



HAL
open science

Méthodes de dichotomie spectrales d'une matrice par rapport à certaines figures.

Mouhamadou Dosso

► **To cite this version:**

Mouhamadou Dosso. Méthodes de dichotomie spectrales d'une matrice par rapport à certaines figures.. Mathématiques [math]. Université Felix Houphouet-Boigny de Cocody-Abidjan, 2023. Français. NNT: . tel-04090751

HAL Id: tel-04090751

<https://theses.hal.science/tel-04090751>

Submitted on 6 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° 2677/2023

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
UNION - DISCIPLINE - TRAVAIL

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY

UFR Mathématiques et Informatique
**Laboratoire de Mathématiques
et Applications**



Année académique
2022-2023

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ FÉLIX HOUPHOUËT- BOIGNY

pour obtenir le Grade de Docteur

Mention : Mathématiques Appliquées

Spécialité : EDP, Analyse Numérique et Optimisation

par

Seydou TRAORE

TITRE DE LA THÈSE :

**METHODES DE DICHOTOMIE SPECTRALE D'UNE
MATRICE PAR RAPPORT A CERTAINES FIGURES**

Soutenue publiquement le 28 Mars 2023

devant le jury composé de :

Président	: M. ADOU Kablan Jérôme	Professeur Titulaire, UFHB, Côte d'Ivoire
Directeur	: M. DOSSO Mouhamadou	Maître de conférences, UFHB, Côte d'Ivoire
Rapporteur	: M. Miloud SADKANE	Professeur Titulaire, UBO de Brest, France.
Rapporteur	: M. KOUA Brou Jean-Claude	Professeur Titulaire, UFHB, Côte d'Ivoire
Examineur	: M. OKOU A KPETIHI Sahoua Hypolithe	Maître de conférences, UFHB, Côte d'Ivoire.



Dédicace

Je dédie cette thèse à :
mon cher père qui m'a inculqué le goût du travail et la détermination pour surmonter
les épreuves,
ma regretée mère pour son amour,
ma tendre épouse pour son affection, sa patience et son soutien sans faille,
mes frères et soeurs pour leurs encouragements,
mes biens aimés enfants pour leur amour.

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier l'ensemble des enseignants chercheurs du laboratoire de Mathématiques et Applications de m'avoir accueilli en tant que doctorant. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Dosso Mouhamadou, Maître de Conférences à l'UFR MATH-INFO de l'UFHB, mon Directeur de thèse, de m'avoir proposé ce sujet et y consacré son précieux temps pour son suivi. Je voudrais louer autant ses qualités pédagogiques, qu'humaines qui m'ont été d'un grand apport dans mes recherches.

Je remercie le Professeur ADOU Kablan Jérôme, Directeur de l'UFR MATH-INFO, qui malgré ses occupations multiples, a accepté de présider ce jury.

Je remercie les deux rapporteurs, les Professeurs Miloud SADKANE et KOUA Brou Jean Claude, pour le temps consacré à l'étude de ce rapport et les remarques pertinentes qui m'ont permis d'améliorer le contenu de cette thèse.

Je suis très honoré par la présence dans ce jury du Docteur OKOU A KPETIHI Sahoua Hypolithe, Maître de Conférences à l'UFR MATH-INFO de l'UHFB.

Je tiens également à remercier le Professeur Yoro GOZO de l'université Nanguy Abrogoua, Monsieur KONE Souleymane, Maître de Conférences à l'UFR SSMT, Monsieur TOURE Ibrahim, Maître de Conférences à l'UFR-MI, UFHB, Monsieur COULIBALY Namory, Maître de conférences à l'Université de San-pedro et le Docteur KONE Bakary de l'UFR-MI, UFHB, pour leurs conseils avisés.

J'adresse des remerciements particuliers à mon Père TRAORE Amadou pour ses encouragements et sa foi à mon travail et à ma femme TRAORE Manmia pour sa compréhension et sa patience.

A mes frères, les Docteurs BAMBA Klanan et Geoffroy Kouakou KONAN, les doctorants Jules ALLANI, TRAORE Siaka, sachez que les nombreuses heures d'échanges sur ces choses complexes que sont les mathématiques m'ont aidé à faire avancer mon analyse. Soyez-en remercié.

Je profite de cette occasion pour remercier mes oncles, L'Honorable Docteur Famoussa COULIBALY et Docteur Lassina COULIBALY, mes frères TRAORE Ousmane et TRAORE Cheick, ma nièce CAMARA Niton ainsi que tous les membres de ma famille et mes proches pour leur soutien.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Généralités sur des méthodes de dichotomies spectrales d'une matrice par rapport à certaines figures	3
1.1 Introduction	3
1.2 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à un cercle	4
1.2.1 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane . .	6
1.2.2 Méthode de dichotomie proposée par Dosso	8
1.2.3 Méthode de dichotomie proposée par Sadkane et Touhami . .	9
1.3 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'ellipse	12
1.3.1 Méthode de dichotomie proposée par Malyshev et Sadkane . .	12
1.3.2 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane . .	16
1.4 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'axe imaginaire	19
1.4.1 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane . .	20
1.4.2 Méthode de dichotomie proposée par Sadkane et Touhami . .	21
1.5 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à la parabole	26
1.5.1 Méthode de dichotomie spectrale proposée par sadkane et malyshev	26
1.5.2 Méthode de dichotomie spectrale proposée par El Sayed et Sadkane	29
1.6 Conclusion	34
2 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport respectivement à un cercle et une ellipse non centrés à l'origine	35
2.1 Introduction	35
2.2 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à un cercle non centré à l'origine	35
2.3 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à une ellipse non centrée à l'origine	45
2.4 Conclusion	54

3	Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à une parabole d'équation générale $x = ay^2 + by + c$ $a \neq 0$.	57
3.1	Introduction	57
3.2	Cas de la parabole d'équation de type (3.1) avec le discriminant égal à 1	58
3.3	Cas de la parabole d'équation de type (3.1) avec le discriminant différent de 1	69
	3.3.1 Méthode de dichotomie spectrale avec le coefficient $b = 0$. . .	69
	3.3.2 Méthode de dichotomie spectrale avec le coefficient $b \neq 0$. . .	77
3.4	Expériences numériques	86
3.5	Conclusion	101
	Conclusion Générale et Perspectives	103
	Bibliographie	105

Liste des tableaux

1.1	Calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par les différentes méthodes pour $r = 3$	11
1.2	Calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par les différentes méthodes.	19
1.3	Calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par les différentes méthodes.	26
1.4	Tableau comparatif des valeurs de \mathbb{P}_0 et \mathbb{H} par différentes méthodes.	33
2.1	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b)	39
2.2	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b) pour $t = 2.9$	41
2.3	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b) pour $t = 3.5$	42
2.4	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs de (a, b, z_0)	51
2.5	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs du triplet (a, b, z_0)	52
2.6	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs du couple (a, b, z_0)	53
3.1	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichocP pour trois valeurs du paramètre p	87
3.2	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.1) pour différentes valeurs de p et b	87
3.3	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.2) pour différentes valeurs de p et d	88
3.4	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_d$ en appliquant l'algorithme DichoPdb (3.3) pour différentes valeurs de p , b and d	90
3.5	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichocP pour trois valeurs du paramètre p	91
3.6	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.1) pour différentes valeurs de p et b	91
3.7	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoPd (3.2) pour différentes valeurs de p et d	92
3.8	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPdb (3.3) pour différentes valeurs de p , b and d	93

3.9	Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoP pour trois valeurs de p	94
3.10	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ par application de l'algorithme DichoPb pour différentes valeurs de p et b	95
3.11	Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ par application de l'algorithme DichoPdb pour différentes valeurs de p , b et d	99

Table des figures

1.1	Partitions du spectre de la matrice K par le cercle $\mathcal{C}(O, 3)$ par les différentes méthodes.	11
1.2	Partitions du spectre de la matrice K par l'ellipse Ξ_0 par les différentes méthodes.	19
1.3	Partitions du spectre de la matrice G par l'axe imaginaire par les différentes méthodes.	25
1.4	Partitions du spectre de la matrice K par la parabole Γ par les différentes méthodes.	33
2.1	Partition du spectre de la matrice W par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r	38
2.2	Partition du spectre de la matrice $X(t)$ par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r pour $t = 2.9$	40
2.3	Partition du spectre de la matrice $X(t)$ par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r pour $t = 3.5$	42
2.4	Partition du spectre de $X(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(r, b) \in \{(1, 2 + i), (1.5, -1 + i), (1.3, 0.2i), (3, 0.5 - 0.5i)\}$	43
2.5	Partition du spectre du faisceau matriciel $zB - A$ par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r	44
2.6	Partition du spectre de la matrice W par l'ellipse décentrée de centre Ω d'affixe z_0 et de paramètres a et b	51
2.7	Partition du spectre de la matrice X par l'ellipse décentrée de centre Γ d'affixe z_0 et de paramètres (a, b) pour $t = 2.9$	52
2.8	Partition du spectre de la matrice X par l'ellipse décentrée de centre Ω d'affixe z_0 et de paramètres (a, b) pour $t = 3.5$	53
2.9	Partition des valeurs propres de $X(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(r, b) \in \{(1, 2 + i), (1.5, -1 + i), (1.3, 0.2i), (3, 0.5 - 0.5i)\}$	54
3.1	Partition du spectre de la matrice W par la parabole $2p(\frac{p}{2} - x) = y^2$	87
3.2	Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$	88
3.3	Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(d - x) = y^2$	89

3.4	Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(d-x) = (y - pb)^2$	89
3.5	Partition du spectre de la matrice A par la parabole $2p(\frac{p}{2} - x) = y^2$	90
3.6	Partition du spectre de la matrice A par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$	91
3.7	Partition de la matrice A par la parabole d'équation $2p(d-x) = y^2$	92
3.8	Partition du spectre de la matrice A par la parabole d'équation $2p(d-x) = (y - pb)^2$	93
3.9	Partition de la matrice $W(t)$ pour $t = 3.5$ par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = y^2$	94
3.10	Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ pour $p \in \{0.5, 1, 2, 4\}$	95
3.11	Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 6$ par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$	96
3.12	Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, b) \in \{(0.5, 2), (1, -2), (2, 0), (4, 3)\}$	96
3.13	Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 2\pi$ par la parabole d'équation $2p(d-x) = y^2$	97
3.14	Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, d) \in \{(0.5, 0.5), (2, 1), (0.2, 2), (0.2, 7)\}$	98
3.15	Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 2.8$ par la parabole d'équation $2p(d-x) = (y - pb)^2$	99
3.16	Partition des valeurs propres de la matrice $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, d, b) \in \{(0.5, 0.5, 2), (2, 1, -2), (0.2, 2, 0), (0.2, 7, 3)\}$	100

Notations

$\mathbb{R}^{n \times n}$: Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} .
γ	: Contour fermé.
\mathbb{P}	: Projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres d'une matrice par rapport à un contour γ .
\mathbb{P}_0	: Projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres d'une matrice se trouvant à l'intérieur d'un contour fermé.
\mathbb{P}_∞	: Projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres d'une matrice se trouvant à l'extérieur d'un contour fermé.
\mathcal{P}_-	: Projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres de parties réelles négatives d'une matrice.
\mathcal{P}_+	: Projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres de parties réelles positives d'une matrice.
\mathbb{H}	: Matrice Hermitienne définie positive dont la norme est un indicateur de confiance du projecteur \mathbb{P} .
$\ \cdot \ $: Norme spectrale.
$tr(A)$: Trace de la matrice A .
$\kappa(A)$: Conditionnement de la matrice A ($\kappa(A) = \ A\ \cdot \ A^{-1}\ $).
$\mathcal{C}(O, r)$: Cercle de centre O et de rayon $r > 0$.
Γ	: Parabole d'équation $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$.
Ξ_0	: Ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a \geq b > 0$.
$\mathcal{C}(\Omega, r)$: Cercle de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de rayon $r > 0$.
Ξ_{z_0}	: Ellipse de centre $z_0 \neq 0$ d'équation $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.
$\Gamma(a, b, c)$: Parabole d'équation générale $x = ay^2 + by + c$ avec $a \neq 0$.

Introduction Générale

La stabilité au sens de Lyapunov est un concept en théorie des systèmes dynamiques qui permet de caractériser la réponse d'un système à des perturbations ou à des variations dans les conditions initiales.

Les méthodes de dichotomie spectrale introduites par S.K. Godunov dans [14], sont des méthodes numériques utilisées pour étudier cette stabilité (au sens de Lyapunov) de certains systèmes d'équations différentielles.

Elles permettent de diviser le spectre d'une matrice en deux parties disjointes, appelées les parties stable et instable, qui caractérisent le comportement asymptotique des solutions des systèmes différentiels associés. La dichotomie spectrale est ainsi un outil important pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, mais elle trouve également des applications dans de nombreux domaines, tels que la physique, la biologie, l'économie, la finance, etc.

Les méthodes de dichotomie spectrale appliquées à une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n > 1$) et un contour γ orienté positivement, consistent à déterminer s'il existe des valeurs propres de la matrice A sur ou dans un voisinage de ce contour. S'il n'y a pas de telles valeurs propres, alors elles calculent itérativement le projecteur \mathbb{P} , et donc les sous-espaces invariants correspondant aux parties du spectre de la matrice à l'intérieur et à l'extérieur du contour γ [17]. Pour cela, les méthodes de dichotomie spectrale réalisent (voir [24]) :

- une partition du plan complexe en deux parties à l'aide du contour γ ,
- une évaluation des paramètres de qualité de la dichotomie pour le contour γ .
- un calcul des sous-espaces invariants associés aux parties du spectre à l'intérieur et à l'extérieur du contour γ , à condition que le paramètre de dichotomie correspondant ne soit pas trop grand.
- un calcul des sous-espaces invariants associés aux valeurs qui se trouvent sur, à l'intérieur ou à l'extérieur de certains contours (par exemple, cercle et/ou axe imaginaire).

Plusieurs auteurs ont eu à travailler sur ces méthodes. Dans [4], Bulgakov et Godunov ont appliqué la dichotomie spectrale au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon r ; les calculs du projecteur spectral et du critère de dichotomie ont été améliorés par Dosso, Godunov, Malyshev et Nechepurenko dans [10, 15, 22, 23, 24, 27]. Les méthodes de dichotomie spectrale ont été généralisées aux cas où le contour est une ellipse, une parabole ou un polygone par Godunov, Sadkane et Malyshev dans [17, 18, 25]. Ceci a permis de générer de nouveaux algorithmes par Sadkane et Touhami dans [29, 30].

Cependant, tous ces travaux de recherche ont été réalisés sur des contours fermés centrés à l'origine du plan complexe et/ou symétriques à l'axe des abscisses. Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous envisageons de généraliser ces méthodes de dichotomie spectrale à des contours non centrés à l'origine et/ou non symétriques à l'axe des abscisses. De manière spécifique, notre étude porte sur le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de rayon $r > 0$, l'ellipse Ξ_{z_0} d'équation

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1, \quad a \geq b > 0 \quad (1)$$

de centre le point d'affixe $z_0 \neq 0$ et sur les paraboles d'équation générale du type

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0. \quad (2)$$

Cette thèse est structurée en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons un résumé de quelques méthodes de base utiles pour la compréhension des autres chapitres. Notamment, il s'agit de :

- trois méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$,
- deux méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à une ellipse Ξ_o centrée à l'origine,
- deux méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'axe imaginaire,
- et deux méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à la parabole Γ d'équation $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$.

Dans le chapitre 2, nous proposons une méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de rayon $r > 0$; puis une deuxième méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'ellipse Ξ_{z_0} de centre $z_0 \neq 0$. Pour cela, nous utilisons les algorithmes développés dans [10] et dans [29]. Nous avons effectué plusieurs exemples numériques sur des matrices et des fonctions matricielles pour valider ces nouvelles méthodes. Le chapitre 3 est consacré à des méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'équation générale de la parabole en s'inspirant des travaux de Malyshev et Sadkane dans [25]. Plusieurs illustrations numériques ont été réalisées en vue de confirmer les méthodes proposées.

GÉNÉRALITÉS SUR DES MÉTHODES DE DICHOTOMIES SPECTRALES D'UNE MATRICE PAR RAPPORT À CERTAINES FIGURES

1.1 Introduction

Les méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice ou d'un faisceau matriciel permettent de calculer le projecteur sur un sous-espace invariant associé aux valeurs propres à l'intérieur ou à l'extérieur d'un contour fermé. Ce projecteur spectral, est selon [5], défini par

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - A)^{-1} dz \quad (1.1)$$

où γ est un contour fermé. Son calcul est accompagné par celui de la matrice Hermitienne

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - A)^{-*} (zI - A)^{-1} |dz| \quad (1.2)$$

définie positive dont la norme est appelée critère de dichotomie du projecteur \mathbb{P} [13, 27]. Ce critère représente un indicateur de confiance qui permet d'évaluer la qualité de la dichotomie. Plus elle est petite, meilleure est la qualité numérique du projecteur. Différentes études ont été faites lorsque ce contour est un cercle [4, 10, 17, 29], l'axe imaginaire [17, 29], une parabole ([17, 25, 31]) ou une ellipse ([17, 18]). L'objectif pour ces auteurs est de proposer des variantes plus économiques en termes d'opérations arithmétiques, des méthodes initiales. Dans ce chapitre, nous présentons un résumé de certaines méthodes de dichotomie déjà étudiées. En particulier, il s'agit des méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre l'origine et de rayon $r > 0$, de l'ellipse Ξ_0 centrée à l'origine, de l'axe imaginaire et de la parabole Γ d'équation $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$. Notons par \mathbb{P}_0 (respectivement \mathbb{P}_{∞}) le projecteur sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres intérieures (respectivement extérieures) à un contour fermé.

1.2 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à un cercle

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ n'ayant pas de valeurs propres sur le cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$.

le projecteur spectral sur le sous espace invariant correspondant aux valeurs propres intérieures au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ est la matrice \mathbb{P}_0 définie par :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(O, r)} (zI - A)^{-1} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} (zI - A)^{-1} dz \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta} I - A)^{-1} ire^{i\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{e^{-i\theta} A}{r} \right)^{-1} d\theta.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Le calcul du projecteur spectral \mathbb{P}_0 est accompagné de celui d'une matrice Hermitienne \mathbb{H} définie par :

$$\mathbb{H} = H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{e^{-i\theta} A}{r} \right)^{-*} H^{(0)} \left(I - \frac{e^{-i\theta} A}{r} \right)^{-1} d\theta, \tag{1.4}$$

où $H^{(0)} = (H^{(0)})^* > 0$ est une matrice hermitienne définie positive utilisée à des fins de mise à l'échelle.

Remarque 1.1 *la norme de \mathbb{H} appelée critère de la dichotomie est un indicateur qui permet de juger de la qualité numérique du projecteur \mathbb{P} . Plus petite est cette norme, meilleure est la qualité du projecteur.*

Le couple de matrices $(\mathbb{P}_0, \mathbb{H})$ est l'unique solution de l'équation de Lyapunov généralisée [13].

$$\begin{cases} r^2 \mathbb{H} - A^* \mathbb{H} A = \mathbb{P}_0^* \mathbb{H}^{(0)} \mathbb{P}_0 - (I - \mathbb{P}_0)^* \mathbb{H}^{(0)} (I - \mathbb{P}_0) \\ \mathbb{P}_0 A = A \mathbb{P}_0 \\ \mathbb{P}_0^2 = \mathbb{P}_0 \\ \mathbb{P}_0 \mathbb{H} = (\mathbb{P}_0 \mathbb{H})^* \end{cases} \tag{1.5}$$

De plus, pour tout vecteur x et pour tout entier k , on a les estimations [10, 28]

$$\begin{aligned}
 \|A^k \mathbb{P}_0 x\|_2 &\leq \sqrt{\|\mathbb{H}\|_2 \|\mathbb{H}^{-1}\|_2} \left(1 - \frac{1}{\|\mathbb{H}\|_2}\right)^{\frac{k}{2}} \|x\|_2 \\
 \|A^k x\|_2 &\geq \frac{1}{\sqrt{\|\mathbb{H}\|_2 \|\mathbb{H}^{-1}\|_2}} \left(1 + \frac{1}{\|\mathbb{H}\|_2}\right)^{\frac{k}{2}} \|(I - \mathbb{P}_0)x\|_2
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

qui montrent entre autre l'importance de la quantité $\|\mathbb{H}\|_2$ sur la décroissance asymptotique vers 0 (où la croissance vers $+\infty$) des puissances de A .

La fonction $\theta \rightarrow \left(I - \frac{e^{-i\theta}A}{r}\right)^{-1}$ étant continue, intégrable par morceaux et 2π -périodique, se décompose en série de Fourier comme suite :

$$\left(I - \frac{e^{-i\theta}A}{r}\right)^{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} Z_k e^{ik\theta} \quad (1.7)$$

où

$$Z_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{e^{-i\theta}A}{r}\right)^{-1} e^{-ik\theta} d\theta. \quad (1.8)$$

De (1.8) on montre que $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|Z_k\| < +\infty$ et $Z_0 = \mathbb{P}_0$. Des deux égalités (1.4) et (1.7), on obtient avec la formule de Parseval que :

$$\mathbb{H} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k^* H^{(0)} Z_k. \quad (1.9)$$

Le calcul des coefficients de Fourier Z_k permet de déterminer le projecteur \mathbb{P}_0 et la matrice \mathbb{H} . En effet, à partir de l'égalité (1.7), nous pouvons déduire que les matrices Z_k satisfont au système linéaire infini suivant [17] :

$$\begin{cases} Z_k - \frac{A}{r} Z_{k+1} = 0, \\ Z_0 - \frac{A}{r} Z_1 = I. \end{cases} \quad (1.10)$$

où les $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les inconnues.

Posons

$$Z_k^{(s)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Z_{k+ls}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

où s est un entier naturel donné. La suite $(Z_k^{(s)})$ est s -périodique, c'est-à-dire $Z_{k+s}^{(s)} = Z_k^{(s)}$, et satisfait la condition (voir [17])

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Z_k^{(s)} = Z_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ceci nous permet de trouver une approximation des coefficients de Fourier en résolvant, pour s grand, le système infini (1.10) et de (1.11). On en déduit le système linéaire cyclique et fini suivant :

$$\begin{cases} Z_0^{(s)} - \frac{A}{r} Z_1^{(s)} = I_n, \\ Z_k^{(s)} - \frac{A}{r} Z_{k+1}^{(s)} = 0, \quad 1 \leq k \leq s-1. \end{cases} \quad (1.12)$$

de solutions $Z_0^{(s)}, Z_1^{(s)}, \dots, Z_s^{(s)} \equiv Z_0^{(s)}$ quand s prend de grandes valeurs.

Ce système admet une unique solution si et seulement si la matrice A n'a pas de

valeur propre sur le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon r , ce qui est notre hypothèse de debut.

Maintenant on considère des entiers s grands de la forme $s = 2^{j+1}$. Différents auteurs ont proposé des méthodes pour le calcul de \mathbb{P}_0 et de \mathbb{H} . Nous allons donner des resumés de ces différentes méthodes.

1.2.1 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane

Cette méthode utilise deux théorèmes et la méthode de factorisation QR.

Theoreme 1.1 ([17]) Notons $B_0 = I$, $A_0 = -\frac{A}{r}$.
de plus

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow \infty} Z_0^{(2^{j+1})} &= \lim_{j \rightarrow \infty} Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} = \mathbb{P}_0 \\ \lim_{j \rightarrow \infty} Z_1^{(2^{j+1})} &= \mathbb{P}_0 - I, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} H_j &= \mathbb{H}\end{aligned}$$

Remarque 1.2 L'approximation du projecteur \mathbb{P}_0 exige seulement le calcul de $Z_0^{(2^{j+1})} = Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$ pour une grande valeur de j et celle de \mathbb{H} nécessite seulement le calcul des 4 coefficients $Z_1^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^j}^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$ et $Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$ pour une grande valeur de j .

Les calculs des matrices $Z_1^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^j}^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$ sont (voir [17]) donnés par le système ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 \\ A_j & 0 & B_j & 0 \\ 0 & B_j & 0 & A_j \\ 0 & 0 & A_0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{2^j}^{(2^{j+1})} \\ Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} \\ Z_1^{(2^{j+1})} \\ Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

où les matrices A_j et B_j sont construites de manière itérative à partir de B_0 et de A_0 , en utilisant la QR-factorisation (obtenue par les transformations de Householder) :

$$\begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 \\ A_{j-1} & 0 & B_{j-1} & 0 \\ 0 & B_{j-1} & 0 & A_{j-1} \end{pmatrix} = Q^{j-1} \begin{pmatrix} R_{11}^{(j-1)} & R_{12}^{(j-1)} & R_{13}^{(j-1)} & R_{14}^{(j-1)} \\ 0 & R_{22}^{(j-1)} & R_{23}^{(j-1)} & R_{24}^{(j-1)} \\ 0 & 0 & B_j & A_j \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

où Q^{j-1} est une matrice unitaire.

Theoreme 1.2 Soit

$$\begin{aligned}\Delta_j &= B_0 Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} + A_0 Z_1^{(2^{j+1})} \\ \nabla_j &= B_0 Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} + A_0 Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}\end{aligned}$$

puis

$$H_j = \Delta_j^* H_{j-1} \Delta_j + \nabla_j^* H_{j-1} \nabla_j$$

Les étapes importantes de la méthode proposée par Godunov et Sadkane sont résumées dans l'algorithme suivant :

Algorithme 1.1 (Dichotomie spectrale de la matrice A par rapport au cercle[17])

1. *Initialisation* : $B_0 = I$, $A_0 = -A$
 — Déterminer $Z_1^{(2)}$ et $Z_2^{(2)}$ comme solutions du système

$$\begin{pmatrix} B_0 & A_0 \\ A_0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^{(2)} \\ Z_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

- Calcul de $H_0 = (Z_1^{(2)}) * Z_1^{(2)} + (Z_2^{(2)}) * Z_2^{(2)}$
2. *Itération* : Calcul de $Z_1^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^j}^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})}$ et H_j
 Pour $j = 1, 2, \dots$

— Calculer par la méthode de factorisation QR

$$\begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 \\ A_{j-1} & 0 & B_{j-1} & 0 \\ 0 & B_{j-1} & 0 & A_{j-1} \end{pmatrix} = Q^{j-1} \begin{pmatrix} R_{11}^{(j-1)} & R_{12}^{(j-1)} & R_{13}^{(j-1)} & R_{14}^{(j-1)} \\ 0 & R_{22}^{(j-1)} & R_{23}^{(j-1)} & R_{24}^{(j-1)} \\ 0 & 0 & B_j & A_j \end{pmatrix}$$

— Déterminer $Z_1^{(2^{j+1})}$ et $Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})}$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} B_j & A_j \\ A_0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^{(2^{j+1})} \\ Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

— Déterminer $Z_{2^j}^{(2^{j+1})}$ et $Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})}$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} R_{11}^{(j-1)} & R_{12}^{(j-1)} \\ 0 & R_{22}^{(j-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{2^j}^{(2^{j+1})} \\ Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{13}^{(j-1)} & R_{14}^{(j-1)} \\ R_{23}^{(j-1)} & R_{22}^{(j-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^{(2^{j+1})} \\ Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})} \end{pmatrix}$$

— Calcule

$$\begin{aligned} \Delta_j &= B_0 Z_{2^j}^{(2^{j+1})} + A_0 Z_1^{(2^{j+1})} \\ \nabla_j &= B_0 Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})} + A_0 Z_{2^j+1}^{(2^{j+1})} \\ H_j &= \Delta_j^* H_{j-1} \Delta_j + \nabla_j^* H_{j-1} \nabla_j \end{aligned}$$

3. $\mathbb{P}_0 = Z_0^{(2^{j+1})}$; $\mathbb{H} = H_j$

Remarque 1.3 Dans le cas de la dichotomie spectrale du faisceau matriciel $\lambda B - A$ par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$ ($\det(\lambda B - A) \neq 0$), on pose $B_0 = B$ ($B \neq I_n$ et $A_0 = -\frac{A}{r}$) et on applique l'algorithme 1.1.

