



HAL
open science

Équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques : aspects théoriques et schémas numériques

Alice Masset

► **To cite this version:**

Alice Masset. Équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques : aspects théoriques et schémas numériques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Picardie Jules Verne, 2022. Français. NNT : 2022AMIE0068 . tel-04095032

HAL Id: tel-04095032

<https://theses.hal.science/tel-04095032v1>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

Mention Mathématiques

présentée à l'École Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)

de l'Université de Picardie Jules Verne

par

Alice Masset

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

Équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques : aspects théoriques et schémas numériques

Soutenue le 7 décembre 2022, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M ^{me} Carine Lucas	MCF, Université d'Orléans	Rapporteure
M. Nicolas Seguin	DR, Inria Montpellier	Rapporteur
M ^{me} Nina Aguillon	MCF, Sorbonne Université	Examinatrice
M. Nabil Bedjaoui	MCF, Université de Picardie Jules Verne	Examineur
M. Christophe Chalons	PR, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines	Examineur
M. Paul Vigneaux	PR, Université de Picardie Jules Verne	Président du jury
M. Olivier Goubet	PR, Université de Lille	Directeur
M. Vivien Desveaux	MCF, Université de Picardie Jules Verne	Co-encadrant



Remerciements

Même si c'est mon nom qui apparaît en premier sur la couverture, il est clair qu'une thèse, ça ne se fait pas seule. Il est plus que temps de remercier comme il se doit celles et ceux qui m'ont accompagnée jusqu'ici.

Tout d'abord, je tiens à remercier Carine Lucas et Nicolas Seguin d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Merci beaucoup pour la relecture attentive que vous avez menée, ainsi que pour les remarques et les conseils tout à fait pertinents que vous m'avez transmis.

Merci également aux membres de mon jury de thèse, Christophe Chalons, Nina Aguillon, Paul Vigneaux et Nabil Bedjaoui. Je n'aurais pas pu imaginer un jury plus cohérent, et je vous suis reconnaissante d'avoir accepté d'en faire partie. Merci en particulier à Nabil d'avoir répondu présent à toutes nos fantastiques réunions pendant mes trois années de thèse.

J'aimerais aussi remercier Christophe Berthon et Victor Michel-Dansac. Vos remarques et suggestions ont grandement influencé mes travaux de recherche. Merci pour votre disponibilité, et en particulier merci Victor pour tes conseils pratiques, ainsi que tes multiples invitations qui m'ont fait découvrir les deux superbes villes de Strasbourg et Oslo!

Enfin, il va de soi que je remercie mes directeurs de thèse, Olivier Goubet et Vivien Desveaux, non seulement de m'avoir permis de me lancer dans cette aventure, mais surtout de m'avoir accompagnée du début à la fin. Merci à tous les deux pour votre bienveillance qui m'a été très précieuse. Vous avez toujours su vous rendre disponible pour moi, vous avez toujours répondu à mes questions (qui parfois se ressemblaient d'une semaine à l'autre...), et plus important encore, vous m'avez toujours soutenue. Vous avez toute ma gratitude.

La fin de cette thèse marque également pour moi la fin d'une période de presque dix ans passés à l'Université de Picardie Jules Verne, où j'ai pu côtoyer et apprendre à connaître un grand nombre d'enseignants, de collègues, et d'amis, que je souhaite prendre le temps de remercier.

Merci aux enseignants-chercheurs, chercheurs et personnels du LAMFA et du département de Mathématique(s). C'est grâce à vos enseignements et conseils que j'en suis là aujourd'hui. Je pense (notamment) aux enseignants qui sont intervenus à la préparation à l'agrégation. La jeune étudiante de licence que j'étais était loin d'imaginer poursuivre ses études à ce point. Merci également à toutes et tous pour votre bonne humeur qui, au delà de l'aspect scientifique, fait de ce laboratoire un lieu d'échange et de partage auquel on s'attache tant.

Je ne peux m'empêcher d'avoir une pensée pour les amis avec qui j'ai partagé une ou plusieurs années d'études avant la thèse. Il y a Manon et le patinage, Anaïs et les sorties jogging au parc Saint-Pierre, Corentin (et Juliette!) et les jeux de société et sushis, Damien et Antoine avec nos soirées guitare. Même si nous nous sommes éloignés pour certains, je suis très heureuse d'avoir partagé ces moments avec vous. Et je suis ravie que nous ayons réussi à rester en contact pour les autres. J'espère faire de mon anniversaire - nouvel an ainsi que des après-midi gaufres des traditions que l'on conservera longtemps!

Merci également à tous les doctorant.e.s du labo. Vous êtes si nombreux en fait! Difficile exercice que de toutes et tous vous remercier en quelques mots.

Je pense d'abord aux plus anciens : Guillaume, Marouan, Henry, Gauthier, le super quatuor, Afaf, Ariane, Mariem et nos soirées entre filles (dont le déroulement restera secret), et il y a aussi Arthur, Sebastian et Valérie. Vous avez toujours été de bon conseil, et je retiendrai les bons moments que l'on a partagés, en particulier les soirées karaoké et soirées jeux de société (spéciale dédicace à Gautchié, Tati et par extension Thomas, Antoine et Clara!). La leçon que vous m'avez apprise : prendre le temps de profiter un peu!

Ensuite il y a les doctorants de ma génération, en commençant par Yohan qui dit souvent des âneries mais qu'on aime bien quand même, Ismail sur qui on peut toujours compter pour manger des sushis, Jihade et sa gentillesse légendaire, Cheryl avec qui j'ai passé une super semaine à La Grande Motte (!), et le gang des Chiliens : Felipe, Christopher, Bastian (et Josepha :)). Dans un monde sans thèse et sans Covid, nous aurions eu plus d'occasions de nous retrouver. Je suis tout de même ravie d'avoir partagé de bons moments à vos côtés!

Enfin, j'adresse également un petit message aux derniers arrivés, Karen, Sheila, Bouasy, Gnord (merci pour vos supers gâteaux d'anniversaire!), Owen, Ahmad, Nicolas, Maxime et Michael. Je vous souhaite bon courage pour toutes les aventures à venir. Une thèse, ça passe vite. Prenez le temps de vous amuser en chemin.

Vous m'avez toutes et tous apporté du positif au cours de ces trois ans et demi (et plus). Ces quelques lignes ne reflètent en réalité qu'une partie du plaisir que j'ai eu à discuter, courir, stresser, chanter, rire, pleurer, danser et jouer avec vous. Merci encore.

J'aimerais remercier en particulier Clément, qui a porté plusieurs casquettes au fil du temps : d'abord celle de lointaine connaissance, puis camarade de classe, chauffeur, et même co-bureau de la B112, pour finalement devenir un véritable ami. Grâce à toi, je me suis sentie moins seule face à tous les questionnements et tous les problèmes qui surgissent inévitablement pendant une thèse, mais qui sont difficiles à affronter seule. Un grand merci pour ton écoute.

Clémence, toi aussi tu as droit à une dédicace ! Tu étais là dès le début de la fac, et tu es encore là aujourd'hui. J'espère pouvoir t'ennuyer encore longtemps avec mes problèmes existentiels, sinon qui me rappellera que finalement, c'est pas la peine de s'en faire autant ?

Je remercie également mes parents (surtout ma petite maman) et mon frangin de m'avoir toujours soutenue dans mes choix, et de m'avoir épaulée dans les moments de doute. Quand j'étais perdue, vous m'avez souvent rappelé cette phrase : va le plus loin possible. Je crois que je l'ai fait.

Enfin je remercie mon Boudou (avec un grand B) sur qui, avec ou sans thèse, je crie, je pleure, je dors, bref. Je t'en fais voir de toutes les couleurs, et tu es toujours là. Mais le monde n'est-il pas plus joli ainsi qu'en nuances de gris ? Presque onze ans déjà, un petit Chappy, et pourtant notre aventure ne fait que commencer. J'ai hâte d'en découvrir la suite à tes côtés.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	ix
Description générale	ix
Présentation des chapitres	x
I Les équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques	1
1 Dérivation des modèles	3
1.1 Introduction	3
1.2 Les modèles 2D	4
1.2.1 Densité moyenne constante	5
1.2.2 Densité moyenne variable	6
1.3 Les modèles 1D	7
2 Propriétés des modèles	9
2.1 Définitions générales	9
2.2 Système 1D à température constante	12
2.2.1 Solutions stationnaires	13
2.2.2 Relation d'entropie	13
2.2.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source	13
2.2.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources	14
2.3 Système 1D à température variable	15
2.3.1 Solutions stationnaires	15
2.3.2 Relation d'entropie	16
2.3.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source	17
2.3.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources	18
2.4 Système 2D	18
2.4.1 Solutions d'intérêt	19
2.4.2 Invariance par rotation	19
II Résultats d'existence de solutions	21
3 Existence locale de solutions régulières	23
3.1 Introduction	23
3.2 Symétrisation	24
3.2.1 Définitions	24
3.2.2 Système à température constante	25
3.2.3 Système à température variable	25
3.3 Système 1D à température constante	27
3.3.1 Existence locale de solutions régulières	27
3.3.2 Existence globale pour le système régularisé	33
3.4 Système 2D à température variable	36

Conclusion et perspectives	43
III Construction de schémas numériques	45
4 Schémas de type Godunov avec termes sources	47
4.1 Introduction	47
4.2 Généralités sur les schémas volumes finis	47
4.3 Schéma de Godunov	50
4.4 Schémas de type Godunov	52
4.4.1 Construction	52
4.4.2 Réécriture volumes finis et propriétés	53
5 Construction de schémas well-balanced et fully well-balanced	57
5.1 Introduction	58
5.1.1 Structure générale des solveurs de Riemann approchés simples	58
5.1.2 Stratégie de construction des solveurs de Riemann approchés	60
5.1.3 Température variable	61
5.2 Un schéma well-balanced avec transport de la vitesse transverse	62
5.2.1 Modèle RSW	62
5.2.2 Modèle TRSW	69
5.2.3 Schéma final	74
5.3 Un schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre	75
5.3.1 Discrétisation des états stationnaires	75
5.3.2 Solveur à trois états intermédiaires	75
5.3.3 Discrétisation des termes sources	78
5.3.4 Propriétés du solveur de Riemann approché	80
5.3.5 Schéma final	81
5.4 Schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre et transport de la vitesse transverse	82
5.4.1 Solveur de Riemann approché	82
5.4.2 Schéma final	84
5.5 Schéma FWB avec quadratisation de la relation d'équilibre	85
5.5.1 Solveur de Riemann approché	85
5.5.2 Discrétisation des termes sources	89
5.5.3 Propriétés du solveur de Riemann approché	90
5.5.4 Schéma final	90
5.6 Extension des schémas à l'ordre 2	91
5.6.1 Méthode MUSCL stantard	92
5.6.2 Méthode MUSCL modifiée	95
5.7 Résultats numériques	95
5.7.1 Modèle SW	96
5.7.2 Modèle TSW	104
5.7.3 Modèle RSW	111
5.7.4 Modèle TRSW	118
5.7.5 Schémas d'ordre deux	119
5.7.6 Bilan	121
6 Schémas numériques pour les modèles 2D	131
6.1 Généralités sur les schémas 2D avec terme source	131
6.2 Schéma 2D issu d'un flux 1D de type Godunov	134
6.3 Maillage cartésien	137
6.3.1 Notations cartésiennes et réécriture du schéma 2D	137
6.3.2 Extension à l'ordre deux	139
6.4 Résultats numériques	141
6.4.1 Équilibre géostrophique par direction	141
6.4.2 Équilibre en mouvement	142
6.4.3 Perturbation d'un lac au repos	143
6.4.4 Vortex stationnaire	143

Conclusion et perspectives	151
Bibliographie	153
A Compléments de la section 3.3	157
B Compléments de la section 3.4	159
Liste des tableaux	163
Table des figures	165

Introduction

L'étude et la compréhension des mouvements de fluides géophysiques est un enjeu majeur de notre époque dans un contexte de dérèglement climatique. Les équations d'Euler 3D et les équations primitives 3D fournissent bon nombre de modèles s'appliquant à diverses situations permettant de mieux appréhender ces phénomènes complexes. Dans cette thèse, nous nous placerons dans le cadre d'écoulements océaniques ou atmosphériques à grande échelle, régis par un modèle de type Saint-Venant avec effet rotatif dans lequel la force de Coriolis est prise en compte, et l'effet thermique pour une température ou flottabilité variable. Les objectifs de cette thèse sont d'une part d'étudier l'existence de solutions pour ces modèles, et d'autre part, de construire des schémas numériques performants, notamment du point de vue de la préservation des états d'équilibres.

Description générale

Première partie : les équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques

La première partie introductive concerne l'obtention des différents modèles à partir des équations primitives hydrostatiques, et leurs propriétés mathématiques.

Initialement, les équations de Saint-Venant [61] ou *shallow water equations* (SW) qui décrivent des phénomènes d'écoulement de fluide en eaux peu profondes ont été obtenues par SAINT-VENANT en 1871. Elles proviennent des équations d'Euler dans lesquelles on suppose que les variations dans la direction verticale sont négligeables face aux variations dans la direction horizontale. En prenant en compte les effets de la force de Coriolis, une démarche similaire mène au système de Saint-Venant avec effets rotatifs ou *rotating shallow water model* (RSW), ou au système de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques, aussi appelé *thermal rotating shallow water model* (TRSW). Pour mieux appréhender leurs contextes d'application, on présentera la dérivation des modèles selon la méthode décrite par ZEITLIN dans [71].

Dans un second temps nous dresserons la liste des propriétés des différents modèles qui nous seront utiles par la suite. On s'intéressera notamment à l'hyperbolicité de ces systèmes, la nature de leurs champs caractéristiques, leurs invariants de Riemann faibles et forts, et les relations d'entropie qui les caractérisent. Toutes ces propriétés fourniront les outils nécessaires à l'étude théorique de problèmes de Cauchy, et la construction de schémas numériques.

Deuxième partie : existence de solutions

La seconde partie est dédiée à l'étude du problème de Cauchy pour les systèmes RSW et TRSW en une et deux dimensions d'espace.

Pour des systèmes hyperboliques généraux, plusieurs techniques de démonstration permettent de montrer l'existence locale de solutions régulières. On peut par exemple citer [62, 42, 45], parmi d'autres. Ces techniques reposent toutes sur un point fondamental : la symétrisation du système étudié (voir [42]). Le principe général est de transformer le système initial du type

$$\partial_t w + A(w)\partial_x w + B(w)\partial_y w = T(w),$$

de façon à ce que les matrices qui multiplient les dérivées en espace $\partial_x w$ et $\partial_y w$ soient symétriques. On commencera alors par passer en revue différentes techniques de symétrisation mentionnées dans [35] ou [63], avant de sélectionner celle qui sera appliquée à nos modèles. On prendra soin de choisir pour chacun d'eux la méthode la plus simple possible, au sens où elle doit permettre d'établir aisément des estimations *a priori* et ne doit pas dépendre de la dimension d'espace du système (1D ou 2D). Une fois cette sélection faite, nous utiliserons deux méthodes de démonstration différentes : l'une fondée sur l'ajout d'un terme diffusif, l'autre sur

la construction d'une suite de problèmes hyperboliques linéaires. Nous verrons que la symétrisation utilisée permettra de contrôler facilement les matrices symétrisées.

Troisième partie : construction de schémas numériques

La troisième partie est consacrée à la construction de schémas numériques qui préservent tous les états stationnaires, aussi appelés schéma "fully well-balanced". On choisit de garder cet anglicisme dans le manuscrit puisqu'il est communément utilisé dans la communauté.

La capacité d'un schéma à préserver les solutions stationnaires, c'est-à-dire dont les dérivées en temps sont nulles, est une propriété essentielle qui a été largement étudiée pour le modèle de Saint-Venant classique. Pour ce modèle, les solutions stationnaires proviennent de la prise en compte du terme source de topographie dans le modèle. Les premiers travaux dans cette direction ont été proposés par BERMUDEZ et VAZQUEZ [7], GREENBERG et LEROUX [39] et JIN [41]. Le terme "well-balanced" a été introduit dans [39] pour désigner les schémas préservant les états stationnaires au repos. Depuis, de nombreux schémas well-balanced ont été proposés. On peut notamment mentionner la reconstruction hydrostatique de AUDUSSE et al. [1] qui fournit une méthode well-balanced simple à mettre en place. Certains travaux comme ceux de CHERTOCK, KURGANOV et LIU [20] ou DESVEAUX et al. [27] se sont également intéressés à la préservation des états stationnaires au repos pour le modèle TSW, c'est-à-dire à température variable, sans force de Coriolis. L'ajout de la force de Coriolis comme un terme source supplémentaire dans le modèle RSW crée de nouvelles solutions stationnaires à préserver. BOUCHUT, LE SOMMER et ZEITLIN [15] ont été les premiers à proposer un schéma qui préserve les états stationnaires au repos 1D faisant intervenir la force de Coriolis. En dimension un, cela correspond aux solutions à l'équilibre géostrophique. Depuis, d'autres travaux se sont penchés sur cette question, notamment ceux de CASTRO, LÓPEZ et PARÉS [18], LUKÁČOVÁ-MEDVID'OVÁ, NOELLE et KRAFT [52], CHERTOCK et al. [19], ou encore LIU, CHERTOCK et KURGANOV [50]. De plus récents travaux de KURGANOV, LIU et ZEITLIN [44] ont étudié la préservation des états stationnaires thermo-géostrophiques au repos du modèle TRSW1D.

La préservation des états stationnaires en mouvement présente tout autant d'intérêt. Les schémas qui ne sont pas conçus pour les préserver créent des oscillations numériques autour des perturbations de tels équilibres, comme cela a été montré dans [70]. La toute première approche pour faire face à ce constat a été proposée par GOSSE [37]. Elle présente l'inconvénient de devoir résoudre le problème non-linéaire qui décrit les états stationnaires. Par la suite MICHEL-DANSAC et al. ont développé des schémas préservant toutes les solutions stationnaires sans résoudre de système non-linéaire. Cette technique a été appliquée au modèle de Saint-Venant avec topographie [55] avec terme de friction [56] ou encore au modèle de l'écoulement sanguin [32]. Les résultats de cette partie se situent dans la continuité de ces travaux.

Le but de la troisième partie de cette thèse est de proposer plusieurs schémas fully well-balanced pour les modèles RSW et TRSW. Les deux objectifs majeurs consistent d'une part, à préserver les états stationnaires au repos et en mouvement faisant intervenir la force de Coriolis, et d'autre part, à proposer une montée en ordre des schémas compatible avec la propriété fully well-balanced. Il sera aussi question de s'assurer de la robustesse des différents schémas afin qu'ils préservent la positivité de la hauteur et de la température.

Présentation des chapitres

Après avoir introduit les thématiques générales de cette thèse, nous présentons les différents chapitres qui la compose.

La première partie introductive est composée des Chapitres 1 et 2. Ils ne contiennent pas de résultat nouveau, mais sont utiles pour exposer les modèles et les concepts qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

Chapitre 1

Dans le premier chapitre, nous présentons les équations primitives hydrostatiques qui découlent des équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles. En suivant la présentation de [71], on dérivera les modèles RSW et TRSW qui sont des extensions du modèle de Saint-Venant dans lesquels la force de Coriolis est prise en compte. Nous verrons que le modèle RSW est obtenu lorsque la densité moyenne est supposée constante. En considérant une densité moyenne variable, on obtient le modèle TRSW qui possède une équation supplémentaire en la variable θ , désignant selon le contexte la température ou la flottabilité.

Chapitre 2

Au deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des propriétés des modèles RSW et TRSW. Pour cela, on rappelle les définitions usuelles de couple d'entropie, solutions stationnaires, nature des champs caractéristiques et invariants de Riemann, puis on étudie toutes ces notions pour les différents modèles. Nous distinguerons d'une part les systèmes sans terme source, et d'autre part les systèmes avec terme source. Nous verrons que le système RSW sans terme source a la particularité d'être riche, c'est-à-dire d'être diagonalisable à l'aide de ses invariants de Riemann. Cette propriété nous aidera à le symétriser dans le Chapitre 3. L'étude des systèmes avec termes sources permettra quant à elle de déterminer la nature des champs caractéristiques des systèmes complets, d'établir une condition d'hyperbolicité, et de proposer dans le Chapitre 5 des solveurs de Riemann approchés aussi simples que possible et qui imitent certaines propriétés des solveurs exacts. Il est également intéressant de souligner que pour le système avec termes source, la perte d'hyperbolicité a lieu lorsque le nombre de Froude $Fr = \frac{u}{\sqrt{gh\theta}}$ vaut 1, ce qui a pour conséquence de poser des problèmes de définition d'un point de vue numérique au voisinage de cet état.

Chapitre 3

La deuxième partie de cette thèse, constituée du Chapitre 3, s'intéresse à l'étude du problème de Cauchy pour les différents modèles. En particulier, nous démontrons les deux résultats suivants :

Théorème 1. *On considère une donnée initiale dans l'espace $H^2(\mathbb{R})$. Alors, le problème de Cauchy associé au système RSW1D admet une unique solution classique locale.*

Théorème 2. *On considère une donnée initiale dans l'espace $H^3(\mathbb{R}^2)$. Alors, le problème de Cauchy associé au système TRSW2D admet une unique solution classique locale.*

Ces résultats sont énoncés avec plus de précision dans le corps du chapitre, et s'adaptent parfaitement au cas des systèmes RSW2D et TRSW1D. Les démonstrations reposent sur des techniques communes s'appliquant à des systèmes hyperboliques généraux. L'apport proposé ici se situe au niveau de la symétrisation choisie. Nous passons en revue les principales méthodes de symétrisation, puis nous proposons pour chacun des modèles la plus adaptée, au sens où :

- elle permet d'établir des estimations *a priori* de façon simple,
- elle ne dépend pas de la dimension d'espace,
- elle est compatible avec la force de Coriolis.

Le modèle RSW1D étant riche, il est diagonalisable par changement de variable grâce à ses invariants de Riemann forts. Nous utiliserons cette propriété pour proposer un changement de variable qui symétrise à la fois le système RSW1D et le système RSW2D. Face à l'absence d'invariants de Riemann forts pour le modèle TRSW, nous optons pour une symétrisation par multiplication d'une matrice. La hessienne de l'entropie étant définie positive uniquement à changement de variable près, on préférera déterminer un symétriseur qui ne nécessite pas de changement de variable préalable. Il sera construit à partir des matrices de passage qui diagonalisent les matrices du système 2D, écrit sous forme quasi-linéaire.

Par la suite, nous utilisons deux techniques différentes pour démontrer les théorèmes cités plus haut. Pour le modèle RSW, un terme de diffusion du type $\varepsilon \Delta w_{xx}$ est introduit dans le modèle. On montre alors l'existence d'une solution du problème de Cauchy diffusif, puis, on établit un temps d'existence de cette solution indépendant de ε à l'aide d'estimations *a priori*, avant de passer à la limite quand ε tend vers 0. Pour le modèle TRSW, on introduit une suite de problèmes de Cauchy linéaires dont la limite tend vers le problème de Cauchy non linéaire initial. Là encore, des estimations *a priori* permettent de donner la régularité recherchée sur la solution. Ces deux méthodes utilisent de façon fondamentale la symétrisation préalable du système. Pour finir, on abordera la question de l'existence globale de solutions, au travers du système RSW1D diffusif. Nous démontrerons qu'une solution globale régulière existe, pourvu que la donnée initiale soit suffisamment proche de l'équilibre au repos.

La troisième partie de la thèse est dédiée à la construction de schémas numériques, et est découpée en trois chapitres que l'on s'apprête à décrire.

Chapitre 4

L'objectif de ce quatrième chapitre est de présenter les concepts bien connus des schémas volumes finis et schémas de type Godunov qui seront utilisés dans la suite de la thèse. Il ne contient pas de nouveau résultat mais permet de fixer les idées et les notations.

On commence tout d'abord par rappeler le principe générique des méthodes volumes finis. La solution est approchée par une fonction constante par maille, et la mise à jour au temps suivant de cette approximation s'obtient en introduisant un flux et un terme source numériques provenant de moyennes des flux et terme source exacts. Plusieurs propriétés essentielles doivent être satisfaites, comme la conservativité en l'absence de termes source, la robustesse ou encore la consistance. On introduit également la définition de solution stationnaire discrète et de schéma well-balanced qui préserve les solutions stationnaires discrètes au cours du temps.

Ensuite, nous rappelons le principe du célèbre schéma de Godunov, introduit par GODUNOV dans [36] qui propose le point de vue suivant : à partir d'une approximation constante par cellule au temps t^n , l'approximation au temps t^{n+1} de la solution est obtenue à partir de la résolution des problèmes de Riemann situés à chaque interface du maillage. Une condition CFL adéquate permet d'assurer que les solutions des problèmes de Riemann n'interfèrent pas entre-eux. Cependant, la solution exacte de tels problèmes est coûteuse à obtenir, voir impossible à calculer dans certains cas. On s'intéresse alors aux schémas de type Godunov, introduits par HARTEN, LAX et VAN LEER [40], dont le principe est de simplement remplacer le solveur de Riemann exact par un solveur de Riemann approché. Ainsi, le schéma tout entier et ses propriétés reposent sur cette brique de base qu'est le solveur de Riemann approché. On demandera alors au solveur de Riemann approché d'être consistant, robuste, et well-balanced, afin que le schéma qui en découle hérite de ces propriétés. On prend soin également de réécrire un tel schéma dans le formalisme volumes finis en déterminant l'expression du flux numérique issu d'une telle procédure.

Chapitre 5

Le chapitre 5 est dédié à la construction de schémas numériques pour les modèles RSW et TRSW en une dimension d'espace. On utilise pour cela les schémas de type Godunov, introduits au chapitre précédent, avec trois objectifs majeurs :

- la préservation des solutions stationnaires discrètes au repos et en mouvement (propriété fully well-balanced),
- la préservation de la positivité de la hauteur et de la température (robustesse),
- la précision des schémas (ordre deux).

Dans cette optique, on commence par décrire dans l'introduction du chapitre la stratégie générale qui sera appliquée pour construire des solveurs de Riemann approchés ayant ces propriétés. L'idée est d'utiliser autant que possible la préservation des invariants de Riemann à travers les discontinuités de contact pour réduire au maximum le nombre d'états intermédiaires qui interviennent dans les solveurs. Cela permettra également de traiter les différentes variables séparément. On mentionne également le schéma HLL [40] utilisé pour des systèmes hyperboliques sans terme source. Nous verrons que l'état intermédiaire de ce solveur apparaîtra naturellement dans les solveurs de Riemann approchés.

Ensuite, on passera à la construction d'un premier solveur qui ne préserve que les états stationnaires au repos. Cela permet de présenter la méthode utilisée dans un cadre assez simple, et de fournir un schéma qui servira de comparaison aux schémas fully well-balanced. On détaillera d'une part le solveur obtenu pour le modèle à température constante, et d'autre part le solveur à température variable. Il en résulte un schéma well-balanced qu'on nommera schéma LT (L pour linéarisation et T pour transport), qui préserve notamment les états stationnaires géostrophiques 1D.

Puis on s'intéresse aux schémas fully well-balanced. Les états stationnaires du modèle TRSW1D sont décrits

par les équations non linéaires

$$\partial_x(hu) = 0, \quad (1a)$$

$$\partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2\theta}{2}\right) = fhu - gh\theta\partial_x z, \quad (1b)$$

$$\partial_x(huv) = -fhu, \quad (1c)$$

$$\partial_x(hu\theta) = 0. \quad (1d)$$

L'idée de MICHEL-DANSAC et al. [55] est de proposer une linéarisation discrète de ces relations que doivent satisfaire les états intermédiaires du solveur. La linéarisation est nécessaire pour obtenir une expression directe des inconnues du solveur. Cependant, nous verrons que les inconnues ne seront pas déterminées de façon unique lorsque qu'une certaine discrétisation du nombre de Froude vaut un, ou que le débit hu est nul. Pour pallier cette problématique, les auteurs de [12] qui s'intéressent au système de Saint-Venant sans Coriolis, proposent une méthode de désingularisation de la relation discrète issue de (1b) faisant intervenir un détecteur d'équilibre. Nous adaptons également cette approche pour désingulariser la discrétisation de l'équation (1c). Cela mène à un premier schéma fully well-balanced appelé schéma LDF (L pour linéarisation, D pour désingularisation et F pour fully well-balanced). On peut vérifier numériquement qu'il est plus performant pour capturer les états stationnaires en mouvement que le schéma LT seulement well-balanced.

Malgré tout, la désingularisation proposée mène à une discontinuité de la définition des hauteurs et vitesses transverses intermédiaires. Pour corriger cela, nous proposons une deuxième approche, à mi-chemin entre les deux premiers schémas construits ici : la gestion des hauteurs d'eau intermédiaires se fait comme dans le schéma LDF, mais les vitesses transverses sont traitées comme dans le schéma well-balanced LT. Il s'avère que l'approche utilisée dans le schéma LT pour faire évoluer la vitesse transverse v dans le solveur est compatible avec la préservation de tous les états stationnaires. Il en découle alors un schéma fully well-balanced, appelé schéma LTF, pour lequel les résultats numériques sont légèrement meilleurs que ceux du schéma LDF dans certaines configurations.

Enfin, pour tenter d'éliminer le problème de discontinuité lorsque $Fr = 1$ pour la hauteur h , on propose non pas de linéariser la relation (1b), mais de la "quadratiser". Cette idée de quadratisation de la relation a été introduite dans [53]. On propose ici de l'approfondir en considérant des paramètres différents, toujours dans l'esprit d'éviter les discontinuités. Nous verrons que cela ne suffit pas à se débarrasser du problème récurrent de définition lorsque $Fr = 1$. Rappelons qu'il s'agit d'un problème également présent au niveau continu, et que cette situation correspond à la perte d'hyperbolicité du système. Malgré tout, cette approche aboutira à une expression simplifiée des termes sources discrets, et présente l'avantage d'être très efficace pour la préservation des états stationnaires, comme nous le verrons dans la partie des résultats numériques.

Pour augmenter la précision des quatre schémas proposés, nous appliquons une méthode de montée en ordre. On commence par décrire la classique méthode MUSCL introduite par VAN LEER dans [68] qui s'obtient en deux étapes : d'abord une procédure de reconstruction de la solution, puis l'obtention du schéma d'ordre deux à partir du schéma d'ordre un appliqué aux états reconstruits. Cette procédure présente quelques limites quand à la préservation de tous les états stationnaires, puisqu'il est difficile de donner une procédure de reconstruction fully well-balanced qui ne présente pas de non-linéarité. C'est pourquoi on utilisera plutôt une méthode MUSCL modifiée, introduite dans [55, 32] qui fait intervenir un détecteur d'équilibre. La version que l'on propose ici prend en compte un terme source centré dans le schéma d'ordre deux afin de ne pas perdre d'information aux interfaces.

Pour finir, ce chapitre se terminera avec de nombreux cas-tests numériques proposés pour valider et comparer les différents schémas sur les modèles SW, RSW, TSW et TRSW en une dimension d'espace, du point de vue de la préservation ou la capture d'états stationnaires, la capture de chocs ou encore l'ordre de précision.

Chapitre 6

Dans le dernier chapitre de cette thèse, on propose de construire des schémas 2D à partir des schémas 1D obtenus au Chapitre 5. On commence par donner les définitions générales liées aux schémas 2D sur maillage non-structuré. L'idée principale consiste à considérer localement un problème 1D à résoudre à chaque interface du maillage. Cela permet de construire les flux et termes source numériques 2D comme des flux et termes sources 1D à rotation près. En adaptant la démonstration de [25] présentée dans un cadre sans terme source, nous établirons que les flux et termes sources issus d'un schéma de type Godunov 1D permettent d'obtenir une

condition CFL optimale, pourvu que le flux 1D soit défini de façon décentrée.

Ensuite, nous nous concentrerons sur le cas des maillages cartésiens tout d'abord afin de définir précisément quelles solutions stationnaires peuvent être préservées en 2D. Il s'agit des solutions stationnaires par direction. Soulignons que cela ne couvre qu'une petite partie des solutions stationnaires 2D. Puis, nous proposerons d'augmenter la précision des schémas en appliquant la méthode MUSCL par direction. Au vu des solutions stationnaires que le schéma d'ordre un préserve, une procédure de reconstruction qui préserve les états stationnaire au repos suffit. On utilisera alors dans ce cas la procédure de reconstruction classique, sans passer par un détecteur d'équilibre comme dans le chapitre 5 puisque cela n'est pas nécessaire.

Nous concluons ce chapitre avec quelques cas-test numériques qui permettront de tester les propriétés et les limites des schémas 2D obtenus.

Valorisation de la thèse

Les travaux de cette thèse ont mené à une publication dans la revue *Communications in Mathematical Sciences*,

- DESVEAUX et MASSET, « A fully well-balanced scheme for shallow water equations with Coriolis force » [26], aussi consultable sur HAL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03225992>

un article en préparation,

- BERTHON, DESVEAUX, MICHEL-DANSAC et MASSET « A fully well-balanced scheme for TRSW1D equations based on a quadratic approximation of steady states ».

et plusieurs exposés dans des conférences nationales ou internationales

- Conférence ECCOMAS 2022, 5 - 12 juin 2022 · Oslo ·
- Séminaire d'équipe EDP de l'IRMA, 16 octobre 2021 · Strasbourg ·
- Encontro Nacional SMP 2021, 12 - 16 juillet 2021 · en ligne ·
- 10ème Biennales de la SMAI, 21 - 25 juin 2021 · La Grande Motte ·
- 8ème école EGRIN, 25 - 28 mai 2021 · en ligne ·

Première partie

**Les équations de Saint-Venant avec effets
rotatifs et thermiques**

Dérivation des modèles

Sommaire du présent chapitre

1.1 Introduction	3
1.2 Les modèles 2D	4
1.2.1 Densité moyenne constante	5
1.2.2 Densité moyenne variable	6
1.3 Les modèles 1D	7

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dérivation du modèle bi-dimensionnel des équations de Saint-Venant avec force de Coriolis, afin de mieux cerner les hypothèses utilisées pour obtenir les modèles qui seront étudiés par la suite et préciser leurs champs d'application. On suit la présentation proposée par ZEITLIN [71]. Que l'on soit dans un contexte océanique à une échelle mésoscopique (longueur horizontale caractéristique d'environ 10^2 km) ou atmosphérique à une échelle synoptique (longueur horizontale caractéristique d'environ 10^3 km), les équations qui régissent le mouvement d'un fluide dans le plan tangent à la sphère en rotation d'angle Ω sont les équations primitives hydrostatiques données par

$$\partial_t \mathbf{v}_H + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_H + f \mathbf{v}_H \wedge \hat{z} = -\nabla_H P, \tag{1.1a}$$

$$\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \tag{1.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1.1c}$$

$$g\rho + \partial_z P = 0. \tag{1.1d}$$

Ici, on se place dans un repère en trois dimensions $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 \times [z(x, y), h(x, y, t) + z(x, y)]$, où x est la direction zonale, y la direction méridionale, et z la direction verticale, avec $z(x, y)$ la topographie et $h(x, y, t)$ la hauteur du fluide. On a donc $h(x, y, t) + z(x, y)$ qui correspond à la surface libre. On note avec l'indice H les composantes horizontales, c'est-à-dire dans les directions x et y , des champs de vecteurs ou opérateurs. Ainsi le champ de vitesse $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_H, w) = (u, v, w)$ est en trois dimensions, tout comme l'opérateur $\nabla = (\nabla_H, \partial_z) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Les autres notations utilisées sont ρ pour la densité du fluide, P la pression, g la constante de gravité et \hat{z} le vecteur unitaire dans la direction z .

On note également f le paramètre de Coriolis. Les équations obtenues ici sont données en coordonnées cartésiennes, puisqu'on étudie les mouvements géophysiques dans un plan tangent à la Terre. Ainsi, la force de Coriolis considérée ici est une approximation de la force de Coriolis en trois dimensions. On peut mentionner trois approximations possibles du paramètre de Coriolis f : l'approximation constante $f = 2\Omega \sin(\phi)$, dite "f-plane approximation", lorsque ses effets dans la direction méridionale sont négligés, l'approximation $f = f_0 + \beta y$ dite " β -plane approximation" ou encore l'approximation dans le plan tangent aux pôles $f = f_0 - \gamma(x^2 + y^2)$ dite " γ -plane approximation". D'autres approximations plus poussées sont possibles, notamment celles qui prennent en compte l'effet cosinus [51].

Aux équations (1.1) s'ajoutent les conditions de bord suivantes :

— À la surface libre $z = h(x, y, t) + z(x, y)$, on suppose que les effets de la pression sont négligeables, c'est-à-dire

$$\nabla_H P|_{z=h+z} = 0. \quad (1.2)$$

On suppose également que la surface libre bouge avec la vitesse verticale du fluide, c'est-à-dire

$$\partial_t(h(x, t) + z(x, y)) + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_H (h(x, t) + z(x, y)) = w|_{z=h+z} \quad (1.3)$$

— Au fond $z = z(x, y)$, on impose la condition de non-pénétration

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_H z = w|_{z=z}. \quad (1.4)$$

Dans la section suivante, on s'intéresse à la dérivation des modèles bi-dimensionnels qui seront étudiés par la suite.

1.2 Les modèles 2D

Les équations primitives hydrostatiques décrivent la conservation de la masse (1.1b) - (1.1c) et de la quantité de mouvement (1.1a), avec l'hypothèse de pression hydrostatique donnée par (1.1d). On va moyenner verticalement ces équations en les intégrant entre deux surfaces $z = z_1(x, y, t)$ et $z = z_2(x, y, t)$ pour obtenir un modèle bi-dimensionnel. Commençons tout d'abord par remarquer qu'une partie des équations (1.1) peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) + \partial_z(\rho w) = 0, \quad (1.5a)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_z(\rho uw) - f \rho v = -\partial_x P, \quad (1.5b)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_z(\rho vw) + f \rho u = -\partial_y P, \quad (1.5c)$$

et introduisons quelques notations. On désigne par μ la moyenne verticale de la densité

$$\mu = \int_{z_1}^{z_2} \rho dz,$$

on note $\langle F \rangle$ la moyenne verticale pondérée par la densité de n'importe quelle fonction F donnée

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\mu} \int_{z_1}^{z_2} \rho F dz,$$

et on pose $\tilde{\rho} := \mu / (z_2 - z_1)$ ou encore

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} \rho dz.$$

On suppose que les surfaces z_1 et z_2 bougent avec la vitesse verticale du fluide w , donc

$$w|_{z_i} = \frac{dz_i}{dt} = \partial_t z_i + u \partial_x z_i + v \partial_y z_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.6)$$

En utilisant ces relations ainsi que la formule de Leibniz

$$\int_{z_1}^{z_2} \partial_x F dz = \partial_x \left(\int_{z_1}^{z_2} F dz \right) - F|_{z_2} \partial_x z_2 + F|_{z_1} \partial_x z_1,$$

valable pour n'importe quelle fonction $F(x, y, z, t)$, et son analogue pour les différentiations en y et en t , on peut intégrer les équations (1.5a)-(1.5c) pour obtenir

$$\partial_t \mu + \partial_x(\mu \langle u \rangle) + \partial_y(\mu \langle v \rangle) = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\mu \langle u \rangle) + \partial_x (\mu \langle u^2 \rangle) + \partial_y (\mu \langle uv \rangle) - f \mu \langle v \rangle \\ = -\partial_x \left(\int_{z_1}^{z_2} P dz \right) + P_{|z_2} \partial_x z_2 - P_{|z_1} \partial_x z_1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t (\mu \langle v \rangle) + \partial_x (\mu \langle uv \rangle) + \partial_y (\mu \langle v^2 \rangle) + f \mu \langle u \rangle \\ = -\partial_y \left(\int_{z_1}^{z_2} P dz \right) + P_{|z_2} \partial_y z_2 - P_{|z_1} \partial_y z_1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

La relation hydrostatique (1.1d) quand à elle permet d'exprimer la pression sous la forme

$$P(x, y, z, t) = -g \int_{z_1}^z \rho(x, y, z', t) dz' + P_{|z_1}.$$

Jusqu'à présent, aucune hypothèse supplémentaire n'a été émise. On suppose désormais que le mouvement du fluide s'effectue essentiellement horizontalement, c'est-à-dire qu'on peut négliger les variations verticales des champs de vitesse : c'est l'hypothèse de couche peu profonde (ou shallow layer). Ainsi, on en déduit d'une part que les moyennes $\langle u^2 \rangle$, $\langle uv \rangle$ ou $\langle v^2 \rangle$ vérifient

$$\langle u^2 \rangle \simeq \langle u \rangle^2, \quad \langle uv \rangle \simeq \langle u \rangle \langle v \rangle, \quad \langle v^2 \rangle \simeq \langle v \rangle^2,$$

et d'autre part que

$$P(x, y, z, t) \simeq -g \bar{\rho} (z - z_1) + P_{|z_1}.$$

Ainsi, les équations (1.7)-(1.9) deviennent sous cette hypothèse

$$\partial_t (\bar{\rho} (z_2 - z_1)) + \partial_x (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle) + \partial_y (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle v \rangle) = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle) + \partial_x (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle^2) + \partial_y (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle \langle v \rangle) - f \bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle v \rangle \\ = -\partial_x \left(-g \bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_1} \right) + P_{|z_2} \partial_x z_2 - P_{|z_1} \partial_x z_1, \end{aligned} \quad (1.11)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle v \rangle) + \partial_x (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle \langle v \rangle) + \partial_y (\bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle v \rangle^2) + f \bar{\rho} (z_2 - z_1) \langle u \rangle \\ = -\partial_y \left(-g \bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_1} \right) + P_{|z_2} \partial_y z_2 - P_{|z_1} \partial_y z_1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

La suite de la dérivation dépendra de l'hypothèse faite sur la densité moyenne $\bar{\rho}$.

1.2.1 Densité moyenne constante

Si la densité moyenne $\bar{\rho}$ est constante, alors en remarquant que $P_{|z_2} = -g \bar{\rho} (z_2 - z_1) + P_{|z_1}$, on peut réécrire les termes liés à la pression sous la forme

$$\begin{aligned} -\nabla_H \left(-g \bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_1} \right) + P_{|z_2} \nabla_H z_2 - P_{|z_1} \nabla_H z_1 \\ = -\nabla_H \left(g \bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_2} \right) + P_{|z_2} \nabla_H z_2 - P_{|z_1} \nabla_H z_1 \\ = -g \bar{\rho} (z_2 - z_1) \nabla_H z_2 + g \bar{\rho} (z_2 - z_1) \nabla_H z_1 - \nabla_H (P_{|z_2} (z_2 - z_1)) + P_{|z_2} \nabla_H z_2 - P_{|z_1} \nabla_H z_1 \\ = -g \bar{\rho} (z_2 - z_1) \nabla_H z_2 - (z_2 - z_1) \nabla_H P_{|z_2} \end{aligned}$$

On pose maintenant $z_1 = z(x, y)$ la topographie éventuellement nulle et $z_2 = h(x, y, t) + z(x, y)$ la surface libre du fluide. D'après les conditions de bord (1.3) et (1.4), la surface libre et le fond vérifient (1.6). Les calculs menés jusqu'ici sont donc valides pour ces choix de z_1 et z_2 . De plus, le terme de pression $-(z_2 - z_1) \nabla_H P_{|h+z}$ est nul

d'après la condition de bord (1.2). Alors, remplaçant dans (1.9), (1.10), (1.11) on obtient le système 2D des équations de Saint-Venant en rotation

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(h\langle u \rangle) + \partial_y(h\langle v \rangle) = 0, \\ \partial_t(h\langle u \rangle) + \partial_x\left(h\langle u \rangle^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + \partial_y(h\langle u \rangle\langle v \rangle) = fh\langle v \rangle - gh\partial_x z, \\ \partial_t(h\langle v \rangle) + \partial_x(h\langle u \rangle\langle v \rangle) + \partial_y\left(h\langle v \rangle^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -fh\langle u \rangle - gh\partial_y z, \end{cases} \quad (1.13)$$

que l'on désignera par RSW2D pour *Rotating Shallow Water model*.

