-variété $\mathcal{M}$ est dit *alignable* si l'espace des feuilles des relevés des feuilletages stable et instable au revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$. On dit qu'il est *alignable penché* s'il n'est pas orbitalement équivalent à une suspension. On supposera de plus que la variété est orientable et que les feuilletages stables et instables sont transversalement orientés. Dans [Bar95b], T. Barbot montre qu'une collection de tores incompressibles, deux à deux non homotopes, plongés dans un flot d'Anosov alignable penché en dimension 3 est isotope à une collection de tores quasi-transverses deux à deux disjoints, et cette collection est unique à homotopie le long des orbites. Il suit que, quitte à faire une isotopie, toute collection de tores incompressibles plongés dans un flot d'Anosov alignable penché en dimension 3 découpe dans la variété un bloc de construction (P, X). Toute union de composantes connexes d'un tel bloc est appelé un *bloc de flot d'Anosov alignable penché*. On montre :

Proposition H. *Soit (P, X) et (P', X') deux blocs de flots d'Anosov alignables penchés (transitifs). On note P^{out} le bord de sortie de (P, X) et P'^{in} le bord d'entrée de (P', X'). On suppose qu'il existe un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ qui envoie les orbites périodiques orientées de X dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de X' dans $\partial P'$, le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}, et qui renverse l'orientation. Alors il existe un champ de vecteurs Anosov (transitif) Z sur une 3-variété fermée orientable $\mathcal{M}$ tel que :*

1) *La variété $\mathcal{M}$ est homéomorphe à $(P \cup P')/\varphi$,*

2) *Le champ de vecteurs Z est orbitalement équivalent au champ de vecteurs X sur P et X' sur P' (où P et P' sont vues plongées dans $\mathcal{M}$).*

On donnera un critère simple pour l'existence d'un tel recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$: il faut et il suffit d'avoir un appariement des composantes de bord de (P, X) et (P', X') contenant le même nombre d'orbites périodiques, et qui satisfont un critère d'orientation compatible. Remarquons que cet énoncé ne nécessite aucune hypothèse sur les laminations de bord. Cela découle du type particulier des feuilletages induits par les feuilletages stables et instables de Z sur un tore quasi-transverse T plongé dans un flot d'Anosov alignable penché : les feuilletages sont sans feuilles compactes autre que les orbites périodiques contenues dans le bord, et sans composantes de Reeb. C'est une conséquence d'un résultat de T. Barbot ([Bar95b]).

Toute *pièce de flot géodésique* ou de revêtement fini de flot géodésique est un bloc de flot d'Anosov alignable penché. Ce résultat généralise alors les recollements de type Handel-Thurston ou Clay-Pinsky, et les généralisations par T. Barbot et S. Fenley et se débarrasse de la contrainte de *positivité* sur la classe d'isotopie du recollement. Notons toutefois qu'il permet d'utiliser des blocs beaucoup plus généraux que des pièces de flot géodésique, et qui ne sont pas découpés dans le même flot d'Anosov. Rappelons que les flots d'Anosov alignables penchés forment une

famille riche de flots d'Anosov. S. Fenley montre dans [Fen94] que tout flot d'Anosov obtenu par des chirurgies de Dehn-Goodman-Fried *d'orientations cohérentes* sur une suspension ou un flot géodésique est alignable penché. C. Bonatti et I. Iakovoglou ont montré dans [BI20] que si X est un champ d'Anosov obtenu par chirurgie de Dehn-Goodman-Fried à partir d'une suspension, alors toute chirurgie sur une orbite périodique ϵ-dense de X produit un flot d'Anosov alignable penché.

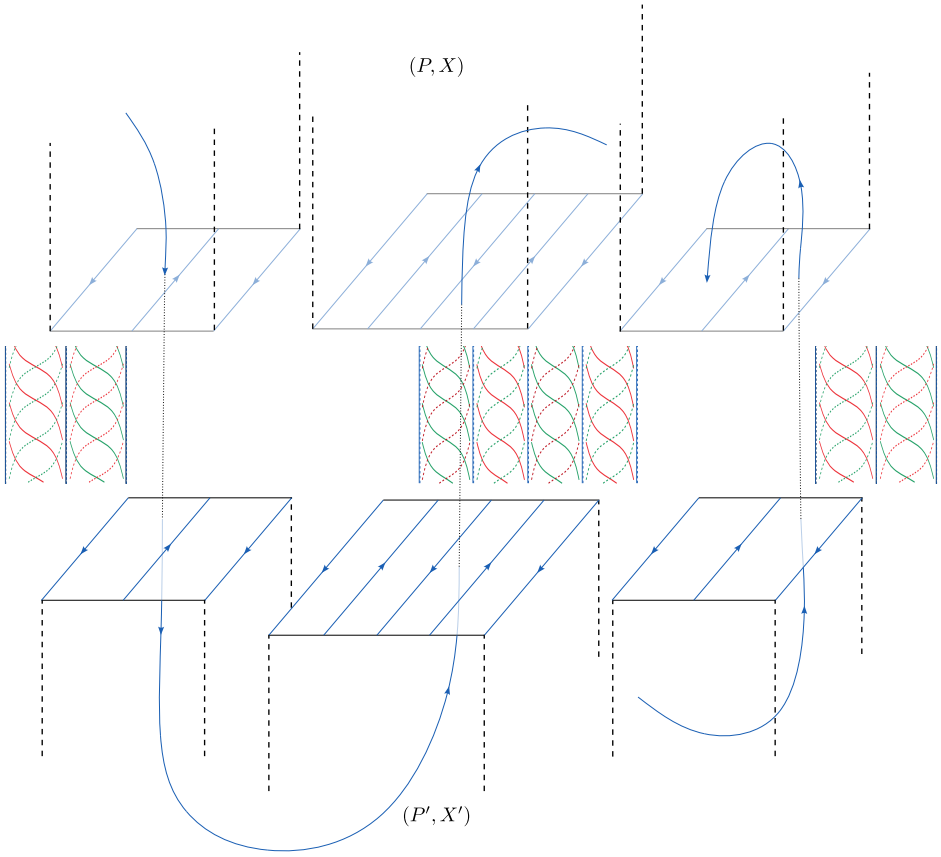


FIGURE 12 – Construction du champ d'Anosov de la proposition H par recollement de deux blocs de flot d'Anosov alignables penché

Organisation de la thèse

La thèse est organisé de la façon suivante. La première partie est consacrée à la preuve du théorème A. Dans le chapitre 1 préliminaire, on définit formellement les blocs de construction (P, X), les recollements φ et les relations d'équivalences entre de tels objets. Dans le chapitre 2, on montre que l'on peut mettre un triplet candidat du théorème (P, X, φ) sous une forme "normalisée". Dans le chapitre 3, on étudie les propriétés d'hyperbolicité de l'application de passage du flot du bord d'entrée au bord de sortie. Dans le chapitre 4, on montre comment "diffuser l'hyperbolicité" par un processus de changement de coordonnées sur le bord de P. Dans le chapitre 5, on montre que l'on peut utiliser ce changement de coordonnées pour modifier le recollement φ de sorte à créer de l'hyperbolicité le long des nouvelles orbites récurrentes du flot obtenu après recollement, et ceci de façon compatible avec l'hyperbolicité naturelle du flot initial. Dans le

chapitre 6, on montre que pour un tel choix de recollement, le flot induit par le flot initial sur la variété recollée est Anosov, ce qui achève la preuve du théorème A. On montre aussi le critère de transitivité (proposition B).

La seconde partie est consacrée aux applications de ce théorème. Dans le chapitre 7, on montre les propositions C et D. Dans le chapitre 8, on montre la proposition E. Dans le chapitre 10, on montre la proposition G. Dans le chapitre 9, on montre la proposition F. Pour finir, on montre la proposition H dans le chapitre 11.

Première partie

Théorème de recollement

Chapitre 1

Blocs de construction et recollements

1.1 Blocs de construction

Définition 1.1.1 (Surface quasi-transverse à un champ de vecteurs)**.** Soit S une surface transversalement orientable plongée dans une variété M, éventuellement à bord, de dimension 3, munie d'un champ de vecteurs X. On dit que S est *quasi-transverse au champ de vecteurs* X si

1) S contient une collection finie d'orbites périodiques du champ X que l'on note $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$,

2) X est transverse à $S \setminus \mathcal{O}_*$,

3) chaque orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ admet deux côtés locaux distincts dans S et les orbites de X traversent ces deux côtés dans deux directions opposées (remarque 1.1.2).

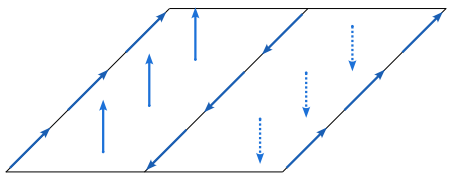


FIGURE 1.1 – Un tore quasi-transverse à un champ de vecteurs X contenant deux orbites périodiques

Remarque 1.1.2. Un *côté local* de $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ dans S est une composante connexe de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{O}_i$ où $\mathcal{V}$ est un petit voisinage tubulaire de $\mathcal{O}_i$ dans S. Un tel voisinage $\mathcal{V}$ est a priori soit un anneau, soit un ruban de Moebius. L'item 3 de la définition 1.1.1 signifie formellement que le complémentaire $\mathcal{V} \setminus \mathcal{O}_*$ admet deux composantes connexes C et C' contenues dans $S \setminus \mathcal{O}_*$ (donc $\mathcal{V}$ est un anneau), et l'orientation transverse induite par le champ X sur C et C' ne peut pas coïncider simultanément avec une orientation transverse de la surface S.

Remarquons qu'une surface S transverse au champ X est une surface quasi-transverse avec $\mathcal{O}_* = \varnothing$. On note X^t le flot engendré par le champ de vecteurs X. On rappelle qu'une partie $\Lambda \subset P$ compacte invariante par le flot de X est dite *hyperbolique d'indice* $(1,1)$ pour X si il existe une décomposition X^t-invariante de l'espace tangent de P au dessus de Λ en une somme

$TP_{|\Lambda} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ de sous-fibrés de dimension 1, et des constantes $\lambda > 1$, et $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|(X^t)_* v\| &\geq C\lambda^t \|v\|, \quad \forall v \in E^{uu}, \quad \forall t \geq 0, \\ \|(X^t)_* v\| &\geq C\lambda^{-t} \|v\|, \quad \forall v \in E^{ss}, \quad \forall t \leq 0. \end{aligned}$$

pour une métrique riemannienne sur P.

Définition 1.1.3 (Bloc de construction)**.** Soit P une une variété à bord de dimension 3 munie d'un champ de vecteurs X de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que le couple (P, X) est un *bloc de construction* (ou plus simplement un *bloc*) si

1) Le bord ∂P est quasi-transverse au champ de vecteurs X,

2) L'ensemble maximal invariant du flot de X dans P, que l'on note $\Lambda := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(P)$, est un ensemble hyperbolique d'indice $(1, 1)$ pour le flot de X.

Remarque 1.1.4. La variété P n'est pas nécessairement connexe. On pourra penser un bloc (P, X) comme l'union de nos pièces du jeu de construction, autrement dit comme une union d'un ou plusieurs blocs connexes que l'on veut recoller le long de leur bord.

Remarque 1.1.5. Soit (P, X) est un bloc de construction, $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, et Λ le maximal invariant de X dans P.

- Si C et C' sont deux composantes connexes de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ adjacentes, alors le champ de vecteurs X pointe vers l'intérieur de P sur l'une des deux composantes et vers l'extérieur de P sur l'autre.

- Dans le cas où la collection $\mathcal{O}_*$ est vide, le bord ∂P est transverse au champ de vecteurs X on retrouve la définition d'un *bloc hyperbolique* au sens de [BBY17, Définition 3.1 et Définition 3.2]. On dira alors que (P, X) est un *bloc de Béguin-Bonatti-Yu*. Dans ce cas le maximal invariant Λ est inclus à l'intérieur de P, ce qui n'est plus vrai si la collection $\mathcal{O}_*$ est non vide.

- On dira que $(\tilde{P}, \tilde{X})$ est un *prolongement* de (P, X) si $\tilde{P}$ est une variété de dimension 3, $\tilde{X}$ un champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{P}$, et il existe un plongement $h \colon P \to \tilde{P}$ qui envoie le champ de vecteurs X sur le champ de vecteurs $\tilde{X}$ restreint à $h(P)$, et tel que $h(\Lambda) \subset \operatorname{int} \tilde{P}$.

Définition 1.1.6 (Bord d'entrée et bord de sortie d'un bloc de construction)**.** Soit (P, X) un bloc de construction et $\mathcal{O}_*$ l'ensemble des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. On rappelle que le champ X est transverse à $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$.

- On appelle le *bord d'entrée* de (P, X), et on note P^{in}, le sous-ensemble de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ où le champ de vecteurs X pointe vers l'intérieur de P.

- On appelle le *bord de sortie* de (P, X), et on note P^{out}, le sous-ensemble de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ où le champ de vecteurs X pointe vers l'extérieur de P.

On renvoie à la figure 1.2.

1.2 Lamination de bord

Soit (P, X) un bloc de construction, et $\Lambda := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(P)$ l'ensemble maximal invariant. On rappelle que Λ est un ensemble hyperbolique d'indice $(1, 1)$ pour le flot de X. Nous allons étudier un certain nombre de propriétés qui en découlent. On renvoie à [HP69] pour une référence générale.

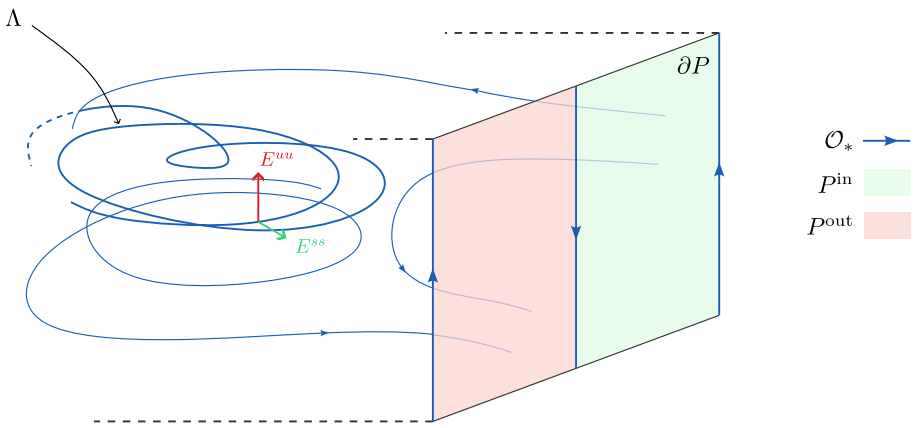


FIGURE 1.2 – Un bloc de construction (P, X)

Variétés invariantes

- La *variété stable forte* d'un point $p \in \Lambda$ est l'ensemble

$$\mathcal{W}^{ss}(p) = \{q \in P \mid \operatorname{dist}(X^t(p), X^t(q)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

  C'est une courbe $\mathcal{C}^1$, tangente à E^{ss} en p. La variété instable forte $\mathcal{W}^{uu}(p)$ est la variété stable forte de p pour le flot de $-X$.

  La *variété stable* (faible) $\mathcal{W}^s(p)$ d'un point $p \in \Lambda$ est l'union des variétés stables fortes des points de l'orbite de p. C'est une surface $\mathcal{C}^1$-immergée injectivement, invariante par le flot pour les temps positifs et négatifs tant que l'orbite est bien définie. La *variété instable* (faible) d'un point $p \in \Lambda$ est la variété stable faible de p pour le flot de $-X$.

- L'ensemble $\mathcal{W}^s(\Lambda) := \{p \in P \mid \operatorname{dist}(X^t(p), \Lambda) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ est une lamination de dimension deux dont les feuilles sont les variétés stables des points de Λ. Les points de $\mathcal{W}^s = \mathcal{W}^s(\Lambda)$ sont les points dont l'orbite par le flot est définie pour tous les temps positifs. De même, l'ensemble $\mathcal{W}^u(\Lambda) := \{p \in P \mid \operatorname{dist}(X^t(p), \Lambda) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\}$ est une lamination de dimension deux dont les feuilles sont les variétés instables des points de Λ. Les points de $\mathcal{W}^u = \mathcal{W}^u(\Lambda)$ sont les points dont l'orbite par le flot est définie pour tous les temps négatifs. Les laminations $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ s'intersectent transversalement le long des orbites du flot, et l'intersection $\mathcal{W}^s \cap \mathcal{W}^u$ est égale à l'ensemble maximal invariant Λ, à savoir les points dont l'orbite est toujours définie.

- Si $\mathcal{O}$ est une orbite périodique de X, on appelle les *valeurs propres de* $\mathcal{O}$ les valeurs propres de la différentielle en $p \in \mathcal{O}$ de l'application de premier retour du flot de X sur une section locale intersectant $\mathcal{O}$ en un unique point p.

  Une feuille de $\mathcal{W}^s$ (respectivement $\mathcal{W}^u$) est difféomorphe

  - soit à un cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ si elle contient une orbite périodique dont la valeur propre contractante (respectivement dilatante) est positive,
  - soit à un ruban de Moebius si elle contient une orbite périodique dont la valeur propre contractante (respectivement dilatante) est négative,

– soit à un plan $\mathbb{R}^2$ si elle ne contient aucune orbite périodique.

- La *variété stable locale* d'un point p est définie pour un $\epsilon > 0$ assez petit par l'ensemble

$$\mathcal{W}^s_{\text{loc}}(p) = \{q \mid \text{dist}(X^t(p), X^t(q)) < \epsilon,\ \forall t \geq 0\}$$

C'est un disque centré en p inclus dans la variété stable globale $\mathcal{W}^s(q)$. La *variété stable forte locale* $\mathcal{W}^{ss}_{\text{loc}}(p)$ est l'intersection $\mathcal{W}^{ss}(p) \cap \mathcal{W}^s_{\text{loc}}(p)$. C'est un arc centré en p. La variété instable (forte) locale d'un point est la variété stable (forte) locale de ce point pour le flot de $-X$.

En chaque point $p \in \Lambda$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_p$ de p tel que pour tout $q, r \in \mathcal{U}_p$, l'intersection $\mathcal{W}^{ss}_{\text{loc}}(q) \cap \mathcal{W}^u_{\text{loc}}(r)$ est non vide. On dit que $\mathcal{U}_p$ est *ouvert de produit local en* p. On rappelle que le maximal invariant Λ intersecte le bord ∂P le long de la collection $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques contenues dans P. Si $p \in \Lambda \cap \partial P$, ces remarques sont valables dans un prolongement du bloc (P, X), ce que l'on considérera toujours lorsque l'on parle d'ouvert de produit local en $p \in \partial P$.

- Si $\mathcal{O}$ est une orbite périodique dont les valeurs propres sont positives et $\mathcal{V}$ un voisinage tubulaire assez petit, les variétés invariantes locales sont des anneaux et leur union $\mathcal{W}^s_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \cup \mathcal{W}^u_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ disconnecte alors le voisinage $\mathcal{V}$ en quatre ouverts, que l'on appelle les *cadrans*. Deux cadrans *opposés* sont deux cadrans C_1 et C_2 dont l'intersection des bords est réduit à l'orbite périodique $\mathcal{O}$. Deux cadrans qui ne sont pas opposés sont dits *adjacents*.

Dans le cas où $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$ est une orbite périodique contenue dans ∂P, ces remarques sont valables dans un prolongement du bloc, ce que l'on considérera toujours lorsque l'on parle des variétés invariantes et des cadrans de $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$.

- Un *voisinage linéarisant* d'une orbite périodique $\mathcal{O}$ de X est un voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}$ sur lequel le flot de X est (localement) orbitalement équivalent au flot de suspension de l'application linéaire diagonale $(x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y)$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $0 < |\lambda| < 1$ et $|\mu| > 1$. Toute orbite périodique hyperbolique possède un voisinage linéarisant. Un système de coordonnée (de classe $\mathcal{C}^1$) $\xi = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{V}$ dans lequel le flot est linéaire est un *système de coordonnées linéarisant de* $\mathcal{O}$.

Dans le cas où $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$ est une orbite périodique contenue dans ∂P, ces remarques sont valables dans un prolongement du bloc, ce que l'on considérera toujours lorsque l'on parle de voisinage linéarisant de $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$.

Fait 1.2.1. *Soit (P, X) un bloc de construction et $\mathcal{O}$ une orbite périodique de X contenue dans ∂P. Les valeurs propres de $\mathcal{O}$ sont positives et ∂P traverse deux cadrans opposés de $\mathcal{O}$.*

Démonstration du fait 1.2.1. Soit A un voisinage tubulaire de $\mathcal{O}$ dans ∂P. D'après l'item 3 de la définition 1.1.1 d'une surface quasi-transverse, le voisinage A est un anneau. Soit $p \in \mathcal{O}$ et on considère des coordonnées (x, y, θ) de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de p (dans un prolongement $(\tilde{P}, \tilde{X})$ du bloc) dans laquelle l'orbite $\mathcal{O}$ coïncide avec $x = y = 0$ et les variétés stables et instables de $\mathcal{O}$ sont respectivement redressées sur $y = 0$ et $x = 0$. Au point p, le plan tangent à A est transverse à au moins l'un des deux plans $x = 0$ et $y = 0$. Supposons pour fixer les idées qu'il est transverse à $x = 0$. Comme A contient l'orbite périodique $\mathcal{O} : x = y = 0$, on en déduit qu'au voisinage de p, A s'écrit comme un graphe lisse $y = \phi(x, \theta)$, et les deux composantes connexes de $A \setminus \mathcal{O}$ correspondent à $x < 0$ et $x > 0$. Les orbites dans un voisinage de $\mathcal{W}^s(\mathcal{O}) \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O})$ entrent dans un voisinage de p près de la variété instable $y = 0$ et sortent dans un voisinage de p près de la variété stable $x = 0$. Ainsi, là où $\phi > 0$, ces orbites passent de l'hypographe de ϕ à l'épigraphe

de ϕ, et là où $\phi < 0$, elles passent de l'épigraphe à l'hypographe de ϕ. Or on sait que $A \setminus \mathcal{O}$ est transverse aux orbites de $\tilde{X}$ et que les orbites traversent A dans deux sens différents d'un côté et de l'autre de $\mathcal{O}$ par définition d'une surface quasi-transverse (définition 1.1.1). Par conséquent, quitte à remplacer la coordonnée y par $-y$, on a $\phi(x,\theta) < 0$ pour $x < 0$ et $\phi(x,\theta) > 0$ pour $x > 0$ (figure 1.3). Autrement dit, au voisinage de p, l'anneau A est topologiquement transverse à la variété stable de $\mathcal{O}$, et ceci est vrai pour tout point p. On en déduit que $\mathcal{W}^s_{\text{loc}} \setminus \mathcal{O}$ est formé de deux composantes connexes situées de part et d'autre de l'anneau A. Donc $\mathcal{W}^s_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ est un anneau. Le raisonnement est le même pour $\mathcal{W}^u_{\text{loc}}(\mathcal{O})$. On en déduit que les valeurs propres de $\mathcal{O}$ sont positives et A traverse deux cadrans opposés. □

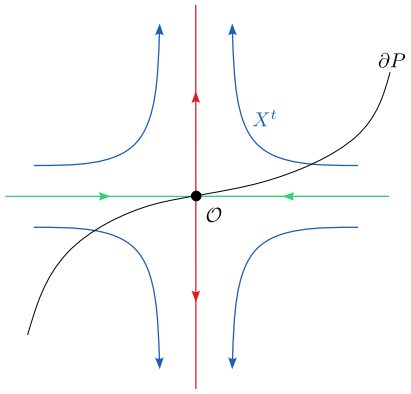


FIGURE 1.3 – Le bord de P traverse deux cadrans opposés de $\mathcal{O}$

Proposition et Définition 1.2.2 (Lamination d'entrée, de sortie, de bord)**.** *On note $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Rappelons que P^{in} (respectivement P^{out}) désigne l'union des composantes connexes de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ le long desquelles le champ de vecteurs X pointe vers l'intérieur (respectivement l'extérieur) de P. Alors*

i) $\mathcal{L}^s := \mathcal{W}^s \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*) = \mathcal{W}^s \cap P^{\text{in}}$ *est une lamination de dimension 1 sur P^{in}, appelée* lamination d'entrée de (P, X)

ii) $\mathcal{L}^u := \mathcal{W}^u \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*) = \mathcal{W}^u \cap P^{\text{out}}$ *est une lamination de dimension 1 sur P^{out}, appelée* lamination de sortie de (P, X)

iii) $\mathcal{L} := (\mathcal{W}^u \cup \mathcal{W}^s) \cap \partial P = \mathcal{L}^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^u$ *est une lamination de dimension 1 sur ∂P, appelée* lamination de bord de (P, X)

Remarque 1.2.3. La lamination $\mathcal{W}^s$ n'intersecte pas le bord de sortie P^{out} car tout orbite dans $\mathcal{W}^s$ converge vers Λ dans le futur donc ne sort jamais du bloc (P, X), et de même la lamination $\mathcal{W}^u$ n'intersecte pas le bord d'entrée P^{in} car tout orbite dans $\mathcal{W}^u$ converge vers Λ dans le passé. La trace $\mathcal{W}^s \cap \partial P$ et la trace $\mathcal{W}^u \cap \partial P$ sont donc disjointes sur ∂P sauf le long des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ de X contenues dans ∂P où elles coïncident. Le lemme précédent dit que les traces $\mathcal{W}^s \cap \partial P$ et $\mathcal{W}^u \cap \partial P$ se recollent le long de $\mathcal{O}_*$ en une (seule) lamination $\mathcal{L} = (\mathcal{W}^s \cup \mathcal{W}^u) \cap \partial P$ de dimension 1 sur ∂P.

Démonstration de la proposition 1.2.2. La lamination $\mathcal{W}^s$ est tangente au champ X, et le champ X est transverse à $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$, donc $\mathcal{W}^s$ intersecte transversalement le bord de P en dehors des

orbites périodiques de $\mathcal{O}_*$. Donc $\mathcal{L}^s = \mathcal{W}^s \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*) = \mathcal{W}^s \cap P^{\text{in}}$ (remarque 1.2.3) est une lamination de dimension 1 sur P^{in}. De même pour la lamination $\mathcal{L}^u = \mathcal{W}^u \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*) = \mathcal{W}^u \cap P^{\text{out}}$.

Rappelons que $\mathcal{O}_* = \partial P^{\text{in}} = \partial P^{\text{out}}$, et montrons que $\mathcal{L}^s$ et $\mathcal{L}^u$ se recollent le long de $\mathcal{O}_* = \partial P^{\text{in}} = \partial P^{\text{out}}$ en une lamination $\mathcal{L}$ sur ∂P. Soit $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement de (P, X). Soit p un point de $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$, et $\mathcal{U}_p$ un voisinage de p dans $\tilde{P}$ muni de coordonnées $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\mathcal{O} = \{x = y = 0\}$. On note $(\partial_x, \partial_y, \partial_\theta)$ les champs de vecteurs associés et on considère le produit scalaire usuel dans ces coordonnées. Comme ∂P est une sous-variété lisse, elle est localement transversalement orientable par un champ de vecteurs normal que l'on note $\vec{n}$ dans $\mathcal{U}_p$. Comme ∂P contient $\mathcal{O}$, on en déduit $\vec{n}(r)$ converge vers un vecteur dans le plan normal au vecteur ∂_θ quand r tend vers p. De même, la lamination $\mathcal{W}^s$ est localement transversalement orientable par un champ de vecteurs normal que l'on note $\vec{m}$ dans $\mathcal{U}_p$. Comme la feuille passant par p contient $\mathcal{O}$, on en déduit que le vecteur $\vec{m}(r)$ converge vers un vecteur dans le plan normal au vecteur ∂_θ quand r tend vers p. Un champ de vecteurs tangent à la lamination $\mathcal{L}^s = \mathcal{W}^s \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*)$ est défini par le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{m}$ en chaque point d'intersection $\mathcal{W}^s \cap (\partial P \setminus \mathcal{O}_*)$. C'est un vecteur normal au plan engendré par $\vec{n}$ et $\vec{m}$. On en déduit que $\vec{v}(r)$ converge vers un vecteur tangent à $\mathbb{R}.\partial_\theta$ pour $r \in \mathcal{L}^s$ qui tend vers p, autrement dit $\vec{v}(r)$ converge vers un vecteur tangent à $T_p\mathcal{O}$. En faisant cela en tout point p de l'ensemble $\mathcal{O}_*$, on montre que la lamination $\mathcal{L}^s$ sur P^{in} se recolle avec $\mathcal{O}_* = \partial P^{\text{in}}$ en une lamination sur $\overline{P^{\text{in}}} = P^{\text{in}} \cup \mathcal{O}_*$. Une preuve similaire montre que la lamination $\mathcal{L}^u$ sur P^{out} se recolle avec $\mathcal{O}_* = \partial P^{\text{out}}$ en une lamination $\overline{P^{\text{out}}} = P^{\text{out}} \cup \mathcal{O}_*$. Par conséquent, $\mathcal{L} := \mathcal{L}^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^u$ est une lamination de dimension 1 dans $\partial P = P^{\text{in}} \cup \mathcal{O}_* \cup P^{\text{out}}$. □

Lamination quasi-Morse-Smale

Définition 1.2.4 (Lamination quasi-Morse-Smale)**.** Soit $\mathcal{L}$ une lamination de dimension 1 sur une surface fermée S. On dit que $\mathcal{L}$ est une lamination *quasi-Morse-Smale* si elle satisfait les conditions suivantes :

1) Il existe un nombre fini de feuille compacte $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$;

2) Chaque demi-feuille non compacte s'accumule sur une unique feuille compacte ;

3) Chaque feuille compacte $\gamma \in \Gamma$, munie d'une orientation, a une holonomie contractante ou dilatante de chaque côté. [1]

L'ensemble (éventuellement vide) des éléments de Γ tel que l'holonomie est contractante d'un côté et dilatante de l'autre est noté Γ_*, et appelé ensemble des *feuilles compactes marquées.* On demande de plus :

4) Il existe une décomposition $S \setminus \Gamma_* = S^{\text{in}} \cup S^{\text{out}}$ en deux ouverts disjoints telle que chaque feuille $\gamma_* \in \Gamma_*$ est adjacente à une composante connexe de S^{in} et à une composante connexe de S^{out}

On renvoie à la figure 1.4.

Remarque 1.2.5. Une lamination quasi-Morse-Smale $\mathcal{L}$ tel que l'ensemble des feuilles marquées Γ_* est vide est une *lamination Morse-Smale* au sens de [BBY17, Définition 3.9], ce qui justifie cette terminologie.

1. Si γ admet deux côtés dans S, l'holonomie de γ peut-être contractante des deux côtés, dilatante des deux côtés, ou contractante d'un côté et dilatante de l'autre. Si elle a un unique côté dans S, son holonomie est soit contractante, soit dilatante.

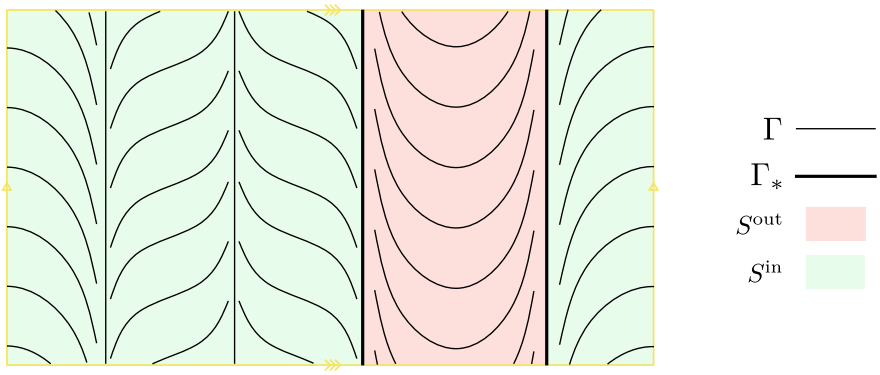


FIGURE 1.4 – Un exemple de feuilletage quasi-Morse-Smale sur $S = \mathbb{T}^2$

Proposition 1.2.6. *Soit (P, X) un bloc de construction. Alors la lamination de bord $\mathcal{L}$ est une lamination quasi-Morse-Smale sur ∂P, et l'ensemble Γ_* des feuilles marquées de $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques de X contenues dans ∂P.*

Dans le cas où le bord ∂P est transverse au champ de vecteurs X, autrement dit si (P, X) est un bloc de Béguin-Bonatti-Yu, cette propriété est connue. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 1.2.7 ([BBY17, Proposition 3.8])**.** *Soit (U, Y) un bloc de construction dont le bord ∂U est transverse au champ de vecteurs Y. Soit $\mathcal{L}_Y$ la lamination de bord de (U, Y). Alors elle satisfait les propriétés suivantes :*

1) il existe un nombre fini de feuilles compactes ;

2) chaque demi-feuille non compacte s'accumule sur une feuille compacte ;

3) chaque feuille compacte possède une orientation pour laquelle son holonomie est contractante de chaque côté.

Autrement dit la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ d'un bloc (U, Y) de Béguin-Bonatti-Yu est une lamination quasi-Morse-Smale pour laquelle l'ensemble des feuilles marquées est vide (on dit que c'est une *lamination Morse-Smale*).

Le lemme suivant permet de ramener l'étude de la lamination de bord d'un bloc de construction (P, X) au cas où le bord du bloc est transverse au champ de vecteurs. On désigne par $\overline{A}$ l'adhérence d'un ensemble A. Soit (P, X) un bloc de construction. On note $\mathcal{O}_*$ l'ensemble des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, et Λ_X le maximal invariant de (P, X), P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie.

Lemme 1.2.8. *Il existe un bloc de construction (U, Y) tel que, si Λ_Y est le maximal invariant de (U, Y), $(\mathcal{W}^s_Y, \mathcal{W}^u_Y)$ la paire de lamination stable et instable de Λ_Y, U^{in} le bord d'entrée, U^{out} le bord de sortie et $\mathcal{L}_Y$ la lamination de bord, alors :*

1) (bord transverse) $\partial U \pitchfork Y$,

2) (plongement) *Il existe un plongement $h\colon P \to U$ qui envoie le champ de vecteurs X sur le champ de vecteurs Y dans $h(P)$ et Λ_X sur Λ_Y.*

3) (lamination) *Il existe une collection finie $D_* = \{D_1, \dots, D_n\}$ de disques contenus dans ∂U, d'adhérence deux à deux disjointes, disjoints de $\mathcal{L}_Y$ et bordés chacun par une feuille compacte de la lamination $\mathcal{L}_Y$, tel que*

- *$U^{\text{in}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{in}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^s_Y$*
- *$U^{\text{out}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{out}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^u_Y$.*

Démonstration du lemme 1.2.8. Soit $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement de (P, X). Soit $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Pour chaque $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, on considère $\mathcal{V}_i$ un voisinage tubulaire linéarisant de $\mathcal{O}_i$ pour le flot de $\tilde{X}$ dans $\tilde{P}$, muni d'un système de coordonnées linéarisant $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le bord ∂P traverse les cadrans opposés $\{x > 0, y > 0\}$ et $\{x < 0, y < 0\}$ (fait 1.2.1). Soit S une surface topologique, lisse en dehors d'un nombre fini de courbes fermées simples $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$ et $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$, qui coïncide avec ∂P en dehors des voisinages $\mathcal{V}_i$, et se décompose en l'union $S = S^{\text{in}} \cup (\cup_i A_i) \cup S^{\text{out}}$, (figure 1.5) où

- S^{in} est une surface à bord transverse au champ X et bordé par $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$, qui coïncide avec P^{in} en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$
- S^{out} est une surface à bord transverse au champ X et bordé par $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$, qui coïncide avec P^{out} en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$
- A_i est un anneau tangent au champ $\tilde{X}$, inclus dans le voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$, inclus dans le cadran $\{x > 0, y < 0\}$, et bordé par les courbes c_i^{in} et c_i^{out}, tel que toutes les orbites de $\tilde{X}$ sur A_i vont de c_i^{in} vers c_i^{out}

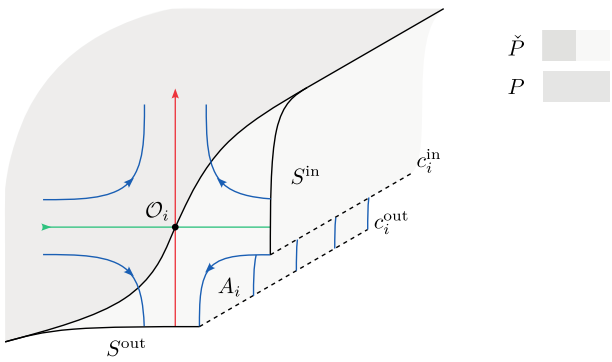


FIGURE 1.5 – Variété $\check{P}$ dans un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$

La surface S découpe dans $\tilde{P}$ une sous-variété compacte à bord $\check{P}$, qui contient P, et qui coïncide avec P en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$. Soit $\check{X}$ la restriction de $\tilde{X}$ à $\check{P}$. Le champ $\check{X}$ restreint à A_i est orbitalement équivalent au champ vertical ∂t sur $\mathbb{S}^1 \times I$, où t est la coordonnée sur $I = [0, 1]$. On colle sur chaque anneau $A_i \simeq \mathbb{S}^1 \times I$ un cylindre $C_i = \mathbb{D}^2 \times I$ muni du champ de vecteurs vertical ∂_t, le long de $B_i = \partial\mathbb{D}_2 \times I \subset \partial C_i$. Soit un difféomorphisme $f_i \colon B_i = \partial\mathbb{D}^2 \times I \to \mathbb{S}^1 \times I \simeq A_i$ qui préserve la coordonnée $t \in I$ (figure 1.6). Soit la variété quotient

$$U := \check{P} \cup (\cup_i C_i)/f$$

où f est le produit des f_i. Chaque difféomorphisme f_i envoie le champ de vecteurs vertical de C_i sur le champ de vecteurs $\check{X}$, il s'ensuit que U est muni de vecteurs Y de classe $\mathcal{C}^1$ pour une structure différentiable sur U, induit par l'union de $\check{X}$ et du champ vertical sur chaque C_i.

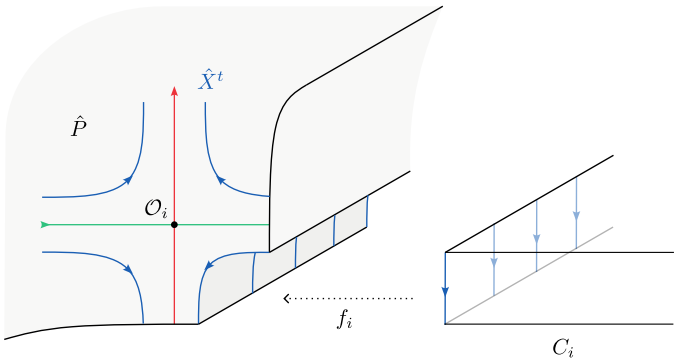


FIGURE 1.6 – Recollement d'un cylindre C_i le long de l'anneau A_i tangent au champ $\check{X}$

Montrons que le couple (U, Y) satisfait le lemme 1.2.8. La variété U est une variété lisse compacte de dimension 3 à bord. Le bord ∂U est le quotient $\partial U = S \cup (\cup_i \partial C_i)/f$. Un point de ∂U est soit dans $S \setminus \cup_i A_i$, où Y coïncide avec le champ $\check{X}$, soit dans le bord $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$ ou $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ d'un cylindre $C_i = \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$, où Y coïncide avec le champ de vecteurs vertical. Il s'ensuit que Y est transverse à ∂U. Il est clair par construction que la variété P est plongée dans la variété U via un plongement qui envoie le champ X sur le champ Y. De plus, le maximal invariant de Y dans P coïncide avec le maximal invariant Λ de X dans P via ce plongement. En effet, une orbite de Y dans C_i entre et sort de C_i, donc de U, en temps uniformément borné, et une orbite de Y qui intersecte $\check{P}$ est soit une orbite du flot de X contenue dans P, soit intersecte le bord de $\check{P}$. Il s'ensuit que (U, Y) est un bloc de construction qui vérifie l'item 1 et 2 du lemme 1.2.8.

Il reste à vérifier l'item 3. La lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ n'intersecte pas le bord de U inclus dans ∂C_i car toutes les orbites dans C_i entrent et sortent de U. Dans $\check{P}$, les orbites de Y coïncident avec les orbites de $\check{X}$. On note $\check{\mathcal{W}}^s$ et $\check{\mathcal{W}}^u$ les variétés stables et instables de l'ensemble Λ_X pour le flot de $\check{X}$ dans $\check{P}$. Alors $\check{\mathcal{W}}^s$ est l'union du saturé des laminations $\mathcal{W}^s_X$ par le flot de $\check{X}$ et des variétés stables locales des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$. De même $\check{\mathcal{W}}^u$ est l'union du saturé des laminations $\mathcal{W}^u_X$ par le flot de $\check{X}$ et des variétés instables locales des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$. On pose

$$\check{\mathcal{L}}^s := \check{\mathcal{W}}^s \cap \partial\check{P} = \check{\mathcal{W}}^s \cap S, \quad \check{\mathcal{L}}^u := \check{\mathcal{W}}^u \cap \partial\check{P} = \check{\mathcal{W}}^s \cap S$$

Par définition, les orbites des points de $\check{\mathcal{L}}^s$ sont les orbites du flot de $\check{X} = Y_{|\check{P}}$ qui s'accumulent sur l'ensemble $\Lambda_X = \Lambda_Y$ dans le futur, autrement dit $\check{\mathcal{L}}^s = \mathcal{L}^s_Y$ est la lamination stable de bord de (U, Y). La variété stable locale de l'orbite $\mathcal{O}_i$ dans le voisinage $\mathcal{V}_i$ intersecte $\partial\check{P}$ le long d'une feuille compacte γ^s_i, qui borde une composante connexe D^{in}_i de $U^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s_Y$, où U^{in} est l'union des composantes connexes de ∂U le long desquelles le champ Y pointe vers l'intérieur de U. Cette composante est un disque qui contient le bord d'entrée $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$ du cylindre C_i (figure 1.7). De même, $\check{\mathcal{L}}^u = \mathcal{L}^u_Y$ est la lamination instable de bord de (U, Y), et la variété instable locale de l'orbite $\mathcal{O}_i$ dans le voisinage $\mathcal{V}_i$ intersecte $\partial\check{P}$ le long d'une feuille compacte γ^u_i. Cette feuille borde une composante connexe D^{out}_i de $U^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u_Y$, où U^{out} est l'union des composantes connexes de ∂U le long desquelles le champ Y pointe vers l'extérieur de U. Cette composante est un disque qui contient le bord de sortie $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$ du cylindre C_i. Posons $D_* = (\cup_i D^{\text{in}}_i) \cup (\cup_i D^{\text{out}}_i)$. Les surfaces $U^{\text{in}} \setminus D$ et $\overline{P^{\text{in}}}$ coïncident en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$, et dans chaque $\mathcal{V}_i$, ce sont des anneaux dont l'intérieur est transverse à la lamination $\check{\mathcal{W}}^s$. Il existe donc une isotopie entre $U^{\text{in}} \setminus D_*$ et P^{in}, à support dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$, qui préserve la lamination $\check{\mathcal{W}}^s$ feuille à feuille. Le raisonnement est symétrique pour l'isotopie entre $U^{\text{out}} \setminus D_*$ et $\overline{P^{\text{out}}}$. $\square$

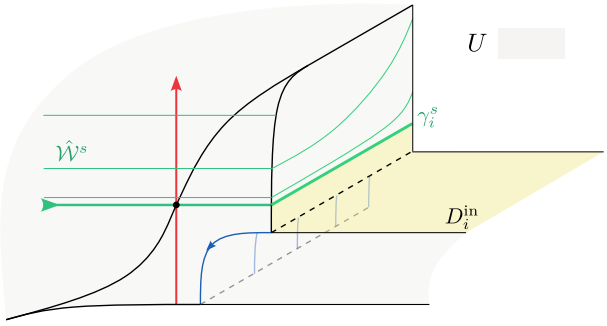


FIGURE 1.7 – Disque D_i^{in} sur U^{in}, disjoint de $\mathcal{L}_Y^s$, bordé par la feuille compacte γ_i^s

Démonstration de la proposition 1.2.6. Soit (P, X) un bloc de construction et (U, Y) le bloc de construction associé par le lemme 1.2.8 dont le bord ∂U est transverse au champ Y. On note $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}_X^u$ la lamination de bord de (P, X) et $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^s \cup \mathcal{L}_Y^u$ la lamination de bord de (U, Y). Soit $D_* = \{D_1, \ldots, D_n\}$ la collection de disques (ouverts) dans ∂U, disjoints de $\mathcal{L}_Y$ et bordés par des feuilles compactes de $\mathcal{L}_Y$ donnée par le lemme 1.2.8, item 3. Il suit de cet item l'existence d'un difféomorphisme $H^s \colon U^{\text{in}} \smallsetminus D_* \to \overline{P^{\text{in}}}$ qui envoie la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^s$ sur la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$. On en conclut que la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ vérifie les trois premiers items de la définition 1.2.4 d'une lamination quasi-Morse-Smale sur $\overline{P^{\text{in}}}$. Les feuilles compactes qui bordent les disques $D_i \in D_* \cap U^{\text{in}}$ correspondent via ce difféomorphisme aux feuilles compactes de $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur le bord de $\overline{P^{\text{in}}}$, autrement dit aux orbites périodiques $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ de X sur ∂P. De même, il existe un difféomorphisme $H^u \colon U^{\text{out}} \smallsetminus D_* \to \overline{P^{\text{out}}}$ qui envoie la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^u$ sur la lamination $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$. On en conclut que la lamination $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$ vérifie les trois premiers items de la définition 1.2.4 d'une lamination quasi-Morse-Smale sur $\overline{P^{\text{out}}}$. Les feuilles compactes qui bordent les disques $D_i \in D_* \cap U^{\text{out}}$ correspondent via ce difféomorphisme aux feuilles compactes de $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$ sur le bord de $\overline{P^{\text{out}}}$, autrement dit aux orbites périodiques $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ de X sur ∂P. Il s'ensuit que la lamination $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}_X^u$ sur $\partial P = \overline{P^{\text{in}}} \cup \overline{P^{\text{out}}}$ vérifie les trois premiers items de la définition 1.2.4, et chaque feuille compacte de $\mathcal{L}_X^s$ et de $\mathcal{L}_X^u$ admet une orientation pour laquelle son holonomie est contractante (de chaque côté).

Il reste à montrer que l'holonomie des éléments de $\mathcal{O}_*$ munis d'une orientation est contractante d'un côté et dilatante de l'autre, autrement dit $\mathcal{O}_*$ est l'ensemble l'ensemble des feuilles marquées de la lamination $\mathcal{L}_X$. L'item 4 de la définition 1.2.4 est alors satisfait par définition d'une surface quasi-transverse au champ X (définition 1.1.1, item 3) pour la décomposition $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* = P^{\text{in}} \cup P^{\text{out}}$. Soit $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ une orbite périodique de X sur ∂P. C'est une feuille compacte de $\mathcal{L}_X$, adjacente d'un côté à P^{in} et de l'autre à P^{out}. D'après la preuve précédente, il existe une orientation de $\mathcal{O}_i$ telle que son holonomie du côté de P^{in} est contractante, et il existe une orientation telle que son holonomie du côté de P^{out} est contractante. Montrons que ces deux orientations ne peuvent coïncider. Soit l^s une feuille de $\mathcal{L}_X^s$ qui s'accumule sur $\mathcal{O}_i$. Alors la feuille l^s intersecte un ouvert de produit local en $p \in \mathcal{O}_i$, et il s'ensuit que l^s est l'intersection transverse de la variété stable $\mathcal{W}_X^s(\gamma)$ d'une orbite $\gamma \in \mathcal{W}_X^u(\mathcal{O}_i)$ avec la surface P^{in}. Comme les surfaces P^{in} et $\mathcal{W}_X^u(\mathcal{O}_i)$ sont toutes deux transverses à $\mathcal{W}_X^s$, on en déduit que l'holonomie de $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_i$ le long de $\mathcal{O}_i$ est conjugué à l'holonomie de la lamination induite par $\mathcal{W}_X^s$ sur $\mathcal{W}_X^u(\mathcal{O}_i)$ le long de $\mathcal{O}_i$. Cette holonomie est conjuguée à l'application de premier retour du flot de X sur une transversale de $\mathcal{O}_i$ dans $\mathcal{W}_X^u(\mathcal{O}_i)$, et est donc dilatante pour l'orientation de $\mathcal{O}_i$ donnée par le

flot. De même, l'holonomie de $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_i$ le long de $\mathcal{O}_i$ est conjuguée à l'holonomie de la lamination induite par $\mathcal{W}_X^u$ sur $\mathcal{W}_X^s(\mathcal{O}_i)$ le long de $\mathcal{O}_i$, et cette holonomie est contractante pour l'orientation de $\mathcal{O}_i$ induite par l'orientation du flot de X (voir figure 1.8). Finalement, chaque feuille compacte $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ de la lamination $\mathcal{L}_X$ a une holonomie dilatante d'un côté et contractante de l'autre. On en conclut que la lamination $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}_X^u$ est une lamination quasi-Morse-Smale, ce qui prouve la proposition 1.2.6. □

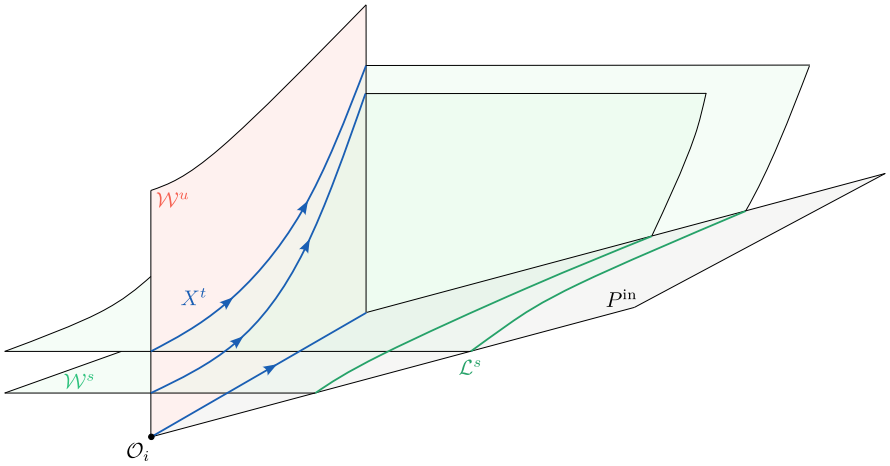


FIGURE 1.8 – Holonomie d'une orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ le long de la lamination de bord du côté de P^{in}

Pré-feuilletages et laminations remplissantes

Définition 1.2.9 (Pré-feuilletage)**.** On dit qu'une lamination $\mathcal{L}$ de dimension 1 sur une surface S est un *pré-feuilletage* si il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 sur S qui contient $\mathcal{L}$ en tant que sous-lamination, autrement dit tel que les feuilles de $\mathcal{L}$ sont des feuilles de $\mathcal{F}$.

Remarque 1.2.10. C'est une condition nécessaire sur la lamination de bord $\mathcal{L}$ d'un bloc (P, X) pour l'existence d'un champ de vecteurs Anosov Z sur une variété fermée $\mathcal{M}$ obtenu par recollement de (P, X). En effet, la surface ∂P se projette alors dans $\mathcal{M}$ sur une surface S quasi-transverse au champ Z munie de deux feuilletages (ζ^u, ζ^s) de dimension 1, dont l'union contient la lamination de bord $\mathcal{L}$ en sous-lamination. Ce sont les traces sur S du feuilletage instable $\mathcal{F}^u$ et stable $\mathcal{F}^s$ du flot d'Anosov engendré par Z. Il suit que chaque composante connexe de ∂P est une surface connexe fermée de caractéristique d'Euler nulle, donc un tore ou une bouteille de Klein.

Proposition 1.2.11. *Une lamination quasi-Morse-Smale $\mathcal{L}$ sur une surface fermée S est un pré-feuilletage sur S si et seulement si chaque composante connexe de $S \setminus \mathcal{L}$ est*

i) soit homéomorphe à un anneau ou un ruban de Moebius bordé par des feuilles compactes,

ii) soit homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, et le bord accessible[2] *est l'union de deux feuilles non compactes l et l' qui sont asymptotes l'une à l'autre à chaque extrémité.*

2. ce sont les points du bord qui sont extrémité d'un segment inclus dans l'intérieur de la composante

Définition 1.2.12 (Bande)**.** Soit B une composante connexe de $S \setminus \mathcal{L}$. On dit que B est une *bande* si B est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et le bord accessible de B est l'union de deux feuilles non compactes l et l' de $\mathcal{L}$ qui sont asymptotes l'une à l'autre à chaque extrémité.

Démonstration de la proposition 1.2.11. Une lamination quasi-Morse-Smale contient un nombre fini de feuilles compactes (définition 1.2.4, item 1). La proposition est alors une conséquence directe du fait suivant, montré dans [BBY17].

Fait 1.2.13 ([BBY17, Lemme 3.12])**.** *Soit S une surface fermée et $\mathcal{L}$ une lamination de dimension 1 sur S qui contient un nombre fini de feuilles compactes. Alors il n'existe qu'un nombre fini de composantes connexes de $S \setminus \mathcal{L}$ qui ne sont pas des bandes.*

□

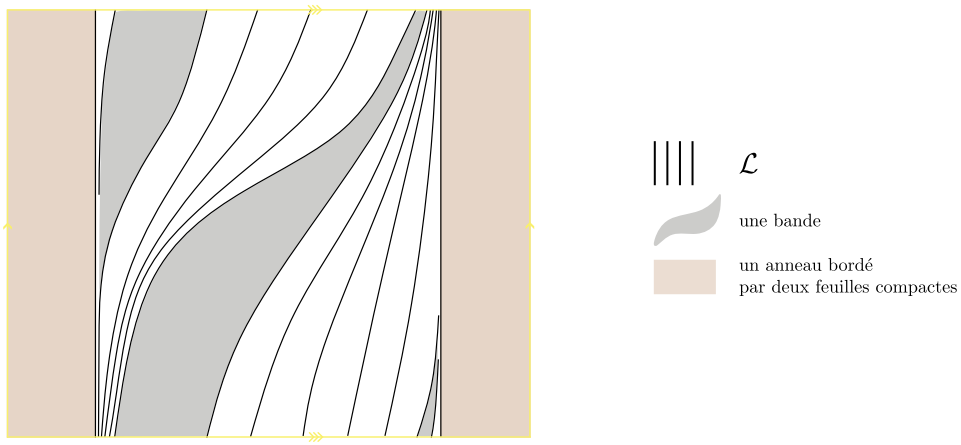


FIGURE 1.9 – Un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{L}$ sur $S = \mathbb{T}^2$

La figure 1.9 montre une composante connexe de type i) (en brun) et de type ii) (en gris) pour un pré-feuilletage $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{T}^2$. On sera amené à faire l'hypothèse supplémentaire suivante pour des raisons techniques.

Définition 1.2.14 (Bloc plein)**.** Soit (P, X) un bloc de construction. On dit que la lamination de bord $\mathcal{L}$ est *remplissante* si toutes les composantes connexes du complémentaire sont des bandes. Dans ce cas, on dit que (P, X) est un bloc *plein*.

Autrement dit, (P, X) est un bloc plein si la lamination de bord $\mathcal{L}$ est un pré-feuilletage et aucune composante connexe de $\partial P \setminus \mathcal{L}$ n'est un anneau ou un ruban de Moebius. La figure 1.10 représente un exemple de bloc de construction dont la lamination de bord est remplissante.

1.3 Recollements

On veut recoller le bord d'un bloc de construction (P, X) pour créer un flot d'Anosov. Autrement dit on veut choisir un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ de telle manière que le quotient $P/\varphi = P/(x \sim \varphi(x))$ soit une variété fermée, et que le champ de vecteurs X induise un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur P/φ qui soit Anosov. On note alors $P_\varphi := P/\varphi$ et X_φ le champ de vecteurs induit par X sur P_φ. Si P est orientable, une orientation donnée sur P induit une

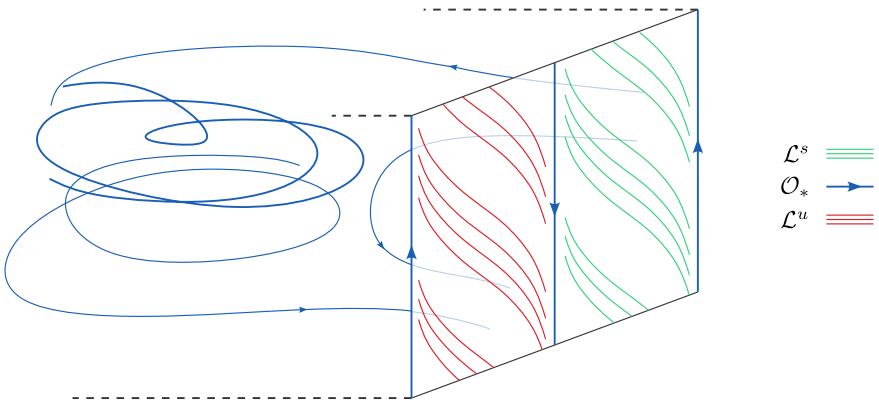


FIGURE 1.10 – Un bloc de construction (P, X) avec pour bord un tore $\mathbb{T}^2$ et une lamination de bord remplissante

orientation canonique sur le bord ∂P, qui est celle que l'on considère toujours. La variété P/φ est orientable si et seulement si il existe une orientation de P tel que φ renverse l'orientation induite sur ∂P.

Recollement

Définition 1.3.1 (Recollement)**.** Soit (P, X) un bloc de construction, on note $\mathcal{O}_*$ les orbites périodiques de X contenues dans ∂P, P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie de (P, X). Un *recollement de* (P, X) est une $\mathcal{C}^1$-involution $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ tel que :

1) il existe une partition $\partial P = \partial_1 P \sqcup \partial_2 P$ où $\partial_1 P$ et $\partial_2 P$ sont des unions de composantes connexes de ∂P, et tel que $\varphi(\partial_1 P) = \partial_2 P$,

2) $\varphi(\mathcal{O}_*) = \mathcal{O}_*$ et φ préserve l'orientation du flot sur les orbites de $\mathcal{O}_*$,

3) $\varphi(P^{\text{out}}) = P^{\text{in}}$.

Autrement dit, un recollement φ d'un bloc (P, X) est un difféomorphisme de ∂P qui apparie deux à deux les composantes connexes de ∂P, préserve la collection $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques de X contenues dans ∂P avec l'orientation du flot, et envoie le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P^{in}.

Remarque 1.3.2.

- On pourrait de façon équivalente définir un recollement φ d'un bloc (P, X) comme un difféomorphisme de $\partial_1 P$ vers $\partial_2 P$, pour une certaine partition $\partial P = \partial_1 P \sqcup \partial_2 P$ en union de composantes connexes, et qui vérifie les items 2 et 3 de la définition 1.3.1. Cette définition a le défaut de casser arbitrairement la symétrie entre $\partial_1 P$ et $\partial_2 P$, donc on préfère voir un recollement de bloc comme une involution de ∂P qui apparie les composantes connexes deux à deux. Dans le cas où le bord ∂P est transverse au champ X, autrement dit si (P, X) est un bloc de Béguin-Bonatti-Yu, on peut prendre $\partial_1 P = P^{\text{out}}$, $\partial_2 P = P^{\text{in}}$, et on a déjà une distinction naturelle entre $\partial_1 P$ et $\partial_2 P$. Il est alors plus naturel de définir un recollement comme un difféomorphisme $\varphi\colon P^{\text{out}} \to P^{\text{in}}$ comme le font les auteurs de [BBY17].

- Si φ est un recollement d'un bloc (P, X), il existe une structure lisse sur l'espace quotient P/φ qui en fait une variété lisse fermée que l'on note P_φ. Si le bord de P est transverse

au champ X, alors X induit un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur P_φ que l'on note X_φ. Dans le cas où il y a des orbites périodiques incluses dans le bord, ce n'est pas toujours vrai. En effet, il faut pouvoir identifier la dynamique au voisinage de deux orbites que l'on apparie deux à deux, en particulier il faut que les orbites périodiques aient même valeurs propres.

Définition 1.3.3 (Recollement dynamique)**.** Un *recollement dynamique de* (P, X) est un recollement qui envoie le champ X sur lui même. Formellement, on demande qu'il existe un prolongement $(\tilde{P}, \tilde{X})$ de (P, X) qui contient P dans son intérieur, et un voisinage tubulaire U de ∂P dans $\tilde{P}$, tel que φ est la restriction d'un difféomorphisme $\tilde{\varphi}\colon U \to U$ qui préserve le champ $\tilde{X}$.

Fait 1.3.4. *Si φ est un recollement dynamique de (P, X), alors il existe une structure différentiable sur la variété quotient $P_\varphi = P/\varphi$ qui en fait une variété (lisse) fermée munie d'un champ de vecteurs X_φ de classe $\mathcal{C}^1$ induit par le champ de vecteurs X sur P.*

Démonstration. C'est une conséquence de la définition d'un recollement dynamique, et de la structure différentiable naturelle sur P_φ. □

Forte (quasi)-transversalité On est amené à faire des hypothèses supplémentaires sur les recollements que l'on va considérer.

Définition 1.3.5 (Laminations fortement quasi-transverses)**.** Soit S une surface (éventuellement à bord) et $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ une paire de laminations sur S.

- On dit que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont *fortement transverses* si elles sont transverses l'une à l'autre sur S et toute composante connexe du complémentaire $S \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$ est un disque D dont le bord est formé de deux arcs disjoints de feuilles de $\mathcal{L}_1$ et deux arcs disjoints de feuilles de $\mathcal{L}_2$.

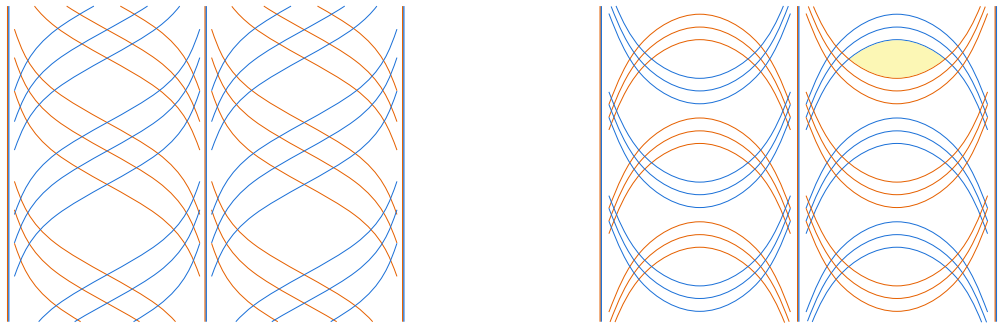
Supposons de plus que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des laminations quasi-Morse-Smale. On note $\Gamma_{\mathcal{L}_i}$ les feuilles compactes de $\mathcal{L}_i$, $\Gamma_{\mathcal{L}_i,*}$ les feuilles compactes marquées, et $S \setminus \Gamma_{\mathcal{L}_i,*} = S_i^{\text{in}} \cup S_i^{\text{out}}$ la décomposition de $S \setminus \Gamma_{\mathcal{L}_i,*}$ relative à $\mathcal{L}_i$, pour $i = 1, 2$.

- On dit qu'elles sont *quasi-transverses* si elles ont le même ensemble de feuilles marquées $\Gamma_{\mathcal{L}_1,*} = \Gamma_{\mathcal{L}_2,*} =: \Gamma_*$, sont transverses sur le complémentaire $S \setminus \Gamma_*$, et si $S_1^{\text{in}} = S_2^{\text{out}}$.
- On dit qu'elles sont *fortement quasi-transverses* si elles sont quasi-transverses et si elles sont fortement transverses sur $S \setminus \Gamma_*$.

Sur la figure 1.11 à gauche, les laminations $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont fortement quasi-transverses. A droite, elle sont quasi-transverses, mais pas fortement quasi-transverses. En effet, certaines composantes du complémentaire $\mathbb{T}^2 \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$, par exemple celle coloriée en jaune, ne sont pas bordées par deux arcs de feuilles disjoints de $\mathcal{L}_1$ et deux arcs de feuilles disjoints de $\mathcal{L}_2$.

Définition 1.3.6 (Recollement fortement quasi-transverse)**.** Soit (P, X) un bloc de construction et φ est un recollement de (P, X). On dit que c'est un *recollement fortement quasi-transverse* si $(\mathcal{L}, \varphi_*\mathcal{L})$ est une paire de lamination fortement quasi-transverses sur ∂P.

Remarque 1.3.7. Les hypothèses issues des définitions 1.3.6 et 1.2.9 assurent que l'on peut compléter la paire $(\mathcal{L}, \varphi_*\mathcal{L})$ en une paire de feuilletages quasi-transverses sur ∂P. C'est une condition nécessaire pour notre construction. En effet, si un bloc (P, X) possède un recollement dynamique φ tel que le champ de vecteurs X_φ sur $P_\varphi := P/\varphi$ soit Anosov, alors la variété P se projette sur la variété fermée P_φ et l'image du bord est une surface S quasi-transverse plongée, munie de deux feuilletages (ξ^u, ξ^s) de dimension 1, quasi-transverses dont l'union contient la projection de la lamination de bord $\mathcal{L}$ en sous-lamination. Ce sont les intersections avec S du feuilletage instable $\mathcal{F}^u$ et stable $\mathcal{F}^s$ du flot d'Anosov engendré par X_φ,



$(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$

FIGURE 1.11 – Paires de laminations quasi-Morse-Smale sur le tore $\mathbb{T}^2$.

1.4 Équivalence

Prolongement et équivalence de blocs On définit la relation d'équivalence suivante sur les blocs de construction.

Définition 1.4.1 (Blocs de construction isotopes)**.** Soit (P_0, X_0) et (P_1, X_1) deux blocs de construction. On dit qu'ils sont *isotopes* si il existe une famille $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ de blocs de construction, une variété $\tilde{P}$ de dimension 3 tel que :

1) il existe une famille $\{H_t \colon P_0 \to \tilde{P}\}_{t\in[0,1]}$ de plongements, continue en topologie $\mathcal{C}^1$, tel que H_0 est l'inclusion et $P_t = H_t(P)$,

2) il existe une famille $\{\tilde{X}_t\}_{t\in[0,1]}$ de champ de vecteurs sur $\tilde{P}$, continue en topologie $\mathcal{C}^1$, où $\tilde{X}_t$ est une extension de X_t.

On dira que $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ est une *isotopie* de blocs de construction.

Remarque 1.4.2. Dans [BBY17, Définition 3.28], les auteurs utilisent une notion plus simple d'isotopies de blocs de construction, pour laquelle on a une famille continue de champ de vecteurs $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ tous portés par une même variété à bord P. Dans cette thèse, nous aurons réellement besoin de considérer des familles de variétés à bord $\{P_t\}_{t\in[0,1]}$. Plus précisément, nous devrons considérer des cas où la position du bord de P_0 et celle du bord de P_1 au voisinage d'une orbite périodique n'est pas la même, comme sur la figure 1.13 : ∂P_1 est transverse aux variétés stables et instables d'une orbite périodique $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$ contenue dans ∂P_1, et ∂P_0 est topologiquement transverse mais tangent à la variété stable $\mathcal{W}^s(\mathcal{O})$ le long de $\mathcal{O}$. Dans le cas où la collection $\mathcal{O}_*$ est vide, deux blocs de Béguin-Bonatti-Yu isotopes selon la définition 1.4.1 seront orbitalement équivalents à des blocs isotopes au sens de [BBY17].

On va voir que cette relation d'isotopie est équivalente à une relation d'équivalence orbitale "affaiblie". Rappelons quelques définitions élémentaires.

- Une *équivalence orbitale* entre un champ de vecteurs X sur une variété M et un champ de vecteurs Y sur une variété N est un homéomorphisme $h \colon M \to N$, qui envoie les orbites orientées du flot de X sur les orbites orientées du flot de Y.

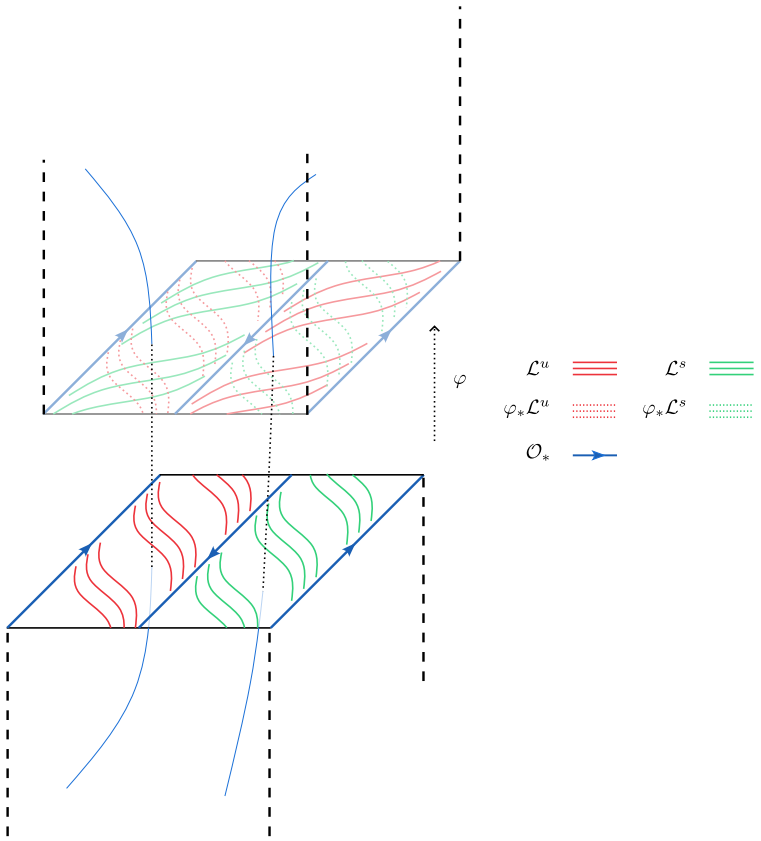


FIGURE 1.12 – Bloc plein (P, X) muni d'un recollement fortement quasi-transverse φ

- On dit qu'un champ X sur une variété M est *structurellement stable* si, pour toute perturbation Y de X assez petite en topologie $\mathcal{C}^1$ sur M, Y est orbitalement équivalent à X sur M.

On définit un prolongement "sans conséquence" d'un bloc de construction (P, X), qui consiste à coller des voisinages linéarisants sur les orbites périodiques contenues dans le bord ∂P. Plus précisément :

Définition 1.4.3 (Prolongement minime)**.** Soit (P, X) un bloc de construction et $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. On dit que $(\tilde{P}, \tilde{X})$ est un *prolongement minime de* (P, X) si

1) $P \subset \tilde{P}$ et $X = \tilde{X}_{|P}$,

2) $\mathcal{O}_* \subset \operatorname{int} \tilde{P}$,

3) il existe une union disjointe $\mathcal{V}_*$ de voisinages linéarisants des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ dans $\tilde{P}$ tel que $\tilde{P} \setminus P \subset \mathcal{V}_*$.

La proposition suivante montre que la relation d'isotopie est équivalente à avoir un prolongement minime commun, quitte à faire une équivalence orbitale.

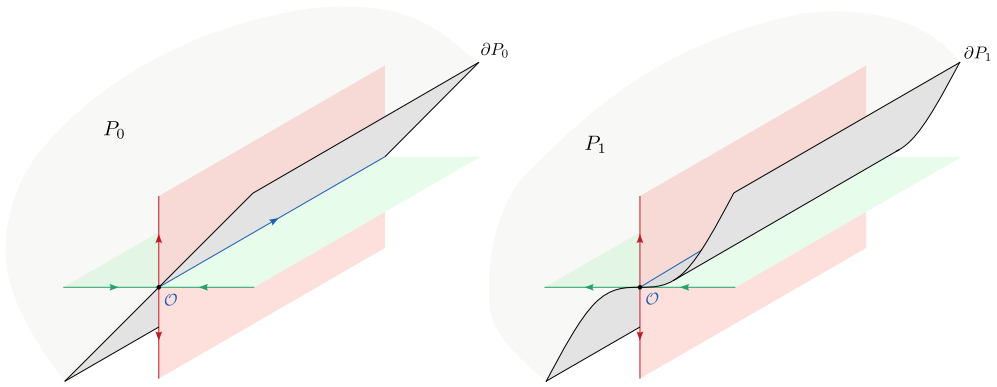


FIGURE 1.13 – Deux blocs isotopes mais non orbitalement équivalents au voisinage d'une orbite périodique commune $\mathcal{O}$ contenue dans le bord

Proposition 1.4.4. *Soit (P_0, X_0) et (P_1, X_1) deux blocs de construction.*

1) si (P_0, X_0) et (P_1, X_1) sont isotopes, alors il existe une équivalence orbitale (P_0', X_0') de (P_0, X_0), tel que (P_0', X_0') et (P_1, X_1) ont un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$ commun.

2) Réciproquement, si (P_0, X_0) et (P_1, X_1) sont inclus dans un même prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$, alors il existe une isotopie de blocs $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ tel que

- *$P_t \subset \tilde{P}$ et $X_t = \tilde{X}_{|P_t}$*
- *$P_t \setminus \mathcal{O}_*$ s'obtient en poussant $P_0 \setminus \mathcal{O}_*$ le long du flot de $\tilde{X}$.*

Deux blocs inclus dans un même prolongement minime ont la même collection $\mathcal{O}_*$ des orbites périodiques contenues dans le bord, ce qui justifie la notation précédente. On utilise le lemme suivant.

Lemme 1.4.5. *Soit (P, X) un bloc de construction tel que le bord ∂P est transverse au champ de vecteurs X. Alors (P, X) est structurellement stable, autrement dit pour toute perturbation Y de X assez petite en topologie $\mathcal{C}^1$ sur P, (P, Y) est un bloc de construction orbitalement équivalent à (P, X).*

Démonstration. On utilise le résultat suivant qui permet de plonger P dans une variété fermée $\mathcal{M}$ munie d'une extension structurellement stable de X. Un voisinage $U \subset \mathcal{M}$ est dit *filtrant* pour un champ de vecteurs Z sur $\mathcal{M}$ si le bord ∂U est transverse à Z et l'intersection avec toute orbite du flot de Z est connexe.

Fait 1.4.6 ([BB02, Appendice A])**.** *Il existe une variété fermée $\mathcal{M}$ de dimension 3 munie d'un champ de vecteurs $\bar{X}$ structurellement stable, tel que P est plongé dans $\mathcal{M}$, $\bar{X}$ est une extension de X, et P est un voisinage filtrant de Λ pour le flot de $\bar{X}$.*

Une petite perturbation Y en norme $\mathcal{C}^1$ du champ de vecteurs X s'étend en une petite perturbation $\bar{Y}$ en norme $\mathcal{C}^1$ du champ $\bar{X}$ sur $\mathcal{M}$. Par stabilité structurelle, il existe une équivalence orbitale $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ qui envoie les orbites orientées du flot de $\bar{X}$ sur les orbites orientées du flot de $\bar{Y}$, et qui est $\mathcal{C}^0$-proche de l'identité. L'équivalence orbitale envoie P sur un voisinage filtrant d'un ensemble compact invariant hyperbolique d'indice $(1, 1)$ (localement maximal) pour le flot de $\bar{Y}$. Quitte à choisir une perturbation assez petite, et faire une isotopie le long des orbites du flot, on peut supposer que $h(P) = P$ et le champ $\bar{Y}$ est transverse au bord ∂P. En

posant $Y := \bar{Y}_{|P}$, il suit que (P, Y) est un bloc de construction orbitalement équivalent au bloc (P, X). □

Remarque 1.4.7. Ce résultat n'est plus vrai si le bord de P est quasi-transverse au champ de vecteurs X et contient un ensemble non vide d'orbite périodiques $\mathcal{O}_*$. En effet, une petite perturbation d'un tel bloc de construction n'est pas toujours un bloc de construction car la condition de quasi-transversalité du bord au champ de vecteurs n'est pas stable par petite perturbation. De plus, le maximal invariant Λ intersecte le bord ∂P le long des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$, et pour cette raison on ne peut pas demander à priori que l'équivalence orbitale dans $\mathcal{M}$ pour une extension structurellement stable du champ de vecteurs préserve le bord de P.

Démonstration de la proposition 1.4.4. 1) Montrons le premier item. Soit $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie de blocs de construction. Soit (U_t, Y_t) le bloc associé au bloc (P_t, X_t) par le lemme 1.2.8 dont le bord est transverse au champ de vecteurs, et tel que (P_t, X_t) est plongé dans (U_t, Y_t). Chaque étape de la construction de (U_t, Y_t) dans la preuve du lemme 1.2.8 peut être faite de façon continue en t, autrement dit de sorte à ce que $\{(U_t, Y_t)\}_{t\in[0,1]}$ soit une isotopie de blocs de construction. Les blocs (U_t, Y_t) sont structurellement stables d'après le lemme 1.4.5. Par définition d'une isotopie de blocs de construction (définition 1.4.1), il existe une famille $\mathcal{C}^1$-continue de plongement $H_t \colon U_0 \to \tilde{U}$ tel que H_0 est l'inclusion et $H_t(U_0) = U_t$. On pose Y_t' le conjugué de Y_t par H_t, c'est un champ de vecteurs sur U_0 arbitrairement $\mathcal{C}^1$-proche de $Y_0' = Y_0$. Par stabilité structurelle du bloc (U_0, Y_0), les champs Y_t' et Y_0 sont orbitalement équivalents via un homéomorphisme $h_t' : U_0 \to U_0$ avec h_0' l'identité sur U_0, et en conjuguant de nouveau par H_t on en déduit que les champs Y_t et Y_0 sont orbitalement équivalents via un homéomorphisme $h_t \colon U_0 \to U_t$. Soit (P_t', X_t') l'image par h_t du bloc (P_t, X_t) dans U_0. Alors le champ X_t' coïncide avec la restriction de Y_t à P_t', et la famille $\{(P_t', X_t')\}_{t\in[0,1]}$ est une isotopie de blocs de construction orbitalement équivalents.

Soit $\mathcal{O}_*$ les orbites périodiques de X_0 contenues dans ∂P_0. Chaque bloc (P_t', X_t') a naturellement la même collection $\mathcal{O}_*$ d'orbites périodiques contenues dans le bord. Soit $\mathcal{V}_0$ une union disjointe de petit voisinage tubulaire des orbites de $\mathcal{O}_*$ dans U_0 inclus dans une union de voisinage linéarisants des orbites de $\mathcal{O}_*$. Alors la famille $\{\partial P_t' \smallsetminus \mathcal{V}_0\}_t$ est une isotopie de surfaces compactes uniformément transverses à $\tilde{X}$ plongées dans $\tilde{P}$. Quitte à pousser le long des orbites de $\tilde{X}$, on peut supposer que $\partial P_t' \smallsetminus \mathcal{V}_0 = \partial P_0' \smallsetminus \mathcal{V}_0 = \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{V}_0$. Cette opération revient à faire une équivalence orbitale sur chaque bloc (P_t', X_t'). On en déduit que (quitte à faire une équivalence orbitale) les blocs P_t' coïncident en dehors de $\mathcal{V}_0$, et par suite les blocs (P_t', X_t') sont tous inclus dans un même prolongement minime $(\tilde{P}_0, \tilde{X}_0)$. Ce prolongement minime est l'union $P_0 \cup \mathcal{V}_0$, et le champ de vecteurs est la restriction du champ $\tilde{X}$.

2) Montrons le deuxième item. Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$ une orbite périodique de X sur ∂P et $\mathcal{V}$ un voisinage linéarisant de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{P}$. D'après le fait 1.2.1, les composantes connexes de $(\partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}) \cap \mathcal{V}$ et $(\partial P_1 \smallsetminus \mathcal{O}) \cap \mathcal{V}$ sont des anneaux inclus deux à deux dans un même cadran et qui coïncident en leur bord $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$. Comme le flot est trivialisable dans un cadran, on en déduit le résultat.

□

Remarque 1.4.8. Dans l'item 2 de la proposition 1.4.4, on ne peut pas avoir une isotopie le long du flot de $\tilde{X}$ de P_t sur P_0. Pour le voir, considérons de nouveau le cas des blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) de la remarque 1.4.2 et la figure 1.13. L'isotopie le long du flot entre $\partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}$ et $\partial P_1 \smallsetminus \mathcal{O}$

dans ce voisinage ne se prolonge pas le long de l'orbite périodique $\mathcal{O}$: le temps de passage tend vers l'infini quand on s'approche de l'orbite $\mathcal{O}$.

Forte isotopie de triplet Soit (P_0, X_0) et (P_1, X_1) deux blocs de construction.

Définition 1.4.9 (Triplets fortement isotopes)**.** Soit (P_0, X_0) et (P_1, X_1) deux blocs de construction munis de recollement φ_0 et φ_1. On dit que les triplets (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) sont *isotopes* si :

1) Il existe une isotopie $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ de blocs de construction.

2) Il existe une famille continue $\{\varphi_t \colon \partial P_t \to \partial P_t\}_{t\in[0,1]}$ de recollement de (P_t, X_t) (au sens de la remarque 1.4.10).

On dit qu'ils sont *fortement isotopes* si de plus

3) Il existe une famille continue d'homéomorphismes $\{h_t \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*} \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}\}_{t\in[0,1]}$, tel que :

   - $h_0 = \mathrm{Id}$,
   - h_t envoie la lamination $\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*}$ sur la lamination $\mathcal{L}_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}$,
   - h_1 envoie la lamination $(\varphi_0)_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*})$ sur la lamination $(\varphi_1)_*(\mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{1,*})$.

Remarque 1.4.10. Les recollements φ_t de la définition 1.4.9, item 2 ne sont pas sur les mêmes espaces de départ et d'arrivée, il faut donc préciser ce qu'on entend formellement par une famille continue. Par définition de blocs isotopes (P_t, X_t) (définition 1.4.1), il existe une famille $\mathcal{C}^1$-continue de plongements $H_t \colon P_0 \to \tilde{P}$ en dimension trois, tel que $H_t(P) = P_t$. On considère les difféomorphismes $\psi_t \colon \partial P_0 \to \partial P_0$ conjugués de φ_t par H_t, et on demande que la famille soit continue en topologie $\mathcal{C}^1$. La même remarque tient pour la famille d'homéomorphismes h_t, où l'on requiert une famille continue en topologie $\mathcal{C}^0$.

Remarque 1.4.11. En des termes plus intuitifs, la forte isotopie des triplets (définition 1.4.9) signifie que, en plus d'une isotopie classique des blocs et recollements, on requiert une $\mathcal{C}^0$-isotopie du dessin de l'intersection des laminations. La raison pour laquelle cette dernière isotopie est seulement continue est que l'on va perdre de la régularité des recollements dans le cours de la preuve en conjuguant par des équivalences orbitales seulement continues et non triviales sur le bord des blocs.

La définition de triplets fortement isotopes assure que les variétés "recollées" sont les même, et que le "dessin d'intersection des laminations" est le même. Plus formellement :

Proposition 1.4.12. *Soit (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) deux triplets fortement isotopes. Alors*

1) quitte à faire une équivalence orbitale, les blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) sont inclus dans un même prolongement minime,

2) les variétés quotient P_0/φ_0 et P_1/φ_1 sont homéomorphes,

3) il existe un homéomorphisme $h \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0} \to \partial P_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,1}$ tel que

   - $h_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0}) = \mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,1}$,
   - $h_*(\varphi_0)_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0}) = (\varphi_1)_*(\mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,1})$.

Démonstration. Le premier item est une conséquence de la proposition 1.4.4, item 1. Les autres découlent directement de la définition 1.4.9 □

Remarque 1.4.13. Dans la définition 1.4.9, on ne peut pas simplement demander l'existence d'une famille continue de recollements $\varphi_t \colon \partial P_t \to \partial P_t$ fortement quasi-transverses. En effet, si (P_0, X_0) et (P_1, X_1) sont deux blocs inclus dans un même prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$, on veut pouvoir identifier comme équivalent les recollements suivants :

- $\varphi_0 : \partial P_0 \to \partial P_0$, où ∂P_0 est identifié à $x = y$ dans des coordonnées linéarisantes $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ au voisinage de $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, et φ_0 a pour expression $\varphi_0(x, y, \theta) = (-x, -y, \theta)$ dans des coordonnées ξ_i et ξ_j ;
- $\varphi_1 : \partial P_1 \to \partial P_1$, où ∂P_1 est identifié à $y = \sqrt{x}$ dans les coordonnées $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ au voisinage de $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, et φ_1 a pour expression $\varphi_1(x, y, \theta) = (-x, -y, \theta)$ dans les coordonnées ξ_i et ξ_j.

Or ces deux difféomorphismes de recollements ne sont pas isotopes via une famille de recollement fortement quasi-transverses $\varphi_t \colon \partial P_t \to \partial P_t$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une telle isotopie. Soit $W^s \in \mathcal{W}^s$ et $W^u \in \mathcal{W}^u$ une feuille de la variété stable et instable de Λ, tel que si $l_0^s = W^s \cap \partial P_0$ et $l_0^u = W^u \cap \partial P_0$ sont les feuilles induites sur la lamination de bord $\mathcal{L}_0$ de ∂P_0, l_0^s et $\varphi_0(l_0^u)$ s'accumulent sur une même orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$. On peut sans perte de généralités supposer que W^s a pour équation $\theta = -\ln(x) (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z})$ dans les coordonnées ξ_i et W^u a pour équation $\theta = \ln(x) (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z})$ dans les coordonnées ξ_j correspondantes. L'ensemble $\{p_{n,0}\} \subset \partial P_0$ des points d'intersections de $l_0^s \cap \varphi_0(l_0^u)$ dans le voisinage $\mathcal{V}_i$ est ordonné (la première intersection, puis la deuxième, etc), et on vérifie aisément qu'il existe deux sous-suites convergentes vers deux points distincts de $\mathcal{O}_i$. Posons $l_t^s = W^s \cap \partial P_t$ et $l_t^u = W^u \cap \partial P_t$. Alors, par forte transversalité, on peut considérer l'ensemble $\{p_{n,t}\} \subset \partial P_t$ des points d'intersections de $l_t^s \cap \varphi_t(l_t^u)$, et par continuité (en t) elle contient aussi deux sous-suites convergentes. Or on vérifie aisément que le difféomorphisme de recollement φ_1 ne vérifie pas cette propriété : la suite de points $\{p_{n,1}\} \subset \partial P_1$ admet trois sous-suites convergentes en trois points distincts de $\mathcal{O}_i$ (figure 1.14).

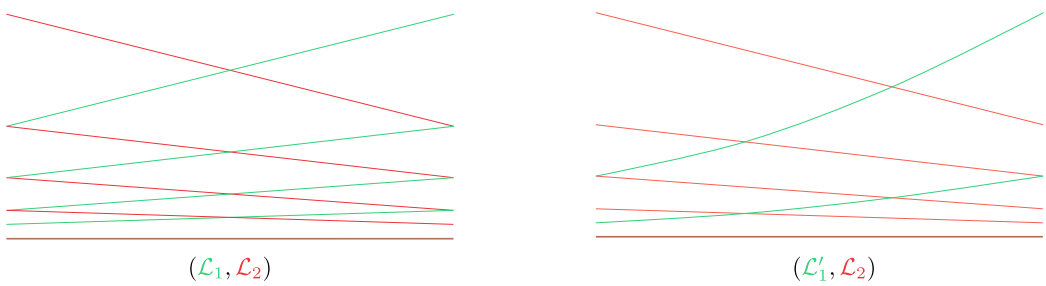


FIGURE 1.14 – Deux laminations $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_1'$ qui ne sont pas isotopes via des laminations fortement quasi-transverses à $\mathcal{L}_2$

1.5 Énoncé du théorème de recollement et organisation de la preuve

Pour des raisons techniques qui apparaîtront dans la preuve, on est amené à faire l'hypothèse suivante sur les blocs que l'on considérera.

Définition 1.5.1 (Bloc de construction selle)**.** Soit (P, X) un bloc de construction. On dit que c'est un bloc *selle* si le maximal invariant Λ ne contient ni attracteur ni de répulseur.

On rappelle qu'un flot d'Anosov est un flot Y^t sur une variété fermée $\mathcal{M}$, telle que la variété entière est un ensemble hyperbolique pour le flot. Plus précisément,

Définition 1.5.2 (Flot d'Anosov)**.** Soit $\mathcal{M}$ une variété fermée munie d'un champ de vecteurs Y de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que Y^t est un *flot d'Anosov*, ou de manière équivalente Y est un *champ de vecteurs Anosov*, si il existe une décomposition Y^t-invariante du fibré tangent $T\mathcal{M} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.Y \oplus E^{uu}$ et des constantes $\lambda > 1$, et $C > 0$ tel que

- $\forall v \in E^{uu}$, $\forall t \geq 0$, $\|(Y^t)_* v\| \geq C\lambda^t \|v\|$;
- $\forall v \in E^{ss}$, $\forall t \leq 0$, $\|(Y^t)_* v\| \geq C\lambda^{-t} \|v\|$.

pour une certaine métrique riemannienne sur $\mathcal{M}$.

On est en mesure d'énoncer le théorème principal de cette thèse.

Théorème 1 (Théorème de recollement)**.** *Soit (P_0, X_0, φ_0) un bloc de construction selle plein, muni d'un recollement fortement quasi-transverse. Alors il existe (P_1, X_1, φ_1) un triplet fortement isotope à (P_0, X_0, φ_0) tel que X_1 induit un champ de vecteurs Anosov sur la variété fermée P_1/φ_1.*

Les chapitre 2 à 6 sont consacrés à la preuve de ce théorème, qui s'organise de la façon suivante. Dans le chapitre 2, on montre que l'on peut mettre un triplet candidat du théorème (P, X, φ) sous une forme "normalisée". Dans le chapitre 3, on étudie les propriétés d'hyperbolicité de l'application de passage du flot du bord d'entrée P^{in} au bord de sortie P^{out}. Dans le chapitre 4, on montre comment "diffuser l'hyperbolicité" par un processus de changement de coordonnées sur le bord de P. Dans le chapitre 5, on montre que l'on peut utiliser ce changement de coordonnées pour modifier le recollement φ de sorte à créer de l'hyperbolicité le long des nouvelles orbites récurrentes du flot obtenu après recollement, et ceci de façon compatible avec l'hyperbolicité naturelle du flot initial. Dans le chapitre 6 final, on montre que pour un tel choix de recollement, le flot induit par le flot initial sur la variété recollée est Anosov, ce qui achève la preuve du théorème 1.

Chapitre 2

Normalisation des blocs de construction et des recollements

Dans ce chapitre, on considère un triplet (P, X, φ) constitué d'un bloc de construction selle plein (P, X) (définitions 1.1.3, 1.2.14, 1.5.1) et d'un recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ fortement quasi-transverse de (P, X) (définitions 1.3.1, 1.3.6). On note $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n\}$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, Λ le maximal invariant de (P, X), $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ les laminations stables et instables de Λ. Le but de ce chapitre est de modifier le triplet (P, X, φ) par forte isotopie afin d'obtenir une forme "normalisée". Brièvement, on veut :

- linéariser par morceaux la dynamique sur un voisinage du maximal invariant Λ ;
- ajuster les valeurs propres des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ à $\{\frac{1}{2}, 2\}$;
- construire une paire de feuilletages $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ sur le bloc qui prolonge les laminations $(\mathcal{W}^s, \mathcal{W}^u)$;
- mettre le bord du bloc en position canonique au voisinage des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$;
- contrôler explicitement le recollement φ au voisinage des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$.

Pour formaliser cela, il nous faut définir une notion de bloc de construction normalisé (définition 2.1.2) et de recollement normalisé (définition 2.1.8). Nous pourrons alors énoncer le résultat de normalisation 2.1.10.

2.1 Définitions et énoncé de la proposition principale

Bloc normalisé Soit $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime de (P, X) (définition 1.4.3).

Définition 2.1.1 (Section locale transverse)**.** On dit que $\Sigma \subset \tilde{P}$ est une *section locale transverse* de Λ pour le flot de $\tilde{X}$, si

1) Σ est une union finie de disques compacts disjoints plongés, transverses à $\tilde{X}$;
2) Σ intersecte toute orbite de Λ ;
3) $\partial\Sigma \cap \Lambda = \varnothing$.

Si D est un sous-ensemble compact de Σ, on dit que le premier retour de D est *bien défini* si l'orbite positive de tout point de D intersecte Σ en temps continu. Si D possède cette propriété, on peut *renormaliser* le champ $\tilde{X}$ pour que le temps de retour de D sur Σ soit égal à 1.

Définition 2.1.2 (Bloc de construction normalisé)**.** On dira qu'un bloc de construction (P, X) est *normalisé* si c'est un bloc plein, et il existe un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$ tel que, si $\mathcal{O}_*$ désigne la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, alors

1) *(coordonnées affines)* Il existe une section locale transverse Σ de Λ dans $\tilde{P}$, et un recouvrement de $\Sigma \cap \Lambda$ dans Σ en une collection finie de disques disjoints $D = \{D_1, \dots, D_n\}$, muni d'un système de coordonnées $\chi_i = (x, y)\colon D_i \to \mathbb{R}^2$ sur chaque D_i tel que :

   (a) le premier retour des disques de D sur Σ est bien défini,

   (b) pour toute orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, il existe un unique disque $D_i \in D$ qui intersecte $\mathcal{O}_i$ en un unique point,

   (c) si f est l'application de premier retour du flot de $\tilde{X}$ sur Σ, alors l'intersection $D_i \cap f_\Sigma^{-1}(D_j)$ est connexe et la restriction de f à $D_i \cap f_\Sigma^{-1}(D_j)$ est affine diagonale dans les coordonnées χ_i au départ et χ_j à l'arrivée (au sens de la remarque 2.1.3).

   On dit que Σ est une *section affine de* Λ, et $\{(D_i, \chi_i)\}$ est un *système de coordonnées affines* sur Σ.

2) *(valeurs propres)* Les valeurs propres des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$.

3) *(feuilletages)* Il existe une paire de feuilletages $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ de dimension deux et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{P}$ vérifiant :

   (a) $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont des feuilletages $\tilde{X}^t$-invariant, transverses l'un à l'autre, qui contiennent $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ comme sous-lamination respectivement,

   (b) Les feuilletages $\mathcal{G}^s \cap \Sigma$ et $\mathcal{G}^u \cap \Sigma$ coïncident avec $x = \text{cst}$ et $y = \text{cst}$ dans les coordonnées affines sur Σ données par l'item 1c précédent.

   On dit que $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ est une *paire de feuilletages affines invariants* de (P, X).

4) *(bord redressé)* Pour toute orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, il existe un système de coordonnées linéarisant $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de $\mathcal{O}_i$ pour le flot de $\tilde{X}$, compatible avec les coordonnées affines de la section Σ, et dans lequel le bord coïncide avec la diagonale $\{x = y\}$. Plus précisément :

   (a) si D_i est le disque donné par l'item 1b qui intersecte $\mathcal{O}_i$, alors il coïncide avec $\{\theta = 0\}$, et les coordonnées ξ_i et χ_i coïncident sur D_i

   (b) P coïncide avec la région $\{y \geq x\}$ dans les coordonnées ξ_i sur $\mathcal{V}_i$

   On dit que $\mathcal{V}_i$ un *voisinage normalisé* de $\mathcal{O}_i$ et $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ est un *système de coordonnées normalisé de* $\mathcal{O}_i$.

On renvoie à la figure 2.1.

Remarque 2.1.3. L'item 1 s'écrit formellement comme suit. Pour tout couple (i, j) tel que $D_i \cap f^{-1}(D_j) \neq \varnothing$, il existe un point $(a_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^2$ et des réels $0 < |\lambda_{i,j}| < 1$ et $|\mu_{i,j}| > 1$ tel que pour tout $p \in D_i \cap f^{-1}(D_j)$, si $(x, y) = \xi_i(p)$, on a

$$(\xi_j \circ f \circ \xi_i^{-1})(x, y) = (a_{i,j} + \lambda_{i,j}.x,\ b_{i,j} + \mu_{i,j}.y) \tag{2.1}$$

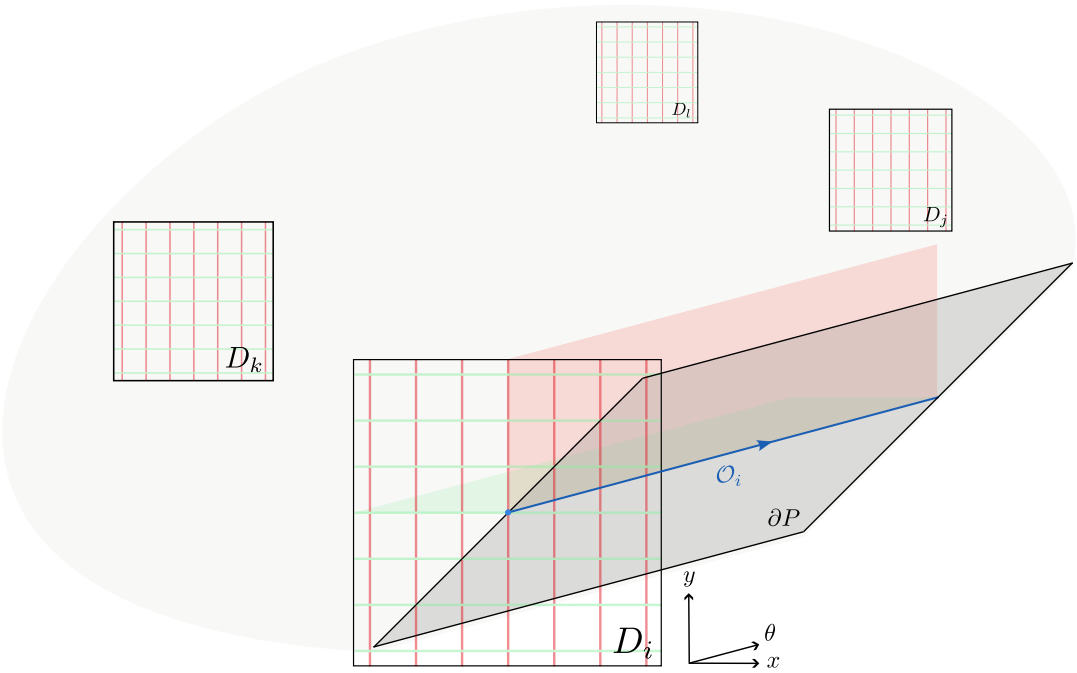


FIGURE 2.1 – Bloc normalisé (P, X) au voisinage d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$

Propriétés d'un bloc normalisé

Corollaire 2.1.4. *Soit (P, X) un bloc de construction normalisé et $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime. Pour toute orbite périodique $\mathcal{O}_i$ dans ∂P, si $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ est un système de coordonnées normalisé de $\mathcal{O}_i$ dans $\tilde{P}$ (définition 2.1.2, item 4), alors l'expression du flot de $\tilde{X}$ dans ces coordonnées est*

$$\tilde{X}^t(x, y, \theta) = (2^{-t}x,\ 2^t y,\ \theta + t)$$

Démonstration. Par hypothèse (définition 2.1.2, item 4a), $\mathcal{V}_i$ est inclus dans le voisinage de suspension du disque D_i qui intersecte $\mathcal{O}_i$, et le flot de $\tilde{X}$ dans les coordonnées ξ_i coïncide avec le flot de suspension de l'application de premier retour f sur le disque D_i dans les coordonnées χ_i. D'après l'item 1c (définition 2.1.2), cette application est linéaire diagonale dans les coordonnées $\chi_i = (x, y)$ sur $D_i \cap f^{-1}(D_i)$, et d'après l'item 2 (définition 2.1.2), elle a pour valeurs propres $\frac{1}{2}$ et 2. Le fait en découle. □

Remarque 2.1.5. Soit (P, X) un bloc normalisé, $\mathcal{O}_i$ une orbite périodique de X contenue dans ∂P, et $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ une paire de feuilletages affines invariants sur (P, X) (satisfaisant la définition 2.1.2, item 3). Les coordonnées normalisées $\xi_i = (x, y, \theta) \colon \mathcal{V}_i \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induisent les coordonnées $\rho_i = (x, \theta) \colon \partial P \cap \mathcal{V}_i \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur le bord de P par "oubli" de la coordonnées y. Dans ces coordonnées, si $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ est un relevé de la coordonnée $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors

- les feuilles du feuilletage $\mathcal{G}^u \cap \partial P$ ont pour équation $x = \mathrm{cst}\, 2^{-\tilde{\theta}}$,
- les feuilles du feuilletage $\mathcal{G}^s \cap \partial P$ ont pour équation $x = \mathrm{cst}\, 2^{\tilde{\theta}}$

Corollaire 2.1.6. *Soit (P, X) un bloc plein qui admet une section affine Σ du maximal invariant Λ et $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ une paire de feuilletages affines invariants sur (P, X). Alors*

1) $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} := \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{out}}$ *et* $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}} := \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{out}}$ *sont des feuilletages* $\mathcal{C}^1$ *de dimension 1 transverses l'un à l'autre sur* P^{out}

2) $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}} := \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{in}}$ *et* $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} := \mathcal{G}^s \cap P^{\mathrm{in}}$ *sont des feuilletages* $\mathcal{C}^1$ *de dimension 1 transverses l'un à l'autre sur* P^{in}

3) $\mathcal{G}^{\mathrm{b}} := \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ *est un feuilletage quasi-Morse-Smale de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* ∂P *qui contient la lamination de bord* $\mathcal{L}$ *de* (P, X) *en sous-lamination, et tel que l'holonomie de chaque feuille compacte est conjuguée à une application affine*[1].

On aura besoin d'un résultat préliminaire général, valable pour tout bloc de construction (P, X). Soit O une orbite de X et $\mathcal{W}^s(O)$ la variété stable de O. Une *séparatrice stable de* O est une composante connexe de $\mathcal{W}^s(O) \setminus O$, notée $\mathcal{W}^s_+(O)$. On dit qu'une séparatrice stable $\mathcal{W}^s_+(O)$ de O est *libre* si elle est disjointe de Λ. On définit de même la *séparatrice instable* et la *séparatrice instable libre* de O.

Fait 2.1.7. *Toute feuille compacte* γ *de* $\mathcal{L}^s$ [2] *est l'intersection transverse d'une séparatrice stable libre* $\mathcal{W}^s_+(O)$ *d'une orbite périodique* O *de* X *avec* P^{in}. *De même, tout feuille compacte* γ *de* $\mathcal{L}^u$ *est l'intersection transverse d'une séparatrice instable libre* $\mathcal{W}^u_+(O)$ *d'une orbite périodique* O *avec* P^{out}.

Démonstration du fait 2.1.7. Chaque orbite de $\mathcal{W}^s \setminus \Lambda$ coupe transversalement P^{in} en un unique point. Soit C la composante connexe de $\mathcal{W}^s \setminus \Lambda$ tel que $\gamma = C \cap P^{\mathrm{in}}$. L'espace des orbites sur C est un cercle, donc C est un cylindre trivialement feuilleté par le flot. Il s'ensuit que C est inclus dans la variété stable d'une orbite périodique O. L'orbite O est l'unique orbite périodique de X dans $\mathcal{W}^s(O)$, et C est invariante par le flot. Il suit que C est une composante connexe de $\mathcal{W}^s(O) \setminus O$, autrement dit une séparatrice stable de l'orbite périodique O. Et comme C est disjointe de Λ, cette séparatrice est libre. □

Démonstration du corollaire 2.1.6. Les feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, transverses l'un à l'autre, tangents au champ X, et les surfaces P^{in} et P^{out} sont transverses au champ X. On en déduit les deux premiers items.

Soit $\mathcal{G}^{\mathrm{b}} := \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$. La lamination $\mathcal{L}^u$ est une sous-lamination de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur P^{out} et $\mathcal{L}^s$ est une sous-lamination de $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in}. Les feuilletages $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur P^{out} et $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in} se recollent le long de $\mathcal{O}_*$ pour former un feuilletage $\mathcal{C}^1$ qui contient la lamination de bord $\mathcal{L} = \mathcal{L}^u \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^s$ en sous-lamination (voir preuve de la proposition 1.2.2). Tout feuilletage qui contient une lamination quasi-Morse-Smale remplissante en sous-lamination est un feuilletage quasi-Morse-Smale, et les feuilles compactes sont celles de la lamination. Une feuille compacte γ de, disons, $\mathcal{L}^s$ est l'intersection d'une séparatrice stable libre cylindrique $\mathcal{W}^s_+(O)$ d'une orbite périodique O d'après le fait 2.1.7. Les chemins γ et O sont librement homotopes dans $\mathcal{W}^s_+(O)$ (en tant que chemins non orientés). L'holonomie de O pour le feuilletage $\mathcal{G}^s$ est conjuguée à l'application de premier retour du flot sur une transversale de O dans $\mathcal{W}^u(O)$. Comme le flot de X admet une section affine au voisinage du maximal invariant Λ, cette application est conjuguée à une application affine. On en déduit que les applications d'holonomies de γ pour le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sont conjuguées à des applications affines. Il en est de même pour une feuille compacte de $\mathcal{L}^u$ ou de $\mathcal{O}_*$. Dans le cas d'une feuille $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, on considère l'holonomie d'un côté et de l'autre de $\mathcal{O}_i$. L'une correspond à l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^s$ le long $\mathcal{O}_i$ et l'autre à l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^u$ le long de $\mathcal{O}_i$. □

1. de chacun des deux côtés de la feuille compacte lorsque celle-ci admet deux côtés locaux
2. γ n'est pas une orbite périodique de X

Recollement normalisé

Définition 2.1.8 (Recollement normalisé)**.** Soit (P, X) un bloc normalisé (définition 2.1.2) muni d'une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ (définition 2.1.2, item 3), et on note $\mathcal{G}^{\mathrm{b}} = \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ le feuilletage sur ∂P donné par le corollaire 2.1.6. On dit qu'un recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P$ de (P, X) est *normalisé* si :

1) Pour chaque orbite périodique $\mathcal{O}_i$ dans ∂P, pour $\mathcal{O}_j = \varphi(\mathcal{O}_i)$, il existe des systèmes de coordonnées normalisés $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ et $(\mathcal{V}_j, \xi_j = (x, y, \theta))$ de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ (définition 2.1.2, item 4), telle que l'expression de φ dans ces coordonnées est

$$\varphi(x, x, \theta) = (-x, -x, \theta) \tag{2.2}$$

2) Le feuilletage $\varphi_*\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ est quasi-transverse au feuilletage $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ sur ∂P.

On dit alors que (P, X, φ) est un *triplet normalisé.*

On rappelle (corollaire 2.1.6) que $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ est le feuilletage obtenu par le recollement de la trace $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} = \mathcal{G}^s \cap P^{\mathrm{in}}$ sur P^{in} et de la trace $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} = \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{out}}$ sur P^{out} le long des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ contenues dans ∂P. C'est un feuilletage quasi-Morse-Smale qui contient la lamination de bord $\mathcal{L} = \mathcal{L}^s \cap \mathcal{O}_* \cap \mathcal{L}^u$ en sous-lamination. On rappelle qu'un système de coordonnées normalisé de $\mathcal{O}_i$ est un système de coordonnées linéarisant $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ qui vérifie l'item 4 de la définition 2.1.2. Le bord ∂P a pour équation $x = y$ dans ces coordonnées, ce qui justifie la formule (2.2). Plus formellement (mais on ne l'écrit pas pour alléger), cette expression signifie que pour tout (x, x, θ) dans l'image $\xi_i(\mathcal{V}_i \cap \partial P)$, on a $\xi_j \circ \varphi \circ \xi_i^{-1}(x, x, \theta) = (-x, -x, \theta)$. On renvoie à la définition 1.3.5 d'une paire de feuilletages quasi-transverses.

Proposition 2.1.9. *Un recollement normalisé de (P, X) est un recollement dynamique de (P, X) (au sens de la définition 1.3.3).*

Démonstration. Soit $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime de (P, X) et φ un recollement de (P, X). Il faut montrer que φ est la restriction d'un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ sur un voisinage de ∂P dans $\tilde{P}$ qui envoie le champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur lui même. Soit $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P.

- Pour chaque orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, si $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ et $(\mathcal{V}_j, \xi_j)$ désignent les systèmes de coordonnées normalisés au voisinage de $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j := \varphi(\mathcal{O}_i)$, alors la formule $(x, y, \theta) \mapsto (-x, -y, \theta)$ définit une extension $\tilde{\varphi}$ de φ à un voisinage de ∂P dans $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_j$

- Soit $\mathcal{V}_*$ l'union des voisinages normalisés $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$, et $\check{\mathcal{V}}$ un voisinage de $\mathcal{O}_*$ strictement inclus dans $\mathcal{V}_*$. Alors $\partial P \smallsetminus \check{\mathcal{V}}$ est une surface compacte transverse à X. Par le théorème de redressement local des champs de vecteurs, il existe donc un petit voisinage tubulaire U de $\partial P \smallsetminus \check{\mathcal{V}}$ muni de coordonnées $(p, t) \in (\partial P \smallsetminus \check{\mathcal{V}}) \times (-1, 1)$ dans lesquelles le champ $\tilde{X}$ est le champ trivial $\partial/\partial t$ et P s'identifie à l'ensemble $\{-1 < t \leq 0\}$. On prolonge φ par l'application $(p, t) \mapsto (\varphi(p), -t)$.

- Ces définitions locales sont compatibles. En effet l'ensemble $\partial P \cap (\mathcal{V}_* \smallsetminus \check{\mathcal{V}})$ est uniformément transverse à $\tilde{X}$ et il n'y a qu'une unique façon de prolonger φ sur un voisinage tubulaire par un difféomorphisme qui envoie le champ $\tilde{X}$ sur lui même.

On obtient donc des systèmes de coordonnées sur un voisinage tubulaire de ∂P dans $\tilde{P}$ dans lequel le difféomorphisme φ se prolonge en un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ qui envoie le champ $\tilde{X}$ sur lui même. □

Énoncé Le but de cette section est de montrer la proposition suivante. On rappelle qu'un bloc de construction (P, X) est dit selle si son maximal invariant Λ n'admet ni attracteur ni répulseur, et plein si la lamination de bord $\mathcal{L}$ est remplissante.

Proposition 2.1.10 (Normalisation de blocs et recollements)**.** *Soit (P, X, φ) un bloc de construction selle plein muni d'un recollement fortement quasi-transverse. Alors il existe (P_1, X_1, φ_1) un triplet normalisé fortement isotope à (P, X, φ).*

On renvoie à la définition 1.4.9 pour la forte isotopie de triplet.