1.2.2 Méthode de dichotomie proposée par Dosso

Nous en donnons ici les grandes lignes. Soit pour $j = 0, 1 \dots$

$$K_{j+1} = A^{2^j} [I_n - A^{2^j}] [I_n - A^{2^{j+1}}]^{-1}, \quad (1.15)$$

$$L_{j+1} = [I_n - A^{2^j}] [I_n - A^{2^{j+1}}]^{-1} \quad (1.16)$$

Le théorème suivant permet de calculer les valeurs de K_{j+1} et de L_{j+1} .

Theoreme 1.3 *Pour $j = 0, 1, \dots$, on a*

$$\begin{pmatrix} B_j & A_j \\ A_j & B_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{j+1} \\ L_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

avec $A_j = -AZ_1^{2^j}$, $B_j = Z_{2^j}^{2^j}$

Le deuxième théorème ci-dessous nous permet alors de déterminer la relation entre $Z_k^{2^{j+1}}$ et $Z_k^{2^j}$.

Theoreme 1.4 *Pour $j = 0, 1, \dots$ et $k = 0, 1, \dots, 2^j$, on a*

$$Z_k^{2^{j+1}} = Z_k^{2^j} K_{j+1} \quad (1.18)$$

$$Z_{2^j+k}^{2^{j+1}} = Z_k^{2^j} L_{j+1} \quad (1.19)$$

$$H_{j+1} = K_{j+1}^* H_j K_{j+1} + L_{j+1}^* H_j L_{j+1} \quad (1.20)$$

Ce qui permet de proposer l'algorithme suivant :

Algorithme 1.2 (Dichotomie spectrale de la matrice A par rapport au cercle[10])

1. *Initialisation* : $B_0 = I$, $A_0 = -A$

— Déterminer K_1 et L_1 comme solutions de l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} A_0 & I_n \\ I_n & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$$

— Calcul de H_1

Soit $Z_1^{(2)} = K_1$, $Z_2^{(2)} = L_1$ et $H_1 = (Z_1^{(2)})^* Z_1^{(2)} + (Z_2^{(2)})^* Z_2^{(2)}$.

2. *Itération* : pour $j = 1, 2 \dots$

— Calculs de A_j et de B_j

$$A_j = A_0 Z_1^{2^j}, \quad B_j = Z_{2^j}^{(2^j)}$$

— Déterminer K_{j+1} et L_{j+1} comme solutions de l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} B_j & A_j \\ A_j & B_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{j+1} \\ L_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$$

— Calculs $Z_1^{(2^{j+1})}$, $Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})}$ et H_{j+1} avec

$$\begin{aligned} Z_1^{(2^{j+1})} &= Z_1^{(2^j)} K_{j+1} \\ Z_{2^{j+1}}^{(2^{j+1})} &= Z_{2^j}^{(2^j)} L_{j+1} \\ H_{j+1} &= K_{j+1}^* H_j K_{j+1} + L_{j+1}^* H_j L_{j+1} \end{aligned}$$

$$1. \mathbb{P}_0 = Z_0^{(2^{j+1})}; \quad \mathbb{H} = H_j$$

avec comme inconnues $Z_1^{2^j}, Z_2^{2^j}, Z_3^{2^j}, Z_4^{2^j}, \dots, Z_{2^j}^{2^j} \equiv Z_0^{2^j}$ pour $j \geq 1$.

Remarque 1.4 Dans le cas de la dichotomie spectrale du faisceau matriciel $\lambda B - A$ par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$ (avec $\det(\lambda B - A) \neq 0$), on pose $B_0 = B (B \neq I_n)$ et $A_0 = -\frac{A}{r}$ et on applique l'algorithme 1.2.

1.2.3 Méthode de dichotomie proposée par Sadkane et Touhami

La méthode utilisée est la récurrence.

En posant que $Z_1^{(2)} = \Delta_0$, $Z_2^{(2)} = \nabla_0$, le système (1.12) devient alors :

$$\begin{cases} B\Delta_0 - A\nabla_0 = I_n \\ B\nabla_0 - A\Delta_0 = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

dont les solutions sont déterminées par :

$$\begin{cases} (A + B)\Delta_0 = A(B - A)^{-1} \\ (A + B)\nabla_0 = B(B - A)^{-1} \end{cases} \quad (1.22)$$

Cette notion est généralisée selon le théorème suivant :

Theoreme 1.5 Soit

$$Z_1^2 = \Delta_0, \quad Z_2^{(2)} = \nabla_0$$

et pour $j = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} Z_k^{2^j} &= Z_k^{2^{j-1}} \Delta_{j-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{j-1}. \\ Z_{k+2^{j-1}}^{2^j} &= Z_{k+2^{j-1}}^{2^{j-1}} \nabla_{j-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{j-1}. \end{aligned}$$

et pour $j = 2, 3, \dots$

$$A_{j-1} + B_{j-1} = I_n \quad (1.23)$$

$$\Delta_{j-1} + \nabla_{j-1} = I_n \quad (1.24)$$

$$(2A_{j-1} - I_n)\Delta_{j-1} = A_{j-1} \quad (1.25)$$

avec

$$A_{j-1} = -AZ_1^{(2^{j-1})}, \quad I_n = -Z_1^{(2^{j-1})}$$

et

$$H_j = \Delta_{j-1}^* H_{j-1} \Delta_{j-1} + (I_n - \Delta_{j-1})^* H_{j-1} (I_n - \Delta_{j-1}).$$

L'algorithme suivant permet de calculer le projecteur \mathbb{P}_0 et le critère de dichotomie \mathbb{H} .

Algorithme 1.3 (Dichotomie spectrale de la matrice A par rapport au cercle[30])

1. Initialisation et première itération

$$H_0 = H^0, \quad B = I$$

— Déterminer les solutions X, Y des équations

$$X(I - A) = A, \quad Y(I - A) = I$$

— Déterminer les solutions Δ_0, ∇_0 des équations

$$(A + I)\Delta_0 = X, \quad (A + I)\nabla_0 = Y$$

— Calcul de $H_1, Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)}$:

$$H_1 = \Delta_0^* H_0 \Delta_0 + \nabla_0^* H_0 \nabla_0$$

$$Z_1^2 = \Delta_0, \quad Z_2^{(2)} = \nabla_0$$

2. Itérations pour $j = 2, 3 \dots$

— Faire

$$A_{j-1} = -AZ_1^{2^{j-1}}$$

$$(2A_{j-1} - I_n)\Delta_{j-1} = A_{j-1}$$

— Calculs de $H_j, Z_1^{(2^j)}, Z_{2^j}^{(2^j)}$:

$$H_j = \Delta_{j-1}^* H_{j-1} \Delta_{j-1} + (I - \Delta_{j-1})^* H_{j-1} (I - \Delta_{j-1})$$

$$Z_1^{(2^j)} = Z_1^{(2^{j-1})} \Delta_{j-1}, \quad Z_{2^j}^{(2^j)} = Z_{2^{j-1}}^{(2^{j-1})} (I_n - \Delta_{j-1})$$

fin pour

$$\mathbb{P}_0 = Z_{2^j}^{(2^j)}$$

$$\mathbb{H} = H_j.$$

Remarque 1.5 On généralise l'algorithme 1.3 au faisceau matriciel $\lambda B - A$ où $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\det(\lambda B - A) \neq 0$, en prenant $B \neq I$

1.3 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'ellipse

1.3.1 Méthode de dichotomie proposée par Malyshev et Sadkane

Soit $zB - A$ un faisceau matriciel régulier d'ordre n n'ayant pas de valeurs propres sur l'ellipse Ξ_0 d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.26)$$

Nous supposons dans ce paragraphe que $a \geq b > 0$. Considérons la transformation de type Joukowski $\Psi : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto z \in \mathbb{C}$ définie par la formule [20, 30]

$$z = \Psi(\lambda) = \frac{(a+b)\lambda^2 + (a-b)}{2\lambda} \quad (1.27)$$

Calculons l'image du cercle unité $\mathcal{C}(O, 1)$ par cette transformation. Soit $\lambda = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z = \Psi(\lambda) &= \frac{(a+b)\lambda^2 + (a-b)}{2\lambda} \\ &= \frac{(a+b)e^{2i\theta} + (a-b)}{2e^{i\theta}} \\ &= \frac{(a+b)e^{i\theta} + (a-b)e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(a+b)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (a-b)(\cos(\theta) - i\sin(\theta))] \\ &= a \cos(\theta) + ib \sin(\theta) \end{aligned}$$

Posons $z = x + iy$. Alors $x = a \cos(\theta)$ et $y = b \sin(\theta)$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{C}(O, 1) &\Leftrightarrow \lambda = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z \in \Xi_0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que Ψ est une bijection du cercle unité sur l'ellipse Ξ_0 . De la même manière, nous pouvons prouver que la bijection Ψ envoie l'extérieur du cercle sur l'extérieur de Ξ_0 et l'intérieur du cercle unité sur l'intérieur de l'ellipse Ξ_0 .

Considérons le faisceau quadratique défini comme suit :

$$\frac{a+b}{2}B\lambda^2 - A\lambda + \frac{a-b}{2}B. \quad (1.28)$$

Remarquons que

$$\frac{a+b}{2}B\lambda^2 - A\lambda + \frac{a-b}{2}B = \lambda(zB - A) \quad (1.29)$$

où $z = \Psi(\lambda)$ est définie dans (1.27). Cela montre la relation entre l'ensemble des valeurs propres d'un faisceau quadratique de matrices et l'ensemble des valeurs propres de la matrice originale $zB - A$. De l'égalité 1.29, on obtient

$$\sup_{|\lambda|=1} \left\| \left[\frac{a+b}{2}B\lambda^2 - A\lambda + \frac{a-b}{2}B \right]^{-1} \right\| = \sup_{z \in \Xi_0} \|(zB - A)^{-1}\|. \quad (1.30)$$

Considérons le faisceau matriciel de la forme $\mu\mathcal{B} - \mathcal{A}$ où

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}B & -A \\ 0 & \frac{a+b}{2}B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{2}B & 0 \\ A & -\frac{a-b}{2}B \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

On a

$$\begin{aligned} (\lambda^2\mathcal{B} - \mathcal{A}) \begin{bmatrix} \lambda x \\ x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2}\lambda^2 B + \frac{a-b}{2}B & -A\lambda^2 \\ -A & \frac{a+b}{2}\lambda^2 B + \frac{a-b}{2}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{a+b}{2}\lambda^2 + \frac{a-b}{2} \right) B\lambda x - A\lambda^2 x \\ -A\lambda x + \left(\frac{a+b}{2}B\lambda^2 + \frac{a-b}{2}B \right) x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{a+b}{2}\lambda^2 B + A\lambda + \frac{a-b}{2}B \right) \lambda x \\ \left(\frac{a+b}{2}\lambda^2 B - A\lambda + \frac{a-b}{2}B \right) x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\left(\frac{a+b}{2}B\lambda^2 - A\lambda + \frac{a-b}{2}B \right)x = 0$ implique $(\lambda^2\mathcal{B} - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} \lambda x \\ x \end{pmatrix} = 0$. De cette hypothèse des valeurs propres de $zB - A$, nous voyons que les valeurs propres du faisceau matriciel $\mu\mathcal{B} - \mathcal{A}$ ne peuvent pas être sur le cercle unité. Le problème de la vérification de l'absence des valeurs propres du faisceau matriciel $zB - A$ sur l'ellipse Ξ_0 est ainsi réduit au problème de dichotomie spectrale du faisceau matriciel $\mu\mathcal{B} - \mathcal{A}$ par rapport au cercle unité.

Dans le cas de la dichotomie spectrale d'un faisceau matriciel $zB - A$ par rapport à l'ellipse, la qualité de la dichotomie est caractérisée par le paramètre numérique :

$$\alpha = \sup_{z \in \Xi_0} \|(zB - A)^{-1}\|. \quad (1.32)$$

De manière similaire, la qualité de la dichotomie spectrale du faisceau matriciel $\mu\mathcal{B} - \mathcal{A}$ par rapport au cercle unité est caractérisée par le paramètre numérique :

$$\tilde{\alpha} = \sup_{|\mu|=1} \|(\mu B - A)^{-1}\|. \quad (1.33)$$

La proposition suivante donne une relation entre les deux quantités α et $\tilde{\alpha}$.

Proposition 1.1 *Les quantités α et $\tilde{\alpha}$ définies dans (1.32) et (1.33) sont égales :*

$$\alpha = \tilde{\alpha} \quad (1.34)$$

Preuve

Cette démonstration a été faite par Malyshev et sadkane dans [25]. Nous en rappelons les étapes les plus importantes.

De (1.29), on a

$$\frac{a+b}{2}B\lambda^2 - A\lambda + \frac{a-b}{2}B = \lambda(zB - A)$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{a+b}{2}B\lambda^2 + \frac{a-b}{2}B = \lambda zB$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 (\mu^2 \mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{a+b}{2}\mu^2 + \frac{a-b}{2}\right)B & -\mu^2 A \\ -A & \left(\frac{a+b}{2}\mu^2 + \frac{a-b}{2}\right)B \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} z\mu B & -A\mu^2 \\ -A & z\mu B \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{avec } z = \psi(\mu) \\
 &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zB & -A \\ -A & zB \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (zB - A)^{-1} + (zB + A)^{-1} & (zB - A)^{-1} - (zB + A)^{-1} \\ (zB - A)^{-1} - (zB + A)^{-1} & (zB - A)^{-1} + (zB + A)^{-1} \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_n}{\sqrt{2}} & -\frac{I_n}{\sqrt{2}} \\ \frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{I_n}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} (zB - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (zB + A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{I_n}{\sqrt{2}} \\ -\frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Considérons les projecteurs spectraux suivants :

- $\mathbb{P}_\infty \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice de projection sur le sous-espace invariant du faisceau matriciel $zB - A$ associé aux valeurs propres extérieures à l'ellipse Ξ_0 .
- $\mathcal{P}_\infty \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ la matrice de projection sur le sous-espace invariant de $\mu\mathcal{B} - \mathcal{A}$ associé aux valeurs propres extérieures au cercle unité.

La proposition suivante caractérise la relation entre \mathbb{P}_∞ et \mathcal{P}_∞

Proposition 1.2 *Notons la partition \mathcal{P}_∞ suivante :*

$$\mathcal{P}_\infty = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{P}}_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j \in 1, 2. \quad (1.35)$$

alors nous avons

$$\mathbb{P}_\infty = \tilde{\mathcal{P}}_{11} + \tilde{\mathcal{P}}_{22}. \quad (1.36)$$

Preuve

Pour la preuve, voir dans [25]. \square

Algorithme 1.4 .

- *Variables d'entrées : A et B tel que la matrice $zB - A$ n'ait pas de valeurs propres sur l'ellipse d'équation $\left(\frac{\Re(z)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z)}{b}\right)^2 = 1$. avec $a \geq b > 0$.*

- *Variables de sorties : \mathbb{P}_∞ et \mathbb{H} .*

\mathbb{P}_∞ étant le projecteur sur le sous-espace invariant de $zB - A$ correspondant aux valeurs propres à l'extérieur de l'ellipse et \mathbb{H} le critère de dichotomie.

1. Détermine $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{2}B & 0 \\ A & -\frac{a-b}{2}B \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}B & -A \\ 0 & \frac{a+b}{2}B \end{pmatrix}$

2. Appliquer l'Algorithme 1.3 à $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$

3. $\mathbb{P}_\infty = \tilde{\mathcal{P}}_{11} + \tilde{\mathcal{P}}_{22}$

1.3.2 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane

Considérons un faisceau matriciel $zB - A$ n'ayant pas de valeurs propres sur l'ellipse Ξ_0 d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (1.37)$$

où $a \geq b > 0$.

Posons $x = a \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= a \cos(\theta) + ib \sin(\theta) \\ &= a \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + ib \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{(a+b)e^{i\theta} + (a-b)e^{-i\theta}}{2} \end{aligned}$$

Le projecteur \mathbb{P}_0 sur le faisceau matriciel $zB - A$ est égal à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Xi_0} (zB - A)^{-1} B dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2} e^{i\theta} - \frac{a-b}{2} e^{-i\theta} \right) \left[\left(\frac{a+b}{2} e^{i\theta} + \frac{a-b}{2} e^{-i\theta} \right) B - A \right]^{-1} B d\theta\end{aligned}$$

le critère de dichotomie \mathbb{H} est définie alors par :

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{a+b}{2} e^{i\theta} + \frac{a-b}{2} e^{-i\theta} \right) B - A \right]^* \times \left[\left(\frac{a+b}{2} e^{i\theta} + \frac{a-b}{2} e^{-i\theta} \right) B - A \right]^{-1} d\theta$$

Considérons le projecteur sur le faisceau matriciel $(\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})$ associé aux valeurs propres situées à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1. Ce projecteur \mathcal{P} est défini par :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} d\phi \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} B & -A \\ 0 & \frac{a+b}{2} B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{2} B & 0 \\ A & -\frac{a-b}{2} B \end{pmatrix} \quad \text{voir([13])}$$

La matrice de dichotomie \mathcal{H} correspondant au projecteur \mathcal{P} est définie par :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})^{-*} (\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})^{-1} d\phi \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs du projecteur \mathbb{P}_0 et du critère de dichotomie \mathbb{H} sont définies par le théorème suivant :

Theoreme 1.6 [17]

$$\mathbb{P}_0 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} - I \tag{1.38}$$

$$\mathbb{H} = \mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_{22} \tag{1.39}$$

$$\|\mathbb{H}\| \leq \|\mathcal{H}\| \leq 2\|\mathbb{H}\| \tag{1.40}$$

$$\|\mathcal{H}_{12}\| \leq \|\mathbb{H}\| \tag{1.41}$$

Preuve

Voir dans [17] pour les détails. Nous en faisons un résumé.

$$\begin{aligned}(\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} e^{-i\phi} \right) B & -A \\ -e^{-i\phi} A & \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} e^{-i\phi} \right) B \end{pmatrix}^{-1} \\ &= e^{i\frac{\phi}{2}} \Theta \Omega \mathcal{M} \Omega^* \Theta^*\end{aligned}$$

où

$$\Theta = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} [(\frac{a+b}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} + \frac{a-b}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}})B - A]^{-1} & 0 \\ 0 & [(\frac{a+b}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} + \frac{a-b}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}})B + A]^{-1} \end{pmatrix}$$

Posons

$$\lambda(\phi) = \frac{a+b}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} + \frac{a-b}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}}$$

Sachant que

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{B} - e^{-i\phi}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}d\phi$$

alors après calculs, on obtient

$$\mathcal{P}_{11} = \frac{a+b}{8\pi} \int_0^{2\pi} [(\lambda(\phi)B - A)^{-1} - (\lambda(\phi)B + A)^{-1}]e^{i\frac{\phi}{2}}Bd\phi$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{22} &= \frac{a+b}{2} \int_0^{2\pi} [(\lambda(\phi)B - A)^{-1} - (\lambda(\phi)B + A)^{-1}]e^{i\frac{\phi}{2}}Bd\phi \\ &+ \frac{a+b}{2} \int_0^{2\pi} [(\lambda(\phi)B - A)^{-1} - (\lambda(\phi)B + A)^{-1}]e^{i\frac{\phi}{2}}Bd\phi \end{aligned}$$

□

Au vu de ce qui précède, l'algorithme de dichotomie spectrale de la matrice A par rapport à l'ellipse Ξ_0 est le suivant :

Algorithme 1.5 .

- *Variables d'entrées* : A tel que la matrice A n'ait pas de valeurs propres sur l'ellipse d'équation $\left(\frac{\Re(z)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z)}{b}\right)^2 = 1$, avec $a \geq b > 0$.
- *Variables de sorties* : \mathbb{P}_0 et \mathbb{H} .
 \mathbb{P}_0 étant le projecteur sur l'espace invariant droit de A correspondant aux valeurs propres à l'intérieur de l'ellipse et la norme de \mathbb{H} le critère de dichotomie.

1. Détermine $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{2}I_n & 0 \\ A & -\frac{a-b}{2}I_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2}I_n & -A \\ 0 & \frac{a+b}{2}I_n \end{pmatrix}$

2. Appliquer l'algorithme 1.1 à $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$

3. $\mathbb{P}_0 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} - I$

Exemple 1.2 *On considère la matrice K vue précédemment dans l'exemple 1.1.*

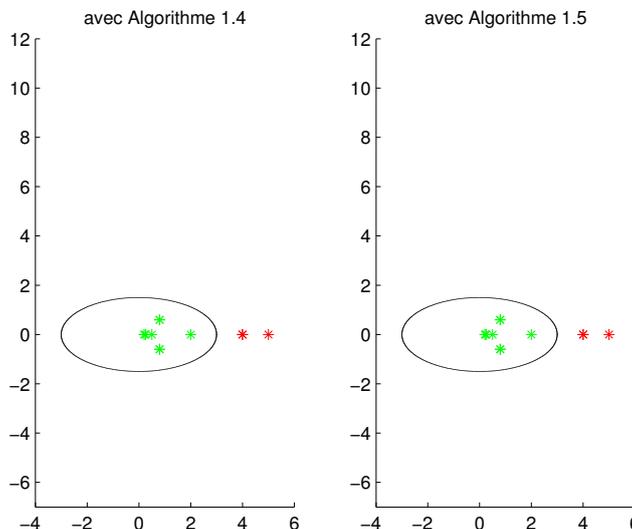


FIGURE 1.2 – Partitions du spectre de la matrice K par l'ellipse Ξ_0 par les différentes méthodes.

TABLE 1.2 – Calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par les différentes méthodes.

Algorithmes	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 W - W \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
Algo 1.4	9	1	$7.3444 \cdot 10^{-16}$	$2.0817 \cdot 10^{-16}$	0.5141
Algo 1.5	9	1	$7.3444 \cdot 10^{-16}$	$2.0817 \cdot 10^{-16}$	0.5141

Les différentes figures de FIGURE 1.2 issues des algorithmes 1.4 et 1.5 sont identiques ; de même, les valeurs $tr(\mathbb{P}_0)$, $\|\mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0 W - W \mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{H}\|$ du tableau 1.2 montrent l'efficacité des algorithmes du calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par ces deux méthodes.

1.4 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'axe imaginaire

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice n'ayant pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Le projecteur spectral \mathbb{P}_0 sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres de la matrice A , de valeurs réelles négatives est définie comme suit [13] :

$$\mathbb{P}_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI - A)^{-1} dz \quad (1.42)$$

$$= \frac{1}{2} I + \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (itI - A)^{-1} dt \quad (1.43)$$

La qualité de la dichotomie est donnée par la norme $\omega = \|\mathbb{H}\|$ de la matrice Hermitienne définie positive

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (itI - A)^* C (itI - A)^* dt$$

où la matrice $C = C^* \geq 0$ est utilisée pour initialiser.

Proposition 1.3 *Si la matrice A n'a pas de valeur propre imaginaire pure, alors le système matriciel*

$$A^* \mathbb{H} + \mathbb{H} = (I - \mathbb{P}_0^*) C (I - \mathbb{P}_0) - \mathbb{P}_0^* C \mathbb{P}_0 \quad (1.44)$$

$$\mathbb{P}_0 A = A \mathbb{P}_0, \quad \mathbb{P}_0^2 = \mathbb{P}_0 \quad (1.45)$$

est soluble par rapport à \mathbb{P}_0 et à \mathbb{H} .

1.4.1 Méthode de dichotomie proposée par Godunov et Sadkane

On pose $B = e^{\tau A}$ avec $\tau > 0$. La dichotomie spectrale par rapport à l'axe imaginaire se résume donc à une dichotomie spectrale par rapport au cercle unité. Cela induit que les valeurs propres λ de la matrice A et ν de B sont telles que $\nu = e^{\tau \lambda}$. Ainsi $\Re(\lambda) < 0$ si et seulement si $|\nu| < 1$. De plus, la transformation exponentielle ne transforme pas les sous espaces invariants. Considérons le projecteur \mathbb{P}_0 sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres sur le disque unité. La paire $(\mathbb{P}_0, \mathbb{H})$ (voir [13]) satisfait la condition suivante :

$$\mathbb{H} - B \times \mathbb{H} B = \mathbb{P}_0^* \mathbb{H}^0 \mathbb{P}_0 - (I - \mathbb{P}_0)^* \mathbb{H}^0 (I - \mathbb{P}_0),$$

$$\text{avec } \mathbb{H}^0 = \int_0^\tau e^{sA^*} C e^{sA} ds$$

L'algorithme du calcul du projecteur \mathbb{P}_0 et de la matrice \mathbb{H} est composé des étapes suivantes :

- (1) Calcul de $B = e^{\tau A}$.
- (2) Calcul de $\mathbb{H}^0 = \int_0^\tau e^{sA^*} C e^{sA} ds$.
- (3) Application de l'algorithme 1.1 à la matrice B avec $r = 1$;

Le calcul des deux premières étapes se fera de la manière suivante (voir [13]). Le nombre réel τ dans $e^{\tau A}$ peut être choisi égal à $\tau = \frac{1}{2\|A\|}$ de telle sorte que $\|\tau A\| = \frac{1}{2}$. Le calcul de la forme exponentielle $e^{\tau A}$ se fera avec les séries de Taylor. Pour calculer l'intégrale $\mathbb{H}^0 \equiv \mathbb{H}^0(\tau) = \int_0^\tau e^{sA^*} C e^{sA} ds$, nous notons que la dérivée de $\mathbb{H}^0(\tau)$ est une fonction de τ définie par :

$$\frac{d^j \mathbb{H}^0(\tau)}{d\tau^j} = e^{\tau A} C_{j-1} e^{\tau A}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.46)$$

où les matrices C_j sont obtenues par la récurrence suivante :
 $C_0 = C$ et $C_j = A^*C_{j-1} + C_{j-1}A$, $j = 1, 2, \dots$ puis

$$\mathbb{H}^0(\tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\tau^j}{j!} \frac{d^j H^0(0)}{d\tau^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{j+1}}{(j+1)!} C_j \quad (1.47)$$

Nous obtenons l'algorithme suivant :

Algorithme 1.6 [17]

1. Calcul de $B = e^\tau A$ avec la série de Taylor

- $\tau = \frac{1}{2\|A\|}$, $B_0 = I$, $\Omega_0 = I$.
- Pour $j = 1, 2, \dots$
 - $\Omega_j = \left(\frac{\tau}{j}\right)A\Omega_{j-1}$
 - $B_j = B_{j-1} + \Omega_j$
- finpour

2. Calcul de $\mathbb{H}^{(0)} = \int_0^\tau e^{sA^*} C e^{sA} ds :$

- $E_0 = \tau C$, $\mathbb{H}_0^{(0)} = E_0$.
- Pour $j = 1, 2, \dots$
 - $E_j = \frac{\tau}{j+1}(A^*E_{j-1} + E_{j-1}A$
 - $\mathbb{H}_j^{(0)} = \mathbb{H}_{j-1}^{(0)} + E_{j-1}$
- finpour

3. Application de l'Algorithme 1.1 à B , avec $\gamma = C_1$.

1.4.2 Méthode de dichotomie proposée par Sadkane et Touhami

Dans [30], Sadkane et Touhami proposent un autre algorithme utilisant la transformation de Cayley. Nous montrons qu'effectivement cette transformation réalise une bijection du cercle unité sur l'axe imaginaire et définissons une nouvelle proposition qui montre l'équivalence entre les paramètres de dichotomie sur le cercle unité et sur l'axe imaginaire.