1.2.2 Densité moyenne variable

Si la densité moyenne n'est pas constante, on commence par remarquer que sous l'hypothèse faite de couche peu profonde, on a

$$\langle u \rangle \simeq \int_{z_1}^{z_2} u dz \text{ et } \langle v \rangle \simeq \int_{z_1}^{z_2} v dz.$$

Ainsi, intégrer l'équation d'incompressibilité (1.1c) entre z_1 et z_2 donne

$$\partial_t(z_2 - z_1) + \partial_x((z_2 - z_1)\langle u \rangle) + \partial_y((z_2 - z_1)\langle v \rangle) = 0. \quad (1.14)$$

En combinant (1.14) et (1.10), on obtient aisément une relation sur $\tilde{\rho}$

$$\partial_t \tilde{\rho} + \langle u \rangle \partial_x \tilde{\rho} + \langle v \rangle \partial_y \tilde{\rho} = 0. \quad (1.15)$$

On peut également remanier les équations (1.10)-(1.12) pour écrire que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(z_2 - z_1) \left(\partial_t \langle u \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle u \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle u \rangle - f \langle v \rangle \right) \\ = -\partial_x \left(-g \tilde{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_1} \right) + P_{|z_2} \partial_x z_2 - P_{|z_1} \partial_x z_1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(z_2 - z_1) \left(\partial_t \langle v \rangle + \langle u \rangle \partial_x \langle v \rangle + \langle v \rangle \partial_y \langle v \rangle + f \langle u \rangle \right) \\ = -\partial_y \left(-g \tilde{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P_{|z_1} \right) + P_{|z_2} \partial_y z_2 - P_{|z_1} \partial_y z_1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

On divise les deux dernières équations par $\tilde{\rho}$. À droite des égalités, on utilise que $\tilde{\rho}(x, y, t) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2)$ d'où

$$(z_2 - z_1) (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_H \mathbf{v} + f \wedge \hat{\mathbf{z}} \mathbf{v}) = -\nabla_H \left(-g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) \Phi_{|z_1} \right) + \Phi_{|z_2} \nabla_H z_2 - \Phi_{|z_1} \nabla_H z_1, \quad (1.18)$$

avec Φ le géopotential défini par P/ρ , et qui vérifie donc $\Phi(x, y, z, t) = -g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} (z - z_1) + \Phi_{|z_1}(x, y, t)$. Les termes faisant intervenir la pression se réécrivent cette fois

$$\begin{aligned} -\nabla_H \left(-g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) \Phi_{|z_1} \right) + \Phi_{|z_2} \nabla_H z_2 - \Phi_{|z_1} \nabla_H z_1 = -g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} (z_2 - z_1) \nabla_H z_2 \\ - g \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} \nabla_H \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right) - (z_2 - z_1) \nabla_H \Phi_{|z_2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans la suite, on pose $\theta = \tilde{\rho}/\rho_0$ qui désigne la flottabilité dans un contexte océanique et la température dans un contexte atmosphérique. On choisit maintenant de poser $z_1 = z(x, y)$ la topographie (éventuellement nulle) et $z_2 = h(x, y, t) + z(x, y)$ la surface libre du fluide. On peut remarquer que le terme $-(z_2 - z_1) \nabla_H \Phi_{|z_2}$ est nul, du fait de la condition de bord (1.2). Ainsi, on obtient à partir de (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) le système des équations de Saint-Venant en rotation avec température

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(h\langle u \rangle) + \partial_y(h\langle v \rangle) = 0, \\ \partial_t(h\langle u \rangle) + \partial_x\left(h\langle u \rangle^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) + \partial_y(h\langle u \rangle\langle v \rangle) = fh\langle v \rangle - gh\theta\partial_x z, \\ \partial_t(h\langle v \rangle) + \partial_x(h\langle u \rangle\langle v \rangle) + \partial_y\left(h\langle v \rangle^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) = -fh\langle u \rangle - gh\theta\partial_y z, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(h\langle u \rangle\theta) + \partial_y(h\langle v \rangle\theta) = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

que l'on désignera par TRSW2D pour *Thermal Rotating Shallow Water model*. Remarquons que si la densité est constante, alors θ est constante et on retrouve système (1.21).

Par la suite, nous appellerons la variable θ la température pour fixer les idées. De plus, pour alléger les notations, on notera à partir de maintenant u au lieu de $\langle u \rangle$ et v au lieu de $\langle v \rangle$, sans oublier que u et v sont en réalité des vitesses horizontales moyennées. Ce seront ces notations qui seront adoptées dans le reste de la thèse. Le système (1.13) se réécrit alors

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \quad (1.21a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) + \partial_y(huv) = fhv - gh\partial_x z, \quad (1.21b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y\left(hv^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = -fhu - gh\partial_y z, \quad (1.21c)$$

et le modèle TRSW2D (1.20) devient

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \quad (1.22a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) + \partial_y(huv) = fhv - gh\theta\partial_x z, \quad (1.22b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y\left(hv^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) = -fhu - gh\theta\partial_y z, \quad (1.22c)$$

$$\partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) + \partial_y(hv\theta) = 0. \quad (1.22d)$$

1.3 Les modèles 1D

D'un point de vue numérique, il est pertinent de commencer par s'intéresser à des systèmes où toutes les quantités ne dépendent que d'une seule dimension d'espace, plus simples à étudier. On obtient ainsi des modèles dits 1D même s'ils comportent les deux composantes horizontales de la vitesse. Nous verrons également que les schémas numériques pour les systèmes 2D peuvent être construits à partir de schémas pour les systèmes 1D. On renvoie au Chapitre 6 et aux références qu'il contient pour plus de détails à ce sujet. Pour obtenir un modèle 1D, on suppose que les variables sont constantes dans la direction y , et on obtient le système de Saint-Venant en rotation à température constante

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1.23a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = fhv - gh\partial_x z, \quad (1.23b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) = -fhu, \quad (1.23c)$$

que l'on appellera modèle RSW1D, ou à température variable

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1.24a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) = fhv - gh\theta\partial_x z, \quad (1.24b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) = -fhu, \quad (1.24c)$$

$$\partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0, \quad (1.24d)$$

que l'on désigne par modèle TRSW1D.

Faisons quelques remarques sur ces modèles. On obtient le même système (à rotation près) si l'on choisit de supposer que les variables n'évoluent pas dans la direction x plutôt que dans la direction y , puisque le système est invariant par rotation. D'autre part, le modèle de Saint-Venant en dimension un s'écrit habituellement uniquement avec deux équations (respectivement trois si la température est variable), la vitesse v étant découplée des autres variables. Ici, même dans le modèle 1D, les deux composantes de la vitesse 2D $\mathbf{v} = (u, v)$ interviennent puisque la force de Coriolis couple l'équation (1.23c) (respectivement (1.24c)) aux autres équations du modèle. C'est pourquoi ce modèle est parfois appelé modèle 1D/2D. Dans le cadre 1D, on dira que u est la vitesse tangentielle à l'écoulement et v la vitesse transverse.

Terminologie Dans la suite de ce manuscrit, il sera utile de pouvoir différencier facilement les systèmes faisant intervenir la force de Coriolis ou pas, et une température variable ou non. Ainsi, on nommera le modèle sans force de Coriolis et à température constante le système de Saint-Venant ou système SW faisant référence à l'appellation anglaise usuelle *shallow water equations*. Le système avec force de Coriolis à température constante sera appelé le système RSW pour *rotating shallow water model*, celui à température variable sans force de Coriolis sera le modèle TSW pour *thermal shallow water model*, et celui avec force de Coriolis et température variable sera le système TRSW, pour *thermal rotating shallow water model*, toujours en suivant les dénominations usuelles en anglais.

Propriétés des modèles

Sommaire du présent chapitre

2.1 Définitions générales	9
2.2 Système 1D à température constante	12
2.2.1 Solutions stationnaires	13
2.2.2 Relation d'entropie	13
2.2.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source	13
2.2.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources	14
2.3 Système 1D à température variable	15
2.3.1 Solutions stationnaires	15
2.3.2 Relation d'entropie	16
2.3.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source	17
2.3.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources	18
2.4 Système 2D	18
2.4.1 Solutions d'intérêt	19
2.4.2 Invariance par rotation	19

2.1 Définitions générales

Dans cette section, on donne les définitions des différents outils utilisés pour étudier des systèmes hyperboliques. Considérons un système en une dimension d'espace de la forme

$$\partial_t w + \partial_x F(w) = S(w, z). \tag{2.1}$$

Le vecteur des inconnues $w(x, t)$ appartient à Ω un sous-ensemble (généralement convexe) de \mathbb{R}^d . Le flux est donné par $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le terme source qui dépend de w ainsi que d'une éventuelle fonction fixée $z(x)$ est donné par $S : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

On commence par donner la définition d'une solution stationnaire d'un tel système.

Définition 2.1.1 (Solution stationnaire). *Une solution stationnaire de (2.1) est une solution telle que $w(t1, x) = w(t2, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout temps $t1, t2 \geq 0$.*

Cette définition s'applique aussi dans le cadre des systèmes bi-dimensionnels. D'un point de vue numérique, il est primordial de chercher à préserver ces solutions afin d'éviter l'apparition d'oscillations numériques sur des maillages grossiers, comme cela a été documenté dans [58] ou [70]. On peut souligner que les solutions stationnaires régulières vérifient $\partial_x F(w) = S(w, z)$. Nous utiliserons au Chapitre 5 une version discrète de cette caractérisation afin de créer des schémas qui préservent les solutions stationnaires.

Pour l'étude plus théorique des ces systèmes, nous utiliserons la notion de couple d'entropie.

Définition 2.1.2 (Entropie). Une fonction continûment différentiable $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une entropie pour le système (2.1) s'il existe un flux d'entropie $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\eta'(w)F'(w) = \zeta'(w).$$

Si w est une solution suffisamment régulière du système (2.1) et si ce système admet une entropie alors w vérifie la relation de conservation supplémentaire suivante

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x \zeta(w) = \eta'(w)S(w, z).$$

Généralement, les systèmes hyperboliques sont pourvus d'au moins une relation d'entropie qui provient d'une relation de conservation physique. Elles sont utiles pour sélectionner les solutions faibles qui ont un sens physique d'une part, et pour établir des estimations *a priori* d'autre part.

On s'intéresse maintenant aux propriétés algébriques du système (2.1). Pour cela, on passe d'une écriture conservative à une écriture quasi-linéaire

$$\partial_t w + A(w)\partial_x w = S(w, z), \quad (2.2)$$

obtenue en notant

$$A(w) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(w)}{\partial w_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Définition 2.1.3. Le système (2.1) est dit hyperbolique si pour tout $w \in \Omega$, la matrice $A(w)$ possède d valeurs propres $\lambda_1(w) \leq \dots \leq \lambda_d(w)$ de multiplicité constante et d vecteurs propres linéairement indépendants $r_1(w), \dots, r_d(w)$. Si les valeurs propres sont distinctes, le système est dit strictement hyperbolique.

L'étude des valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice nous renseigne sur la nature des solutions des problèmes de Riemann, ce qui nous sera utile par la suite pour construire des schémas numériques.

Définition 2.1.4 (Champ caractéristique).

On appelle i -ème champ caractéristique du système (2.2) le couple

$$(\lambda_i(w), \text{Ker}(A(w) - \lambda_i(w)I)).$$

Le i -ème champ est dit linéairement dégénéré si

$$\nabla \lambda_i(w) \cdot r(w) = 0, \quad \forall r(w) \in \text{Ker}(A(w) - \lambda_i(w)I), \quad \forall w \in \Omega.$$

Le i -ème champ est dit vraiment non linéaire si

$$\nabla \lambda_i(w) \cdot r(w) \neq 0, \quad \forall r(w) \in \text{Ker}(A(w) - \lambda_i(w)I), \quad \forall w \in \Omega.$$

Selon la nature du champ caractéristique, on peut relier deux états w_L et w_R par une onde continue (détente) ou discontinue (choc ou discontinuité de contact). On renvoie au Chapitre II de [35] qui détaille l'obtention des solutions des problèmes de Riemann, et précise notamment que les champs linéairement dégénérés correspondent à des discontinuité de contact, tandis que les champs vraiment non-linéaires correspondent à des détentes ou à des chocs.

On s'intéresse également aux invariants de Riemann qui sont des fonctions possédant de nombreuses propriétés.

Définition 2.1.5 (Invariant de Riemann).

Un i -invariant de Riemann (faible) est une fonction $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulière telle que

$$\nabla \psi_i(w) \cdot r(w) = 0, \quad \forall r(w) \in \text{Ker}(A(w) - \lambda_i(w)I), \quad \forall w \in \Omega.$$

D'une part, les invariants de Riemann vérifient la propriété suivante.

Proposition 2.1.1. Un i -invariant de Riemann est constant le long des courbes intégrales définies par

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r(v(\xi)), \\ v(0) &= v_0, \end{aligned}$$

avec $v_0 \in \mathbb{R}$ et $r(w) \in \text{Ker}(A(w) - \lambda_i(w)I)$.

Démonstration. Si ψ_i est un i -invariant de Riemann alors $\frac{d}{d\xi} \psi_i(v(\xi)) = \nabla \psi(v(\xi)) \cdot r_i(v(\xi)) = 0$. \square

Cette propriété permet de montrer que les invariants de Riemann sont constants à travers les discontinuités de contact (voir [35]). Ainsi, dès lors qu'un champ est linéairement dégénéré, on peut déterminer des quantités (les invariants de Riemann) qui seront préservées à travers l'onde associée. Cela sera très utile pour construire des solutions approchées de problèmes de Riemann dans le Chapitre 5.

D'autre part, on se servira de ces fonctions pour simplifier l'écriture des systèmes 1D, en particulier lorsqu'ils admettent ce que l'on appelle des invariants de Riemann forts.

Définition 2.1.6 (Invariant de Riemann fort).

Un i -invariant de Riemann fort est une fonction régulière $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est un invariant de Riemann faible pour tout champ caractéristique $j \neq i$.

Si chacun des champs du système admet un invariant de Riemann fort, alors on peut simplifier de nombreux calculs à l'aide de la proposition suivante

Proposition 2.1.2. Si $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un i -invariant de Riemann fort alors toute solution du système (2.2) vérifie

$$\partial_t \psi(w) + \lambda_i(w) \partial_x \psi(w) = 0.$$

Démonstration. On décompose le vecteur $\partial_x w$ dans la base formée par les vecteurs propres de $A(w)$ sous la forme $\partial_x w = \sum_{j=1}^d \alpha_j(w) r_j(w)$. Alors on a d'une part

$$\begin{aligned} \nabla \psi(w) \cdot \partial_x w &= \sum_{j=1}^d \alpha_j(w) \nabla \psi(w) \cdot r_j(w) \\ &= \alpha_i(w) \nabla \psi(w) \cdot r_i(w), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \nabla \psi(w) \cdot A(w) \partial_x w &= \sum_{j=1}^d \alpha_j(w) \nabla \psi(w) \cdot A(w) r_j(w) \\ &= \sum_{j=1}^d \alpha_j(w) \lambda_j(w) \nabla \psi(w) \cdot r_j(w) \\ &= \alpha_i(w) \lambda_i(w) \nabla \psi(w) \cdot r_i(w) \\ &= \lambda_i(w) \nabla \psi(w) \cdot \partial_x w. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(w) + \lambda_i(w) \partial_x \psi(w) &= \nabla \psi(w) \cdot \partial_t w + \lambda_i(w) \nabla \psi(w) \cdot \partial_x w \\ &= \nabla \psi(w) \cdot (\partial_t w + A(w) \partial_x w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

Certains systèmes admettent des invariants de Riemann forts pour chacun de leurs champs caractéristiques.

Définition 2.1.7. Un système hyperbolique est dit riche si tout champ caractéristique $\lambda_i(w)$ admet un i -invariant de Riemann fort.

La terminologie provient du fait que de tels systèmes admettent de nombreuses entropies (voir [63]). Ce n'est pas le seul avantage des systèmes riches, comme nous allons le voir dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.3. Un système hyperbolique est riche si et seulement s'il est diagonalisable, au sens où il existe un changement de variable $v = \Psi(w)$ tel que la matrice $P(w)A(w)P^{-1}(w)$ est diagonale, où $P(w) = \Psi'(w)$ est la matrice jacobienne de Ψ .

Démonstration. Si le système est riche, on note $\psi_i(w)$ les i -invariants de Riemann forts. On considère alors le changement de variable

$$\Psi(w) = (\psi_1(w), \dots, \psi_d(w))^T.$$

D'après la Proposition 2.1.2, on a

$$\partial_t \Psi(w) + D(w) \partial_x \Psi(w) = 0,$$

avec $D(w) = \text{diag}(\lambda_1(w), \dots, \lambda_d(w))^T$, donc le système est diagonalisable grâce au changement de variable $v = \Psi(w)$.

Réciproquement, si le système est diagonalisable alors il existe un changement de variable $v = \Psi(w)$ tel que PAP^{-1} est diagonale. Si on note $\lambda_i(w)$ et $r_i(w)$ les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $A(w)$, alors les éléments propres de la matrice

$$B(v) = P(\Psi^{-1}(v))A(\Psi^{-1}(v))P^{-1}(\Psi^{-1}(v)),$$

sont les valeurs $\mu_i(v) = \lambda_i(\Psi^{-1}(v))$ et les vecteurs $s_i(v) = P(\Psi^{-1}(v))r_i(\Psi^{-1}(v))$. Soit $\psi_i(w) = \pi_i \circ \Psi(w)$, où π_i est la projection sur la i -ième composante. On a pour tout $j \neq i$

$$\begin{aligned} \nabla \psi_i(\Psi^{-1}(v)) \cdot r_j(\Psi^{-1}(v)) &= \nabla \psi_i(\Psi^{-1}(v)) \cdot P^{-1}(\Psi^{-1}(v))P(\Psi^{-1}(v))r_j(\Psi^{-1}(v)) \\ &= \nabla \psi_i(\Psi^{-1}(v)) \cdot P^{-1}(\Psi^{-1}(v))s_j(v) \\ &= (P^{-1}(\Psi^{-1}(v)))^T \nabla \psi_i(\Psi^{-1}(v)) \cdot s_j(v) \\ &= \nabla(\psi_i \circ \Psi^{-1})(v) \cdot s_j(v) \\ &= \nabla \pi_i(v) \cdot s_j(v). \end{aligned}$$

Comme $B(v)$ est diagonale, le vecteur $s_j(v)$ est proportionnel à e_j , et puisque $\nabla \pi_i(v) = e_i$, on a $\nabla \psi_i(w) \cdot r_j(w) = 0$ pour tout $j \neq i$. Autrement dit, $\psi_i(w)$ est un i -invariant de Riemann fort. \square

Nous venons d'établir que les systèmes riches sont diagonalisables par changement de variable. Ce résultat sera utilisé dans le Chapitre 3 pour symétriser les systèmes RSW1D et RSW2D.

Remarque 2.1.1. Les notions de champ caractéristique, de nature des champs et d'invariants de Riemann sont invariantes par changement de variable. On choisira de travailler avec les variables primitives dans la section suivante consacrée à l'étude des différents systèmes introduits au Chapitre 1.

Remarque 2.1.2. Pour les systèmes en deux dimensions d'espace de la forme

$$\partial_t w + \partial_x \mathcal{F}(w) + \partial_y \mathcal{G}(w) = \mathcal{S}(w, z),$$

on peut généraliser toutes les notions abordées ici en étudiant la matrice $A(w, \omega) = \omega_1 A(w) + \omega_2 B(w)$ pour tout $w \in \Omega$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ où

$$A(w) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(w)}{\partial w_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \quad \text{et} \quad B(w) = \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i(w)}{\partial w_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Nous avons rappelé les principales définitions qui seront utilisées par la suite. On passe alors à l'étude des différents systèmes, en commençant par le système RSW. Les propriétés algébriques des systèmes seront résumées dans le Tableau 2.1 et le Tableau 2.2 en fin de chapitre.

2.2 Système 1D à température constante

On rappelle que le système RSW1D est donné par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \tag{2.3a}$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = fhv - gh \partial_x z, \tag{2.3b}$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) = -fhu, \tag{2.3c}$$

On note $w = (h, hu, hv)^T$ le vecteur des inconnues. Toute solution de (2.3) doit appartenir à l'espace des états admissibles défini par

$$\Omega = \{w \in \mathbb{R}^3, h > 0\}.$$

2.2.1 Solutions stationnaires

Commençons par décrire les solutions stationnaires du système (2.3). Elles vérifient

$$\partial_x(hu) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) = fhv - gh\partial_x z, \quad (2.4b)$$

$$\partial_x(huv) = -fhu. \quad (2.4c)$$

Cela donne deux grandes familles d'états stationnaires : les solutions stationnaires au repos

$$hu = 0, \quad (2.5a)$$

$$g\partial_x(h+z) = fv, \quad (2.5b)$$

qui correspondent aux solutions à l'équilibre géostrophique, et les solutions stationnaires en mouvement

$$hu = q_0 \neq 0, \quad (2.6a)$$

$$\partial_x\left(\frac{q_0^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = fhv - gh\partial_x z, \quad (2.6b)$$

$$\partial_x v = -f. \quad (2.6c)$$

pour lesquelles la vitesse tangentielle v dépend de la force de Coriolis. Si l'on ajoute la condition de vitesse transverse v nulle aux solutions stationnaires au repos, on retrouve le lac au repos décrit par

$$u = 0, v = 0, \quad (2.7a)$$

$$\partial_x(h+z) = 0. \quad (2.7b)$$

2.2.2 Relation d'entropie

On peut montrer que les solutions régulières de (2.3) vérifient une relation de conservation supplémentaire. En multipliant (2.3a) par $\frac{u^2+v^2}{2} + g(h+z)$, (2.3b) par u , et (2.3c) par v , puis en sommant on obtient

$$\partial_t \eta(w, z) + \partial_x \zeta(w, z) = 0,$$

où

$$\eta(w, z) = h\frac{(u^2+v^2)}{2} + \frac{gh^2}{2} + ghz, \quad \zeta(w, z) = \left(h\frac{(u^2+v^2)}{2} + gh^2 + ghz\right)u. \quad (2.8)$$

De plus, la fonction $w \mapsto \eta(w, z)$ est convexe. En effet, sa matrice Hessienne est donnée par

$$H_\eta(w) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+v^2}{h} + g & \frac{-u}{h} & \frac{-v}{h} \\ \frac{-u}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{-v}{h} & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix},$$

et ses mineurs principaux sont tous strictement positifs pour tout $w \in \Omega$.

Remarque 2.2.1. Contrairement à la topographie ou à d'autres termes sources que l'on peut trouver dans la littérature, la force de Coriolis n'apparaît pas dans cette relation d'entropie.

2.2.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source

Pour procéder à l'étude de ce système, on le réécrit sous forme quasi-linéaire

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0,$$

à l'aide des variables primitives $U = (h, u, v)$. La matrice $A(U)$ est de la forme

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(X) = (u - X)((u - X)^2 - gh).$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de $A(U)$ sont

$$\lambda_u(U) = u, \quad \lambda_{\pm}(U) = u \pm c, \quad \text{et} \quad r_u(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_{\pm}(U) = \begin{pmatrix} h \\ \pm c \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $c = \sqrt{gh}$. Le système considéré est strictement hyperbolique puisque $c > 0$. Le champ caractéristique $\lambda_u(U)$ est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann associés sont

$$h, \quad u.$$

Les champs caractéristiques $\lambda_{\pm}(U)$ sont vraiment non linéaires et les invariants de Riemann associés sont

$$v, \quad u \mp 2c.$$

Remarquons que la fonction v est un invariant de Riemann fort pour $\lambda_u(U)$ et les champs $\lambda_{\pm}(U)$ admettent $u \pm 2c$ comme invariant de Riemann forts. Nous sommes alors en présence d'un système riche.

2.2.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources

Pour prendre en compte les termes sources dans le système, on introduit la variable ι telle que $\partial_t \iota = 0$ et $\partial_x \iota = f$. Le système 1D avec terme source s'écrit alors sous forme quasi-linéaire

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0,$$

avec $U = (h, u, v, z, \iota)$ le vecteur des variables primitives et

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 & 0 \\ g & u & 0 & g & -v \\ 0 & 0 & u & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A(U)$ s'écrit

$$P(X) = X^2(u - X)((u - X)^2 - gh).$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres associés sont données par

$$\lambda_0(U) = 0 \text{ (multiplicité deux)}, \quad \lambda_u(U) = u, \quad \lambda_{\pm}(U) = u \pm c,$$

et

$$r_0^1(U) = \begin{pmatrix} h \\ -u \\ -1 \\ \frac{u^2 - c^2 + v}{g} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_0^2(U) = \begin{pmatrix} h \\ -u \\ 1 \\ \frac{u^2 - c^2 - v}{g} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r_u(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{\pm}(U) = \begin{pmatrix} h \\ \pm c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $c = \sqrt{gh}$. Ainsi, le système (2.3) est hyperbolique si et seulement si $u \neq \pm c$.

Déterminons la nature des champs caractéristiques et des invariants de Riemann associés. Puisque le gradient de $\lambda_0(U)$ est nul, le champ associé est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann associés sont

$$hu, \quad v + \iota, \quad \frac{u^2 + v^2}{2} + g(h + z).$$

Pour la valeur propre $\lambda_u(U)$, on a $\nabla \lambda_u(U) \cdot r_u(U) = 0$. Le champ est donc linéairement dégénéré et ses invariants de Riemann sont

$$h, \quad u, \quad z, \quad \iota.$$

Pour les valeurs propres $\lambda_{\pm}(U)$, on a $\nabla \lambda_{\pm}(U) \cdot r_{\pm}(U) = \pm \frac{3c}{2} \neq 0$ donc les champs caractéristiques associés sont vraiment non linéaires. Les invariants de Riemann sont donnés par

$$v, \quad u \mp 2c, \quad z, \quad \iota.$$

2.3 Système 1D à température variable

On étudie désormais les propriétés du système 1D à température variable TRSW qu'on rappelle ici

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \tag{2.9a}$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) = fhv - gh\theta \partial_x z, \tag{2.9b}$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) = -fhu, \tag{2.9c}$$

$$\partial_t(h\theta) + \partial_x(hu\theta) = 0. \tag{2.9d}$$

On note $w = (h, hu, hv, h\theta)^T$ le vecteur des inconnues. Toute solution de (2.9) doit appartenir à l'espace des états admissibles défini par

$$\Omega = \{w \in \mathbb{R}^4, h > 0, \theta > 0\}.$$

2.3.1 Solutions stationnaires

Les solutions stationnaires de (2.9) vérifient

$$\partial_x(hu) = 0, \tag{2.10a}$$

$$\partial_x\left(hu^2 + \frac{g\theta h^2}{2}\right) = fhv - gh\theta \partial_x z, \tag{2.10b}$$

$$\partial_x(huv) = -fhu, \tag{2.10c}$$

$$\partial_x(hu\theta) = 0. \tag{2.10d}$$

Encore une fois, on obtient deux grandes familles de solutions. Les solutions stationnaires au repos d'une part

$$hu = 0, \tag{2.11a}$$

$$\partial_x\left(\frac{g\theta h^2}{2}\right) = fhv - gh\theta \partial_x z, \tag{2.11b}$$

et les solutions stationnaires en mouvement d'autre part

$$hu = q_0 \neq 0, \quad (2.12a)$$

$$\partial_x \left(\frac{q_0^2}{h} + \frac{g\theta h^2}{2} \right) = fhv - gh\theta \partial_x z, \quad (2.12b)$$

$$\partial_x v = -f, \quad (2.12c)$$

$$\theta = cst. \quad (2.12d)$$

Si l'on prend une température constante dans les états stationnaires au repos, on retrouve l'équilibre géostrophique 1D (2.5). Si l'on y néglige les effets de la force de Coriolis f , on retrouve alors les états d'équilibre au repos du modèle TSW [25]. Parmi eux, on peut lister le lac au repos lorsque θ est constant

$$u = 0, v = 0, \quad (2.13a)$$

$$\partial_x(h+z) = 0, \quad (2.13b)$$

$$\theta = cst, \quad (2.13c)$$

l'équilibre isobare obtenu lorsque z est constant

$$u = 0, v = 0, \quad (2.14a)$$

$$h^2\theta = cst, \quad (2.14b)$$

$$z = cst, \quad (2.14c)$$

ainsi que l'équilibre à hauteur de fluide constante

$$u = 0, v = 0, \quad (2.15a)$$

$$z + \frac{h}{2} \ln(\theta) = cst, \quad (2.15b)$$

$$h = cst. \quad (2.15c)$$

2.3.2 Relation d'entropie

Les solutions régulières de (2.9) vérifient également une relation de conservation supplémentaire. En effet, en multipliant (2.9a) par $\frac{u^2+v^2}{2} + g\theta(h+z)$, (2.9b) par u , (2.9c) par v et (2.9d) par $\frac{g}{2} + gz$, on obtient la relation

$$\partial_t \eta(w, z) + \partial_x \zeta(w, z) = 0,$$

où

$$\eta(w, z) = h \frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{g\theta h^2}{2} + g\theta h z, \quad \zeta(w, z) = \left(h \frac{(u^2 + v^2)}{2} + g\theta h^2 + g\theta h z \right) u. \quad (2.16)$$

La fonction $w \mapsto \eta(w, z)$ n'est pas convexe. En effet, sa matrice Hessienne donnée par

$$H_\eta(w) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+v^2}{h} & -\frac{u}{h} & -\frac{v}{h} & \frac{g}{2} \\ -\frac{u}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{h} & 0 & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas symétrique définie positive. Cependant, si l'on effectue un changement de variable de la forme $\theta = \phi(T)$, on obtient en posant $\bar{w} = (h, hu, hv, hT)$ le couple d'entropie suivant

$$\bar{\eta}(\bar{w}, z) = \frac{h(u^2 + v^2)}{2} + \frac{gh^2\phi(T)}{2} + gh\phi(T)z$$

et

$$\bar{\zeta}(\bar{w}, z) = \left(\frac{h(u^2 + v^2)}{2} + gh^2\phi(T) + gh\phi(T)z \right) u.$$

La matrice hessienne de l'application $\bar{w} \rightarrow \bar{\eta}(\bar{w}, z)$ est donnée par

$$H_{\bar{\eta}}(\bar{w}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+v^2}{h} + g\phi(T) - g\phi'(T) + \frac{g^2}{2}\phi''(T) & \frac{g}{2}\phi'(T) - \frac{g}{2}\phi''(T) & -\frac{u}{h} & -\frac{v}{h} \\ \frac{g}{2}\phi'(T) - \frac{g}{2}\phi''(T) & \frac{g}{2}\phi''(T) & 0 & 0 \\ -\frac{u}{h} & 0 & \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{v}{h} & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

Ses mineurs principaux sont strictement positifs si et seulement si l'application ϕ vérifie les relations

$$\phi(T) - \phi'(T) + \frac{T^2}{2}\phi''(T) > 0$$

$$\phi''(T)\phi(T) - \frac{1}{2}\phi'(T)^2 > 0$$

et si de plus ϕ'' est à valeur dans \mathbb{R}^+ . A titre d'exemple, la fonction $\exp(T)$ convient. Ainsi, on a montré que pour un changement de variable bien choisi, il est possible de retrouver une entropie strictement convexe pour le système TRSW1D.

2.3.3 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système sans terme source

Le système 1D sans terme source (2.9) s'écrit sous forme quasi-linéaire

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0,$$

avec le vecteur des variables primitives $U = (h, u, v, \theta)$ et la matrice

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 \\ g\theta & u & 0 & \frac{gh}{2} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(U)$ vaut

$$P_{A(U)}(X) = (u - X)^2((u - X)^2 - gh\theta).$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de $A(U)$ sont donc données par

$$\lambda_u(U) = u \text{ (avec multiplicité deux)}, \quad \lambda_{\pm}(U) = u \pm c,$$

et

$$r_u^1(U) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 1 \\ -2\theta \end{pmatrix}, \quad r_u^2(U) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -1 \\ -2\theta \end{pmatrix}, \quad r_{\pm}(U) = \begin{pmatrix} h \\ \pm c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $c = \sqrt{gh\theta}$. Ainsi, le système considéré est hyperbolique puisque $c > 0$. Le champ $\lambda_u(U)$ est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann associés sont

$$h^2\theta, \quad u.$$

Les champs caractéristiques $\lambda_{\pm}(U)$ sont vraiment non linéaires. Les invariants de Riemann associés sont donnés par

$$v, \quad u \mp 2c, \quad \theta.$$

Ainsi, v et θ sont des invariants de Riemann forts pour la valeur propre $\lambda_u(U)$, mais les champs $\lambda_{\pm}(U)$ n'admettent pas d'invariants de Riemann fort, contrairement au cas à température constante. On en déduit que le système considéré ici n'est pas riche.

2.3.4 Champs caractéristiques et invariants de Riemann du système avec termes sources

Pour prendre en compte les termes sources dans la forme quasi-linéaire du système (2.9), on introduit la variable ι telle que $\partial_t \iota = 0$ et $\partial_x \iota = f$. On obtient alors

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0,$$

avec $U = (h, u, v, \theta, z, \iota)$ et

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g\theta & u & 0 & \frac{gh}{2} & g\theta & -v \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $A(U)$ vaut

$$P_{A(U)}(X) = X^2(u - X)^2((u - X)^2 - gh\theta).$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de $A(U)$ sont donc données par

$$\lambda_0(U) = 0 \text{ (avec multiplicité deux)}, \quad \lambda_u(U) = u \text{ (avec multiplicité deux)}, \quad \lambda_{\pm}(U) = u \pm c$$

et

$$r_0^1(U) = \begin{pmatrix} h \\ -u \\ -1 \\ 0 \\ \frac{u^2 - c^2 + v}{g\theta} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_0^2(U) = \begin{pmatrix} h \\ -u \\ 1 \\ 0 \\ \frac{u^2 - c^2 - v}{g\theta} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r_u^1(U) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 1 \\ -2\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_u^2(U) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -1 \\ -2\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{\pm}(U) = \begin{pmatrix} h \\ \pm c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où $c = \sqrt{gh\theta}$. Le système (2.9) est hyperbolique si et seulement si $u \neq \pm c$. Cette condition est très similaire à la condition d'hyperbolicité du système RSW1D. Le champ $\lambda_0(U)$ est linéairement dégénéré puisque son gradient est nul. Les invariants de Riemann associés sont

$$hu, \quad \theta, \quad v + \iota, \quad \frac{u^2 + v^2}{2} + g\theta(h + z).$$

Le champ associé à $\lambda_u(U)$ est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann sont

$$h^2\theta, \quad u, \quad z, \quad \iota.$$

Les champs caractéristiques des valeurs propres $\lambda_{\pm}(U)$ sont vraiment non linéaires. Les invariants de Riemann sont donnés par

$$v, \quad u \mp 2c, \quad \theta, \quad z, \quad \iota.$$

2.4 Système 2D

Pour gagner en concision, on donne ici directement les propriétés des systèmes 2D à température variable. Le vecteur des inconnues reste $w = (h, hu, hv, h\theta)^T$ et toute solution de (1.21) ou (1.22) doit appartenir à l'espace des états admissibles

$$\Omega = \{w \in \mathbb{R}^4, \quad h > 0, \quad \theta > 0\}.$$

2.4.1 Solutions d'intérêt

Parmi les solutions du système 2D, on peut noter celles où le gradient de pression et la force de Coriolis se compensent

$$g\theta\partial_x(h+z) = fv, \quad (2.17a)$$

$$g\theta\partial_y(h+z) = -fu. \quad (2.17b)$$

On dit que ces solutions sont à l'équilibre géostrophique. La terminologie d'équilibre est utilisée pour traduire la compensation de deux forces, et non pas le caractère stationnaire en temps des solutions. En effet, en dimension deux, des solutions à l'équilibre géostrophiques ne sont pas nécessairement stationnaires, même si c'est le cas en dimension un. Si l'on néglige les variations dans la direction y , l'équation (2.17b) de l'équilibre géostrophique donne une vitesse tangentielle u nulle, et on retrouve l'état stationnaire décrit par (2.5).

Les solutions stationnaires de (1.21) et (1.22) sont bien plus nombreuses et complexes à préserver numériquement. L'une des plus simples qui existe est le lac au repos bi-dimensionnel

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (2.18a)$$

$$\nabla(h+z) = 0, \quad (2.18b)$$

$$\theta = cst. \quad (2.18c)$$

2.4.2 Invariance par rotation

Comme nous le verrons dans le Chapitre 6, l'invariance par rotation d'un système hyperbolique permet de facilement définir des schémas numériques 2D. De nombreux systèmes hyperboliques possèdent cette propriété. C'est le cas par exemple du système d'Euler [35]. C'est le cas également des systèmes RSW2D et TRSW2D, et c'est ce que l'on s'appête à montrer ici. Commençons par remarquer que ces systèmes s'écrivent sous la forme

$$\partial_t w + \partial_x F(w) + \partial_y G(w) = S(w)\partial_x z + T(w)\partial_y z + \mathbf{S}(w),$$

avec

$$F(w) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad G(w) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad S(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ fhv \\ -fhu \end{pmatrix},$$

dans le cas d'une température constante, et avec

$$F(w) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2\theta}{2} \\ huv \\ hu\theta \end{pmatrix}, \quad G(w) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2\theta}{2} \\ hv\theta \end{pmatrix}, \quad S(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ fhv \\ -fhu \\ 0 \end{pmatrix},$$

dans le cas d'une température variable.

Lemme 2.4.1. *Les systèmes RSW2D (1.21) et TRSW2D (1.22) sont invariants par rotation, c'est-à-dire vérifient les relations*

$$\mathcal{R}_v(F(\mathcal{R}_v^{-1}w)) = \nu_1 F(w) + \nu_2 G(w), \quad (2.19)$$

$$\mathcal{R}_v(S(\mathcal{R}_v^{-1}w)) = \nu_1 S(w) + \nu_2 T(w), \quad (2.20)$$

$$\mathcal{R}_v(\mathbf{S}(\mathcal{R}_v^{-1}w)) = \mathbf{S}(w), \quad (2.21)$$

pour \mathcal{R}_v une matrice de rotation associée à un vecteur unitaire $v = (\nu_1, \nu_2)$ donné.

Démonstration. On vérifie aisément qu'étant donné un vecteur unitaire $v = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{S}^1$, et la matrice de rotation

$$\mathcal{R}_v := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & -\nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}_v := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & -\nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lorsque la température n'est pas constante, les relations (2.19), (2.20) et (2.21) sont vérifiées. \square

Dans ce chapitre, nous avons introduit les notations et propriétés des modèles que l'on utilisera d'un point de vue numérique et théorique. Pour plus de lisibilité, on résume certaines propriétés du modèle RSW1D dans le [Tableau 2.1](#) et celles du modèle TRSW1D dans le [Tableau 2.2](#).

	Sans terme source		Avec terme source		
Entropie	Strictement convexe				
Condition(s) d'hyperbolicité	-		$u \neq \pm\sqrt{gh}$		
Valeurs propres	$\lambda_u = u$	$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$	$\lambda_0 = 0$	$\lambda_u = u$	$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$
Nature des champs	LD	VNL	LD	LD	VNL
Invariants de Riemann	h, u	$v, u \mp 2\sqrt{gh}$	$hu, v + \iota, \frac{u^2+v^2}{2} + g(h+z)$	h, u, z, ι	$v, u \mp 2\sqrt{gh}$
Invariants de Riemann forts	v	$u \pm 2\sqrt{gh}$	-	-	-

TABLEAU 2.1 – Récapitulatif des propriétés du modèle RSW1D.

	Sans terme source		Avec terme source		
Entropie	Strictement convexe à changement de variable près				
Condition(s) d'hyperbolicité	-		$u \neq \pm\sqrt{gh\theta}$		
Valeurs propres	$\lambda_u = u$	$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh\theta}$	$\lambda_0 = 0$	$\lambda_u = u$	$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh\theta}$
Nature des champs	LD	VNL	LD	LD	VNL
Invariants de Riemann	$h^2\theta, u$	$v, \theta, u \mp 2\sqrt{gh\theta}$	$hu, v + \iota, \frac{u^2+v^2}{2} + g\theta(h+z)$	$h^2\theta, u, z, \iota$	$v, u \mp 2\sqrt{gh\theta}, \theta, z, \iota$
Invariants de Riemann forts	v, θ	-	-	-	-

TABLEAU 2.2 – Récapitulatif des propriétés du modèle TRSW1D.

Deuxième partie

Résultats d'existence de solutions

Existence locale de solutions régulières

Sommaire du présent chapitre

3.1 Introduction	23
3.2 Symétrisation	24
3.2.1 Définitions	24
3.2.2 Système à température constante	25
3.2.3 Système à température variable	25
3.3 Système 1D à température constante	27
3.3.1 Existence locale de solutions régulières	27
3.3.2 Existence globale pour le système régularisé	33
3.4 Système 2D à température variable	36

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons démontrer des résultats d'existence locale de solutions régulières pour les systèmes RSW1D à température constante (1.23) et TRSW2D à température variable (1.22). Nous proposons deux démonstrations qui reposent sur des techniques bien connues. La première utilise la méthode classique de viscosité évanescence mentionnée dans [62, 35, 22] et bien d'autres. Elle consiste à ajouter un terme diffusif au système accompagné d'un paramètre ε positif, résoudre le problème de Cauchy avec diffusion, puis passer à la limite quand ε tend vers zéro. La seconde méthode repose sur l'introduction d'une suite itérative de solutions de problèmes de Cauchy linéaires dont la limite tend vers la solution du problème de Cauchy non linéaire initial. On peut retrouver cette méthode dans [62] ou encore [6]. Ces techniques peuvent être également appliquées sur les systèmes TSW1D (1.24) et RSW2D (1.21), mais nous ne présenterons les démonstrations que pour les systèmes mentionnés précédemment par souci de concision. De plus, seule la force de Coriolis sera prise en compte dans les termes sources, mais les résultats se généralisent aux systèmes avec topographie, pourvu qu'elle soit suffisamment régulière ($z \in H^3(\mathbb{R})$ ou $z \in H^4(\mathbb{R}^2)$).