Remarque 2.1.11. On suit de près les techniques de "normalisation" des blocs et recollements de Béguin-Bonatti-Yu ([BBY17, Section 5]). La différence principale est que l'on veut "redresser" le bord au voisinage des orbites périodiques pour le mettre en position canonique (item 4, définition 2.1.2). Cette opération faite à la section 2.6 est typiquement obtenue en poussant le bord le long du flot pendant un temps infini au voisinage des orbites périodiques contenues dans le bord. Cela nous fait sortir de la classe d'équivalence orbitale du bloc initial, et le recollement ne se prolonge plus aux orbites périodiques. On dira que l'on obtient un *recollement inachevé*. Il faut ensuite montrer que l'on peut modifier ce recollement inachevé dans sa classe d'isotopie forte pour qu'il se prolonge en un vrai recollement. D'autre part, certaines difficultés techniques s'ajoutent du fait que les blocs avec lesquels on travaille ne sont pas structurellement stables, à la différence des blocs de Béguin-Bonatti-Yu. Dès lors, perturber le champ de vecteurs d'un bloc, comme il est fait aux sections 2.2 et 2.3 pour linéariser le flot et ajuster les valeurs propres (item 1 et 2, définition 2.1.2), nous obligera à considérer un nouveau bloc porté par une autre variété.

Résumé de la preuve La démonstration de cette proposition s'organise comme suit.

- *(section affine)* Dans la section 2.2, on montre que l'on peut perturber un bloc selle (P, X) dans sa classe d'équivalence orbitale, de sorte à linéariser la dynamique au voisinage de Λ. Plus précisément, on montre qu'il existe un bloc (P_1, X_1) isotope à (P, X) parmi les blocs orbitalement équivalents qui admet une section affine Σ (proposition 2.2.1). Ce bloc vérifie alors l'item 1 de la définition 2.1.2.

  Le point clé est que l'application de retour sur une section locale transverse Σ du maximal invariant Λ est arbitrairement proche d'une application affine si la section est assez petite. On peut alors utiliser un résultat de stabilité structurelle (affaibli) sur les blocs de construction (proposition 2.2.3).

- *(valeurs propres)* Dans la section 2.3, on montre que tout bloc (P, X) selle qui admet une section affine est isotope à un bloc orbitalement équivalent (P_1, X_1) qui admet une section affine et tel que les valeurs propres des orbites périodiques contenues dans le bord sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$, autrement dit qui vérifie les items 1 et 2 de la définition 2.1.2. C'est la proposition 2.3.1.

  La preuve consiste à modifier continûment l'application de retour sur une partition de Markov au voisinage des orbites périodiques du bord.

- *(paire de feuilletages affines invariants)* Dans la section 2.4, on montre que l'on peut feuilleter un bloc de construction plein (P, X) qui admet une section affine Σ par une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$, autrement dit qui satisfait l'item 3 de la définition 2.1.2. C'est la proposition 2.4.1.

  Le point clé est que l'on peut pousser par le flot de X les feuilletages horizontaux et verticaux induit par les coordonnées affines sur Σ, afin d'obtenir une paire de feuilletages

transverses et X^t-invariants sur un voisinage invariant de Λ dans P, qui contiennent les variétés stables et instables de Λ. Comme le bloc (P, X) est un bloc plein, il n'y a ensuite "qu'une seule manière" de compléter ces feuilletages en une paire de feuilletages affines invariants sur P.

- *(recollement inachevé fortement isotope)* Dans la section 2.5, on considère un bloc selle (P_1, X_1) muni d'une paire de feuilletages affines invariants, et isotope à un bloc orbitalement équivalent (P_0, X_0) muni d'un recollement φ_0 fortement quasi-transverse. On montre (lemme 2.5.5) que l'on peut obtenir un "presque" recollement de (P, X) : une involution $\hat{\varphi}\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ qui envoie le bord de sorte P^{out} sur le bord d'entrée P^{in} mais ne se prolonge pas a priori aux orbites périodiques $\mathcal{O}_*$. On dira que c'est un *recollement inachevé* (définition 2.5.1). On requiert que $\hat{\varphi}$ et φ_0 respectent une relation compatible avec la définition 1.4.9, item 3, autrement dit on veut que le dessin de l'intersection des laminations soit le même. On dira qu'ils sont *fortement isotopes* (définition 2.5.2).

- *(redressement du bord)* Dans la section 2.6, on montre que si (P, X) est un bloc de construction qui admet une section affine Σ, alors il existe un bloc (P_1, X_1) dans un prolongement minime de (P, X) qui satisfait l'item 4 de la définition 2.1.2, autrement dit le bord ∂P_1 est diagonal dans les coordonnées de suspension de la section Σ au voisinage des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ contenues dans le bord. C'est la proposition 2.6.1. Si le bloc initial (P, X) vérifie les items 1, 2 et 3 de la définition 2.1.2, il s'ensuit que le bloc (P_1, X_1) est un bloc normalisé.

  Dans un paragraphe final, on explique que l'on peut récupérer un recollement inachevé sur le nouveau bloc (P_1, X_1) qui soit fortement isotope au recollement du bloc initial (P, X) (lemme 2.6.3). Un tel recollement inachevé est typiquement obtenu en poussant le recollement initial par le flot sur le bord de P_1 pendant un temps infini, et ne se prolongera en général pas aux orbites périodiques.

- *(normalisation du recollement)* Dans la section 2.7, on considère un bloc normalisé (P, X) muni d'un recollement inachevé $\hat{\varphi}$ qui envoie la lamination de bord $\mathcal{L}$ sur une lamination fortement transverse sur $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. On montre qu'il existe un (vrai) recollement normalisé φ_1 de (P, X) fortement isotope à $\hat{\varphi}$. C'est la proposition 2.7.1.

  L'idée de la preuve consiste à utiliser la trace de la paire de feuilletages affines invariants sur ∂P en tant que coordonnées sur ∂P au voisinage de $\mathcal{O}_*$. On modifie le recollement inachevé $\hat{\varphi}$ par forte isotopie sur le complémentaire des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ contenues dans ∂P, de façon a contrôler l'image par $\hat{\varphi}$ des feuilletages induit sur le bord au voisinage de $\mathcal{O}_*$. On peut faire ce travail de sorte que le nouveau recollement inachevé se prolonge trivialement sur $\mathcal{O}_*$.

- *(conclusion)* Dans une dernière section 2.8, on montre pour finir que, partant d'un bloc de construction selle plein (P, X) muni d'un recollement fortement quasi-transverse φ, on peut assembler les résultats des sections précédentes afin de construire un triplet normalisé (P_1, X_1, φ_1) fortement isotope à (P, X, φ) qui satisfait la proposition 2.1.10.

2.2 Section affine

Dans cette section on montre que l'on peut perturber un bloc selle (P, X) par isotopie dans sa classe d'équivalence orbitale en un bloc qui admet une section affine au sens de la définition 2.1.2, item 1.

Proposition 2.2.1. *Il existe un bloc de construction selle (P_1, X_1) isotope à (P, X) parmi les blocs de construction orbitalement équivalents et qui admet une section affine Σ au sens de la définition 2.1.2, item 1.*

Remarque 2.2.2. L'hypothèse selle est cruciale à cette étape. C'est elle qui nous assure l'existence d'une section locale transverse et nous permettra de linéariser le flot au voisinage du maximal invariant.

On suit de près la preuve de [BBY17, Lemme 5.3]. On perturbe l'application de retour sur une section locale transverse Σ du maximal invariant Λ. Si la section est assez petite, il existe une perturbation X' arbitrairement proche en norme $\mathcal{C}^1$ de X tel que l'application de premier retour sur Σ est affine dans des coordonnées sur un voisinage de $\Sigma \cap \Lambda$. La différence est que les blocs que l'on considère ne sont pas structurellement stables.

Stabilité structurelle des blocs de construction La proposition suivante donne un résultat de stabilité structurelle "affaiblie" pour les blocs de construction.

Proposition 2.2.3. *Soit (P, X) un bloc de construction et $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime (définition 1.4.3). Si $\tilde{Y}$ est un champ de vecteurs sur $\tilde{P}$ assez proche de $\tilde{X}$ en topologie $\mathcal{C}^1$, alors il existe un bloc $(Q, Y) = (Q, \tilde{Y}_{|Q})$ inclus dans $\tilde{P}$ isotope à (P, X) parmi les blocs de construction orbitalement équivalents.*

On renvoie à la définition 1.4.1 d'une isotopie de blocs de construction.

Démonstration. D'après le lemme 1.2.8, quitte à restreindre le prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$, on peut plonger $(\tilde{P}, \tilde{X})$ dans un bloc de construction $(\hat{P}, \hat{X})$ dont le bord $\partial\hat{P}$ est transverse au champ $\hat{X}$. Une ϵ-perturbation $\tilde{Y}$ assez petite de $\tilde{X}$ sur $\tilde{P}$ se prolonge sur $\hat{P}$ en une ϵ-perturbation de $\hat{X}$ que l'on note $\hat{Y}$. Par stabilité structurelle, il existe $h\colon \hat{P} \to \hat{P}$ un homéomorphisme isotope à l'identité qui réalise une équivalence orbitale entre le flot de $\hat{X}$ et le flot de $\hat{Y}$ qui est $K.\epsilon$ proche de l'identité en topologie $\mathcal{C}^0$ sur $\hat{P}$, avec K une constante uniforme. Alors h induit une équivalence orbitale entre (P, X) et (Q, Y) où $Q := h(P)$ est inclus dans un $K.\epsilon$-voisinage de P dans $\hat{P}$, et $Y := \hat{Y}_{|h(P)}$. Soit $\mathcal{V}_0$ une union disjointe de petit voisinage tubulaire des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, inclus dans des voisinages linéarisants. Alors $\partial P \setminus \mathcal{V}_0$ est une surface compacte uniformément transverse à $\hat{X}$. Pour ϵ assez petit, $h(\partial P \setminus \mathcal{V}_0)$ est une surface compacte uniformément transverse à $\hat{Y}$ dans un ϵ-voisinage de $\partial P \setminus A_0$. Quitte à pousser le long des orbites de $\hat{X}$ et modifier h, on peut donc supposer que $h(\partial P \setminus \mathcal{V}_0) = \partial P \setminus \mathcal{V}_0$. Alors pour ϵ assez petit, $Q = h(P)$ est inclus dans le prolongement minime $\tilde{P}$ de (P, X). De plus (quitte à isotoper le long des orbites du flot), Q est une surface quasi-transverse à Y, donc (Q, Y) est un bloc de construction orbitalement équivalent à (P, X). Comme h est isotope à l'identité, les champs $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont isotopes. De plus, les bords de P et Q sont inclus dans un même prolongement minime, donc d'après la proposition 1.4.4, item 2, les blocs (P, X) et $(h(P), \tilde{X}_{|h(P)})$ sont isotopes parmi les blocs de construction. On en déduit que les blocs de construction (P, X) et $(h(P), \tilde{Y}_{|h(P)}) = (h(P), Y)$ sont isotopes parmi les blocs de construction orbitalement équivalents. Le bloc $(h(P), Y)$ satisfait la proposition 2.2.3. □

En général on ne peut pas avoir $h(P) = P$, autrement dit h ne préserve pas le bord de P, et si Y est une petite perturbation de X sur P, le couple (P, Y) n'est pas toujours un bloc de construction (remarque 1.4.7).

Partition de Markov On aura besoin de la notion de partition de Markov, dont on donne la définition ici en suivant [BB02, section 2.1]. Soit Σ une section locale transverse de Λ dans un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$, f l'application de premier retour du flot de $\tilde{X}$ sur Σ (définition 2.1.1).

- Un *rectangle* R sur Σ est un plongement h de $I \times J$ dans Σ, où I et J sont deux segments fermés non triviaux de $\mathbb{R}$. Le *bord horizontal* de R, noté $\partial^s R$ est l'image de $I \times \partial J$ et le *bord vertical* de R, noté $\partial^u R$ est l'image de $\partial I \times J$.

- On supposera toujours un rectangle R muni d'une paire de *feuilletages* (ζ^s, ζ^u), de classe $\mathcal{C}^{0,1}$, triviaux, transverses l'un à l'autre, invariants par f, et tel que le bord horizontal de R est formé de deux feuilles de ζ^s et le bord vertical de R est formé de deux feuilles de ζ^u.

- Un *sous-rectangle horizontal* H de R est un rectangle inclus dans R tel que $\partial^u H \subset \partial^u R$ et $\partial^s H$ est formé de deux feuilles de ζ^s. Un *sous-rectangle vertical* V de R est un rectangle inclus dans R tel que $\partial^s V \subset \partial^s R$ et $\partial^u V$ est formé de deux feuilles de ζ^u.

Définition 2.2.4 ([BB02, Définition 2.1])**.** Une *partition de Markov* de Λ est la donnée d'une section locale transverse Σ de Λ et d'une collection finie $R_1, \dots, R_n$ de rectangles feuilletés sur Σ tel que :

1) L'union des rectangles R_i recouvre l'ensemble $\Lambda \cap \Sigma$

2) Pour tout i, le premier retour $f(R_i)$ de R_i sur Σ est bien défini.

3) Pour tout i, j l'intersection $f(R_i) \cap R_j$ a un nombre fini de composantes. Chacune de ces composantes est à la fois un sous-rectangle horizontal de $f(R_i)$ et un sous-rectangle vertical de R_j. De plus, on exige que cette intersection soit disjointe du bord vertical de R_j et du bord horizontal de $f(R_i)$.

4) pour tout $x \in R_i \cap f^{-1}(R_j)$, tout vecteur tangent au feuilletage ζ^s en x est uniformément contracté par la différentielle de f et tout vecteur tangent au feuilletage ζ^u en x est uniformément dilaté par la différentielle de f pour une métrique sur Σ.

On note $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ la partition de Markov, où $R = \cup_i R_i$ est l'union des rectangles sur Σ.

Si $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ est une partition de Markov, on supposera toujours que l'on a renormalisé $\tilde{X}$ pour que le temps de premier retour de R sur Σ soit égal à 1, et on appelle *cube associé à* R l'union $\mathcal{C} = \cup_{t=0}^{1} \tilde{X}^t(R)$ des segments d'orbites entre un point de R et son premier retour sur Σ.

Fait 2.2.5. *Soit (P, X) un bloc de construction selle, $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime, et $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Alors il existe une partition de Markov $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ (au sens ci-dessus) de Λ tel que :*

1) Σ intersecte chaque orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ en un unique point p_i ;

2) L'intersection d'une orbite de $\tilde{X}$ avec l'union des cubes $\mathcal{C}$ associé à R est connexe.

Démonstration du fait 2.2.5. D'après le lemme 1.2.8, quitte à restreindre le prolongement minime, on peut plonger (P, X) dans un bloc de construction (U, Y) dont le bord ∂U est transverse au champ de vecteurs Y et qui contient le prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$. Alors Λ est un compact invariant hyperbolique localement maximal d'indice $(1, 1)$ pour le flot de Y et on peut voir U comme un voisinage filtrant de Λ pour Y (fait 1.4.6). L'existence d'une partition de Markov

$\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ de Λ (au sens de la définition 2.2.4) pour le flot de Y dans U et tel que l'intersection des segments d'orbites avec l'union des cubes $\mathcal{C}$ est connexe est montrée dans [BB02, Proposition 2.8]. Quitte à rétrécir la section Σ, on peut supposer qu'elle est contenue dans le prolongement minime $\tilde{P}$. Quitte à redécouper Σ et enlever des composantes connexes, on peut supposer que toute orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ intersecte Σ en un unique point p_i. □

Preuve de la proposition 2.2.1

Preuve de la proposition 2.2.1. Soit (P, X) un bloc selle et on note $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Quitte à faire une perturbation petite en norme $\mathcal{C}^1$ et utiliser la propriété 2.2.3, on peut supposer que le champ X est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $\mathcal{R} = (R, \Sigma)$ une partition de Markov de Λ sur une section locale transverse Σ donnée par le fait 2.2.5, on note $f\colon R \to \Sigma$ l'application de premier retour et (ζ^s, ζ^u) la paire de feuilletages transverses f-invariants sur R. On suppose (quitte à redécouper Σ et enlever des composantes connexes) que toute orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ intersecte Σ en un unique point p_i. On va perturber le champ X en un champ Y arbitrairement proche en topologie $\mathcal{C}^1$ et pour lequel Σ est une section locale affine. Soit R^n le *raffinement d'ordre n de la partition R*, défini par

$$R^n := \bigcap_{k=-n}^{n} f^k R \subset \Sigma.$$

Soit ϵ_n le diamètre de la partition R_n, autrement dit le maximum du diamètre des composantes connexes de R^n. Le diamètre ϵ_n est majoré (à une constante multiplicative indépendante de n près) par le maximum de la norme de df^n dans la direction stable (tangente à ζ^s) et de df^{-n} dans la direction instable (tangente à ζ^u) sur les rectangles, donc $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $R_1^n, \dots, R_{k_n}^n$ les composantes connexes de R^n. Pour tout $p \in R_i^n$, il existe une identification $\mathcal{C}^1$ de l'espace tangent $T_p\Sigma$ avec le rectangle R_i^n. Plus précisément, il existe $\varphi_p\colon R_i^n \to T_p\Sigma$, tel que

- φ_p est un difféomorphisme sur son image $V := \varphi_p(R_i^n)$ qui est un ϵ_n-voisinage de l'origine O dans $T_p\Sigma$, et qui envoie p sur O ;
- il existe une identification $\chi_{i,p} = (x, y)\colon T_p\Sigma \to \mathbb{R}^2$ tel que le feuilletage $(\varphi_p)_*\zeta^u$ coïncide avec le feuilletage vertical $x = \text{cst}$ et $(\varphi_p)_*\zeta^s$ coïncide avec le feuilletage vertical $y = \text{cst}$.

Pour tout $n \geq 1$, l'intersection $R_{(i,j)}^n := R_i^n \cap f^{-1}(R_j^n)$ est connexe, et pour tout couple (i, j) tel que cette intersection est non vide on désigne la restriction de f correspondante par

$$f_{n,(i,j)}\colon R_i^n \cap f^{-1}(R_j^n) \to R_j^n.$$

Soit $\{p_{n,(i,j)}\}_{(i,j)}$ un ensemble de points de $\Sigma \cap \Lambda$ tels que $p_{n,(i,j)} \in R_{(i,j)}^n$, et tel que si $R_{i,i}^n$ est le rectangle intersectant l'orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, alors $p_{n,(i,i)} = p_i \in \mathcal{O}_i$ est le point d'intersection de $\mathcal{O}_i$ avec Σ. Soit $\hat{f}_{n,(i,j)}$ le conjugué de $d_{p_{n,(i,j)}} f$ par $\varphi_{p_{n,(i,j)}}$ au départ et $\varphi_{f(p_{n,(i,j)})}$ à l'arrivée, autrement dit

$$\hat{f}_{n,(i,j)} := \varphi_{f(p_{n,(i,j)})}^{-1} \circ d_{p_{n,(i,j)}} f \circ \varphi_{p_{n,(i,j)}}\colon R_{(i,j)}^n \to R_j^n \tag{2.3}$$

Par construction, il existe des coordonnées $\chi_i = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur R_i^n et $\chi_j = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur R_j^n tel que l'application $\hat{f}_{n,(i,j)}$ est affine diagonale dans les coordonnées χ_i au départ et χ_j à l'arrivée, et les feuilletages (ζ^s, ζ^u) coïncident avec les feuilletages horizontaux et verticaux dans ces coordonnées.

Fait 2.2.6. *Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hat{f} = \hat{f}_n\colon R \to \Sigma$ qui est un difféomorphisme sur son image, tel que*

1) $\hat{f}$ coïncide avec $\hat{f}_{n,(i,j)}$ sur $R^n_{(i,j)}$ pour chaque couple (i,j) ;

2) $\hat{f}$ coïncide avec f sur un voisinage du bord de R ;

3) $\hat{f}$ est arbitrairement proche de f en topologie $\mathcal{C}^1$ pour n assez grand.

Démonstration. Comme f est $\mathcal{C}^2$, d'après la formule (2.3), l'application $\hat{f}_{n,(i,j)}$ diffère de $f_{n,(i,j)}$ par un terme uniformément proportionnel à ϵ_n^2, autrement dit il existe une constante cst > 0 tel que pour tout $p \in R^n_{(i,j)}$,

$$|\hat{f}_{n,(i,j)}(p) - f_{n,(i,j)}(p)| \leq \text{cst}\, \epsilon_n^2$$

Pour des rectangles de diamètre ϵ_n, si la distance entre les rectangles R^n_i dans Σ est un $O(\epsilon_n)$, on peut fixer $\hat{f} = \hat{f}_{n,(i,j)}$ sur $R^n_{(i,j)}$ et prolonger sur R de sorte à recoller cette application avec l'application f sur le bord de R, en restant ϵ_n-proche de f en topologie $\mathcal{C}^1$. Il suffit donc de vérifier que la distance dans Σ entre les rectangles d'un raffinement R^n ne décroît pas trop vite. Comme la dilatation et la contraction de la différentielle de f est uniforme sur un voisinage de $\Lambda \cap \Sigma$, la distance dans Σ entre les rectangles est aussi de l'ordre de ϵ_n. □

La suspension de $\hat{f}$ sur R définit un flot engendré par un champ de vecteurs Y de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de Λ dans $\tilde{P}$, qui coïncide avec $\tilde{X}$ sur un voisinage du bord, et de premier retour $\hat{f}$ sur Σ. On note $\tilde{Y}$ son extension par $\tilde{X}$ sur $\tilde{P}$. Alors $\tilde{Y}$ est arbitrairement proche de $\tilde{X}$ en topologie $\mathcal{C}^1$. D'après la proposition 2.2.3, il existe un bloc (Q, Y) isotope à (P, X) parmi les blocs orbitalement équivalents dans $\tilde{P}$, où $Y = \tilde{Y}_{|Q}$. Par construction, le flot de $\tilde{Y}$ admet une section affine Σ de son maximal invariant Λ. En effet, il existe un recouvrement de $\Sigma \cap \Lambda$, donnée par la collection de composantes connexes $R^n = \{R^n_1, \ldots, R^n_{k_n}\}$ d'un raffinement assez grand d'une partition de Markov $\mathcal{R}$ sur Σ, et des coordonnées χ_i sur R^n_i tel que l'application $\hat{f}$ restreinte à $R^n_{(i,j)} = R^n_i \cap f^{-1}(R^n_j)$ est affine dans les coordonnées χ_i au départ et χ_j à l'arrivée. Le bloc (Q, Y) vérifie la proposition 2.2.1. □

Remarque 2.2.7. Remarquons que l'on peut appliquer la proposition 2.2.1 en conservant les valeurs propres des orbites périodiques contenues dans le bord, ce qui nous servira dans la section suivante. En effet, au voisinage d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ on a remplacé le premier retour de X sur Σ par sa différentielle au point $p_i = \mathcal{O}_i \cap \Sigma$, ce qui préserve les valeurs propres sur les orbites périodiques du nouveau flot contenues dans le bord.

Plus précisément, en reprenant les notations de la preuve, soit $\mathcal{O}_i$ une orbite périodique de X dans ∂P, et soit R^n_i le rectangle de R^n intersectant $\mathcal{O}_i$. Soit $R^n_{(i,i)} = R^n_i \cap f^{-1}(R^n_i)$. D'après le fait 2.2.6 l'application de retour $\hat{f}$ du flot de $\tilde{Y}$ sur $R^n_{(i,i)}$ coïncide avec le conjugué $\mathcal{C}^1$ de la différentielle de f en $p_i = \mathcal{O}_i \cap \Sigma$, où f est l'application de retour du flot de $\tilde{X}$ sur Σ. Il s'ensuit que p_i est un point fixe de $\hat{f}$ sur Σ, contenu dans le bord de P, et ses valeurs propres sont celles de $d_p f$. L'équivalence orbitale entre X et Y fixe les orbites périodiques $\mathcal{O}_i$, et les valeurs propres de ces orbites pour le flot de X et le flot de Y sont les mêmes.

2.3 Valeurs propres des orbites périodiques

Dans cette section, (P, X) désigne un bloc de construction selle qui admet une section affine (définition 2.1.2, item 1). On montre que l'on peut modifier un bloc selle (P, X) par isotopie dans sa classe d'équivalence orbitale pour que les valeurs propres des orbites périodiques contenues dans le bord soient $\{\frac{1}{2}, 2\}$.

Proposition 2.3.1. *Soit (P, X) un bloc de construction selle qui admet une section affine. Il existe un bloc (P_1, X_1) isotope à (P, X) parmi les blocs de construction orbitalement équivalents, qui admet une section affine et tel que les valeurs propres des orbites périodiques de X_1 contenues dans ∂P_1 sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$.*

Démonstration de la proposition 2.3.1. Soit (P, X) un bloc selle, et $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Soit Σ une section affine, et $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ une partition de Markov de Λ au sens de la définition 2.2.4 qui satisfait les hypothèses du fait 2.2.5. Quitte à rétrécir R, on suppose que la partition de Markov est inclus dans un système de coordonnées affines sur Σ (définition 2.1.2, item 1). L'application $f\colon R \to \Sigma$ est bien définie et préserve une paire de feuilletages transverses (ζ^s, ζ^u) sur R qui sont les feuilletages horizontaux et verticaux dans les coordonnées affines. Ces feuilletages sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur R. Chaque orbite $\mathcal{O}_i$ est associée à un unique point fixe p_i de f et de valeurs propres positives d'après le fait 1.2.1. On veut que les valeurs propres de la différentielle $D_{p_i} f$ soit égale à $\{\frac{1}{2}, 2\}$. On va donc modifier continûment la dérivée aux points p_i, pour $i = 1, \dots, n$.

Soit R/ζ^s le quotient des rectangles par le feuilletage ζ^s. L'application $f\colon R \cap f^{-1}(R) \to R \cap f(R)$ induit sur R/ζ^s une application $f^u\colon \cup_{k,l} I_k^l \to \cup_k I_k$, où $I_1, \dots, I_N$ sont des intervalles disjoints fermés ordonnés de $\mathbb{R}$, et $I_k^1, \dots, I_k^{n_k}$ des sous intervalles stricts de I_k fermés disjoints ordonnés, et la restriction de f^u à I_k^l est une application affine uniformément dilatante dans un certain I_i. On note $p_i^u \in I_{k_i}^{l_i}$ la projection du point fixe $p_i \in \mathcal{O}_i$ de f. Alors

Fait 2.3.2. *Pour tout $\lambda > 1$, il existe un difféomorphisme $g^u = g_\lambda^u\colon \cup_{k,l} I_k^l \to \cup_k I_k$ tel que*

1) *$g^u = f^u$ sur I_k^l pour $(k, l) \neq (k_i, l_i)$,*

2) *la restriction $g^u\colon I_{k_i}^{l_i} \to I_{k_i}$ est un difféomorphisme uniformément dilatant qui coïncide avec f^u au voisinage du bord de $I_{k_i}^{l_i}$,*

3) *p_i est un point fixe de g^u et $g^{u\prime}(p) = \lambda$,*

4) *g_λ^u dépend continûment de λ et est conjugué à f^u par un homéomorphisme $H\colon \cup_k I_k \to \cup_k I_k$, égal à l'identité en dehors de $I_{k_i}^{l_i}$ et sur le bord de $I_{k_i}^{l_i}$.*

Démonstration. Pour simplifier les notations, supposons que $(k_1, l_1) = (1, 1)$, et notons $p = p_1$. L'ensemble $K := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (f^u)^n (\cup_k I_k)$ est un Cantor disjoint du bord de I_k^l, et $|I_1| > |I_1^1|$. Soit un voisinage V_λ de p dans I_1^1, dont le bord est disjoint du bord de I_1^1, assez petit de sorte que $|I_1| > |I_1^1| - (\lambda - 1)|V_\lambda|$. On pose alors $g^u(x) = \lambda(x - p) + p$ sur V_λ. Puis $|I_1 \smallsetminus g^u(V_\lambda)| > |I_1^1 \smallsetminus V_\lambda|$, donc on peut étendre g^u sur I_1^1 en un difféomorphisme uniformément dilatante que l'on note encore g^u, et qui coïncide avec f^u sur le bord de I_1^1. On peut choisir le voisinage V_λ qui dépend continûment de λ, et étendre $g^u = g_\lambda^u$ sur I_1^1 de façon continue en λ. Alors g^u et f^u sont deux difféomorphismes dilatant sur $I_1^1 \to I_1$, qui coïncident sur le bord de I_1^1. Soit $H\colon \cup_k I_k \smallsetminus I_1^1 \to \cup_k I_k \smallsetminus I_1^1$ une application égale à l'identité. Il existe une unique façon de prolonger H sur I_1^1 de sorte à avoir une conjugaison H entre f^u et g^u. On peut répéter le même procédé sur chaque point fixe p_i^u en remarquant que l'application g^u obtenue vérifie encore les hypothèses du fait, et chaque p_i^u est encore un point fixe de g^u. □

Soit g^u l'application donnée par le fait 2.3.2 pour $\lambda = 2$. De même, en quotientant R par le feuilletage ζ^u, l'application f^{-1} induit une application affine $f^s\colon \cup_{k,l} J_k^l \to \cup_k J_k$ qui vérifie les hypothèses du fait 2.3.2. Soit p_i^s la projection dans R/ζ^u du point fixe $p_i \in \mathcal{O}_i$ de $f : R \to \Sigma$ sur l'orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$. Il existe un difféomorphisme $g^s\colon \cup_{k,l} J_k^l \to \cup_k J_k$ dilatant sur chaque J_k^l, avec $g^s(J_k^l) = f^s(J_k^l)$ pour tout couple (k, l), et tel que chaque $p_i^s \in J_{k_i}^{l_i}$ est un point fixe de g^s avec

$(g^s)'(p_i^s) = 2$, et g^s est conjuguée à f^s. Comme les feuilletages (ζ^s, ζ^u) sont $\mathcal{C}^1$, les coordonnées produit $R \to R/\zeta^s \times R/\zeta^u$ sont $\mathcal{C}^1$ et l'application produit $((g^s)^{-1}, g^u)$ induit un difféomorphisme g de $R \cap f^{-1}(R)$ et à image dans $R \cap f(R)$. D'après le fait 2.3.2, item 4, l'application g est isotope à f via une famille continue de difféomorphismes $f_t \colon R \cap f^{-1}(R) \to R \cap f(R)$, avec $f_0 = f$ et $f_1 = g$, vérifiant :

- chaque point $p_i \in \Sigma \cap \mathcal{O}_i$ est un point fixe de f_t, et les valeurs propres de la différentielle de $d_{p_i} f_1 = d_{p_i} g$ sont $\{\frac{1}{2}, 2\}$;
- l'application $f_t \colon R \cap f^{-1}(R) \to R \cap f(R)$ est conjuguée à f par un homéomorphisme $h_t : R \to R$, égal à l'identité sur le bord de R.

Soit $\mathcal{C} = \cup_{t=0}^{1} \tilde{X}^t R$ l'union des cubes de la partition de Markov associée à $\tilde{X}$ dans $\tilde{P}$. C'est un voisinage de Λ, dont l'intersection avec toute orbite de $\tilde{X}$ est connexe (fait 2.2.5), homéomorphe à la variété (à bord et à coin) de suspension $R_f := R \times [0,1]/(x,1) \sim (f(x), 0)$ par un homéomorphisme qui conjugue le flot de $\tilde{X}$ avec le flot de suspension induit par ∂_t, où t est la coordonnée sur $[0,1]$. De plus, le flot de suspension sur R_f est topologiquement conjugué au flot de suspension sur $R_{f_t} := R \times [0,1]/(x,1) \sim (f_t(x), 0)$. On en déduit que R_{f_t} est naturellement plongée dans $\tilde{P}$ via un homéomorphisme qui envoie R_{f_t} sur $\mathcal{C}$ et qui envoie les orbites du flot de ∂_t de R_{f_t} sur les orbites du flot d'un champ de vecteurs $\tilde{X}_t$ sur $\mathcal{C}$ dont le premier retour sur $R \subset \mathcal{C}$ est égal à f_t, et qui coïncide avec $\tilde{X}$ sur le bord de $\mathcal{C}$. Les champs sont orbitalement équivalents via un homéomorphisme $h_t \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, égal à l'identité sur le bord de $\mathcal{C}$.

On prolonge $\tilde{X}_t$ par $\tilde{X}$ sur le reste de la variété. On obtient une famille continue (pour la norme $\mathcal{C}^1$) de champ de vecteurs sur $\tilde{P}$, que l'on note encore $\tilde{X}_t$. Comme toute orbite qui sort de $\mathcal{C}$ n'y rentre plus, l'équivalence orbitale h_t sur $\mathcal{C}$ se prolonge par l'identité en une équivalence orbitale $h_t \colon \tilde{P} \to \tilde{P}$ entre $\tilde{X}_t$ et $\tilde{X}$, avec $h_0 = \mathrm{Id}$. Posons $P_t = h_t^{-1}(P)$. Quitte à faire une isotopie le long du flot de $\tilde{X}_t$, la surface ∂P_t est quasi-transverse à $\tilde{X}_t$. La famille (P_t, X_t) est une isotopie de blocs de construction orbitalement équivalents, où $X_t = \tilde{X}_{t|P_t}$. Soit $\mathcal{O}_{*,t}$ la collection des orbites périodiques de X_t contenues dans ∂P_t. Chaque orbite $\mathcal{O}_{i,t} \in \mathcal{O}_{*,t}$ intersecte la section Σ en un unique point $p_{i,t} = p_i$. D'après les propriétés de $f_1 = g$, chaque p_i est une point fixe de p ayant pour valeurs propres $\{\frac{1}{2}, 2\}$. Il s'ensuit que les orbites périodiques de X_1 contenues dans ∂P_1 ont pour valeurs propres $\{\frac{1}{2}, 2\}$.

La section Σ n'est plus a priori une section affine pour le flot de X_1, car on a modifié le premier retour au voisinage du maximal invariant. On peut appliquer la proposition 2.2.1 et la remarque 2.2.7 au bloc (P_1, X_1) pour obtenir un bloc (P_1', X_1'), isotope à (P_1, X_1) parmi les blocs orbitalement équivalents, qui admet une section affine et dont les valeurs propres des orbites périodiques contenues dans le bord sont toujours $\{\frac{1}{2}, 2\}$. Ce bloc satisfait la proposition 2.3.1. □

2.4 Paire de feuilletages affines invariants

Dans cette section, on montre que l'on peut feuilleter un bloc de construction (P, X) plein qui admet une section affine Σ (définition 2.1.2) par une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ (définition 2.1.2, item 3). Si Σ est une section affine de (P, X), on note (ζ^s, ζ^u) la paire de feuilletages transverses, invariants par l'application de premier retour f, qui coïncident avec les feuilletages horizontaux et verticaux sur Σ dans le système de coordonnées affines sur un voisinage de $\Lambda \cap \Sigma$ dans Σ.

Proposition 2.4.1. *Soit (P, X) un bloc de construction plein qui admet une section affine Σ du maximal invariant Λ. Il existe une paire de feuilletages $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ de dimension deux et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{P}$ vérifiant :*

1) $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ sont des feuilletages $\tilde{X}^t$-invariant, transverses l'un à l'autre, qui contiennent $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ comme sous-lamination respectivement,

2) Les feuilletages $\mathcal{G}^s \cap \Sigma$ et $\mathcal{G}^u \cap \Sigma$ coïncident avec $x = \mathrm{cst}$ et $y = \mathrm{cst}$ dans les coordonnées affines sur Σ

Autrement dit, $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ est une paire de feuilletages affines invariants au sens de la définition 2.1.2, item 3.

On répète ici la preuve de [BBY17, Lemme 5.6, Proposition 5.7]. Le cas des blocs de construction dont le bord est transverse au champ de vecteurs ou quasi-transverse au champ de vecteurs est complètement similaire.

Démonstration de la proposition 2.4.1. Les points clés de la preuve sont les suivants.

- On peut pousser les feuilletages horizontaux et verticaux induit par les coordonnées affines sur la section affine Σ, afin d'obtenir une paire de feuilletages transverses et X^t-invariants sur un voisinage invariant de Λ dans P, qui contiennent les variétés stables et instables de Λ. Ces feuilletages vérifieront naturellement l'item 2 de la proposition 2.4.1.

- On montre ensuite qu'il n'y a qu'une seule façon de compléter ces feuilletages en une paire de feuilletages affines invariants sur P. On utilise le fait que la lamination de bord d'un bloc plein est *remplissante* par définition.

Montrons ce résultat formellement. D'après 2.2.5, il existe une partition de Markov $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ sur Σ dans un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$ telle que l'intersection des orbites du flot de $\tilde{X}$ avec l'union des cubes $\mathcal{U} = \cup_{t=0}^{1} \tilde{X}^t(R)$ associé à la partition est connexe, et tel que (quitte à prendre un raffinement de la partition) R est inclus dans le domaine D des coordonnées affines de classe $\mathcal{C}^1$ sur Σ. On rappelle que l'application $f : R \to \Sigma$ est bien définie et coïncide avec le temps 1 du flot de $\tilde{X}$ restreint à R. En poussant les feuilletages horizontaux et verticaux dans les coordonnées affines sur R par le flot de X, on obtient deux feuilletages $\hat{\mathcal{G}}^s$ et $\hat{\mathcal{G}}^u$ de dimension 2 et de classe $\mathcal{C}^1$, transverses l'un à l'autre, X^t-invariants sur un voisinage invariant $\hat{\mathcal{U}}$ de Λ dans P, correspondant au saturé de $\mathcal{U}$. Par construction, ils vérifient l'item 2 de la proposition 2.4.1. Soit $\hat{\mathcal{U}}^{\mathrm{in}} = \hat{\mathcal{U}} \cap P^{\mathrm{in}}$, et $\hat{\mathcal{G}}^{u,\mathrm{in}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^{s,\mathrm{in}}$ l'intersection de $\hat{\mathcal{G}}^u$ et $\hat{\mathcal{G}}^s$ avec P^{in} respectivement.

Lemme 2.4.2. *Le complémentaire de $\hat{\mathcal{U}}^{\mathrm{in}}$ dans P^{in} est inclus dans une union finie de rectangles $C_1, \dots, C_n$, tel que pour chaque C_i, il existe un difféomorphisme $h_i \colon C_i \to [0,1]^2$ qui envoie le feuilletage $\hat{\mathcal{G}}^{s,\mathrm{in}} \cap C_i$ d'un voisinage du bord de C_i sur le feuilletage horizontal de $[0,1]^2$, et qui envoie le feuilletage $\hat{\mathcal{G}}^{u,\mathrm{in}} \cap C_i$ d'un voisinage du bord de C_i sur le feuilletage vertical de $[0,1]^2$.*

Démonstration. Comme $\hat{\mathcal{U}}$ est un voisinage des laminations $\mathcal{W}^s \cup \mathcal{W}^u$, l'intersection $\hat{\mathcal{U}} \cap \partial P$ est un voisinage de la lamination de bord $\mathcal{L} = (\mathcal{W}^s \cap \mathcal{W}^u) \cap \partial P$. Le complémentaire $\partial P \setminus \hat{\mathcal{U}}$ est inclus dans un nombre fini de composantes connexes du complémentaire $\partial P \setminus \mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est une lamination remplissante, ces composantes connexes sont des bandes, autrement dit des disques topologiques dont le bord accessible est formé de deux feuilles non compactes asymptotes l'une à l'autre à chaque extrémité. Soit B_i une de ces bandes sur P^{in}. Les feuilles non compactes qui forment son bord accessible sont deux feuilles l et l' de la lamination $\mathcal{L}^s$. Soit l_1^s et l_2^s deux feuilles de $\hat{\mathcal{G}}^{s,\mathrm{in}} \cap B$, l'une dans un voisinage de l_1 et l'autre dans un voisinage de l_2. Comme les feuilles l et l' sont asymptotes à chaque extrémité et s'accumulent de chaque côté sur une feuille compacte de $\mathcal{L}$, le voisinage $\hat{\mathcal{U}}^{\mathrm{in}}$ recouvre les deux extrémités de la bande. Il existe donc l_1^u et l_2^u deux arcs de feuilles de $\hat{\mathcal{G}}^{u,\mathrm{in}}$ qui traversent la bande B d'un bord à l'autre et situés chacun dans un voisinage d'une des deux extrémités (voir la figure 2.2). Il existe donc C_i un

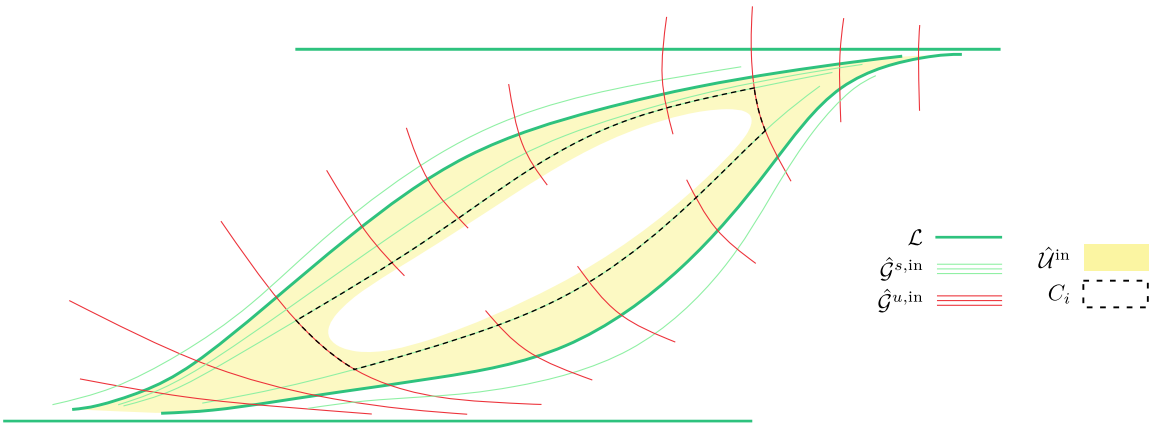


FIGURE 2.2 – Un rectangle C_i dans une bande B_i bordée par des feuille de la lamination $\mathcal{L}^s$

rectangle $\mathcal{C}^1$-plongé dans B_i formé de deux segments de l_1^u et l_2^u et de deux segments de l_1^s et l_2^s. Les feuilletages $\hat{\mathcal{G}}^{s,\mathrm{in}} \cap C_i$ et $\hat{\mathcal{G}}^{u,\mathrm{in}} \cap C_i$ sont transverses et triviaux sur un voisinage du bord de C_i. On renvoie à la figure pour l'image d'un tel rectangle. □

On complète le feuilletage trivialement sur chaque rectangle C_i du complémentaire $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{U}}^{\mathrm{in}}$ par les feuilletages horizontaux et verticaux dans les coordonnées données par le difféomorphisme h_i, et on obtient une paire de feuilletages lisses transverses $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ sur P^{in}, prolongeant respectivement $\hat{\mathcal{G}}^{s,\mathrm{in}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^{u,\mathrm{in}}$. Tout point de C_i est uniformément loin de la lamination d'entrée $\mathcal{L}^s$. Toute orbite future d'un point de C_i intersecte P^{out} en un unique point, et le segment d'orbite est de longueur uniformément bornée. Il existe X' une renormalisation de X tel que la X'-orbite de chaque point de C_i intersecte transversalement P^{out} en temps $t = 1$. Il s'ensuit que l'orbite $\mathcal{C}_i = \cup_{t\in\mathbb{R}} X^t(C_i)$ de C_i par le flot de X dans P est homéomorphe à $C_i \times [0,1]$, sur lequel le champ vertical $\partial/\partial t$ est orbitalement équivalent à X. On pousse les feuilletages $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ de C_i par le flot de X dans chaque cylindre $\mathcal{C}_i$ et on obtient deux feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur P. Ces feuilletages sont X^t-invariants, et prolongent les feuilletages $\hat{\mathcal{G}}^s$ et $\hat{\mathcal{G}}^u$ du voisinage $\hat{\mathcal{U}}$ respectivement. Ils satisfont la proposition 2.4.1. □

2.5 Recollements inachevés et forte isotopie

Dans cette section on considère un bloc selle (P, X) muni d'une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ (définition 2.1.2, item 3) et on le suppose isotope à un bloc orbitalement équivalent (P_0, X_0) muni d'un recollement φ_0 fortement quasi-transverse. On montre que l'on peut obtenir une version affaiblie de recollement sur (P, X), qui satisfait une relation avec φ_0 compatible avec la relation de forte isotopie des triplets (définition 1.4.9). Définissons formellement.

Définition 2.5.1 (Recollement inachevé)**.** Soit (P, X) un bloc de construction, $\mathcal{O}_*$ les orbites périodiques de X contenues dans ∂P, P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie de (P, X). Un *recollement inachevé de* (P, X) est une $\mathcal{C}^1$-involution $\hat{\varphi}\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ tel que

1) il existe une partition $\partial P = \partial_1 P \sqcup \partial_2 P$ où $\partial_1 P$ et $\partial_2 P$ sont des unions de composantes connexes de ∂P, et tel que $\hat{\varphi}(\partial_1 P \smallsetminus \mathcal{O}_*) = \partial_2 P \smallsetminus \mathcal{O}_*$,

2) $\hat{\varphi}(P^{\mathrm{out}}) = P^{\mathrm{in}}$

Notamment, la restriction d'un recollement φ d'un bloc (P, X) au complémentaire des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ dans ∂P est un recollement inachevé, mais l'intérêt d'introduire cette notion est de considérer des difféomorphismes qui ne se prolongent pas à $\mathcal{O}_*$. On considère la relation suivante sur les recollements inachevés.

Définition 2.5.2 (Recollements inachevés fortement isotopes)**.** On dira que deux recollements inachevés $\hat{\varphi}_0$ de (P_0, X_0) et $\hat{\varphi}_1$ de (P_1, X_1) sont fortement isotopes si il existe une isotopie de blocs $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ et une famille continue d'homéomorphismes $\{h_t \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*} \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}\}_{t\in[0,1]}$, tel que

1) $h_0 = \mathrm{Id}$

2) h_t envoie la lamination $\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*}$ sur la lamination $\mathcal{L}_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}$

3) h_1 envoie la lamination $(\varphi_0)_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*})$ sur la lamination $(\varphi_1)_*(\mathcal{L}_1 \smallsetminus \mathcal{O}_{1,*})$.

Remarque 2.5.3. On retrouve l'item 3 de la définition 1.4.9 de forte isotopie des triplets, autrement dit si (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) sont deux triplets fortement isotopes au sens de la définition 1.4.9, alors la restriction de φ_0 et la restriction de φ_1 sont des recollements inachevés fortement isotopes. Intuitivement, cette relation assure que les dessins de l'intersection des laminations est le même.

On va considérer des recollements inachevés qui réalisent un "bon" dessin d'intersection lamination. Plus précisément

Définition 2.5.4. Soit (P, X) un bloc de construction et $\hat{\varphi}$ est un recollement inachevé de (P, X). On dit que c'est un *recollement inachevé fortement transverse* si $(\mathcal{L} \smallsetminus \mathcal{O}_*, \hat{\varphi}_*(\mathcal{L} \smallsetminus \mathcal{O}_*))$ est une paire de lamination fortement transverses sur $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ (définition 1.3.5).

Notamment, la restriction d'un recollement fortement quasi-transverse φ d'un bloc (P, X) au complémentaire des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ dans ∂P est un recollement inachevé fortement transverse. On montre le lemme suivant.

Lemme 2.5.5. *Soit (P, X) et (P_0, X_0) deux blocs selles isotopes parmi les blocs orbitalement équivalents, tel que (P, X) admet une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$. Soit $\hat{\varphi}_0$ un recollement inachevé fortement transverse de (P_0, X_0). Alors il existe un recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}$ de (P, X) fortement isotope à $\hat{\varphi}_0$.*

Remarque 2.5.6. Même si le recollement inachevé initial $\hat{\varphi}_0 \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0} \to \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0}$ se prolonge en un recollement $\varphi_0 \colon \partial P_0 \to \partial P_0$, le recollement inachevé $\hat{\varphi}$ de (P, X) donné par le lemme 2.5.5 ne se prolongera pas a priori à $\mathcal{O}_*$.

Démonstration du lemme 2.5.5. Soit $\{(P_t, X_t)\}_{t\in[0,1]}$ l'isotopie de blocs orbitalement équivalents, avec $(P_1, X_1) = (P, X)$. Soit $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ une paire de feuilletages affines invariants sur P, autrement dit qui satisfait la proposition 2.4.1. Le bloc (P, X) est un bloc selle qui admet une section affine Σ. Il existe une partition de Markov $\mathcal{R} = (\Sigma, R)$ sur une section locale Σ qui satisfait le fait 2.2.5, et les feuilletages horizontaux et verticaux des rectangles coïncident avec les traces des feuilletages $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$.

Étape 1 : Recollement inachevé topologique.
Par équivalence orbitale des blocs (P_0, X_0) et (P, X), il existe une partition de Markov $\mathcal{R}_0 = (\Sigma_0, R_0)$ tel que les applications de retour $f_0 : R_0 \to \Sigma_0$ et $f : R \to \Sigma$ sont conjuguées. Les applications induites sur le quotient par le feuilletage horizontal d'une part et vertical d'autre

part sont conjuguées par des homéomorphismes. Le produit de ces homéomorphismes induit une équivalence orbitale H sur l'union des cubes de la partition qui préserve les rectangles feuilletées. Comme l'intersection des orbites avec l'union des cubes est connexe, on peut prolonger cette équivalence orbitale sur le bloc. Soit $H_t : P_0 \to P_t$ une famille continue d'équivalences orbitales entre le flot de X_0 et le flot de X_t, avec $H_1 = H$.

On pose $\hat{\varphi}$ le conjugué de $\hat{\varphi}_0$ par l'équivalence orbitale H. Il vérifie la définition 2.5.1, mais est seulement continu. On dira que c'est un *recollement inachevé topologique* de (P, X). Il existe une famille continue d'homéomorphismes $h_t \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0} \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_{*,t}$ (c'est la restriction de l'équivalence orbitale H_t) qui envoie la lamination $\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0}$ sur la lamination $\mathcal{L}_t \smallsetminus \mathcal{O}_{t,*}$ et tel que h_1 envoie la lamination $(\hat{\varphi}_0)_*(\mathcal{L}_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{*,0})$ sur la lamination $\hat{\varphi}_*(\mathcal{L} \smallsetminus \mathcal{O}_*)$. L'application $\hat{\varphi}$ satisfait la définition de forte isotopie (définition 2.5.2) de recollement inachevés, à ceci près qu'elle n'est pas différentiable.

Étape 2 : Feuilletages topologiquement transverses sur un voisinage des laminations. On définit (voir corollaire 2.1.6)

- $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} = \mathcal{G}^s \cap P^{\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}} = \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{in}}$. Ce sont des feuilletages de dimension 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur P^{in}, transverses l'un à l'autre et $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ contient la lamination $\mathcal{L}^s$ en sous-lamination.
- $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}} = \mathcal{G}^s \cap P^{\mathrm{out}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} = \mathcal{G}^u \cap P^{\mathrm{out}}$ Ce sont des feuilletages de dimension 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ dans P^{out}, transverses l'un à l'autre et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ contient la lamination $\mathcal{L}^u$ en sous-lamination.

Fait 2.5.7. *Il existe un voisinage U de $K := \hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ dans P^{in} sur lequel $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ est topologiquement transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{G}_0^s, \mathcal{G}_0^u)$ l'image par le flot des feuilletages des rectangles de $\mathcal{R}_0$. Alors H envoie alors la paire $(\mathcal{G}_0^s, \mathcal{G}_0^u)$ sur la paire $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$. On définit les feuilletages sur le bord d'entrée et de sortie (P_0, X_0) induit par la paire $(\mathcal{G}_0^s, \mathcal{G}_0^u)$ avec les notations analogues à la paire $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$. On sait que $\hat{\varphi}_0$ est un recollement inachevé (de classe $\mathcal{C}^1$) et fortement transverse, et on note $K_0 := (\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}_0^u \cap \mathcal{L}_0^s$ l'intersection transverse des laminations dans P_0^{in}. Les feuilletages $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}_0^{u,\mathrm{out}}$ et $\mathcal{G}_0^{s,\mathrm{in}}$ sont bien définis sur un voisinage de K_0 et contiennent respectivement les laminations (fortement) transverses $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}_0^u$ et $\mathcal{L}_0^s$. Par continuité, il existe un voisinage de K_0 sur lequel ces feuilletages sont transverses. L'équivalence orbitale H envoie la paire $((\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}_0^{u,\mathrm{out}}, \mathcal{G}_0^{s,\mathrm{in}})$ sur la paire $(\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}, \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}})$, qui est alors topologiquement transverse sur un voisinage de K. □

Étape 3 : Lissage des feuilletages images. Les feuilletages $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet de les redresser localement par des coordonnées $\mathcal{C}^1$. Les feuilletages $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ et $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sont, quant à eux, de régularité seulement $\mathcal{C}^0$. Dans cette étape, on va lisser cette paire de feuilletages au voisinage de l'intersection $K = \hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$.

Fait 2.5.8. *Il existe un homéomorphisme $\psi : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ à support dans P^{in} tel que :*

1) *ψ est isotope à l'identité parmi les homéomorphismes préservant $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ feuille à feuille*
2) *il existe un voisinage U de $K' := (\psi \circ \hat{\varphi})_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ sur lequel le feuilletage $(\psi \circ \hat{\varphi})_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$.*

Démonstration. L'ensemble K est localement compact dans P^{in}, totalement discontinu avec une structure de produit local (on rappelle que P^{in} n'est pas compact). On peut recouvrir K par une collection localement finie $\{R_i\}_i$ de rectangles $\mathcal{C}^1$-plongés inclus dans U tel que :

- les R_i sont deux à deux disjoints et leur bord est disjoint de K ;

- les segments verticaux de R_i sont des arcs de feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et les segments horizontaux de R_i sont des arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$;
- chaque feuille de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u$ traverse horizontalement R_i, autrement dit elle traverse R_i d'un bord vertical à l'autre
- le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ est topologiquement transverse au feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur chaque R_i

Si σ est une composante connexe de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap R_i$, il existe un sous-rectangle R_σ de R_i arbitrairement fin contenant σ, dont le bord horizontal consiste en deux arcs de feuilles de $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ disjoint de K, et le bord vertical est inclus dans le bord vertical de R_i, et tel que chaque feuille de $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ traverse horizontalement R_i (figure 2.3). Il existe un homéomorphisme ψ_σ de R_σ égal à l'identité sur un voisinage du bord ∂R_σ, tel que ψ_σ envoie $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur le feuilletage horizontal de R_i sur un voisinage de K dans R_σ, et préserve les segments verticaux de R_σ.

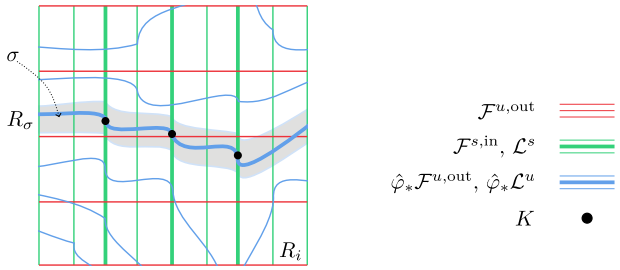


FIGURE 2.3 – Rectangle feuilleté R_i et sous-rectangle R_σ

Cet homéomorphisme est isotope à l'identité parmi les homéomorphismes de R_σ qui préservent le feuilletage vertical de R_σ. Il suffit de faire une isotopie barycentrique feuille à feuille. On recouvre $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^s \cap R_i$ par un nombre fini de sous-rectangles R_σ disjoints vérifiant la propriété précédente. Soit ψ_i l'homéomorphisme de R_i coïncidant avec ψ_σ sur chaque R_σ et égal à l'identité ailleurs. Les rectangles R_i sont deux à deux disjoints et la collection $\{R_i\}_i$ est localement finie, donc on peut définir le homéomorphisme ψ de P^{in} égal à ψ_i sur chaque R_i et égal à l'identité ailleurs. Il satisfait le fait. □

Soit ψ donné par le fait 2.5.8. On pose

$$\hat{\varphi}' = \hat{\varphi} \circ \psi : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*.$$

Le feuilletage $\hat{\varphi}'_*\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est topologiquement transverse au feuilletage $\hat{\varphi}'_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$. On peut le pousser le long des feuilles de $\hat{\varphi}'_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ localement au voisinage de K' pour le rendre lisse. Plus précisément, par des arguments similaire, on a l'existence d'un homéomorphisme $\psi' : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ à support dans P^{in}, isotope à l'identité parmi les homéomorphismes préservant le feuilletage $\hat{\varphi}'_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ feuille à feuille, et tel qu'il existe un voisinage $U' \subset U$ de K' sur lequel le feuilletage $(\psi' \circ \hat{\varphi}')_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et transverse à $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$. On pose

$$\hat{\varphi}'' = \hat{\varphi}' \circ \psi' : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$$

Cette composée définit un recollement inachevé topologique, fortement transverse (au sens différentiable), fortement isotope à $\hat{\varphi}'$ et tel que la paire de feuilletages $(\hat{\varphi}''_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \hat{\varphi}''_*\mathcal{G}^{s,\text{in}})$ est lisse sur un voisinage U' de $K' = \hat{\varphi}''_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ dans P^{in}.

Étape 4 : Lissage du recollement.

Fait 2.5.9. *Il existe un recollement inachevé topologique $\hat{\varphi}''' : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$, fortement transverse (au sens différentiable), fortement isotope à $\hat{\varphi}''$, et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de l'intersection des laminations $\hat{\varphi}'''_* \mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$.*

Démonstration. On recouvre K' par une collection localement finie $\{R_i\}_i$ de rectangles $\mathcal{C}^1$-plongés inclus dans U', deux à deux disjoints et dont le bord est disjoint de K, et les segments horizontaux de R_i sont des arcs de feuille de $\hat{\varphi}''_* \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ et les segments verticaux de R_i sont des arcs de feuilles de $\hat{\varphi}''_* \mathcal{G}^{s,\text{out}}$. On pose $C_i := (\hat{\varphi}'')^{-1}(R_i)$. Il existe des coordonnées $\mathcal{C}^1$ sur C_i qui redressent la paire $(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})$ sur le feuilletage horizontal et vertical. Soit σ une feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap C_i$, et on pose $\sigma' = \hat{\varphi}''(\sigma)$. En faisant une convolution de la restriction de $\hat{\varphi}''$ à $\sigma \to \sigma'$ dans des coordonnées $\mathcal{C}^1$, on a l'existence d'un homéomorphisme $f_i : \sigma \to \sigma'$, de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors d'un voisinage des extrémités de σ disjoint de l'image réciproque de K, arbitrairement proche de de $\hat{\varphi}''$ et qui coïncide avec $\hat{\varphi}''$ sur un voisinage des extrémités de σ. Soit $F_i : C_i \to R_i$ l'application obtenue en poussant l'application f_i par l'holonomie le long du feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}} \cap C_i$ au départ et le long du feuilletage $\hat{\varphi}''_* \mathcal{G}^{u,\text{out}} \cap R_i$ à l'arrivée. Comme l'holonomie de ces feuilletages est de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que F_i est de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors d'un voisinage du bord de C_i disjoint de l'image réciproque de K (quitte à choisir le support de la convolution assez grand),

L'application F_i coïncide avec $\hat{\varphi}''$ au voisinage du bord vertical de C_i, mais pas au voisinage du bord horizontal. Pour y remédier on peut faire une moyenne le long des feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ de la manière suivante. Les coordonnées sur C_i permettent de paramétrer les feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{out}} \cap C_i$ par une famille $\{\sigma_t\}_{t \in [-1,1]}$ avec $\sigma = \sigma_0$ et $\sigma'(t) = \hat{\varphi}''(\sigma)$. Les applications $\hat{\varphi}''$ et F induisent des applications $\hat{\varphi}''_t : \sigma_t \to \sigma'_t$ et $(F_i)_t : \sigma_t \to \sigma'_t$ par restriction. On fait une moyenne entre $\hat{\varphi}''_t$ et F_t sur la feuille σ_t par l'application

$$(G_i)_t = \tau(t)(F_i)_t + (1 - \tau(t))\varphi''_t : \sigma_t \to \sigma'_t$$

avec $\tau : [-1, 1] \to [0, 1]$ une application plateau de classe $\mathcal{C}^1$ qui vaut 1 sur un voisinage de 0 et 0 sur un voisinage des extrémités de $[-1, 1]$. Cette famille défini un difféomorphisme $G_i : C_i \to R_i$, qui coïncide avec F en dehors d'un voisinage du bord de C_i disjoint de l'image réciproque de K quitte à choisir le support de τ assez grand, et qui coïncide avec $\hat{\varphi}''$ sur un voisinage du bord de C_i. Les applications $G_i : C_i \to R_i$ se recollent par $\hat{\varphi}''$ en un recollement inachevé $\hat{\varphi}''' : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$, fortement transverse (au sens différentiable), fortement isotope à $\hat{\varphi}''$, et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de l'intersection des laminations $\hat{\varphi}'''_* \mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$. □

Pour finir, on peut perturber $\hat{\varphi}'''$ en dehors d'un voisinage compact de l'intersection des laminations pour le rendre de classe $\mathcal{C}^1$ partout, et arbitrairement proche en topologie $\mathcal{C}^0$. Une telle perturbation reste fortement transverse, et fortement isotope à $\hat{\varphi}'''$ car en dehors d'un voisinage de l'intersection des lamination. □

2.6 Redressement du bord d'un bloc de construction

Dans cette section, (P, X) est un bloc de construction muni d'une section affine Σ dans un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$ (au sens de la définition 2.1.2, item 1), tel que les valeurs propres des orbites périodiques de X contenues dans ∂P sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$, et muni d'une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ sur $(\tilde{P}, \tilde{X})$. On va "redresser" le bord de (P, X) afin d'obtenir l'item 4 de la définition 2.1.2 d'un bloc normalisé. Soit $\{(D_i, \chi_i)\}$ un système de coordonnées affines sur un voisinage de $\Sigma \cap \Lambda$ dans Σ.

Proposition 2.6.1. *Il existe un bloc de construction selle (P_1, X_1), tel que $(\tilde{P}, \tilde{X})$ est un prolongement minime de (P_1, X_1), et tel que pour toute orbite $\mathcal{O}_i$ de X_1 dans ∂P_1, il existe un système de*

coordonnées linéarisant $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ *de* $\mathcal{O}_i$ *pour le flot de* $\tilde{X}$*, compatible avec les coordonnées affines de la section* Σ*, et dans lequel* ∂P_1 *coïncide avec la diagonale* $\{x = y\}$*. Plus précisément :*

1) *si* $D_i \subset \Sigma$ *est le disque qui intersecte* $\mathcal{O}_i$*, alors il coïncide avec* $\{\theta = 0\}$*, et les coordonnées* ξ_i *et* χ_i *coïncident sur* D_i

2) P_1 *coïncide avec la région* $\{y \geq x\}$ *dans les coordonnées* ξ_i *sur* $\mathcal{V}_i$

Ce bloc est unique à isotopie le long du flot près.

On renvoie à la figure 2.1.

Corollaire 2.6.2. *Le bloc* (P_1, X_1) *est un bloc normalisé isotope à* (P, X)*.*

Démonstration du corollaire 2.6.2. L'isotopie est une conséquence du fait que les blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) ont un prolongement minime commun et de la proposition 1.4.4, item 2. Le bloc (P, X) vérifie les items 1, 2 et 3 de la définition 2.1.2 d'un bloc normalisé par hypothèse. Comme (P_1, X_1) et (P, X) ont un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$ commun, il en est de même pour (P_1, X_1). D'après la proposition 2.6.1, le bloc (P_1, X_1) il vérifie l'item 4. Le bloc (P_1, X_1) satisfait donc la définition 2.1.2 d'un bloc normalisé. □

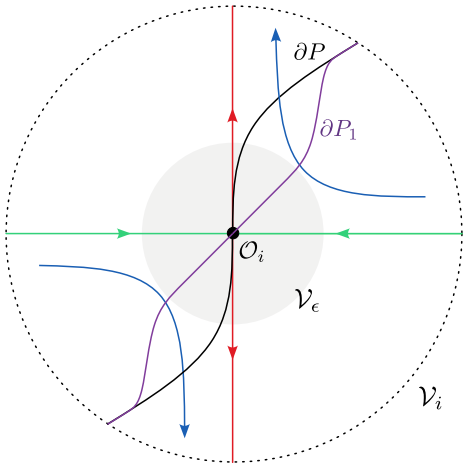


FIGURE 2.4 – Redressement du bloc (P, X) dans un prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$

Démonstration de la proposition 2.6.1. Soit $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Pour chaque orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, soit D_i l'unique disque qui intersecte l'orbite $\mathcal{O}_i$ muni des coordonnées affines $\chi_i = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (définition 2.1.2, item 1). Soit $\mathcal{V}_i$ un voisinage tubulaire de $\mathcal{O}_i$ inclus dans le voisinage de suspension de D_i, autrement dit inclus dans $\cup_{t=0}^{1} \tilde{X}^t(D_i)$ (on suppose que l'on a renormalisé le champ $\tilde{X}$ tel que D_i retourne sur Σ en temps 1). Soit $\xi_i = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un système de coordonnées linéarisant de $\mathcal{O}_i$ sur $\mathcal{V}_i$ tel que D_i coïncide avec $\{\theta = 0\}$ dans $\mathcal{V}_i$ et ξ_i et χ_i coïncident sur $D_i \cap \mathcal{V}_i$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $\mathcal{O}_i = \{x = y = 0\}$. Comme l'application f est affine diagonale sur $D_i \cap f^{-1}(D_i)$ dans les coordonnées χ_i, et les valeurs propres de $\mathcal{O}_i$ sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$, on en déduit que l'expression linéarisée du flot $\tilde{X}$ dans les coordonnées ξ_i est $\tilde{X}^t(x, y, \theta) = (2^{-t}x, 2^t y, \theta + t)$. Deux composantes

de $P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ adjacentes en $\mathcal{O}_i$ sont incluses dans deux cadrans opposés de $\mathcal{O}_i$ (fait 1.2.1), à savoir (quitte à renverser l'orientation) les cadrans $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ et $\{x \leq 0, y \leq 0\}$.

On peut donc définir une surface S lisse, qui coïncide avec ∂P en dehors des voisinages $\mathcal{V}_i$, et tel que dans chaque $\mathcal{V}_i$, on a

- S coïncide avec les anneaux diagonaux d'équation $\{x = y\}$ dans un ϵ-voisinage de $\mathcal{O}_i$ strictement inclus dans $\mathcal{V}_i$ que l'on note $\mathcal{V}_\epsilon$.
- S est un anneau transverse au champ de vecteurs $\tilde{X}$ dans la couronne $\mathcal{V}_i \smallsetminus \mathcal{V}_\epsilon$, et coïncide avec ∂P au voisinage du bord de $\mathcal{V}_i$.

Alors S est une surface fermée quasi-transverse, et découpe une sous-variété P_1 de $\tilde{P}$ qui coïncide avec P en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$. Si on note X_1 la restriction de $\tilde{X}$ à P_1, alors le couple (P_1, X_1) est un bloc de construction ayant pour prolongement minime $(\tilde{P}, \tilde{X})$. Par construction, il satisfait la proposition 2.6.1. Si (P', X') est un autre bloc qui satisfait la proposition, quitte à faire un changement de coordonnées $\mathcal{C}^1$ pour se ramener à un même système de coordonnées linéarisant $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$, les bords $\partial P'$ et ∂P_1 dans ce voisinage sont des anneaux transverses aux variétés stables et instables de $\mathcal{O}_i$ inclus dans les deux même cadrans opposés, et qui coïncident en leur bord. On en déduit qu'ils sont isotopes le long du flot de $\tilde{X}$ dans $\mathcal{V}_i$. □

Recollement inachevé fortement isotope Dans ce paragraphe, on explique comment obtenir un recollement inachevé fortement transverse (définitions 2.5.1 et 2.5.4) sur un bloc (P, X) ayant un prolongement minime commun avec un bloc (P_0, X_0) muni d'un recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}_0$, et de sorte à satisfaire la relation de forte isotopie (définition 2.5.2). Plus précisément :

Lemme 2.6.3. *Soit (P, X) et (P_0, X_0) deux blocs ayant un prolongement minime commun $(\tilde{P}, \tilde{X})$. Soit $\hat{\varphi}_0$ un recollement inachevé fortement transverse de (P_0, X_0). Alors il existe un recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}$ de (P, X) fortement isotope à $\hat{\varphi}_0$.*

Remarque 2.6.4. De même que pour la remarque 2.5.6, même si le recollement inachevé initial $\hat{\varphi}_0$ se prolonge en un recollement, ce ne sera pas le cas du recollement inachevé $\hat{\varphi}$ obtenu par le lemme 2.6.3. Typiquement, on obtiendra $\hat{\varphi}$ en poussant $\hat{\varphi}_0$ par une isotopie le long du flot pendant un temps qui peut tendre vers l'infini à mesure que l'on s'approche des orbites périodiques contenues dans le bord.

Démonstration. D'après la proposition 1.4.4, il existe une famille continue (P_t, X_t) de blocs de construction ayant un prolongement minime commun $(\tilde{P}, \tilde{X})$, et qui joint (P_0, X_0) à (P, X). Ces blocs coïncident tous en dehors d'une union $\mathcal{V}_*$ de voisinages linéarisants des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ de X_0 contenues dans ∂P_0. Il existe $H_t \colon \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_*$ une unique isotopie le long des orbites de $\tilde{X}$ triviale sur le complémentaire de $\mathcal{V}_*$. Elle ne se prolonge pas en général le long des orbites $\mathcal{O}_*$. La famille $\hat{\varphi}_t = (H_t)_* \hat{\varphi} \colon \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P_t \smallsetminus \mathcal{O}_*$ est une famille continue de recollements inachevés de (P_t, X_t). Comme l'isotopie $\{H_t\}_t$ préserve les variétés stables et instables du flot de $\tilde{X}$, on en déduit que les recollements inachevés $\hat{\varphi} := \hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_0$ sont fortement isotopes au sens de la définition 2.5.2. Comme l'isotopie est $\mathcal{C}^1$, la forte transversalité de $\hat{\varphi}$ entraîne la forte transversalité de $\hat{\varphi}$. □

2.7 Normalisation du recollement

Dans cette section, (P, X) désigne un bloc selle, plein, normalisé. On note $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. On considère un recollement inachevé fortement

transverse $\hat{\varphi}\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. On suppose que $\hat{\varphi}$ est fortement isotope à la restriction d'un recollement fortement quasi-transverse φ_0 (au sens de la définition 2.5.2) [3]. Le but de cette section est de construire un recollement normalisé φ_1 sur ∂P, de sorte à obtenir un triplet (P, X, φ_1) fortement isotope à (P_0, X_0, φ_0).

Proposition 2.7.1. *Il existe un recollement normalisé φ_1 de (P, X) dont la restriction à $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ est fortement isotope à $\hat{\varphi}$.*

Rappelons que cela signifie que φ_1 vérifie la définition 2.1.8, autrement dit coïncide avec la réflexion $(x, x, \theta) \mapsto (-x, -x, \theta)$ dans des systèmes de coordonnées normalisés $\{(\mathcal{V}_i, \xi_i)\}$ des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, et φ_1 envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{\mathrm{b}} = \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur un feuilletage quasi-transverse à $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ sur ∂P.

Résumé de la preuve L'organisation de la preuve est la suivante.

- Dans une première étape, on montre que l'on peut faire une isotopie parmi les recollements inachevés fortement transverses de (P, X) pour que $\hat{\varphi}$ envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ dans P^{in}. Cette étape permettra d'obtenir l'item 2 de la définition 2.1.8 d'un recollement normalisé. C'est la proposition 2.7.2.

  L'idée clé est que l'intersection transverse des laminations $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$, est d'intérieur vide, donc on peut redresser localement les images des feuilletages $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$, $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur un petit voisinage de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$. Une fois cela fait, il reste à modifier l'image des feuilletages sur le complémentaire de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cup \mathcal{L}^s$. Par forte transversalité de $\hat{\varphi}$, ces complémentaires sont des rectangles sur lesquels les feuilletages sont triviaux.

- Dans une seconde étape, on montre que l'on peut modifier le recollement $\hat{\varphi}$ obtenu à l'étape précédente par isotopie parmi les recollements fortement transverses pour que $\hat{\varphi}$ soit égal à la réflexion $(x, x, \theta) \mapsto (-x, -x, \theta)$ dans les systèmes de coordonnées normalisés des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Un tel recollement inachevé se prolonge alors en un recollement normalisé φ_1 de (P, X). Ce résultat est résumé à la proposition 2.7.9.

  La technique est de construire une isotopie qui envoie le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ au voisinage d'une orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, en envoyant la feuille de $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur la feuille "correspondante" de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ pour des paramètres donnés par le système de coordonnées normalisé de ξ_i au voisinage de $\mathcal{O}_i$, et une isotopie analogue pour le feuilletage $\mathcal{G}^s$. On montre alors que la composée se prolonge trivialement sur $\mathcal{O}_i$ dans les coordonnées ξ_i.

Étape 1 : Forme transverse d'un recollement inachevé. On note $\mathcal{L} = \mathcal{L}^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^u$ la lamination de bord de (P, X). Le bloc (P, X) est muni d'une paire de feuilletages affines invariants $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$. On note $(\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}, \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}})$ la paire de feuilletages induits sur P^{out} et $(\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}, \mathcal{G}^{u,\mathrm{in}})$ la paire de feuilletages induits sur P^{in}. Une première étape de la preuve de la proposition 2.7.1 consiste à faire une isotopie de $\hat{\varphi}$ parmi les recollements inachevés fortement transverses de (P, X), afin que l'image de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ par le recollement inachevé soit transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in}. Dans ce paragraphe, on montre la proposition principale suivante.

Proposition 2.7.2. *Il existe un recollement inachevé $\hat{\varphi}_1$ de (P, X) fortement isotope $\hat{\varphi}$, tel que le feuilletage $(\hat{\varphi}_1)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ est transverse au feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in}.*

3. $\hat{\varphi}$ ne se prolonge pas a priori à $\mathcal{O}_*$, mais est fortement isotope à un recollement inachevé qui se prolonge en un recollement φ_0. On notera que φ_0 n'est pas en général un recollement de (P, X), mais seulement un recollement d'un bloc (P_0, X_0) isotope à (P, X). Typiquement, le bloc P_0 est obtenu en poussant ∂P le long des orbites du flot pendant un temps infini

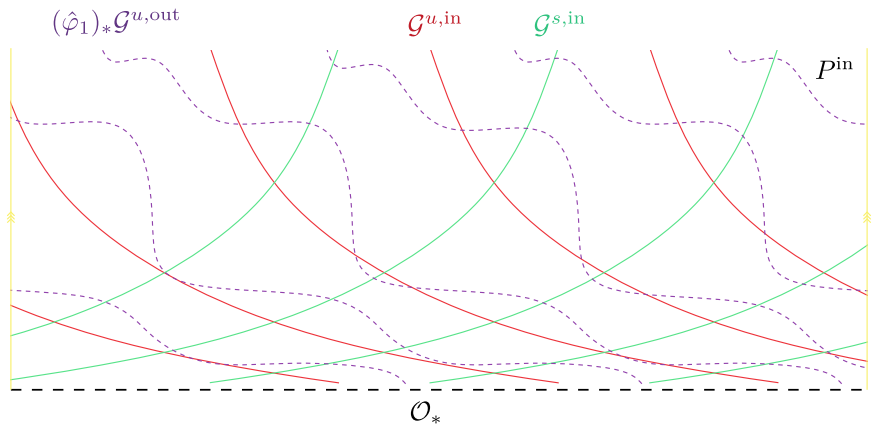


FIGURE 2.5 – Feuilletages sur un voisinage de $\mathcal{O}_*$ dans P^{in}

On répète la preuve de [BBY17, Proposition 5.2], à la différence près que l'on travaille sur un ensemble non compact $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$, et les isotopies que l'on fait sur $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ pour redresser l'image des feuilletages ne se prolongeront pas sur $\mathcal{O}_*$. On montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.7.3. *Il existe un recollement inachevé $\check{\varphi}_1$ de (P, X) fortement isotope à $\hat{\varphi}$ tel que les feuilletages $(\check{\varphi}_1)_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ et $(\check{\varphi}_1)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ coïncident avec respectivement $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ sur un voisinage U^{in} de $(\check{\varphi}_1)_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ dans P^{in}.*

Démonstration du lemme 2.7.3. On procède en deux étapes. On construit d'abord une isotopie ψ^{out} sur P^{out} qui redresse le feuilletage $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ au voisinage de l'intersection des laminations $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap \mathcal{L}^u$ (lemme 2.7.4), puis une isotopie ψ^{in} sur P^{in} qui redresse le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ au voisinage de l'intersection des laminations $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ (lemme 2.7.5), de sorte que la composée $(\psi^{\mathrm{in}} \circ \hat{\varphi} \circ \psi^{\mathrm{out}})$ vérifie le lemme 2.7.3. Plus formellement, on montre pour commencer le lemme suivant.

Lemme 2.7.4. *Il existe $\psi^{\mathrm{out}} : \partial P \setminus \mathcal{O}_* \to \partial P \setminus \mathcal{O}_*$ un difféomorphisme à support dans P^{out} tel que*

1) ψ^{out} est isotope à l'identité via des difféomorphismes qui préservent le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$

2) $(\psi^{\mathrm{out}} \circ \hat{\varphi}^{-1})_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ coïncide avec $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ sur un voisinage U^{out} de $(\psi^{\mathrm{out}} \circ \hat{\varphi}^{-1})_*\mathcal{L}^s \cap \mathcal{L}^u$.

Démonstration du lemme 2.7.4. Le bloc (P, X) est un bloc selle, la lamination de bord $\mathcal{L}$ est d'intérieur vide. Comme $\hat{\varphi}$ est un recollement inachevé fortement transverse, la paire de lamination $(\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s, \mathcal{L}^u)$ est fortement transverse sur P^{out} (définition 1.3.5) et l'intersection $K := \mathcal{L}^u \cap \hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$ est un ensemble localement compact, totalement discontinu avec une structure de produit local dans P^{out} (on rappelle que P^{out} n'est pas compact). Par continuité, il existe un voisinage de K dans P^{out} sur lequel les feuilletages $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sont transverses. Il s'ensuit que l'on peut recouvrir K par une collection localement finie de rectangles $\{R_i\}_i$ dans P^{out} tel que :

- les R_i sont deux à deux disjoints et leur bord est disjoint de K ;
- les segments horizontaux de R_i sont des arcs de feuille de $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ et les segments verticaux de R_i sont des arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$;
- les feuilletages $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sont transverses sur R_i ;

- chaque feuille de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$ traverse horizontalement R_i, autrement dit elle traverse R_i d'un bord vertical à l'autre.

Si σ est une composante connexe de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap R_i$, il existe un sous-rectangle R_σ de R_i arbitrairement fin, dont le bord horizontal consiste en deux arcs de feuilles de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ disjoint de K, et le bord vertical est inclus dans le bord vertical de R_i, et tel que chaque feuille de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ traverse horizontalement R_i (figure 2.6). Il existe un difféomorphisme ψ_σ de R_σ égal à l'identité

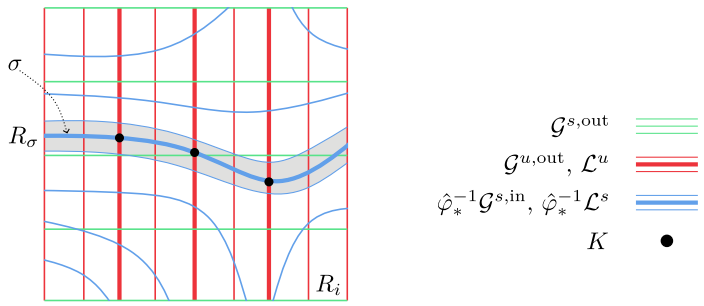


FIGURE 2.6 – Rectangle $R_\sigma \subset R_i$

sur un voisinage du bord ∂R_σ, tel que ψ_σ envoie $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur le feuilletage horizontal de R_i sur un voisinage de K dans R_σ, et préserve les segments verticaux de R_σ. Ce difféomorphisme est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes de R_σ qui préservent le feuilletage vertical de R_σ. Il suffit de faire une isotopie barycentrique feuille à feuille. On recouvre $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap R_i$ par un nombre fini de sous-rectangles R_σ disjoints vérifiant la propriété précédente. Soit ψ_{R_i} le difféomorphisme de R_i coïncidant avec ψ_σ sur chaque R_σ et égal à l'identité ailleurs. Les rectangles R_i sont deux à deux disjoints et la collection $\{R_i\}$ est localement finie, donc on peut définir le difféomorphisme ψ^{out} de P^{out} égal à ψ_{R_i} sur chaque R_i et égal à l'identité ailleurs. On pose ψ^{out} égal à l'identité sur P^{out}. □

Posons $\check{\varphi} := \hat{\varphi} \circ (\psi^{\mathrm{out}})^{-1} \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. C'est un recollement inachevé de (P, X). Comme ψ^{out} préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} \supset \mathcal{L}^u$ feuille à feuille, on en déduit que le recollement inachevé $\check{\varphi}$ est fortement isotope à $\hat{\varphi}$. Montrons le second lemme suivant.

Lemme 2.7.5. *Il existe un difféomorphisme $\psi^{\mathrm{in}} : \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ à support dans P^{in} tel que*

1) ψ^{in} est isotope à l'identité via des difféomorphismes qui préservent le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$

2) $(\psi^{\mathrm{in}} \circ \check{\varphi})_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ coïncide avec $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ et $(\psi^{\mathrm{in}} \circ \check{\varphi})_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ coïncide avec $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur un voisinage U^{in} de $(\psi^{\mathrm{in}} \circ \check{\varphi})_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$.

Démonstration. Il découle du lemme 2.7.4 l'existence d'un voisinage $U^{\mathrm{in}\prime} := \check{\varphi}(U^{\mathrm{out}})$ de $\check{K} := \mathcal{L}^s \cap \check{\varphi}\mathcal{L}^u$ dans P^{in} sur lequel le feuilletage $\check{\varphi}_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ coïncide avec $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$. On peut répéter la même preuve que la précédente en plaçant le support de l'isotopie ψ^{in} dans un voisinage de $\check{K}$ inclus dans $U^{\mathrm{in}\prime}$, et de sorte que ψ^{in} préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$. □

Soit $\check{\varphi}_1 := \psi^{\mathrm{in}} \circ \check{\varphi} = \psi^{\mathrm{in}} \circ \hat{\varphi} \circ (\psi^{\mathrm{out}})^{-1} \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. C'est un recollement inachevé de (P, X). Comme ψ^{in} est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes qui préservent le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}} \supset \mathcal{L}^s$, le recollement inachevé $\check{\varphi}_1$ est fortement isotope à $\check{\varphi}$, et donc à $\hat{\varphi}$ par transitivité. Le lemme 2.7.3 est une conséquence directe du lemme 2.7.5. □

Démonstration de la proposition 2.7.2. Quitte à faire une forte isotopie parmi les recollements inachevés, on peut supposer que le recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}$ de (P, X) vérifie le lemme 2.7.3, autrement dit le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ et le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ coïncident avec $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur un voisinage U^{in} de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$. On démontre la proposition en trois étapes. On note U^{in} le voisinage de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ dans P^{in} sur lequel le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ et le feuilletage $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ coïncident (respectivement) avec $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$.

Fait 2.7.6. *Il existe un difféomorphisme $\psi^{\text{out}} \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$, à support dans P^{out}, égal à l'identité sur un voisinage de $\mathcal{L}^u$, tel que $(\psi^{\text{out}} \circ \hat{\varphi}^{-1})_*\mathcal{L}^s$ est transverse à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$.*

Démonstration. Soit $U^{\text{out}} := \hat{\varphi}(U^{\text{in}})$. C'est un voisinage de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap \mathcal{L}^u$ dans P^{out} sur lequel le feuilletage $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ coïncide avec $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$. On en déduit que $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \subset \hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est transverse à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur un voisinage V^u de $\mathcal{L}^u$ dans P^{out}. Sur tout compact K dans P^{out}, il y a un nombre fini de composantes connexes de $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u$ qui intersectent $(P^{\text{out}} \smallsetminus V^u) \cap K$, et on fixe B une telle composante connexe. On rappelle que B est une bande, c'est-à-dire que le bord accessible de B est formée de deux feuilles non compactes de $\mathcal{L}^u$ qui s'accumulent l'une sur l'autre à chaque extrémité. La bande B est trivialement feuilletée par le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$, chaque feuille allant d'un bout de la bande à l'autre (figure 2.7). Comme la lamination $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$ est fortement

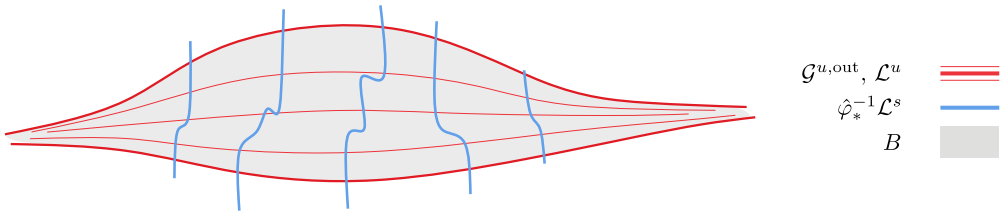


FIGURE 2.7 – Bande B feuilletée par $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ et intersection avec la lamination $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$

transverse à la lamination $\mathcal{L}^u$, chaque feuille de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$ traverse la bande B d'un bord à l'autre et l'intersection $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap \mathcal{L}^u$ est localement compacte et totalement discontinue dans le bord de B. On en déduit qu'il existe $\{R_i\}_i$ une collection localement finie de rectangles dans B tel que

- $R_i \subset \operatorname{int} B$ et chaque feuille de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s$ intersecte un unique rectangle R_i, et est disjoint du bord horizontal de R_i
- Le bord vertical de R_i consiste en deux arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ inclus dans V^u et le bord horizontal de R_i consiste en deux arcs de feuilles de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$
- Les segments de feuilles de $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sont transverse à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur un voisinage du bord vertical de R_i et traversent horizontalement le rectangle R_i

Soit $\Lambda_i^s = \hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{L}^s \cap \partial R_i$. Soit $\mathcal{H}_i$ un feuilletage sur R_i qui coïncide avec $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur un voisinage de ∂R_i, qui a même holonomie que $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ d'un bord vertical à l'autre de R_i, et qui est transverse à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur un voisinage des feuilles de $\mathcal{H}_i$ passant par Λ_i^s (voir figure 2.8). Alors $\hat{\varphi}_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est conjugué à $\mathcal{H}_i$ par un difféomorphisme $\psi_{R_i} \colon R_i \to R_i$, égal à l'identité au voisinage de ∂R, isotope à l'identité. Les rectangles R_i sont deux à deux disjoints et la collection $\{R_i\}_i$ est localement finie, donc on peut définir le difféomorphisme ψ_B de B égal à ψ_{R_i} sur chaque R_i et égal à l'identité ailleurs. De même, les composantes connexes B_i de $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u$ qui intersectent le complémentaire du voisinage V^u dans P^{out} sont deux à deux disjointes et la collection $\{B_i\}_i$ est localement finie dans P^{out}, donc on peut définir le difféomorphisme ψ^{out} le difféomorphisme

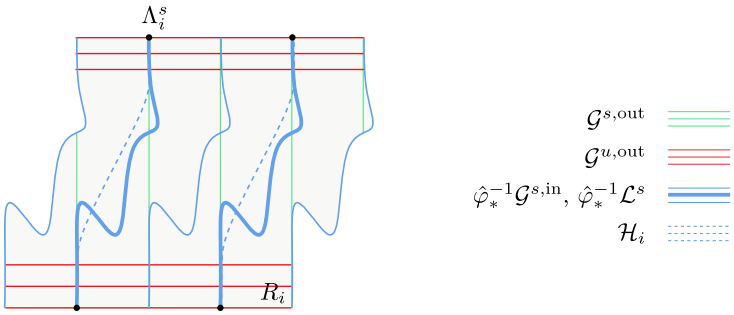


FIGURE 2.8 – Rectangle R_i à l'intérieur de la bande B

de P^{out} égal à ψ_{B_i} sur chaque B_i et égal à l'identité ailleurs. On pose ψ^{out} égal à l'identité sur P^{in}. □

Fait 2.7.7. *Il existe un difféomorphisme $\psi^{\mathrm{in}}\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$, à support dans P^{in}, égal à l'identité sur un voisinage de $\mathcal{L}^s$, tel que $(\psi^{\mathrm{in}} \circ \hat{\varphi})_*\mathcal{L}^u$ est transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in}*

Démonstration. La preuve est identique. □

Soit $\hat{\varphi}_0 := \psi^{\mathrm{in}} \circ \hat{\varphi} \circ (\psi^{\mathrm{out}})^{-1}\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$. Alors $\hat{\varphi}_0$ est un recollement inachevé fortement isotope à $\hat{\varphi}$, car les difféomorphismes ψ^{in} et ψ^{out} isotopes à l'identité via des difféomorphismes qui sont l'identité sur un voisinage de la lamination $\mathcal{L}^s$ et $\mathcal{L}^u$ respectivement. Alors

- $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u = (\psi^{\mathrm{in}} \circ \hat{\varphi})_*\mathcal{L}^u$ car ψ^{out} est l'identité au voisinage de $\mathcal{L}^u$, donc $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u$ est transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in} d'après le fait 2.7.7.
- $(\hat{\varphi}_0)_*^{-1}\mathcal{L}^s = (\psi^{\mathrm{out}}\hat{\varphi}^{-1})_*\mathcal{L}^s$ car ψ^{in} est l'identité au voisinage de $\mathcal{L}^s$, donc $(\hat{\varphi}_0)_*^{-1}\mathcal{L}^s$ est transverse à $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur P^{out} d'après le fait 2.7.6. On en déduit que $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ est transverse à $\mathcal{L}^s$ sur P^{in}.

Il s'ensuit que les feuilletages $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ et $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sont transverses sur un voisinage V de $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ dans P^{in}. Il reste à vérifier que les feuilletages $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ et $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sont transverses à l'intérieur des composantes connexes du complémentaire $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus ((\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s)$ qui intersectent $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus V$. Comme les laminations $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u$ et $\mathcal{L}^s$ sont fortement transverses, une telle composante connexe est un rectangle C dont le bord horizontal est formé de deux arcs disjoints de feuilles de $\mathcal{L}^s$ et le bord vertical est formé de deux arcs disjoints de feuilles de $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u$. Les feuilletages $\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ et $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sont transverses sur un voisinage de ∂C.

Fait 2.7.8. *Il existe un difféomorphisme $\psi_C\colon C \to C$ isotope à l'identité, tel que ψ_C est l'identité au voisinage du bord de C, et ψ_C envoie le feuilletage $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ dans C.*

Démonstration. Chaque feuille de $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ traverse horizontalement C, donc on peut supposer que $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ est le feuilletage horizontal de C. Alors les segments horizontaux de C coïncident avec $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur un voisinage de ∂C. Chaque feuille de $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ traverse verticalement le rectangle C. On en déduit que les deux feuilletages $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ et $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sont triviaux sur C. Il existe

un feuilletage $\mathcal{H}$ qui coïncide avec $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ sur un voisinage de ∂C, qui a la même application d'holonomie que $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ d'un bord horizontal à l'autre de C, et qui est transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur C (voir figure 2.9 Ce feuilletage $\mathcal{H}$ est conjugué à $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ par un difféomorphisme

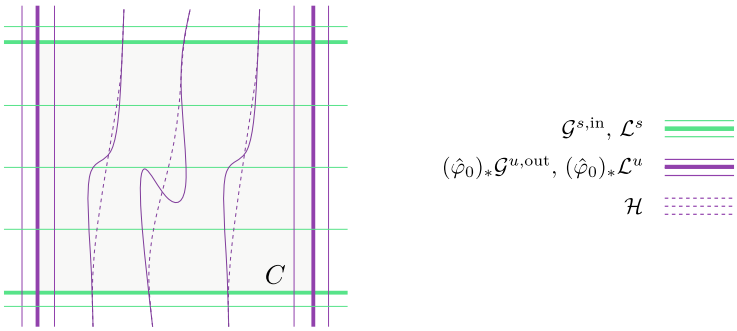


FIGURE 2.9 – Composante connexe C du complémentaire de $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s$ et feuilletages

$\psi_C \colon C \to C$ égal à l'identité au voisinage de ∂C et isotope à l'identité, ce qui conclut. □

Les composantes connexes C_i de $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus ((\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u \cap \mathcal{L}^s)$ qui intersectent $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus V$ sont deux à deux disjointes et forment une collection $\{C_i\}$ localement finie. On peut donc définir $\psi \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ le difféomorphisme égal à ψ_{C_i} sur chaque C_i et l'identité ailleurs. En particulier, ψ est l'identité sur un voisinage de $(\hat{\varphi}_0)_*\mathcal{L}^u \cup \mathcal{L}^s$. Le difféomorphisme $\hat{\varphi}_1 := \psi \circ \hat{\varphi}_0 \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ est un recollement inachevé fortement isotope à $\hat{\varphi}_0$ qui vérifie la proposition 2.7.2. □

Étape 2 : Normalisation d'un recollement inachevé. On garde les notations du début de la section 2.7. Dans cette étape, quitte à faire une forte isotopie de recollement inachevés, on suppose que $\hat{\varphi}$ vérifie la proposition 2.7.2, autrement dit $\hat{\varphi}_*\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}$ est transverse à $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ sur P^{in}. Pour tout $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, il existe une unique orbite $\mathcal{O}_j \in \mathcal{O}_*$ tel que si A et A' sont des composantes connexes de $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ adjacentes en $\mathcal{O}_i$, alors $\hat{\varphi}(A)$ et $\hat{\varphi}(A')$ sont des composantes connexes de $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ adjacentes en $\mathcal{O}_j$. Cette appariement définit une involution sans point fixe $\sigma \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, qui détermine la combinatoire de recollement de $\hat{\varphi}$.

On montre la proposition suivante, qui dit qu'il existe un recollement normalisé φ_1 de (P, X) dont la restriction au complémentaire des orbites $\mathcal{O}_*$ est fortement isotope à $\hat{\varphi}$. On rappelle qu'un bloc normalisé (P, X) est muni de systèmes de coordonnées normalisés $\{(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))\}$ au voisinage des orbites périodiques $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ contenues dans ∂P (définition 2.1.2, item 4). Dans ces coordonnées, le bord ∂P a pour équation $x = y$, le bord de sortie P^{out} est dans le domaine $\{x < 0\}$, et le bord d'entrée P^{in} dans le domaine $\{x > 0\}$. On note $\mathcal{G}^{\mathrm{b}} = \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ le feuilletage quasi-Morse-Smale sur ∂P (corollaire 2.1.6).

Proposition 2.7.9. *Il existe un recollement fortement quasi-transverse $\varphi_1 \colon \partial P \to \partial P$ tel que*

1) *la restriction de φ_1 à $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ est fortement isotope à $\hat{\varphi}$ (au sens de la définition 2.5.2)*

2) *pour tout $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j = \varphi_1(\mathcal{O}_i)$, il existe des systèmes de coordonnées normalisés $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ et $(\mathcal{V}_j, \xi_j = (x, y, \theta))$ des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$, telle que l'expression de φ_1 dans ces coordonnées est $\varphi_1(x, x, \theta) = (-x, -x, \theta)$*

3) *le feuilletage $(\varphi_1)_*\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ est quasi-transverse au feuilletage $\mathcal{G}^{\mathrm{b}}$ sur ∂P*

Autrement dit, φ_1 est un recollement normalisé de (P, X) (définition 2.1.8) dont la restriction est fortement isotope à $\hat{\varphi}$.

Commençons par fixer quelques notations. Soit $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ un système de coordonnées normalisé de l'orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$. Les coordonnées $\xi_i = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{V}_i$ induisent les coordonnées $\rho_i = (x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur $\partial P \cap \mathcal{V}_i$ par oubli de la coordonnées y. Quitte à multiplier les coordonnées x et y par une constante puis restreindre $\mathcal{V}_i$, on peut supposer pour simplifier que $\rho_i(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_i) =]0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\rho_i(P^{\text{out}} \cap \mathcal{V}_i) = [-1, 0[\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. D'après l'équation des feuilletages (remarque 2.1.5) chaque feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ intersecte transversalement la section $\{x = 1\}$ une unique fois, et chaque feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ et de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ intersecte transversalement la section $\{x = -1\}$ une unique fois. On note dans les coordonnées $\rho_i = (x, \theta)$ (voir figure 2.10) :

- $l^{s,\text{in}}_{i,\theta}$ la feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ passant par $(1, \theta)$, et $l^{u,\text{in}}_{i,\theta}$ la feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ passant par $(1, \theta)$
- $l^{s,\text{out}}_{i,\theta}$ la feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ passant par $(-1, \theta)$ et $l^{u,\text{out}}_{i,\theta}$ la feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ passant par $(-1, \theta)$

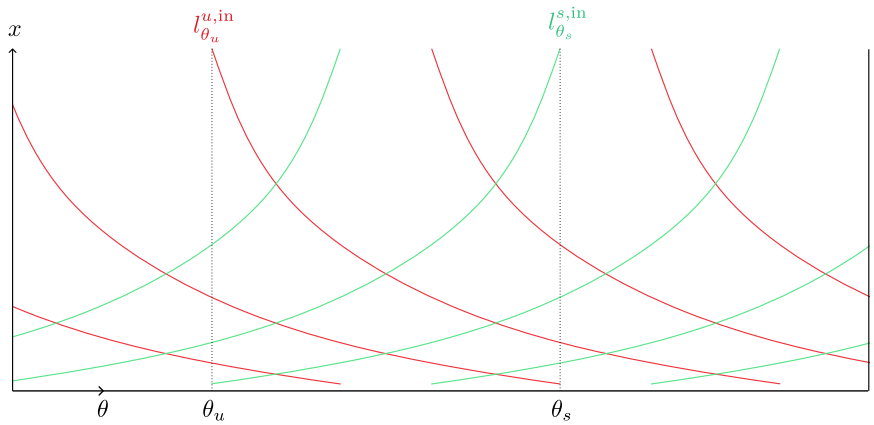


FIGURE 2.10 – Paramétrage des feuilles de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ par la coordonnée θ sur $\mathcal{V}^{\text{in}}_i$

On va montrer les deux lemmes suivants, analogues l'un de l'autre.

Lemme 2.7.10. *Il existe un difféomorphisme $\psi^{\text{in}} \colon \partial P \setminus \mathcal{O}_* \to \partial P \setminus \mathcal{O}_*$ à support dans P^{in} et un voisinage $\mathcal{V}^{\text{in}}$ de ∂P^{in} dans P^{in} tel que*

1) *ψ^{in} est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ qui préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ feuille à feuille*

2) *pour tout i et $j = \sigma(i)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la feuille $\psi^{\text{in}}(\hat{\varphi}(l^{u,\text{out}}_{j,\theta}))$ coïncide avec la feuille $l^{u,\text{in}}_{i,\theta}$ sur $\mathcal{V}^{\text{in}}$*

Lemme 2.7.11. *Il existe un difféomorphisme $\psi^{\text{out}} \colon \partial P \setminus \mathcal{O}_* \to \partial P \setminus \mathcal{O}_*$ à support dans P^{out} et un voisinage $\mathcal{V}^{\text{out}}$ de ∂P^{out} dans P^{out} tel que*

1) *ψ^{out} est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes de $\partial P \setminus \mathcal{O}_*$ qui préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ feuille à feuille*

2) *pour tout i et $j = \sigma(i)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la feuille $\psi^{\text{out}}(\hat{\varphi}^{-1}(l^{s,\text{in}}_{j,\theta}))$ coïncide avec la feuille $l^{s,\text{out}}_{i,\theta}$ sur $\mathcal{V}^{\text{out}}$*

Montrons que la proposition 2.7.9 découlent des deux lemmes 2.7.10 et 2.7.11.

Démonstration de la proposition 2.7.9. Posons $\hat{\varphi}_1 = \psi^{\text{in}} \circ \hat{\varphi} \circ (\psi^{\text{out}})^{-1} : \partial P \setminus \mathcal{O}_* \to \partial P \setminus \mathcal{O}_*$. D'après l'item 1 du lemme 2.7.10 et son analogue du lemme 2.7.11, le difféomorphisme $\hat{\varphi}_1$ est un recollement inachevé fortement isotope à $\hat{\varphi}$. De plus $\hat{\varphi}$ envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur P^{in} par hypothèse, donc il en est de même pour $\hat{\varphi}_1$, toujours d'après la propriété 1 du lemme 2.7.10 pour ψ^{in}, et son analogue pour ψ^{out}. Posons $\mathcal{W}^{\text{in}} := \mathcal{V}^{\text{in}} \cap \hat{\varphi}_1(\mathcal{V}^{\text{out}})$, où $\mathcal{V}^{\text{in}}$ et $\mathcal{V}^{\text{out}}$ sont les voisinages donnés par les lemmes 2.7.10 et 2.7.11. C'est un voisinage de ∂P^{in} dans P^{in}. Soit i et $j = \sigma(i)$ et soit $\theta_s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\theta_u \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors les égalités suivantes sont vraies sur $\mathcal{W}^{\text{in}}$ (voir figure 2.11)

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1(l^{u,\text{out}}_{j,\theta_u}) &= \psi^{\text{in}} \circ \hat{\varphi} \circ (\psi^{\text{out}})^{-1}(l^{u,\text{out}}_{j,\theta_u}) \\
&= \psi^{\text{in}} \circ \hat{\varphi}(l^{u,\text{out}}_{j,\theta_u}) && \text{(lemme 2.7.11, item 1)} \\
&= l^{s,\text{in}}_{i,\theta_u} && \text{(lemme 2.7.10, item 2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1(l^{s,\text{out}}_{j,\theta_s}) &= \psi^{\text{in}} \circ \hat{\varphi} \circ (\psi^{\text{out}})^{-1}(l^{s,\text{out}}_{j,\theta_s}) \\
&= \psi^{\text{in}} \circ \hat{\varphi}(\hat{\varphi}^{-1}(l^{s,\text{in}}_{i,\theta_s})) = \psi^{\text{in}}(l^{s,\text{in}}_{i,\theta_s}) && \text{(lemme 2.7.11, item 2)} \\
&= l^{s,\text{in}}_{i,\theta_s} && \text{(lemme 2.7.10, item 1)}
\end{aligned}$$

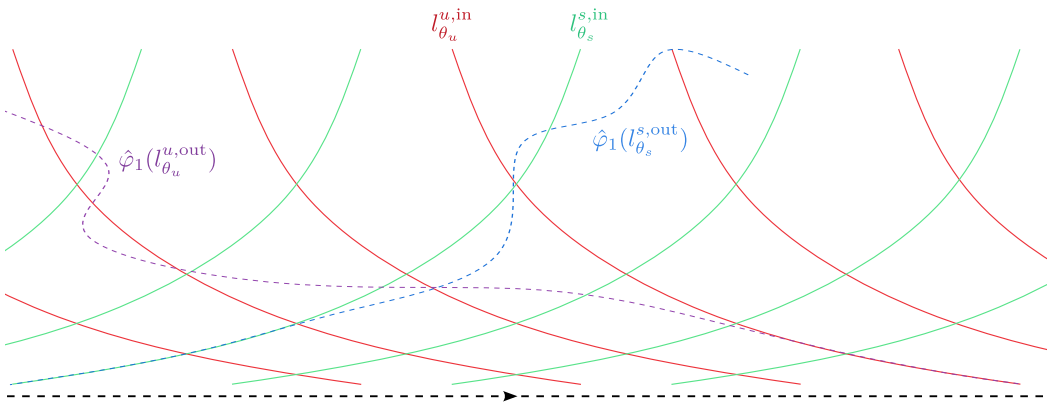


FIGURE 2.11 – Image des feuilletages par $\hat{\varphi}_1$

On rappelle que le flot de X est linéaire dans les coordonnées $\xi_i = (x, y, \theta)$ sur $\mathcal{V}_i$, donné par l'expression $X^t(x, y, \theta) = (2^{-t}x, 2^t y, \theta + t)$, et le bord ∂P coïncide avec la diagonale $x = y$. La feuille $l^{s,\text{in}}_{i,\theta_s}$ a donc pour équation $x = 2^{-\theta_s + \tilde{\theta}}$ et la feuille de $l^{u,\text{in}}_{i,\theta_u}$ a pour équation $x = 2^{\theta_u - \tilde{\theta}}$ dans les coordonnées $\rho_i = (x, \theta)$, où $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ est un relevé de $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (remarque 2.1.5). Donc les points d'intersection de ces deux feuilles dans dans les coordonnées $\rho_i = (x, \theta)$ sont les points suivants, pour $k \in \mathbb{Z}$, avec k assez grand :

$$p_k = \left(2^{\frac{\theta_u - \theta_s}{2} - \frac{k}{2}}, \frac{\theta_s + \theta_u}{2} + \frac{k}{2}\right)$$

De même, les points d'intersection des feuilles $l^{s,\text{out}}_{j,\theta_s}$ et $l^{u,\text{out}}_{j,\theta_u}$ dans les coordonnées $\rho_j = (x,\theta)$ sont les points suivants, pour $k \in \mathbb{Z}$, avec k assez grand :

$$q_k = \left(-2^{\frac{\theta_u-\theta_s}{2}-\frac{k}{2}}, \frac{\theta_s+\theta_u}{2} + \frac{k}{2}\right)$$

Par conséquent, pour x assez proche de 0 on a $\hat{\varphi}_1(x,\theta) = (-x2^{-\frac{k(x,\theta)}{2}}, \theta + \frac{k(x,\theta)}{2})$ dans les coordonnées ρ_j au départ et ρ_i à l'arrivée, avec $k(x,\theta) \in \mathbb{Z}$. Par continuité, $k(x,\theta)$ est constant, et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour x assez proche de 0, on a

$$\hat{\varphi}_1(x,\theta) = \left(-x2^{-\frac{k}{2}}, \theta + \frac{k}{2}\right).$$

Soit $\tau\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction plateau lisse décroissante, tel que $\tau(x) = 1$ sur un voisinage de 0 et $\tau(x) = 0$ sur un voisinage de 1. Soit $\psi\colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ le difféomorphisme à support dans P^{in}, égal à l'identité en dehors de $\cup_i \mathcal{V}_i$, et tel que l'expression de ψ dans les coordonnées ρ_i sur chaque $\mathcal{V}_i \cap P^{\text{in}}$ est

$$(x,\theta) \mapsto \left(x2^{\frac{k\tau(x)}{2}}, \theta - \frac{k\tau(x)}{2}\right).$$

Alors ψ est isotope à l'identité parmi les feuilletages qui préservent $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ feuille à feuille, à support dans un voisinage de ∂P^{in} où les feuilletages $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ coïncident (quitte à choisir le support de τ assez proche de 0). Par conséquent, la composée

$$\hat{\varphi}'_1 := \psi \circ \hat{\varphi}_1 \colon \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$$

est un recollement inachevé fortement isotope à $\hat{\varphi}_1$, qui envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur P^{in}, et pour tout i et $j = \sigma(i)$, l'expression de $\hat{\varphi}'_1$ dans les coordonnées ρ_j au départ et ρ_i à l'arrivée est $\hat{\varphi}'_1(x,\theta) = (-x,\theta)$ pour tout x assez proche de 0. Ce difféomorphisme se prolonge naturellement sur $\mathcal{O}_*$ par $(0,\theta) \mapsto (0,\theta)$. Le difféomorphisme $\hat{\varphi}'_1\colon \partial P \to \partial P$ est donc un recollement de (P,X), dont la restriction à $\partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ est fortement isotope à $\hat{\varphi}$. On rappelle que $\hat{\varphi}'_1$ est une involution, qui vérifie que le feuilletage $(\hat{\varphi}'_1)_*\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ est transverse à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur P^{in} et $\hat{\varphi}'_1(\mathcal{O}_*) = \mathcal{O}_*$. Il s'ensuit que la feuilletage $(\hat{\varphi}'_1)_*\mathcal{G}^{\text{b}}$ est quasi-transverse à $\mathcal{G}^{\text{b}}$ sur ∂P, où $\mathcal{G}^{\text{b}} = \mathcal{G}^{u,\text{out}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{s,\text{in}}$. Pour finir, $\hat{\varphi}'_1$ vérifie l'item 2 de la proposition 2.7.9 par construction, autrement dit il est égal à la réflexion $(x,x,\theta) \mapsto (-x,-x,\theta)$ dans des systèmes de coordonnées normalisés $(\mathcal{V}'_i, \xi_i = (x,y,\theta))$ et $(\mathcal{V}'_j, \xi_j = (x,y,\theta))$. □

Il reste à prouver le lemme 2.7.10, le lemme 2.7.11 étant complètement analogue.

Démonstration du lemme 2.7.10. Posons $\mathcal{V}^{\text{in}}_i := \mathcal{V}_i \cap P^{\text{in}}$, et $\mathcal{V}^{\text{out}}_j := \mathcal{V}_j \cap P^{\text{out}}$, où $\mathcal{V}_i$ et $\mathcal{V}_j$ sont des voisinages normalisés des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ contenues dans ∂P, avec $j = \sigma(i)$. Il suffit de construire un difféomorphisme $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_i \colon \mathcal{V}^{\text{in}}_i \to \mathcal{V}^{\text{in}}_i$ qui vérifie les propriétés énoncées sur $\mathcal{V}^{\text{in}}_i$, égal à l'identité sur le bord de $\mathcal{V}^{\text{in}}_i$. On travaillera dans le revêtement universel. Notons $I =]0,1]$ et $J = [-1,0[$. Soit $\pi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection. Soit $\pi^{\text{in}}_i \colon \widetilde{\mathcal{V}}^{\text{in}}_i \to \mathcal{V}^{\text{in}}_i$ le revêtement universel de $\mathcal{V}^{\text{in}}_i$ et $\tilde{\rho}_i = (x,\tilde{\theta})\colon \widetilde{\mathcal{V}}^{\text{in}}_i \to I \times \mathbb{R}$ le relevé des coordonnées ρ_i tel que $\pi \circ \tilde{\rho}_i = \rho_i \circ \pi^{\text{in}}_i$. On définit de même $\widetilde{\mathcal{V}}^{\text{out}}_j$ le revêtement universel de $\mathcal{V}^{\text{out}}_j$ et $\tilde{\rho}_j = (x,\tilde{\theta}) : \widetilde{\mathcal{V}}^{\text{out}}_j \to J \times \mathbb{R}$ le relevé des coordonnées ρ_j. On note $(\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}, \tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{in}})$ les relevés des feuilletages dans $\widetilde{\mathcal{V}}^{\text{in}}_i$, et $(\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{out}}, \tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{out}})$ les relevés des feuilletages dans $\widetilde{\mathcal{V}}^{\text{out}}_i$. On note pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, dans les coordonnées $\tilde{\rho}_i$ et $\tilde{\rho}_j$ correspondantes :

- $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}}$ la feuille de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ passant par $(1,\tilde{\theta})$, et $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}}$ la feuille de $\tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{in}}$ passant par $(1,\tilde{\theta})$,
- $\tilde{l}^{s,\text{out}}_{\tilde{\theta}}$ la feuille de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{out}}$ passant par $(-1,\tilde{\theta})$, et $\tilde{l}^{u,\text{out}}_{\tilde{\theta}}$ la feuille de $\tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{out}}$ passant par $(-1,\tilde{\theta})$,

Le recollement inachevé $\hat{\varphi}$ se relève en un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$, qui est bien définie d'un voisinage de $\{x = 0\}$ dans $\widetilde{\mathcal{V}}_j^{\text{out}}$ dans un voisinage de $\{x = 0\}$ dans $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$. Pour tout $p \in \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}} \cap \tilde{\varphi}(\widetilde{\mathcal{V}}_j^{\text{out}})$, notons $\tilde{\theta}_u(p)$ et $\tilde{\theta}_s(p)$ les réels tels que $p \in \tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)} \cap \tilde{\varphi}(\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)})$.