Soit $\varphi : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, la transformation de Cayley définie par

$$\varphi(\lambda) = z = \frac{(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)} \quad (1.48)$$

Posons que : $z = x + iy$ Alors

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Re(\lambda) + i\Im(\lambda) + 1}{\Re(\lambda) + i\Im(\lambda) - 1} \\ &= \frac{[\Re(\lambda) + i\Im(\lambda) + 1][\Re(\lambda) - i\Im(\lambda) - 1]}{(\Re(\lambda) - 1)^2 + \Im(\lambda)^2} \\ &= \frac{\Re(\lambda)^2 - 1 + \Im(\lambda)^2 - 2i\Im(\lambda)}{(\Re(\lambda) - 1)^2 + \Im(\lambda)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$x = \frac{\Re(\lambda)^2 - 1 + \Im(\lambda)^2}{(\Re(\lambda) - 1)^2 + \Im(\lambda)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-2\Im(\lambda)}{(\Re(\lambda) - 1)^2 + \Im(\lambda)^2}$$

On montre que :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{C}(O, 1) &\Leftrightarrow |\lambda| = 1 \\ &\Leftrightarrow \Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est une bijection du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 vers l'axe imaginaire. De même,

$$\begin{aligned} |\lambda| < 1 &\Leftrightarrow \Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que φ associe l'intérieur du cercle unité au demi plan gauche et l'extérieur du cercle unité au demi plan droit.

Considérons le faisceau matriciel $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ où $\mathcal{B} = A - I_n$ et $\mathcal{A} = A + I_n$. Les valeurs propres z de A et λ vérifient la relation $z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$

La dichotomie spectrale de la matrice A par rapport à l'axe imaginaire se résume donc à celle du faisceau matriciel $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ par rapport au cercle unité.

D'après[1, 23, 24], la qualité de la dichotomie par rapport à l'axe imaginaire est caractérisée par le paramètre numérique.

$$\alpha = \sup_{\Re(z)=0} \|(zI_n - A)^{-1}\| \quad (1.49)$$

De même, la qualité de la dichotomie par rapport au cercle unité est caractérisée par le paramètre numérique.

$$\tilde{\alpha} = \sup_{|\lambda|=1} \|(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\|. \quad (1.50)$$

La proposition suivante caractérise les relations entre les deux paramètres précités.

Proposition 1.4 [30] :

Supposons que $\|A\| \leq 1$ et soit α et $\tilde{\alpha}$ les deux paramètres définis en (1.49) et (1.50).

On a :

$$\frac{1}{2}\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq \alpha + 1. \quad (1.51)$$

Nous proposons un encadrement plus fin de $\tilde{\alpha}$ dans la proposition suivante :

Proposition 1.5 :

Supposons que $\|A\| \leq 1$ et soit α et $\tilde{\alpha}$ les deux paramètres définis en (1.49) et (1.50).

On a :

$$\frac{1}{2}\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{2} \quad (1.52)$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} \lambda\mathcal{B} - \mathcal{A} &= \frac{z+1}{z-1}\mathcal{B} - (A + I_n), \\ &= \frac{1}{z-1} [(z+1)(A - I_n) - (z-1)(A + I_n)], \\ &= \frac{-2}{z-1} (zI_n - A). \end{aligned}$$

Donc

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} = \frac{z-1}{2} (zI_n - A)^{-1}. \quad (1.53)$$

Sachant que

$$\sup_{\Re(z)=0} \frac{1}{2} |z-1| \|(zI_n - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{2}\alpha$$

On obtient

$$\tilde{\alpha} = \sup_{|\lambda|=1} \|(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\| \geq \frac{1}{2}\alpha$$

.

De (1.53), on a

$$\|(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{2}(1+|z|) (zI_n - A)^{-1}$$

Nous allons discuter selon les valeurs de $|z|$

- Si $|z| \leq \frac{\alpha+1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} \sup_{|\lambda|=1} \|(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\| &\leq \frac{1}{2} \sup_{\Re(z)=0} (1+|z|) (zI_n - A)^{-1} \\ &\leq \alpha + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors $\tilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{2}$

- Si $|z| \geq \frac{\alpha + 1}{\alpha}$ sachant que $\|A\| = 1$ donc $\|\frac{1}{z}A\| \leq 1$. Ce qui nous permet de d'écrire que :

$$\begin{aligned}
 (zI_n - A)^{-1} &= \frac{1}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1}, \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k}, \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \right), \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}}{z^{k-1}} \right) \quad \text{posons } m=k-1, \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{z^m} \right), \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \right), \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + A(zI_n - A)^{-1} \right).
 \end{aligned}$$

Finalemnt $(zI_n - A)^{-1} = \frac{1}{z} (I_n + A(zI_n - A)^{-1})$

En conséquence, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\| &\leq \frac{1}{2}(1 + |z|)\|(zI_n - A)^{-1}\|, \\
 &\leq \frac{1}{2}(1 + |z|)\frac{1}{|z|} (1 + \|(zI_n - A)^{-1}\|), \\
 &\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{|z|}\right) (1 + \|(zI_n - A)^{-1}\|), \\
 &\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1}\right) (1 + \|(zI_n - A)^{-1}\|), \\
 &\leq \frac{2\alpha + 1}{2(\alpha + 1)} (1 + \|(zI_n - A)^{-1}\|).
 \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{\alpha} \leq \frac{2\alpha + 1}{2(\alpha + 1)} (1 + \alpha) = \alpha + \frac{1}{2}.$$

Dans les deux cas

$$\tilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{2}$$

En conclusion

$$\frac{1}{2}\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{2}$$

□

Ce qui prouve que les critères de dichotomie de la matrice A par rapport à l'axe imaginaire et du faisceau matriciel $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ par rapport au cercle unité sont équivalents. Les valeurs du projecteur et du critère de dichotomie sont données par l'algorithme suivant :

Algorithme 1.7 :

- *Variable d'entrée :* A tel que la matrice A n'ait pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.
 - *Variables de sorties :* \mathbb{P}_0 .
 \mathbb{P} étant le projecteur sur le sous-espace invariant de A correspondant aux valeurs propres de parties réelles négatives et \mathbb{H} le critère de dichotomie.
1. Détermine les matrices $\mathcal{A} = A + I$ et $\mathcal{B} = A - I$.
 2. Appliquer l'algorithme 1.3 à $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$.
 3. $\mathbb{P}_0 = \mathcal{P}$.

Exemple 1.3 On considère une matrice gaussienne G aléatoire définie par

$$G = \begin{pmatrix} 0.6328 & -0.0549 & -0.0425 & -0.0809 & -0.3882 & -0.0750 & 0.0851 & 0.1511 \\ -0.0388 & 0.9260 & 0.1375 & -0.0628 & 0.1345 & 0.2493 & 0.1319 & -0.0777 \\ 0.1039 & 0.0944 & 0.8477 & 0.0857 & -0.0933 & -0.2765 & -0.1663 & 0.0656 \\ -0.0527 & -0.0180 & 0.0149 & 0.9804 & -0.0297 & 0.0273 & 0.0304 & 0.0078 \\ -0.4743 & -0.0453 & -0.1080 & -0.0842 & 0.4328 & -0.1932 & 0.0639 & 0.2303 \\ 0.3051 & 0.2285 & -0.3455 & 0.2128 & -0.1484 & 0.3722 & -0.4005 & 0.1258 \\ 0.1558 & 0.1038 & -0.1497 & 0.0984 & -0.0427 & -0.2721 & 0.8187 & 0.0466 \\ 0.3697 & 0.1583 & -0.1717 & 0.1635 & 0.1256 & -0.3132 & -0.2715 & 0.9894 \end{pmatrix}$$

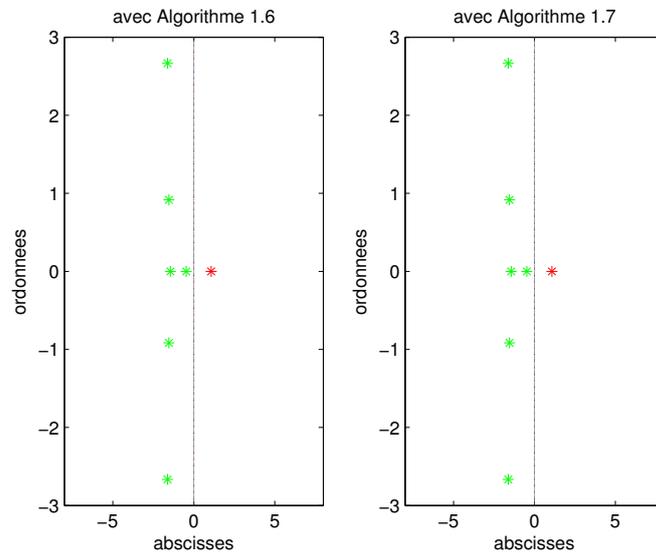


FIGURE 1.3 – Partitions du spectre de la matrice G par l'axe imaginaire par les différentes méthodes.

TABLE 1.3 – Calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par les différentes méthodes.

Algorithmes	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 G - G\mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
Algo 1.6	6	1.3035	$3.3613 \cdot 10^{-16}$	0.0016	$2.5113 \cdot 10^{+17}$
Algo 1.7	6	1.3034	$3.0529 \cdot 10^{-16}$	$1.3119 \cdot 10^{-14}$	4.2862

Les différentes figures de FIGURE 1.3 issues des algorithmes 1.6 et 1.7 sont identiques ; de même, les valeurs $tr(\mathbb{P}_0)$, $\|\mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0 G - G\mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{H}\|$ du tableau 1.3 montrent que le calcul du projecteur \mathbb{P}_0 par ces deux algorithmes donnent le même résultat. La valeur de $\|\mathbb{H}\|$ dans le cas de l'algorithme 1.6 est très élevée, ce qui nous amènera plus tard à nous pencher sur le calcul de cette matrice en vue de réduire de manière considérable sa norme.

1.5 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à la parabole

1.5.1 Méthode de dichotomie spectrale proposée par sadkane et malyshev

Considérons une parabole Γ dans le plan (x, y) satisfaisant l'équation

$$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right)$$

où $p > 0$ est un paramètre quelconque.

Soit $\phi : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto z \in \mathbb{C}$, la fonction définie par la formule $z = (\lambda + \sqrt{p/2})^2$.

En posant $z = x + iy$, on obtient :

$$\begin{cases} x &= (\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 - (\Im\lambda)^2 \\ y &= 2(\Re\lambda + \sqrt{p/2})\Im\lambda \end{cases} \quad (1.54)$$

On voit que $x = (\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 - (\Im\lambda)^2 \Leftrightarrow (\Im\lambda)^2 = (\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 - x$
d'où

$$\begin{aligned} y^2 &= 4(\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 (\Im\lambda)^2 \\ &= 4(\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 \left((\Re\lambda + \sqrt{p/2})^2 - x \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Re\lambda = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) \quad (1.55)$$

$$\Leftrightarrow z \in \Gamma \quad (1.56)$$

Ce qui signifie que ϕ est une bijection de l'axe imaginaire sur la parabole Γ . Nous démontrons également que ϕ associe à la partie du plan

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda < -2\sqrt{\frac{p}{2}} \right\} \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda > 0 \}$$

l'extérieur de la parabole Γ donné par :

$$\left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}; y^2 > 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) \right\}.$$

Pour preuve,

$$\begin{aligned} \Re \lambda > 0 &\Leftrightarrow \Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}} > \sqrt{\frac{p}{2}} \\ &\Leftrightarrow (\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 > \frac{p}{2} \\ &\Leftrightarrow (\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - x > \frac{p}{2} - x \\ &\Leftrightarrow 4(\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 \left((\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - x \right) > 4\frac{p}{2} \left[\frac{p}{2} - x \right] \\ &\Leftrightarrow y^2 > 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) \end{aligned}$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} \Re \lambda < -2\sqrt{\frac{p}{2}} &\Leftrightarrow \Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}} < -\sqrt{\frac{p}{2}} \\ &\Leftrightarrow (\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 > \frac{p}{2} \\ &\Leftrightarrow (\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - x > \frac{p}{2} - x \\ &\Leftrightarrow 4(\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 \left((\Re \lambda + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - x \right) > 4\frac{p}{2} \left[\frac{p}{2} - x \right] \\ &\Leftrightarrow y^2 > 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons de manière similaire montrer que ϕ associée à $\mathcal{R}_2 = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid -2\sqrt{p/2} < \Re \lambda < 0 \}$, l'intérieur de la parabole Γ .

Considérons maintenant une matrice A d'ordre n n'ayant pas de valeurs propres sur la parabole d'équation

$$y^2 = 2p(p/2 - x)$$

Soit \mathcal{A} la matrice d'ordre $2n$ définie par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\sqrt{p/2}I_n & A \\ I_n & -\sqrt{p/2}I_n \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres respectives λ et z , des matrices \mathcal{A} et A , vérifient la condition

$$z = (\lambda + \sqrt{p/2})^2.$$

De tout ce qui précède, l'absence de valeurs propres de la matrice A sur la parabole est équivalente à celle de l'absence de valeurs propres de la matrice \mathcal{A} sur l'axe imaginaire. Ainsi le problème de dichotomie sur la parabole est modifié en un problème de dichotomie spectrale par rapport à l'axe imaginaire. Ce dernier problème ayant été suffisamment étudié de manière théorique et pratique (voir [14]).

Supposons maintenant que $\|A\| = 1$. Cette supposition n'est pas restrictive car sinon, nous prenons $A_1 = \frac{1}{\|A\|}A$ et $p_1 = \frac{p}{\|A\|}$.

Dans le problème de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'axe imaginaire, la qualité de la dichotomie est caractérisée par le paramètre numérique (voir [8])

$$\tilde{\alpha} = \sup_{\Re \lambda = 0} \|(\lambda I_{2n} - \mathcal{A})^{-1}\|$$

Ce paramètre a été utilisé dans le contexte de la stabilité d'une matrice. De manière similaire, la qualité de la dichotomie de la matrice A par rapport à une parabole Γ est caractérisée par le paramètre

$$\alpha = \sup_{z \in \Gamma} \|(zI_n - A)^{-1}\|.$$

La relation entre les deux paramètres α et $\tilde{\alpha}$ est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 1.6 ([25]) *Soit α et $\tilde{\alpha}$ les deux paramètres définis précédemment. On a :*

$$\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq \alpha + \sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha}.$$

Preuve

Pour la preuve, voir dans [25]. \square

Soit $\mathbb{P}_\infty \in \mathbb{C}^{n \times n}$, le projecteur spectral sur le sous-espace invariant de la matrice A associé aux valeurs propres extérieures à la parabole Γ et $\mathcal{P}_+ \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, le projecteur spectral sur le sous-espace invariant de la matrice \mathcal{A} associé aux valeurs propres de parties réelles positives. La proposition suivante permet de déterminer le projecteur \mathbb{P}_∞ connaissant \mathcal{P}_+ .

Proposition 1.7 ([25]) *Soit une partition de \mathcal{P}_+ sous la forme*

$$\mathcal{P}_+ = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{P}_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.57)$$

Puis

$$\mathbb{P}_\infty = 2\mathcal{P}_{11} = 2\mathcal{P}_{22} = 4\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{21}$$

De plus

$$\mathcal{P}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_\infty A)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve

Pour la preuve, voir dans [25].

□

Algorithme 1.8 :

- *Variables d'entrées* : A et I_n tels que le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'ait pas de valeurs propres sur la parabole γ d'équation $2p\left(\frac{p}{2} - x\right) = y^2$ avec $p > 0$
- *Variables de sorties* : \mathbb{P}_∞ et \mathbb{H} .
 \mathbb{P}_∞ étant le projecteur sur l'espace invariant de $zI_n - A$ correspondant aux valeurs propres à l'extérieur de la parabole et \mathbb{H} le critère de dichotomie.

1. Détermine

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'Algorithme 1.6 à \mathcal{A} . On obtient \mathcal{P}_+ et \mathcal{H} le critère de dichotomie.

3. Si la norme de \mathcal{H} est petite alors calculer

$$\mathbb{P}_\infty = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11}$$

sinon il existe des valeurs propres dans un voisinage proche de l'axe imaginaire.

Remarque 1.6 : La norme du critère de dichotomie \mathcal{H} est élevée lorsqu'il existe des valeurs propres de \mathcal{A} proches de l'axe imaginaire. Par conséquent, le projecteur \mathcal{P}_+ sera mal calculée ainsi que le projecteur \mathbb{P}_∞ associé aux valeurs propres de A à l'extérieur de la parabole.

1.5.2 Méthode de dichotomie spectrale proposée par El Sayed et Sadkane

Soient A une matrice ayant ses valeurs propres à l'intérieur ou à l'extérieur de la parabole Γ d'équation

$$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right)$$

et \mathcal{A} la matrice d'ordre $2n$ définie par [25] :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Les valeurs propres λ de \mathcal{A} et z de A vérifient la relation

$$z = \left(\lambda + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 \quad (1.59)$$

Considérons les projecteurs spectraux :

- \mathbb{P}_0 défini sur le sous espace invariant associé aux valeurs propres de A à l'intérieur de la parabole Γ .
- \mathcal{P}_- défini sur le sous espace invariant associé aux valeurs propres de parties réelles négatives de \mathcal{A} .

La proposition suivante caractérise la relation entre \mathbb{P}_0 et \mathcal{P}_- .

Proposition 1.8 *Considérons une partition de la matrice \mathcal{P}_- sous la forme*

$$\mathcal{P}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.60)$$

Alors On a :

$$\mathbb{P}_0 = 2\mathcal{P}_{11} - I_n = 2\mathcal{P}_{22} - I_n. \quad (1.61)$$

Preuve

$$\mathbb{P}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (zI_n - A)^{-1} dz \quad (1.62)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \left(\left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 I_n - A \right)^{-1} dt \quad (1.63)$$

D'après [13], le projecteur \mathcal{P}_- associé aux valeurs propres de parties réelles négatives de \mathcal{A} est définie par :

$$\mathcal{P}_- = \frac{1}{2}I_{2n} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (itI_{2n} - \mathcal{A})^{-1} dt$$

et la matrice de dichotomie \mathcal{H} est définie :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (itI_{2n} - \mathcal{A})^{-*} C (itI_{2n} - \mathcal{A})^{-1} dt, \quad \forall C = C^* > 0.$$

Si nous remplaçons \mathcal{A} par sa valeur (voir (1.58)) , nous obtenons

$$\mathcal{P}_- = \frac{1}{2}I_{2n} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\begin{pmatrix} \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) I_n & -A \\ -I_n & \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) I_n \end{pmatrix} \right]^{-1} dt$$

On a :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A \\ -I_n & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A \\ I_n & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A & 0 \\ 0 & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A \\ -I_n & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A \\ I_n & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A & 0 \\ 0 & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A \\ I_n & (it + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} & 0 \\ 0 & ((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}}) \times (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} & A((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} \\ ((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} & (it + \sqrt{\frac{p}{2}}) \times (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- &= \frac{1}{2}I_{2n} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} (it + \sqrt{\frac{p}{2}}) \times (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} & A((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} \\ ((it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} & (it + \sqrt{\frac{p}{2}}) \times (it + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A)^{-1} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{P}_{11} = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \times \left(\left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 I_n - A \right)^{-1} dt,$$

$$\mathcal{P}_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 I_n - A \right)^{-1} dt,$$

$$\mathcal{P}_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 I_n - A \right)^{-1} dt,$$

$$\mathcal{P}_{22} = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \times \left(\left(it + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 I_n - A \right)^{-1} dt.$$

Ainsi le projecteur \mathbb{P}_0 est déterminé par :

$$\mathbb{P}_0 = 2\mathcal{P}_{11} - I_n = 2\mathcal{P}_{22} - I_n.$$

□

Algorithme 1.9 :

- *Variables d'entrées :* A tel que la matrice A n'ait pas de valeurs propres sur la parabole Γ d'équation $2p\left(\frac{p}{2} - x\right) = y^2$ avec $p > 0$
- *Variables de sorties :* \mathbb{P}_0 .
 \mathbb{P}_0 étant le projecteur sur l'espace invariant de A correspondant aux valeurs propres à l'intérieur de la parabole et \mathbb{H} le critère de dichotomie.

1. Détermine

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'Algorithme 1.6 à \mathcal{A} . On obtient \mathcal{P}_- et \mathcal{H} le critère de dichotomie correspondant.

3. Si la norme de \mathcal{H} est finie, alors calculer

$$\mathbb{P}_0 = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11} - I_n$$

sinon il existe des valeurs propres dans un voisinage proche de l'axe imaginaire.

Exemple 1.4 On considère la matrice K vue précédemment dans l'exemple 1.1.

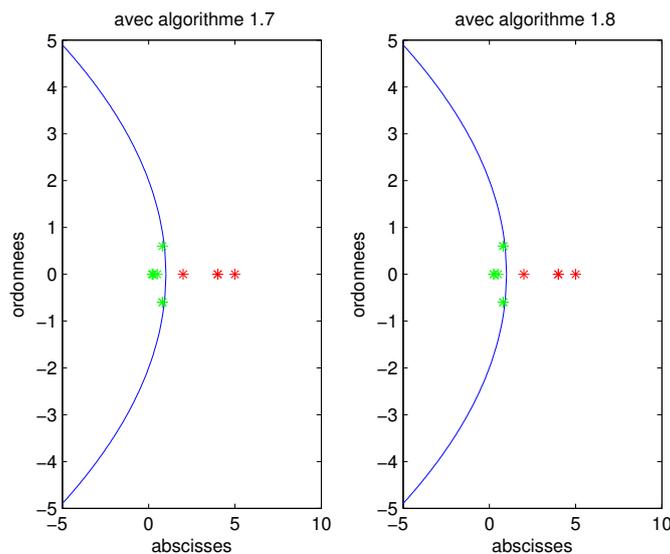


FIGURE 1.4 – Partitions du spectre de la matrice K par la parabole Γ par les différentes méthodes.

TABLE 1.4 – Tableau comparatif des valeurs de \mathbb{P}_0 et \mathbb{H} par différentes méthodes.

Algorithmes	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 K - K \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
Algo 1.8	8	1	$7.9159 \cdot 10^{-16}$	$1.2311 \cdot 10^{-15}$	25.0666
Algo 1.9	8	1	$9.0252 \cdot 10^{-16}$	$1.2311 \cdot 10^{-15}$	25.0666

Les différentes figures de FIGURE 1.4 issues des algorithmes 1.8 et 1.9 sont identiques ; de même, les valeurs $tr(\mathbb{P}_0)$, $\|\mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$, $\|\mathbb{P}_0 K - K \mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{H}\|$ du tableau 1.4 montrent l'efficacité de ces algorithmes dans le calcul du projecteur et de la matrice de dichotomie.

Remarque 1.7 L'algorithme 1.8 produit le projecteur \mathbb{P}_∞ associé aux valeurs propres à l'extérieur de la parabole. Le projecteur dont le calcul est fait dans notre table 1.4 est le projecteur $\mathbb{P}_0 = I_n - \mathbb{P}_\infty$.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes de dichotomies spectrales déjà étudiées. Pour le cercle, nous avons résumé la méthode de dichotomie réalisée par Godunov et Sadkane dans [17]. Les autres méthodes proposées dans [10, 30] en sont des variantes plus économiques en termes d'opérations exécutées par la machine. Le calcul du projecteur spectral par rapport au cercle permet de réaliser celui par rapport à l'axe imaginaire et par rapport à l'ellipse. Et le calcul du projecteur par rapport à l'axe imaginaire permet celui par rapport à la parabole. D'où l'intérêt du rappel de ces méthodes pour la généralisation que nous proposons dans les chapitres 2 et 3.

MÉTHODE DE DICHOTOMIE SPECTRALE D'UNE MATRICE PAR RAPPORT RESPECTIVEMENT À UN CERCLE ET UNE ELLIPSE NON CENTRÉS À L'ORIGINE

2.1 Introduction

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n > 1$) une matrice donnée. Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à de nouvelles méthodes de dichotomie spectrale de la matrice A par rapport respectivement au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de rayon $r > 0$ et à l'ellipse Ξ_{z_0} d'équation

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1, \quad a \geq b > 0 \quad (2.1)$$

et de centre le point d'affixe $z_0 = x_0 + iy_0$.

Toutes les études antérieures ayant proposé des méthodes de dichotomie spectrale par rapport au cercle et à l'ellipse centrés à l'origine, nous proposons donc de nouveaux algorithmes de calcul du projecteur dans les cas où le cercle et l'ellipse sont non centrés à l'origine. Pour ce faire, nous utilisons des translations pour nous ramener aux cas centrés à l'origine. Pour chacune de ces méthodes, nous effectuons plusieurs tests numériques pour valider les résultats obtenus.

2.2 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à un cercle non centré à l'origine

Supposons que la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n'a pas de valeurs propres sur le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$. Le projecteur spectral sur le sous-espace invariant correspondant aux valeurs

propres de A sur le disque $|\lambda - b| < r$ est la matrice \mathbb{P}_0 définie par :

$$\mathbb{P}_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(\Omega, r)} (zI - A)^{-1} dz.$$

On a $\mathcal{C}(\Omega(b), r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - b| = r\}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(\Omega, r)} (zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-b|=r} (zI - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \left((b + re^{i\theta})I - A \right)^{-1} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{(A - bI)}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{\mathcal{A}}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta \end{aligned}$$

où $\mathcal{A} = A - bI$.

Ce calcul est accompagné par celui de la matrice Hermitienne définie par

$$\mathbb{H} = H(\Omega, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{\mathcal{A}}{r} e^{-i\theta} \right)^{-*} H^{(0)} \left(I - \frac{\mathcal{A}}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta$$

où $H^{(0)} = (H^{(0)})^* > 0$ est une matrice hermitienne définie positive utilisée à des fins de mise à l'échelle.

Remarquons que les valeurs propres respectives λ et z des matrices \mathcal{A} et A sont liées par la relation $\lambda = z - b$.

Considérons la décomposition en bloc diagonale de la matrice A suivante :

$$A = X \begin{pmatrix} A_\Omega & 0 \\ 0 & A_\infty \end{pmatrix} X^{-1} \quad (2.2)$$

où $A_\Omega \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ($k < n$) est le bloc associé aux valeurs propres intérieures au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ et $A_\infty \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, celui associé aux valeurs propres extérieures au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$. Les colonnes des blocs rectangulaires X_1 (resp. X_2) dans la représentation

$$X = [X_1 : X_2] \quad (2.3)$$

forment des bases pour les sous-espaces invariants de A associés aux valeurs propres de A_Ω (resp. A_∞).

La décomposition en bloc diagonale de \mathcal{A} est alors

$$\mathcal{A} = X \begin{pmatrix} A_\Omega - bI_k & 0 \\ 0 & A_\infty - bI_{n-k} \end{pmatrix} X^{-1}$$

où $A_\Omega - bI_k$ et $A_\infty - bI_{n-k}$ sont respectivement les blocs matriciels associés aux valeurs propres intérieures et extérieures au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon r ($r > 0$). Ainsi, nous avons :

$$\mathbb{P}_0 = X \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{A_\Omega - bI_k}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I - \frac{A_\infty - bI_{n-k}}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta \end{bmatrix} X^{-1} \quad (2.4)$$

$$= X \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1}. \quad (2.5)$$

Ce qui nous conduit à l'algorithme suivant qui détermine le projecteur \mathbb{P}_0 et la matrice de dichotomie \mathbb{H} associés aux valeurs propres intérieures au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$

Algorithme 2.1 .

- *Variables d'entrées* : La matrice A , les paramètres b et r tels que le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'ait pas de valeurs propres sur le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$.
- *Variables de sorties* : \mathbb{P}_0 et \mathbb{H} .

\mathbb{P} étant le projecteur sur l'espace invariant de $zI_n - A$ correspondant aux valeurs propres intérieures au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ et \mathbb{H} la matrice integrale dont la norme indique la qualité du projecteur \mathbb{P}_0 .

1. Déterminer la matrice $\mathcal{A} = A - bI_n$.
2. Calculer le projecteur \mathbb{P}_0 et la matrice \mathbb{H} par application de l' Algorithme 1.2 à la matrice \mathcal{A} et au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon r .

Remarque 2.1 (Application aux faisceaux matriciels) Dans la cas du faisceau matriciel $\lambda B - A$, le projecteur associé au spectre intérieur au cercle décentré est donné par

$$\mathbb{P}_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} (zB - A)^{-1} B dz \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(B - \frac{(A - bB)}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} B d\theta \quad (2.7)$$

Ce calcul est accompagné de celui de la matrice Hermitienne et définie positive \mathbb{H} suivante :

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(B - \frac{(A - bB)}{r} e^{-i\theta} \right)^{-*} H^{(0)} \left(B - \frac{(A - bB)}{r} e^{-i\theta} \right)^{-1} d\theta$$

où $H^{(0)} = (H^{(0)})^*$.