Nous allons énoncer les théorèmes que nous allons démontrer. Commençons par ajouter quelques précisions. Pour le système 1D à température constante (1.23), la solution à l'équilibre au repos est donnée par $h = \bar{h}$, et $u = v = 0$. On suppose que la force de Coriolis qui dépend de x est telle que f, f' et f'' sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On peut alors établir le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *On suppose que $h_0 - \bar{h}, u_0, v_0$ sont dans $H^2(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_0(x) \geq \underline{h} > 0$, où \underline{h} est une constante fixée. Il existe une unique solution classique $(h - \bar{h}, u, v)^T$ dans l'espace $C([0, T_0]; H^2(\mathbb{R})^3)$ du système 1D à température constante (1.23), où T_0 dépend de la condition initiale de la façon suivante $T_0 \simeq \left\| (h_0 - \bar{h}, u_0, v_0)^T \right\|_{H^2(\mathbb{R})^3}^{-1}$. De plus, h reste strictement positif.*

Pour le système 2D à température variable (1.22), la solution à l'équilibre au repos est donnée par $h = \bar{h}$, $u = v = 0$ et $\theta = \bar{\theta}$. On fait les mêmes hypothèses de régularité sur la force de Coriolis f que précédemment. On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.1.2. *On suppose que $h_0 - \bar{h}, u_0, v_0$ et $\theta_0 - \bar{\theta}$ sont dans $H^3(\mathbb{R}^2)$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $h_0(x) \geq \underline{h} > 0$, et $\theta_0(x) \geq \underline{\theta} > 0$, pour \underline{h} et $\underline{\theta}$ des constantes fixées. Alors, il existe une unique solution classique $(h - \bar{h}, u, v, \theta - \bar{\theta})^T$ dans l'espace $C([0, T_0]; H^3(\mathbb{R}^2)^4)$ du système 2D à température variable (1.22), où T_0 dépend de la condition initiale de la façon suivante $T_0 \simeq \left\| (h_0 - \bar{h}, u_0, v_0, \theta_0 - \bar{\theta})^T \right\|_{H^3(\mathbb{R}^2)^4}^{-1}$. De plus, h et θ restent strictement positifs.*

La différence de régularité de la solution des systèmes 1D et 2D s'explique par la validité de l'injection de Sobolev suivante qui dépend de la dimension de l'espace

$$W^{m,2}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ si } \frac{1}{2} < \frac{m}{d}.$$

En dimension $d = 1$, $m = 1$ est le plus petit entier qui vérifie l'inégalité ci-dessus alors qu'en dimension $d = 2$, il s'agit de $m = 2$. Ces injections seront utilisées pour montrer que les dérivées en espace de la solution sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ce qui explique pourquoi la solution elle-même doit être dans l'espace $W^{m+1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Les deux résultats précédents sont des résultats d'existence locale de solutions. On ne peut pas espérer obtenir l'existence globale, puisque les solutions de problèmes hyperboliques peuvent présenter des discontinuités même avec une condition initiale régulière. Cependant, on peut démontrer un résultat d'existence globale pour le système 1D régularisé. Cela sera fait dans la [sous-section 3.3.2](#).

Les deux types de démonstration des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 reposent sur un ingrédient essentiel [42] : la symétrisation de la partie non linéaire du système considéré. Cette notion peut prendre des sens différents. Le travail que nous avons mené consiste à trouver une symétrisation adaptée aux systèmes qui nous intéressent afin de simplifier au maximum les calculs menés pour obtenir des estimations. Soulignons que même si les théorèmes énoncés et démontrés par la suite s'appliquent aux systèmes (1.23) et (1.22), nous choisirons des techniques de symétrisation compatibles avec les systèmes (1.21) et (1.24). Ainsi, une simple adaptation des démonstrations des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 suffit pour montrer les résultats analogues pour les autres systèmes. Dans la prochaine section, nous mentionnerons trois méthodes possibles de symétrisation et motiverons les choix que nous avons faits pour chacun des systèmes étudiés.

3.2 Symétrisation

On expose dans cette section différentes techniques de symétrisation des systèmes hyperboliques. On commence par donner différentes définitions de symétrisation, puis nous choisirons la méthode la plus adaptée à nos systèmes selon nos critères.

3.2.1 Définitions

On considère un système hyperbolique 2D sans terme source

$$\partial_t w + A(w)\partial_x w + B(w)\partial_y w = 0. \quad (3.1)$$

Un tel système peut être symétrisé d'au moins trois façons différentes. La première technique (voir [42]) consiste à le multiplier par une matrice symétrique définie positive bien choisie, notée $M(w)$ et telle que $S_A(w) := M(w)A(w)$ et $S_B(w) := M(w)B(w)$ soient symétriques. Cela revient à réécrire le système sous la forme

$$M(w)\partial_t w + S_A(w)\partial_x w + S_B(w)\partial_y w = 0.$$

On souligne que si le système admet une entropie strictement convexe η , alors poser $M(w) = \eta(w)$ convient.

Une autre possibilité (voir [35]) consiste à trouver un changement de variable $w = \phi(v)$ pour transformer le système (3.1) en

$$\phi'(v)\partial_t v + S_A(v)\partial_x v + S_B(v)\partial_y v = 0,$$

avec $S_A := A\phi'$ et $S_B := B\phi'$ deux matrices symétriques. Notons que si le système admet une entropie strictement convexe alors le changement de variable $v = \eta'(w)^T$ convient.

Enfin, on peut aussi chercher un changement de variable $w = \phi(v)$ tel que

$$\partial_t v + S_A(v)\partial_x v + S_B(v)\partial_y v = 0,$$

avec $S_A = (\phi')^{-1}A\phi'$ et $S_B = (\phi')^{-1}B\phi'$ symétriques. Cette symétrisation est la plus agréable à utiliser dans les calculs qui suivront, car contrairement aux autres, le terme de dérivée en temps qui apparaît dans le système symétrisé n'est pas accompagné d'un multiplicateur. Néanmoins, tous les systèmes hyperboliques, même admettant une entropie strictement convexe, ne sont pas nécessairement symétrisables de cette façon. C'est tout de même le cas des systèmes riches, qui sont symétrisables (et même diagonalisables) grâce à leurs invariants de Riemann forts, comme on l'a vu dans la proposition 2.1.3 (voir aussi [63]).

Ajoutons que les systèmes que nous allons symétriser ont des termes sources. On s'efforcera de choisir une technique de symétrisation compatible à la fois avec les termes sources et la partie conservative du système.

3.2.2 Système à température constante

On s'intéresse pour le moment au système à température constante RSW, qui s'écrit en variables primitives $U = (h, u, v)^T$ sous la forme

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U + B(U)\partial_y U = S(U), \quad (3.2)$$

avec

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix}, \quad S(U, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ fv \\ -fu \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la partie du terme source qui fait intervenir la force de Coriolis est orthogonale au vecteur des inconnues U .

L'étude du système RSW1D dans la sous-section 2.2.3 a montré qu'il admet trois invariants de Riemann forts

$$\psi_v^A(U) = v, \quad \psi_{\pm}^A(U) = u \pm 2\sqrt{gh}.$$

Utiliser le changement de variable $V = \Psi^A(U) = (\psi_v^A(U), \psi_+^A(U), \psi_-^A(U))^T$ permet alors de diagonaliser la matrice $A(U)$ et convient tout à fait pour le système RSW1D.

De façon similaire, on peut montrer que le système 1D $\partial_t U + B(U)\partial_y U = 0$ admet trois invariants de Riemann forts

$$\psi_u^B(U) = u, \quad \psi_{\pm}^B(U) = v \pm 2\sqrt{gh}.$$

Ainsi, le changement de variable $V = \Psi^B(U) = (\psi_u^B(U), \psi_+^B(U), \psi_-^B(U))^T$ permet de diagonaliser la matrice $B(U)$.

Les matrices $A(U)$ et $B(U)$ sont toutes les deux diagonalisables mais pour des changements de variables différents. Cependant, elles sont toutes les deux symétrisables pour le même changement de variable

$$V = \phi(U) = (2\sqrt{gh}, u, v),$$

que l'on obtient facilement en prenant la demie-somme et la demie-différence des invariants de Riemann ψ_{\pm}^A et ψ_{\pm}^B . C'est donc ce changement de variable que l'on sélectionne puisqu'il permet de symétriser les systèmes 1D et 2D à température constante. Pour simplifier les notations, on pose $\lambda = 2\sqrt{gh}$. En notant $V = (\lambda, u, v)$, le système (3.2) se réécrit alors

$$\partial_t V + S_A(V)\partial_x V + S_B(V)\partial_y V = S(V), \quad (3.3)$$

avec

$$S_A(V) = \begin{pmatrix} u & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad S_B(V) = \begin{pmatrix} v & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & v & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & v \end{pmatrix}, \quad S(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ fv \\ -fu \end{pmatrix}.$$

Le changement de variable utilisé pour symétriser le système ne dénature par le terme source qui reste inchangé et orthogonal au vecteur des variables considérées.

3.2.3 Système à température variable

On s'intéresse cette fois à la symétrisation du système à température variable TRSW, qui s'écrit en variables primitives $U = (h, u, v, \theta)^T$ sous la forme

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U + B(U)\partial_y U = S(U),$$

avec

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 \\ g\theta & u & 0 & \frac{gh}{2} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} v & 0 & h & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ g\theta & 0 & v & \frac{gh}{2} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ fv \\ -fu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette fois, nous n'avons pas suffisamment d'invariants de Riemann forts pour diagonaliser le système 1D (voir [sous-section 2.3.3](#)). D'autre part, nous écartons la possibilité d'utiliser l'entropie du système pour le symétriser. En effet, que ce soit à l'aide d'un changement de variable du type $V = \eta'(U)$ ou en le multipliant par $\eta''(U)$, les deux méthodes rendent les calculs laborieux, surtout au vu du changement de variable à effectuer au préalable pour obtenir une entropie strictement convexe (voir [sous-section 2.3.2](#)). N'ayant pas trouvé de changement de variable satisfaisant, nous avons choisi d'utiliser la première méthode de symétrisation, à savoir, la multiplication du système par une matrice bien choisie. On va une fois de plus travailler sur les matrices $A(U)$ et $B(U)$ séparément pour ensuite en déduire une méthode de co-symétrisation.

On considère d'abord le système 1D

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0.$$

Puisqu'il est hyperbolique, la matrice $A(U)$ est diagonalisable. Soit $P(U)$ la matrice de passage composée des vecteurs propres de $A(U)$ telle que $A(U) = P(U)D(U)P^{-1}(U)$, où $D(U)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $A(U)$. Alors la matrice $M(U) := (P^{-1}(U))^T P^{-1}(U)$ est symétrique définie positive et symétrise le système puisque

$$S(U) := M(U)A(U) = (P^{-1}(U))^T D(U)P^{-1}(U),$$

est symétrique. On a donc trouvé un symétriseur de $A(U)$.

On peut faire le même raisonnement pour la matrice $B(U)$. Pour éviter les confusion, on note $P_A(U)$ et $M_A(U)$ la matrice de passage de $A(U)$ et son symétriseur et on utilise les notations analogues pour $B(U)$. En nous aidant des calculs de vecteurs propres effectués dans la [sous-section 2.3.3](#), on obtient

$$P_A(U) = \begin{pmatrix} h & h & h & h \\ 0 & 0 & c & -c \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2\theta & -2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_A(U) = \frac{1}{2h^2\theta} \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & \frac{h}{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2\theta & 0 \\ \frac{h}{2} & 0 & 0 & \frac{h^2}{2\theta} \end{pmatrix},$$

et

$$P_B(U) = \begin{pmatrix} h & h & h & h \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2\theta & -2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \end{pmatrix}, \quad M_B(U) = \frac{1}{2h^2\theta} \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & h^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h/g & 0 \\ \frac{h}{2} & 0 & 0 & \frac{h^2}{2\theta} \end{pmatrix},$$

où $c = \sqrt{gh\theta}$. Les symétriseurs $M_A(U)$ et $M_B(U)$ sont égaux à permutation près de leurs deuxièmes et troisièmes coefficients diagonaux. Aussi, on peut remarquer qu'une matrice de la forme

$$M(U) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ \frac{h}{2} & 0 & 0 & \frac{h^2}{2\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

est symétrique définie positive, et symétrise les matrices $A(U)$ et $B(U)$ si et seulement si $d_2 = d_3 = \frac{h}{g}$. On choisit comme co-symétriseur de $A(U)$ et $B(U)$ la matrice correspondant à ces coefficients. Elle présente l'avantage d'être relativement creuse et de préserver la propriété d'orthogonalité du terme source avec le vecteur des

inconnues, puisque

$$M(U) \begin{pmatrix} 0 \\ fv \\ -fu \\ 0 \end{pmatrix} \times U = 0. \quad (3.5)$$

Remarque 3.2.1. On peut pousser le raisonnement et chercher la matrice $M(U)$ sous la forme

$$M(U) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Après quelques calculs, on obtient que les matrices $M(U)A(U)$ et $M(U)B(U)$ sont symétriques si et seulement si $d_2 = d_3 =: d$, $\alpha = \frac{gd}{2}$ et $d_1 = \frac{g\theta}{h}d$. Alors, la matrice $M(U)$ est définie positive si et seulement si $d_4 > \frac{\alpha^2}{d_1}$. La matrice $M(U)$ trouvée précédemment correspond au choix $d = \frac{h}{g}$ et $d_4 = \frac{h^2}{2\theta} > \frac{h^2}{4\theta}$.

Nous venons d'établir les méthodes de symétrisation choisies. Passons maintenant à la démonstration du Théorème 3.1.1.

3.3 Système 1D à température constante

3.3.1 Existence locale de solutions régulières

Le but de cette section est de démontrer le Théorème 3.1.1. On considère le système 1D à température constante (1.23). Comme on l'a vu dans la section 3.2, réécrire ce système dans les variables $V = (\lambda, u, v)$ permet de le symétriser. On obtient en effet

$$(V - E)_t + S(V)(V - E)_x + F \times (V - E) = 0, \quad (3.6)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } S(V) = \begin{pmatrix} u & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Nous prendrons garde à vérifier que h reste strictement positif afin que cette réécriture soit valide. On renvoie aux Lemmes A.0.1 et A.0.2 pour la validité du changement de variable et le lien entre les régularités de h et λ . Fixons quelques notations. Si $H^m(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev classique dont les éléments sont les fonctions scalaires dans $L^2(\mathbb{R})$ telles que ses dérivées m -ièmes sont dans $L^2(\mathbb{R})$, alors on note $\mathbb{H}^m := (H^m(\mathbb{R}))^3$. On utilisera aussi les notations \mathbb{L}^2 et \mathbb{L}^∞ pour désigner les espaces $(L^2(\mathbb{R}))^3$ et $(L^\infty(\mathbb{R}))^3$, respectivement. On applique la méthode de viscosité évanescence, qui consiste à régulariser le système (3.6) en ajoutant un terme diffusif comme suit

$$(V - E)_t + S(V)(V - E)_x + F \times (V - E) = \varepsilon(V - E)_{xx}. \quad (3.7)$$

où $\varepsilon > 0$. La première étape de la démonstration est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (3.7).

Proposition 3.3.1. *Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $T_0 \approx C\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2}^2$ indépendant de ε tel que le système (3.7) admet une unique solution V dans $C([0, T_0]; E + \mathbb{H}^2)$.*

Il est important d'obtenir un temps d'existence de la solution indépendant de ε pour pouvoir passer à la limite par la suite. Donnons les principales étapes de la démonstration. On commence d'abord par résoudre le système en utilisant un théorème de point fixe sur un intervalle de temps de la forme $[0, T_0^\varepsilon)$. Puis, en itérant ce processus, on obtiendra une solution définie sur un intervalle de temps $[0, T_0)$ avec T_0 indépendant de ε , obtenu grâce à des estimations *a priori*. Pour travailler dans l'espace $E + \mathbb{H}^2$, nous utiliserons par la suite la norme

$$N(t) = \sqrt{\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|V_{xx}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2},$$

équivalente à la norme usuelle sur $E + \mathbb{H}^2$. Commençons par donner un résultat préliminaire. On introduit l'équation d'évolution linéaire

$$W_t = \varepsilon W_{xx}, \quad (3.8)$$

à laquelle on ajoute une donnée initiale W_0 dans \mathbb{L}^2 . On pose $W(t) = \mathcal{W}(t)W_0$ pour le flot de la chaleur. On rappelle le résultat standard [59] suivant

Lemme 3.3.1. *L'opérateur de semi-groupe $\mathcal{W}(t)$ vérifie*

$$\|\mathcal{W}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2)} \leq 1, \quad \text{et} \quad \|\mathcal{W}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2, \mathbb{H}^1)} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon t}}.$$

Démonstration. Pour $W_0 \in L^2(\mathbb{R})$, la solution de (3.8) est donnée par

$$W(t) = \mathcal{W}(t)W_0 = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(W_0)(\xi) \exp(-\varepsilon t \xi^2) \right),$$

où \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et \mathcal{F}^{-1} la transformée de Fourier inverse. Ainsi, pour une donnée initiale W_0 dans $L^2(\mathbb{R})$, on a d'une part

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}(t)W_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(W(t))|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(W_0)|^2 \exp(-2\varepsilon t \xi^2) d\xi \\ &\leq \|W_0\|_{\mathbb{L}^2}^2, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}(t)W_0\|_{\mathbb{H}^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(W(t))|^2 (1 + |\xi|^2) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(W_0)|^2 \exp(-2\varepsilon t \xi^2) (1 + |\xi|^2) d\xi \\ &\leq \left(1 + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{2\varepsilon t \xi^2 \exp(-2\varepsilon t \xi^2)}{2\varepsilon t} \right) \|W_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon t} \right) \|W_0\|_{\mathbb{L}^2}^2, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Grâce à ce lemme, on peut démontrer la Proposition 3.3.1. La démonstration utilisera la notation suivante.

Notation 3.3.1. *Dans les calculs qui suivront, on notera V_{nx} , où n est un entier, la dérivée n -ième de V par rapport à la variable x . Ainsi, on aura $V_{2x} = V_{xx}$, $V_{3x} = V_{xxx}$, et $V_{4x} = V_{xxxx}$.*

Démonstration. Preuve de la Proposition 3.3.1

On cherche une solution mild de l'équation (3.7), c'est-à-dire une solution sous la forme

$$W(t) = \mathcal{W}(t)(V(0) - E) - \int_0^t \mathcal{W}(t-s) (S(V)(V-E)_x + F \times (V-E)) ds.$$

Pour cela, on va utiliser le théorème de point fixe de Picard dans l'espace complet $C([0, T]; \mathbb{H}^2)$ sur l'opérateur \mathcal{T} défini par

$$\mathcal{T}(V-E)(t) := \mathcal{W}(t)(V(0) - E) - \int_0^t \mathcal{W}(t-s) (S(V)(V-E)_x + F \times (V-E)) ds. \quad (3.9)$$

pour $t \geq 0$.

Étape 1 : Point fixe. On commence par établir que l'application \mathcal{T} envoie la boule de centre 0 et de rayon R de $C([0, T]; \mathbb{H}^2)$ sur elle-même. En utilisant le Lemme 3.3.1, on obtient

$$\|\mathcal{T}(V - E)(t)\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2} + \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{2(t-s)}} (\|S(V)(V - E)_x\|_{\mathbb{H}^1} + \|F \times (V - E)\|_{\mathbb{H}^1}) ds.$$

Puisque $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach, on a

$$\|S(V)(V - E)_x\|_{\mathbb{H}^1} \leq C (\|V - E\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \|V - E\|_{\mathbb{H}^2}).$$

On n'a pas seulement une majoration par $\|V - E\|_{\mathbb{H}^2}^2$ car par exemple, les produits du type $\frac{\lambda}{2} u_{xx}$ doivent être modifiés en $\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2} u_{xx} + \frac{\bar{\lambda}}{2} u_{xx}$ afin que la norme L^2 de chaque terme soit finie. On a alors que

$$\left\| \frac{\lambda}{2} u_{xx} \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2} \right\|_{L^2} \|u_{xx}\|_{L^2} + c \|u_{xx}\|_{L^2}.$$

Concernant le terme source, on a

$$\|F \times (V - E)\|_{\mathbb{H}^1} \leq c (\|f\|_{L^\infty}, \|f'\|_{L^\infty}) \|V - E\|_{\mathbb{H}^1}.$$

On obtient donc

$$\|\mathcal{T}(V - E)(t)\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2} + C (\|f\|_{L^\infty}, \|f'\|_{L^\infty}) \left(T + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \sup_{[0, T]} (\|V - E\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \|V - E\|_{\mathbb{H}^2}). \quad (3.10)$$

Ainsi, en considérant une donnée initiale telle que $\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2} \leq \frac{R}{2}$, on a montré que pour T assez petit et dépendant de R, f, f' et ε , l'application \mathcal{T} envoie bien la boule de rayon R de $C([0, T]; \mathbb{H}^2)$ sur elle-même.

Il reste à démontrer que \mathcal{T} est contractante. Soient V^1 et V^2 dans $C([0, T]; \mathbb{H}^2)$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{T}(V^1 - E)(t) - \mathcal{T}(V^2 - E)(t) \right\|_{\mathbb{H}^2} &\leq \int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon(t-s)}} \left(\|S(V^1)(V^1 - V^2)_x\|_{\mathbb{H}^1} \right. \\ &\quad \left. + \left\| (S(V^1) - S(V^2)) V_x^2 \right\|_{\mathbb{H}^1} + \|F \times (V^1 - V^2)\|_{\mathbb{H}^1} \right) ds \end{aligned}$$

De même que précédemment, on a les majorations

$$\|S(V)(V^1 - V^2)_x\|_{\mathbb{H}^1} \leq C (\|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^2}),$$

et

$$\|F \times (V^1 - V^2)\|_{\mathbb{H}^1} \leq c (\|f\|_{L^\infty}, \|f'\|_{L^\infty}) \|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^1}.$$

Le terme restant peut être contrôlé ainsi

$$\left\| (S(V^1) - S(V^2)) V_x^2 \right\|_{\mathbb{H}^1} \leq \|V_x^2\|_{L^\infty} \|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^1},$$

toujours en utilisant que $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre. Ainsi, on obtient la majoration

$$\left\| \mathcal{T}(V^1 - E)(t) - \mathcal{T}(V^2 - E)(t) \right\|_{\mathbb{H}^2} \leq \tilde{C} (\|f\|_{L^\infty}, \|f'\|_{L^\infty}) \left(T + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \sup_{[0, T]} (\|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \|V^1 - V^2\|_{\mathbb{H}^2}),$$

ce qui permet de conclure que pour T assez petit et dépendant de f, f' , et ε , l'application \mathcal{T} est bien contractante sur $C([0, T]; \mathbb{H}^2)$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Picard et en déduire l'existence d'une solution sur un intervalle de temps $[0, T_\varepsilon]$.

Étape 2 : estimation a priori. On montre maintenant une estimation *a priori* sur la solution de (3.7) afin de déterminer un temps d'existence de la solution indépendant de ε . On considère le produit scalaire de (3.7) avec

$V - E$. En notant $|V|$ la norme euclidienne de V sur \mathbb{R}^3 et $V.W$ le produit scalaire associé pour deux vecteur V et W de \mathbb{R}^3 , cela donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |V - E|^2 dx + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |V_x|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}} (V - E) \cdot S(V) (V - E)_x dx. \quad (3.11)$$

Puisque S est symétrique, on a

$$-2 \int_{\mathbb{R}} (V - E) \cdot S(V) (V - E)_x dx = \int_{\mathbb{R}} (V - E) \cdot S(V)_x (V - E) dx.$$

On souligne que

$$S(V)_x = S(V_x) = \begin{pmatrix} u_x & \frac{\lambda_x}{2} & 0 \\ \frac{\lambda_x}{2} & u_x & 0 \\ 0 & 0 & u_x \end{pmatrix},$$

ce qui implique

$$\|S(V)_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} = \max\left(|u_x|, \left|u_x + \frac{\lambda_x}{2}\right|, \left|u_x - \frac{\lambda_x}{2}\right|\right).$$

Alors, en posant $\|S(V)_x\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|S(V_x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ on a

$$\|S(V)_x\| \leq \|V_x\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, on peut contrôler le terme non linéaire qui apparaît dans (3.11), ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |V - E|^2 dx + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |V_x|^2 dx \leq \|S_x\| \int_{\mathbb{R}} |V - E|^2 dx.$$

Finalement, on obtient la majoration

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |V - E|^2 dx \leq \left(\sup_{[0, T]} \|V_x\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \right) \int_{\mathbb{R}} |V - E|^2 dx. \quad (3.12)$$

On introduit alors le temps d'arrêt

$$\tau = \inf \{t > 0; \|V(t) - E\|_{\mathbb{H}^2} > 2\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2} = 2M_0\}.$$

Pour $T \leq \tau$ on pose $\sigma(T, V_x) := \sup_{[0, T]} \|V_x\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}$. Alors, en intégrant (3.12) en temps, on obtient pour tout $t \leq T$,

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|V(0) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + T \sigma(T, V_x) \sup_{s \leq t} \|V(s) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2. \quad (3.13)$$

Cela donne une première partie de l'estimation. Il reste à contrôler la norme \mathbb{L}^2 de V_{xx} . Pour cela, on considère le produit scalaire de (3.7) avec V_{4x} (on utilise ici la Notation 3.3.1). Des intégrations par parties donnent

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |V_{xxx}|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}} V_{4x} \cdot S(V) V_x dx - 2 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_{xx} \times (V - E) dx - 4 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_x \times V_x dx. \quad (3.14)$$

Pour commencer, on s'occupe des deux derniers termes du membre de droite de l'égalité (3.14) qui font intervenir des dérivées de la force de Coriolis. D'une part, on a

$$-2 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_{xx} \times (V - E) dx \leq 2 \|f''\|_{\mathbb{L}^\infty} \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2} \|V - E\|_{\mathbb{L}^2},$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité d'interpolation

$$\|V_x\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2} \|V - E\|_{\mathbb{L}^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} -4 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_x \times V_x dx &\leq 4 \|f'\|_{L^\infty} \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2} \|V_x\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq 4 \|f'\|_{L^\infty} \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{3}{2}} \|V - E\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Alors, d'après l'inégalité de Young, les deux termes précédents peuvent être majorés ainsi

$$-2 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_{xx} \times (V - E) dx - 4 \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot F_x \times V_x dx \leq (\|f''\|_{L^\infty} + 3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty}) (\|V - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^2).$$

On s'intéresse maintenant au premier terme du membre de droite de (3.14). Avec une intégration par parties on obtient

$$-2 \int_{\mathbb{R}} V_{4x} \cdot S(V) V_x dx = 2 \int_{\mathbb{R}} V_{3x} \cdot S(V)_x V_x dx + 2 \int_{\mathbb{R}} V_{3x} \cdot S(V) V_{2x} dx.$$

D'une part, en utilisant une fois encore que $S(V)$ est symétrique, on trouve la majoration

$$2 \int_{\mathbb{R}} V_{3x} \cdot S(V) V_{2x} dx = - \int_{\mathbb{R}} V_{2x} \cdot S(V)_x V_{2x} dx \leq \|S(V)_x\| \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx \leq \|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx.$$

D'autre part, on a aussi que

$$2 \int_{\mathbb{R}} V_{3x} \cdot S(V)_x V_x dx = -2 \int_{\mathbb{R}} V_{2x} \cdot S(V)_x V_{2x} dx - 2 \int_{\mathbb{R}} V_{2x} \cdot S(V)_{2x} V_x dx \leq 5 \|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx.$$

En effet, il suffit de remarquer que

$$-2 \int_{\mathbb{R}} V_{2x} \cdot S(V)_{2x} V_x dx \leq 3 \|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx.$$

En rassemblant toutes ces inégalités, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx \leq \left(6 \sup_{[0,T]} \|V_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) \int_{\mathbb{R}} |V_{xx}|^2 dx + (\|f''\|_{L^\infty} + 3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty}) (\|V - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^2). \quad (3.15)$$

Une intégration en temps permet d'obtenir pour tout $t \leq T$ l'inégalité

$$\|V_{xx}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|V_{xx}(0)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + T \left(6\sigma(T, V_x) + \|f''\|_{L^\infty} + 3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty} \right) \sup_{s \leq t} (\|V(s) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|V_{xx}(s)\|_{\mathbb{L}^2}^2). \quad (3.16)$$

En réunissant les majorations (3.13) et (3.16), on contrôle la norme $N(t)$ pour tout $t \leq T$. On obtient en effet

$$N(t)^2 \leq N(0)^2 + T \left(6\sigma(T, V_x) + 3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty} + \|f''\|_{L^\infty} \right) \sup_{s \leq t} N(s)^2.$$

Ainsi, en choisissant T tel que $2T \left(6\sigma(T, V_x) + 3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty} + \|f''\|_{L^\infty} \right) \leq 1$, on obtient que

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{H}^2} \leq 2\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2}, \quad \forall t \leq T.$$

Cela permet d'établir que $24\tau \|V_x\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$ et $4\tau \left(3\sqrt{3}\|f'\|_{L^\infty} + \|f''\|_{L^\infty} \right) \leq 1$ sont des bornes pour τ le temps maximal d'existence de la solution. On peut donc itérer le théorème de point fixe jusqu'à ce qu'à atteindre un temps indépendant de ε . Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.3.1. \square

On note à présent V^ε la solution du problème régularisé (3.7). Nous venons de démontrer l'existence locale de cette solution jusqu'à un temps T indépendant de ε . On souhaite désormais passer à la limite lorsque ε tend vers 0 pour retrouver la solution du problème initial, sans diffusion. Pour cela, on commence par établir la convergence de la suite $V^\varepsilon - E$ dans \mathbb{L}^2 .

Lemme 3.3.2. *Soit T_0 un temps d'existence de la solution de (3.7) qui dépend de la donnée initiale mais pas du paramètre ε . Alors la suite $(V^\varepsilon - E)_{\varepsilon > 0}$ converge dans l'espace $C([0, T_0]; \mathbb{L}^2)$ vers une limite notée $V - E$.*

Démonstration. On va montrer que la suite $(V^\varepsilon - E)_{\varepsilon > 0}$ est de Cauchy. Pour cela, on considère $0 < \mu < \varepsilon$ et V^ε et

V^μ solutions du problème diffusif (3.7) $_\varepsilon$ et (3.7) $_\mu$. Alors la différence $W = V^\varepsilon - V^\mu$ est solution de

$$W_t + S(V^\varepsilon)W_x + (S(V^\varepsilon) - S(V^\mu))V_x^\mu + F \times W = (\varepsilon - \mu)V_{xx}^\mu + \varepsilon W_{xx}. \quad (3.17)$$

On prend le produit scalaire de (3.17) avec W pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq (\varepsilon - \mu) \|V_{xx}^\mu\|_{\mathbb{L}^2} \|W\|_{\mathbb{L}^2} - \int_{\mathbb{R}} W \cdot S(V^\varepsilon) W_x dx - \int_{\mathbb{R}} W \cdot (S(V^\varepsilon) - S(V^\mu)) V_x^\mu dx.$$

Premièrement, puisque l'application de \mathbb{R}^3 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ qui envoie V sur $S(V)$ est lipschitzienne, et puisque V^μ est uniformément borné par rapport à ε dans $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{W}^{1,\infty}$, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}} W \cdot (S(V^\varepsilon) - S(V^\mu)) V_x^\mu dx \right| \leq C \|W\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

D'autre part, en utilisant que la matrice S est symétrique et que V^ε est uniformément borné par rapport à ε dans $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{W}^{1,\infty}$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} W \cdot S(V^\varepsilon) W_x dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} W \cdot (S(V^\varepsilon))_x W dx \right| \leq C \|W\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

En réunissant ces inégalités, on obtient que

$$\frac{d}{dt} \|W\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(\varepsilon + \|W\|_{\mathbb{L}^2}).$$

Ainsi, d'après le lemme de Gronwall, on a

$$\|W(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(T_0, V_0)\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure que V^ε est une suite de Cauchy dans $C([0, T_0]; \mathbb{L}^2)$. \square

Il reste à récupérer la régularité \mathbb{H}^2 de la solution. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 3.3.3. *On considère une suite $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $C([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}))$ et qui converge vers une limite w dans $C([0, T_0]; L^2(\mathbb{R}))$. Alors $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers w dans l'espace $C([0, T_0]; H^s(\mathbb{R}))$ pour $s < 2$, dans $L^\infty([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}))$ faible étoile, et la limite w est faiblement continue à valeurs dans $H^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Puisque la suite $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}))$, alors d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki [16], elle converge dans $L^\infty([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}))$ pour la topologie faible étoile, vers une limite qui est nécessairement w . Ainsi, par interpolation on a

$$\|w - w_\varepsilon\|_{H^s} \leq \|w - w_\varepsilon\|_{L^2}^{2-s} \|w - w_\varepsilon\|_{H^2}^s,$$

et donc la convergence dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s < 2$. Puisque w appartient à $C([0, T_0]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, T_0]; H^2(\mathbb{R}))$, alors le lemme de Strauss [64] permet d'établir que w est faiblement continue à valeurs dans $H^2(\mathbb{R})$. \square

On a désormais tous les ingrédients nécessaires pour conclure.

Démonstration. Preuve du Théorème 3.1.1.

Grâce au Lemme 3.3.2, on sait que la suite $(V^\varepsilon)_\varepsilon$ donnée par la proposition 3.3.1 converge dans l'espace $E + C([0, T_0]; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}))$. On peut donc appliquer le Lemme 3.3.3 pour obtenir une régularité plus forte de la limite V , qui suffit pour passer à la limite dans le système régularisé (3.7). Ainsi, V est solution du système initial sans diffusion (3.6).

De plus, cette solution est unique. En effet, en considérant deux solutions V^1 et V^2 de (3.6) et en posant $W = V^1 - V^2$, on obtient l'inégalité

$$\frac{d}{dt} \|W\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|W\|_{\mathbb{L}^2},$$

en utilisant des arguments similaires à ceux présentés dans la démonstration du Lemme 3.3.2. Cela permet d'établir que $\|W\|_{\mathbb{L}^2} \leq 0$, autrement dit, on a l'unicité de la solution dans $E + C([0, T_0]; \mathbb{H}^s(\mathbb{R}))$, pour $s < 2$.

Il reste à montrer que V appartient à $E + C([0, T_0]; \mathbb{H}^2)$. Puisque V_{xx} est faiblement continue à valeurs dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que la fonction $t \mapsto \|V_{xx}(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2$ est continue. Pour cela, on utilise l'inégalité (3.15) valable pour $\varepsilon = 0$, ce qui donne

$$\left| \|V_{xx}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}^2 - \|V_{xx}(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}^2 \right| \leq C \int_{t_0}^t \left(\|V(s) - E\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{R})}^2 \right) ds.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.1. \square

3.3.2 Existence globale pour le système régularisé

Nous venons de démontrer l'existence locale de la solution de régularité \mathbb{H}^2 pour le système (1.23). On ne peut pas espérer démontrer un résultat d'existence globale sans hypothèse supplémentaire puisque les systèmes hyperboliques développent des solutions discontinues en temps fini (voir [34, 35, 62]). Néanmoins, en suivant le programme de [42] (voir aussi [65]), on peut montrer que le système régularisé (3.7) admet une solution définie pour tout temps, pourvu que la donnée initiale soit suffisamment proche de l'équilibre $E = (\bar{\lambda}, 0, 0)^T$. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $V(0) - E$ est dans $\mathbb{H}^2(\mathbb{R})$ et que f, f' et f'' sont bornées. Il existe δ suffisamment petit et dépendant de ε et $\|f'\|_{L^\infty}$, tel que si $\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^1} \leq \delta$ alors la solution de (3.7) existe pour tout temps $t \geq 0$.*

Pour démontrer ce résultat, nous introduisons les fonctions

$$\eta(V) = \frac{\lambda^2}{8}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2 - \bar{\lambda}^2}{4} \right)^2$$

et

$$q(V) = \frac{\lambda^2 u}{8}(u^2 + v^2) + \frac{\lambda^2 u}{4} \left(\frac{\lambda^2 - \bar{\lambda}^2}{4} \right)$$

qui est le couple d'entropie (2.8) réécrit dans les variables $(\lambda - \bar{\lambda}, u, v)^T$. On rappelle que si V est une solution régulière de (3.6), on a

$$\partial_t \eta(V) + \partial_x q(V) = 0.$$

Pour le problème régularisé, ce couple vérifie

$$\partial_t \eta(V) + \partial_x q(V) = \varepsilon \eta'(V) \partial_{xx} V = \varepsilon \partial_{xx} \eta(V) - \varepsilon V_x \cdot \eta''(V) V_x.$$

En intégrant cette relation en espace on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \eta(V) dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} V_x \cdot \eta''(V) V_x dx = 0, \quad (3.18)$$

où la matrice hessienne de η est donnée par

$$\eta''(V) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+v^2}{4} + \frac{3\lambda^2}{8} - \frac{\bar{\lambda}^2}{8} & \frac{\lambda u}{2} & \frac{\lambda v}{2} \\ \frac{\lambda u}{2} & \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ \frac{\lambda v}{2} & 0 & \frac{\lambda^2}{4} \end{pmatrix},$$

et vérifie $\eta''(E) = \frac{\bar{\lambda}^2}{4} I_3$, c'est-à-dire que son évaluation en E est une constante que multiplie la matrice identité.

En supposant que $\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^1} \leq \delta$, on peut poser

$$T_\delta := \inf \left\{ t > 0; \max(\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2}, \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}) > \sqrt{\delta} \right\}.$$

On souhaite montrer que $T_\delta = +\infty$. Ceci nous donnera une estimation globale \mathbb{H}^1 de la solution. La régularité complémentaire \mathbb{H}^2 s'obtient grâce à l'inégalité (3.10). En effet, pour τ assez petit tel que $C(\|f\|_{L^\infty}, \|f'\|_{L^\infty}) \left(\tau + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq$

$\frac{1}{2}$, on contrôle la norme \mathbb{H}^2 de la solution pour tout $t \in [0, \tau]$ puisque

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{H}^2} \leq 2\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\tau \leq T_\delta$, on a

$$\|V(n\tau) - E\|_{\mathbb{H}^2} \leq 2^n \|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^2},$$

ce qui permet d'assurer que la norme \mathbb{H}^2 de la solution est finie pour tout temps $t > 0$ si la solution est globale dans \mathbb{H}^1 . On commence par remarquer le résultat suivant.

Lemme 3.3.4. *Supposons que $\|V(0) - E\|_{\mathbb{H}^1} \leq \delta$. Pour δ suffisamment petit vérifiant $\sqrt{\delta} \leq \frac{\bar{\lambda}}{2}$, et pour $t \in [0, T_\delta]$*

- $\eta''(V) \geq \frac{\bar{\lambda}^2}{8} I_3$.
- $\|\lambda - \bar{\lambda}\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\delta}$ (et donc $\frac{\bar{\lambda}}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2}\bar{\lambda}$).

Démonstration. Si $t < T_\delta$ alors $\|V(t) - E\|_{\mathbb{H}^1} \leq \sqrt{\delta}$.

- Par continuité de η'' , on a alors que $\eta''(V) > \frac{\bar{\lambda}^2}{8} I_3 > \eta''(E)$.
- D'après l'inégalité d'Agmon, pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\|u\|_{L^\infty}^2 \leq \|u\|_{L^2} \|u_x\|_{L^2}$. Il suffit alors d'appliquer cette inégalité à $\lambda - \bar{\lambda} \in H^1(\mathbb{R})$.

□

En utilisant ce lemme, on peut établir une première estimation.

Lemme 3.3.5. *Soit $\delta > 0$ vérifiant les hypothèses du Lemme 3.3.4. Alors, pour tout $t \leq T_\delta$ on a*

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 4\varepsilon \int_0^t \|V_x(s)\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds \leq 9\delta^2. \quad (3.19)$$

Démonstration. On intègre en temps l'inégalité (3.18), ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left((\lambda^2 - \bar{\lambda}^2)^2 + 4\lambda^2(u^2 + v^2) \right) dx + 4\bar{\lambda}^2 \varepsilon \int_0^t \|V_x(s)\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds \leq \int_{\mathbb{R}} \left((\lambda_0^2 - \bar{\lambda}^2)^2 + 4\lambda_0^2(u_0^2 + v_0^2) \right) dx. \quad (3.20)$$

Grâce au Lemme 3.3.4, on peut majorer le membre de droite de l'inégalité (3.20) par

$$9\bar{\lambda}^2 \|V(0) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq 9\bar{\lambda}^2 \delta^2,$$

et minorer le membre de gauche de l'inégalité (3.20) par

$$\bar{\lambda}^2 \|V - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 4\bar{\lambda}^2 \varepsilon \int_0^t \|V_x\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds.$$

Ainsi, en rassemblant les diverses inégalités on obtient

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + 4\varepsilon \int_0^t \|V_x(s)\|_{\mathbb{L}^2}^2 ds \leq 9\delta^2,$$

pour tout $t \leq T_\delta$.

□

L'estimation précédente permet de contrôler la norme \mathbb{L}^2 de $V - E$. Il reste alors à donner une estimation de la norme \mathbb{L}^2 de V_x .

Lemme 3.3.6. *Soit $\delta > 0$ vérifiant les hypothèses du Lemme 3.3.4. Alors, pour tout $t \leq T_\delta$ on a*

$$\frac{d}{dt} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \frac{3}{2(4\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{10}{3}} + 6\delta \|f'\|_{L^\infty} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}. \quad (3.21)$$

Démonstration. On multiplie le système régularisé (3.7) par $-V_{xx}$. Après quelques intégrations par parties, cela mène à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V_x\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \varepsilon \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}} V_x \cdot F_x \times (V - E) dx + \int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot S(V) V_x dx.$$

Premièrement, puisque $S(V)$ est symétrique, on a

$$\int_{\mathbb{R}} V_{xx} \cdot S(V) V_x = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} V_x \cdot S(V)_x V_x dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \|S(V)_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} |V_x|^2 dx.$$

Comme précédemment, on a la majoration

$$\int_{\mathbb{R}} \|S_x(V)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} |V_x|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |V_x|^3 dx.$$

On utilise alors l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_{L^p} \leq c_{GN} \|\nabla u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

vraie pour $\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}$, où n est la dimension de l'espace considéré. Ici, on a $n = 1, p = 3$ et on veut obtenir des majorations pour $r = q = 2$, ce qui donne $\alpha = 1/6$. De plus, on a $c_{GN} \leq 1$ dans ce cas particulier. On obtient alors en appliquant cette inégalité, puis l'inégalité de Young

$$\int_{\mathbb{R}} |V_x|^3 dx \leq \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{1}{2}} \|V_x\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{5}{2}} \leq \varepsilon \|V_{xx}\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{3}{4} \frac{\|V_x\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{10}{3}}}{(4\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}.$$

Deuxièmement, on peut majorer le terme faisant intervenir la force de Coriolis en faisant appel à l'estimation (3.19), ce qui donne

$$- \int_{\mathbb{R}} V_x \cdot F_x \times (V - E) dx \leq \|f'\|_{L^\infty} \|V - E\|_{\mathbb{L}^2} \|V_x\|_{\mathbb{L}^2} \leq 3\delta \|f'\|_{L^\infty} \|V_x\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Pour conclure, il suffit de rassembler les différentes inégalités. On obtient alors l'estimation annoncée. \square

Tous les ingrédients sont réunis pour démontrer le résultat d'existence globale de la solution pour une donnée initiale petite.

Démonstration. Preuve du théorème 3.3.1.