Lemme 2.7.12. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}} \cap \tilde{\varphi}(\widetilde{\mathcal{V}}_j^{\text{out}})$ de coordonnées $(x(p), \tilde{\theta}(p))$ dans ρ_i avec $0 < x(p) < \epsilon$, les feuilles $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)}$ et $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u(p)}$ s'intersectent en un unique point $q \in \widetilde{\mathcal{V}}_i$.*

Démonstration. Commençons par rappeler que, quels que soient $\tilde{\theta}_s$ et $\tilde{\theta}_u$:

- la feuille $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ a pour équation $\tilde{\theta} = \log_2(x) + \tilde{\theta}_s$, $x < 1$, dans les coordonnées $\rho_i = (x, \tilde{\theta})$
- la feuille $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u}$ a pour équation $\tilde{\theta} = -\log_2(x) + \tilde{\theta}_u$, $x < 1$, dans les coordonnées $\rho_i = (x, \tilde{\theta})$
- la feuille $\tilde{l}^{u,\text{out}}_{\tilde{\theta}_u}$ a pour équation $\tilde{\theta} = -\log_2(x) + \tilde{\theta}_u$, $x < 1$, dans les coordonnées $\rho_j = (x, \tilde{\theta})$

On remarque que $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ intersecte $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u}$ si et seulement si $\tilde{\theta}_s < \tilde{\theta}_u$. On oriente chaque feuille de $\tilde{l}^{u,\text{out}}_{\tilde{\theta}_u}$ dans la direction croissante de la coordonnée $\tilde{\theta}$ dans ρ_j. La feuille est alors orientée en direction du relevé de l'orbite $\mathcal{O}_j = \partial\mathcal{V}_j^{\text{out}}$. On munit la feuille $\tilde{\varphi}_*(\tilde{l}^{u,\text{out}}_{\tilde{\theta}_u})$ de l'orientation image. Chaque feuille $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ disconnecte le plan $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$ en deux composantes. On appelle composante gauche de $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ la composante contenant les feuilles de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ paramétrées par $\tilde{\theta} < \tilde{\theta}_s$, et composante droite de $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ l'autre composante. Avec cette orientation, les feuilles orientées de $\tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{in}}$ intersectent les feuilles de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ de leur gauche vers leur droite. De même,

Fait 2.7.13. *Les feuilles orientées $\tilde{\varphi}_*\tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{in}}$ intersectent transversalement les feuilles de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ de leur gauche vers leur droite sur $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$.*

Démonstration. Par hypothèse $\hat{\varphi}$ est fortement isotope à la restriction d'un recollement fortement quasi-transverse φ_0 d'un bloc de construction (P_0, X_0) isotope à (P, X). On note $\mathcal{L}_0^s$ et $\mathcal{L}_0^u$ les laminations de bord sur le bord d'entrée P_0^{in} et le bord de sortie P_0^{out} de (P_0, X_0). On note $\mathcal{O}_{0,*} = \{\mathcal{O}_{1,0}, \dots, \mathcal{O}_{n,0}\}$ les orbites périodiques de X_0 contenues dans ∂P_0, numérotées de façon compatible avec la numérotation des orbites $\mathcal{O}_*$ (via l'isotopie des blocs). Alors φ_0 envoie l'orbite orientée $\mathcal{O}_{0,j}$ sur l'orbite orientée $\mathcal{O}_{0,i}$, et envoie P_0^{out} sur P_0^{in} en renversant l'orientation. Il s'ensuit que les feuilles de $(\varphi_0)_*\mathcal{L}_0^u$ s'accumulent sur l'orbite $\mathcal{O}_{i,0}$ de façon contractante sur P_0^{in} donc intersectent transversalement les feuilles de $\mathcal{L}_0^s$ de leur gauche vers leur droite, pour les même conventions d'orientation. Par forte isotopie de $\hat{\varphi}$ avec la restriction de φ_0 à $\partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_{0,*}$, il en est de même pour le sens d'intersection des feuilles orientées de $\hat{\varphi}_*\mathcal{L}^u$ avec les feuilles de $\mathcal{L}^s$ sur P^{in}. Par transversalité des feuilletages, il en est de même pour les feuilles de $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ avec $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$. Cette propriété reste vraie au revêtement universel. □

On ne sait pas a priori si la feuille $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u(p)}$ intersecte la feuille $\tilde{l}^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)}$, mais on a

Fait 2.7.14. *Si $x(p) \to 0$, alors $(\tilde{\theta}_s(p) - \tilde{\theta}_u(p)) \to +\infty$ et cette convergence est uniforme en $\tilde{\theta}(p)$.*

Démonstration. D'après le fait 2.7.13, si $p = (x(p), \tilde{\theta}(p))$ parcourt la feuille orientée $\tilde{\varphi}(\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u(p)})$, autrement dit $\tilde{\theta}_u(p)$ est fixé et $x(p) \to 0$, alors $\tilde{\theta}_s(p) \to +\infty$. Par continuité (les feuilletages $\tilde{\varphi}_*\tilde{\mathcal{G}}^{u,\text{in}}$ et $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ sont transverses), la convergence est localement uniforme en $\tilde{\theta}(p)$. Comme tout commute avec l'automorphisme de revêtement $\tilde{\theta} \mapsto \tilde{\theta} + 1$, on en déduit que la convergence est globalement uniforme. □

Il résulte du fait 2.7.14 l'existence de $\epsilon > 0$ tel que pour tout $p = (x, \theta) \in \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$ avec $x < \epsilon$, on a $\tilde{\theta}_s(p) < \tilde{\theta}_u(p)$. Comme remarqué précédemment, au vu des équations explicites des feuilles $\tilde{l}^{u,\text{in}}$ et $\tilde{l}^{s,\text{in}}$ impliquent que pour tout $p = (x, \tilde{\theta}) \in \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$ avec $x < \epsilon$, les feuilles $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u(p)}$ et $l^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)}$ s'intersectent en un unique point

$$q(p) = \left(2^{\frac{\tilde{\theta}_u(p) - \tilde{\theta}_s(p)}{2}}, \frac{\tilde{\theta}_u(p) + \tilde{\theta}_s(p)}{2}\right).$$

□

On peut maintenant prouver le lemme 2.7.10. Le lemme 2.7.12 donne une application $p \mapsto q(p)$, qui pour un point $p \in \mathcal{V}_i^{\text{in}}$ tel que $x(p) < \epsilon$, associe le point $q(p)$ d'intersection de la feuille $l^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s(p)}$ avec la feuille $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u(p)}$. Cette application est bien définie de $]0, \epsilon[\times\mathbb{R}$ (dans les coordonnées $\rho_i = (x, \theta)$) sur son image $\mathcal{V}$ où $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\text{in}}$ contient un voisinage $]0, \eta] \times \mathbb{R}$ ($\eta < \epsilon$), et injective. Par transversalité des feuilletages, elle est différentiable. Soit $\tau\colon [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction lisse décroissante qui vaut 1 sur $[0, \frac{\eta}{2}]$ et 0 sur $[\eta, 1]$. On définit $\tilde{\psi}^{\text{in}}\colon \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}} \to \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$ de la façon suivante (figure 2.12). Soit $p = (x, \tilde{\theta}) \in \widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$

- Si $x \geq \eta$, $\tilde{\psi}^{\text{in}}(x, \tilde{\theta}) = (x, \tilde{\theta})$
- Si $x \leq \eta$, soit $q = q(p) \in \mathcal{V}^{\text{in}}$ donnés par le lemme 2.7.12. Alors p et q appartiennent à la même feuille $l^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$ de $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$, et $\tilde{\psi}^{\text{in}}(p)$ est le barycentre pondéré par $\tau(x)$ entre les points p et q dans la feuille $l^{s,\text{in}}_{\tilde{\theta}_s}$, ce que l'on note par abus de notation

$$\tilde{\psi}^{\text{in}}(p = (x, \tilde{\theta})) = \tau(x)q + (1 - \tau(x))p$$

Cette expression définit bien un difféomorphisme de $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$, égal à l'identité au voisinage du bord $\{x = 1\}$ de $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$, isotope à l'identité parmi les difféomorphismes qui préservent $\tilde{\mathcal{G}}^{s,\text{in}}$ feuille à feuille, et qui envoie la feuille $\tilde{\varphi}(\tilde{l}^{u,\text{out}}_{\tilde{\theta}_u})$ sur la feuille $\tilde{l}^{u,\text{in}}_{\tilde{\theta}_u}$ sur un voisinage du bord $\{x = 0\}$ de $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$. Ce difféomorphisme commute avec les translations entières le long de la coordonnées $\tilde{\theta}$, donc passe au quotient en un difféomorphisme $\psi^{\text{in}}\colon \mathcal{V}_i^{\text{in}} \to \mathcal{V}_i^{\text{in}}$ qui vérifie les propriétés annoncées.

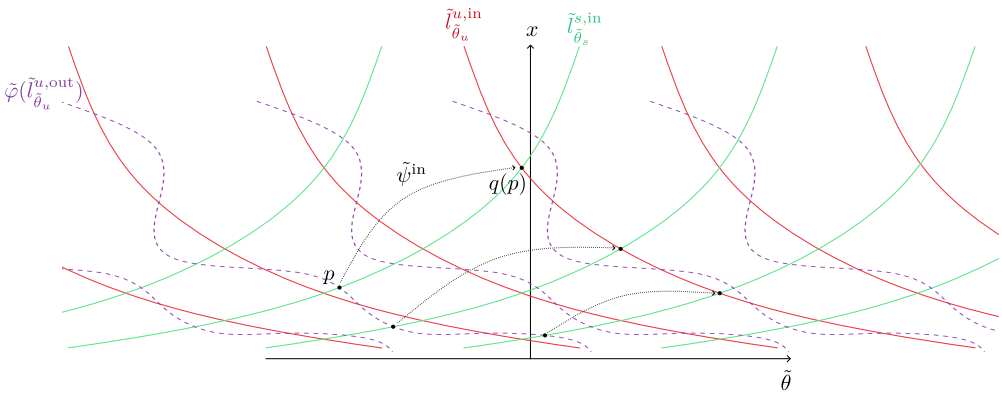


FIGURE 2.12 – Action de $\tilde{\psi}^{\text{in}}$ sur $\widetilde{\mathcal{V}}_i^{\text{in}}$

□

Conclusion

Démonstration de la proposition 2.7.1. Il suffit d'appliquer successivement la proposition 2.7.2 et la proposition 2.7.9. □

2.8 Preuve de la proposition 2.1.10

On montre la proposition principale 2.1.10 qui dit qu'un triplet (P_0, X_0, φ_0) avec (P_0, X_0) un bloc selle plein et φ_0 un recollement fortement quasi-transverse est fortement isotope à un triplet normalisé.

Démonstration de la proposition 2.1.10. Soit (P_0, X_0) un bloc de construction selle plein et φ_0 un recollement fortement quasi-transverse.

- Les propositions 2.2.1 et 2.3.1 appliquées successivement à (P_0, X_0) donnent l'existence d'un bloc de construction (P, X) qui vérifie l'item 1 et 2 de la définition d'un bloc normalisé 2.1.2, autrement dit il admet une section affine et les valeurs propres des orbites de X' dans $\partial P'$ sont égales à $\{\frac{1}{2}, 2\}$, et il est isotope à (P_0, X_0) parmi les blocs de construction orbitalement équivalents. Le bloc (P, X) vérifie les hypothèses de la proposition 2.4.1. Soit $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ une paire de feuilletages affines invariants sur (P, X) donné par la proposition 2.4.1. Le bloc de construction (P, X) muni de la paire de feuilletage $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ vérifie les items 1, 2 et 3 de la définition 2.1.2. Il suit du lemme 2.5.5 l'existence d'un recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}$ de (P, X) fortement isotope à la restriction du recollement φ_0 au complémentaire des orbites périodiques de X_0 dans ∂P_0.

- La proposition 2.6.1 appliquée au bloc de construction (P, X) donne l'existence d'un bloc normalisé (P_1, X_1) isotope à (P, X). Le lemme 2.6.3 appliqué au recollement inachevé $\hat{\varphi}$ de (P, X) donne l'existence d'un recollement inachevé fortement transverse $\hat{\varphi}_1$ de (P_1, X_1) et fortement isotope à $\hat{\varphi}$ donc à la restriction du recollement fortement quasi-transverse φ_0 au complémentaire des orbites périodiques de X_0 dans ∂P_0.

- Le bloc (P_1, X_1) est un bloc normalisé muni d'un recollement inachevé $\hat{\varphi}_1$ fortement transverse et fortement isotope à la restriction du recollement fortement quasi-transverse φ_0 de (P_0, X_0). On peut appliquer la proposition 2.7.1, qui donne l'existence d'un recollement normalisé φ_1' de (P_1, X_1), dont la restriction est fortement isotope à $\hat{\varphi}_1$ donc à la restriction de φ_0. Pour montrer que le triplet (P_1, X_1, φ_1') est fortement isotope au triplet (P_0, X_0, φ_0), il reste à montrer que φ_1' est isotope à φ_0. Les blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) sont isotopes. Quitte à faire une équivalence orbitale (P_0', X_0') de (P_0, X_0), il sont inclus dans un prolongement minime commun (proposition 1.4.4), et les bords $\partial P_0'$ et ∂P_1 sont isotopes relativement aux orbites périodiques contenues dans le bord. Soit φ_0' le conjugué de φ_0 par l'équivalence orbitale et φ_1 le poussé de φ_0' sur ∂P_1 par l'isotopie entre $\partial P_0'$ et ∂P_1. Alors φ_1 est un recollement, a priori seulement topologique. Quitte à faire une petite perturbation, on peut supposer qu'il est différentiable. Il est isotope à φ_0 au sens de la définition 1.4.9.

  Montrons que l'on peut ajuster φ_1' pour le rendre isotope φ_1 sans détruire la forte isotopie. Si T est un composante connexe de ∂P qui n'intersecte pas la collection $\mathcal{O}_*$, la restriction de $\hat{\varphi}_1$ à T est un recollement achevé. Les restrictions à T de $\hat{\varphi}_1$ et φ_0, et de φ_1' et $\hat{\varphi}_1$ sont alors isotopes. Le résultat suit par transitivité. Supposons que T contient une collection d'orbites périodiques de X, et soit T' la composante connexe de ∂P appariée à T par φ_1. Soit $\mathcal{O}_i$ une orbite périodique contenues dans T, et $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ un système de coordonnées normalisé de $\mathcal{O}_i$. Comme φ_1' est un recollement normalisé, quitte à restreindre $\mathcal{V}_i$, on peut supposer que

$\varphi_1'\mathcal{G}^{u,\text{out}} = \mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\varphi_1'\mathcal{G}^{s,\text{in}} = \mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur $\partial P \cap \mathcal{V}_i$. Posons $A := \partial P \cap \mathcal{V}_i$ et $\rho_i = (x,\theta) \in I \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ les coordonnées induites sur A. Il existe $\tau\colon T \to T$ un twist de Dehn sur l'anneau A, égal à l'identité sur le bord de A, et tel que $\tau \circ \varphi_1'\colon T' \to T$ est isotope à $\varphi_1\colon T' \to T$. Pour que la composée $\varphi_1'' := \tau \circ \varphi_1'$ soit encore un recollement normalisé, il faut et il suffit que :

1) τ soit égal à l'identité au voisinage de $\mathcal{O}_i$
2) τ envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$,
3) τ envoie le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur un feuilletage transverse à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$.

Soit $\sigma := \{\theta = 0\}$ et n l'entier tel que $\tau([\sigma]) = [\sigma] + n[\mathcal{O}]$, où $[\cdot]$ désigne la classe d'homologie de la courbe. On a $\tau(x,\theta) = (x, \theta + f(x) \bmod \mathbb{Z})$, avec $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lisse monotone, égale à O sur un voisinage de -1, et égale à n sur un voisinage de 1. D'après la remarque 2.1.5 il existe une constante $c > 0$ tel que, si * désigne in ou out, les directions tangentes aux feuilletages $(\mathcal{G}^{s,*}, \mathcal{G}^{u,*})$ en un point $p = (x,\theta) \in A$ sont

$$T_{(x,\theta)}\mathcal{G}^{s,*}\colon dx = cx.d\theta, \quad T_{(x,\theta)}\mathcal{G}^{u,*}\colon dx = -cx.d\theta$$

- Si $n \geq 0$, on choisit le support de τ dans un compact de $A \cap P^{\text{out}}$. La direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ au point $p = (x,\theta)$ est envoyée sur la direction $(cx.f'(x)+1)dx = cx.d\theta$. Comme $f'(x) \geq 0$ et $x \geq 0$, la direction image est transverse à la direction $dx = -cx.d\theta$ tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ au point $\tau(p) = (x, \theta + f(x))$, ce qui montre que les item 1 et 3 sont vérifiés. L'item 2 est trivialement vérifié car τ est l'identité sur P^{in}.
- Si $n \leq 0$, on choisit le support de τ dans un compact de $A \cap P^{\text{in}}$. La direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ au point $p = (x,\theta)$ est envoyée sur la direction $(-cx.f'(x)+1).dx = -cx.d\theta$. Comme $f'(x) \leq 0$ et $x \leq 0$, la direction image est transverse à la direction $dx = cx.d\theta$ tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ au point $\tau(p) = (x, \theta + f(x))$, ce qui montre que les item 1 et 2 et sont vérifiés. L'item 3 est trivialement vérifié car τ est l'identité sur P^{out}.

Il s'ensuit que le triplet (P_1, X_1, φ_1'') est un triplet normalisé fortement isotope au au triplet (P_0, X_0, φ_0). □

Remarque 2.8.1. Il peut paraître étonnant d'avoir à corriger le défaut d'isotopie par un twist de Dehn à la fin de la preuve, car toutes les déformations ont été faite par "isotopie". En fait, les équivalences orbitales des sections 2.2 et 2.3 et le redressement du bord à la section 2.6 nous oblige à travailler ensuite avec un recollement inachevé qui ne se prolonge pas aux orbites périodiques contenues dans le bord (remarques 2.5.6 et 2.6.4). Les déformations que l'on fait dans la section 2.7 pour normaliser le recollement sont via des difféomorphismes isotopes à l'identité *sur le complémentaire des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ dans le bord*, mais qui ne se prolongent pas non plus aux orbites périodiques $\mathcal{O}_*$. On parvient à obtenir un recollement inachevé qui se prolonge en un recollement (proposition 2.7.9), mais on a perdu l'information de la classe d'isotopie sur la surface fermée ∂P du recollement initial. Il faut donc ajuster.

Chapitre 3

Dilatation de l'application de passage près de la lamination

Rappels et notations Dans le reste de la preuve, (P, X) désigne un bloc de construction selle plein normalisé (définition 2.1.2). On désigne toujours par P^{in} et P^{out} le bord d'entrée et le bord de sortie, Λ le maximal invariant de (P, X) et $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. On fixe $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime de (P, X). On rappelle que $\mathcal{W}^s$ et $\mathcal{W}^u$ désignent les variétés stable et instable de Λ. On note $\mathcal{L}^s = \mathcal{W}^s \cap P^{\text{in}}$ la lamination d'entrée, $\mathcal{L}^u = \mathcal{W}^u \cap P^{\text{out}}$ la lamination de sortie, et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^s \cap \mathcal{O}_* \cap \mathcal{L}^s$ la lamination de bord de (P, X). Par définition d'un bloc de construction normalisé, chaque orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ est muni d'un système de coordonnées normalisé que l'on note $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$, et $\mathcal{V}_* = \cup_i \mathcal{V}_i$ l'union disjointes des voisinages normalisés. Par définition d'un bloc de construction normalisé, il existe $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$ une paire de feuilletages affines invariants sur (P, X). On note $(\mathcal{G}^{s,\text{in}}, \mathcal{G}^{u,\text{in}})$ la paire de feuilletages induite sur P^{in} et $(\mathcal{G}^{s,\text{out}}, \mathcal{G}^{u,\text{out}})$ la paire de feuilletages induite sur P^{out}, et $\mathcal{G}^{\text{b}} = \mathcal{G}^{s,\text{in}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ le feuilletage induit sur ∂P. On renvoie au chapitre 1 et 2 pour les définitions et les propriétés associées.

Métrique Pour le reste de la preuve, on fixe $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ une métrique riemannienne sur $\tilde{P}$, adaptée à la décomposition hyperbolique de Λ, et tel que dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ de $\mathcal{O}_i$, on a

$$g = dx^2 + dy^2 + d\theta^2$$

3.1 Définition et énoncé de la proposition principale

Dans cette section, on va étudier des propriétés de l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ du flot de X de P^{in} à P^{out}. Pour tout $p \in P$, soit $\tau(p)$ le *temps de sortie* (quand il est bien défini) de l'orbite de p par le flot de X, autrement dit tel que $X^{\tau(p)}(p) \in P^{\text{out}}$.

Définition 3.1.1 (Application de passage)**.** L'application $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ définie par $f_{\text{out,in}}(p) = X^{\tau(p)}(p)$ est un difféomorphisme sur $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s$ à image dans $P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$, et on l'on appelle *l'application de passage de* (P, X).

En effet le temps τ est bien défini si et seulement si p est dans le complémentaire de la variété stable $\mathcal{W}^s$ de Λ. L'image de $f_{\text{out,in}}$ correspond à l'ensemble des points de P^{out} dont l'orbite intersecte P^{in}, et coïncide donc avec le complémentaire de la variété instable $\mathcal{W}^u$ de Λ dans P^{out}. Une application de passage d'un flot de classe $\mathcal{C}^1$ entre surfaces quasi-transverses au champ de vecteurs est $\mathcal{C}^1$.

Ce chapitre a pour but de démontrer la proposition principale suivante, qui dit que $f_{\text{out,in}}$ dilate la direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ arbitrairement fortement dans un petit voisinage $\mathcal{L}^s$, et le résultat analogue pour l'application inverse le long de la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$.

Proposition 3.1.2 (Dilatation de l'application de passage)**.**

1) *Pour tout $\lambda > 1$, il existe un voisinage $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ de $\mathcal{L}^s$ dans P^{in}, tel que l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda \smallsetminus \mathcal{L}^s$:*

$$\forall p \in \mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda \smallsetminus \mathcal{L}^s, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \quad \|(f_{\text{out,in}})_* v\| > \lambda \|v\|$$

2) *De même, pour tout $\lambda > 1$, il existe un voisinage $\mathcal{W}^{\text{out}}_\lambda$ de $\mathcal{L}^u$ dans P^{out}, tel que l'application de passage inverse $f^{-1}_{\text{out,in}}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur $\mathcal{W}^{\text{out}}_\lambda \smallsetminus \mathcal{L}^u$:*

$$\forall p \in \mathcal{W}^{\text{out}}_\lambda \smallsetminus \mathcal{L}^u, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{s,\text{out}}, \quad \|(f^{-1}_{\text{out,in}})_* v\| > \lambda \|v\|$$

Remarques La lamination de bord $\mathcal{L}$ est remplissante, les composantes connexes de $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s$ et de $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u$ sont des *bandes*, c'est-à-dire des disques dont le bord accessible est formé de deux feuilles non compactes asymptotes l'une à l'autre à chaque extrémité (définition 1.2.14).

- L'application $f_{\text{out,in}}$ envoie une bande $B^s \subset P^{\text{in}}$ sur une bande $B^u = f_{\text{out,in}}(B^s) \subset P^{\text{out}}$ (figure 3.1).
- Si B est une bande de P^{in}, il y a deux cas possibles pour chacune des extrémités de B :
  1) Soit l'extrémité de B donnée s'accumule sur une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$ dans P^{in}
  2) Soit l'extrémité de B donnée s'accumule sur une composante de ∂P^{in}, autrement dit une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$.
- Soit $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ le voisinage donné par la proposition 3.1.2. Si B est une composante connexe de $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s$, alors $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda \cap B$ est un voisinage du bord accessible de B.
  1) Soit on est dans le cas 1) précédent, et $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda \cap B$ contient un voisinage de l'extrémité de B correspondante
  2) Soit on est dans le cas 2) précédent, et $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda \cap B$ ne contient aucun voisinage de l'extrémité de B correspondante

  On renvoie à la figure 3.2 pour l'image d'un tel voisinage dans le cas 1) et 2).

Idée de preuve Donnons les idées principales pour la preuve du premier item de la proposition 3.1.2. Le deuxième item est symétrique.

- La dynamique sur un petit voisinage $\mathcal{U}$ de Λ est hyperbolique, au sens où il existe des directions E^{ss} et E^{uu} dans $\mathcal{U}$, invariante par la différentielle de X^t dans $\mathcal{U}$, et qui sont respectivement contractées et dilatées dans le futur (lemme 3.2.1). D'après le λ-lemma ([KH95]), un vecteur transverse au plan $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ transporté par le flot pour des temps positif assez grand est exponentiellement dilaté et tend vers la direction instable forte E^{uu}.
- Un point dans P^{in} proche de la lamination $\mathcal{L}^s$ a une orbite qui passe un temps long dans le voisinage $\mathcal{U}$ du maximal invariant Λ avant d'intersecter P^{out}. Il s'ensuit qu'un vecteur v sur un point proche de la lamination $\mathcal{L}^s$ et assez loin des orbites $\mathcal{O}_*$, tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$, est dilaté par la différentielle de X^t au bout d'un temps uniformément borné.

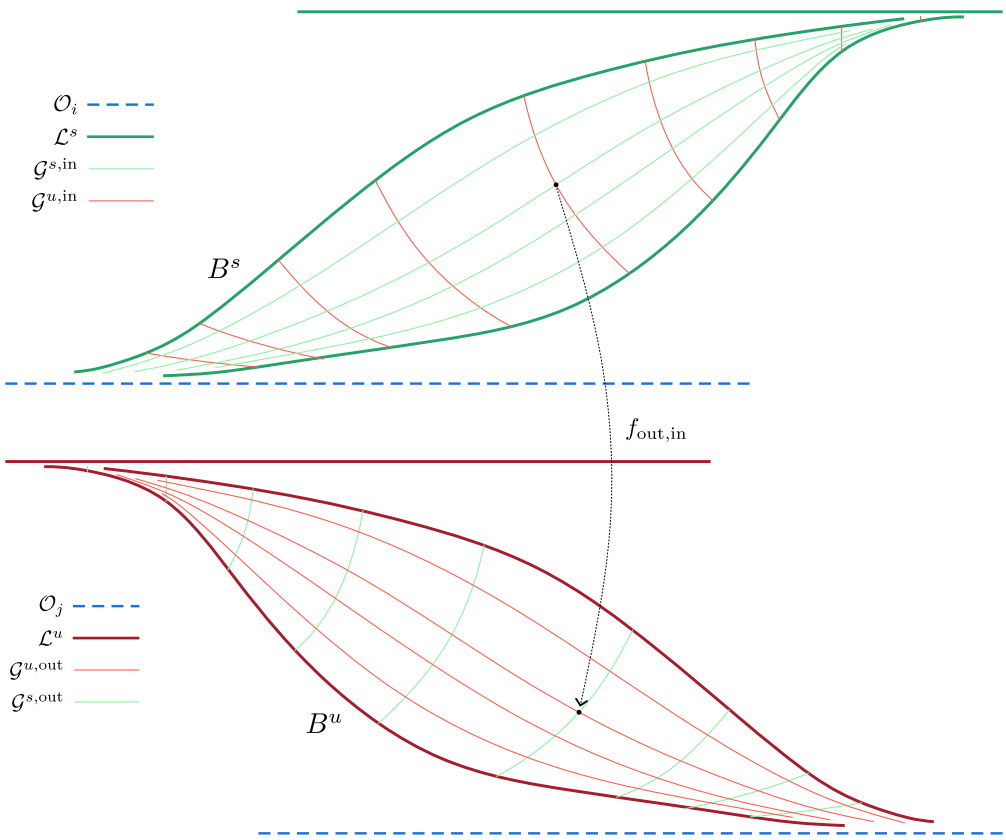


FIGURE 3.1 – Application de passage d'une bande $B^s \subset P^{\text{in}}$ à une bande $B^u \subset P^{\text{out}}$.

- L'image d'un vecteur v par la différentielle de l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ est la projection $\pi\colon TP \to TP^{\text{out}}$ sur l'espace tangent TP^{out} parallèlement à $\mathbb{R}.X$ du vecteur $X_*^\tau v$ poussé par le flot sur P^{out} :
$$(f_{\text{out,in}})_* v = \pi(X_*^\tau v) \tag{3.1}$$
où τ est le temps de sortie de l'orbite. On montre que la projection d'un vecteur $v = v^{uu} + v^{ss} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ sur une surface S parallèlement à $\mathbb{R}.X$ ne contracte par la composante instable forte v^{uu} (au dessus d'un point où la décomposition hyperbolique est bien définie) (lemme 3.2.4).

- Le point délicat a lieu au voisinage d'une orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$. En effet un vecteur v tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en un point $p \in P^{\text{in}}$ très proche d'une orbite $\mathcal{O}_i$ a une composante instable forte v^{uu} très petite par rapport à sa composante v^X tangente à $\mathbb{R}.X$, sur laquelle l'action du flot est isométrique. Il faut donc passer un temps très long dans un voisinage hyperbolique pour que le vecteur soit exponentiellement dilaté par le flot X^t.

  Cependant, la trajectoire d'une orbite d'un point $p \in P^{\text{in}}$ très proche d'une orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ passe un temps très long dans un voisinage de $\mathcal{O}_i$, où la dynamique du flot est hyperbolique. Cette compétition s'équilibre. Pour le montrer, on décompose le passage $f_{\text{out,in}}$ de P^{in} à une surface "intermédiaire" $\hat{P}^{\text{in}}$ proche de P^{in} et uniformément transverse au champ de vecteurs, puis d'une surface "intermédiaire" $\hat{P}^{\text{out}}$ proche de P^{in} et uniformément transverse au champ de vecteurs à P^{out} (section 3.3). On étudie les applications intermédiaires explicitement dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ de $\mathcal{O}_i$.

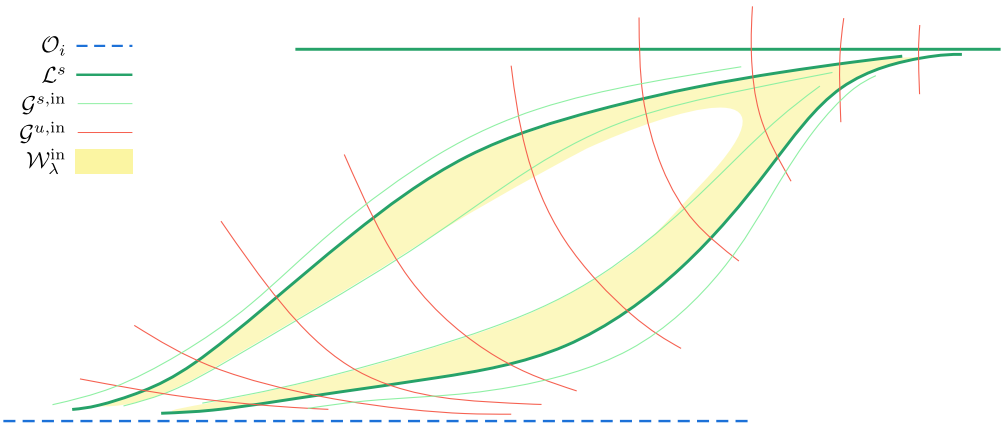


FIGURE 3.2 – Voisinage $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ sur une bande B^s, qui s'accumule d'une part à une orbite $\mathcal{O}_i$ et d'autre part à une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$.

3.2 Lemmes préliminaires

Avant de montrer la proposition, on aura besoin d'un certain nombre de lemmes que l'on énonce et prouve maintenant.

Voisinage filtrant hyperbolique Un voisinage de Λ dans P est dit *filtrant* si l'intersection de ce voisinage avec toute orbite du flot de X dans P est connexe.

Lemme 3.2.1. *Il existe $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert filtrant de Λ dans P et une décomposition continue X^t-invariante du fibré tangent sur $\mathcal{U}$ que l'on note encore $TP_{|\mathcal{U}} = E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$, qui coïncide avec la décomposition hyperbolique sur Λ, et qui vérifie : il existe des constantes $\lambda_0 > 1$ et $C_0 > 0$ tel que si l'orbite de $p \in \mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}$ au temps $t > 0$ alors*

$$\forall v \in E^{uu}(p), \quad \|X^t_* v\| > C_0 \lambda_0^t \|v\|$$
$$\forall v \in E^{ss}(p), \quad \|X^t_* v\| < C_0^{-1} \lambda_0^{-t} \|v\|$$

Démonstration. Le bloc (P, X) est un bloc normalisé selle plein. Soit Σ une section affine de Λ. D'après le fait 2.2.5, il existe une partition de Markov $\mathcal{R} = (R, \Sigma)$ de Λ sur Σ, tel que l'intersection de toute orbite de X dans P avec l'union des cubes $\mathcal{U} := \cup_{t\in[0,1]} X^t(R)$ est connexe (on rappelle que le temps de retour de R sur Σ est égal à 1). Soit (ζ^s, ζ^u) la paire de feuilletages f-invariants sur Σ, tel que f dilate uniformément la direction tangente à ζ^u et contracte uniformément la direction tangente à ζ^s. On note E^{ss} la direction tangente à ζ^s sur Σ et E^{uu} la direction tangente à ζ^u sur Σ. Ces directions coïncident bien avec les directions stables fortes et instables fortes de Λ au dessus d'un point $p \in \Sigma \cap \Lambda$, ce qui justifie la notation.

Montrons que le voisinage $\mathcal{U}$ satisfait le lemme 3.2.1. D'après les propriétés de la partition de Markov, c'est un voisinage filtrant de Λ. On peut pousser la décomposition $T\Sigma = E^{ss} \oplus E^{uu}$ sur le voisinage $\mathcal{U} = \cup_{t\in[0,1]} X^t(R)$ par la différentielle du flot pour $t \in [0, 1]$. Cette décomposition est f-invariante, donc l'image de $E^{ss} \oplus E^{uu}$ par la différentielle du flot en temps 1 coïncide avec $E^{ss} \oplus E^{uu}$, et on obtient une décomposition que l'on note toujours $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu} = TP_{|\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{U}$, qui est invariante par le flot, et hyperbolique d'après les propriétés d'hyperbolicité de f sur R. Elle coïncide avec la décomposition hyperbolique sur Λ au dessus de d'un point $p \in \Lambda$. $\square$

Fait 3.2.2. *La longueur des orbites dans le complémentaire de $\mathcal{U}$ est uniformément majorée par une constante T_0*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, on aurait une suite de points $p_n \in P$ et de temps croissants $t_n \to +\infty$ tel que les segments d'orbite $[p_n, X^{t_n} p_n]$ sont dans le complémentaire de $\mathcal{U}$. Quitte à prendre une sous-suite, la suite $(p_n)_n$ converge vers un point q par compacité de P.

- Supposons qu'il existe un temps T tel que $X^T(q)$ est dans $\mathcal{U}$. Par continuité du flot, pour un n arbitrairement grand, la distance $\mathrm{dist}(X^T(p_n), X^T(q))$ est arbitrairement petite, et $\mathcal{U}$ est ouvert donc $X^T(p_n)$ est dans $\mathcal{U}$ pour n assez grand, ce qui est une contradiction dès que $t_n > T$.
- Supposons qu'il existe un temps T tel que $X^T(q) \in P^{\mathrm{out}}$. De même la distance $\mathrm{dist}(X^T(p_n), X^T(q))$ est arbitrairement petite. Or un point arbitrairement proche de P^{out} a une orbite positive qui sort en temps arbitrairement petit, ce qui contredit la bonne définition des $X^{t_n}(p_n)$ pour des temps t_n assez grands.

On en déduit que l'orbite de q ne rentre jamais dans $\mathcal{U}$ et ne sort jamais par P^{out}. C'est impossible. □

Le corollaire suivant est une amélioration du lemme 3.2.1, et dit que l'on peut prolonger la décomposition hyperbolique sur le saturé $\hat{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ par le flot de X dans P.

Corollaire 3.2.3. *Il existe $\hat{\mathcal{U}}$ un voisinage X^t-invariant de Λ et une décomposition continue X^t-invariante du fibré tangent de $\hat{\mathcal{U}}$ que l'on note encore $TP_{|\hat{\mathcal{U}}} = E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$, qui prolonge continûment celle sur l'ensemble hyperbolique Λ, et qui vérifie : il existe des constantes $\lambda_0 > 1$ et $C_0 > 0$ tel que si l'orbite de $p \in \mathcal{U}$ est définie au temps $t > 0$ alors*

$$\forall v \in E^{uu}(p), \quad \|X^t_* v\| > C_0 \lambda_0^t \|v\|$$
$$\forall v \in E^{ss}(p), \quad \|X^t_* v\| < C_0^{-1} \lambda_0^{-t} \|v\|$$

Démonstration. Soit $\hat{\mathcal{U}} = \cup_{t\in\mathbb{R}} X^t(\mathcal{U}) \cap P$ le saturé par le flot de X dans P du voisinage $\mathcal{U}$ donné par le lemme 3.2.1. On peut pousser la décomposition hyperbolique $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ sur $\mathcal{U}$ par la différentielle du flot sur le saturé de $\hat{\mathcal{U}}$. Comme $\mathcal{U}$ est un voisinage filtrant, une orbite, disons positive, qui sort de $\mathcal{U}$ n'y retourne jamais. De même, une orbite négative qui sort de $\mathcal{U}$ n'intersecte jamais $\mathcal{U}$ dans le passé. La décomposition ainsi obtenue sur $\hat{\mathcal{U}}$ est donc invariante par le flot de X. De plus, les segments d'orbite dans $\hat{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ ont une longueur uniformément bornée d'après le lemme 3.2.2. Donc l'action de la différentielle du flot le long de ces orbites est uniformément bornée. Les propriétés de dilatation de E^{uu} et de contraction de E^{ss} du lemme 3.2.1 sont conservées, quitte à changer la constante C_0. □

Projection d'un vecteur centre-instable sur une surface transverse On aura besoin du lemme suivant, qui dit que la projection d'un vecteur $v \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ sur une surface S transverse à X, parallèlement à $\mathbb{R}.X$ en un point $p \in \hat{\mathcal{U}}$ a une norme essentiellement minorée par la norme de la composante instable forte dans E^{uu} du vecteur v.

Lemme 3.2.4. *Soit S une surface plongée dans P transverse au champ de vecteurs X. Soit $p \in S \cap \hat{\mathcal{U}}$ et $\pi_p \colon T_pP \to T_pS$ la projection sur T_pS parallèlement à $\mathbb{R}.X$ dans le voisinage $\hat{\mathcal{U}}$ muni de la décomposition hyperbolique. Il existe une constante $\mathrm{cst} > 0$ tel que pour tout vecteur $v = v^{uu} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ tangent au fibré centre instable sur un point $p \in S$, on a*

$$\|\pi_p(v)\| \geq \mathrm{cst}\, \|v^{uu}\|$$

Démonstration. On rappelle le fait suivant

Fait 3.2.5. *Soit F, G deux plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$, et H une droite supplémentaire de F et G, et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne. Soit $\pi\colon F \to G$ la projection de F sur G parallèlement à H, linéaire inversible. Alors on a :*

$$\frac{\|\pi(v)\|_2}{\|v\|_2} = \left|\frac{\sin \measuredangle(H, \mathbb{R}.v)}{\sin \measuredangle(H, \mathbb{R}.\pi(v))}\right|$$

Si $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée à une base de vecteurs tangents $(\partial_{uu}, \partial_{ss}, X)$ où $\partial_{uu} \in E^{uu}$ et $\partial_{ss} \in E^{ss}$, alors on a

$$\frac{\|\pi(v)\|_2}{\|v\|_2} \geq \sin(\measuredangle(v, X)) = \frac{\|v^{uu}\|_2}{\|v\|_2}$$

Par équivalence des normes, on en déduit l'existence de la constance $\mathrm{cst} > 0$ qui satisfait le lemme. □

Angles des feuilletages et du champ de vecteurs sur le bord de P Le champ de vecteurs X est de plus en plus tangent à la surface ∂P à mesure que l'on s'approche de l'ensemble des orbites périodiques tangentes $\mathcal{O}_*$. De même les feuilletages $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ sur P^{in} sont de plus en plus tangents l'un à l'autre à mesure que l'on s'approche de l'ensemble $\mathcal{O}_* \subset \partial P$. En utilisant l'expression du champ X et des feuilletages dans les coordonnées normalisées $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$, on montre que la vitesse de fermeture des angles est essentiellement la même, de l'ordre de la distance à l'orbite $\mathcal{O}_i$. Cette propriété sera utile dans le reste de la preuve.

Lemme 3.2.6. *Il existe une constante* $\mathrm{cst} > 0$ *tel que pour tout* $p \in P^{\mathrm{in}}$,

1) $\mathrm{cst}^{-1}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \measuredangle(\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}, \mathcal{G}^{u,\mathrm{in}})_p \leq \mathrm{cst}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*)$

2) $\mathrm{cst}^{-1}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \measuredangle(X, P^{\mathrm{in}})_p \leq \mathrm{cst}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*)$

3) $\mathrm{cst}^{-1}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \measuredangle(X, \mathcal{G}^{u,\mathrm{in}})_p \leq \mathrm{cst}\,\mathrm{dist}(p, \mathcal{O}_*)$

Démonstration. Il suffit de le vérifier au voisinage d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ dans le système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$. Soit $(\partial_x, \partial_y, \partial_\theta)$ la base de champs de vecteurs associée aux coordonnées (x, y, θ). On rappelle que la norme $\|\cdot\|$ sur P coïncide avec la norme euclidienne dans ces coordonnées. Par définition d'un bloc normalisé (définition 2.1.2 et corollaire 2.1.4), la surface P^{in} a pour équation locale $x = y$ et, si on note $c = \ln(2)$, le champ de vecteurs X dans ces coordonnées est

$$X(x, y, \theta) = -cx\partial_x + cy\partial_y + \partial_\theta.$$

Les voisinages $\mathcal{V}_i$ sont inclus dans le voisinage $\mathcal{U}$ muni d'une décomposition hyperbolique de l'espace tangent $TP_{|\mathcal{U}} = E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ (lemme 3.2.1), quitte à restreindre $\mathcal{V}_*$, ce que l'on supposera toujours. La direction E^{uu} est engendrée par ∂_y et la direction E^{ss} est engendrée par ∂_x. Notons que la distance d'un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\mathrm{in}}$ à $\mathcal{O}_i$ est égale à x. Montrons chacun des items.

1) Le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ est engendré par le champ $\partial_s = cx\,(\partial_x + \partial_y) + \partial_\theta$ et le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ est engendré par le champ $\partial_u = -cx\,(\partial_x + \partial_y) + \partial_\theta$ (figure 3.3). Comme le couple $(\partial_x + \partial_y, \partial_\theta)$ forme une base orthogonale sur $P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_i$, l'angle entre les deux directions tangentes en un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\mathrm{in}}$ est proportionnel à x, donc à la distance de p à $\mathcal{O}_i$.

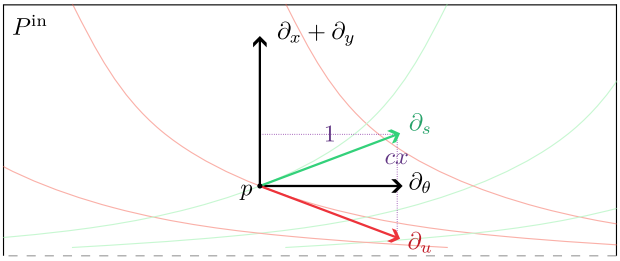


FIGURE 3.3 – Coordonnées des champs de vecteurs ∂_u et ∂_s générateur des feuilletages $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ en un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$

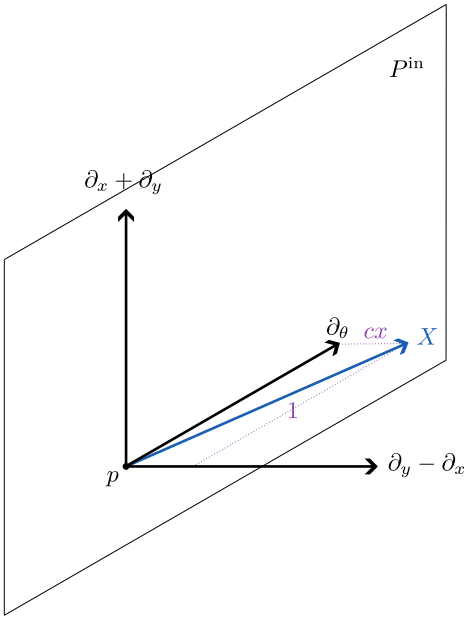


FIGURE 3.4 – Coordonnées du vecteur X au point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$

2) Le champ de vecteurs X sur P^{in} est

$$X(x, x, \theta) = cx\,(\partial_y - \partial_x) + \partial_\theta$$

Il est orthogonal à $\partial_x + \partial_y$ en tout point de l'anneau et l'angle entre X et ∂_θ en un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$ est proportionnel à x, donc à la distance de p à $\mathcal{O}_i$ (figure 3.4).

3) La direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ au point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$ est engendrée par le champ de vecteurs

$$\partial^u = -cx\,(\partial_x + \partial_y) + \partial_\theta = -2cx\,\partial_y + X(x, x, \theta)$$

Comme le vecteur X est uniformément transverse à ∂_y, on en déduit que l'angle entre X et le vecteur ∂^u en un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$ est proportionnel à x, donc à la distance de p à $\mathcal{O}_i$.

□

3.3 Décomposition de l'application de passage

Afin d'expliciter le passage d'une orbite proche de l'ensemble $\mathcal{O}_*$, on va considérer des surfaces $\hat{P}^{\text{in}}$ et $\hat{P}^{\text{out}}$ qui coïncident avec P^{in} et P^{out} sauf au voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$ et sont uniformément transverses au champ X. Soit $\mathcal{V}_* = \cup_i \mathcal{V}_i$ l'union des voisinages normalisés des orbites $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ dans un prolongement minime $\tilde{P}$. L'expression du flot dans les coordonnées $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est $X^t(x, y, \theta) = (2^{-t}x, 2^t y, \theta + t)$, et le bord de P s'identifie à $\{x = y\}$ (définition 2.1.2). Soit $r_0 > 0$ de sorte que le point $(r_0, r_0, 0)$ est dans l'image de $\mathcal{V}_i$ dans les coordonnées ξ_i pour tout i.

Notation 3.3.1. Soit $\hat{P}^{\text{in}}$ une surface lisse tel que :

- $\hat{P}^{\text{in}}$ coïncide avec P^{in} en dehors de $\mathcal{V}_*$,
- $\hat{P}^{\text{in}} = \{y = r_0, x > 0\}$ sur un voisinage $\hat{\mathcal{V}}_i \subset \mathcal{V}_i$,
- $\hat{P}^{\text{in}}$ est uniformément transverse au champ X.

Soit $\hat{P}^{\text{out}}$ une surface lisse tel que :

- $\hat{P}^{\text{out}}$ coïncide avec P^{out} en dehors de $\mathcal{V}_*$,
- $\hat{P}^{\text{out}} = \{x = -r_0, y < 0\}$ sur un voisinage $\hat{\mathcal{V}}_i \subset \mathcal{V}_i$,
- $\hat{P}^{\text{out}}$ est uniformément transverses au champ X.

On renvoie à la figure 3.5.

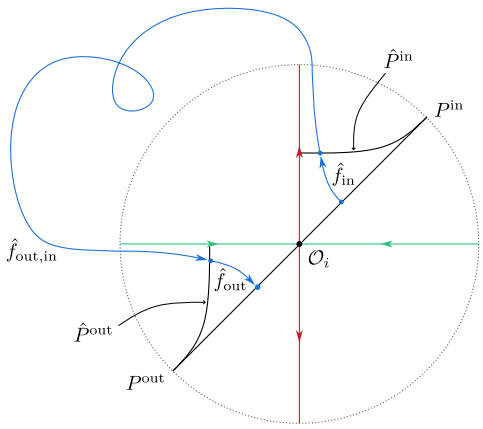


FIGURE 3.5 – Décomposition de l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ dans un voisinage normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$.

Remarque 3.3.2.

- Chaque composante connexe de $\hat{P}^{\text{in}}$ (respectivement $\hat{P}^{\text{out}}$) est soit une surface fermée, soit l'intérieur d'une surface à bord dont le bord est formé de courbes fermées dans la variété instable (respectivement stable) d'orbites périodique de $\mathcal{O}_*$.
- Chaque point sur $\hat{P}^{\text{in}}$ a une orbite passée qui est entrée par P^{in}, chaque point sur $\hat{P}^{\text{out}}$ a une orbite future qui sort par P^{out}. Le temps n'est pas borné car on peut être arbitrairement proche du bord de $\hat{P}^{\text{in}}$ et $\hat{P}^{\text{out}}$, auquel cas l'orbite passe un temps arbitrairement long au voisinage d'une orbite $\mathcal{O}_i$ avant d'intersecter P^{in} ou P^{out}.

- Par transversalité de $\hat{P}^{\text{in}}$ et $\hat{P}^{\text{out}}$ avec le champ de vecteurs X, la lamination $\mathcal{W}^s$ induit une lamination de dimension 1 sur $\hat{P}^{\text{in}}$ et la lamination $\mathcal{W}^u$ induit une lamination de dimension 1 sur $\hat{P}^{\text{out}}$. On les note

$$\hat{\mathcal{L}}^s = \mathcal{W}^s \cap \hat{P}^{\text{in}}, \quad \hat{\mathcal{L}}^u = \mathcal{W}^u \cap \hat{P}^{\text{out}} \tag{3.2}$$

On décompose l'application $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ sous la forme :

$$f_{\text{out,in}} = \hat{f}_{\text{out}} \circ \hat{f}_{\text{out,in}} \circ \hat{f}_{\text{in}} \tag{3.3}$$

où

$$\hat{f}_{\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to \hat{P}^{\text{in}}, \quad \hat{f}_{\text{out,in}} \colon \hat{P}^{\text{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{L}}^s \to \hat{P}^{\text{out}} \smallsetminus \hat{\mathcal{L}}^u, \quad \hat{f}_{\text{out}} \colon \hat{P}^{\text{out}} \to P^{\text{out}}$$

sont les applications de passage du flot de X entre les surfaces de départ et d'arrivée (voir figure 3.5). L'application composée est bien définie sur $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s$ à image dans $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u$. Les passages locaux $\hat{f}_{\text{in}}$ et $\hat{f}_{\text{out}}$ sont triviaux en dehors des voisinages normalisés $\mathcal{V}_*$, sur lesquels on a des systèmes de coordonnées et des formules explicites. Le passage $\hat{f}_{\text{out,in}}$ de $\hat{P}^{\text{in}}$ à $\hat{P}^{\text{out}}$ est un passage de flot entre deux sections uniformément transverses au champ X.

Temps de passages intermédiaire Pour tout p dans P, on rappelle que $\tau(p)$ est le temps d'arrivée (s'il est bien défini) du point p sur P^{out}, autrement dit tel que $X^{\tau(p)}(p) \in P^{\text{out}}$. On définit aussi

- $\hat{\tau}$ le temps d'intersection de l'orbite (positive ou négative) d'un point avec la surface $\hat{P}^{\text{out}}$ (quand il est bien défini), autrement dit tel que $X^{\hat{\tau}(p)}(p) \in \hat{P}^{\text{out}}$. Ce temps est unique car une orbite qui intersecte $\hat{P}^{\text{out}}$ ne repasse jamais par $\hat{P}^{\text{out}}$. Ce temps est bien défini sur le complémentaire de $\mathcal{W}^s$ dans P. En effet, tout point sur $P \smallsetminus \mathcal{W}^s$ a une orbite qui intersecte P^{out}. De plus, toute orbite qui intersecte P^{out} intersecte $\hat{P}^{\text{out}}$.

- τ_{in} le temps d'intersection de l'orbite (positive ou négative) d'un point avec la surface $\hat{P}^{\text{in}}$ (quand il est bien défini), autrement dit tel que $X^{\tau_{\text{in}}(p)}(p) \in \hat{P}^{\text{in}}$. Ce temps est unique car une orbite qui intersecte $\hat{P}^{\text{in}}$ ne repasse jamais par $\hat{P}^{\text{in}}$. Ce temps est bien défini sur le complémentaire de $\mathcal{W}^u$ dans P. En effet, tout point sur $P \smallsetminus \mathcal{W}^u$ a une orbite qui intersecte P^{in}. De plus, toute orbite qui intersecte P^{in} intersecte $\hat{P}^{\text{in}}$.

3.4 Preuve de la proposition 3.1.2

On est maintenant en mesure de montrer la proposition 3.1.2. On se ramène à l'étude des effets dilatants sur les vecteurs tangents à $\mathcal{G}^u$ des trois applications $\hat{f}_{\text{in}}$, $\hat{f}_{\text{out,in}}$, $\hat{f}_{\text{out}}$. Dans un premier temps, on montre que l'application $\hat{f}_{\text{in}}$ ne contracte pas trop la direction tangente à $\mathcal{G}^u$ (lemme 3.4.1) sur P^{in}. Dans un second temps, on montre que l'application $\hat{f}_{\text{out}} \circ \hat{f}_{\text{out,in}}$ dilate arbitrairement fort la direction tangente à $\mathcal{G}^u$ dans un petit voisinage de $\mathcal{W}^s$ sur $\hat{P}^{\text{in}}$ (lemme 3.4.2 et 3.4.3). Dans une conclusion, on assemble les résultats précédents pour montrer que l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ dilate arbitrairement fort la direction tangente à $\mathcal{G}^u$ dans un petit voisinage de $\mathcal{L}^s$ sur P^{in}.

Étape 1 : Minoration de la contraction de l'application $\hat{f}_{\text{in}}$ dans la direction instable

Lemme 3.4.1. *La dérivée de $\hat{f}_{\text{in}}$ est uniformément minorée dans la direction tangente au feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$. Autrement dit, une constante* cst > 0 *tel que*

$$\forall p \in P^{\text{in}}, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \quad \|(\hat{f}_{\text{in}})_* v\| \geq \text{cst}\, \|v\|$$

Ce lemme nous dit que la compétition s'équilibre entre la dilatation d'un vecteur instable $v \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ sous l'effet du flot, et la contraction sous l'effet de la projection sur la surface $\hat{P}^{\text{in}}$. Plus précisément, un point sur P^{in} proche de $\mathcal{O}_i$ a une orbite dont le passage local de P^{in} à $\hat{P}^{\text{in}}$ n'est pas trivial. Un vecteur tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en ce point a une composante instable forte petite par rapport à sa composante tangente à X. La projection parallèlement à X d'un tel vecteur poussé par le flot sur la surface $\hat{P}^{\text{in}}$ transverse à X a un effet très contractant sur la composante tangente à X et uniformément borné sur la composante instable forte. Mais le temps passé au voisinage de l'orbite périodique hyperbolique lors du passage d'un anneau à l'autre dilate suffisamment la composante instable forte pour que la projection sur $\hat{P}^{\text{in}}$ du vecteur poussé par le flot ne soit pas (trop) contractante.

Démonstration. On a $(\hat{f}_{\text{in}})_* = \pi \circ X_*^{\tau_{\text{in}}}$ où $\pi \colon TP \to T\hat{P}^{\text{in}}$ est la projection sur l'espace tangent de $\hat{P}^{\text{in}}$ parallèlement à $\mathbb{R}.X$. L'application $\hat{f}_{\text{in}}$ est égale à l'identité partout en dehors de $\mathcal{V}_* = \cup_i \mathcal{V}_i$, il n'y a rien à montrer. Montrons la propriété sur $\mathcal{V}$, au dessus duquel on a une décomposition hyperbolique X^t-invariante. Soit $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ un système de coordonnées normalisé de $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, muni de la décomposition hyperbolique $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ de l'espace tangent (lemme 3.2.1). Le flot dans ces coordonnées est

$$X^t(x, y, \theta) = (2^{-t}\, x, 2^t\, y, \theta + t)$$

Le lemme repose sur les deux points suivants.

1) Soit $v = v^{uu} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ un vecteur tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ au dessus d'un point $p \in P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_i$. Alors il existe une constante uniforme cst tel que

$$\|v^{uu}\| \geq \text{cst}\ \text{dist}(p, \mathcal{O}_i)\, \|v\|$$

2) Le temps de passage τ_{in} est bien défini sur P^{in} et vérifie : il existe une constante uniforme cst > 0 tel que pour tout $p \in P^{\text{in}}$

$$\tau_{\text{in}}(p) \geq \log_2(\text{cst}\, \text{dist}(p, \mathcal{O}_i)^{-1}).$$

Un vecteur dans $\mathcal{V}_i$ poussé par le flot (linéaire) pendant un temps $\tau_{\text{in}}(p)$ a donc sa composante instable forte dilatée d'un facteur minoré par $\text{cst}\, \text{dist}(p, \mathcal{O}_i)^{-1}$.

Le premier point est une conséquence directe du lemme 3.2.6, item 3, qui dit que l'angle $\measuredangle(X, \mathcal{G}^u_{\text{in}})$ est de l'ordre de la distance à l'orbite $\mathcal{O}_i$. Pour le deuxième point, l'orbite d'un point $p = (x, x, \theta) \in P^{\text{in}}$ intersecte la section $\hat{P}^{\text{in}}$ au temps $\tau_{\text{in}}(p) = -\log_2(2x)$. On conclut en remarquant que x est égal à la distance $\text{dist}(p, \mathcal{O}_i)$.

Démontrons le lemme. Soit $v = v^{uu} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$ un vecteur tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ au dessus d'un point $p \in P^{\text{in}}$. Alors d'après le lemme 3.2.4, on a (quitte à changer la constante à chaque ligne)

$$\|(\hat{f}_{\text{in}})_* v\| = \|\pi \circ (X^{\tau_{\text{in}}(p)})_* v\| \geq \text{cst}\ \|(X^{\tau_{\text{in}}(p)})_* v^{uu}\|$$

puis d'après le point 2,

$$\begin{aligned} \|(\hat{f}_{\text{in}})_* v\| &\geq \text{cst}\ 2^{\tau_{\text{in}}(p)} \|v^{uu}\| \\ &\geq \text{cst}\ \frac{1}{\text{dist}(p, \mathcal{O}_i)} \|v^{uu}\| \end{aligned}$$

et d'après le point 1, on en déduit

$$\|(\hat{f}_{\text{in}})_* v\| \geq \text{cst}\ \|v\|$$

□

Étape 2 : dilatation de la composée $\hat{f}_{\text{out}} \circ \hat{f}_{\text{out,in}}$ dans la direction instable On montre que la composée $\hat{f}_{\text{out}} \circ \hat{f}_{\text{out,in}}$ dilate arbitrairement fort un vecteur tangent à $\mathcal{G}^u \cap \hat{P}^{\text{in}}$ dans un petit voisinage de $\mathcal{W}^s \cap \hat{P}^{\text{in}}$. Pour cela on fait l'étude de la dilatation de $\hat{f}_{\text{out,in}}$ d'une part (lemme 3.4.2) puis de $\hat{f}_{\text{out}}$ d'autre part (lemme 3.4.3).

Lemme 3.4.2. *Il existe une constante* cst > 0 *tel que pour tout* $p \in \hat{P}^{\text{in}}$ *et pour tout vecteur* v *tangent à* $\mathcal{G}^u \cap \hat{P}^{\text{in}}$ *sur* p,

$$\|(\hat{f}_{\text{out,in}})_* v\| \geq \text{cst } \lambda_0^{\hat{\tau}(p)} \|v\|$$

Démonstration. On a $(\hat{f}_{\text{out,in}})_* = \hat{\pi} \circ X_*^{\hat{\tau}}$ où $\hat{\pi} \colon TP \to T\hat{P}^{\text{out}}$ est la projection sur l'espace tangent de $\hat{P}^{\text{out}}$ parallèlement à $\mathbb{R}.X$. Ce lemme repose sur les points clés suivants. Soit $\hat{\mathcal{U}}$ le voisinage X^t-invariant, muni d'une décomposition hyperbolique (corollaire 3.2.3). Soit $p \in \hat{P}^{\text{in}}$ et v un vecteur tangent à $\mathcal{G}^u \cap \hat{P}^{\text{in}}$ au point p. On distingue deux situations.

1) Soit $p \in P^{\text{in}} \setminus \hat{\mathcal{U}}$. Par invariance de $\hat{\mathcal{U}}$, l'orbite de p est entièrement incluse dans le complémentaire $P \setminus \hat{\mathcal{U}}$, donc dans $P \setminus \mathcal{U}$. Elle intersecte P^{out} au temps $\tau(p)$ uniformément majoré par T_0 d'après le lemme 3.2.2. De plus, elle intersecte P^{out} le long de $P \setminus \hat{\mathcal{U}}$. Ce domaine est inclus dans $P \setminus \mathcal{V}_*$, où les surfaces P^{out} et $\hat{P}^{\text{out}}$ coïncide. On en déduit que le temps $\hat{\tau} = \tau$ est uniformément borné sur $P^{\text{in}} \setminus \hat{\mathcal{U}}$. Si $\hat{\tau}$ est un temps uniformément borné par T_0, alors

   (a) L'action de la différentielle $X_*^{\hat{\tau}}$ est uniformément bornée,

   (b) Pour tout vecteur v tangent à $\hat{P}^{\text{in}}$, l'angle entre le vecteur image $w = X_*^{\hat{\tau}}(v)$ et la direction tangente à X est uniformément minoré

   (c) Si l'angle entre un vecteur w de norme 1 et la direction tangente à X en un point $p \in \hat{P}^{\text{out}}$ est uniformément minoré, alors la norme du vecteur projeté $\hat{\pi}(w) \in T\hat{P}^{\text{out}}$ est uniformément bornée.

   L'item 1b est une conséquence de l'uniforme transversalité de $\hat{P}^{\text{in}}$ à X, et l'item 1c est une conséquence de l'uniforme transversalité de $\hat{P}^{\text{out}}$ à X. On en déduit que il existe une constante cst$' > 0$ uniforme en p telle que

$$\begin{aligned} \|d_p \hat{f}_{\text{out,in}}(v)\| &= \|\hat{\pi}_p \circ d_p X^{\hat{\tau}(p)}(v)\| \\ &\geq \text{cst}' \, \|d_p X^{\hat{\tau}(p)}(v)\| && \text{(item 1b et 1c)} \\ &\geq \text{cst}' \, \|v\| && \text{(item 1a)} \end{aligned}$$

   Le lemme 3.4.2 est vérifié pour la constante cst $= \text{cst}'(\lambda_0^{T_0})^{-1}$.

2) Soit $p \in P^{\text{in}} \cap \hat{\mathcal{U}}$. D'après 3.2.3, il existe une décomposition hyperbolique invariante $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ sur $\mathcal{U}$. Le vecteur $v \in T_p P^{\text{in}} \cap T_p \mathcal{G}^u$ tangent se décompose en la somme $v = v^{uu} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$. Par transversalité de $\hat{P}^{\text{in}}$ avec X, il existe une constante cst > 0 uniforme tel que

$$\|v^{uu}\| \geq \text{cst } \|v\|$$

   Par invariance de $\hat{\mathcal{U}}$, l'orbite de p est entièrement incluse dans $\hat{\mathcal{U}}$, et le temps d'intersection $\hat{\tau}$ est strictement positif. Par hyperbolicité, la direction E^{uu} est préservée et la composante v^{uu} est dilatée par la différentielle X_*^{τ} du flot le long de l'orbite de p, autrement dit on a $w = X_*^{\hat{\tau}}(v) = w^{uu} + w^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$, et

$$\|w^{uu}\| \geq C_0 \lambda_0^{\hat{\tau}} \|v^{uu}\| \geq \text{cst } \lambda_0^{\hat{\tau}} \|v\|$$

De plus, on sait d'après le lemme 3.2.4 que la norme de la projection $\hat{\pi}(w)$ est essentiellement minorée par la composante w^{uu} instable forte, donc

$$\begin{aligned}\|d_p\hat{f}_{\text{out,in}}(v)\| &= \|\hat{\pi}_p \circ d_p X^{\hat{\tau}(p)}(v)\| = \|\hat{\pi}_p(w^{uu} + w^X)\| \\ &\geq \text{cst}\, \|w^{uu}\| \\ &\geq \text{cst}\, \lambda_0^{\hat{\tau}} \|v\|\end{aligned}$$

□

Pour finir, on montre que l'application de passage de sortie $\hat{f}_{\text{out}}$ dilate exponentiellement les vecteurs instables en fonction du temps de passage local de l'orbite de $\hat{P}^{\text{out}}$ à P^{out}.

Lemme 3.4.3. *Il existe une constante* cst > 0 *tel que pour tout* $p \in \hat{P}^{\text{out}}$*, pour tout vecteur* v *tangent au feuilletage* $\mathcal{G}^u \cap \hat{P}^{\text{out}}$ *sur* p*, on a*

$$\|(\hat{f}_{\text{out}})_* v\| \geq \text{cst}\ \lambda_0^{\tau(p)} \|v\|$$

Dans ce sens, il n'a y pas de compétition entre dilatation et contraction. En effet, $\hat{f}_{\text{out}}$ est une application de passage de flot partant d'une surface de départ $\hat{P}^{\text{out}}$ uniformément transverse à X. La projection sur la surface d'arrivée P^{out} ne sera pas trop contractante. De plus, le transport par le flot dans le voisinage de $\mathcal{O}_*$ contribue à dilater exponentiellement un vecteur instable.

Démonstration. On a $(\hat{f}_{\text{out}})_* = \pi \circ X_*^\tau$ où π est la projection sur P^{out} parallèlement à $\mathbb{R}.X$, et le temps de passage τ est bien défini partout sur $\hat{P}^{\text{out}}$. L'argument est en le même que la preuve du lemme précédent, que l'on répète ici. On se place dans un domaine où l'application $\hat{f}_{\text{out}}$ n'est pas triviale, autrement dit un voisinage $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_*$ d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$. Il existe une décomposition hyperbolique invariante $E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{ss}$ sur $\mathcal{V}_i$. Pour $p \in \hat{P}^{\text{out}} \cap \mathcal{V}_i$, un vecteur $v \in T_p\hat{P}^{\text{out}} \cap T_p\mathcal{G}^u$ tangent se décompose en la somme $v = v^{uu} + v^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$. Par transversalité de $\hat{P}^{\text{out}}$ avec X, il existe une constante cst > 0 uniforme tel que

$$\|v^{uu}\| \geq \text{cst}\ \|v\|$$

l'orbite de p est entièrement incluse dans $\mathcal{V}_i$, et le temps d'intersection τ avec P^{out} est strictement positif. Par hyperbolicité, la direction E^{uu} est préservée et la composante v^{uu} est dilatée par la différentielle X_*^τ du flot le long de l'orbite de p, autrement dit on a $w = X_*^\tau(v) = w^{uu} + w^X \in E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X$, et

$$\|w^{uu}\| \geq C_0 \lambda_0^\tau \|v^{uu}\| \geq \text{cst}\, \lambda_0^\tau \|v\|$$

De plus, on sait d'après le lemme 3.2.4 que la norme de la projection $\hat{\pi}(w)$ est essentiellement minorée par la composante w^{uu} instable forte, donc

$$\begin{aligned}\|d_p\hat{f}_{\text{out}}(v)\| &= \|\hat{\pi}_p \circ d_p X^{\tau(p)}(v)\| = \|\hat{\pi}_p(w^{uu} + w^X)\| \\ &\geq \text{cst}\, \|w^{uu}\| \\ &\geq \text{cst}\, \lambda_0^\tau \|v\|\end{aligned}$$

□

Conclusion : dilatation de l'application de passage $f_{\text{out,in}}$ dans la direction instable

Démonstration de la proposition 3.1.2. . On montre le premier item. Soit $\lambda > 0$, soit cst > 0 une constante qui satisfait les lemmes 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3.

Fait 3.4.4. *Il existe $\hat{\mathcal{W}}_\lambda^{\text{in}}$ un voisinage de $\hat{\mathcal{L}}^s = \mathcal{W}^s \cap \hat{P}^{\text{in}}$ sur $\hat{P}^{\text{in}}$ tel que l'orbite de tout point $p \in \hat{\mathcal{W}}_\lambda$ est définie pendant un temps au moins égal à*

$$T_\lambda = \log_{\lambda_0}(\lambda) - 3\log_{\lambda_0}(\text{cst}) \tag{3.4}$$

Démonstration. Ce voisinage existe car un point arbitrairement proche de $\mathcal{W}^s$ a une orbite qui passe un temps arbitrairement long au voisinage de Λ, donc dans le prolongement minime $\tilde{P}$, dont le bord est disjoint de Λ. De plus, une orbite d'un point de $\hat{P}^{\text{in}}$ définie au temps T dans $\tilde{P}$ est défini au temps $T' \geq \frac{T}{2}$ dans P. En effet, le complémentaire $\tilde{P} \setminus P$ est inclus dans le voisinage $\mathcal{V}_*$ par définition d'un prolongement minime (définition 1.4.3), et il est clair qu'une orbite qui entre dans un voisinage $\mathcal{V}_i$ passe un temps supérieur à la moitié de T dans P, ce qui conclut. □

Posons $\mathcal{W}_\lambda^{\text{in}} = (\hat{f}_{\text{in}})^{-1}(\hat{\mathcal{W}}_\lambda^{\text{in}})$. C'est un voisinage de $\mathcal{L}^s$ dans P^{in} (figure 3.6). Soit

$$p \in \mathcal{W}_\lambda^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s, \quad q = \hat{f}_{\text{in}}(p) \in \hat{P}^{\text{in}}, \quad s = \hat{f}_{\text{out,in}}(q) \in \hat{P}^{\text{out}}$$

et soit v un vecteur tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en p. Remarquons que $\tau(s) = \tau(q) - \hat{\tau}(q)$ et $\tau(q) \geq T_\lambda$ par le fait 3.4.4. Alors

$$\begin{aligned}
\|(f_{\text{out,in}})_* v\| &= \|(\hat{f}_{\text{out}} \circ \hat{f}_{\text{out,in}} \circ \hat{f}_{\text{in}})_* v\| \\
&\geq \text{cst}\ \lambda_0^{\tau(s)}\, \|(\hat{f}_{\text{out,in}} \circ \hat{f}_{\text{in}})_* v\| && \text{(lemme 3.4.3)} \\
&\geq \text{cst}^2\ \lambda_0^{\tau(q)-\hat{\tau}(q)}\, \lambda_0^{\hat{\tau}(q)}\, \|(\hat{f}_{\text{in}})_* v\| && \text{(lemme 3.4.2)} \\
&\geq \text{cst}^3\ \lambda_0^{T_\lambda} \|v\| && \text{(lemme 3.4.1)} \\
&\geq \lambda\, \|v\| && \text{(d'après la formule (3.4))}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du premier item de la proposition 3.1.2. Le deuxième item est complètement symétrique. □

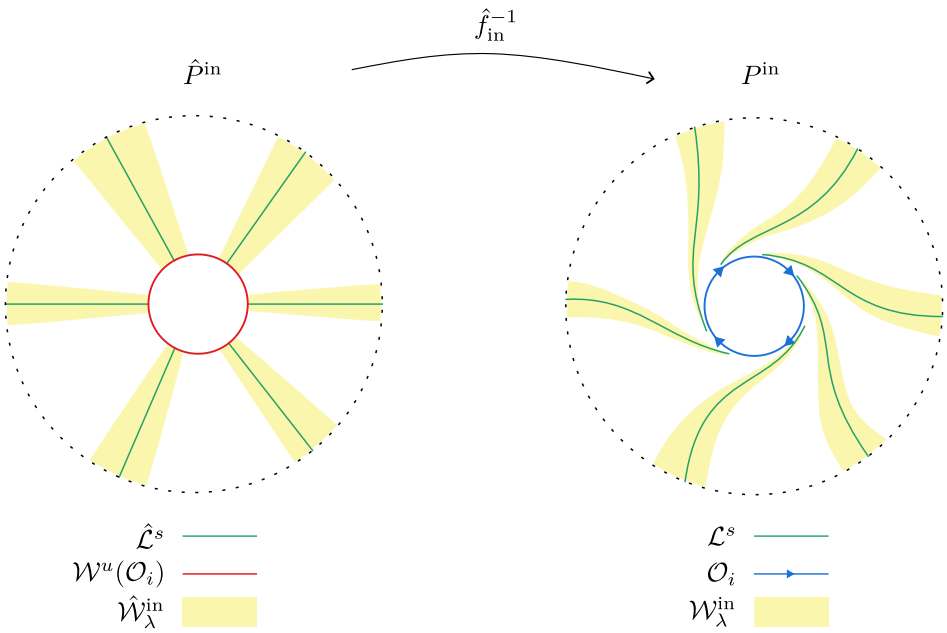

$\hat{f}_{\text{in}}^{-1}$
$\hat{P}^{\text{in}}$
P^{in}
$\hat{\mathcal{L}}^s$
$\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_i)$
$\hat{\mathcal{W}}_\lambda^{\text{in}}$
$\mathcal{L}^s$
$\mathcal{O}_i$
$\mathcal{W}_\lambda^{\text{in}}$

FIGURE 3.6

Chapitre 4

Diffusion de la dilatation de l'application de passage

Résumé Dans le chapitre précédent on a montré que la dilatation de l'application de passage $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ est arbitrairement forte proche de la lamination $\mathcal{L}^s$ (proposition 3.1.2). On renvoie au début du chapitre 3 pour un rappel des notations. Nous allons maintenant "diffuser" cette dilatation. Le but est que l'application $f_{\text{out,in}}$ dilate la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$, non seulement au voisinage de $\mathcal{L}^s$, mais presque sur tout P^{in}. Cette diffusion se fait à l'aide d'un difféomorphisme $\psi^{\text{in}} \colon \partial P \to \partial P$, à support sur P^{in}, qu'on pourra penser comme un changement de coordonnées sur P^{in}. Le difféomorphisme ψ^{in} va dépendre de trois paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$. Présentons les informellement.

- Le paramètre $\lambda > 1$ minore le facteur de dilatation de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en dehors d'un voisinages des orbites $\mathcal{O}_*$.
- Le paramètre $\epsilon > 0$ mesure la perturbation du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ induite par ψ^{in}.
- Le paramètre $\delta > 0$ est la taille du voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$ sur lequel on ne contrôle plus la dilatation de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$.

De façon analogue, la dilatation de l'application de passage inverse $f^{-1}_{\text{out,in}} \colon P^{\text{out}} \to P^{\text{in}}$ dans la direction $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ est arbitrairement forte proche de la lamination $\mathcal{L}^u$ (proposition 3.1.2). L'opération symétrique consiste à "diffuser" la dilatation de $f^{-1}_{\text{out,in}}$ dans la direction $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ loin de la lamination $\mathcal{L}^u$, à l'aide d'un difféomorphisme $\psi^{\text{out}} : \partial P \to \partial P$ à support dans P^{out}, qu'on pourra penser comme un changement de coordonnées sur P^{out}. Ces deux étapes symétriques doivent être faite de sorte que l'une ne détruise pas l'autre, autrement dit pour que la composée $\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ continue de dilater la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et son inverse continue de dilater la direction $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$. Ce sera possible grâce au contrôle de la perturbation des feuilletages par les difféomorphismes ψ^{in} et ψ^{out}.

Traduisons ce résultat dans le cadre du recollement du bloc (P, X). Si φ est un recollement normalisé du bloc (P, X), alors :

- Remplacer $f_{\text{out,in}}$ par $\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ revient à remplacer le recollement φ par $\psi^{\text{in}} \circ \varphi \circ \psi^{\text{out}}$. En effet l'application de premier retour du flot de X_φ dans la variété recollée P/φ sur la projection de la surface ∂P est la composée de l'application de passage $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ et du recollement φ. Si $\psi = \psi^{\text{in}} \circ \varphi \circ \psi^{\text{out}}$ est un autre recollement, alors l'application de premier retour de X_ψ sur ∂P est (à un conjugué près) l'application $\varphi \circ (\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}})$.

- Comme ψ^{in} et ψ^{out} ont un support inclus dans le complémentaire d'un voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$, la composée $\psi^{\text{in}} \circ \varphi \circ \psi^{\text{out}}$ est un recollement normalisé. De plus, les propriétés de ψ^{in} et ψ^{out} impliquent que la composée $\psi^{\text{in}} \circ \varphi \circ \psi^{\text{out}}$ est isotope à φ parmi les recollements fortement quasi-transverses, ce qui implique que les triplets sont fortement isotopes (définition 1.4.9).

4.1 Énoncé de la proposition principale

On va utiliser des champ de cônes sur la surface ∂P. On parlera d'ouverture d'un champ de cônes sur une surface relativement à une paire de feuilletages transverses sur la surface (figure 4.1). Formellement :

Définition 4.1.1. Soit une surface S munie d'une norme riemannienne $\|\cdot\|$, et $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ deux feuilletages transverses sur S, et $K \geq 0$.

- On dit que $C \in T_pS$ *est un* $(K,\ \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$*-cône* (fermé) si il est égal à l'ensemble

$$C = \{v_1 + v_2 \in T_p\mathcal{G}^1 \oplus T_p\mathcal{G}^2 \mid \|v_2\| \leq K\|v_1\|\}$$

  où $T_p\mathcal{G}^1 \oplus T_p\mathcal{G}^2$ est la somme directe des directions transverses tangentes respectivement au feuilletage $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ sur p. On dit que K est *l'ouverture de* C. On remarquera que l'ordre est important : un $(K,\ \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$-cône contient la direction tangente à $\mathcal{G}^1$ et ne contient pas la direction tangente à $\mathcal{G}^2$.

- Le *cône ouvert* est l'ensemble

$$\operatorname{int} C := \{v_1 + v_2 \in T_p\mathcal{G}^1 \oplus T_p\mathcal{G}^2 \mid \|v_2\| < K\|v_1\|\} \cup \{O\}$$

Soit $\mathcal{C}$ un champ de cônes $\{C(p) \in T_pS\}_{p\in S}$.

- On dit que $\mathcal{C}$ est un *champ de* $(\mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$*-cônes* si chaque $C(p)$ est un $(K(p),\ \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$-cône sur T_pS
- Si $K(p) = K$ est constante, on dira que $\mathcal{C}$ est un *champ de* $(K,\ \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$*-cônes.*
- On appelle champ de cônes *bissecteur* de $(\mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$ le champ de $(1,\ \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$-cônes.

On énonce le résultat principal du chapitre.

Proposition 4.1.2. *Pour tout* $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$, *il existe un difféomorphisme* $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon \partial P \to \partial P$ *tel que*

1) ψ^{in} *est égal à l'identité en dehors d'un compact inclus dans un nombre fini de composantes connexes de* $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s$.

2) ψ^{in} *préserve le feuilletage* $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ *feuille à feuille.*

3) ψ^{in} *perturbe peu le feuilletage* $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ *: la direction tangente à* $(\psi^{\text{in}})^{-1}_*\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ *est à l'intérieur d'un champ de* $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{s,\text{in}}/\mathcal{G}^{u,\text{in}})$*-cônes.*

4) *La dérivée de* ψ^{in} *dans la direction* $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ *est bornée uniformément par une constante qui ne dépend que de* λ *: pour tout* $\lambda > 1$, *il existe* $\text{cst} = \text{cst}(\lambda) > 0$, *tel que pour tout* $\epsilon, \delta > 0$ *on a*

$$\forall p \in P^{\text{in}}, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \quad \text{cst}^{-1} < \frac{\|\psi^{\text{in}}_* v\|}{\|v\|} < \text{cst}$$

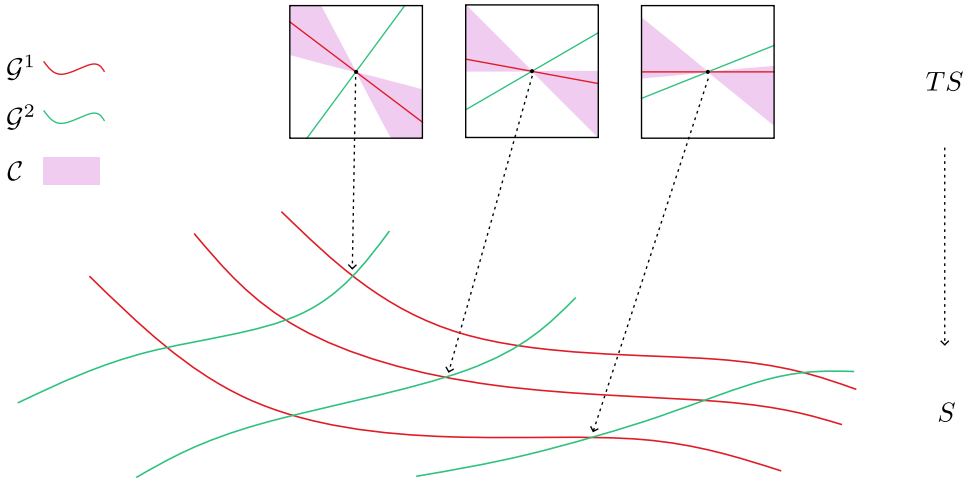


FIGURE 4.1 – Champ de $(K, \mathcal{G}^1/\mathcal{G}^2)$-cônes

5) *Si $\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_*$ est le δ-voisinage des orbites périodiques tangentes de $\mathcal{O}_*$, alors la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$:*

$$\forall p \in P^{\text{in}} \setminus (\mathcal{V}_\delta \cup \mathcal{L}^s), \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \quad \|(f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}})_* v\| \geq \lambda \|v\|$$

6) *ψ^{in} est indépendant de δ sur le complémentaire de $\mathcal{V}_*$: pour tout $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$, la famille de difféomorphismes $\{\psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}\}_{\delta>0}$ coïncident sur $\partial P \setminus \mathcal{V}_*$.*

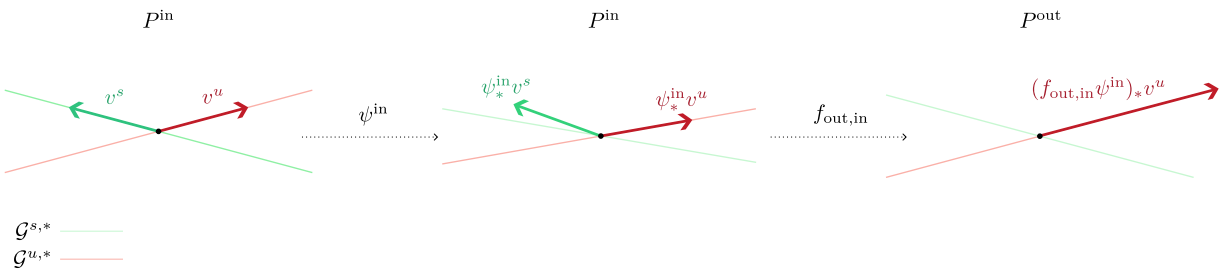


FIGURE 4.2 – Action de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ sur $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$

On renvoie à la figure 4.2 pour illustrer les propriétés de ψ^{in}. On énonce le résultat symétrique suivant qui se démontre de façon analogue.

Proposition 4.1.3. *Pour tout $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe un difféomorphisme $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon \partial P \to \partial P$ tel que*

1) *ψ^{out} est égal à l'identité en dehors d'un compact inclus dans un nombre fini de composantes connexes de $P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$.*

2) ψ^{out} *préserve le feuilletage* $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ *feuille à feuille.*

3) ψ^{out} *perturbe peu le feuilletage* $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ *: la direction tangente à* $\psi_*^{\text{out}}\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ *est à l'intérieur d'un champ de* $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{u,\text{out}}/\mathcal{G}^{s,\text{out}})$*-cônes.*

4) La dérivée de ψ^{out} *dans la direction* $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ *est bornée uniformément par une constante qui ne dépend que de* λ *: pour tout* $\lambda > 1$*, il existe* $\text{cst} = \text{cst}(\lambda) > 0$*, tel que pour tout* $\epsilon, \delta > 0$ *on a*

$$\forall p \in P^{\text{out}}, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \quad \text{cst}^{-1} < \frac{\|\psi_*^{\text{out}} v\|}{\|v\|} < \text{cst}$$

5) Si $\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_*$ *est le* δ*-voisinage des orbites périodiques tangentes de* $\mathcal{O}_*$*, alors la composée* $(\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}})^{-1}$ *dilate d'un facteur* λ *la direction* $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ *sur* $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta$*.*

$$\forall p \in P^{\text{out}} \smallsetminus (\mathcal{V}_\delta \cup \mathcal{L}^u), \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{s,\text{out}}, \quad \|(\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}})_*^{-1} v\| \geq \lambda \|v\|$$

6) ψ^{out} *est indépendant de* δ *sur le complémentaire de* $\mathcal{V}_*$ *: pour tout* $\lambda > 1$*,* $\epsilon > 0$*, la famille de difféomorphismes* $\{\psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta}\}_{\delta>0}$ *coïncident sur* $\partial P \smallsetminus \mathcal{V}_*$*.*

Remarque 4.1.4. On suit de près la preuve de [BBY17, Proposition 6.2] pour diffuser la dilatation sur l'intérieur des bandes. La différence est que les bandes de nos blocs ont des extrémités qui peuvent s'accumuler sur des orbites périodiques. La diffusion au voisinage d'une extrémité d'une bande qui s'accumule sur une orbite périodique devra être contrôlée, ce qui justifie l'apparition d'un nouveau paramètre δ.

Construction du difféomorphisme sur une bande Au chapitre précédent, on a montré (proposition 3.1.2) que pour tout $\lambda > 1$, il existe un voisinage $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ de $\mathcal{L}^s$ sur P^{in} tel que l'application de passage $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ dilate la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ d'un facteur λ en restriction au voisinage $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$. Le difféomorphisme identité satisfait tous les items de la proposition 4.1.2 sur le voisinage $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$, pour le paramètre λ et pour tout paramètre $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$.

Pour démontrer la proposition 4.1.2, il suffit donc de travailler sur le complémentaire de $\mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ dans P^{in}. Le complémentaire $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{W}^{\text{in}}_\lambda$ est inclus dans un nombre fini de composantes connexes de $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s$ que l'on note $B_1, \ldots, B_n$. On rappelle que la lamination de bord $\mathcal{L}$ de (P, X) est remplissante, donc les composantes connexes de $P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s$ sont des bandes bordées par deux feuilles non compactes de $\mathcal{L}^s$ qui sont asymptotes l'une à l'autre à chaque extrémités. La preuve de la proposition 4.1.2 consiste à construire un difféomorphisme $\psi_i : B_i \to B_i$ sur chaque bande B_i qui satisfait les items de la proposition 4.1.2 sur cette bande, et égal à l'identité en dehors d'un compact de la bande. On peut prolonger ψ_i par l'identité sur ∂P et leur produit $\psi^{\text{in}} = \prod_i \psi_i$ défini un difféomorphisme qui satisfait la proposition. En résumé, il suffit de prouver le lemme suivant.

Lemme 4.1.5. *Soit* $B \subset P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{O}_*$ *une bande. Pour tout* $\lambda > 1$*,* $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$*. Il existe* $\psi = \psi_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon B \to B$*, tel que*

1) ψ *est l'identité en dehors d'un compact de* B*.*

2) ψ *préserve* $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ *feuille à feuille.*

3) La direction tangente à $\psi^{-1}(\mathcal{G}^{s,\text{in}})$ *est à l'intérieur d'un champ de* $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{s,\text{in}}/\mathcal{G}^{u,\text{in}})$*-cônes.*

4) *La dérivée de ψ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ est bornée uniformément par une constante qui ne dépend que de λ : pour tout $\lambda > 1$, il existe* $\mathrm{cst} = \mathrm{cst}(\lambda) > 0$, *tel que pour tout $\epsilon, \delta > 0$ on a*

$$\forall p \in B, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}, \quad \mathrm{cst}^{-1} < \frac{\|\psi_* v\|}{\|v\|} < \mathrm{cst}$$

5) *Si $\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_*$ est le δ-voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$, alors la composée $(\psi^{\mathrm{out}} \circ f_{\mathrm{out,in}})^{-1}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ sur $B \setminus \mathcal{V}_\delta$.*

$$\forall p \in B \setminus \mathcal{V}_\delta, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}, \quad \|(f_{\mathrm{out,in}} \circ \psi)_* v\| \geq \lambda \|v\|$$

6) *ψ est indépendant de δ sur le complémentaire de $\mathcal{V}_*$: pour tout $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$, la famille de difféomorphismes $\{\psi_{\lambda,\epsilon,\delta}\}_{\delta>0}$ coïncident sur $B \setminus \mathcal{V}_*$.*

Attirons l'attention sur un point. Le support de $\psi_i \colon B_i \to B_i$ est un compact inclus dans B_i, mais le complémentaire $B_i \setminus \mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$ n'est pas nécessairement un compact inclus dans B_i. Une bande B_i s'accumule à chaque extrémité sur une feuille compacte de la lamination de bord $\mathcal{L}$. Si une de ces feuilles compactes est une orbite périodique tangente $\mathcal{O}_j$, alors le voisinage $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$ ne recouvre pas l'extrémité correspondante de la bande B_i, car il n'existe aucun δ-voisinage des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$ inclus dans $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$. C'est pourquoi la propriété de dilatation de la composée $f_{\mathrm{out,in}} \circ \psi^{\mathrm{in}}$ le long de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ n'est plus vraie sur un δ-voisinage de $\mathcal{O}_*$ (item 5 de la proposition 4.1.2).

Montrons que la proposition 4.1.2 découle du lemme 4.1.5.

Démonstration de la proposition 4.1.2. Soit $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$. On définit le difféomorphisme $\psi^{\mathrm{in}} = \psi^{\mathrm{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon P^{\mathrm{in}} \to P^{\mathrm{in}}$ comme suit. Soit $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$ le voisinage donné par la proposition 3.1.2. Le complémentaire de $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$ est inclus dans un nombre fini $B_1, \ldots, B_n$ de composantes connexes de $P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{L}^s$ (l'entier n dépend de λ). Pour $i = 1, \ldots, n$, soit le difféomorphisme $\psi_i = (\psi_i)_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon B_i \to B_i$ donné par le lemme 4.1.5. L'item 1 du lemme 4.1.5 permet de prolonger chaque ψ_i par l'identité sur ∂P, et on pose

$$\psi^{\mathrm{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta} = \prod_{i=1}^{m} \psi_i \colon \partial P \to \partial P \tag{4.1}$$

Le support de $\psi^{\mathrm{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ est inclus dans un nombre fini de bandes B_i, et est compact dans chacune de ces bandes, ce qui donne l'item 1. Les items 2, 3 et 6 sont des conséquences directes des items 2, 3 et 6 du lemme 4.1.5. L'item 4 est vrai car les difféomorphismes ψ_i sont en nombre fini. Montrons l'item 5.

- Sur une bande B_i, on a $\psi^{\mathrm{in}} = \psi_i$. On utilise l'item 5 du lemme 4.1.5.
- Sur le complémentaire des bandes ${}^c(B_1 \cup \cdots \cup B_m) \subset \mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$, on a $\psi^{\mathrm{in}} = \mathrm{Id}$ et par la proposition 3.1.2, $f_{\mathrm{out,in}} \circ \psi^{\mathrm{in}} = f_{\mathrm{out,in}}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$

□

Le reste du chapitre est consacré à la preuve du lemme 4.1.5. Soit une B une composante connexe de $P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{L}^s$. On rappelle que B est une bande bordée par deux feuilles non compactes l_1 et l_2 de la lamination $\mathcal{L}^s$, qui sont asymptote l'une à l'autre à chaque extrémité (figure 4.3). Chacune des deux extrémité de la bande B s'accumule sur une feuille compacte $\mathcal{Q}_i$ de la lamination de bord $\mathcal{L}$ de (P, X) (éventuellement la même dans le cas non orientable). Il y a deux cas possible pour la feuille compacte $\mathcal{Q}_i$.

- Soit $\mathcal{Q}_i$ est une feuille compacte de la lamination $\mathcal{L}^s$;
- Soit $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{O}_*$ est une orbite périodique tangente de (P, X).

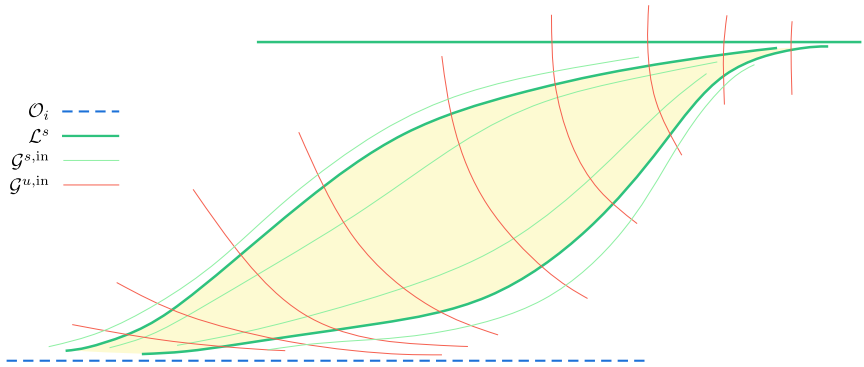


FIGURE 4.3 – Une bande qui s'accumule d'une part sur une orbite périodique tangente $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ et d'autre part sur une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$

Remarque 4.1.6. Pour fixer les idées, on fait le choix de représenter dans nos figures une bande B dont une des extrémités s'accumulent sur une orbite périodique et l'autre sur une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$. Cette bande est inclus dans une composante connexe A du complémentaire $P^{\text{in}} \setminus \Gamma$, où Γ est l'union des feuilles compactes de $\mathcal{L}$, cette composante A est un anneau, et le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur A est un feuilletage de suspension. Bien entendu, on gardera en tête que les situations suivantes sont aussi possibles

- A est un anneau et les feuilles compactes qui le bordent sont deux feuilles de $\mathcal{L}^s$, ou deux orbites périodiques ;
- A est un ruban de Moebius bordé par une feuille de $\mathcal{L}^s$, ou une orbite périodique ;
- Le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est une composante de Reeb sur A.

4.2 Action de l'holonomie

Avant de construire le difféomorphisme $\psi : B \to B$, on aura besoin de résultats généraux sur l'holonomie des feuilletages sur P^{in} et P^{out}.

Borne pour la distorsion de l'holonomie du feuilletage stable dans une bande sur le bord d'entrée. Soit σ et σ' des feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$. Ce sont des arcs de feuilles ouverts contenus chacun dans une feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$, et qui traversent la bande B d'un bord à l'autre, autrement dit les deux extrémités de σ et σ' sont situés sur les deux feuilles l_1 et l_2 de $\mathcal{L}^s$ qui forment le bord accessible de B. On définit l'application d'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ entre les feuilles σ et σ' par

$$H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma} : \sigma \to \sigma' \tag{4.2}$$

Ces applications sont bien définies car chaque feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ dans B intersecte une et une unique fois chaque feuille σ de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$. Comme les feuilletages sont $\mathcal{C}^1$, ce sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$. On aura besoin de contrôler les dérivées de ces holonomies. Les dérivés des éléments de la famille $\{H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}\}_{\sigma,\sigma'}$ ne sont pas uniformément bornées. En effet, la largeur de la

bande B tend vers 0 aux extrémités, et l'application $H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ est très contractante lorsque σ' tend vers une extrémité de B qui s'accumule sur une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$. Cependant, le lemme suivant dit que l'on peut borner uniformément la distorsion de l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ entre deux feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$.

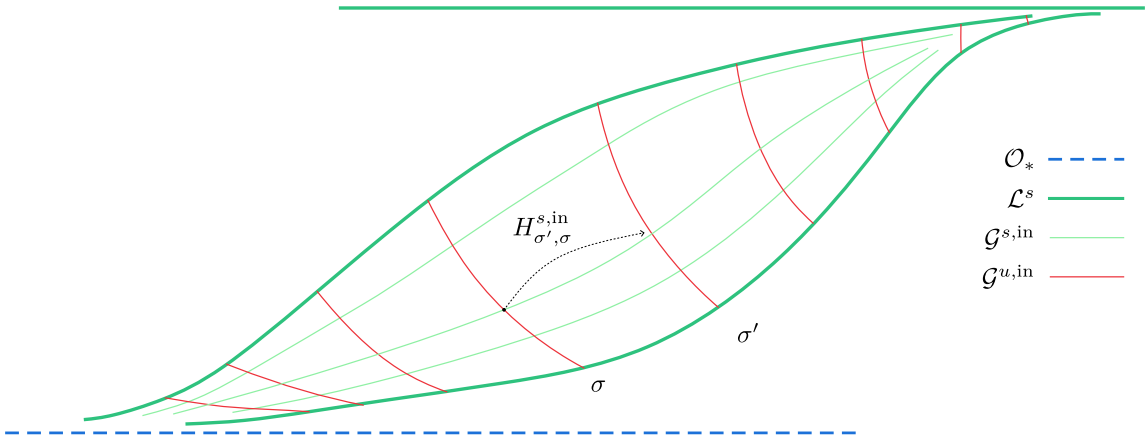


FIGURE 4.4 – Holonomie de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur une bande

Lemme 4.2.1. *Il existe une constante $\vartheta > 0$ tel que pour toute bande $B \subset P^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s$, pour tout feuille σ, σ' de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$, pour tout $p, q \in \sigma$*

$$\vartheta^{-1} < \frac{|(H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma})'(p)|}{|(H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma})'(q)|} < \vartheta$$

Montrons pour commencer le fait suivant, qui est vrai sur P^{in} et sur P^{out}. Pour ne pas répéter, on l'énonce avec la notation * qui désigne in ou out.

Fait 4.2.2. *Soit $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ et $\mathcal{V}_i$ un voisinage normalisé de $\mathcal{O}_i$. Alors*

1) *il existe une constante $\text{cst} > 0$ tel que pour toutes feuilles l_1 et l_2 de $\mathcal{G}^{s,*}$, si σ et σ' sont deux arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,*} \cap \mathcal{V}_i$ dont les extrémités sont sur l_1 et l_2, alors*

$$\text{cst}^{-1} \leq \frac{l(\sigma)}{l(\sigma')} < \text{cst}$$

2) *les dérivées des holonomies $\{H^{s,*}_{\sigma',\sigma}\}_{\sigma,\sigma'}$ sont uniformément bornées pour σ, σ' des arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,*} \cap \mathcal{V}_i$.*

On renvoie à la figure 4.5 qui illustre le fait 4.2.2, item 1.

Démonstration. Montrons ce fait sur P^{in}, la preuve est identique sur P^{out}. Soit un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$ de $\mathcal{O}_i$. Soit $\rho_i = (x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le système de coordonnées normalisé induit par ξ_i sur le bord de P (remarque 2.1.5). Soit deux feuilles l_1 et l_2 du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ dans $\mathcal{V}$, et $p = (x, \theta) \in l_1$. Les relevés des feuilles dans le relevé $(x, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des coordonnées (x, θ) ont pour équation $x = c_i 2^{\tilde{\theta}}$. Il s'ensuit que la distance $\text{dist}(p, l_2)$ décroît linéairement en x. Par ailleurs l'angle entre les feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ décroît aussi linéairement

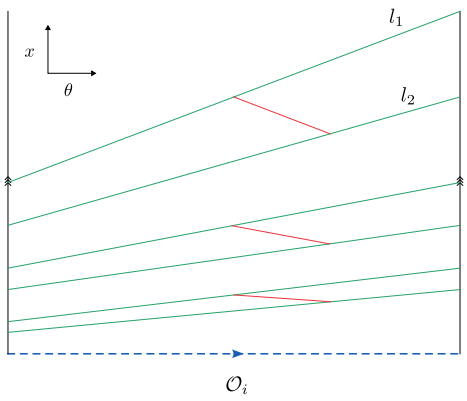


FIGURE 4.5 – Arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,*}$ entre deux feuilles l_1 et l_2 de $\mathcal{G}^{s,*}$ dans un voisinage normalisé de $\mathcal{O}_i$

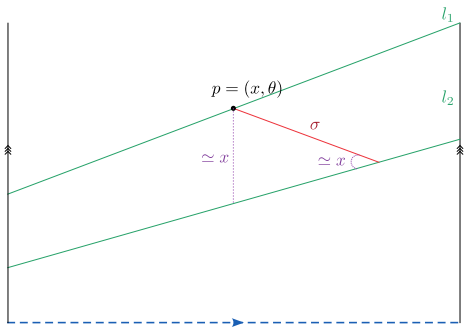


FIGURE 4.6 – La distance entre l_1 et l_2 et l'angle entre les feuilletages $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ décroît à la même vitesse.

en $x = \text{dist}(p, \mathcal{O}_i)$ d'après le lemme 3.2.6. On en conclut que le rapport des longueurs $\frac{l(\sigma')}{l(\sigma)}$ de deux arcs de feuille σ et σ' de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ joignant l_1 et l_2 dans $\mathcal{V}_i$ est uniformément borné loin de 0 et $+\infty$ (figure 4.6).

Le deuxième item est une conséquence du premier. En effet, si σ et σ' sont deux arcs de feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ dans $\mathcal{V}_i$, on peut choisir σ_0 un arc de feuille inclus dans σ de longueur arbitrairement petite autour d'un point p, et $\sigma_0' = H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ son image incluse dans σ'. Alors le rapport des longueurs $\frac{l(\sigma_0')}{l(\sigma_0)}$ tend vers la dérivée de $H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ au point p quand la longueur de σ_0 tend vers 0. D'après l'item 1, ce rapport est uniformément borné. On en déduit l'item 2. □

Démonstration du lemme 4.2.1. Soit $\mathcal{Q}$ une feuille compacte de $\mathcal{L} = \mathcal{L}^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^u$ sur laquelle la bande B s'accumule. Soit W un voisinage de $\mathcal{Q}$ sur lequel les applications d'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sont conjuguées à des applications affines (par définition d'un bloc normalisé 2.1.2, item 3).

- Si $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}_*$ est une orbite périodique, W_i est inclus dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$ de $\mathcal{O}_i = \mathcal{Q}$. On utilise le fait 4.2.2 qui dit que les holonomies $H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ ont une dérivée uniformément bornée dans ce voisinage.

- Si $\mathcal{Q}$ est une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$, les feuilletages $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sont uniformément transverses sur W_i. Par définition d'un bloc normalisé 2.1.2, les applications d'holonomies d'une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$ sont conjuguées à des applications affines donc la distorsion des holonomies $H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ est uniformément bornée pour σ, σ' dans W_i.

Pour finir il suffit de voir que l'on peut composer une application d'holonomie de la façon suivante (figure 4.7). Soit W un voisinage des extrémités de B sur lequel les applications d'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sont conjuguées à des applications affines. Il existe une constante $l > 0$, tel que si I, J sont deux feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$, alors on peut écrire

$$H^{s,\text{in}}_{I,J} = H^{s,\text{in}}_{I,I_1} \circ H^{s,\text{in}}_{I_1,I_2} \circ H^{s,\text{in}}_{I_2,J}$$

avec $H^{s,\text{in}}_{I,I_1}$ et $H^{s,\text{in}}_{I_2,J}$ des holonomies dans le voisinage W, et tel que les feuilles de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ ont une longueur uniformément bornée par l entre I_1 et I_2 et sont uniformément transverses aux feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$. Les dérivées de $H^{s,\text{in}}_{I_1,I_2}$ sont uniformément bornée, et il en est de même pour la distorsion. Chacune application de la composée a une distorsion uniformément bornée, et la borne est indépendante de la bande B. Il en est de même de la composée.

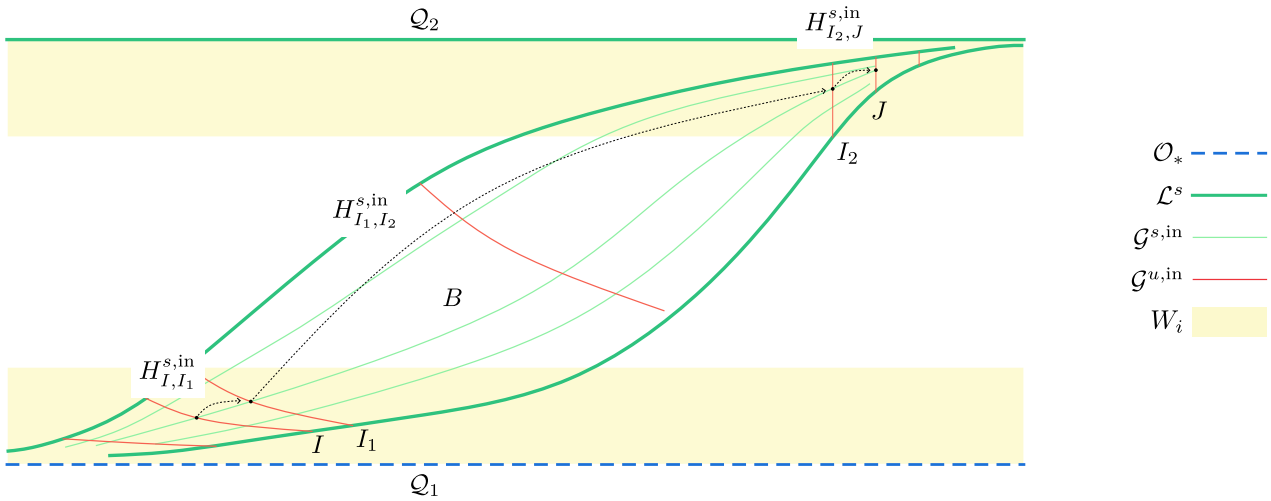


FIGURE 4.7 – Décomposition de $H^{s,\text{in}}_{J,I}$ dans B

□

Citons le lemme suivant qui est complètement analogue au lemme 4.2.1.

Lemme 4.2.3. *Il existe une constante $\vartheta > 0$ tel que pour toute bande $B \subset P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$, pour tout feuille σ, σ' de $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap B$, pour tout $p, q \in \sigma$*

$$\vartheta^{-1} < \frac{|(H^{u,\text{out}}_{\sigma',\sigma})'(p)|}{|(H^{u,\text{out}}_{\sigma',\sigma})'(q)|} < \vartheta$$

où $H^{u,\text{out}}_{\sigma',\sigma}$ est l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ entre deux feuilles σ, σ' de $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap B$.

Borne pour la dérivée de l'holonomie du feuilletage stable dans une bande sur le bord de sortie. Soit ς et ς' des feuilles du feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sur P^{out} dans une bande $B \subset P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$. On définit l'application d'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap B$ entre les feuilles ς et ς' (figure 4.8) par

$$H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma} : \varsigma \to \varsigma' \tag{4.3}$$

Ces applications sont bien définies car chaque arc de feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap B$ intersecte une et une unique fois chaque feuille ς de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$. Ce sont des difféomorphismes. Montrons que la dérivée des holonomies $\{H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}\}$ pour ς', ς des feuilles de P^{out} dans une même bande $B \subset P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$ est uniformément bornée.

Lemme 4.2.4. *Il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour toute bande $B \subset P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$, pour toute feuille ς, ς' de $\mathcal{G}^{u,\text{out}} \cap B$, pour tout $p \in \varsigma$, on a*

$$\alpha^{-1} < |(H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma})'(p)| < \alpha$$

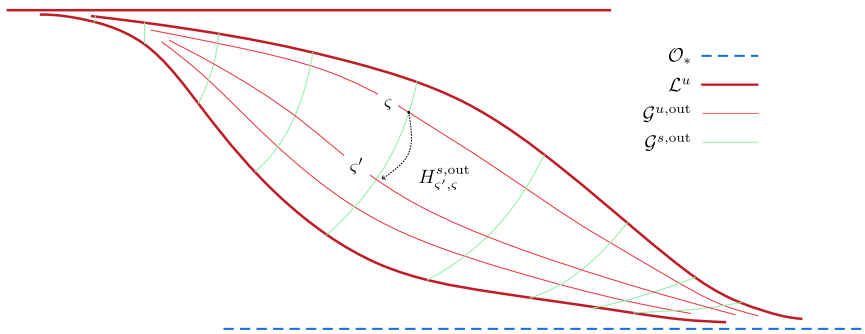


FIGURE 4.8 – Holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur une bande

Démonstration. La famille $\{H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}\}_{\varsigma',\varsigma}$ est une famille relativement compacte de difféomorphismes. En effet, soit I une feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}} \cap B$. Chaque feuille ς de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ intersecte une unique fois I. On peut donc paramétrer la famille $\{H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}\}_{\varsigma',\varsigma}$ par le produit $I \times I$. On conclut en remarquant que I est un arc relativement compact. Il suffit donc de montrer que la dérivée d'un difféomorphisme $H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}$ est bornée sur ς. Sur le complémentaire $P^{\text{out}} \setminus \mathcal{V}_*$ des voisinages normalisés des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$, l'angle du feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ avec ς est borné, et la distance entre ς et ς' est majorée. Sur un voisinage normalisé $\mathcal{V}_i$ d'une orbite $\mathcal{O}_i$, la dérivée de $H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}$ est bornée d'après le fait 4.2.2. On en déduit que la dérivée de $H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}$ est bornée sur ς. Remarquons pour finir que l'on peut borner uniformément les dérivées de $\{H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}\}_{\varsigma',\varsigma}$ indépendamment de la bande B. En effet, il existe un arc de feuille I de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ relativement compact tel que chaque feuille ς de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ intersecte une unique fois I. Il s'ensuit que la famille $\{H^{s,\text{out}}_{\varsigma',\varsigma}\}_{\varsigma',\varsigma}$ pour $\varsigma, \varsigma' \in \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ est une famille relativement compacte de difféomorphismes, et la preuve précédente fonctionne. □

Citons le lemme suivant qui est complètement analogue au lemme 4.2.4.

Lemme 4.2.5. *Il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour toute bande $B \subset P^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}^s$, pour toute feuille ς, ς' de $\mathcal{G}^{s,\text{in}} \cap B$, pour tout $p \in \varsigma$, on a*

$$\alpha^{-1} < |(H^{u,\text{in}}_{\varsigma',\varsigma})'(p)| < \alpha$$

où $H^{u,\text{in}}_{\varsigma',\varsigma}$ est l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ entre deux feuilles ς, ς' de $\mathcal{G}^{s,\text{in}} \cap B$.