Exemple 2.1 *Considérons la matrice J -symplectique W (cad elle vérifie la relation $W^T J W = J$) de l'exemple 1 du chapitre 3 de [10],*

$$W = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-T} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

avec la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 0.3473 & -0.0452 & 0.3832 & -0.8490 & -0.0973 & -0.0181 \\ 0.3933 & -0.4122 & -0.4396 & -0.0900 & 0.6753 & -0.1343 \\ 0.3460 & 0.7347 & 0.1263 & 0.1036 & 0.4173 & 0.3738 \\ 0.4356 & -0.3794 & 0.6508 & 0.4924 & 0.0010 & -0.0150 \\ 0.4236 & -0.1760 & -0.4036 & 0.0431 & -0.4874 & 0.6223 \\ 0.4856 & 0.3367 & -0.2398 & 0.1270 & -0.3505 & -0.6741 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $0.7456 \pm 0.6664i$, $-0.2805 \pm 0.9599i$, $-0.7690 \pm 0.6393i$. Notons que la matrice J -symplectique W a 12 valeurs propres.

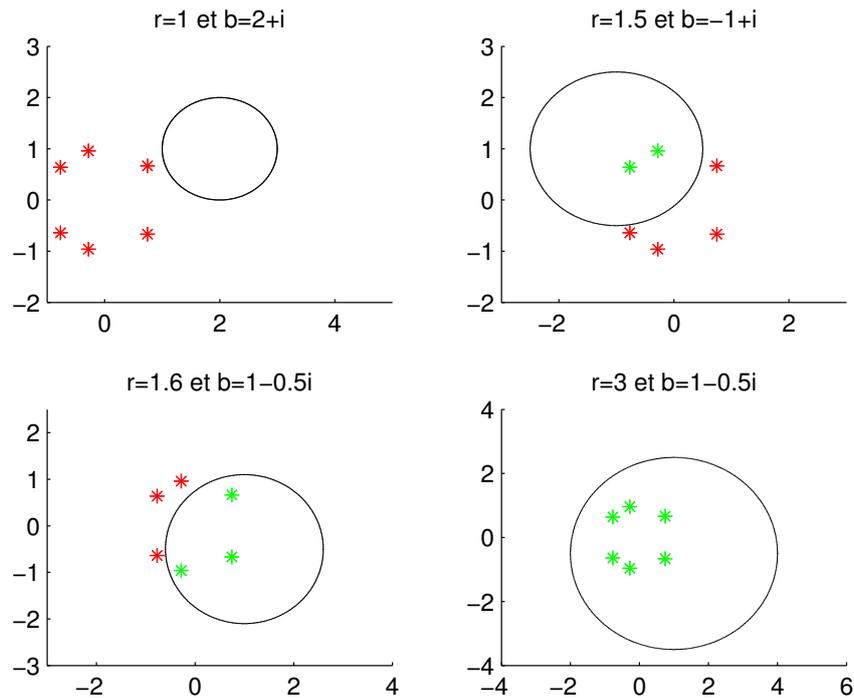


FIGURE 2.1 – Partition du spectre de la matrice W par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r .

TABLE 2.1 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b)

(r, b)	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 W(t) - W(t)\mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(1, 2 + i)$	0	0	0	0	1.1858
$(1.5, -1 + i)$	4	1	$3.1410 \cdot 10^{-16}$	$1.8278 \cdot 10^{-15}$	4.5871
$(1.6, 1 - 0.5i)$	6	1	$5.1975 \cdot 10^{-16}$	$7.1821 \cdot 10^{-15}$	4.3483
$(3, 1 - 0.5i)$	12	1	0	0	1.9682

Les quatre figures de FIGURE 2.1 montrent comment un cercle décentré $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{P}_0 W - W\mathbb{P}_0\|$ prouvent que \mathbb{P}_0 est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ sont finies et ne sont pas élevées, ce qui montre la bonne qualité du projecteur.

Exemple 2.2 *Considerons la matrice $X(t)$ définie par (voir [19])*

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t))B(t) & -(B(t))^{-T} \sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t))B(t) & (B(t))^{-T} \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b(t) & b(t) - 1 \\ b(t) + 1 & b(t) \end{pmatrix}$$

et

$$b(t) = 2 \sin(4t) \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \frac{\pi}{2} \cos(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

- Pour $t = 2.9$, nous obtenons la figure suivante pour quatre valeurs du couple (r, b)

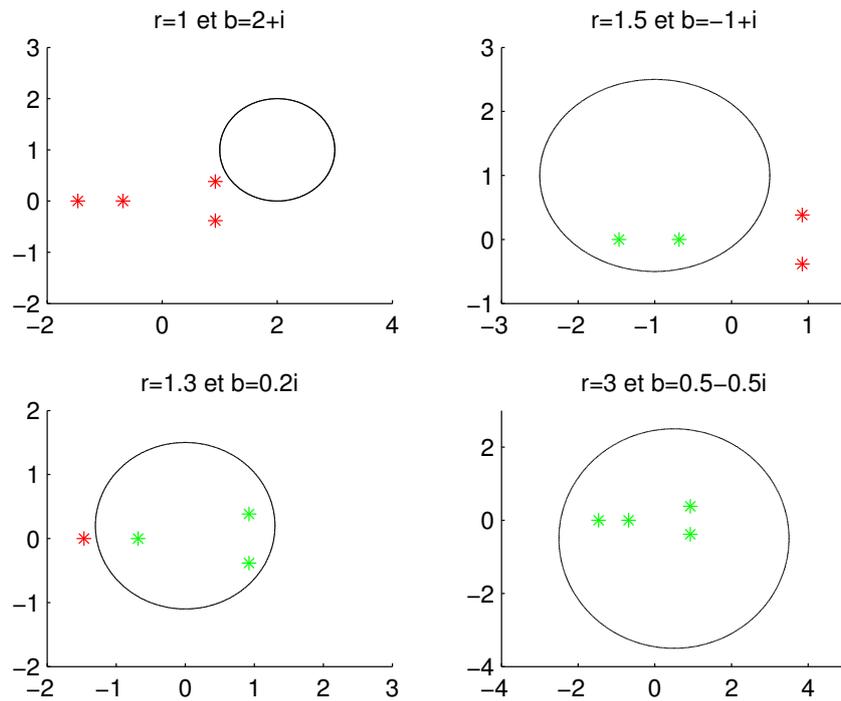


FIGURE 2.2 – Partition du spectre de la matrice $X(t)$ par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r pour $t = 2.9$.

L'application de l'algorithme 2.1 à la fonction matricielle (2.2) donne les résultats suivants :

TABLE 2.2 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b) pour $t = 2.9$.

(r, b)	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 X(t) - X(t)\mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(1, 2 + i)$	0	0	0	0	23.3085
$(1.5, -1 + i)$	2	1	$3.5586 - 31i$	$4.2346 \cdot 10^{-15}$	30.8350
$(1.3, 0.2i)$	3	4.2005	$2.6430 \cdot 10^{-15}$	$2.7746 \cdot 10^{-14}$	83.9697
$(3, 0.5 - 0.5i)$	4	1	0	0	6.5414

Ces différentes figures sur FIGURE 2.2 montrent comment un cercle décentré $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{P}_0 X(t) - X(t)\mathbb{P}_0\|$ prouvent que \mathbb{P}_0 est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ sont finies et ne sont pas élevées. Ceci montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- Pour $t = 3.5$, nous obtenons la figure 2.3 pour quatre valeurs du couple (r, b) .

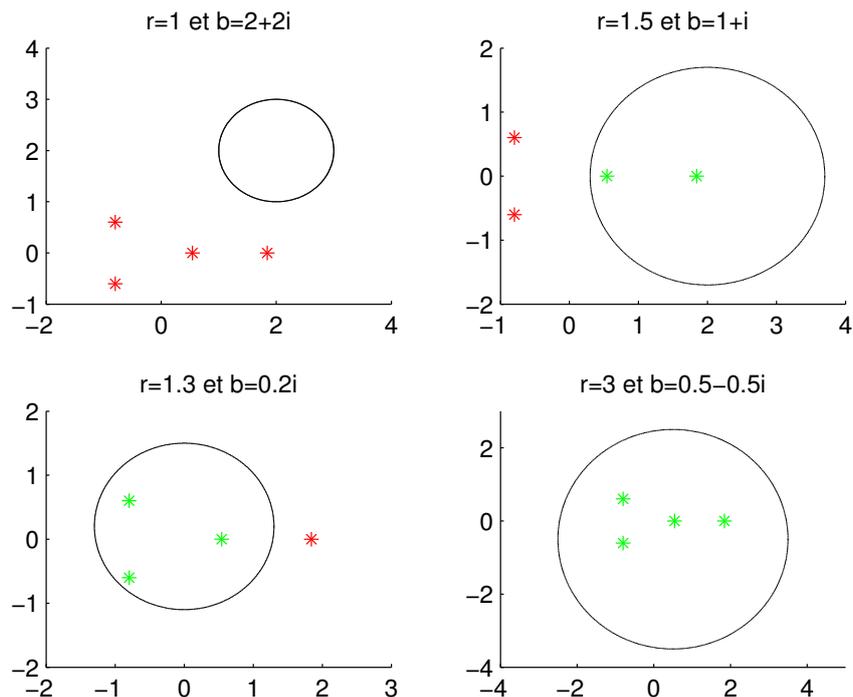


FIGURE 2.3 – Partition du spectre de la matrice $X(t)$ par le cercle décentré de centre Ω d'affixe b et de rayon r pour $t = 3.5$.

L'application de l'algorithme 2.1 à la fonction matricielle (2.2) donne les résultats suivants : Ces différentes figures sur FIGURE 2.3 montrent com-

TABLE 2.3 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_0 en appliquant l'algorithme 2.1 pour quatre valeurs du couple (r, b) pour $t = 3.5$.

(r, b)	$tr(\mathbb{P}_0)$	$\ \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{P}_0 X(t) - X(t)\mathbb{P}_0\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(1, 2 + i)$	0	0	0	0	1.7011
$(1.7, 2)$	2	1	$7.8505 \cdot 10^{-17}$	$2.9187 \cdot 10^{-15}$	25.3954
$(1.3, 0.2i)$	3	3.0501	$1.1515 \cdot 10^{-15}$	$1.3490 \cdot 10^{-14}$	51.7295
$(3, 0.5 - 0.5i)$	4	1	0	0	5.8134

ment un cercle décentré $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ peut réaliser une dichotomie sur les va-

leurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|$ et $\|\mathbb{P}X(t) - X(t)\mathbb{P}_0\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_0 est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- Lorsque t varie entre 0 et 2π , nous obtenons une dichotomie du portrait spectral de $X(t)$ par le cercle $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ qui se présente comme suit :

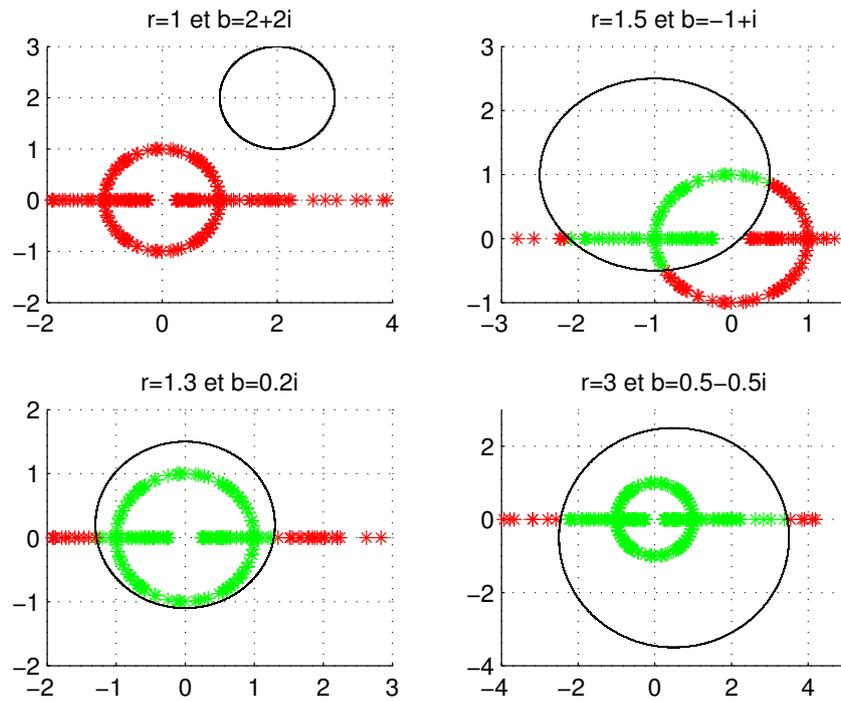


FIGURE 2.4 – Partition du spectre de $X(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(r, b) \in \{(1, 2 + i), (1.5, -1 + i), (1.3, 0.2i), (3, 0.5 - 0.5i)\}$.

Ces figures sur FIGURE 2.4 décrivent le portrait spectral de $X(t)$, $\forall t \in [0; 2\pi]$. Cette dichotomie spectrale réalisée par le cercle $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ est mise en évidence grâce à l'utilisation de couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).

Exemple 2.3 Soit le faisceau matriciel $\lambda B - A$ d'ordre 20 défini par

$$A = \begin{cases} a_{2i,2i} = -\frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq i \leq 10, \\ a_{2i-1,2i+1} = 1 & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ a_{2i+1,2i-1} = \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ a_{2i,2i+1} = 3 & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ a_{i,j} = 0 & \text{autres} \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} b_{2i-1,2i-1} = -\frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq i \leq 10, \\ b_{2i,2i+2} = -1 & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ b_{2i+1,2i} = 5 & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ b_{2i,2i-1} = 2 & \text{si } 1 \leq i \leq 9, \\ b_{i,j} = 0 & \text{autres} \end{cases}$$

dont les matrices sont issues de [18].

La dichotomie spectrale de $\lambda B - A$ par rapport au cercle $\mathcal{C}(b, r)$ de centre b et de rayon r pour des valeurs de $(b, r) \in \{(2.5 - i, 4), (0.7 + 1.5i, 6), (2 - 2i, 1.5), (3, 0.7)\}$ produit les figures de FIGURE 2.5.

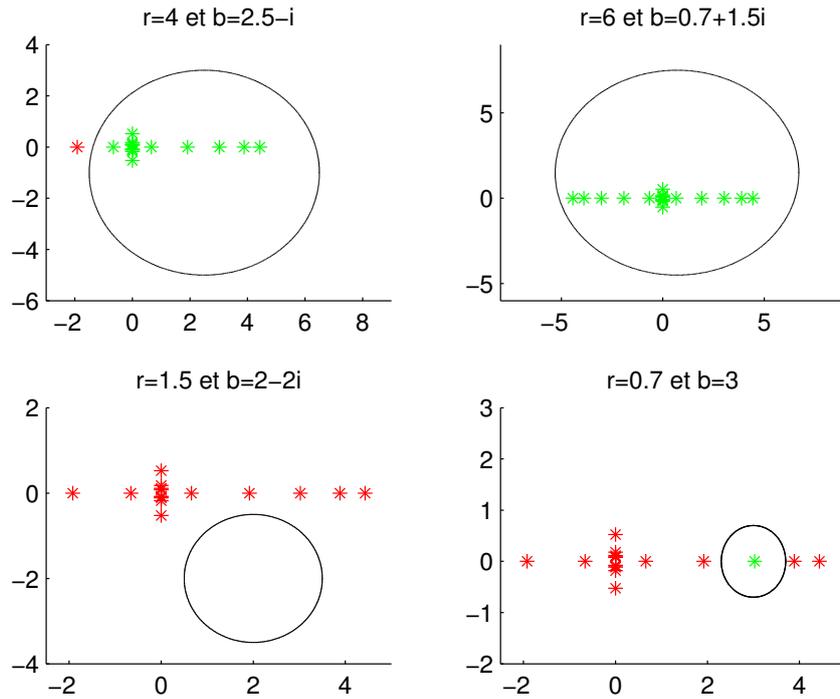


FIGURE 2.5 – Partition du spectre du faisceau matriciel $zB - A$ par le cercle de centre Ω d'affixe b et de rayon r .

Nous notons que les valeurs prises par les normes du projecteur \mathbb{P}_0 et de son critère de dichotomie de \mathbb{H} sont élevées. Cela est dû au fait que les matrices A et B sont mal conditionnées ($\kappa(A) = 2.8363 \cdot 10^3$ et $\kappa(B) = 3.2534 \cdot 10^4$ où $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$).

2.3 Méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à une ellipse non centrée à l'origine

Considérons l'ellipse

$$\Xi_{z_0} = \{z = x + iy/in\mathbb{C} \setminus (x - x_0) + i(y - y_0) \in \Xi_0\} \quad (2.8)$$

d'équation (2.1).

Soit $zI_n - A$ un faisceau matriciel n'ayant pas de valeurs sur l'ellipse Ξ_{z_0} . Considérons les matrices d'ordre $2n$ définies de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2}I_n & -A_0 \\ 0 & \frac{a+b}{2}I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{2}I_n & 0 \\ A_0 & -\frac{a-b}{2}I_n \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

où $A_0 = A - z_0I_n$.

Les valeurs propres $\tilde{\lambda}$ du faisceau matriciel $\tilde{\lambda}\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}}$ et \tilde{z} de la matrice A_0 sont liées par la relation (2.10).

$$\tilde{z} = \frac{(a+b)\tilde{\lambda}^2 + (a-b)}{2\tilde{\lambda}} \quad (2.10)$$

Par conséquent les valeurs propres z de A et $\tilde{\lambda}$ vérifient la relation (2.11).

$$z = \frac{(a+b)\tilde{\lambda}^2 + (a-b)}{2\tilde{\lambda}} + z_0. \quad (2.11)$$

L'indicateur de qualité de la dichotomie spectrale par rapport à l'ellipse Ξ_{z_0} est donné par

$$\alpha = \sup_{z \in \Xi_{z_0}} \|(zI_n - A)^{-1}\| \quad (2.12)$$

De manière similaire, nous définissons l'indicateur de qualité de la dichotomie spectrale par rapport au cercle unité $\mathcal{C}(0, 1)$ par

$$\tilde{\alpha} = \sup_{|\tilde{\lambda}|=1} \|(\tilde{\lambda}\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| \quad (2.13)$$

Alors nous avons la proposition suivante

Proposition 2.1 *Les quantités α et $\tilde{\alpha}$ définies dans (2.12) et (2.13) sont égales :*

$$\alpha = \tilde{\alpha} \quad (2.14)$$

Preuve

D'après (2.10), nous avons

$$\tilde{z} = \frac{(a+b)\tilde{\lambda}^2 + (a-b)}{2\tilde{\lambda}}.$$

Ce qui entraîne

$$\frac{a+b}{2}I_n\tilde{\lambda}^2 - A_0\tilde{\lambda} + \frac{a-b}{2}I_n = \tilde{\lambda}(\tilde{z}I_n - A_0).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (\mu^2\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{a+b}{2}\mu^2 + \frac{a-b}{2}\right)I_n & -\mu^2A_0 \\ -A_0 & \left(\frac{a+b}{2}\mu^2 + \frac{a-b}{2}\right)I_n \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{z}\mu I_n & -\mu^2A_0 \\ -A_0 & \tilde{z}\mu I_n \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}I_n & -A_0 \\ -A_0 & \tilde{z}I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \times \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\tilde{z}I_n - A_0)^{-1} + (\tilde{z}I_n + A_0)^{-1} & (\tilde{z}I_n - A_0)^{-1} - (\tilde{z}I_n + A_0)^{-1} \\ (\tilde{z}I_n - A_0)^{-1} - (\tilde{z}I_n + A_0)^{-1} & (\tilde{z}I_n - A_0)^{-1} + (\tilde{z}I_n + A_0)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_n}{\sqrt{2}} & -\frac{I_n}{\sqrt{2}} \\ \frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{I_n}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{K_1} \times \begin{bmatrix} (\tilde{z}I_n - A_0)^{-1} & 0 \\ 0 & (\tilde{z}I_n + A_0)^{-1} \end{bmatrix} \times \\ &\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{I_n}{\sqrt{2}} \\ -\frac{I_n}{\sqrt{2}} & \frac{I_n}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{-1}I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}}_{K_2} \end{aligned}$$

Nous remarquons que le produit $K_1K_2 = \mu^{-1}$. Une double inégalité nous permet de déduire que :

$$\sup_{z \in \Xi_0} \|(\tilde{z}I_n - A_0)^{-1}\| = \sup_{|\tilde{\lambda}|=1} \|(\tilde{\lambda}\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\|.$$

Nous savons aussi que $\tilde{z}I_n - A_0 = zI_n - A$, nous pouvons donc conclure que

$$\sup_{z \in \Xi_{z_0}} \|(zI_n - A)^{-1}\| = \sup_{|\tilde{\lambda}|=1} \|(\tilde{\lambda}\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\|$$

d'où l'égalité 2.14.

□

Considérons les projecteurs spectraux

- $\mathbb{P}_\infty \in \mathbb{C}^{n \times n}$, le projecteur associé aux valeurs propres de A extérieures à l'ellipse Ξ_{z_0} de centre z_0 .
- $\mathcal{P}_\infty \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, le projecteur associé aux valeurs propres du faisceau matriciel $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ extérieures au cercle unité $\mathcal{C}(0, 1)$.

La proposition suivante nous permet de déterminer \mathbb{P}_∞ sachant \mathcal{P}_∞ .

Proposition 2.2 *considérons la décomposition suivante du projecteur \mathcal{P}_∞ :*

$$\mathcal{P}_\infty = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{P}}_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}, i, j = 1, 2.$$

Alors $\mathbb{P}_\infty = \tilde{\mathcal{P}}_{11} + \tilde{\mathcal{P}}_{22}$

Preuve

Considérons l'application $\psi : \lambda \in \mathcal{C} \rightarrow z \in \mathcal{C}$ défini par :

$$z = \psi(\lambda) = \frac{(a+b)\lambda^2 + (a-b)}{2\lambda} \quad (2.15)$$

Supposons que la matrice A_0 n'ait pas de valeurs propres infinies (cette restriction est supprimée par la continuité des arguments). Notons \tilde{X} une solution de l'équation matricielle

$$\frac{a+b}{2}X^2 - A_0X + \frac{a+b}{2}I_n = 0 \quad (2.16)$$

dont les valeurs propres sont supposées être à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{a-b}{a+b}$.

Les valeurs propres $\tilde{\lambda}$ de \tilde{X} et celles z de la matrice A_0 , extérieures à l'ellipse Γ vérifient d'après la formule (2.15), la relation

$$\tilde{\lambda} = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}.$$

Soit \tilde{X}_1 , l'autre solution matricielle de l'équation (2.16). On a :

$$\frac{a+b}{2}\tilde{X}_1^2 - A_0\tilde{X}_1 + \frac{a+b}{2}I_n = 0.$$

L'équation (2.16) étant de second degré, on a :

$$\begin{cases} \tilde{X}\tilde{X}_1 = \frac{a-b}{a+b}I_n \\ \tilde{X} + \tilde{X}_1 = \frac{2}{a+b}A_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Donc une autre solution matricielle \tilde{X}_1 de l'équation (2.16) peut s'écrire :

$$\tilde{X}_1 = \frac{a-b}{a+b} \tilde{X}^{-1} \text{ ou } \tilde{X}_1 = \frac{2}{a+b} A_0 - \tilde{X}.$$

Considérons la décomposition canonique de Jordan de la matrice \tilde{X} :

$$\tilde{X} = Q \begin{pmatrix} J_\infty & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (2.18)$$

où J_∞ (resp. J_0) correspond au bloc de Jordan associé aux valeurs propres de \tilde{X} extérieures (resp. intérieures) au cercle unité. De (2.16), on montre

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} I_n & 0 \\ -A_0 & \frac{a-b}{2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} I_n & -A_0 \\ 0 & \frac{a+b}{2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1^2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} \tilde{X} & \frac{a-b}{2} \tilde{X}_1 \\ -A_0 \tilde{X} + \frac{a-b}{2} I_n & -A_0 \tilde{X}_1 + \frac{a-b}{2} I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{a+b}{2} \tilde{X} - A_0) \tilde{X}^2 & (\frac{a+b}{2} \tilde{X}_1 - A_0) \tilde{X}_1^2 \\ \frac{a+b}{2} \tilde{X}^2 & \frac{a+b}{2} \tilde{X}_1^2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} \tilde{X} + (\frac{a+b}{2} \tilde{X} - A_0) \tilde{X}^2 & \frac{a-b}{2} \tilde{X}_1 + (\frac{a+b}{2} \tilde{X}_1 - A_0) \tilde{X}_1^2 \\ -A_0 \tilde{X} + \frac{a-b}{2} I_n + \frac{a+b}{2} \tilde{X}^2 & -A_0 \tilde{X}_1 + \frac{a-b}{2} I_n + \frac{a+b}{2} \tilde{X}_1^2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} (\frac{a+b}{2} \tilde{X}^2 - A_0 \tilde{X} + \frac{a-b}{2}) \tilde{X} & (\frac{a+b}{2} \tilde{X}_1^2 - A_0 \tilde{X}_1 + \frac{a-b}{2}) \tilde{X}_1 \\ \frac{a+b}{2} \tilde{X}^2 - A_0 \tilde{X} + \frac{a-b}{2} I_n & \frac{a+b}{2} \tilde{X}_1^2 - A_0 \tilde{X}_1 + \frac{a-b}{2} I_n \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} I_n & -A_0 \\ 0 & \frac{a+b}{2} I_n \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} I_n & 0 \\ A_0 & \frac{a-b}{2} I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{X}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{X}_1^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Soit \mathcal{P}_∞ le projecteur sur le cercle unité associé aux valeurs propres du faisceau matriciel $\lambda\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}}$ extérieures au cercle.

$$\mathcal{P}_\infty = \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}^{-1}$$

où k est l'ordre de la matrice J_∞ . Notons que la matrice $X - X_1$ est non singulière si et seulement si le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'a pas $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ comme valeurs propres. On peut supposer cela sans perdre les généralités (les arguments de continuité). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\infty &= \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{X}_1 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Q \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -\tilde{X}_1 \\ -I_n & \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} - \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X} - \tilde{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{bmatrix} J_\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 & -\frac{a-b}{a+b}J_\infty^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \tilde{X} - \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X} - \tilde{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Q \begin{pmatrix} J_\infty & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} & Q \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{a+b}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \\ Q \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} & Q \begin{pmatrix} -\frac{a-b}{a+b}J_\infty^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} - \tilde{X}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{X} - \tilde{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}_{11} &= Q \begin{bmatrix} J_\infty (J_\infty - \frac{a-b}{a+b} J_\infty^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{12} &= Q \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{a+b} (J_\infty - \frac{a-b}{a+b} J_\infty^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} &= Q \begin{bmatrix} (J_\infty - \frac{a-b}{a+b} J_\infty^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{22} &= Q \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{a+b} J_\infty^{-1} (J_\infty - \frac{a-b}{a+b} J_\infty^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}\end{aligned}$$

et nous obtenons $\tilde{\mathcal{P}}_{11} + \tilde{\mathcal{P}}_{22} = Q \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \mathbb{P}_\infty$. \square

Algorithme 2.2 .

- *Variables d'entrées* : La matrice A , les paramètres a, b et z_0 tels que la matrice A n'ait pas de valeurs propres sur l'ellipse Ξ_0 d'équation (2.1) avec $a \geq b > 0$.
- *Variables de sorties* : \mathbb{P}_∞ et \mathbb{H} .
 \mathbb{P}_∞ étant le projecteur sur le sous-espace de A correspondant aux valeurs propres à l'extérieur de l'ellipse Ξ_{z_0} et \mathbb{H} le critère de dichotomie.