D'une part, le Lemme 3.3.5, montre que pour δ petit, on a

$$\|V(t) - E\|_{\mathbb{L}^2} \leq 3\delta \leq \sqrt{\delta}.$$

D'autre part, le Lemme 3.3.6 permet d'établir en multipliant l'inégalité (3.21) par $\frac{3}{2} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}$ que pour tout $t \leq T_\delta$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^3 &\leq \frac{9}{4(4\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^{\frac{13}{3}} + 9\delta \|f'\|_{L^\infty} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\leq \left(\frac{9}{4(4\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} (\sqrt{\delta})^{\frac{7}{3}} + 9\delta \|f'\|_{L^\infty} \right) \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{aligned}$$

On intègre cette inégalité en temps, et on utilise l'estimation (3.19) qui donne en particulier la majoration

$$\int_{\mathbb{R}} \|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^2 dx \leq \frac{9\delta^2}{4\varepsilon}.$$

Ainsi, on obtient

$$\|V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}^3 \leq \left(\frac{9}{4(4\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} (\sqrt{\delta})^{\frac{7}{3}} + 9\delta \|f'\|_{L^\infty} \right) \frac{9\delta^2}{4\varepsilon} + \delta^3,$$

pour tout $t \leq T_\delta$.

On choisit δ suffisamment petit et dépendant de ε , pour majorer le membre de droite de cette inégalité par $(\sqrt{\delta})^3$. Ainsi, les majorations $\|V - E\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sqrt{\delta}$ et $\|V_x\|_{\mathbb{L}^2} \leq \sqrt{\delta}$ sont valides pour tout temps, ce qui signifie que la solution est globale, puisque $T_\delta = +\infty$. \square

Remarque 3.3.1. Techniquement parlant, la dépendance en ε du paramètre δ empêche de passer à la limite et d'obtenir un résultat analogue pour le système hyperbolique initial.

3.4 Système 2D à température variable

Dans cette section, on démontre le Théorème 3.1.2 d'existence locale d'une solution du système 2D avec température variable (1.22), que l'on reformule de façon plus compacte comme

$$\partial_t V + \mathfrak{N}(V)\nabla V + F(V - E) = 0, \quad (3.22)$$

où $V = (h, u, v, \theta)^T$ est le vecteur des variables primitives, $E = (\bar{h}, 0, 0, \bar{\theta})$ est la solution à l'équilibre au repos, $F(V - E) = (0, -fhv, fhu, 0)^T$ est la contribution de la force de Coriolis dans le système, et

$$\mathfrak{N}(V) = \begin{pmatrix} A(V) \\ B(V) \end{pmatrix}, \quad \text{où } A(V) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 \\ g\theta & u & 0 & \frac{gh}{2} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \text{ et } B(V) = \begin{pmatrix} v & 0 & h & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ g\theta & 0 & v & \frac{gh}{2} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

On renvoie aux Lemmes B.0.1 et B.0.2 pour les résultats concernant la positivité de h et θ . On introduit la suite de problèmes linéaires définis par $V^0 = V(0)$ et

$$\partial_t V^{k+1} + \mathfrak{N}(V^k)\nabla V^{k+1} + F(V^{k+1} - E) = 0. \quad (3.23)$$

Nous allons montrer que la suite $(V^k)_{k \geq 0}$ converge dans le bon espace vers une limite $V - E$, solution du problème de Cauchy (3.22) avec une condition initiale $V(0)$ qui vérifie les hypothèses du Théorème 3.1.2.

Fixons quelques notations. Si $H^m(\mathbb{R}^2)$ est l'espace de Sobolev classique dont un élément et ses dérivées jusqu'à la dérivée m -ième sont dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors on note $\mathbb{H}^m := H^m(\mathbb{R}^2)^4$. On utilisera aussi la notation \mathbb{L}^2 pour désigner $L^2(\mathbb{R}^2)^4$ et \mathbb{L}^∞ pour $L^\infty(\mathbb{R}^2)^4$. Dans la suite, on utilisera la norme

$$N(V)^2 := \|V - E\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\Delta V_x\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\Delta V_y\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

pour travailler sur l'espace \mathbb{H}^3 .

Tout d'abord, montrons que pour k fixé, le problème de Cauchy (3.23) est bien posé. La démonstration utilise la version améliorée suivante du théorème de Lax-Milgram, que l'on peut retrouver dans [49].

Lemme 3.4.1. *Soit $b(v, w)$ une forme bilinéaire continue sur $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{H}^1$ et coercive dans \mathbb{L}^2 . Alors, pour tout g dans \mathbb{L}^2 il existe un unique v dans \mathbb{L}^2 tel que pour tout $w \in \mathbb{H}^1$,*

$$b(v, w) = \int_{\mathbb{R}^2} gw.$$

Lemme 3.4.2. *L'équation linéaire (3.23) munie d'une donnée initiale $V^0 = V(0)$ dans \mathbb{L}^2 forme un problème de Cauchy bien posé dans \mathbb{L}^2 .*

Démonstration. On se donne V^k pour k fixé. On résout itérativement le schéma suivant

$$V^{m+1} - V^m + \tau \mathfrak{N}(V^k)\nabla V^{m+1} + \tau F(V^{m+1}) = 0. \quad (3.24)$$

dans \mathbb{L}^2 pour $\tau > 0$. On commence par montrer que l'application qui à V^m associe V^{m+1} est bien posée, grâce au Lemme 3.4.1. La forme bilinéaire considérée est

$$b(V, W) = \int_{\mathbb{R}^2} (V \cdot W + \tau F(V) \cdot W) - \tau \int_{\mathbb{R}^2} V \nabla (\mathfrak{N}(V^k) W).$$

Elle est coercive dans \mathbb{L}^2 . En effet, pour toute matrice symétrique $S \in \mathcal{M}^4(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\int_{\mathbb{R}^2} V \cdot S V_x = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V \cdot S_x V,$$

obtenue grâce à une intégration par parties. Ainsi, on en déduit que

$$\tau \left| \int_{\mathbb{R}^2} V \nabla (\mathfrak{N}(V^k) V) \right| \leq \tau C \|V\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

où C dépend de la norme L^∞ de $D\mathfrak{N}(V^k)$. Ainsi, pour τ suffisamment petit, on a bien $b(V, V) \geq C \|V\|_{\mathbb{L}^2}^2$ avec $C > 0$.

De plus, on vérifie facilement que pour $V \in \mathbb{L}^2$ et $W \in \mathbb{H}^1$ on a $|b(V, W)| \leq \tilde{C} \|V\|_{\mathbb{L}^2} \|W\|_{\mathbb{H}^1}$, c'est-à-dire b est continue sur $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{H}^1$.

On considère maintenant le produit scalaire de (3.24) avec V^{m+1} , ce qui donne

$$\|V^{m+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|V^{m+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|V^m\|_{\mathbb{L}^2} + \tau c \|V^{m+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

On utilise l'inégalité de Young pour décomposer le produit $\|V^{m+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|V^m\|_{\mathbb{L}^2}$ en somme, puis on regroupe les termes en V^m et V^{m+1} . On a alors

$$\|(1 - 2\tau c) V^{m+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|V^m\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

Pour T fixé et $m\tau \leq T$, on obtient

$$\|V^m\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq (1 - 2\tau c)^{-m} \|V^0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \exp(T\tilde{c}) \|V^0\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

Ainsi, on peut passer à la limite quand τ tend vers 0 dans l'équation linéaire (3.24). De plus, en introduisant l'opérateur linéaire borné P défini par $PV = \mathfrak{N}(V^k) \nabla V + F(V)$ pour tout $V \in \mathbb{L}^2$, on peut remarquer que la suite $(V^m)_{m>0}$ vérifie

$$V^m = (Id - \tau P)^{-m} V_0. \quad (3.25)$$

D'après [59], poser $\tau = T/m$ et passer à la limite dans (3.25) implique que la limite $V^{k+1} := \lim_m V^m + E$ est solution de (3.23), puisque

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left(Id - \frac{T}{m} P \right)^{-m} V_0 = \exp(TP) V_0.$$

□

On s'intéresse maintenant à la régularité de la solution de (3.23). Pour cela, nous allons symétriser le système grâce au symétriseur $M(V)$ (3.4) introduit dans la sous-section 3.2.3. On rappelle qu'il s'agit d'une matrice symétrique définie positive. Ainsi, pour tout $V \in \mathbb{L}^2$,

$$\|V\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} VM(V^k) V dx,$$

est une norme équivalente à la norme usuelle sur \mathbb{L}^2 , puisque les valeurs propres de $M(V^k)$ sont bornées par des constantes positives indépendantes de V^k . En effet, les valeurs propres de $M(V)$ sont données par $\frac{h}{g}$ (valeur propre double) et $\frac{\theta}{2} + \frac{h^2}{4\theta} \pm \sqrt{\frac{\theta^2}{4} + \frac{h^4}{16\theta^2}}$. On peut les contrôler en utilisant les Lemmes B.0.1 et B.0.2. Ainsi, pour obtenir des estimations *a priori* dans \mathbb{H}^3 , nous travaillerons avec la norme équivalente à $N(V)$ définie par

$$N_{M(V^k)}(V)^2 := \|V - E\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 + \|\Delta V_x\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 + \|\Delta V_y\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2.$$

On peut alors démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.4.3. *Soit $R = 2N(V_0)$. Il existe T assez petit et dépendant de M tel que pour tout k , la solution V^{k+1} de (3.23) vérifie*

$$\sup_{t \leq T} N(V^{k+1}(t)) \leq R.$$

Démonstration. Nous allons travailler sur le système symétrisé

$$M(V^k)\partial_t V^{k+1} + \mathfrak{S}(V^k)\nabla V^{k+1} + M(V^k)F(V^{k+1} - E) = 0. \quad (3.26)$$

où

$$\mathfrak{S}(V) = M(V)\mathfrak{M}(V) = \begin{pmatrix} S^A(V) = M(V)A(V) \\ S^B(V) = M(V)B(V) \end{pmatrix}.$$

On cherche à contrôler la norme \mathbb{L}^2 de $V^{k+1} - E$. Remarquons que par symétrie de $M(V^k)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|V^{k+1} - E\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)M(V^k)(V^{k+1} - E)_t dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)M_t(V^k)(V^{k+1} - E) dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

On peut contrôler le second terme dans le membre de droite de (3.27) par

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)M_t(V^k)(V^{k+1} - E) dx \leq c \|V_t^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|V^{k+1} - E\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

En ce qui concerne le premier terme dans le membre de droite de (3.27) on considère le produit scalaire de (3.26) avec $V^{k+1} - E$, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)M(V^k)(V^{k+1} - E)_t dx + \int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)\mathfrak{S}(V^k)\nabla V^{k+1} dx = 0.$$

On commence par traiter le terme en $S^A(V^k)$. Puisqu'il s'agit d'une matrice symétrique, on a

$$- \int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)S^A(V^k)(V^{k+1} - E)_x dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (V^{k+1} - E)S_x^A(V^k)(V^{k+1} - E) dx.$$

Alors, en posant $\| \|S_x^A(V^k)\| \| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|S_x^A(V^k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$, il existe une constante c telle que, grâce aux injections de Sobolev, on ait la majoration

$$\| \|S_x^A(V^k)\| \| \leq c \|V^k\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \|V_x^k\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq c \|V^k\|_{\mathbb{H}^3}^2.$$

Le terme faisant intervenir $S^B(V^k)$ peut être contrôlé de la même façon. Ainsi, on en déduit la majoration \mathbb{L}^2 de $V^{k+1} - E$ suivante

$$\frac{d}{dt} \|V^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 \leq C \left(N(V^k)^2 + \|V_t^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) \|V^{k+1} - E\|_{\mathbb{L}^2}^2. \quad (3.28)$$

On cherche maintenant à contrôler la norme \mathbb{L}^2 de ΔV_x^{k+1} . Toujours par symétrie de $M(V^k)$, on a

$$\frac{d}{dt} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta V_{xt}^{k+1} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M_t(V^k) \Delta V_x^{k+1} dx. \quad (3.29)$$

On peut majorer le second terme dans le membre de droite de (3.29) comme précédemment. Pour majorer le premier terme, on dérive deux fois le système initial (3.23) par rapport à x , puis on le multiplie à gauche par $M(V^k)$ et enfin, on en prend le produit scalaire avec ΔV_x^{k+1} . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta V_{xt}^{k+1} dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta (A_x(V^k) V_x^{k+1} + A(V^k) V_{xx}^{k+1}) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta (B_x(V^k) V_y^{k+1} + B(V^k) V_{xy}^{k+1}) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta_x (F \times (V^{k+1} - E)) dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Notons le deuxième terme à droite de l'égalité (3.30)

$$I_2 := \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta (B_x(V^k) V_y^{k+1} + B(V^k) V_{xy}^{k+1}).$$

Le premier terme peut être contrôlé de façon similaire. On sépare I_2 en deux parties et on utilise que $\Delta(ab) = \Delta ab + a\Delta b + 2\nabla a \nabla b$. On commence par gérer le premier terme de I_2 , ce qui donne pour la partie en $\Delta ab + a\Delta b$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) (\Delta B(V^k)_x V_y^{k+1} + B(V^k)_x \Delta V_y^{k+1}) dx \right| \\ & \leq c_1 \|V^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|V_y^{k+1}\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|\Delta V_x^k\|_{\mathbb{L}^2} + c_2 \|V^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|V_x^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|\Delta V_y^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \\ & \leq \tilde{c} N(V^k)^2 N(V^{k+1})^2. \end{aligned}$$

Grâce à l'injection de Sobolev $\mathbb{H}^1 \subset \mathbb{L}^4$, le terme en $\nabla a \nabla b$ est majoré par

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \nabla B(V^k)_x \nabla V_y^{k+1} dx \right| & \leq c_3 \|V^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla V_x^k\|_{\mathbb{L}^4} \|\nabla V_y^{k+1}\|_{\mathbb{L}^4} \\ & \leq \tilde{c} N(V^k)^2 N(V^{k+1})^2. \end{aligned}$$

Le second terme de I_2 peut être majoré de façon similaire, à l'exception d'un terme pour lequel on utilise la symétrie de $S^B(V^k)$. On procède ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} S^B(V^k) \Delta V_{xy}^{k+1} dx \right| & = \left| -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} S^B(V^k)_y \Delta V_x^{k+1} dx \right| \\ & \leq c_4 \|V^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|V_y^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \\ & \leq \tilde{c} N(V^k)^2 N(V^{k+1})^2. \end{aligned}$$

On a alors établi que

$$I_2 \leq \tilde{c} N(V^k)^2 N(V^{k+1})^2.$$

Le dernier terme de (3.30) est majoré par

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Delta V_x^{k+1} M(V^k) \Delta_x (F(V^{k+1})) dx \right| \leq c(F) N(V^k) N(V^{k+1})^2,$$

où $c(F)$ est une constante qui dépend de la norme L^∞ de f , f' et f'' . Finalement, on a

$$\frac{d}{dt} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2 \leq C(F) \left(N(V^k) + N(V^k)^2 + \|V_t^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) N(V^{k+1})^2. \quad (3.31)$$

Par symétrie, on peut majorer $\frac{d}{dt} \|\Delta V_y^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2$ exactement comme $\frac{d}{dt} \|\Delta V_x^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2, M(V^k)}^2$. Alors, en utilisant l'équivalence des normes $N(V)$ et $N_{M(V^k)}(V)$ et en combinant les inégalités obtenues, on a

$$\frac{d}{dt} N(V^{k+1})^2 \leq \tilde{C}(F) \left(N(V^k) + N(V^k)^2 + \|V_t^k\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) N(V^{k+1})^2.$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$N(V^{k+1}(t))^2 \leq N(V(0))^2 \exp \left(\int_0^t \tilde{C}(F) \left(N(V^k(s)) + N(V^k(s))^2 + \|V_t^k(s)\|_{\mathbb{L}^\infty} \right) ds \right).$$

Soulignons que V_t^k est bien dans \mathbb{L}^∞ puisque

$$\|V_t^k\|_{\mathbb{L}^\infty} = \|\mathfrak{S}(V^{k-1}) \nabla V^k + F(V^k - E)\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \left(N(V^{k-1})^2 + c(F) \right) N(V^k).$$

Cette remarque permet de conclure que pour T suffisamment petit et dépendant de R , on a

$$N(V^{k+1}(t))^2 \leq R^2.$$

□

Grâce à cette estimation, nous pouvons montrer le résultat du Théorème 3.1.2.

Démonstration. Preuve du Théorème 3.1.2.

On veut montrer que la suite $(V^k)_k$ converge. Pour cela, on pose $W^{k+1} = V^{k+1} - V^k$ et $X^{k+1} = \frac{V^{k+1} + V^k}{2}$. On obtient

$$W_t^{k+1} + \mathfrak{M}(X^k) \nabla W^{k+1} + F \times W^{k+1} = -\mathfrak{M}(W^k) \nabla X^{k+1}. \quad (3.32)$$

On peut voir cela comme une équation similaire à (3.23), avec un terme source supplémentaire. En multipliant cette équation par le symétriseur $M(X^k)$ et en prenant le produit scalaire avec W^{k+1} , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} M(X^k) W_t^{k+1} dx + \int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} (\mathfrak{S}(X^k) \nabla W^{k+1} + M(X^k) \mathfrak{M}(W^k) \nabla X^{k+1}) dx = 0.$$

En procédant de la même façon que dans la démonstration du Lemme 3.4.3, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} \mathfrak{S}(X^k) \nabla W^{k+1} dx \right| \leq c_1 R^2 \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

puisque $X^k - E$ est borné dans \mathbb{H}^3 . Le terme restant peut être contrôlé de la façon suivante

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} M(X^k) \mathfrak{M}(W^k) \nabla X^{k+1} dx \leq c_2 R^2 \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|W^k\|_{\mathbb{L}^2},$$

ce qui donne finalement

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} M(X^k) W_t^{k+1} dx \leq c_1 R^2 \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 + c_2 R^2 \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \|W^k\|_{\mathbb{L}^2}.$$

D'autre part on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{k+1} M(X^k)_t W^{k+1} dx \leq c_3 (R^2 + c(F)R) \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

En posant $K = c_3 (R^2 + c(F)R)$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq K \left(\|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \tilde{c} \|W^k\|_{\mathbb{L}^2} \|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \right).$$

On divise cette inégalité par $\|W^{k+1}\|_{\mathbb{L}^2} \exp(Kt/2)$, ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \left(\|W^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \exp(-Kt/2) \right) \leq \frac{K}{2} \tilde{c} \|W^k\|_{\mathbb{L}^2} \exp(-Kt/2).$$

On intègre cette inégalité entre 0 et $t \leq T_0$, ce qui donne

$$\|W^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq \tilde{c} (\exp(Kt/2) - 1) \sup_{(0,T)} \|W^k(s)\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Pour T_0 assez petit tel que $c(\exp(KT) - 1) \leq \frac{1}{2}$ on obtient

$$\sup_{(0,T)} \|W^{k+1}(t)\|_{\mathbb{L}^2} \leq \frac{1}{2} \sup_{(0,T)} \|W^k(s)\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Ainsi, la série $\sum_k W^k$ converge dans $C([0, T_0]; \mathbb{L}^2)$, donc son terme général tend vers 0. On en déduit que $(V^k)_k$ est une suite de Cauchy dans $C([0, T_0]; \mathbb{L}^2)$ et on note $V - E$ sa limite. En outre, W^k est borné dans \mathbb{H}^3 donc

pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(V^k)_k$ converge dans $C([0, T_0]; \mathbb{H}^{3-\varepsilon})$ vers $V - E$. De plus, puisque $V - E$ appartient à $L^\infty([0, T], \mathbb{H}^3)$, le lemme de Strauss permet d'établir que $V - E$ est faiblement continue à valeur dans \mathbb{H}^3 . Or les applications $t \mapsto \|\Delta V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}$ et $t \mapsto \|\Delta V_y(t)\|_{\mathbb{L}^2}$ sont continues. En effet on peut obtenir l'analogie de l'inégalité (3.31) pour V en suivant les mêmes étapes appliquées au système initial. Ainsi, on retrouve

$$\frac{d}{dt} \|\Delta V_x\|_{\mathbb{L}^2, M(V)}^2 \leq C(F) (N(V) + N(V)^2 + \|V_t\|_{\mathbb{L}^\infty}) N(V)^2,$$

que l'on peut intégrer en temps pour obtenir

$$\|\Delta V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2, M(V)}^2 - \|\Delta V_x(t_0)\|_{\mathbb{L}^2, M(V)}^2 \leq \int_{t_0}^t C(F) (N(V(s)) + N(V(s))^2 + \|V_t(s)\|_{\mathbb{L}^\infty}) N(V(s))^2 ds,$$

ce qui donne la continuité de l'application $t \mapsto \|\Delta V_x(t)\|_{\mathbb{L}^2}$. On montre de même que $t \mapsto \|\Delta V_y(t)\|_{\mathbb{L}^2}$ est continue. On peut donc passer à la limite et $V - E$ est solution du problème d'évolution quasi-linéaire (3.22). \square

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons étudié quelques aspects théoriques liés aux équations de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques. Nous nous sommes concentrés sur la démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution locale régulière au problème de Cauchy. Nous avons démontré ce résultat pour les modèles RSW1D et TRSW2D, et les preuves peuvent être adaptées à tous les modèles cités dans cette thèse. Comme nous l'avons vu, le point clé de ces démonstrations repose sur la symétrisation des systèmes étudiés. Pour le système diffusif 1D, nous avons également établi un résultat d'existence globale, pourvu que la donnée initiale soit suffisamment proche de l'équilibre.

Perspectives

En guise de perspective, on rappelle qu'il est impossible d'obtenir un résultat d'existence globale d'une solution régulière pour des systèmes hyperboliques, puisque des discontinuités peuvent apparaître dans la solution même à partir d'une condition initiale régulière. Ce phénomène a lieu même pour des lois de conservations scalaires en une dimension d'espace [34]. Ces solutions discontinues sont des solutions faibles, et parmi elles les solutions entropiques sont les solutions d'intérêt qui correspondent aux solutions physiquement admissibles. Dès lors, la question de l'existence et l'unicité d'une solution entropique se pose.

La méthode de viscosité évanescence permet de fournir certains résultats, notamment par le biais du théorème suivant que l'on peut retrouver dans [35].

Théorème 3.4.1. *On considère un système hyperbolique du type*

$$\partial_t w + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(w) = 0, \quad (3.33)$$

admettant un couple d'entropie (η, ζ) , et sa version régularisée

$$\partial_t w_\varepsilon + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(w_\varepsilon) = \varepsilon \Delta w_\varepsilon.$$

On suppose que la suite $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifie les deux conditions suivantes

- $w_\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d,]0, +\infty[)$,
- w_ε converge presque partout sur $\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$ vers w , lorsque ε tend vers 0.

Alors, w est une solution faible entropique globale du système (3.33).

Dans le cas scalaire, KRUŽKOV [43] a démontré de cette façon l'existence et l'unicité d'une solution entropique, pourvu que la condition initiale soit L^∞ .

Dans le cas de systèmes, les estimations L^∞ de w_ε peuvent être obtenues à l'aide des domaines invariants introduits par CHUEH, CONLEY et SMOLLER dans [21] (voir aussi [63]). Par exemple, pour le modèle de Saint-Venant classique sans terme source, cela permet de montrer que la solution du système diffusif reste dans le domaine

$$\mathcal{D} = \{(h, hu) \in \mathbb{R}^2, \quad h > 0, \quad -M \leq u - 2\sqrt{gh} \leq u + 2\sqrt{gh} \leq M\},$$

ce qui fournit une borne L^∞ de w_ε . Pour vérifier la seconde hypothèse, TARTAR [66], puis MURAT [57], et DiPERNA [28] ont proposé d'utiliser les mesures de Young et la compacité par compensation pour parvenir à passer à la limite dans les termes non-linéaires du type $F_i(w_\varepsilon)$. Cette technique repose aussi sur l'utilisation de couples

d'entropie bien choisis [22, 30, 63]. Pour le système de Saint-Venant sans terme source, on obtient alors (voir [22]) la convergence presque partout de la suite $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers une solution entropique globale du système.

Adapter ce programme aux systèmes RSW ou TRSW pourrait permettre d'obtenir des résultats similaires. Plusieurs difficultés doivent être surmontées : d'une part, la prise en compte d'un terme source n'est pas forcément compatible avec l'existence d'un domaine invariant et d'une borne L^∞ de la solution du problème diffusif ; d'autre part il faut chercher à appliquer les mesures de Young et la compacité par compensation à des couples d'entropie bien choisis, qui diffèrent nécessairement de ceux utilisés pour le système de Saint-Venant au vu de la prise en compte d'un terme source.

D'autres stratégies de démonstrations existent et peuvent également être utilisées pour établir des résultats d'existence globale. On peut citer par exemple le schéma d'approximation aléatoire de GLIMM [33] qui a par exemple été appliqué aux équations d'Euler sans terme source. On pourrait chercher à adapter cette méthode à nos systèmes avec termes sources.

Troisième partie

Construction de schémas numériques

Schémas de type Godunov avec termes sources

Sommaire du présent chapitre

4.1 Introduction	47
4.2 Généralités sur les schémas volumes finis	47
4.3 Schéma de Godunov	50
4.4 Schémas de type Godunov	52
4.4.1 Construction	52
4.4.2 Réécriture volumes finis et propriétés	53

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les différentes notions et notations liées aux schémas de type Godunov pour approcher les solutions de systèmes hyperboliques avec termes sources. Bien que ces concepts soient bien connus, on préfère les réintroduire ici afin de rendre le manuscrit complet. On peut retrouver la plupart des définitions mentionnées par la suite dans [35, 67, 13, 48] ou encore [25, 54].

Nous commencerons par décrire les schémas volumes finis pour un système 1D en toute généralité, ainsi que les propriétés usuelles de consistance du schéma et de conservativité du flux. On prendra soin de définir proprement la notion de schéma well-balanced, c'est-à-dire qui préserve une discrétisation des solutions stationnaires. Dans une deuxième section, nous rappellerons brièvement le principe du schéma de Godunov [36]. Nous finirons par décrire dans une troisième section l'obtention des schémas de type Godunov, introduits par Harten, Lax et van Leer dans [40], qui utilisent des solveurs de Riemann approchés. Nous donnerons quelques critères simples usuels sur ces solveurs pour que les schémas qui en découlent soient robustes et well-balanced.

4.2 Généralités sur les schémas volumes finis

On considère un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t w + \partial_x(F(w)) = S(w)\partial_x Z, \tag{4.1}$$

avec une condition initiale

$$w(x, 0) = w_0(x), \tag{4.2}$$

où $w(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ est le vecteur des inconnues, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est le flux que l'on suppose régulier, $S : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{d \times p}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $d \times p$ et $Z(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un vecteur de fonctions données et indépendantes du temps. L'espace Ω , appelé espace des états admissibles, est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , supposé convexe et

invariant : si l'on se donne une donnée initiale $w_0(x)$ à valeur dans Ω , alors la solution $w(x, t)$ du problème de Cauchy (4.1)-(4.2) reste dans Ω . Dans le cadre des équations de Saint-Venant, cet espace est simplement

$$\Omega = \{(h, hu, hv) \in \mathbb{R}^3, h > 0\}, \quad \text{ou} \quad \Omega = \{(h, hu, hv, h\theta) \in \mathbb{R}^4, h > 0, \theta > 0\},$$

selon que la température est supposée variable ou non. Les termes sources considérés dans les systèmes décrits dans la section 1.3 font intervenir la topographie z et la force de Coriolis f . Afin d'écrire le système sous la forme (4.1), on utilise la méthode de topographie apparente proposée dans [14, 72] qui consiste à traiter la force de Coriolis de la même façon que la topographie. Cela revient à introduire une fonction ι , ne dépendant que de x , telle que $\partial_x \iota = f$ et à poser $Z = (z, \iota)^T$. Ainsi, les systèmes RSW1D (1.23) et TRSW1D (1.24) se réécrivent sous la forme (4.1) avec respectivement

$$F(w) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad S(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ gh & hv \\ 0 & -hu \end{pmatrix},$$

et

$$F(w) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2\theta}{2} \\ huv \\ hu\theta \end{pmatrix}, \quad S(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ gh\theta & hv \\ 0 & -hu \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La première étape pour approcher numériquement les solutions de (4.1)-(4.2) est de donner une discrétisation du temps, de l'espace, et des données du problème. Pour cela, on considère une suite d'intervalles K_i de taille constante Δx qui discrétisent l'espace, dont on note x_i le centre et $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$ les extrémités. Le temps est discrétisé par une suite $(t^n)_{n \geq 0}$ où $t^0 = 0$ et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, avec un pas de temps Δt qui sera précisé plus tard. On discrétise les termes sources et la condition initiale en considérant leurs moyennes sur chaque cellule

$$Z_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} Z(x) dx, \quad w_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w_0(x) dx.$$

Dans le contexte des volumes finis, w_i^n désigne l'approximation de la moyenne de la solution sur la cellule K_i au temps t^n

$$w_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x, t^n) dx.$$

Pour alléger les notations, on pose $\tilde{w}_i^n := (w_i^n, Z_i)$ et $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^p$. Étant donnée une telle approximation $(\tilde{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$, on cherche à déterminer l'approximation $(\tilde{w}_i^{n+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ au temps suivant. Pour cela on intègre le système (4.1) sur $K_i \times [t^n, t^{n+1}]$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{K_i} w(x, t^n) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(w(x_{i+1/2}, t)) dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(w(x_{i-1/2}, t)) dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} S(w) \partial_x Z dx dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La moyenne en temps du flux exact en $x_{i+1/2}$ est approchée par un flux numérique noté $\mathcal{F}_{i+1/2}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_{i+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(w(x_{i+1/2}, t)) dt.$$

En ce qui concerne le terme source, on approche sa double intégrale en temps et en espace par

$$\frac{1}{2} (\mathcal{S}_{i+1/2} + \mathcal{S}_{i-1/2}) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} S(w) \partial_x Z dx dt,$$

où $\mathcal{S}_{i+1/2}$ est un terme source numérique calculé à l'interface $x_{i+1/2}$. On obtient alors le schéma suivant

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathcal{S}_{i+1/2} + \mathcal{S}_{i-1/2}). \quad (4.4)$$

Pour des schémas d'ordre 1, les flux numériques $\mathcal{F}_{i+1/2}$ et termes sources numériques $\mathcal{S}_{i+1/2}$ dépendent seulement des approximations de la solution sur les cellules K_i et K_{i+1} . Ils s'écrivent alors sous la forme $\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n)$ et $\mathcal{S}_{i+1/2} = \mathcal{S}(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i)$ avec \mathcal{F} et \mathcal{S} des fonctions à déterminer qui doivent être consistantes avec les flux et terme source continu.

Définition 4.2.1. On dit qu'un schéma numérique de la forme (4.4) est consistant avec le système (4.1) si

$$\mathcal{F}(\tilde{w}, \tilde{w}) = F(w), \quad (4.5)$$

et si

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)(Z_R - Z_L) = S(w)(Z_R - Z_L) + o(|w_L - w| + |w_R - w| + |Z_L - Z| + |Z_R - Z|), \quad (4.6)$$

quand \tilde{w}_L, \tilde{w}_R tendent vers \tilde{w} .

Si de plus,

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)(Z_R - Z_L) = S(w)(Z_R - Z_L) + o(|Z_R - Z_L|),$$

lorsque \tilde{w}_L et \tilde{w}_R tendent vers w alors on dira que le terme source numérique est strictement consistant avec le terme source continu.

Remarque 4.2.1. La définition de consistance des termes sources numériques avec les termes sources continus n'est pas unique. On a choisi ici de considérer l'une des notions de consistance donnée par [13] qui assure que le schéma approche bel et bien le problème (4.1)-(4.2) lorsque l'on raffine le maillage.

La notion de consistance stricte permet de s'assurer que l'on ne propage pas d'erreur à cause de l'approximation de la moyenne des termes sources même sur des maillages grossiers, ce qui est typiquement le cas d'utilisation des schémas well-balanced.

On s'intéresse maintenant aux propriétés du schéma (4.4). Premièrement, remarquons qu'en l'absence de termes sources, le schéma est automatiquement conservatif, puisque

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} w_i^n.$$

La conservation de la masse est alors une propriété continue que l'on retrouve au niveau discret. D'autre part, l'une des propriétés que l'on souhaite retrouver numériquement est la préservation de l'espace des états admissibles Ω .

Définition 4.2.2. On dit qu'un schéma numérique de la forme (4.4) est robuste si

$$\forall i \in \mathbb{Z}, w_i^n \in \Omega \Rightarrow \forall i \in \mathbb{Z}, w_i^{n+1} \in \Omega.$$

Enfin, l'un des objectifs majeurs est de réussir à préserver des états stationnaires. Pour cela, il faut commencer par s'en donner une discrétisation.

Définition 4.2.3. On dit qu'un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2$ est à l'équilibre local s'il vérifie une discrétisation de la relation d'équilibre continu $\partial_x F(w) = S(w) \partial_x Z$.

Exemple 4.2.1. Par exemple, le lac au repos continu (2.7) peut être discrétisé de la façon suivante

$$\begin{aligned} u_L &= u_R = 0, \\ v_L &= v_R = 0, \\ g(h_R - h_L + z_R - z_L) &= 0. \end{aligned}$$

On définira les discrétisations des autres états stationnaires plus précisément lors de la construction des schémas dans le Chapitre 5. Cela étant dit, on définit clairement ce qu'est un schéma numérique dit "well-balanced", c'est-à-dire qui préserve les solutions stationnaires discrètes.

Définition 4.2.4.

1. Une suite $(\tilde{w}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un état stationnaire discret si les couples $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1})$ sont des états stationnaires locaux pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

2. Un schéma numérique de la forme (4.4) est dit *well-balanced* si pour tout état stationnaire discret $(\tilde{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ on a

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad w_i^{n+1} = w_i^n.$$

Lorsqu'il sera pertinent de préciser quel état stationnaire est préservé, on dira qu'un schéma est *well-balanced* s'il préserve les états stationnaires discrets au repos, et qu'il est *fully well-balanced* s'il préserve tous les états stationnaires discrets (ceux en mouvement et ceux au repos). Si rien n'est précisé, un schéma *well-balanced* est simplement un schéma qui préserve un certain type d'état stationnaire discret (à préciser).

4.3 Schéma de Godunov

Dans cette section, on rappelle la construction du schéma de Godunov. Il repose essentiellement sur la résolution de problèmes de Riemann, qui sont simplement des problèmes de Cauchy dont la condition initiale est de la forme

$$w(x, 0) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0, \\ w_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec des termes sources de la forme

$$Z(x) = \begin{cases} Z_L & \text{si } x < 0, \\ Z_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

On notera $\mathcal{W}_R\left(\frac{x}{t}, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R\right)$ la solution exacte de (4.1)-(4.7)-(4.8) (voir Figure 4.1), avec $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Puisque la solution est auto-similaire, on notera par la suite $\xi = \frac{x}{t}$. On souligne que ce solveur de Riemann dépend de $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2 := (\Omega \times \mathbb{R}^p)^2$ et est à valeurs dans Ω puisque le vecteur des inconnues w évolue au cours du temps, mais pas le vecteur des termes sources Z .

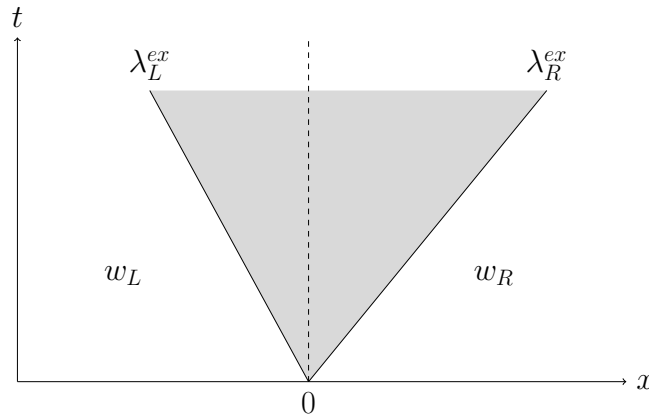


FIGURE 4.1 – Solution du problème de Riemann (4.1)-(4.7)-(4.8) dans le plan (x, t) . La zone grise représente la zone dans laquelle la solution évolue. Les valeurs λ_L^{ex} et λ_R^{ex} sont les vitesses maximales des ondes développées par la solution.

Voyons maintenant comment est obtenu le schéma. On suppose qu'au temps t^n , on connaît une approximation de la solution constante sur chaque cellule

$$w_{\Delta x}(x, t^n) = w_i^n, \quad \text{si } x \in K_i.$$

On cherche à déterminer une approximation au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ avec un pas de temps Δt qui sera fixé par la suite. Pour cela, il suffit de résoudre une juxtaposition de problèmes de Riemann aux interfaces (voir Figure 4.2), de la forme

$$\begin{aligned} \partial_t w + \partial_x F(w) &= S(w) \partial_x Z, \\ w(x, 0) &= \begin{cases} w_{i-1}^n & \text{si } x < x_{i+1/2}, \\ w_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+1/2}, \end{cases} \\ Z(x) &= \begin{cases} Z_{i-1} & \text{si } x < x_{i+1/2}, \\ Z_{i+1} & \text{si } x > x_{i+1/2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

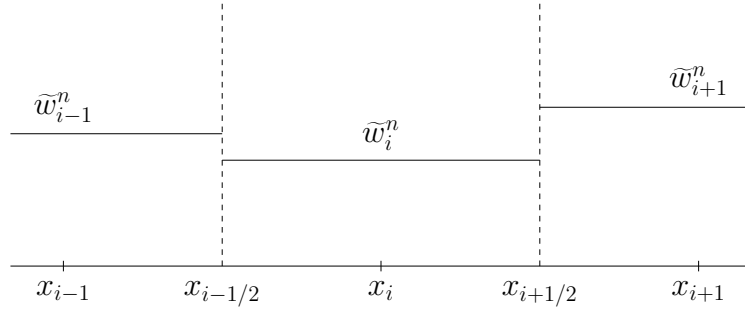


FIGURE 4.2 – Approximation de la solution au temps t^n constante par cellule. À chaque interface, on a localement la donnée initiale d'un problème de Riemann.

On considère ces solutions jusqu'à un temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ où le pas de temps Δt doit satisfaire la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left| \lambda_{L,R}^{ex,i+1/2} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad (4.10)$$

avec $\lambda_{L,R}^{ex,i+1/2}$ qui désigne la plus petite (respectivement la plus grande) vitesse d'onde développée par la solution du problème de Riemann à l'interface $x_{i+1/2}$. Cette condition permet d'assurer que les solutions des problèmes de Riemann n'interagissent pas entre elles (voir Figure 4.3)

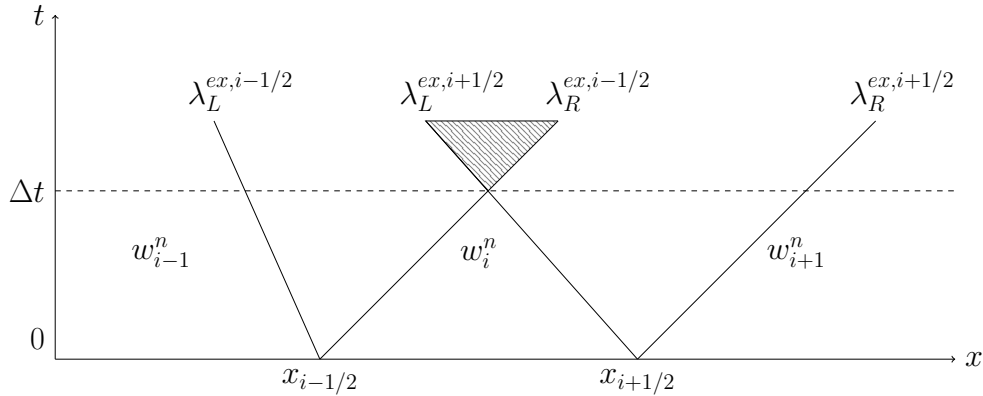


FIGURE 4.3 – La condition CFL assure que le pas de temps Δt est suffisamment petit pour que les solutions des problèmes de Riemann ne se rencontrent pas.

Ainsi, en considérant un pas de temps Δt qui satisfait la condition CFL (4.10), le schéma de Godunov est obtenu en deux étapes :

1. La première étape est de considérer la juxtaposition des solveurs de Riemann exacts à chaque interface $x_{i+1/2}$,

$$w_{\Delta x}(x, t^n + t) = \mathcal{W}_R \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t}, \tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n \right), \text{ si } x \in (x_i, x_{i+1}), t \in [0, \Delta t];$$

2. La deuxième étape consiste à moyenner la fonction précédente sur chaque cellule, afin d'obtenir de nouveau une approximation constante par cellule au temps $t^n + \Delta t$

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_{\Delta x}(x, t^n + \Delta t) dx.$$

On peut résumer cette procédure ainsi

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \mathcal{W}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \tilde{w}_{i-1}^n, \tilde{w}_i^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \mathcal{W}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n \right) dx. \quad (4.11)$$

En pratique, la résolution exacte du problème de Riemann peut s'avérer trop complexe, et/ou est assez

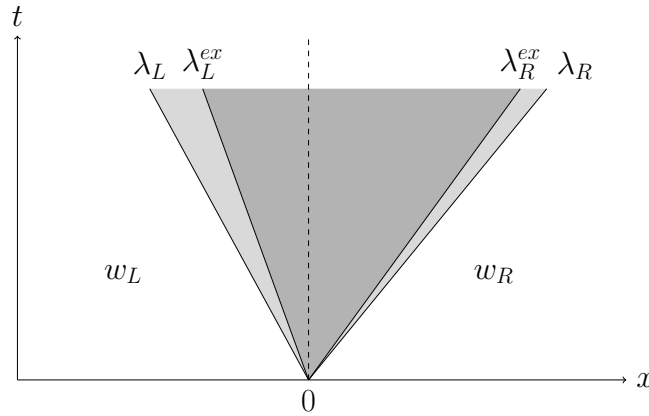


FIGURE 4.4 – Solveurs de Riemann exact et approché. La zone gris foncé correspond au cône du solveur exact. La zone gris clair au cône du solveur de Riemann approché.

coûteuse en temps de calcul, ce qui est problématique puisque cette opération est effectuée à chaque interface et pour tout temps. De plus, l'étape de projection fait perdre la précision obtenue avec les solveurs de Riemann exacts. C'est pourquoi une alternative a été proposée par HARTEN, LAX et VAN LEER [40]. L'idée est de remplacer le solveur de Riemann exact par un solveur approché, noté $\widehat{\mathcal{W}}_R(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$. On parle alors de schéma de type Godunov.