4.3 Preuve du lemme 4.1.5

Soit B une bande sur P^{in}. Soit $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ fixés. Soit l_1, l_2 les feuilles de $\mathcal{L}^s$ formant le bord accessible de B. La preuve se fera en trois étapes.

- A l'étape 1, on fixe une feuille σ de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$ qui traverse la bande B et on construit $h : \sigma \to \sigma$ un difféomorphisme sur σ, égal à l'identité aux extrémités de la feuille, tel que la composée $f_{\text{out,in}} \circ h : \sigma \to f_{\text{out,in}}(\sigma)$ a une dérivée minorée par un facteur donné qui dépend de λ. C'est le lemme 4.3.1.

- A l'étape 2, on pousse le difféomorphisme h le long du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ par les holonomies $H^{s,\text{in}}_{\sigma',\sigma}$ pour obtenir un difféomorphisme $\hat{\psi}\colon B \to B$, égal à l'identité sur un voisinage de l_1 et l_2. Ce difféomorphisme préserve naturellement le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ (feuille à feuille) et le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ (globalement) sur B.

  De plus, la dilatation de la composée avec $f_{\text{out,in}} \circ \hat{\psi}$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur B est essentiellement égale à la dilatation de la composée de $f_{\text{out,in}} \circ h$. En effet, c'est une conséquence des bornes uniformes de la distorsion et de la dérivée des holonomies du feuilletage $\mathcal{G}^s$ entre deux feuilles de $\mathcal{G}^u$ issus des lemmes 4.2.1 et 4.2.4. On a choisi h de sorte à compenser la contraction de ces holonomies. Ainsi la composée $f_{\text{out,in}} \circ \hat{\psi}$ dilate d'un facteur λ la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur la bande B. Le difféomorphisme ainsi construit sur B satisfait tous les items du lemme 4.1.5, excepté qu'il n'est pas à support compact dans la bande B (item 1).

- L'étape 3 consiste à "ralentir" le difféomorphisme $\hat{\psi}$ afin d'obtenir un difféomorphisme ψ égal à l'identité aux extrémités de B. C'est là qu'interviennent les paramètres ϵ et δ.

  - Pour ne pas détruire ce qui a été fait précédemment on ralenti par une isotopie barycentrique le long de chaque feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$.
  - La vitesse du "ralentissement" contrôle la perturbation du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$, et sera donc choisie en fonction du paramètre ϵ.
  - Si une extrémité de B est une orbite périodique $\mathcal{O}_i$, on perd le contrôle sur la dilatation de la composée avec $f_{\text{out,in}}$ à l'endroit du ralentissement. On fait le ralentissement dans un voisinage de l'orbite périodique de taille δ. Sinon, l'extrémité s'accumule sur une feuille compacte $\mathcal{Q}_i$ de $\mathcal{L}^s$, et on fait le ralentissement dans un voisinage de $\mathcal{Q}_i$ assez petit pour que la dilatation "naturelle" de $f_{\text{out,in}}$ obtenue par la proposition 3.1.2 compense les effets contractants du ralentissement. On préserve ainsi la dilatation de la composée d'un facteur λ sur cette extrémité.

Étape 1 : Sur une feuille Soit σ une feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$, de longueur *quasi-maximale* parmi toutes les feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$, plus précisément on demande que pour toute feuille σ' de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$, on a

$$l(\sigma) \geq \frac{1}{2} l(\sigma') \tag{4.4}$$

C'est possible car les feuilles de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$ sont de longueur majorée. On fixe σ pour le reste de la section. C'est un arc dont les extrémités sont sur les feuilles l_1 et l_2 de $\mathcal{L}^s$ qui bordent B. Soit $\vartheta > 0$ et $\alpha > 0$ les constantes qui satisfont les lemmes 4.2.1 et 4.2.4.

Lemme 4.3.1. *Il existe un difféomorphisme $h\colon \sigma \to \sigma$, égal à l'identité sur un voisinage des extrémités de σ tel que*

$$\forall p \in \sigma, \quad v \in T_p\sigma, \quad \|(f_{\text{out,in}} \circ h)_* v\| > 2\vartheta\alpha\lambda\|v\|$$

Démonstration. Comme $\partial\sigma \in \mathcal{L}^s$, on sait d'après la proposition 3.1.2 que la dérivée de $f_{\text{out,in}|_\sigma}$ tend vers l'infini aux extrémités de σ. L'abscisse curviligne identifie σ à $]0, l[$ pour un certain $l > 0$, et $f_{\text{out,in}}(\sigma)$ à $\mathbb{R}$ par des isométries. On se ramène au résultat suivant, dont la preuve est laissé au lecteur et à la lectrice.

Fait 4.3.2. *Si $f\colon\ ]0, l[\to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme tel que $|f'(x)| \underset{x\to 0,\, l}{\longrightarrow} +\infty$ alors pour tout $A > 1$, il existe un difféomorphisme $f_A\colon\ ]0, l[\to \mathbb{R}$ tel que*

- *$f_A = f$ sur un voisinage de 0 et de l*
- *$|f'_A(x)| > A$ pour tout x dans $]0, l[$*

On applique ce résultat avec $A = 2\vartheta\alpha\lambda > 1$, et on pose $h := f^{-1}_{\text{out,in}} \circ (f_{\text{out,in}})_A$. □

Étape 2 : Sur la bande On étend le difféomorphisme h à la bande B en poussant par l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ entre les arcs de feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$. Plus précisément, on définit pour tout $p \in B$

$$\hat{\psi}(p) = H^{s,\text{in}}_{\sigma_p,\sigma} \circ h \circ H^{s,\text{in}}_{\sigma,\sigma_p}(p) \tag{4.5}$$

où σ_p désigne la feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$ passant par p. Cette expression définit bien un difféomorphisme sur B. Il vérifie les propriétés suivantes :

Fait 4.3.3.

1) $\hat{\psi}$ est égal à l'identité sur un voisinage des feuilles l_1 et l_2 qui bordent B.

2) $\hat{\psi}$ préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$ feuille à feuille

3) $\hat{\psi}$ préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}} \cap B$ globalement

4) la composée $f_{\text{out,in}} \circ \hat{\psi}$ dilate la norme des vecteurs dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ d'un facteur λ :

$$\forall p \in B, \quad \forall v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \quad \|(f_{\text{out,in}} \circ \hat{\psi})_* v\| \geq \lambda\|v\|$$

Démonstration. 1) Le voisinage en question est le saturé du complémentaire du support de h par le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$. C'est un voisinage des feuilles l_1 et l_2 d'après le lemme 4.3.1.

2) Évident.

3) Évident.

4) Posons $\varsigma = f_{\text{out,in}}(\sigma)$. L'application $f_{\text{out,in}}$ commute avec les applications d'holonomies de $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ car elle envoie la paire $(\mathcal{G}^{s,\text{in}}, \mathcal{G}^{u,\text{in}})$ sur la paire $(\mathcal{G}^{s,\text{out}}, \mathcal{G}^{u,\text{out}})$ sur chaque bande. On en déduit que

$$(f_{\text{out,in}} \circ \hat{\psi})(p) = H^{s,\text{out}}_{\varsigma_p,\varsigma} \circ (f_{\text{out,in}} \circ h) \circ H^{s,in}_{\sigma,\sigma_p}(p)$$

où $\varsigma_p = f_{\text{out,in}}(\sigma_p)$ désigne la feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ passant par $f_{\text{out,in}}(p)$. On renvoie à la figure 4.9. Soit ϑ la constante donnée par le lemme 4.2.1. Alors, si $l(\sigma)$ désigne la longueur de la feuille σ, on a

$$|(H^{s,in}_{\sigma,\sigma_p})'| \ > \ \vartheta^{-1}\frac{l(\sigma)}{l(\sigma_p)} \ \geq \ \frac{1}{2}\vartheta^{-1}$$

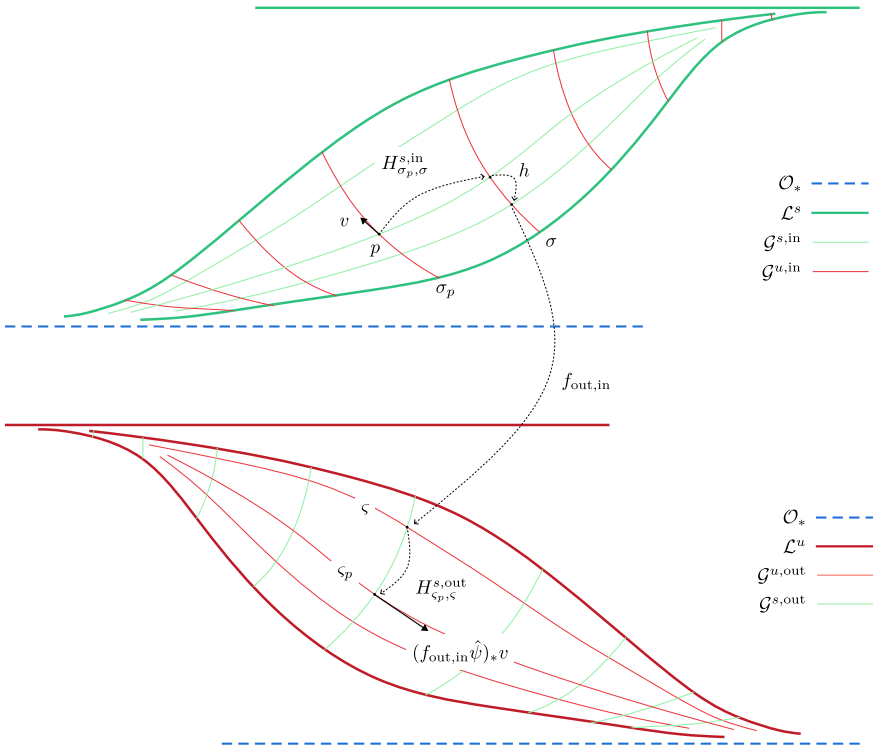


FIGURE 4.9 – Action de $f_{\mathrm{out,in}} \circ \hat{\psi}$

car σ est de longueur quasi-maximale parmi les feuilles de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}} \cap B$ (formule (4.4)). De plus, d'après le lemme 4.2.4, on a $|(H^{s,\mathrm{out}}_{\varsigma,\varsigma_p})'| > \alpha^{-1}$. Donc pour tout $p \in B$, pour tout $v \in T_p\sigma_p$, si $q = H_{\sigma,\sigma_p}(p)$,

$$\|(f_{\mathrm{out,in}} \circ \hat{\psi})_* v\| > \frac{1}{2}\vartheta^{-1}\alpha^{-1}|(f_{\mathrm{out,in}} \circ h)'(q)|\|v\|$$

On conclut avec le lemme 4.3.1.

□

Étape 3 : Ralentissement aux extrémités de la bande. Le difféomorphisme $\hat{\psi}\colon B \to B$ (fait 4.3.3) satisfait tous les items du lemme 4.1.5 sur la bande B, excepté l'item 1 : il n'est pas à support compact, car il n'est pas égal à l'identité aux extrémités de B. Pour résoudre ce problème, on va "ralentir" $\hat{\psi}$ sur un voisinage des extrémités de B. On pourra choisir la zone de ralentissement de sorte à conserver la dilatation de la composée $f_{\mathrm{out,in}} \circ \hat{\psi}$ sur $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ à l'extrémité de B si celle-ci s'accumule sur une feuille compacte de $\mathcal{L}^s$. Si l'extrémité s'accumule sur une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, on perd la dilatation de $f_{\mathrm{out,in}} \circ \hat{\psi}$ sur la zone de ralentissement. On choisira alors cette zone dans un δ-voisinage de $\mathcal{O}_i$. En fait, on va opérer le ralentissement sur le difféomorphisme $\hat{\psi}^{-1}$ afin de contrôler la perturbation du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}$ par $\hat{\psi}^{-1}$ (item 3 du lemme 4.1.5). Rappelons que l_1 et l_2 sont les feuilles non compactes de $\mathcal{L}^s$ qui forment le bord accessible de B. Soit $s\colon \mathbb{R} \to l_1$ un paramétrage de la feuille l_1 par abscisse curviligne, où $s(0) = l_1 \cap \sigma$. On note σ_t la feuille de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}} \cap B$ tel que $\sigma_t \cap l_1 = s_1(t)$. On a $\sigma = \sigma_0$. Comme $\hat{\psi}$ préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ feuille à feuille sur B, il induit l'existence d'une famille continue à un paramètre de difféomorphismes $\hat{\psi}_t = \hat{\psi}_{|\sigma_t} : \sigma_t \to \sigma_t$.

Soit W un voisinage des extrémités de B sur lequel les applications d'holonomies du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sont conjuguées à des applications affines. Pour toute feuille σ_t incluse dans W, on définit $\Psi = \{\Psi_{t,\tau} \colon \sigma_t \to \sigma_t\}_{\tau\in[0,1],t\in\mathbb{R}}$ une famille d'isotopies entre $\hat{\psi}_t^{-1}$ et l'identité sur σ_t par barycentre sur chaque feuille σ_t :

$$\forall p \in \sigma_t, \quad \forall \tau \in [0,1], \quad \Psi_{t,\tau}(p) = \tau\hat{\psi}_t^{-1}(p) + (1-\tau)p \tag{4.6}$$

Cette formule a du sens car la feuille σ_t incluse dans W possède une structure affine, et définit bien une famille Ψ de difféomorphisme.

Soit $t_1 < 0$, $t_2 > 0$, tels que $\sigma_t \in^W \cap B$ pour tout $t \in]-\infty, t_1[\cup]t_2, +\infty[$. Soit $s > 0$. Soit $\tau = \tau(t_1, t_2, s) \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction plateau de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant les propriétés suivantes (figure 4.10) :

1) $\tau = 1$ sur $[t_1, t_2]$ et $\tau = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus[t_1 - s, t_2 + s]$

2) τ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et la norme de sa dérivée est majorée par $2s^{-1}$.

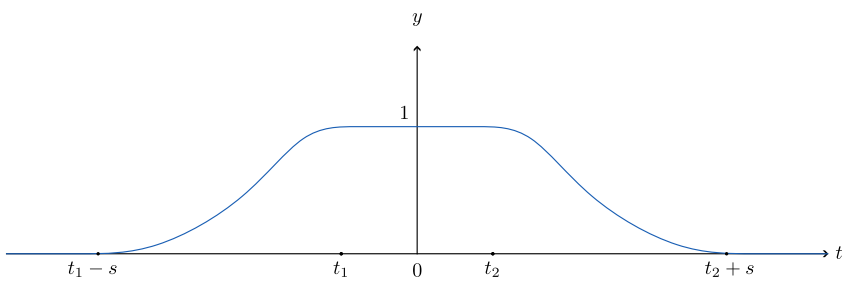


FIGURE 4.10 – Graphe de la fonction $\tau \colon \mathbb{R} \to [0,1]$

Les réels t_i déterminent la zone du début de l'isotopie dans la bande, et le réel s détermine la vitesse de l'isotopie (figure 4.11). Pour $p \in B$, si σ_t est la feuille de $\mathcal{G}^{u,\text{in}} \cap B$ passant par p, on définit

$$\psi(p) = \left(\Psi_{t,\tau(t)}(p)\right)^{-1} \tag{4.7}$$

Cette expression définit bien un difféomorphisme $\psi \colon B \to B$.

Démonstration du lemme 4.1.5. Montrons chaque item pour le difféomorphisme $\psi : B \to B$ défini par la formule (4.7).

1) Par définition de τ (item 1 ci-dessus), le support de ψ est un compact de la bande B égal à :

$$\text{Supp}(\psi) = \text{Supp}(\hat{\psi})\setminus\left(\left(\bigcup_{-\infty}^{t_1-s}\sigma_t\right) \cup \left(\bigcup_{t_2+s}^{+\infty}\sigma_t\right)\right)$$

2) Il est clair que ce difféomorphisme préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ feuille à feuille.

3) Soit (∂_u, ∂_s) un couple de deux champs de vecteurs unitaires tangents respectivement à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$. Soit $p \in B$, soit t tel que σ_t est la feuille de $\mathcal{G}^u_{\text{in}} \cap B$ passant par p, soit $q = \psi^{-1}(p)$. Alors l'image de ∂_s par la différentielle de ψ^{-1} est

$$d_p\psi^{-1}(\partial_s) = \tau'(t)\,\partial_u + (H^{u,\text{in}}_{\varsigma_p,\varsigma_q})'(p)\,\partial_s.$$

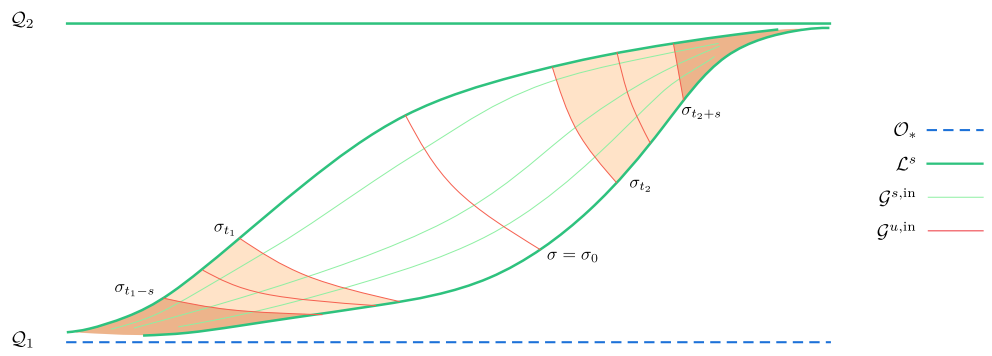


FIGURE 4.11 – Zone de début de l'isotopie (en clair) et de fin de l'isotopie (en foncé) sur la bande B

D'après le lemme 4.2.5, les dérivées de ces holonomies sont uniformément bornées. Il suffit de choisir une fonction τ telle que la dérivée est assez proche de 0, autrement dit un paramètre s assez grand (item 2 de la définition de τ ci-dessus), de sorte que $|\tau'(t)| \leq \epsilon\alpha^{-1}$ où α est la constante donnée par le lemme 4.2.5 qui minore la dérivée de $H^{u,\mathrm{in}}_{\varsigma_p,\varsigma_q}$. Ainsi l'image $\psi_*^{-1}\partial_s$ est dans un champ de $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}/\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}})$-cônes (définition 4.1.1), ce qui montre l'item 3.

4) D'après la formule (4.6) de l'isotopie barycentrique dans chaque feuille de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$, la dérivée de ψ^{-1} dans la direction de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ est bornée par la borne supérieure et inférieure des dérivées de la famille de difféomorphismes $\{\hat{\psi}_t\}_t$, autrement dit par la borne supérieure et inférieure de la dérivée de $\hat{\psi}$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$. On rappelle que $\hat{\psi}$ (formule (4.5)) est le conjugué par $H^{s,\mathrm{in}}_{\sigma,\sigma'}$ du difféomorphisme $h\colon \sigma \to \sigma$ (lemme 4.3.1). Comme la distorsion des holonomies $H^{s,\mathrm{in}}_{\sigma',\sigma}$ est uniformément bornée par une constante $\vartheta > 0$, (lemme 4.2.1), on en déduit que la dérivée de $\hat{\psi}$ dans la direction de $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ est uniformément contrôlée par la dérivée de h :

$$\forall v \in T\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}, \quad \vartheta^{-1}|h'| \leq \|\hat{\psi}_* v\| \leq \vartheta|h'|$$

Comme h est difféomorphisme à support compact, on en conclut que la différentielle de ψ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$ est uniformément bornée par une constante qui ne dépend que de λ. On obtient ainsi l'item 4.

5) Montrons que l'on peut choisir t_1, t_2, tel que l'on a l'item 5. Soit $c > 0$ une constante qui minore la dérivée de ψ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$. Cette constante existe d'après l'item 4 et est indépendante de t_i. On note B_1 l'extrémité de B correspondant à $t \geq t_1$, et B_2 l'extrémité de B correspondant à $t \geq t_2$.

   (a) Si l'extrémité B_i s'accumule sur une orbite périodique $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{O}_*$, alors on choisit t_i tel que σ_{t_i} soit incluse dans un δ-voisinage $\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_*$ de $\mathcal{Q}_i$, où l'on rappelle que $\mathcal{V}_*$ est l'union des voisinages normalisés des orbites périodiques tangentes de $\mathcal{O}_*$.

   (b) Si l'extrémité B_i s'accumule sur une feuille compacte $\mathcal{Q}_i$ de $\mathcal{L}^s$ alors on choisit t_i tel que σ_{t_i} soit incluse dans le voisinage $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_{\lambda c^{-1}}$ donné par la proposition 3.1.2. [1]

   Un tel choix est toujours possible car $\sigma_t \to \mathcal{Q}_i$ quand $t \to \pm\infty$, et car les voisinages $\mathcal{W}^{\mathrm{in}}_\lambda$ de la proposition 3.1.2 sont des voisinages des feuilles compactes de $\mathcal{L}^s$. On a alors

1. on peut avoir $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$ dans le cas non orientable

- Sur $\bigcup_{[t_1,t_2]} \sigma_t$, on a $\psi = \hat{\psi}$ et la dilatation de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ est satisfaite d'après le fait 4.3.3, item 4.
- Par construction, on a

$$B \setminus \left(\left(\bigcup_{[t_1,t_2]} \sigma_t \right) \cup \mathcal{V}_\delta \right) = \left(\bigcup_{\mathbb{R} \setminus [t_1,t_2]} \sigma_t \right) \setminus \mathcal{V}_\delta \ \subset \ \mathcal{W}_{\lambda c}.$$

  De plus, d'après l'item 2, la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ est préservée par ψ. Donc pour tout $v \in T\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en un point du complémentaire de $(\bigcup_{[t_1,t_2]} \sigma_t) \cup \mathcal{V}_\delta$ dans B, on a d'après la proposition 3.1.2 et l'item 4 du lemme 4.1.5 précédemment montré :

$$\|(f_{\text{out,in}} \circ \psi)_* v\| > \lambda c^{-1} \|\psi_* v\| > \lambda \|v\|$$

6) Le difféomorphisme ψ est indépendant de δ sur le complémentaire dans B des voisinages normalisés $\mathcal{V}_*$ des orbites périodiques tangentes $\mathcal{O}_*$. L'item 6 est donc vérifié.

   Le lemme 4.1.5 est démontré.

□

Chapitre 5

Choix des paramètres et construction de champs de cônes

Dans ce chapitre et pour le reste de la preuve, φ désigne un recollement normalisé de (P, X) (définitions 2.1.8). On renvoie au début du chapitre 3 pour un rappel des notations. On note $\mathcal{U}$ un voisinage hyperbolique filtrant de Λ dans P donné par le lemme 3.2.1, où Λ est le maximal invariant de (P, X), et $TP_{|\Lambda} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ la décomposition hyperbolique sur $\mathcal{U}$. La métrique riemannienne g sur P définie au chapitre précédent est une métrique adaptée à la décomposition hyperbolique sur $\mathcal{U}$. Par définition d'un bloc normalisé (2.1.2, item 1), le bloc (P, X) est muni d'une section affine Σ [1], autrement dit une section locale transverse de Λ tel que l'application de premier retour du flot de X est affine dans des coordonnées au voisinage de $\Sigma \cap \Lambda$.

Rappel du chapitre 4 Au chapitre précédent on a construit une famille de difféomorphismes $\psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon \partial P \to \partial P$ à support dans P^{in} et $\psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \colon \partial P \to \partial P$ à support dans P^{out} indexée par les paramètres $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, qui satisfont les hypothèses de la proposition 4.1.2 et proposition 4.1.3. On rappelle que :

- Le paramètre $\lambda > 1$ minore le facteur de dilatation de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$ dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ en dehors d'un voisinages des orbites $\mathcal{O}_*$.
- Le paramètre $\epsilon > 0$ mesure la perturbation du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$.
- Le paramètre $\delta > 0$ est la taille du voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$ sur lequel on ne contrôle plus la dilatation de la composée $f_{\text{out,in}} \circ \psi^{\text{in}}$.

Symétriquement :

- Le paramètre $\lambda > 1$ minore le facteur de dilatation de la composée $(\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}})^{-1}$ dans la direction $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ en dehors d'un voisinages des orbites $\mathcal{O}_*$.
- Le paramètre $\epsilon > 0$ mesure la perturbation du feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$.
- Le paramètre $\delta > 0$ est la taille du voisinage des orbites $\mathcal{O}_*$ sur lequel on ne contrôle plus la dilatation de la composée $(\psi^{\text{out}} \circ f_{\text{out,in}})^{-1}$ sur $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$.

1. Une telle section est définie dans un prolongement de (P, X), mais on considère dans ce chapitre sa restriction à P

5.1 Énoncé de la proposition principale et résumé de la preuve

Recollement Pour tout paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$, on définit l'application composée

$$\psi_{\lambda,\epsilon,\delta} := \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}\, \varphi\, \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta} : \partial P \to \partial P \tag{5.1}$$

où φ est un recollement normalisé de (P, X). Pour tout $\lambda, \epsilon, \delta$:

- ψ^{in} et ψ^{out} sont égaux à l'identité sur un voisinage de $\mathcal{O}_*$ dans ∂P, donc $\psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$ est un recollement normalisé de (P, X)
- ψ^{in} et ψ^{out} sont isotopes à l'identité via des difféomorphismes égaux à l'identité sur un voisinage de la lamination de bord $\mathcal{L}$, donc $\psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$ et φ sont isotopes via des difféomorphismes de recollements fortement quasi-transverses.

Fait 5.1.1. *$(P, X, \psi_{\lambda,\epsilon,\delta})$ est un triplet normalisé fortement isotope à (P, X, φ).*

Démonstration. En effet, $\psi = \psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$ est un recollement de (P, X) isotope à φ. De plus, il existe une isotopie $h_t \colon \partial P \to \partial P$ qui joint $h_0 = \text{Id}$ et $h_1 = \psi^{\text{out}} \circ (\psi^{\text{in}})^{-1}$, qui préserve la lamination $\mathcal{L}$, et tel que h_1 envoie la lamination $\psi_*\mathcal{L}$ sur la lamination $\varphi_*\mathcal{L}$. Les triplets sont donc fortement isotopes au sens de la définition 1.4.9. □

Si $\psi = \psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$, l'espace quotient $P_\psi := P/\,\psi$ est une variété de dimension trois fermée munie d'un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ induit par X sur P_ψ que l'on note X_ψ (proposition 2.1.9). Soit $\pi_\psi \colon P \to P_\psi$ la projection. Pour ne pas alourdir les notations, on notera $P^{\text{in}}_\psi = \pi_\psi(P^{\text{in}})$ et $\Sigma_\psi = \pi_\psi(\Sigma)$ et $\pi_\psi(\mathcal{O}_*) = (\mathcal{O}_*)_\psi$, etc. Plus généralement l'indice $_\psi$ indique que l'on considère un élément projeté dans la variété quotient P_ψ.

Section globale dans P_ψ Remarquons que l'ensemble $\Sigma \cup P^{\text{in}} \cup P^{\text{out}}$ dans P intersecte toute les orbites du flot de X en temps uniformément borné. La projection

$$\pi_\psi(\Sigma \cup P^{\text{in}} \cup P^{\text{out}}) = \pi_\psi(\Sigma \cup P^{\text{in}}) = \pi_\psi(\Sigma \cup P^{\text{out}})$$

dans P_ψ est une surface immergée dans P_ψ, transverse aux orbites de X_ψ, qui intersecte toutes les orbites de X_ψ en temps uniformément borné, non compacte. On la note

$$S_{0,\psi} := \pi_\psi(P^{\text{in}} \cup \Sigma) \tag{5.2}$$

Soit $f_{0,\psi} \colon S_{0,\psi} \to S_{0,\psi}$ le premier retour du flot de X_ψ sur $S_{0,\psi}$. Notons que l'on a $S_{0,\psi} = P^{\text{in}}_\psi \cup \Sigma_\psi$. La section P^{in}_ψ est une union de surfaces fermées transverses à X_ψ et de surfaces fermées quasi-transverses à X_ψ privés des orbites périodiques tangentes $(\mathcal{O}_*)_\psi$. Il s'ensuit que la section $S_{0,\psi}$ n'est pas uniformément transverse au champ X_ψ. Remarquons que l'on a l'égalité $P^{\text{in}}_\psi = P^{\text{out}}_\psi$, mais on fera le choix arbitraire de considérer P^{in}_ψ dans la suite.

Condition des champs de cônes

Définition 5.1.2 (Condition des champs de cônes)**.** Soit $f \colon S \to S$ un difféomorphisme. On dit que f satisfait la *condition des champs de cônes* s'il existe une paire de champ de cônes (C^u, C^s) sur S et des constantes $\text{cst} > 0$, $\lambda > 1$ tel que pour tout $p \in S$:

- $f_*(C^u(p)) \subset \text{int}\, C^u(f(p))$, et pour tout $v \in C^u(p)$, et $n \geq 0$, $\|f^n_* v\| \geq \text{cst}\, \lambda^n \|v\|$.
- $f^{-1}_*(C^s(f(p))) \subset \text{int}\, C^s(p)$, et pour tout $v \in C^s(f(p))$, et $n \geq 0$, $\|f^{-n}_* v\| \geq \text{cst}\, \lambda^n \|v\|$.

De façon analogue, on dit que (C^u, C^s) est une *paire de champs cônes f-invariants.* On dit que

- le champ de cônes C^u est un *champ de cônes instable* pour f,
- le champ de cônes C^s est un *champ de cônes stable* pour f.

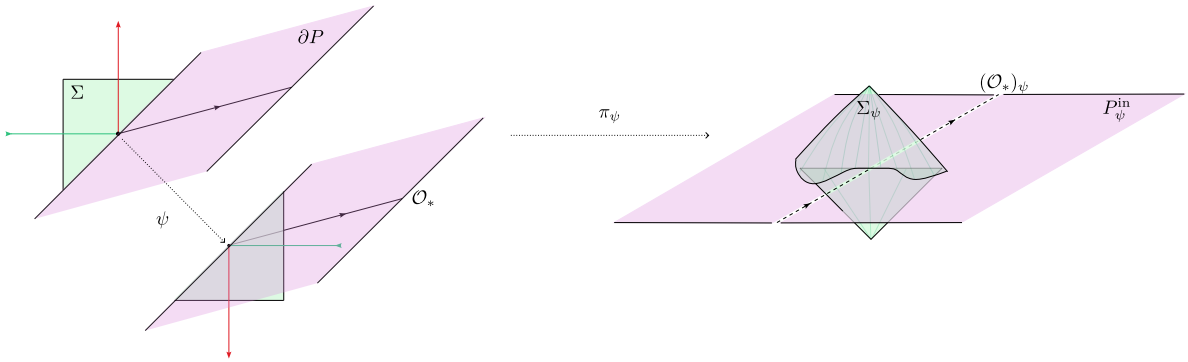


FIGURE 5.1 – Section $S_{0,\psi}$ au voisinage d'une orbite périodique de $(\mathcal{O}_*)_\psi$

But Le but de cette section est de choisir des paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ tel que si $\psi = \psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$, l'application de premier retour $f_{0,\psi}$ a des propriétés d'hyperbolicité. Plus précisément, on montre qu'un itéré (qui dépend du point de départ) de $f_{0,\psi}$ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de certains points. Toutefois, la non uniforme transversalité de la section $\Sigma_{0,\psi}$ avec le champ de vecteurs X_ψ empêche le premier retour (ou un itéré) d'être uniformément hyperbolique en tout point. Dans le chapitre 6 suivant, on montrera que pour un tel choix de paramètres, on peut tronquer la section $S_{0,\psi}$ en enlevant un voisinage bien choisi des orbites $\pi_\psi(\mathcal{O}_*)$ pour la rendre compacte et uniformément transverse au champ X_ψ, et de sorte que le premier retour du flot de X_ψ sur cette nouvelle section soit uniformément hyperbolique, quitte à regarder un itéré uniformément borné. Il faut préciser quelques aspects techniques avant d'énoncer le résultat.

Auto-intersections Remarquons que $S_{0,\psi}$ a des points d'auto-intersection doubles ou triples (figure 5.1). En effet :

- L'intersection $\Sigma \cap P^{\text{in}}$ est un lieu de point double dans P donc de même pour l'image dans P_ψ
- Un point de $\pi_\psi(\Sigma)$ peut être dans l'image de deux disques disjoints de Σ au voisinage de deux orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}_j$ de $\mathcal{O}_*$. Les projections par π_ψ de ces disques s'intersectent en certains points et ne sont pas nécessairement égales partout.

Alors la surface $S_{0,\psi}$ admet deux ou trois plans tangents en ses points d'auto-intersections.

- Si $p \in P^{\text{in}}_\psi \subset S_{0,\psi}$, on note $T^{\text{in}}_p \subset T_p S_{0,\psi}$ le plan tangent induit par $T_{\tilde{p}} P^{\text{in}}$, où $\tilde{p} \in P^{\text{in}}$ est le relevé de p dans P^{in}
- Si $q \in \Sigma_\psi \subset S_{0,\psi}$, on note $T^\Sigma_q \subset T_p S_{0,\psi}$ le (ou un des deux) plan(s) tangent(s) induit par $T_{\tilde{q}}\Sigma$, où $\tilde{q} \in \Sigma$ est un relevé de q dans Σ.

La différentielle de $f_{0,\psi}$ en p est bien définie pour un choix de plan tangent au départ et à l'arrivée. Plus précisément, pour $p \in S_{0,\psi}$, une fois choisi un plan tangent T^*_p à $S_{0,\psi}$ au point p et $T^*_{f(p)}$, la différentielle $d_p f_{0,\psi} \colon T^*_p \to T^*_{f(p)}$ est bien définie.

Remarque 5.1.3. On pourrait vouloir ajuster la section Σ pour éviter les points triples de $S_{0,\psi}$. Toutefois, le choix du recollement $\psi = \psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$ déterminé par les paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ dépendra de la donnée de Σ, et l'on ne peux donc pas procéder ainsi.

Métrique sur $S_{0,\psi}$ La proposition principale de cette section comporte des résultats de dilatation sur des ensembles non invariants. Il faut choisir au préalable une métrique sur $S_{0,\psi}$. La métrique g sur P (voir début du chapitre 3) induit une métrique g^{in} sur P^{in} et une métrique g^{Σ} sur Σ. Pour des raisons techniques, on va considérer la métrique $\hat{g}^{\text{in}} := \psi_*^{\text{in}} g^{\text{in}}$ qui est le poussé en avant par ψ^{in} de la métrique g^{in}. On considère ensuite le passage au quotient de $\hat{g}^{\text{in}}$ et g^{Σ} sur $\pi_\psi(P^{\text{in}} \cup \Sigma)$, que l'on note g_ψ. Ces métriques ne se recollent pas le long des auto-intersections et l'image g_ψ ne définit pas une métrique continue. Cependant, on peut toujours relever dans P par l'homéomorphisme local π_ψ et "faire comme si" il n'y avait pas d'intersections et tous les morceaux issus de Σ et de P^{in} sont disjoints dans P_ψ. On ne le note pas mais tous ces objets dépendent du choix des paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$.

Champ de cônes Un champ de cônes C sur $S_{0,\psi}$ est la donnée, pour chaque $p \in S_{0,\psi}$ et pour chaque plan tangent T^* à $S_{0,\psi}$ au point p d'un cône $C(p, T^*) \subset T^*$.

- Quand on précise qu'un point $p \in S_{0,\psi}$ appartient à P_ψ^{in}, on sous-entend que l'on considère l'espace tangent $T_p^{\text{in}} \subset T_p\Sigma_\psi$ induit par $T_{\tilde{p}}P^{\text{in}}$ en p, et la métrique induite par $\hat{g}^{\text{in}}$, autrement dit on relève par l'homéomorphisme local π_ψ au voisinage de l'unique relevé $\tilde{p} \in P^{\text{in}}$.

- Quand on précise qu'un point $p \in S_{0,\psi}$ appartient à Σ_ψ, on sous-entend que l'on considère l'espace tangent $T_p^{\Sigma} \subset T_p\Sigma_\psi$ induit par $T_{\tilde{p}}\Sigma$ en p, et la métrique induite par g^{Σ}, autrement dit on relève par l'homéomorphisme local π_ψ au voisinage d'un relevé (arbitraire) $\tilde{p} \in \Sigma$.

Énoncé de la proposition principale de la section La proposition suivante dit que l'on peut choisir des paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ et des cônes sur Σ et sur P^{in} tel qu'un itéré (non uniforme) de l'application de premier retour $f_{0,\psi} \colon S_{0,\psi} \to S_{0,\psi}$ du flot de X_ψ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de certains points. Plus précisément, on montre :

Proposition 5.1.4. *Il existe des paramètres $\lambda_0 > 1$, $\epsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, avec les propriétés suivantes. On note $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$, $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$, $\psi = \psi^{\text{in}}\varphi\psi^{\text{out}}$. On pose $\mathcal{V}_0 := \psi^{\text{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0})$. Il existe une paire (C^u_ψ, C^s_ψ) de champ de cônes sur $S_{0,\psi}$, et des entiers N_0, N_1 et N_Σ qui satisfont les propriétés suivantes. Soit $p \in S_{0,\psi}$.*

1) Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$. Alors $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = -N_0, \dots, -1, 1, \dots, N_0$.

Soit $n \geq 1$ et on note $q := f^n_{0,\psi}(p)$.

2) Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_1$, et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Alors :

- *$(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^{\Sigma}_q)$, et pour tout $v \in C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,*
- *$(f^n_{0,\psi})_*^{-1} C^s_\psi(q, T^{\Sigma}_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, et pour tout $v \in C^s_\psi(q, T^{\Sigma}_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})_*^{-1} v\| \geq 2\|v\|$.*

3) Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Alors :

- *$(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$, et pour tout $v \in C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,*
- *$(f^n_{0,\psi})_*^{-1} C^s_\psi(q, T^{\text{in}}_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, et pour tout $v \in C^s_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})_*^{-1} v\| \geq 2\|v\|$.*

4) Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_0 + 1$, il existe $1 \leq m \leq n - N_0$ tel que $f^m_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$ et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, m-1, m+1, \dots, n$. Alors :

- $(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$, *et pour tout* $v \in C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* C^s_\psi(q, T^\Sigma_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, *et pour tout* $v \in C^s_\psi(q, T^\Sigma_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$.

5) Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, *et* $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ *pour* $k = 1, \ldots, n-1$. *Alors :*

- $(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$,
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* C^s_\psi(q, T^\Sigma_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^\Sigma_p)$.

De plus si $n \geq N_\Sigma$, *alors :*

- *pour tout* $v \in C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,
- *pour tout* $v \in C^s_\psi(q, T^\Sigma_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$.

6) Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in P^{\text{in}}_\psi$ *et* $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ *pour* $k = 1, \ldots, n-1$. *Alors :*

- $(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$ *et,*
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* C^s_\psi(q, T^{\text{in}}_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^\Sigma_p)$.

7) Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_0 + 1$, *il existe* $1 \leq m \leq n - N_0$ *tel que* $f^m_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$, *et* $f^k(p) \in \Sigma_\psi$ *pour* $k = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1$. *Alors :*

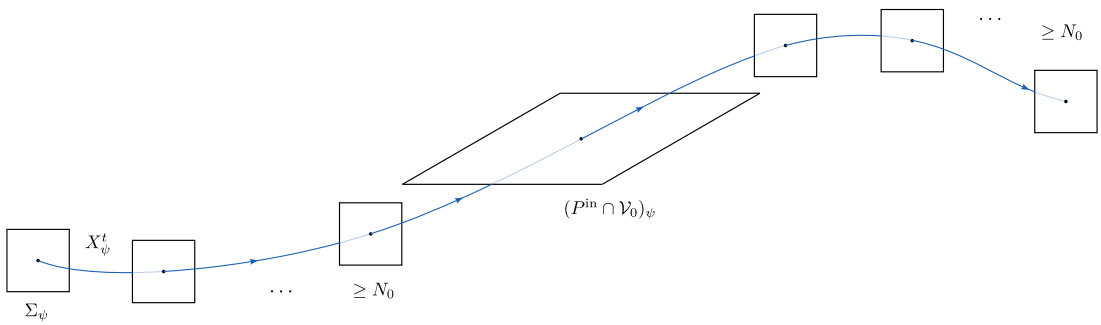
- $(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$, *et pour tout* $v \in C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* C^s_\psi(q, T^\Sigma_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^\Sigma_p)$, *et pour tout* $v \in C^s_\psi(q, T^\Sigma_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$.

8) Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, *et il existe* $m \geq N_1$, *et des entiers* $1 \leq k_1 < \cdots < k_m = n$ *tel que et* $f^{k_1}(p), \ldots, f^{k_m}(p) \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ *et* $f^k(p) \in \Sigma_\psi$ *pour* $k \neq k_1, \ldots, k_m$, $1 \leq k \leq n-1$. *Alors :*

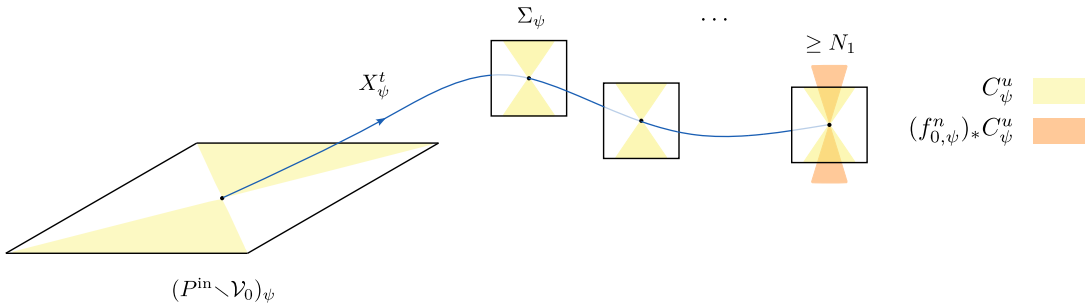
- $(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) \subset \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$, *et pour tout* $v \in C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$, $\|(f^n_{0,\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$,
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* C^s_\psi(q, T^{\text{in}}_q) \subset \operatorname{int} C^s_\psi(p, T^\Sigma_p)$, *et pour tout* $v \in C^s_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$, $\|(f^n_{0,\psi})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$.

On renvoie à la figure 5.2 et les sous-figures associées pour un schéma de l'orbite correspondant à chacun des items de la proposition.

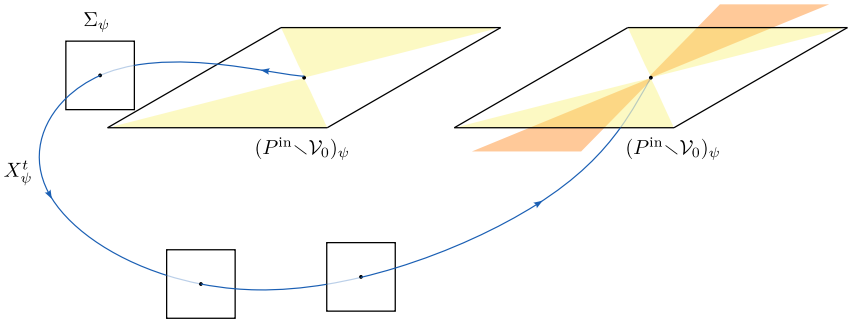
Quelques dessins schématiques



(a) item 1

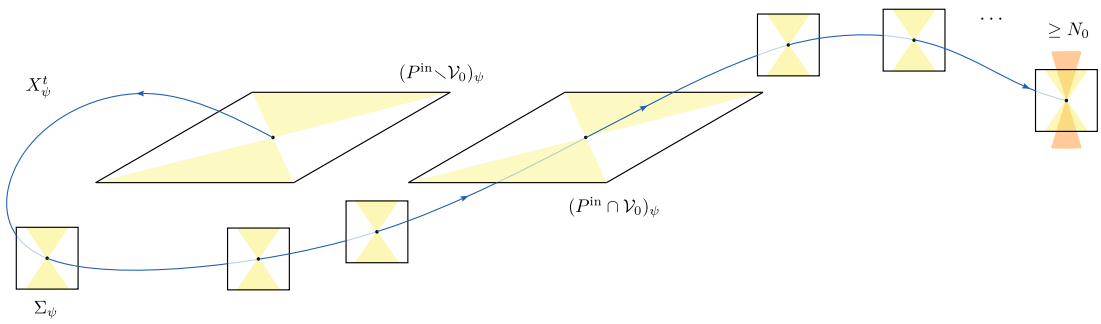


(b) item 2

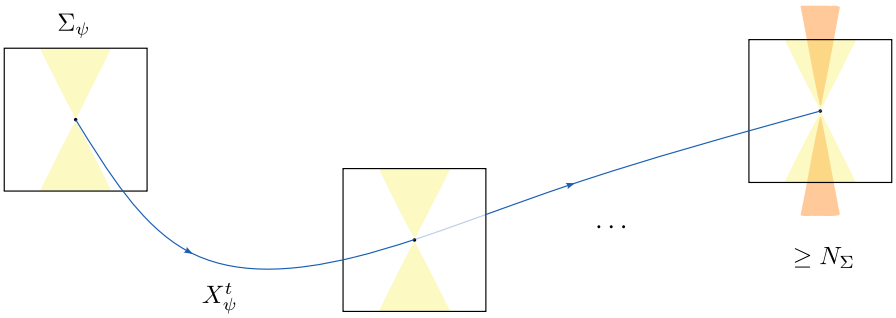


(c) item 3

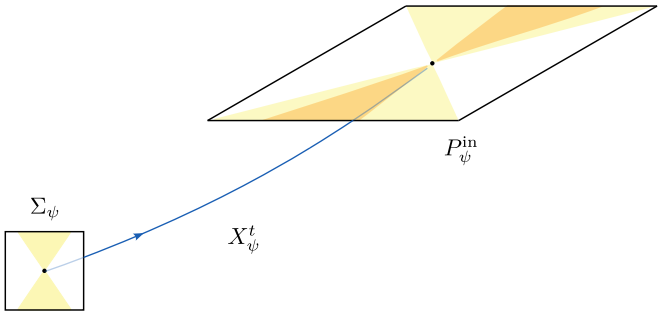
FIGURE 5.2 – Représentation de l'action de $f^n_{0,\psi}$ pour chaque orbite de la proposition 5.1.4



(d) item 4

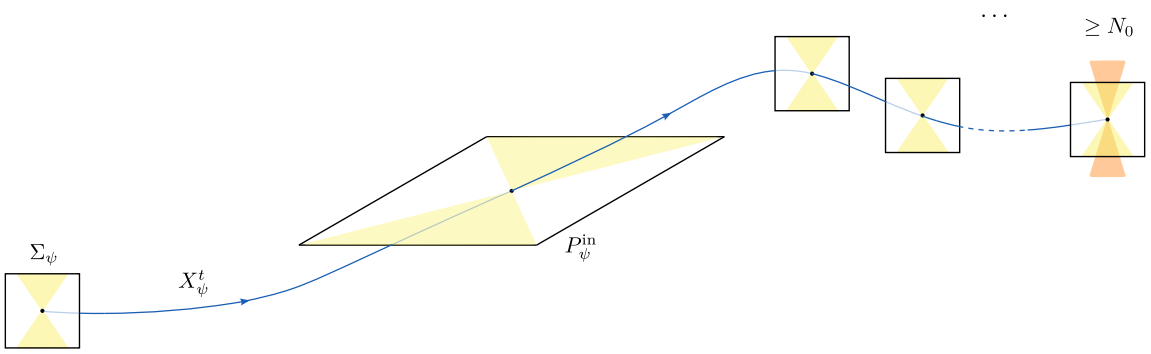


(e) item 5

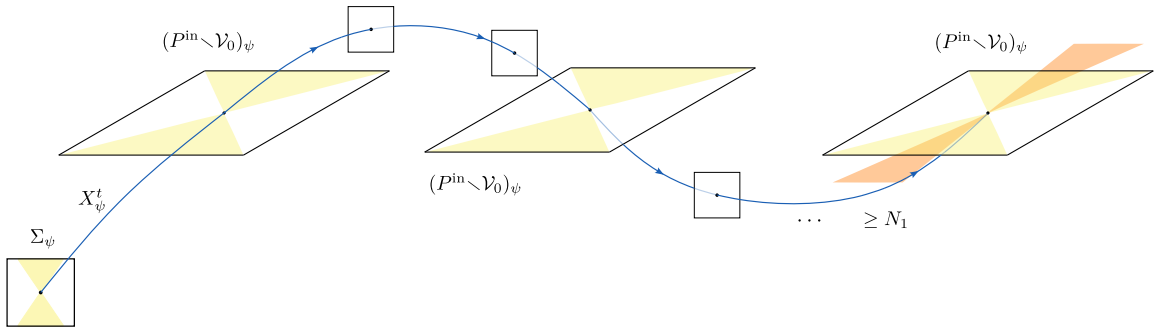


(f) item 6

FIGURE 5.2 – Représentation de l'action de $f_{0,\psi}^n$ pour chaque orbite de la proposition 5.1.4



(g) item 7



(h) item 8

FIGURE 5.2 – Représentation de l'action de $f^n_{0,\psi}$ pour chaque orbites de la proposition 5.1.4

Relevé de l'application de retour dans P Pour la preuve, on se ramène à étudier des relevés dans P des itérés $f^n_{0,\psi}$. Si un relevé $\tilde{f}^n_{0,\psi}$ envoie un champ de cônes C sur $\Sigma \cup P^{\text{in}}$ sur son intérieur au voisinage d'un point $\tilde{p}$, et dilate la norme des vecteurs de C d'un facteur 2 pour la métrique g, alors on peut projeter dans P_ψ et on a le même résultat pour l'action $f^n_{0,\psi}$ sur le champ de cônes C_ψ pour la métrique g_ψ dans P_ψ, au voisinage de $p = \pi_\psi(\tilde{p})$. Les relevés $\tilde{f}^n_{0,\psi}$ sont des compositions des applications de passage et de retour du flot de X et du recollement ψ.

Notation 5.1.5. On définit

- $f_\Sigma \colon \Sigma \to \Sigma$ l'application de premier retour du flot de X sur Σ
- $f_{\Sigma,\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to \Sigma$ l'application de passage du flot de X de P^{in} à Σ
- $f_{\text{out},\Sigma} \colon \Sigma \to P^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de X de Σ à P^{out}
- $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de X de P^{in} à P^{out}

Alors on a

Fait 5.1.6.

– *Si $p \in \Sigma_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $f_\Sigma \colon \Sigma \to \Sigma$.*

– *Si $p \in \Sigma_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $\psi\, f_{\text{out},\Sigma} : \Sigma \to P^{\text{in}}$.*

– *Si* $p \in P^{\text{in}}_{\psi}$ *et* $f_{0,\psi}(p) \in \Sigma_{\psi}$ *alors un relevé de* $f_{0,\psi}$ *est* $f_{\Sigma,\text{in}} : P^{\text{in}} \to \Sigma$.

– *Si* $p \in P^{\text{in}}_{\psi}$ *et* $f_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_{\psi}$ *alors un relevé de* $f_{0,\psi}$ *est* $\psi\, f_{\text{out,in}} : P^{\text{in}} \to P^{\text{in}}$

Résumé de la preuve On va chercher des cônes sur P^{in} et sur Σ tels que les relevés des itérés $f^n_{0,\psi}$ vérifient la condition des champs de cônes au voisinage de certains points. Les cônes de la proposition seront les projections dans P_{ψ} des cônes sur P^{in} et sur Σ. La difficulté de la preuve est de fixer les paramètres et les cônes dans le bon ordre en fonction de leur dépendance relative pour avoir les différentes conditions de compatibilité des cônes du lemme. Les étapes se font dans l'ordre suivant. On note $\hat{\mathcal{V}}_{\delta} = \psi^{\text{in}}(\mathcal{V}_{\delta})$.

- Dans la section 5.2, on montre l'existence des paramètres $\epsilon = \epsilon_0$, $\lambda = \lambda_0$ et des cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in} qui permettront d'obtenir l'item 3 de la proposition 5.1.4, et ceci uniformément en δ.

  Cet item concerne les points $p \in (P^{\text{in}} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{\delta})_{\psi}$ dont l'orbite future par X_{ψ} intersecte de nouveau $(P^{\text{in}} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{\delta})_{\psi}$ en $q = f^n_{0,\psi}(p)$ (figure 5.2c). On considère donc l'application de retour du flot de X_{ψ} sur la section $(P^{\text{in}})_{\psi}$, restreinte à un certain domaine au départ et à l'arrivée. Un relevé dans P de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p est $\psi f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{in}}$, mais pour des raisons pratiques on étudiera la composée $f_{\text{in},\psi} = \varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}} \psi^{\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{in}}$ qui est son conjugué par ψ^{in}. On montre que $f_{\text{in},\psi}$ vérifie la condition des champs de cônes pour un bon choix de cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in} et de paramètres λ et ϵ sur le complémentaire de $\mathcal{V}_{\delta}$, et ceci pour tout δ. Le résultat est résumé à la proposition 5.2.1. Le point clé est que l'on peut choisir λ assez grand de sorte à avoir une dilatation et contraction arbitrairement forte de deux directions transverses par $f_{\text{in},\psi}$, uniformément en les paramètre ϵ et δ.

  Les cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in} et les paramètres $\epsilon = \epsilon_0$, $\lambda = \lambda_0$ sont désormais fixés pour le reste de la preuve.

- Dans la section 5.3, on montre l'existence des champs de cônes $(C^u_{\Sigma}, C^s_{\Sigma})$ sur Σ qui permettront d'obtenir l'item 6, et qui déterminent un entier N_{Σ} qui satisfait l'item 5 de la proposition 5.1.4, uniformément en δ.

  – l'item 6 concerne les points $p \in \Sigma_{\psi}$ dont l'orbite future par X_{ψ} intersecte une première fois P^{in}_{ψ} en $q = f^n_{0,\psi}(p)$ (figure 5.2f). Un relevé dans P de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p est $\psi f_{\text{out},\Sigma} f^i_{\Sigma} \colon \Sigma \to P^{\text{in}}$. On étudiera $\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_{\Sigma}$ qui est son conjugué par ψ^{in} (on rappelle que ψ^{in} est l'identité en dehors de P^{in}). On montre l'existence de deux champs de cônes $(C^u_{\Sigma}, C^s_{\Sigma})$ sur Σ tel qu'un critère de compatibilité entre les cônes sur Σ et les cônes sur P^{in} est vérifié pour la composée $\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_{\Sigma}$, et ceci uniformément en δ. C'est le lemme 5.3.3. Le point clé est que la projection $\pi \colon T\Sigma \to TP^{\text{out}}$ parallèlement à $\mathbb{R}.X$ entre Σ et P^{out} (ou P^{in}) a un effet uniformément borné sur l'ouverture des cônes (lemme 5.3.5).

  – l'item 5 concerne les points $p \in \Sigma_{\psi}$ dont l'orbite future par X_{ψ} intersecte N_{Σ} fois consécutives Σ_{ψ} (figure 5.2e). Un relevé dans P de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p est $f^n_{\Sigma} \colon \Sigma \to \Sigma$. Une fois les cônes fixés sur Σ contenant les bonnes directions tangentes, l'hyperbolicité de f_{Σ} assure qu'un itéré supérieur à un entier uniforme N_{Σ} vérifie la condition des champs de cônes.

  Les cônes $(C^u_{\Sigma}, C^s_{\Sigma})$ sur Σ et l'entier N_{Σ} sont désormais fixés pour le reste de la preuve.

- Dans la section 5.4, on montre l'existence d'un entier N_0 qui permettra d'obtenir les items 7 et 4 de la proposition 5.1.4 et ceci uniformément en δ.

  – l'item 7 concerne les points $p \in \Sigma_{\psi}$ dont l'orbite future par X_{ψ} intersecte une unique fois P^{in}_{ψ} puis N_0 fois consécutives Σ_{ψ} (figure 5.2g). Un relevé dans P de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p

est $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i \colon \Sigma \to \Sigma$. On montre que la paire (C_Σ^u, C_Σ^s) sur Σ fixée à la section précédente forment une paire de champ de cônes invariants par cette application, pour un entier j supérieur à un certain entier uniforme N_0, uniformément en δ. Cette propriété est résumée au lemme 5.4.3. Le point clé est que la contraction de la composée $f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}$ est minorée uniformément en δ (lemme 5.4.2).

– l'item 4 se montre uniformément en δ. Il concerne les points $p \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte une unique fois $(P^{\mathrm{in}} \cap \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$ puis N_0 fois consécutives Σ_ψ (figure 5.2d). Un relevé dans P de $f_{0,\psi}^n$ au voisinage de p est $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma$. On étudiera la composée $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ qui est son conjugué par ψ^{in}. On montre qu'elle vérifie la condition des champs de cônes pour la paire $(C_{\mathrm{in}}^u \cup C_\Sigma^u, C_{\mathrm{in}}^s \cup C_\Sigma^s)$ pour un entier j supérieur à un certain entier uniforme N_0, et ceci uniformément en δ. C'est le corollaire 5.4.8. Le résultat clé est que la contraction du passage d'une orbite du flot de X de $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta$ à $\Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$ est minorée uniformément en δ (lemme 5.4.4).

L'entier N_0 est désormais fixé pour le reste de la preuve.

- Dans la section 5.5, on montre l'existence d'un paramètre δ_0 qui permettra d'obtenir l'item 1 de la proposition 5.1.4.

  L'entier N_0 est fixé à la section précédente. On cherche un paramètre $\delta = \delta_0$ tel qu'un point $p \in (\mathcal{V}_0)_\psi = (\psi^{\mathrm{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0}))_\psi$ a une orbite qui intersecte N_0 fois consécutives la section Σ_ψ dans le passé et dans le futur (figure 5.2a). On étudiera les composées $f_\Sigma^k\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ et $f_\Sigma^{-k}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}^{-1}\, (\varphi\psi^{\mathrm{out}})^{-1}$ restreintes à $P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$. On cherche un paramètre δ_0 tel que ces applications soient bien définies pour $k \geq N_0$. Un résultat clé est qu'un point p arbitrairement proche de Λ dans P a une orbite qui intersecte un nombre arbitrairement grand de fois la section Σ dans le passé et dans le futur, si elle est bien définie. On utilisera un lemme clé qui dit que l'action de ψ^{in} et ψ^{out} sur la distance à l'ensemble $\mathcal{O}_*$ est bornée uniformément en δ (lemme 5.3.6).

  Le paramètre $\delta = \delta_0$ est désormais fixé pour le reste de la preuve.

- Dans la section 5.6, on montre l'existence d'un entier N_1 qui permettra d'avoir les items 2 et 8 de la proposition 5.1.4. À cette étape, les paramètres $(\lambda, \epsilon, \delta) = (\lambda_0, \epsilon_0, \delta_0)$ sont désormais fixés ainsi que les cônes (C_Σ^u, C_Σ^s) et $(C_{\mathrm{in}}^u, C_{\mathrm{in}}^s)$ sur Σ et sur P^{in}. On note $\mathcal{V}_0 = \psi^{\mathrm{in}}(\mathcal{V}_0)$.

  – l'item 2 concerne les points $p \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte N_1 fois consécutives la section Σ_ψ (figure 5.2b). Un relevé dans P de $f_{0,\psi}^n$ au voisinage de p est $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma$. On étudiera la composée $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ qui est son conjugué par ψ^{in}. On montre qu'elle vérifie la condition des champs de cônes pour la paire $(C_{\mathrm{in}}^u \cup C_\Sigma^u, C_{\mathrm{in}}^s \cup C_\Sigma^s)$ pour un entier j supérieur à un certain entier uniforme N_1. Les points clés sont l'uniforme transversalité de la surface de départ $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0$ avec le champ X, l'hyperbolicité de f_Σ, et le fait que les cônes $(C_{\mathrm{in}}^u, C_{\mathrm{in}}^s)$ et (C_Σ^u, C_Σ^s) contiennent des directions "compatibles".

  – l'item 8 concerne les points $p \in \Sigma_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte $(P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ un nombre N_1 de fois (figure 5.2h). Un relevé dans P de $f_{0,\psi}^n$ au voisinage de p est $(f_{\mathrm{out},\mathrm{in}}\psi)^j f_{\mathrm{out},\Sigma} f_\Sigma^i \colon \Sigma \to P^{\mathrm{in}}$. On étudiera le conjugué par ψ^{in}. On montre qu'elle vérifie la condition des des champs de cônes invariants pour la paire $(C_{\mathrm{in}}^u \cup C_\Sigma^u, C_{\mathrm{in}}^s \cup C_\Sigma^s)$, pour un entier j supérieur à un certain entier uniforme N_1. Les points clés sont l'hyperbolicité de $f_{\mathrm{in},\psi}$, et l'effet borné de la composée $\varphi\psi^{\mathrm{out}} f_{\mathrm{out},\Sigma} f_\Sigma^i$ sur l'ouverture des cônes et sur la norme des vecteurs.

  L'entier N_1 est désormais fixé.

- Dans la section 5.7, on montre chaque item de la proposition 5.1.4 à l'aide des résultats des sections précédentes. Chaque résultat précédent est vrai pour le choix de paramètre $\lambda = \lambda_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ et $\delta = \delta_0$. Il faut rétablir le défaut de conjugaison par ψ^{in} puis projeter dans P_ψ. Autrement dit, on pousse par ψ^{in} les cônes et la métrique sur P^{in} et on projette sur P_ψ ces cônes et cette métrique, ainsi que les cônes et la métrique sur Σ. Tous les résultats découlent ensuite.

5.2 Paramètres λ_0, ϵ_0 et cônes sur P^{in}

Dans cette sous-section on montre l'existence des paramètres $\lambda = \lambda_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ et des cônes sur P^{in} qui permettront d'obtenir l'item 3 de la proposition 5.1.4, et ceci uniformément en δ. Cet item concerne les points $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte de nouveau $(P^{\text{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$. On définit la composée suivante :

$$f_{\text{in},\psi} := \varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}} \psi^{\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{in}} \tag{5.3}$$

Montrons la proposition suivante (voir figure 5.3).

Proposition 5.2.1. *Il existe des paramètres $\lambda_0 > 1$, $\epsilon_0 > 0$, une paire de champs de cônes (fermés) continus $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in}, il existe $K > 0$, $k > 0$, $k' > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$, si $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta}$ et $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta}$ sont les difféomorphismes donnés par la proposition 4.1.2 et 4.1.3, alors*

1) (directions) *le champ C^u_{in} :*

- *est inclus dans un champ de $(K,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes,*
- *contient un champ de $(k,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes,*
- *contient un champ de $(k',\ (\varphi\psi^{\text{out}})_* \mathcal{G}^{u,\text{out}} / \varphi_* \mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes.*

et le champ C^s_{in} :

- *est inclus dans un champ de $(K,\ (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}} / \mathcal{G}^{u,\text{in}})$-cônes.*
- *contient un champ de $(k,\ (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}} / \mathcal{G}^{u,\text{in}})$-cônes.*
- *contient un champ $(k',\ \varphi_* \mathcal{G}^{s,\text{out}} / (\varphi\psi^{\text{out}})_* \mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes.*

2) (cônes invariants) *Pour tout $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta) \cap f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta)$,*

- $(f_{\text{in},\psi})_* C^u_{\text{in}}(p) \subset \operatorname{int} C^u_{\text{in}}(f_{\text{in},\psi}(p))$, *et pour tout $v \in C^u_{\text{in}}(p)$, $\|(f_{\text{in},\psi})_* v\| \geq 2\|v\|$*
- $\left(f^{-1}_{\text{in},\psi}\right)_* C^s_{\text{in}}(f_{\text{in},\psi}(p)) \subset \operatorname{int} C^s_{\text{in}}(p)$, *et pour tout $v \in C^s_{\text{in}}(f_{\text{in},\psi}(p))$, $\|(f_{\text{in},\psi})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$*

On ne montrera que l'existence du champ de cônes instable. La preuve pour trouver un champ de cônes stable est symétrique quitte à inverser le flot. On ne demande pas que ces cônes soit disjoints, ou complémentaires, les deux preuves sont donc indépendantes. Pour montrer l'existence d'un champ de cônes instable pour $f_{\text{in},\psi}$ il suffit de trouver deux directions transverses (non nécessairement invariantes), l'une uniformément dilatée et l'autre uniformément contractée par $f_{\text{in},\psi}$. Un champ de cônes C qui contient la direction dilatée et son image par $f_{\text{in},\psi}$ dans son intérieur, et dont l'adhérence ne contient pas la direction contractée est un bon candidat. Un facteur de dilatation et de contraction assez fort assure qu'un tel champ de cônes sera un champ de cônes instable, autrement dit strictement invariants et dilaté par $f_{\text{in},\psi}$.

Le lemme suivant nous donne les deux directions transverses qui sont respectivement dilatées et contractées d'un facteur proportionnel à λ (respectivement λ^{-1}), sur le complémentaire d'un δ-voisinage de $\mathcal{O}_*$ et de son image réciproque, et ceci uniformément en $\lambda, \epsilon, \delta$.

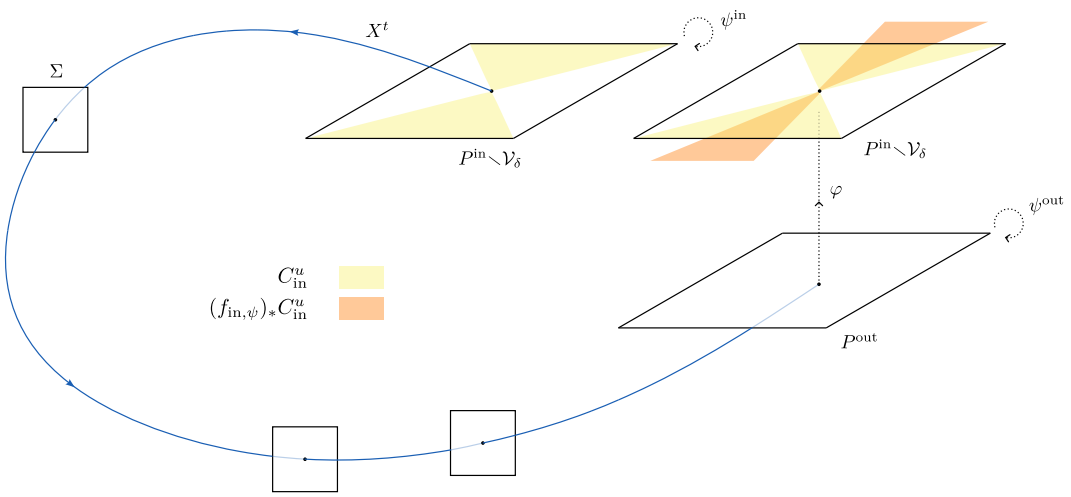


FIGURE 5.3 – Décomposition de l'application $f_{\text{in},\psi}$ et action sur le champs de cônes C^u_{in} sur $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$ au départ et à l'arrivée

Lemme 5.2.2. *Il existe une constante* cst > 0 *tel que pour tout* $\lambda, \epsilon, \delta$,

1) *pour tout* $p \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$, *pour tout* $v \in T_p \mathcal{G}^{u,\text{in}}$, $\|(f_{\text{in},\psi})_* v\| > \text{cst}\, \lambda \|v\|$

2) *pour tout* $p \in f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$, *pour tout* $v \in T_p (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}}$, $\|(f_{\text{in},\psi})_* v\| < (\text{cst}\, \lambda)^{-1} \|v\|$

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 5.2.3. *Il existe une constante* cst > 0, *tel que pour tout* $\lambda, \epsilon, \delta$, *pour tout* $p \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta) \cap f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$, *si* $C \subset T_p P^{\text{in}}$ *est un* $(K,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}})$*-cônes, et* $q = f_{\text{in},\psi}(p)$, *alors :*

1) $(f_{\text{in},\psi})_*(C) \subset \operatorname{int} C'$ *où* C' *est un* $\left(\frac{K}{(\text{cst}\ \lambda)^2},\ \varphi \psi^{\text{out}}_* \mathcal{G}^{u,\text{out}} / \varphi_* \mathcal{G}^{s,\text{out}}\right)$*-cône dans* $T_q P^{\text{in}}$,

2) $\|(f_{\text{in},\psi})_* v\| \geq \text{cst}\, \lambda K^{-1} \|v\|$ *pour tout* $v \in C$.

Démonstration du corollaire 5.2.3. Il suffit de vérifier que les directions images sont bien celles annoncées. Rappelons que ψ^{in} préserve $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ (proposition 4.1.2, item 2), $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ envoie la paire $(\mathcal{G}^{u,\text{in}}, \mathcal{G}^{s,\text{in}})$ sur la paire $(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})$, et ψ^{out} préserve $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(f_{\text{in},\psi})_* \mathcal{G}^{u,\text{in}} &= (\varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}} \psi^{\text{in}})_* \mathcal{G}^{u,\text{in}} \\
&= (\varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}})_* \mathcal{G}^{u,\text{in}} \\
&= (\varphi \psi^{\text{out}})_* \mathcal{G}^{u,\text{out}}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(f_{\text{in},\psi})_* (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}} &= (\varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}} \psi^{\text{in}})_* \, (\psi^{\text{in}})^{-1}_* \mathcal{G}^{s,\text{in}} \\
&= (\varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}})_* \mathcal{G}^{s,\text{in}} \\
&= \varphi_* \mathcal{G}^{s,\text{out}}
\end{aligned}$$

Le reste découle directement du lemme 5.2.2, en se plaçant sur l'intersection de $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ et son image réciproque par $f_{\text{in},\psi}$. □

Pour montrer le lemme 5.2.2, on a besoin du lemme suivant, qui dit que la dérivée de $\psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ dans la direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ est uniformément (en $\lambda, \epsilon, \delta$) bornée, et symétriquement, la dérivée de $\psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ dans la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est uniformément (en $\lambda, \epsilon, \delta$) bornée.

Lemme 5.2.4. *Il existe une constante* cst > 0, *tel que pour tout* $\lambda, \epsilon, \delta$, *si* $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ *et* $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$, *alors*

- *pour tout* $p \in P^{\text{out}}$ *et* $v \in T_p\mathcal{G}^{u,\text{out}}$, *on a* $\text{cst}^{-1}\|v\| \leq \|\psi^{\text{out}}_* v\| \leq \text{cst}\,\|v\|$;
- *pour tout* $p \in P^{\text{in}}$ *et* $v \in T_p\mathcal{G}^{s,\text{in}}$, *on a* $\text{cst}^{-1}\|v\| \leq \|\psi^{\text{in}}_* v\| \leq \text{cst}\,\|v\|$.

Démonstration. Montrons le lemme pour ψ^{out}. Soit v^u un vecteur tangent à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ et $w := \psi^{\text{out}}_*(v^u) = w^s + w^u \in T\mathcal{G}^{s,\text{out}} \oplus T\mathcal{G}^{u,\text{out}}$. D'après la proposition 4.1.3, item 3, on sait que w est dans un $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{u,\text{out}}/\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cône, ce qui se traduit par $\|w^s\| \leq \epsilon\|w^u\|$. D'après l'item 2, proposition 4.1.3, on sait que ψ^{out} préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ feuille à feuille, il s'ensuit que $w^u = (H^{s,\text{out}}_{\varsigma_q,\varsigma_p})_*(v^u)$ où $H^{s,\text{out}}_{\varsigma_q,\varsigma_p}$ est l'holonomie de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ entre la feuille $\varsigma_p \in \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ passant par p et la feuille $\varsigma_q \in \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ passant par $q = \psi^{\text{out}}(p)$. Comme le support de ψ^{out} est inclus dans des bandes $B_i \subset P^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}^u$ (item 1, proposition 4.1.3), on a $p, q \in B_i$ et les applications $H^{s,\text{out}}_{\varsigma_q,\varsigma_p}$ sont des holonomies dans les bandes B_i, on peut appliquer le lemme 4.2.4 qui dit que le rapport $\frac{\|w^u\|}{\|v^u\|}$ est uniformément borné. Il s'ensuit que le rapport $\frac{\|w\|}{\|v^u\|}$ est borné uniformément en les paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ pour ϵ assez petit. □

Démonstration du lemme 5.2.2. On rappelle que $f_{\text{in},\psi} = \varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}}\psi^{\text{in}}$.

- D'après la proposition 4.1.2, item 5 et 2, la composée $f_{\text{out,in}}\psi^{\text{in}}$ dilate d'un facteur λ les vecteurs tangentes à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ et envoie la direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ sur la direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$,
- D'après le lemme 5.2.4 précédent, la dérivée de ψ^{out} dans la direction $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ est bornée par une constante uniforme en $\lambda, \epsilon, \delta$,
- φ est un difféomorphisme à support compact, sa différentielle est donc uniformément bornée

On en déduit qu'il existe une constante cst > 0 uniforme en $\lambda, \epsilon, \delta$ qui satisfait l'item 1 du lemme 5.2.2. Montrons l'item 2. Soit $p \in f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$ et $v \in T_p(\psi^{\text{in}})^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$. Alors $w = (f_{\text{in},\psi})_* v$ est un vecteur tangent à $T_q\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ au point $q = f_{\text{in},\psi}(p) \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$. Cet item est équivalent à montrer que $(f^{-1}_{\text{in},\psi})_*$ dilate le vecteur w d'un facteur uniformément proportionnel à λ. On a $f^{-1}_{\text{in},\psi} = (\psi^{\text{in}})^{-1}\psi^{\text{out}}(\psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}})^{-1}\varphi^{-1}$. Étudions l'effet de chaque application sur le vecteur $w \in T_q\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$.

- φ^{-1} est un difféomorphisme à support compact, sa différentielle est donc uniformément bornée et envoie la direction tangente à $\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$. Comme φ est un recollement normalisé, il envoie $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ sur $P^{\text{out}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ (définition 2.1.8, item 1).
- D'après la proposition 4.1.3, item 5 et 2, la composée $(\psi^{\text{out}} f_{\text{out,in}})^{-1}$ dilate d'un facteur λ les vecteurs tangentes à $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur $P^{\text{out}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ et envoie la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ sur la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$.
- D'après le lemme 5.2.4 précédent, la dérivée de $(\psi^{\text{in}})^{-1}$ dans la direction $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est bornée par une constante uniforme en $\lambda, \epsilon, \delta$,

On en déduit que $(f^{-1}_{\text{in},\psi})_*$ dilate le vecteur w d'un facteur uniformément proportionnel à λ, donc il existe une constante cst > 0 uniforme en $\lambda, \epsilon, \delta$ qui satisfait l'item 2 du lemme 5.2.2. □

Montrons le lemme suivant, qui permet de séparer les bonnes directions par un champ de cônes (figure 5.4).

Lemme 5.2.5. *Il existe un champ de cônes fermés C^u_{in} sur P^{in} et un paramètre ϵ_0 tel que pour tout $\lambda > 1$, $\delta > 0$, si $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon_0,\delta}$ et $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon_0,\delta}$, alors*

- $\operatorname{int} C^u_{\text{in}}$ *contient les directions tangentes à* ${\psi^{\text{in}}}^{-1}\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ *et* $\varphi{\psi^{\text{out}}}\mathcal{G}^{u,\text{out}}$,
- C^u_{in} *ne contient pas la direction tangente à* $(\psi^{\text{in}})^{-1}_*\mathcal{G}^{s,\text{in}}$,
- C^u_{in} *est le champ de* $(\mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$*-cônes bissecteur sur* $P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_*$.

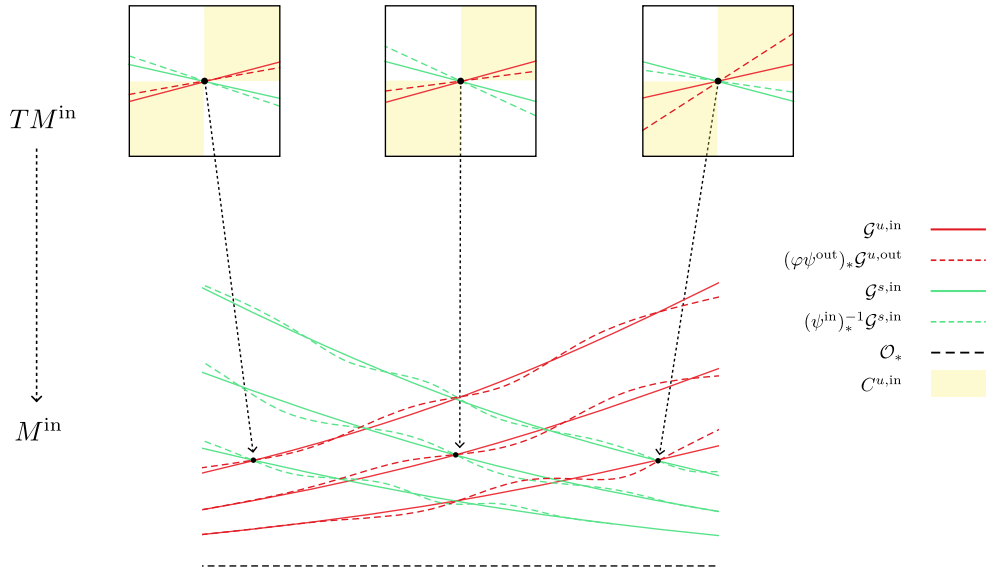


FIGURE 5.4 – Champs de cônes $C^{u,\text{in}}$ sur P^{in} au voisinage de $\mathcal{O}_*$

Commençons par montrer le lemme suivant.

Lemme 5.2.6. *Il existe un champ de cônes fermés C^u_{in} sur P^{in} tel que :*

- $\operatorname{int}(C^u_{\text{in}})$ *contient les directions tangentes à* $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ *et* $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$,
- C^u_{in} *ne contient pas la direction tangente à* $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$,
- C^u_{in} *est le champ de* $(\mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$*-cônes bissecteur sur* $P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_*$.

Démonstration du lemme 5.2.6. Rappelons que le recollement φ est normalisé pour le bloc normalisé (P, X) muni de la paire de feuilletages $(\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u)$. Par définition, le feuilletage $\varphi_*\mathcal{G}^{\text{b}}$ est quasi-transverse au feuilletage $\mathcal{G}^{\text{b}}$ sur ∂P, où $\mathcal{G}^{\text{b}} = \mathcal{G}^{s,\text{in}} \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{G}^{u,\text{out}}$ (item 2, définition 2.1.8). On en déduit que $\varphi_*(\mathcal{G}^{u,\text{out}})$ est transverse à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur P^{in}. De plus φ est la réflexion dans les systèmes de coordonnées normalisés $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$, ce qui implique que l'on a les égalités $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}} = \mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}} = \mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur $P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_*$. D'après cette remarque et par transversalité de $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ sur P^{in}, il existe un champ de cônes ouvert (fin) autour de la direction tangente à $\mathcal{G}^{s,\text{in}}$, qui ne contient ni la direction tangente à $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ ni la direction tangente à $\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$. De plus, on peut choisir ce champ de cônes bissecteur de $(\mathcal{G}^{s,\text{in}}/\mathcal{G}^{u,\text{in}})$ sur $P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_*$. Le champ de cônes C^u_{in} est le champ de cônes complémentaire. □

Corollaire 5.2.7. *Il existe $\hat{K} > 0$, $\hat{k} > 0$, $\hat{k}' > 0$, tel que le champ C^u_{in} :*

- *est inclus dans un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes,*
- *contient un champ de $(\hat{k},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes.*
- *contient un champ $(\hat{k}',\ \varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}/\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes.*

Démonstration. P^{in} n'est pas compact, mais sur $\mathcal{V}_* \cap P^{\text{in}}$, le champ C^u_{in} coïncide avec le champ de $(1,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}}) = (1,\ \varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}/\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes. Le complémentaire de ces voisinages est compact dans P^{in}, ce qui permet de conclure. □

On peut maintenant montrer le lemme 5.2.5.

Démonstration du lemme 5.2.5. D'après les propositions 4.1.2 et 4.1.3, on a

- $(\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{u,\text{in}} = \mathcal{G}^{u,\text{in}}$, et la direction tangente à $(\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est dans un champ de $(\epsilon,\ \mathcal{G}^{s,\text{in}}/\mathcal{G}^{u,\text{in}})$-cône.
- $(\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{s,\text{out}} = \varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}}$, et la direction tangente à $(\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ est à l'intérieur d'un champ de $(\varphi_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes d'ouverture uniformément proportionnelle à ϵ (la constante uniforme provient de l'action de φ qui est un difféomorphisme à support compact).

Soit C^u_{in} le champ de cônes donné par le lemme 5.2.6. D'après le corollaire 5.2.7, il suffit de choisir ϵ_0 petit devant $\hat{k}$ et $\hat{k}'$. □

Soit $\epsilon = \epsilon_0$ qui satisfait le lemme 5.2.5. Alors

Corollaire 5.2.8. *Il existe $K > 0$, $k > 0$, $k' > 0$, tel que pour tout $\lambda > 1, \delta > 0$, si $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon_0,\delta}$ et $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon_0,\delta}$, alors le champ C^u_{in} :*

- *est inclus dans un champ de $(K,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/(\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes,*
- *contient un champ de $(k,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/(\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes,*
- *contient un champ $(k',\ (\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}/\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des deux premiers items du lemme 5.2.5, qui dit que les directions tangentes $\mathcal{G}^{u,\text{in}} = (\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ et $(\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ sont incluses dans l'intérieur de C^u_{in} et la direction $(\psi^{\text{in}})_*^{-1}\mathcal{G}^{s,\text{in}}$ est partout disjointe de C^u_{in}. □

Le champ de cônes C^u_{in} contient les bonnes directions pour $\epsilon = \epsilon_0$, et pour tout choix de λ et δ. Il reste à montrer que l'on peut choisir λ assez grand de sorte que le champ C^u_{in} soit $f_{\text{in},\psi}$-invariant et ses vecteurs soit dilatés par $f_{\text{in},\psi}$ sur les bonnes zones, et ceci uniformément en δ. On renvoie à la figure 5.5 pour une image de l'action de $f_{\text{in},\psi}$ sur le champ de cônes C^u_{in}.

Démonstration de la proposition 5.2.1. On fixe C^u_{in} donné par le lemme 5.2.5. L'item 1 de la proposition 5.2.1 est satisfait d'après le corollaire 5.2.8 et soit $K > 0$ et $k' > 0$ les constantes du corollaire. Soit $\text{cst} > 0$ une constante qui satisfait le corollaire 5.2.3. Alors pour λ grand devant $\text{cst}^{-1} K k^{-1}$, le champ C^u_{in} est strictement invariant par $f_{\text{in},\psi}$ et ses vecteurs sont uniformément dilatés sur $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta) \cap f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$, et ceci uniformément en δ. La preuve pour l'existence d'un champ de cônes stable C^s_{in} est symétrique. □

On fixe les paramètres λ_0, ϵ_0 et une paire de champ de cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ satisfaisant la proposition 5.2.1.

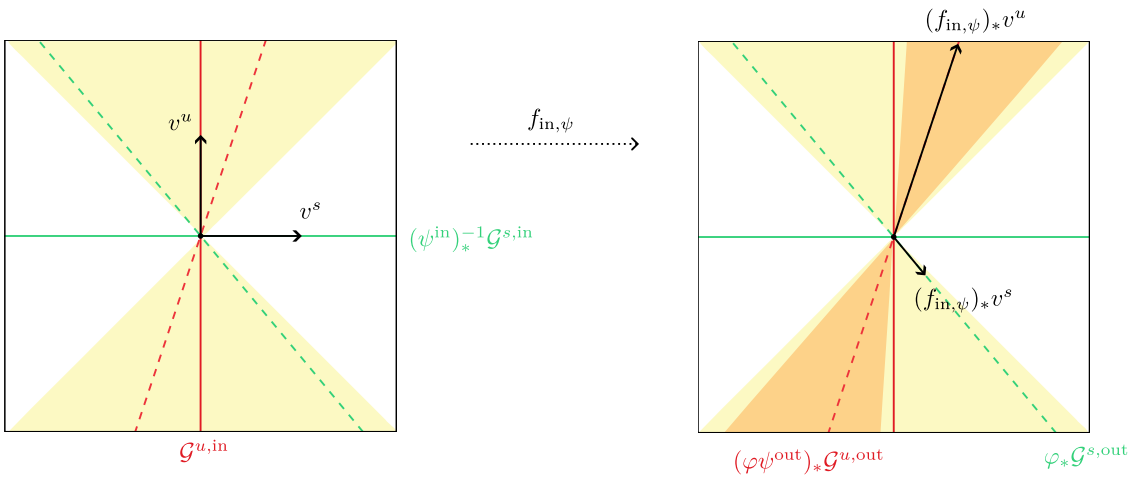


FIGURE 5.5 – Directions dans le champs de cônes C^u_{in} et image par $f_{\text{in},\psi}$

5.3 Cônes sur Σ et entier N_Σ

Dans cette section on montre l'existence des champs de cônes sur Σ qui permettront d'obtenir l'item 6, et qui déterminent un entier N_Σ qui satisfait l'item 5 de la proposition 5.1.4. On rappelle que l'item 6 concerne les points $p \in \Sigma_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte une première fois P^{in}_ψ en $q = f^n_{0,\psi}(p)$, et l'item 5 concerne les points $p \in \Sigma_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte n fois consécutives Σ_ψ. On rappelle que les paramètres $\lambda = \lambda_0$ et $\epsilon = \epsilon_0$ ont été fixés à la section précédente 5.2, ainsi que les champs de cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in}. Les résultats seront uniformes en δ. On étudie les applications :

$$f^i_\Sigma \colon \Sigma \to \Sigma, \qquad \text{et} \qquad \varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_\Sigma \colon \Sigma \to P^{\text{in}}$$

On rappelle que Σ est une section affine de (P, X) (définition 2.1.2, item 1). Quitte à restreindre Σ, il existe un système de coordonnées sur Σ dans lesquelles l'application $f_\Sigma \colon \Sigma \to \Sigma$ est affine diagonale hyperbolique, partout où elle est bien définie. On note $T\Sigma = E^{uu} \oplus E^{ss}$ la décomposition hyperbolique de f sur Σ, et (ζ^s, ζ^u) la paire de feuilletages stables et instables de f_Σ sur Σ. La métrique g_Σ induite par la métrique ambiante g sur Σ est adaptée à la décomposition hyperbolique de f_Σ.

Notation 5.3.1. On note $\mu > 1$ un facteur uniforme de dilatation de f_Σ, autrement dit tel que

- pour tout $v \in E^{uu}$, $n \geq 0$, $\|(f_\Sigma)_* v\| \geq \mu^n \|v\|$
- pour tout $v \in E^{ss}$, $n \geq 0$, $\|(f_\Sigma)_*^{-1} v\| \geq \mu^n \|v\|$

Il s'ensuit que n'importe quel champ de cônes fermés C^u d'ouverture constante dont l'intérieur $\operatorname{int} C^u$ contient la direction E^{uu} et disjoint de la direction E^{ss} est strictement invariant sous l'action de f_Σ (au premier itéré) et ses vecteurs sont uniformément dilatés par un itéré (uniformément) assez grand f^n_Σ, qui dépend de l'ouverture du cône. Autrement dit, on a :

Fait 5.3.2. *Pour tout K, si C^u est un champ de $(K,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes sur Σ, alors*

1) $(f_\Sigma)_* C^u$ est inclus dans un champ de $(K\mu^{-2},\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes,

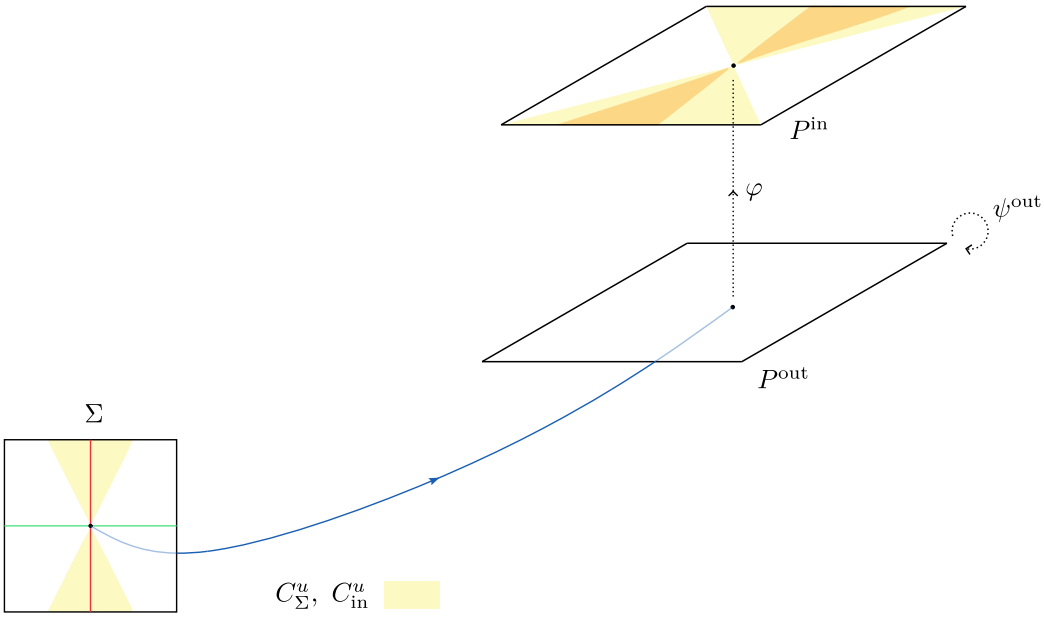


FIGURE 5.6 – Image (en foncé) d'un cône de C^u_Σ par l'application $\varphi\,\psi^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f^n_\Sigma$

2) il existe une constante $\text{cst} = \text{cst}(K) > 0$ *tel que* $\forall v \in C^u$, $\forall n \geq 0$, $\|(f^n_\Sigma)_* v\| \geq \text{cst}\,\mu^n \|v\|$.

Si C^s est un champ de $(K,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes sur Σ, alors

1) $(f_\Sigma)^{-1}_* C^s$ est inclus dans un champ de $(K\mu^{-2},\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes,

2) il existe une constante $\text{cst} = \text{cst}(K) > 0$ *tel que* $\forall v \in C^s$, $\forall n \geq N$, $\|(f^n_\Sigma)^{-1}_* v\| \geq \text{cst}\,\mu^n \|v\|$.

On va choisir l'ouverture K d'un champ C^u_Σ de (ζ^u/ζ^s)-cônes telle que l'on a une compatibilité des cônes sur Σ et des cônes sur P^{in} pour la composée $\varphi\,\psi^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f^n_\Sigma$, pour un $n \geq 0$ quelconque, lorsqu'elle est bien définie (figure 5.6). Il suffira ensuite de choisir un itéré de f_Σ assez grand pour que les vecteurs de C^u_Σ soient uniformément dilatés. On note $\psi^{\text{in}}_\delta = \psi^{\text{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta}$ et $\psi^{\text{out}}_\delta = \psi^{\text{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta}$.

Lemme 5.3.3. *Il existe $K^u > 0$ et $K^s > 0$ tel que si C^u_Σ est un champ de $(K^u,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes et C^s_Σ un champ de $(K^s,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes sur Σ, alors ils vérifient la propriété suivante.*
Pour tout $\delta > 0$, si $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_\delta$, et pour tout $p \in \Sigma$ tel que le point $q = \varphi\,\psi^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f^n_\Sigma(p) \in P^{\text{in}}$ est bien défini pour un certain entier $n \geq 0$, alors :

- $(\varphi\,\psi^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f^n_\Sigma)_* C^u_\Sigma(p) \subset \text{int}\,C^u_{\text{in}}(q)$, *et*
- $(\varphi\,\psi^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f^n_\Sigma)^{-1}_* C^s_{\text{in}}(q) \subset \text{int}\,C^s_\Sigma(p)$

Remarque 5.3.4. On ne requiert pas que les champs C^s_Σ et C^u_Σ soit complémentaires l'un de l'autre. Pour que le lemme soit vrai, l'ouverture K^s de C^s_Σ sera grande devant 1, et les deux champ de cônes peuvent avoir une intersection importante. Le point important de ce lemme est que l'ouverture K^s et K^u est indépendante de δ.

On rappelle que l'application $f_{\text{out},\Sigma} : \Sigma \to P^{\text{out}}$ est le passage du flot de X de la section Σ à P^{out}. Afin de montrer ce lemme il faut montrer que l'on garde un contrôle sur l'ouverture des cônes lorsque l'on applique $f_{\text{out},\Sigma} : \Sigma \to P^{\text{out}}$. C'est le lemme suivant, qui est symétrique pour $f_{\text{out},\Sigma}$ et $f_{\Sigma,\text{in}}$.

Lemme 5.3.5. *Il existe une constante* $\mathrm{cst} > 0$ *tel que pour tout* $K > 0$,

- *si* C^u *est un champ de* $(K,\ \zeta^u/\zeta^s)$*-cône sur* Σ*, alors* $(f_{\mathrm{out},\Sigma})_* C^u$ *est inclus dans un champ de* $(\mathrm{cst}\, K,\ \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}/\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}})$*-cônes sur* P^{out}.
- *si* C^s *est un champ de* $(K,\ \mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}/\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}})$*-cônes sur* P^{out}*, alors* $(f_{\mathrm{out},\Sigma})_*^{-1} C^s$ *est inclus dans un champ de* $(\mathrm{cst}\, K,\ \zeta^s/\zeta^u)$*-cônes sur* Σ.

De même,

- *si* C^u *est un champ de* $(K,\ \mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}/\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}})$*-cônes sur* P^{in}*, alors* $(f_{\Sigma,\mathrm{in}})_* C^u$ *est inclus dans un champ de* $(\mathrm{cst}\, K,\ \zeta^u/\zeta^s)$*-cônes sur* Σ.
- *si* C^s *est un champ de* $(K,\ \zeta^s/\zeta^u)$*-cône sur* Σ*, alors* $(f_{\Sigma,\mathrm{in}})_*^{-1} C^s$ *est inclus dans un champ de* $(\mathrm{cst}\, K,\ \mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}/\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}})$*-cônes sur* P^{out}.

On se contentera de montrer le résultat pour $f_{\mathrm{out},\Sigma}$. Ce résultat n'est pas trivial car P^{out} n'est pas uniformément transverse au champ de vecteurs, donc la projection $TP \to TP^{\mathrm{out}}$ parallèlement à $\mathbb{R}.X$ a un effet non borné sur la norme des vecteurs. Le point clé est que la surface P^{out} est invariante par une symétrie qui échange les directions stable forte E^{ss} et instable forte E^{uu} dans un voisinage de $\mathcal{O}_*$. Il en résulte que l'effet de la projection sur la norme des vecteurs de E^{uu} et de E^{ss} est le même, ce qui assure que l'ouverture d'un (E^{uu}/E^{ss})-cône est préservée.

Démonstration du lemme 5.3.5. Montrons le premier item. Le preuve des autres sont analogues. Ce lemme concerne les orbites qui intersectent Σ, qui sont donc contenues dans le voisinage invariant $\hat{\mathcal{U}}$ sur lequel on a une décomposition hyperbolique $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ pour le flot de X (corollaire 3.2.3). Remarquons que le lemme est vrai pour toutes les orbites qui intersectent P^{out} en dehors des voisinages normalisés $\mathcal{V}_*$. En effet les sections Σ et $P^{\mathrm{out}} \setminus \mathcal{V}_*$ sont uniformément transverses au champ de vecteurs X, le flot de X est hyperbolique sur $\hat{\mathcal{U}}$, et les cônes en question sont uniformément loin de la direction centre stable. Il reste à le vérifier pour les orbites qui intersectent P^{out} dans système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i)$.

- Soit C^u un $(K,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cône sur Σ, et v un vecteur tangent à Σ en un point p. Alors $v = v^{uu} + v^{ss} + 0 \in E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ avec $\|v^{ss}\| \leq K\|v^{uu}\|$. Le transport par le flot (linéaire) X^t pendant un temps $t > 0$ contribue à dilater exponentiellement la composante v^{uu} et contracter exponentiellement la composante v^{ss}, et n'a pas d'effet sur la composante $v^X = 0$. Donc l'action de X^t contribue à fermer un champ de (E^{uu}/E^{ss})-cônes exponentiellement vite, autrement dit à contracter l'ouverture des cônes exponentiellement vite.
- Il suffit donc de regarder l'effet de la projection sur TP^{out} parallèlement à X d'un champ de $(K,\ E^{uu}/E^{ss})$-cônes transverses au champ X (inclus dans le plan $E^{uu} \oplus E^{ss}$) dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$. On note cette projection $\pi\colon E^{uu} \oplus E^{ss} \to TP^{\mathrm{out}}$. Dire que π envoie un $(K,\ E^{uu}/E^{ss})$-cône sur un $(K,\ \mathcal{G}^{u,\mathrm{out}}/\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}})$-cône est équivalent à dire que π envoie la décomposition $E^{uu} \oplus E^{ss}$ sur $T\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} \oplus T\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}}$ et que $|||\pi_{|E^{uu}}||| = |||\pi_{|E^{ss}}|||$. La première assertion est vraie car par définition on a $T\mathcal{G}^{u,\mathrm{out}} = (E^{uu} \oplus \mathbb{R}.X) \cap TP^{\mathrm{out}}$, et $T\mathcal{G}^{s,\mathrm{out}} = (E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X) \cap TP^{\mathrm{out}}$. La deuxième se montre avec l'argument suivant. Par définition d'un bloc normalisé (définition 2.1.2, item 4), les ensembles Σ, P^{out} et $\mathbb{R}.X$ sont invariants dans $\mathcal{V}_i$ par la symétrie $s\colon (x, y, \theta) \mapsto (y, x, \theta)$, donc on a la relation de commutation $\pi \circ s_* = s_* \circ \pi$. On a $\mathrm{Vect}(\partial_x) = E^{ss}$ et $\mathrm{Vect}(\partial_y) = E^{uu}$, et $s_* \partial_x = \partial_y$, donc s_* permute les directions E^{uu} et E^{ss}. Pour finir, s est une isométrie pour la métrique g qui coïncide avec $dx^2 + dy^2 + d\theta^2$ sur $\mathcal{V}_i$. On conclut en écrivant que $\pi_{|E^{uu}} = \pi \circ s_{*|E^{ss}} = s_* \circ \pi_{|E^{ss}}$. □

Pour mesurer l'action de ψ_δ^{out}, on a besoin des lemmes suivants. Le premier lemme dit que l'action de ψ_δ^{out} sur la distance à l'orbite est bornée uniformément en δ.

Lemme 5.3.6. *Il existe une constante* $\text{cst} > 1$ *tel que pour tout* $\delta > 0$,

- $\forall\, p \in P^{\text{out}},\ \ \text{cst}^{-1}\ \text{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \text{dist}(\psi_\delta^{\text{out}}(p), \mathcal{O}_*) \leq \text{cst}\ \text{dist}(p, \mathcal{O}_*)$;
- $\forall\, p \in P^{\text{in}},\ \ \text{cst}^{-1}\ \text{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \text{dist}(\psi_\delta^{\text{in}}(p), \mathcal{O}_*) \leq \text{cst}\ \text{dist}(p, \mathcal{O}_*)$

Démonstration. On montre le lemme pour ψ^{out}. Le difféomorphisme ψ_δ^{out} est indépendant du paramètre δ sur le complémentaire de l'union $\mathcal{V}_*$ (proposition 4.1.3, item 6). Le complémentaire de $\mathcal{V}_*$ dans P^{out} est compact, donc la propriété est vraie pour tout point $p \in P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{V}_*$. Il suffit de vérifier cette propriété dans un système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$. Soit (x, θ) les coordonnées induites par ξ_i sur P^{out}. Un point $p = (x, \theta)$ est dans l'adhérence d'une bande B composante connexe de $P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u$. D'après les items 1 et 2 de la proposition 4.1.3, le difféomorphisme ψ^{out} déplace le point p le long de l'arc de feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ à l'intérieur de B et ceci pour tout paramètre $\lambda, \epsilon, \delta$. Soit σ^s la feuille de $\mathcal{G}^{s,\text{in}} \cap B$ passant par $p = (x, \theta)$. Alors σ^s intersecte une des feuille bord de la bande B en un point (x_1, θ_1) avec $x_1 > x/\sqrt{2}$ et l'autre feuille bord de B en un point (x_2, θ_2) avec $x_2 < \sqrt{2}x$ (remarque 2.1.5). On en conclut que la variation de la coordonnée x d'un point $p \in B$ sous l'action de ψ^{out} est uniformément bornée. Il en est de même pour la distance à l'orbite $\mathcal{O}_i$. □

Le second lemme dit que les différentielles des applications ψ_δ^{out} et ψ_δ^{in} sont bornées uniformément en δ.

Lemme 5.3.7. *Il existe* $\text{cst} > 0$, *tel que pour tout* $\delta > 0$ *et pour tout* $v \in TP^{\text{out}}$,

$$\text{cst}^{-1}\, \|v\| \leq \|(\psi_\delta^{\text{out}})_* v\| \leq \text{cst}\ \|v\|,$$

de même pour tout $v \in TP^{\text{in}}$,

$$\text{cst}^{-1}\, \|v\| \leq \|(\psi_\delta^{\text{in}})_* v\| \leq \text{cst}\ \|v\|$$

Démonstration. On montre le lemme pour ψ^{out}. Soit (∂_u, ∂_s) une base de vecteurs unitaires tangents à $\mathcal{G}^{u,\text{out}}$ et $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ respectivement sur P^{out}. Le fait suivant est une conséquence directe de l'item 4 de la proposition 4.1.3 et du lemme 5.2.4.

Fait 5.3.8. *La norme de la matrice de* $(\psi_\delta^{\text{out}})_*$ *dans la base* (∂_u, ∂_s) *est uniformément (en* δ*) bornée.*

Ce fait ne suffit pas pour borner l'action de la différentielle car l'angle entre les vecteurs (∂_u, ∂_s) tend vers 0 à mesure que l'on s'approche d'une orbite périodique tangente. Si B est un champ de bases sur P^{out}, et $f\colon P^{\text{out}} \to P^{\text{out}}$ est un difféomorphisme, on note $M_B(d_p f)$ la matrice de la différentielle de la base de départ $B(p)$ sur $T_p P^{\text{out}}$ à la base arrivée $B(f(p))$ sur $T_{f(p)} P^{\text{out}}$. On note $M_{B,p}^{B'}$ la matrice de changement de base de la base B à la base B' sur $T_p P^{\text{out}}$.

On pose $B := (\partial_u, \partial_s)$ et B' une champ de bases orthonormées sur TP^{out}. On veut borner uniformément en δ l'opérateur

$$P^{\text{out}} \ni p \mapsto M_{B'}\left(d_p \psi_\delta^{\text{out}}\right) \in GL_2(\mathbb{R})$$

On a la relation de changement de base suivante dans $GL_2(\mathbb{R})$, où on note $q = \psi_\delta^{\text{out}}(p)$:

$$M_{B'}\left(d_p \psi_\delta^{\text{out}}\right) = M_{B,q}^{B'} \times M_B\left(d_p \psi_\delta^{\text{out}}\right) \times M_{B',p}^{B}$$

Comme l'opérateur $p \mapsto M_B(d_p\psi_\delta^{\text{out}})$ est borné sur P^{out} uniformément en δ (fait 5.3.8) , il suffit de montrer que $p \mapsto M_{B,q}^{B'} \times M_{B',p}^{B}$ est borné sur P^{out}. On peut supposer sans perte de généralité que le vecteur ∂_u est le premier vecteur de la base orthonormée B'. Donc le produit $M_{B,q}^{B'} \times M_{B',p}^{B}$ est une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de déterminant $\frac{\sin\theta_B(p)}{\sin\theta_B(q)}$, où $\sin\theta_B$ désigne le sinus de l'angle des vecteurs de la base B. On veut borner uniformément ce rapport. On compare donc l'angle $\measuredangle(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})$ au point $p \in P^{\text{out}}$ et au point $q = \psi_\delta^{\text{out}}(p)$.

$$\frac{\measuredangle(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})_p}{\measuredangle(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})_q} = \frac{\measuredangle(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})_p}{\text{dist}(p, \mathcal{O}_*)} \frac{\text{dist}(q, \mathcal{O}_*)}{\measuredangle(\mathcal{G}^{u,\text{out}}, \mathcal{G}^{s,\text{out}})_q} \frac{\text{dist}(p, \mathcal{O}_*)}{\text{dist}(\psi_\delta^{\text{out}}(p), \mathcal{O}_*)}$$

D'après le lemme 3.2.6 et le lemme 5.3.6, chacun de ces rapports est uniformément borné en δ. Comme expliqué ci-dessus, le lemme 5.3.7 en découle. □

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.3.9. *Il existe une constante $\hat{K}$, tel que pour tout δ,*

- $(\psi_\delta^{\text{in}})_* C_{\text{in}}^u$ *est inclus dans un champ de* $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / \mathcal{G}^{s,\text{in}})$*-cônes.*
- $(\varphi\psi_\delta^{\text{out}})_*^{-1} C_{\text{in}}^s$ *est inclus dans un champ de* $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{s,\text{out}} / \mathcal{G}^{u,\text{out}})$*-cônes.*

Démonstration. Montrons le premier item. La différentielle de ψ_δ^{in} est bornée uniformément en δ (lemme 5.3.7) et C_{in}^u est inclus dans un champ de $(K,\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / (\psi^{\text{in}})_*^{-1}(\mathcal{G}^{s,\text{in}}))$-cônes (proposition 5.2.1, item 1). Comme ψ_δ^{in} préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{u,\text{in}}$ (proposition 4.1.2, item 2), on en conclut que ψ_δ^{in} envoie C_{in}^u à l'intérieur d'un champ de $(\mathcal{G}^{u,\text{in}} / \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes d'ouverture majorée uniformément en δ.

Le deuxième item est similaire. Le champ C_{in}^s est inclus dans un champ de $(K,\ \varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}} / (\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes (proposition 5.2.1, item 1). Le difféomorphisme φ^{-1} est un difféomorphisme sur un compact donc il envoie un champ de $(K,\ \varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}} / (\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes de P^{in} à l'intérieur d'un champ de $(K',\ \mathcal{G}^{u,\text{out}} / \psi_*^{\text{out}}\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes où K' est une constante uniforme. D'après le lemme 5.3.7, la différentielle de $(\psi_\delta^{\text{out}})^{-1}$ est bornée sur P^{out} uniformément en δ. Comme $(\psi_\delta^{\text{out}})^{-1}$ préserve le feuilletage $\mathcal{G}^{s,\text{out}}$ (proposition 4.1.3, item 2), on en déduit qu'elle envoie un champ de $(K',\ \mathcal{G}^{u,\text{out}} / \psi_*^{\text{out}}\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes à l'intérieur d'un champ de $(\mathcal{G}^{s,\text{out}} / \mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes d'ouverture majorée uniformément en δ. □

On est maintenant en mesure de montrer le lemme 5.3.3.

Démonstration du lemme 5.3.3. Montrons l'existence du champ de cônes C_{in}^u. Les effets de la différentielle de $\varphi\,\psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}\, f_\Sigma^n$ sur l'ouverture d'un (ζ^u / ζ^s)-cône de Σ sont les suivants.

- f_Σ^n envoie un champ de $(K,\ \zeta^u / \zeta^s)$-cônes sur un champ de $(K,\ \zeta^u / \zeta^s)$-cônes pour $n \geq 0$ (fait 5.3.2)
- $f_{\text{out},\Sigma}$ envoie un champ de $(K,\ \zeta^u / \zeta^s)$-cônes sur Σ à l'intérieur d'un champ de $(\mathcal{G}^{u,\text{out}} / \mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes, d'ouverture $K_1 \leq \text{cst}\, K$ sur P^{out} (lemme 5.3.5)
- La différentielle de $\varphi\psi^{\text{out}}$ est bornée sur P^{out} uniformément en δ (lemme 5.3.7), donc qu'elle envoie un champ de $(K_1, \mathcal{G}^{u,\text{in}}, \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes à l'intérieur d'un champ de $(K_2,\ (\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}} / \varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes sur P^{in}, $K_2 \leq \text{cst}\, K_1$ et la constante est uniforme en δ.

En résumé, un champ de $(K,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cône sur Σ est envoyé par $\varphi\,\psi_\delta^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f_\Sigma^n$ à l'intérieur d'un champ de $(K',\ (\varphi\psi^{\text{out}})_*\mathcal{G}^{u,\text{out}}/\varphi_*\mathcal{G}^{s,\text{out}})$-cônes sur P^{out}, avec $K' \leq \text{cst}\,K$, où la constante est uniforme en $\delta > 0$. Pour finir, d'après l'item 1 proposition 5.2.1, il suffit de choisir C_Σ^u un champ de $(K^u, \zeta^u/\zeta^s)$-cônes d'ouverture K^u assez petite (devant la constante k' donnée par la proposition).

L'existence du champ C_{in}^s se montre de façon symétrique, et requiert de choisir un champ de $(K^s,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes d'ouverture K^s assez grande. En effet :

- $(\varphi\psi^{\text{out}})^{-1}$ envoie C_{in}^s à l'intérieur d'un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{s,\text{out}}/\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes (lemme 5.3.9)
- $f_{\text{out},\Sigma}^{-1}$ envoie un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{s,\text{out}}/\mathcal{G}^{u,\text{out}})$-cônes sur P^{out} à l'intérieur d'un champ de $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes sur Σ, $K_1 \leq \text{cst}\,\hat{K}$ (lemme 5.3.5)
- f_Σ^{-n} envoie un champ de $(K_1,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes sur un champ de $(K_1,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes pour $n \geq 0$ (fait 5.3.2).

En résumé, le champ C_{in}^s est envoyé par $(\varphi\,\psi_\delta^{\text{out}}\,f_{\text{out},\Sigma}\,f_\Sigma^n)^{-1}$ à l'intérieur d'un champ de $(K',\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes sur Σ, où K' est une constante uniforme en $\delta > 0$. Il suffit donc de choisir $K^s = K'$ et C_Σ^s est le champ de $(K^s,\ \zeta^s/\zeta^u)$-cônes. □

On fixe une paire de champs de cônes (C_Σ^u, C_Σ^s) sur Σ qui satisfait le lemme 5.3.3. Les champs de cônes C_Σ^u et C_Σ^s sont d'ouverture constante K^u et K^s. Le corollaire suivant (illustré par la figure 5.7) découle directement du fait 5.3.2.