1. Détermine $A_0 = A - z_0 I$
2. Appliquer l'algorithme 1.4 à A_0
3. On obtient \mathbb{P}_∞ et \mathbb{H} .

Exemple 2.4 *Considérons la matrice J -symplectique W (cad elle vérifie la relation $W^T J W = J$) de l'exemple 1 du chapitre 3 de [10],*

$$W = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-T} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

avec la matrice B définie comme suit

$$B = \begin{pmatrix} 0.3473 & -0.0452 & 0.3832 & -0.8490 & -0.0973 & -0.0181 \\ 0.3933 & -0.4122 & -0.4396 & -0.0900 & 0.6753 & -0.1343 \\ 0.3460 & 0.7347 & 0.1263 & 0.1036 & 0.4173 & 0.3738 \\ 0.4356 & -0.3794 & 0.6508 & 0.4924 & 0.0010 & -0.0150 \\ 0.4236 & -0.1760 & -0.4036 & 0.0431 & -0.4874 & 0.6223 \\ 0.4856 & 0.3367 & -0.2398 & 0.1270 & -0.3505 & -0.6741 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $0.7456 \pm 0.6664i$, $-0.2805 \pm 0.9599i$, $-0.7690 \pm 0.6393i$

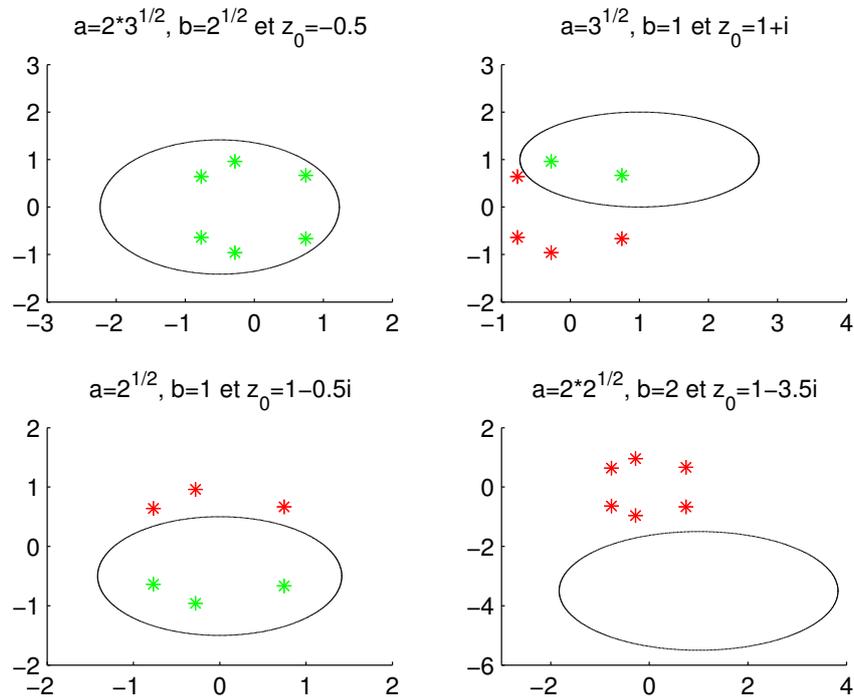


FIGURE 2.6 – Partition du spectre de la matrice W par l'ellipse décentrée de centre Ω d'affixe z_0 et de paramètres a et b .

TABLE 2.4 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs de (a, b, z_0)

(a, b, z_0)	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty W - W(t)\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(2\sqrt{3}, \sqrt{2}, -0.5)$	12	1	0	0	2.9116
$(\sqrt{3}, 1, 1+i)$	4	1	$2.4993 \cdot 10^{-15}$	$6.5118 \cdot 10^{-15}$	6.0056
$(\sqrt{2}, 1, -0.5i)$	6	1	$1.6156 \cdot 10^{-15}$	$5.8910 \cdot 10^{-15}$	2.3194
$(2\sqrt{2}, 2, 1-3.5i)$	0	$7.5734 \cdot 10^{-16}$	$7.5734 \cdot 10^{-16}$	$1.1304 \cdot 10^{-15}$	0.4210

Ces différentes figures sur FIGURE 2.6 montrent comment une ellipse décentrée Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty X(t) - X(t)\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

Exemple 2.5 • Pour $t = 2.9$, nous obtenons la figure suivante pour quatre valeurs du triplet (a, b, z_0) .

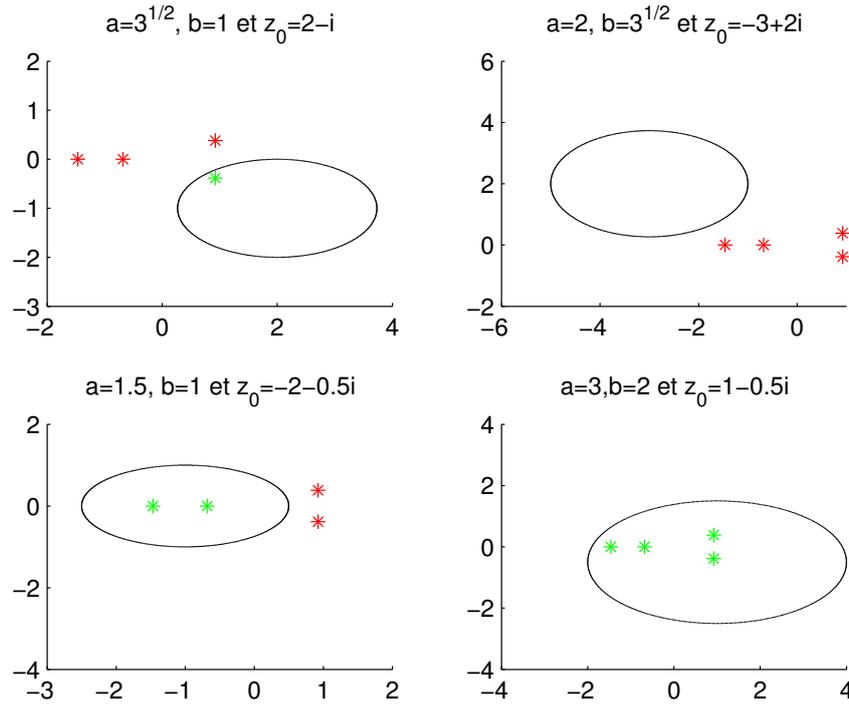


FIGURE 2.7 – Partition du spectre de la matrice X par l'ellipse décentrée de centre Γ d'affixe z_0 et de paramètres (a, b) pour $t = 2.9$.

L'application de l'algorithme 2.2 à la fonction matricielle (2.2) nous donne les résultats suivants :

TABLE 2.5 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs du triplet (a, b, z_0)

(a, b, z_0)	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty X(t) - X(t)\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(\sqrt{3}, 1, 2 - i)$	1	4.4159	$1.0583 \cdot 10^{-14}$	$2.7917 \cdot 10^{-14}$	111.4718
$(2, \sqrt{3}, -3 + i)$	0	$5.6006 \cdot 10^{-16}$	$5.6006 \cdot 10^{-16}$	$1.8840 \cdot 10^{-15}$	3.3560
$(1.5, 1, -2 - 0.5i)$	2	1	$2.2561 \cdot 10^{-15}$	$1.5023 \cdot 10^{-14}$	27.1515
$(3, 2, 1 - 0.5i)$	4	1	0	0	9.6318

Ces différentes figures sur FIGURE 2.7 montrent comment une ellipse décen-

trée Ξ_{z_0} peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty X(t) - X(t)\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- Pour $t = 3.5$, nous obtenons la figure 2.8 pour quatre valeurs du triplet (a, b, z_0) . L'application de l'algorithme 2.2 à la fonction matricielle (2.2) nous donne

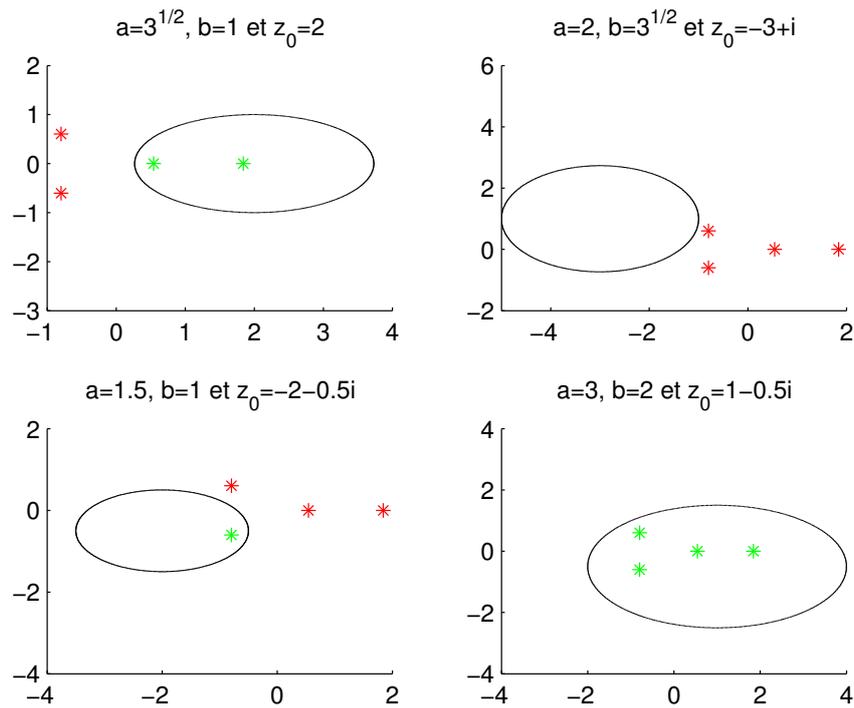


FIGURE 2.8 – Partition du spectre de la matrice X par l'ellipse décentrée de centre Ω d'affixe z_0 et de paramètres (a, b) pour $t = 3.5$.

les resultats suivants :

TABLE 2.6 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme 2.2 pour quatre valeurs du couple (a, b, z_0)

(a, b, z_0)	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty X(t) - X(t)\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
$(\sqrt{3}, 1, 2)$	2	1	$7.5879 \cdot 10^{-16}$	$7.5273 \cdot 10^{-15}$	27.4727
$(2, \sqrt{3}, -3 + i)$	0	$2.0884 \cdot 10^{-15}$	$2.0884 \cdot 10^{-15}$	$4.4116 \cdot 10^{-15}$	22.3064
$(1.5, 1, -2 - 0.5i)$	1	3.4334	$1.1404 \cdot 10^{-14}$	$4.9950 \cdot 10^{-14}$	58.1572
$(3, 2, 1 - 0.5i)$	4	1	0	0	6.8117

Ces différentes figures sur FIGURE 2.8 montrent comment une ellipse décen-

trée Ξ_{z_0} peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty X(t) - X(t)\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- Lorsque t varie entre 0 et 2π , nous obtenons une dichotomie du portrait spectral de $X(t)$ par l'ellipse de centre $\Omega(z_0)$ et de paramètres a et b , qui se présente comme suite : Ces graphiques décrivent le portrait spectral de $X(t), \forall t \in [0; 2\pi]$.

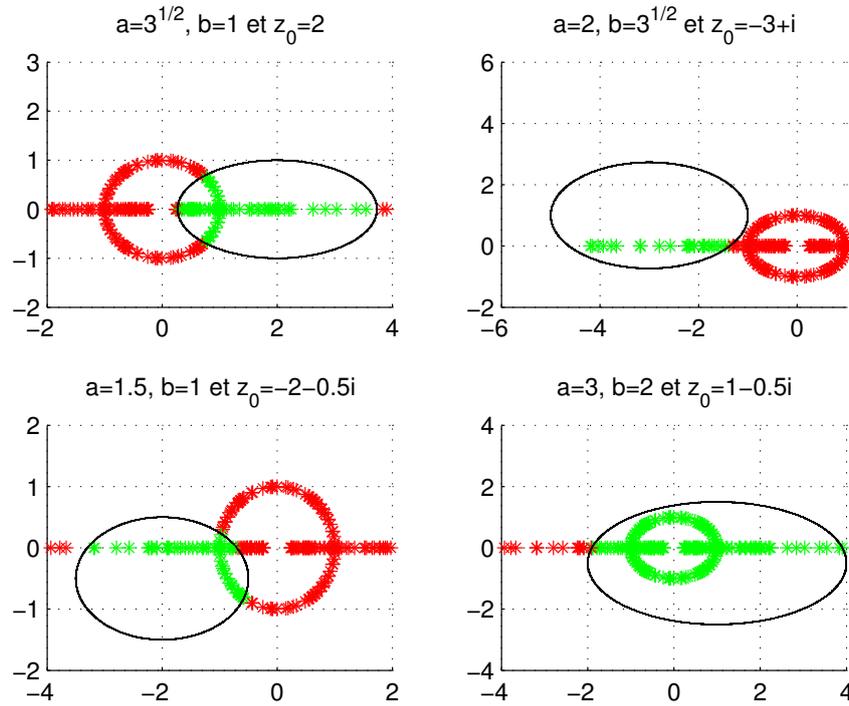


FIGURE 2.9 – Partition des valeurs propres de $X(t), \forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(r, b) \in \{(1, 2 + i), (1.5, -1 + i), (1.3, 0.2i), (3, 0.5 - 0.5i)\}$.

Cette dichotomie spectrale réalisée par le cercle $\mathcal{C}(\Omega(b), r)$ est mise en évidence grâce à l'utilisation de couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).

2.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de proposer de nouvelles méthodes de calcul du projecteur spectral sur le sous-espace invariant associé aux valeurs propres d'une matrice, d'une part, par rapport au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre $\Omega \neq O$ et de rayon $r > 0$ et d'autre part, par rapport à l'ellipse Ξ_{z_0} de centre $z_0 \neq 0$. Ces algorithmes ont été inspirés des

méthodes réalisées sur le cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon r dans [17, 10, 12] et sur l'ellipse Ξ_0 centré en O dans [29]. Plusieurs tests numériques effectués sur des matrices et des fonctions matricielles ont permis de valider ces méthodes.

MÉTHODE DE DICHOTOMIE SPECTRALE D'UNE MATRICE PAR RAPPORT À UNE PARABOLE D'ÉQUATION GÉNÉRALE

$$x = ay^2 + by + c \quad a \neq 0.$$

3.1 Introduction

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n > 1$) une matrice et $\Gamma(a, b, c)$ une parabole d'équation du type

$$x = ay^2 + by + c \quad a \neq 0. \quad (3.1)$$

L'objectif de ce chapitre est de proposer des méthodes de dichotomie spectrale qui divisent le spectre de la matrice A en deux parties : une première partie à l'intérieur de la parabole et une seconde à l'extérieur. Cela conduira au calcul des projecteurs associés respectivement aux valeurs propres intérieures et extérieures à la parabole.

L'équation (3.1) se réduit à la forme suivante

$$x = a \left[\left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\mathbf{disc}}{4a^2} \right] \quad (3.2)$$

où $\mathbf{disc} = b^2 - 4ac$; ou encore

$$\frac{1}{a} \left(x + \frac{\mathbf{disc}}{4a} \right) = \left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 \quad (3.3)$$

Nous supposons pour la suite que le coefficient a est de signe négatif.

Ainsi, la parabole d'équation (3.3) peut s'écrire sous la forme

$$2p(d - x) = (y - pb)^2 \quad (3.4)$$

en posant

$$p = -\frac{1}{2a} \quad \text{et} \quad d = -\frac{\mathbf{disc}}{4a}$$

Nous supposons que la matrice A n'a pas de valeurs propres sur la parabole $\Gamma(a, b, c)$ pour toute variation des paramètres a, b et c avec $a \neq 0$. À partir des travaux effectués dans [25] par Malyshev et Sadkane, nous proposons dans ce chapitre des méthodes de dichotomies spectrales qui calculent le projecteur \mathbb{P}_∞ sur le sous-espace associé aux valeurs propres situées en dehors de $\Gamma(a, b, c)$. Ce chapitre est organisé comme suit. Le paragraphe 3.2 présente une méthode de dichotomie spectrale de la matrice A par rapport à une parabole d'équation de type (3.1) avec le discriminant égal à 1. Dans le paragraphe 3.3, nous proposons des méthodes de dichotomie spectrale de la matrice A par rapport à des paraboles d'équations de type (3.1) avec le discriminant différent de 1. Ce paragraphe est structuré en deux sous-paragraphe. Le premier sous paragraphe 3.3.1 présente la méthode de dichotomie spectrale dans le cas où $b = 0$ et le second sous paragraphe 3.3.2 concerne le cas où $b \neq 0$. Finalement, le paragraphe 3.4 est consacré aux expériences numériques validant les différentes théories.

3.2 Cas de la parabole d'équation de type (3.1) avec le discriminant égal à 1.

Dans ce qui suit, nous examinerons l'équation générale de la parabole (3.1) telle qu'annoncée dans l'introduction et nous déterminerons le projecteur \mathbb{P} pour les paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

L'équation (3.1) de la parabole devient

$$2p \left(\frac{p}{2} - x \right) = (y - pb)^2 \quad (3.5)$$

où $p > 0$.

Lorsque le paramètre $b = 0$, nous sommes dans le cas de la parabole étudiée par Malyshev et Sadkane dans [25]. Cette méthode a été présentée dans le premier chapitre. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas où le coefficient $b \neq 0$. Ce qui nous amène à définir la parabole suivante

$$\tilde{\Gamma} = \{z = x + iy \mid x + i(y - pb) \in \Gamma\}$$

d'équation

$$2p \left(\frac{p}{2} - x \right) = \tilde{y}^2 \quad (3.6)$$

où

$$\tilde{y} = y - pb.$$

Considérons la matrice d'ordre $2n$ définie par

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A_b \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix}$$

où $A_b = A - ipbI_n$

Remarque 3.1 *Les valeurs propres respectives $\tilde{\lambda}$ et z des matrices $\tilde{\mathcal{A}}$ et A sont telles que*

$$z = \left(\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 + ipb.$$

Nous supposons également que $\|A_b\| = 1$. Sinon si $\|A_b\| \neq 1$, alors nous pouvons prendre

$$A_b^1 = \frac{1}{\|A_b\|} A_b \text{ et } p_1 = \frac{1}{\|A_b\|} p.$$

Considérons les grandeurs dichotomiques caractérisées par les paramètres numériques suivants

$$\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} = \sup_{\Re(\tilde{\lambda})=0} \|(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| \text{ et } \alpha_{A_b} = \sup_{z \in \tilde{\Gamma}} \|(zI_n - A)^{-1}\|. \quad (3.7)$$

Nous avons la proposition suivante

Proposition 3.1 *Soit $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}}$ et α_{A_b} les 2 paramètres définies dans (3.7). Supposons que*

$$\|A_b\| = 1 \quad \text{et} \quad |pb| < \frac{1}{\alpha_b}. \quad (3.8)$$

Alors nous avons

$$\alpha_{A_b} \leq \alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} \leq 2(\alpha_{A_b} + \sqrt{\alpha_{A_b}}(1 + \sqrt{\alpha_{A_b} + 1})) \quad (3.9)$$

Preuve

Considérons la matrice

$$(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A_b \\ -I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A_b \\ I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A_b \\ -I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_b & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_b \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1} &= \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_b & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_b \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & A_b \\ I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + ipbI_n) & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + ipbI_n) \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & (A + ipbI_n) \\ I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ((\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 + ipb) I_n - A & 0 \\ 0 & ((\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 + ipb) I_n - A \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & A - ipbI_n \\ I_n & (\tilde{\lambda} + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (zI_n - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI_n - A)^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{z - ipb} I_n & A - ipbI_n \\ I_n & \sqrt{z - ipb} I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{z - ipb}(zI_n - A)^{-1} & (zI_n - A)^{-1}(A - ipbI_n) \\ (zI_n - A)^{-1} & \sqrt{z - ipb}(zI_n - A)^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sachant que la norme de $(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}$ est supérieure ou égale à la norme de chacun de ses composants blocs pris individuellement, on peut en déduire que

$$\tilde{\alpha} = \sup_{\Re(\tilde{\lambda})=0} \|(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| \geq \sup_{z \in \tilde{\Gamma}} \|(zI_n - A)^{-1}\| = \alpha_{A_b}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 \|(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{z - ip\bar{b}}I_n & A - ipbI_n \\ I_n & \sqrt{z - ip\bar{b}}I_n \end{pmatrix} \right\| \| (zI_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq \begin{pmatrix} \|\sqrt{z - ip\bar{b}}I_n\| & \|A - ipbI_n\| \\ \|I_n\| & \|\sqrt{z - ip\bar{b}}I_n\| \end{pmatrix} \| (zI_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq \begin{pmatrix} \sqrt{|z|} + \sqrt{|p\bar{b}|} & 1 \\ 1 & \sqrt{|z|} + \sqrt{|p\bar{b}|} \end{pmatrix} \| (zI_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq (1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{|p\bar{b}|}) \| (zI_n - A)^{-1} \|
 \end{aligned}$$

- si $|z| \leq \frac{\alpha_{A_b} + 1}{\alpha_{A_b}}$, alors

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| &\leq \alpha_{A_b} (\sqrt{|z|} + \sqrt{|p\bar{b}|} + 1) \\
 &\leq \alpha_{A_b} \left(\sqrt{\frac{\alpha_{A_b} + 1}{\alpha_{A_b}}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha_{A_b}}} + 1 \right) \\
 &\leq \alpha_{A_b} + \sqrt{\alpha_{A_b}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_b} + 1})
 \end{aligned}$$

- si $|z| > \frac{\alpha_{A_b} + 1}{\alpha_{A_b}}$ avec les hypothèses $\|A_b\| = 1$ et $|pb| < \frac{1}{\alpha_b}$, alors

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{A}{z} \right\| &< \frac{\alpha_b}{\alpha_b + 1} (\|A_b\| + |pb|) \\
 &< \frac{\alpha_b}{\alpha_b + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha_b} \right) \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 (zI_n - A)^{-1} &= \frac{1}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}}{z^{k-1}} \right) \quad \text{posons } m=k-1 \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{z^m} \right) \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} (I_n - \frac{A}{z})^{-1} \right) \\
 &= \frac{1}{z} (I_n + A(zI_n - A)^{-1})
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \|(\tilde{\lambda}I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}})^{-1}\| &\leq \left\| \frac{1}{z}I_n + \frac{1}{z}A(zI_n - A)^{-1} \right\| \times \left\| 1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{|pb|} \right\| \\
 &\leq (\|A\| \|(zI_n - A)^{-1}\| + 1) \frac{1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{|pb|}}{|z|} \\
 &\leq (\alpha_{A_b} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{|z|}} + \frac{1}{|z|} + \frac{\sqrt{|pb|}}{|z|} \right) \\
 &\leq ((1 + |pb|)\alpha_{A_b} + 1) \\
 &\quad \times \left(\frac{\alpha_{A_b}}{\alpha_{A_b} + 1} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_b}}}{\sqrt{\alpha_{A_b} + 1}} + \frac{\alpha_{A_b} \sqrt{|pb|}}{\alpha_{A_b} + 1} \right) \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{\alpha_{A_b}}\right) (\alpha_{A_b} + 1) \\
 &\quad \times \left(\frac{\alpha_{A_b}}{\alpha_{A_b} + 1} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_b}}}{\sqrt{\alpha_{A_b} + 1}} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_b}}}{\alpha_{A_b} + 1} \right) \\
 &\leq \frac{2 + \alpha_{A_b}}{\alpha_{A_b} + 1} (\alpha_{A_b} + \sqrt{\alpha_{A_b}} \sqrt{\alpha_{A_b} + 1} + \sqrt{\alpha_{A_b}}) \\
 &\leq 2 (\alpha_{A_b} + \sqrt{\alpha_{A_b}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_b} + 1})).
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\alpha_{A_b} \leq \tilde{\alpha} \leq 2 (\alpha_{A_b} + \sqrt{\alpha_{A_b}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_b} + 1})).$$

□

Cela prouve que les paramètres de dichotomie d'une matrice par rapport à une parabole et par rapport à l'axe imaginaire sont équivalents.

Considérons les projecteurs spectraux

- $\tilde{\mathbb{P}}_\infty \in \mathcal{C}^{n \times n}$ sur le sous-espace invariant de A associé aux valeurs propres en dehors de la parabole $\tilde{\Gamma}$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_+ \in \mathcal{C}^{2n \times 2n}$ sur le sous-espace invariant de $\tilde{\mathcal{A}}$ associé aux valeurs propres dans le demi-plan complexe droit.

On obtient la proposition suivante qui caractérise la relation entre $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ et $\tilde{\mathcal{P}}_+$.

Proposition 3.2 *Considérons une partition de la matrice $\tilde{\mathcal{P}}_+$ sous la forme*

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{P}}_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.10)$$

alors

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11} = 2\tilde{\mathcal{P}}_{22} = 4\tilde{\mathcal{P}}_{12}\tilde{\mathcal{P}}_{21} \quad (3.11)$$

De plus

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty A = 4 \times (\tilde{\mathcal{P}}_{12})^2 + 2ipb\tilde{\mathcal{P}}_{11} \quad (3.12)$$

Preuve

Soit \tilde{X} une solution de l'équation matricielle

$$\left(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^2 = A_b \quad (3.13)$$

Soit \tilde{X}_1 une autre solution de la même équation matricielle (3.13). On a également

$$\left(\tilde{X}_1 + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^2 = A_b$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^2 &= \left(\tilde{X}_1 + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) &= \left(\tilde{X}_1 + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) \quad \text{où} \quad \left(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) = - \left(\tilde{X}_1 + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) \\ \Leftrightarrow \tilde{X} &= \tilde{X}_1 \quad \text{où} \quad \tilde{X}_1 = -\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{aligned}$$

Finalement l'autre solution \tilde{X}_1 s'écrit sous la forme $\tilde{X}_1 = -\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n & -\tilde{X} - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{X} & 0 \\ 0 & -\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{X}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n) & (-\tilde{X} - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)(-\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n) \\ \tilde{X} & -\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{X} - \frac{1}{2}(\tilde{X} + 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n) & \frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)(2\tilde{X} + 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n) \\ \frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1}(2\tilde{X} + 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n) & \frac{1}{2}\tilde{X} - \frac{1}{2}(\tilde{X} + 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A_b \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \\
 &= \tilde{\mathcal{A}}.
 \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n & -\tilde{X} - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{X} & 0 \\ 0 & -\tilde{X} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{1}{2}(\tilde{X} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix}$$

soit $\tilde{X} = Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1}$ la forme canonique de Jordan de la matrice \tilde{X} où J_+ et J_- , les blocs de jordan associés respectivement aux valeurs propres situées dans le demi-plan droit et le demi-plan gauche où J_+ est d'ordre k .

En remplaçant la décomposition de \tilde{X} dans la matrice $\tilde{\mathcal{A}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n & -Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \\
 & \begin{bmatrix} Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{bmatrix} \times \\
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \\ -\frac{1}{2} \left(Q \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} Q^{-1} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n & -\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \\
 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \\ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \tilde{\mathcal{Q}} \mathcal{J} \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}
 \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) & -\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix}$$

Sachant que nous avons k valeurs propres de la matrice A_b dans le demi plan complexe droit, nous pouvons donc calculer le projecteur associé.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_+ &= \tilde{\mathcal{Q}} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathcal{Q}}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n & - \begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \\ & I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} J_+ & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (J_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (J_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} & Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} & Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11} & \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} & \tilde{\mathcal{P}}_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{P}}_{11} &= Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{P}}_\infty \\
 \tilde{\mathcal{P}}_{12} &= Q \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 \tilde{\mathcal{P}}_{21} &= Q \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 \tilde{\mathcal{P}}_{22} &= Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{P}}_\infty
 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21} \end{aligned}} \right\} \implies \tilde{\mathbb{P}}_\infty = 4 \tilde{\mathcal{P}}_{12} \tilde{\mathcal{P}}_{21}$$

Notons également qu'avec

$$\begin{aligned}
 A &= A_b + ipbI_n \\
 &= Q \begin{bmatrix} \left(J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k \right)^2 + ipbI_k & 0 \\ 0 & \left(J_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k} \right)^2 + ipbI_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1}
 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{P}}_\infty A &= Q \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \times Q \begin{bmatrix} \left(J_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k \right)^2 + ipbI_k & 0 \\ 0 & \left(J_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k} \right)^2 + ipbI_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &= Q \begin{bmatrix} \left(J_+ + \left(\sqrt{\frac{p}{2}} I_k \right)^2 + ipbI_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &= 4\tilde{\mathcal{P}}_{12}^2 + 2ipb\tilde{\mathcal{P}}_{11}
 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons les égalités (3.11) and (3.12).