4.4 Schémas de type Godunov

4.4.1 Construction

Les schémas de type Godunov sont obtenus suivant la même procédure que le schéma de Godunov. Ils font cependant intervenir des solveurs de Riemann approchés qui doivent être construits en respectant plusieurs conditions que nous allons tout de suite donner. On les choisit auto-similaires et de la forme

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi \leq \lambda_L, \\ \widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) & \text{si } \lambda_L < \xi < \lambda_R, \\ w_R & \text{si } \xi \geq \lambda_R, \end{cases}$$

où λ_L et λ_R approchent les vitesses maximales du solveur de Riemann exact λ_L^{ex} et λ_R^{ex} , et vérifient $\lambda_L < \lambda_L^{ex}$ et $\lambda_R > \lambda_R^{ex}$. De cette façon, le cône du solveur exact est inclus dans le cône du solveur approché (voir Figure 4.4) et on ne perd pas d'information. A l'instar du solveur exact, on demande au solveur approché de vérifier

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \widetilde{w}, \widetilde{w}) = w, \quad \forall \widetilde{w} \in \widetilde{\Omega}, \quad (4.12)$$

Il doit de plus satisfaire la relation suivante de consistance intégrale avec le solveur exact

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \mathcal{W}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx. \quad (4.13)$$

La moyenne du solveur exact peut être calculée en intégrant le système (4.1) sur $[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}] \times [0, \Delta t]$. On remarque, d'une part, que la moyenne de la condition initiale s'écrit

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} w_0(x) dx = \frac{\Delta x}{2} w_L + \frac{\Delta x}{2} w_R,$$

et d'autre part, que sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_L|, |\lambda_R|) \leq \frac{1}{2}, \quad (4.14)$$

on a

$$\widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{-\Delta x}{2\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) = w_L \text{ et } \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{\Delta x}{2\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) = w_R.$$

Ainsi, la relation de consistance intégrale (4.13) se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx &= \frac{w_L + w_R}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(w_R) - F(w_L)) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} S\left(\mathcal{W}_R\left(\frac{x}{t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right)\right) \partial_x Z(x) dx dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En l'absence de terme source, on peut imposer cette égalité pour assurer la consistance entre le solveur exact et le solveur approché. Néanmoins, il n'est pas possible en toute généralité de calculer exactement l'intégrale du terme source pour n'importe quelle fonction Z donnée. On introduit alors de façon assez classique, comme dans [31] (voir aussi [9, 55, 25] par exemple), une approximation de cette intégrale, notée

$$S(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} S\left(\mathcal{W}_R\left(\frac{x}{t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right)\right) \partial_x Z(x) dx dt.$$

Ce terme source approché doit être consistant avec le terme source continu, au sens de la Définition 4.2.1. En procédant de la sorte, le solveur de Riemann approché ne peut satisfaire qu'une version plus faible de la consistance intégrale (4.15).

Définition 4.4.1. *Un solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R$ est dit faiblement consistant s'il existe un terme source numérique $S(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ consistant au sens de la Définition 4.2.1 tel que, dès que la condition CFL (4.14) est vérifiée on ait*

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx = \frac{w_L + w_R}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(w_R) - F(w_L)) + \frac{\Delta t}{\Delta x} S(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) (Z_R - Z_L). \quad (4.16)$$

Pour obtenir un schéma de type Godunov, il suffit de reprendre le formalisme introduit à la section 4.3 et d'appliquer une première étape de résolution des problèmes de Riemann aux interfaces, et une seconde étape de projection. Ainsi, sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} |\lambda_{L,R}^{i+1/2}| \leq \frac{1}{2}, \quad (4.17)$$

le schéma de type Godunov s'écrit

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n\right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n\right) dx. \quad (4.18)$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de ces schémas.

4.4.2 Réécriture volumes finis et propriétés

Faisons maintenant le lien entre les schémas de type Godunov et les méthodes volumes finis. En effet, ils peuvent se réécrire sous la forme (4.4). C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4.1. *Sous la condition CFL (4.17), le schéma de type Godunov (4.18) se réécrit dans le formalisme volumes finis (4.4) où le flux numérique est défini par*

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (w_R - w_L) + \frac{1}{2\Delta t} \left(\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx \right), \quad (4.19)$$

et où le terme source numérique $S(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est le terme source qui apparaît dans la Définition 4.4.1 de la consistance faible. De plus, le flux numérique est consistant avec le flux exact.

Démonstration. On commence par réécrire le schéma (4.18) sous la forme

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx.$$

Puisque la condition CFL (4.17) est vérifiée, on peut utiliser la relation de consistance faible (4.16), ce qui donne

$$w_i^{n+1} = \frac{w_{i-1}^n + w_i^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(w_i^n) - F(w_{i-1}^n)) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{S}(\widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx. \quad (4.20)$$

De la même façon, on peut écrire que

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx,$$

ce qui donne

$$w_i^{n+1} = \frac{w_i^n + w_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n)) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{S}(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i) - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx. \quad (4.21)$$

En faisant la demi-somme de (4.20) et (4.21), on obtient

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{F(w_i^n) + F(w_{i+1}^n)}{2} - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (w_{i+1}^n - w_i^n) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx - \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx \\ &\quad - \frac{F(w_{i-1}^n) + F(w_i^n)}{2} + \frac{\Delta x}{4\Delta t} (w_i^n - w_{i-1}^n) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx + \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathcal{S}(\widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \mathcal{S}(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i)), \end{aligned}$$

et on reconnaît aisément le flux numérique (4.19). Au vu de la propriété (4.12), on obtient facilement à partir de cette expression la consistance du flux numérique avec le flux exact, à savoir que $\mathcal{F}(\widetilde{w}, \widetilde{w}) = w$ pour tout $\widetilde{w} \in \widetilde{\Omega}$. \square

Remarque 4.4.1. Remarquons qu'il est possible d'écrire le flux numérique sous forme décentrée. Par exemple, en considérant uniquement la relation (4.20), et en la réécrivant sous la forme

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(w_i^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} w_i^n - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n \right) dx + \frac{\mathcal{S}(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i)}{2} \right. \\ &\quad \left. - F(w_{i-1}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} w_{i-1}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n \right) dx - \frac{\mathcal{S}(\widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1})}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathcal{S}(\widetilde{w}_{i-1}^n, \widetilde{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \mathcal{S}(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i)). \end{aligned}$$

on fait apparaître un schéma volumes finis où le flux numérique s'écrit

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = F(w_L) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} w_L - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) dx + \frac{\mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)(Z_R - Z_L)}{2}. \quad (4.22)$$

Cette écriture décentrée du flux, également valable sous la condition CFL (4.17) et qui satisfait aussi la Définition 4.2.1 de consistance avec le flux exact, sera utilisée dans le Chapitre 6 pour définir les flux des schémas numériques 2D.

Pour obtenir un schéma complètement consistant, il faudra veiller à bien choisir l'expression du terme source numérique \mathcal{S} . Concernant les autres propriétés énoncées dans la section 4.2, à savoir la robustesse et le caractère well-balanced, il suffit de les vérifier localement sur les solveurs de Riemann approchés. Commençons par définir proprement les notions de solveur approché robuste et well-balanced.

Définition 4.4.2.

1. On dit qu'un solveur de Riemann approché est robuste si

$$\forall(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2, \quad \forall(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \Omega. \quad (4.23)$$

2. On dit qu'un solveur de Riemann approché est well-balanced si

$$\widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{t}, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R\right) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < 0, \\ w_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dès que $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local.

Remarque 4.4.2. D'après la relation de consistance faible (4.16), pour qu'un solveur de Riemann approché soit well-balanced, il faut que pour tout couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local, la caractérisation des états d'équilibre

$$F(\tilde{w}_R) - F(\tilde{w}_L) = \mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)(Z_R - Z_L),$$

soit vérifiée. C'est la version discrète de la caractérisation des états d'équilibre continus

$$\partial_x \mathcal{F}(w) = S(w) \partial_x Z.$$

Au vu de la formulation (4.18) d'un schéma de type Godunov, on peut facilement démontrer la proposition suivante qui affirme que le schéma hérite des propriétés du solveur approché utilisé.

Proposition 4.4.2.

1. Si le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R$ est robuste, alors, sous la CFL (4.17), le schéma de type Godunov associé est robuste.
2. Si le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R$ est well-balanced, alors, sous la CFL (4.17), le schéma de type Godunov associé est well-balanced.

Démonstration.

1. D'après la formulation (4.18) du schéma, l'approximation w_i^{n+1} est une combinaison convexe d'éléments de Ω , qui est lui-même convexe, donc le schéma est robuste.
2. Si $(\tilde{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un équilibre discret alors, toujours d'après la formulation (4.18), on a $w_i^{n+1} = w_i^n$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc le schéma est well-balanced.

□

Pour résumer, il suffit de construire un solveur de Riemann approché faiblement consistant, robuste et well-balanced pour obtenir un schéma numérique ayant les mêmes propriétés. Nous nous concentrerons sur ce problème dans le prochain chapitre.

Construction de schémas well-balanced et fully well-balanced

Sommaire du présent chapitre

5.1 Introduction	58
5.1.1 Structure générale des solveurs de Riemann approchés simples	58
5.1.2 Stratégie de construction des solveurs de Riemann approchés	60
5.1.3 Température variable	61
5.2 Un schéma well-balanced avec transport de la vitesse transverse	62
5.2.1 Modèle RSW	62
5.2.2 Modèle TRSW	69
5.2.3 Schéma final	74
5.3 Un schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre	75
5.3.1 Discrétisation des états stationnaires	75
5.3.2 Solveur à trois états intermédiaires	75
5.3.3 Discrétisation des termes sources	78
5.3.4 Propriétés du solveur de Riemann approché	80
5.3.5 Schéma final	81
5.4 Schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre et transport de la vitesse transverse	82
5.4.1 Solveur de Riemann approché	82
5.4.2 Schéma final	84
5.5 Schéma FWB avec quadratisation de la relation d'équilibre	85
5.5.1 Solveur de Riemann approché	85
5.5.2 Discrétisation des termes sources	89
5.5.3 Propriétés du solveur de Riemann approché	90
5.5.4 Schéma final	90
5.6 Extension des schémas à l'ordre 2	91
5.6.1 Méthode MUSCL stantard	92
5.6.2 Méthode MUSCL modifiée	95
5.7 Résultats numériques	95
5.7.1 Modèle SW	96
5.7.2 Modèle TSW	104
5.7.3 Modèle RSW	111
5.7.4 Modèle TRSW	118
5.7.5 Schémas d'ordre deux	119
5.7.6 Bilan	121

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la construction de schémas numériques préservant toutes les solutions stationnaires discrètes des systèmes (1.23) et (1.24), autrement dit, des schémas fully well-balanced (abrégé en schémas FWB). Pour cela, nous allons utiliser des schémas de type Godunov qui présentent l'avantage de tirer leurs propriétés des solveurs de Riemann approchés utilisés. Des schémas de type Godunov fully well-balanced ont déjà été proposés pour des modèles de type Saint-Venant avec des termes sources, comme par exemple la topographie [9], la friction [32], ou la friction de Manning [56], mais, à notre connaissance, pas pour la force de Coriolis. Notre objectif est de prendre en compte à la fois la topographie et la force de Coriolis, en nous basant sur des travaux déjà existants. On fera par exemple référence à [12, 55] ou aux thèses [54, 25, 53].

Dans la suite, différents solveurs reposant sur une approche commune seront construits et comparés numériquement. Nous commencerons par proposer un solveur simplement well-balanced, c'est-à-dire qui préserve les états stationnaires au repos. Cela permettra d'une part de mettre en place dans un cadre simple la stratégie proposée, et d'autre part de fournir un point de comparaison entre solveur well-balanced et fully well-balanced au niveau numérique. Puis nous proposerons trois solveurs fully well-balanced obtenus grâce à une linéarisation ou quadratisation des relations de consistance à l'équilibre. Décrivons dès à présent cette stratégie commune aux quatre solveurs.

5.1.1 Structure générale des solveurs de Riemann approchés simples

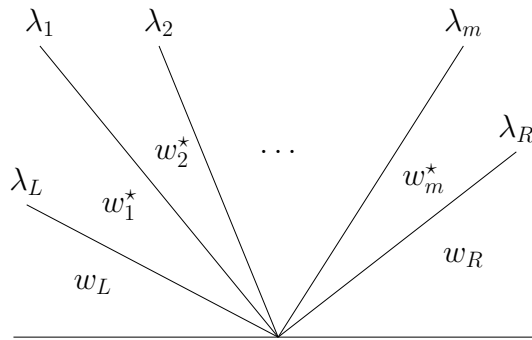


FIGURE 5.1 – Solveur de Riemann approché général.

Dans le but d'obtenir des solveurs de Riemann approchés simples, on approche la solution exacte dans le cône de dépendance par une succession d'états intermédiaires constants. Les solveurs de Riemann approchés que l'on va construire sont donc de la forme

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < \lambda_L, \\ w_1^* & \text{si } \lambda_L < \xi < \lambda_1, \\ w_2^* & \text{si } \lambda_1 < \xi < \lambda_2, \\ \vdots & \\ w_m^* & \text{si } \lambda_m < \xi < \lambda_R, \\ w_R & \text{si } \xi > \lambda_R, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $w_i^* \in \Omega$, $\forall 1 \leq i \leq m$ (voir Figure 5.1). Plus il y a d'états intermédiaires, plus on a de degrés de liberté et donc de possibilités de créer un solveur qui vérifie toutes les propriétés que l'on souhaite. D'un autre côté, moins un solveur a d'états intermédiaires, plus il est facile et rapide à calculer. On cherchera un compromis entre ces deux aspects.

Un solveur de Riemann approché bien connu et qui sera mentionné plusieurs fois dans la suite, est le solveur HLL proposé par Harten Lax et van Leer [40]. Il s'agit d'un solveur conçu pour des systèmes sans terme source, avec un seul état intermédiaire (voir Figure 5.2) défini par la relation de consistance (4.16) sans terme source

$$w_{HLL} = \frac{\lambda_R w_R - \lambda_L w_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{F(w_R) - F(w_L)}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (5.2)$$

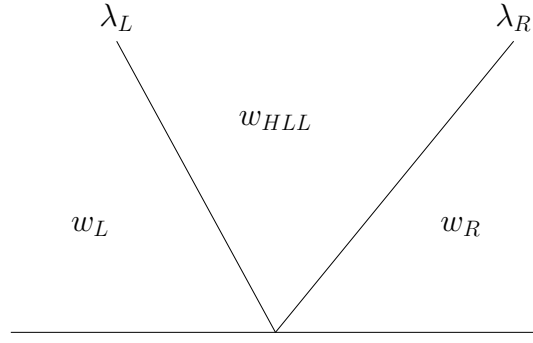


FIGURE 5.2 – Solveur HLL.

Ce solveur est un bon solveur de référence puisqu'il possède de bonnes propriétés comme le fait d'être entropique (voir [40, 67]). De plus, la hauteur h_{HLL} pouvant se réécrire

$$h_{HLL} = \frac{h_R}{\lambda_R - \lambda_L} (\lambda_R - u_R) - \frac{h_L}{\lambda_R - \lambda_L} (\lambda_L - u_L),$$

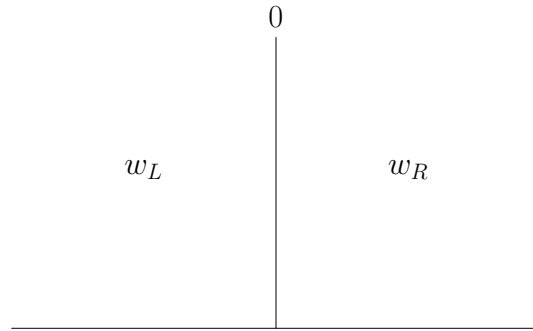
il suffit de choisir λ_L et λ_R telles que $\lambda_L < u_L$ et $\lambda_R > u_R$ pour assurer que $h_{HLL} > 0$.

D'autre part, les vitesses minimales et maximales des ondes des solveurs approchés, λ_L et λ_R vérifiant $\lambda_L < 0 < \lambda_R$, qui approchent les vitesses minimales et maximales du solveur exact et calculées dans les sections 2.2.4 et 2.3.4 seront données par

$$\lambda_L = \min(-|u_L| - \sqrt{g\theta_L h_L}, -|u_R| - \sqrt{g\theta_R h_R}), \quad (5.3)$$

$$\lambda_R = \max(|u_L| + \sqrt{g\theta_L h_L}, |u_R| + \sqrt{g\theta_R h_R}), \quad (5.4)$$

avec θ_R et θ_L égaux à un lorsque l'on cherchera à approcher les solutions du système à température constante. On peut retrouver ces définitions dans [67].

FIGURE 5.3 – Configuration well-balanced que l'on souhaite atteindre lorsque $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local.

Enfin, dans le but d'obtenir un solveur well-balanced, il est nécessaire de considérer au moins deux états intermédiaires. En effet, un solveur avec un seul état intermédiaire, de la forme

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < \lambda_L, \\ w^* & \text{si } \lambda_L < \xi < \lambda_R, \\ w_R & \text{si } \xi > \lambda_R, \end{cases}$$

ne peut pas préserver les états stationnaires puisqu'il ne peut pas se retrouver dans la configuration well-balanced (voir Figure 5.3) donnée par

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < 0, \\ w_R & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

sauf dans certains cas particuliers, comme lorsque $\widetilde{w}_L = \widetilde{w}_R$ par exemple. Pour avoir une chance de vérifier la propriété well-balanced, il faut que le solveur possède au moins une onde de vitesse 0, donc au moins deux états intermédiaires. Cette onde correspond à celle induite par les termes sources dans le solveur exact (voir [section 2.2](#) et [section 2.3](#)). On proposera dans la suite des solveurs de Riemann approchés comprenant au maximum quatre états intermédiaires, que l'on simplifiera le plus possible. Ainsi, même dans un solveur comprenant cinq ondes, on essaiera de se ramener à une configuration avec uniquement deux états intermédiaires pour certaines variables, lorsque c'est pertinent.

5.1.2 Stratégie de construction des solveurs de Riemann approchés

On se focalise ici sur le cas d'un solveur à deux états intermédiaires, c'est-à-dire de la forme

$$\widehat{\mathcal{W}}_R(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < \lambda_L, \\ w_L^* & \text{si } \lambda_L < \xi < 0, \\ w_R^* & \text{si } 0 < \xi < \lambda_R, \\ w_R & \text{si } \xi > \lambda_R, \end{cases} \quad (5.5)$$

Cela permet d'une part d'expliquer sur un exemple simple la stratégie qui sera utilisée pour obtenir un schéma well-balanced, ou fully well-balanced. D'autre part, on se ramènera souvent à une configuration similaire par la suite, ce qui justifie que l'on s'y intéresse.

Nous allons passer en revue pour un tel solveur les réécritures des différentes propriétés à vérifier.

5.1.2.1 Consistance faible

Pour déterminer les inconnues w_L^* et w_R^* , on utilisera notamment les relations de consistance faible de la Définition 4.4.1. On peut en donner une version plus précise dans ce contexte.

Proposition 5.1.1. *On considère un solveur de Riemann approché avec deux états intermédiaires de la forme (5.5) avec $\lambda_L < 0 < \lambda_R$. Alors, sous la condition CFL (4.14), ce solveur est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1 si et seulement si*

$$\lambda_R w_R^* - \lambda_L w_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) w_{HLL} + \mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)(Z_R - Z_L). \quad (5.6)$$

Démonstration. Sous la condition CFL (4.14), l'intégrale du solveur de Riemann approché sur $[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}]$ est donnée par

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R\left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R\right) dx = \left(\lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2}\right) w_L - \lambda_L \Delta t w_L^* + \lambda_R \Delta t w_R^* + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t\right) w_R.$$

Une simple réorganisation des termes permet de réécrire la relation de consistance faible (4.16) sous la forme

$$\lambda_R (w_R^* - w_R) + \lambda_L (w_L - w_L^*) = -(F(w_R) - F(w_L)) + \mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)(Z_R - Z_L),$$

ce qui donne immédiatement (5.6) d'après la définition (5.2) de w_{HLL} . \square

5.1.2.2 Well-balanced

Les autres relations nécessaires pour déterminer les inconnues w_L^* et w_R^* sont fixées à l'aide de la caractérisation discrète des états d'équilibre donnée par

$$F(w_R) - F(w_L) = \mathcal{S}(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L)(Z_R - Z_L), \quad (5.7)$$

qui doit être vérifiée dès que $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est à l'équilibre local, d'après la Remarque 4.4.2. On fait le choix d'imposer que les états intermédiaires w_L^*, w_R^* vérifient cette discrétisation c'est-à-dire

$$F(w_R^*) - F(w_L^*) = \mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)(Z_R - Z_L). \quad (5.8)$$

avec $\mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = (0, S^{hu}(Z_R - Z_L), S^{hv}(Z_R - Z_L))$ le terme source numérique qui sera défini ultérieurement. Le flux continu F étant non-linéaire, ces relations devront être modifiées pour faire en sorte que le système (5.6)-(5.8) puisse être résolu de façon directe.

5.1.2.3 Discrétisation des termes sources

Pour donner une discrétisation well-balanced des termes sources, on utilisera d'une part la caractérisation discrète des états d'équilibre (5.7), et d'autre part, la discrétisation choisie des états stationnaires, afin d'obtenir une expression consistante des termes sources au sens de la Définition 4.2.1.

5.1.2.4 Robustesse

Pour finir, on détaille la procédure qui permet d'assurer la positivité de la hauteur de fluide pour un solveur à deux états intermédiaires. Il s'agit d'une procédure de cut-off présentée dans [2] (voir aussi [55]) dont on rappelle le principe ici. On se donne un paramètre δ strictement positif bien choisi, puis on compare les valeurs des hauteurs intermédiaires h_L^* et h_R^* à δ . Si $h_L^* < \delta$, alors on pose $h_L^* = \delta$ et on définit h_R^* à partir de la relation de consistance en h qui s'écrit, d'après la Proposition 5.1.1,

$$\lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) h_{HLL},$$

puisque l'équation en h ne contient pas de terme source. Ainsi, h_R^* est donné par

$$h_R^* = \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R}\right) h_{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta,$$

où h_{HLL} est la première composante du vecteur w_{HLL} . Puisque $\lambda_L < \lambda_R$, on observe facilement que $h_R^* \geq \delta$ si et seulement si $h_{HLL} \geq \delta$. Si δ satisfait cette condition alors la positivité des hauteurs intermédiaires est assurée. Si l'on est dans le cas $h_R^* < \delta$, alors on applique la même procédure en inversant les rôles de h_L^* et h_R^* .

Cependant, lorsque $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local, comme le solveur de Riemann approché est destiné à être well-balanced, on aura $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$. En prenant $\delta \leq h_L$ et $\delta \leq h_R$, la procédure de cut-off ne s'applique pas et le caractère well-balanced est préservé. Ainsi, on peut définir le paramètre δ par

$$\delta = \min(\varepsilon, h_L, h_R, h_{HLL}), \quad (5.9)$$

avec ε une valeur que l'on peut fixer aussi petite que l'on veut.

5.1.3 Température variable

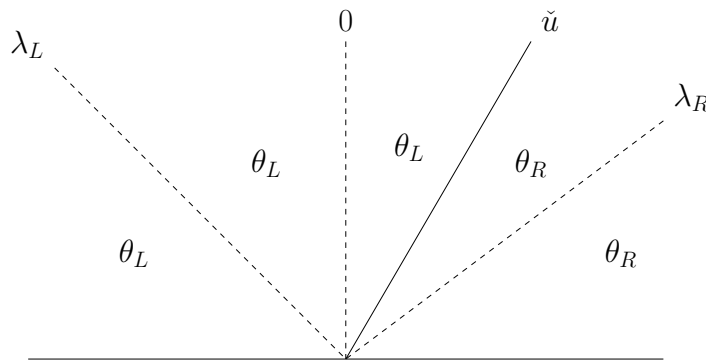


FIGURE 5.4 – Transport de la variable θ dans un solveur comprenant déjà trois ondes de vitesse $\lambda_L, 0$ et λ_R : la variable θ évolue uniquement à travers l'onde de vitesses \tilde{u} .

Pour prendre en compte une température variable dans les différents schémas, on ajoutera au solveur une onde de vitesse \tilde{u} qui pourra être positive ou négative, et qui transportera la variable θ afin d'approcher l'équation de transport $\partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0$, comme sur la Figure 5.4. Les autres variables seront supposées constantes à travers cette onde. Ainsi, la seule inconnue qui sera ajoutée est la vitesse \tilde{u} , qui sera déterminée de façon à assurer la consistance du solveur en $h\theta$. Cette variable sera dans la configuration well-balanced

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \theta_L & \text{si } x < 0, \\ \theta_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

dès que $\check{u} = 0$, et elle restera positive si la condition initiale $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ du problème de Riemann considéré vérifie $\theta_L > 0$ et $\theta_R > 0$. La robustesse du solveur en la variable θ sera donc automatiquement vérifiée.

On a donné tous les outils communs aux solveurs de Riemann approchés que l'on va construire par la suite. Nous verrons que tout comme la variable θ , la variable hu sera traitée de la même façon dans les différents solveurs. Ainsi, pour les différencier, on les nommera avec des sigles qui suivent la nomenclature suivante : la première lettre fera référence à la technique utilisée pour gérer la variable h , la deuxième lettre à la technique utilisée pour la variable v . Ces deux lettres seront suivies de la lettre "F" si le schéma considéré est fully well-balanced. Sinon, il est simplement well-balanced. Cela permettra de mieux identifier les différences et les points communs entre les solveurs.

Commençons par présenter un solveur qui préserve les états stationnaires au repos.

5.2 Un schéma well-balanced avec transport de la vitesse transverse

5.2.1 Modèle RSW

5.2.1.1 Discrétisation des états stationnaires

Dans un premier temps, on s'intéresse à la préservation des états stationnaires au repos pour le système à température constante (1.23). Pour cela, on se donne une version discrète de l'équilibre (2.5). On dit que le couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2$ est à l'équilibre local s'il vérifie

$$u_L = u_R = 0, \quad (5.10a)$$

$$g[h+z] = \bar{v}[z], \quad (5.10b)$$

où les notations utilisées ici et dans toute la suite de ce document sont \bar{X} pour désigner la moyenne $\frac{X_L + X_R}{2}$ de n'importe quelle variable X , et $[X]$ pour la différence $X_R - X_L$.

5.2.1.2 Solveur à deux états intermédiaires

La première approche consiste à considérer un solveur constitué de deux états intermédiaires w_L^* et w_R^* séparés par une onde de vitesse 0, de la forme (5.5). On a donc besoin de 6 relations pour déterminer les 6 inconnues $h_L^*, u_L^*, v_L^*, h_R^*, u_R^*, v_R^*$. Les trois premières relations sont données par la consistance faible (5.6). Les trois autres relations sont données par la caractérisation d'équilibre appliquée aux états intermédiaires (5.8), qui s'écrit ici

$$\begin{cases} h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^* = q^*, & (5.11a) \\ \frac{g}{2} ((h_R^*)^2 - (h_L^*)^2) = \mathcal{S}^{hu}[Z], & (5.11b) \\ q^* (v_R^* - v_L^*) = \mathcal{S}^{hv}[Z], & (5.11c) \end{cases}$$

Premièrement, on peut remarquer que la première relation d'équilibre peut aussi être vue comme la conservation de l'invariant de Riemann hu à travers l'onde 0, ce qui est une propriété vérifiée par le solveur exact d'après l'étude faite dans la section 2.2.

Deuxièmement, le système (5.6)-(5.11) est non linéaire à cause de la relation (5.11b), ce qui rend sa résolution potentiellement coûteuse en temps de calcul. Pour éviter cela, dans le même esprit que [55], on propose de linéariser cette relation comme suit

$$g\bar{h}(h_R^* - h_L^*) = \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.12)$$

Enfin, la troisième relation d'équilibre ne permet pas d'exprimer $v_R^* - v_L^*$ en toute généralité puisque q^* peut être nul, et une linéarisation de la relation ne résout pas le problème. C'est pourquoi on choisit de changer de stratégie et d'introduire un nouvel état intermédiaire dans le solveur.

5.2.1.3 Solveur à trois états intermédiaires

Pour pallier ce problème, on choisit d'introduire une onde supplémentaire dans le schéma, de vitesse \hat{u} , qui approche l'onde de vitesse u générée par le système (voir l'étude de la section 2.2). L'objectif est d'obtenir une configuration well-balanced lorsque $\hat{u} = 0$. Le solveur possède donc trois états intermédiaires w_L^*, w^* et w_R^*

séparés par quatre ondes de vitesse $\lambda_L, 0, \hat{u}$, et λ_R avec $\lambda_L < 0 < \lambda_R$ et $\lambda_L < \hat{u} < \lambda_R$. L'onde \hat{u} peut être positive, négative ou nulle, ce qui donne trois configurations possibles, représentées dans la Figure 5.5.

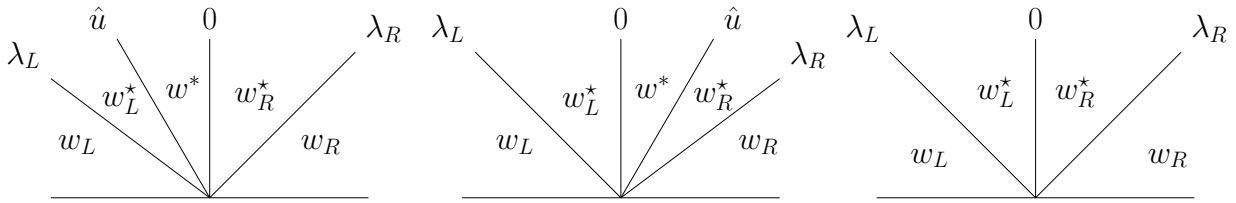


FIGURE 5.5 – Configurations possibles du solveur de Riemann approché.

On a cette fois neuf inconnues et donc neuf relations à trouver. Ajouter une onde supplémentaire semble *a priori* complexifier le problème plutôt que le simplifier. Néanmoins, on peut réduire le nombre d'inconnues en remarquant que l'équation sur la variable v donnée par

$$\partial_t v + u \partial_x v = -f u,$$

est simplement une équation de transport à vitesse u avec un terme source qui correspond à une onde stationnaire. Il est donc pertinent de faire varier v à travers les ondes de vitesse \hat{u} et 0 , et de supposer qu'elle est constante à travers les ondes de vitesse λ_L et λ_R . On se retrouve donc pour la variable v dans l'une des trois configurations décrites dans la Figure 5.6.

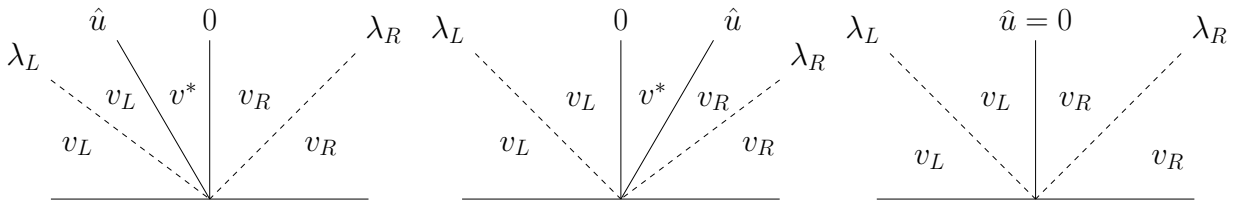


FIGURE 5.6 – Configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v . Les ondes en pointillés n'ont pas d'effet sur la variable v .

De plus, h et u sont des invariants de Riemann pour l'onde continue de vitesse u , donc on va également préserver ces quantités à travers l'onde de vitesse \hat{u} dans le solveur approché. Ainsi, les variables h et u ne sont pas impactées par l'ajout de cette onde et conservent la même configuration que précédemment (voir Figure 5.7).

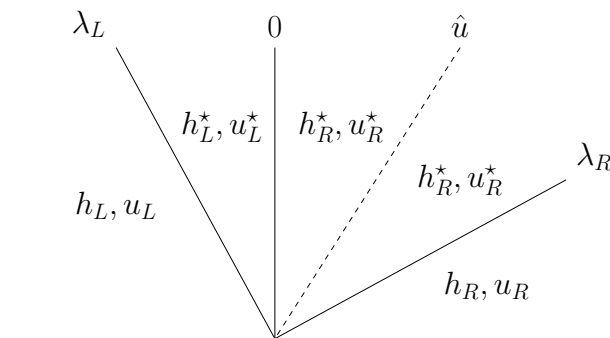


FIGURE 5.7 – Une configuration possible du solveur de Riemann approché pour les variables h et u . L'onde \hat{u} peut être positionnée différemment mais elle n'a pas d'effet sur les variables h et u .

Finalement, il n'y a plus neuf mais seulement six inconnues à déterminer : $h_L^*, u_L^*, h_R^*, u_R^*, v^*$, ainsi que la vitesse \hat{u} . On a autant d'inconnues que précédemment. Cette fois-ci, si l'on définit \hat{u} tel que $\hat{u} = 0$ dès que

$(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est à l'équilibre local, alors on aura une configuration well-balanced pour la variable v , c'est-à-dire

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Donnons à présent les expressions des différentes inconnues. On commence par les variables h et q .

Variationes h et q Les variables h et q se comportent comme dans un solveur de Riemann approché avec deux états intermédiaires. Ainsi, d'après la Proposition 5.1.1, les relations de consistance faible en h et hu sont données par

$$\lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}, \quad (5.13)$$

$$\lambda_R h_R^* u_R^* - \lambda_L h_L^* u_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) q_{HLL} + \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.14)$$

Les relations supplémentaires choisies pour satisfaire la propriété well-balanced proviennent des caractérisations linéarisées discrètes des états d'équilibre (5.11a) et (5.12) que l'on redonne ici

$$h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^* := q^*, \quad (5.15)$$

$$g\bar{h}(h_R^* - h_L^*) = \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.16)$$

En combinant (5.14) - (5.15) d'une part, et (5.13) - (5.16) d'autre part, on obtient

$$q^* = q_{HLL} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (5.17)$$

et

$$h_{L,R}^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_{R,L}}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{g\bar{h}},$$

où l'on rappelle que les états h^{HLL} et q_{HLL} sont les états qui interviennent dans le schéma HLL, et sont donnés par l'expression (5.2). On peut remarquer que si le terme source \mathcal{S}^{hu} est nul, alors ce schéma redonne simplement le schéma HLL.

Afin d'assurer la positivité de h_L^* et h_R^* , on utilise la procédure de cut-off décrite dans la sous-section 5.1.2.4. Cela revient à définir les hauteurs intermédiaires comme

$$h_L^* = \min\left(\max\left(h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{g\bar{h}}, \delta\right), \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \delta\right), \quad (5.18)$$

$$h_R^* = \min\left(\max\left(h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{g\bar{h}}, \delta\right), \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R}\right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta\right), \quad (5.19)$$

où l'on rappelle que δ est défini par (5.9). Les vitesses tangentielles u_L^* et u_R^* sont simplement obtenues en posant

$$u_L^* = \frac{q^*}{h_L^*} \quad \text{et} \quad u_R^* = \frac{q^*}{h_R^*}.$$

Variable v Concernant la variable v , on choisit de préserver l'invariant de Riemann $v + \iota$ à travers l'onde 0. Ainsi, on définit

$$v^* = \begin{cases} v_L - [\iota] & \text{si } \hat{u} > 0, \\ v_R + [\iota] & \text{si } \hat{u} < 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

C'est l'ajout de l'onde de vitesse \hat{u} dans le schéma qui permet de s'assurer que le schéma préservera les états stationnaires au repos. Les états intermédiaires sont donc bien définis. Il reste à donner une expression de \hat{u} .

Vitesse \hat{u} La vitesse \hat{u} est définie de façon à ce que la relation de consistance faible en hv donnée par (4.16) soit satisfaite. On calcule la moyenne du solveur de Riemann approché dans chacun des cas $\hat{u} > 0$, $\hat{u} < 0$, et $\hat{u} = 0$.

Si $\hat{u} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) dx \\ = \frac{1}{\Delta x} \left(\left(\lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) w_L - \lambda_L \Delta t w_L^* + \hat{u} \Delta t w^* + (\lambda_R \Delta t - \hat{u} \Delta t) w_R^* + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) w_R \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si $\hat{u} < 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) dx \\ = \frac{1}{\Delta x} \left(\left(\lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) w_L + (\hat{u} \Delta t - \lambda_L \Delta t) w_L^* - \hat{u} \Delta t w^* + \lambda_R \Delta t w_R^* + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) w_R \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si $\hat{u} = 0$, alors

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \left(\left(\lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) w_L - \lambda_L \Delta t w_L^* + \lambda_R \Delta t w_R^* + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) w_R \right). \quad (5.23)$$

Ainsi, en injectant ces différentes relations dans la consistance faible (4.16), puis en isolant les termes faisant intervenir \hat{u} , et en utilisant la définition (5.20) de v^* , la relation de consistance faible en la variable hv s'écrit

$$\begin{cases} h_R^* \hat{u} (v_R - v_L + [l]) = C^{hv} & \text{si } \hat{u} > 0, \\ h_L^* \hat{u} (v_R - v_L + [l]) = C^{hv} & \text{si } \hat{u} < 0, \\ 0 = C^{hv} & \text{si } \hat{u} = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

où l'on a posé $C^{hv} := \lambda_R h_R^* v_R - \lambda_L h_L^* v_L - (hv)_{HLL} - S^{hv}[Z]$. On distingue alors deux cas

1. Si $v_R - v_L + [l] \neq 0$, alors en posant $A := C^{hv}/(v_R - v_L + [l])$ on déduit que \hat{u} et A sont de même signe et

$$\begin{cases} h_R^* \hat{u} = A \text{ si } A > 0, \\ h_L^* \hat{u} = A \text{ si } A < 0, \\ \hat{u} = 0 \text{ si } A = 0. \end{cases}$$

2. Si $v_R - v_L + [l] = 0$, alors, par définition de v^* , on remarque que l'on se trouve toujours dans la configuration

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

donc la variable \hat{u} ne peut plus être utilisée pour satisfaire la consistance faible en hv puisqu'elle n'a plus d'influence sur hv . Afin de garantir cette consistance faible dans ce cas, on choisira de définir le terme source discret $S^{hv}[Z]$ de sorte que $C^{hv} = 0$ lorsque $v_R - v_L + [l]$ est nul. C'est ce que l'on fera dans la partie suivante.

L'onde \hat{u} est bien définie dans tous les cas. Comme elle dépend du terme source $S^{hv}[Z]$, on en donnera une expression plus compacte par la suite. On s'intéresse maintenant à la discrétisation des termes sources, ce qui revient à définir $S^{hu}[Z]$ et $S^{hv}[Z]$.

5.2.1.4 Discrétisation des termes sources

Le but de cette partie est de donner une discrétisation well-balanced des termes sources. On considère un couple $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ à l'équilibre local. Il doit alors vérifier la caractérisation discrète des états d'équilibre (5.7) qui s'écrit

$$\mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)[Z] = F(w_R) - F(w_L),$$

et plus précisément ici

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \frac{h_R^2 u_R^2}{h_R} + \frac{g}{2} h_R^2 - \frac{h_L^2 u_L^2}{h_L} - \frac{g}{2} h_L^2, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = h_R u_R v_R - h_L u_L v_L. \quad (5.26)$$

Or d'après la discrétisation de l'équilibre (5.10), on a $u_L = u_R = 0$ et $g[h] = f\bar{v}\Delta x - g[z]$, donc ces deux relations deviennent

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}[z], \quad (5.27)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = 0. \quad (5.28)$$

Ainsi, pour n'importe quel couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}$, on choisit de définir $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ à partir de la relation (5.27). Par contre, la relation (5.28) ne donne pas d'information sur comment discrétiser en toute généralité ce terme source.

Néanmoins, rappelons que dans le solveur de Riemann approché que l'on a construit précédemment, on a établi que les relations de consistance faible pour la variable hv (5.24) ne sont pas automatiquement vérifiées dans le cas particulier où $v_R - v_L + [\iota] = 0$. On va donc définir \mathcal{S}^{hv} en accord avec cette remarque. On a établi que la relation de consistance faible est satisfaite si et seulement si $C^{hv} = 0$, où de manière équivalente si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{hv}[Z] &= [huv] + \lambda_R v_R (h_R^* - h_R) - \lambda_L v_L (h_L - h_L^*) \\ &= v_R (h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R)) - v_L (h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L)). \end{aligned}$$

En remarquant que la relation de consistance en h (5.13) peut se reformuler en

$$h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R) = h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L),$$

on peut réécrire le terme $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ comme

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = \frac{(v_R - v_L)}{2} (h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R) + h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L)).$$

Pour finir, on rappelle que c'est dans le cas particulier $v_R - v_L + [\iota] = 0$ que l'on a besoin d'obtenir cette consistance donc on peut remplacer $v_R - v_L$ par $-[\iota]$, ce qui donne

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -\overline{hu}[\iota] - \frac{[\iota]}{2} (\lambda_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L (h_L^* - h_L)). \quad (5.29)$$

Pour n'importe quel couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}$, on définira donc les termes sources discrets $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ et $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ par (5.27) et (5.29). Remarquons qu'à l'équilibre local, $h_L^* = h_L$, $h_R^* = h_R$ et $\overline{hu} = 0$, ce qui permet de retrouver $\mathcal{S}^{hv}[Z] = 0$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ces expressions sont consistantes avec les termes sources continus, au sens de la Définition 4.2.1.

Proposition 5.2.1. *Le terme source numérique $\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z])$ défini par (5.27) et (5.29) est strictement consistant avec le terme source continu.*

Démonstration. Premièrement, on a immédiatement que $\mathcal{S}^{hu}[Z] = S(w)[Z]$ lorsque \tilde{w}_L et \tilde{w}_R tendent vers \tilde{w} . Deuxièmement, par définition de $h_{L,R}^*$, on a $h_{L,R}^* \rightarrow h + O([Z])$ quand \tilde{w}_L et \tilde{w}_R tendent vers \tilde{w} , donc

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] \rightarrow -hu[\iota] + o([Z]),$$

quand $\tilde{w}_L, \tilde{w}_R \rightarrow \tilde{w}$. On vient de démontrer que le terme source numérique est strictement consistant avec le terme source continu. \square

Le terme source discret $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ ayant été défini, on peut donner une expression plus simple de \hat{u} . Puisque $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ est défini par (5.29), alors C^{hv} se réécrit

$$C^{hv} = \lambda_R v_R (h_R^* - h_R) - \lambda_L v_L (h_L^* - h_L) + [huv] + \frac{[\iota]}{2} (h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R) + h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L)).$$

La relation de consistance en h (5.13) s'écrivant aussi

$$h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R) = h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L),$$

on peut reformuler l'expression précédente en

$$C^{hv} = (v_R - v_L + [l]) \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right).$$

Lorsque $v_R - v_L + [l] \neq 0$ on reprend la définition (5.24) et on obtient

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{1}{h_R^*} \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) > 0, \\ \frac{1}{h_L^*} \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) < 0, \\ 0 & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) = 0, \end{cases} \quad (5.30)$$

Dans le cas contraire, on a vu que la définition de \hat{u} n'influence pas du tout le schéma, donc on peut utiliser l'expression (5.30) en toute généralité.

Remarque 5.2.1. Rien ne garantit *a priori* l'ordre des ondes $\lambda_L < \hat{u} < \lambda_R$. On peut donner une condition nécessaire et suffisante pour que cet ordre soit respecté.

Si $\hat{u} > 0$, on peut écrire que $h_R^* \hat{u} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) = h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R)$, donc $\hat{u} < \lambda_R$ si et seulement si

$$u_R < \lambda_R.$$

Si $\hat{u} < 0$, on a alors $h_L^* \hat{u} = h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L)$, donc $\hat{u} > \lambda_L$ si et seulement si

$$u_L > \lambda_L.$$

Ces conditions sont les mêmes que celles qui garantissent la positivité de h_{HLL} , et elles sont vérifiées d'après les expressions (5.3) et (5.4) des vitesses λ_L et λ_R .

On peut également exprimer le terme source $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ en fonction de \hat{u} de la façon suivante

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = \begin{cases} -h_R^* \hat{u} [l] & \text{si } \hat{u} > 0, \\ -h_L^* \hat{u} [l] & \text{si } \hat{u} < 0, \\ 0 & \text{si } \hat{u} = 0, \end{cases} \quad (5.31)$$

Remarque 5.2.2. Même si le terme $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ est strictement consistant avec le terme source continu $S^{hv}(w) \partial_x Z$, comme on l'a montré dans la démonstration de la Proposition 5.2.1, il ne s'annule pas dès lors que $u_L = u_R = 0$, alors que sur le plan continu, $S^{hv}(w) \partial_x Z$ est nul dès que u l'est. L'expression (5.31) montre que le problème est que l'onde \hat{u} qui approche l'onde de vitesse u du solveur exact ne vaut pas 0 lorsque $u_L = u_R = 0$. Cependant, l'expression de \hat{u} ne peut pas être changée sans perdre la consistance du schéma en la variable hv , ce qui n'est pas souhaitable non plus.