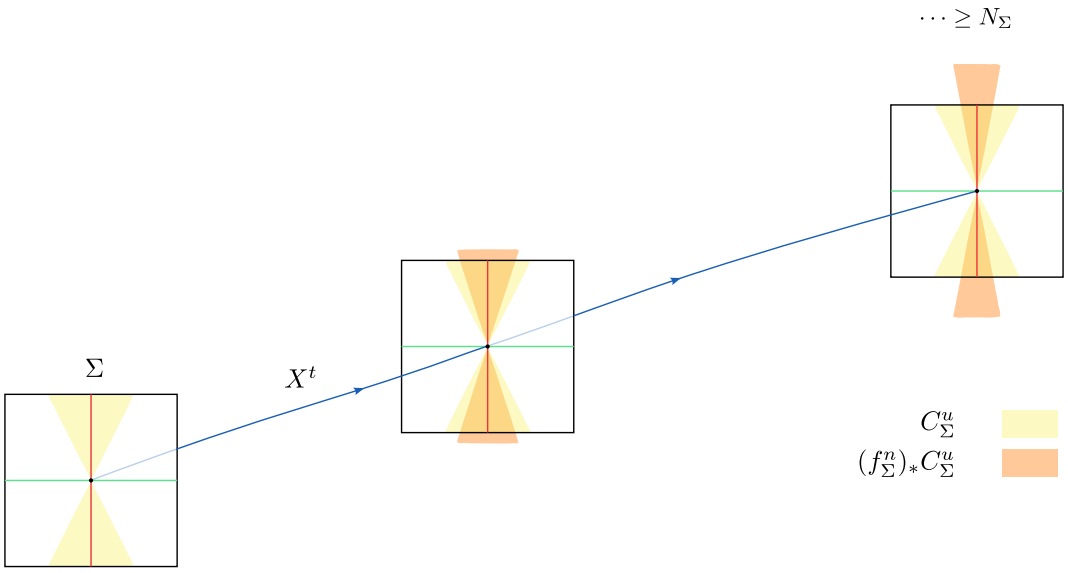


FIGURE 5.7 – Image d'un cône de C_Σ^u par les itérés f_Σ^n

Corollaire 5.3.10. *Il existe un entier $N_\Sigma \geq 0$ tel que*

– $(f_\Sigma)_* C_\Sigma^u \subset \text{int}\, C_\Sigma^u$, *et* $\forall v \in C_\Sigma^u,\ \forall n \geq N_\Sigma,\ \|(f_\Sigma^n)_* v\| \geq 2\|v\|$,

– $(f_\Sigma)_*^{-1} C_\Sigma^s \subset \text{int}\, C_\Sigma^s$, *et* $\forall v \in C_\Sigma^s,\ \forall n \geq N_\Sigma,\ \|(f_\Sigma^n)_*^{-1} v\| \geq 2\|v\|$

On fixe un entier N_Σ qui satisfait le corollaire 5.3.10.

5.4 Entier N_0

Dans cette section, on montre l'existence d'un entier N_0 qui permettra d'obtenir les items 7 et 4 de la proposition 5.1.4 et ceci uniformément en δ. On rappelle que l'item 7 concerne les points $p \in \Sigma_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte une unique fois P^{in}_ψ puis N_0 de fois consécutives Σ_ψ, et l'item 4 concerne les points $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte une unique fois $(P^{\text{in}} \cap \hat{\mathcal{V}}_\delta)_\psi$ puis N_0 fois consécutives Σ_ψ.

Soit $p \in \Sigma$ et $i, j \geq 0$ tel que l'application suivante est bien définie au voisinage de p :

$$f_\Sigma^j \, f_{\Sigma,\text{in}} \, \psi_\delta \, f_{\text{out},\Sigma} \, f_\Sigma^i(p) \colon \Sigma \to \Sigma$$

On cherche un entier N_0, tel que si $j \geq N_0$, l'application composée ci-dessus vérifie la condition des champs de cônes sur Σ pour la paire (C^u_Σ, C^s_Σ). On sait que les itérés de f_Σ contribuent à fermer un cône instable et dilater ses vecteurs exponentiellement (fait 5.3.2). On va montrer un résultat (lemme 5.4.2) qui minore la contraction de l'application composée $f_{\Sigma,\text{in}} \, \psi_\delta \, f_{\text{out},\Sigma} \colon \Sigma \to \Sigma$ sur les vecteurs de C^u_Σ et sur l'ouverture d'un (ζ^u / ζ^s)-cône, et ceci uniformément en δ. Commençons par estimer l'effet du passage $f_{\text{out},\Sigma} \colon \Sigma \to P^{\text{out}}$ et $f_{\Sigma,\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to \Sigma$.

Lemme 5.4.1. *Il existe une constante* $\text{cst} > 0$ *avec la propriété suivante.*

- *Si* $p \in \Sigma$ *tel que* $q = f_{\text{out},\Sigma}(p) \in P^{\text{out}}$ *est bien défini, alors pour tout* $v \in T_p\Sigma$

$$\text{cst}^{-1} \, \text{dist}(q, \mathcal{O}_*)^{-1} \leq \frac{\|(f_{\text{out},\Sigma})_* v\|}{\|v\|} \leq \text{cst} \, \text{dist}(q, \mathcal{O}_*)^{-1}$$

- *Si* $p \in P^{\text{in}}$ *tel que* $q = f_{\Sigma,\text{in}}(p) \in \Sigma$ *est bien défini, alors pour tout* $v \in T_p P^{\text{in}}$

$$\text{cst}^{-1} \, \text{dist}(p, \mathcal{O}_*) \leq \frac{\|(f_{\Sigma,\text{in}})_* v\|}{\|v\|} \leq \text{cst} \, \text{dist}(p, \mathcal{O}_*)$$

Démonstration. Soit $p \in \Sigma$ et $v \in T_p\Sigma$. Soit $\tau = \tau(p)$ le temps tel que $X^\tau(p) = f_{\text{out},\Sigma}(p) = q \in P^{\text{out}}$. Comme le segment de X-orbite $]p, q[$ est disjoint de Σ, le temps τ est uniformément borné (lemme 3.2.2 avec $\mathcal{U} \subset \cup_{t=0}^1 \Sigma$). Soit $\pi \colon TP \to TP^{\text{out}}$ la projection sur TP^{out} parallèlement à $\mathbb{R}.X$. On a $(f_{\text{out},\Sigma})_* \, v = \pi(X^\tau_* v)$. Comme le temps τ est borné, la norme $\|X^\tau_* v\|$ et l'angle $\measuredangle(X^\tau_* v, X)_q$ sont proportionnels à respectivement la norme $\|v\|$ et l'angle $\measuredangle(X, v)_p$, et la constante de proportionnalité est uniforme en p. D'après cette observation et d'après le fait général 3.2.5, il existe une constante $\text{cst} > 0$ uniforme tel que

$$\text{cst}^{-1} \left| \frac{\sin \measuredangle(v, X)_p}{\sin \measuredangle(f_{\text{out},\Sigma})_* v, X)_q} \right| \leq \frac{\| \, (f_{\text{out},\Sigma})_* \, v \|}{\|v\|} \leq \text{cst} \left| \frac{\sin \measuredangle(v, X)_p}{\sin \measuredangle(f_{\text{out},\Sigma})_* v, X)_q} \right|$$

D'autre part, par uniforme transversalité on sait que l'angle entre un vecteur $v \in T\Sigma$ et X est uniformément borné, et que l'angle entre un vecteur $v \in T_q P^{\text{out}}$ et X est minoré par un facteur uniformément proportionnel à la distance $\text{dist}(\cdot, \mathcal{O}_*)$ (lemme 3.2.6). On en déduit l'existence d'une constante tel que

$$\frac{\text{cst}^{-1}}{\text{dist}(q, \mathcal{O}_*)} \leq \frac{\| \, (f_{\text{out},\Sigma})_* \, v \|}{\|v\|} \leq \frac{\text{cst}}{\text{dist}(q, \mathcal{O}_*)}$$

Les mêmes arguments appliqués à $f^{-1}_{\Sigma,\text{in}}$ permettent de démontrer le deuxième item. □

Le lemme suivant borne uniformément en δ la différentielle de la composée $f_{\Sigma,\text{in}} \, \psi_\delta \, f_{\text{out},\Sigma}$ (lorsqu'elle est bien définie) et son action sur l'ouverture du champ de cônes C^u_Σ et C^s_Σ.

Lemme 5.4.2.

1) Les différentielles de $f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi_\delta\,f_{\mathrm{out},\Sigma}\colon \Sigma \to \Sigma$ sont bornées uniformément en δ.

2) Il existe une constante $K > 0$ uniforme en δ tel que

- *$(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi_\delta\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* C^u_\Sigma$ est à l'intérieur d'un champ de $(K, \zeta^u/\zeta^s)$-cônes*
- *$(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi_\delta\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_*^{-1} C^s_\Sigma$ est à l'intérieur d'un champ de $(K, \zeta^s/\zeta^u)$-cônes*

Démonstration. Posons $\psi = \psi_\delta$. Soit $p \in \Sigma$ tel que $q = f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma} \in \Sigma$ est bien défini. Écrivons

$$\frac{\|(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|v\|} = \underbrace{\frac{\|(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|(\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}}_{(a)}\ \underbrace{\frac{\|(\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|(f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}}_{(b)}\ \underbrace{\frac{\|(f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|v\|}}_{(c)}$$

Notons $p_1 = f_{\mathrm{out},\Sigma}(p) \in P^{\mathrm{out}}$ et $p_2 = \psi(p_1) \in P^{\mathrm{in}}$. Il existe une constante $\mathrm{cst} > 0$ tel que

- d'après le lemme 5.4.1 : $\mathrm{cst}^{-1}\,\mathrm{dist}(p_2, \mathcal{O}_*) \leq (a) \leq \mathrm{cst}\,\mathrm{dist}(p_2, \mathcal{O}_*)$;
- d'après le lemme 5.3.7 : $\mathrm{cst}^{-1} \leq (b) \leq \mathrm{cst}$;
- d'après le lemme 5.4.1 : $\mathrm{cst}^{-1}\,\mathrm{dist}(p_1, \mathcal{O}_*)^{-1} \leq (c) \leq \mathrm{cst}\,\mathrm{dist}(p_1, \mathcal{O}_*)^{-1}$.

Donc quitte à changer la constante, on a

$$\mathrm{cst}^{-1}\,\frac{\mathrm{dist}(p_2, \mathcal{O}_*)}{\mathrm{dist}(p_1, \mathcal{O}_*)} \leq \frac{\|(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|v\|} \leq \mathrm{cst}\,\frac{\mathrm{dist}(p_2, \mathcal{O}_*)}{\mathrm{dist}(p_1, \mathcal{O}_*)}$$

Comme $p_2 = \psi(p_1)$, d'après le lemme 5.3.6, quitte à changer la constante, on a

$$\mathrm{cst}^{-1} \leq \frac{\|(f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma})_* v\|}{\|v\|} \leq \mathrm{cst}\,.$$

Et la constante est uniforme en δ.

Montrons le deuxième item. On prouve seulement l'affirmation concernant l'image du champ de cônes C^u_Σ, celle pour C^s_Σ étant symétrique.

- On sait d'après le lemme 5.3.3 que la composée $\varphi\psi^{\mathrm{out}} f_{\mathrm{out},\Sigma}\colon \Sigma \to P^{\mathrm{in}}$ envoie C^u_Σ à l'intérieur de C^u_{in}, et ceci pour tout δ.
- La différentielle de $\psi^{\mathrm{in}}_\delta$ est bornée uniformément en δ (lemme 5.3.7) et C^u_{in} est inclus dans un champ de $(K,\ \mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}/\,(\psi^{\mathrm{in}})_*^{-1}(\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}}))$-cônes (proposition 5.2.1, item 1). Comme $\psi^{\mathrm{in}}_\delta$ préserve $\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}$, on en déduit que $\psi^{\mathrm{in}}_\delta$ envoie C^u_{in} à l'intérieur d'un champ de $(\mathcal{G}^{u,\mathrm{in}}/\,\mathcal{G}^{s,\mathrm{in}})$-cônes d'ouverture majorée uniformément en δ.
- En utilisant le lemme 5.3.5, on en déduit que le passage $f_{\Sigma,\mathrm{in}}$ envoie le champ de cônes $\psi^{\mathrm{in}}_* C^u_{\mathrm{in}}$ à l'intérieur d'un champ de (ζ^u/ζ^s)-cônes sur Σ d'ouverture majorée uniformément en δ. □

On rappelle que l'on étudie la composée (lorsqu'elle est bien définie) $f^j_\Sigma\,f_{\Sigma,\mathrm{in}}\,\psi\,f_{\mathrm{out},\Sigma}\,f^i_\Sigma$. On peut maintenant démontrer l'existence de l'entier N_0 uniforme en δ tel que cette composée vérifie la condition des cônes invariants pour la paire (C^u_Σ, C^s_Σ) sur Σ pour $j \geq N_0$. C'est le corollaire suivant.

Corollaire 5.4.3. *Il existe N_0 tel que pour tout $\delta > 0$, si $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i$ est bien définie en $p \in \Sigma$ pour un certain $i \geq 0$ et $j \geq N_0$, alors, en notant q l'image de p,*

- $\left(f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\right)_*$ *envoie $C_\Sigma^u(p)$ à l'intérieur de $C_\Sigma^u(q)$ et dilate la norme des vecteurs $v \in C_\Sigma^u(p)$ d'un facteur 2,*
- $\left(f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\right)_*^{-1}$ *envoie $C_\Sigma^s(q)$ à l'intérieur de $C_\Sigma^s(p)$ et dilate la norme des vecteurs $v \in C_\Sigma^s(q)$ d'un facteur 2*

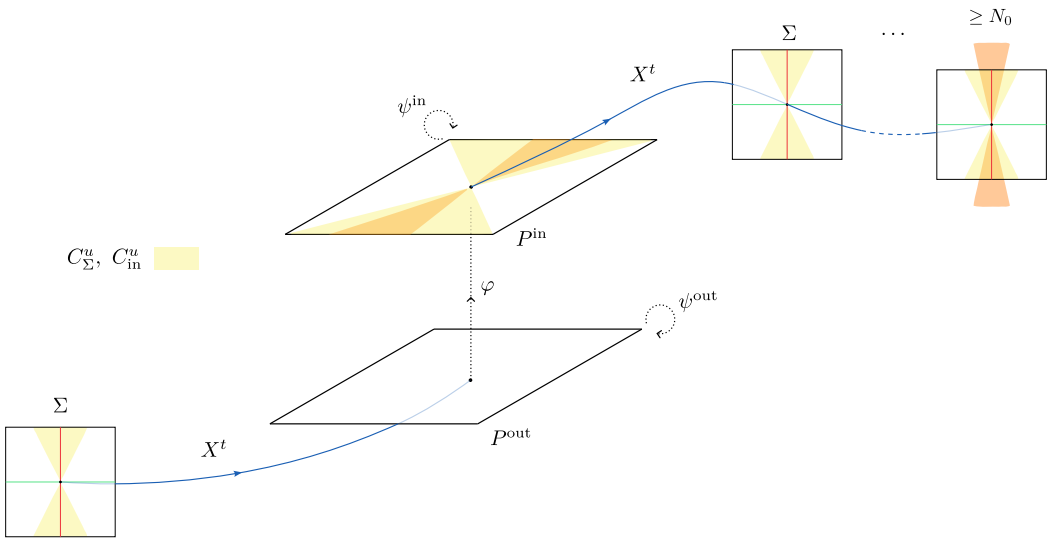


FIGURE 5.8 – Image d'un cône de C_Σ^u par l'application $f_\Sigma^{N_0}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i$

Démonstration. On décompose $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i$ en trois morceaux :

- f_Σ^i laisse les cônes C_Σ^u invariants et ne contracte par les vecteurs de C_Σ^u pour $i \geq 0$ (corollaire 5.3.10)
- D'après le lemme 5.4.2 l'application $f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}$ envoie C_Σ^u sur un (ζ^u/ζ^s)-cône sur Σ, d'ouverture uniformément majorée, et contracte les vecteurs de C_Σ^u d'un facteur uniformément minoré, et les constantes sont uniformes en δ.
- Si j est arbitrairement grand alors f_Σ^j envoie un champ de (ζ^u/ζ^s)-cônes d'ouverture majorée à l'intérieur d'un champ de (ζ^u/ζ^s)-cônes d'ouverture arbitrairement petite, et dilate arbitrairement fort ses vecteurs (fait 5.3.2).

On en déduit l'existence de N_0 qui satisfait le premier item si $j \geq N_0$. Le preuve du deuxième item est symétrique. □

Montrons que la composée $f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ restreinte à $P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ au départ et $\Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$ à l'arrivée a une contraction minorée sur les vecteurs de C_{in}^u uniformément en δ, et contribue à fermer les champs de (ζ^u/ζ^s)-cônes. On renvoie à la figure 5.9 pour le schéma d'une telle orbite.

Lemme 5.4.4. *Il existe une constante* $\mathrm{cst} > 0$ *telle que pour tout $\delta > 0$ assez petit, si $\psi^{\mathrm{in}} = \psi_\delta^{\mathrm{in}}$, pour tout $p \in P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ tel que il existe $n \geq 1$ tel que l'image $q = f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}(p) \in \Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$ est bien définie, alors*

– $(f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_* C^u_{\mathrm{in}}(p) \subset \operatorname{int} C^u_\Sigma(q)$, *et* $\forall\, v \in C^u_{\mathrm{in}}(p)$, $\|(f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_* v\| \geq \mathrm{cst}\, \|v\|$

– $(f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_*^{-1} C^s_\Sigma(q), \subset \operatorname{int} C^s_{\mathrm{in}}(p)$, *et* $\forall v \in C^s_\Sigma(q)$, $\|(f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_*^{-1} v\| \geq \mathrm{cst}\, \|v\|$

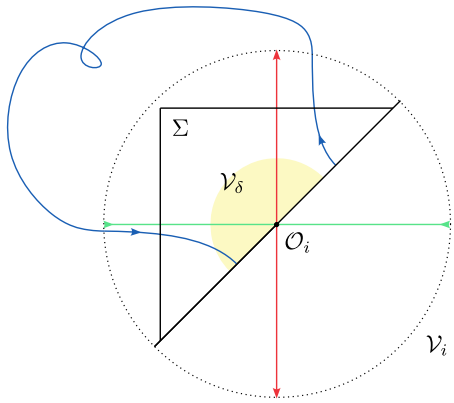


FIGURE 5.9 – Trajectoire d'une orbite d'un point $p \in P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ qui intersecte $\Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$

Démonstration. Montrons le premier item, la preuve du deuxième étant similaire. Pour ne pas introduire de nouvelles constantes, on peut supposer que chaque voisinage normalisé $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ contient un 1-voisinage de $\mathcal{O}_i$. On note $\mathcal{V}_1$ l'union des 1-voisinages de $\mathcal{O}_i$ dans $\mathcal{V}_i$. La preuve repose sur les points clés suivants.

- La différentielle de $f_{\Sigma,\mathrm{in}}$ est minorée par un facteur uniformément proportionnel à $\mathrm{dist}(\cdot, \mathcal{O}_*)$ d'après 5.4.1, donc minoré par δ sur $P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$.
- L'orbite de tout point $p \in P^{\mathrm{in}}$ sort d'un 1-voisinage de $\mathcal{O}_*$ avant de sortir de P.
- Le nombre n de passages par Σ de l'orbite d'un point qui traverse de $\mathcal{V}_1(\mathcal{O}_i)$ à $\mathcal{V}_\delta(\mathcal{O}_i)$ est de l'ordre de $\log_2(\delta^{-1})$. L'itéré correspondant f_Σ^n de l'application de retour sur Σ dilate la norme des vecteurs $v \in E^{uu}$ d'un facteur minoré par δ^{-1} (à une constante multiplicative uniforme près), ce qui compensera la contraction de $f_{\Sigma,\mathrm{in}}$.

Insistons sur le fait qu'on aura une compensation exacte d'un effet contractant d'ordre δ et d'un effet dilatant d'ordre δ^{-1}. La contraction de la composée $f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$ sera donc minorée par une constante *indépendante de* δ. Énoncons formellement les deux derniers items. Soit l le diamètre minimum des disques de la section Σ et $0 < \delta < l$.

Fait 5.4.5. *Soit $p \in P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$. Alors il existe $T \geq 0$ tel que pour tout $t \leq T$, $X^t(p) \in P \setminus \mathcal{V}_\delta$ et $X^T(p) \in P \setminus \mathcal{V}_1$.*

Démonstration. Si $p \in P^{\mathrm{in}} \setminus \mathcal{V}_1$, le fait est vrai pour $T = 0$. Sinon, $p \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_i$, où $\mathcal{V}_i$ est le voisinage normalisé de l'orbite $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ pour un certain i, muni des coordonnées $\xi_i = (x, y, \theta)$. On a $p = (x, x, \theta)$, avec $|x| > \delta$ et $X^t(x, y, \theta) = (2^{-t}x, 2^t x, \theta + t)$. La distance de $X^t(p)$ à l'orbite $\mathcal{O}_i$ est donc minorée par $2^t\delta$. On en déduit que l'orbite de p sort de $\mathcal{V}_1$ en temps $t = \log_2(\delta^{-1})$ sans passer par $\mathcal{V}_\delta$. □

Fait 5.4.6. *Soit $q \in \Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$ tel qu'il existe $T \geq 0$ vérifiant $X^{-T}(q) \in P \setminus \mathcal{V}_1$. Alors le segment d'orbite $[X^{-T}(q), q]$ intersecte la section Σ un nombre $n_0 \geq \log_2(l\delta^{-1}) - 1$ de fois dans un voisinage normalisé $\mathcal{V}_j$ de $\mathcal{O}_j$.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{V}_j, \xi_j)$ un système de coordonnées normalisé de $\mathcal{O}_j \in \mathcal{O}_*$ tel que $q \in \mathcal{V}_j$. Soit $\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_j$ le δ-voisinage de $\mathcal{O}_j$. Par définition de l, et d'après la définition 2.1.2, item 4, la section Σ contient l'ensemble $R_l := \{\theta = 0,\ |x| \leq l,\ |y| \leq l\}$. Soit $q = (x, y, \theta)$ avec $x^2+y^2 \leq \delta^2$ et on a $X^{-t}(p) = (2^t x, 2^{-t} y, \theta - t)$ pour $t \geq 0$. Alors l'orbite négative $X^{-t}(p)$ intersecte l'ensemble $R_l \subset \Sigma$ un nombre supérieur à $n = \log_2(l\delta^{-1}) - 1$ de fois avant de sortir de $\mathcal{V}_1$. □

Soit $p \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ tel que $q = f_\Sigma^n f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}(p)$ est bien définie dans $\Sigma \cap \mathcal{V}_\delta$. D'après le fait 5.4.5 l'orbite de p sort d'un 1-voisinage en un point $p' = X^T(p)$. D'après le fait 5.4.6, le segment d'orbite de p' à q intersecte n_0 fois la section Σ dans un voisinage normalisé $\mathcal{V}_j$ d'une orbite $\mathcal{O}_j \in \mathcal{O}_*$. On peut écrire au voisinage de p,

$$f_\Sigma^n f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}} = f_\Sigma^{n_0} f_\Sigma^{n-n_0} f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}$$

avec $n - n_0 \geq 0$ et l'application $f_\Sigma^{n_0}$ est l'itéré n_0 de la restriction de f_Σ à $\Sigma \cap \mathcal{V}_j$. On peut étudier l'effet de chaque application de la composée $f_\Sigma^n f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}$ au voisinage d'un point $p \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$.

1) Le difféomorphisme ψ_δ^{in} envoie C_{in}^u à l'intérieur d'un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes, où $\hat{K}$ est une constante uniforme en δ (lemme 5.3.9). Sa différentielle est minorée par une constante cst uniforme en δ (lemme 5.3.7).

2) Le passage $f_{\Sigma,\text{in}}$ envoie un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}} / \mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes à l'intérieur d'un champ de (ζ^u / ζ^s)-cônes sur Σ d'ouverture $K_1 \leq \text{cst}\, \hat{K}$ (lemme 5.3.5). Sa différentielle en un point $\psi^{\text{in}}(p)$ est minorée par $\text{cst}\, \text{dist}(\psi^{\text{in}}(p), \mathcal{O}_*)$ (lemme 5.4.1). D'après 5.3.6, ce facteur est minoré par $\text{cst}\, \text{dist}(p, \mathcal{O}_*) > \text{cst}\, \delta$.

3) L'itéré $f_\Sigma^{n-n_0} : \Sigma \to \Sigma$ envoie un champ de $(K_1, \zeta^u / \zeta^s)$-cônes sur un champ de $(K_1, \zeta^u / \zeta^s)$-cônes (fait 5.3.2) et contracte les vecteurs d'un $(K_1, \zeta^u / \zeta^s)$-cône d'un facteur minoré par une constante $\text{cst} > 0$ qui ne dépend que de K_1.

4) Pour finir, on peut utiliser le fait 5.3.2 avec un facteur de dilatation $\mu = 2$ et un itéré $n_0 \geq \log_2(l\delta^{-1}) - 1$ pour montrer que $f_\Sigma^{n_0}$ envoie un champ de $(K_1,\ \zeta^u / \zeta^s)$-cône à l'intérieur d'un champ de (ζ^u / ζ^s)-cônes d'ouverture $K_2 \leq \text{cst}\ \delta^2 K_1$, où la constante ne dépend que de l. Elle dilate les vecteurs d'un $(K_1,\ \zeta^u / \zeta^s)$-cône d'un facteur minoré par $\text{cst}\, \delta$, où la constante ne dépend que de K_1 et de l.

On en déduit qu'il suffit de choisir δ assez petit et l'image $(f_\Sigma^n f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})_* C_{\text{in}}^u$ est incluse à l'intérieur de C_Σ^u. De plus, quitte à changer la constante cst qui est uniforme en δ, on a au voisinage de p :

$$\begin{aligned}
\left\| \left(f_\Sigma^n f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}} \right)_* v \right\| = \left\| \left(f_\Sigma^{n_0} f_\Sigma^{n-n_0} f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}} \right)_* v \right\| &\geq \text{cst}\ \delta^{-1} \left\| \left(f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}} \right)_* v \right\| && \text{(item 3 et 4)} \\
&\geq \text{cst}\ \delta^{-1} \delta \| (\psi^{\text{in}})_* v \| && \text{(item 2)} \\
&\geq \text{cst}\ \| v \| && \text{(item 1)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.4.7. On vérifie aisément que le lemme 5.4.4 est encore vrai (quitte à changer la constante) pour toute trajectoire d'orbite partant de $p \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ et arrivant à $q = f_\Sigma^n\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi^{\text{in}}(p) \in \Sigma \cap \mathcal{V}_{r.\delta}$, où $r > 0$ est une constante préalablement fixée.

On peut maintenant montrer le corollaire suivant qui dit que la composée

$$f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma \tag{5.4}$$

vérifie la condition des champs de cônes pour la paire $(C^u_{\mathrm{in}} \cup C^u_\Sigma, C^s_{\mathrm{in}} \cup C^s_\Sigma)$ sur l'ensemble des points $p \in P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta$ dont l'image par $\varphi\, \psi^{\mathrm{out}}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ est dans $P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$. On renvoie à la figure 5.10.

Corollaire 5.4.8. *Il existe N_0 tel que pour tout $\delta > 0$ assez petit, la condition suivante est vérifiée. Pour tout $p \in P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta$ tel que les images suivantes sont bien définies pour $i \geq 0$ et $j \geq N_0$*

- $p' = \varphi\, \psi^{\mathrm{out}}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}(p) \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$, *et*
- $q = f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}(p) \in \Sigma$,

alors

- $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ *envoie $C^u_{\mathrm{in}}(p)$ à l'intérieur de $C^u_\Sigma(q)$ et dilate la norme des vecteurs de $C^u_{\mathrm{in}}(p)$ d'un facteur 2,*
- $(f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})^{-1}$ *envoie $C^s_\Sigma(q)$ à l'intérieur de $C^s_{\mathrm{in}}(p)$ et dilate la norme des vecteurs de $C^s_\Sigma(q)$ d'un facteur 2.*

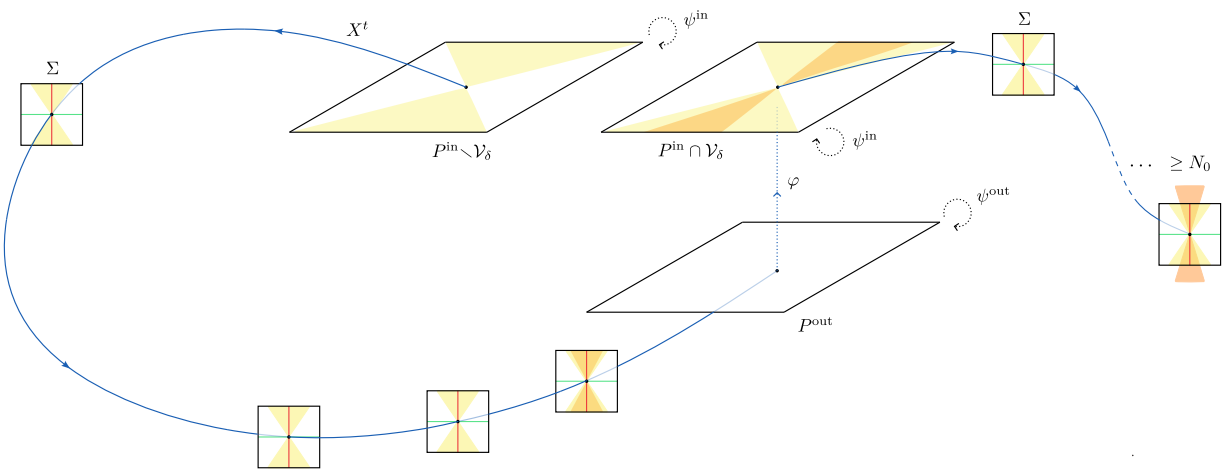


FIGURE 5.10 – Image d'un cône de C^u_{in} par l'application $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma$ passant par $P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$

Démonstration. Montrons le premier item concernant les cônes instables, la preuve du deuxième est similaire. Le fait que le point $p' = \varphi\, \psi^{\mathrm{out}}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}(p)$ appartienne à $P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$ par hypothèse du corollaire implique que le point $f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}(p)$ appartient à $\Sigma \cap \mathcal{V}_{r.\delta}$, autrement dit l'orbite positive de p intersecte la section Σ une dernière fois dans le voisinage $\mathcal{V}_{r.\delta}$ avant de sortir par P^{out}, où $r > 0$ est une constante qui satisfait le lemme 5.3.6.

On décompose la composée $f_\Sigma^j\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi\, f_{\mathrm{out},\Sigma}\, f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}}$ au voisinage de p en trois morceaux :

- La composée $f_\Sigma^i\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta \to \Sigma \cap \mathcal{V}_{r.\delta}$ est traitée dans le lemme 5.4.4 et remarque 5.4.7.. Pour δ assez petit, elle envoie le cône $C^u_{\mathrm{in}}(p)$ à l'intérieur de C^u_Σ et contracte les vecteurs de C^u_{in} d'un facteur minoré par une constante $c_0 > 0$ uniforme en δ.
- La composée $f_{\Sigma,\mathrm{in}} \psi f_{\mathrm{out},\Sigma} \colon \Sigma \to \Sigma$ est traité dans le lemme 5.4.2. Sa différentielle est bornée par une constante $c_1 > 0$ et elle envoie le champ de cônes C^u_Σ à l'intérieur d'un champ de $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes, avec c_1 et K_1 uniforme en δ.
- D'après le fait 5.3.2, il existe un entier N_0, tel que si $j \geq N_0$, alors f^j_Σ envoie un champ de $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes à l'intérieur de C^u_Σ et dilate la norme des vecteurs d'un $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cône d'un facteur minoré par $2(c_1c_0)^{-1}$. □

En mettant bout à bout, on obtient l'existence d'un entier N_0 que la composée (5.4) avec $n \geq N_0$ envoie le cône $C^u_{\mathrm{in}}(p)$ à l'intérieur de $C^u_\Sigma(q)$ et dilate les vecteurs de C^u_{in} d'un facteur 2.

On fixe l'entier N_0 qui satisfait le corollaire 5.4.8 et le corollaire 5.4.3.

5.5 Paramètre δ_0

Dans cette section, on montre l'existence d'un paramètre $\delta = \delta_0$ qui permettra d'obtenir l'item 1 de la proposition 5.1.4. L'entier N_0 est fixé à la section précédente. On définit δ_0 satisfaisant la proposition suivante :

Proposition 5.5.1. *Il existe δ_0 tel que les applications suivantes sont bien définies :*

- $f_\Sigma^{N_0}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0} \to \Sigma$
- $f_\Sigma^{-N_0}\, f^{-1}_{\mathrm{out},\Sigma}\, (\varphi\psi^{\mathrm{out}})^{-1} \colon P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0} \to \Sigma$

Démonstration. Un point $p \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$ est dans un δ-voisinage d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$. Pour δ arbitrairement petit, l'orbite par le flot de X d'un point $p \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_\delta$ passe un temps arbitrairement long au voisinage de Λ donc intersecte un nombre arbitrairement grand de fois la section Σ avant d'intersecter P^{out}. Il suffit de rappeler que les difféomorphismes ψ^{in} et $\varphi\psi^{\mathrm{out}}$ ont un effet borné sur la distance $\mathrm{dist}(\cdot, \mathcal{O}_*)$, uniformément en δ (lemme 5.3.6). On en déduit l'existence de δ_0. □

On fixe le paramètre δ_0 qui satisfait la proposition 5.5.1.

5.6 Entier N_1

Les paramètres $\lambda = \lambda_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ et $\delta = \delta_0$ sont fixés, ainsi que les cônes $(C^u_{\mathrm{in}}, C^s_{\mathrm{in}})$ sur P^{in} et (C^u_Σ, C^s_Σ) sur Σ. On appelle désormais $\psi^{\mathrm{in}} = \psi^{\mathrm{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$, $\psi^{\mathrm{out}} = \psi^{\mathrm{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$ les difféomorphismes de ∂P donnés par la proposition 4.1.2 et 4.1.3. On note $\psi = \psi^{\mathrm{in}}\varphi\psi^{\mathrm{out}}$ la composée. On note $\mathcal{V}_0 = \psi^{\mathrm{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0})$. Dans cette section, on montre l'existence d'un entier N_1 qui permettra d'avoir les items 2 et 8 de la proposition 5.1.4. On rappelle que l'item 2 concerne les points $p \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte Σ_ψ un nombre N_1 de fois consécutives, et l'item 8 concerne les points $p \in \Sigma_\psi$ dont l'orbite future par X_ψ intersecte $(P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ un nombre N_1 de fois.

Commençons par montrer que l'application

$$f^j_\Sigma\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}} \colon P^{\mathrm{in}} \to \Sigma \tag{5.5}$$

restreinte à $P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ vérifie la condition des cônes invariants pour la paire $(C^u_{\mathrm{in}} \cup C^u_\Sigma, C^s_{\mathrm{in}} \cup C^s_\Sigma)$ pour un itéré j assez grand. On renvoie à la figure 5.11.

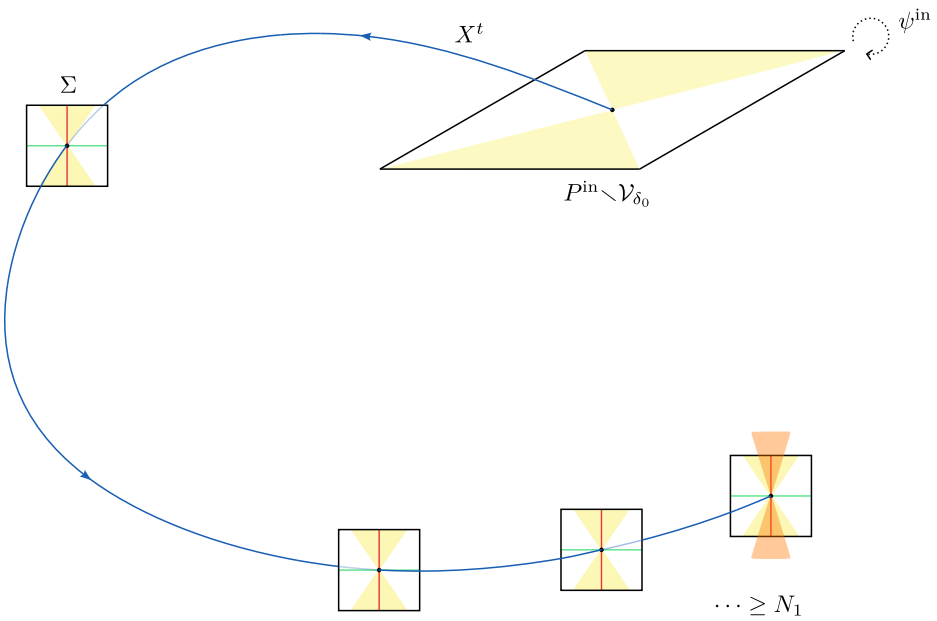


FIGURE 5.11 – Image d'un cône C^u_{in} par l'application $f^j_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}$ restreinte à $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$

Lemme 5.6.1. *Il existe N_1 tel que pour tout $p \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ si l'image $q = f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}(p) \in \Sigma$ est bien définie pour un $n \geq N_1$, alors*

- $(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})_* C^u_{\text{in}}(p) \subset \operatorname{int} C^u_\Sigma(q)$ *et* $\|(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})_* v\| \geq 2\|v\|$ *pour tout* $v \in C^u_{\text{in}}(p)$
- $(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})^{-1}_* C^s_\Sigma(q) \subset \operatorname{int} C^s_\Sigma(p)$ *et* $\|(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$ *pour tout* $v \in C^s_\Sigma(p)$

Démonstration. On montre l'existence d'un entier N_1 tel que le premier item est vrai. Le deuxième se montre de façon similaire. Étudions chaque applications de la composée.

- Le champ $\psi^{\text{in}}(C^u_{\text{in}})$ est à l'intérieur d'un champ $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes (lemme 5.3.9) et ψ^{in} a une différentielle bornée par une constante $c_0 > 0$.
- Le passage $f_{\Sigma,\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to \Sigma$ envoie un champ de $(\hat{K},\ \mathcal{G}^{u,\text{in}}/\mathcal{G}^{s,\text{in}})$-cônes sur P^{in} à l'intérieur d'un champ de (ζ^u/ζ^s)-cônes sur Σ d'ouverture K_1 uniforme (lemme 5.3.5). De plus, la différentielle de $f_{\Sigma,\text{in}}$ restreinte à $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ est uniformément bornée par une constante $c_1 > 0$ car c'est un passage de flot X^t entre une surface $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ compacte transverse au champ X et une surface Σ compacte transverse au champ X et le temps de passage de la première à la seconde est uniformément borné.
- Par hyperbolicité de f_Σ (fait 5.3.2), il existe un entier N_1 tel que tel que si $n \geq N_1$, alors f^n_Σ envoie un champ de $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cônes à l'intérieur de C^u_Σ et dilate la norme des vecteurs d'un $(K_1,\ \zeta^u/\zeta^s)$-cône d'un facteur minoré par $2(c_1 c_0)^{-1}$

En mettant bout à bout on obtient l'existence d'un entier N_1 que la composée (5.5) avec $n \geq N_1$ envoie le cône $C^u_{\text{in}}(p)$ à l'intérieur de $C^u_\Sigma(q)$ et dilate les vecteurs de C^u_{in} d'un facteur 2. □

On rappelle que l'on a défini à la section 5.2 la composée suivante $f_{\text{in},\psi} = \varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\text{in}} \psi^{\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{in}}$. On note

$$\hat{f}_{\text{in},\psi} \colon P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0} \to P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0} \tag{5.6}$$

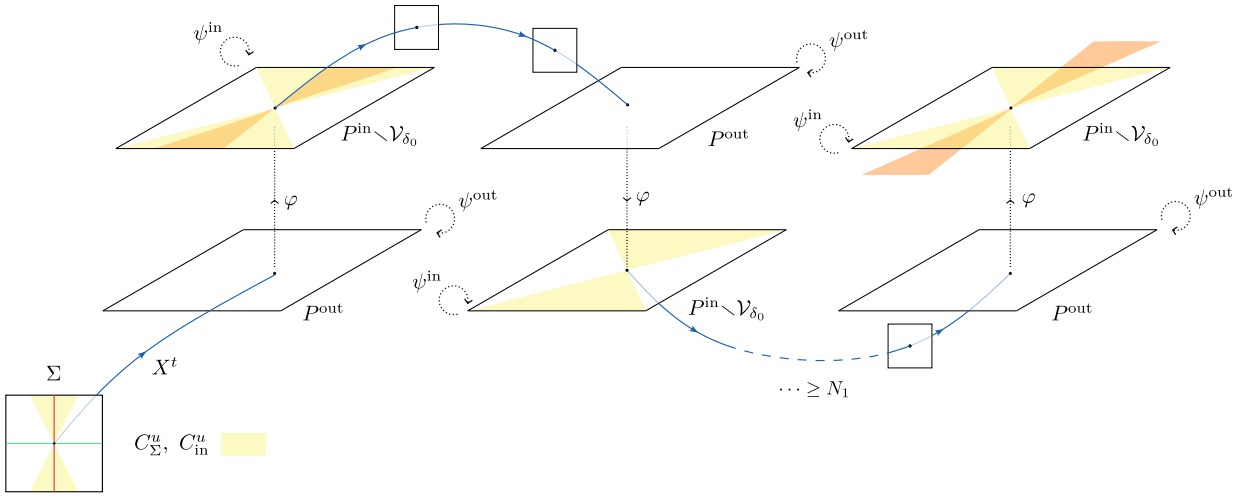


FIGURE 5.12 – Trajectoire de l'image d'un cône de C^u_Σ par l'application $\hat{f}^j_{\text{in},\psi}\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_\Sigma$

la restriction de $f_{\text{in},\psi}$ à l'ensemble $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ au départ et à l'arrivée. Montrons que la composée

$$\hat{f}^j_{\text{in},\psi}\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_\Sigma \colon \Sigma \to P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$$

vérifie la condition des cônes invariants pour la paire $(C^u_\Sigma \cup C^u_{\text{in}}, C^s_\Sigma \cup C^s_{\text{in}})$ si j est assez grand.

Lemme 5.6.2. *Il existe un entier $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $p \in \Sigma$, si l'image $\hat{f}^j_{\text{in},\psi}\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_\Sigma(p) \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$ est bien définie pour $j \geq N_1$ et $i \geq 0$, autrement dit $f^k_{\text{in},\psi}\varphi\psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^i_\Sigma(p) \in P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta$ pour tout $k = 0, \ldots, j$, alors*

- *$\hat{f}^j_{\text{in},\psi}\, \varphi\psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^i_\Sigma$ envoie $C^u_\Sigma(p)$ à l'intérieur de $C^u_{\text{in}}(q)$ et dilate la norme des vecteurs de $C^u_\Sigma(p)$ d'un facteur 2,*
- *$(\hat{f}^j_{\text{in},\psi}\, \varphi\psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^i_\Sigma)^{-1}$ envoie $C^s_{\text{in}}(p)$ à l'intérieur de $C^s_\Sigma(q)$ et dilate la norme des vecteurs de $C^s_{\text{in}}(p)$ d'un facteur 2,*

Insistons sur le fait que chaque passage de l'orbite d'un tel point p sur la surface P^{in} a lieu sur le complémentaire de $\mathcal{V}_{\delta_0}$ par hypothèse.

Démonstration. On décompose la composée en trois morceaux.

- f^i_Σ envoie C^u_Σ sur C^u_Σ et la contraction de la norme des vecteurs est minorée par une constante uniforme $c_0 > 0$ pour $i \geq 0$ (corollaire 5.3.10).
- On sait que $(\varphi\psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma})_*\, C^u_\Sigma \subset \operatorname{int} C^u_{\text{in}}$ (lemme 5.3.3). De plus, par hypothèses l'image de $f_{\text{out},\Sigma}$ pour la restriction que l'on étudie est incluse dans $P^{\text{out}} \setminus (\varphi\psi^{\text{out}})^{-1}(\mathcal{V}_{\delta_0})$, donc uniformément loin de l'ensemble $\mathcal{O}_*$. En utilisant le lemme 5.4.1, on en déduit que la différentielle de $f_{\text{out},\Sigma}$ est bornée, uniformément en p. Les difféomorphismes φ, ψ^{out} sont à support compact donc la différentielle de $\varphi\psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}$ est bornée par une constante $c_1 > 0$ (uniforme en p).
- L'application $\hat{f}_{\text{in},\psi} \colon P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0} \to P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_{\delta_0}$, qui coïncide avec la restriction de $f_{\text{in},\psi}$ à l'ensemble $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta) \cap f^{-1}_{\text{in},\psi}(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$ envoie le champ C^u_{in} à l'intérieur de C^u_{in} et dilate la norme

des vecteurs de C^u_{in} d'un facteur minoré par 2 (proposition 5.2.1). Il suffit de choisir $N_1 \geq -\log_2(c_0 c_1)$ pour que la dilatation de $\hat{f}_{\text{in},\psi}$ compense la contraction des applications précédentes. Cet entier est uniforme en p.

Le deuxième item se montre de façon similaire. □

On fixe un entier N_1 qui satisfait les lemmes 5.6.1 et 5.6.2.

5.7 Preuve de la proposition 5.1.4

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 5.1.4. On a fixé dans les sections précédentes les paramètres $\lambda = \lambda_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ (sous-section 5.2), $\delta = \delta_0$ (sous-section 5.5), une paire de champs de cônes $(C^u_{\text{in}}, C^s_{\text{in}})$ sur P^{in} (sous-section 5.2) et une paire de champs de cônes (C^u_Σ, C^s_Σ) sur Σ (sous-section 5.3), et on a défini des entiers N_Σ (sous-section 5.3), N_0 (sous-section 5.4), N_1 (sous-section 5.6). Ces choix ont été fait dans le "bon ordre", ce qui signifie que tous les résultats des sous-sections 5.2 à 5.6 sont vrais pour les paramètres $\lambda_0, \epsilon_0, \delta_0$. On rappelle que l'on note (voir début du chapitre 5)

- $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$, $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$, et $\psi = \psi^{\text{in}}\varphi\psi^{\text{out}}$.
- $\mathcal{V}_0 = \psi^{\text{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0})$.
- $P_\psi = P/\psi$ la variété quotient, $\pi_\psi \colon P \to P_\psi$ la projection, et X_ψ le champ de vecteurs induit par X sur P_ψ.
- $S_{0,\psi} = \pi_\psi(P^{\text{in}} \cup \Sigma)$ et $f_{0,\psi}$ l'application de premier retour du flot de X_ψ sur $S_{0,\psi}$.

On définit la paire de champs de cônes sur $S_{0,\psi}$ suivante :

$$(C^u_\psi, C^s_\psi) = \Big(\pi_\psi(\psi^{\text{in}}_*(C^u_{\text{in}}) \sqcup C^u_\Sigma),\ \pi_\psi(\psi^{\text{in}}_*(C^s_{\text{in}}) \sqcup C^s_\Sigma)\Big)$$

et on choisit la métrique $g_\psi = \pi_\psi(\psi^{\text{in}}_* g^{\text{in}}) \sqcup \pi_\psi(g^\Sigma)$ sur P_ψ, où g^Σ et g^{in} sont des restrictions de la métrique fixée sur P. On rappelle que la métrique g est la métrique fixée au début du chapitre 3, qui coïncide avec $dx^2 + dy^2 + d\theta^2$ dans chaque système de coordonnées normalisé $(\mathcal{V}_i, \xi_i = (x, y, \theta))$, et qui est adaptée à la décomposition hyperbolique du flot. On note $\|\cdot\|_\psi, \|\cdot\|_\Sigma, \|\cdot\|_{\text{in}}$ les norme associées. On rappelle que pour des raisons pratiques, on a étudié des relevés dans P *conjugués par* ψ^{in} de l'application $f^n_{0,\psi}$. Ce qui explique que l'on compose la projection π_ψ par ψ^{in} sur P^{in} pour ajuster. On rappelle que :

- $S_{0,\psi}$ a des points d'auto-intersections p, en ces points elle possède deux ou trois plans tangents $T^* = T^*_p \subset T_p S_{0,\psi}$. La différentielle de $f_{0,\psi}$ en p est bien définie une fois choisi un plan tangent T^*_p au départ et $T^*_{f(p)}$ à l'arrivée. Un champ de cônes C sur $S_{0,\psi}$ est une collection de cônes $C(p, T^i)$ sur chacun des plans tangents $T^i \subset T_p S_{0,\psi}$.
- Si $p \in P^{\text{in}}_\psi \subset S_{0,\psi}$, on note $T^{\text{in}}_p \subset T_p S_{0,\psi}$ le plan tangent induit par $T_{\tilde{p}} P^{\text{in}}$, où $\tilde{p} \in P^{\text{in}}$ est le relevé de p dans P^{in}, et on note $(C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p), C^s_\psi(p, T^{\text{in}}_p))$ la paire (C^u_ψ, C^s_ψ) sur T^{in}_p en p.
- Si $q \in \Sigma_\psi \subset S_{0,\psi}$, on note $T^\Sigma_\psi \subset T_p S_{0,\psi}$ le (ou un des deux) plan(s) tangent(s) induit par $T_{\tilde{q}} P^\Sigma$, où $\tilde{q} \in \Sigma$ est un relevé de q dans Σ, et on note $(C^u_\psi(q, T^\Sigma_q), C^s_\psi(q, T^\Sigma_q)$ la paire (C^u_ψ, C^s_ψ) sur T^Σ_q en q.

Relevé dans P On résume les relevés dans P des points, cônes, vecteurs et norme que l'on sera amené à utiliser.

Fait 5.7.1.

1) (applications)

- *Si $p \in \Sigma_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $f_\Sigma \colon \Sigma \to \Sigma$.*
- *Si $p \in \Sigma_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $\psi\, f_{\text{out},\Sigma} : \Sigma \to P^{\text{in}}$.*
- *Si $p \in P^{\text{in}}_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $f_{\Sigma,\text{in}} : P^{\text{in}} \to \Sigma$.*
- *Si $p \in P^{\text{in}}_\psi$ et $f_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$ alors un relevé de $f_{0,\psi}$ est $\psi\, f_{\text{out,in}} : P^{\text{in}} \to P^{\text{in}}$*

2) (points)

- *Si $p \in P^{\text{in}}_\psi$, il existe un unique relevé $\tilde{p}$ de p dans P^{in}, on note alors $\check{p} = (\psi^{\text{in}})^{-1}(\tilde{p})$, autrement dit on a $\pi_\psi(\psi^{\text{in}}(\check{p})) = p$. De plus si $p \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)$ alors $\check{p} \in P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_{\delta_0}$, et si $p \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)$, alors $\check{p} \in P^{\text{in}} \subset \mathcal{V}_{\delta_0}$, par définition de $\mathcal{V}_0 = \psi^{\text{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0})$.*
- *Si $q \in \Sigma_\psi$, il existe $\tilde{q} \in \Sigma$ relevé de q dans P.*

3) (cônes)

- *Si $p \in P^{\text{in}}_\psi$, un relevé du cône $C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$ est le cône $\psi^{\text{in}}_* C^u_{\text{in}}(\check{p})$.*
- *Si $q \in \Sigma$, un relevé du cône $C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$ est le cône $C^u_\Sigma(\tilde{q})$.*

4) (vecteurs)

- *Si $v \in TP^{\text{in}}_\psi$, alors il existe un unique relevé de v dans TP de la forme $\psi^{\text{in}}_* \check{v}$ avec $\check{v} \in TP^{\text{in}}$. De plus, si $v \in C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$, alors $\check{v} \in C^u_{\text{in}}(\check{p})$.*
- *Si $w \in T\Sigma_\psi$, alors il existe $\tilde{w} \in T\Sigma$ un relevé de w dans P. De plus, si $w \in C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$, alors $\tilde{w} \in C^u_\Sigma(\tilde{q})$.*

5) (norme)

- *Si $v \in TP^{\text{in}}_\psi$, alors $\|v\|_\psi = \|\check{v}\|_{\text{in}} = \|\check{v}\|$ où $\check{v}$ est donné par l'item précédent et $\|\cdot\|$ est la norme issue de la métrique riemannienne sur P.*
- *Si $w \in T\Sigma_\psi$, alors $\|w\|_\psi = \|\tilde{w}\|_\Sigma = \|\tilde{w}\|$ où $\tilde{w}$ est donné par l'item précédent et $\|\cdot\|$ est la norme issue de la métrique riemannienne sur P.*

Tout les items ci-dessus sont des conséquences directes des définitions des cônes et de la métrique sur P_ψ. Montrons la proposition 5.1.4.

Démonstration de la proposition 5.1.4. Soit $p \in S_{0,\psi}$, $n \geq 1$ et $q = f^n_{0,\psi}(p)$. Montrons chaque item de la proposition. On ne montre que la stricte invariance et la dilatation des cônes instables C^u_ψ. La preuve pour les cônes stables C^s_ψ est symétrique.

1. Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$.

   Soit $\tilde{p} := \psi^{\text{in}}\check{p}$ un relevé de p dans P avec $\check{p} \in P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0}$ (fait 5.7.1, item 2).

   D'après la proposition 5.5.1, les applications $f^{N_0}_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}}\psi^{\text{in}} \colon P^{\text{in}} \to \Sigma$ et $f^{-N_0}_\Sigma f^{-1}_{\text{out},\Sigma}(\varphi\psi^{\text{out}})^{-1} \colon P^{\text{in}} \to \Sigma$ sont bien définies en $\check{p}$. D'après le fait 5.7.1, item 1, les relevés des itérés $f^k_{0,\psi}(p)$ dans P sont les itérés :

– $f_\Sigma^{k-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}(\tilde p) = f_\Sigma^{k-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\psi^{\mathrm{in}}(\check p)$ pour $k = 1, \dots, N_0$, et
– $f_\Sigma^{k-1}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}^{-1}\, \psi^{-1}(\tilde p) = f_\Sigma^{k-1}\, f_{\mathrm{out},\Sigma}^{-1}\, (\varphi\psi^{\mathrm{out}})^{-1}(\check p)$ pour $k = -N_0, \dots, -1$.

On en déduit que les itérés $f_{0,\psi}^k(p)$ appartiennent à Σ_ψ pour $k = -N_0, \dots, -1, 1, \dots, N_0$.

2. Supposons que $p \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_1$, et $f_{0,\psi}^k(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

   Soit $\tilde p := \psi^{\mathrm{in}}\check p$ un relevé de p dans P avec $\check p \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0}$ (fait 5.7.1, item 2). D'après le fait 5.7.1, item 1, $f_\Sigma^{n-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}$ est un relevé de $f_{0,\psi}^n$ au voisinage de p. On pose $\tilde q := f_\Sigma^{n-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\psi^{\mathrm{in}}(\check p) \in \Sigma$. C'est un relevé de $q = f_{0,\psi}^n(p)$ dans P.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}})$ est $\psi_*^{\mathrm{in}} C_{\mathrm{in}}^u(\check p)$ et un relevé de $C_\psi^u(q, T_q^\Sigma)$ est $C_\Sigma^u(\tilde q)$ On se ramène au lemme 5.6.1. On a

$$\begin{aligned}
(f_{0,\psi}^n)_* C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}}) &= (\pi_\psi)_*(f_\Sigma^{n-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_* C_{\mathrm{in}}^u(\check p) \\
&\subset (\pi_\psi)_*\ \mathrm{int}\, C_\Sigma^u(\tilde q) && \text{(lemme 5.6.1)} \\
&= \mathrm{int}\, C_\psi^u(q, T_q^\Sigma)
\end{aligned}$$

   Soit $v \in C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}})$. Soit $\psi_*^{\mathrm{in}}\check v$ un relevé de v dans TP^{in}, avec $v \in C_{\mathrm{in}}^u(\check p)$ (fait 5.7.1 item 4). Alors $(f_\Sigma^{n-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\psi^{\mathrm{in}})_*\check v$ est un relevé de $(f_{0,\psi}^n)_* v$ dans $T\Sigma$, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f_{0,\psi}^n)_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|(f_\Sigma^{n-1}\, f_{\Sigma,\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_*\check v\|}{\|\check v\|} && \text{(fait 5.7.1, item 5)} \\
&\geq 2 && \text{(lemme 5.6.1)}
\end{aligned}$$

3. Supposons que $p \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in (P^{\mathrm{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ et $f_{0,\psi}^k(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, n-1$.

   Soit $\tilde p := \psi^{\mathrm{in}}\check p$ un relevé de p dans P avec $\check p \in P^{\mathrm{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0}$ (fait 5.7.1, item 2). D'après le fait 5.7.1, item 1, $\psi f_{\mathrm{out},\mathrm{in}}$ est un relevé de $f_{0,\psi}^n$ au voisinage de p. On pose $\tilde q := \psi f_{\mathrm{out},\mathrm{in}}(\psi^{\mathrm{in}}(\check p)) = \psi^{\mathrm{in}}\, f_{\mathrm{in},\psi}(\check p) \in P^{\mathrm{in}}$ (définition de $f_{\mathrm{in},\psi}$ par la formule (5.3)). C'est un relevé de $q = f_{0,\psi}^n(p)$ dans P. On pose $\check q := (\psi^{\mathrm{in}})^{-1}\tilde q = f_{\mathrm{in},\psi}(\check p)$.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, $\psi_*^{\mathrm{in}} C_{\mathrm{in}}^u(\check p)$ est un relevé de $C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}})$ et $\psi_*^{\mathrm{in}} C_{\mathrm{in}}^u(\check q)$ est un relevé de $C_\psi^u(q, T_q^{\mathrm{in}})$. On se ramène donc à la proposition 5.2.1. On a

$$\begin{aligned}
(f_{0,\psi}^n)_* C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}}) &= (\pi_\psi)_*(\psi\, f_{\mathrm{out},\mathrm{in}}\, \psi^{\mathrm{in}})_* C_{\mathrm{in}}^u(\check p) \\
&= (\pi_\psi\psi^{\mathrm{in}})_*(f_{\mathrm{in},\psi})_* C_{\mathrm{in}}^u(\check p) \\
&\subset (\pi_\psi\psi^{\mathrm{in}})_*(\mathrm{int}\, C_{\mathrm{in}}^u(\check q)) && \text{(proposition 5.2.1)} \\
&= (\pi_\psi)_*(\mathrm{int}\, \psi_*^{\mathrm{in}} C_{\mathrm{in}}^u(\check q))) \\
&= \mathrm{int}\, C_\psi^u(q, T_q^{\mathrm{in}})
\end{aligned}$$

   Soit $v \in C_\psi^u(p, T_p^{\mathrm{in}})$. Soit $\psi_*^{\mathrm{in}}\check v$ un relevé de v dans TP^{in}, avec $v \in C_{\mathrm{in}}^u(\check p)$ (fait 5.7.1 item 4). Alors $\psi_*^{\mathrm{in}}(f_{\mathrm{in},\psi})_*\check v$ est un relevé de $(f_{0,\psi}^n)_* v$ dans TP^{in}, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f_{0,\psi}^n)_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|(f_{\mathrm{in},\psi})_*\check v\|}{\|\check v\|} && \text{(fait 5.7.1, item 5)} \\
&\geq 2 && \text{(proposition 5.2.1)}
\end{aligned}$$

4. Supposons que $p \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_0 + 1$, il existe $1 \leq m \leq n - N_0$ tel que $f^m_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$ et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1$.

   Soit $\tilde{p} := \psi^{\text{in}}\check{p}$ un relevé de p dans P avec $\check{p} \in P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_{\delta_0}$ (fait 5.7.1, item 2). D'après le fait 5.7.1, item 1, $f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}$ est un relevé de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p. On pose $\tilde{q} := f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\psi^{\text{in}}(\check{p}) \in \Sigma$. C'est un relevé de $q = f^n_{0,\psi}(p)$ dans P.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$ est $\psi^{\text{in}}_* C^u_{\text{in}}(\check{p})$ et un relevé de $C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{q})$. On a $n - m \geq N_0$. D'après le corollaire 5.4.8 :

$$\begin{aligned}
(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p) &= (\pi_\psi)_*(f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\psi^{\text{in}})_* C^u_{\text{in}}(\check{p}) \\
&\subset (\pi_\psi)_* \operatorname{int} C^u_\Sigma(\tilde{q}) \\
&= \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)
\end{aligned}$$

   Soit $v \in C^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$. Soit $\psi^{\text{in}}_* \check{v}$ un relevé de v dans TP^{in}, avec $v \in C^u_{\text{in}}(\check{p})$ (fait 5.7.1 item 4). Alors $f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\psi^{\text{in}})_* \check{v}$ est un relevé de $(f^n_{0,\psi})_* v$ dans $T\Sigma$, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f^n_{0,\psi})_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\psi^{\text{in}})_* \check{v}\|}{\|\check{v}\|} && \text{(item 5)} \\
&\geq 2 && \text{(corollaire 5.4.8)}
\end{aligned}$$

5. Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.

   Soit $\tilde{p} \in \Sigma$ un relevé de p dans P. D'après le fait 5.7.1, item 1, f^n_Σ est un relevé de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p. On pose $\tilde{q} := f^n_\Sigma(\tilde{p})$. C'est un relevé de $q = f^n_{0,\psi}(p)$ dans P.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{p})$ et un relevé de $C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{q})$. On se ramène donc au corollaire 5.3.10. On a

$$\begin{aligned}
(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) &= (\pi_\psi)_*(f^n_\Sigma)_* C^u_\Sigma(\tilde{p}) \\
&\subset (\pi_\psi)_*(\operatorname{int} C^u_\Sigma(\tilde{q})) && \text{(corollaire 5.3.10)} \\
&= \operatorname{int} C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)
\end{aligned}$$

   De plus, si $n \geq N_\Sigma$: Soit $v \in C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ et $\tilde{v} \in C^u_\Sigma(\tilde{p})$ un relevé de v. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f^n_{0,\psi})_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|(f^n_\Sigma)_* \check{v}\|}{\|\check{v}\|} && \text{(fait 5.7.1, item 5)} \\
&\geq 2 && \text{(corollaire 5.3.10)}
\end{aligned}$$

6. Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in P^{\text{in}}_\psi$ et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.

   Soit $\tilde{p} \in \Sigma$ un relevé de p dans P. D'après le fait 5.7.1, item 1, $\psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^n_\Sigma$ est un relevé de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p. On pose $\tilde{q} := \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^n_\Sigma\, (\tilde{p}) \in P^{\text{in}}$. C'est un relevé de $q = f^n_{0,\psi}(p)$ dans P. On pose $\check{q} := (\psi^{\text{in}})^{-1}\tilde{q} = \varphi\, \psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^n_\Sigma(\tilde{p})$.

D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{p})$ et un relevé de $C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$ est $\psi^{\text{in}}_* C^u_{\text{in}}(\check{q})$. On se ramène donc au lemme 5.3.3. On a

$$\begin{aligned}
(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) &= (\pi_\psi)_*(\psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^n_\Sigma)_* C^u_{\text{in}}(\tilde{p}) \\
&= (\pi_\psi \psi^{\text{in}})_*(\varphi\, \psi^{\text{out}}\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^n_\Sigma)_* C^u_\Sigma(\tilde{p}) \\
&\subset (\pi_\psi \psi^{\text{in}})_*(\text{int}\, C^u_{\text{in}}(\check{q})) && \text{(lemme 5.3.3)} \\
&= (\pi_\psi)_* \,\text{int}\, \psi^{\text{in}}_* C^u_{\text{in}}(\check{q})) \\
&= \text{int}\, C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)
\end{aligned}$$

7. Supposons que $p \in \Sigma_\psi$, $q \in \Sigma_\psi$, $n \geq N_0 + 1$, et il existe $1 \leq m \leq n - N_0$ tel que $f^m_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$, et $f^k(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1$.

   Soit $\tilde{p} \in \Sigma$ un relevé de p dans P. D'après le fait 5.7.1, item 1, $f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma$ est un relevé de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p. On pose $\tilde{q} := f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma(\tilde{p})$. C'est un relevé de $q = f^n_{0,\psi}(p)$ dans P.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{p})$ et un relevé de $C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{q})$. Comme $n - m \geq N_0$, on peut se ramener au corollaire 5.4.3. On a

$$\begin{aligned}
(f^n_{0,\psi})_* C^u_\psi(p, T^\Sigma_p) &= (\pi_\psi)_*(f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma)_* C^u_\Sigma(\tilde{p}) \\
&\subset (\pi_\psi)_*(\text{int}\, C^u_\Sigma(\tilde{q})) && \text{(corollaire 5.4.3)} \\
&= \text{int}\, C^u_\psi(q, T^\Sigma_q)
\end{aligned}$$

   Soit $v \in C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ et $\tilde{v} \in C^u_\Sigma(\tilde{p})$ un relevé de v. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f^n_{0,\psi})_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|(f^{n-m}_\Sigma\, f_{\Sigma,\text{in}}\, \psi\, f_{\text{out},\Sigma}\, f^{m-1}_\Sigma)_* \check{v}\|}{\|\check{v}\|} && \text{(fait 5.7.1, item 5)} \\
&\geq 2 && \text{(corollaire 5.4.3)}
\end{aligned}$$

8. $p \in \Sigma_\psi$, $q \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$, et il existe $m \geq N_1$, et des entiers $1 \leq k_1 < \cdots < k_m = n$ tel que et $f^{k_1}_{0,\psi}(p), \ldots, f^{k_m}_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi$ et $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma$ pour $k \neq k_1, \ldots, k_m$, $1 \leq k \leq n-1$.

   Soit $\tilde{p} \in \Sigma$ un relevé de p dans P. D'après le fait 5.7.1, item 1, $(f_{\text{out},\text{in}}\psi)^{m-1} f_{\text{out},\Sigma} f^{k_1-1}_\Sigma$ est un relevé de $f^n_{0,\psi}$ au voisinage de p, que l'on ré-écrit :

$$(f_{\text{out},\text{in}}\psi)^{m-1} f_{\text{out},\Sigma} f^{k_1-1}_\Sigma = \psi^{\text{in}} \hat{f}^{m-1}_{\text{in},\psi} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^{k_1-1}_\Sigma$$

   avec $\hat{f}_{\text{in},\psi} \colon P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_{\delta_0} \to P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_\delta$ est la restriction de $f_{\text{in},\psi}$ au départ et à l'arrivée aux ensembles correspondant.

   On pose $\tilde{q} := \psi^{\text{in}} \hat{f}^{m-1}_{\text{in},\psi} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^{k_1-1}_\Sigma \in P^{\text{in}}$. C'est un relevé de $q = f^n_{0,\psi}(p)$ dans P. On pose $\check{q} := (\psi^{\text{in}})^{-1} \tilde{q} = (\hat{f}_{\text{in},\psi})^{m-1} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f^{k_1-1}_\Sigma(\tilde{p})$.

   D'après l'item 3, fait 5.7.1, un relevé de $C^u_\psi(p, T^\Sigma_p)$ est $C^u_\Sigma(\tilde{p})$ et un relevé de $C^u_\psi(q, T^{\text{in}}_q)$ est

$\psi_*^{\text{in}} C_{\text{in}}^u(\check{q})$. On se ramène donc au lemme 5.6.2. On a

$$\begin{aligned}
(f_{0,\psi}^n)_* C_\psi^u(p, T_p^\Sigma) &= (\pi_\psi)_*(\psi^{\text{in}} \hat{f}_{\text{in},\psi}^{m-1} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f_\Sigma^{k_1-1})_* C_{\text{in}}^u(\tilde{p}) \\
&= (\pi_\psi \psi^{\text{in}})_*(\hat{f}_{\text{in},\psi}^{m-1} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f_\Sigma^{k_1-1})_* C_\Sigma^u(\tilde{p}) \\
&\subset (\pi_\psi \psi^{\text{in}})_*(\operatorname{int} C_{\text{in}}^u(\check{q})) \qquad \text{(lemme 5.6.2)} \\
&= (\pi_\psi)_* \operatorname{int} \psi_*^{\text{in}} C_{\text{in}}^u(\check{q})) \\
&= \operatorname{int} C_\psi^u(q, T_q^{\text{in}})
\end{aligned}$$

Soit $v \in C_\psi^u(p, T_p^\Sigma)$, et $\tilde{v} \in C_\Sigma^u(\tilde{p})$ un relevé de v dans $T\Sigma$. Alors $(\psi^{\text{in}})_*(\hat{f}_{\text{in},\psi}^{m-1} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f_\Sigma^{k_1-1})_* \tilde{v}$ est un relevé de $(f_{0,\psi}^n)_* v$ dans TP^{in}, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(f_{0,\psi}^n)_* v\|_\psi}{\|v\|_\psi} &= \frac{\|(\hat{f}_{\text{in},\psi}^{m-1} \varphi \psi^{\text{out}} f_{\text{out},\Sigma} f_\Sigma^{k_1-1})_* \tilde{v}\|}{\|\tilde{v}\|} \qquad \text{(fait 5.7.1, item 5)} \\
&\geq 2 \qquad \text{(lemme 5.6.2)}
\end{aligned}$$

□

5.8 Résultat additionnel

On peut améliorer la proposition 5.1.4 en ajoutant (pour les même paramètres) l'existence d'une autre paire de champs de cônes que l'on note $(\hat{C}_\psi^u, \hat{C}_\psi^s)$ sur $S_{0,\psi}$ et qui aura un rôle complémentaire à celui de la paire (C_ψ^u, C_ψ^s) au chapitre suivant. Expliquons.

Dans le prochain chapitre, on montrera (proposition 6.1.1) que l'on peut exciser un voisinage du bord de P_ψ^{in} dans $S_{0,\psi}$ pour obtenir une section S_ψ compacte à bord, transverse au champ X, et coupant toute orbite de X_ψ. L'application de premier retour f_ψ pour le flot de X_ψ sur S_ψ vérifie alors la propriété suivante. Pour tout $p \in S_\psi$, il existe un entier $n^\star = n^\star(p) \geq 0$, tel que f_ψ^n vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de p pour la paire (C_ψ^u, C_ψ^s) (restreinte sur $S_{0,\psi}$). Comme l'entier $n^\star = n^\star(p)$ dépend du point p, ce résultat n'est pas symétrique par inversion du sens du temps, autrement dit il n'en découle pas l'existence d'un entier $\hat{n}^\star = \hat{n}^\star(p) \leq 0$ tel que $f_\psi^{\hat{n}^\star}$ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de p pour la paire (C_ψ^s, C_ψ^u). Or cela est nécessaire pour prouver l'existence d'une décomposition hyperbolique sur S_ψ à l'aide du critère des champs de cônes invariants, qui donnera ensuite la structure Anosov pour X_ψ sur P_ψ (proposition 6.2.1). En fait, ce n'est effectivement pas le cas pour la paire (C_ψ^s, C_ψ^u) donnée par la proposition 5.1.4. Expliquons nous.

On a choisi la paire (C_ψ^s, C_ψ^u) de sorte à satisfaire l'item 6 de la proposition 5.1.4, qui donne une compatibilité des cônes de Σ_ψ à P_ψ^{in} au premier passage, et permet de garder le contrôle de l'image d'un cône lors de la trajectoire d'une orbite passant par P_ψ^{in}. Par contre, il n'y a pas de compatibilité des cônes de P_ψ^{in} à Σ_ψ au premier passage. Pour contourner ce problème, on utilise une paire $(\hat{C}_\psi^u, \hat{C}_\psi^s)$ qui satisfait cette propriété, autrement dit tel que l'on a la stricte invariance des cônes par f_ψ au premier passage de P_ψ^{in} à Σ_ψ. Cette paire continuera de satisfaire aussi tous les critères la proposition 5.1.4, sauf celui de l'item 6.

Énonçons le résultat. Soit les paramètres $\lambda_0 > 1$, $\epsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ et les entiers N_0, N_1 et N_Σ donnés par la proposition 5.1.4. Soit $\psi^{\text{in}} = \psi_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}^{\text{in}}$, $\psi^{\text{out}} = \psi_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}^{\text{out}}$, $\psi = \psi^{\text{in}} \varphi \psi^{\text{out}}$, les difféomorphismes associés à ce choix de paramètres.

Proposition 5.8.1. *Il existe une paire* $(\hat{C}^u_\psi, \hat{C}^s_\psi)$ *de champ de cônes sur* $S_{0,\psi}$ *qui vérifient les propriétés suivantes. Soit* $p \in S_{0,\psi}$*, soit* $n \geq 1$ *et on note* $q = f^n_{0,\psi}(p)$*.*

1) Tous les items de la proposition 5.1.4 sauf l'item 6 sont satisfaits.

2) Supposons que $p \in P^{\text{in}}_\psi$*,* $q \in \Sigma_\psi$ *et* $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ *pour* $k = 1, \dots, n-1$*. Alors :*

- $(f^n_{0,\psi})_* \hat{C}^u_\psi(p, T^{\text{in}}_p) \subset \operatorname{int} \hat{C}^u_\psi(q, T^\Sigma_q)$ *et,*
- $(f^n_{0,\psi})^{-1}_* \hat{C}^s_\psi(q, T^\Sigma_q) \subset \operatorname{int} \hat{C}^s_\psi(p, T^{\text{in}}_p)$*.*

La démonstration est la même, exceptée pour la section 5.3, lemme 5.3.3 (c'est la partie qui permet d'obtenir l'item 6 de la proposition 5.1.4 dans la conclusion). Le lemme analogue du lemme 5.3.3 est

Lemme 5.8.2. *Il existe* $\hat{C}^u_\Sigma$ *un champ de* $(\hat{K}^u,\ \zeta^u/\zeta^s)$*-cônes et* $\hat{C}^s_\Sigma$ *un champ de* $(\hat{K}^s,\ \zeta^s/\zeta^u)$*-cônes sur* Σ *qui satisfont la propriété suivante. Pour tout* $\delta > 0$*, si* $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_\delta$*, et pour tout* $p \in P^{\text{in}}$ *tel que le point* $q = f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}}(p) \in \Sigma$ *est bien défini pour un certain entier* $n \geq 0$*, alors :*

- $(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})_* \hat{C}^u_{\text{in}}(p) \subset \operatorname{int} \hat{C}^u_\Sigma(q)$*, et*
- $(f^n_\Sigma f_{\Sigma,\text{in}} \psi^{\text{in}})^{-1}_* \hat{C}^s_\Sigma(q) \subset \operatorname{int} \hat{C}^s_{\text{in}}(p)$

La démonstration repose sur les même arguments. Il faut choisir une ouverture $\hat{K}^u$ de $\hat{C}^u_\Sigma$ assez grande et une ouverture $\hat{K}^s$ de $\hat{C}^s_\Sigma$ assez petite pour satisfaire cette compatibilité. Les cônes $(\hat{C}^u_\psi, \hat{C}^s_\psi)$ seront le passage au quotient par π_ψ de champs cônes sur P^{in} et sur Σ dans P.

- Les cônes sur P^{in} sont les même que pour la paire (C^u_ψ, C^s_ψ), à savoir $(\psi^{\text{in}}_* C^u_{\text{in}}, \psi^{\text{in}}_* C^s_{\text{in}})$ où C^u_{in} et C^s_{in} sont les champs de cônes donnés à la proposition 5.2.1.
- On remplace les cônes (C^u_Σ, C^s_Σ) par les cônes $(\hat{C}^u_\Sigma, \hat{C}^s_\Sigma)$ sur Σ.

En reproduisant point par point la preuve précédente et en remplaçant les cônes (C^u_Σ, C^s_Σ) par les cônes $(\hat{C}^u_\Sigma, \hat{C}^s_\Sigma)$ on obtient le résultat annoncé en 5.8.1.

Chapitre 6

Preuve du théorème de recollement et critère de transitivité

6.1 Recollement et champs de cônes invariants sur une section globale

Rappel du chapitre précédente Au chapitre 5, on a montré qu'il existe des paramètres $\lambda_0, \epsilon_0, \delta_0$ qui satisfont la proposition 5.1.4. On note $\psi^{\text{in}} = \psi^{\text{in}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$ et $\psi^{\text{out}} = \psi^{\text{out}}_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0}$ les difféomorphismes donnés par la proposition 4.1.2 et 4.1.3, et $\psi = \psi^{\text{in}}\varphi\psi^{\text{out}} \colon \partial P \to \partial P$. C'est un recollement normalisé de (P, X) tel que le triplet (P, X, ψ) est fortement isotope à (P, X, φ) (fait 5.1.1). On note

- $P_\psi := P/\psi$ la variété quotient, $\pi_\psi \colon P \to P_\psi$ la projection, et X_ψ le champ de vecteurs induit par X sur P_ψ.
- $S_{0,\psi} = \pi_\psi(P^{\text{in}} \cup \Sigma)$ la section du flot de X_ψ sur P_ψ, et $f_{0,\psi}$ l'application de premier retour du flot de X_ψ sur $S_{0,\psi}$.

D'après la proposition 5.1.4, il existe une paire de champs de cônes (C^u_ψ, C^s_ψ) sur $S_{0,\psi}$ pour laquelle un itéré (non uniforme) de $f_{0,\psi}$ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de certain point, *en dehors d'un petit voisinage des orbites périodiques* $(\mathcal{O}_*)_\psi$ *dans* $S_{0,\psi}$. En effet, la section n'est pas uniformément transverse et la dilatation des cônes manque le long de certaines orbites lorsque l'on s'approche des orbites périodiques tangentes $(\mathcal{O}_*)_\psi$ (item 6). Le but de cette section est donc d'enlever un voisinage bien choisi des orbites $(\mathcal{O}_*)_\psi$ dans $S_{0,\psi}$ pour avoir l'hyperbolicité de l'application de retour partout.

Section globale On excise maintenant à $S_{0,\psi}$ la projection du voisinage $\mathcal{V}_0 := \psi^{\text{in}}(\mathcal{V}_{\delta_0})$ des orbites $\mathcal{O}_*$. On obtient la surface

$$S_\psi := \pi_\psi\left((P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0) \cup \Sigma\right) = (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{V}_0)_\psi \cup \Sigma_\psi \subset S_{0,\psi} \tag{6.1}$$

C'est une section globale compacte (figure 6.1). En effet, d'après l'item 1 de la proposition 5.1.4, une orbite de X_ψ qui intersecte $(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$ intersecte la section Σ_ψ dans le passé et dans le futur en temps uniformément borné. On rappelle (voir section 5.1) que comme pour la section $S_{0,\psi}$, la surface S_ψ admet des points p d'auto-intersection sur lesquels elle peut avoir deux ou trois plans tangents $T^* = T^*_p \subset T_pS_\psi$. On note T^Σ_p le (ou un des) plan(s) tangent(s) à Σ_ψ en p et T^{in}_q le plan tangent à P^{in}_ψ en q. La surface S_ψ est munie d'une métrique g_ψ, qui est une collection de métrique $g_\psi(p, T^*)$ sur chacun des plans tangents $T^* \subset T_pS_\psi$. Un champ de cônes C sur S_ψ est la donnée pour chaque $p \in S_\psi$ et pour chaque plan tangent T^* à S_ψ au point p d'un cône $C(p, T^*) \subset T^*$.

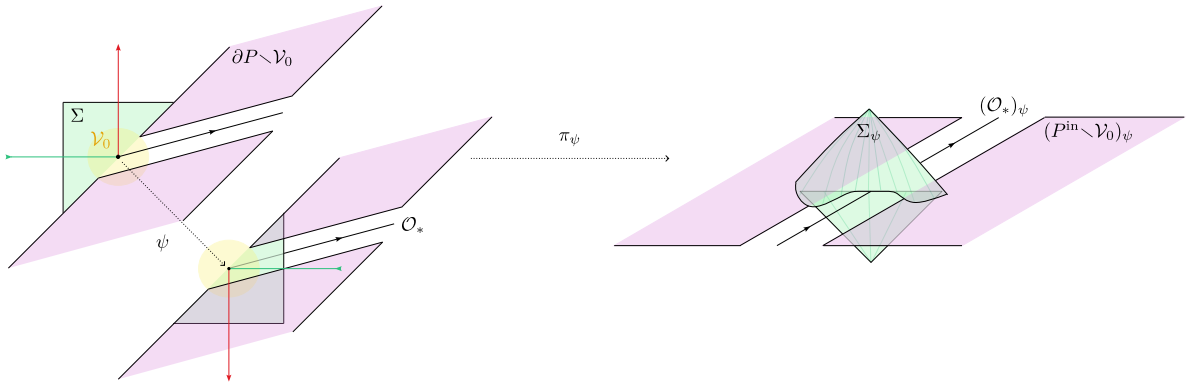


FIGURE 6.1 – Section S_ψ

Énoncé et preuve de la proposition Si f_ψ est l'application de premier retour du flot de X_ψ sur S_ψ, alors on montre qu'elle a un comportement hyperbolique dans le *futur* de l'orbite des points $p \in \Sigma_\psi$. Plus précisément, la proposition suivante donne l'existence d'un entier *positif* $n^\star(p) \geq 0$ pour tout point $p \in S_\psi$, uniformément majoré, tel que l'itéré $f_\psi^{n^\star}$ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de p pour la paire (C_ψ^s, C_ψ^u) de la proposition 5.1.4.

Proposition 6.1.1. *Il existe un entier* $\mathbf{N} \geq 0$ *tel que, pour tout* $p \in S_\psi$*, si* T_p *est le (ou un des) plan(s) tangent(s) à* S_ψ *en* p*, il existe un entier* $n^\star = n^\star(p, T_p)$ *avec* $0 \leq n^\star \leq \mathbf{N}$*, et un plan tangent* $T_q = T_q(p, T_p)$ *à* S_ψ *en* $q = f_\psi^{n^\star}(p) \in S_\psi$ *tel que :*

1) $(f_\psi^{n^\star})_* C_\psi^u(p, T_p) \subset \operatorname{int} C_\psi^u(q, T_q)$*, et pour tout* $v \in C_\psi^u(p, T_p)$*,* $\|(f_\psi^{n^\star})_* v\| \geq 2\|v\|$

2) $(f_\psi^{n^\star})_*^{-1} C_\psi^s(q, T_q) \subset \operatorname{int} C_\psi^s(p, T_p)$*, et pour tout* $v \in C_\psi^s(q, T_q)$*,* $\|(f_\psi^{n^\star})_*^{-1} v\| \geq 2\|v\|$

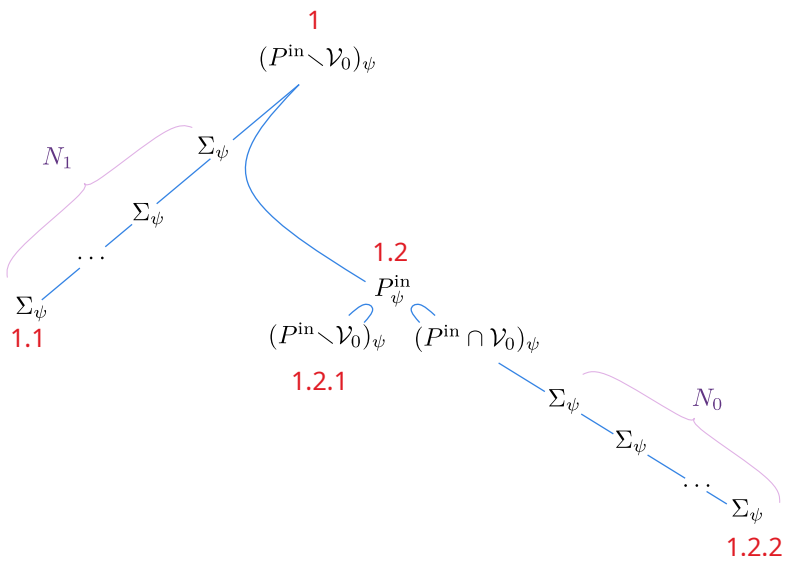
Démonstration. Remarquons que f_ψ est une restriction de $f_{0,\psi}$ au départ et à l'arrivée. On peut utiliser exclusivement les résultats de la proposition 5.1.4 sur l'application de retour $f_{0,\psi}$ du flot de X_ψ sur la section $S_{0,\psi}$. Si $p \in S_\psi$, et si $q \in S_\psi$ est sur l'orbite de p, alors il existe n et m tel que $f_\psi^n(p) = q = f_{\psi,0}^m(p)$ et $n \leq m$. En effet f_ψ ne "voit pas" les passages sur $(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$. On va faire une disjonction des cas en fonction du point de départ p sur la section S_ψ, et de la trajectoire de son orbite. On représente la disjonction des cas par les graphes de la figure 6.2.

1. **Soit** $p \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$ **et** $T_p = T_p^{\text{in}}$**.** Deux cas sont possibles selon que l'orbite future de p par le flot de X_ψ intersecte suffisamment de fois la section Σ_ψ sans intersecter P_ψ^{in} pour avoir la stricte invariance et dilatation des cônes, ou qu'elle intersecte P_ψ^{in} avant. Ce nombre de retour est l'entier N_1 qui satisfait l'item 2 proposition 5.1.4.

   On fait la disjonction de cas suivante :

1.1. **Soit l'orbite de** p **par le flot de** X_ψ **intersecte** N_1 **fois consécutives** Σ_ψ **sans intersecter** P_ψ^{in}**.**
   Autrement dit $f_{0,\psi}^k(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, N_1$. Alors d'après l'item 2 proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour $n^\star(p) = N_1$ et $T_q = T_q^\Sigma$.

1.2. **Soit l'orbite de** p **par le flot de** X_ψ **intersecte** P_ψ^{in} **avant d'avoir intersecter** N_1 **fois** Σ_ψ**.**
   Autrement dit il existe $k_0 \leq N_1$ minimal tel que $f_{0,\psi}^{k_0}(p) \in P_\psi^{\text{in}}$. Alors deux cas sont possibles.



(a) Graphe des orbites dans le cas 1.

FIGURE 6.2 – Graphe des orbites de f_ψ sur S_ψ

1.2.1. **Soit $f^{k_0}_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$.**
D'après l'item 3 de la proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour $n^\star(p) = k_0 \leq N_1$ et le plan $T_q = T^{\text{in}}_q$.

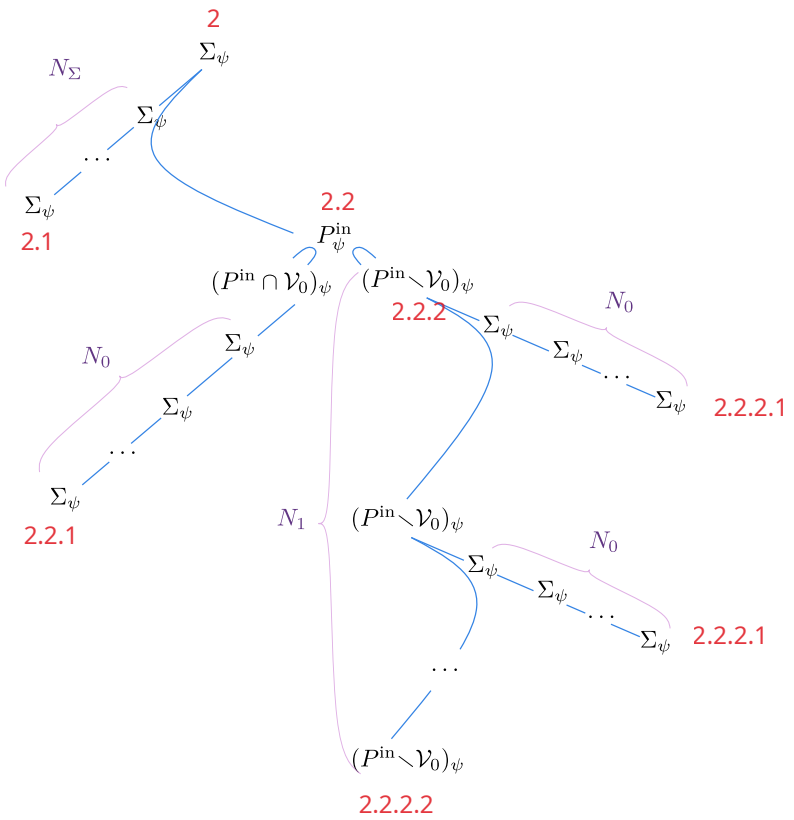
1.2.2. **Soit $f^{k_0}_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$.**
Alors d'après l'item 1 de la proposition 5.1.4, l'orbite future de $f^{k_0}_{0,\psi}(p)$ par le flot de X_ψ intersecte N_0 fois consécutives la section Σ_ψ sans intersecter P^{in}_ψ. Autrement dit $f^k_{0,\psi}\left(f^{k_0}_{0,\psi}(p)\right) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, N_0$.
Puis d'après l'item 4 de la proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour $n^\star(p) = N_0 + k_0 - 1 \leq N_0 + N_1 - 1$ et le plan $T_q = T^\Sigma_q$.
On remarquera que le point d'arrivée q sur Σ_ψ correspond à l'itéré $N_0 + k_0$ de l'orbite de p par $f_{0,\psi}$, et l'itéré $N_0 + k_0 - 1$ de l'orbite de p par f_ψ car dans le deuxième cas on ne compte pas le passage de l'orbite par $(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$.

2. **Soit $p \in \Sigma_\psi$, et $T_p = T^\Sigma_p$.** On fait une disjonction selon que l'orbite de p par le flot de X_ψ intersecte suffisamment de fois Σ_ψ sans intersecter P^{in}_ψ pour avoir la stricte invariance et dilatation des cônes, ou si elle intersecte P^{in}_ψ avant. Ce nombre de retour est l'entier N_Σ qui satisfait l'item 5 de la proposition 5.1.4.

2.1. **Soit l'orbite de p par le flot de X_ψ intersecte N_Σ fois consécutives sans intersecter P^{in}.**
Autrement dit $f^k_{0,\psi}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 0, \ldots, N_\Sigma$. Alors d'après l'item 5 de la proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour l'entier $n^\star(p) = N_\Sigma$ et le plan $T_q = T^\Sigma_q$.

2.2. **Soit l'orbite de p par le flot de X_ψ intersecte P^{in}_ψ avant.**
Autrement dit il existe $k_1 \leq N_\Sigma$ minimal tel que $f^{k_1}_{0,\psi}(p) \in P^{\text{in}}_\psi$. Alors deux cas sont possibles, selon que ce point d'intersection est dans le voisinage $(\mathcal{V}_0)_\psi$ ou non.

2.2.1. **Soit $f^{k_1}_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$.**



(b) Graphe des orbites dans le cas 2.

FIGURE 6.2 – Graphe des orbites de f_ψ sur S_ψ

Alors d'après l'item 1 de la proposition 5.1.4, l'orbite future de $f^{k_1}(p)$ par le flot de X_ψ intersecte N_0 fois consécutives la section Σ_ψ sans intersecter P^{in}_ψ. Autrement dit $f^k_{0,\psi}\left(f^{k_1}_{0,\psi}(p)\right) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \dots, N_0$.
Puis d'après l'item 7 de la proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour l'entier $n^\star(p) = N_0 + k_1 - 1 \leq N_0 + N_\Sigma - 1$ et le plan $T_q = T^\Sigma_q$.
On remarquera que le point d'arrivée q sur Σ_ψ correspond à l'itéré $N_0 + k_1$ de p par $f_{0,\psi}$, et l'itéré $N_0 + k_1 - 1$ de p par f_ψ, car dans le deuxième cas on ne compte pas le passage de l'orbite par $(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$.

2.2.2. **Soit $f^{k_1}_{0,\psi}(p) \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$.**
Notons $q_1 = f^{k_1}_{0,\psi}(p) = f^{k_1}_\psi(p)$. Soit l'orbite de q_1 intersecte suffisamment de fois consécutives la section Σ sans intersecter par P^{in}_ψ. Ce nombre de retour est l'entier N_0 qui satisfait l'item 2 de la proposition 5.1.4, et on aura la stricte invariance et dilatation des cônes. Soit l'orbite de q_1 intersecte P^{in}_ψ en un point q_2 avec moins de N_0 passages par Σ_ψ entre chaque. D'après l'item 1 de la proposition 5.1.4, le point d'intersection q_2 est dans $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_\delta)$. Dans ce cas, on peut réitérer cette dichotomie en remplaçant q_2 par q_1. Cette récurrence est finie car si l'orbite de q_1 intersecte suffisamment de fois $P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0$ sans intersecter $(P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_0)_\psi$, alors on a la stricte invariance et la dilatation des cônes. Ce nombre de retour est l'entier N_1 qui satisfait la proposition 5.1.4
Finalement la disjonction est la suivante.

2.2.2.1 **Soit l'orbite de p intersecte N_1 fois P^{in}_ψ avec strictement moins de N_0 passages par Σ_ψ entre**

chaque. Alors chaque passage par P^{in}_ψ a lieu dans $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$. Il existe $k_1 < \cdots < k_{N_1}$ tels que
- $k_i \leq i.N_0$
- $f^{k_i}_{\psi,0}(p) \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$
- $f^k_{\psi,0}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k \leq k_{N_1}$ et $k \neq k_1, \ldots, k_{N_1}$

D'après l'item 8 de la proposition 5.1.4, la proposition 6.1.1 est satisfaite pour l'entier $n^\star(p) = k_{N_1} \leq N_1 \times (N_0 - 1)$ et le plan $T_q = T^{\text{in}}_q$.

2.2.2.2 **Soit l'orbite de p intersecte strictement moins de N_1 fois P^{in}_ψ avec strictement moins de N_0 passages par Σ_ψ entre chaque, puis son orbite intersecte N_0 fois consécutive la section Σ_ψ sans intersecter P^{in}.** Alors chaque passage par P^{in}_ψ a lieu dans $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$. Il existe $m \leq N_1 - 1$ et $k_1 < \cdots < k_m$ tels que
- $k_i \leq i.N_0 \in (P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$
- $f^k_{\psi,0}(p) \in \Sigma_\psi$ pour $k \leq k_m$ et $k \neq k_1 \ldots, k_m$
- $f^k_{\psi,0}\left(f^{k_m}_{\psi,0}(p)\right) \in \Sigma_\psi$ pour $k = 1, \ldots, N_0$

On note $q_i = f^{k_i}(p)$ pour $i = 1, \ldots, m$. Notons que d'après l'item 6, $f^{k_1}_\psi$ envoie $C^u_\psi(p)$ à l'intérieur de $C^u_\psi(q_1)$ et son inverse envoie $C^s_\psi(q_1)$ à l'intérieur de $C^s_\psi(p)$. Ensuite, chaque passage de l'orbite de $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$ à $(P^{\text{in}} \setminus \mathcal{V}_0)_\psi$ contribue à envoyer le cône $C^u_\psi(q_i)$ à l'intérieur du cône $C^u_\psi(q_{i+1})$ et dilater la norme des vecteurs d'un facteur 2 d'après l'item 3. Il suffit donc de montrer qu'une orbite d'un point de Σ_ψ qui intersecte P^{in}_ψ puis intersecte N_0 fois la section Σ_ψ sans passer par P^{in}_ψ laisse les cônes C^u_ψ strictement invariants et dilatés, et de même pour l'action de l'itéré inverse sur les cônes C^s_ψ. C'est l'item 7 de la proposition 5.1.4. On en déduit que la proposition 6.1.1 est satisfaite pour l'entier $n^\star(p) = N_0 + k_m \leq N_0 + (N_1 - 1) \times N_0$, et le plan $T_q = T^\Sigma_q$.

□

Résultat additionnel Comme annoncé à la section 5.8, on a un résultat additionnel complémentaire. Il donne l'existence d'un entier *négatif* $\hat{n}^\star(p) \leq 0$ pour tout point $p \in S_\psi$, uniformément minoré, tel que l'itéré $f^{\hat{n}^\star}_\psi$ vérifie la condition des champs de cônes au voisinage de p pour la paire de champ de cônes $(\hat{C}^s_\psi, \hat{C}^u_\psi)$ donnée par la proposition 5.8.1. Cela signifie que le comportement de l'application $f^{\hat{n}^\star}$ est hyperbolique dans le *passé* des orbites.

Proposition 6.1.2. *Il existe un entier $\mathbf{N} \geq 0$ tel que, pour tout $p \in S_\psi$, si T_p est le (ou un des) plans tangents à S_ψ en p, il existe un entier $\hat{n}^\star = \hat{n}^\star(p, T_p)$ avec $-\mathbf{N} \leq \hat{n}^\star \leq 0$, et un plan tangent $T_q = T_q(p, T_p)$ à S_ψ en $q = f^{-\hat{n}^\star}_\psi(p) \in S_\psi$ tel que :*

1) $(f^{\hat{n}^\star}_\psi)_* \hat{C}^s_\psi(p, T_p) \subset \operatorname{int} \hat{C}^s_\psi(q, T_q)$, *et pour tout* $v \in \hat{C}^s_\psi(p, T_p)$, $\|(f^{\hat{n}^\star}_\psi)_* v\| \geq 2\|v\|$

2) $(f^{\hat{n}^\star}_\psi)^{-1}_* \hat{C}^u_\psi(q, T_q) \subset \operatorname{int} \hat{C}^u_\psi(p, T_p)$, *et pour tout* $v \in \hat{C}^u_\psi(q, T_q)$, $\|(f^{\hat{n}^\star}_\psi)^{-1}_* v\| \geq 2\|v\|$

La preuve est identique en utilisant la proposition 5.8.1.

6.2 Décomposition hyperbolique sur une section globale

Les deux propositions 6.1.1 et 6.1.2 vont permettre de construire une décomposition hyperbolique du fibré tangent de S_ψ (formule (6.1)) pour l'application de retour $f_\psi \colon S_\psi \to S_\psi$. Cela nous permettra de construire la décomposition hyperbolique du fibré tangent de P_ψ pour le flot de X_ψ à la section 6.3 suivante et de montrer que le champ de vecteurs est Anosov.

Montrons la proposition suivante qui donne l'existence d'une décomposition hyperbolique pour l'application de retour f_ψ sur S_ψ. De plus, les fibres de la direction forte sur deux plans tangents différents en un point $p \in S_\psi$ engendrent la même somme avec $\mathbb{R}.X_\psi$. Un champ de droites F sur S_ψ est la donnée, pour tout $p \in S_\psi$ et tout plan tangent $T^* = T_p^*$ à S_ψ en p, d'une droite $F(p, T^*) \subset T^*$.

Proposition 6.2.1. *Il existe une décomposition f_ψ-invariante $TS_\psi = F^u \oplus F^s$ en une somme de deux champs de droites, et des constantes $\lambda > 1$ et $C > 0$ telles que :*

1)
- $\forall v \in F^u,\ n \geq 0,\ \|(f_\psi^n)_* v\| \geq C\lambda^n \|v\|$
- $\forall v \in F^s,\ n \geq 0,\ \|(f_\psi^n)_* v\| \leq C^{-1}\lambda^{-n} \|v\|$

2) Si p est un point de S et T et T' sont deux plans tangents à S en p, alors,
- $F^u(p, T) \oplus \mathbb{R}.X_\psi = F^u(p, T') \oplus \mathbb{R}.X_\psi$,
- $F^s(p, T) \oplus \mathbb{R}.X_\psi = F^s(p, T') \oplus \mathbb{R}.X_\psi$

Démonstration. Dans la preuve on se contentera de montrer l'existence du fibré stable F^s, la preuve pour F^u étant similaire.

Étape 1 : Intersection infinie de cônes stables. Soit p un point de S et T le (ou un des) plan(s) tangent(s) à S en p. Alors il existe une suite de points particuliers sur l'orbite positive de p par f_ψ définie comme suit. Soit (p_k, T_k) et n_k, définis par récurrence par :

$$\begin{cases} (p_0, T_0) = (p, T), \\ (p_{k+1}, T_{k+1}) = \left(f_\psi^{n^\star(p_k, T_k)}(p_k),\ T_{p_{k+1}}(p_k, T_k)\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} n_0 = n^\star(p, T), \\ n_{k+1} = n^\star(p_k, T_k) \end{cases} \tag{6.2}$$

où $n^\star(p, T)$ est l'entier et $T_q(p, T)$ est le plan tangent satisfaisant la proposition 6.1.1 pour la donnée de (p, T). On rappelle que d'après la proposition 6.1.1,

1) la suite n_k est borné par un entier $\mathbf{N}$,

2) $f_\psi^{n_k}$ envoie le cône $C_\psi^u(p_k, T_k)$ à l'intérieur de $C_\psi^u(p_{k+1}, T_{k+1})$ et dilate la norme des vecteurs de $C_\psi^u(p_k, T_k)$ d'un facteur 2,

3) $\left(f_\psi^{n_k}\right)^{-1}$ envoie le cône $C_\psi^s(p_{k+1}, T_{k+1})$ à l'intérieur de $C_\psi^s(p_k, T_k)$ et dilate la norme des vecteurs de $C_\psi^s(p_{k+1}, T_{k+1})$ d'un facteur 2,

On définit L_k la restriction de la différentielle de $f_\psi^{n_k}$ au plan T_k au départ et T_{k+1} à l'arrivée, autrement dit

$$L_k := d_{p_k} f_\psi^{n_k} : T_k \to T_{k+1} \tag{6.3}$$

C'est une famille d'applications linéaires inversibles. On définit

$$F^s(p, T) := \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(L_0^{-1} \circ \cdots \circ L_k^{-1}\right)_* C_\psi^s(p_k, T_k) \subset C_\psi^s(p, T) \tag{6.4}$$

Par stricte invariance des cônes stables C_ψ^s pour les itérés $f_\psi^{-n^\star}$, cette intersection infinie est un cône inclus dans $C_\psi^s(p, T)$. En répétant cette opération pour chaque point et plan tangent (p, T) de S_ψ, on obtient un fibré en cônes $F^s = \{F^s(p, T)\}$ sur S_ψ. Alors on a pour tout $k \geq 0$:

$$F^s(p_{k+1}, T_{k+1}) = L_k F^s(p_k, T_k) \quad \text{et} \quad \forall v \in F_k^s,\ \|L_k v\| \leq \frac{1}{2}\|v\| \tag{6.5}$$

La première égalité découle de la formule (6.4) définissant F^s par une intersection infinie. L'inégalité qui suit est vraie car $F^s(p_k, T_k) \subset L_k^{-1} C_\psi^s(p_{k+1}, T_{k+1})$ par (6.4), et L_k^{-1} dilate d'un facteur 2 la norme des vecteurs de $C_\psi^s(p_{k+1}, T_{k+1})$ (item 3 précédent).

Étape 2 : Fibré en droite.

Fait 6.2.2. *F^s est un fibré en droite.*

Démonstration. Soit (p, T) fixé, (p_k, T_k, n_k) la suite associée par la formule (6.2). On note $F_k^s = F^s(p_k, T_k)$ la famille de cônes définis par la formule (6.4), et $L_k \colon T_k \to T_{k+1}$ la famille d'applications linéaires inversibles définies par la formule (6.3). D'après la formule (6.5), $\{F_k^s\}_k$ est une collection de cônes (exactement) invariante par $\{L_k\}_k$, et dont la norme des vecteurs est contractée uniformément par $\{L_k\}_k$. Par l'absurde, supposons que F_0^s est non réduit à une droite. Alors il en est de même pour F_k^s et on note F_k^1 et F_k^2 les deux droites disjointes qui constituent le bord de F_k^s, et tel que $L_k F_k^i = F_{k+1}^i$. Par suite, tout vecteur $v \in T$ se décompose de façon unique sous la forme $v = v_1 + v_2 \in F^1 \oplus F^2$, et on a en itérant l'inégalité dans la formule (6.5)

$$\|L_n \circ L_{n-1} \circ \cdots \circ L_0(v)\| \leq 2^{-n}(\|v_1\| + \|v_2\|) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6.6}$$

Autrement dit, la norme d'un vecteur quelconque tend vers 0 sous l'action de $\{L_k\}_k$. Or il existe une direction invariante dilatée par $\{L_k\}_k$: il suffit d'itérer une direction quelconque dans le champ instable $C_\psi^u(p, T)$. Plus précisément, d'après la proposition 6.1.1, et par définition de (p_k, T_k, n_k) à la formule (6.2) et L_k à la formule (6.3), on a $L_k\, C_\psi^u(p_k, T_k) \subset \operatorname{int} C_\psi^u(p_{k+1}, T_{k+1})$ et pour tout $v_k \in C_\psi^u(p_k, T_k)$, $\|L_k v_k\| \geq 2\|v\|$. On en conclut en itérant l'inégalité pour $v \in C_\psi^u(p, T) \subset T$:

$$\|L_n \circ L_{n-1} \circ \cdots \circ L_0(v)\| \geq 2^n \|v\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ce qui est une contradiction avec la formule (6.6). □

Étape 3 : Contraction exponentielle. Montrons que le fibré F^s est contracté par un itéré uniforme de f_ψ.

Fait 6.2.3. *Il existe un entier $\mathbf{N}_0$, tel que pour tout $p \in S_\psi$ et $T \subset T_p S_\psi$ un plan tangent en p,*

$$\forall v \in F^s(p, T), \quad \|(f_\psi^{\mathbf{N}_0})_* v\| \leq \frac{1}{2}\|v\|$$

Démonstration. Soit (p, T) fixé, (p_k, T_k, n_k) la suite associée par la formule (6.2). On note $F_k^s = F^s(p_k, T_k)$ la famille de cônes définis par la formule (6.4), et $L_k \colon T_k \to T_{k+1}$ la famille d'applications linéaires inversibles définies par la formule (6.3). Soit $\mathbf{N}$ l'entier uniforme qui borne la suite $\{n_k\}_k$. Il existe une constante $\mathrm{cst} > 0$ qui borne la différentielle de f_ψ^i pour $0 \leq i \leq \mathbf{N}$. Soit un entier k_0 vérifiant

$$k_0 > \log_2 \mathrm{cst} + 1 \tag{6.7}$$

et soit $\mathbf{N}_0$ un entier supérieur à $k_0.\mathbf{N}$. Alors on peut décomposer $f_\psi^{\mathbf{N}_0}$ au voisinage de p sous la forme $f_\psi^{\mathbf{N}_0} = f_\psi^i \circ f_\psi^{n_k} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0}$, avec $k \geq k_0$ et $0 \leq i \leq \mathbf{N}$. Alors en itérant l'inégalité de la formule (6.5) (avec $L_k = d_{p_k} f_\psi^{n_k}$) pour un $v \in F^s$, on a

$$\begin{aligned}
\|(f_\psi^{\mathbf{N}_0})_* v\| &= \|(f_\psi^i \circ f_\psi^{n_k} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0})_* v\| \\
&\leq \mathrm{cst}\, \|(f_\psi^{n_k} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0})_* v\| \\
&\leq \mathrm{cst}\, 2^{-k} \|v\| && \text{d'après l'inégalité (6.5)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|v\| && \text{d'après l'inégalité (6.7)}
\end{aligned}$$

□

Étape 4 : Invariance. Montrons que F^s est un fibré f_ψ-invariant.

Fait 6.2.4. *Pour tout $p \in S_\psi$ et $T \subset T_pS_\psi$ un plan tangent en p, pour tout $j \geq 0$, si $q = f_\psi^j(p)$ et $T' \subset T_qS_\psi$ est un plan tangent en q, alors*

$$F^s(q, T') = (f_\psi^j)_* F^s(p, T)$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $F^s(q, T') \neq (f_\psi^j)_* F^s(p, T)$. Notons $F^1 = F^s(q, T')$ et $F^2 = (f_\psi^j)_* F^s(p, T)$. Ce sont deux droites de T'. On peut supposer sans perte de généralité que $0 \leq j \leq \mathbf{N}_0$. D'après le fait 6.2.3, on a pour $v_1 \in F^1$ et $n \geq 0$,

$$\|(f^{n\mathbf{N}_0})_* v_1\| \leq 2^{-n} \|v_1\|$$

et pour $v_2 \in F^2$ et $n \geq 0$

$$\|(f_\psi^{n\mathbf{N}_0})_* v_2\| = \|f_\psi^j (f_\psi^{\mathbf{N}_0})_*^n (f_\psi^{-j})_* v_2\| \leq \mathrm{cst}\, 2^{-n} \|v_1\|$$

Tout vecteur $v \in T'$ se décompose de façon unique sous la forme $v = v_1 + v_2 \in F^1 \oplus F^2$. On en déduit que la norme d'un vecteur $v \in T'$ quelconque sous l'action de $\{(f_\psi^{n\mathbf{N}_0})_*\}$ tend vers 0. Or il existe une direction invariante dilatée par la famille $\{(f_\psi^{n\mathbf{N}_0})_*\}_n$, il suffit d'itérer une direction quelconque dans le champ instable $C_\psi^u(q, T')$. Plus précisément, soit (q_k, T'_k, n_k) la suite définie par la formule (6.2) à partir de (q, T'). D'après la proposition 6.1.1 on a pour tout $k \geq 0$

- $(f_\psi^{n_k})_* C_\psi^u(q_k, T'_k) \subset \mathrm{int}\, C_\psi^u(q_{k+1}, T'_{k+1})$,
- pour tout $v \in C_\psi^u(q_k, T'_k)$, $\|(f_\psi^{n_k})_* v\| \geq 2\|v\|$.

Pour tout $n \geq 0$, il existe une unique décomposition de $f_\psi^{n\mathbf{N}_0}$ au voisinage de q' de la forme $f_\psi^{n\mathbf{N}_0} = f_\psi^i \circ f_\psi^{n_{k_n}} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0}$ avec $0 \leq i < \mathbf{N}_0$. De plus, $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il existe aussi une constante uniforme $\mathrm{cst} > 0$ qui borne la différentielle de f_ψ^i pour $0 \leq i \leq \mathbf{N}_0$. On en conclut que pour $v \in C_\psi^u(q, T') \subset T'$:

$$\begin{aligned}
\|(f_\psi^{n\mathbf{N}_0})_* v\| &= \|(f_\psi^i \circ f_\psi^{n_{k_n}} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0})_* v\| \\
&\geq \mathrm{cst}\, \|(f_\psi^{n_{k_n}} \circ \cdots \circ f_\psi^{n_0})_* v\| \\
&\geq \mathrm{cst}^{-1}\, 2^{k_n} \|v\| \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

C'est une contradiction. □

Étape 5 : Plans tangents engendrés. On a montré que F^s est un champ de droite f_ψ-invariant sur S_ψ, et exponentiellement contracté par f_ψ, autrement dit F^s vérifie l'item 1 de la proposition 6.2.1. Montrons que F^s vérifie l'item 2 de la proposition 6.2.1.