□

Remarque 3.2 si le paramètre $b = 0$, les égalités (3.12) se réduisent à celles de (2.10).

Algorithme 3.1 (DichoPb)

- Variables d'entrées : A and I_n telle que le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'ait pas de valeurs propres sur la parabole d'équation $2p \left(\frac{p}{2} - x \right)^2 = (y - pb)^2$ où $p > 0$
- Variables de sorties : $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ et $\tilde{\mathbb{H}}$
 $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ le projecteur sur le sous espace droit de $zI_n - A$ associé aux valeurs propres extérieures à la parabole et la matrice $\tilde{\mathbb{H}}$ dont la norme donne le critère de dichotomie.

1. Détermine la matrice

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}} I_n & A - ipbI_n \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'algorithme 1.6 à $\tilde{\mathcal{A}}$. On obtient le projecteur $\tilde{\mathcal{P}}_+$ sur le sous espace propre droit de $\tilde{\mathcal{A}}$ associé aux valeurs sur le demi plan droit du plan complexe et la matrice $\tilde{\mathbb{H}}$;

3. Si $\|\tilde{\mathbb{H}}\|$ n'est pas large, déterminer le projecteur $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ par

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11}$$

3.3 Cas de la parabole d'équation de type (3.1) avec le discriminant différent de 1

Considérons le changement de variable suivant dans l'équation (3.4)

$$\tilde{x} = x + \frac{p}{2} - d.$$

Nous obtenons

$$2p \left(\frac{p}{2} - \tilde{x} \right) = (y - pb)^2 \quad (3.14)$$

3.3.1 Méthode de dichotomie spectrale avec le coefficient $b = 0$

Considérons l'ensemble

$$\Gamma_d = \left\{ z_d = x + iy/x + \left(\frac{p}{2} - d \right) + iy \in \Gamma \right\}.$$

décrit par l'équation suivante

$$y^2 = 2p \left(\frac{p}{2} - \tilde{x} \right).$$

Soit la matrice

$$\mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}} I_n & A_d \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_d = A + \left(\frac{p}{2} - d \right) I_n \quad (3.15)$$

Les valeurs propres z_d et z des matrices \mathcal{A}_d et A sont liées par

$$z_d = z + \frac{p}{2} - d,$$

Remarque 3.3 Les valeurs propres respectives λ_d et z des matrices \mathcal{A}_d et A sont telles que

$$z = \left(\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 - \frac{p}{2} + d$$

en outre, si $z = x + iy$, alors nous avons

$$\begin{cases} x &= \left(\Re(\lambda_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 - \Im(\lambda_d)^2 - \frac{p}{2} + d \\ y &= 2 \left(\Re(\lambda_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \Im(\lambda_d) \end{cases}$$

supposons que

$$p_d = 2 \left(\Re(\lambda_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2.$$

alors

$$y^2 = 2p_d \left[\frac{p_d}{2} - x - \frac{p}{2} + d \right] = 2p_d \left(\frac{p_d}{2} - \tilde{x} \right)$$

Supposons aussi que $\|A_d\| = 1$. Sinon, (i.e. $\|A_d\| \neq 1$), nous pouvons prendre

$$A_d^1 = \frac{1}{\|A_d\|} A_d \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{1}{\|A_d\|}.$$

Considérons les paramètres numériques $\alpha_{\mathcal{A}_d}$ et α_{A_d} définis par

$$\alpha_{\mathcal{A}_d} = \sup_{\Re(\lambda_d)=0} \|(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}\| \quad \text{et} \quad \alpha_{A_d} = \sup_{z \in \Gamma_d} \|(z I_n - A)^{-1}\| \quad (3.16)$$

la proposition suivante donne la relation entre les paramètres $\alpha_{\mathcal{A}_d}$ et α_{A_d} .

Proposition 3.3 *Soient $\alpha_{\mathcal{A}_d}$ et α_{A_d} les deux paramètres définis dans (3.16). Supposons que*

$$\|A_d\| = 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{p}{2} - d \right| < \frac{1}{\alpha_d}. \quad (3.17)$$

Alors

$$\alpha_{A_d} \leq \alpha_{\mathcal{A}_d} \leq 2 (\alpha_{A_d} + \sqrt{\alpha_{A_d}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_d} + 1})). \quad (3.18)$$

Preuve

Soit la matrice

$$(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d) = \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & -A_d \\ -I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & A_d \\ I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & -A_d \\ -I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_d & 0 \\ 0 & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_d \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1} &= \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_d & 0 \\ 0 & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_d \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & A_d \\ I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + (\frac{p}{2} - d) I_n) & 0 \\ 0 & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + (\frac{p}{2} - d) I_n) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & (A + (\frac{p}{2} - d) I_n) \\ I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - \frac{p}{2} + d) I_n - A & 0 \\ 0 & ((\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - \frac{p}{2} + d) I_n - A \end{bmatrix}^{-1} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n & A + (\frac{p}{2} - d) I_n \\ I_n & (\lambda_d + \sqrt{\frac{p}{2}}) I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (z I_n - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (z I_n - A)^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} I_n & A + (\frac{p}{2} - d) I_n \\ I_n & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} (z I_n - A)^{-1} & (z I_n - A)^{-1} (A + (\frac{p}{2} - d) I_n) \\ (z I_n - A)^{-1} & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} (z I_n - A)^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sachant que la norme de $(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}$ est plus grande ou égale à la norme de chacun de ses composants blocs pris individuellement, nous en déduisons que

$$\alpha_{\mathcal{A}_d} = \sup_{\Re(\lambda_d)=0} \|(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}\| \geq \sup_{z \in \Gamma_d} \|(z I_n - A)^{-1}\| = \alpha_{A_d}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} I_n & A + (\frac{p}{2} - d) I_n \\ I_n & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d} I_n \end{pmatrix} \right\| \| (z I_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq \left\| \begin{pmatrix} \|\sqrt{z + \frac{p}{2} - d}\| & \|A + (\frac{p}{2} - d) I_n\| \\ \|I_n\| & \|\sqrt{z + \frac{p}{2} - d}\| \end{pmatrix} \right\| \| (z I_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d|} & 1 \\ 1 & \sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d|} \end{pmatrix} \right\| \| (z I_n - A)^{-1} \| \\
 &\leq (\sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d|} + 1) \| (z I_n - A)^{-1} \|
 \end{aligned}$$

- Si $|z| \leq \frac{\alpha_{A_d} + 1}{\alpha_{A_d}}$ alors

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}\| &\leq \alpha_{A_d} \left(\sqrt{\frac{\alpha_{A_d} + 1}{\alpha_{A_d}}} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d|} + 1 \right) \\
 &\leq \alpha_{A_d} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\alpha_{A_d}}} \right) + \sqrt{\alpha_{A_d}} \sqrt{1 + \alpha_{A_d}} \\
 &\leq \alpha_{A_d} + \sqrt{\alpha_{A_d}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_d} + 1})
 \end{aligned}$$

- Si $|z| > \frac{\alpha_{A_d} + 1}{\alpha_{A_d}}$ avec les conditions (3.17), nous avons $\left\| \frac{A}{z} \right\| < 1$.
 Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 (z I_n - A)^{-1} &= \frac{1}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \right) \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{z^m} \right) \\
 &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda_d I_{2n} - \mathcal{A}_d)^{-1}\| &\leq \left\| \frac{1}{z} I_n + \frac{1}{z} A(zI_n - A)^{-1} \right\| \times \left(1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{\left| \frac{p}{2} - d \right|} \right) \\
 &\leq \|A(zI_n - A)^{-1} + I_n\| \times \left(\frac{1}{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}} + \frac{\sqrt{\left| \frac{p}{2} - d \right|}}{|z|} \right) \\
 &\leq \left(\left(1 + \left| \frac{p}{2} - d \right| \right) \alpha_{A_d} + 1 \right) \times \left(\frac{\alpha_{A_d}}{\alpha_{A_d} + 1} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_d}}}{\sqrt{\alpha_{A_d} + 1}} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_d}}}{\alpha_{A_d} + 1} \right) \\
 &\leq \frac{(2 + \alpha_{A_d})}{\alpha_{A_d} + 1} (\alpha_{A_d} + \sqrt{\alpha_{A_d}} \sqrt{\alpha_{A_d} + 1} + \sqrt{\alpha_{A_d}}) \\
 &\leq 2(\alpha_{A_d} + \sqrt{\alpha_{A_d}} (1 + \sqrt{\alpha_{A_d} + 1})).
 \end{aligned}$$

□

Considérons les projecteurs spectraux

- $\mathbb{P}_\infty \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sur le sous espace invariant associé aux valeurs propres de A extérieures à la parabole Γ_d .
- $\mathcal{P}_+ \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, sur le sous espace invariant associé aux valeurs propres de \mathcal{A}_d dans le demi plan complexe droit.

La proposition suivante caractérise la relation entre \mathbb{P}_∞ et \mathcal{P}_+ .

Proposition 3.4 *Considérons une partition de la matrice \mathcal{P}_+ sous la forme*

$$\mathcal{P}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11}^{(d)} & \mathcal{P}_{12}^{(d)} \\ \mathcal{P}_{21}^{(d)} & \mathcal{P}_{22}^{(d)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{ij}^{(d)} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.19)$$

Alors

$$\mathbb{P}_\infty = 2\mathcal{P}_{11}^{(d)} = 2\mathcal{P}_{22}^{(d)} = 4\mathcal{P}_{12}^{(d)}\mathcal{P}_{21}^{(d)} \quad (3.20)$$

De plus

$$\mathbb{P}_\infty A = 4(\mathcal{P}_{12}^{(d)})^2 - (p - 2d)\mathcal{P}_{11}^{(d)} \quad (3.21)$$

Preuve

Soit X_d une solution de l'équation matricielle

$$\left(X_d + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^2 = A_d. \quad (3.22)$$

En suivant les mêmes procédures de calcul que dans la proposition 3.2, nous obtenons

$$\mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} X_d + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n & -X_d - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_d & 0 \\ 0 & -X_d - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(X_d + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \\ -\frac{1}{2}(X_d + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \end{bmatrix}$$

Soit $X_d = Q_d \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} Q_d^{-1}$ la forme canonique de Jordan de la matrice X_d avec M_+ et M_- , les blocs de Jordan associés respectivement aux valeurs propres de X_d situées dans le demi-plan complexe droit et le demi-plan complexe gauche.

En remplaçant X_d par sa décomposition dans la \mathcal{A}_d , nous obtenons

$$\mathcal{A}_d = \tilde{Q}_d \mathcal{M} (\tilde{Q}_d)^{-1}$$

avec

$$\tilde{Q}_d = \begin{bmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & Q_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right) & - \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - 2\sqrt{\frac{p}{2}} I_n \end{bmatrix}$$

Par conséquent, nous pouvons calculer le projecteur associé

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_+ &= (\tilde{Q}_d) \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\tilde{Q}_d)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & Q_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n & \\ & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \begin{bmatrix} \\ & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \\ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^{-1} & 0 \\ 0 & Q_d^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & Q_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (M_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (M_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^{-1} & 0 \\ 0 & Q_d^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & Q_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^{-1} & 0 \\ 0 & Q_d^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_d \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} & Q \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \\ Q_d \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} & Q_d \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11}^{(d)} & \mathcal{P}_{12}^{(d)} \\ \mathcal{P}_{21}^{(d)} & \mathcal{P}_{22}^{(d)} \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{11}^{(d)} &= Q_d \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} = \frac{1}{2}\mathbb{P}_\infty \\ \mathcal{P}_{12}^{(d)} &= Q_d \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \\ \mathcal{P}_{21}^{(d)} &= Q_d \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \\ \mathcal{P}_{22}^{(d)} &= Q_d \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} = \frac{1}{2}\mathbb{P}_\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{P}_\infty = 4\mathcal{P}_{12}^{(d)}\mathcal{P}_{21}^{(d)}$$

Avec $X_d = Q \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} Q_d^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} A &= A_d - \left(\frac{p}{2} - d\right) I_n \\ &= Q_d \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d\right)I_k & 0 \\ 0 & \left(M_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d\right)I_{n-k} \end{bmatrix} Q_d^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\infty A &= Q \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \times Q \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d\right)I_k & 0 \\ 0 & \left(M_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d\right)I_{n-k} \end{bmatrix} Q_d^{-1} \\ &= Q_d \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d\right)I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_d^{-1} \\ &= 4(\mathcal{P}_{12}^{(d)})^2 - (p - 2d)\mathcal{P}_{11}^{(d)} \end{aligned}$$

d'où (3.20) et (3.21). \square

Remarque 3.4 Si les paramètres $d = \frac{p}{2}$, alors les égalités (3.21) sont réduites aux égalités (2.10).

Algorithme 3.2 (DichoPd)

- Variables d'entrées : les matrices A , I_n et les nombres réels d et p tel que le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'ait pas de valeurs propres sur la parabole d'équation $2p(d - x) = y^2$ avec $p > 0$ et $d > 0$
- Variables de sorties : \mathbb{P}_∞ and \mathbb{H}_d .
 \mathbb{P}_∞ étant le projecteur sur le sous-espace droit de $zI_n - A$ associé aux valeurs propres en dehors de la parabole et \mathbb{H}_d , la matrice dont la norme définit le critère de dichotomie.

1. Déterminer la matrice

$$\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A + (\frac{p}{2} - d)I_n \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'algorithme 1.6 à \mathcal{A}_d . On obtient le projecteur \mathcal{P}_+ sur l'espace propre droit de \mathcal{A}_d associé aux valeurs propres sur le demi-plan droit du plan complexe et la matrice \mathbb{H}_d .
3. Si $\|\mathbb{H}_d\|$ n'est pas large, déterminer le projecteur \mathbb{P}_∞ par

$$\mathbb{P}_\infty = 2\mathcal{P}_{11}^{(d)}.$$

3.3.2 Méthode de dichotomie spectrale avec le coefficient $b \neq 0$

Considérons l'ensemble

$$\tilde{\Gamma}_d = \left\{ z = x + iy/x + \left(\frac{p}{2} - d\right) + i(y - pb) \in \Gamma \right\}$$

décrit par l'équation (3.14).

Nous considérons la matrice d'ordre $2n$ suivante

$$\tilde{\mathcal{A}}_d = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A_{db} \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{db} = A + \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_n.$$

Les valeurs propres respectives $\tilde{\lambda}_d$ et z_{db} des matrices $\tilde{\mathcal{A}}_d$ et A_{db} vérifient la relation suivante

$$z_{db} = \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \tilde{\lambda}_d \right)^2.$$

Cela conduit à la remarque suivante

Remarque 3.5 Les valeurs propres respectives $\tilde{\lambda}_d$ et z des matrices $\tilde{\mathcal{A}}_d$ et A satisfont la relation

$$z = \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \tilde{\lambda}_d \right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb \right)$$

De plus, nous obtenons

$$\begin{cases} x = \left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 - \Im(\tilde{\lambda}_d)^2 + \frac{p}{2} - d \\ y = 2 \left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \Im(\tilde{\lambda}_d) - pb \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 \left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 \Im(\tilde{\lambda}_d)^2 - 4 \left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right) \Im(\tilde{\lambda}_d) pb + p^2 b^2 \\ &= \left[\left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 - x + \sqrt{\frac{p}{2}} - d - ipb \right] \end{aligned}$$

En posant

$$\tilde{p}_d = 2 \left(\Re(\tilde{\lambda}_d) + \sqrt{\frac{p}{2}} - pb \right)^2$$

nous avons

$$y^2 = 2\tilde{p}_{db} \left(\frac{\tilde{p}_{db}}{2} - x - \frac{p}{2} + db \right) = 2\tilde{p}_{db} \left(\frac{\tilde{p}_{db}}{2} - \tilde{x} \right)$$

Nous supposons également que $\|A_{db}\| = 1$. Sinon (si $\|A_{db}\| \neq 1$), on peut prendre

$$A_{db}^1 = \frac{1}{\|A_{db}\|} A_{db} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_{db}^1 = \frac{1}{\|A_{db}\|}.$$

Considérons les paramètres numériques $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d}$ et $\alpha_{A_{db}}$ définis par

$$\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d} = \sup_{\Re(\tilde{\lambda}_d)=0} \|(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}\| \quad \text{et} \quad \alpha_{A_{db}} = \sup_{z \in \tilde{\Gamma}_d} \|(zI_n - A)^{-1}\| \quad (3.23)$$

La proposition suivante donne une relation entre les paramètres $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d}$ et $\alpha_{A_{db}}$.

Proposition 3.5 Soient $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d}$ et $\alpha_{A_{db}}$ les deux paramètres définis dans (3.27). Supposons que

$$\|A_{db}\| = 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{p}{2} - d - ipb \right| < \frac{1}{\alpha_{A_{db}}} \quad (3.24)$$

Alors

$$\alpha_{A_{db}} \leq \alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d} \leq 2 \left(\alpha_{A_{db}} + \sqrt{\alpha_{A_{db}}} \left(\sqrt{1 + \alpha_{A_{db}}} + 1 \right) \right). \quad (3.25)$$

Preuve

Soit la matrice

$$(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d) = \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A_{db} \\ -I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A_{db} \\ I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & -A_{db} \\ -I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_{db} & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_{db} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1} &= \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_{db} & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - A_{db} \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A_{db} \\ I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n) & 0 \\ 0 & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 I_n - (A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & (A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n) \\ I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ((\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - \frac{p}{2} + d - ipb)I_n - A & 0 \\ 0 & ((\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})^2 - \frac{p}{2} + d - ipb)I_n - A \end{bmatrix}^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n & A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n \\ I_n & (\tilde{\lambda}_d + \sqrt{\frac{p}{2}})I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (zI_n - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI_n - A)^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n & A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n \\ I_n & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}(zI_n - A)^{-1} & (zI_n - A)^{-1}(A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n) \\ (zI_n - A)^{-1} & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}(zI_n - A)^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sachant que la norme de $(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}$ est supérieure ou égale à la norme de chacun de ses composants blocs pris individuellement, on peut en déduire que

$$\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}_d} = \sup_{\Re(\tilde{\lambda}_d)=0} \|(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}\| \geq \sup_{z \in \tilde{\Gamma}_d} \|(zI_n - A)^{-1}\| = \alpha_{A_{db}}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n & A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n \\ I_n & \sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n \end{pmatrix} \right\| \|(zI_n - A)^{-1}\| \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \|\sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n\| & \|A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n\| \\ \|I_n\| & \|\sqrt{z + \frac{p}{2} - d - ipb}I_n\| \end{pmatrix} \right\| \|(zI_n - A)^{-1}\| \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d - ipb|} & 1 \\ 1 & \sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d - ipb|} \end{pmatrix} \right\| \|(zI_n - A)^{-1}\| \\
&\leq \left(\sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d - ipb|} + 1 \right) \|(zI_n - A)^{-1}\|
\end{aligned}$$

- si $|z| \leq \frac{\alpha_{A_{db}} + 1}{\alpha_{A_{db}}}$ alors

$$\begin{aligned} \|(\lambda I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}\| &\leq \alpha_{A_{db}} (\sqrt{|z|} + \sqrt{|\frac{p}{2} - d - ipb|} + 1) \\ &\leq \alpha_{A_{db}} \left(\sqrt{\frac{\alpha_{A_{db}} + 1}{\alpha_{A_{db}}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{db}}} + 1 \right) \\ &\leq \alpha_{A_{db}} + \sqrt{\alpha_{db}} (\sqrt{\alpha_{db} + 1} + 1) \end{aligned}$$

- Si $|z| > \frac{\alpha_{A_{db}} + 1}{\alpha_{A_{db}}}$ avec les conditions (3.24), nous avons $\left\| \frac{A}{z} \right\| < 1$.
En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A}{z} \right\| &< \frac{\alpha_{db}}{\alpha_{db} + 1} \left(\|A_{db}\| + |\frac{p}{2} - d - ipb| \right) \\ &< \frac{\alpha_{db}}{\alpha_{db} + 1} \left(1 + \frac{1}{\alpha_{db}} \right) \\ &< 1 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} (zI_n - A)^{-1} &= \frac{1}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z} \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{z^k} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{z^m} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(I_n + \frac{A}{z} \left(I_n - \frac{A}{z} \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{\lambda}_d I_{2n} - \tilde{\mathcal{A}}_d)^{-1}\| &\leq \left\| \frac{1}{z} I_n + \frac{1}{z} A (z I_n - A)^{-1} \right\| \times \left\| 1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{\left| \frac{p}{2} - d - ipb \right|} \right\| \\
&\leq (\|A(z I_n - A)^{-1}\| + 1) \frac{1 + \sqrt{|z|} + \sqrt{\left| \frac{p}{2} - d - ipb \right|}}{|z|} \\
&\leq \left(\left(1 + \left| \frac{p}{2} - d - ipb \right| \right) \alpha_{A_{db}} + 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{|z|}} + \frac{1}{|z|} + \frac{\sqrt{\left| \frac{p}{2} - d - ipb \right|}}{|z|} \right) \\
&\leq \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha_{A_{db}}} \right) + 1 \right) \left(\frac{\sqrt{\alpha_{A_{db}}}}{\sqrt{\alpha_{A_{db}} + 1}} + \frac{\alpha_{A_{db}}}{\alpha_{A_{db}} + 1} + \frac{\sqrt{\alpha_{A_{db}}}}{\alpha_{A_{db} + 1}} \right) \\
&\leq \left(\frac{\alpha_{A_{db}} + 2}{\alpha_{A_{db}} + 1} \right) (\sqrt{\alpha_{A_{db}}} \sqrt{\alpha_{A_{db}} + 1} + \sqrt{\alpha_{A_{db}}} + \alpha_{db}) \\
&\leq 2 (\alpha_{A_{db}} + \sqrt{\alpha_{A_{db}}} (\sqrt{\alpha_{A_{db} + 1}} + 1))
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\alpha_{A_{db}} \leq \alpha_{\mathcal{A}_{db}} \leq 2 (\alpha_{A_{db}} + \sqrt{\alpha_{A_{db}}} (\sqrt{\alpha_{A_{db} + 1}} + 1)).$$

□

Considérons les projecteurs

- $\tilde{\mathbb{P}}_\infty \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sur le sous espace invariant de A_{db} associé aux valeurs propres en dehors de la parabole $\tilde{\Gamma}_d$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_+ \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ sur le sous-espace invariant de $\tilde{\mathcal{A}}_d$ associé aux valeurs propres dans le demi-plan complexe droit.

La proposition suivante caractérise la relation entre $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ et $\tilde{\mathcal{P}}_+$

Proposition 3.6 *Considérons une partition de la matrice $\tilde{\mathcal{P}}_+$ sous la forme*

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} & \tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21}^{(d)} & \tilde{\mathcal{P}}_{22}^{(d)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{(d)} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.26)$$

Alors

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} = 2\tilde{\mathcal{P}}_{22}^{(d)} = 4\tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)}\tilde{\mathcal{P}}_{21}^{(d)} \quad (3.27)$$

De plus

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty A = 4(\tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)})^2 - (p - 2d - 2ipb)\tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} \quad (3.28)$$

Preuve

Soient \widetilde{X}_d une solution de l'équation matricielle

$$\left(\widetilde{X}_d + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n\right)^2 = A_{db}. \quad (3.29)$$

Suivant le même calcul que dans la preuve de Proposition 3.2, nous obtenons

$$\widetilde{\mathcal{A}}_d = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_d + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n & -\widetilde{X}_d - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \widetilde{X}_d & 0 \\ 0 & -\widetilde{X}_d - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\widetilde{X}_d + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{1}{2}(\widetilde{X}_d + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n)^{-1} & \frac{1}{2}I_n \end{bmatrix}$$

Soit $\widetilde{X}_d = Q_{db} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} Q_{db}^{-1}$ la forme canonique de Jordan de la matrice \widetilde{X}_d avec M_+ et M_- , les blocs de Jordan associés respectivement aux valeurs propres de \widetilde{X}_d situés dans le demi-plan droit et le demi-plan gauche.

En remplaçant \widetilde{X}_d par sa décomposition dans la matrice $\widetilde{\mathcal{A}}_d$, on obtient

$$\widetilde{\mathcal{A}}_d = \widetilde{Q}_{db} \mathcal{M} (\widetilde{Q}_{db})^{-1}$$

avec

$$\widetilde{Q}_{db} = \begin{bmatrix} Q_{db} & 0 \\ 0 & Q_{db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}}I_n\right) & -\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}}I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - 2\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{bmatrix}$$

On peut donc calculer le projecteur associé

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{P}}_+ &= (\tilde{\mathcal{Q}}_{db}) \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\tilde{\mathcal{Q}}_{db})^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_{db} & 0 \\ 0 & Q_{db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n & \\ & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \begin{bmatrix} \\ & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \\ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{p}{2}} I_n \right)^{-1} & \frac{1}{2} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{db}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{db}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_{db} & 0 \\ 0 & Q_{db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (M_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \\ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & (M_- + \sqrt{\frac{p}{2}} I_{n-k})^{-1} \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{db}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{db}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_{db} & 0 \\ 0 & Q_{db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{db}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{db}^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} & Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \\ Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}} I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} & Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} & \tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21}^{(d)} & \tilde{\mathcal{P}}_{22}^{(d)} \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} &= Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbb{P}}_{\infty} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)} &= \frac{1}{2}Q_{db} \begin{bmatrix} M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{21}^{(d)} &= \frac{1}{2}Q_{db} \begin{bmatrix} (M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \\ \tilde{\mathcal{P}}_{22}^{(d)} &= Q_{db} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbb{P}}_{\infty} \end{aligned}$$

Avec $\tilde{X}_d = Q_{db} \begin{bmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{bmatrix} Q_{db}^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} A &= A_{db} - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_n \\ &= Q_{db} \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_k & 0 \\ 0 & \left(M_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_{n-k} \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \end{aligned}$$

et

$\tilde{\mathbb{P}}_{\infty} A$

$$\begin{aligned} &= Q_{db} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_k & 0 \\ 0 & \left(M_- + \sqrt{\frac{p}{2}}I_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_{n-k} \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \\ &= Q_{db} \begin{bmatrix} \left(M_+ + \sqrt{\frac{p}{2}}I_k\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - d - ipb\right) I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{db}^{-1} \\ &= 4(\tilde{\mathcal{P}}_{12}^{(d)})^2 - (p - 2d - 2ipb)\tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)} \end{aligned}$$

d'où (3.27) et (3.28). \square

Remarque 3.6 Nous notons que :

- Si $d = \frac{p}{2}$, alors les égalités (3.28) sont réduites à celles des égalités (3.12).

- Si $b = 0$, alors les égalités (3.28) sont réduites à celles des égalités (3.21).
- Si $b = 0$ et $d = \frac{p}{2}$, alors les égalités (3.28) sont réduites à celles des égalités (2.10).

Algorithme 3.3 (DichoPdb)

- Variables d'entrées : les matrices A , I_n et les nombres réels b , d et p tel que le faisceau matriciel $zI_n - A$ n'ait pas de valeurs propres sur la parabole d'équation $2p(d - x) = (y - ipb)^2$ avec $p > 0$ et $d > 0$.
- Variables de sorties : $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$, $\tilde{\mathbb{H}}_d$ et $b \neq 0$.
 $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ étant le projecteur sur le sous-espace droit de $zI_n - A$ associé aux valeurs propres en dehors de la parabole et $\tilde{\mathbb{H}}_d$ la matrice dont la norme définit le critère de dichotomie.