On a défini toutes les inconnues du solveur de Riemann approché, ainsi que tous les termes sources discrets. On va maintenant montrer que le solveur approché a de bonnes propriétés.

5.2.1.5 Propriétés du solveur de Riemann approché

On va montrer que le solveur que l'on vient de construire utilisant une linéarisation de la deuxième relation de caractérisation d'équilibre (L) et une onde de transport (T) a de bonnes propriétés, dont celle d'être well-balanced. Ainsi, pour simplifier les notations, on note $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ le solveur de Riemann approché dont les vitesses d'onde $\lambda_L, \lambda_R, \hat{u}$ sont définies par (5.3), (5.4), (5.30), les états intermédiaires h_L^*, h_R^*, q^*, v^* par (5.18), (5.19), (5.17), (5.20), et les termes sources numériques $\mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z]$ par (5.27), (5.29).

On commence par vérifier que le solveur de Riemann approché que l'on a construit rentre dans le cadre que l'on s'est fixé.

Proposition 5.2.2. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1, et vérifie la propriété suivante :*

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}(\xi, \tilde{w}, \tilde{w}) = w, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\Omega}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 5.2.1, le terme source $\mathcal{S} = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z])$ est consistant avec le terme source continu. De plus, le solveur de Riemann approché vérifie la relation de consistance faible (4.16) par construction. Donc $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1.

Pour vérifier la seconde propriété, on se donne $\tilde{w} \in \tilde{\Omega}$. On pose $\tilde{w}_L = \tilde{w}_R = \tilde{w}$. Alors les termes sources $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ et $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ sont nuls et $h_L^* = h_R^* = h$ et $q^* = q$. De plus, on a $\hat{u} = u$, et par définition de v^* , on obtient $v(x, t) = v$ pour tout $(x, t) \in [-\Delta x/2, \Delta x/2] \times [0, \Delta t]$, ce qui achève la démonstration. \square

On démontre maintenant que $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ préserve les états stationnaires discrets et la positivité des hauteurs de fluide.

Proposition 5.2.3. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est well-balanced et robuste.*

Démonstration. On se donne un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local. Il vérifie donc la discrétisation (5.10). Alors, par définition le terme source $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ est égal à $g\bar{h}[h]$. On rappelle que la procédure de cut-off qui assure la positivité de h_L^* et h_R^* ne s'applique pas à l'équilibre, donc les hauteurs intermédiaires h_L^*, h_R^* vérifient

$$h_{L,R}^* = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{[hu]}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{\lambda_{R,L}}{\lambda_R - \lambda_L} [h] = h_{L,R}.$$

Le débit intermédiaire est tel que

$$q^* = \frac{\lambda_R h_R u_R - \lambda_L h_L u_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{[hu^2 + gh^2/2]}{\lambda_R - \lambda_L} + \frac{g\bar{h}[h]}{\lambda_R - \lambda_L} = 0.$$

Puisque $u_L = u_R = 0$ et que $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$, on obtient alors aisément que $\hat{u} = 0$. Il s'en suit que $\mathcal{S}^{hv}[Z] = 0$, et que v est dans une configuration well-balanced par construction. Ainsi, le solveur de Riemann approché vérifie bien

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}(\xi, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < 0, \\ w_R & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

dès que $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local.

La robustesse est assurée par la procédure de cut-off, puisque par définition, l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \{(h, hu, hv) \in \mathbb{R}^3, \quad h > 0\}.$$

\square

5.2.1.6 Le schéma final

Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ vérifie toutes les propriétés souhaitées. On en déduit les celles du schéma de type Godunov qui en découle.

Théorème 5.2.1. *Sous la condition CFL (4.17), le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ mène à un schéma de type Godunov robuste et well-balanced, au sens où il préserve les états stationnaires discrets correspondants à l'équilibre local donné par (5.10). De plus, il s'écrit dans le formalisme volumes finis, en définissant le flux numérique*

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = (\mathcal{F}^h, \mathcal{F}^{hu}, \mathcal{F}^{hv})^T,$$

par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^h &= \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L), \\ \mathcal{F}^{hu} &= hu^2 + \frac{gh^2}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* u_R^* - h_R u_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* u_L^* - h_L u_L), \\ \mathcal{F}^{hv} &= \overline{huv} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R)v_R + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)v_L - \frac{[hu]}{2}(v_R - v_L + [\iota]), \end{aligned}$$

où

$$\widehat{hu} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)$$

et en définissant les termes sources numériques

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \left(0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z]\right)^T,$$

par (5.27) et (5.29).

Démonstration. La Proposition 4.4.2 permet d'établir que le schéma de type Godunov vérifie les propriétés well-balanced et de robustesse dès que le solveur de Riemann approché associé les satisfait. C'est ce que l'on a vérifié dans la Proposition 5.2.3.

Concernant l'écriture volumes finis du schéma, il suffit d'après la Proposition 4.4.1 de calculer les moyennes du solveur de Riemann approché sur des demi-cellules. On commence par le cas le plus simple. Si $\hat{u} = 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) &= \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} - \frac{\Delta x}{4\Delta t}(w_R - w_L) + \frac{1}{2\Delta t} \left(\lambda_R \Delta t w_R^* + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t w_R \right) - \left(-\lambda_L \Delta t w_L^* + \left(\lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) w_L \right) \right) \\ &= \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L). \end{aligned}$$

Si $\hat{u} > 0$, on obtient de façon similaire que

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_R^*),$$

et si $\hat{u} < 0$, que

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_L^*).$$

En remarquant que $h^* = h_R^*$, $u^* = u_R^*$ dans le cas $\hat{u} > 0$ et que $h^* = h_L^*$, $u^* = u_L^*$ dans le cas $\hat{u} < 0$, on retrouve les expressions des flux \mathcal{F}^h et \mathcal{F}^{hu} données dans le théorème, puisque les termes faisant intervenir l'onde \hat{u} sont nuls pour ces flux.

Pour le flux \mathcal{F}^{hv} , il suffit de remarquer que $v_L^* = v_L$, $v_R^* = v_R$, et d'utiliser les définitions (5.20) et (5.30) de v^* et \hat{u} . Dans le cas $\hat{u} > 0$, on a

$$h^* v^* - h_R^* v_R^* = h_R^*(v_L - v_R - [\iota]) \text{ et } h_R^* \hat{u} = \widehat{hu}.$$

Dans le cas $\hat{u} < 0$, on a

$$h^* v^* - h_L^* v_L^* = h_L^*(v_R - v_L + [\iota]) \text{ et } h_L^* \hat{u} = \widehat{hu}.$$

Ainsi, le flux numérique \mathcal{F}^{hv} s'exprime bien sous la forme donnée par le théorème. \square

5.2.2 Modèle TRSW

On considère maintenant le système à température variable (1.24). On cherche à construire un schéma qui préservera les états stationnaire au repos, donc on commence par en donner une discrétisation.

5.2.2.1 Discrétisation des états stationnaires

Les états stationnaires au repos continus et suffisamment réguliers décrits par (2.11) peuvent être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ g\theta \partial_x(h+z) + \frac{gh}{2} \partial_x \theta &= fv. \end{aligned}$$

On dit alors qu'un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2$ est à l'équilibre local s'il vérifie

$$u_L = u_R = 0, \tag{5.32a}$$

$$g\bar{\theta}[h] + g\widehat{\theta}[z] + \frac{gh^2}{2\bar{h}}[\theta] = \bar{v}[\iota], \tag{5.32b}$$

où $\widehat{\theta} = \frac{[\theta]}{[\ln(\theta)]}$. Adopter ces définitions des moyennes $\bar{\theta}$, $\widehat{\theta}$ et \bar{h}^2 permet de préserver exactement les états d'équilibre continus qui vérifient

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ \theta = cst, \\ h + z = cst. \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ z = cst, \\ h^2 \theta = cst. \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ h = cst, \\ 2z + h \ln(\theta) = cst. \end{cases} \quad (5.35)$$

En effet, si on se donne un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ vérifiant (5.33), alors il est à l'équilibre local puisque

$$g\bar{\theta}[h] + g\hat{\theta}[z] + \frac{gh^2}{2h}[\theta] - \bar{v}[l] = g\theta[h + z] = 0.$$

Si on se donne un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ vérifiant (5.34), on a cette fois

$$g\bar{\theta}[h] + g\hat{\theta}[z] + \frac{gh^2}{2h}[\theta] - \bar{v}[l] = g\bar{\theta}[h] + \frac{gh^2}{2h}[\theta] = \frac{g}{2h}[h^2\theta] = 0.$$

Pour finir, si on considère que $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ satisfait (5.35) alors on a

$$g\bar{\theta}[h] + g\hat{\theta}[z] + \frac{gh^2}{2h}[\theta] - \bar{v}[l] = \frac{g}{2} \frac{[\theta]}{[\ln(\theta)]} [2z + h \ln(\theta)] = 0,$$

et donc $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local.

Passons maintenant à la description du schéma.

5.2.2.2 Solveur à quatre états intermédiaires

L'idée est de reprendre le même schéma que précédemment, et d'y ajouter une onde de vitesse \tilde{u} qui transporte la variable θ (voir Figure 5.8). Cette vitesse peut être positive, négative ou nulle et doit vérifier $\lambda_L < \tilde{u} < \lambda_R$, mais on ne connaît pas *a priori* sa position par rapport à \hat{u} .

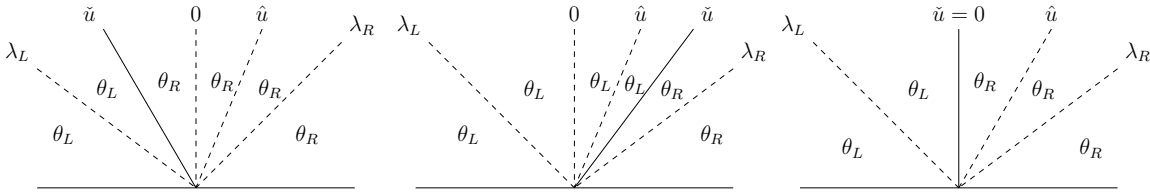


FIGURE 5.8 – Quelques configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable θ . L'onde \hat{u} peut avoir une position différente, mais elle n'influence pas *a priori* l'évolution de θ .

On commence par réduire le nombre d'inconnues afin de simplifier le solveur. Pour le système avec température, les invariants de Riemann associés à l'onde de vitesse u ne sont plus h et u mais $h^2\theta$ et u (voir sous-section 2.3.4). Néanmoins, par souci de simplicité, on considérera comme dans le premier schéma que h et u sont constants à travers l'onde de vitesse \hat{u} , et on fait la même hypothèse pour l'onde de vitesse \tilde{u} . Ainsi, les variables h et u se retrouvent dans la même configuration que pour un solveur à deux états intermédiaires (voir Figure 5.9). On utilisera la même configuration que précédemment pour la variable v , à savoir, un transport à vitesse \hat{u} , et une inconnue v^* qui sert à prendre en compte la modification induite par le terme source (voir Figure 5.10). L'ajout de l'onde de vitesse \tilde{u} ne modifie pas le comportement de ces variables. La variable θ sera elle simplement transportée à vitesse \tilde{u} , comme sur la Figure 5.8. Cela signifie que la prise en compte de la température dans le solveur n'ajoute qu'une seule inconnue supplémentaire, la vitesse \tilde{u} . On peut déjà remarquer que lorsque $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local, si l'on obtient $\tilde{u} = 0$ alors θ sera automatiquement dans une configuration well-balanced.

Variables h et q . Les variables h et q sont dans la configuration de la Figure 5.9. On reprend alors la même méthodologie que dans la sous-sous-section 5.2.1.3, qui utilise les relations de consistance en h et hu , ainsi que les caractérisations discrètes des états d'équilibre pour définir h_L^* , h_R^* , u_L^* et u_R^* . Les relations utilisées pour définir les inconnues h_L^* , h_R^* seront légèrement modifiées par la prise en compte d'une température variable. On utilise comme précédemment les relations de consistance faible en h et hu données par (5.13) et (5.14), ainsi

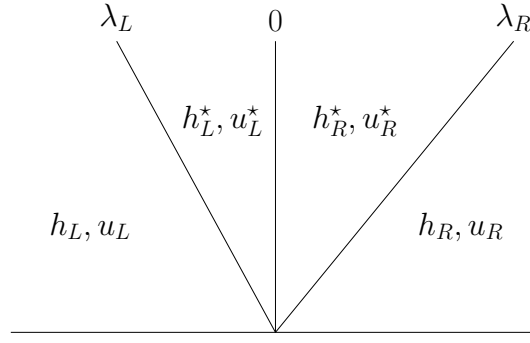


FIGURE 5.9 – Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h et u , similaire à un solveur à deux états intermédiaires.

que la la caractérisation des états d'équilibre (5.7) pour les variables h et u qui s'écrit pour une température variable comme

$$\begin{aligned} h_L u_L &= h_R u_R = q, \\ \frac{g}{2}[h^2 \theta] &= \mathcal{S}^{hu}[Z]. \end{aligned}$$

On applique une version linéarisée de ces relations aux états intermédiaires ce qui donne

$$h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^* = q^*, \quad (5.36)$$

$$g \bar{h} \bar{\theta} (h_R^* - h_L^*) + \frac{g \bar{h}^2}{2} (\theta_R - \theta_L) = \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.37)$$

Ce choix de linéarisation est justifié par le fait que $\frac{g}{2}[h^2 \theta] = g \bar{h} \bar{\theta} [h] + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta]$. Ainsi, en combinant les relations (5.13)-(5.37) d'une part et (5.14)-(5.36) d'autre part, on obtient les expressions suivantes des inconnues

$$q^* = q_{HLL} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (5.38)$$

et

$$h_{L,R}^* = h_{HLL} - \frac{\lambda_{R,L}}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{1}{g \bar{h} \bar{\theta}} \left(\mathcal{S}^{hu}[Z] - \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] \right).$$

L'expression de q^* est la même que précédemment puisque les relations utilisées sont les mêmes. On peut remarquer que si $\theta_R = \theta_L = 1$, alors les expressions de h_L^* et h_R^* coïncident avec celles données dans le solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$. On applique la procédure de cut-off décrite dans la section 5.1 sur h_L^* et h_R^* pour assurer la positivité de ces variables, ce qui donne

$$h_L^* = \min \left(\max \left(h_{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{1}{g \bar{h} \bar{\theta}} \left(\mathcal{S}^{hu}[Z] - \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] \right), \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h_{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \delta \right), \quad (5.39)$$

$$h_R^* = \min \left(\max \left(h_{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{1}{g \bar{h} \bar{\theta}} \left(\mathcal{S}^{hu}[Z] - \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] \right), \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h_{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta \right). \quad (5.40)$$

On retrouve u_L^* et u_R^* en posant

$$u_L^* = \frac{q^*}{h_L^*} \quad \text{et} \quad u_R^* = \frac{q^*}{h_R^*}.$$

Variable v Le traitement de la variable v est le même que dans le solveur précédent. Quelques configurations sont données dans la Figure 5.10. Il n'y a que l'inconnue v^* à définir, et elle est donnée par

$$v^* = \begin{cases} v_L - [l] & \text{si } \hat{u} > 0, \\ v_R + [l] & \text{si } \hat{u} < 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

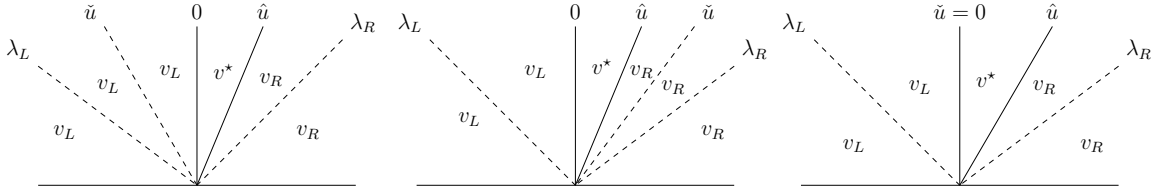


FIGURE 5.10 – Quelques configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v . L'onde de vitesse \hat{u} peut avoir une position différente.

Vitesses \hat{u} et \check{u} La vitesse \hat{u} est définie de façon à assurer la consistance faible du solveur en hv . En suivant le même raisonnement qu'à la sous-sous-section 5.2.1.3, son expression est donnée par (5.30).

On définit également la vitesse \check{u} de telle sorte que la consistance faible du solveur en $h\theta$ soit vérifiée. En calculant la moyenne du solveur de Riemann approché, on distingue alors trois cas de figure, selon le signe de \check{u} .

$$\begin{aligned} \lambda_R \theta_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L \theta_L (h_L - h_L^*) + \check{u} h_R^* (\theta_L - \theta_R) &= -[hu\theta] & \text{si } \check{u} > 0, \\ \lambda_R \theta_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L \theta_L (h_L - h_L^*) + \check{u} h_L^* (\theta_L - \theta_R) &= -[hu\theta] & \text{si } \check{u} < 0, \\ \lambda_R \theta_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L \theta_L (h_L - h_L^*) &= -[hu\theta] & \text{si } \check{u} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la relation de consistance en h (5.13), réécrite de la façon suivante

$$h_R u_R + \lambda_R (h_R^* - h_R) = h_L u_L + \lambda_L (h_L^* - h_L),$$

on peut facilement reformuler ces relations comme

$$\begin{aligned} \check{u} h_R^* (\theta_R - \theta_L) &= (\theta_R - \theta_L) \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \check{u} > 0, \\ \check{u} h_L^* (\theta_R - \theta_L) &= (\theta_R - \theta_L) \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \check{u} < 0, \\ (\theta_R - \theta_L) \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) &= 0 & \text{si } \check{u} = 0. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient qu'en toute généralité, $\check{u} = \hat{u}$, ce qui signifie que le solveur n'a en réalité que quatre ondes, de vitesse $\lambda_L, 0, \lambda_R$ et \hat{u} .

Les inconnues sont maintenant toutes bien définies. Il reste à donner la discrétisation des termes sources afin de compléter la définition de ce solveur de Riemann approché.

5.2.2.3 Discrétisation des termes sources

On donne maintenant une discrétisation well-balanced des termes sources, lorsque la température variable est prise en compte. On considère un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local, qui doit alors vérifier la caractérisation discrète des états d'équilibre

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = F(w_R) - F(w_L),$$

et plus précisément

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \frac{h_R^2 u_R^2}{h_R} + \frac{g}{2} h_R^2 \theta_R - \frac{h_L^2 u_L^2}{h_L} - \frac{g}{2} h_L^2 \theta_L, \quad (5.43)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = h_R u_R v_R - h_L u_L v_L. \quad (5.44)$$

D'après la discrétisation de l'équilibre (5.32), on a

$$u_L = u_R = 0,$$

et

$$g \bar{h} \bar{\theta}[h] + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \bar{h} \bar{v}[v] - g \bar{h} \bar{\theta}[z].$$

Or on rappelle que

$$\frac{g}{2}[h^2\theta] = g\bar{h}\bar{\theta}[h] + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta],$$

donc les relations (5.43) - (5.44) se réécrivent

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z], \quad (5.45)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = 0. \quad (5.46)$$

Ainsi, pour n'importe quel couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}$, on choisit de définir $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ à partir de la relation (5.45). Une fois encore la relation d'équilibre ne permet pas de définir $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ en toute généralité, mais on rappelle que comme dans la construction du solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ à la sous-sous-section 5.2.1.3, il faut définir le terme $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ de façon à ce que la consistance en hv soit vérifiée dans le cas particulier où $v_R - v_L + [\iota] = 0$. Le terme source $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ est donc défini par la relation (5.29) que l'on rappelle ici

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -\overline{hu}[\iota] - \frac{[\iota]}{2}(\lambda_R(h_R^* - h_R) + \lambda_L(h_L^* - h_L)). \quad (5.47)$$

On peut vérifier que ces discrétisations sont consistantes avec les termes sources continus.

Proposition 5.2.4. *Le terme source numérique $\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z])$ défini par (5.45) et (5.47) est strictement consistant avec le terme source continu.*

Démonstration. On renvoie à la démonstration de la Proposition 5.2.1 qui fait intervenir des termes sources numériques quasiment identiques. \square

5.2.2.4 Propriétés du solveur de Riemann approché

On va montrer que le solveur que l'on vient de construire prenant en compte une température variable, utilisant une linéarisation de la deuxième caractérisation d'équilibre (L) et une onde de transport (T), a de bonnes propriétés, dont celle d'être well-balanced. Ses vitesses d'ondes $\lambda_L, \lambda_R, \hat{u}$ sont définies par (5.3), (5.4), (5.30), ses états intermédiaires h_L^*, h_R^*, q^*, v^* par (5.39), (5.40), (5.38), (5.41), et ses termes sources numériques $\mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z]$ par (5.45), (5.47).

Si l'on pose $\theta_L = \theta_R = \theta$ dans ces différentes expressions, alors on retrouve exactement le solveur conçu pour une température constante $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$. Ainsi, on notera encore $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ le solveur qui prend en compte la température variable, puisqu'il s'agit d'une amélioration de celui construit à la sous-sous-section 5.2.1.3. Par la suite, c'est à ce solveur que l'on fera référence lorsque l'abréviation LT sera utilisée.

Vérifions maintenant qu'il possède les propriétés souhaitées.

Proposition 5.2.5. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1, et vérifie la propriété suivante :*

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}(\xi, \tilde{w}, \tilde{w}) = w, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\Omega}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 5.2.4, le terme source $\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z])$ est consistant avec le terme source continu. De plus, le solveur de Riemann approché vérifie la relation de consistance faible (4.16) par construction. Donc $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1. On vérifie aisément la seconde propriété en se donnant $\tilde{w}_L = \tilde{w}_R = \tilde{w} \in \tilde{\Omega}$. \square

On démontre maintenant que $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ préserve les états stationnaires discrets et la positivité des hauteurs de fluide.

Proposition 5.2.6. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ est well-balanced et robuste.*

Démonstration. La robustesse du solveur est assurée par la procédure de cut-off pour la variable h , et par le fait que la variable θ est simplement transportée, donc reste strictement positive.

On se donne un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local. Il vérifie alors la discrétisation (5.32). Alors le terme source $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ est égal à $g\bar{h}\bar{\theta}[h] + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta]$. La procédure de cut-off qui assure la positivité de h_L^* et h_R^* ne s'applique pas à l'équilibre, donc les hauteurs intermédiaires h_L^* et h_R^* sont données par

$$h_{L,R}^* = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{[hu]}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{\lambda_{R,L}}{\lambda_R - \lambda_L}[h] = h_{L,R}.$$

Le débit intermédiaire est tel que

$$q^* = \frac{\lambda_R h_R u_R - \lambda_L h_L u_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{[hu^2 + gh^2\theta/2]}{\lambda_R - \lambda_L} + \frac{g\bar{h}\bar{\theta}[h] + \frac{gh^2}{2}}{\lambda_R - \lambda_L} = 0.$$

Puisque $u_L = u_R = 0$ et que $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$, on a $\hat{u} = 0$. Il s'en suit que v et θ sont dans une configuration well-balanced par construction. Ainsi, le solveur de Riemann approché vérifie bien

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < 0, \\ w_R & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

dès que $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est à l'équilibre local. \square

5.2.3 Schéma final

Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ vérifie toutes les propriétés souhaitées. On en déduit celles du schéma de type Godunov qui en découle.

Théorème 5.2.2. *Sous la condition CFL (4.17), le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ mène à un schéma de type Godunov robuste et well-balanced, au sens où il préserve les états stationnaires discrets correspondants à l'équilibre local donné par (5.32). De plus, le schéma s'écrit dans le formalisme volumes finis, en définissant le flux numérique*

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = (\mathcal{F}^h, \mathcal{F}^{hu}, \mathcal{F}^{hv}, \mathcal{F}^{h\theta})^T,$$

par

$$\mathcal{F}^h = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L), \quad (5.48)$$

$$\mathcal{F}^{hu} = \overline{hu^2 + \frac{gh^2}{2}} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* u_R^* - h_R u_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* u_L^* - h_L u_L), \quad (5.49)$$

$$\mathcal{F}^{hv} = \overline{huv} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R)v_R + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)v_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2}(v_R - v_L + [l]), \quad (5.50)$$

$$\mathcal{F}^{h\theta} = \overline{hu\theta} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R)\theta_R + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)\theta_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2}(\theta_R - \theta_L) \quad (5.51)$$

où

$$\widehat{hu} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L),$$

et en définissant les termes sources numériques

$$\mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z], 0)^T,$$

par (5.45) et (5.47)

Démonstration. Il suffit d'utiliser les Propositions 4.4.2 et 5.2.6 pour établir que le schéma est well-balanced et robuste.

D'autre part, en utilisant la Proposition 4.4.1, on obtient que le flux numérique s'écrit

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) \quad \text{si } \hat{u} = 0,$$

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_R^*), \quad \text{si } \hat{u} > 0,$$

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_L^*) \quad \text{si } \hat{u} < 0.$$

Pour établir l'expression du flux $\mathcal{F}^{h\theta}$, il suffit de remarquer que d'après la définition (5.30) dans le cas $\hat{u} > 0$, on a

$$(w^* - w_R^*)^{h\theta} = h_R^*(\theta_L - \theta_R) \quad \text{et} \quad h_R^* \hat{u} = \widehat{hu},$$

et dans le cas $\hat{u} < 0$, on a

$$(w^* - w_R^*)^{h\theta} = h_L^*(\theta_R - \theta_L) \text{ et } h_L^*\hat{u} = \widehat{hu},$$

ce qui permet de retrouver l'expression (5.51). Pour les flux \mathcal{F}^h , \mathcal{F}^{hu} et \mathcal{F}^{hv} , on renvoie à la démonstration du Théorème 5.2.1 qui donne les flux du schéma well-balanced sans température. \square

Nous venons de construire un schéma well-balanced pour le modèle TRSW. Sa construction nous a permis de détailler sur un exemple la procédure de construction générale décrite en introduction de ce chapitre. Certains éléments présentés ici seront réutilisés par la suite.

Dans la section 5.7, nous vérifierons numériquement sur des exemples que ce schéma préserve les solutions stationnaires au repos. Nous verrons également qu'il peut préserver certains états stationnaires en mouvement simples (voir cas-test 5.7.3.4), mais échoue à préserver ou capturer des états stationnaires en mouvement plus complexes (voir cas-tests 5.7.3.5 et 5.7.1.3). Ce phénomène est bien connu, et notamment étudié dans [70] qui compare des schémas préservant les états stationnaires en mouvement à des schémas classiques. C'est pourquoi dans la prochaine section, on s'intéresse à la construction d'un schéma fully well-balanced.

5.3 Un schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre

Le schéma présenté ici a fait l'objet d'une publication [26] dans la revue Communications in Mathematical Sciences.

Dans la section 5.2, on s'est intéressé à la construction d'un solveur de Riemann approché qui préserve les états stationnaires au repos pour le modèle à température constante ou variable. On cherche maintenant à établir un solveur de Riemann approché préservant tous les états stationnaires. La première approche que l'on va détailler ici consiste à suivre à la lettre la stratégie décrite dans la section 5.1 pour un solveur de Riemann avec deux états intermédiaires. Par souci de concision, on présentera directement le schéma avec température variable.

5.3.1 Discrétisation des états stationnaires

Les états stationnaires continus du modèle à température variable sont donnés par (2.10). On choisit d'en faire la discrétisation suivante : on dit que le couple $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) \in \widetilde{\Omega}^2$ est à l'équilibre local s'il vérifie

$$h_L u_L = h_R u_R = q, \quad (5.52a)$$

$$\left[\frac{u^2}{2} \right] + g\bar{\theta}[h] + g\widehat{\theta}[z] + \frac{g\overline{h^2}}{2h}[\theta] = \bar{v}[l], \quad (5.52b)$$

$$q[v] = -q[l], \quad (5.52c)$$

$$q[\theta] = 0. \quad (5.52d)$$

avec $\widehat{\theta} = \frac{[\theta]}{[\ln(\theta)]}$. Ce choix généralise les discrétisations des états stationnaires au repos à température variable (5.32). Le solveur approché que l'on va construire par la suite utilise un détecteur d'équilibre, que l'on définit par

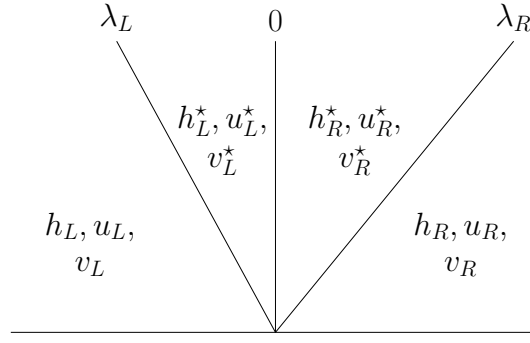
$$\mathcal{E}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \sqrt{\left| [hu] \right|^2 + \left[\left[\frac{u^2}{2} + g\bar{\theta}h + g\widehat{\theta}z + \frac{g\overline{h^2}}{2h}\theta \right] - \bar{v}[l] \right]^2 + \left| \overline{hu}([v] + [l]) \right|^2 + \left| \overline{hu}[\theta] \right|^2}. \quad (5.53)$$

Ce détecteur est nul si et seulement si $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est à l'équilibre local. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le couple considéré, on utilisera la notation plus concise \mathcal{E}_{LR} pour le désigner.

5.3.2 Solveur à trois états intermédiaires

On considère un solveur de Riemann approché avec quatre ondes de vitesse $\lambda_L, 0$ et λ_R et \hat{u} , où λ_L et λ_R sont définies par (5.3) et (5.4), et \hat{u} par (5.30). On renvoie à la sous-section 5.2.2 pour les détails concernant l'obtention de \hat{u} .

Le solveur est donc composé de trois états intermédiaires. La vitesse \hat{u} influence uniquement l'évolution de la variable θ , ce qui signifie que les variables h, u et v sont dans une configuration similaire à celle d'un solveur à deux états intermédiaires (voir Figure 5.11)

FIGURE 5.11 – Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h, u, v .

Ayant déjà défini la vitesse \hat{u} , il reste alors six inconnues, $h_L^*, u_L^*, v_L^*, h_R^*, u_R^*, v_R^*$. Les trois premières relations utilisées pour les définir proviennent de la relation de consistance faible donnée par (5.6), et s'écrivent donc

$$\lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) h_{HLL}, \quad (5.54)$$

$$\lambda_R h_R^* u_R^* - \lambda_L h_L^* u_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) (hu)_{HLL} + \mathcal{S}^{hu}[Z], \quad (5.55)$$

$$\lambda_R h_R^* v_R^* - \lambda_L h_L^* v_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) (hv)_{HLL} + \mathcal{S}^{hv}[Z]. \quad (5.56)$$

Les trois autres relations proviennent de la caractérisation discrète des états stationnaires

$$F(w_R) - F(w_L) = \mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z],$$

ou encore

$$h_L u_L = h_R u_R = q, \quad (5.57)$$

$$g \bar{h} \bar{\theta} (1 - \tilde{\text{Fr}})[h] + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \mathcal{S}^{hu}[Z], \quad (5.58)$$

$$q[v] = \mathcal{S}^{hv}[Z], \quad (5.59)$$

où $\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = (0, \mathcal{S}^{hu}, \mathcal{S}^{hv})$ est le terme source numérique défini par la suite, et où $\tilde{\text{Fr}} = \frac{q^2}{g \bar{h} \bar{\theta} h_L h_R}$ est une discrétisation du carré du nombre de Froude. La seconde relation s'obtient en remarquant que

$$F^{hu}(w_R) - F^{hu}(w_L) = \left[hu^2 + \frac{g h^2 \theta}{2} \right] = q^2 \left(\frac{h_L - h_R}{h_L h_R} \right) - g \bar{h} \bar{\theta} (h_R - h_L) + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \left(g \bar{h} \bar{\theta} - \frac{q^2}{h_L h_R} \right) (h_R - h_L) + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta].$$

On applique une version linéarisée des ces relations aux états intermédiaires, ce qui donne

$$h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^* = q^*, \quad (5.60)$$

$$g \bar{h} \bar{\theta} (1 - \tilde{\text{Fr}}) (h_R^* - h_L^*) + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \mathcal{S}^{hu}[Z], \quad (5.61)$$

$$\tilde{q} (v_R^* - v_L^*) = \mathcal{S}^{hv}[Z], \quad (5.62)$$

où \tilde{q} est une certaine moyenne de q_R et q_L qui doit redonner q lorsque $q_R = q_L = q$. On peut par exemple choisir $\tilde{q} = \bar{q}$ ou encore $\tilde{q} = q^*$. Pour simplifier les notations, on posera aussi $\alpha_{LR} = g \bar{h} \bar{\theta} (1 - \tilde{\text{Fr}})$, pour réécrire (5.58) et (5.61) comme

$$\alpha_{LR} (h_R - h_L) + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.63)$$

et

$$\alpha_{LR} (h_R^* - h_L^*) + \frac{g \bar{h}^2}{2} [\theta] = \mathcal{S}^{hu}[Z]. \quad (5.64)$$

Le système d'équations (5.54)-(5.55)-(5.56)-(5.60)-(5.61)-(5.62) est mal posé lorsque le nombre de Froude discret $\tilde{\text{Fr}} = 1$ ou lorsque \tilde{q} s'annule. On procède alors à une désingularisation du problème en adoptant la

méthode proposée dans [12] pour le système de Saint-Venant sans force de Coriolis, qui repose sur un détecteur d'équilibre. On commence donc par généraliser l'obtention des expressions de h_L^* , h_R^* et q^* donnée dans [12] au cas d'un système à température variable, puis on adaptera l'approche utilisée pour définir proprement les inconnues v_L^* et v_R^* .

Remarque 5.3.1. Bien que la stratégie qui sera utilisée pour définir les différences $h_R^* - h_L^*$ et $v_R^* - v_L^*$ soit la même, les problèmes sont de natures différentes. En effet, l'équation d'évolution de hu pose problème parce qu'elle est mal définie au niveau continu. Prenons pour simplifier $\theta = 1$ constant. A l'équilibre, on retrouve

$$\partial_x \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = S^{hu}(w) \partial_x Z,$$

ou encore

$$gh(1 - \text{Fr}) \partial_x h = S^{hu}(w) \partial_x Z,$$

pour des solutions suffisamment régulières, avec $\text{Fr} = \frac{u^2}{gh}$ le nombre de Froude continu. Cela ne permet pas de définir proprement la dérivée en espace de h lorsque Fr vaut 1. Dans le cas de l'équation d'évolution de hv , il n'y a en fait pas de problème de définition, puisque à l'équilibre on a

$$hu \partial_x v = S^{hv}(w) \partial_x Z.$$

Lorsque $hu = 0$, le terme source $S^{hv}(w) \partial_x Z = fhu$ est nul aussi. Tout est bien défini mais il n'y a plus d'information sur la dérivée en espace de v .

5.3.2.1 Variable q

En combinant la relation de consistance en hu (5.55) et la relation d'équilibre (5.60), on obtient la relation usuelle pour q^*

$$q^* = q_{HLL} + \frac{S^{hu}[Z]}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (5.65)$$

5.3.2.2 Variable h

Concernant h_L^* et h_R^* , on modifie la relation d'équilibre (5.64) en y introduisant le détecteur d'équilibre de la façon suivante

$$\left(\alpha_{LR}^2 + \mathcal{E}_{LR} \right) (h_R^* - h_L^*) = \alpha_{LR} \left(S^{hu}[Z] - \frac{\overline{gh^2}}{2} [\theta] \right). \quad (5.66)$$

Ainsi, le coefficient $\alpha_{LR}^2 + \mathcal{E}_{LR}$ s'annule uniquement dans le cas où $\alpha_{LR} = 0$ et $\mathcal{E}_{LR} = 0$. Or, il est naturel d'imposer à l'équilibre que $h_R^* - h_L^* = h_R - h_L$ afin d'assurer le caractère well-balanced du schéma. De plus, on peut noter que si $\alpha_{LR} \neq 0$, alors d'après la relation choisie (5.66) et la relation vérifiée à l'équilibre (5.63), on a

$$\lim_{\mathcal{E}_{LR} \rightarrow 0} h_R^* - h_L^* = h_R - h_L.$$

Ainsi, on définit la quantité

$$\Delta_{LR}^h = \begin{cases} \frac{\alpha_{LR} \left(S^{hu}[Z] - \frac{\overline{gh^2}}{2} [\theta] \right)}{\alpha_{LR}^2 + \mathcal{E}_{LR}} & \text{si } \mathcal{E}_{LR} \neq 0, \\ h_R - h_L & \text{si } \mathcal{E}_{LR} = 0, \end{cases}$$

et on choisit comme équation supplémentaire définissant les inconnues h_L^* et h_R^*

$$h_R^* - h_L^* = \Delta_{LR}^h. \quad (5.67)$$

En combinant cette relation avec la relation de consistance en h (5.54), on obtient

$$h_L^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h, \quad (5.68)$$

$$h_R^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h. \quad (5.69)$$

De façon usuelle, on applique la procédure de cut-off décrite dans la [sous-sous-section 5.1.2.4](#) afin d'assurer la positivité de h_L^* et h_R^* , ce qui revient à poser

$$h_L^* = \min \left(\max \left(h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h, \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \delta \right), \quad (5.70)$$

$$h_R^* = \min \left(\max \left(h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h, \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta \right). \quad (5.71)$$

Remarque 5.3.2. Le défaut de cette méthode est que Δ_{LR}^h n'est pas continu. En effet,

$$\lim_{\alpha_{LR} \rightarrow 0} \left(\lim_{\mathcal{E}_{LR} \rightarrow 0} \Delta_{LR}^h \right) = h_R - h_L,$$

mais

$$\lim_{\mathcal{E}_{LR} \rightarrow 0} \left(\lim_{\alpha_{LR} \rightarrow 0} \Delta_{LR}^h \right) = 0.$$

Cela signifie qu'au niveau numérique, un seuil doit être fixé pour déterminer à partir de quelle valeur on considère \mathcal{E}_{LR} suffisamment petit pour poser $\Delta_{LR}^h = h_R - h_L$.

5.3.2.3 Variable v

Pour la variable v , le même type de problème se présente. La relation (5.62) ne nécessite pas d'être linéarisée, mais désingularisée au sens où l'on souhaite définir proprement les variables v_L^* et v_R^* même lorsque $\tilde{q} = 0$. Ainsi, on transforme la relation (5.62) en

$$(\tilde{q}^2 + \mathcal{E}_{LR})(v_R^* - v_L^*) = \tilde{q} \mathcal{S}^{hv}[Z],$$

ce qui permet de poser

$$\Delta_{LR}^v = \begin{cases} \frac{\tilde{q} \mathcal{S}^{hv}[Z]}{\tilde{q}^2 + \mathcal{E}_{LR}} & \text{si } \mathcal{E}_{LR} \neq 0, \\ v_R - v_L & \text{si } \mathcal{E}_{LR} = 0, \end{cases}$$

et de fixer l'équation supplémentaire

$$v_R^* - v_L^* = \Delta_{LR}^v.$$

Cette équation, combinée à la relation de consistance en hv (5.56) permet d'obtenir les expressions suivantes

$$v_L^* = \frac{(hv)^{HLL}}{h^{HLL}} + \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}} (\mathcal{S}^{hv}[Z] - \lambda_R h_R^* \Delta_{LR}^v), \quad (5.72)$$

$$v_R^* = \frac{(hv)^{HLL}}{h^{HLL}} + \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}} (\mathcal{S}^{hv}[Z] - \lambda_L h_L^* \Delta_{LR}^v). \quad (5.73)$$

De même que précédemment, la quantité Δ_{LR}^v n'est pas continue. On peut seulement établir qu'à \tilde{q} non nul fixé, on a

$$\lim_{\mathcal{E}_{LR} \rightarrow 0} \frac{\tilde{q} \mathcal{S}^{hv}[Z]}{\tilde{q}^2 + \mathcal{E}_{LR}} = v_R - v_L.$$

5.3.3 Discrétisation des termes sources

Pour compléter la définition du solveur de Riemann approché, il reste à donner des discrétisations consistantes et well-balanced des termes sources. Pour cela, on considère un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local. Alors, il doit vérifier la caractérisation discrète des états stationnaires (5.7) qui s'écrit ici

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{hu}[Z] &= h_R u_R^2 + \frac{g h_R^2 \theta_R}{2} - h_L u_L^2 - \frac{g h_L^2 \theta_L}{2}, \\ \mathcal{S}^{hv}[Z] &= h_R u_R v_R - h_L u_L v_L. \end{aligned}$$

En utilisant la discrétisation des états stationnaires (5.52), ces relations se réécrivent

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = g\bar{h}\bar{\theta} \left(1 - \bar{\text{Fr}}\right)[h] + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta], \quad (5.74)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -q[l]. \quad (5.75)$$

L'expression (5.74) n'est pas consistante avec le terme source continu. On continue de développer son expression à l'équilibre. D'une part, d'après la relation d'équilibre (5.52b) on a

$$\left[\frac{q^2}{2h^2}\right] + g\bar{\theta}[h] + g\widehat{\theta}[z] + \frac{g\bar{h}^2}{2h}[\theta] - \bar{v}[l] = 0.$$

ce qui mène à

$$\left(g\bar{\theta} - \frac{q^2\bar{h}}{h_L^2 h_R^2}\right)[h] = \bar{v}[l] - g\widehat{\theta}[z] - \frac{g\bar{h}^2}{2h}[\theta],$$

d'où

$$(1 - \bar{\text{Fr}})[h] = \frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[l] - \frac{\widehat{\theta}}{\bar{\theta}}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta], \quad (5.76)$$

avec $\bar{\text{Fr}} = \frac{q^2\bar{h}}{g\bar{\theta}h_L^2 h_R^2}$ une seconde discrétisation du carré du nombre de Froude. D'autre part, on peut retravailler l'expression de (5.74) en écrivant

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \left(g\bar{h}\bar{\theta} \left(1 - \bar{\text{Fr}} + \bar{\text{Fr}}\right) - \frac{q^2}{h_L h_R}\right)[h] + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta] \quad (5.77)$$

$$= g\bar{h}\bar{\theta} \left(1 - \bar{\text{Fr}}\right)[h] + \frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}}{4\bar{h}}[h]^3 + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta]. \quad (5.78)$$

En injectant l'expression (5.76) dans (5.78), on obtient

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[l] - g\bar{h}\widehat{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}[h]}{4\bar{h}} \frac{\left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[l] - \frac{\widehat{\theta}}{\bar{\theta}}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta]\right)^2}{(1 - \bar{\text{Fr}})^2}. \quad (5.79)$$

Cette expression est *a priori* mal définie lorsque $\bar{\text{Fr}} = 1$. Cependant, en utilisant son expression équivalente (5.78), on montre facilement la limite

$$\lim_{\bar{\text{Fr}} \rightarrow 1} \mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[l] - g\bar{h}\widehat{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}}{4\bar{h}}[h]^3, \quad (5.80)$$

puisque lorsque $\bar{\text{Fr}} = 1$, on a $\bar{h}\bar{v}[l] - g\bar{h}\widehat{\theta}[z] = \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta]$ d'après (5.76).