Fait 6.2.5. *Soit T et T' deux plans tangents en p dans T_pS_ψ, alors $F^s(p, T) \oplus \mathbb{R}.X_\psi = F^s(p, T') \oplus \mathbb{R}.X_\psi$.*

Démonstration. Soit $q = f_\psi(p)$ et T_q un plan tangent à S_ψ en q. Notons $L\colon T \to T_q$ et $L'\colon T' \to T_q$ les deux restrictions de la différentielle $d_p f_\psi$. Alors d'après le fait 6.2.4, $L(F^s(p,T)) = F^s(q,T_q) = L(F^s(p,T'))$. Or L et L' diffèrent à une projection parallèle à $\mathbb{R}.X_\psi$ près, autrement dit si $\pi\colon T \to T'$ est la projection sur T' parallèle à $\mathbb{R}.X_\psi$, alors on a $L = L' \circ \pi$. Comme L' est inversible, on en déduit que $\pi F^s(p,T) = F^s(p,T')$. L'égalité des sommes avec $\mathbb{R}.X$ est donc vérifiée. □

Il s'ensuit que le fibré F^s sur S_ψ satisfait la proposition 6.2.1. La preuve pour le fibré F^u est symétrique. Il faut utiliser la proposition 6.1.2, construire une suite dans l'orbite passée d'un point $p \in S_\psi$, l'itéré est donné par l'entier $\hat{n}^\star$, et l'action de la différentielle inverse sur la paire $(\hat{C}^s_\psi, \hat{C}^u_\psi)$. □

6.3 Preuve du théorème 1

Soit (P_0, X_0, φ_0) un bloc de construction sans attracteur ni répulseur, dont les laminations de bord sont remplissantes, muni d'un recollement fortement quasi-transverse. Soit (P, X, φ) le triplet normalisé fortement isotope à (P_0, X_0, φ_0) donnée par la proposition 2.1.10. Soit $\lambda_0, \epsilon_0, \delta_0$, les paramètres qui satisfont la proposition 5.1.4, et $\psi = \psi_{\lambda_0,\epsilon_0,\delta_0} : \partial P \to \partial P$ le recollement donné par la formule (5.1). D'après le fait 5.1.1, le triplet (P, X, ψ) est fortement isotope à (P, X, φ) (donc à (P_0, X_0, φ_0)). Soit $P_\psi = P/\psi$ la variété compacte de dimension 3 et X_ψ le champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ induit par X sur P_ψ. On va montrer que le champ de vecteurs X_ψ sur P_ψ est Anosov, ce qui prouve le théorème 1. On aura besoin du lemme général suivant.

Lemme 6.3.1. *Soit Y un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur une variété fermée $\mathcal{M}$ de dimension trois, tel que la différentielle du flot de Y préserve deux champs de plans continus E^{cs} et E^{cu} sur $\mathcal{M}$, tangents à Y, et transverse l'un à l'autre. De plus Y^t contracte exponentiellement l'aire de E^{cs} et dilate exponentiellement l'aire de E^{cu} pour $t \geq 0$. Alors Y est un champ de vecteurs Anosov sur $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Montrons l'existence de la direction instable forte $E^{uu} \subset E^{cu}$. Soit V un champ de vecteurs tangent à E^{cu} et transverse au champ Y sur E^{cu}, tel que le couple (V, Y) forme une base de champs de vecteurs de E^{cu}. Notons $L^t := Y^t_*|_{E^{cu}}$. La matrice de L^t dans la base (V, Y) est

$$M_{(V,Y)}L^t = \begin{pmatrix} a_t & 0 \\ b_t & 1 \end{pmatrix}$$

où a_t et b_t sont des fonctions continues de $\mathcal{M}$ et bornées à t fixé. Montrons que L^t vérifie la condition des champs de cônes. Par hypothèse, il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 1$ tel que

$$\mathrm{Jac}(L^t) = |a_t| \geq C\lambda^t$$

Quitte à changer la métrique, on peut supposer que $\inf |a_1| > 1$. On suppose que b_1 est non uniformément nulle, sinon le lemme est montré : la direction instable forte E^{uu} est la direction engendrée par V. On définit

$$K := 2\,\frac{\sup |b_1|}{\inf |a_1| - 1} > 0 \tag{6.8}$$

Soit C^u le champ de K-cône sur E^{cu} dans la base (V, Y).

Fait 6.3.2. *Pour tout $n \geq 1$, on a $L^n C^u \subset \mathrm{int}\, C^u$, et L^n dilate exponentiellement la norme des vecteurs de C^u.*

Démonstration. En effet, soit $v = v^u V + v^Y Y \in C^u$, on a donc $|v^Y| \leq K|v^u|$. Alors $L^1 v = a_1 v^u V + (b_1 v^u + v^Y)Y$ et

$$\frac{|b_1 v^u + v^Y|}{|a_1 v^u|} \leq \frac{|b_1|K^{-1} + 1}{|a_1|} K < K$$

Donc $L^1 v$ est à l'intérieur de C^u. On en déduit la propriété pour L^n en écrivant $L^n = L^1 \circ \cdots \circ L^1$.

Soit n un entier positif et $L^n v = v_n^u V + v_n^Y Y = a_n v^u V + (b_n v^u + v^Y)Y$. On a

$$\begin{cases} |v_n^u| & \geq & (\inf |a_1|)^n |v^u| > 2|v^u|, & \forall n \geq \log_{\inf |a_1|}(2) \\ |v_n^u| & \geq & (\inf |a_1|)^n \frac{1}{K} |v^Y| > 2|v^Y|, & \forall n \geq \log_{\inf |a_1|}(2K) \end{cases}$$

Donc $\max(|v_1^n|, |v_Y^n|) > 2\max(|v_1|, |v_Y|)$ pour n (uniformément) assez grand, ce qui prouve que L^n dilate de la norme des vecteurs de C^u d'un facteur 2 pour n supérieur à un certain entier n_0. Comme l'opérateur L^i est uniformément borné pour $0 \leq i \leq n_0$, on en déduit que L^n dilate exponentiellement de la norme des vecteurs de C^u en itérant $L^{kn_0+i} = L^i \circ L^{n_0} \circ \cdots \circ L^{n_0}$ □

Définissons

$$E^{uu}(p) := \bigcap_{n \geq 0} L^n C^u(Y^{-n}(p)) \subset C^u(p)$$

Fait 6.3.3. *E^{uu} est un champ de droites L^t-invariant, et exponentiellement dilaté par L^t pour $t \geq 0$.*

Démonstration. En effet, par construction E^{uu} est un champ de cônes dans le champ de plan E^{cu} sur $\mathcal{M}$, invariant par L^{-n} et exponentiellement contracté par L^{-n} pour $n \geq 0$. Or on sait que L^{-n} agit de façon isométrique sur la direction engendrée par Y, donc il existe une direction L^{-n}-invariante qui n'est pas contractée. Comme $\{L^{-n}\}_n$ est une famille d'applications linéaires inversibles en dimension deux, on en déduit que E^{uu} ne peut pas contenir deux champs de droites invariantes distinctes (ce sont les même arguments que la preuve de la proposition 6.1.1). C'est donc un champ de droites exponentiellement contracté par L^{-n}.

Supposons par l'absurde que $E_1 := E^{uu}(p)$ et $E_2 := L^t E^{uu}(Y^{-t}(p))$ sont distinctes pour un certain $t \in \mathbb{R}$ (que l'on peut supposer $|t| \leq 1$), alors les familles $\{L^{-n}E_1\}_n$ et $\{L^{-n}E_2\}_n$ sont deux champs de droites invariantes par L^{-n} et exponentiellement contractées pour $n \geq 0$. En effet, pour la deuxième famille, il suffit d'écrire que si $v \in E^2$ alors $L^{-n}v = L^{-t} \circ L^{-n}v'$ avec $v' \in E^{uu}(Y^{-t}(p))$ et utiliser le fait que L^t est uniformément bornée pour $|t| \leq 1$ et L^{-n} contracte exponentiellement E^{uu}. Par le même argument qu'au paragraphe précédent, on a une contradiction car la direction $\mathbb{R}.Y$ est une direction L^n-invariante qui n'est pas contractée. Donc E^{uu} est un fibré en droite L^t-invariant pour $t \in \mathbb{R}$, et exponentiellement dilaté pour $t \geq 0$. En effet, il suffit d'écrire pour $v \in E^{uu}$, $L^t v = L^r \circ L^{E(t)} v = L^r \circ (L^{-E(t)})^{-1} v$ et utiliser que L^r est uniformément bornée pour $r \in [0, 1]$ et L^{-n} contracte exponentiellement E^{uu} pour $n \geq 0$. □

On en conclut que E^{uu} est le fibré instable fort de Y. On montre de la même façon l'existence du fibré stable fort E^{ss} de Y. On en déduit que Y est un champ de vecteurs Anosov sur $\mathcal{M}$. □

Le corollaire suivant est le résultat final de la preuve du théorème 1.

Corollaire 6.3.4. *X_ψ est un champ de vecteurs Anosov sur P_ψ.*

Démonstration. Soit S_ψ la section globale dans P_ψ pour le flot de X_ψ donnée à la formule (6.1) et f_ψ le premier retour de X_ψ sur S_ψ. Soit $TS_\psi = F^u \oplus F^s$ la décomposition du fibré tangent à la section S_ψ donnée par la proposition 6.2.1. On définit en tout point $p \in S_\psi$ le plan tangent dans

T_pP_ψ par $E^{cu}(p) := F^u(p) \oplus \mathbb{R}.X_\psi(p)$. La proposition 6.2.1 assure que cette définition ne dépend pas du choix d'un plan tangent $T^* \subset T_pS_\psi$ en p. Soit $p \in P_\psi$. Alors l'orbite de p intersecte S_ψ en temps uniformément borné, et soit $\tau(p) \geq 0$ le premier temps positif tel que $q = X_\psi^{\tau(p)}(p) \in S_\psi$. On définit pour tout $p \in P_\psi$,

$$E^{cu}(p) := (X_\psi^{-\tau(p)})_* E^{cu}(q)$$

Cette définition donne un champ de plans E^{cu} en tout point de P_ψ.

Fait 6.3.5. *E^{cu} est un champ de plan X_ψ^t-invariant, et dont l'aire est exponentiellement dilatée par la différentielle du flot de X_ψ^t*

Démonstration. En effet, l'invariance de E^{cu} par la différentielle du flot de X_ψ est assurée par l'invariance de F^u par l'application de premier retour f_ψ sur S_ψ d'après la proposition 6.2.1. Soit V un champ de vecteurs unitaire tangent à F^u en tout point de S_ψ. Par transversalité de S_ψ et de X_ψ, le couple (V, X_ψ) forme une base de champs de vecteurs au plan E^{cu} en tout point de S_ψ. La matrice de la différentielle de X_ψ^t restreinte à E^{cu} dans la base (V, X) est de la forme

$$M_{(V,X_\psi)}(X_\psi^t)_*|_{E^{cu}} = \begin{pmatrix} a_t & 0 \\ b_t & 1 \end{pmatrix}$$

où a_t et b_t sont des fonctions continue sur S_ψ. Par compacité, ces fonctions sont uniformément bornées à t fixé. D'après la proposition 6.2.1, il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 0$ tel que pour tout $p \in S_\psi$, si τ est le temps de premier retour sur la section S_ψ, alors $|a_{\tau^n(p)}| > C\lambda^n$. Le flot retourne en temps uniformément borné sur S_ψ, donc la différentielle de X_ψ^t est uniformément bornée entre deux passages sur la section. On en déduit que pour tout $p \in P_\psi$ et $t \geq 0$, quitte à changer la constante $C > 0$, on a $|a_t| > C\lambda^t$. Donc la différentielle de X_ψ^t dilate exponentiellement l'aire de E^{cu} pour tout $t \geq 0$. □

On montre de même l'existence d'un champ de plan E^{cs} sur P_ψ, invariant par la différentielle du flot de X_ψ, transverse à E^{cu} et dont l'aire est exponentiellement contractée par X_ψ^t pour $t \geq 0$. Alors (P_ψ, X_ψ) vérifie le lemme général 6.3.1, ce qui prouve le corollaire. □

6.4 Critère de transitivité

On rappelle qu'un ensemble compact hyperbolique Λ pour un champ de vecteurs X est dit *transitif* si il existe une orbite dense du flot de X dans Λ. Un bloc de construction (P, X) est dit *transitif* si le maximal invariant $\Lambda := \cap_t X^t(P)$ est un ensemble transitif pour le flot de X. Un champ de vecteurs Anosov Y sur une variété fermée N est dit *transitif* si N est un ensemble transitif pour le flot de Y. Dans cette courte sous-section, on donne un critère analogue à [BBY17], proposition 1.6, qui permet de déterminer la transitivité d'un flot d'Anosov obtenu par recollement de bloc de construction. Soit (P, X) un bloc de construction et Λ le maximal invariant de X dans P, et soit $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ la décomposition de Λ en *pièces basiques* ([Sma67]).

Définition 6.4.1. Soit $G = G(P, X, \varphi)$ le graphe orienté ayant pour sommet les pièces basiques $i = \Lambda_i$ et une arête orientée (i, j) si :

- soit $\mathcal{W}^u(\Lambda_i) \cap \mathcal{W}^s(\Lambda_j) \neq \varnothing$,
- soit $\varphi(\mathcal{W}^u(\Lambda_i)) \cap \mathcal{W}^s(\Lambda_j) \neq \varnothing$,
- soit $\mathcal{W}^u(\Lambda_i) \cap \varphi(\mathcal{W}^s(\Lambda_j)) \neq \varnothing$.

On a le critère suivant.

Proposition 6.4.2.

1) Si (P_0, X_0, φ_0) et (P_1, X_1, φ_1) sont deux triplets fortement isotopes, alors les graphes $G(P_0, X_0, \varphi_0)$ et $G(P_1, X_1, \varphi_1)$ sont isomorphes.

2) Si X_φ est un champ d'Anosov obtenu par recollement d'un triplet (P, X, φ) tel que le graphe orienté $G(P, X, \varphi)$ est fortement connexe[1], alors X_φ est transitif.

Démonstration de la proposition 6.4.2. Le premier item découle de la proposition 1.4.12. Quitte à faire une équivalence orbitale d'un des deux blocs, les blocs (P_0, X_0) et (P_1, X_1) ont un prolongement minime commun (proposition 1.4.12, item 1). Il s'ensuit que le maximal invariant Λ_{X_1} de X_1 et Λ_{X_2} de X_2 est le même. De plus, il existe un homéomorphisme $h : \partial P_1 \smallsetminus \mathcal{O}_* \to \partial P_0 \smallsetminus \mathcal{O}_*$ qui envoie la paire $(\mathcal{L}^s_{X_1}, (\varphi_1)_*(\mathcal{L}^u_{X_1}))$ sur la paire $(\mathcal{L}^s_{X_0}, (\varphi_0)_*(\mathcal{L}^u_{X_0}))$ et la paire $(\mathcal{L}^u_{X_1}, (\varphi_1)_*(\mathcal{L}^s_{X_1}))$ sur la paire $(\mathcal{L}^u_{X_0}, (\varphi_0)_*(\mathcal{L}^s_{X_0}))$ (proposition 1.4.12, item 3). Cela montre que les graphes $G(P_1, X_1, \varphi_1)$ et $G(P_0, X_0, \varphi_0)$ sont isomorphes.

Montrons le second item. Soit $P_\varphi := P/\varphi$ la variété quotient, $\pi_\varphi \colon P \to P_\varphi$ la projection, et $\Lambda_\varphi := \pi_\varphi(\Lambda)$. C'est un compact invariant hyperbolique pour le flot de X_φ dans P_φ. On note $\mathcal{L} = \mathcal{L}^u \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^s$ la *lamination de bord* sur ∂P. Le fait suivant découle immédiatement de la définition de Λ_φ.

Fait 6.4.3. *Les variétés invariantes de Λ_φ pour le flot de X_φ dans P_φ sont*

$$\mathcal{W}^s(\Lambda_\varphi) = \pi_\varphi\left(\mathcal{W}^s \bigcup \underset{t\leq 0}{\cup} X^t\left(\varphi_*\mathcal{L}^s\right)\right), \quad \mathcal{W}^u(\Lambda_\varphi) = \pi_\varphi\left(\mathcal{W}^u \bigcup \underset{t\geq 0}{\cup} X^t\left(\varphi_*\mathcal{L}^u\right)\right)$$

Soit $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ les pièces basiques de la décomposition de Smale de Λ. Ce sont les compacts hyperboliques transitifs maximaux de Λ. On note $\Lambda_{\varphi,i} = \pi_\varphi(\Lambda_i)$ la projection des pièces basiques de Λ dans Λ_φ. Ce sont des ensembles hyperboliques transitifs pour le flot de X_φ. D'après le fait, la variété stable de $\Lambda_{\varphi,i}$ contient $\mathcal{W}^s(\Lambda_i) \cup \varphi(\mathcal{W}^s(\Lambda_i))$ et sa variété instable contient $\mathcal{W}^u(\Lambda_i) \cup \varphi(\mathcal{W}^u(\Lambda_i))$. La forte connexité du graphe $G(P, X, \varphi)$ est équivalente à ce que les $\Lambda_{\varphi,i}$ soient toutes reliées par un cycle : pour tout i, j, il existe une suite $i_0 = i, \ldots, i_n = j$ tel que $\mathcal{W}^s(\Lambda_{\varphi,i_k}) \cap \mathcal{W}^u(\Lambda_{\varphi,i_{k+1}}) \neq \varnothing$ (avec $i_{n+1} = i_0$ par convention). On en déduit qu'elles forment une unique pièce basique ([Sma67]), autrement dit Λ_φ est transitif. Pour finir, soit O une orbite du flot de X_φ qui n'est pas incluses dans Λ_φ. Alors

Fait 6.4.4. *la variété stable $\mathcal{W}^s(O)$ intersecte $\varphi(\mathcal{L}^u)$ et la variété instable $\mathcal{W}^u(O)$ intersecte $\varphi(\mathcal{L}^s)$.*

En effet, si O n'est pas incluse dans Λ_φ, alors elle intersecte transversalement P^{out}_φ. La surface P^{out}_φ est feuilletée par une paire (f^s, f^u) de feuilletages transverses qui sont les intersections des feuilletages stable $\mathcal{F}^s$ et instables $\mathcal{F}^u$ du champ de vecteurs d'Anosov X_φ sur P_φ. De plus, f^u contient la lamination $\mathcal{L}^u_\varphi$. La variété stable $\mathcal{W}^s(O)$ intersecte P^{out}_φ le long d'une courbe l transverse f^u. Comme $(P^{\text{out}}, \mathcal{L}^u)$ est une lamination remplissante, il en est de même pour la projection $(P^{\text{out}}_\varphi, \mathcal{L}^u_\varphi)$, et on en déduit que $\mathcal{W}^s(O)$ intersecte $\mathcal{L}^u_\varphi$. La preuve pour la variété instable de O est symétrique. Par conséquent, chaque orbite O de X_φ a sa variété stable qui intersecte $\mathcal{W}^u(\Lambda_\varphi)$ et sa variété instable qui intersecte $\mathcal{W}^s(\Lambda_\varphi)$. On en conclut que la variété P_φ constitue une unique pièce basique, et donc le flot d'Anosov X_φ sur P_φ est transitif. □

1. on peut relier chaque sommet par un chemin d'arêtes orientées

Deuxième partie

Applications

Chapitre 7

Bloc de construction avec lamination de bord prescrite

Dans [BBY17, Théorème 1.10], il est montré que tout feuilletage Morse-Smale (autrement dit un feuilletage quasi-Morse-Smale sans feuilles marquées) sur le tore peut être réalisé (à équivalence topologique près) en tant que feuilletage de bord d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (P, X) orientable transitif attractif, autrement dit tel que l'ensemble maximal invariant Λ est un attracteur transitif pour le flot de X. Les blocs de construction que l'on considère dans ce chapitre seront connexes et orientables.

Définition 7.0.1 (Équivalence topologique de laminations)**.** Deux laminations $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sur les surfaces orientées S_1 et S_2 sont dites topologiquement équivalentes si il existe un homéomorphisme $h : S_1 \to S_2$ qui préserve l'orientation et tel que $h_*\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Dans ce chapitre on montre la proposition analogue suivante :

Proposition 7.0.2 (Proposition C)**.** *Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages quasi-Morse-Smale sur un tore orienté S_1 et un tore orienté S_2 respectivement, tel que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont un même nombre non nul de feuilles marquées. Alors il existe (P, X) un bloc de construction selle plein transitif, avec P connexe orienté, tel que ∂P est l'union de deux tores quasi-transverses T_1 et T_2, et la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ restreinte à T_i se complète en un feuilletage topologiquement équivalent à $\mathcal{F}_i$.*

Remarque 7.0.3. On rappelle qu'une orientation de P induit une orientation canonique sur le bord ∂P. La proposition dit qu'il existe un homéomorphisme $h_i : S_i \to T_i$ qui envoie $\mathcal{F}_i$ sur un feuilletage qui prolonge la lamination de bord et qui préserve l'orientation pour $i = 1, 2$.

Rappelons que la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ d'un bloc plein est, par définition, remplissante, donc se complète en un feuilletage qui est unique à équivalence orbitale près (les composantes connexes du complémentaires de la laminations sont des bandes, définition 1.2.12). On montrera également la proposition D énoncée dans l'introduction, qui donne un résultat de réalisation d'une paire de feuilletage quasi-transverses sur le tore en tant que trace des feuilletages stables et instables sur un tore quasi-transverse plongé dans un flot d'Anosov transitif.

Résumé du chapitre Le chapitre s'organise comme suit.

- Dans une première section 7.1, on explique comment généraliser le théorème de recollement (théorème 1) à des "recollement partiels", ce qui permettra de construire de nouveaux blocs de construction en recollant partiellement des blocs de construction le long de leur bord.

Le but est d'avoir un résultat général qui permet d'accumuler des blocs afin d'obtenir des propriétés dynamiques ou topologiques riches.

- Dans la section 7.2, on étudie les pré-feuilletages quasi-Morse-Smale (définition 1.2.4). On associe un *type combinatoire quasi-Morse-Smale* à un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale (définition 7.2.7 et 7.2.9). C'est un invariant de la classe d'équivalence topologique des feuilletages quasi-Morse-Smale (proposition 7.2.13).

- Dans la section 7.3, on montre un résultat préliminaire qui dit que tout feuilletage quasi-Morse-Smale se réalise (à équivalence topologique près) en tant que feuilletage de bord d'un bloc de construction selle plein *non transitif* (proposition 7.3.1).

  On construit pour commencer un bloc de construction (P, X) dont le bord consiste en l'union de deux tores de bord T_1 et T_2 quasi-transverses, contenant des orbites périodiques dont le nombre et l'orientation est compatible avec le type combinatoire donné et qui constituent la lamination de bord sur T_i, et une collection de tores T^{in} et T^{out} transverses au champ X (lemme 7.3.2). On recolle ensuite des blocs de Béguin-Bonatti-Yu attracteurs et répulseurs le long des tores de T^{in} et T^{out} avec des feuilletages de bord prescrits (lemme 7.3.4). Ce recollement doit être fait d'une manière à induire sur les tores quasi-transverses des feuilletages dont le type combinatoire est prescrit. On utilise pour cela les propriétés des blocs de construction obtenus par recollement partiel (section 7.1).

- Dans la section 7.4 on montre un résultat général qui permet, à partir d'un bloc de construction (P, X) non transitif vérifiant une hypothèse sur son graphe de Smale, de créer un bloc de construction (P', X') selle, plein, transitif et tel que les laminations de bord de (P, X) et (P', X') se complètent en des feuilletages topologiquement équivalents. Cette méthode consiste à faire des chirurgies de type *Éclatement–Excision–Recollement* de [BBY17, Section 8]. L'idée est de créer une collection de bords transverses par une bifurcation Dérivé d'Anosov sur des orbites périodiques, puis excision de petit voisinage tubulaire dont le bord est transverse au flot, et ce dans chacune des pièces basiques non triviale de (P, X). On recolle ensuite ces bords de sorte à créer des cycles dans le graphe G associé au triplet (définition 6.4.1). On utilise alors le critère de transitivité 6.4.2. On montre que la proposition 7.0.2 découle de ce résultat général et du résultat de la section précédente.

- Dans la section 7.5, on montre la proposition D, qui est un corollaire de la proposition 7.0.2 et du théorème de recollement.

7.1 Recollements partiels

Dans cette section, on généralise le théorème 1 à des "recollement partiels", ce qui permettra de construire de nouveaux blocs de construction en recollant des blocs de construction le long d'une partie de leurs composantes de bord. Le but est d'avoir un résultat général qui permet d'accumuler des blocs, puis de recoller en un flot d'Anosov avec des propriétés dynamiques et topologiques riches. Soit (P, X) un bloc de construction, $\partial_1 P$ une union de composantes connexes de ∂P, et $\varphi : \partial_1 P \to \partial_1 P$ un difféomorphisme.

Définition 7.1.1. On dit que $\varphi\colon \partial_1 P \to \partial_1 P$ est un :

- *recollement partiel* d'un bloc de construction (P, X) si il vérifie les hypothèses de la définition 1.3.1 sur le sous-ensemble $\partial_1 P$.

- *recollement partiel dynamique* d'un bloc de construction (P, X) si il vérifie les hypothèses de la définition 1.3.3 sur le sous-ensemble $\partial_1 P$.

Propriétés d'un bloc de construction obtenu par recollement partiel Si $\partial_1 P$ n'est pas égal à ∂P alors le quotient $P/\varphi =: P_\varphi$ est une variété à bord orientable. Si φ est un recollement dynamique partiel, la variété à bord est munie d'un champ de vecteurs X_φ de classe $\mathcal{C}^1$ induit par X, et qui est quasi-transverse au bord ∂P_φ. Notons $(N, Y) = (P_\varphi, X_\varphi)$ le couple ainsi construit. La proposition suivante donne l'expression du bord ∂N et du maximal invariant $\Lambda_Y := \cap_t Y^t(N)$ en fonction de ∂P, Λ_X et φ. De plus, si Λ_Y est un ensemble hyperbolique d'indice $(1, 1)$ pour Y, autrement dit si (N, Y) est un bloc de construction, on peut calculer les variétés invariantes $\mathcal{W}_Y^{s,u}$ et la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ de (N, Y) à partir de celles de (P, X) et du recollement. On note $f_{\text{out,in}} \colon P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de X (formule (3.1.1)). Le dernier item donne un critère de transitivité.

Proposition 7.1.2. *Soit $(N, Y) = (P_\varphi, X_\varphi)$ un couple formé d'une variété compacte à bord de dimension 3, et d'un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$, obtenu en recollant partiellement le bloc de construction (P, X) par le recollement partiel $\varphi \colon \partial_1 P \to \partial_1 P$. On a*

1) (bord) $\partial N = \partial P \smallsetminus \partial_1 P$ *et le champ Y sur ∂N coïncide avec le champ X sur $\partial P \smallsetminus \partial_1 P$.*

2) (maximal invariant) $\Lambda_Y = \pi_\varphi \left(\Lambda_X \cup \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t(\mathcal{L}_X \cap \varphi_* \mathcal{L}_X) \right)$

De plus, si (N, Y) est un bloc de construction alors, si on note $\mathcal{W}_Y^s$, $\mathcal{W}_Y^u$ les variétés stables et instables de Λ_Y et, $\mathcal{L}_Y$ la lamination de bord de (N, Y) on a

3) (variétés invariantes)

- $\mathcal{W}_Y^s = \pi_\varphi \left(\mathcal{W}_X^s \cup \bigcup_{t \leq 0} X^t \left(\varphi_* \mathcal{L}_X^s \right) \right)$
- $\mathcal{W}_Y^u = \pi_\varphi \left(\mathcal{W}_X^u \cup \bigcup_{t \geq 0} X^t \left(\varphi_* \mathcal{L}_X^u \right) \right)$

4) (lamination de bord) $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_X \cup f_{\text{out,in}*}(\varphi_* \mathcal{L}_X^u) \cup f_{\text{out,in}*}^{-1}(\varphi_* \mathcal{L}_X^s)$

5) (transitivité) *(N, Y) est un bloc transitif si et seulement si le graphe $G(P, X, \varphi)$ (définition 6.4.1) est fortement connexe.*

Pour simplifier, on sous-entend les ensembles de définitions des applications φ, $f_{\text{out,in}}$ et son inverse, et X^t selon que $t > 0$ ou $t < 0$ dans les expressions précédentes, autrement dit

- $\varphi(*)$ signifie $\varphi(* \cap \partial_1 P)$,
- $f_{\text{out,in}}(*)$ signifie $f_{\text{out,in}}(* \cap (P^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{L}^s))$,
- $f_{\text{out,in}}^{-1}(*)$ signifie $f_{\text{out,in}}(* \cap (P^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{L}^u))$, etc.

Démonstration. 1) C'est évident.

2) Il suffit de voir que si $\tilde{p} \in \mathcal{L}_X \cap P^{\text{in}} = \mathcal{L}_X^s$, alors l'orbite positive par le flot X^t est définie pour tout $t \geq 0$, et si $\tilde{p} \in (\varphi_* \mathcal{L}_X) \cap P^{\text{in}}$, alors $\tilde{q} = \varphi^{-1}(\tilde{p}) \in \mathcal{L}_X \cap P^{\text{out}} = \mathcal{L}_X^u$ et l'orbite négative de $\tilde{q}$ par le flot X^t est définie pour tout $t \leq 0$. On en déduit l'item par projection dans $N = \pi_\varphi(P)$.

3) Il suffit d'utiliser l'expression du maximal invariant de l'item précédent.

4) Il suffit d'utiliser l'expression des variétés invariantes de l'item précédent.

5) La preuve est similaire à celle de la proposition 6.4.2.

□

Généralisation du théorème de recollement à un recollement partiel La proposition suivante est une généralisation du théorème 1, et donne des conditions suffisantes pour qu'un recollement partiel d'un bloc de construction (P, X) soit encore un bloc de construction. On généralise naturellement la définition d'un recollement fortement quasi-transverse (définition 1.3.5), d'un recollement normalisé 2.1.8 et d'un triplet fortement isotope (définition 1.4.9) à des recollements partiels.

Proposition 7.1.3. *Soit (P_0, X_0, φ_0) un bloc de construction selle (plein), muni d'un recollement partiel $\varphi_0 \colon \partial_1 P_0 \to \partial_1 P_0$ qui renverse l'orientation, tel que la lamination de bord $\mathcal{L}$ est remplissante sur $\partial_1 P_0$, et φ_0 est fortement quasi-transverse sur $\partial_1 P_0$. Alors il existe un triplet (P, X, φ) fortement isotope à (P_0, X_0, φ_0) tel que $P_\varphi := P/\varphi$ est une variété à bord muni d'un champ de vecteurs X_φ induit par X, et le couple (P_φ, X_φ) est un bloc de construction selle (plein).*

Idée de preuve. On modifie le triplet (P_0, X_0, φ_0) par forte isotopie pour avoir un triplet normalisé (partiel) (P, X, φ), en utilisant un analogue de la proposition 2.1.10 pour les recollements partiels. Le chapitre 2 est identique en remplaçant ∂P par $\partial_1 P$. On assure ainsi que φ est un recollement dynamique partiel et P_φ est une variété compacte de dimension 3 à bord $\partial P_\varphi = \partial P \smallsetminus \partial_1 P$, et munie d'un champ de vecteurs X_φ induit par X qui est quasi-transverse au bord. Le but de la preuve est de prouver l'hyperbolicité du maximal invariant de (P_φ, X_φ) pour un bon choix de recollement φ. La proposition 7.1.2 donne l'expression du maximal invariant de (P_φ, X_φ) en fonction du maximal invariant de (P, X) et du recollement partiel φ.

L'étude des propriétés de l'application de passage (chapitre 3) et de la diffusion de l'hyperbolicité (chapitre 4) est identique car ne dépend pas du recollement. On considère ensuite la restriction des difféomorphismes de diffusion $\psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ et $\psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ sur $\partial_1 P$ et on définit le recollement partiel modifié $\psi_{\lambda,\epsilon,\delta} = \psi^{\text{in}}_{\lambda,\epsilon,\delta} \varphi \psi^{\text{out}}_{\lambda,\epsilon,\delta}$ sur $\partial_1 P$. Le but est de déterminer les paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ de $\psi_{\lambda,\epsilon,\delta}$ pour obtenir l'hyperbolicité du maximal invariant Λ_{X_ψ} de (P_ψ, X_ψ). Le reste de la preuve qui consiste à choisir astucieusement les paramètres de la diffusion et montrer une condition de champ de cônes pour l'application de retour sur une section bien choisie est identique, à ceci près que l'on considérera au chapitre 5 une section $S_{0,\psi}$ dans P_ψ qui n'est pas formellement une section globale du flot de X_ψ, mais une section locale du maximal invariant Λ_{X_ψ} dans (P_ψ, X_ψ). Cette section est construite en prenant l'union d'une section locale transverse Σ de Λ_X et du sous-ensemble $\partial_1 P \smallsetminus \mathcal{O}_* \subset \partial P \smallsetminus \mathcal{O}_*$, et en projetant dans P_ψ. On montre l'existence d'un choix de paramètres $\lambda, \epsilon, \delta$ et de champ de cônes sur $S_{0,\psi}$ invariants et dilatés le long de certaines orbites en reprenant en tout point la proposition 5.1.4 (et son analogue 5.8.1) et sa preuve. Ce choix de paramètre fixe le choix du recollement ψ, et permet de construire une section transverse locale S_ψ du maximal invariant Λ_{X_ψ} tel que les propositions 6.1.1 et 6.1.2 sont satisfaites, autrement dit tel que le premier retour du flot satisfait le condition des champs de cônes. Cette condition est équivalente à l'hyperbolicité du maximal invariant, ce que l'on montre avec les arguments similaire à la preuve de la proposition 6.2.1 et du lemme 6.3.1. □

Recollement partiel sans cycle Il existe une autre manière de construire des blocs de construction sans faire appel à la proposition 7.1.3 de généralisation du théorème de recollement, et qui permet de se passer des hypothèses "selle", "plein", et "recollement fortement quasi-transverse". C'est le cas particulier où il n'y a pas de *cycle* dans le recollement, c'est un analogue de [BBY17, Proposition 1.1]. L'argument est alors élémentaire, et repose essentiellement sur le *λ-lemma.* Plus précisément :

Proposition 7.1.4. *Soit (P, X) un bloc de construction muni d'un recollement partiel $\varphi \colon \partial_1 P \to \partial_1 P$, tel que si on note $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbites périodiques contenues dans ∂P alors :*

1) chaque orbite du flot de X dans $P \smallsetminus \mathcal{O}_*$ intersecte au plus une fois $\partial_1 P$,

2) $\varphi_* \mathcal{L}$ est une lamination quasi-transverse à $\mathcal{L}$ sur $\partial_1 P$.

Alors quitte à modifier (P, X, φ) par forte isotopie, le champ de vecteurs X induit un champ X_φ sur la variété $P_\varphi := P/\varphi$, tel que le couple (P_φ, X_φ) est un bloc de construction.

Démonstration. On modifie le triplet (P, X, φ) par forte isotopie pour avoir un triplet normalisé (partiel), en utilisant un analogue de la proposition 2.1.10 pour les recollements partiel. On assure ainsi que que φ est un recollement dynamique partiel et P_φ est une variété compacte de dimension 3 munie d'un champ de vecteurs X_φ induit par X. Notons $(N, Y) := (P_\varphi, X_\varphi)$. Soit $p \in \Lambda_Y$. Alors soit $p \in \pi_\varphi(\Lambda_X)$, soit l'orbite de p par le flot de Y intersecte l'ensemble $\pi_\varphi(\partial_1 P) =: (\partial_1 P)_\varphi$ (proposition 7.1.2). Par hypothèse (item 1 ci-dessus), cette intersection est unique. Dans le premier cas, on a une décomposition de l'espace tangent donnée par la projection de la décomposition hyperbolique de Λ_X pour X. Dans le deuxième cas, $p \in \Lambda_Y \cap (\partial_1 P)_\varphi$, et soit $\tilde{p} \in P^{\text{in}} \cap \partial_1 P$ un relevé de p dans P. Alors $\tilde{p} \in \mathcal{L}^s_X \cap \varphi_* \mathcal{L}^u_X$ (proposition 7.1.2, item 2) et on définit les plans tangents suivants en $\tilde{p}$:

$$E^{cs}(\tilde{p}) = T\mathcal{L}^s_X \oplus \mathbb{R}.X, \qquad \text{et} \qquad E^{cu}(\tilde{p}) = T\varphi_* \mathcal{L}^u_X \oplus \mathbb{R}.X \tag{7.1}$$

On obtient par projection dans P_φ la donnée de deux plan tangents E^{cu}_Y, E^{cs}_Y sur l'ensemble $\Lambda_Y \cap (\partial_1 P)_\varphi$ tangents au champ de vecteurs Y. Par l'hypothèse 2 ci-dessus, $\mathcal{L}^s$ est transverse à $\varphi_* \mathcal{L}^u$ sur $\partial_1 P$ donc les plans E^{cu} et E^{cs} sont transverses l'un à l'autre. On pousse ces plans tangents par le flot de X_φ sur $\Lambda_Y \smallsetminus (\Lambda_X)_\varphi$ de la façon suivante. Si $q \in \Lambda_Y \smallsetminus (\Lambda_X)_\varphi$, il existe un unique $p = Y^t(q) \in (\partial_1 P)_\varphi$ et on définit

$$E^{cu}_Y(p) = Y_*^{-t} E^{cu}_Y(Y^t(q)), \qquad \text{et} \qquad E^{cs}_Y(p) = Y_*^{-t} E^{cs}_Y(Y^t(q)) \tag{7.2}$$

Cela définit une collection Y^t-invariante de plans tangents de TN sur $\Lambda_Y \smallsetminus (\Lambda_X)_\varphi$. Montrons que l'aire de E^{cu}_Y est exponentiellement dilatée par Y^t pour $t \geq 0$. Soit $p \in (\partial_1 P)_\varphi \cap \Lambda_Y$, et $v \in E^{cu}_Y(p)$ un vecteur tangent à E^{cu} et transverse à X (uniformément en p). Soit $\tilde{p} \in P^{\text{in}} \cap \partial_1 P$ et $\tilde{v} \in E^{cu}(\tilde{p})$ des relevés dans P. Notons que $\tilde{p} \in \mathcal{L}^s$. Par définition de $E^{cu}(\tilde{p})$ à la formule (7.1), $\tilde{v}$ est tangent à $\varphi_* \mathcal{L}^u$ et transverse à $\mathcal{L}^s$. Soit $\hat{\mathcal{U}}$ un voisinage invariant muni d'une décomposition hyperbolique $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ pour le flot de X dans P donné par le corollaire 3.2.3. L'orbite positive de $\tilde{p}$ par X est incluse dans le voisinage $\hat{\mathcal{U}}$, définie pour tout $t \geq 0$ car elle s'accumule sur le maximal invariant Λ, et le vecteur $\tilde{v}$ est (uniformément) transverse à la direction stable faible $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ en $\tilde{p}$. D'après le λ-*lemma*, X^t dilate exponentiellement la norme du vecteur $\tilde{v}$ pour $t \geq 0$. En projetant dans P_φ il s'ensuit que Y_t dilate exponentiellement la norme de v pour $t \geq 0$. Regardons maintenant l'effet sur la norme du vecteur poussé dans le passé par le flot de Y. Le vecteur $\varphi_*^{-1}(v)$ est tangent à $\mathcal{L}^u$, donc à $\mathcal{W}^u_X$ en $\varphi^{-1}\tilde{p} \in P^{\text{out}}$. Notons que $\varphi^{-1}\tilde{p} \in \mathcal{L}^u$. L'orbite négative de $\varphi^{-1}(\tilde{p})$ par le flot de X est incluse dans $\hat{\mathcal{U}}$, définie pour tout $t \leq 0$ car elle s'accumule sur Λ, et le vecteur $\tilde{v}$ est transverse à la direction stable faible $E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X$ en $\varphi^{-1}(\tilde{p})$. D'après le λ-*lemma*, X^t contracte exponentiellement la norme du vecteur $\tilde{v}$ pour $t \leq 0$. En projetant dans P_φ il s'ensuit que Y^t contracte exponentiellement la norme de v pour $t \leq 0$. Comme Y^t agit isométriquement sur la direction $\mathbb{R}.Y \subset E^{cu}$, on en déduit que l'aire du champ de plans E^{cu}_Y est exponentiellement dilaté par Y^t pour $t \geq 0$. On montre de même que l'aire de E^{cs}_Y est exponentiellement contractée dans le passé, et on conclut avec un résultat général analogue au lemme 6.3.1 sur un compact invariant. □

Remarque 7.1.5. Si $\partial_1 P$ est transverse au champ de vecteurs X, alors on peut se passer de la forte isotopie du triplet (P, X, φ) dans la preuve de la proposition 7.1.4, car le recollement partiel φ est déjà un recollement partiel dynamique du bloc (P, X).

Remarque 7.1.6. Dans le cas où $\partial_1 P$ est l'union de deux composantes connexes transverses à X, l'une est une composante d'entrée et l'une est une composante de sortie, alors il est clair que le sous-ensemble $\partial_1 P$ satisfait les hypothèses de la proposition 7.1.4. Nous verrons dans la suite du chapitre qu'il existe des blocs de constructions (P, X) ayant une composante de bord $\partial_1 P$ qui n'est pas transverse au champ de vecteurs, et tel que toute orbite qui intersecte $\partial_1 P \setminus \mathcal{O}_*$ ne repasse jamais par $\partial_1 P$.

7.2 Type combinatoire de lamination quasi-Morse-Smale

On renvoie à la section 1.2 pour les définitions et résultats sur les laminations quasi-Morse-Smale et les laminations de bord de bloc de construction. Soit $\mathcal{L}$ une lamination quasi-Morse-Smale sur une surface fermée S, on note Γ les feuilles compactes et Γ_* les feuilles compactes marquées de $\mathcal{L}$, et $S \setminus \Gamma_* = S^{\text{in}} \cup S^{\text{out}}$ la décomposition donnée par la définition 1.2.4.

Définition 7.2.1 (Orientation dynamique)**.** Il existe une orientation des éléments de Γ tel que l'holonomie de chaque feuille compacte est dilatante sur S^{in} et contractante sur S^{out}. On dit que c'est une *orientation dynamique* de Γ. On dit que la lamination $\mathcal{L}$ munie d'une orientation dynamique des feuilles compactes Γ est une *lamination quasi-Morse-Smale dynamiquement orientée.*

Remarque 7.2.2. Dans le cas où l'ensemble Γ_* est vide, on a soit $S = S^{\text{in}}$, soit $S = S^{\text{out}}$. Dans le premier cas, l'orientation dynamique est telle que l'holonomie de toutes les feuilles compactes sont dilatante. Dans le deuxième cas, l'orientation dynamique est telle que l'holonomie de toutes les feuilles compactes sont contractante.

Remarque 7.2.3. Une telle lamination peut a priori contenir des feuilles compacte isolées, et il existe alors plusieurs orientations dynamiques. Dans les deux cas suivants, il existe une orientation dynamique canonique.

- Si $\mathcal{L}$ est un pré-feuilletage remplissant (définition 1.2.14) ou un feuilletage quasi-Morse-Smale, alors l'orientation dynamique des feuilles compactes Γ_* est unique, car chaque feuille compacte γ est accumulée de chacun de ses deux côtés par des feuilles non compactes de $\mathcal{L}$.

- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_X$ est la lamination de bord d'un bloc de construction (P, X), alors elle est munie d'une orientation dynamique canonique. On rappelle que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}^u$, avec $\mathcal{L}^s = \mathcal{W}^s \cap P^{\text{in}}$, et $\mathcal{L}^u = \mathcal{W}^u \cap P^{\text{out}}$. Si γ est une feuille compacte de $\mathcal{L}$, alors :

  - Soit $\gamma = \mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ est une orbite périodique de X, et elle est orientée par le flot.
  - Soit $\gamma \in \mathcal{L}^s$, alors c'est un cercle transverse aux orbites de X contenu dans une séparatrice stable d'une orbite périodique O. Il existe une unique orientation de γ telle que γ est librement homotope à l'orbite orientée O dans $\mathcal{W}^s(O)$.
  - Soit $\gamma \in \mathcal{L}^u$, alors c'est un cercle transverse aux orbites de X contenu dans une séparatrice instable d'une orbite périodique O. Il existe une unique orientation de γ telle que γ est librement homotope à l'orbite orientée O dans $\mathcal{W}^u(O)$.

  On renvoie à la preuve du fait 2.1.7. Cette orientation est une orientation dynamique de γ en tant que feuille compacte d'une lamination quasi-Morse-Smale au sens de la définition 7.2.1 (voir la preuve de 1.2.6).

Lemme 7.2.4. *Soit $\mathcal{L}$ un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale dynamiquement orienté sur un tore T. On note $\Gamma_{\mathcal{L}}$ les feuilles compactes, $\Gamma_{\mathcal{L},*}$ les feuilles compactes marquées, et $T^{\text{in}}_{\mathcal{L}} \cup T^{\text{out}}_{\mathcal{L}}$ la décomposition de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{L},*}$ associée. Il existe un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{F}$ sur T dynamiquement orienté, qui contient $\mathcal{L}$ en tant que sous-lamination et tel que, si on note $\Gamma_{\mathcal{F}}$ les feuilles compactes, $\Gamma_{\mathcal{F},*}$ les feuilles compactes marquées, et $T^{\text{in}}_{\mathcal{F}} \cup T^{\text{out}}_{\mathcal{F}}$ la décomposition de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{F},*}$ associée, alors*

1) $\Gamma_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{L}}$ *et* $\Gamma_{\mathcal{F},*} = \Gamma_{\mathcal{L},*}$ *(en tant qu'ensemble de chemins orientés)*

2) $T^{\text{in}}_{\mathcal{L}} = T^{\text{in}}_{\mathcal{F}}$ *et* $T^{\text{out}}_{\mathcal{L}} = T^{\text{out}}_{\mathcal{F}}$

Démonstration. D'après la proposition 1.2.11, une composante connexe de $T \setminus \mathcal{L}$ est soit homéomorphe à un anneau bordés par des feuilles compactes (éventuellement la même), soit c'est une bande (définition 1.2.12), autrement dit homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et bordé par deux feuilles non compactes asymptote l'une à l'autre à chaque extrémités (figure 1.9). Soit C une composante connexe de $T \setminus \mathcal{L}$.

- Si C est une bande, alors on prolonge la lamination $\mathcal{L}$ sur C par un feuilletage trivial $\mathcal{F}$ sur C en feuilles (non compactes) qui vont d'un bout à l'autre de la bande.
- Si C est un anneau, on note γ_1 et γ_2 les feuilles compactes de $\mathcal{L}$ qui bordent C, munie de l'orientation dynamique. Soit C est inclus dans $T^{\text{in}}_{\mathcal{L}}$, soit dans $T^{\text{out}}_{\mathcal{L}}$. On prolonge $\mathcal{L}$ par un feuilletage $\mathcal{F}$ sur C, sans feuille compacte, telle que chaque feuille de $\mathcal{F}$ s'accumule à chacune de ses extrémités sur une feuille compacte γ_i, et tel que l'holonomie de la feuille compacte orientée γ_i du bord de C pour ce feuilletage soit dilatante si C est inclus dans $T^{\text{in}}_{\mathcal{L}}$, contractante si C est inclus dans $T^{\text{out}}_{\mathcal{L}}$.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ ainsi construit vérifie le lemme 7.2.4. □

On en déduit à l'aide du théorème de Poincaré-Hopf :

Corollaire 7.2.5. *Soit $\mathcal{L}$ un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale sur le tore T. Les feuilles compactes de $\mathcal{L}$ sont non contractibles dans T, et elles sont deux à deux librement homotopes dans T en tant que chemins non orientés.*

En particulier, il existe un ordre cyclique des éléments de $\Gamma_{\mathcal{L}}$ sur T. Si T est orienté, la donnée d'une "première" feuille compacte dynamiquement orientée détermine un ordre cyclique.

Définition 7.2.6 (Énumération géométrique)**.** Soit $\mathcal{L}$ un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale dynamiquement orienté sur le tore T orienté. On dira que $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ est une *énumération géométrique* des feuilles compactes de $\mathcal{L}$ si la feuille γ_{i+1} est la feuille suivante de γ_i pour l'ordre déterminé par l'orientation dynamique de γ_0 et l'orientation de T.

Il y a autant d'énumération géométrique que de feuilles compactes.

Définition 7.2.7 (Type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait)**.** Un *type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait* σ est une application

$$\sigma \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \{\rightarrow, \leftarrow\} \times \{\uparrow, \downarrow\} \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\sigma(0) = (*, \uparrow, *)$

ii) $\sigma(i) = (*, *, \rightarrow) \iff \sigma(i+1) = (\leftarrow, *, *)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Notation 7.2.8. On désigne les alphabets par la notation $\mathscr{A}_H := \{\rightarrow, \leftarrow\}$ et $\mathscr{A}_O := \{\uparrow, \downarrow\}$. Si $\sigma\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathscr{A}_H \times \mathscr{A}_O \times \mathscr{A}_H$ est un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait, on désigne ses trois composantes par $\sigma = (\sigma_g, \sigma_o, \sigma_d)$,[1] et on notera $-\sigma := (\sigma_g, -\sigma_o, \sigma_d)$ où le signe $-$ signifie que l'on inverse le sens de la flèche.

Définition 7.2.9 (Type combinatoire d'un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale)**.** Soit $\mathcal{L}$ un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale dynamiquement orienté sur le tore T orienté. Soit $\Gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$ une énumération géométrique des feuilles compactes et $T \setminus \Gamma_* = T^{\text{in}} \cup T^{\text{out}}$ la décomposition associée à $\mathcal{L}$. Soit l'application

$$\sigma = \sigma_{\mathcal{L}}\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \{\rightarrow, \leftarrow\} \times \{\uparrow, \downarrow\} \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$$

définie par :

i) $\sigma(i) = (*, \uparrow, *)$ si et seulement si la feuille orientée γ_i est librement homotope à la feuille orientée γ_0.

ii) $\sigma(i) = (\rightarrow, *, *)$ si et seulement si le côté (local) gauche de γ_i est inclus dans T^{out} [2]

iii) $\sigma(i) = (*, *, \leftarrow)$ si et seulement si le côté (local) droit de γ_i est inclus dans T^{out}

On dit que σ est le *type combinatoire de $\mathcal{L}$ sur T*.

Exemple 7.2.10. Par exemple, un type combinatoire du feuilletage quasi-Morse-Smale de la figure 1.4 est

$$\leftarrow\uparrow\rightarrow; \quad \leftarrow\downarrow\rightarrow; \quad \leftarrow\uparrow\leftarrow; \quad \rightarrow\uparrow\rightarrow$$

où l'on donne la liste des valeurs de σ ordonnées de $i = 0$ à $i = 3$ suivant la figure de gauche à droite, en oubliant les virgules et les parenthèses du triplet.

Remarque 7.2.11. Si la feuille γ_i est accumulée à gauche par la lamination $\mathcal{L}$, alors l'item ii) est équivalent à dire que l'holonomie de $\mathcal{L}$ à gauche de γ_i est contractante pour l'orientation dynamique de γ_i. De même, si la feuille γ_i est accumulée à droite par la lamination $\mathcal{L}$, alors l'item iii) est équivalent à dire que l'holonomie de $\mathcal{L}$ à droite de γ_i est contractante pour l'orientation dynamique de γ_i. Cela justifie l'utilisation des symboles fléchés, et la notation $\mathcal{A}_H$ pour Holonomie et $\mathcal{A}_O$ pour Orientation.

Fait 7.2.12. *L'application $\sigma_{\mathcal{L}}$ est un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait. On a les égalités suivantes, via l'identification $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

1) $\Gamma_* = \{\sigma_g = \sigma_d\}$

2) $\Gamma \cap T^{\text{in}} = \{\sigma = (\leftarrow * \rightarrow)\}$

3) $\Gamma \cap T^{\text{out}} = \{\sigma = (\rightarrow * \leftarrow)\}$

Démonstration. Il est clair que $\sigma_{\mathcal{L}}(0) = (*, \uparrow, *)$ par définition. Soit A une composante connexe de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{L}}$. C'est un anneau bordé par deux feuilles compactes γ_i et γ_{i+1}, tel que γ_{i+1} est à droite de γ_i pour l'orientation de A induite par l'orientation de T. L'anneau A est soit inclus dans T^{in} soit inclus dans T^{out}. Il s'ensuit que $\sigma(i) = (*, *, \rightarrow)$ si et seulement si $\sigma(i+1) = (\rightarrow, *, *)$. Donc $\sigma_{\mathcal{L}}$ est un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait. Les items qui suivent découlent directement de la définition. □

1. pour gauche, orientation , droite (voir remarque 7.2.11)
2. l'orientation dynamique de γ_0 et l'orientation de T détermine un côté gauche et un côté droit pour chaque feuille compacte

Pour un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait σ, on notera $\Gamma_{*,\sigma} := \{\sigma_g = \sigma_d\}$, et on l'appellera par abus de langage l'ensemble des *feuilles marquées* de σ. Il suit de la définition 7.2.7 que cet ensemble est de cardinal pair. On rappelle qu'une lamination quasi-Morse-Smale $\mathcal{L}$ dont l'ensemble des feuilles marquées est vide est dite *Morse-Smale* (remarque 1.2.5). De façon analogue, un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait σ dont l'ensemble des feuilles marquées est vide sera un *type combinatoire Morse-Smale*. Si c'est le type combinatoire d'une lamination Morse-Smale $\mathcal{L}$ sur le tore T, il y a alors deux cas possibles :

- soit $\sigma(i) = (\rightarrow, *, \leftarrow)$ pour tout i, ce cas correspond à $T = T^{\text{in}}$,
- soit $\sigma(i) = (\leftarrow, *, \rightarrow)$ pour tout i, ce cas correspond à $T = T^{\text{out}}$.

Le type combinatoire détermine le feuilletage Pour ce qui suit, on fixe une orientation sur le tore $\mathbb{T}^2$.

Proposition 7.2.13. *Tout type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait σ est le type combinatoire d'un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{F}$ dynamiquement orienté sur le tore $\mathbb{T}^2$ orienté, et celui-ci est unique à équivalence topologique près.*

Démonstration. Soit $\sigma = (\sigma_g, \sigma_o, \sigma_d) \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathscr{A}_H \times \mathscr{A}_O \times \mathscr{A}_H$ un type combinatoire quasi-Morse-Smale abstrait. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, soit $A_i = [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un anneau, et on note $\gamma_0^i = \{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset$ et $\gamma_1^i = \{1\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ les bords de A_i. On oriente γ_0^i par l'orientation croissante de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si $\sigma_o(i) = \uparrow$, et par l'orientation décroissante sinon. De même, on oriente γ_1^i par l'orientation croissante de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si $\sigma_o(i+1) = \uparrow$, et par l'orientation décroissante sinon. On fait la disjonction suivante en quatre cas.

1) $\sigma_o(i) = \sigma_o(i+1)$, et $\sigma_d(i) = \rightarrow$
2) $\sigma_o(i) = \sigma_o(i+1)$, et $\sigma_d(i) = \leftarrow$
3) $\sigma_o(i) = -\sigma_o(i+1)$, et $\sigma_d(i) = \rightarrow$
4) $\sigma_o(i) = -\sigma_o(i+1)$, et $\sigma_d(i) = \leftarrow$

Soit $\mathcal{F}_i$ un feuilletage sur A_i, sans feuilles compactes autre que γ_0^i et γ_1^i, et tel que chaque demi-feuille non compacte de $\mathcal{F}_i$ s'accumule à chaque extrémité sur γ_0^i ou γ_1^i de façon dilatante si $\sigma_d(i) = \rightarrow$, et contractante sinon. On obtient une suite cyclique d'anneau fermés A_i indexé par $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni d'un feuilletage $\mathcal{F}_i$. On identifie le bord orienté $\gamma_1^i = \{1\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de A_i avec le bord orienté $\gamma_0^{i+1} = \{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de A_{i+1} via un difféomorphisme du cercle φ_i, égal à l'identité dans les coordonnées $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de A_i et A_{i+1}. On obtient une suite cyclique de recollements φ_i indexé par $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le quotient $T = \cup_i A_i/\varphi$, où φ désigne le produit des φ_i, est un tore orienté par l'orientation canonique sur chaque A_i, et les feuilletages $\mathcal{F}_i$ se recollent en un feuilletage $\mathcal{F}$ sur le tore $T \simeq \mathbb{T}^2$ de type combinatoire σ.

Pour l'unicité, on renvoie à la preuve de [BBY17, Proposition 7.7] qui traite le cas des feuilletages Morse-Smale pour un type combinatoire Morse-Smale abstrait donné, autrement dit quand l'ensemble des feuilles marquées est vide. En se ramenant à l'unicité sur l'adhérence de chaque composante connexe du complémentaire des feuilles compactes, il est clair que la preuve est complètement similaire pour les feuilletages quasi-Morse-Smale et pour les feuilletages Morse-Smale. □

Remarque 7.2.14. Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux laminations quasi-Morse-Smale remplissantes sur le tore orienté, il est équivalent de dire que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont un même type combinatoire que de dire que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ se complètent en feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ qui sont topologiquement équivalents (au sens de la définition 7.0.1). Cette remarque découle du lemme 7.2.4 et de la proposition 7.2.13.

Définition 7.2.15 (Restriction)**.** Soit σ un type combinatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et soit $I = \{k_1, \dots, k_m\} \subset Z/n\mathbb{Z}$ un sous-ensemble de cardinal m, où les k_i sont cycliquement ordonnés. La restriction $\sigma_{|I}$ est l'application $\sigma_{|I} \colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathscr{A}_H \times \mathscr{A}_O \times \mathscr{A}_H$ définie par $\sigma_{|I}(i) = \sigma(k_i)$

Une restriction quelconque d'un type combinatoire quasi-Morse-Smale n'est pas a priori un type combinatoire quasi-Morse-Smale. Cette définition permet de comparer des restrictions à des sous-ensembles de même cardinaux de deux types combinatoires σ et σ' quelconques.

7.3 Bloc de construction non transitif avec feuilletage de bord prescrit

Dans cette section, on montre

Proposition 7.3.1. *Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages quasi-Morse-Smale sur le tore orienté S_1 et le tore orienté S_2 respectivement, avec le même nombre non nul de feuilles marquées, autrement dit* $\operatorname{Card}\Gamma_{*,\mathcal{F}_1} = \operatorname{Card}\Gamma_{*,\mathcal{F}_2} = 2N \neq 0$. *Alors il existe (P, X) un bloc de construction connexe orienté tel que :*

1) (bord) *∂P est l'union de deux tores quasi-transverses T_1 et T_2 et la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ restreinte à T_i est un feuilletage topologiquement équivalent à $\mathcal{F}_i$.*

2) (maximal invariant) *La décomposition en pièces basiques du maximal invariant Λ_X est la suivante*

$$\Lambda_X = \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \Lambda_k^+\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \Lambda_k^-\right) \cup \left(\bigcup_{i,j=0}^{2N-1} \mathcal{O}_{i,j}\right)$$

où les Λ_k^+ sont des attracteurs et les Λ_k^- sont des répulseurs, contenant chacun une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives, et les $\mathcal{O}_{i,j}$ sont des orbites périodiques contenues dans ∂P.

3) (graphe de Smale) *Le graphe de Smale de Λ_X est donné par la figure 7.1.*

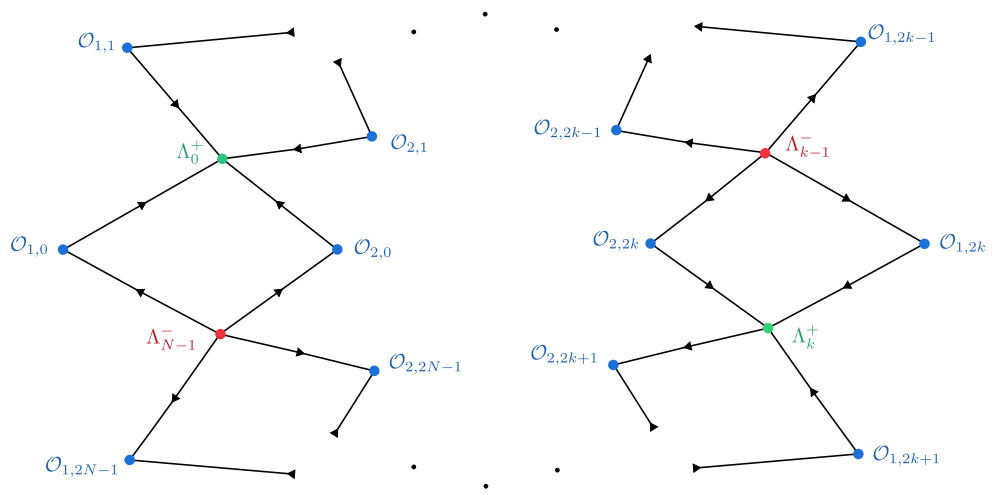


FIGURE 7.1 – Graphe de Smale de Λ_X

Pour le reste de la preuve, on note Γ_i l'ensemble des feuilles compactes de $\mathcal{F}_i$, $\Gamma_{*,i}$ l'ensemble des feuilles compactes marquées. On fixe une énumération géométrique $\Gamma_i = \{\gamma_{i,0}, \dots, \gamma_{i,n}\}$ tel que $\gamma_{i,0} \in \Gamma_{i,*}$, autrement dit la première feuille compacte est une feuille marquées. On note $\sigma_i \colon \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \to \mathscr{A}_H \times \mathscr{A}_O \times \mathscr{A}_H$ le type combinatoire de $\mathcal{F}_i$ correspondant. Montrons pour commencer le lemme suivant.

Lemme 7.3.2. *Il existe un bloc de construction (P, X) connexe orienté qui satisfait les propriétés suivantes. On désigne par $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, X), $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, Λ le maximal invariant, P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie, et $f : P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de X du bord d'entrée au bord de sortie. Alors :*

1) (bord) *Le bord ∂P se décompose en l'union*

$$\partial P = T_1^q \cup T_2^q \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} T_k^{\text{in}}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} T_k^{\text{out}}\right)$$

où les T_i^q sont deux tore quasi-transverses au champ X contenant chacun une collection $\mathcal{O}_{i,*} \subset \mathcal{O}_*$ de $2N$ orbites périodiques du champ X, et les composantes T_k^{in} et T_k^{out} sont des tores transverses au champ X contenus respectivement dans le bord d'entrée P^{in} et le bord de sortie P^{out}.

2) (maximal invariant) *Le maximal invariant Λ est l'ensemble des orbites périodiques selles isolées $\mathcal{O}_*$ de X contenues dans le bord ∂P, autrement dit la décomposition en pièces basiques est*

$$\Lambda = \mathcal{O}_* = \bigcup_{j=0}^{2N-1} \mathcal{O}_{1,j} \cup \bigcup_{j=0}^{2N-1} \mathcal{O}_{2,j}$$

3) (lamination de bord sur les tores transverses) *La lamination de bord $\mathcal{L}$ restreinte à T_i^{in} et l'union de 4 feuilles compactes. De même, la lamination de bord $\mathcal{L}$ restreinte à T_i^{out} et l'union de 4 feuilles compactes*

4) (lamination de bord sur les tores quasi-transverses) *La lamination de bord $\mathcal{L}$ restreinte à T_i^q est réduite aux orbites périodiques tangentes $\mathcal{O}_{i,*}$, et un de ses types combinatoires coïncide avec la restriction de σ_i sur l'ensemble des feuilles marquées $\Gamma_{i,*}$:*

$$\mathcal{L}_{|T_i^q} = \mathcal{O}_{i,*}, \quad \sigma(\mathcal{L}_{|T_i^q}) = \sigma_{i|_{\Gamma_{*,i}}}$$

5) (application de passage) *L'application de passage $f : P^{\text{in}} \to P^{\text{out}}$ apparie les composantes connexes de $\partial P \setminus \mathcal{L}$ deux à deux selon le graphe donné par la figure 7.2.*

Remarque 7.3.3. La variété construite P est un fibré de Seifert sur un anneau privé de $2N$ disques, et la fibre est homotope à une orbite périodique de X.

Démonstration du lemme 7.3.2. On note $\{p_{i,0}, \dots, p_{i,2N-1}\} \subset \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ l'ensemble ordonné des feuilles marquées de σ_i, que l'on désigne aussi (par abus de notation) par $\Gamma_{i,*}$. Pour fixer les idées on suppose que $p_{i,0} = 0$, et que le côté gauche de $\gamma_{i,0}$ est inclus dans S_i^{out} et le côté droit de $\gamma_{i,0}$ dans S_i^{in}, ce qui se résume par

$$\sigma_i(p_{i,0}) = \sigma_i(0) = (\rightarrow, \uparrow, \rightarrow) \tag{7.3}$$

Soit $A = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ la bande de $\mathbb{R}^2$ munie des coordonnées (x, y). Soit Y un champ de vecteurs Morse-Smale de type gradient sur A décrit par la figure 7.3, 2-périodique le long de la variable x, autrement dit $Y(x + 2, y) = Y(x, y)$, et dont l'ensemble non errant est constitué de

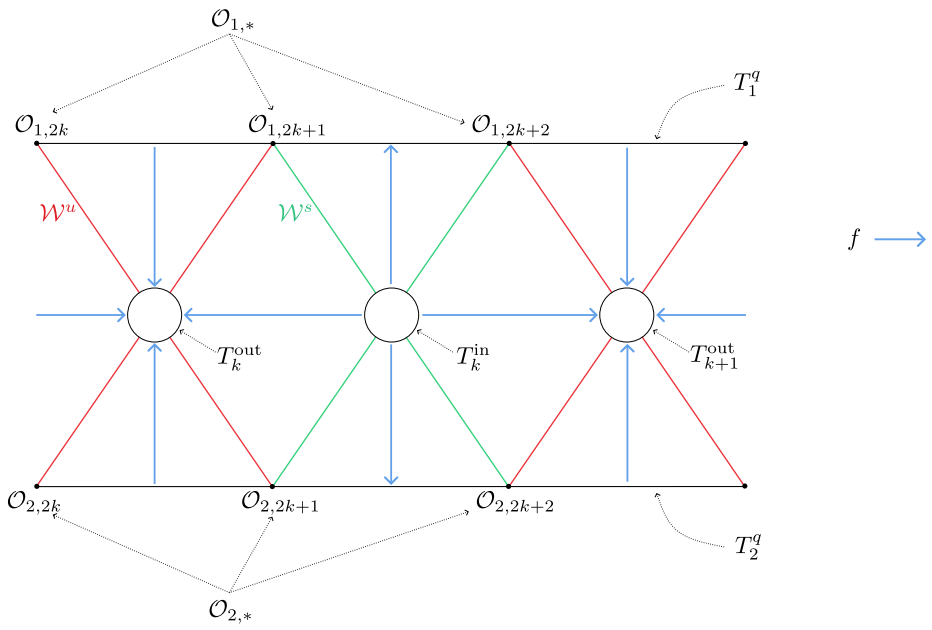


FIGURE 7.2 – Bloc (P, X) et application de passage f

- points fixes hyperboliques d'indice $(1,1)$ sur $(i, \pm 1)$ pour $i \in \mathbb{Z}$,
- point fixes attractifs sur $(i + \frac{1}{2}, 0)$ pour i entier pair,
- point fixes répulsifs sur $(i + \frac{1}{2}, 0)$ pour i entier impair,

On découpe dans A des disques $D_i = \mathbb{D}((i + \frac{1}{2}, 0), \epsilon)$ de centre $(i + \frac{1}{2}, 0)$ et de rayon ϵ, tel que Y est transverse au bord de D_i. On note $\hat{A} := A \setminus (\cup_i D_i) \subset \mathbb{R}^2$, et $\tilde{P} := \hat{A} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le produit sur le cercle, muni des coordonnées (x, y, θ), et orienté par l'orientation de la base canonique dans ces coordonnées. Soit $\tilde{X}$ le champ de vecteurs sur $\tilde{P}$ défini par

$$\tilde{X} = Y + g(x, y)\partial_\theta$$

où $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui satisfait les conditions suivantes :

i) le support de g est inclus dans des disques $\mathbb{D}((i, \pm 1), \frac{1}{4})$ centrés en $(i, \pm 1)$ de rayon $\frac{1}{4}$, sa valeur ne dépend que du rayon r, et est monotone en r.

ii) la valeur absolue de g est 1-périodique le long de la variable x.

iii) g est constante égal à ± 1 sur le disque $\mathbb{D}((i, \pm 1), \frac{1}{8})$ centré en $(i, \pm 1)$ et de rayon $\frac{1}{8}$.

- $g = 1$ sur $\mathbb{D}((i, 1), \frac{1}{8})$ si et seulement si $\sigma_1(p_{1,i}) = (*, \downarrow, *)$
- $g = 1$ sur $\mathbb{D}((i, -1), \frac{1}{4})$ si et seulement si $\sigma_2(p_{2,i}) = (*, \uparrow, *)$

Voir figure 7.4. Le choix sur le signe de g (item iii)) permettra d'obtenir les orientations des orbites périodiques compatibles avec le type combinatoire, ce que l'on détaillera à la fin de la preuve. La raison de l'effet miroir est que l'orientation canonique du bord $\{y = 1\}$ et $\{y = -1\}$

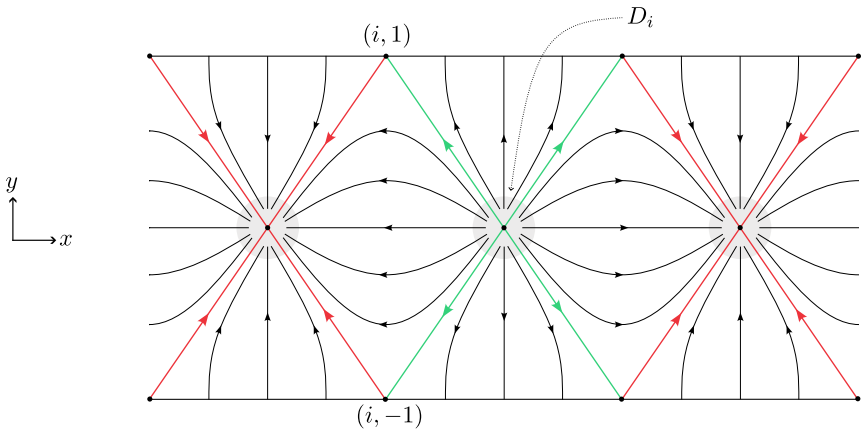


FIGURE 7.3 – Champ de vecteurs Morse-Smale Y sur la bande $\mathbb{R} \times [-1,1]$

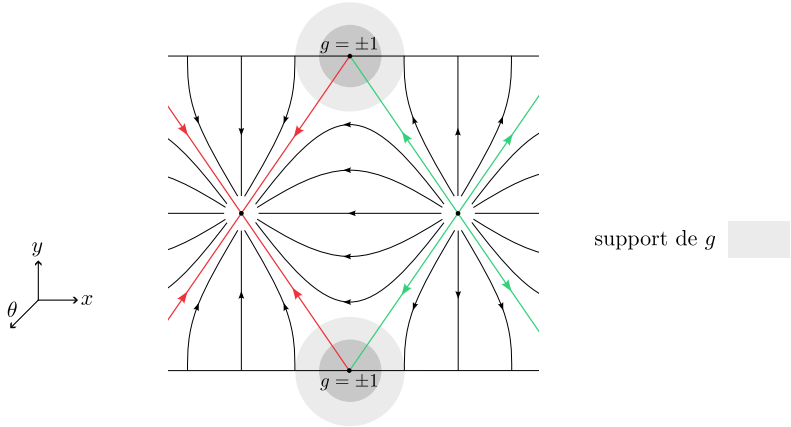


FIGURE 7.4 – Support de g

induite par l'orientation de $\tilde{P}$ est "inversée" : la première coïncide avec l'orientation donnée par le champ de bases $(-\partial_x, \partial_\theta)$ et l'autre par le champ de bases $(\partial_x, \partial_\theta)$.

L'application g est $2N$-périodique le long de la variable x et le champ de vecteurs $\tilde{X}$ passe au quotient en un champ X sur la variété

$$P := \tilde{P}/(x, y, \theta) \sim (x + 2N, y, \theta).$$

Cette variété est compacte, connexe, à bord, orientée par le champ de bases $(\partial_x, \partial_y, \partial_\theta)$. Montrons que (P, X) vérifie le lemme.

1) Par construction.

2) Le bord ∂P est l'union de deux tores $T_1^q = \{y = 1\}$ et $T_1^q = \{y = -1\}$, de N tores $T_k^{\text{out}} = \partial D_{2k} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et de N tores $T_k^{\text{in}} = \partial D_{2k+1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

   Le champ X est transverse à T_i^{in} et T_i^{out}, et pointe vers l'intérieur de P le long de T_i^{in} et vers l'extérieur de P le long de T_i^{out}. Chaque tore T_i^q contient une collection finie $\mathcal{O}_{i,*}$ d'orbites

périodiques hyperboliques d'indice $(1,1)$ de X induit par les points fixes hyperboliques selles $\mathbb{Z}\times\{\pm 1\}$ du champ de vecteurs Y. Le champ de vecteurs X est transverse au bord sur le complémentaire $T_i^q \smallsetminus \mathcal{O}_{i,*}$, alternativement entrant et sortant en P sur deux composantes connexes de $T_i^q \smallsetminus \mathcal{O}_{i,*}$ adjacentes le long d'une orbite périodique de $\mathcal{O}_{i,*}$, autrement dit les tores T_i^q sont quasi-transverses au champ X au sens de la définition 1.1.1. L'item 1 est ainsi vérifié.

3) Toutes les orbites de X qui ne sont pas dans $\mathcal{O}_* = \mathcal{O}_{1,*}\cup\mathcal{O}_{2,*}$ intersectent le bord de P dans le futur ou dans le passé. Il s'ensuit que le maximal invariant Λ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{O}_*$, et est donc munie d'une structure hyperbolique d'indice $(1,1)$ pour X. On en conclut que (P,X) est un bloc de construction au sens de la définition 1.1.3. L'item 2 est ainsi vérifié.

4) Soit $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P,X). Chaque orbite d'un point de $T_i^q \smallsetminus \mathcal{O}_*$ intersecte un tore T_k^{in} ou T_k^{out}. Il s'ensuit que la lamination de bord $\mathcal{L}$ restreinte à T_i^q est réduite aux orbites périodiques $\mathcal{O}_{i,*}$, la lamination de bord $\mathcal{L}$ sur un tore T_i^{in} est l'union de 4 feuilles compactes qui sont l'intersection des séparatrices stables libres de deux orbites périodiques consécutives de T_1^q et de deux orbites périodiques consécutives de T_2^q. De même, la lamination de bord $\mathcal{L}$ sur un tore T_i^{out} est l'union de 4 feuilles compactes qui sont l'intersection des séparatrices instables libres de deux orbites périodiques consécutives de T_1^q et de deux orbites périodiques consécutives de T_2^q. L'item 3 est ainsi vérifié.

5) La lamination $\mathcal{L}$ est un pré-feuilletage dynamiquement orienté (remarque 7.2.3) et le bord ∂P est munie de l'orientation induite par l'orientation de la base canonique $(\partial_x,\partial_y,\partial_\theta)$ dans les coordonnées (x,y,θ) sur P.

   On énumère les orbites périodiques de T_1^q par $\mathcal{O}_{1,i} := \{(i,1)\}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans les coordonnées (x,y,θ). Soit $\sigma(\mathcal{L}_{|T_1^q})$ le type combinatoire de $\mathcal{L}$ sur T_1^q associé à la donnée de la première feuille compacte $\mathcal{O}_{1,0}$. L'orientation de T_1^q coïncide avec l'orientation définie par le champ de bases $(-\partial_x,\partial_\theta)$. Le choix fait entre $+1$ ou -1 lors de la définition de l'application g au point $(i,1)$ détermine l'orientation du champ de vecteurs $\tilde{X}$ dans la direction ∂_θ ou $-\partial_\theta$ le long de l'orbite $\mathcal{O}_{1,i}$. Par construction $g(0,1)=-1$, donc l'orbite $\mathcal{O}_{1,0}$ est orientée dans le sens décroissant de θ, et son côté gauche pour l'orientation de T_1^q coïncide avec le côté des x inférieurs. Le champ de vecteurs X est sortant de ce côté de $\mathcal{O}_{1,0}$ (figure 7.3), donc $\sigma(\mathcal{L}_{|T_1^q})(0) = (\rightarrow,\uparrow,\rightarrow)$. D'après la formule (7.3), on vérifie que l'on a bien $\sigma(\mathcal{L}_{|T_1^q})(0) = \sigma_1(p_{1,0}) = \sigma_1(0)$. Pour finir, l'énumération de la collection $\mathcal{O}_{1,*}$ coïncide avec l'énumération géométrique déterminé par le choix de la première feuille $\mathcal{O}_{1,0}$. Par suite, le signe de g a été choisi de sorte que $\sigma(\mathcal{L}_{|T_1^q})(i) = \sigma_1(p_{1,i}) = \sigma_{i|_{\Gamma_{i,*}}}(i)$ pour tout $i\in\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$.

   Le raisonnement est le même pour le type combinatoire de $\mathcal{L}$ sur T_2^q, à ceci près que les orientations sont en "miroir". Expliquons. On énumère les orbites périodiques de T_2^q par $\mathcal{O}_{2,i} := \{(i,-1)\}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans les coordonnées (x,y,θ). Soit $\sigma(\mathcal{L}_{|T_2^q})$ le type combinatoire de $\mathcal{L}$ sur T_2^q associé à la donnée de la première feuille compacte $\mathcal{O}_{2,0}$. L'orientation de T_2^q coïncide avec l'orientation définie par le champ de bases $(\partial_x,\partial_\theta)$. Le choix fait entre $+1$ ou -1 lors de la définition de l'application g au point $(i,-1)$ détermine l'orientation du champ de vecteurs $\tilde{X}$ dans la direction ∂_θ ou $-\partial_\theta$ le long de l'orbite $\mathcal{O}_{2,i}$. Par construction $g(0,-1)=1$, donc l'orbite $\mathcal{O}_{2,0}$ est orientée dans le sens croissant de θ et son côté gauche pour l'orientation de T_2^q coïncide donc avec le côté des x inférieurs. Le champ de vecteurs X est sortant de ce côté de $\mathcal{O}_{2,0}$ (figure 7.3), donc $\sigma(\mathcal{L}_{|T_2^q})(i) = (\rightarrow,\uparrow,\rightarrow)$. D'après la formule (7.3), on vérifie que l'on a bien $\sigma(\mathcal{L}_{|T_2^q})(0) = \sigma_2(p_{2,0}) = \sigma_2(0)$. Pour finir, l'énumération choisie sur la collection $\mathcal{O}_{2,*}$ coïncide avec l'énumération géométrique déterminé par le choix de la première feuille $\mathcal{O}_{2,0}$.

Par suite, le signe de g a été choisi de sorte que $\sigma(\mathcal{L}_{|T_2^q})(i) = \sigma_2(p_{2,i}) = \sigma_{i|_{\Gamma_{i,*}}}(i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$.

L'item 4 est ainsi vérifié.

6) C'est évident.

Pour finir, expliquons comment faire si l'on change le choix fait à la formule (7.3) pour la valeur du type combinatoire de la première feuille marquée. Il y a deux cas possibles (quitte à inverser σ_1 et σ_2) :

- soit $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = (\leftarrow, \uparrow, \leftarrow)$, alors il suffit de construire le champ Y sur la bande A en échangeant les points fixes attractifs et les points fixes répulsifs, ce qui a pour effet d'échanger les composantes du bord d'entrée et les composantes du bord de sortie sur les deux tores quasi-transverses $T_{1,2}^q$.
- soit $\sigma_1(0) = (\leftarrow, \uparrow, \leftarrow)$ et $\sigma_2(0) = (\rightarrow, \uparrow, \rightarrow)$, alors on change la définition de l'application g de sorte à avoir $g(i, 1) = 1 \iff \sigma_1(n - i) = (*, \uparrow, *)$ à l'item iii), ce qui a pour effet d'inverser le côté gauche et le côté droit de la première orbite sur T_1^q ainsi que l'énumération géométrique, mais pas sur T_2^q.

□

On dit qu'un bloc de construction (P, X) est *attractif* si le maximal invariant Λ de (P, X) est un attracteur pour le flot de X, et *répulsif* si le maximal invariant est un répulseur. La suite de la preuve consiste à recoller des blocs de construction attractifs (U_k^+, X_k^+) et des blocs de construction répulsifs (U_k^-, X_k^-) transitifs le long des composantes de bord T_k^{out} et T_k^{in} du bloc (P, X) qui sont transverses au champ X, de sorte à obtenir un nouveau bloc de construction dont la lamination de bord sur T_1 et T_2 a un type combinatoire prescrit. On utilisera un résultat de [BBY17] pour obtenir des blocs de Béguin-Bonatti-Yu attracteurs et répulseurs réalisant un feuilletage de bord Morse-Smale donné sur le tore. On rappelle qu'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U, Y) est un bloc de construction tel que le champ de vecteurs Y est transverse au bord ∂U, ou de manière équivalente tel que la collection des orbites périodiques de Y contenues dans ∂U est vide (remarque 1.1.5). Un feuilletage (ou lamination) Morse-Smale est un feuilletage (ou lamination) quasi-Morse-Smale tel que l'ensemble des feuilles marquées est vide (remarque 1.2.5)

Lemme 7.3.4 ([BBY17, Théorème 1.10])**.** *Pour tout feuilletage Morse-Smale $\mathcal{F}$ sur le tore $\mathbb{T}^2$, il existe un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U, Y) orientable transitif attractif connexe, et un homéomorphisme $h : \partial U \to \mathbb{T}^2$ tel que $h_*\mathcal{L}_Y = \mathcal{F}$, où $\mathcal{L}_Y$ désigne la lamination de bord de (U, Y). De plus, le maximal invariant Λ_Y contient une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives*[3]

Remarque 7.3.5. On a un résultat complètement analogue où (U, Y) est un bloc répulseur. Il suffit d'inverser le champ de vecteurs du bloc donné par le lemme 7.3.4.

Démonstration de la proposition 7.3.1. Soit (P, X) le bloc de construction orienté donné par le lemme 7.3.2. Soit une énumération géométrique des orbites périodiques $\mathcal{O}_{i,*} = \{\mathcal{O}_{i,0}, \ldots, \mathcal{O}_{i,2N-1}\}$ de X contenues dans T_i^q, tel que le type combinatoire de la lamination $\mathcal{L} \cap T_i^q = \mathcal{O}_{i,*}$ est égal à la restriction de σ_i aux feuilles marquées $\Gamma_{i,*}$ de $\mathcal{F}_i$ (item 4, lemme 7.3.2). On rappelle que l'on note $\Gamma_{i,*} = \{p_{i,0}, \ldots, p_{i,2N-1}\}$ la collection ordonnées des

3. Voir [BBY17, Lemme 9.8] dans le preuve de [BBY17, Théorème 1.10]

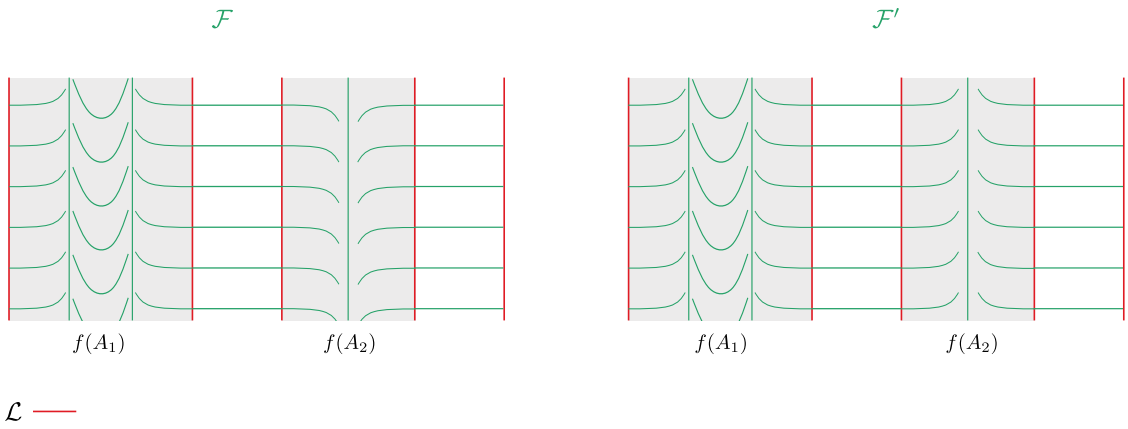


FIGURE 7.5 – Feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ satisfaisant le fait 7.3.6

feuilles marquées de σ_i, avec $p_{i,0} = 0$.

Étape 1 : Recoller des attracteurs.
Soit $0 \leq k \leq N-1$ un entier, et soit $T^{\text{out}} = T_k^{\text{out}} \subset P^{\text{out}}$ un tore de ∂P le long duquel Y pointe vers l'extérieur de P. D'après l'item 5 du lemme 7.3.2, et la figure 7.2, il existe une composante connexe A_1 de $T_1^q \setminus \mathcal{L}$ et une composante connexe A_2 de $T_2^q \setminus \mathcal{L}$ tel que $f(A_i) \subset T^{\text{out}}$ pour $i = 1, 2$. La composante $A_1 \subset P^{\text{in}}$ est un anneau bordé par les orbites périodiques $\mathcal{O}_{1,j}$ et $\mathcal{O}_{1,j+1}$ de $\mathcal{O}_{1,*}$, et l'anneau $f(A_1)$ est bordé par la trace des variétés instables de $\mathcal{O}_{1,j}$ et $\mathcal{O}_{1,j+1}$. Soit B_1 la composante connexe de S_1^{in} bordé par les feuilles marquées $p_{1,j}$ et $p_{1,j+1}$ de $\mathcal{F}_1$. De même, le composante $A_2 \subset P^{\text{in}}$ est un anneau bordé par les orbites périodiques $\mathcal{O}_{2,l}$ et $\mathcal{O}_{2,l+1}$ de $\mathcal{O}_{2,*}$, et l'anneau orienté $f(A_2)$ est bordé par la trace des variétés instables de $\mathcal{O}_{2,l}$ et $\mathcal{O}_{2,l+1}$. Soit B_2 l'anneau de S_2^{in} bordé par les feuilles marquées $p_{2,l}$ et $p_{2,l+1}$ de $\mathcal{F}_2$.

Fait 7.3.6. *Il existe un feuilletage Morse-Smale $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k$ sur T_k^{out} tel que :*

1) $\mathcal{F}$ est transverse à $\mathcal{L}$,

2) les feuilles compactes de $\mathcal{F}$ sont parallèles aux feuilles compactes de $\mathcal{L}$,

3) – *il existe un homéomorphisme $h_1 : B_1 \to f(A_1)$ qui apparie le bord $p_{1,j}$ avec le bord contenu dans $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_{1,j})$, et envoie le feuilletage $\mathcal{F}_1$ sur le feuilletage $\mathcal{F}$,*
– *il existe un homéomorphisme $h_2 : B_2 \to f(A_2)$ qui apparie le bord $p_{2,l}$ avec le bord contenu dans $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_{2,l})$, et envoie le feuilletage $\mathcal{F}_2$ sur le feuilletage $\mathcal{F}$,*

Démonstration. La lamination $\mathcal{L}$ sur $T^{\text{out}} = T_k^{\text{out}}$ est l'union de quatre feuilles compactes (item 3, lemme 7.3.2). Si B_1 et B_2 ne contiennent aucune feuille compacte de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, on choisi pour $\mathcal{F}$ un feuilletage contenant une unique feuille compacte γ à l'intérieur d'une des composantes connexes de $T^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}$ différente $f(A_1)$ et $f(A_2)$, et tel que chaque demi feuille non compacte de $\mathcal{F}$ s'accumule sur la feuille compacte γ, et intersecte transversalement chaque feuille compacte de $\mathcal{L}$. Il vérifie le lemme. Sinon, soit $n_1 = \text{Card}(B_1) > 0$. On construit un feuilletage $\mathcal{F}$ sur l'anneau $f(A_1)$, transverse au bord de $f(A_1)$, qui contient n_1 feuilles compactes parallèles au bord de l'anneau, que l'on énumère de gauche à droite. On choisit arbitrairement une orientation sur la première feuille compacte. On oriente les feuilles compactes suivantes de façon compatible avec

le type combinatoire du feuilletage $\mathcal{F}_1$ restreint à B_1. Les autres feuilles de $\mathcal{F}$ sont des feuilles non compactes tel que chaque demi-feuille $\mathcal{F}$ s'accumulent sur les feuilles compactes de façon dilatante pour cette orientation. On fait de même sur l'anneau $f(A_2)$. On complète le feuilletage $\mathcal{F}$ sur T^{out} par le feuilletage trivial sur les anneaux $T^{\text{out}} \setminus \cup_l f(A_i)$ et transverse au bord. C'est un feuilletage Morse-Smale transverse à $\mathcal{L}$. De façon analogue au résultat d'unicité de la proposition 7.2.13, il existe un homéomorphisme $h_i : B_i \to f(A_i)$ qui envoie la restriction de $\mathcal{F}$ à l'anneau $f(A_i)$ sur la restriction de $\mathcal{F}_i$ sur B_i, pour $i = 1, 2$, et apparie les bons bords. On renvoie à la figure 7.5. □

On fait un choix arbitraire de l'orientation de la première feuille compacte de $\mathcal{F}$ dans $f(A_i)$ pour $i = 1, 2$. Si l'on change cette orientation (voir figure 7.5 où l'on inverse la première feuille compacte de $f(A_2)$), on en déduit :

Remarque 7.3.7. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage qui vérifie le fait 7.3.6 ci-dessus. Alors il existe un feuilletage $\mathcal{F}'$ qui satisfait le fait 7.3.6, qui coïncide avec $\mathcal{F}$ le long de leur feuilles compactes respectives, et tel que

1) soit les orientations dynamiques des feuilles compactes de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident sur $f(A_1)$ et sont opposées sur $f(A_2)$;

2) soit les orientations dynamiques des feuilles compactes de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont opposées sur $f(A_1)$ et coïncident sur $f(A_2)$;

3) soit les orientations dynamiques des feuilles compactes de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont opposées sur $f(A_1)$ et sur $f(A_2)$;

D'après le lemme 7.3.4, il existe un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U_k^+, X_k^+) orientable, tel que le maximal invariant Λ_k^+ est un attracteur transitif qui admet une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives, et il existe un difféomorphisme $\varphi_k^+ : \partial U_k^+ \to T_k^{\text{out}}$ tel que $(\varphi_k^+)_*(\mathcal{L}_k^+) =: \mathcal{F}_k$ satisfait le fait 7.3.6. Soit

$$P' := \left(P \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} U_k^+ \right) \right) / \varphi^+$$

où φ^+ est le produit des difféomorphismes $\varphi_k^+ : \partial U_k^+ \to T_k^{\text{out}}$, rendu involutif sur l'union $\cup_k (\partial U_k^+ \cup T_k^{\text{out}})$. Alors :

Fait 7.3.8. *Les champs de vecteurs X et X_k^+ induisent sur la variété P' un champ de vecteurs X' tel que (P', X') est un bloc de construction connexe orienté. Il vérifie les propriétés suivantes, où on désigne par $\mathcal{L}'$ la lamination de bord et Λ' le maximal invariant de (P', X'),*

1) (bord) $\partial P' = T_1^q \cup T_2^q \cup (\bigcup_k T_k^{\text{in}})$

2) (maximal invariant) *Λ' est l'union de $4N$ orbites périodiques selles $\mathcal{O}_{i,j} \subset T_i^q$, $i = 1, 2$ et $k = 0, \ldots, 2N-1$, contenues dans le bord $\partial P'$, et de N attracteurs transitifs $\tilde{\Lambda}_k^+$, $k = 0, \ldots, N-1$, contenant une infinité d'orbites périodiques de valeurs propres négatives. Le graphe de Smale est donné par la figure 7.6*

3) (lamination) $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup (\bigcup_k (f^{-1})_* (\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{L}))$

4) (type combinatoire) *Il existe un type combinatoire de $\mathcal{L}'$ sur T_i^q tel que $\sigma(\mathcal{L}'_{|T_i^q})$ coïncide avec la restriction de σ_i à l'ensemble $\Gamma_{i,*} \cup \{\sigma_i = (\leftarrow, *, \rightarrow)\}$*

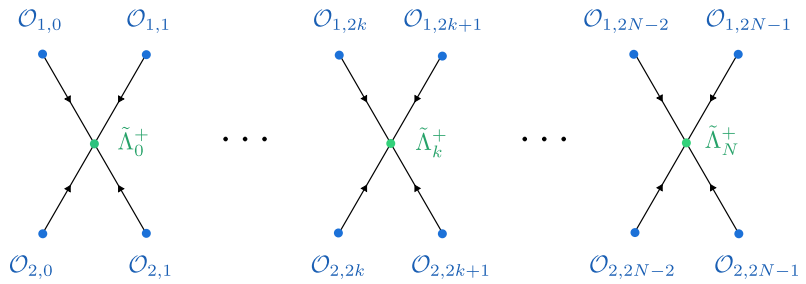


FIGURE 7.6 – Graphe de Smale du bloc (P', X')

5) (application de passage) *L'application de passage f' du bloc (P', X') est la restriction de l'application f du bloc (P, X) sur l'ensemble $\cup_k T_k^{\text{in}}$.*

Démonstration. On considère le bloc de construction donné par l'union $(M, Y) := (P \cup_k U_k^+, X \cup_k X_k^+)$, muni de l'orientation de P et l'orientation sur U_k^+ tel que φ_k^+ renverse l'orientation. Le difféomorphisme φ^+ est alors un recollement partiel de (M, Y) qui renverse l'orientation, associé à un sous-ensemble $\partial_1 M = \cup_k(\partial U_k^+ \cup T_k^{\text{out}})$ de composantes connexes de ∂M qui satisfait les hypothèses de la proposition 7.1.4. En effet, chaque orbite du flot de $Y = X \cup_k X_k^+$ intersecte $\partial_1 M$ en au plus un point, et φ envoie la lamination de bord de (M, Y) sur une lamination transverse par construction. De plus, il satisfait la remarque 7.1.5, autrement dit $\partial_1 M$ est transverse au champ de vecteurs Y. On en déduit que le champ Y induit sur la variété (compacte, à bord, orienté) $P' = M/\varphi$ un champ de vecteurs X', tel que (P', X') est un bloc de construction. Les propriétés 1, 2, 3, 5 découlent de la proposition 7.1.2. La décomposition de Smale du maximal invariant Λ' est égale à $\Lambda' = \mathcal{O}_* \cup_k \tilde{\Lambda}_k^+$, où $\tilde{\Lambda}_k^+$ est un attracteur transitif localement maximal, contenant Λ_k et l'union des séparatrices instables (pour le flot de X') des quatre orbites périodiques contenues dans $T_1^q \cup T_2^q$ qui intersectent le tore T_k^{out}.

Montrons l'item 4. On fixe l'énumération géométrique des feuilles compactes de $\mathcal{L}'$ sur T_i^q tel que la première feuille est l'orbite périodique $\mathcal{O}_{i,0} \in \mathcal{O}_{i,*}$. Les laminations $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sur T_i^q coïncident le long des feuilles compactes marquées orientées, autrement dit des orbites périodiques $\mathcal{O}_{i,*}$, et la décomposition $\{\text{in}, \text{out}\}$ de $T_i^q \setminus \mathcal{O}_{i,*}$ coïncident pour $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$. Il suit (item 4, lemme 7.3.2) que

$$\sigma(\mathcal{L}'_{|\mathcal{O}_{i,*}}) = \sigma(\mathcal{L}_{|T_i^q}) = \sigma_{i|\Gamma_{i,*}} \tag{7.4}$$

Soit $0 \leq k \leq N-1$ un entier fixé. Pour $i = 1, 2$, il existe une unique composante connexe $A_i = A_{i,k}$ de $T_i^q \setminus \mathcal{O}_{i,*}$ le long duquel le champ X pointe vers l'intérieur de P, et tel que $f(A_i) \in T_k^{\text{out}}$ (figure 7.2). Sur l'intérieur de A_i, la lamination $\mathcal{L}'$ coïncide avec l'image $(f^{-1})_*(\mathcal{F}_k \cap f(A_i))$ (item 3, fait 7.3.8) où $\mathcal{F}_k$ est le feuilletage donné par le fait 7.3.6. On renvoie à la figure 7.7. Il découle du fait 7.3.6, item 3 que le type combinatoire de la lamination $\mathcal{L}'$ restreint aux feuilles compactes sur l'intérieur de A_i coïncide avec la restriction de $\pm\sigma_i$ sur un intervalle de type $I_i = I_{i,k} = [\![p_{i,j} + 1, p_{i,j+1} - 1]\!]$ inclus dans le domaine $\{\sigma_i = (\leftarrow, *, \rightarrow)\}$ où $j = j_k$ est un entier qui dépend de k, et les entiers j_k sont consécutifs dans $\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$. Il y a quatre cas possibles, selon le signe devant σ_1 et le signe devant σ_2.

0) *($+\sigma_1$ et $+\sigma_2$) :* Dans ce cas, on ne fait rien.

1) *($+\sigma_1$ et $-\sigma_2$) :* Dans ce cas, on remplace le feuilletage $\mathcal{F}_k$ par le feuilletage $\mathcal{F}'_k$ donné par

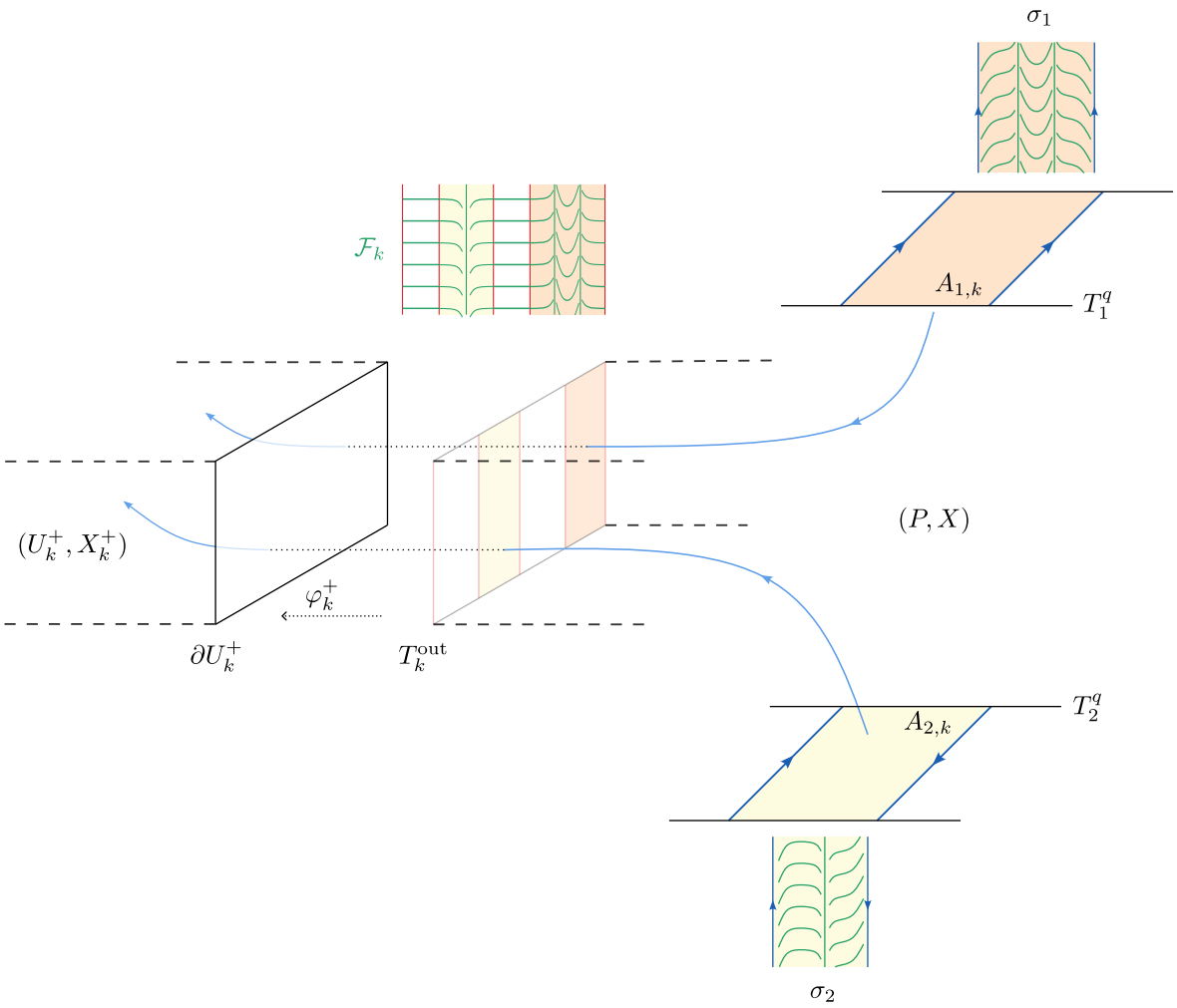


FIGURE 7.7 – Recollement d'un attracteur (U_k^+, X_k^+) et image du feuilletage induit sur les tores T_q^i en reprenant le feuilletage de la figure 7.5

la remarque 7.3.7, item 1. Cela a pour effet de changer le signe devant σ_2 mais pas devant σ_1.

2) *($-\sigma_1$ et $+\sigma_2$) :* Dans ce cas, on remplace le feuilletage $\mathcal{F}_k$ par le feuilletage $\mathcal{F}'_k$ donné par la remarque 7.3.7, item 2. Cela a pour effet de changer le signe devant σ_1 mais pas devant σ_2.

3) *($-\sigma_1$ et $-\sigma_2$) :* Dans ce cas, on remplace le feuilletage $\mathcal{F}_k$ par le feuilletage $\mathcal{F}'_k$ donné par la remarque 7.3.7, item 3. Cela a pour effet de changer le signe devant σ_1 et devant σ_2.

En répétant ce raisonnement pour tout $k = 0, \dots, N-1$, on montre que le type combinatoire de $\mathcal{L}'$ sur chaque composante $A_{i,k}$ de $T_i^q \setminus \mathcal{O}_{i,*}$ coïncide avec la restriction de σ_i à un intervalle $I_{i,k}$ correspondant. L'union $\cup_k I_{i,k}$ est égal à l'ensemble $\{\sigma_i = (\leftarrow, *, \rightarrow)\}$. En assemblant ce résultat avec l'égalité (7.4), on en déduit que le type combinatoire de $\mathcal{L}'$ sur T_i^q coïncide avec la restriction de σ_i à $\Gamma_{i,*} \cup \{\sigma_i = (\leftarrow, *, \rightarrow)\}$. □

Étape 2 : recoller des répulseurs.

Cette seconde étape consiste à recoller des bloc de Béguin-Bonatti-Yu répulseurs transitifs (U_k^-, X_k^-) le long des tores d'entrée T_k^{in} sur (P', X'), afin d'induire le feuilletage voulu sur chaque composante connexe de $T_1^q \cap P'^{\text{out}}$ et $T_2^q \cap P'^{\text{out}}$. La preuve est essentiellement la même en remplaçant (P, X) par (P', X'). La seule différence est que la lamination $\mathcal{L}'$ le long des tores T_k^{in} n'est plus la même que la lamination $\mathcal{L}$. On rappelle que l'on a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup_k (f^{-1})_* (\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{L})$ (figure 7.8). Soit $0 \leq k \leq N-1$ un entier, et soit $T^{\text{in}} = T_k^{\text{in}} \subset P'^{\text{in}}$ un tore de $\partial P'$ le long duquel le champ

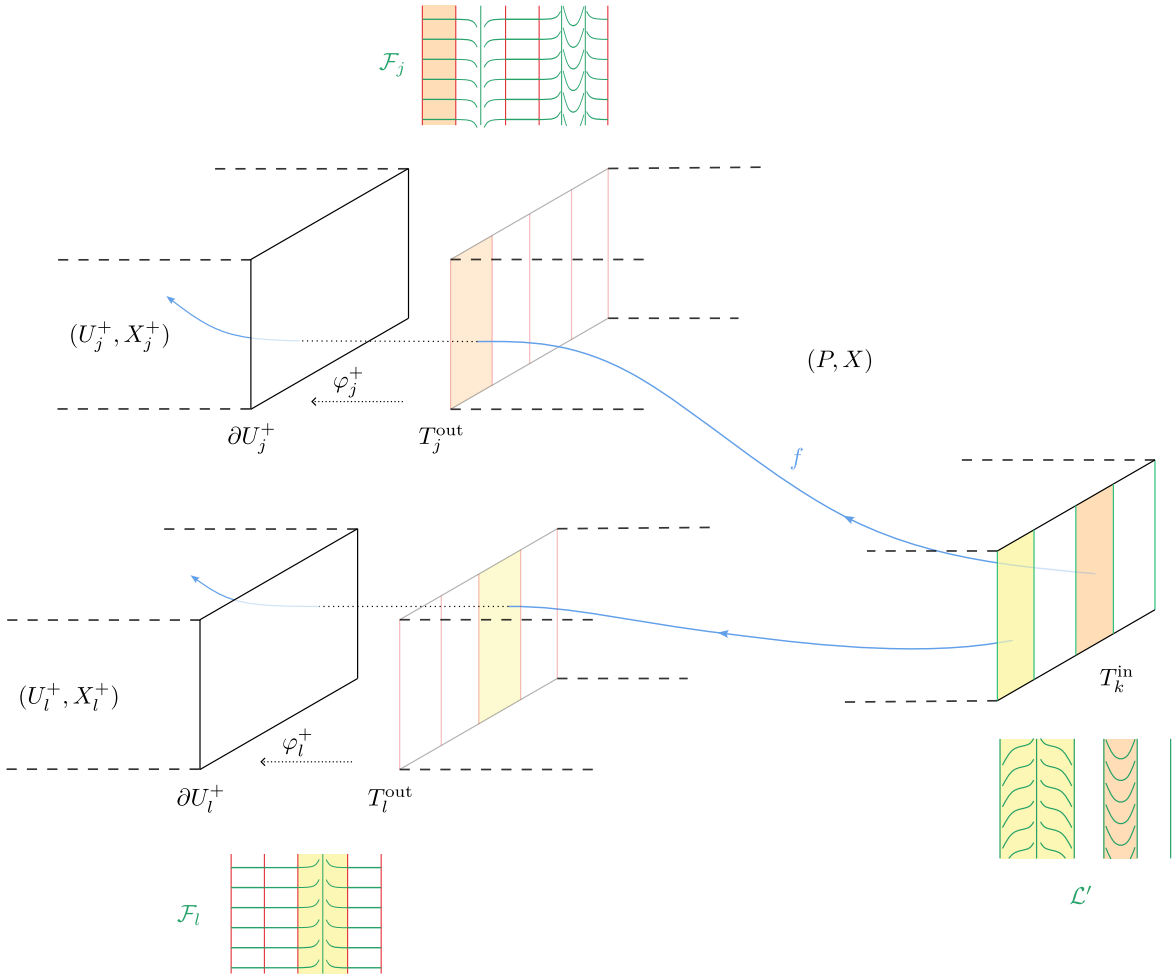


FIGURE 7.8 – Lamination $\mathcal{L}'$ sur un tore T_k^{in} induite par le recollement des attracteurs (U_l^+, X_l^+) et (U_j^+, X_j^+)

X' est entrant. D'après l'item 5 du fait 7.3.8, et la figure 7.2, il existe une composante connexe A_1 de $T_1^q \setminus \mathcal{L}'$ et une composante connexe A_2 de $T_2^q \setminus \mathcal{L}'$ tel que $f'^{-1}(A_i) \subset T^{\text{in}}$ pour $i = 1, 2$. La composante $A_1 \subset P'^{\text{out}}$ est un anneau bordé par les orbites périodiques $\mathcal{O}_{1,j}$ et $\mathcal{O}_{1,j+1}$ de $\mathcal{O}_{1,*}$. Soit B_1 la composante connexe de S_1^{out} bordé par les feuilles marquées $p_{1,j}$ et $p_{1,j+1}$ de $\mathcal{F}_1$. De même, le composante $A_2 \subset P'^{\text{out}}$ est un anneau bordé par les orbites périodiques $\mathcal{O}_{2,l}$ et $\mathcal{O}_{2,l+1}$ de $\mathcal{O}_{2,*}$. Soit B_2 la composante connexe de S_2^{out} bordé par les feuilles marquées $p_{2,l}$ et $p_{2,l+1}$ de $\mathcal{F}_2$.

Fait 7.3.9. *Il existe un feuilletage Morse-Smale $\mathcal{G} = \mathcal{G}_k$ sur T_k^{in} tel que :*

1) $\mathcal{G}$ est transverse à $\mathcal{L}'$

2) les feuilles compactes de $\mathcal{G}$ sont parallèles aux feuilles compactes de $\mathcal{L}'$,

3) – *il existe un homéomorphisme $g_1 : B_1 \to f'^{-1}(A_1)$ qui apparie le bord $p_{1,j}$ avec le bord contenue dans $\mathcal{W}^s(\mathcal{O}_{1,j})$, et envoie le feuilletage $\mathcal{F}_1$ sur le feuilletage $\mathcal{F}$,*

– *il existe un homéomorphisme $g_2 : B_2 \to f'^{-1}(A_2)$ qui apparie le bord $p_{2,l}$ avec le bord contenu dans $\mathcal{W}^s(\mathcal{O}_{2,l})$, et envoie le feuilletage $\mathcal{F}_2$ sur le feuilletage $\mathcal{F}$,*

Démonstration. Les ensembles $f'^{-1}(A_i) \subset T^{\text{in}}$ sont des anneaux bordés par deux feuilles compactes de la lamination $\mathcal{L}'$ et disjoint de $\mathcal{L}'$ sur leur intérieur. La seule différence avec la preuve du fait 7.3.6 est que ce sont les seules composantes connexes de $T^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}'$. En effet, la lamination $\mathcal{L}'$ est un feuilletage sur $T^{\text{in}} \setminus \cup_i f'^{-1}(A_i)$, car tous les points de $T^{\text{in}} \setminus \cup_i f'^{-1}(A_i)$ ont une orbite positive qui intersecte un tore T_k^{out}, donc s'accumule sur un attracteur Λ_k^+ dans le futur (figure 7.2). On construit le feuilletage $\mathcal{G}$ sur les anneaux $f'^{-1}(A_i)$ de façon similaire à la preuve du fait 7.3.6 : on place les feuilles compactes dans les anneaux $f'^{-1}(A_i)$ parallèles au bord et énumérées de la bonne façon, on les oriente de façon compatible le type combinatoire de $\mathcal{F}_i$ sur B_i et on complète par des feuilles non compactes qui s'accumulent sur les feuilles compactes orientées de façon, cette fois, dilatante. On complète le feuilletage ainsi construit sur T^{in} par un feuilletage transverse à $\mathcal{L}'$. On peut choisir par exemple le feuilletage engendré par le champ de vecteurs orthogonal $Z^\perp$, pour une certaine métrique, à un champ de vecteurs Z générateur de $\mathcal{L}'$ sur $T^{\text{in}} \setminus \cup_i f'^{-1}(A_i)$. Par densité des champs de vecteurs Morse-Smale, quitte à faire une petite perturbation sur $T^{\text{in}} \setminus \cup_i f'^{-1}(A_i)$, on obtient un feuilletage $\mathcal{G}$ Morse-Smale sur T^{in}, transverse à $\mathcal{L}$, et qui satisfait le fait. □

D'après le lemme 7.3.4 et la remarque 7.3.5, il existe un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U_k^-, X_k^-) connexe orientable tel que le maximal invariant Λ_k^- est un répulseur transitif qui admet une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives, et il existe un difféomorphisme $\varphi_k^- : \partial U_k^- \to T_k^{\text{in}}$ tel que $(\varphi_k^-)_*(\mathcal{L}_k^-) =: \mathcal{G}_k$ satisfait le fait 7.3.6. Pour finir, on définit

$$P'' := \left(P' \cup \left(\bigcup_k U_k^-\right)\right) / \varphi^-$$

où φ^- est le produit des recollements $\varphi_k^- : \partial U_k^- \to T_k^{\text{in}}$.