1. Déterminer la matrice

$$\tilde{\mathcal{A}}_d = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n & A + (\frac{p}{2} - d - ipb)I_n \\ I_n & -\sqrt{\frac{p}{2}}I_n \end{pmatrix}$$

2. Appliquer l'algorithme 1.6 à $\tilde{\mathcal{A}}_d$ pour calculer le projecteur $\tilde{\mathcal{P}}_+$ sur l'espace propre droit de $\tilde{\mathcal{A}}_d$ associé aux valeurs propres sur le demi-plan droit du plan complexe et la matrice $\tilde{\mathbb{H}}_d$.
3. Si $\|\tilde{\mathbb{H}}_d\|$ n'est pas large, déterminer le projecteur $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ par

$$\tilde{\mathbb{P}}_\infty = 2\tilde{\mathcal{P}}_{11}^{(d)}.$$

3.4 Expériences numériques

Dans cette partie, nous réalisons des exemples numériques à l'aide de la matrice W de l'exemple 1 du chapitre 3 de [10], et d'une fonction matricielle (voir [10, 11, 12]), sur lesquelles, nous appliquons les algorithmes 1.8, 3.1, 3.2 et 3.3 pour des paramètres positifs p, b et d donnés.

Exemple 3.1 Considerons la matrice W définie dans l'exemple 2.1.

- L'application de l'algorithme 1.8 à la matrice W donne la figure et les résultats suivants :

Ces différentes figures sur FIGURE 3.1 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty W - W\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

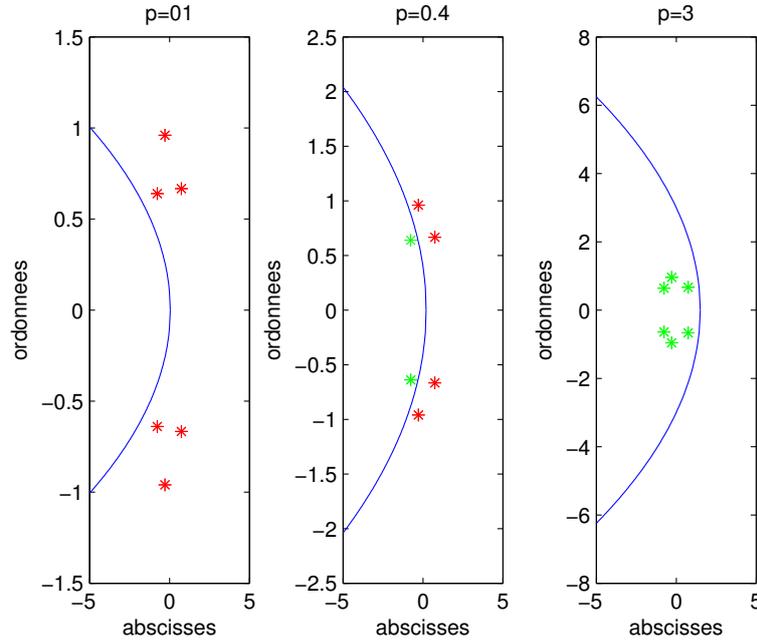


FIGURE 3.1 – Partition du spectre de la matrice W par la parabole $2p\left(\frac{p}{2} - x\right) = y^2$.

TABLE 3.1 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichocP pour trois valeurs du paramètre p

p	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty W - W\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
0.1	12	1	$3.5155 \cdot 10^{-15}$	$5.9030 \cdot 10^{-15}$	1.1858
0.4	8	1	$2.9088 \cdot 10^{-15}$	$6.3259 \cdot 10^{-15}$	4.5871
3	0	$5.3872 \cdot 10^{-16}$	$5.3872 \cdot 10^{-16}$	$8.3847 \cdot 10^{-16}$	4.3483

- L'application de l'algorithme 3.1 à la matrice W donne la figure et les résultats suivants : Ces différentes figures FIGURE 3.2 montrent comment une

TABLE 3.2 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.1) pour différentes valeurs de p et b

p	b	$tr(\tilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty W - W\tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{H}}\ $
5	0.2	$4.4409 \cdot 10^{-16}$	$4.7063 \cdot 10^{-16}$	$4.7063 \cdot 10^{-16}$	$7.8336 \cdot 10^{-16}$	0.5963
1	5	12	1	$6.9714 \cdot 10^{-15}$	$7.4075 \cdot 10^{-15}$	0.7406
2	0.75	4	1	$4.5634 \cdot 10^{-15}$	$1.2884 \cdot 10^{-14}$	7.25121

parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty W - W\tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\tilde{\mathbb{P}}$ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

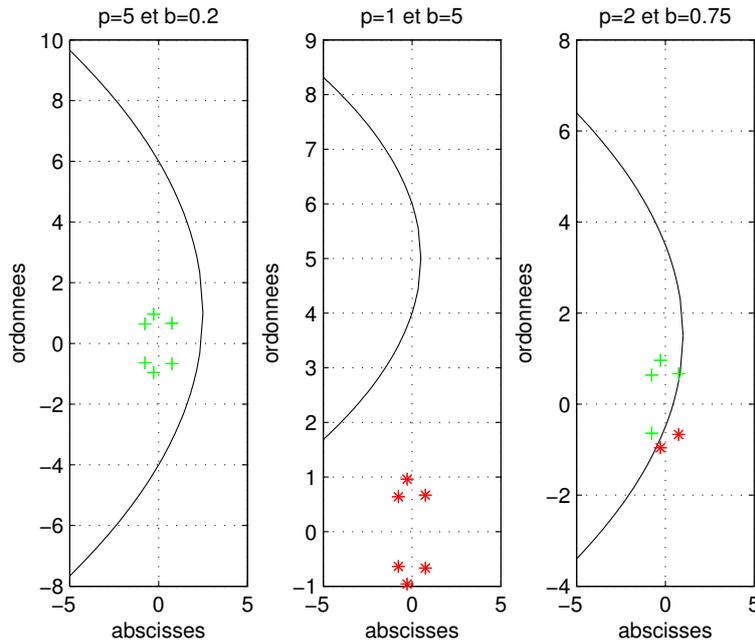


FIGURE 3.2 – Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$.

- L'application de l'algorithme 3.2 à la matrice W donne la figure et les résultats suivants :

TABLE 3.3 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.2) pour différentes valeurs de p et d

p	d	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty W - W \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}_\infty\ $
2	0.2	4	1	$6.0874 \cdot 10^{-15}$	$9.2603 \cdot 10^{-15}$	2.4430
0.1	0.5	12	1	$3.0977 \cdot 10^{-15}$	$4.1540 \cdot 10^{-15}$	4.5156
2	2	$-1.7764 \cdot 10^{-15}$	$4.6198 \cdot 10^{-16}$	$4.6198 \cdot 10^{-16}$	$4.7609 \cdot 10^{-16}$	0.4901

Ces différentes figures sur FIGURE 3.3 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty W - W \mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- L'application de l'algorithme 3.3 à la fonction matricielle W donne la figure et les résultats suivants :

Ces différentes figures sur FIGURE 3.4 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty W - W \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$

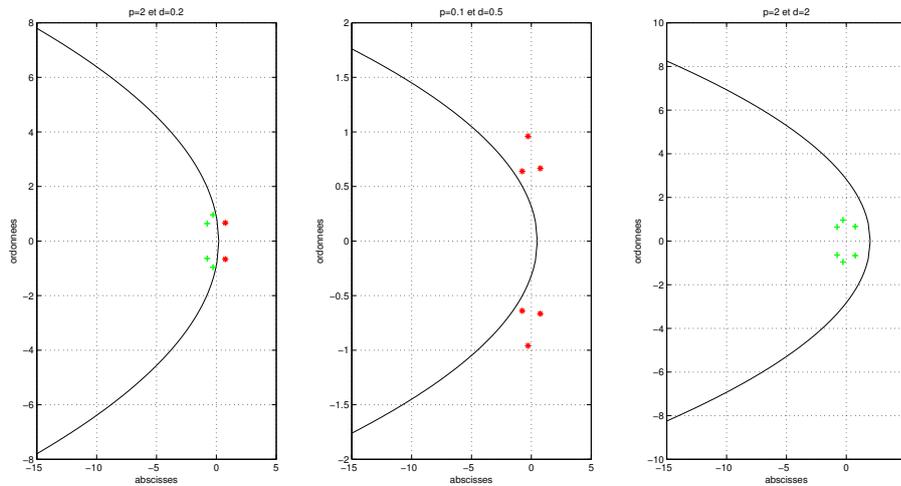


FIGURE 3.3 – Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(d - x) = y^2$.

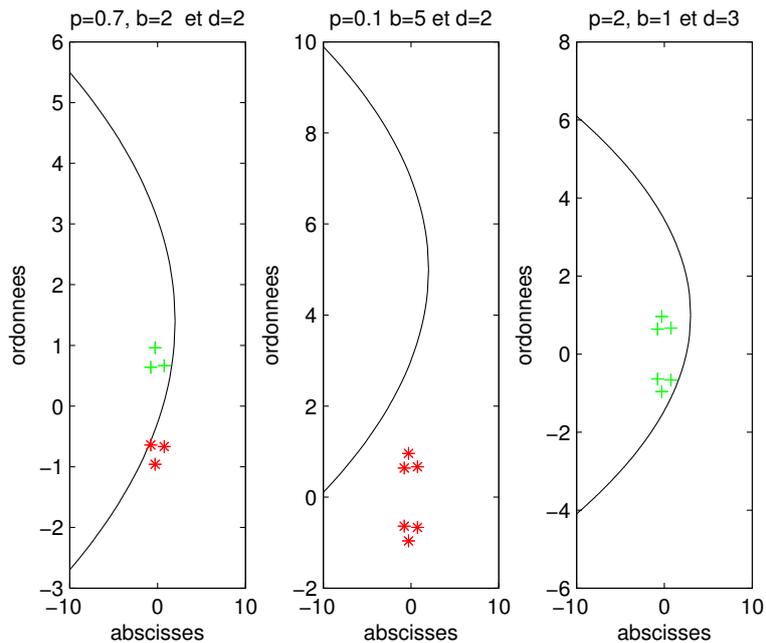


FIGURE 3.4 – Partition du spectre de la matrice W par la parabole d'équation $2p(d - x) = (y - pb)^2$.

est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

Exemple 3.2 Soit la matrice A d'ordre 40 définie ([25] par $Q \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$. La

TABLE 3.4 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_d$ en appliquant l'algorithme DichoPdb (3.3) pour différentes valeurs de p , b and d

p	b	d	$tr(\widetilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty W - W \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{H}}_\infty\ $
0.7	2	2	6	1	$4.5855 \cdot 10^{-15}$	$8.7742 \cdot 10^{-15}$	18.4233
1	5	1	12	1	$5.7623 \cdot 10^{-15}$	$7.3480 \cdot 10^{-15}$	1.3453
1	1	3	0	$7.7570 \cdot 10^{-17}$	$7.7570 \cdot 10^{-17}$	$1.0234 \cdot 10^{-16}$	2.4265

matrice Q est une matrice unitaire obtenue par la QR-factorisation d'une matrice dont les éléments sont choisis de manière aléatoire entre -1 et 1. La matrice A_{11} est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 20 dont les éléments diagonaux sont sur la parabole d'équation $y^2 = 1 - 2x$. Les autres éléments sont générés de manière aléatoire entre 0 et 1. La matrice A_{22} est aussi une matrice triangulaire supérieure d'ordre 20 dont les éléments diagonaux sont tels que $A_{22}(k, k) = \frac{1}{40}$ pour $k = 1, 2, \dots, 20$. Les autres éléments de la matrice sont générés automatiquement entre 0 et 1. La matrice A_{12} est une matrice aléatoire dont les éléments sont entre 0 et 1. La norme de la matrice A est égale à .

- L'application de l'algorithme 1.8 à la matrice A donne la figure et les résultats suivants :

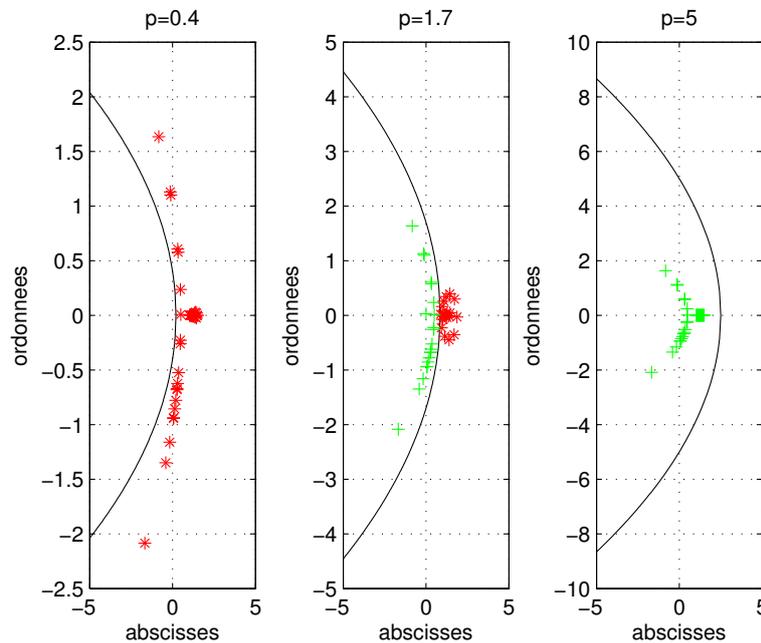


FIGURE 3.5 – Partition du spectre de la matrice A par la parabole $2p(\frac{p}{2} - x) = y^2$.

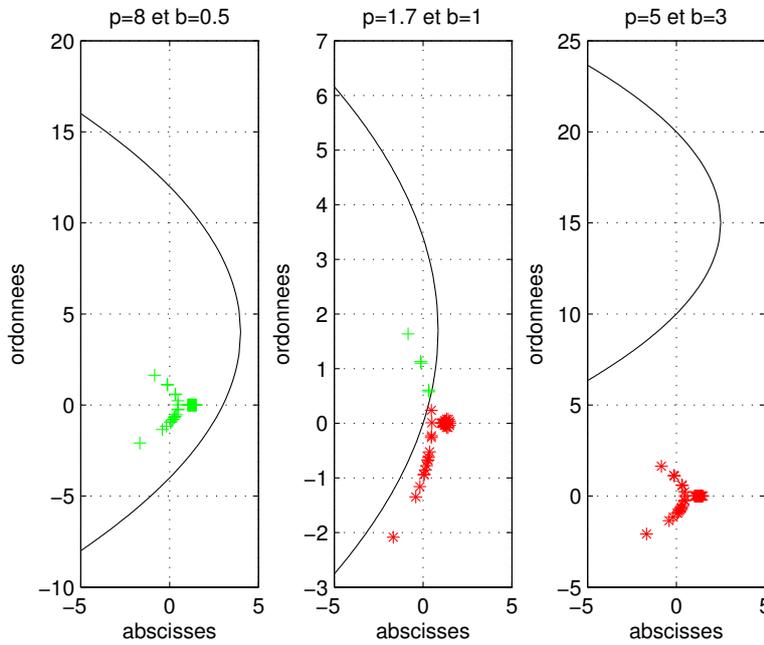
Ces différentes figures sur FIGURE 3.5 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty A - A \mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞

TABLE 3.5 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichocP pour trois valeurs du paramètre p

(p)	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty A - A\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
0.4	40	1	0	0	$6.8678 \cdot 10^4$
1.7	20	$6.4745 \cdot 10^4$	$1.981 \cdot 10^3$	$1.17 \cdot 10^2$	$3.7303 \cdot 10^{12}$
5	0	0	0	0	$1.2316 \cdot 10^7$

est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- L'application de l'algorithme 3.1 à la matrice A donne la figure et les résultats suivants : Ces différents graphiques sur la figure 3.6 montrent comment une

FIGURE 3.6 – Partition du spectre de la matrice A par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$.TABLE 3.6 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPb (3.1) pour différentes valeurs de p et b

p	b	$tr(\tilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty A - A\tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{H}}\ $
8	0.5	0	$3.12 \cdot 10^{-11}$	$3.12 \cdot 10^{-11}$	$2.445 \cdot 10^{-12}$	
1.7	1	35	230	0	0	$9.2795 \cdot 10^5$
5	3	40	1	0	0	1.3213

parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice

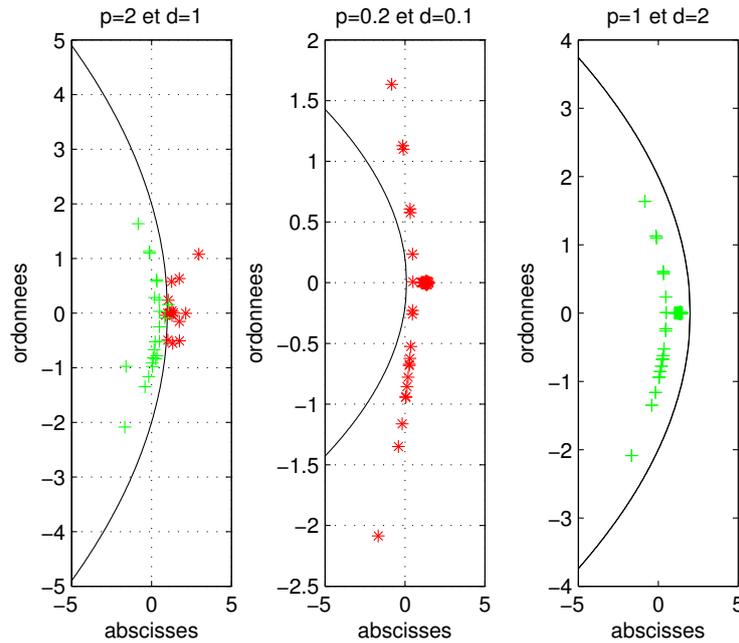


FIGURE 3.7 – Partition de la matrice A par la parabole d'équation $2p(d - x) = y^2$.

donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty A - A\tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- L'application de l'algorithme 3.2 à la matrice A donne la figure et les résultats suivants :

TABLE 3.7 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoPd (3.2) pour différentes valeurs de p et d

p	d	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty A - A\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}_\infty\ $
2	1	17	$5.75 \cdot 10^4$	$7.4156 \cdot 10^4$	$5.7507 \cdot 10^4$	$8.2036e \cdot 10^{14}$
0.2	0.1	40	1	0	0	$2.7964 \cdot 10^3$
1	2	0	$3.34 \cdot 10^9$	$3.34 \cdot 10^9$	$1.377 \cdot 10^{10}$	$2.2512 \cdot 10^{10}$

Ces différentes figures sur FIGURE 3.7 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty A - A\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- L'application de l'algorithme 3.3 à la matrice A donne la figure et les résultats suivants :

Ces différentes figures sur FIGURE 3.8 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée.

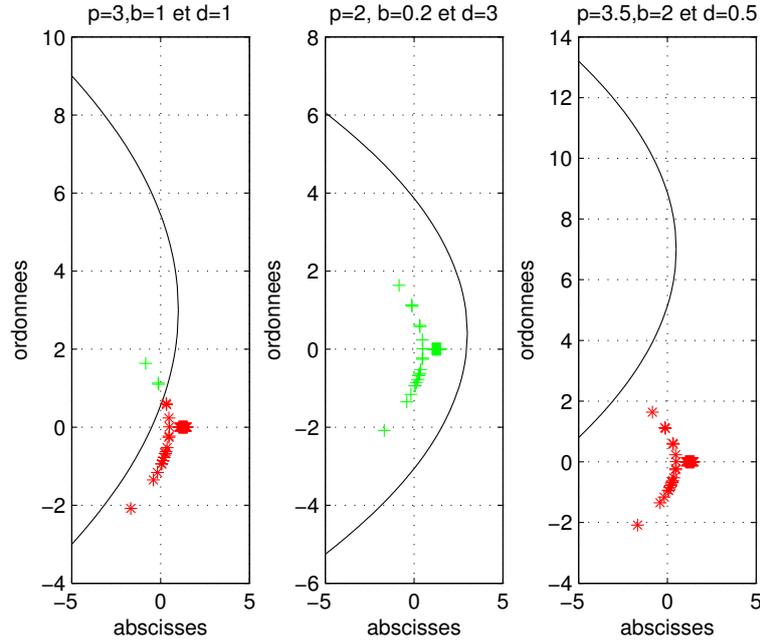


FIGURE 3.8 – Partition du spectre de la matrice A par la parabole d'équation $2p(d-x)^2 = (y-pb)^2$.

TABLE 3.8 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ en appliquant l'algorithme DichoPdb (3.3) pour différentes valeurs de p , b and d

p	b	d	$tr(\widetilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty A - A\widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{H}}_\infty\ $
3	1	1	37	4.3503	0	0	$3.7256 \cdot 10^3$
2	0.2	3	0	$1.97 \cdot 10^{-14}$	$1.97 \cdot 10^{-14}$	$1.96 \cdot 10^{-13}$	$2.3975 \cdot 10^5$
3.5	2	0.5	40	1	0	0	1.7421

Les valeurs obtenues pour $\|\widetilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\widetilde{\mathbb{P}}_\infty A - A\widetilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\widetilde{\mathbb{H}}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

Exemple 3.3 Soit la fonction matricielle $W(t)$ définie par

$$W(t) = \begin{bmatrix} -(A(s(t)))^{-T} \cos(w(t)) & -(A(s(t)))^{-T} \sin(w(t)) \\ A(s(t)) \sin(w(t)) & (A(s(t)))^{-T} \cos(w(t)) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

avec

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1-s^2 & -1 \\ s^2 & 1-s^2 \end{pmatrix}, \quad w(t) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin(3t) \right) \quad \text{et} \quad s(t) = 4 \sin(3t)$$

- L'application de l'algorithme 1.8 à la fonction matricielle (3.30) donne les résultats suivants :

TABLE 3.9 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral \mathbb{P}_∞ en appliquant l'algorithme DichoP pour trois valeurs de p

p	$tr(\mathbb{P}_\infty)$	$\ \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{P}_\infty W(t) - W(t)\mathbb{P}_\infty\ $	$\ \mathbb{H}\ $
4	0	0	0	0	4.0502
1.3	2	1.6305	$2.3747 \cdot 10^{-15}$	$5.6077 \cdot 10^{-15}$	63.1478
0.2	4	1	$2.0540 \cdot 10^{-15}$	$5.3639 \cdot 10^{-15}$	6.2228

• Pour $t = 3.5$,

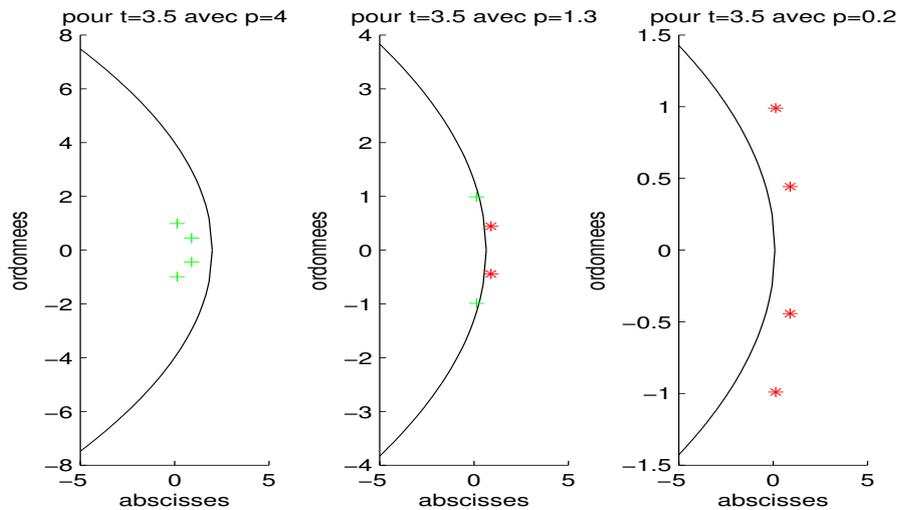


FIGURE 3.9 – Partition de la matrice $W(t)$ pour $t = 3.5$ par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = y^2$.

Ces différentes figures sur FIGURE 3.9 montrent comment une parabole Γ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Dans le tableau de valeurs ci-dessus, la trace $tr(\mathbb{P}_\infty)$ de \mathbb{P}_∞ indique le nombre de valeurs propres en dehors de la parabole. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{P}\|$ confirment ce qui a été dit ci-dessus. Le calcul de $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty W(t) - W(t)\mathbb{P}_\infty\|$ prouvent que \mathbb{P}_∞ est un projecteur et les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{H}\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie. Cela montre l'efficacité de la méthode.

- La partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec les paramètres $p \in \{0.5, 1, 2, 4\}$ nous donne la figure 3.10. Ces graphiques décrivent le portrait spectral de $W(t)$, $\forall t \in [0; 2\pi]$

Cette dichotomie du spectre de la matrice $W(t)$ réalisée par la parabole Γ est mise en évidence grâce à des couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).

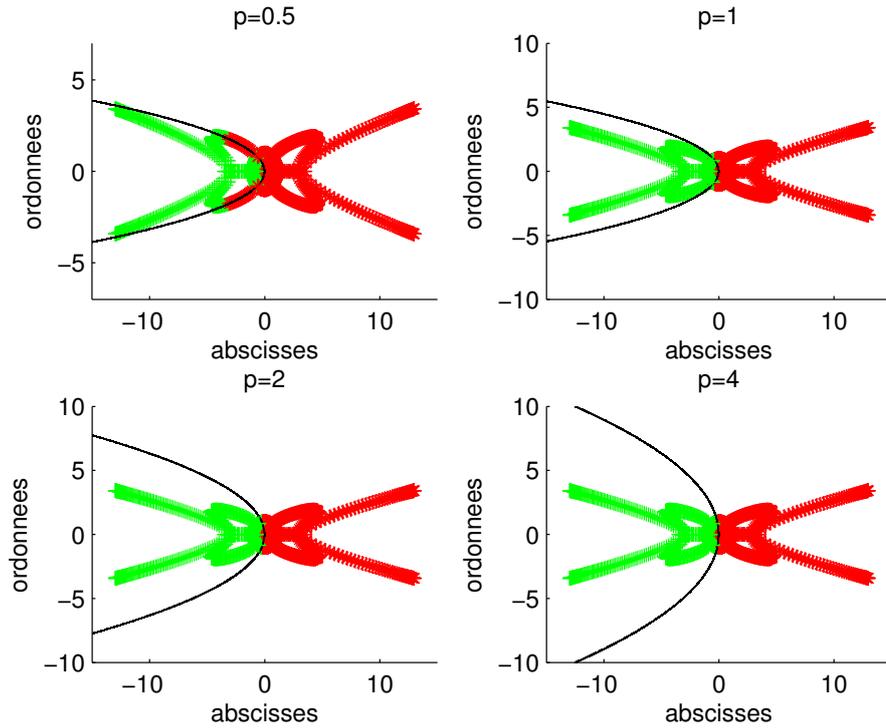


FIGURE 3.10 – Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ pour $p \in \{0.5, 1, 2, 4\}$.