Jusqu'ici, les expressions (5.79) et (5.75) sont des définitions appropriées des termes sources numériques $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ et $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ à l'équilibre local. On doit maintenant les définir pour n'importe quel couple (\bar{w}_L, \bar{w}_R) de $\bar{\Omega}$. On souligne que, si l'on choisit de définir $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ par (5.79) pour n'importe quel couple (\bar{w}_L, \bar{w}_R) , alors $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ n'est pas bien définie lorsque $\mathcal{E}_{LR} \neq 0$ et que $\bar{\text{Fr}} = 1$. En effet, la limite (5.80) est valide uniquement à l'équilibre local. Pour résoudre ce problème, on ajoute un terme au dénominateur comme suit

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[l] - g\bar{h}\widehat{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}[h]}{4\bar{h}} \frac{\left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[l] - \frac{\widehat{\theta}}{\bar{\theta}}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta]\right)^2}{(1 - \bar{\text{Fr}})^2 + \mathcal{E}_{LR}\Delta x^k}. \quad (5.81)$$

Désormais, le dénominateur de (5.81) s'annule si et seulement si $\bar{\text{Fr}} = 1$ et si $\mathcal{E}_{LR} = 0$, c'est-à-dire à l'équilibre local. Mais on a vu que dans ce cas, le terme source est bien défini d'après le calcul de limite (5.80). Le paramètre

k est choisi de façon à assurer que le terme

$$\frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}[h] \left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\bar{\theta}}{\theta}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2h\bar{\theta}}[\theta] \right)^2}{4\bar{h} (1 - \bar{\text{Fr}})^2 + \mathcal{E}_{LR}\Delta x^k},$$

tende vers 0 avec Δx dans le cas où toutes les fonctions considérées sont régulières. Cela est immédiat lorsque $\bar{\text{Fr}}$ est différent de 1. Dans le cas où $\bar{\text{Fr}} = 1$, mais que $\mathcal{E}_{LR} \neq 0$, si l'on suppose que tout est régulier on peut écrire que $\mathcal{E}_{LR} \sim \Delta x$, et donc

$$\frac{g\bar{\theta}[h] \left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\bar{\theta}}{\theta}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2h\bar{\theta}}[\theta] \right)^2}{4\bar{h} \mathcal{E}_{LR}\Delta x^k} = o(\Delta x^{1-k}).$$

Le paramètre k doit alors vérifier $k < 1$. Notons que plus k est petit, plus l'erreur commise l'est aussi. Ainsi, prendre $k = 0$ ou $k = -1/2$ convient et donne en pratique de bons résultats numériques.

Pour généraliser l'expression (5.75) de $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ loin des états stationnaires, on définit un débit \tilde{q} qui coïncide avec q dès que $w_L = w_R = w$. Comme mentionné précédemment, on peut par exemple choisir $\tilde{q} = hu$ ou $\tilde{q} = q^*$.

Pour résumer, on définit les termes sources numériques de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \begin{cases} \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}[h] \left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\bar{\theta}}{\theta}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2h\bar{\theta}}[\theta] \right)^2}{4\bar{h} (1 - \bar{\text{Fr}})^2 + \mathcal{E}_{LR}\Delta x^k}, & \text{si } \bar{\text{Fr}} \neq 1 \text{ ou } \mathcal{E}_{LR} \neq 0. \\ \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}}{4\bar{h}}[h]^3 & \text{si } \bar{\text{Fr}} = 1 \text{ et } \mathcal{E}_{LR} = 0. \end{cases} \quad (5.82)$$

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -\tilde{q}[\iota]. \quad (5.83)$$

Montrons que ces termes sources numériques sont consistants avec les termes sources continus.

Proposition 5.3.1. *Le terme source numérique*

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z])$$

défini par (5.82) et (5.83) est consistant avec le terme source continu au sens de la Définition 4.2.1.

Démonstration. On a immédiatement la consistance stricte de \mathcal{S}^{hv} et celle de \mathcal{S}^{hu} dans le cas $\bar{\text{Fr}} \neq 1$ ou $\mathcal{E}_{LR} \neq 0$. Si $\bar{\text{Fr}} = 1$ et $\mathcal{E}_{LR} = 0$, on ne peut pas démontrer la consistance stricte de \mathcal{S}^{hu} , mais la consistance (non stricte) est vérifiée. En effet, dans ce cas on a

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}}{4\bar{h}}[h]^3,$$

ou $[h] = O(|h_R - h| + |h_L - h|)$ quand w_L et w_R tendent vers w , et donc le terme en $[h]^3$ vérifie

$$[h]^3 = o(|h_R - h| + |h_L - h|),$$

quand w_L et w_R tendent vers w . □

5.3.4 Propriétés du solveur de Riemann approché

On va montrer que le solveur que l'on vient de construire, utilisant une linéarisation (L) de la deuxième relation de caractérisation d'équilibre, et une désingularisation (D) de la troisième relation de caractérisation d'équilibre, a de bonnes propriétés, dont celle d'être fully well-balanced (F). Ainsi, on note $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}$ le solveur de Riemann approché dont les vitesses d'onde λ_L , λ_R et \hat{u} sont données par (5.3), (5.4), et (5.30), les hauteurs intermédiaires h_L^* , h_R^* par (5.70) et (5.71), avec le débit intermédiaire q^* défini par (5.65), les vitesses transverses intermédiaires v_L^* et v_R^* données par (5.72) et (5.73) et les termes sources numériques $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ et $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ par (5.82) et (5.83).

Proposition 5.3.2. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.2.1, robuste, fully well-balanced et vérifie*

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}(\xi, \widetilde{w}, \widetilde{w}) = w, \forall \widetilde{w} \in \widetilde{\Omega}.$$

Démonstration. La consistance faible du solveur découle directement de la Proposition 5.3.1. Sa robustesse est assurée par la procédure de cut-off sur la variable h et le fait que la variable θ est simplement transportée. Pour vérifier le caractère fully well-balanced du solveur, on se donne un couple $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ à l'équilibre local (5.52). Ainsi, le détecteur d'équilibre \mathcal{E}_{LR} est nul. Les termes sources à l'équilibre vérifient par construction

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \left[hu^2 + \frac{gh^2\theta}{2} \right], \text{ et } \mathcal{S}^{hv}[Z] = [huv].$$

La procédure de cut-off ne s'applique pas à l'équilibre donc les hauteurs intermédiaires sont données par

$$h_L^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h,$$

$$h_R^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h.$$

Or $\Delta_{LR}^h = [h]$ lorsque $\mathcal{E}_{LR} = 0$, d'où $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$. De même, $\Delta_{LR}^v = [v]$ lorsque $\mathcal{E}_{LR} = 0$, et au vu de l'expression de \mathcal{S}^{hv} à l'équilibre on a

$$v_{L,R}^* = \frac{(hv)^{HLL}}{h^{HLL}} + \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL}} ([huv] - \lambda_R h_{R,L}^* [v]) = v_{L,R}.$$

Concernant q^* , on a

$$q^* = \frac{\left[hu^2 + \frac{gh^2\theta}{2} \right]}{\lambda_R - \lambda_L} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{\lambda_R - \lambda_L} = q.$$

Pour finir, pour la variable θ on distingue les états stationnaire au repos et en mouvement. Dans le cas d'un état stationnaire au repos, on a $\overline{hu} = 0$ et puisque $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$, on a $\hat{u} = 0$. Il en résulte que θ est dans une configuration well-balanced. Dans le cas d'un état stationnaire en mouvement, on a $\theta_L = \theta_R$ et donc la configuration well-balanced est automatiquement atteinte. Ainsi, le solveur vérifie bien

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}(\xi, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \begin{cases} w_L & \text{si } \xi < 0, \\ w_R & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

dès que $(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)$ est à l'équilibre local (5.52), donc est fully well-balanced. On vérifie facilement la dernière propriété énoncée. \square

5.3.5 Schéma final

Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}$ vérifie toutes les propriétés souhaitées. On en déduit celle du schéma de type Godunov qui en découle.

Théorème 5.3.1. *Sous la condition CFL (4.17), le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}$ mène à un schéma de type Godunov qui est robuste et well-balanced, au sens où il préserve les états stationnaires discrets correspondants à l'équilibre local donné par (5.52). De plus, le schéma s'écrit dans le formalisme volumes finis, en définissant le flux numérique*

$$\mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) = \left(\mathcal{F}^h, \mathcal{F}^{hu}, \mathcal{F}^{hv}, \mathcal{F}^{h\theta} \right)^T,$$

par

$$\mathcal{F}^h = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L), \quad (5.84)$$

$$\mathcal{F}^{hu} = \overline{hu^2} + \frac{gh^2}{2} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* u_R^* - h_R u_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* u_L^* - h_L u_L), \quad (5.85)$$

$$\mathcal{F}^{hv} = \overline{huv} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* v_R^* - h_R v_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* v_L^* - h_L v_L), \quad (5.86)$$

$$\mathcal{F}^{h\theta} = \overline{hu\theta} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) \theta_R + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \theta_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2} (\theta_R - \theta_L), \quad (5.87)$$

où

$$\widehat{hu} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L),$$

et en définissant les termes sources numériques

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = \left(0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z], 0 \right)^T,$$

par (5.82) et (5.83)

Démonstration. Il suffit d'utiliser les Propositions 5.3.2 et 4.4.2 pour conclure que le schéma de type Godunov est fully well-balanced et robuste.

En utilisant l'écriture du flux numérique donnée par la Proposition 4.4.1, un calcul similaire à celui fait dans la démonstration du Théorème 5.2.1 permet d'obtenir l'expression des flux numériques sous la forme (5.84)-(5.85)-(5.86). On peut retrouver l'expression du flux $\mathcal{F}^{h\theta}$ dans la démonstration du Théorème 5.2.2. \square

Le schéma que nous venons de construire préserve toutes les solutions stationnaires discrètes. Néanmoins, il présente quelques défauts. En effet, plusieurs problèmes de continuité ont été relevés lors de la définition des hauteurs et vitesses transverses intermédiaires. De plus, nous verrons dans la section 5.7 que pour certains cas-tests, le schéma LDF est moins précis que le schéma LT (voir le cas-test 5.7.3.3). Ainsi, nous proposons dans la section suivante de modifier l'évolution de la variable v dans le solveur de Riemann approché pour améliorer le comportement du schéma et se défaire de l'un des problèmes de continuité.

5.4 Schéma FWB avec linéarisation de la relation d'équilibre et transport de la vitesse transverse

On propose ici un autre solveur fully well-balanced, qui utilise les techniques présentées dans la construction des deux solveurs précédents. En effet, comme mentionné à la Remarque 5.3.1, la dérivée de v n'est pas mal définie à l'équilibre (contrairement à la variable h), donc on peut choisir un traitement différent de celui de la variable h dans le solveur de Riemann approché. Les variables h et u seront définies exactement comme dans la section 5.3, c'est-à-dire avec une linéarisation de la caractérisation d'équilibre et l'utilisation d'un détecteur d'équilibre pour éviter la division par $1 - \text{Fr}$. La variable v sera quant à elle traitée indépendamment, et suivra la configuration donnée dans le solveur de la section 5.2. Nous vérifierons que cela permet de préserver toutes les solutions stationnaires, dont la discrétisation est donnée par (5.52).

5.4.1 Solveur de Riemann approché

5.4.1.1 Variables h, q et terme source \mathcal{S}^{hu}

Les variables h et q sont traitées comme dans un solveur de Riemann approché à deux états intermédiaires (voir Figure 5.12). On a donc comme inconnues h_L^*, h_R^* et q^* . Les expressions obtenues à la section 5.3 dans le solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LDF}$ de h_L^*, h_R^*, q^* et $\mathcal{S}^{hu}[Z]$, permettent de retrouver une configuration well-balanced dès que $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local (5.52). On rappelle leur formulation ici :

$$h_L^* = \min \left(\max \left(h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h, \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \delta \right), \quad (5.88)$$

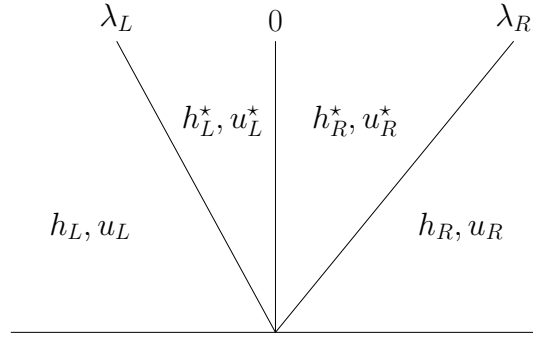


FIGURE 5.12 – Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h et u , similaire à un solveur à deux états intermédiaires.

$$h_R^* = \min \left(\max \left(h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta_{LR}^h, \delta \right), \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta \right), \quad (5.89)$$

$$q^* = q_{HLL} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{\lambda_R - \lambda_L}. \quad (5.90)$$

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \begin{cases} \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}\bar{\text{Fr}}[h]}{4\bar{h}} \frac{\left(\frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta] \right)^2}{(1 - \bar{\text{Fr}})^2 + \mathcal{E}_{LR}\Delta x^k}, & \text{si } \bar{\text{Fr}} \neq 1 \text{ ou } \mathcal{E}_{LR} \neq 0. \\ \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}}{4\bar{h}}[h]^3 & \text{si } \bar{\text{Fr}} = 1 \text{ et } \mathcal{E}_{LR} = 0. \end{cases} \quad (5.91)$$

5.4.1.2 Variables v , θ et terme source \mathcal{S}^{hv}

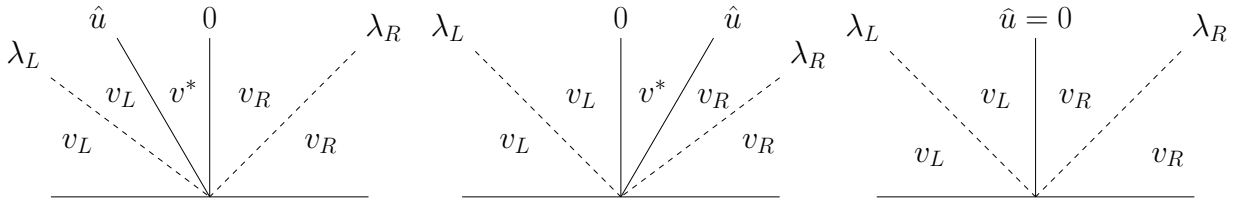


FIGURE 5.13 – Configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v .

On fait évoluer la variable v comme dans le solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LT}$ de la [sous-section 5.2.2](#) à l'aide de l'onde de vitesse \hat{u} en suivant la configuration décrite par la [Figure 5.13](#). Ainsi, on définit v^* par

$$v^* = \begin{cases} v_L - [\iota] & \text{si } \hat{u} > 0, \\ v_R + [\iota] & \text{si } \hat{u} < 0, \end{cases} \quad (5.92)$$

la vitesse \hat{u} par

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{1}{h_R^*} \left(\bar{h}u + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \bar{h}u + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) > 0, \\ \frac{1}{h_L^*} \left(\bar{h}u + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \bar{h}u + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) < 0, \\ 0 & \text{si } \bar{h}u + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) = 0, \end{cases} \quad (5.93)$$

et le terme source $\mathcal{S}^{hv}[Z]$ par

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -\bar{h}u[\iota] - \frac{[\iota]}{2} (\lambda_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L (h_L^* - h_L)). \quad (5.94)$$

La configuration well-balanced pour la variable v

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est atteinte si $\hat{u} = 0$ (voir Figure 5.13) ou bien si $v_R - v_L + [l] = 0$ (d'après la définition (5.92) de v^*). L'une de ces deux conditions est nécessairement vérifiée dès que $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local (5.52). Pour finir, La température est simplement transportée à la vitesse \hat{u} .

Par la suite, on notera $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}$ ce solveur faisant intervenir une linéarisation de la deuxième caractérisation d'équilibre (L), une onde de transport (T) pour approcher la variable v , et qui préserve tous les états stationnaires discrets (F). Les propriétés du solveur en lui-même sont obtenues exactement de la même façon que dans les démonstrations des Propositions 5.2.5 - 5.2.6 qui concernent le solveur LT et de la Proposition 5.3.2 qui concerne le solveur LDF. Ainsi, on donne sans démonstration le résultat suivant

Proposition 5.4.1. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}$ est faiblement consistant, robuste, fully well-balanced et vérifie*

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}(\xi, \tilde{w}, \tilde{w}) = w, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\Omega}.$$

Cela mène à un schéma de type Godunov avec des propriétés similaires.

5.4.2 Schéma final

Donnons à présent le schéma du type Godunov issu du solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}$.

Théorème 5.4.1. *Sous la condition CFL (4.17), le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}$ mène à un schéma de type Godunov robuste et well-balanced, au sens où il préserve les états stationnaires discrets correspondants à l'équilibre local donné par (5.52). De plus, le schéma s'écrit dans le formalisme volumes finis, en définissant le flux numérique*

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = (\mathcal{F}^h, \mathcal{F}^{hu}, \mathcal{F}^{hv}, \mathcal{F}^{h\theta})^T,$$

par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^h &= \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L), \\ \mathcal{F}^{hu} &= \overline{hu^2 + \frac{gh^2}{2}} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* u_R^* - h_R u_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* u_L^* - h_L u_L), \\ \mathcal{F}^{hv} &= \overline{huv} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) v_R + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) v_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2} (v_R - v_L + [l]), \\ \mathcal{F}^{h\theta} &= \overline{hu\theta} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) \theta_R + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \theta_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2} (\theta_R - \theta_L) \end{aligned}$$

où

$$\widehat{hu} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L),$$

et en définissant les termes sources numériques

$$\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z], 0)^T,$$

par (5.91) et (5.94).

Démonstration. Le schéma considéré hérite de la propriété fully well-balanced et du caractère robuste du solveur de Riemann approché utilisé, toujours d'après la Proposition 4.4.2. On renvoie aux démonstrations des Théorèmes 5.2.1 et 5.2.2 pour plus de détails sur les calculs des flux. \square

En modifiant l'évolution de la variable v dans le solveur de Riemann approché, nous avons construit un deuxième schéma fully well-balanced qui ne présente plus de discontinuité pour cette variable. De plus, on peut remarquer que le cas-test 5.7.3.3 pour lequel le schéma LDF induisait une erreur plus grande que le schéma LT est bien géré par le schéma LTF qui a un comportement similaire au schéma LT. On peut chercher à améliorer encore une fois ce schéma, puisque les variables h_L^* et h_R^* ont encore une définition discontinue. De

plus, l'expression du terme source \mathcal{S}^{hu} mène à des sauts dans les solutions approchées au voisinage de $\widetilde{\text{Fr}} = 1$, comme on peut le constater sur la [Figure 5.41](#) ou la [Figure 5.20](#). Nous allons tenter d'appliquer une autre approche pour améliorer ces deux points.

5.5 Schéma FWB avec quadratisation de la relation d'équilibre

Le schéma proposé dans cette section est issu d'une collaboration avec Victor Michel-Dansac de l'Université de Strasbourg et Christophe Berthon de l'Université de Nantes, et fait l'objet d'un article en préparation.

Pour le dernier schéma, on considère une fois encore un solveur de Riemann approché avec quatre ondes de vitesse λ_L , λ_R , 0 et \hat{u} , avec les variables h et u dans la configuration de la [Figure 5.12](#), et la variable v dans la configuration de la [Figure 5.13](#) qui fait intervenir l'onde \hat{u} . Cette fois, on choisit d'utiliser comme relation supplémentaire pour h non pas une linéarisation de la caractérisation d'équilibre en hu (5.7) qui s'écrit

$$g\bar{h}\bar{\theta}(1 - \widetilde{\text{Fr}})[h] + \frac{gh^2}{2}(\theta_R - \theta_L) = \mathcal{S}^{hu}[Z], \quad (5.95)$$

mais plutôt une discrétisation différente de la relation d'équilibre en hu

$$h\partial_x \frac{u^2}{2} + gh\theta\partial_x h + \frac{gh^2}{2}\partial_x \theta = fhv - gh\theta\partial_x z.$$

On choisit de discrétiser cette relation de la façon suivante

$$g\bar{h}\bar{\theta}(1 - \overline{\text{Fr}})[h] + \frac{gh^2}{2}[\theta] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\bar{\theta}[z], \quad (5.96)$$

où $\overline{\text{Fr}} = \frac{q^2\bar{h}}{g\bar{\theta}h_L^2h_R^2}$ est une discrétisation du carré du nombre de Froude. Cela correspond en fait à la relation de discrétisation de l'équilibre (5.52b) multipliée par \bar{h} . En suivant l'idée de [53], nous allons appliquer non pas une linéarisation de cette relation aux états intermédiaires, mais plutôt une "quadratisation". On pourrait simplement choisir de réaliser directement une quadratisation de la relation (5.95), mais nous verrons par la suite (Remarque 5.5.1) que cela mènerait à un problème de définition de \mathcal{S}^{hu} . Pour simplifier les calculs, on considérera que $\lambda_R = -\lambda_L = \lambda$, mais la procédure s'adapte au cas général.

5.5.1 Solveur de Riemann approché

On décrit la stratégie appliquée à chacune des variables, en commençant par la variable h .

5.5.1.1 Variable h

Relations utilisées Pour définir les hauteurs intermédiaires h_L^* et h_R^* , on utilise la relation de consistance en h donnée par

$$h_R^* + h_L^* = 2h^{HLL}, \quad (5.97)$$

et la relation d'équilibre (5.96) que l'on modifie en isolant le terme en $1 - \overline{\text{Fr}}$ et en divisant par $g\bar{h}\bar{\theta}$. Cela donne

$$(1 - \overline{\text{Fr}})(h_R - h_L) = \mathcal{S}^u, \quad (5.98)$$

où l'on a posé $\mathcal{S}^u = \frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\bar{\theta}}{\bar{\theta}}[z] - \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta]$.

Pour définir les inconnues h_L^* et h_R^* , on impose que ces inconnues vérifient non pas une linéarisation de (5.98), à l'instar de la technique utilisée dans le schéma de la [section 5.3](#), mais une "quadratisation" de (5.98) de la forme

$$(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu(h_L^* - h_L) - \nu(h_R^* - h_R))(h_R^* - h_L^*) = \mathcal{S}^u, \quad (5.99)$$

avec $\nu > 0$ un paramètre à fixer. Ce paramètre sera choisi notamment de façon à ce qu'à l'équilibre, on obtienne $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$. Résolvons le système (5.97)-(5.99). En posant $\mathcal{H} := \frac{h_R^* - h_L^*}{2}$, on obtient

$$h_L^* = h^{HLL} - \mathcal{H} \quad \text{et} \quad h_R^* = h^{HLL} + \mathcal{H}, \quad (5.100)$$

avec \mathcal{H} qui vérifie

$$-4\nu\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h]) - \mathcal{S}^u = 0. \quad (5.101)$$

Pour que cette équation admette au moins une solution, il suffit de choisir ν et \mathcal{S}^u de signes opposés, puisque cela implique que le discriminant $\Delta_{\mathcal{H}} = 4(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h])^2 - 16\nu\mathcal{S}^u$ est positif ou nul. Alors, les solutions du polynôme (5.101) sont données par

$$\mathcal{H}^{\pm} = \frac{1}{4\nu} \left(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h] \pm \sqrt{(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h])^2 - 4\nu\mathcal{S}^u} \right). \quad (5.102)$$

Il faut encore déterminer laquelle de ces deux solutions sera sélectionnée.

Définition de ν Premièrement, on aimerait retrouver le schéma HLL lorsque les termes sources sont nuls. Ainsi, d'après les expressions de h_L^* et h_R^* données par (5.100), on souhaite que \mathcal{H}^{\pm} tende vers 0 lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0. Or, si ν est indépendant de \mathcal{S}^u , on a

$$\lim_{\mathcal{S}^u \rightarrow 0} \mathcal{H}^{\pm} = \frac{1}{4\nu} \left(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h] \pm |1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h]| \right). \quad (5.103)$$

Cette limite est nulle si et seulement si \pm vaut $-\text{sgn}(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h])$. On pose alors

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\nu} \left(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h] - \text{sgn}(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h]) \sqrt{(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h])^2 - 4\nu\mathcal{S}^u} \right).$$

On s'intéresse maintenant à la propriété well-balanced. À l'équilibre, d'après (5.100) on a $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$ si et seulement si $\mathcal{H} = \frac{[h]}{2}$. On considère donc un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local. On sait que dans ce cas, la relation (5.98) est vérifiée, donc

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\nu} \left(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h] - \text{sgn}(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h]) \sqrt{(1 - \overline{\text{Fr}} - \nu[h])^2} \right).$$

Ainsi, $\mathcal{H} = \frac{[h]}{2}$ si et seulement si $\text{sgn}(1 - \overline{\text{Fr}} - \nu[h]) = \text{sgn}(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h])$ ou de façon équivalente

$$(1 - \overline{\text{Fr}} - \nu[h])(1 - \overline{\text{Fr}} + \nu[h]) \geq 0.$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si $|\nu| \leq \left| \frac{1 - \overline{\text{Fr}}}{[h]} \right|$. À l'équilibre, cela s'écrit aussi

$$|\nu| \leq \left| \frac{\mathcal{S}^u}{[h]^2} \right|, \quad (5.104)$$

toujours d'après la relation (5.98). La question qui se pose est comment choisir correctement le paramètre ν ? On a établi qu'il doit vérifier la condition (5.104), ainsi que $\text{sgn}(\nu) = -\text{sgn}(\mathcal{S}^u)$, afin que $\Delta_{\mathcal{H}}$ soit positif ou nul. On est donc amené à poser

$$\nu := -a \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{|\mathcal{S}^u|^\alpha}{|[h]|^\beta}, \quad (5.105)$$

avec $0 < a \leq 1$ et $\alpha > 0, \beta > 0$ à fixer. Cependant, avec cette définition, ν dépend de \mathcal{S}^u , donc le calcul de limite (5.103) qui a servi à sélectionner la solution adaptée parmi \mathcal{H}^{\pm} n'est plus valide. On va donc recommencer l'étude de \mathcal{H} , avec un paramètre ν de la forme (5.105).

5.5.1.2 Étude de \mathcal{H}

On suppose que le paramètre ν est donné par (5.105) où $0 < a \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$ sont des paramètres à fixer. Les solutions de (5.101) s'écrivent alors

$$\mathcal{H}^{\pm} = \frac{1}{4} \left([h] - \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{(1 - \overline{\text{Fr}})[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^\alpha} \pm \sqrt{\left([h] - \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{(1 - \overline{\text{Fr}})[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^\alpha} \right)^2 + \frac{4|[h]|^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right). \quad (5.106)$$

Remarquons que puisque β est positif, on a $\mathcal{H}^{\pm} = 0$ lorsque $[h] = 0$.

On souhaite que \mathcal{H} tende vers 0 lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0. Cette fois, ν dépend de \mathcal{S}^u . On va donc effectuer un développement limité de \mathcal{H} en \mathcal{S}^u afin de déterminer sa limite. Le cas $[h] = 0$ étant trivial, supposons que $[h] \neq 0$, et intéressons nous premièrement à la situation $1 - \overline{\text{Fr}} \neq 0$. On factorise l'expression précédente de \mathcal{H}^\pm pour faire apparaître une expression du type $\sqrt{1 + X}$ avec X qui tend vers 0 en même temps que \mathcal{S}^u . On pose d'abord pour alléger les calculs

$$\mathcal{T} = \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{(1 - \overline{\text{Fr}})[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^\alpha}, \quad (5.107)$$

ce qui donne

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{1}{4} \left([h] - \mathcal{T} \pm \sqrt{([h] - \mathcal{T})^2 + \frac{4|[h]^\beta|}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right),$$

que l'on factorise par $[h]$, pour obtenir

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{[h]}{4} \left(1 - \frac{\mathcal{T}}{[h]} \pm \text{sgn}([h]) \sqrt{\left(1 - \frac{\mathcal{T}}{[h]}\right)^2 + \frac{4|[h]^{\beta-2}|}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right).$$

Puisque $\frac{1}{\mathcal{T}}$ tend vers 0 lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0, on factorise le terme sous la racine par $\frac{\mathcal{T}^2}{[h]^2}$. Cela donne

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{[h]}{4} \left(1 - \frac{\mathcal{T}}{[h]} \pm \text{sgn}([h]) \left| \frac{\mathcal{T}}{[h]} \right| \sqrt{\left(1 - \frac{[h]}{\mathcal{T}}\right)^2 + \frac{4|[h]^\beta|}{a\mathcal{T}^2|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right).$$

En développant le carré sous la racine, on a bien une expression du type $\sqrt{1 + X}$, avec

$$X = -2\frac{[h]}{\mathcal{T}} + \frac{[h]^2}{\mathcal{T}^2} + \frac{4|[h]^\beta|}{a\mathcal{T}^2|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}},$$

qui tend vers 0 lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0. On utilise alors le développement limité en 0 de $\sqrt{1 + X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{1}{8}X^2 + O(X^3)$. En supposant que $\alpha \geq 1/2$, on s'aperçoit que la majorité des termes issus de ce développement limité sont dominés par $(\mathcal{S}^u)^{\alpha+1}$ lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0. On obtient alors

$$\sqrt{\left(1 - \frac{[h]}{\mathcal{T}}\right)^2 + \frac{4|[h]^\beta|}{a\mathcal{T}^2|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} = 1 - \frac{[h]}{\mathcal{T}} + O((\mathcal{S}^u)^{\alpha+1})$$

En réinjectant cette expression dans \mathcal{H}^\pm on trouve

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{[h]}{4} \left(1 - \frac{\mathcal{T}}{[h]} \pm \text{sgn}(\mathcal{T}) \left(\frac{\mathcal{T}}{[h]} - 1 \right) \right) + O(\mathcal{S}^u)$$

Il faut que $\pm = \text{sgn}(\mathcal{T})$ pour avoir $\mathcal{H}^\pm = O(\mathcal{S}^u)$ quand \mathcal{S}^u tend vers 0. Cela mène à la définition suivante de \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left([h] - \mathcal{T} + \text{sgn}((1 - \overline{\text{Fr}})\mathcal{S}^u) \sqrt{([h] - \mathcal{T})^2 + \frac{4|[h]^\beta|}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right) \quad (5.108)$$

où \mathcal{T} est donné par (5.107), et α est choisi tel que $\alpha \geq 1/2$.

On étudie maintenant ce que l'on obtient dans le cas $1 - \overline{\text{Fr}} = 0$. D'après la définition (5.106) on a

$$\mathcal{H}^\pm = \frac{1}{4} \left([h] \pm \sqrt{[h]^2 + \frac{4|[h]^\beta|}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right).$$

Si $\alpha < 1$ la limite quand \mathcal{S}^u tend vers 0 de \mathcal{H}^\pm existe et vérifie

$$\lim_{\mathcal{S}^u \rightarrow 0} \mathcal{H}^\pm = \frac{[h] \pm |[h]|}{4}.$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il faut que $\pm = -\text{sgn}[h]$. Le défaut de la définition de \mathcal{H} donnée par (5.108) est qu'elle ne vérifie pas cette condition. On choisit malgré tout de considérer cette définition qui redonne le schéma HLL lorsque les termes sources sont nuls dans la majeure partie des cas. On sélectionne un paramètre $\alpha < 1$ pour s'assurer que \mathcal{H}^\pm admette bien une limite finie lorsque $1 - \overline{\text{Fr}} = 0$, même si elle n'est pas nécessairement nulle.

On vérifie maintenant que la définition (5.108) de \mathcal{H} permet de retrouver un schéma well-balanced. A l'équilibre, on veut $h_R^* = h_R$ et $h_L^* = h_L$ donc $\mathcal{H} = \frac{[h]}{2}$. Or on sait aussi dans ce cas que $[h](1 - \overline{\text{Fr}}) = \mathcal{S}^u$, donc on a

$$\mathcal{T} = \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]},$$

d'où

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left[[h] - \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} + \text{sgn}([h]) \sqrt{\left([h] - \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} \right)^2 + \frac{4|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}}} \right].$$

En développant le carré dans la parenthèse et en réajustant les termes on obtient

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left[[h] - \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} + \text{sgn}([h]) \sqrt{\left([h] + \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} \right)^2} \right],$$

ce qui donne

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left([h] - \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} + \left([h] + \frac{|[h]^\beta}{a|\mathcal{S}^u|^{\alpha-1}[h]} \right) \right) = \frac{[h]}{2}.$$

Ces calculs sont valides dès que $\beta > 1$.

Pour conclure, l'expression (5.108) de \mathcal{H} , où \mathcal{T} est défini par (5.107), $a > 0$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$ et $\beta > 1$, permet de retrouver $h_L^* = h_L$ et $h_R^* = h_R$ à l'équilibre, et redonne le schéma HLL dans la plupart des cas lorsque les termes sources sont nuls. En pratique, on prendra $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/2$.

Pour finir, on applique la procédure de cut-off décrite à la section 5.1 pour assurer la positivité des hauteurs intermédiaires. Elles sont alors définies par

$$h_L^* = \min \left(\max(h^{HLL} - \mathcal{H}, \delta), \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \delta \right), \quad (5.109)$$

et

$$h_R^* = \min \left(\max(h^{HLL} + \mathcal{H}, \delta), \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \delta \right), \quad (5.110)$$

où

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \left[[h] - \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{(1 - \overline{\text{Fr}})|[h]^\frac{3}{2}}{a|\mathcal{S}^u|^\frac{1}{2}} - \text{sgn}((1 - \overline{\text{Fr}})\mathcal{S}^u) \sqrt{\left([h] + \text{sgn}(\mathcal{S}^u) \frac{(1 - \overline{\text{Fr}})|[h]^\frac{3}{2}}{a|\mathcal{S}^u|^\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{4|[h]^\frac{3}{2}}{a|\mathcal{S}^u|^\frac{1}{2}}} \right]. \quad (5.111)$$

En pratique, la paramètre a doit être une constante positive. Dans les cas-tests numériques, on posera la plupart du temps $a = 1$. Pour certains cas-tests, cette variable servira d'ajustement pour obtenir un bon comportement, en particulier lors des changements de régime. On revient plus en détail sur ce point dans la sous-section 5.5.4.

Variable q Pour la variable q , on utilise comme précédemment la relation de consistance en hu d'une part

$$h_R^* u_R^* + h_L^* u_L^* = 2(hu)_{HLL} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{\lambda},$$

et d'autre part la caractérisation d'équilibre

$$h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^* = q^*,$$

ce qui donne

$$q^* = (hu)_{HLL} + \frac{\mathcal{S}^{hu}[Z]}{2\lambda}. \quad (5.112)$$

Variables v et θ Concernant les variables v et θ , on utilise la configuration décrite dans la [sous-section 5.2.2](#) avec l'onde supplémentaire \hat{u} qui n'influence pas les variables h et q . On définit donc l'inconnue v^* par

$$v^* = \begin{cases} v_L - [\iota] & \text{si } \hat{u} > 0, \\ v_R + [\iota] & \text{si } \hat{u} < 0. \end{cases} \quad (5.113)$$

et \hat{u} par

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{1}{h_R^*} \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) > 0, \\ \frac{1}{h_L^*} \left(\overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) \right) & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) < 0, \\ 0 & \text{si } \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2} (h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2} (h_L^* - h_L) = 0. \end{cases} \quad (5.114)$$

La variable θ est transportée à la vitesse \hat{u} comme dans les trois schémas précédents.

Il reste à présent à donner une discrétisation fully well-balanced des termes sources.

5.5.2 Discrétisation des termes sources

Pour définir la discrétisation des termes sources, on a déjà établi à la [sous-sous-section 5.2.1.3](#) que lorsque la variable v est dans la configuration de la [Figure 5.13](#), le terme \mathcal{S}^{hv} doit être défini par

$$\mathcal{S}^{hv}[Z] = -\overline{hu}[\iota] - \frac{[\iota]}{2} (\lambda_R (h_R^* - h_R) + \lambda_L (h_L^* - h_L)). \quad (5.115)$$

afin que le solveur approché soit consistant avec le solveur exact.

Pour le terme source \mathcal{S}^{hu} , on considère $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local et on utilise la caractérisation d'équilibre

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = F^{hu}(w_R) - F^{hu}(\tilde{w}_L) = h_R u_R^2 + \frac{g h_R^2 \theta_R}{2} - h_L u_L^2 - \frac{g h_L^2 \theta_L}{2}.$$

En suivant les étapes de la [sous-section 5.3.3](#), on retrouve les mêmes expressions que précédemment, à savoir la relation (5.76)

$$(1 - \overline{\text{Fr}})[h] = \frac{\bar{v}}{g\bar{\theta}}[\iota] - \frac{\hat{\theta}}{\bar{\theta}}[z] + \frac{\bar{h}^2}{2\bar{h}\bar{\theta}}[\theta],$$

et l'expression (5.78) de \mathcal{S}^{hu}

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = g\bar{h}\bar{\theta} (1 - \overline{\text{Fr}})[h] + \frac{g\bar{\theta}\overline{\text{Fr}}}{4\bar{h}}[h]^3,$$

où l'on rappelle que $\overline{\text{Fr}} = \frac{q^2 \bar{h}}{g\bar{\theta} h_L^2 h_R^2}$. En injectant la première relation dans la seconde, on peut écrire cette approximation du terme source comme

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\hat{\theta}[z] + \frac{g\bar{\theta}\overline{\text{Fr}}}{4\bar{h}}[h]^3.$$

Puisqu'à l'équilibre, on a $\mathcal{H} = \frac{[h]}{2}$, on choisit de définir \mathcal{S}^{hu} par

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \bar{h}\bar{v}[\iota] - g\bar{h}\hat{\theta}[z] + 2\frac{g\bar{\theta}\overline{\text{Fr}}}{\bar{h}}\mathcal{H}^3. \quad (5.116)$$

Comparée à la définition (5.91) de $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ utilisée dans les deux solveurs fully well-balanced précédents, cette formulation présente l'avantage d'être relativement simple et de ne pas faire intervenir de détecteur d'équilibre.

Remarque 5.5.1.

1. En effectuant une quadratisation de la caractérisation d'équilibre (5.95) et en suivant les mêmes étapes, la définition de \mathcal{H} comporterait des termes en $\mathcal{S}^{hu}[Z]$ et on ne pourrait donc pas définir le terme \mathcal{S}^{hu} à partir de \mathcal{H} , comme on le fait ici. C'est pourquoi on a choisi de réaliser une quadratisation de la relation (5.96) à la place.
2. Si les termes sources sont nuls, alors \mathcal{H} l'est aussi, sauf dans le cas où $1 - \overline{\text{Fr}} = 0$. Ainsi, on retrouve dans la plupart des cas que $\mathcal{S}^{hu} = 0$ lorsque les termes source sont nuls.

Proposition 5.5.1. *Le terme source numérique $\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z], 0)$ défini par (5.116) et (5.115) est consistant avec le terme source continu au sens de la Définition 4.2.1.*

Démonstration. On a déjà montré dans la Proposition 5.2.1 que \mathcal{S}^{hv} est strictement consistant.

Concernant le terme \mathcal{S}^{hu} , on a montré que lorsque $\overline{\text{Fr}}$ est différent de 1, alors $\mathcal{H} = O(\mathcal{S}^u)$, et comme $\mathcal{S}^u = O([Z])$, on a $\mathcal{H}^3 = o([Z])$, et donc la stricte consistance de \mathcal{S}^{hu} . Lorsque $\overline{\text{Fr}} = 1$, on a $\mathcal{H} = \frac{[h]}{4}$, et donc

$$\mathcal{S}^{hu}[Z] = \overline{h}\overline{v}[l] - g\overline{h}\overline{\theta}[z] + \frac{g\overline{\theta}\overline{\text{Fr}}}{4h}[h]^3 = \mathcal{S}^{hu}(w) + o(|w_R - w| + |w_L - w|),$$

lorsque w_L et w_R tendent vers w , ce qui traduit la consistance (non stricte) de \mathcal{S}^{hu} . □

5.5.3 Propriétés du solveur de Riemann approché

On va montrer que le solveur avec une onde de transport (T) et une quadratisation de la seconde relation de caractérisation d'équilibre (Q) que l'on vient de construire a de bonnes propriétés, dont celle d'être fully well-balanced (F). On note $\widehat{\mathcal{W}}_R^{QTF}$ le solveur de Riemann approché dont les vitesses d'onde $\lambda_L, \lambda_R, \hat{u}$ sont définies par (5.3), (5.4), (5.30), les états intermédiaires h_L^*, h_R^*, q^*, v^* par (5.109), (5.110), (5.112), (5.113), où \mathcal{H} est donné par (5.111), et les termes sources numériques $\mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z]$ par (5.116), (5.115).

Proposition 5.5.2. *Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{QTF}$ est faiblement consistant au sens de la Définition 4.4.1, robuste, fully well-balanced, et vérifie la propriété suivante :*

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^{QTF}(\xi, \tilde{w}, \tilde{w}) = w, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{\Omega}.$$

Démonstration. A l'aide de la Proposition 5.5.1, on montre comme pour les schémas précédents que le solveur est consistant. La robustesse du solveur est assurée par la procédure de cut-off pour la variable h , et par le fait que la variable θ est simplement transportée.

Concernant le caractère fully well-balanced, on se donne un couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ à l'équilibre local (5.52). On a montré que dans ce cas, $\mathcal{H} = \frac{[h]}{2}$ et donc

$$h_L^* = h_{HLL} - \mathcal{H} = h_L,$$

et

$$h_R^* = h_{HLL} + \mathcal{H} = h_R.$$

Les relations sur les autres variables étant identiques à celles du solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^{LTF}$, on montre de la même façon que $q^* = q$, et que les variables v et θ sont nécessairement dans une configuration well-balanced. Ainsi, le solveur de Riemann approché QTF est fully well-balanced.

La dernière propriété se vérifie facilement et de façon similaire aux schémas précédents, notamment puisque si $\tilde{w}_L = \tilde{w}_R = \tilde{w} \in \tilde{\Omega}$, on a $\mathcal{H} = 0$ et donc $h_L^* = h_R^* = h$. □

5.5.4 Schéma final

Le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{QTF}$ vérifie toutes les propriétés souhaitées. On en déduit les celles du schéma de type Godunov qui lui est associé.

Théorème 5.5.1. *Sous la condition CFL (4.17), le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^{QTF}$ mène à un schéma de type Godunov robuste et well-balanced, au sens où il préserve les états stationnaires discrets correspondants à l'équilibre local donné par (5.52). De plus, le schéma s'écrit dans le formalisme volumes finis, en définissant le flux numérique*

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = \left(\mathcal{F}^h, \mathcal{F}^{hu}, \mathcal{F}^{hv}, \mathcal{F}^{h\theta} \right)^T,$$

par

$$\mathcal{F}^h = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L), \quad (5.117)$$

$$\mathcal{F}^{hu} = \overline{hu^2} + \frac{gh^2}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* u_R^* - h_R u_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* u_L^* - h_L u_L), \quad (5.118)$$

$$\mathcal{F}^{hv} = \overline{huv} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R)v_R + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)v_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2}(v_R - v_L + [\iota]), \quad (5.119)$$

$$\mathcal{F}^{h\theta} = \overline{hu\theta} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R)\theta_R + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L)\theta_L - \frac{|\widehat{hu}|}{2}(\theta_R - \theta_L) \quad (5.120)$$

où

$$\widehat{hu} = \overline{hu} + \frac{\lambda_R}{2}(h_R^* - h_R) + \frac{\lambda_L}{2}(h_L^* - h_L),$$

et en définissant les termes sources numériques

$$\mathcal{S}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R)[Z] = (0, \mathcal{S}^{hu}[Z], \mathcal{S}^{hv}[Z], 0)^T,$$

par (5.45) et (5.47)

Démonstration. Il suffit d'utiliser les Propositions 4.4.2 et 5.5.2 pour établir que le schéma est fully well-balanced et robuste.