Fait 7.3.10. *Les champs X' et X_k^- induisent sur la variété P'' un champ de vecteurs X'' tel que (P'', X'') est un bloc de construction qui satisfait la proposition 7.3.1.*

Démonstration. La preuve est la même que la preuve du fait 7.3.8. □

Ceci termine la preuve de la proposition 7.3.1. □

7.4 Transitivité par la méthode d'*Éclatement – Excision – Recollement*

La proposition 7.3.1 nous donne l'existence d'un bloc de construction (P, X) qui satisfait la proposition 7.0.2 pour un couple de feuilletages quasi-Morse-Smale donné, sauf la transitivité. On montre la proposition générale suivante.

Proposition 7.4.1. *Soit (P, X) un bloc de construction connexe orienté plein, on note Λ le maximal invariant et $\cup_i \Lambda_i$ la décomposition en pièce basiques de Λ. On suppose que :*

1) *pour tout pièce basique Λ_i, il existe une pièce basique Λ_k et Λ_j contenant une infinité d'orbites périodiques de valeurs propres négatives, et telle qu'il existe un chemin orienté (éventuellement trivial) dans le graphe de Smale reliant Λ_j à Λ_i et Λ_i à Λ_k.*

2) *toute pièce basique Λ_i n'admettant pas une infinité d'orbites périodiques de valeurs propres négatives est une pièce basique selle.*

Alors il existe un bloc de construction (P', X') connexe orienté selle plein transitif, tel que la lamination de bord $\mathcal{L}_{X'}$ et la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ se complètent en des feuilletages quasi-Morse-Smale topologiquement équivalents.

Montrons avant toute chose que la proposition 7.0.2 est un corollaire immédiat.

Preuve de la proposition 7.0.2. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages quasi-Morse-Smale sur le tore S_1 et S_2 orienté, et soit (P, X) le bloc donné par la proposition 7.3.1. Il suffit de vérifier que (P, X) vérifie les hypothèses de la proposition 7.4.1. La décomposition basique de Λ est l'union de pièces pièces basiques attractives et répulsives $\Lambda_k^{\pm}$ et d'orbites périodiques selles $\mathcal{O}_{i,j}$. Par construction, chaque pièce basique $\Lambda_k^{\pm}$ contient une infinité d'orbites périodique dont les valeurs propres sont négatives. D'après le graphe de Smale 7.1 chaque orbite $\mathcal{O}_{i,j}$ est connectée par une arête orientée à une pièce basique attractive Λ_k^{+} et par une arête orientée dans le sens inverse à une pièce basique répulsive Λ_k^{+}. Les hypothèses sont donc satisfaites, il existe donc un bloc (P', X') associé par la proposition 7.4.1 qui satisfait la proposition 7.0.2. □

Montrons maintenant la proposition 7.4.1. L'idée est d'opérer des chirurgies sur le bloc (P, X) pour obtenir un bloc transitif tout en conservant le type combinatoire de la lamination de bord. On utilise la méthode dite d'*Éclatement – Excision – Recollement* de [BBY17, Section 8]. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 7.4.2. *Soit (P, X) un bloc de construction connexe orienté plein. Soit O une orbite périodique de Λ dans l'intérieur de P, sans séparatrice libres, et dont les valeurs propres sont négatives. On note Λ le maximal invariant et $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, X). Il existe un bloc de construction connexe orienté $(\hat{P}, \hat{X})$ tel que, si $\hat{\Lambda}$ désigne le maximal invariant et $\hat{\mathcal{L}}$ la lamination de bord de $(\hat{P}, \hat{X})$, alors*

1) *$\hat{P} = P \setminus \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage tubulaire de l'orbite O. On note $T := \partial\mathcal{V}$.*

2) *$\partial\hat{P} = \partial P \cup T$, et le champ $\hat{X}$ est transverse à T et pointe vers l'extérieur de $\hat{P}$*

3) *Soit $\hat{T} := \cup_{t\in\mathbb{R}} \hat{X}^t(T)$ l'ensemble des orbites de $\hat{X}$ qui intersectent le tore T. Alors il existe une application continue surjective $\pi\colon \hat{P} \setminus \hat{T} \to P$ qui envoie les orbites orientées du flot de $\hat{X}$ sur les orbites orientées du flot de X. De plus, il existe une orbite périodique $O' \subset \operatorname{int} \hat{P}$ de $\hat{X}$ tel que la restriction $\pi\colon \hat{P} \setminus (\hat{T} \cup \mathcal{W}^s_{\hat{X}}(O')) \to \hat{P} \setminus \mathcal{W}^s_X(O)$ est un homéomorphisme.*

4) *La lamination $\hat{\mathcal{L}} \cap \partial P$ est remplissante et a le même type combinatoire que la lamination de bord $\mathcal{L}$ de (P, X)*

5) *La lamination $\hat{\mathcal{L}} \cap T$ est Morse-Smale remplissante avec une unique feuille compacte.*

6) *Les graphes de Smale de Λ et $\hat{\Lambda}$ sont isomorphes*

On dit que $(\hat{P}, \hat{X})$ est un bloc de construction obtenu par bifurcation Dérivé d'Anosov (DA) attractive *sur l'orbite O.*

Idée de preuve. Ce bloc est obtenu par une bifurcation Dérivé d'Anosov attractive sur l'orbite périodique O. On renvoie à [GHS97, Sous-section 2.2.2] pour une description détaillée de cette bifurcation, et à la figure 7.9. Signalons aussi [BBGH20, Section 3.3], où les auteurs donnent une construction explicite d'une bifurcation Dérivé d'Anosov sur un flot géodésique en codimension 2, mais qui peut s'adapter dans notre cas.

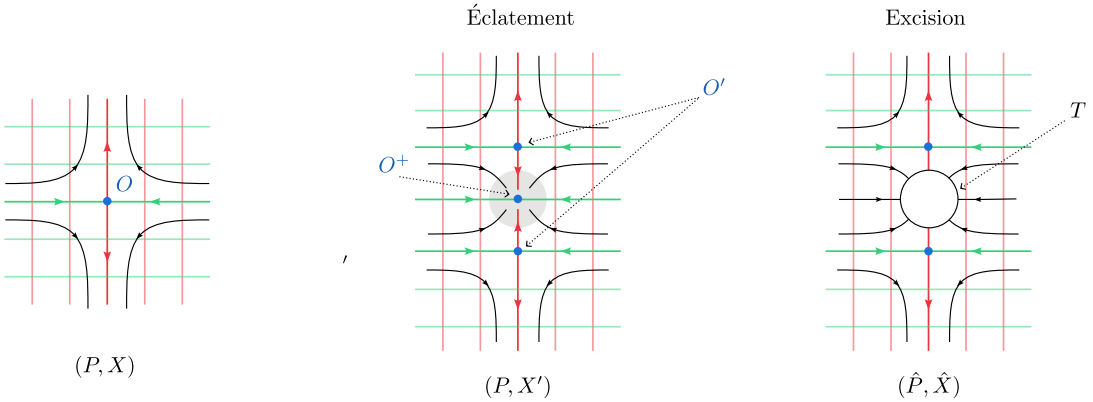


FIGURE 7.9 – bifurcation Dérivé d'Anosov attractive sur une orbite périodique O dont les valeurs propres sont négatives

Cette bifurcation consiste à "ouvrir" la variété stable de O, ce qui contribue à crée une orbite périodique attractive O^+ à la place de O, et transforme O en une orbite périodique selle O' à valeurs propres positives (correspondant au bord de la variété instable locale de O qui est un ruban de Moebius). Plus précisément, il existe une petite perturbation X' de X sur P tel que X' coïncide avec X en dehors d'un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_0$ de l'orbite O, et tel que le champ de vecteurs X' sur $\mathcal{V}_0$ admet une orbite périodique attractive O^+ de valeurs propres négatives, et une orbite périodique O de valeurs propre négative. On excise un petit voisinage tubulaire $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\delta$ de taille δ de l'orbite O^+, dans le bassin d'attraction de O^+ et dont le bord est transverse au champ X'. On note $\hat{P} = P \setminus \mathcal{V}$ et $\hat{X}$ la restriction de X'' sur $\hat{P}$. Comme tout a lieu loin des composantes de bord de (P, X), on peut utiliser les énoncés [BBY17, Propositions 8.1 et 8.3], qui dit que si δ est assez petit, le couple $(\hat{P}, \hat{X})$ est un bloc de construction qui satisfait les items 1, 2, 4 et 5.

De plus ([GHS97, Sous-section 2.2.2]) il existe une application continue $\pi\colon P \to P$ surjective, qui envoie les orbites orientées du flot de X' sur les orbites orientées du flot de X, autrement dit c'est une semi-conjugaison entre le champ X' et une renormalisation du champ X. Soit B le bassin d'attraction de l'orbite O^+ pour le flot de X', et $\hat{B} = B \cup \mathcal{W}^s(O')$. Alors π envoie $\hat{B}$ sur $\mathcal{W}^s(O)$, et la pré-image d'un point $x \in \mathcal{W}^s(O)$ est un arc traversant B dont les extrémités sont sur la variété $\mathcal{W}^s(O)$. La restriction $\pi\colon P \setminus \hat{B} \to P \setminus \mathcal{W}^s(O)$ est un homéomorphisme, donc une équivalence orbitale. Comme l'ensemble des orbites de X' qui intersecte le bord de $\mathcal{V}$ est coïncide avec le bassin d'attraction de O^+, l'item 3 suit.

Montrons le dernier item, en reprenant la preuve de [BBY17, Propositions 8.1] Soit Λ_i la pièce basique du maximal invariant Λ de (P, X) contenant l'orbite O. La pièce Λ_i est non triviale car l'orbite O est supposée sans séparatrices libres, et il existe $\gamma \in \Lambda_i$ une orbite périodique dense dans Λ_i et disjointe de $\mathcal{W}^s(O)$. Comme $\pi\colon P \setminus \hat{B} \to P \setminus \mathcal{W}^s(O)$ est une conjugaison, la pré-image de $\Lambda_i \setminus \mathcal{W}^s(O)$ contient une orbite dense, donc est un ensemble transitif pour le flot de X'. Soit

$\hat{\Lambda}_i$ la pièce basique de $\hat{\Lambda}$ contenant cet ensemble. Comme les séparatrices instables de O ne sont pas libres, la variété stable $\mathcal{W}^s(O)$ est accumulée par des feuilles de $\mathcal{W}^s(\Lambda_i)$, et il s'ensuit par équivalence orbitale de X sur $P \setminus \mathcal{W}^s(O)$ et X' sur $P \setminus \hat{B} = P \setminus (B \cup \mathcal{W}^s(O'))$ que $\mathcal{W}^s(O')$ est accumulée par $\mathcal{W}^s(\hat{\Lambda}_i)$. Il s'ensuit que $\hat{\Lambda} \cap \mathcal{W}^s(O') \subset \hat{\Lambda}_i$, et l'application π induit un isomorphisme des graphes de Smale. □

Remarque 7.4.3. Il existe un analogue du lemme où $(\hat{P}, \hat{X})$ est tel que $\partial \hat{P} = \partial P \cup T$, et $\hat{X}$ est transverse à T et pointe vers l'intérieur de $\hat{P}$. On dit que $(\hat{P}, \hat{X})$ est un bloc de construction obtenu par *bifurcation Dérivé d'Anosov (DA) répulsive* sur l'orbite O. Dans ce cas, dans l'item 3, on a une équivalence orbitale entre X sur $P \setminus \mathcal{W}^u_X(O)$ et $\hat{X}$ sur $\hat{P} \setminus \mathcal{W}^u_{\hat{X}}(O')$.

Preuve de la proposition 7.0.2. Soit (P, X) un bloc satisfaisant les hypothèses de la proposition 7.4.1. Soit Λ_1 et Λ_2 un couple de deux pièces basiques de Λ contenant une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives. Soit O_1^+ et O_1^- deux orbites périodiques dans Λ_1 sans séparatrices libres, avec des valeurs propres négatives, et O_2^+ et O_2^- deux orbites périodiques dans Λ_1 sans séparatrices libres, avec des valeurs propres négatives. De telles orbites existent d'après 7.3.1, item 2, et car les orbites périodiques possédant une séparatrice libre sont en nombre fini (fait 2.1.7). Soit $(\hat{P}, \hat{X})$ le bloc connexe orienté obtenu par bifurcation DA répulsive sur les orbites O_i^+ et une bifurcation DA attractive sur les orbites O_i^-, par itération du lemme 7.4.2 et remarque 7.4.3. Alors

Fait 7.4.4. *Le bloc $(\hat{P}, \hat{X})$ vérifie les propriétés suivantes.*

1) *$\partial \hat{P} = \partial P \cup (\cup_{i=1,2} T_i^{\text{in}}) \cup (\cup_{i=1,2} T_i^{\text{out}})$, où T_1^{in} et T_2^{in} sont deux tores le long desquels le champ $\hat{X}$ est transverse et pointe vers l'intérieur de $\hat{P}$, et T_1^{out} et T_2^{out} sont deux tores le long desquels le champ $\hat{X}$ est transverse et pointe vers l'extérieur de $\hat{P}$.*

2) *Le graphe de Smale du maximal invariant $\hat{\Lambda}$ est isomorphe au graphe de Smale de Λ. Si on note $\cup \hat{\Lambda}_i$ la décomposition de $\hat{\Lambda}$ de façon compatible avec l'isomorphisme de graphe, alors les pièces $\hat{\Lambda}_1$ et $\hat{\Lambda}_2$ sont des pièces basiques selles.*

3) *La lamination $\hat{\mathcal{L}}$ sur chaque tore T_i^{in} et T_i^{out} est une lamination Morse-Smale remplissante avec une unique feuille compacte. De plus, $\hat{\mathcal{L}} \cap T_i^{\text{out}} = \mathcal{W}^u(\hat{\Lambda}_i) \cap T_i^{\text{out}}$, et $\hat{\mathcal{L}} \cap T_i^{\text{in}} = \mathcal{W}^s(\hat{\Lambda}_i) \cap T_i^{\text{in}}$.*

4) *La lamination $\hat{\mathcal{L}}$ sur ∂P est remplissante, et les laminations $\mathcal{L}$ et $\hat{\mathcal{L}}$ se complètent en des feuilletages topologiquement équivalents sur ∂P.*

Démonstration. Les item 1, 3 (première affirmation) et 4 découlent directement du lemme 7.4.2, item 1 et 4, que l'on itère. Les tores T_1^{in} et T_2^{in} sont les composantes de bord crées par bifurcation répulsive sur O_1^+ et O_2^+ et les tores T_1^{out} et T_2^{out} sont les composantes de bord crées par bifurcation attractive sur O_1^- et O_2^+. En composant chaque semi-conjugaison obtenue par itération de la construction (item 3, lemme 7.4.2), on obtient une semi-conjugaison h entre le champ de vecteurs $\hat{X}$ sur le complémentaire du saturé $\hat{T}$ des tores T_i^{out} et T_i^{in} par le flot de $\hat{X}$, et une renormalisation du champ de vecteurs X sur le complémentaire de l'union des variétés stables $\mathcal{W}^s(O_i^+)$ et des variétés instables $\mathcal{W}^u(O_i^-)$. Soit $\hat{\Lambda}_i$ la pièce basique de $\hat{\Lambda}$ envoyé par h sur Λ_i. Il découle de l'item 3 du lemme 7.4.2 que la pré-image de $\Lambda \cap W^s(O_i^-) = \Lambda_i \cap W^s(O_i^-)$ par h est l'ensemble des orbites de $\hat{\Lambda}$ dont la variété instable intersecte le tore T_i^{out}, et est contenue dans $\hat{\Lambda}_i$. De même, la pré-image de $\Lambda \cap W^u(O_i^+) = \Lambda_i \cap W^u(O_i^+)$ par h est l'ensemble des orbites de $\hat{\Lambda}$ dont la variété instable intersecte le tore T_i^{in}, et est contenue dans $\hat{\Lambda}_i$. Il s'ensuit que la seconde affirmation de l'item 3 est vérifiée, et la pièce basique $\hat{\Lambda}_i$ est une pièce basique selle. L'item 2 découle alors de l'item 6 du lemme 7.4.2. □

Passons à l'opération recollement. On va définir un recollement partiel φ de $(\hat{P}, \hat{X})$ de sorte que le graphe de recollement $G = G(\hat{P}, \hat{X}, \varphi)$ contienne un cycle entre Λ_1 et Λ_2. Soit $\varphi_1 \colon T_1^{\text{out}} \to T_2^{\text{in}}$ un difféomorphisme fortement (quasi)-transverse qui envoie l'unique feuille compacte de la lamination $\hat{\mathcal{L}}_{|T_1^{\text{out}}}$ sur une feuille parallèle (disjointe) à l'unique feuille compacte de la lamination $\hat{\mathcal{L}}_{|T_2^{\text{in}}}$ (figure 7.10). Par symétrie de la lamination, on peut choisir un difféomorphisme qui renverse l'orientation. Soit $\varphi_2 \colon T_2^{\text{out}} \to T_1^{\text{in}}$ un difféomorphisme fortement (quasi-)transverse qui envoie l'unique feuille compacte de la lamination $\hat{\mathcal{L}}_{|T_2^{\text{out}}}$ sur une feuille parallèle (disjointe) à l'unique feuille compacte de la lamination $\hat{\mathcal{L}}_{|T_1^{\text{in}}}$ et qui renverse l'orientation. Soit φ le produit des difféomorphismes φ_i (rendu involutif). Alors φ est un recollement partiel de $(\hat{P}, \hat{X})$ qui renverse l'orientation. De plus, il existe maintenant un cycle entre $\hat{\Lambda}_1$ et $\hat{\Lambda}_2$ dans le graphes $G = G(\hat{P}, \hat{X}, \varphi)$.

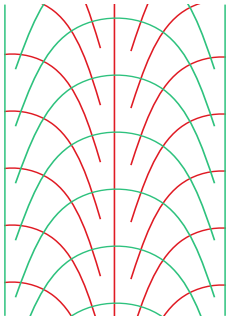


FIGURE 7.10 – Paire de laminations Morse-Smale fortement transverses $(\hat{\mathcal{L}}, (\varphi_i)_*\hat{\mathcal{L}})$ sur un tore T^{in}

On peut itérer le fait 7.4.4 et l'opération de recollement décrite ci-dessus pour toute paire (Λ_k, Λ_j) de pièces basiques du maximal invariant contenant une infinité d'orbites périodiques dont les valeurs propres sont négatives. On obtient un bloc (Q, Y) connexe orienté, muni d'un recollement partiel φ qui renverse l'orientation

- $\partial Q = \partial P \cup (\bigcup_{i,j} T_{i,j}^{\text{in}}) \cup (\bigcup_{i,j} T_{i,j}^{\text{out}})$, où le champ Y est transverse aux tores $T_{i,j}^{\text{in}}$ et pointe vers l'intérieur de Q, et est transverse aux tores $T_{i,j}^{\text{out}}$ et pointe vers l'extérieur de Q
- La lamination $\mathcal{L}_Y$ sur ∂P est remplissante, et les laminations $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ se complètent en des feuilletages topologiquement équivalents sur ∂P.
- Le graphe de Smale du maximal invariant Λ_Y est isomorphe au graphe de Smale de Λ_X, et toutes les pièces basiques de Λ_Y sont des pièces basiques selles. On note $\cup \Lambda_{Y,i}$ la décomposition de $\Lambda_{Y,i}$ de façon compatible avec l'isomorphisme de graphe.
- La lamination $\mathcal{L}_Y$ sur chaque tore $T_{i,j}^{\text{in}}$ et $T_{i,j}^{\text{out}}$ est remplissante, et pour tout (i, j) on a $\mathcal{L}_Y \cap T_{i,j}^{\text{out}} = \mathcal{W}^u(\Lambda_{Y,i}) \cap T_{i,j}^{\text{out}}$, et $\mathcal{L}_Y \cap T_{i,j}^{\text{in}} = \mathcal{W}^s(\Lambda_{Y,i}) \cap T_{i,j}^{\text{in}}$.
- Pour toute paire de pièces basiques $(\Lambda_{Y,i}, \Lambda_{Y,k})$ de Λ_Y admettant une infinité d'orbites périodiques de valeurs propres négatives, le recollement partiel φ apparie une composante $T_{i,j}^{\text{out}}$ avec une composante $T_{k,l}^{\text{in}}$, et une composante $T_{k,l'}^{\text{out}}$ avec une composante $T_{i,j'}^{\text{in}}$. Il s'ensuit d'après l'item précédent que les pièces basiques $\Lambda_{Y,i}$ et $\Lambda_{Y,k}$ sont connectés par un cycle dans le graphe $G(Q, Y, \varphi)$

En particulier (Q, Y) est un bloc de construction selle plein. Par hypothèse, et par isomorphisme des graphes de Smale, chaque pièce basique de Λ_Y est connectée par un chemin orienté et un chemin orienté inverse à une pièce basique ayant une infinité de valeurs propres négatives, et chaque telle paire est connectée par un cycle dans $G(Q, Y, \varphi)$. Il suit que deux pièces basiques quelconques sont connectées par un chemin d'arêtes orientées dans $G(Q, Y, \varphi)$, autrement dit le graphe est fortement connexe.

D'après la proposition 7.1.3 (généralisation du théorème de recollement 1), quitte à faire une forte isotopie du triplet (Q, Y, φ), le quotient $N := Q/\varphi$ est une variété orientée compacte à bord muni d'un champ de vecteurs Z induit par Y, tel que le couple (N, Z) en un bloc de construction connexe et orienté. On note $f_Y \colon Q^{\text{in}} \to Q^{\text{out}}$ l'application de passage du bloc (Q, Y). D'après la proposition 7.1.2, le bord de N est $\partial N = \partial P$, et lamination de bord $\mathcal{L}_Z$ sur ∂P est

$$\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_Y \cup (f_Y)_* (\varphi_* \mathcal{L}_Y \smallsetminus \mathcal{L}_Y) \cup (f_Y^{-1})_* (\varphi_* \mathcal{L}_Y \smallsetminus \mathcal{L}_Y)$$

La lamination $\mathcal{L}_Z$ contient la lamination quasi-Morse-Smale $\mathcal{L}_Y$ remplissante, donc c'est une lamination quasi-Morse-Smale remplissante de même type combinatoire. Il suit que ces deux laminations se complètent en feuilletages topologiquement équivalents sur ∂N (lemme 7.2.4 et proposition 7.2.13), donc de même pour $\mathcal{L}_Z$ et $\mathcal{L}_X$. Par forte connexité du graphe $G(Q, Y, \varphi)$, le bloc (N, Z) est transitif (proposition 7.1.2). On conclut que (N, Z) satisfait le proposition 7.4.1. □

7.5 Réalisation de bi-feuilletage quasi-transverse dans un flot d'Anosov

Dans cette section on montre que l'on peut réaliser toute paire de feuilletages quasi-transverses, comme trace des feuilletages stables et instables sur un tore quasi-transverse plongé dans un flot d'Anosov transitif. On rappelle que une paire de feuilletage $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ sur le tore T est dite *quasi-transverse* si c'est une paire de deux feuilletages quasi-Morse-Smale, qui coïncident le long de leur feuilles marquées orientées, sont transverses sur le complémentaire des feuilles marquées, et tel que $T^{\text{in}}_{\mathcal{F}_1} = T^{\text{out}}_{\mathcal{F}_2}$ (définition 1.3.5 et figure 10).

Lemme 7.5.1. *Soit $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ une paire de feuilletages quasi-transverses sur le tore T, tel que l'ensemble Γ_* des feuilles compactes marquées (communes) est non vide. On note $\Gamma = \Gamma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ la collection des feuilles compactes de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Alors les feuilles compactes Γ de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ sont non contractibles dans T et deux à deux librement homotopes en tant que chemins non orientés dans T. Les feuilles compactes de $\Gamma \smallsetminus \Gamma_*$ sont deux à deux disjointes.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les feuilletages $\mathcal{F}_i$ ont un ensemble non vides de feuilles compactes marquées, et coïncident le long de ces feuilles. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 7.2.5. Par transversalité des feuilletages sur le complémentaire des feuilles marquées, les feuilles compactes non marquées sont deux à deux disjointes. □

Il existe donc un ordre cyclique sur les éléments de Γ. On munit les éléments de Γ de l'orientation dynamique induite par l'orientation dynamique des feuilles compactes respectives de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Elle coïncide le long des feuilles marquées communes. Soit $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ une paire de feuilletages quasi-transverses sur le tore T orienté, tel que l'ensemble des feuilles compactes marquées (communes) est *non vide*. Soit une énumération géométrique (définition 7.2.6) $\Gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ des feuilles compactes de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. On note $\Gamma_* \subset \Gamma$ la collection des feuilles compactes marquées communes. La définition suivante permet de caractériser le "dessin" de l'intersection quasi-transverse des deux feuilletages.

Définition 7.5.2 (Type combinatoire de bi-feuilletage)**.** Soit l'application

$$\sigma = \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \{1,2\} \times (\mathscr{A}_H \times \mathscr{A}_O \times \mathscr{A}_H)$$

définie par :

i) $\sigma(k) = (1, *)$ si et seulement si γ_k appartient au feuilletage $\mathcal{F}_1$, et $\sigma(k) = (2, *)$ si et seulement si γ_k appartient au feuilletage $\mathcal{F}_2 \smallsetminus \Gamma_*$;

ii) $\sigma(k) = (*, (* \uparrow *))$ si et seulement si la feuille γ_i est librement homotope à γ_0 en tant que chemins orientés ;

iii) $\sigma(k) = (i, (\rightarrow **))$ si et seulement si l'holonomie de $\mathcal{F}_i$ à gauche[4] de γ_k est contractante ;

iv) $\sigma(k) = (i, (** \leftarrow))$ si et seulement si l'holonomie de $\mathcal{F}_i$ à droite de γ_k est contractante ;

On dit que σ est un *type combinatoire du bi-feuilletage quasi-transverse* $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ *sur* T.

Cette définition n'est pas symétrique car on fait le choix arbitraire de privilégier $\mathcal{F}_1$, et $\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ n'est pas égal à $\sigma(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$. En effet, on considère les feuilles marquées comme des feuilles compactes de $\mathcal{F}_1$. Si σ_1 est un type combinatoire quasi-Morse-Smale de $\mathcal{F}_1$, alors il existe une injection $\phi_1 \colon \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \circ \phi_1 = (1, \pm\sigma_1)$. Ce n'est pas vrai pour $\mathcal{F}_2$.

Exemple 7.5.3. On donne le type combinatoire du bi-feuilletage de la figure 10, où l'énumération géométrique sur les feuilles compactes est celui de gauche à droite, le vert désigne un composante in, le rouge désigne une composant out, $\mathcal{F}_1$ est le feuilletage en trait plein et $\mathcal{F}_2$ le feuilletage en trait pointillé

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \{&(1, (\leftarrow, \uparrow, \leftarrow)); \ (1, (\leftarrow, \downarrow, \rightarrow); \ (2, (\rightarrow, \uparrow, \leftarrow); \ (1, (\leftarrow, \downarrow, \rightarrow); \ (1, (\rightarrow, \uparrow, \rightarrow); \\ &(2, (\rightarrow, \downarrow, \leftarrow); \ (1, (\leftarrow, \uparrow, \rightarrow); \ (1, (\leftarrow, \downarrow, \rightarrow); \ (2, (\rightarrow, \uparrow, \leftarrow); \ (1, (\leftarrow, \downarrow, \rightarrow)\}\end{aligned}$$

Proposition 7.5.4 (Proposition D)**.** *Soit σ un type combinatoire de bi-feuilletage quasi-transverse. Il existe un champ de vecteurs Anosov transitif Z sur une 3-variété $\mathcal{M}$ orientée et un tore incompressible T plongé dans $\mathcal{M}$, quasi-transverse à Z, tel que la trace des feuilletages stables et instables $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur T induit un bi-feuilletage quasi-transverse $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ sur T de type combinatoire σ.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ un bi-feuilletage quasi-transverse de type combinatoire σ sur le tore T orienté. On désigne par $\check{T}$ le tore T muni de l'orientation opposée. Soit (P, X) le bloc connexe orienté transitif selle plein donné par la proposition 7.0.2 associé aux feuilletages $\mathcal{G}_1$ sur le tore orienté T et $\mathcal{G}_2$ sur le tore orienté $\check{T}$. On note $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, X). Le bord ∂P est l'union de deux tores quasi-transverses T_1 et T_2 tel que la lamination $\mathcal{L}$ sur T_1 est remplissante et se prolonge en un feuilletage topologiquement équivalent à $\mathcal{G}_1$ sur T et la lamination $\mathcal{L}$ sur T_2 est remplissante et se prolonge en un feuilletage topologiquement équivalent à $\mathcal{G}_2$ sur $\check{T}$. Par construction, il existe une involution $\varphi \colon \partial P \to \partial P$ qui apparie T_1 et T_2, qui renverse l'orientation et tel que la paire $(\varphi_* \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$ est une paire de laminations remplissantes fortement quasi-transverses, et se complète sur T_1 en une paire de feuilletage fortement quasi-transverse topologiquement équivalente à la paire $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Ce difféomorphisme induit un recollement fortement quasi-transverse du bloc (P, X). Par le théorème de recollement (théorème 1), il existe un triplet fortement isotope (P', X', φ') tel que le quotient $\mathcal{M} := P'/\varphi'$

4. l'orientation de la première feuille et du tore T détermine une gauche et une droite pour chaque feuille compacte

est une 3-variété fermée orientée muni d'un champ de vecteurs Z induit par X' qui est Anosov. Comme (P, X) est transitif, il en est de même pour (P', X') et le flot d'Anosov Z est transitif (proposition 6.4.2). La projection de $\partial P'$ dans $\mathcal{M}$ est un tore orienté T quasi-transverse au champ d'Anosov Z donc incompressible ([Bar95b] et [Bru93]). Les feuilletages stable et instable $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ du flot d'Anosov induisent sur T une paire de feuilletages quasi-transverse $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, qui contient la projection de la paire de laminations remplissantes $(\varphi'_*\mathcal{L}_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$. La paire $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ n'est pas a priori topologiquement équivalente à la paire $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ (cette donnée est perdue par forte isotopie, voir remarque 1.4.13) mais il découle de la propriété 1.4.12, item 3 que le type combinatoire du bi-feuilletage qui prolonge la paire $(\varphi'_*\mathcal{L}_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$ et du bi-feuilletage qui prolonge la paire $(\varphi_*\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_X)$ sont égaux. Il suit que le type combinatoire du bi-feuilletage de $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est égal à σ. $\square$

Chapitre 8

Plonger un bloc selle plein dans un flot d'Anosov

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition principale suivante. On rappelle qu'un bloc de construction est dit *selle* si le maximal invariant ne contient ni attracteur ni répulseur, et *plein* si la lamination de bord est remplissante. On renvoie au chapitre 1 pour les définitions. Dans ce chapitre, on considère des blocs orientables.

Proposition 8.0.1 (Proposition E)**.** *Pour tout bloc de construction (P, X) orientable selle plein (transitif), il existe un champ de vecteurs Anosov Z (transitif) sur une variété fermée $\mathcal{M}$ de dimension 3 orientable, tel que (P, X) est plongé dans $(\mathcal{M}, Z)$. Plus précisément, il existe une collection de tores incompressibles $\mathcal{T}$ plongés dans $\mathcal{M}$, quasi-transverses à Z, et qui découpent dans $\mathcal{M}$ une sous-variété compacte difféomorphe à P tel que la restriction de Z sur P est orbitalement équivalente à X.*

Résumons la preuve. Dans un premier temps, on remarque que pour tout feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$, il existe un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{G}$ quasi-transverse à $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$ (lemme 8.1.1). Pour un bloc (P, X) donné, on associe à chaque composante de bord T_k de ∂P un bloc (N_k, Y_k) donné par la proposition 7.0.2, dont le type combinatoire de la lamination de bord $\mathcal{L}_{Y_k}$ est le type combinatoire d'un feuilletage quasi-transverse à la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ de (P, X) sur T_k. On recolle le bloc (P, X) et (N_k, Y_k) le long du bord T_k par un recollement (partiel) fortement quasi-transverse qui renverse l'orientation, et on procède ainsi pour chaque composante de bord T_k. Quitte à faire une forte isotopie des blocs et des recollements, le théorème de recollement 1 nous dit que les champs de vecteurs des différents blocs induisent un champ de vecteurs Anosov sur la variété quotient (orientable), et transitif d'après le critère 6.4.2.

8.1 Feuilletage quasi-transverse à un feuilletage quasi-Morse-Smale donné

Une première étape consiste à montrer que pour tout feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$, il existe un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{G}$ quasi-transverse à $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$ (lemme 8.1.1).

Lemme 8.1.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage quasi-Morse-Smale sur le tore T. Alors il existe $\mathcal{G}$ un feuilletage quasi-Morse-Smale sur T telle que $\mathcal{G}$ est quasi-transverse à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. On note $\Gamma_{\mathcal{F}}$ les feuilles compactes de $\mathcal{F}$, Γ_* les feuilles compactes marquées de $\mathcal{F}$, et $T^{\text{in}} \cup T^{\text{out}}$ la décomposition de $T \setminus \Gamma_*$ associée. Soit A l'adhérence d'une composante

connexe de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}$. Supposons que cette composante connexe appartient à T^{in}. Soit $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{F}}$ une composante connexe de ∂A. C'est une feuille compacte de $\Gamma_{\mathcal{F}}$ orientée par l'orientation dynamique (définition 7.2.1, remarque 7.2.3), tel que l'holonomie de la feuille orientée γ du feuilletage $\mathcal{F}$ est dilatante. Soit $N = N(\gamma)$ un petit voisinage collier de γ dans ∂A et (x, θ) : $N \to [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des coordonnées sur A tel que $\gamma = \{x = 0\}$ est orientée dans le sens positif de θ. Deux feuilletages dont l'holonomie est contractante sont topologiquement équivalents, on peut donc supposer que la direction de $\mathcal{F}$ est donnée par $dx + xd\theta = 0$. On distingue deux cas :

1) Si $\gamma \in \Gamma_*$ est une feuille marquée de $\mathcal{F}$, on définit $\mathcal{G}$ sur N par le feuilletage de direction $dx - xd\theta = 0$.

2) Si $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{F}} \setminus \Gamma_*$ est une feuille compacte non marquée de $\mathcal{F}$, on définit $\mathcal{G}$ sur N par le feuilletage de direction $d\theta - xdx = 0$.

On renvoie à la figure 8.1. On fait une construction similaire sur un voisinage collier $N(\gamma')$ de la seconde composante de bord γ' de ∂A. On obtient un feuilletage $\mathcal{G}$ sur un voisinage collier $V = N(\gamma) \cup N(\gamma')$ de ∂A dans A. Soit la métrique $\|\cdot\|^2 = dx^2 + d\theta^2$ sur $N(\gamma)$ et $N(\gamma')$. Alors par construction, $\mathcal{G}$ est orthogonal pour cette métrique à $\mathcal{F}$ sur le bord de V, et on prolonge $\mathcal{G}$ sur A par le feuilletage défini par le champ de vecteurs X' orthogonal à un champ de vecteurs X générateur du feuilletage $\mathcal{F}$ dans la métrique $\|\cdot\|$. Par densité des champ de vecteurs Morse-Smale, il existe un champ Morse-Smale X'' proche de X' en topologie $\mathcal{C}^1$ sur A, qui coïncide avec X' sur un voisinage de ∂A. Ce champ de vecteurs définit un feuilletage $\mathcal{G}'$ sur A, qui contient un nombre fini de feuille compacte, qui sont toutes munies d'une orientation telle que l'holonomie est dilatante (c'est l'orientation dynamique), et tel que $\mathcal{G}'$ est transverse à $\mathcal{F}$ sur l'intérieur de A (la transversalité est une propriété ouverte). On construit ainsi un feuilletage $\mathcal{G}'_k$ sur chacune des composante connexe A_k de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}$, qui se recollent en un feuilletage $\mathcal{G}'$ sur T, qui est un feuilletage quasi-Morse-Smale et quasi-transverse à $\mathcal{F}$ sur T. □

La preuve précédente ne permet pas de connaître un type combinatoire de $\mathcal{F}'$. On donne en figure 8.1 une table qui associe à toute composante A de $T \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}$ un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{F}'$ (en bleu) sur A quasi-transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ (en noir), en fonction du type combinatoire de $\mathcal{F}$ sur les feuilles compactes du bord de A. Les six cas sont les suivants de gauche à droite et de haut en bas sur les figures 8.1 :

1) $\sigma(i) = (\rightarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \uparrow\ \leftarrow)$

2) $\sigma(i) = (\rightarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \downarrow\ \leftarrow)$

3) $\sigma(i) = (\rightarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$

4) $\sigma(i) = (\rightarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \downarrow\ \rightarrow)$

5) $\sigma(i) = (\leftarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$

6) $\sigma(i) = (\leftarrow\ \uparrow\ \rightarrow)$ et $\sigma(i+1) = (\leftarrow\ \downarrow\ \rightarrow)$

Tous les autres s'obtiennent à partir de ceux-ci par renversement de l'orientation.

8.2 Preuve de la proposition E

Démonstration de la proposition 8.0.1. Soit (P, X) un bloc de construction orientable selle plein transitif. On note $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, X). On note $T_1, \ldots, T_n$ les composantes

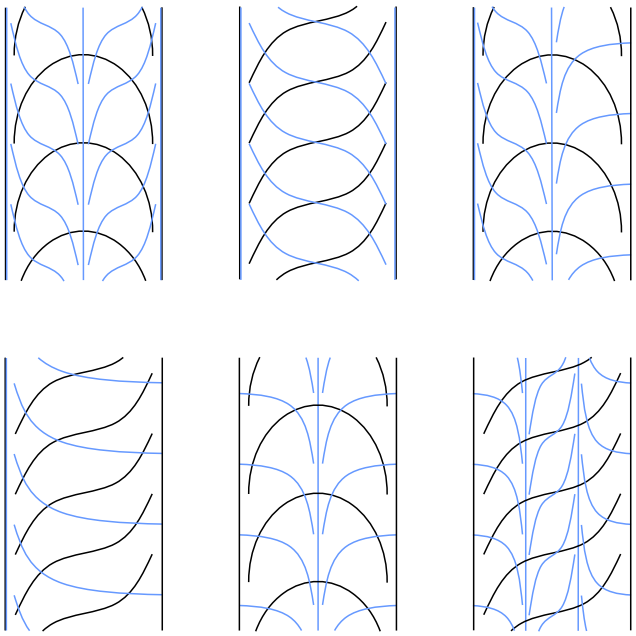


FIGURE 8.1 – Exemple d'un feuilletage quasi-Morse-Smale $\mathcal{G}$ (en bleu) quasi-transverse à $\mathcal{F}$ (en noir) sur chaque composante connexe du complémentaire des feuilles compactes $\Gamma_{\mathcal{F}}$ pour chaque valeur de σ

connexes de ∂P, et on suppose pour commencer qu'aucune n'est transverse au champ X. Pour chaque $k = 1, \ldots, n$, soit $\mathcal{F}_k$ un feuilletage quasi-Morse-Smale sur T_k contenant $\mathcal{L}$ en sous-lamination (lemme 7.2.4). Soit $\mathcal{G}_k$ un feuilletage quasi-Morse-Smale sur T_k et quasi-transverse à $\mathcal{F}_k$ donné par le lemme 8.1.1. Soit (N_k, Y_k) le bloc de construction donné par la proposition 7.0.2 associé à deux copies du feuilletage $\mathcal{G}_k$ sur le tore orienté $\check{T}_k$ (qui désigne le tore T_k muni de l'orientation inverse). Le bord ∂N_k est formé de deux composantes connexes $T_{k,1}$ et $T_{k,2}$ et la lamination de bord de (N_k, Y_k) sur $T_{k,i}$ se complète en un feuilletage topologiquement équivalent au feuilletage $\mathcal{G}_k$ sur $\check{T}_k$. On en déduit qu'il existe un difféomorphisme $\varphi_{k,i} : T_{k,i} \to T_k$ qui envoie la lamination de bord de (N_k, Y_k) sur une lamination fortement quasi-transverse à la lamination de bord de (P, X), et qui renverse l'orientation. Le produit φ_k des $\varphi_{k,i}$ (rendu involutif) est un recollement *partiel* fortement quasi-transverse du bloc formé de l'union de deux copies de (P, X) et du bloc (N_k, Y_k), et qui renverse l'orientation. Le produit φ des φ_k (rendu involutif) est un recollement (non partiel) fortement quasi-transverse du bloc (M, Y) selle plein transitif formé de deux copies de (P, X) et de l'union $\cup_k (N_k, Y_k)$ (figure 8.2), et qui renverse l'orientation. D'après le théorème 1, quitte à modifier (M, Y) par forte isotopie le quotient $\mathcal{M} := M/\varphi$ est une variété fermée, orientable, munie d'un champ de vecteurs $Z := Y_\varphi$ induit par Y qui est Anosov. La transitivité se déduit de la connexité forte du graphe $G = G(M, Y, \varphi)$ associé (proposition 6.4.2). En effet, le maximal invariant Λ_Y du bloc (M, Y) se décompose en l'union des maximaux invariants des deux copies de (P, X) et des maximaux invariants des blocs (N_k, Y_k). Chacun de ces ensembles est transitif, donc une pièce basique de Λ_Y. Le recollement φ_k apparie une composante de bord T_k de chacune des deux copies de (P, X) avec une des deux composantes de bord de (N_k, Y_k). Par hypothèse, chaque composante de bord de (P, X) et (N_k, Y_k) contient un nombre non nul d'orbites périodiques, donc la lamination stable et instable des maximaux invariants de chacun des blocs intersecte chacune des composantes de bord du dit bloc. Il s'ensuit que

l'image de la lamination stable $\mathcal{L}_k^s$ de (N_k, Y_k) intersecte la lamination de bord instable $\mathcal{L}_X^u$ de chacune des deux copies de (P, X) via le recollement φ, et de même l'image de la lamination instable $\mathcal{L}_k^u$ de (N_k, Y_k) intersecte la lamination de bord table $\mathcal{L}_X^s$ de chacune des deux copies de (P, X) via le recollement φ (les laminations de bords sont toutes remplissantes). On en déduit que les maximaux invariants des deux copies de (P, X) et de (N_k, Y_k) sont reliés par un cycle dans le graphe $G(M, Y, \varphi)$. Comme ce résultat est vrai pour tout k, le graphe G est fortement connexe. Le bloc P est naturellement plongé dans $\mathcal{M}$ en une sous-variété à bord, dont le bord est l'union de tores quasi-transverses au champ de vecteurs Anosov Z. Pour finir, on sait d'après [Bar95b] et [Bru93] que tout tore plongé dans un flot d'Anosov en position quasi-transverse est incompressible.

La preuve se généralise pour un bloc de construction (P, X) quelconque en utilisant les résultats de [BBY17] pour apparier les composantes connexes qui sont transverses au champ de vecteurs. □

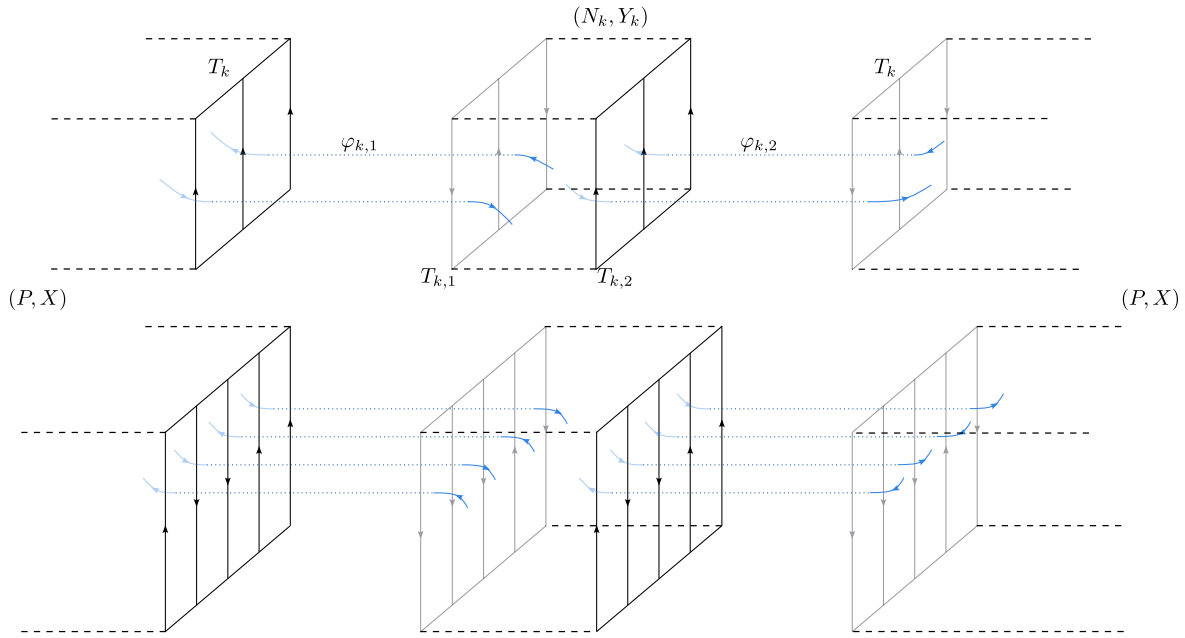


FIGURE 8.2 – Recollement de deux copies de (P, X) et des blocs (N_k, Y_k)

Chapitre 9

Réalisation d'un type géométrique abstrait dans un bloc selle plein

Dans ce chapitre on s'intéresse à la dynamique au voisinage du maximal invariant d'un bloc de construction selle plein. Toutes les variétés que l'on considère seront orientables. On montre la proposition F qui donne un critère nécessaire et suffisant pour qu'un bloc de construction selle plein orientable réalise un *type géométrique abstrait* en tant que type géométrique d'une partition de Markov de son ensemble maximal invariant. Pour ce faire, on utilisera une correspondance entre les blocs de construction et les blocs de Béguin-Bonatti-Yu donnée par un ensemble de chirurgies de type attachement et suppression d'anses (section 9.2), et les résultats de [BB02] et [BBV99] qui donnent l'existence et l'unicité d'un bloc de Béguin-Bonatti-Yu canonique (le *modèle*) qui réalise un type géométrique abstrait. On décrit ensuite une méthode algorithmique simple qui permet de vérifier ces critères à partir du type géométrique par des recollements de rectangle (section 9.4). Commençons par des définitions précises.

Définition 9.0.1 (Bloc modèle)**.** On dit qu'un bloc de construction orientable (U, X) est un *bloc modèle* si, en notant Λ le maximal invariant et $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (U, X), on a

1) $X \pitchfork \partial U$

2) toute composante connexe de U intersecte Λ,

3) toute courbe fermée simple c plongée dans ∂U et disjointe de $\mathcal{L}$ borde un disque $D \subset \partial U$ disjoint de $\mathcal{L}$.

En particulier, un bloc modèle est un bloc de Béguin-Bonatti-Yu.

Remarque 9.0.2. Cette définition est compatible avec la définition [BB02, Définition 0.2] du *modèle du germe d'un ensemble selle saturé* Λ d'un champ de Smale X sur une variété compacte orientable $\mathcal{M}$ de dimension 3. Un ensemble compact invariant Λ pour un champ de vecteurs X est dit *selle saturé* si c'est un ensemble hyperbolique d'indice $(1, 1)$, sans attracteur ni répulseur, qui contient l'intersection de ses variétés stables et instables, autrement dit $\Lambda = \mathcal{W}^s(\Lambda) \cap \mathcal{W}^u(\Lambda)$. Le *germe* $[X, \Lambda]$ est la classe d'équivalence du couple (X, Λ) pour la relation $(X, \Lambda) \sim (X', \Lambda')$ si il existe un voisinage de V de Λ et V' de Λ' tel que les champs de vecteurs X sur V et X' sur Λ' sont orbitalement équivalents. Un *modèle du germe* d'un ensemble selle saturé $[X, \Lambda]$ est alors un couple (U, Y) où U est une variété orientable compacte à bord de dimension 3, muni d'un champ de vecteurs Y transverse au bord, tel que si Λ_Y est le maximal invariant du flot de Y dans U, alors $[Y, \Lambda_Y] = [X, \Lambda]$, et les conditions 2 et 3 de la définition 9.0.1 sont satisfaites. On peut effectivement parler de lamination de bord de (U, Y) car (U, Y) est alors un bloc de construction

au sens de la définition 1.1.3. Un bloc modèle (U, X) selon la définition 9.0.1 est alors un modèle du germe $[X, \Lambda]$ de son maximal invariant. Dans [BB02, Théorème 0.3] les auteurs montrent que le modèle d'un germe d'un ensemble selle saturé est unique à équivalence orbitale près, ce qui justifie que l'on parle *du* modèle.

On suit la définition de [BB02, Définition 2.3 et Définition 2.4] pour le type géométrique.

Définition 9.0.3 (Type géométrique abstrait)**.** Un type géométrique abstrait $\mathscr{T}$ est la donnée de :

- un entier $n \in \mathbb{N}^*$
- pour tout $1 \leq i \leq n$, la donnée de deux entiers h_i et v_i tel que $\sum_i h_i = \sum_i v_i$,
- une application ϕ de $\{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans $\{k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{\pm 1\}$ qui induit une bijection par oubli des signes.

Soit $\mathcal{R} = \{\Sigma, R\}$ une partition de Markov au sens de la définition 2.2.4. On considère des partitions plongées dans des variétés orientables, avec un choix d'orientation sur Σ. Alors un choix d'une orientation des verticales de $\mathcal{R}$ induit une orientation des horizontales de $\mathcal{R}$.

Définition 9.0.4 (Type géométrique d'une partition de Markov)**.** Soit $\mathcal{R} = \{\Sigma, R\}$ une partition de Markov munie d'une orientation des verticales et horizontales, et on note $f : R \to \Sigma$ l'application de retour de la partition de Markov. Le *type géométrique* $\mathscr{T}$ *de* $\mathcal{R}$ est un type géométrique abstrait défini par

- n est le nombre de rectangle de $\mathcal{R}$
- h_i est le nombre de composantes connexes de l'intersection de R_i avec l'union des $f^{-1}(R_j)$, ce sont des sous-rectangles horizontaux $H_i^1, \dots H_i^{h_i}$ de R_i, numérotés dans l'ordre induit par l'orientation des verticales de R_i
- v_k est le nombre de composantes connexes de l'intersection R_k avec l'union des $f(R_j)$, ce sont des sous-rectangles verticaux $V_k^1, \dots V_k^{v_k}$ de R_k, numérotés dans l'ordre induit par l'orientation des horizontales de R_k
- $\phi(i, j) = ((k, l), \epsilon)$ si $f(H_i^j) = V_k^l$, et $\epsilon = +$ si l'orientation des verticales de $f(H_i^j)$ coïncide avec l'orientation des verticales de V_k^l, et $\epsilon = -$ sinon.

Exemple 9.0.5. Le type géométrique du faux-fer à cheval (figure 9.1) est

$$\mathscr{T} = \{n = 1,\ h_1 = 2,\ v_1 = 2,\ \phi(1, 1) = (1, 1, +),\ \phi(1, 2) = (1, 2, +)\}$$

Théorème 9.0.6 ([BBV99, Théorème 0.1] et [BB02, Théorème 0.4])**.** *Pour tout type géométrique abstrait $\mathscr{T}$, il existe un bloc modèle (U, X) selle, dont le maximal invariant admet une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$, et celui-ci est unique à équivalence orbitale près. On dit que (U, X) est* le modèle du type géométrique $\mathscr{T}$.

On rappelle qu'on dit qu'un bloc de construction est selle si son maximal invariant ne contient ni attracteur ni répulseur. Le but de ce chapitre est de montrer la proposition principale suivante.

Proposition 9.0.7 (Proposition F)**.** *Soit un type géométrique abstrait $\mathscr{T}$. Il existe un bloc de construction orientable (P, X) selle plein, qui possède une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$ si et seulement si le modèle (U, Y) du type géométrique $\mathscr{T}$ vérifie les conditions suivantes, où $\mathcal{L}_Y^s$ et $\mathcal{L}_Y^u$ désignent les laminations sur le bord d'entrée U^{in} et le bord de sortie U^{out}, et $\mathcal{L}_Y$ désigne la lamination de bord sur ∂U :*

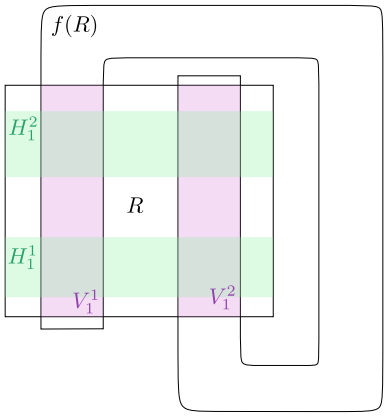


FIGURE 9.1 – Partition du faux-fer à cheval

1) *∂U est une union de tores et de sphères, chaque sphère contient exactement deux disques D_i et D_j bordés par deux feuilles compactes distinctes de $\mathcal{L}_Y$ et d'intérieurs disjoints de $\mathcal{L}_Y$.*

2) *La lamination $\mathcal{L}_Y^s$ est un pré-feuilletage sur le complémentaire $U^{\text{in}} \setminus \cup_i D_i$.*

Un tel bloc (P, X) est alors unique à isotopie près. De plus, si on note $\mathcal{L}_X^s$ et $\mathcal{L}_X^u$ la lamination sur le bord d'entrée P^{in} et la lamination sur le bord de sortie P^{out}, et $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbites périodiques de X contenues dans ∂P, alors

- *la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$ est topologiquement équivalente à la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^s$ à $U^{\text{in}} \setminus \cup_i D_i$,*

- *la lamination $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{out}}}$ est topologiquement équivalente à la restriction de la lamination $\mathcal{L}_Y^u$ à $U^{\text{out}} \setminus \cup_i D_i$.*

Remarque 9.0.8. L'item 2 est équivalent à dire que la lamination $\mathcal{L}_Y^u$ est un pré-feuilletage sur le complémentaire $U^{\text{out}} \setminus \cup_i D_i$, et équivalent à dire que la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ est un pré-feuilletage sur $\partial U \setminus \cup_i D_i$. En effet, il y a une correspondance bijective entre les composantes connexes de $U^{\text{in}} \setminus \mathcal{L}_Y^s$ et les composantes connexes de $U^{\text{out}} \setminus \mathcal{L}_Y^u$ donnée par l'application de passage $f_Y : U^{\text{in}} \to U^{\text{out}}$ du flot de Y du bord d'entrée au bord de sortie, et les composantes associées sont difféomorphes.

La preuve consiste à passer d'un bloc de construction à un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (et réciproquement) par des méthodes de chirurgies de type attachement et suppression d'anses. On analyse les propriétés de ces blocs correspondants obtenus par de telles chirurgie au niveau des laminations de bord.

- Dans une première section 9.1, on construit une correspondance entre les blocs de construction et des blocs "intermédiaires" (définition 9.1.1), qui seront des prolongements minimes "standard" de blocs de construction, dont le bord se décompose en un bord d'entrée, un bord de sortie et un bord tangent. Ce seront les pièces de nos chirurgies par attachement et suppression d'anses. On pourra recoller des anses le long du bord tangent pour construire des blocs de construction dont le bord est transverse au champ de vecteurs.

- Dans la section 9.2 suivante, on décrit deux opérations de chirurgie inverses l'une de l'autre qui permettent de passer des blocs de construction aux blocs de Béguin-Bonatti-Yu. Plus précisément, on montre que, à tout blocs de construction est associé un unique bloc de Béguin-Bonatti-Yu obtenu en recollant des sphères le long du bord (lemme 9.2.1) L'opération inverse consiste étant donné un bloc de Béguin-Bonatti-Yu et une collection finie de composantes connexes du complémentaire de la lamination qui sont bordées par des feuilles compactes (satisfaisant certaines hypothèses), à construire un bloc de construction par un nombre fini de suppression d'anses qui a pour effet de "tuer" les composantes de la collection pour les "remplacer" par des orbites périodiques contenues dans le bord (lemme 9.2.4).

- Pour finir, on utilise ces deux opérations inverses l'une de l'autre pour montrer le critère nécessaire et suffisant de la proposition 9.0.7.

9.1 Blocs intermédiaires

Cette section est une section préliminaire technique qui permettra de faciliter les opérations de chirurgies entre blocs de construction et blocs de Béguin-Bonatti-Yu à la section suivante.

Définition 9.1.1 (Bloc intermédiaire)**.** Soit $\check{P}$ une variété à bord de dimension 3, et $\check{X}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\check{P}$. On dit que $(\check{P}, \check{X})$ est un *bloc intermédiaire* si :

1) $\check{P}$ est une variété lisse en dehors d'un nombre fini de courbes fermées simples $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$ et $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$ contenues dans $\partial\check{P}$

2) $\partial\check{P}$ se décompose en l'union $\partial\check{P} = \check{P}^{\text{in}} \cup \check{P}^{\text{tan}} \cup \check{P}^{\text{out}}$ où

   – $\check{P}^{\text{in}}$ est une surface à bord, bordé par $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$, le champ $\check{X}$ est transverse à $\check{P}^{\text{in}}$ et pointe vers l'intérieur de $\check{P}$

   – $\check{P}^{\text{out}}$ est une surface à bord, bordé par $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$, le champ $\check{X}$ est transverse à $\check{P}^{\text{out}}$ et pointe vers l'extérieur de $\check{P}$

   – $\check{P}^{\text{tan}}$ est une union d'anneaux $A_1, \dots, A_n$ tangents au champ $\check{X}$, tel que chaque A_i est bordé par les courbes c_i^{in} et c_i^{out}, et les orbites de $\check{X}$ sur A_i vont de c_i^{in} vers c_i^{out}

3) Le maximal invariant $\check{\Lambda} := \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \check{X}^t(P)$ de $\check{X}$ dans $\check{P}$ est un ensemble hyperbolique d'indice $(1,1)$ pour $\check{X}$.

4) Si on note $\check{\mathcal{W}}^s$ et $\check{\mathcal{W}}^u$ les laminations stables et instables de $\check{\Lambda}$ dans $\check{P}$, alors pour tout i il existe deux feuilles compactes γ_i^s de $\check{\mathcal{L}}^s := \check{\mathcal{W}}^s \cap \check{P}^{\text{in}}$ et γ_i^u de $\check{\mathcal{L}}^u := \mathcal{W}^u \cap \check{P}^{\text{out}}$, tel que A_i est inclus dans un anneau $\mathcal{A}_i \subset \partial\check{P}$, bordé par γ_i^s et γ_i^u et disjoint de $\check{\mathcal{W}}^s \cup \check{\mathcal{W}}^u$.

On renvoie à la figure 9.2.

Définition 9.1.2 (Bord d'entrée, de sortie, tangent)**.** Soit $(\check{P}, \check{X})$ est un bloc intermédiaire et $\partial\check{P} = \check{P}^{\text{in}} \cup \check{P}^{\text{tan}} \cup \check{P}^{\text{out}}$ la décomposition de $\partial\check{P}$ donnée par l'item 2, définition 9.1.1. On dit que :

– $\check{P}^{\text{in}}$ est le *bord d'entrée* de $(\check{P}, \check{X})$

– $\check{P}^{\text{out}}$ est le *bord de sortie* de $(\check{P}, \check{X})$

– $\check{P}^{\text{tan}}$ est le *bord tangent* de $(\check{P}, \check{X})$.

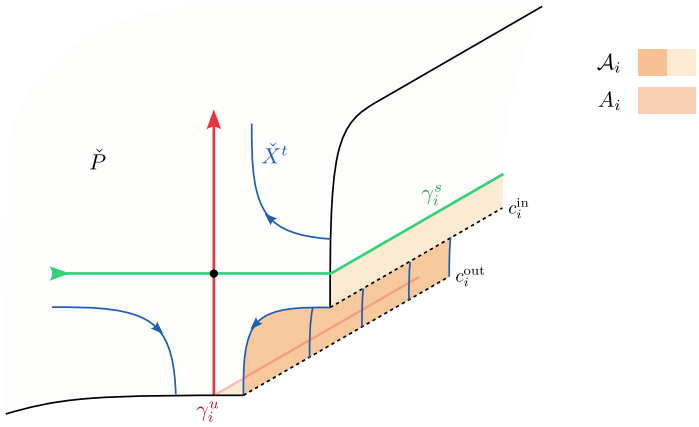


FIGURE 9.2 – Bord d'un bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ au voisinage d'un anneau A_i tangent au champ $\check{X}$

Fait 9.1.3. *Avec ces même notations, on a*

1) *la lamination stable $\check{\mathcal{W}}^s$ induit une lamination $\check{\mathcal{L}}^s := \check{\mathcal{W}}^s \cap \partial\check{P} = \check{\mathcal{W}}^s \cap \check{P}^{\text{in}}$ de dimension 1 sur $\check{P}^{\text{in}}$, dite* lamination d'entrée *de $(\check{P}, \check{X})$*

2) *la lamination instable $\check{\mathcal{W}}^u$ induit une lamination $\check{\mathcal{L}}^u := \check{\mathcal{W}}^u \cap \partial\check{P} = \check{\mathcal{W}}^u \cap \check{P}^{\text{out}}$ de dimension 1 sur $\check{P}^{\text{out}}$, dite* lamination de sortie *de $(\check{P}, \check{X})$*

3) *l'union $\check{\mathcal{L}} = \check{\mathcal{L}}^s \cup \check{\mathcal{L}}^u$ est une lamination de dimension 1 sur $\partial\check{P}$, dite* lamination de bord *de $(\check{P}, \check{X})$*

Démonstration. Chaque orbite d'un point d'une composante connexe A_i de $\check{P}^{\text{tan}}$ est contenue dans l'anneau A_i et traverse A_i d'un bord de l'anneau à l'autre en temps fini (item 2, définition 9.1.1). On en déduit que la lamination stable $\check{\mathcal{W}}^s$ du maximal invariant $\check{\Lambda}$ est disjointe du bord tangent $\check{P}^{\text{tan}}$. Elle est disjointe de $\check{P}^{\text{out}}$, car toutes les orbites qui intersectent $\check{P}^{\text{out}}$ sortent de $\check{P}$ par définition, donc ne peuvent pas s'accumuler sur $\check{\Lambda}$ dans le futur. On en déduit que $\check{\mathcal{W}}^s \cap \partial\check{P} = \check{\mathcal{W}}^s \cap \check{P}^{\text{in}}$. Comme le champ de vecteurs $\check{X}$ est transverse à $\check{P}^{\text{in}}$, et $\check{\mathcal{W}}^s$ est tangent au champ de vecteurs $\check{X}$, on en déduit que les feuilles de $\check{\mathcal{W}}^s$ intersectent transversalement la surface $\check{P}^{\text{in}}$, et l'ensemble $\check{\mathcal{L}}^s := \check{\mathcal{W}}^s \cap \check{P}^{\text{in}}$ est une lamination de dimension 1 sur $\check{P}^{\text{in}}$. Les autres affirmations du fait se déduisent de façon analogue. □

On notera $A_* = \{A_1, \dots, A_n\}$ la collection des composantes connexes du bord tangent de $(\check{P}, \check{X})$, et $\mathcal{A}_* = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ la collection des composantes connexes $\partial\check{P} \setminus \check{\mathcal{L}}$ tel que $A_i \subset \mathcal{A}_i$, où $\check{\mathcal{L}}$ est la lamination de bord de $(\check{P}, \check{X})$. Avec ces notations, les courbes γ_i^s et γ_i^u sont des feuilles compactes de $\check{\mathcal{L}}^s$ et $\check{\mathcal{L}}^u$ respectivement, et $\mathcal{A}_i$ est la composante connexe de $\partial\check{P} \setminus \check{\mathcal{L}}$ qui contient l'anneau A_i.

Soit (P, X) un bloc de construction. On note Λ son maximal invariant, $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbites périodiques de X contenues dans ∂P, P^{in} le bord d'entrée, et P^{out} le bord de sortie de (P, X). On rappelle que l'adhérence de P^{in}, notée $\overline{P^{\text{in}}}$, coïncide avec $P^{\text{in}} \cup \mathcal{O}_*$. De même, $\overline{P^{\text{out}}} = P^{\text{out}} \cup \mathcal{O}_*$. Le lemme suivant dit que l'on peut plonger canoniquement (P, X) dans un bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$, qui est alors un un prolongement minime "standard" de (P, X).

Lemme 9.1.4. *Il existe un bloc intermédiaire* $(\check{P}, \check{X})$ *tel que, si* $\check{\Lambda}$ *est le maximal invariant,* $(\check{\mathcal{W}}^s, \check{\mathcal{W}}^u)$ *la paire de lamination stable et instable de* $\check{\Lambda}$*, et* $\mathcal{A}_*$ *la collection de composantes connexes du complémentaire de la lamination* $\partial\check{P} \setminus \check{\mathcal{L}}$ *contenant le bord tangent de* $(\check{P}, \check{X})$ *(définition 9.1.2), on a*

1) (prolongement minime) $(\check{P}, \check{X})$ *est un prolongement minime de* (P, X) *(définition 1.4.3)*

2) (lamination) $\check{P}^{\text{in}} \setminus \mathcal{A}_*$ *est isotope à* $\overline{P^{\text{in}}}$ *le long de la lamination* $\check{\mathcal{W}}^s$ *et* $\check{P}^{\text{out}} \setminus \mathcal{A}_*$ *est isotope à* $\overline{P^{\text{out}}}$ *le long de la lamination* $\check{\mathcal{W}}^u$*.*

3) (unicité) *Un tel bloc intermédiaire* $(\check{P}, \check{X})$ *est unique à équivalence topologique près.*

Démonstration. On répète la preuve du lemme 1.2.8 qui donne une méthode de construction d'un bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ associé à un bloc de construction (P, X). Soit $(\tilde{P}, \tilde{X})$ un prolongement minime (définition 1.4.3) de (P, X). Soit $\mathcal{O}_* = \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ la collection des orbites périodiques de X contenues dans ∂P. Pour chaque $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$, on considère $\mathcal{V}_i$ un voisinage tubulaire linéarisant de $\mathcal{O}_i$ pour le flot de $\tilde{X}$ dans $\tilde{P}$, muni d'un système de coordonnées linéarisant $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le bord ∂P traverse les cadrans opposés $\{x > 0, y > 0\}$ et $\{x < 0, y < 0\}$ (fait 1.2.1). Soit S une surface topologique, lisse en dehors d'un nombre fini de courbes fermées simples $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$ et $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$, qui coïncide avec ∂P en dehors des voisinages $\mathcal{V}_i$, et se décompose en l'union $S = S^{\text{in}} \cup S^t \cup S^{\text{out}}$ (figure 1.5) où

- S^{in} est une surface à bord transverse au champ X et bordé par $c_1^{\text{in}}, \dots, c_n^{\text{in}}$, qui coïncide avec P^{in} en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$
- S^{out} est une surface à bord transverse au champ X et bordé par $c_1^{\text{out}}, \dots, c_n^{\text{out}}$, qui coïncide avec P^{out} en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$
- S^t est une union d'anneaux A_i tangents au champ X, inclus chacun dans le voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$ dans le cadran $\{x > 0, y < 0\}$, et bordé par les courbes c_i^{in} et c_i^{out}.

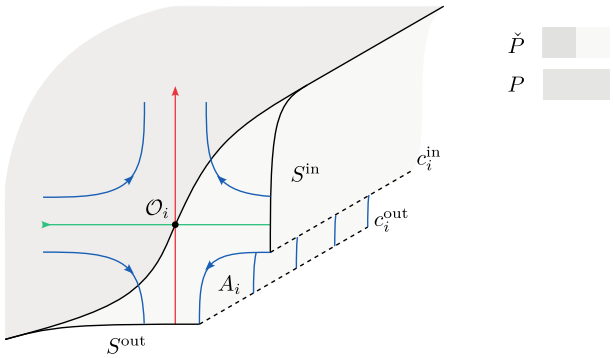


FIGURE 9.3 – Variété $\check{P}$ dans un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$

La surface S découpe dans $\tilde{P}$ une sous-variété compacte à bord $\check{P}$, qui contient P, et qui coïncide avec P en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$. Soit $\check{X}$ la restriction de $\tilde{X}$ à $\check{P}$. Le couple $(\check{P}, \check{X})$ est par construction un prolongement minime de (P, X). Le maximal invariant $\check{\Lambda}$ de $(\check{P}, \check{X})$ coïncide avec le maximal invariant Λ de (P, X) car une orbite de $\check{X}$ est soit une orbite du flot de X contenue dans P, soit intersecte le bord de $\check{P}$. De plus, $\partial\check{P} = S$, donc $(\check{P}, \check{X})$ vérifie les items 1, 2 et 3 de la définition 9.1.1 d'un bloc intermédiaire. On note $\check{\mathcal{W}}^s$ et $\check{\mathcal{W}}^u$ les variétés

stables et instables de l'ensemble $\check{\Lambda} = \Lambda$ pour le flot de $\check{X}$ dans $\check{P}$. Alors $\check{\mathcal{W}}^s$ est l'union du saturé des laminations $\mathcal{W}^s$ par le flot de $\check{X}$ et de la variété stable locale des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$. De même $\check{\mathcal{W}}^u$ est l'union du saturé des laminations $\mathcal{W}^u$ par le flot de $\check{X}$ et des variétés instables locales des orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$. Pour tout i, la variété stable et instable locale de l'orbite $\mathcal{O}_i$ dans le voisinage $\mathcal{V}_i$ intersectent $\partial\check{P}$ le long de deux feuilles compactes γ_i^s et γ_i^u, qui bordent une composante connexe $\mathcal{A}_i$ de $\partial\check{P}\smallsetminus\check{\mathcal{L}}$. C'est un anneau qui contient l'anneau $A_i \subset S$ tangent au champ de vecteurs $\check{X}$ (figure 9.3). Il s'ensuit que $(\check{P}, \check{X})$ satisfait l'item 4 de la définition 9.1.1, donc c'est un bloc intermédiaire.

Notons $\mathcal{A}_*$ la collection des anneaux $\mathcal{A}_i$. Les surfaces $\check{P}^{\text{in}}\smallsetminus\mathcal{A}_*$ et $\overline{P^{\text{in}}}$ coïncident en dehors de l'union des voisinages $\mathcal{V}_i$, et dans chaque $\mathcal{V}_i$ la surface $\check{P}^{\text{in}}\smallsetminus\mathcal{A}_*$ est un anneau dont l'intérieur est transverse à la lamination $\check{\mathcal{W}}^s$. Il existe donc une isotopie entre $\check{P}^{\text{in}}\smallsetminus\mathcal{A}_*$ et $\overline{P^{\text{in}}}$, à support dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$, qui préserve la lamination $\check{\mathcal{W}}^s$ feuille à feuille. Le raisonnement est symétrique pour $\check{P}^{\text{out}}\smallsetminus\mathcal{A}_*$ et $\overline{P^{\text{out}}}$, et $(\check{P}, \check{X})$ satisfait l'item 2 du lemme 9.1.4. Il reste à prouver l'item 3, autrement dit l'unicité d'un tel bloc intermédiaire à équivalence orbitale près. Soit (Q, Y) un autre bloc intermédiaire vérifiant le lemme 9.1.4. Quitte à réduire le prolongement minime initial utilisé pour construire $(\check{P}, \check{X})$ et faire une équivalence orbitale, on peut faire l'hypothèse que $\check{P}$ est inclus dans Q, et qu'ils sont inclus dans un prolongement minime commun de (P, X) d'après l'item 1 du lemme 9.1.4. Il suffit de montrer l'existence d'une équivalence orbitale locale sur un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ de X contenues dans ∂P, car les blocs intermédiaires (Q, Y) et $(\check{P}, \check{X})$ coïncident chacun avec (P, X) en dehors de l'union des $\mathcal{V}_i$, donc coïncident entre eux. Par transversalité de P^{in} et Q^{in} avec le champ de vecteurs Y, quitte à faire une isotopie de ∂Q le long des orbites (positives) du flot de Y (ce qui ne change pas la classe d'équivalence orbitale), on peut supposer que Q^{in} contient $\check{P}^{\text{in}}$, et quitte à faire une isotopie de $\partial\check{P}$ le long des orbites positives du flot de Y, on peut supposer que Q^{out} contient $\check{P}^{\text{out}}$ (figure 9.4). On introduit un troisième bloc intermédiaire (Q', Y') qui vérifie le lemme 9.1.4, qui est strictement inclus dans $\check{P}$, et tel que $(Q')^{\text{in}} \subset \check{P}^{\text{in}}$ et $(Q')^{\text{out}} \subset \check{P}^{\text{out}}$ (figure 9.4). Alors le champ de vecteurs $\check{X}$ restreint à $\check{P}\smallsetminus Q'$ et le champ de vecteurs Y restreint à $Q\smallsetminus Q'$ sont tout deux orbitalement équivalents au champ trivial ∂/∂_t sur $I \times J \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni des coordonnées (s, t, θ). Comme les blocs intermédiaires $(\check{P}, \check{X})$ et (Q, Y) coïncident sur Q', on en déduit qu'ils sont orbitalement équivalents.

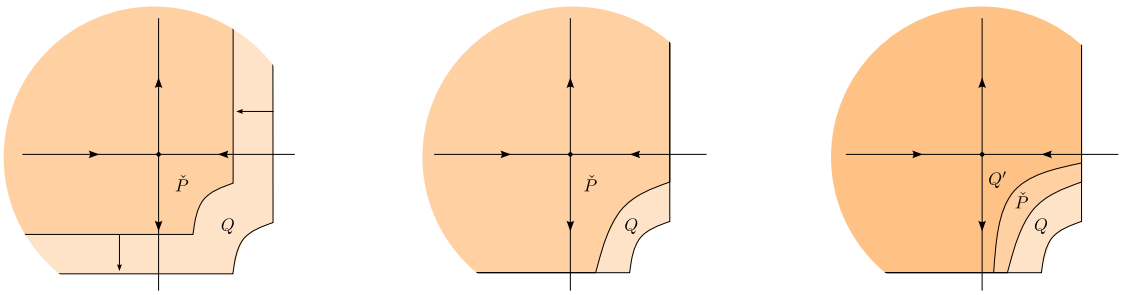


FIGURE 9.4 – Équivalence orbitale de blocs intermédiaires dans un voisinage linéarisant d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$

□

Soit $(\check{P}, \check{X})$ un bloc intermédiaire et $\mathcal{A}_*$ la collection de composantes connexes de $\partial\check{P}\smallsetminus\check{\mathcal{L}}$ contenant le bord tangent de $(\check{P}, \check{X})$ (définition 9.1.2), où $\check{\mathcal{L}}$ est la lamination de bord de $(\check{P}, \check{X})$.

On rappelle qu'une séparatrice stable est une composante connexe de $\check{\mathcal{W}}^s(O)\smallsetminus O$, où O est une orbite de $\check{X}$. On dit qu'une séparatrice stable est libre si elle est disjointe du maximal invariant $\check{\Lambda}_X$.

Lemme 9.1.5. *Pour tout $\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}_*$, si γ_i^s et γ_i^u sont les deux feuilles compactes de $\check{\mathcal{L}}$ qui bordent $\mathcal{A}_i$ (item 2, définition 9.1.1), alors il existe une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ de $\check{X}$ tel que γ_i^s est l'intersection d'une séparatrice stable libre de $\mathcal{O}_i$ avec $\check{P}^{\text{in}}$ et γ_i^u est l'intersection d'une séparatrice instable libre de $\mathcal{O}_i$ avec $\check{P}^{\text{out}}$. Quitte à faire une équivalence orbitale de $(\check{P}, \check{X})$, on peut supposer que $\mathcal{A}_i$ est inclus dans un voisinage linéarisant de $\mathcal{O}_i$.*

Démonstration. On peut adapter le fait 2.1.7 pour les blocs intermédiaires, et γ_i^s est une feuille compacte de la lamination $\check{\mathcal{L}}^s$, donc l'intersection d'une séparatrice stable libre $\mathcal{W}_+^s(\mathcal{O}_i)$ d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ de $\check{X}$. Si $p \in \check{P}^{\text{in}}$ est un point sur $\check{P}^{\text{in}}$ arbitrairement proche de γ_i^s, alors l'orbite de p par le flot de $\check{X}$ sort de $\check{P}$ en un point $q \in \check{P}^{\text{out}}$ arbitrairement proche de la variété instable $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_i)$ de $\mathcal{O}_i$. Or on sait que le flot de $\check{X}$ sur l'anneau $A_i \subset \mathcal{A}_i$ traverse A_i d'un bord c_i^{in} à l'autre bord c_i^{out} (item 2, définition 9.1.1). Comme c_i^{in} est le bord de $\check{P}^{\text{in}} \cap \mathcal{A}_i$, et c_i^{out} est le bord de $\check{P}^{\text{out}} \cap \mathcal{A}_i$, on en déduit par continuité que l'orbite d'un point de $\check{P}^{\text{in}} \cap \mathcal{A}_i$ sort de P par la composante $\check{P}^{\text{out}} \cap \mathcal{A}_i$. Il s'ensuit que $\gamma_i^u \in \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_i)$, et γ_i^u est l'intersection d'une séparatrice instable libre $\mathcal{W}_+^u(\mathcal{O}_i)$ de la même orbite périodique $\mathcal{O}_i$.

Montrons la deuxième affirmation du lemme 9.1.5. Pour chaque i, on considère c_i une courbe fermée simple dans (l'intérieur de) $\check{P}^{\text{in}} \cap \mathcal{A}_i$ parallèle à γ_i^s et assez proche de γ_i^s de sorte que l'orbite de c_i par le flot de $\check{X}$ intersecte un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{O}_i$. Soit $C_i := \cup_{t\in\mathbb{R}} \check{X}^t(c_i)$ l'orbite de c_i par le flot de $\check{X}$. Chaque point de c_i sort de $\check{P}$ en temps uniformément borné, car c_i est uniformément loin de $\check{\mathcal{L}}^s$. Il s'ensuit que C_i est homéomorphe au cylindre $c_i \times [0,1]$, et le champ de vecteurs $\check{X}$ est orbitalement équivalent au champ vertical ∂_t sur C_i. L'union des cylindres C_i découpe dans $\check{P}$ une sous-variété à bord Q, tel que si Y est la restriction de $\check{X}$ sur Q, le couple (Q, Y) est un bloc intermédiaire, plongé dans $(\check{P}, \check{X})$, tel que le maximal invariant de (Q, Y) coïncide avec le maximal invariant de X. Montrons que le bloc intermédiaire (Q, Y) est orbitalement équivalent à $(\check{P}, \check{X})$. Soit (Q', Y') un troisième bloc intermédiaire inclus dans (Q, Y) obtenu en découpant (P, X) le long de l'orbite d'une courbe fermée simple c_i' inclus dans l'intérieur de l'anneau bordé par γ_i^s et c_i et parallèle au bord de cet anneau. Alors $Q\smallsetminus Q'$ est homéomorphe au produit $I \times J \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et le champ de vecteurs Y sur $Q\smallsetminus Q'$ est orbitalement équivalent au champ de vecteurs ∂_t sur $I \times J \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni des coordonnées (s, t, θ). De même, $\check{P}\smallsetminus Q'$ est homéomorphe au produit $I \times J \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et le champ de vecteurs Y sur $Q\smallsetminus Q'$ est orbitalement équivalent au champ de vecteurs ∂_t sur $I \times J \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni des coordonnées (s, t, θ) (figure 9.4) Il s'ensuit que les champs Y sur $Q\smallsetminus Q'$ et $\check{X}$ sur $\check{P}\smallsetminus Q'$ sont orbitalement équivalents. Comme ils coïncident en dehors de $\check{P}\smallsetminus Q$, on en déduit que $(\check{P}, \check{X})$ est orbitalement équivalent à (Q, Y). Le bord tangent Q^{tan} de ∂Q coïncide avec l'union des cylindres $\cup_i C_i$ définis précédemment, et on note $\partial Q = Q^{\text{in}} \cup Q^{\text{tan}} \cup Q^{\text{out}}$ la décomposition du bord donnée par l'item 2, définition 9.1.1. Par construction, les composantes de bord C_i intersectent un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de l'orbite périodique $\mathcal{O}_i$. Soit $\mathcal{C}_i$ la composante connexe de $\partial Q\smallsetminus\mathcal{L}_Y$ contenant C_i. Par transversalité de Q^{in} avec le champ Y, quitte à pousser Q^{in} le long des orbites (positives) de Y et Q^{out} le long des orbites (négatives) de Y, on peut supposer $\mathcal{C}_i$ est contenu dans $\mathcal{V}_i$. Cette opération ne change pas la classe d'équivalence orbitale de (Q, Y). □

Définition 9.1.6. On dira que le bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ vérifie *l'hypothèse* (h) si les orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ associées aux anneaux $\mathcal{A}_i$ par le lemme 9.1.5 sont deux à deux distinctes, et ont des valeurs propres positives.

Remarque 9.1.7. Dans le cas d'un bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ associé à un bloc de construction (P, X) par le lemme 9.1.4, les orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ sont les orbites périodiques de X contenues

dans ∂P. En effet, $(\check{P}, \check{X})$ est un prolongement minime de (P, X) (item 1 lemme 9.1.4) et les anneaux $\mathcal{A}_i$ sont contenus dans $\partial\check{P} \smallsetminus \partial P$, donc dans les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$ des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$. Par suite, le fait 1.2.1 implique que chaque $(\check{P}, \check{X})$ vérifie l'hypothèse (h). Il existe des blocs intermédiaires qui ne vérifie pas l'hypothèse (h) : voir pour cela le lemme 10.2.3 et la figure 10.5.

Le lemme suivant est la réciproque du lemme 9.1.4. Soit $(\check{P}, \check{X})$ un bloc intermédiaire vérifiant l'hypothèse (h). On note $\check{\Lambda}$ son maximal invariant, $(\check{\mathcal{W}}^s, \check{\mathcal{W}}^u)$ la paire de lamination stable et instable de $\check{\Lambda}$, $\check{P}^{\text{in}}$ le bord d'entrée, $\check{P}^{\text{out}}$ le bord de sortie, et $\mathcal{A}_*$ la collection de composantes connexes de $\partial\check{P} \smallsetminus \check{\mathcal{L}}$ contenant le bord tangent de $(\check{P}, \check{X})$ (définition 9.1.2).

Lemme 9.1.8. *Il existe un bloc de construction (P, X) tel que, si on note Λ le maximal invariant de (P, X), $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbites périodiques de X contenues dans ∂P, P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie de (P, X), alors*

1) (plongement) *Il existe un plongement $h : P \to \check{P}$ qui envoie les orbites orientées de X sur les orbites orientées de $\check{X}_{|\check{P}}$ et Λ sur $\check{\Lambda}$*

2) (lamination) *$\check{P}^{\text{in}} \smallsetminus \mathcal{A}_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{in}}}$ le long de la lamination $\check{\mathcal{W}}^s$ et $\check{P}^{\text{out}} \smallsetminus \mathcal{A}_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{out}}}$ le long de la lamination $\check{\mathcal{W}}^u$.*

3) (unicité) *Un tel bloc de construction (P, X) est unique à isotopie près parmi les blocs de construction.*

On renvoie à la définition 1.4.1 pour l'isotopie des blocs de construction.

Démonstration. Quitte à faire une équivalence orbitale de $(\check{P}, \check{X})$, on suppose que chaque anneau $\mathcal{A}_i$ est inclus dans le voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ d'une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ (lemme 9.1.5). Par hypothèse, les valeurs propres de $\mathcal{O}_i$ sont positives, et les $\mathcal{O}_i$ sont deux à deux disjointes, donc on peut supposer que les voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$ sont deux à deux disjoints. Le bord d'entrée $\check{P}^{\text{in}}$ et le bord de sortie $\check{P}^{\text{out}}$ de $(\check{P}, \check{X})$ sont situés dans deux cadrans opposés de $\mathcal{O}_i$ sur le voisinage $\mathcal{V}_i$ (voir la preuve du fait 1.2.1). Il existe donc une surface lisse S dans $\check{P}$, qui coïncide avec $\partial\check{P}$ en dehors de l'union des $\mathcal{V}_i$, et tel que dans chaque $\mathcal{V}_i$, S est un anneau qui contient l'orbite $\mathcal{O}_i$, qui coïncide avec $\partial\check{P}$ au voisinage du bord de $\mathcal{V}_i$ et traverse $\mathcal{V}_i$ dans deux cadrans opposés de $\mathcal{O}_i$, et qui est transverse au champ $\check{X}$ sur le complémentaire de $\mathcal{O}_i$. Alors S découpe dans $\check{P}$ une sous-variété P tel que si X est la restriction de $\check{X}$ à P, alors (P, X) est un bloc de construction, plongé dans $(\check{P}, \check{X})$ et tel que le maximal invariant Λ de (P, X) coïncide avec le maximal invariant $\check{\Lambda}$ de $(\check{P}, \check{X})$. On montre l'item 2 de façon analogue à la preuve du lemme 9.1.4, item 2. Pour finir, deux blocs de construction (P, X) et (P', X') qui vérifient le lemme 9.1.8 ont un prolongement minime commun (quitte à faire une équivalence orbitale de $(\check{P}, \check{X})$, d'après le lemme 9.1.5). Ils sont donc isotopes parmi les blocs de construction (proposition 1.4.4). □

9.2 Bloc de construction et bloc de Béguin-Bonatti-Yu

Soit (P, X) un bloc de construction. On note $\mathcal{O}_*$ l'ensemble des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, Λ_X le maximal invariant, P^{in} le bord d'entrée et P^{out} le bord de sortie.

Lemme 9.2.1. *Il existe un bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U, Y) tel que, si Λ_Y est le maximal invariant de (U, Y), $(\mathcal{W}^s_Y, \mathcal{W}^u_Y)$ la paire de lamination stable et instable de Λ_Y, U^{in} le bord d'entrée, U^{out} le bord de sortie, et $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}^s_Y \cup \mathcal{L}^u_Y$ la lamination de bord, alors :*

1) (plongement) *Il existe un plongement $h : P \to U$ qui envoie les orbites orientées de X sur les orbites orientées de Y dans $h(P)$ et Λ_X sur Λ_Y.*

2) (lamination) *Il existe une collection finie $D_* = \{D_1, \dots, D_n\}$ de disques contenus dans ∂U, d'adhérence deux à deux disjointes, disjoints de $\mathcal{L}_Y$ et bordés chacun par une feuille compacte de la lamination $\mathcal{L}_Y$, tel que*

- *$U^{\text{in}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{in}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^s_Y$*
- *$U^{\text{out}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{out}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^u_Y$.*

3) (unicité) *Un tel bloc de Béguin-Bonatti-Yu (U, Y) est unique à équivalence orbitale près*

Démonstration. On renvoie à la preuve du lemme 1.2.8 pour les items 1 et 2. Montrons le dernier item 3. Soit (U, Y) un bloc de Béguin-Bonatti-Yu qui vérifie le lemme 9.2.1. Soit $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n$ une collection de disque compacts tel que $\bar{D}_i \subset D_i$. Comme chaque point $p \in \bar{D}_i$ est uniformément loin de la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$, l'orbite de p sort de U en temps uniformément borné. On en déduit que l'orbite de $\bar{D}_i$ par le flot de Y dans U, que l'on note $\bar{C}_i$ est homéomorphe à un cylindre compact $\mathbb{D}^2 \times I$, sur lequel le champ Y est orbitalement équivalent au champ de vecteurs vertical $\partial/\partial t$, où t est la coordonnée sur I. Le complémentaire $\check{P} := U \setminus \cup_i \bar{C}_i$ muni de la restriction $\check{X}$ du champ de vecteurs Y est un bloc intermédiaire qui vérifie le lemme 9.1.4 associé au bloc (P, X). La classe d'équivalence orbitale du bloc $(\check{P}, \check{X})$ obtenu par une telle chirurgie ne dépend pas du choix du disque compact $\bar{D}_i$ inclus dans D_i car ils sont tous isotopes. On conclut par l'item 3 du lemme 9.1.4. □

On va décrire l'opération inverse.

Définition 9.2.2. Soit (U, Y) un bloc de construction et $D_* = \{D_1, \dots, D_n\}$ une collection de composante connexe du complémentaire de la lamination de bord $\partial U \setminus \mathcal{L}_Y$ bordées par des feuilles compactes de $\mathcal{L}_Y$. On dit que D_* est une *collection simple* si deux feuilles compactes distinctes de la lamination $\mathcal{L}_Y$ contenues dans le bord de D_* sont sur des feuilles distinctes de $\mathcal{W}^s_Y$ ou de $\mathcal{W}^u_Y$, et les orbites périodiques contenues dans ces feuilles ont des valeurs propres positives.

On rappelle que toute feuille compacte γ de la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ est la trace d'une séparatrice libre d'une orbite périodique O sur ∂U (fait 2.1.7). Cela justifie que l'on peut parler de (l'unique) orbite périodique contenue dans la feuille de $\mathcal{W}^s_Y$ (ou de $\mathcal{W}^u_Y$) qui contient γ.

Remarque 9.2.3. Soit D_* la collection donnée par le lemme 9.2.1, item 2. Alors c'est une collection simple. L'isotopie du point 2 induit un difféomorphisme $H^s : U^{\text{in}} \setminus D_* \to \overline{P}^{\text{in}}$ qui préserve la lamination stable $\mathcal{W}^s_Y$ feuille à feuille. Si γ^s est une feuille compacte de $\mathcal{L}^s_Y$ bord d'une composante D_i, alors γ^s est envoyée par H^s sur une orbite périodique de $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$ le long de la feuille stable $\mathcal{W}^s_Y(\mathcal{O})$. Les valeurs propres de $\mathcal{O}$ sont positives d'après le fait 1.2.1. Par injectivité de H^s c'est l'unique composante de bord de D_* envoyée sur $\mathcal{O}$. Il suit que les feuilles qui bordent D_* sont sur des feuilles disjointes de $\mathcal{W}^s_Y$. De même, les feuilles compactes de $\mathcal{L}^u_Y$ qui bordent une composante de D_* sont sur des feuilles disjointes de $\mathcal{W}^u_Y$.

Le lemme suivant est une réciproque du lemme 9.2.1. Soit (U, Y) un bloc de Béguin-Bonatti-Yu, et on note Λ_Y le maximal invariant, $\mathcal{L}_Y$ la lamination de bord de (U, Y), U^{in} le bord d'entrée et U^{out} le bord de sortie. Soit $D_* = \{D_1, \dots D_n\}$ une collection simple (définition 9.2.2) de composantes connexes de $\partial P \setminus \mathcal{L}$ bordées par des feuilles compactes de $\mathcal{L}_Y$ et invariante par l'application de passage $f_Y : U^{\text{in}} \to U^{\text{out}}$ du flot de Y du bord d'entrée au bord de sortie.

Lemme 9.2.4. *Il existe un bloc de construction (P, X) tel que, si on note $\mathcal{O}_*$ l'ensemble des orbites périodiques de X contenues dans ∂P, $\mathcal{L}_X$ la lamination de bord de (P, X) et Λ_X le maximal invariant de (P, X), on a*

1) (plongement) *Il existe un plongement $h : P \to U$ qui envoie les orbites orientées de X sur les orbites orientées de Y dans $h(P)$ et Λ_X sur Λ_Y.*

2) (lamination) *$U^{\text{in}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{in}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^s_Y$, et $U^{\text{out}} \setminus D_*$ est isotope à $\overline{P^{\text{out}}}$ le long de la lamination $\mathcal{W}^u_Y$.*

3) (unicité) *Un tel bloc de construction (P, X) est unique à isotopie près parmi les blocs de construction*

Remarque 9.2.5. Justifions pourquoi le lemme 9.2.4 donne bien une réciproque du lemme 9.2.1. Si (U, Y) est le bloc de Béguin-Bonatti-Yu associé à un bloc de construction (P, X) par le lemme 9.2.1, et D_* est la collection de disques donnés par l'item 2 de ce lemme, alors c'est une collection simple, et on peut appliquer le lemme 9.2.4 à (U, Y) et à la collection D_*. On obtient un bloc de construction (P', X') isotope à (P, X) d'après l'item 3.

Démonstration du lemme 9.2.4. Par f_Y-invariance de D_*, on peut renommer les composantes de D_* de la façon suivante $D_* = \{D_1^{\text{in}}, \dots, D_n^{\text{in}}, D_1^{\text{out}}, \dots, D_n^{\text{out}}\}$ tel que $D_i^{\text{in}} \subset U^{\text{in}}$, et $D_i^{\text{out}} = f_Y(D_i^{\text{in}}) \subset U^{\text{out}}$. Soit γ_i^s une feuille compacte qui borde D_i^{in}. C'est l'intersection d'une séparatrice stable libre d'une orbite périodique O_i. Par f_Y-invariance de D_*, il existe une feuille compacte γ_i^u dans le bord de D_i^{out} qui est sur la variété instable de l'orbite périodique O_i (il suffit de remarquer que l'orbite d'un point dans D_i^{in} arbitrairement proche de γ_i^s sort par U^{out} sur D_i^{out} en un point arbitrairement proche de $\mathcal{W}^u(O_i)$). Quitte à pousser U^{in} et U^{out} le long des orbites du flot de Y on peut supposer qu'un voisinage de γ^s dans ∂U (inclus dans U^{in}) et un voisinage de γ^u dans ∂U (inclus dans U^{out}) sont contenus dans un voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$ de O_i, et toute orbite qui entre par D_i^{in} proche de γ_i^s sort par D_i^{out} proche de γ_i^u et est entièrement contenue dans $\mathcal{V}_i$. On renvoie à la figure 9.5.

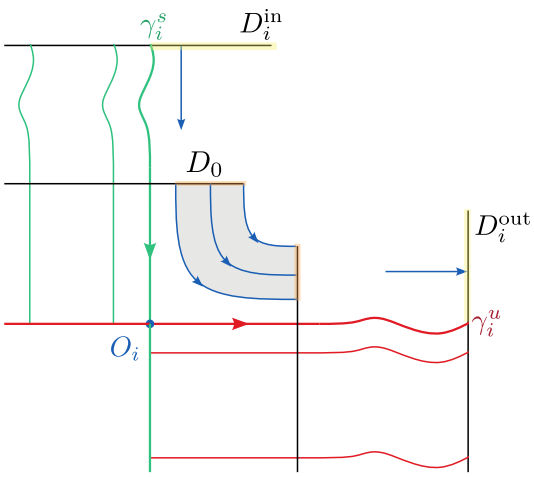


FIGURE 9.5 – Isotopie le long du flot et suppression d'anses dans (U, Y)

En répétant ce même argument, on obtient une collection $O_1, \dots, O_n$ d'orbites périodiques et de voisinages linéarisants $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$. Comme la collection est simple, les orbites périodiques et les voisinages linéarisants sont deux à deux distincts. Soit $D_0 \subset U^{\text{in}}$ un compact inclus dans l'union $\cup_i D_i^{\text{in}}$, dont l'intérieur est isotope à $\cup_i D_i^{\text{in}}$ et dont le bord est une union de courbes fermées simples contenues dans $\cup_i \mathcal{V}_i$. Par construction, l'orbite par le flot de Y de chacune des composantes connexes de ∂D_0 est un cylindre contenu dans un unique $\mathcal{V}_i$. L'orbite $\mathcal{D}_0 := \cup_{t \in \mathbb{R}} Y^t(D_0)$ de D_0 par le flot de Y dans U est homéomorphe à $D_0 \times [0, 1]$ et le champ Y est orbitalement équivalent au champ de vecteurs trivial ∂/∂_t, $t \in [0, 1]$. Soit $\check{P} := U \setminus \mathcal{D}_0$ et $\check{X}$

la restriction de Y à $\check{P}$. Alors $(\check{P}, \check{X})$ est un bloc intermédiaire plongé dans (U, Y) et dont le maximal invariant coïncide avec Λ_Y. En effet par construction, le bord tangent $\check{P}^{\tan}$ de $(\check{P}, \check{X})$ est une union d'anneaux A_i homéomorphe à $\partial D_0 \times [0, 1]$, chacun contenu dans un unique voisinage linéarisant $\mathcal{V}_i$. La composante connexe $\mathcal{A}_i$ de $\check{P} \setminus \check{\mathcal{L}}$ contenant A_i est un anneau bordé par les feuilles compactes γ_i^s et γ_i^u issues des séparatrices stables libres et instables libres locales de O_i. De plus, $(\check{P}, \check{X})$ satisfait l'hypothèse (h) (définition 9.1.6). On utilise le lemme 9.1.8 qui donne l'existence d'un bloc de construction (P, X) plongé dans $(\check{P}, \check{X})$, tel que $(\check{P}, \check{X})$ est un prolongement minime de (P, X). Montrons que (P, X) satisfait le lemme 9.2.4.

1) Par construction, le bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ est inclus dans (U, Y). On rappelle que $\check{P} = U \setminus \mathcal{D}_0$, et chaque orbite de Y dans $\mathcal{D}_0$ entre et sort de $\mathcal{D}_0$ donc de U en temps fini, donc le maximal invariant Λ_Y de (U, Y) est contenu dans $\check{P}$, et coïncide avec le maximal invariant de $(\check{P}, \check{X})$. L'item 1 suit de l'item 1, lemme 9.1.8.

2) On a l'égalité $\partial \check{P} \setminus \mathcal{A}_* = \partial U \setminus D_*$, et la lamination $\check{\mathcal{L}}$ sur $\partial \check{P} \setminus \mathcal{A}_*$ coïncide avec la lamination $\mathcal{L}_Y$ sur $\partial U \setminus D_*$, car $\check{\mathcal{L}}$ est l'intersection des variétés $\mathcal{W}_Y^s$ et $\mathcal{W}_Y^u$ avec $\partial \check{P}$. L'item 2 suit de l'item 2, lemme 9.1.8.

3) Soit (P', X') est un autre bloc de construction qui satisfait le lemme 9.2.4. Alors, quitte à faire une équivalence orbitale, d'après l'item 1 du lemme 9.2.4, on peut supposer que P et P' sont inclus dans U, et X et X' coïncident avec les restrictions de Y à P et P', et les champs de vecteurs coïncident sur un voisinage de $\Lambda_X = \Lambda_{X'} = \Lambda_Y$. En particulier, X et X' coïncident sur des voisinages linéarisants $\mathcal{V}_i$ des orbites périodiques $\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}_*$ contenues dans le bord de P. D'après l'item 2, P^{in} est isotope à $U^{\text{in}} \setminus D_*$ le long de la lamination $\mathcal{W}_Y^s$. Sur le complémentaire des voisinages $\mathcal{V}_i$, les surfaces P^{in} et U^{in} sont compactes et transverses au champ de vecteurs Y, donc on peut choisir une isotopie qui préserve les orbites du flot de Y sur le complémentaire des voisinages $\mathcal{V}_i$. Avec le même raisonnement pour P', on peut supposer quitte à faire une équivalence orbitale que le bord de P et le bord de P' coïncident en dehors des voisinages $\mathcal{V}_i$. Il s'ensuit que les blocs (P, X) et (P', X') ont un prolongement minime commun. D'après la proposition 1.4.4 ils sont isotopes. □

Remarque 9.2.6. On peut généraliser le lemme précédent à un bloc de construction (U, Y) qui n'est pas un bloc de Béguin-Bonatti-Yu, autrement dit qui admet une collection $\mathcal{O}_*$ non vide d'orbites périodiques contenues dans le bord. On obtient le même résultat si l'on suppose de plus que la collection D_* est d'adhérence disjointe de $\mathcal{O}_*$. La preuve est identique car les chirurgies sont loin de $\mathcal{O}_*$.

9.3 Preuve de la proposition F

On montre le critère de réalisation d'un type géométrique abstrait dans un bloc selle plein.

Démonstration de la proposition 9.0.7. Étape 1 : condition nécessaire.
Supposons que (P, X) est un bloc de construction orientable selle remplissant qui admet une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$. Soit (U, Y) le bloc de Béguin-Bonatti-Yu associé par le lemme 9.2.1. On note $D_* = \{D_1, \ldots, D_n\}$ la collection de composantes connexes de $\partial U \setminus \mathcal{L}_Y$ donné par l'item 2 du lemme 9.2.1. Montrons que (U, Y) est un bloc modèle. Soit c une courbe fermée simple plongée dans ∂U disjoint de $\mathcal{L}_Y$. Si c est contenue dans un disque $D_i \in D_*$, alors c borde un disque disjoint de la lamination $\mathcal{L}_Y$. Sinon c est contenue dans $U^{\text{in}} \setminus D_*$ ou $U^{\text{out}} \setminus D_*$. Supposons que c est inclus dans $U^{\text{in}} \setminus D_*$. Il découle de l'item 2 que la lamination $\mathcal{L}_Y$ restreinte à $U^{\text{in}} \setminus D$ est topologiquement équivalente à la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$.

Comme la lamination $\mathcal{L}_X$ est remplissante sur ∂P, il s'ensuit que toute composante connexe du complémentaire de la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$ est une bande. Par équivalence topologique, il en est de même pour la lamination $\mathcal{L}_Y$ restreinte à $U^{\text{in}} \setminus D$, et la courbe c est contenue dans une bande. Il s'ensuit que c borde un disque disjoint de la lamination. Comme la lamination de bord de (P, X) est remplissante, elle intersecte chaque composante connexe de ∂P. Il en est de même pour la lamination de bord $\mathcal{L}_Y$ de (U, Y) d'après l'item 2, et on en déduit que chaque composante connexe de U intersecte le maximal invariant Λ_Y. Par conséquent, (U, Y) est un bloc modèle. D'après l'item 1, le bloc (P, X) est plongé dans (U, Y), il s'ensuit que le bloc (U, Y) admet une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$. Montrons qu'il satisfait les deux conditions de la proposition 9.0.7. La lamination $\mathcal{L}_Y^s$ restreinte à $U^{\text{in}} \setminus D_*$ est topologiquement équivalente à la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$, donc a fortiori c'est un pré-feuilletage, ce qui montre l'item 2. Il s'ensuit que $U^{\text{in}} \setminus D_*$ est une union de tores et d'anneaux fermés bordés par des feuilles compactes de $\mathcal{L}_Y^s$. Soit A un tel anneau, et on note γ_i, γ_j les deux feuilles compactes (distinctes) de $\mathcal{L}_Y^s$ qui bordent A. Il existe deux disques D_i et D_j de D_* tel que $\gamma_i = \partial D_i$ et $\gamma_j = \partial D_j$. On en conclut que l'anneau A est contenu dans une composante connexe de ∂U qui est une sphère $S_{i,j}$, obtenue par le recollement de A et des deux disques D_i et D_j le long de leur bord. L'item 1 est satisfait.

Étape 2 : condition suffisante.
Soit $\mathscr{T}$ un type géométrique dont le modèle (U, Y) satisfait la proposition 9.0.7.

Fait 9.3.1. *La lamination $\mathcal{L}_Y$ sur $\partial U \setminus D_*$ est remplissante.*

Démonstration. D'après l'item 2 et la remarque 9.0.8, les composantes connexes de $\partial U \setminus D_*$ sont des anneaux bordés par des feuilles compactes de $\mathcal{L}_Y$ ou des tores, et d'après la proposition 1.2.11, les composantes connexes du complémentaire de la lamination $\mathcal{L}_Y$ sur $\partial U \setminus D_*$ sont des anneaux bordés par des feuilles compactes, ou des bandes. Or remarquons que si A est une composante connexe de $\partial U \setminus \mathcal{L}_Y$ qui est un anneau, alors il existe une courbe fermée simple c plongé dans A disjointe de la lamination $\mathcal{L}_Y$ et qui ne borde aucun disque disjoint de la lamination $\mathcal{L}_Y$, ce qui est en contradiction avec le fait que (U, Y) est un bloc modèle (item 3, définition 9.0.1). □

Fait 9.3.2. *La collection D_* donnée par l'item 2 est une collection simple et f_Y-invariante (définition 9.2.2)*

Démonstration. La collection D_* est la collection de toutes les composantes connexes du complémentaire de $\partial U \setminus \mathcal{L}_Y$ qui ne sont pas des bandes, elle est donc f_Y-invariante. Supposons qu'il existe deux feuilles compactes $\gamma_i^s = \partial D_i$ et $\gamma_j^s = \partial D_j$ dans le bord de D_* issues d'une même variété stable $\mathcal{W}^s(O)$ d'une orbite périodique O. Alors $f_Y(D_i)$ et $f_Y(D_j)$ sont deux disques de D_* bordés par deux feuilles compactes distinctes, toutes deux issues de la variété instable $\mathcal{W}^u(O)$ de O. Il s'ensuit que toutes les séparatrices de O sont libres, donc O est une orbite périodique isolée. Les feuilles compactes issues de ses séparatrices sont donc isolées dans la lamination de bord. C'est impossible car on a montré que la lamination $\mathcal{L}_Y$ est remplissante sur $\partial U \setminus D_*$. □

On peut donc appliquer le lemme 9.2.4, avec la collection $D_* = \{D_1, \dots, D_n\}$ de disques donnés par l'item 1 de la proposition 9.0.7. C'est une collection simple et f_Y-invariante. On obtient un bloc (P, X) plongé dans (U, Y) par un plongement qui envoie le maximal invariant Λ_X sur Λ_Y et les orbites orientées de X sur les orbites orientées de Y. Il suit que (P, X) est un bloc selle orientable, et Λ admet une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$. Il découle de l'item 2 que la lamination $\mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_*$ sur $\overline{P^{\text{in}}}$ est topologiquement équivalente à la lamination $\mathcal{L}_Y^s$ restreinte à $U^{\text{in}} \setminus D_*$, donc est remplissante d'après le fait 9.3.1. Il en est de même pour $\mathcal{L}_X^u \cup \mathcal{O}_*$, donc pour la lamination de bord $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X^s \cup \mathcal{O}_* \cup \mathcal{L}_X^u$ sur ∂P, donc (P, X) est un

bloc plein.

Étape 3 : unicité et équivalence topologique des laminations.
Soit (P, X) et (P', X') sont deux blocs de construction satisfaisant la proposition 9.0.7. Soit (U, Y) et (U', Y') les blocs de Béguin-Bonatti-Yu associés par le lemme 9.2.1 à respectivement (P, X) et (P', X'). Alors comme remarqué à la première étape, (U, Y) et (U', Y') sont des blocs modèles. De plus, ils admettent une partition de Markov de type géométrique $\mathscr{T}$. D'après le théorème 9.0.6, les blocs modèles (U, Y) et (U', Y') sont orbitalement équivalents. Par le lemme 9.2.4 réciproque du lemme 9.2.1 (remarque 9.2.5) on en déduit que les blocs (P, X) et (P', X') sont isotopes. L'équivalence topologique des laminations découle directement de l'item 2 du lemme 9.2.4 appliqué (U, Y) et à la collection D_*. □

9.4 Exemples de modèles de partition de Markov

La proposition 9.0.7 a ceci d'utile que l'on peut vérifier les critères par une méthode de recollement de rectangles, qui permet à partir d'un type géométrique abstrait de construire le bord d'entrée et la lamination d'entrée du modèle. On renvoie à la preuve de [BB02, Lemme 2.13], dont on répète ici la méthode.

Soit $\mathscr{T} = \{n, \{h_i\}, \{v_i\}, \phi\}$ un type géométrique abstrait. On considère une union R de n rectangles $R_1, \dots, R_n$, muni d'une orientation des verticales et des horizontales des R_i, tel que chaque R_i contient h_i sous-rectangles horizontaux $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}$ et v_i sous-rectangles verticaux $V_i^1, \dots, V_i^{v_i}$. On note R l'union des R_i, H l'union des H_i^j et V l'union des V_i^j. On note ∂^u pour désigner le bord vertical d'un rectangle ou d'un sous-rectangle de R, et on note ∂_g^u et ∂_d^u pour désigner le bord vertical gauche et droit respectivement du sous-rectangle relativement aux orientations des verticales et des horizontales de R. Soit (i, j) un couple fixé avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq v_i$. Soit (k, l) l'unique couple tel que $\phi(k, l) = ((i, j), \epsilon)$. Soit $h_{(i,j)}$ un homéomorphisme qui envoie $\partial_g^u V_i^j$ sur $\partial_g^u H_k^l$ et $\partial_d^u V_i^j$ sur $\partial_d^u H_k^l$ si $\epsilon = +$ et qui envoie $\partial_g^u V_i^j$ sur $\partial_d^u H_k^l$ et $\partial_d^u V_i^j$ sur $\partial_s^u H_k^l$ si $\epsilon = -$. L'ensemble $A := R \setminus V$ est une union finie de sous-rectangles verticaux de R semi-ouverts, dont les adhérences sont deux à deux disjointes. L'adhérence $\bar{A}$ contient l'ensemble $\partial^u V$ et l'ensemble $\partial^u H$ dans son bord. On considère l'ensemble $\Sigma^s := \bar{A}/h$ où h est le produit des homéomorphismes $h_{(i,j)}$. Alors h recolle les rectangles de $\bar{A}$ le long d'un nombre fini de segments de leur bords. La surface Σ^s est une surface à bord et à coin. Elle est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}^s$, image par le recollement h du feuilletage horizontal de R induit sur $\bar{A}$.

Une partition de Markov tel que l'intersection d'une orbite avec l'union des cubes associés à la partition est connexe est dite *essentielle*. De telles partition existent toujours dans un bloc selle (fait 2.2.5).

Fait 9.4.1. *Soit (U, Y) un bloc modèle munie d'une partition de Markov essentielle $\mathcal{R}$ de type géométrique $\mathscr{T}$. Alors Σ^s est une surface compacte, à bord et à coin, homéomorphe à l'intersection du saturé de $\mathcal{R}$ par le flot de Y sur le bord d'entrée U^{in}. La lamination $\mathcal{L}_Y$ sur U^{in} est topologiquement équivalente à une sous-lamination du feuilletage $\mathcal{F}^s$ sur Σ^s. Le bord U^{in} s'obtient en recollant des disques sur le bord de Σ^s.*

Idée de preuve. L'idée de la preuve repose sur les deux observations suivantes, en reprenant les notations précédentes

- L'orbite passée d'un point de $\bar{A} = R \setminus V$ intersecte le bord U^{in} en temps uniformément borné et en un unique point.
- Les orbites des points de $\operatorname{int} A$ sont deux à deux distinctes,

- L'orbite négative d'un point de $\bar{A}\setminus A$ se recolle sur une orbite négative d'un point du bord vertical de A au bout d'un temps 1.