- L'application de l'algorithme 3.1 à la fonction matricielle 3.30 donne les résultats suivants :
 - Pour $t = 6$,

TABLE 3.10 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ par application de l'algorithme DichoPb pour différentes valeurs de p et b

p	b	$tr(\tilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{P}}_\infty W(t) - W(t)\tilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \tilde{\mathbb{H}}_\infty\ $
2	1	3	1.0268	$1.4726 \cdot 10^{-15}$	$2.2659 \cdot 10^{-15}$	3.9802
2	3	4	1	$2.6170 \cdot 10^{-15}$	$3.9255 \cdot 10^{-15}$	0.9799
2	0.1	0	$4.9838 \cdot 10^{-16}$	$4.9838 \cdot 10^{-16}$	$8.0143 \cdot 10^{-16}$	29.4351
0.1	0.5	4	1	$2.8478 \cdot 10^{-15}$	$5.1651 \cdot 10^{-15}$	1.1260
1	0.5	3	1.6455	$2.6392 \cdot 10^{-15}$	$2.6392 \cdot 10^{-15}$	7.7339
4	0.5	0	$4.8120 \cdot 10^{-16}$	$4.8120 \cdot 10^{-16}$	$6.0288 \cdot 10^{-16}$	3.7896

Ces différents graphiques sur FIGURE 3.11 montrent comment une parabole $\tilde{\Gamma}$ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Comme dans le cas de la parabole Γ , les valeurs obtenues pour $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty W(t) - W(t)\tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

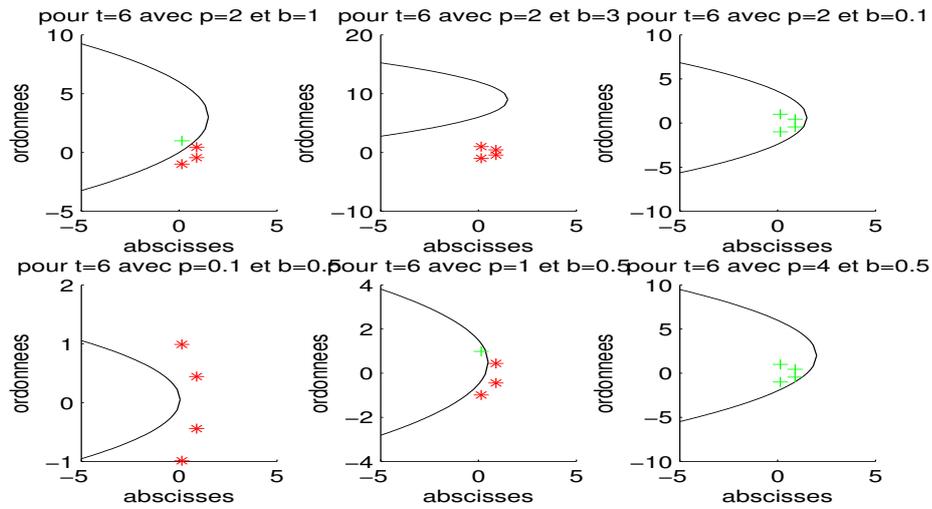


FIGURE 3.11 – Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 6$ par la parabole d'équation $2p(\frac{p}{2} - x) = (y - ipb)^2$.

- La partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec les paramètres $(p, b) \in \{(0.5, 2), (1, -2), (2, 0), (4, 3)\}$ nous donne la Figure 3.12. Ces figures

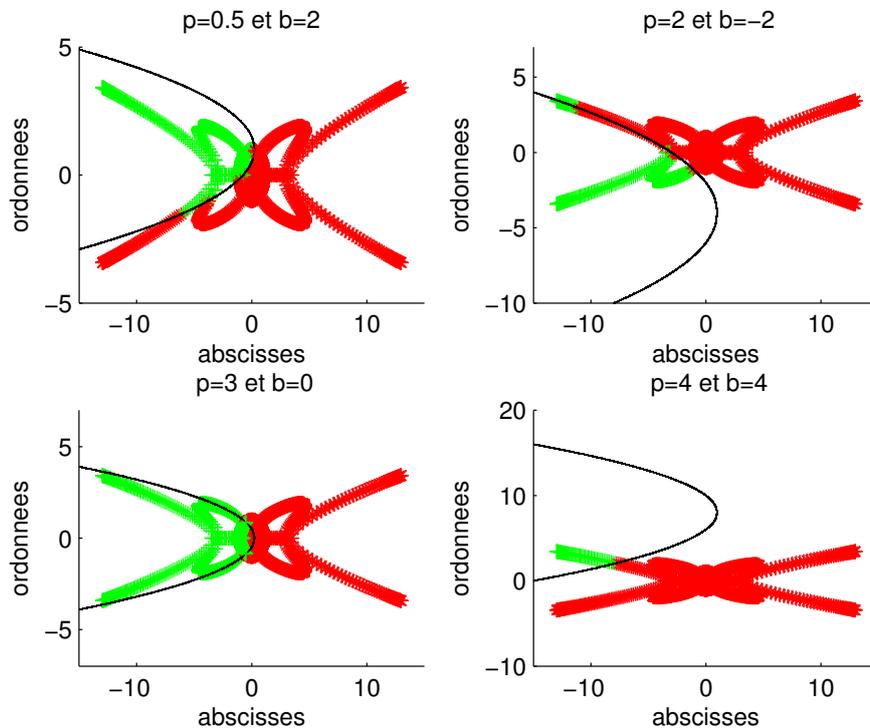


FIGURE 3.12 – Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, b) \in \{(0.5, 2), (1, -2), (2, 0), (4, 3)\}$.

sur FIGURE 3.12 décrivent le portrait spectral de $W(t), \forall t \in [0; 2\pi]$. Cette dichotomie spectrale réalisée par la parabole $\tilde{\Gamma}$ est mise en évidence grâce à des couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).

- L'application de l'algorithme 3.2 à la fonction matricielle 3.30 donne les résultats suivants :
 - Pour $t = 2\pi$,

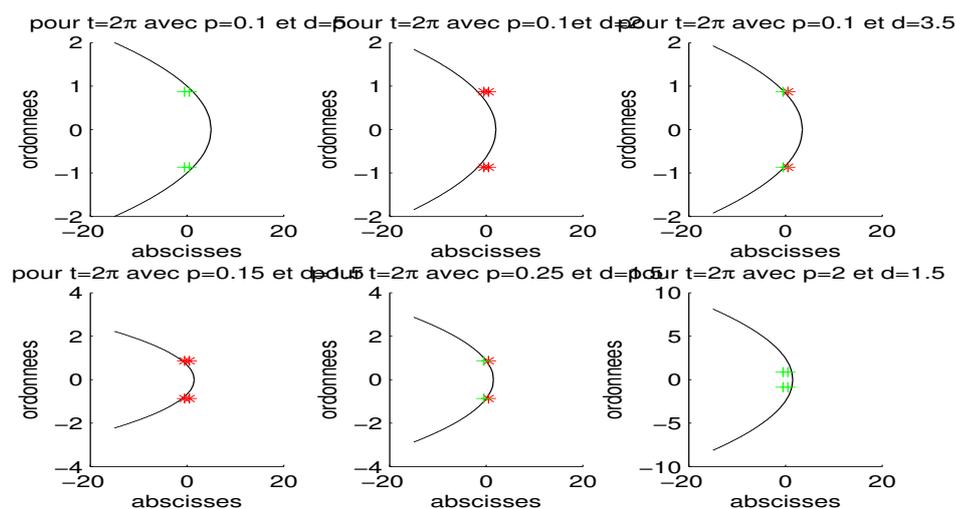


FIGURE 3.13 – Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 2\pi$ par la parabole d'équation $2p(d - x) = y^2$.

Ces différentes figures sur FIGURE 3.13 montrent comment une parabole Γ_d peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Comme dans le cas de la parabole Γ , les valeurs obtenues pour $\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|$ et $\|\mathbb{P}_\infty W(t) - W(t)\mathbb{P}_\infty\|$ ont prouvé que \mathbb{P}_∞ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\mathbb{H}_d\|$ montrent la bonne qualité de la dichotomie.

- Partition des valeurs propres de $W(t), \forall t \in [0, 2\pi]$ avec paramètres $(p, d) \in \{(0.5, 0.5), (2, 1), (0.2, 2), (0.2, 7)\}$ nous donne la Figure 3.14. Cela montre l'efficacité de la méthode. Ces graphiques décrivent le portrait spectral de $W(t), \forall t \in [0; 2\pi]$ Cette dichotomie spectrale réalisée par la parabole Γ_d est mise en évidence grâce à des couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).
- L'application de l'algorithme 3.3 à la fonction matricielle 3.30 donne les résultats suivants :
 - Pour $t = 2.8$, Ces différentes figures sur FIGURE 3.15 montrent comment une parabole $\tilde{\Gamma}_d$ peut réaliser une dichotomie sur les valeurs propres d'une matrice donnée. Comme dans le cas de la parabole Γ , les valeurs obtenues pour $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ et $\|\tilde{\mathbb{P}}_\infty W(t) - W(t)\tilde{\mathbb{P}}_\infty\|$ ont prouvé que $\tilde{\mathbb{P}}_\infty$ est un projecteur. De plus, les valeurs de $\|\tilde{\mathbb{H}}_\infty\|$ montrent la bonne qualité de la

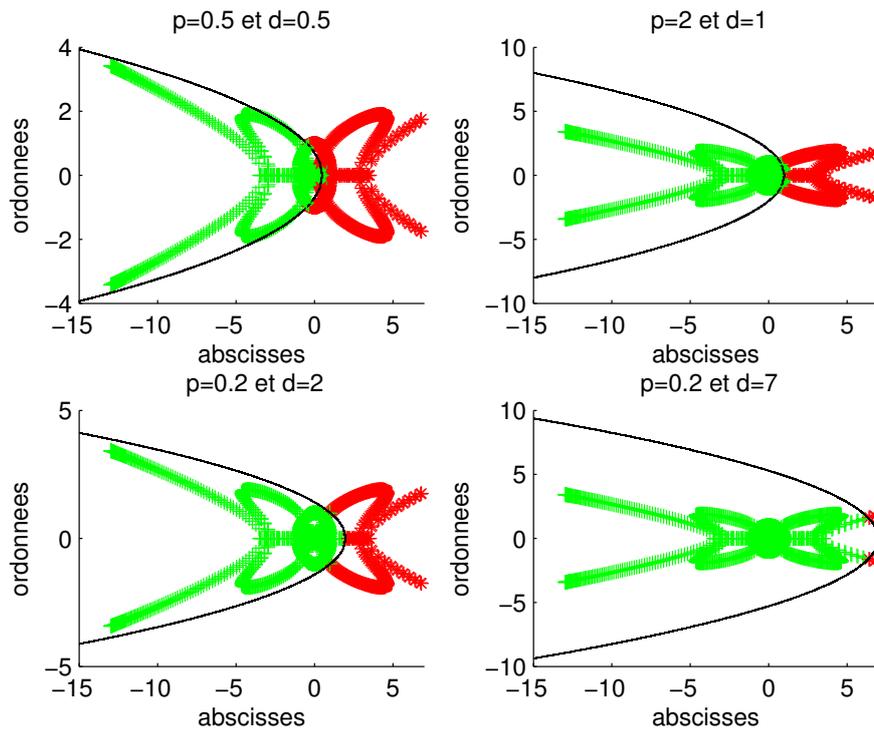


FIGURE 3.14 – Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, d) \in \{(0.5, 0.5), (2, 1), (0.2, 2), (0.2, 7)\}$

dichotomie.

- *Partition des valeurs propres de $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec les paramètres $(p, d, b) \in \{(0.5, 0.5, 2), (2, 1, -2), (0.2, 2, 0), (0.2, 7, 3)\}$ nous donne la Figure 3.16. Cela montre l'efficacité de la méthode.*

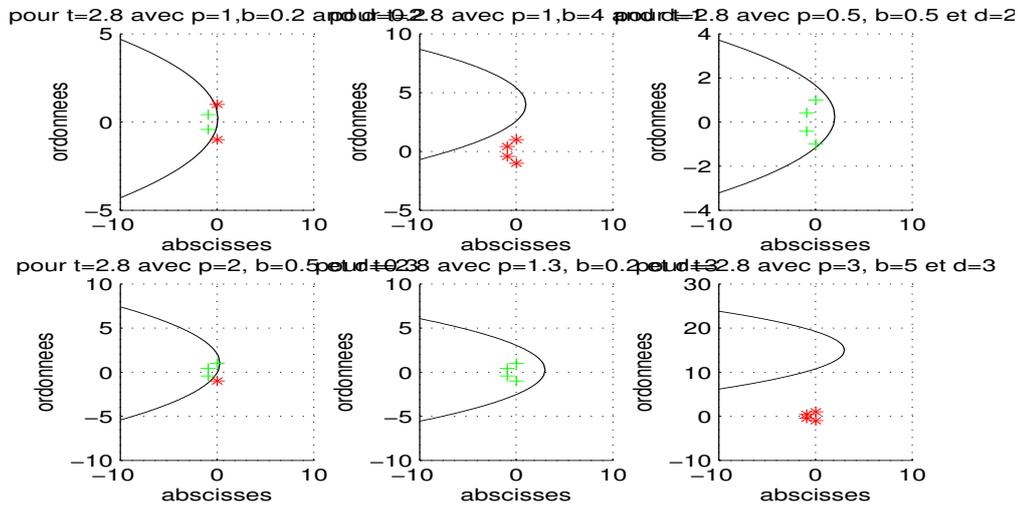


FIGURE 3.15 – Partition du spectre de la matrice $W(t)$ pour $t = 2.8$ par la parabole d'équation $2p(d - x) = (y - pb)^2$.

TABLE 3.11 – Traces, normes et qualité du projecteur spectral $\widetilde{\mathbb{P}}_\infty$ par application de l'algorithme DichoPdb pour différentes valeurs de p , b et d

p	b	d	$tr(\widetilde{\mathbb{P}}_\infty)$	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty^2 - \widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{P}}_\infty W(t) - W(t)\widetilde{\mathbb{P}}_\infty\ $	$\ \widetilde{\mathbb{H}}_\infty\ $
1	0.2	0.2	2	1.3292	$3.3183 \cdot 10^{-15}$	$7.2032 \cdot 10^{-15}$	7.3681
1	4	1	4	1	$3.8213 \cdot 10^{-15}$	$5.3470 \cdot 10^{-15}$	1.3453
0.5	0.5	2	0	$3.2139 \cdot 10^{-17}$	$3.2139 \cdot 10^{-17}$	$4.7630 \cdot 10^{-16}$	9.9291
2	0.5	0.3	1	1.3499	$1.7537 \cdot 10^{-15}$	$5.6241 \cdot 10^{-15}$	4.3035
1.3	0.2	3	0	$3.6050 \cdot 10^{-17}$	$3.6050 \cdot 10^{-17}$	$6.0976 \cdot 10^{-17}$	1.3319
3	5	3	4	1	$2.6922 \cdot 10^{-15}$	$5.4784 \cdot 10^{-15}$	1.1007

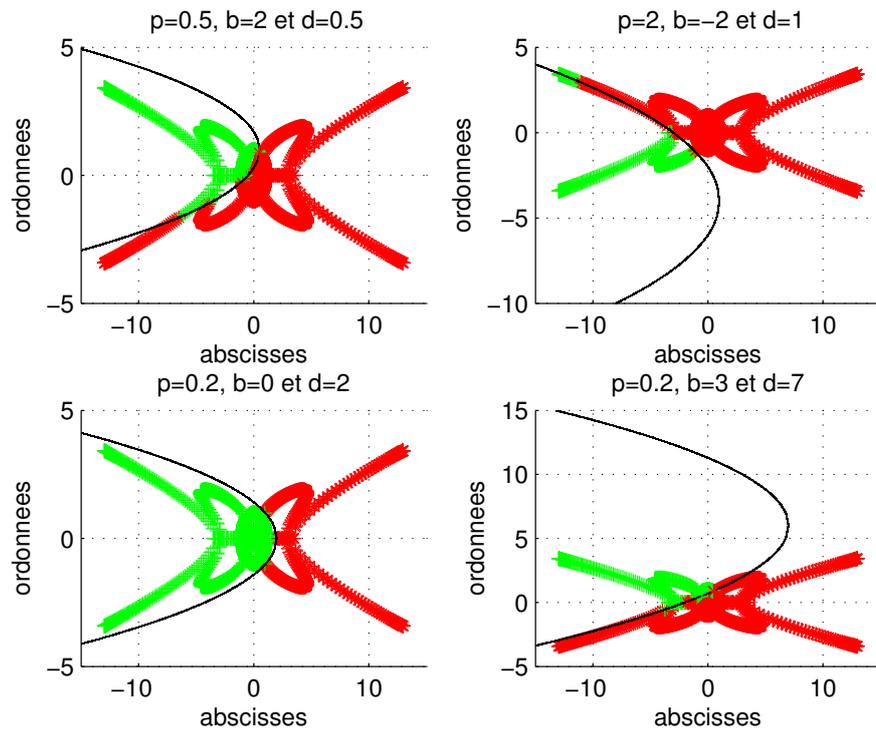


FIGURE 3.16 – Partition des valeurs propres de la matrice $W(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ avec $(p, d, b) \in \{(0.5, 0.5, 2), (2, 1, -2), (0.2, 2, 0), (0.2, 7, 3)\}$.

Ces graphiques décrivent le portrait spectral de $W(t)$, $\forall t \in [0; 2\pi]$ Cette dichotomie de spectre réalisée par la parabole $\tilde{\Gamma}_d$ est mise en évidence grâce des couleurs (la couleur verte pour les valeurs propres intérieures et la couleur rouge pour les valeurs propres extérieures).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à la parabole $\Gamma(a, b, c)$ d'équation générale $x = ay^2 + by + c$ où $a \neq 0$. Ces méthodes sont des modifications de l'algorithme proposé par A. N. Malyshev and M. Sadkane dans [25]. Dans cette étude où les cas $b^2 - 4ac = 1$ et $b^2 - 4ac = -1$ ($b = 0$ et $b \neq 0$) ont été étudiés séparément, nous avons utilisé une application conforme par laquelle, la dichotomie par rapport à la parabole se ramène, à celle par rapport à l'axe imaginaire.

Les nouvelles méthodes, à savoir les algorithmes DichoPb, DichoPd et DichoPdb, permettent de calculer le projecteur spectral associé aux valeurs propres situées à l'extérieur d'une parabole $\Gamma(a, b, c)$ donnée.

Des illustrations numériques obtenues par l'application des algorithmes précités à certaines matrices montrent l'efficacité du calcul du projecteur \mathbb{P} , qui permet la séparation de son spectre en deux parties par rapport à la parabole (cad intérieur et extérieur à la parabole).

Conclusion générale

Après que Godunov introduisit la notion de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'axe imaginaire, en vue de l'étude de la stabilité des équations différentielles, différents auteurs ont étendu et proposé diverses autres méthodes.

Ce sont les méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$, par rapport à l'axe imaginaire, par rapport à l'ellipse Ξ_o de centre O et par rapport à la parabole Γ d'équation $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$. Pour chacune de ces méthodes, nous avons dans le chapitre 1 présenté plusieurs variantes dont notamment les algorithmes proposées par Dosso, Sadkane et al. et Malyshev et al. respectivement dans [10, 29] et dans [25].

Etant donné que toutes ces méthodes de dichotomie développées jusqu'alors l'ont été sur des contours fermés centrés à l'origine, cette thèse avait pour ambition de proposer de nouvelles méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à des figures non centrées à l'origine. Dans cette optique, nous avons proposé dans le chapitre 2 :

- de nouvelles méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de rayon $r > 0$,
- de nouvelles méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à l'ellipse Ξ_{z_0} de centre $z_0 \neq 0$;

et dans le chapitre 3,

- de nouvelles méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à la parabole $\Gamma(a, b, c)$ d'équation générale $x = ay^2 + by + c$, avec $a \neq 0$.

Les deux premières méthodes ont été inspirées de celles proposées par Dosso dans [10], Sadkane et Touhami dans [29] et Malyshev et Sadkane dans [25]. La dernière méthode généralise les travaux de Malyshev et sadkane concernant la parabole. Pour chaque méthode proposée, nous avons eu à réaliser plusieurs tests numériques sur des matrices et des fonctions matricielles, pour leur vérification.

Ainsi, nous avons constaté que nos résultats décrivent bien de manière générale les méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à un cercle, une ellipse ou une parabole quelconque.

Ce travail de mémoire s'est certes penché sur les trois figures précitées non centrées à l'origine, mais nous laisse entrevoir de nouvelles perspectives pour la suite des travaux. Il s'agit de :

1. proposer une méthode de dichotomie spectrale d'un faisceau matriciel par

rapport à l'équation générale de la parabole ;

2. proposer une méthode de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport à une hyperbole ;

3. donner des applications dans l'étude de la stabilisation des systèmes d'équations différentielles, c'est-à-dire comment utiliser ces méthodes de dichotomies spectrales dans la recherche des paramètres pouvant rendre ces systèmes d'équations différentielles stables (en modifiant certains de ces paramètres en cas d'instabilité de ces systèmes).

Bibliographie

- [1] Z. Bai, J. W. Demmel, M. Gu, an inverse free parallel spectral divide and conquer algorithm for nonsymmetric eigenproblems, *Numer. Math.* 76(3)(1997)279-308
- [2] E. A. Biberdorf, M. A. Blinova and N. I. Popova, Some modifications of the method of matrix spectrum dichotomy and their applications to stability problems, *Numerical Analysis and Applications*, Vol. 11 (2)(2018)108-120.
- [3] A. Ya. Bulgakov, Generalization of a matrix Lyapunov equation, (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.* 30, no. 4(1989), 30–39, 216 ; translation in *Siberian Math. J.* 30 (1989), (4)(1990) 525–532.
- [4] A. Ya. Bulgakov and S. K. Godunov, Circular Dichotomy of the Spectrum of a Matrix, *Siberian math. J.*, (29)(1988)734-744.
- [5] W. A. Coppel, *Dichotomies in stability Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 629, Springer-verlag, Berlin-New York, 1978.
- [6] W. A. Coppel, *stability and asymptotic behaviour of Differential Equations*, D. C and Company, Boston, 1965.
- [7] W. A. Coppel, *Dichotomies and reducibility*, *Journal of differential equations*, 3(1967) 500-521.
- [8] Gennadii Demidenko, On a functional approach to spectral problems of linear algebra. *Selcuk J. Appl. math.* Vol. 2, No. 2(2001) 39-52.
- [9] L. Dieci, C. Elia and E. Vleck, Detecting exponential dichotomy on the real line : SVD and QR algorithms *BIT Numerical Mathemacal Mathematics*, 51(3)(2011)555-579.
- [10] M. Dosso, *Sur quelques algorithmes d'analyse de stabilité forte de matrices symplectiques*, PHD Thesis, Université de Bretagne Occidentale. Ecole Doctorale SMIS, Laboratoire de Mathématiques, UFR Sciences et Techniques, (2006).
- [11] M. Dosso, & M. Sadkane, On the strong stability of symplectic matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20(2013) 234-249.
- [12] M. Dosso, N. Coulibaly and L. Samassi, Strong stability of symplectic matrices using a spectral dicotomy method, *far East Journal of Applied Mathematics*. Vol. 79, (2)(2013) 73-110.
- [13] S. K. Godunov, *Modern Aspect of linear Algebra*, The Scientific Book, Novosibirsk, 1997(in Russian)[English transt. : Amer. Math. Soc., 175(1998)].

- [14] S.K. Godunov, The problem of dichotomy of the spectrum of a matrix, *Sib. Mat. Zh.*, 26, (5)(1986) 25-37.
- [15] S. K. Godunov, spectrum dichotomy and stability criterion for sectorial operators, *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 36, (6)(1995) 1328-1335.
- [16] S. K. Godunov and M. Sadkane, Computation of pseudospectra via spectral projectors. *Linear Algebra and its Applications*, 279(1998) 163-175.
- [17] S. K. Godunov and M. Sadkane, Some new algorithms for the spectral dichotomy methods, *Linear Algebra and its Applications*, 358(2001) 173-194.
- [18] S. K. Godunov and M. Sadkane, Elliptic Dichotomy of a Matrix Spectrum, *linear algebra and its Applications*, 248 (1996) 205-232.
- [19] S. K. Godunov and M. Sadkane, Spectral analysis of symplectic matrices with application to the theory of parametric resonance, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 28, (4)(2006) 1083-1096.
- [20] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [21] R. Naulin, A remark on exponential dichotomies, *revista Colombiana the Mathematicas*, 33 (1999) 9-13.
- [22] A. N. Malyshev, Calculation of invariant subspaces of a regular linear matrix pencil. (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.*(1989).
- [23] A N Malyshev, Guaranteed Accuracy in Spectral Problems of Linear Algebra. *Siberian Adv. Math. J.I,II.2* (1992) 144-197.
- [24] A. N. Malyshev, Parallel algorithm for solving some spectral problems of linear algebra, *Linear Algebra Appl.* (1993)188–189 :489–520.
- [25] A.N. Malyshev, M. Sadkane, On parabolic and elliptic spectral dichotomy. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*18(2)(1997) 265-278.
- [26] M. A. S. Ali and M. Sadkane, On a lyapunov type equation related to parabolic spectral dichotomy, *linear algebra society*, 15(2006)134-142.
- [27] Yu. M. Nechepurenko, Integral Criteria for the Quality of the Dichotomy of a Matrix Spectrum by a Closed Contour, *Mathematical Notes*, vol. 78, (5)(2005)669–676. Translated from *Matematicheskie Zametki*, vol. 78, (5)(2005)718–726.
- [28] M. Sadkane, Norm estimates of the Fourier series coefficients of the matrix resolvent, *Applied Mathematics letters*, 18(2005)149-153.
- [29] M. Sadkane and A. Touhami, On modification to the spectral dichotomy algorithm. *Numerical functional Analysis and optimization*, 34(7)(2013)791-817.
- [30] M. Sadkane and A. Touhami, Algorithm 918 :spedicho : A MATLAB program for the spectral dichotomy of regular matrix pencils, *ACM trans. Math. Softw.* 38, 3, Article 21 (April 2012).

-
- [31] S. Traoré and M. Dosso, Spectral dichotomy methods of a matrix with respect to the general equation of the parabola, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol 15, (2)(2022)681-725.
- [32] S. Traoré and M. Dosso and L. Samassi, Method of spectral dichotomy of a matrix with respect to a circle or an ellipse not centered at the origin, *International Journal of Numerical Methods and Applications*. Vol 22, (2022)87-115.

Méthodes de dichotomie spectrales d'une matrice par rapport à certaines figures.

Résumé : Le but de cette thèse est de proposer une extension des méthodes de dichotomie spectrales d'une matrice par rapport à de nouvelles courbes ; en particulier le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre Ω d'affixe $b \neq 0$ et de centre $r > 0$, l'ellipse Ξ_{z_0} de centre z_0 et la parabole d'équation générale $x = ay^2 + by + c, a \neq 0$. Le premier chapitre est consacré aux rappels de méthodes de dichotomies par rapport à certaines courbes centrées en O et/ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses. En particulier, il présente plusieurs algorithmes qui sont utilisés tout le long de cette thèse. Dans le chapitre 2, nous modifions des méthodes de dichotomie spectrale d'une matrice par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon $r > 0$ et par rapport à l'ellipse Ξ_0 centrée en O , pour les adapter respectivement au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ de centre $\Omega \neq O$ et de rayon $r > 0$ et à l'ellipse Ξ_{z_0} de centre $z_0 \neq 0$. Ainsi, nous obtenons de nouveaux algorithmes dont les illustrations numériques permettent de les vérifier. Dans le chapitre 3, nous proposons de nouveaux algorithmes de dichotomie spectrale permettant de trouver les projecteurs spectraux sur le sous-espaces invariants associés aux valeurs propres à l'extérieur de la parabole d'équation générale $x = ay^2 + by + c, a \neq 0$. A la fin de ce chapitre, nous proposons plusieurs exemples numériques qui vérifient nos algorithmes.

Mots clés : Méthode de dichotomie spectrale ; projecteur spectral ; sous-espace propre ; valeur propre.

Spectral dichotomy methods of a matrix with respect to certain figures.

Abstract : The aim of this thesis is to propose an extension of the spectral dichotomy methods of a matrix with respect to new curves ; in particular the circle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ with center Ω with affix $b \neq 0$ and center $r > 0$, the ellipse Ξ_{z_0} with center z_0 and the parabola with general equation $x = ay^2 + by + c, a \neq 0$. The first chapter is devoted to reminders of methods of dichotomies with respect to certain curves centered in O and/or symmetrical with respect to the abscissa axis. In particular, it presents several algorithms, which are used throughout this thesis. In chapter 2, we modify methods of spectral dichotomy of a matrix with respect to the circle $\mathcal{C}(O, r)$ with center O and radius $r > 0$ and with respect to the ellipse Ξ_0 centered in O , to adapt them respectively to the circle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ with center $\Omega \neq O$ and radius $r > 0$ and to the ellipse Ξ_{z_0} with center $z_0 \neq 0$. Thus, we obtain new algorithms whose numerical illustrations make it possible to verify them. In chapter 3, we propose new spectral dichotomy algorithms allowing to find the spectral projectors on the invariant subspaces associated with the eigenvalues outside the parabola with general equation $x = ay^2 + by + c, a \neq 0$. At the end of this chapter, we propose several numerical examples which verify our algorithms.

Keywords : Spectral dichotomy method ; spectral projector ; eigensubspace ; eigenvalue.