Avec ces observations, on voit que le recollement h effectué sur l'ensemble $\bar{A}\setminus A$ correspond à l'identification des points sur une même orbite. Il suit alors des deux premiers items que le saturé de R par le flot négatif de Y intersecte le bord de U sur une surface homéomorphe au quotient de $\bar{A}$ par h. Une surface obtenue par recollement d'un nombre fini de segment, plongée dans une surface lisse, est une surface compacte à bord et à coin. On renvoie à la preuve [BB02, Lemme 2.13] pour un argument complet. La lamination stable sur R est une sous-lamination du feuilletage horizontal sur R, ce qui justifie la seconde affirmation. Il suit pour finir du critère 3 de la définition 9.0.1 d'un bloc modèle que le complémentaire $U^{\text{in}}\setminus\Sigma^s$ est une union finie de disques (sinon on aurait un cercle disjoint de la lamination qui ne borde aucun disque). □

Exemple 9.4.2 (Faux-fer à cheval)**.** On rappelle que le type géométrique du faux-fer à cheval est donné à la figure 11, et l'exemple 9.0.5. La figure suivante donne la construction du bord d'entrée U^{in} et de la lamination d'entrée $\mathcal{L}^s$ du modèle du faux-fer à cheval par recollement de rectangle. On voit que U^{in} est une sphère contenant exactement deux disques D_1 et D_2 d'intérieur disjoints de la lamination de bord $\mathcal{L}$, et bordés par deux feuilles compactes distinctes de $\mathcal{L}^s$. Le complémentaire de ces disques dans U^{in} est un anneau bordé par deux feuilles compactes, sur lequel la lamination est un pré-feuilletage (remplissant), sans feuilles compactes autre que les deux feuilles du bord, et chaque feuille non compacte s'accumule sur une feuille compacte sans formée de composante de Reeb. En particulier, le modèle du faux-fer à cheval satisfait le critère de la proposition 9.0.7, donc le type géométrique du faux-fer à cheval est réalisable dans un bloc de construction (P, X) selle plein orientable. La lamination de bord sur le bord de sortie U^{out}

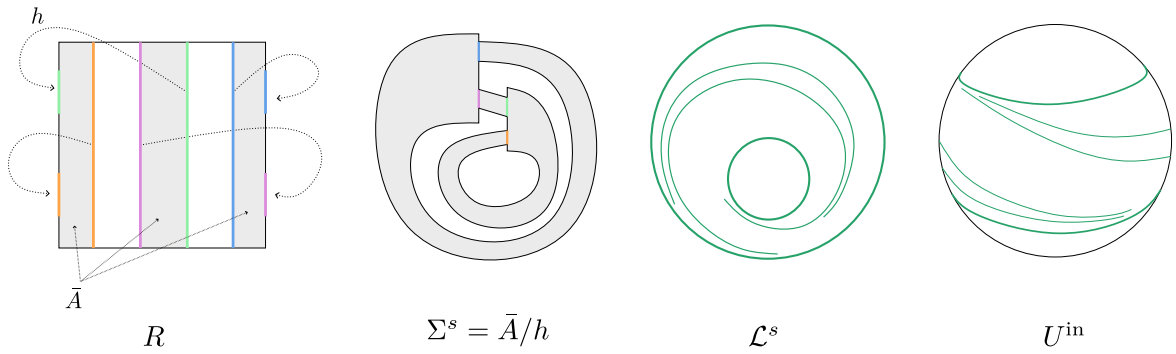


FIGURE 9.6 – Construction de la surface Σ^s et de la lamination de bord sur le bord d'entrée U^{in} du modèle (U, Y) du faux fer à cheval.

est symétrique à celle sur U^{in}. D'après la proposition 9.0.7, on peut aussi calculer la lamination de bord du bloc (P, X) associée. Le bord ∂P est un tore qui contient exactement deux orbites périodiques $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ du champ de vecteurs X (correspondant aux deux feuilles compactes de U^{in}). La lamination $\mathcal{L}_X$ sur ∂P est une lamination remplissante, sans feuille compactes autre que les orbites périodiques $\mathcal{O}_i$ et sans composante de Reeb. Il existe donc un difféomorphisme $\varphi : \partial P \to \partial P$ qui envoie l'orbite périodique orientée $\mathcal{O}_1$ sur l'orbite orientée $\mathcal{O}_2$, le bord d'entrée P^{out} sur le bord de sortie P^{in}, et la lamination $\mathcal{L}_X$ sur une lamination fortement quasi-transverse à $\mathcal{L}_X$. Ce difféomorphisme induit un recollement sur le bloc de construction formé de deux copies (P_1, X_1) et (P_2, X_2) de (P, X). Quitte à faire une forte isotopie du triplet $(P_1 \cup P_2, X_1 \cup X_2, \varphi)$, les champs X_1 et X_2 induisent un champ de vecteurs Anosov Z sur une variété fermée orientable $\mathcal{M} = P_1 \cup P_2/\varphi$ d'après le théorème de recollement 1.

Ce recollement est déjà connu. En effet, le bloc donné par la proposition F pour le faux-fer à cheval est orbitalement équivalent à un bloc de flot géodésique sur *l'orbifold modulaire* compactifiée. L'orbifold modulaire est le quotient $S_{\mathrm{Mod}} := \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. C'est une orbifold hyperbolique, qui est une sphère avec deux points singuliers d'ordre 2 et 3 et un *cusp*. C'est un résultat connu ([Mil83]) que le fibré unitaire tangent $T^1S_{\mathrm{Mod}} \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est homéomorphe au complémentaire du noeud de trèfle K dans $\mathbb{S}^3$, et le flot géodésique est le flot transverse à la fibration de K. Dans [Ghy07], l'auteur montre que l'on peut déformer la surface S_{Mod} de sorte à obtenir une orbifold hyperbolique compacte $\overline{S}_{\mathrm{Mod}}$ à bord géodésique. Le flot géodésique X^t induit sur le fibré unitaire tangent $P := T^1\overline{S}_{\mathrm{Mod}}$ est un flot Axiome A dont l'ensemble basique admet une partition de Markov de type géométrique le faux-fer à cheval (voir par exemple [BP21]). C'est un bloc de construction avec une unique composante de bord, deux orbites périodiques tangentes orientées de façon incohérentes et une lamination de bord remplissante sans feuille compactes autre que les orbites périodiques et sans composantes de Reeb. Il suit de l'unicité dans la proposition F que le bloc donné par cette proposition est isotope à (P, X). Dans [CP20], les auteurs montrent, à la manière des recollements de Handel-Thurston, l'existence d'une famille de flots d'Anosov obtenus en recollant deux copies de revêtement fini de (P, X).

Chapitre 10

Complémentaire d'orbite périodique comme pièce JSJ d'un flot d'Anosov transitif

Le théorème de Jaco-Shalen-Johansson (JSJ) ([JS78], [Joh79]) permet de découper une variété de dimension trois, orientable, compacte, et irréductible en composantes qui admettent une fibration de Seifert, ou qui sont atoroïdales. Ce découpage se fait le long de tores incompressibles plongés, et il existe une collection minimale de tels tores unique à isotopie près. On rappelle qu'une surface plongée dans une variété est dite *incompressible* si le plongement induit un morphisme injectif des groupes fondamentaux. On rappelle qu'une *fibration de Seifert* ([Hem04]) est une fibration en cercle au dessus d'une 2-orbifold (éventuellement à bord). Une variété qui admet une telle structure est un *fibré de Seifert* (il peut éventuellement en exister plusieurs). Il y a un nombre fini de *fibres singulières*, qui sont les fibres au dessus des points singuliers de l'orbifold. Les autres sont dites *régulières*. Une variété est dite *atoroidale* si tout plongement incompressible du tore est homotope à une composante de bord.

Théorème 10.0.1 (Jaco-Shalen, Johansson)**.** *Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension trois fermée, orientable, et irréductible. Alors il existe une collection finie $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ de tores plongés incompressibles deux à deux disjoints, tel que l'adhérence des composantes connexes P_i de $\mathcal{M} \setminus \cup_i T_i$ sont soit des fibrés de Seifert, soit atoroidale. La décomposition est unique à isotopie près de T_i et des P_i si la collection $\mathcal{T}$ est minimale.*

Toute 3-variété orientable $\mathcal{M}$ qui porte un champ de vecteurs Anosov X est irréductible (car son revêtement universel est $\mathbb{R}^3$, [Cal07], [Bar05]), et admet donc une décomposition JSJ le long de tores incompressibles. Soit P une pièce Seifert de la décomposition JSJ de $\mathcal{M}$. On dit que

- P est une *pièce de Seifert périodique* si il existe une fibration de Seifert sur P tel que la fibre régulière est homotope à un multiple d'une orbite périodique de X.
- P est une *pièce de Seifert libre* sinon.

Définition 10.0.2 (Flot pseudo-Anosov)**.** Un *flot pseudo-Anosov* X^t sur une 3-variété fermée $\mathcal{M}$ est un flot qui est localement modelé sur un revêtement semi-branché d'un flot d'Anosov.

On suit la définition de [Cal07, Définition 6.41]. Un flot pseudo-Anosov est donc un flot continu, différentiable en dehors d'une collection finie d'orbites périodiques $\Gamma_* = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, dites *orbites singulières*. Sur le complémentaire de ces orbites, le flot admet une décomposition hyperbolique, autrement dit il préserve une décomposition $T\mathcal{M} = E^{ss} \oplus \mathbb{R}.X \oplus E^{uu}$ du fibré

tangent au dessus de $\mathcal{M} \smallsetminus \Gamma_*$, dilate uniformément les vecteurs de E^{uu} et contracte uniformément les vecteurs de E^{ss} au temps $t > 0$. On dira de façon équivalente que X est un *champ de vecteurs pseudo-Anosov*. Les fibrés $E^{ss} \oplus \mathbb{R}X$ et $E^{uu} \oplus \mathbb{R}X$ sont uniquement intégrables en des feuilletages X^t-invariants $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de dimension 2 appelés respectivement feuilletage stable (faible) et feuilletage instable (faible), qui admettent des singularités p_i-prong avec $p_i \geq 3$ le long des orbites γ_i (figure 10.1). Au voisinage d'une orbite singulière γ_i, les coordonnées du revêtement semi-branché sont de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de la singularité.

Remarque 10.0.3. Il existe une autre définition courante d'un *flot pseudo-Anosov topologique*, par exemple utilisée dans [BF13a, Définition 2.1], où l'on considère un flot seulement continu sur $\mathcal{M}$. On renvoie à [AT22, Définition 5.8] pour comparer les deux définitions. Les auteurs montrent dans cet article ([AT22, Théorème 5.10]) qu'un flot pseudo-Anosov topologique transitif est orbitalement équivalent à un flot pseudo-Anosov transitif (au sens lisse). C'est une généralisation (plus ou moins immédiate) du théorème de M. Shannon [Sha20] qui dit qu'un flot topologiquement Anosov transitif est orbitalement équivalent à un flot d'Anosov transitif.

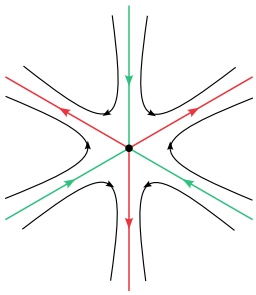


FIGURE 10.1 – Image transverse d'une singularité de type 3-prong dans un flot pseudo-Anosov

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition suivante, qui permet de réaliser des pièces JSJ atoroïdales dans un flot d'Anosov transitif en tant que complémentaire d'orbites périodiques de flot d'Anosov ou pseudo-Anosov transitif.

Proposition 10.0.4 (Proposition G)**.** *Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ une collection finie d'orbites périodiques d'un champ pseudo-Anosov transitif X sur une 3-variété orientable $\mathcal{M}$, contenant l'ensemble des orbites périodiques singulières de X. On suppose que le complémentaire $\mathcal{M} \smallsetminus \cup_i \gamma_i$ est atoroïdal. Alors il existe une 3-variété orientable $\mathcal{N}$ munie d'un champ de vecteurs Anosov transitif Y tel que la décomposition JSJ de $\mathcal{N}$ est formée de deux pièces atoroïdales, toutes deux homéomorphes à $\mathcal{M} \smallsetminus \cup_i \gamma_i$, et d'une pièce de Seifert périodique.*

Remarque 10.0.5. Les tores T_i de la collection JSJ de $\mathcal{N}$ sont chacun isotope à un tore quasi-transverse T_i' dans $\mathcal{N}$, mais la collection des T_i' n'est pas plongée : les tores s'intersectent le long d'orbites périodiques. La preuve permettra de vérifier cette propriété, on renvoie cependant à [BF13a] pour une analyse de la mise en position quasi-transverse de tores JSJ dans un flot d'Anosov de dimension 3. Un défaut de plongement de la collection "modifiée" en position quasi-transverse a lieu pour les tores adjacents à des pièces de Seifert périodiques.

Remarque 10.0.6. Le flot d'Anosov Y^t sur les deux copies de $\mathcal{M} \smallsetminus \cup_i \gamma_i$ dans $\mathcal{N}$ est une bifurcation Dérivé de (pseudo)-Anosov du flot X^t sur les orbites γ_i.

On prouvera en fait l'énoncé plus général suivant :

Proposition 10.0.7. *Soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ une collection finie d'orbites périodiques d'un champ de vecteurs pseudo-Anosov transitif X sur une 3-variété orientable $\mathcal{M}$, contenant l'ensemble des orbites périodiques singulières de X. Alors il existe une 3-variété orientable $\mathcal{N}$ munie d'un champ de vecteurs d'Anosov transitif Y, et une collection $\mathcal{T}$ de tores incompressibles plongés dans $\mathcal{N}$ et non homotopes, qui découpent $\mathcal{N}$ en trois composantes P_1, P_2, P_3, où P_1 et P_2 sont homéomorphes à $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$ et P_3 admet une fibration de Seifert avec une fibre homotope à un multiple d'une orbite périodique.*

La proposition 10.0.4 découle directement de la proposition 10.0.7 dans le cas où $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$ est atoroïdale, car alors la collection $\mathcal{T}$ est la collection de tores JSJ de $\mathcal{N}$, et P_3 est un fibré de Seifert périodique.

Résumé de preuve Le chapitre s'organise comme suit

- Dans la section 10.1 on donne un procédé général de construction de bloc de construction selle, plein, transitif par *Double-éclatement – Excision* d'une collection Γ d'orbites périodiques d'un flot pseudo-Anosov X sur une variété $\mathcal{M}$ contenant l'ensemble des orbites périodiques singulières (proposition 10.1.2) Le bloc obtenu est homéomorphe au complémentaire $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$ de l'union des orbites périodiques de la collection, et la lamination de bord est *élémentaire cohérente* sur chaque composante de bord.

- Dans la section 10.2, on montre un résultat général qui permet "d'ajouter" une feuille compacte (non marquée) sur une lamination de bord d'un bloc de construction (P, X) en recollant un bloc intermédiaire "élémentaire", qui est un voisinage tubulaire d'une orbite périodique selle de valeurs propres négatives. Topologiquement, le bloc obtenu est l'union de P et d'un fibré de Seifert "simple", adjoints par un tore incompressible. Ce résultat est résumé à la proposition 10.2.1. On pourra l'utiliser de façon itérative.

- Dans la section 10.3, on montre la proposition 10.0.7 à l'aide des résultats précédents. On construit un bloc (P, X) par *Double-éclatement – Excision* le long de la collection d'orbites données par la proposition 10.1.2, et on ajoute des feuilles compactes sur chaque composantes connexe du complémentaire des orbites périodiques du bord avec une orientation dynamique bien choisie à l'aide de la proposition 10.2.1. Le bloc (P', X') ainsi obtenu est selle, plein, transitif, et se recolle sur une copie de (P, X) via un recollement fortement quasi-transverse φ. On peut utiliser le théorème de recollement et le critère de transitivité 6.4.2, et le flot d'Anosov obtenu par recollement vérifiera la proposition 10.0.7.

- Dans la section 10.4, on donne comme corollaire un critère pour que le complémentaire d'un *noeud hyperbolique* dans $\mathbb{S}^3$ se réalise en tant que pièce JSJ atoroïdale d'un flot d'Anosov transitif. On décrit une construction par *plombage de Hopf* qui donne une famille de noeuds vérifiant ce critère.

10.1 Bloc de construction construit par *Double-éclatement – Excision*

Dans cette section préliminaire, on présente le résultat général de construction de bloc de construction par *Double-éclatement – Excision* d'orbites périodiques. On renvoie au chapitre 7, section 7.2 pour la définition d'un type combinatoire quasi-Morse-Smale (définitions 7.2.7 et 7.2.9).

Définition 10.1.1. Un pré-feuilletage quasi-Morse-Smale sur le tore est dit

- *élémentaire* si il n'admet pas de feuilles compactes autre que des feuilles marquées,
- *cohérent* si les feuilles marquées orientées sont toutes librement homotopes,
- *alterné* si toute feuille marquée orientée est librement homotope à l'inverse de la feuille marquée successive pour un ordre cyclique.

Proposition 10.1.2. *Soit $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ une collection d'orbites périodiques d'un champ de vecteurs pseudo-Anosov X sur une variété fermée $\mathcal{M}$ orientable de dimension 3, qui contient toutes les orbites singulières (éventuelles) de X. Il existe un bloc de construction plein (P, Y) tel que, si Λ désigne le maximal invariant et $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, Y), alors*

1) $P = \mathcal{M} \setminus \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est une union de voisinages tubulaires disjoints des orbites γ_i,

2) la lamination $\mathcal{L}$ est remplissante sur ∂P, chaque composante connexe T_i de ∂P contient $2p_i$ orbites périodiques tangentes, où p_i est le nombre de séparatrices stables de l'orbite γ_i, et la lamination $\mathcal{L}$ sur T_i est élémentaire cohérente,

3) Si X est transitif, alors le bloc (P, Y) est un bloc selle transitif

On dit que (P, Y) est un bloc de construction obtenu par Double-éclatement – Excision *sur la collection Γ d'orbites périodiques du champ pseudo-Anosov X.*

En particulier, P est homéomorphe au complémentaire $\mathcal{M} \setminus \cup_i \gamma_i$.

Idée de preuve. On explique cette construction pour une unique orbite périodique γ d'un flot d'Anosov, la généralisation pour une collection finie Γ étant similaire. Supposons pour fixer les idées que les valeurs propres de γ sont négatives. On fait une bifurcation Dérivé d'Anosov attractive sur l'orbite périodique γ. On renvoie à [GHS97, Sous-section 2.2.2] et [BBY17, Section 8] pour une description détaillée de cette bifurcation, et à la figure 7.9. Signalons aussi [BBGH20, Section 3.3], où les auteurs donnent une construction explicite d'une bifurcation Dérivé d'Anosov sur un flot géodésique en codimension 2, mais qui peut s'adapter dans notre cas.

Cette bifurcation consiste à "ouvrir" la variété stable de γ, et crée une orbite périodique attractive γ_+ à la place de γ et une orbite périodique selle γ' à valeurs propres positives à la place du bord de la variété stable locale de γ. Plus précisément, il existe une petite perturbation X' de X sur $\mathcal{M}$ tel que X' coïncide avec X en dehors d'un petit voisinage tubulaire $\mathcal{V}_0$ de l'orbite γ, et tel que le champ de vecteurs X' sur $\mathcal{V}_0$ admet une orbite périodique attractive γ_+ de valeurs propres négatives, et une orbite périodique selle γ de valeurs propre négative homotope au double de γ_+. On fait ensuite une bifurcation Dérivé d'Anosov répulsive sur l'orbite périodique γ', ce qui consiste à "ouvrir" la variété instable de γ'. Plus précisément, il existe une petite perturbation X'' de X' sur $\mathcal{M}$ tel que X' coïncide avec X en dehors d'un petit voisinage tubulaire $\mathcal{V}_0'$ de l'orbite γ', et tel que le champ de vecteurs X'' sur $\mathcal{V}_0'$ admet une orbite périodique répulsive γ'_- de valeurs propres positives à la place de γ' et deux orbites périodiques selles γ'_1 et γ'_2, à la place du bord de la variété instable locale de γ', librement homotopes à γ'_- et dont les valeurs propres sont positives, et le champ n'a pas été modifié au voisinage de γ^+ (figure 10.2). Il existe un tore T qui est l'union de deux anneaux A_+ et A_- tel que :

- Le bord de A_+ est l'union des orbites périodiques γ'_1 et γ'_2 et l'intérieur de A_+ est inclus dans le bassin d'attraction $\mathcal{W}^s(\gamma_+)$ de γ_+, et est transverse au champ X''
- et le bord de A_- est l'union des orbites périodiques γ'_1 et γ'_2 et son intérieur est inclus dans le bassin de répulsion $\mathcal{W}^u(\gamma'_-)$ de γ'_-, et est transverse au champ X''

Le tore T est dessiné à la figure 10.2. Il suit que T est un tore quasi-transverse au champ X'' qui contient les deux orbites périodiques selles γ'_i. C'est le bord d'un tore plein $\mathcal{V}$ contenu dans $\mathcal{V}_0$ et qui contient dans son intérieur l'orbite périodique attractive γ_+ et l'orbite périodique répulsive γ'_-. On pose $P := \mathcal{M} \smallsetminus \mathcal{V}$, et on note Y la restriction de X'' à P. Alors (P, Y) est un bloc de

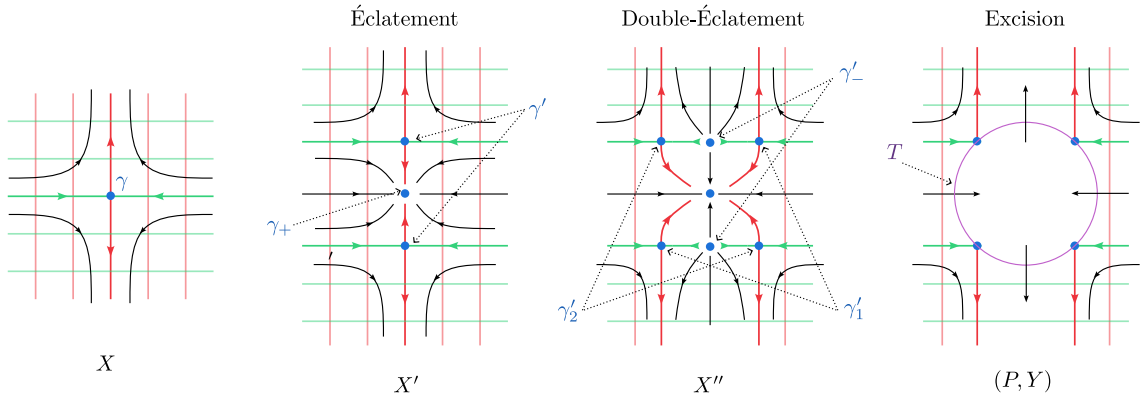


FIGURE 10.2 – Double-éclatement et Excision sur une orbite γ dont les valeurs propres sont négatives

construction satisfaisant la proposition 10.1.2. On renvoie à [BBGH20, Proposition 3.8] pour une preuve détaillée de l'hyperbolicité du maximal invariant que l'on peut facilement adapter à notre cas. Pour le reste, on renvoie à la preuve du lemme 7.4.2.

Si γ a des valeurs propres positives, la première bifurcation DA attractive produit deux orbites périodiques selle γ_1 et γ_2 et une orbite périodique attractive γ_+, toutes de valeurs propres positives. On effectue ensuite une DA répulsive sur γ_1 et sur γ_2. Cela a pour effet de créer deux orbites périodiques répulsives $\gamma_{1,-}$ et $\gamma_{2,-}$ et quatre orbites périodiques selles $\gamma_{1,1}$ et $\gamma_{1,2}$ et $\gamma_{2,1}$ et $\gamma_{2,2}$. Il existe alors un tore plein $\mathcal{V}$ dont le bord est un tore T quasi-transverse au champ X'', qui contient les quatre orbites périodiques selles $\gamma_{i,j}$ et l'intérieur de $\mathcal{V}$ contient les orbites périodiques attractives et répulsives. On montre de la même façon que la variété $P = \mathcal{M} \smallsetminus \mathcal{V}$ muni du champ Y égal à la restriction de X'' est un bloc de construction qui vérifie le lemme.

Dans le cas où X est un champ pseudo-Anosov et γ est l'unique orbite singulière de type p-prong, le procédé est essentiellement le même et cette opération aura pour effet "d'éclater" la singularité p-prong. Expliquons brièvement. Supposons que γ admet p séparatrices stables et p séparatrices instables. On effectue une bifurcation *Dérivé de pseudo-Anosov* attractive sur l'orbite γ, autrement dit une bifurcation analogue à la bifurcation Dérivé d'Anosov, qui consiste à ouvrir chacune des séparatrices stables de γ. Plus précisément, il existe un voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ de γ sur lequel le flot de X est orbitalement équivalent à un revêtement semi-branché d'une orbite périodique hyperbolique selle. Ce voisinage est découpé en p régions $\mathcal{V}_i$, $i = 1, \ldots, p$, chacune bordée par deux séparatrices instable de γ, et sur chacune de ces régions il existe des coordonnées $(x, y, t) : \mathcal{V}_i \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de régularité $\mathcal{C}^1$ en dehors de $x = y = 0$, dans lesquelles le flot de X est la suspension de $(x, y) \mapsto (\lambda^{-1}x, \lambda y)$, avec $\lambda > 1$, restreint au demi-espace. On peut alors se ramener à la bifurcation DA attractive du cas précédent sur chaque région $\mathcal{V}_i$ et aux descriptions explicites de [BBGH20, Section 3.3] ou [BBY17, Section 8] dans des coordonnées linéarisantes restreintes au demi-espace $x \geq 0$. On obtient un nouveau champ X'_i sur chaque $\mathcal{V}_i$, de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de $x = y = 0$. Les champs éclatés X'_i sur les régions

$\mathcal{V}_i$ se recollent de façon $\mathcal{C}^1$ le long des séparatrices instables par une réflexion, et on obtient un champ X' de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de γ. Ce champ X' coïncide avec X en dehors d'un petit voisinage tubulaire de γ, admet une orbite périodique attractive γ^+ à la place de γ et p orbites périodiques γ_i à la place de chacun des bords des séparatrices instables locales de γ, et qui sont maintenant des orbites périodiques hyperboliques selles au voisinage duquel le flot est de classe $\mathcal{C}^1$. L'hyperbolicité (d'indice $(1,1)$) pour les orbites du flot de X' sur le complémentaire du bassin d'attraction de γ^+ peut se montrer en suivant la preuve de [BBGH20, Proposition 3.8] par critère de cônes. On peut se ramener aux coordonnées (x, y, t) sur chaque région $\mathcal{V}_i$ et adapter la preuve pour des demi-espaces $x \geq 0$.

On effectue ensuite une bifurcation Dérivé d'Anosov répulsive sur chacune de ces p orbites hyperboliques selles dans des voisinages assez petits et disjoints, loin de γ^+. On peut alors se ramener à la construction classique, et on obtient un champ X'' qui coïncide avec X' en dehors de ces petits voisinages, de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de γ^+, qui admet p orbites périodiques répulsives γ_i^- à la place de γ_i, et $2p$ orbites périodiques hyperboliques selles à la place des deux bords des séparatrices stables locales des p orbites γ_i. L'hyperbolicité selle pour les orbites dans le complémentaire de l'union des bassins de répulsions de γ_i^- et du bassin d'attraction de γ_i^+ se montre en suivant la preuve [BBGH20, Proposition 3.8], car on est loin de la singularité. Il existe un tore T quasi-transverse au champ de vecteurs X'' décrit à la figure 10.3, qui contient chacune des orbites $2p$ orbites périodiques hyperboliques selles, et le complémentaire de ces orbites dans T sont des anneaux inclus dans les bassins d'attraction de γ^+ et de répulsion des γ_i^-. Le tore T le bord d'un tore plein $\mathcal{V}$ et qui contient dans son intérieur l'orbite périodique attractive γ^+ et les orbites périodiques répulsives γ_i^-. On pose $P := \mathcal{M} \setminus \mathcal{V}$, et on note Y la restriction de X'' à P. On montre alors par des arguments analogues que le couple (P, Y) est un bloc de construction qui satisfait la proposition. □

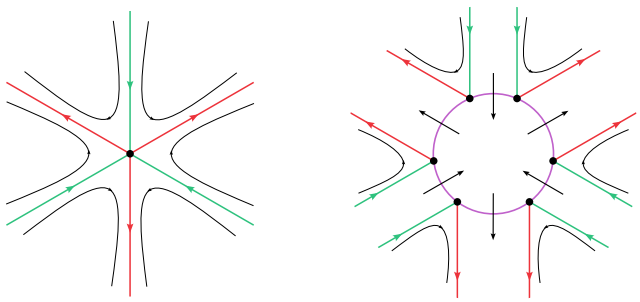


FIGURE 10.3 – Double-Éclatement et Excision sur une singularité de type 3-prong

10.2 Ajout de feuille compacte par recollement de bloc élémentaire

On décrit un procédé qui permet "d'ajouter" une feuille compacte à la lamination de bord d'un bloc de construction (P, X). Topologiquement, cet opération a pour effet de recoller un tore plein le long d'un anneau sur une composante de bord de P. On décrira cette opération à l'aide de recollement partiels de blocs intermédiaires (définition 9.1.1). On utilise les résultats du chapitre 9 pour la correspondance entre blocs de constructions et blocs intermédiaires.

Soit (P, X) un bloc de construction selle plein transitif orientable, et T une composante de bord de ∂P qui contient un ensemble non vide d'orbite périodique de X. On note $\mathcal{L}_X$ la lamination de bord. Soit B un anneau de T bordé par deux feuilles compactes γ et γ' de $\mathcal{L}_X$ et

ne contenant pas de feuilles compactes de $\mathcal{L}$ sur son intérieur. On munit P d'une orientation tel qu'on a une énumération géométrique des feuilles compactes de $\mathcal{L}_X$ tel que $\gamma_{n-1} = \gamma$ et $\gamma_0 = \gamma'$, autrement dit γ' est la première feuille, et γ est à gauche de γ' pour l'orientation dynamique de γ' et l'orientation de T. Soit σ le type combinatoire de la lamination $\mathcal{L}_X$ sur T associé.

Proposition 10.2.1. *Pour tout type combinatoire quasi-Morse-Smale σ' sur $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ tel que la restriction de σ' à $\{0, \dots, n-1\}$ coïncide avec σ, il existe (Q, Y) un bloc de construction selle plein transitif orienté, tel que si on note $\mathcal{L}_Y$ la lamination de bord de (Q, Y)*

1) (bord) $\partial P \simeq \partial Q$.

2) (type combinatoire) *Il existe T' une composante connexe de ∂Q tel que :*

- *la lamination $\mathcal{L}_Y$ sur $\partial Q \setminus T'$ et la lamination $\mathcal{L}_X$ sur $\partial P \setminus T$ ont un même type combinatoire,*
- *la lamination $\mathcal{L}_Y$ sur T' a pour type combinatoire σ'.*

3) (topologie) *Il existe un tore T'' plongé dans l'intérieur de Q, isotope à un tore quasi-transverse à Y, qui découpe Q en deux fermés P_0 et P_1 tel que $P_0 \simeq P$ et P_1 est un fibré de Seifert adjacent à T' et à ∂Q, dont la fibre régulière est librement homotope aux orbites périodiques de Y contenues dans T'.*

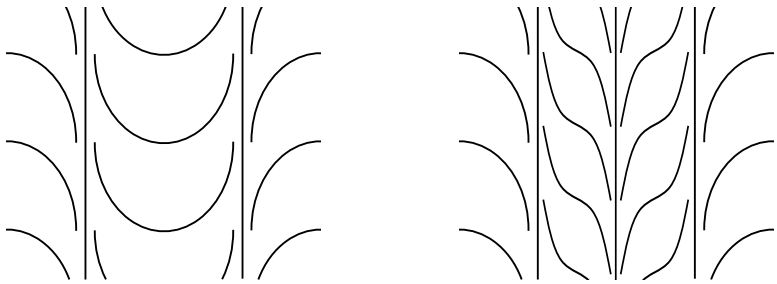


FIGURE 10.4 – Un ajout de feuille compacte

L'item 2 signifie que la lamination de bord de (P', X') est essentiellement la même que la lamination de bord de (P, X), où l'on a ajouté une feuille compacte au milieu de l'anneau B bordé par γ et γ'.

Remarque 10.2.2. Si σ' est un type combinatoire qui coïncide avec un type combinatoire σ sur le complémentaire d'un entier dans $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, alors cet entier ne correspond pas à une feuille marquée, par parité des feuilles marquées. Ce processus permet donc d'ajouter des feuilles compactes non marquées à une lamination de bord d'un bloc.

Une première étape consiste à construire un bloc intermédiaire (définition 9.1.1) "élémentaire", contenant une unique orbite périodique.

Lemme et Définition 10.2.3. *Il existe un bloc intermédiaire (V_e, X_e), tel que :*

1) (bord) *le bord se décompose en l'union $\partial V_e = V_e^{\text{in}} \cup V_e^{\text{tan}} \cup V_e^{\text{out}}$, où le bord d'entrée V_e^{in} est un unique anneau, le bord de sortie V^{out} est un unique anneau et le bord tangent V_e^{tan} est l'union de deux anneaux tangents au champ de vecteurs X_e.*

2) (maximal invariant) *le maximal invariant est une unique orbite périodique selle O dont les valeurs propres sont négatives,*

3) (lamination de bord) *la lamination de bord $\mathcal{L}_{X_e}$ est réduite à deux feuilles compactes, l'une γ^s sur V_e^{in} et l'une γ^u sur V_e^{out}, correspondant aux intersections de la séparatrice stable et instable de O respectivement.*

4) (topologie) *V_e est homéomorphe à un tore plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, c'est un fibré de Seifert dont la fibre régulière est librement homotope à la trace de la variété stable γ^s, et possède une unique fibre singulière homotope à l'orbite périodique O.*

Un tel bloc est unique à équivalence orbitale près. On l'appelle le bloc intermédiaire élémentaire.

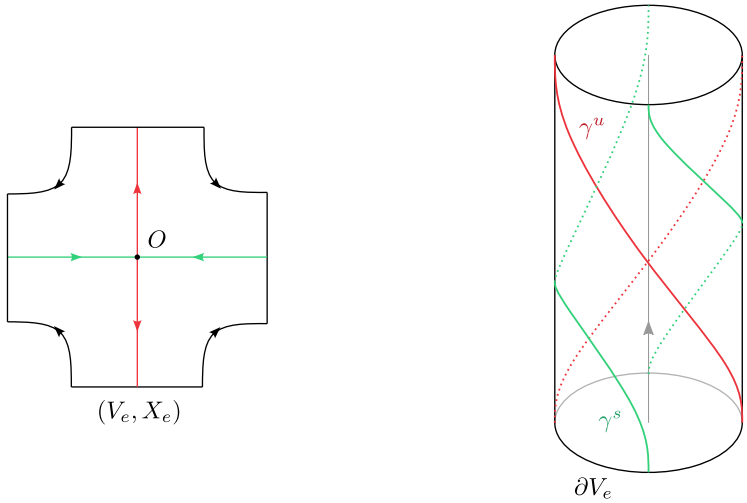


FIGURE 10.5 – Bloc élémentaire (V_e, X_e) et trace des laminations sur le bord ∂V_e

Démonstration. On considère la suspension de la matrice $A : (x, y) \mapsto (-\frac{1}{2}x, 2y)$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et O l'orbite périodique induite par $(0, 0)$. Soit V_e un voisinage tubulaire de O dont le bord est constitué de deux anneaux tangents et de deux anneaux transverses, dont la trace dans le plan transverse est décrite par la figure 10.5. Le bloc (V_e, X_e) où X_e est la restriction du champ de suspension vérifie le lemme. Si (V, X) est un autre bloc intermédiaire qui vérifie le lemme 10.2.3, quitte à pousser le bord de V le long du champ de vecteurs on peut supposer qu'il est inclus dans un voisinage linéarisant de l'unique orbite périodique O. Les orbites périodiques hyperboliques selles de valeurs propres négatives sont toutes orbitalement équivalentes sur un voisinage linéarisant. On montre avec des arguments similaire à la preuve de 9.1.4 que des voisinages décrits par la figure 10.5 à équivalence orbitale près. □

On aura besoin du lemme suivant, analogue des propositions 7.1.2 et 7.1.4 pour les recollements partiels de blocs intermédiaires. Soit $(\check{P}, \check{X})$ et $(\check{Q}, \check{Y})$ deux blocs intermédiaires. On note $\partial\check{P} = \check{P}^{\text{in}} \cup \check{P}^{\text{tan}} \cup \check{P}^{\text{out}}$ la décomposition du bord en bord d'entrée, bord tangent et bord de sortie, et $\check{\mathcal{L}}_X$ la lamination de bord de $(\check{P}, \check{X})$. On note $\check{f}_X : \check{P}^{\text{in}} \to \check{P}^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de $\check{X}$. De même, $\partial\check{Q} = \check{Q}^{\text{in}} \cup \check{Q}^{\text{tan}} \cup \check{Q}^{\text{out}}$ la décomposition du bord, $\check{\mathcal{L}}_Y$ la lamination de bord de $(\check{Q}, \check{Y})$. On note $\check{f}_Y : \check{Q}^{\text{in}} \to \check{Q}^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de $\check{Y}$.

Lemme 10.2.4. *Soit C^{out} une union de composantes connexes de $\check{P}^{\text{out}}$ et C^{in} une union de composantes connexes de $\check{Q}^{\text{in}}$, soit $\varphi : C^{\text{out}} \to C^{\text{in}}$ un difféomorphisme qui renverse l'orientation. On suppose que φ envoie la lamination de bord $\check{\mathcal{L}}_X$ de $(\check{P}, \check{X})$ sur C^{in} sur une lamination transverse à la lamination de bord $\check{\mathcal{L}}_Y$ de $(\check{Q}, \check{Y})$ sur C^{in}. Alors les champs de vecteurs $\check{X}$ et $\check{Y}$ induisent un champ de vecteurs $\check{Z}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété $\check{N} := (\check{P} \cup \check{Q})/\varphi$, et on a*

1) (bloc intermédiaire) $(\check{N}, \check{Z})$ *est un bloc intermédiaire*

2) (bord) $\partial\check{N} = (\partial\check{P} \smallsetminus C^{\text{out}}) \cup_\varphi (\partial\check{Q} \smallsetminus C^{\text{in}})$ *où φ apparie les composantes de bord des deux composantes de l'union. De plus,*

- *le bord d'entrée est $\check{N}^{\text{in}} = \partial\check{P}^{\text{in}} \sqcup (\partial\check{Q}^{\text{in}} \smallsetminus C^{\text{in}})$*
- *le bord de sortie est $\check{N}^{\text{out}} = (\partial\check{P}^{\text{out}} \smallsetminus C^{\text{out}}) \sqcup \partial\check{Q}^{\text{out}}$*
- *le bord tangent est $\check{N}^{\text{tan}} = \check{P}^{\text{tan}} \cup_\varphi \check{Q}^{\text{tan}}$.*

3) (lamination) *Si $\check{\mathcal{L}}_Z$ est la lamination de bord de $\check{N}$ alors :*

$$\check{\mathcal{L}}_Z = \check{\mathcal{L}}_X \cup \check{\mathcal{L}}_Y \cup (\check{f}_Y)_*(\varphi_*\mathcal{L}_X \smallsetminus \mathcal{L}_Y) \cup (\check{f}_X^{-1})_*(\varphi_*^{-1}\mathcal{L}_Y \smallsetminus \mathcal{L}_X)$$ [1]

Démonstration. Pour un bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$, si c^{in} est une courbe qui borde une composante connexe de $\check{P}^{\text{in}}$ et une composante connexe de $\check{P}^{\text{tan}}$, alors il existe des coordonnées locales (x, y, θ) au voisinage de tout point de c^{in} tel que le champ de vecteurs $\check{X}$ est le champ de vecteurs vertical ∂_y, le bord tangent $\check{Q}^{\text{tan}}$ est le plan vertical $\{x = 0\}$ et le bord d'entrée $\check{P}^{\text{in}}$ est le plan horizontal $\{y = 0\}$. Il en est de même au voisinage des points d'une courbe c^{out} qui borde une composante connexe de $\check{Q}^{\text{in}}$ et de $\check{Q}^{\text{tan}}$ (figure 10.6). Il s'ensuit que l'espace quotient $\check{N} := \check{P} \cup \check{Q}/\varphi$ est une variété à bord munie d'une structure différentiable en dehors d'un nombre fini de courbes fermées simples contenues dans le bord, et d'un champ de vecteurs $\check{Z}$ de classe $\mathcal{C}^1$ induit par les champs de vecteurs $\check{X}$ et $\check{Y}$ et le couple $(\check{N}, \check{Z})$ satisfait l'item 1 et 2 de la définition 9.1.1 d'un bloc intermédiaire. L'item 2 du lemme 10.2.4 se déduit de la construction. Remarquons ensuite que toute orbite du flot de $\check{Z}$ qui intersecte la projection de C^{in} dans $\check{N}$ n'y repasse jamais, car chaque orbite du flot de $\check{X}$ intersecte au plus une fois le bord de sortie, chaque orbite du flot de $\check{Y}$ intersecte au plus une fois le bord d'entrée, et les blocs $(\check{P}, \check{X})$ et $(\check{Q}, \check{Y})$ sont disjoints. Il s'ensuit que l'on peut voir φ comme un recollement partiel sans cycle (voir section 7.1). On peut alors adapter la preuve de la proposition 7.1.4 pour des blocs intermédiaires : si φ envoie la lamination de bord $\check{\mathcal{L}}$ de $(\check{P}, \check{X})$ sur C^{in} sur une lamination transverse à la lamination de bord $\check{\mathcal{L}}_Y$ de $(\check{Q}, \check{Y})$ sur C^{in}, alors le maximal invariant $\check{\Lambda}_Y$ du couple $(\check{N}, \check{Z})$ est un ensemble hyperbolique et le couple est un bloc intermédiaire. L'item 1 est vérifié. L'item 3 se déduit avec des considérations analogues à la preuve de la proposition 7.1.2 concernant les recollements partiels de blocs de constructions. □

Preuve de la proposition 10.2.1. On rappelle que (P, X) est un bloc de construction selle plein transitif orientable, T une composante de bord de ∂P qui contient au moins une orbite périodique de X, et on reprend les notations de la proposition 10.2.1. On rappelle que l'on a fixé un anneau B de T bordé par deux feuilles compactes γ et γ' de la lamination de bord $\mathcal{L}_X$ et ne contenant pas de feuilles compactes sur son intérieur. On a choisi la première feuille $\gamma_0 = \gamma'$ et une orientation sur P tel que γ est à droite de γ_0 pour son orientation dynamique. Le type combinatoire correspondant de la lamination $\mathcal{L}_X$ sur T est noté σ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Le champ de vecteurs X est transverse à B et disons sortant de P pour fixer les idées. Soit $(\check{P}, \check{X})$ le bloc intermédiaire associé à (P, X) lemme 9.1.4. On note $\check{P}^{\text{in}}$ le bord d'entrée, $\check{P}^{\text{out}}$

1. on omet par abus de notation les restrictions aux domaines où ces applications ont un sens

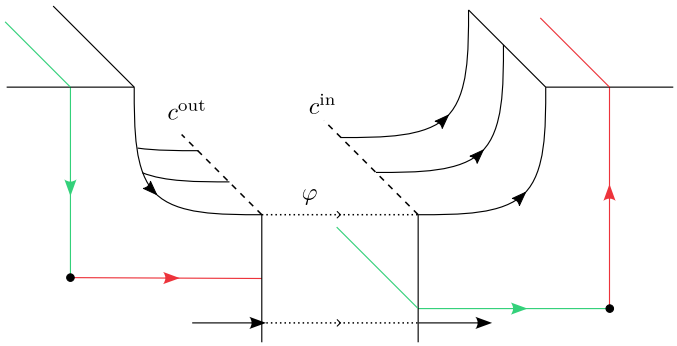


FIGURE 10.6 – Recollement de blocs intermédiaires

le bord de sortie, et $\check{\mathcal{L}}_X$ la lamination de bord (définition 9.1.1 et 9.1.2). On note aussi $\mathcal{A}_*$ la collection de composantes connexes de $\partial\check{P}\smallsetminus\check{\mathcal{L}}_X$ contenant le bord tangent $\check{P}^{\text{tan}}$ (définition 9.1.1, item 4).

D'après l'item 2 du lemme 9.1.4, l'anneau fermé $\text{adh}(B)$ est isotope à un anneau fermé $\text{adh}(\check{B}) \subset \check{P}^{\text{out}}$ via une isotopie qui envoie la lamination $\mathcal{L}_X$ restreinte sur la lamination $\check{\mathcal{L}}_X$. Soit C^{out} la composante connexe de $\check{P}^{\text{out}}$ qui contient $\check{B}$. Soit (V_e, X_e) le bloc intermédiaire élémentaire donné par le lemme 10.2.3, et soit V_e^{in} le bord d'entrée de V_e. C'est un anneau et la lamination de bord $\mathcal{L}_e$ sur V_e^{in} est réduite à une unique feuille compacte $\gamma^s \subset \text{int}(V_e^{\text{in}})$ parallèle au bord de l'anneau. Soit $\varphi : C^{\text{out}} \to V_e^{\text{in}}$ un difféomorphisme tel que la feuille $\varphi_*^{-1}(\gamma^s)$ est à l'intérieur de $\check{B} \subset C^{\text{out}}$, parallèle (et disjointe) des feuilles compactes de la lamination $\check{\mathcal{L}}$ sur C^{out} (figure 10.7). On pose $\check{Q} = (\check{P} \cup V_e)/\varphi$. Alors d'après le lemme 10.2.4, les champ de vecteurs $\check{X}$ et X_e induisent un champ de vecteurs $\check{Y}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété $\check{Q}$, tel que $(\check{Q}, \check{Y})$ est un bloc intermédiaire muni de l'orientation qui coïncide avec celle choisie sur P. Le bord de sortie Q^{out} est l'union disjointe $(P^{\text{out}}\smallsetminus C^{\text{out}}) \sqcup V_e^{\text{out}}$ et le bord d'entrée Q^{in} est égal à P^{in} (item 2 lemme 10.2.4). Notons $\mathcal{A}'_*$ la collection de composantes connexes de $\partial\check{Q}\smallsetminus\check{\mathcal{L}}_Y$ contenant le bord tangent $\check{Q}^{\text{tan}}$. Alors on a les propriétés suivantes.

Fait 10.2.5.

1) *La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ est remplissante sur $(\partial\check{Q}\smallsetminus\mathcal{A}'_*)\smallsetminus V_e^{\text{out}}$ et les laminations $\check{\mathcal{L}}_Y$ et $\check{\mathcal{L}}_X$ se complètent en des feuilletages topologiquement équivalents sur $(\partial\check{Q}\smallsetminus\mathcal{A}'_*)\smallsetminus V_e^{\text{out}}$ et $(\partial\check{P}\smallsetminus\mathcal{A}_*)\smallsetminus C^{\text{out}}$ respectivement.*

2) *La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ est remplissante sur $V_e^{\text{out}}\smallsetminus\mathcal{A}'_*$, et il existe un anneau $\check{B}' \subset V_e^{\text{out}}$ bordé par deux feuilles compactes de $\check{\mathcal{L}}_Y$, tel que*

   - *la lamination $\check{\mathcal{L}}$ restreinte à $(C^{\text{out}}\smallsetminus\mathcal{A}_*)\smallsetminus\check{B}$ et la lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ restreinte à $(V_e^{\text{out}}\smallsetminus\mathcal{A}'_*)\smallsetminus\check{B}'$ sont topologiquement équivalentes,*
   - *$\check{\mathcal{L}}_Y$ contient une unique feuille compacte sur $\check{B}'$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le lemme 10.2.4, item 2 et 3 et de calculer la lamination sur chacun des ensembles. Notons $\check{f}_X : \check{P}^{\text{in}} \to \check{P}^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de $\check{X}$ dans $\check{P}$, et $f_e : V_e^{\text{in}} \to V_e^{\text{out}}$ l'application de passage du flot de X_e dans V_e. Soit γ^u et γ^s les deux feuilles de la lamination de bord de (V_e, X_e) sur V_e^{out} et V_e^{in} respectivement. La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ sur $\check{Q}^{\text{out}}\smallsetminus V_e^{\text{out}} = \check{P}^{\text{out}}$ est égale à la lamination $\check{\mathcal{L}}_X$ sur $\check{P}^{\text{out}}$. La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ sur

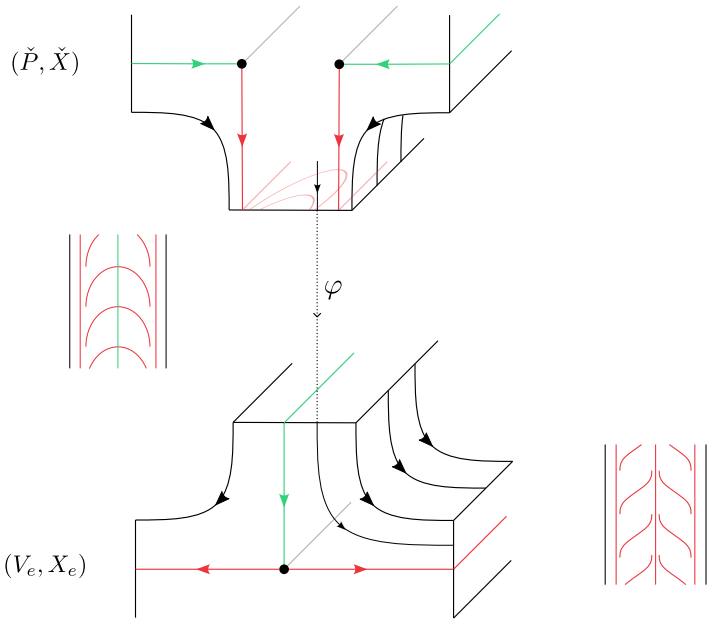


FIGURE 10.7 – Recollement d'un bloc élémentaire (V_e, X_e) le long de V_e^{in} sur le bloc intermédiaire $(\check{P}, \check{X})$ le long de C^{out}, et image de la lamination induite sur V_e^{out}

$\check{Q}^{\text{in}} \setminus V_e^{\text{out}} = \check{P}^{\text{in}}$ est égale à l'union $\check{\mathcal{L}}_X \cup (\check{f}_X)_*^{-1}(\gamma^s \setminus \mathcal{L}_X)$. Comme la lamination $\check{\mathcal{L}}_X$ est remplissante sur $\check{P} \setminus \mathcal{A}_*$, alors la lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ sur $\check{Q}^{\text{in}} \setminus \mathcal{A}'_*$ est une lamination qui contient une lamination remplissante, et le premier item suit. La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ sur $C'^{\text{out}} = V_e^{\text{out}}$ coïncide avec l'union $\gamma^u \cup (f_e)_*(\varphi_* \check{\mathcal{L}}_X \setminus \gamma^s)$. Comme la lamination $\check{\mathcal{L}}_X$ est remplissante, il en est de même pour l'image par $f_e \circ \varphi$, donc la lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ est remplissante sur V_e^{out}. La lamination $\check{\mathcal{L}}_Y$ sur le complémentaire de γ^u est topologiquement équivalente à la lamination $\check{\mathcal{L}}$ sur le complémentaire de $\varphi_*^{-1}\gamma^s$. On rappelle que l'on a choisi φ de sorte que $\varphi_*^{-1}\gamma^s$ soit inclus dans l'intérieur de l'anneau $\check{B}$ défini précédemment, bordé par deux feuilles compactes de $\check{\mathcal{L}}_X$ et sans feuilles compactes de $\check{\mathcal{L}}_X$ sur l'intérieur (figure 10.7). En notant $\check{B}' = f_e(\check{B})$, le dernier item suit. □

Pour finir, soit (Q, Y) le bloc de construction associé au bloc intermédiaire $(\check{Q}, \check{Y})$ par le lemme 9.1.8. Notons que les orbites périodiques de Y contenues dans Q sont les mêmes que les orbites périodiques de X contenues dans P (via le plongement de (P, X) dans (Q, Y). En effet, il suffit de voir sur les blocs intermédiaires associés que les feuilles compactes qui bordent les anneaux $\mathcal{A}'_*$ et les feuilles compactes qui bordent les anneaux $\mathcal{A}_*$ dans $\partial\check{P}$ sont issues des séparatrices des même orbites périodiques par construction du recollement. On rappelle que ces séparatrices correspondent à une unique orbite périodique dans le bloc intermédiaire, et cette orbite est une orbite périodique contenue dans le bord du bloc de construction associé (voir figure 9.3 et lemme 9.1.5). Il y a une correspondance bijective entre les paires de feuilles compactes bordant $\mathcal{A}_*$ dans le bloc intermédiaire, et les orbites périodiques dans le bord du bloc de construction (remarque 9.1.7).

L'item 1 de la proposition 10.2.1 se déduit du fait que la chirurgie effectuée pour passer de (P, X) à (Q, Y) n'ajoute ni n'enlève de composantes de bord. Topologiquement, on a recollé un tore plein le long d'un anneau dans la composante T de ∂P, ce qui donne une composante T' homéomorphe à T, et on a laissé les autres composantes intactes.

On rappelle que le lemme 9.1.8, item 2 donne un difféomorphisme entre $\check{Q}^{\text{in}} \setminus \mathcal{A}'_*$ et $\overline{Q}^{\text{in}}$

qui envoie la lamination $\mathcal{L}_X^s$ sur la lamination $\check{\mathcal{L}}_X^s$ et un difféomorphisme entre $\check{Q}^{\text{out}} \setminus \mathcal{A}'_*$ et $\overline{Q}^{\text{out}}$ qui envoie la lamination $\mathcal{L}_X^u$ sur la lamination $\check{\mathcal{L}}_X^u$. Les laminations sont topologiquement équivalentes sur ces domaines. L'anneau $\check{B}'$ est donc isotope à un anneau B' dans le bord de sortie Q^{out}, bordé par deux feuilles compactes de la lamination $\mathcal{L}_Y$ et contenant une unique feuille compacte en son intérieur. Soit T' est la composante connexe de ∂P qui contient B', on choisit la première feuille compacte de $\mathcal{L}_Y$ sur T' par la feuille compacte qui borde B' et qui correspond à la feuille γ' bordant B (par la correspondance donnée par les équivalences topologiques et les isotopies pour passer de B à B'). On note σ_Y le type combinatoire associé. Alors d'après le fait 10.2.5 et l'équivalence topologique des laminations, σ_Y est un type combinatoire sur $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ qui coïncide avec σ sur $\{0, \dots, n-1\}$. On ne sait pas a priori si on a $\sigma_Y(n) = (*, \uparrow, *)$ ou $\sigma_Y(n) = (*, \downarrow, *)$, mais quitte à remplacer le recollement partiel $\varphi : C^{\text{out}} \to V_e^{\text{in}}$ dans la preuve par $\tau \circ \varphi$, où τ est un difféomorphisme de V_e^{in} qui fixe γ^s, renverse son l'orientation γ^s et préserve l'orientation globale, alors la valeur de $\sigma_Y(n)$ coïncide avec $\sigma'(n)$, où σ' est le type combinatoire prescrit dans la proposition 10.2.1. L'item 2 de la proposition 10.2.1 est satisfait

Montrons l'item 3. Par construction, $\check{P}$ et V_e sont plongés dans $\check{Q}$, et le bord $\partial\check{P}$ découpe $\check{Q}$ en une composante homéomorphe à $\check{P}$, donc à P, et une composante homéomorphe à V_e, donc à un fibré de Seifert. De plus, on sait que la fibre régulière de V_e est homotope à la feuille γ^s de la lamination de bord de V_e, et γ^s est recollée sur une courbe (librement) homotope aux feuilles compactes de la lamination de $\check{\mathcal{L}}_X$ sur $\partial\check{P}$. Le bloc P est plongé dans $\check{P}$ et isotope à $\check{P}$ (lemme 9.1.4), et les feuilles compactes de la lamination de $\check{\mathcal{L}}_X$ sur $\partial\check{P}$ sont homotopes aux orbites périodiques de $\check{\mathcal{L}}$ contenu dans le bord de T d'après l'item 2, lemme 9.1.4. Pour finir, Q est isotope à $\check{Q}$, il suit que l'on peut plonger P dans Q et on note T'' le bord de P via ce plongement. Comme $\check{Q}^{\text{in}} = \check{P}^{\text{in}}$ et les laminations de bord coïncident le long des feuilles compactes sur le bord d'entrée, il suit que la classe d'homotopie libre des orbites périodiques de X contenues dans T'' coïncide avec la classe d'homotopie libre des orbites périodiques de Y contenues dans $T' \subset \partial Q$. Quitte à faire une petite isotopie T'' pour le rendre disjoint de T', il découpe dans Q une composante homéomorphe à P et un fibré de Seifert dont la fibre est homotope aux orbites périodiques de Y dans T'. □

Remarque 10.2.6. On retiendra de la preuve que le tore T'' donné par l'item 3 de la proposition 10.2.1 est isotope à un tore quasi-transverse à Y qui contient les même orbites périodiques que T' (mais n'est pas isotope à T').

10.3 Preuve de la proposition G

Démonstration de la proposition 10.0.7. On montre la proposition pour une collection Γ réduite à une unique orbite, la généralisation pour une collection étant immédiate. Soit donc γ une orbite périodique d'un champ de vecteurs Anosov transitif ou l'unique singularité d'un flot pseudo-Anosov transitif sur une 3-variété $\mathcal{M}$ orientable. Soit (P, Y) le bloc de construction obtenu par *Double-éclatement – Excision* sur l'orbite γ par la proposition 10.1.2. C'est un bloc connexe orientable, selle plein transitif, avec une unique composante de bord, et la lamination de bord est élémentaire cohérente, autrement dit elle n'admet aucune feuille compacte autre que les orbites périodiques, et les orbites périodiques orientées par le flot sont librement homotopes dans ∂P. Soit $2p$ le nombre d'orbites périodiques contenues dans ∂P. Alors on peut itérer la proposition 10.2.1 d'ajout de feuilles compactes pour chaque anneau de ∂P bordés par deux orbites périodiques et sans feuilles compactes à l'intérieur, et on obtient un bloc connexe orientable selle plein transitif (P', Y') tel que si $\mathcal{L}'$ désigne la lamination de bord, alors $\mathcal{L}'$ contient une collection $\mathcal{O}'_*$ de $2p$ orbites périodiques orientées de façon cohérente, et sur chaque composante

connexe de $\partial P' \setminus \mathcal{O}_*$ elle admet une unique feuille compacte. On requiert de plus que l'orientation dynamique de chacune de ces feuilles compactes est l'orientation inverse de celle des orbites périodiques.

Fait 10.3.1. *Il existe un difféomorphisme $\varphi : \partial P \to \partial P'$ qui envoie les orbites périodiques orientées de Y dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de Y' dans $\partial P'$ et le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}, et tel que $\varphi_* \mathcal{L}$ est fortement quasi-transverse à la lamination $\mathcal{L}'$ sur $\partial P'$.*

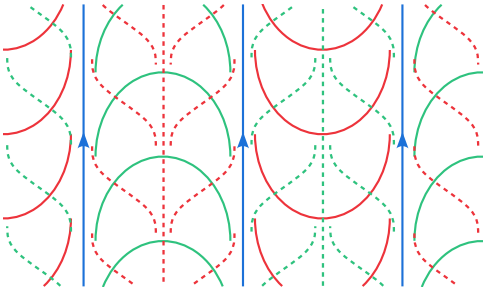


FIGURE 10.8 – Recollement fortement quasi-transverse des laminations $\mathcal{L}$ (trait plein) et $\mathcal{L}'$ (trait pointillé)

On renvoie à la figure 10.8. Le difféomorphisme φ induit un recollement quasi-transverse du bloc selle plein $(P \cup P', Y \cup Y')$. Quitte à faire une forte isotopie du triplet $(P \cup P', Y \cup Y', \varphi)$, on peut appliquer le théorème de recollement (théorème 1) et les champs de vecteurs Y et Y' induisent sur la variété fermée orientable $\mathcal{N} := (P \cup P')/\varphi$ un champ de vecteurs Anosov Y.

Le graphe $G(P \cup P', Y \cup Y', \varphi)$ est fortement connexe. En effet, il admet deux sommets qui sont le maximal invariant Λ de (P, Y) et le maximal invariant Λ' de (P', Y'). Les laminations instable et stable $\mathcal{W}^u_Y$ et $\mathcal{W}^s_Y$ de Λ intersectent toutes deux le bord ∂P, et de même les laminations instable et stable $\mathcal{W}^u_{Y'}$ et $\mathcal{W}^s_{Y'}$ de Λ' intersectent toutes deux le bord $\partial P'$. Comme les blocs sont pleins (autrement dit les laminations de bord sont remplissantes), les intersections $\varphi(\mathcal{W}^u_Y) \cap \mathcal{W}^s_{Y'}$ et $\varphi(\mathcal{W}^s_Y) \cap \mathcal{W}^u_{Y'}$ sont non vides, donc les sommets Λ et Λ' sont reliés par un cycle dans le graphe. Il s'ensuit que le flot d'Anosov Y est transitif d'après la proposition 6.4.2.

Les variétés P et P' sont toutes deux plongées dans $\mathcal{N}$, par un plongement qui réalise une équivalence orbitale entre les champs Y et Y' et la restriction du champ Y correspondante. En itérant la proposition 10.2.1, on peut montrer qu'il existe un tore T au champ Y' plongé dans P' qui découpe dans P' une sous-variété homéomorphe à P et une sous-variété qui admet une fibration de Seifert dont la fibre est homotope aux orbites périodiques contenues dans $\partial P'$. En effet, lors de la deuxième itération de la proposition 10.2.1, on recolle une pièce de Seifert (le bloc intermédiaire élémentaire (V_e, X_e)) sur une pièce de Seifert dont la fibre régulière est homotope aux orbites périodiques (c'est la sous-variété adjacente au bord donnée par l'item 3 de la proposition 10.2.1 appliquée une première fois), et d'après la construction on recolle la fibre sur la fibre. L'union forme une pièce de Seifert dont la fibre est homotope aux orbites périodiques contenues dans $\partial P'$, et on continue par récurrence. De plus le tore T est isotope à un tore quasi-transverse au champ de vecteurs Y' (remarque 10.2.6).

Soit T_1 la projection de ∂P dans $\mathcal{N}$, et T_2 la projection du tore $T \subset \operatorname{int} P'$ dans $\mathcal{N}$. Les tores T_1 et T_2 sont disjoints et isotopes à des tores quasi-transverses au champ Anosov Z donc

incompressibles ([Bar95b], [Bru93]). Ils découpent deux sous-variétés P_1 et P_2 toutes deux homéomorphes à P, et tel que le champ de vecteurs Z sur P_1 et sur P_2 est orbitalement équivalent à Y sur P, et une troisième composante P_3 qui est un fibré de Seifert, bordés par les tores T_1 et T_2. La fibre de la fibration de P_3 est homotope à une orbite périodique du champ de vecteurs, on en déduit que P_3 est un fibré de Seifert périodique. □

Remarque 10.3.2. Pour une généralisation a une collection d'orbites périodiques la preuve est identique, mais il faut justifier que l'on peut choisir un recollement qui renverse l'orientation. On construit un bloc de construction (P, X) par Double-éclatement – Excision sur une collection de n orbites périodiques, ce bloc a n composantes de bord. Soit (P', X') le bloc associé par la proposition (itérée) 10.2.1 où l'on a ajouté une feuille compacte entre chaque orbites périodiques de la lamination, avec une orientation dynamique inverse à celles des orbites périodiques. On peut apparier naturellement les composantes de bord de P et de P' et il existe un difféomorphisme de recollement $\varphi : \partial P \to \partial P'$ fortement quasi-transverse donné par la figure 10.8 qui réalise cet appariement. Remarquons que si P est munie d'une orientation et P' est munie de l'orientation inverse (celle qui coïncide avec l'inverse de l'orientation de P vue comme sous-variété de P'), alors le difféomorphisme φ renverse l'orientation (sur chaque composantes de bord). Il suit que la variété recollée est orientable.

10.4 Complémentaires de noeuds dans $\mathbb{S}^3$ en tant que pièces JSJ atoroïdales

Un *noeud* est un plongement du cercle $\mathbb{S}^1$ dans la sphère $\mathbb{S}^3$ de dimension 3. Un *lien* est un plongement de n copies du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$. On confond généralement un noeud (lien) et sa *classe d'isotopie* dans $\mathbb{S}^3$. On renvoie à [Ada04] pour une référence générale. La proposition 10.0.7 permet de réaliser le complémentaire d'orbites périodiques de flot d'Anosov ou de singularités pseudo-Anosov en tant que pièces JSJ de flot d'Anosov transitif. On peut dès lors se demander s'il existe des noeuds K dans $\mathbb{S}^3$ dont le complémentaire $\mathbb{S}^3 \setminus K$ est homéomorphe au complémentaire d'une orbite périodique γ d'un flot d'Anosov transitif ou de l'unique orbite singulière d'un flot pseudo-Anosov transitif. On s'intéresse à cette question pour les noeuds dont le complémentaire dans $\mathbb{S}^3$ est atoroïdal. De tels noeuds sont dits *hyperboliques*.

Le théorème de Gordon-Luecke affirme que la classe d'isotopie d'un noeud K est déterminée par son complémentaire dans $\mathbb{S}^3$, autrement dit si K et K' sont deux noeuds tel que les complémentaire $\mathbb{S}^3 \setminus K$ et $\mathbb{S}^3 \setminus K'$ sont homéomorphes, alors K et K' sont isotopes. La théorie des noeuds est une théorie très riche pour la topologie de basse dimension. Citons par exemple le théorème de Lickorish-Wallace qui dit que toute variété de dimension 3 fermée orientable connexe s'obtient par une *chirurgie de Dehn* sur un lien L dans $\mathbb{S}^3$ ([Ada04]).

Noeud de huit C'est un fait connu ([Thu97]) que le complémentaire du noeud de huit K_8 (figure 10.9) est atoroïdal, et homéomorphe au complémentaire de l'orbite périodique γ du flot de suspension de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$$

induite par le point fixe $(0, 0)$. Le champ de suspension X_A est un champ de vecteurs Anosov. Dans [FW80], les auteurs construisent un flot d'Anosov en recollant deux copies d'un bloc de construction homéomorphe au complémentaire du noeud de huit, obtenu par éclatement de l'orbite périodique γ de X_A. Ce flot d'Anosov a la particularité de ne pas être transitif. La

proposition 10.0.4 donne l'existence d'un flot d'Anosov transitif dont la décomposition JSJ est formée de deux copies de $\mathbb{S}^3 \setminus K_8$, adjointe par une pièce de Seifert périodique P. Notons que l'on peut décrire complètement la pièce de Seifert périodique : c'est le recollement de deux copies du bloc intermédiaire élémentaires (V_e, X_e) (définition 10.2.3).

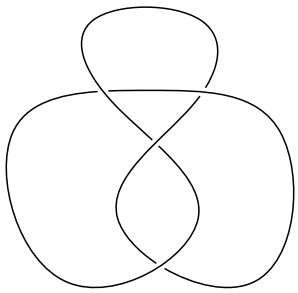


FIGURE 10.9 – Le noeud de huit

Noeuds hyperboliques fibrés Soit K un noeud dans $\mathbb{S}^3$. On dit qu'une surface compacte connexe orientable S plongée dans $\mathbb{S}^3$ est une *surface de Seifert* pour K si $\partial S = K$. On dit que K est un *noeud fibré* si le complémentaire $\mathbb{S}^3 \setminus K$ admet une fibration au dessus du cercle avec pour fibre une surface de Seifert S de K. La *monodromie* d'un noeud fibré est la monodromie $h : S \to S$ d'une telle fibration, bien définie à isotopie près relativement à ∂S. Un difféomorphisme $h : S \to S$ est dit *pseudo-Anosov* si il existe une paire de feuilletages avec singularités $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$, transverses l'un à l'autre, et munis d'une mesure transverse, qui sont uniformément contractés et dilatés respectivement par h. Les feuilletages ont un nombre fini de *singularités de type p-prong* avec $p \geq 3$ (figure 10.1). La suspension d'un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface fermée est un flot pseudo-Anosov au sens de la définition donnée au début du chapitre. Si la monodromie h d'un noeud fibré K admet un représentant pseudo-Anosov, alors le noeud K est un noeud hyperbolique et le complémentaire de K est homéomorphe au complémentaire d'une orbite périodique γ du flot de suspension pseudo-Anosov de $\hat{h} : \hat{S} \to \hat{S}$, où $\hat{h}$ est le difféomorphisme pseudo-Anosov induit par h sur la surface $\hat{S}$ obtenue par écrasement du bord de S ([Thu79]). Le bord de S induit un point fixe $\hat{p}$ de $\hat{h}$, et γ est la suspension de $\hat{p}$. Si h n'admet pas de singularités sur l'intérieur de S, alors γ est l'unique singularité du flot pseudo-Anosov de suspension de h, et il suit comme corollaire de la proposition 10.0.4

Corollaire 10.4.1. *Si K est un noeud fibré dont la monodromie est pseudo-Anosov et n'admet pas de singularité sur l'intérieur de la fibre, alors le complémentaire $\mathbb{S}^3 \setminus K$ est une pièce JSJ atoroïdale d'un flot d'Anosov transitif.*

On cherche une famille de noeuds qui satisfait les hypothèses du corollaire 10.4.1.

Plombage de la surface de Seifert du noeud de huit I. Agol m'a signalé la construction suivante, permettant d'exhiber une famille de noeuds satisfaisant les hypothèses du corollaire 10.4.1, qui sont les noeuds obtenus par *plombage de la surface de Seifert du noeud de huit*. Expliquons les idées brièvement.

Dans [GK90], les auteurs décrivent une construction par *plombage de bandes de Hopf* permettant de calculer les feuilletages invariants de la monodromie d'un noeud *2-bridge* hyperbolique fibré. Soit H_g la *bande de Hopf-gauche*, et H_d la *bande de Hopf-droite* décrites à la figure 10.10.

Le lien de Hopf-gauche ∂H_g est un noeud fibré de monodromie un twist de Dehn à droite D_d le long de l'âme, et le lien de Hopf-droit ∂H_d est un noeud fibré de monodromie un twist de Dehn à gauche D_g (figure 10.10). Le *plombage de Hopf* est la surface $S := H_1 \# H_2$ obtenue en recollant deux bandes de Hopf non liées dans $\mathbb{S}^3$ le long d'un voisinage rectangulaire d'un arc qui traverse la bande d'un bord à l'autre (figure 10.10), avec la convention d'orientation donnée par la figure. Si D_i est la monodromie de H_i, alors $\partial(H_1 \# H_2)$ est un noeud fibré de fibre $H_1 \# H_2$ et de monodromie le produit des D_i ([Sta78]). On considère $S := H_g^1 \# H_d^1 \# \ldots \# H_g^n \# H_d^n$ un

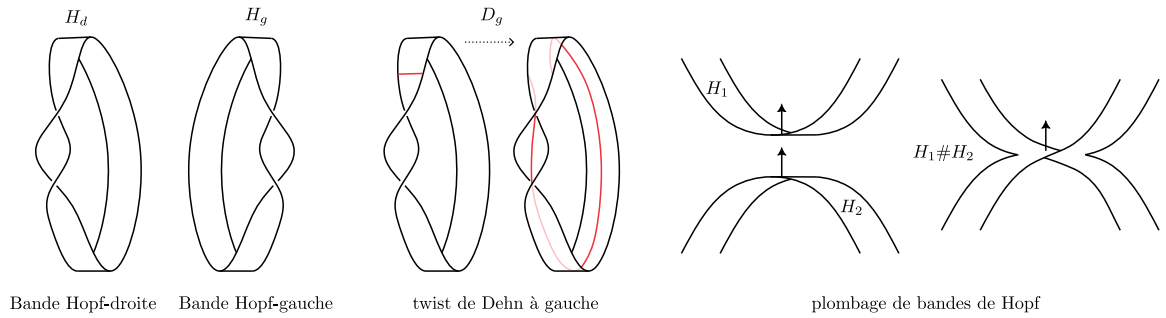


FIGURE 10.10

plombage de $2n$ bande de Hopf-gauche et Hopf-droite alternées, et on note $K := \partial S$.

Lemme 10.4.2. *K satisfait les hypothèses du corollaire 10.4.1, autrement dit K est un noeud fibré dont la monodromie est pseudo-Anosov et n'admet pas de singularité sur l'intérieur de la fibre.*

Idée de preuve. La surface S est une surface de genre n, et les âmes des bandes de Hopf sont les courbes dessinées à la figure 10.11. Par construction, le bord $K := \partial S$ est un noeud fibré de monodromie le produit $h = D_d^1 D_g^1 \ldots D_d^n D_g^n$ de $2n$ twists de Dehn alternés à droite et à gauche le long des âmes de chacune des bandes de Hopf. La surface S est un revêtement branché d'ordre 2 du disque D quotient de S par l'involution autour de l'axe horizontal de la figure 10.11, muni de $2n+1$ points marqués correspondant aux points de branchement. Les âmes des bandes de Hopf sont des arcs reliants les points marqués, et le difféomorphisme $h : S \to S$ induit un difféomorphisme $g : D \to D$, qui est un produit de "demi"-twists de Dehn le long des arcs, alternés à gauche et à droite, que l'on note α_g^i et α_d^i. Dans [GK90], les auteurs utilisent la méthode des

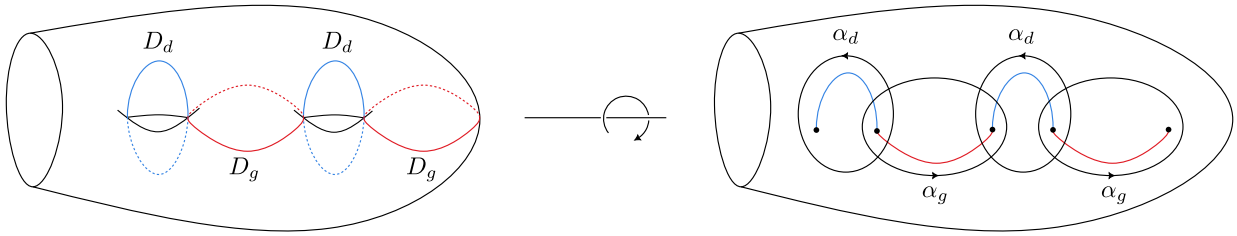


FIGURE 10.11 – Monodromie sur S et revêtement branché sur D

train-tracks invariants ([PH92]) pour construire un *train-track* τ invariant par g, obtenus à partir des sous *train-tracks* invariants τ_g et τ_d des demis-twists α_g^i et α_d^i. On les décrits à la figure 10.12. Le *train-track* invariant τ est un recollement des sous *train-tracks* τ_g et τ_d qui se chevauchent sur

des monogones (figure 10.12). Les auteurs montrent ([GK90, Proposition 4]) que g est isotope relativement à ∂D à un homéomorphisme pseudo-Anosov de $\hat{g}$ de D. De plus si on note λ^s la lamination stable invariante de $\hat{g}$ sur D, alors un n-gone de $D \setminus \tau$ correspond à un disque à n *cusp* de $D \setminus \lambda^s$. On observe alors que, dans la situation particulière d'un plombage alterné de bande de Hopf gauche et droite, ces composantes connexes sont des disques à un ou deux *cusp*, et il suit que le feuilletage stable avec singularités f^s de l'homéomorphisme pseudo-Anosov $\hat{g}$ qui prolonge la lamination λ^s n'admet que des singularités de type 1-prong. En passant au revêtement d'ordre

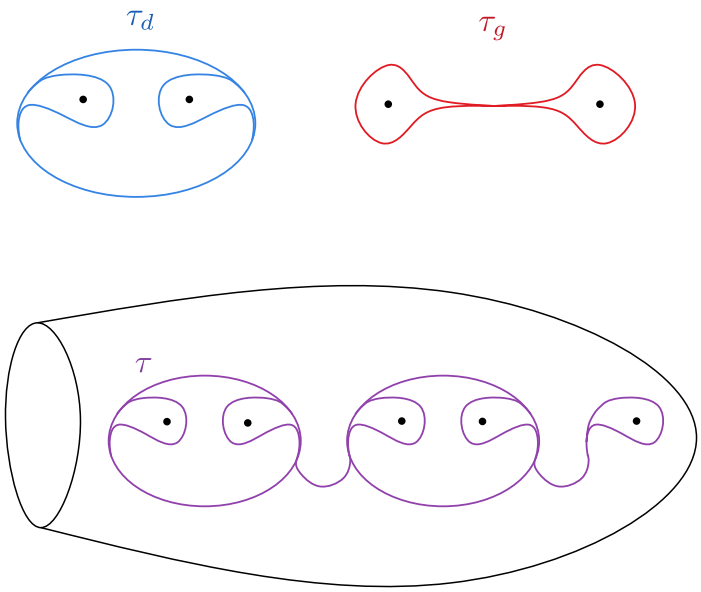


FIGURE 10.12

2 sur S, il suit que (quitte à faire une isotopie relativement à ∂S), la monodromie f du noeud K est pseudo-Anosov, et ses feuilletages n'ont pas de singularités sur l'intérieur S. □

Remarquons pour finir que la surface de Seifert du noeud de 8 est un plombage d'une bande de Hopf-droite et d'une bande de Hopf-gauche. On en déduit :

Proposition 10.4.3. *Soit $K = \partial(S_1 \# S_2 \# \ldots \# S_n)$ un plombage de n copies de la surface de Seifert du noeud de huit. Alors K est un noeud hyperbolique fibré et le complémentaire de K est une pièce JSJ atoroïdale d'un flot d'Anosov transitif.*

Chapitre 11

Recollement de pièces de flot d'Anosov alignables penchés

Dans ce chapitre, on montre un résultat général (proposition H) qui permet de recoller des pièces découpées le long de tores incompressibles dans un flot d'Anosov alignable penché sur une 3-variété toroïdale. Un champ de vecteurs Anosov sur une 3-variété $\mathcal{M}$ est dit *alignable* si l'espace des feuilles des relevés des feuilletages stable et instable au revêtement universel $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ ([Fen94]). On dit qu'il est *alignable penché* s'il n'est pas orbitalement équivalent à une suspension. On considérera toujours des champ de vecteurs Anosov sur des variétés orientables de dimension 3, et dont les feuilletages stables et instables sont transversalement orientables.

Proposition et Définition 11.0.1 (Bloc de flot d'Anosov alignable penché)**.** *Soit Z un champ de vecteurs Anosov alignable penché sur une variété $\mathcal{M}$ orientable de dimension 3, dont les feuilletages stables et instables sont transversalement orientables. Soit $\{T_1, \dots, T_n\}$ une collection finie de tores incompressibles plongés dans $\mathcal{M}$, deux à deux disjoints et non homotopes. Alors il existe une collection $\{T'_1, \dots, T'_n\}$ de tores isotopes à T_i, deux à deux disjoints, qui découpent dans $\mathcal{M}$ une sous-variété compacte à bord P tel que le couple $(P, X) := (P, Z_{|P})$ est un bloc de construction. Cette collection est unique à homotopie près le long des orbites du flot. On appelle un* bloc de flot d'Anosov alignable penché *toute union de composantes connexes de (P, X).*

Démonstration. D'après [Bar95b, Théorème A'] tout tore incompressible T_i plongé dans un flot d'Anosov alignable penché dans une variété orientable de dimension 3, et dont les feuilletages sont transversalement orientés est isotope à un tore quasi-transverse T'_i, unique à homotopie près le long des orbites périodiques. D'après [Bar95b, Théorème E], on peut choisir les tores T'_i deux à deux disjoints. Si P est une sous-variété compacte de $\mathcal{M}$ bordée par l'union des tores T'_i, il est clair que le couple $(P, X) := (P, Z_{|P})$ est un bloc de construction. □

On montre la proposition suivante.

Proposition 11.0.2 (Proposition H)**.** *Soit (P, X) et (P', X') deux blocs de flots d'Anosov alignables penchés (transitifs)*[1]*. On note P^{out} le bord de sortie de (P, X) et P'^{in} le bord d'entrée de (P', X'). On suppose qu'il existe un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ qui envoie les orbites périodiques orientées de X dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de X' dans $\partial P'$, le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}, et qui renverse l'orientation. Alors il existe un flot d'Anosov (transitif) Z sur une 3-variété fermée orientable $\mathcal{M}$ tel que :*

1. (P, X) et (P', X') ne sont pas découpés a priori dans le même flot d'Anosov

1) La variété $\mathcal{M}$ est homéomorphe à $(P \cup P')/\varphi$,

2) Le champ de vecteurs Z est orbitalement équivalent au champ de vecteurs X sur P et X' sur P' (où P et P' sont vus plongés dans $\mathcal{M}$).

On rappelle que les blocs de flot d'Anosov alignable penché sont orientables, et on dit qu'un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ renverse l'orientation si il existe une orientation de P et de P' tel que φ renverse l'orientation canonique induite sur le bord ∂P et $\partial P'$.

Remarque 11.0.3. Toute *pièce de flot géodésique* ou de revêtement fini de flot géodésique est un bloc de flot d'Anosov alignable penché. Ce résultat généralise alors les recollements de type Handel-Thurston ou Clay-Pinsky, et les généralisations par T. Barbot et S. Fenley et se débarrasse de la contrainte de *positivité* sur la classe d'isotopie du recollement. Il permet d'utiliser des blocs beaucoup plus généraux que des pièces de flot géodésique. Par exemple, tout flot d'Anosov obtenu par chirurgies de Dehn-Goodman-Fried *d'orientations cohérentes* sur une suspension ou un flot géodésique est alignable penché ([Fen94]). Il permet aussi de recoller des blocs (P, X) et (P', X') qui ne sont pas découpés dans le même flot d'Anosov.

Notons que l'énoncé ne nécessite aucune hypothèse sur l'image des laminations de bord. Un difféomorphisme $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ qui envoie les orbites périodiques orientées de X dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de X' dans $\partial P'$ et le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in} induit un recollement du bloc $(P \cup P', X \cup X')$ au sens de la définition 1.3.1. On dira par un léger abus de langage qu'un tel difféomorphisme est un recollement. On verra (lemme 11.0.6) que l'existence d'un tel recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ qui renverse l'orientation est équivalent à un critère simple d'appariement de composante de bord contenant le même nombre d'orbites périodiques, et qui satisfont un critère d'orientation compatible.

Lamination de bord sur les blocs de flots d'Anosov alignables penchés La preuve repose sur le lemme clé suivant.

Lemme 11.0.4. *Soit (P, X) un bloc de flot d'Anosov alignable penché. Alors (P, X) est un bloc selle plein, et la lamination de bord $\mathcal{L}$ de (P, X) est élémentaire alternée (définition 10.1.1), autrement dit les seules feuilles compactes de $\mathcal{L}$ sont les orbites périodiques de X, et deux orbites périodiques successives ont une orientation donnée par le flot qui est opposée.*

Démonstration. Soit Z un champ de vecteurs Anosov alignable penché sur une 3-variété $\mathcal{M}$ qui contient le bloc (P, X). Comme tout champ de vecteurs Anosov alignable, le champ Z est transitif ([Bar95a, Théorème 2.5]), et il suit que le maximal invariant de (P, X), qui est un ensemble compact invariant de Z, ne contient ni attracteur ni répulseur, autrement dit (P, X) est un bloc selle.

Soit T_i un tore quasi-transverse à Z plongé dans $\mathcal{M}$ correspondant à une composante connexe de ∂P, et on note $\mathcal{O}_*$ la collection des orbites périodiques de Z contenues dans T_i. T. Barbot montre dans [Bar95b] que T_i est un recollement *d'anneaux de Birkhoff élémentaires*, autrement dit les traces des feuilletages stable et instable $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ du champ d'Anosov sur l'adhérence de chacune des composantes connexes de $T_i \setminus \mathcal{O}_*$ sont des feuilletages de dimension 1 sans feuilles compactes autre que les orbites périodiques du bord et sans composantes de Reeb. Autrement dit, les traces des feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur T_i sont élémentaires alternés. Les orbites périodiques qui bordent une composante connexe de $T_i \setminus \mathcal{O}_*$ sont alors orientées de façon opposée par le flot de X, autrement dit elles sont librement homotope à l'inverse l'une de l'autre. La lamination de bord $\mathcal{L}$ du bloc (P, X) est une sous-lamination du feuilletage quasi-Morse-Smale induit par la paire $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ sur T_i, il suit que la lamination $\mathcal{L}$ est élémentaire alternée, et ainsi sur toute composante de bord T_i. Montrons que c'est une lamination remplissante. C'est un pré-feuilletage

sans feuille compacte autre que les orbites périodiques. Si elle n'est pas remplissante, il existe un anneau A dans, disons, P^{in} bordé par deux orbites périodiques tangentes $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$, et disjoint de la lamination $\mathcal{L}$ sur son intérieur (proposition 1.2.11). L'orbite périodique $\mathcal{O}_i$ admet donc une séparatrice instable, qui est disjointe de la lamination $\mathcal{W}^s$, et donc de Λ. En effet, une orbite de $\Lambda \cap (\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_i) \smallsetminus \mathcal{O}_i)$ dans un voisinage linéarisant de $\mathcal{O}_i$ a sa variété stable qui intersecte le bord de P sur l'anneau A, ce qui est une contradiction (figure 11.1). Il suit que (l'unique) séparatrice stable de $\mathcal{O}_i$ dans P est libre. Elle intersecte dont ∂P le long d'une feuille compacte de la lamination $\mathcal{L}^s$, qui n'est pas une orbite périodique. C'est une contradiction. □

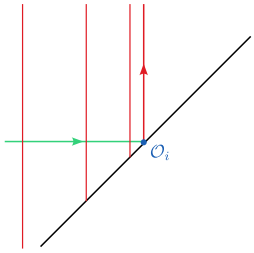


FIGURE 11.1 – Une orbite périodique $\mathcal{O}_i$ qui borde une composante de $\partial P \smallsetminus \mathcal{L}$ a une séparatrice libre.

Corollaire et Définition 11.0.5. *Soit (P, X) un bloc de flot d'Anosov alignable penché orienté. Cette orientation induit une orientation sur le bord ∂P, et on peut définir la gauche et la droite d'une orbite périodique orientée dans ∂P. Pour chaque composante de bord T_i de ∂P, on a*

1) *soit le côté (local) gauche de chaque orbite périodique est inclus dans P^{in},*

2) *soit le côté (local) gauche de chaque orbite périodique est inclus dans P^{out}.*

Dans le cas 1, on dit que T_i est une composante de bord Entrée-Sortie*, et dans le cas 2 on dit que c'est une* composante de bord Sortie-Entrée*.*

En effet, il suffit de rappeler que deux orbites périodiques successives de T_i ont une orientation opposée. Par conséquent, si $\mathcal{O}_j$ borde une composante connexe de P^{in} à sa gauche et une composante connexe de P^{out} à sa droite, alors l'orbite périodique suivante (pour un ordre cyclique quelconque) $\mathcal{O}_{j+1}$ borde une composante connexe de P^{out} à sa droite et une composante connexe de P^{in} à sa gauche.

Critère pour l'existence d'un recollement fortement quasi-transverse On montre le lemme suivant, qui donne un critère nécessaire et suffisant simple pour l'existence d'un recollement fortement quasi-transverse, et pour l'existence d'un recollement fortement quasi-transverse qui renverse l'orientation.

Lemme 11.0.6. *Soit (P, X) et (P', X') deux blocs de flots d'Anosov alignables penchés orientés. Alors*

1) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *Il existe un recollement $\varphi \colon \partial P \to \partial P'$ fortement quasi-transverse.*

   (b) *Il existe un recollement $\varphi \colon \partial P \to \partial P'$.*

(c) Il existe une appariement de composantes de bord de P et de P' contenant le même nombre d'orbites périodiques.

2) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ fortement quasi-transverse qui renverse l'orientation.

(b) Il existe un recollement $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ qui renverse l'orientation.

(c) Il existe une appariement de composantes de bord de P et de P' contenant le même nombre d'orbites périodiques, et qui sont soit toutes deux des composantes de bord Entrée-Sortie, soit toutes deux des composantes de bord Sortie-Entrée.

On rappelle qu'on dit que $\varphi\colon \partial P \to \partial P'$ est un recollement si φ envoie les orbites périodiques orientées de X dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de X' dans $\partial P'$ et le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}. La condition de l'item 1c signifie que P et P' ont le même nombre de composantes de bord, notées $T_1, \dots, T_n$ et $T'_1, \dots, T'_n$, et pour chaque $i = 1, \dots, n$ on demande qu'il y ait autant d'orbites périodiques de X dans T_i que d'orbites périodiques de X' dans T'_i. La condition de l'item 2c signifie que de plus, pour chaque $i = 1, \dots, n$ on demande que les composantes T_i et T'_i soit toutes deux des composantes Entrée-Sortie ou Sortie-Entrée.

Remarque 11.0.7.

- Si (P, X) et (P', X') ont chacun une unique composante de bord, alors la condition de l'item 1c est équivalente à l'item 2c, quitte à changer l'orientation d'un des deux blocs.
- Si $(P', X') = (P, X)$, il existe un appariement naturel des composantes de bord, et la condition de l'item 2c est toujours satisfaite. Par conséquent, si (P, X) est un bloc de flot d'Anosov alignable penché, il existe toujours un recollement fortement quasi-transverse de deux copies de (P, X) qui renverse l'orientation.

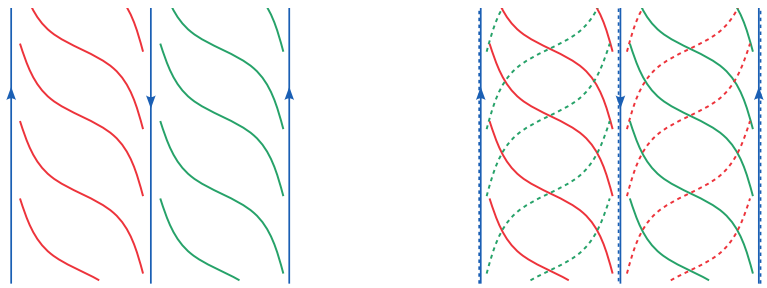


FIGURE 11.2 – Une lamination élémentaire alternée et une paire de laminations élémentaires alternées fortement quasi-transverses

Démonstration. On note P^{in} et P^{out} le bord d'entrée et de sortie de (P, X), $\mathcal{O}_*$ les orbites périodiques de X contenues dans ∂P, et $\mathcal{L}$ la lamination de bord de (P, X). De même, on note P'^{in} et P'^{out} le bord d'entrée et de sortie de (P', X'), $\mathcal{O}'_*$ les orbites périodiques de X' contenues dans $\partial P'$, et $\mathcal{L}'$ la lamination de bord de (P', X').

Montrons les équivalences de l'item 1. Il est clair que 1*a* $\Rightarrow$ 1*b* $\Rightarrow$ 1*c*. Réciproquement, supposons que l'on a un appariement de composantes de bord $\{(T_i, T'_i)\}$ de P et P' respectivement, contenant le même nombre d'orbites périodiques. D'après 11.0.4, la lamination $\mathcal{L}$ sur

T_i et $\mathcal{L}'$ sur T_i' sont élémentaires alternées, et d'après les conditions de l'appariement, elles ont le même nombre de feuilles marquées. Deux telles laminations se recollent de façon fortement quasi-transverse (figure 11.2), et on a pour chaque $i = 1, \dots, n$ l'existence d'un difféomorphisme $f_i \colon T_i \to T_i'$ qui envoie les orbites périodiques orientées sur les orbites périodiques orientées, le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}, et la lamination $\mathcal{L}$ sur une lamination fortement quasi-transverse à $\mathcal{L}'$. Le produit $\varphi \colon \partial P \to \partial P'$ défini donc un recollement fortement quasi-transverse de blocs de construction.

Les équivalences de l'item 2 découlent des équivalences précédentes et du fait suivant. Soit T_i et T_i' deux composantes de bord de ∂P et $\partial P'$ respectivement.

Fait 11.0.8. *Soit un difféomorphisme $f_i \colon T_i \to T_i'$ qui envoie les orbites périodiques orientées de X sur les orbites périodiques orientées de X', et le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}. Alors f_i renverse l'orientation si et seulement si T_i et T_i' sont soit toutes deux des composantes de bord Entrée-Sortie, soit toutes deux des composantes de bord Sortie-Entrée.*

Démonstration. Le difféomorphisme f_i envoie une orbite périodique orientée $\mathcal{O}$ de X dans T_i sur une orbite périodique orientée $\mathcal{O}'$ de X' dans T_i'. Supposons que T_i est une composante de bord Entrée-Sortie, autrement dit le côté gauche de $\mathcal{O}$ est inclus dans P^{in}. Alors f_i renverse l'orientation si et seulement si f_i envoie le côté gauche de $\mathcal{O}$ sur le côté droit de $\mathcal{O}'$, si et seulement si le côté droit de $\mathcal{O}'$ est inclus dans P'^{out}, si et seulement si T_i' est une composante de bord Entrée-Sortie. □

Ceci termine la preuve du lemme 11.0.6. □

Preuve de la proposition H On aura besoin du lemme général suivant.

Lemme 11.0.9. *Soit (P, X) un bloc de construction et φ un recollement fortement quasi-transverse de (P, X). Soit T une composante de bord qui contient un nombre non nul d'orbites périodiques de X. Alors pour tout twist de Dehn $\tau \colon T \to T$ le long des orbites périodiques, il existe un recollement fortement quasi-transverse isotope à $\varphi \circ \tau$.*

Démonstration. On renvoie à la fin de la preuve de la proposition 2.1.10, qui montre que l'on peut choisir le twist de Dehn τ dans un support bien choisir pour que $\varphi \circ \tau$ soit encore un recollement fortement quasi-transverse. Rappelons brièvement l'idée. Notons $\mathcal{L}$ la lamination de bord et $\mathcal{O}_*$ la collection d'orbite périodiques contenues dans T. Il suffit de choisir le support de τ dans un anneau compact de $T \setminus \mathcal{O}_*$ pour que la composée soit encore un recollement de bloc, autrement dit envoie les orbites périodiques orientées sur les orbites périodiques orientées et le bord de sortie sur le bord d'entrée. On choisit ensuite un petit voisinage $\mathcal{V}$ d'une orbite périodique $\mathcal{O} \in \mathcal{O}_*$, dans lequel l'holonomie de la lamination $\mathcal{L}$ le long d'une transversale de $\mathcal{O}$ est contractante sur P^{out} et dilatante sur P^{in}, et l'holonomie de la lamination $\varphi_*^{-1}\mathcal{L}$ est dilatante sur P^{in} et contractante sur P^{out}. Suivant le signe du twist de Dehn, il suffit de choisir le support de τ dans un anneau compact inclus soit dans $P^{\text{in}} \cap \mathcal{V}$, soit dans $P^{\text{out}} \cap \mathcal{V}$, de sorte que $\tau_*(\varphi_*^{-1}\mathcal{L})$ soit (fortement) transverse à $\mathcal{L}$. □

Montrons la proposition 11.0.2.

Démonstration de la proposition 11.0.2. Soit (P, X) et (P', X') deux blocs de flot d'Anosov alignables penchés et $\varphi \colon : \partial P \to \partial P'$ un difféomorphisme qui renverse l'orientation, envoie les orbites périodiques orientées de X dans ∂P sur les orbites périodiques orientées de X' dans $\partial P'$ et le bord de sortie P^{out} sur le bord d'entrée P'^{in}. Il suit du lemme 11.0.6, item 2 qu'il existe un recollement fortement quasi-transverse $\psi \colon \partial P \to \partial P'$ qui renverse l'orientation. Le recollement

ψ défini le même appariement de composantes de bord que φ. Soit T_i et T_i' deux composantes de bord de ∂P et $\partial P'$ appariées par φ et ψ. Comme $\varphi(\mathcal{O}_*) = \psi(\mathcal{O}_*) = \mathcal{O}_*$, il suit que la classe d'isotopie de φ et ψ diffèrent d'un twist de Dehn $\tau\colon T_i \to T_i$ le long des orbites périodiques $\mathcal{O}_*$, autrement dit tel que $\psi \circ \tau$ et φ sont isotopes. D'après le lemme 11.0.9, $\psi \circ \tau$ est isotope à un recollement fortement quasi-transverse $\psi'\colon \partial P \to \partial P'$, qui est alors isotope à φ.

On considère le triplet $(P \cup P', X \cup X', \psi')$. Le bloc $(P \cup P', X \cup X')$ est un bloc selle plein orientable d'après le lemme 11.0.4, et ψ' est un recollement fortement quasi-transverse qui renverse l'orientation. Quitte à faire une forte isotopie de triplet, on peut appliquer le théorème de recollement 1 et les champs X et X' induisent sur la variété fermée orientable $\mathcal{M} := P \cup P'/\psi'$ un champ de vecteurs Z qui est Anosov. Il satisfait la proposition 11.0.2 par construction. On vérifie aisément avec le critère de la proposition 6.4.2 que si les blocs (P, X) et (P', X') sont tout deux transitifs, le champ Z ainsi obtenu est transitif. $\square$

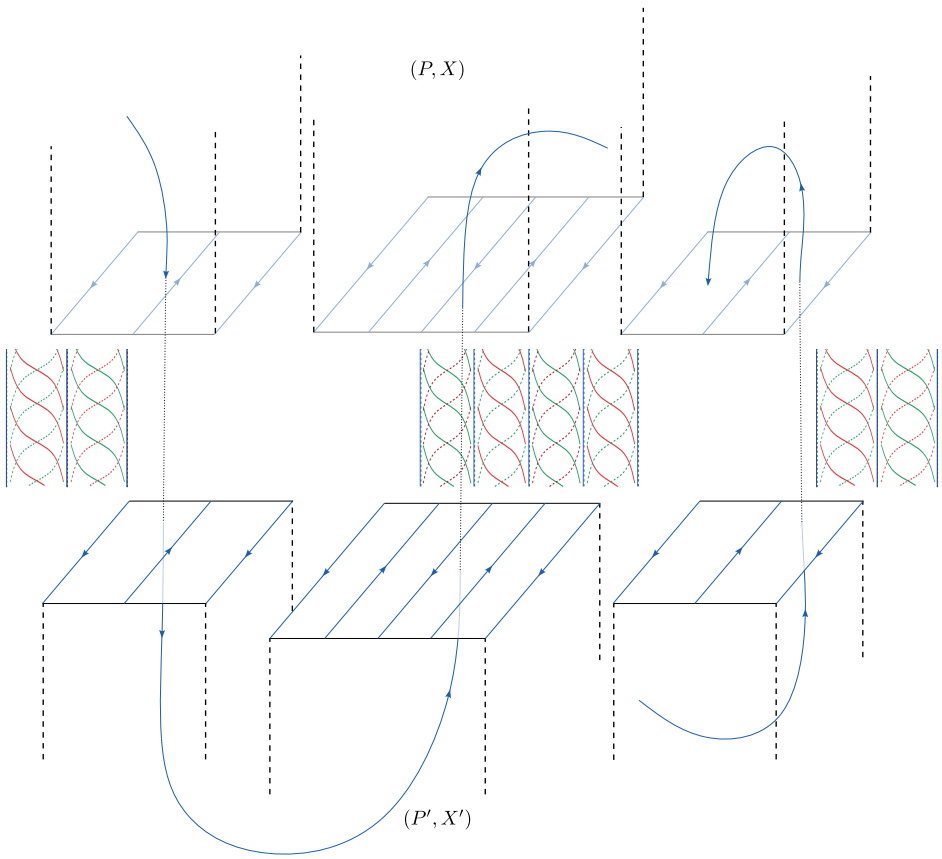


FIGURE 11.3 – Recollement de deux blocs de flot d'Anosov alignables penchés

Bibliographie

[Ada04] Colin C. Adams. *The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots.* Providence, RI : American Mathematical Society, revised reprint of the 1994 original edition, 2004.

[Ano62] D. V. Anosov. Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Sov. Math., Dokl.*, 3 :1068–1070, 1962.

[Ano63] D. V. Anosov. Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Sov. Math., Dokl.*, 4 :1153–1156, 1963.

[Ano67] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. Proc. Steklov Inst. Math. 90, 235 p. (1967)., 1967.

[AS67] D. V. Anosov and Ya. G. Sinaĭ. Some smooth ergodic systems. With an appendix by G. A. Margulis. *Usp. Mat. Nauk*, 22(5(137)) :107–172, 1967.

[AT22] Ian Agol and Chi Cheuk Tsang. Dynamics of veering triangulations : infinitesimal components of their flow graphs and applications, 2022.

[Bar92] Thierry Barbot. *Géométrie transverse des flots d'Anosov.* PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, 1992. Thèse de doctorat dirigée par Ghys, Étienne Sciences. Mathématiques Lyon 1 1992.

[Bar95a] Thierry Barbot. Characterization of Anosov flows in dimension 3 by their weak foliations. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 15(2) :247–270, 1995.

[Bar95b] Thierry Barbot. Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'anosov. *Commentarii mathematici Helvetici*, 70(1) :113–160, 1995.

[Bar96] Thierry Barbot. Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen. *Ann. Inst. Fourier*, 46(5) :1451–1517, 1996.

[Bar98] Thierry Barbot. Generalizations of the Bonatti-Langevin example of Anosov flow and their classification up to topological equivalence. *Commun. Anal. Geom.*, 6(4) :749–798, 1998.

[Bar01] Thierry Barbot. Plane affine geometry and Anosov flows. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 34(6) :871–889, 2001.

[Bar05] Thierry Barbot. *De l'hyperbolique au globalement hyperbolique.* Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard - Lyon I, November 2005.

[BB02] F. Béguin and C. Bonatti. Flots de Smale en dimension 3 : présentations finies de voisinages invariants d'ensembles selles. *Topology*, 41(1) :119–162, 2002.

[BBGH20] Thomas Barthelmé , Christian Bonatti, Andrey Gogolev, and Federico Rodriguez Hertz. Anomalous anosov flows revisited. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 122(1) :93–117, may 2020.

[BBV99] F. Béguin, C. Bonatti, and J. L. Vietez. Construction de flots de Smale en dimension 3. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 8(3) :369–410, 1999.

[BBY15] François Béguin, Christian Bonatti, and Bin Yu. A spectral-like decomposition for transitive anosov flows in dimension three, 2015.

[BBY17] François Béguin, Christian Bonatti, and Bin Yu. Building Anosov flows on 3-Manifolds. *Geometry & Topology*, 21(3) :1837–1930, 2017.

[BF13a] Thierry Barbot and Sergio Fenley. Pseudo-Anosov flows in toroidal manifolds. *Geometry & Topology Monographs*, 17(4) :1877–1954, 2013.

[BF13b] Thierry Barbot and Sérgio R. Fenley. Pseudo-Anosov flows in toroidal manifolds. *Geom. Topol.*, 17(4) :1877–1954, 2013.

[BF14a] Thierry Barbot and Sergio Fenley. Classification and rigidity of totally periodic pseudo-Anosov flows in graph manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 35(06) :1681–1722, 2014.

[BF14b] Thomas Barthelmé and Sergio R. Fenley. Knot theory of $\mathbb{R}$-covered Anosov flows : homotopy versus isotopy of closed orbits. *J. Topol.*, 7(3) :677–696, 2014.

[BF15] Thierry Barbot and Sérgio R. Fenley. Classification and rigidity of totally periodic pseudo-Anosov flows in graph manifolds. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 35(6) :1681–1722, 2015.

[BF17] Thomas Barthelmé and Sérgio R. Fenley. Counting periodic orbits of Anosov flows in free homotopy classes. *Comment. Math. Helv.*, 92(4) :641–714, 2017.

[BF21] Thierry Barbot and Sérgio R. Fenley. Free Seifert pieces of pseudo-Anosov flows. *Geom. Topol.*, 25(3) :1331–1440, 2021.

[BF22] Thierry Barbot and Sérgio Fenley. Orbital equivalence classes of finite coverings of geodesic flows, 2022.

[BFM22] Thomas Barthelmé, Steven Frankel, and Kathryn Mann. Orbit equivalences of pseudo-anosov flows, 2022.

[BI20] Christian Bonatti and Ioannis Iakovoglou. Anosov flows on 3-manifolds : the surgeries and the foliations, 2020.

[BL94] Christian Bonatti and Rémi Langevin. Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 14(4) :633–643, 1994.

[BLJ98] C. Bonatti, R. Langevin, and E. Jeandenans. *Difféomorphismes de Smale des surfaces.* Société Mathématique de France, 1998.

[BM19] Jonathan Bowden and Kathryn Mann. c^0 stability of boundary actions and inequivalent anosov flows, 2019.

[BP21] Christian Bonatti and Tali Pinsky. Lorenz attractors and the modular surface. *Nonlinearity*, 34(6) :4315–4331, jun 2021.

[Bru93] Marco Brunella. Separating the basic sets of a nontransitive anosov flow. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 25(5) :487–490, 1993.

[BY19] Francois Beguin and Bin Yu. A uniqueness theorem for transitive anosov flows obtained by gluing hyperbolic plugs, 2019.

[Cal07] Danny Calegari. *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Oxford Math. Monogr. Oxford : Oxford University Press, 2007.

[CD03] Danny Calegari and Nathan M. Dunfield. Laminations and groups of homeomorphisms of the circle. *Invent. Math.*, 152(1) :149–204, 2003.

[CP20] Adam Clay and Tali Pinsky. Graph manifolds that admit arbitrarily many anosov flows, 2020.

[Fen94] Sérgio R. Fenley. Anosov flows in 3-manifolds. *Ann. Math. (2)*, 139(1) :79–115, 1994.

[Fen98] Sérgio R. Fenley. The structure of branching in Anosov flows of 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 73(2) :259–297, 1998.

[Fen03] Sérgio R. Fenley. Pseudo-Anosov flows and incompressible tori. *Geom. Dedicata*, 99 :61–102, 2003.

[Fen07] Sérgio R. Fenley. Laminar free hyperbolic 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82(2) :247–321, 2007.

[Fen12] Sérgio Fenley. Ideal boundaries of pseudo-anosov flows and uniform convergence groups with connections and applications to large scale geometry. *Geometry & Topology*, 16(1) :1–110, jan 2012.

[FH13] Patrick Foulon and Boris Hasselblatt. Contact Anosov flows on hyperbolic 3-manifolds. *Geom. Topol.*, 17(2) :1225–1252, 2013.

[FH19] Todd Fisher and Boris Hasselblatt. *Hyperbolic flows*. Zur. Lect. Adv. Math. Berlin : European Mathematical Society (EMS), 2019.

[Fri83] David Fried. Transitive anosov flows and pseudo-anosov maps. *Topology*, 22(3) :299–303, 1983.

[FW80] John Franks and Bob Williams. Anomalous Anosov flows. In *Global theory of dynamical systems*, pages 158–174. Springer, 1980.

[GHS97] R.W. Ghrist, P.J. Holmes, and M.C. Sullivan. *Knots and Links in 3-Dimensional Flows*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[Ghy84] Etienne Ghys. Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercle. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 4 :67–80, 1984.

[Ghy07] Étienne Ghys. Knots and dynamics. In *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006. Volume I : Plenary lectures and ceremonies*, pages 247–277. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007.

[GK90] David Gabai and William H. Kazez. Pseudo-anosov maps and surgery on fibred 2-bridge knots. *Topology and its Applications*, 37(1) :93–100, 1990.

[Goo83] Sue Goodman. Dehn surgery on Anosov flows. Geometric dynamics, Proc. int. Symp., Rio de Janeiro/Brasil 1981, Lect. Notes Math. 1007, 300-307 (1983)., 1983.

[Had98] Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 :27–74, 1898.

[Hem04] J. Hempel. *3-manifolds*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub, 2004.

[HP69] Morris W. Hirsch and Charles C. Pugh. Stable manifolds for hyperbolic sets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(1) :149 – 152, 1969.

[HT80] Michael Handel and William P. Thurston. Anosov flows on new 3-Manifolds. *Inventiones mathematicae*, 59(2) :95–103, Jun 1980.

[Iak22] Ioannis Iakovoglou. A new combinatorial invariant caracterizing anosov flows on 3-manifolds, 2022.

[Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1979.

[JS78] William Jaco and Peter B. Shalen. A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3- manifolds. Algebr. geom. Topol., Stanford/Calif. 1976, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 32, Part 2, 71-84 (1978)., 1978.

[Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Prog. Math.* Boston, MA : Birkhäuser, 2001.

[KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.

[Mil83] John W. Milnor. Hyperbolic geometry : The first 150 years. The mathematical heritage of Henri Poincare, Proc. Symp. Pure Math. 39, Part 1, Bloomington/Indiana 1980, 25-40 (1983)., 1983.

[Mor21] H. M. Morse. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Trans. Am. Math. Soc.*, 22 :84–100, 1921.

[Mor24] H. M. Morse. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Am. Math. Soc.*, 26 :25–60, 1924.

[Nov65] S. P. Novikov. Topology of foliations. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 14 :268–304, 1965.

[Ota96] Jean-Pierre Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, volume 235 of *Astérisque*. Paris : Société Mathématique de France, 1996.

[Pal78] Carlos Frederico Borges Palmeira. Open manifolds foliated by planes. *Annals of Mathematics*, pages 109–131, 1978.

[PH92] R. C. Penner and J. L. Harer. *Combinatorics of train tracks*, volume 125 of *Ann. Math. Stud.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 1992.

[Pla81] J. F. Plante. Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of verjovsky. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-23(2) :359–362, 1981.

[PT72] J. F. Plante and W. P. Thurston. Anosov flows and the fundamental group. *Topology*, 11 :147–150, 1972.

[RSS03] Rachel Roberts, J. Shareshian, and M. Stein. Infinitely many hyperbolic 3-manifolds which contain no Reebless foliation. *J. Am. Math. Soc.*, 16(3) :639–679, 2003.

[Sha20] Mario Shannon. *Dehn surgeries and smooth structures on 3-dimensional transitive Anosov flows.* PhD thesis, Institut Mathématiques de Bourgogne Franche-Comté, 2020. Thèse de doctorat dirigée par Bonatti, Christian.

[Shu87] Michael Shub. Global stability of dynamical systems. With the collab. of Albert Fathi and Remi Langevin. Transl. from the French by Joseph Christy. New York etc. : Springer-Verlag. XII, 150 p. DM 74.00 (1987)., 1987.

[Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6) :747 – 817, 1967.

[Sta78] John R. Stallings. Constructions of fibred knots and links. Algebr. geom. Topol., Stanford/Calif. 1976, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 32, Part 2, 55-60 (1978)., 1978.

[Thu79] William P Thurston. *The geometry and topology of 3-Manifolds.* Princeton University Princeton, NJ, 1979.

[Thu83] William P. Thurston. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. The mathematical heritage of Henri Poincaré, Proc. Symp. Pure Math. 39, Part 1, Bloomington/Indiana 1980, 87-111 (1983)., 1983.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1. Ed. by Silvio Levy*, volume 35 of *Princeton Math. Ser.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 1997.

[Tom70] Per Tomter. Anosov flows on infra-homogeneous spaces. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 299–327, 1970.

[Ver74] Alberto Verjovsky. Codimension one Anosov flows. *Bol. Soc. Mat. Mex., II. Ser.*, 19 :49–77, 1974.