D'autre part, en utilisant la Proposition 4.4.1, on obtient que le flux numérique s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) &= \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) & \text{si } \hat{u} = 0, \\ \mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) &= \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_R^*), & \text{si } \hat{u} > 0, \\ \mathcal{F}(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R) &= \frac{F(w_L) + F(w_R)}{2} + \frac{\lambda_R}{2}(w_R^* - w_R) + \frac{\lambda_L}{2}(w_L^* - w_L) + \frac{\hat{u}}{2}(w^* - w_L^*) & \text{si } \hat{u} < 0. \end{aligned}$$

Pour établir l'expression du flux \mathcal{F}^{hv} , il suffit de remarquer que d'après la Définition (5.30) dans le cas $\hat{u} > 0$, on a

$$(w^* - w_R^*)^{h\theta} = h_R^*(\theta_L - \theta_R) \text{ et } h_R^* \hat{u} = \widehat{hu},$$

et dans le cas $\hat{u} < 0$, on a

$$(w^* - w_R^*)^{h\theta} = h_L^*(\theta_R - \theta_L) \text{ et } h_L^* \hat{u} = \widehat{hu},$$

ce qui permet de retrouver l'expression (5.120) du flux $\mathcal{F}^{h\theta}$. Pour les flux \mathcal{F}^h , \mathcal{F}^{hu} et \mathcal{F}^{hv} , on renvoie à la démonstration du Théorème 5.2.1 qui donne les flux du schéma well-balanced sans température. \square

L'utilisation d'une quadratisation au lieu d'une linéarisation de la relation d'équilibre (5.96) a permis d'obtenir un nouveau schéma pour lequel la discrétisation du terme source \mathcal{S}^{hu} est plus simple. Néanmoins, le problème de définition lorsque $\overline{\text{Fr}} = 1$ est toujours présent, et intervient cette fois dans la définition de \mathcal{H} . Ici, cela se traduit par le fait que \mathcal{H} ne tend vers 0 lorsque \mathcal{S}^u tend vers 0 et que $\overline{\text{Fr}} = 1$. Cela aboutit encore une fois à une consistance non stricte du terme source discret $\mathcal{S}^{hu}[Z]$. C'est un problème récurrent dans la construction de schémas fully well-balanced. En pratique, nous verrons dans les exemples numériques qu'il est possible d'ajuster le comportement du schéma QTF au voisinage de $\overline{\text{Fr}} = 1$ en jouant sur la valeur du paramètre a . Cela peut s'expliquer par le fait que dans l'expression de \mathcal{H} , les termes faisant intervenir $1 - \overline{\text{Fr}}$ sont divisés par a . Ainsi, ce paramètre permet de contre-balancer le poids des termes en $1 - \overline{\text{Fr}}$.

5.6 Extension des schémas à l'ordre 2

L'objectif de cette section est de se donner une méthode qui permet d'étendre n'importe lequel des schémas d'ordre un décrits précédemment à l'ordre deux, tout en préservant leur caractère well-balanced ou fully well-balanced. Pour cela, on commencera par rappeler le contexte de la méthode MUSCL introduite par VAN LEEB [68], dont on établira les limites vis-à-vis du caractère well-balanced. On proposera alors une version alternative initialement introduite dans [55] (voir aussi [56] et [32]) qui utilise des détecteurs d'équilibre, et on détaillera son obtention. La différence majeure avec [55] est le rajout d'un terme source centré dans le schéma d'ordre

deux, ce qui permet de prendre en compte les termes sources lorsque leurs sauts aux interfaces du maillage sont nuls, comme préconisé dans [13]. L'ordre deux en temps est obtenu par une méthode de Runge-Kutta classique d'ordre deux décrite dans [8].

On rappelle que tous les schémas construits jusqu'à présent se réécrivent dans le formalisme volume finis comme

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n) \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \mathcal{S}(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i) \right), \quad (5.121)$$

à condition que la CFL (4.17) donnée par

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} |\lambda_{L,R}^{i+1/2}| \leq \frac{1}{2},$$

soit vérifiée.

5.6.1 Méthode MUSCL stantard

L'idée principale de la méthode MUSCL est d'étendre des schémas d'ordre un à l'ordre deux en appliquant les flux et termes sources d'ordre un à une reconstruction affine de la solution. On commence par rappeler la procédure standard de reconstruction. On se donne une approximation constante par morceaux au temps t^n ,

$$\bar{w}_{\Delta x}^1(x) = \bar{w}_i^n \text{ si } x \in K_i,$$

et on reconstruit la solution sur chaque cellule en considérant une fonction affine donnée par

$$\bar{w}_{\Delta x}^2(x) = \bar{w}_i^n + \sigma_i^n(x - x_i),$$

où σ_i^n est un vecteur de pentes à déterminer. Cette reconstruction est faite sur les variables conservatives w et les termes sources Z . On souligne d'ores et déjà qu'en général, on choisit de reconstruire une fonction de Z plutôt que Z lui-même afin de préserver des états stationnaires. On note ensuite $\bar{w}_i^{n,\pm}$ les valeurs de la reconstruction affine sur la cellule K_i aux interfaces (voir Figure 5.14), ce qui donne

$$\bar{w}_i^{n,\pm} = \bar{w}_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^n. \quad (5.122)$$

Pour éviter les oscillations numériques, il est bien connu (voir par exemple [48]) qu'une procédure de limitation

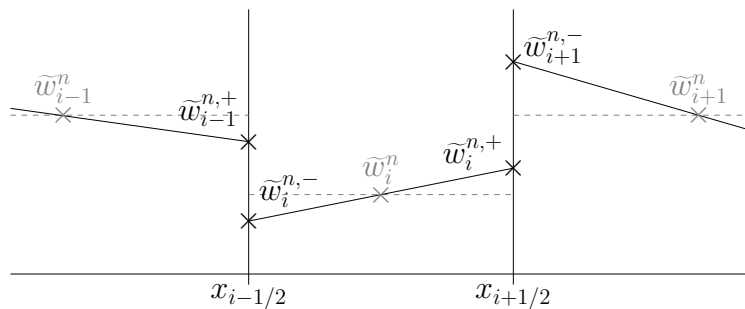


FIGURE 5.14 – Reconstruction de la solution sur chaque cellule. En gris clair et pointillés, la solution constante par cellule. En bleu, les reconstructions affines.

des pentes doit être appliquée. On choisit de considérer la limitation minmod sur chacune des composantes du vecteur σ_i^n . Si on note \mathcal{V} l'une des variables reconstruites et $\sigma_i^{n,\mathcal{V}}$ la pente associée, on pose alors

$$\sigma_i^{n,\mathcal{V}} = \text{minmod} \left(\frac{\mathcal{V}_i^n - \mathcal{V}_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\mathcal{V}_{i+1}^n - \mathcal{V}_i^n}{\Delta x} \right),$$

où la fonction minmod est définie par

$$\text{minmod}(\sigma_L, \sigma_R) = \begin{cases} \min(\sigma_L, \sigma_R) & \text{si } \sigma_L > 0 \text{ et } \sigma_R > 0, \\ \max(\sigma_L, \sigma_R) & \text{si } \sigma_L < 0 \text{ et } \sigma_R < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.123)$$

On impose une limitation supplémentaire sur les composantes $\sigma_i^{n,h}$, et $\sigma_i^{n,h\theta}$ lorsqu'une température variable est prise en compte, afin d'assurer que les hauteurs et températures reconstruites $h_i^{n,\pm}$ et $\theta_i^{n,\pm}$ soient positives. On montre facilement que cela est vérifié dès lors que les pentes satisfont

$$\left| \sigma_i^{n,h} \right| < \frac{2h_i^n}{\Delta x}, \quad \text{et} \quad \left| \sigma_i^{n,h\theta} \right| < \frac{2h_i^n \theta_i^n}{\Delta x}.$$

On définit maintenant le schéma numérique MUSCL d'ordre 2, à partir du schéma d'ordre un (5.121), par

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-}) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-})(Z_i^- - Z_{i-1}^+) + \mathcal{S}_c(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+})(Z_i^+ - Z_i^-) + \mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-})(Z_{i+1}^- - Z_i^+) \right). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Le terme $\mathcal{S}_c(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est un terme source centré ajouté pour prendre en compte les termes sources lorsque leurs sauts aux interfaces sont nuls, comme le mentionne [13]. Pour illustrer plus clairement la nécessité d'ajouter ce terme source centré, on peut considérer l'exemple suivant.

Exemple 5.6.1. On considère le modèle de Saint-Venant (SW), on se donne une topographie $z(x)$ affine, et on pose $h_0(x) = 1, u_0(x) = 0$. Il ne s'agit pas d'un état stationnaire. Pour une telle condition initiale, les états reconstruits vérifient $w_i^{n,\pm} = w_i^n$ et $Z_i^+ = Z_{i+1}^-$. Ainsi, les couples d'états reconstruits $(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-})$ sont à l'équilibre local. Supposons que l'on n'ait pas de terme source centré dans le schéma d'ordre deux (5.124), autrement dit, prenons $\mathcal{S}_c(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = 0$. Le schéma d'ordre deux s'écrit alors dans cette situation

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-}) \right).$$

Si le schéma d'ordre un utilisé est well-balanced, on obtient

$$w_i^{n+1} = w_i^n,$$

ce qui n'est pas cohérent avec le fait que la condition initiale et la topographie affine ne sont pas à l'équilibre. Sans terme source centré, la contribution de la topographie est effacée, puisque la reconstruction affine d'une fonction continue n'admet pas de saut aux interfaces du maillage. Le terme source centré fait intervenir les couples $(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+})$ qui eux ne sont pas à l'équilibre dans cet exemple puisque, $Z_i^+ - Z_i^- = \Delta x$.

Plusieurs définitions d'un tel terme sont possibles. Nous choisissons de présenter ici une façon naturelle de l'obtenir, en écrivant le schéma MUSCL (5.124) comme une combinaison convexe de schémas d'ordre un appliqués aux états reconstruits sur des demi-cellules (voir Figure 5.15). En effet, posons

$$w_i^{n+1,+} = w_i^{n,+} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+}) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+})(Z_i^+ - Z_i^-) + \mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-})(Z_{i+1}^- - Z_i^+) \right),$$

et

$$w_i^{n+1,-} = w_i^{n,-} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+}) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-}) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-})(Z_i^- - Z_{i-1}^+) + \mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+})(Z_i^+ - Z_i^-) \right).$$

En faisant la moyenne arithmétique de ces deux états on obtient

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} = \frac{w_i^{n,-} + w_i^{n,+}}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-}) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-}) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1}^{n,+}, \tilde{w}_i^{n,-})(Z_i^- - Z_{i-1}^+) + 2\mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,-}, \tilde{w}_i^{n,+})(Z_i^+ - Z_i^-) + \mathcal{S}(\tilde{w}_i^{n,+}, \tilde{w}_{i+1}^{n,-})(Z_{i+1}^- - Z_i^+) \right). \end{aligned} \quad (5.125)$$

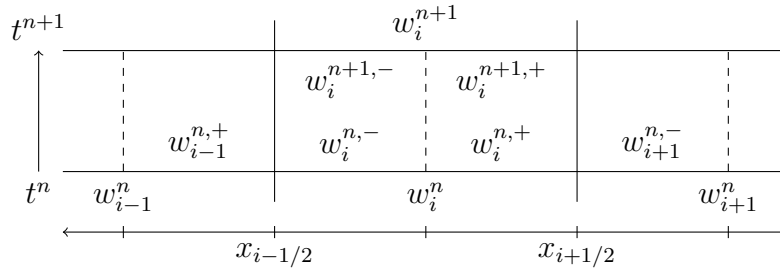


FIGURE 5.15 – Schéma d'ordre 2 MUSCL. On considère les reconstructions de la solution sur des demi-cellules.

En supposant que la reconstruction est conservative, c'est-à-dire que $\frac{w_i^{n,-} + w_i^{n,+}}{2} = w_i^n$, le schéma (5.125) s'écrit sous la forme (5.124) en définissant le terme source centré par

$$\mathcal{S}_c(\bar{w}_i^{n,-}, \bar{w}_i^{n,+}) = 2\mathcal{S}(\bar{w}_i^{n,-}, \bar{w}_i^{n,+}).$$

Considérer le schéma MUSCL d'ordre deux comme une combinaison convexe de schémas d'ordre un permet d'obtenir facilement de bonnes propriétés, à condition que la procédure de reconstruction coche plusieurs critères.

Définition 5.6.1.

— Une reconstruction du type (5.122) est dite conservative si

$$\frac{w_i^{n,-} + w_i^{n,+}}{2} = w_i^n.$$

— Une reconstruction du type (5.122) est dite robuste si pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$w_i^n \in \Omega \Rightarrow w_i^{n,\pm} \in \Omega.$$

— On dit qu'une reconstruction du type (5.122) est well-balanced si pour tout état stationnaire discret $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, les couples $(\bar{w}_i^+, \bar{w}_{i+1}^-)$ et $(\bar{w}_i^-, \bar{w}_i^+)$ sont à l'équilibre local pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Grâce à l'écriture sous forme de combinaison convexe (5.125) du schéma d'ordre deux, on montre facilement qu'il est robuste et qu'il préserve les états stationnaires discrets pour une reconstruction et un schéma d'ordre un bien choisis. On a le résultat classique (voir [25, 13]) suivant.

Théorème 5.6.1. *On considère une reconstruction conservative, robuste et well-balanced. Alors, sous la condition CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\left| \lambda^\pm(\bar{w}_i^{n,-}, \bar{w}_i^{n,+}) \right|, \left| \lambda^\pm(\bar{w}_i^{n,+}, \bar{w}_{i+1}^{n,-}) \right| \right) \leq \frac{1}{4},$$

le schéma d'ordre deux (5.125) issu d'un schéma d'ordre un robuste et well-balanced est également robuste et well-balanced.

On a déjà mentionné qu'une simple sur-limitation des pentes suffit pour avoir une reconstruction robuste. Cependant, une reconstruction conservative qui préserve tous les états stationnaires est difficile à obtenir. Si l'on reconstruit les variables conservatives h , hu , hv et $h\theta$ (lorsque la température est supposée non constante), la seule marge de manœuvre se trouve dans la reconstruction des variables sources Z . Si l'on souhaite préserver les états d'équilibre au repos à température constante, dont la discrétisation est donnée par (5.10), il suffit de reconstruire la variable ι et la variable $g\theta(h+z) + V$ avec V tel que $[V] = \bar{v}[\iota]$. Par contre, pour préserver la discrétisation des états stationnaires en mouvement donnée par (5.52), il faut reconstruire les variables $\frac{(hu)^2 + (hv)^2}{2h^2} + g\theta(h+z)$ et $v + \iota$ dans le cas θ constant. Ainsi, les variables à reconstruire ne sont pas les mêmes si l'on souhaite préserver les états stationnaires au repos ou les états stationnaires en mouvement. Or on rappelle que les schémas fully well-balanced ont pour but de préserver tout les états stationnaires à la fois. Si l'on inclut une température variable, alors il devient d'autant plus complexe de définir ce qu'il faut reconstruire pour préserver les états stationnaires au repos.

Pour pallier cette difficulté, nous avons choisi d'utiliser la méthode introduite dans [55] basée sur un détecteur d'équilibre, qui permet de retrouver un schéma d'ordre deux fully well-balanced.

5.6.2 Méthode MUSCL modifiée

Le principe général de la méthode proposée dans [55, 54] est de considérer le schéma d'ordre deux lorsque l'on est loin d'un état stationnaire pour augmenter la précision, et s'en remettre au schéma d'ordre un lorsque l'on est proche un d'état d'équilibre, ce qui garantit au schéma d'être fully well-balanced.

La difficulté est de définir ce que l'on considère comme être proche ou loin d'un état stationnaire. Pour cela, on introduit une fonction continue croissante k à valeur dans $[0, 1]$ telle que $k(0) = 0$ et $k \approx 1$ loin de 0. On choisit la fonction suivante

$$k(x) = \frac{x^2}{x^2 + \Delta x^2}.$$

On posera $k_i^n = k(\mathcal{E}_i^n)$, où $\mathcal{E}_i^n = \mathcal{E}(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n) + \mathcal{E}(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n)$ utilise la définition (5.53) et détecte si deux couples successifs $(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n)$ et $(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n)$ sont simultanément à l'équilibre local.

Les états reconstruits sont maintenant définis comme une combinaison convexe entre la reconstruction affine (5.122) et les états constants par cellule

$$\bar{w}_i^{n,\pm} = (1 - k_i^n) \bar{w}_i^n + k_i^n \left(\bar{w}_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^n \right) = \bar{w}_i^n \pm k_i^n \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^n \quad (5.126)$$

On peut aussi considérer cela comme l'ajout d'une limitation supplémentaire à la reconstruction (5.122) qui utilise le détecteur d'équilibre k_i^n . Pour un état stationnaire discret, on a $k_i^n = 0$ et la reconstruction redonne les états constants $\bar{w}_i^{n,\pm} = \bar{w}_i^n$. Loin de l'équilibre et pour des solutions régulières, on obtient $\bar{w}_i^{n,\pm} = \bar{w}_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \sigma_i^n + O(\Delta x^3)$ quand Δx tend vers 0, ce qui signifie que la perturbation ajoutée à la reconstruction d'ordre deux habituelle est suffisamment petite pour obtenir l'ordre voulu. On reconstruit les variables conservatives h , hu , hv , éventuellement $h\theta$, ainsi que les variables sources z et ι .

On utilise alors le schéma MUSCL (5.125) où les états reconstruits sont définis par (5.126). Le théorème suivant montre que le schéma d'ordre deux qui découle de cette procédure est well-balanced et préserve la positivité de h sous une condition CFL d'ordre deux.

Théorème 5.6.2. *Sous la condition CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left(\left| \lambda^\pm(\bar{w}_i^{n,-}, \bar{w}_i^{n,+}) \right|, \left| \lambda^\pm(\bar{w}_i^{n,+}, \bar{w}_{i+1}^{n,-}) \right| \right) \leq \frac{1}{4},$$

le schéma d'ordre deux (5.125) utilisant la reconstruction (5.126) préserve les mêmes états stationnaires que le schéma d'ordre un (5.121) dont il est issu et hérite de sa robustesse.

Démonstration. On considère un état d'équilibre discret $(\bar{w}_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ que le schéma d'ordre un peut préserver. Par définition, on a $k_i^n = 0$ pour tout i . Ainsi, les variables reconstruites vérifient $\bar{w}_i^{n,+} = \bar{w}_i^{n,-} = \bar{w}_i^n$ et $Z_i^{n,+} = Z_i^{n,-} = Z_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ainsi le schéma d'ordre deux se réécrit

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n) \right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\bar{w}_{i-1}^n, \bar{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \mathcal{S}(\bar{w}_i^n, \bar{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i) \right).$$

Ceci n'est rien d'autre que le schéma d'ordre un qui, pour une telle solution, vérifie $w_i^{n+1} = w_i^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Concernant le caractère robuste du schéma, il suffit de rappeler que le schéma d'ordre deux est une combinaison convexe de schémas d'ordre un. Ainsi, si le schéma d'ordre un est robuste, on a nécessairement que $\bar{w}_i^{n+1} \in \tilde{\Omega}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ \square

Remarque 5.6.1. Une autre possibilité que celle qui a été proposée ici et qui permettrait de préserver tous les états stationnaires à l'ordre deux consisterait à détecter si $u_{i-1}^n = u_i^n = u_{i+1}^n = 0$ ou non, puis à choisir quelles variables reconstruire. Pour le cas θ constant, si la condition est vérifiée, on utilise la reconstruction well-balanced pour les états stationnaires au repos, à savoir $g(h+z) + V$ et ι . Sinon on reconstruit les variables préservées par les états stationnaires en mouvement, données par $\frac{(hu)^2 + (hw)^2}{2h^2} + g(h+z)$ et $v + \iota$. Cela fait tout de même intervenir une forme de détecteur mais qui présenterait l'avantage de ne pas dépendre du choix de la discrétisation des états stationnaires.

5.7 Résultats numériques

Dans cette partie, on présente plusieurs cas-tests numériques qui ont été utilisés pour vérifier les résultats énoncés précédemment et comparer les schémas proposés. Les différents schémas ont été codés avec le langage

Fortran. De nombreuses expérimentations ont été menées afin de tester le comportement des schémas selon les spécificités du modèle étudié. C'est pourquoi cette section sera découpée de la façon suivante : la première partie sera consacrée à l'application du schéma pour le modèle de Saint-Venant dit SW avec topographie, sans force de Coriolis, à température constante. Dans la seconde partie, on prendra en compte une température variable, ce qui revient à appliquer les schémas sur le modèle TSW. Dans la troisième partie, on prendra en compte la force de Coriolis (modèle RSW) et on terminera en prenant en compte à la fois la force de Coriolis et une température variable (modèle TRSW). On proposera à chaque fois des cas-tests permettant d'observer le comportement des différents schémas pour des états stationnaires au repos, en mouvement, et pour des solutions discontinues. Enfin, on exposera dans une cinquième et dernière partie des exemples permettant de valider numériquement l'ordre des schémas utilisant la méthode MUSCL modifiée, présentée dans la [section 5.6](#). Sauf mention contraire, les conditions de bord utilisées sont des conditions de Neumann homogènes et on utilisera 200 cellules pour discrétiser les domaines considérés. Sur les figures, on tracera les solutions approchées seulement en quelques points afin d'améliorer leur lisibilité. Ainsi, on représentera un point sur deux ou un point sur quatre, sauf sur les figures zoomées et les cas-tests où l'on s'intéresse particulièrement à la qualité d'approximation des chocs.

Pour vérifier le caractère well-balanced des schémas, on sera amené à utiliser le détecteur d'équilibre (5.53). On définit un détecteur d'équilibre global par

$$\mathcal{E}_\infty(t^n) := \max_{1 \leq i \leq N} \mathcal{E}(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n),$$

qui est nul si et seulement si la suite $(\tilde{w}_i^n)_{1 \leq i \leq N}$ est une solution stationnaire discrète, pour un temps t^n fixé. On sera également amené à calculer les erreurs L^1 et L^∞ discrètes entre solutions approchées et solution exacte, que l'on définit par

$$L^1 : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |w_i - w_i^{ex}|, \quad L^\infty : \max_{1 \leq i \leq N} |w_i - w_i^{ex}|,$$

où w_i désigne une approximation de la solution et w_i^{ex} la solution exacte discrétisée au temps T_{\max} sur la cellule K_i . La solution exacte sera toujours discrétisée de façon naïve, c'est-à-dire en posant $w_i^{ex} = w^{ex}(x_i, T_{\max})$ où w^{ex} désigne la solution exacte continue.

Certaines solutions analytiques présentées sur les figures ci-dessous ont été obtenues à l'aide du logiciel SWASHES [24].

5.7.1 Modèle SW

Les cas-tests numériques qui suivent sont utilisés observer les différents schémas appliqués au modèle de Saint-Venant. Ils ne font pas intervenir la force de Coriolis, présentent une vitesse transverse v nulle et utilisent une température θ constante égale à 1. La topographie quant à elle peut varier. Ainsi, on ne représentera que les variables h et hu et les solutions approchées obtenues par les schémas LT, LTF et QTF pour ne pas surcharger les figures, puisque les schémas LDF et LTF sont exactement les mêmes dans ces conditions.

5.7.1.1 Préservation d'un lac au repos

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$5.55E - 17$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$
LDF	$5.55E - 17$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$
LTF	$5.55E - 17$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$
QTF	$5.55E - 17$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$	$0.00E + 00$

TABLEAU 5.1 – Modèle SW : Préservation du lac au repos 5.7.1.1. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$.

Ce cas-test est effectué pour vérifier que l'équilibre du lac au repos est bien préservé numériquement par les quatre schémas numériques. On se place sur l'intervalle $[0, 25]$ et on pose $g = 1$. La topographie z est une bosse

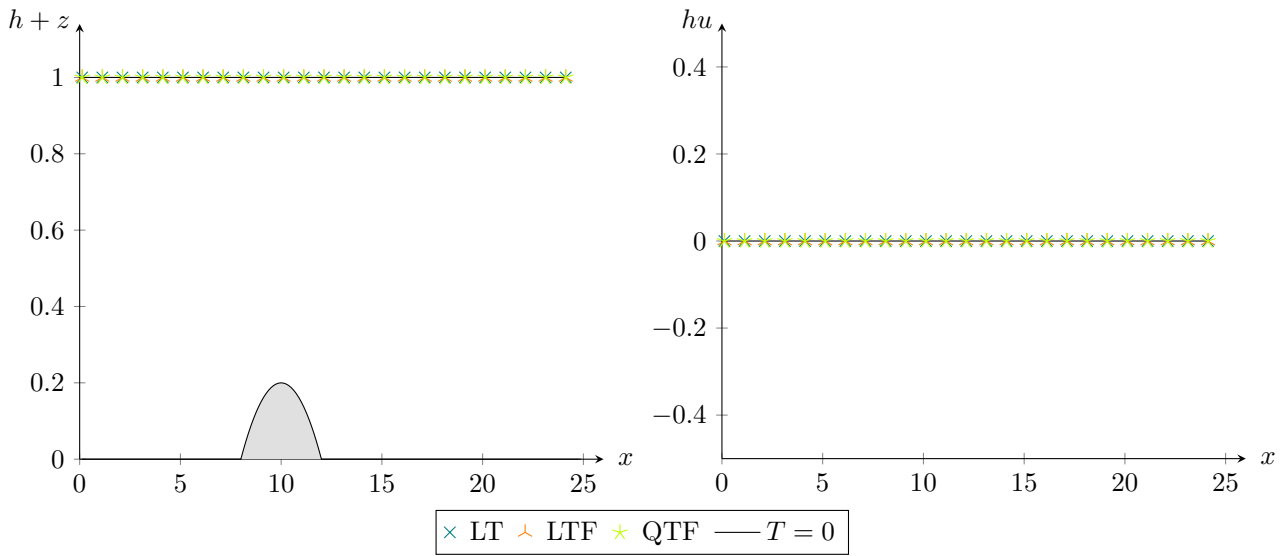


FIGURE 5.16 – Modèle SW : Préservation d’un lac au repos 5.7.1.1. Surface libre(gauche) et débit (droite). Cet état stationnaire est préservé par les trois schémas.

dont l’expression est donnée par

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 12, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.127)$$

La vitesse u est nulle et la hauteur h vérifie $h + z = 1$.

Les résultats de la Figure 5.16 obtenus pour $T_{\max} = 10$ montrent que les quatre schémas préservent qualitativement cette solution. Quantitativement, les calculs des erreurs L^1 et L^∞ présentées dans le Tableau 5.1 entre les solutions approchées et la solution exacte montrent que la solution est préservée avec une très bonne précision.

5.7.1.2 Petite perturbation d’un lac au repos

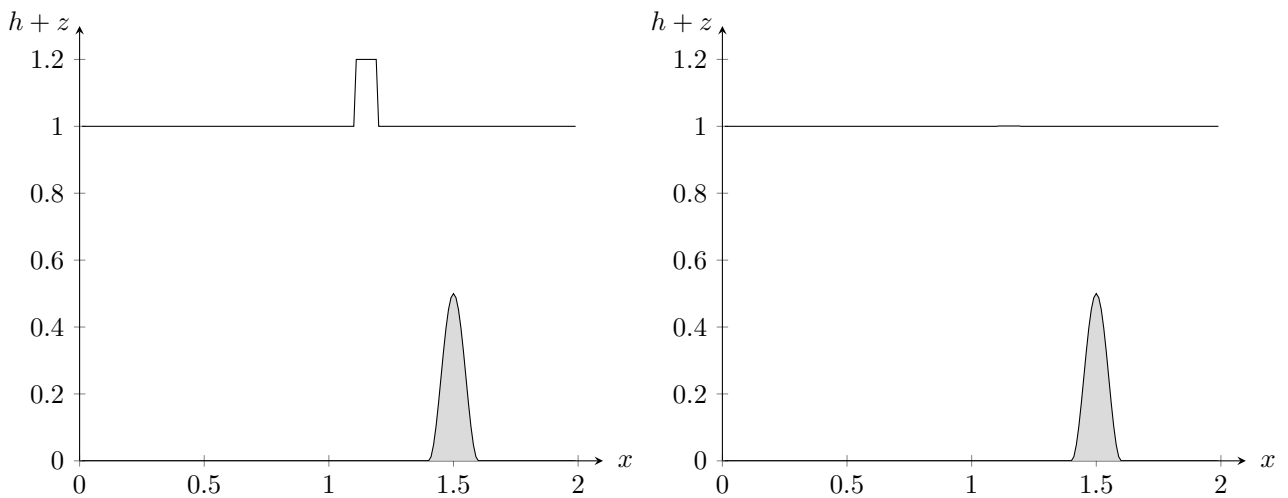


FIGURE 5.17 – Modèle SW : Petite perturbation d’un lac au repos 5.7.1.2. Surfaces libres initiales pour $\epsilon = 0.2$ (gauche) et $\epsilon = 0.001$ (droite).

On présente maintenant un cas-test simple issu de [47, 58, 69] qui a pour but de motiver l’utilisation de schémas well-balanced. On considère un lac au repos sur le domaine $[0, 2]$, avec $g = 1$, où la topographie est

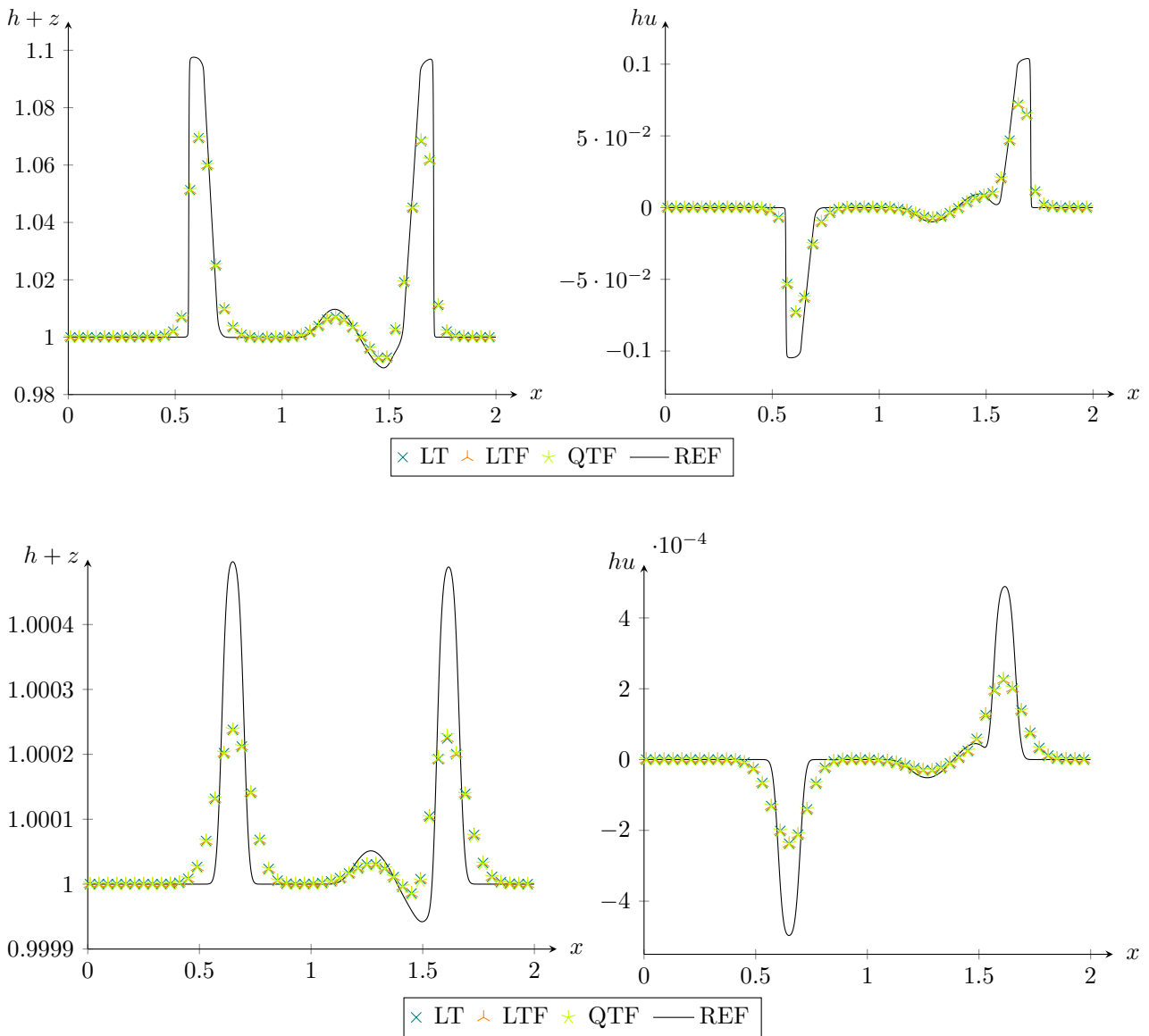


FIGURE 5.18 – Modèle SW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.1.2 : surface libre (à gauche) et débit (à droite) pour les paramètres $\varepsilon = 0.2$ (haut) et $\varepsilon = 0.001$ (bas).

donnée par

$$z(x) = \begin{cases} 0.25(\cos(10\pi(x-1.5))+1) & \text{si } 1.4 \leq x \leq 1.6, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où la hauteur vérifie $h+z=1$.

On perturbe cet état stationnaire, en introduisant une erreur $\varepsilon > 0$ dans la définition de la hauteur sur un petit intervalle. Ainsi, la variable h suit plutôt la définition suivante

$$h(x) = \begin{cases} 1 - z(x) + \varepsilon & \text{si } 1.1 \leq x \leq 1.2, \\ 1 - z(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces conditions initiales mènent à la propagation de deux ondes dans des directions opposées. Au bout d'un certain temps, les ondes sortent du domaine $[0, 2]$ et on retrouve un lac au repos. Pour ce genre de problème, les schémas numériques non well-balanced présentent des oscillations numériques (voir [47]).

Les conditions initiales pour les perturbations $\varepsilon = 0.2$ et $\varepsilon = 0.001$ sont représentées sur la Figure 5.17. On

présente sur la [Figure 5.18](#) les résultats obtenus au temps $T_{\max} = 0.5$. Comme attendu, aucun des quatre schémas ne produit d'oscillation numérique. Les ondes obtenues ont la même vitesse que la solution de référence calculée avec le schéma LT pour 3000 cellules. Les amplitudes des bosses sont du même ordre, bien que légèrement inférieures à la solution de référence à cause de la diffusion numérique. Un ordre de précision du schéma plus élevé est requis pour obtenir des amplitudes similaires à [69]. Après un temps $T_{\max} = 1$, les ondes sortent du domaine $[0, 2]$ et on retrouve un lac au repos.

5.7.1.3 Capture d'états stationnaires en mouvement

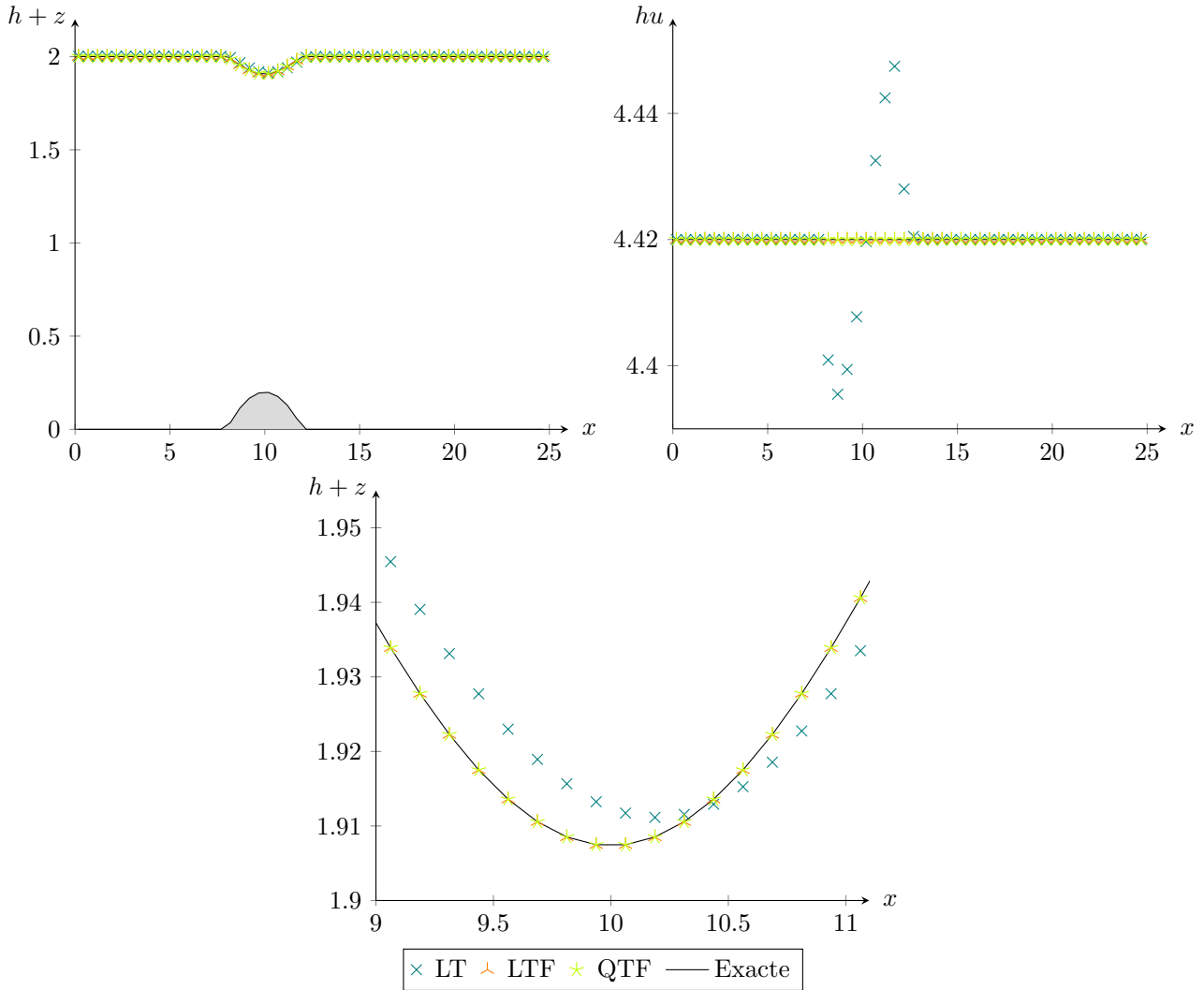


FIGURE 5.19 – Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM1 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$.

Les trois prochains cas-tests classiques ont été proposés par Goutal et Maurel dans [38]. Le but est de tester la capacité du schéma à capturer des états stationnaires en mouvement. Le principe est de partir d'une condition initiale au repos et de créer un mouvement en faisant apparaître un débit non nul sur le bord gauche du domaine. La solution obtenue converge vers un état stationnaire en mouvement.

Pour ces trois exemples, on se place sur le domaine $[0, 25]$ et on prend $g = 9.81$. On se donne une topographie de la forme (5.127), et une condition initiale au repos telle que

$$h + z = h_0, \quad u = v = 0.$$

Le paramètre h_0 dépend du cas-test choisi. Sur le bord gauche du domaine, la hauteur d'eau satisfait une condition de Neumann homogène tandis que le débit hu est fixé égal à une certaine valeur q_0 . Sur le bord droit,

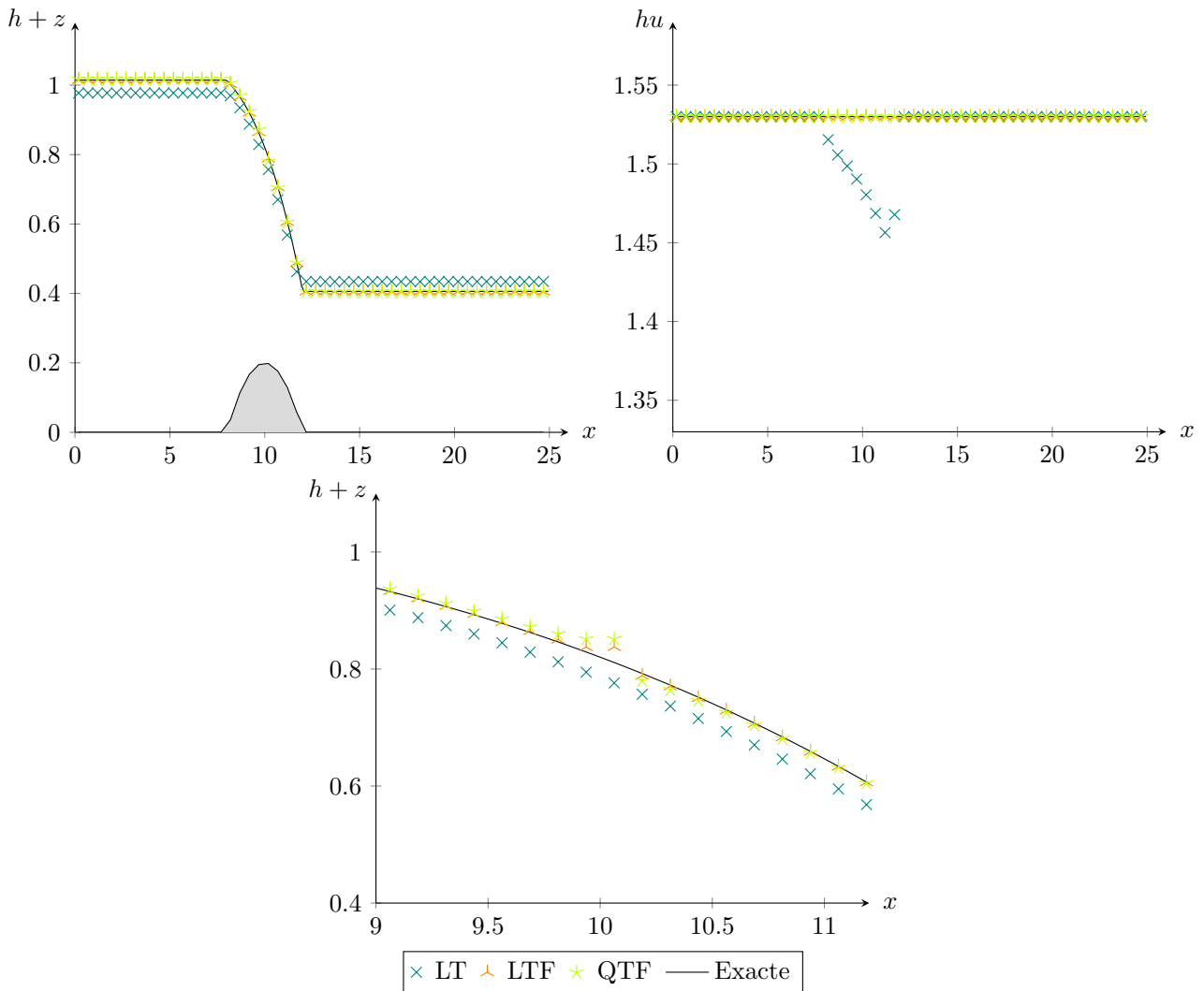


FIGURE 5.20 – Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM2 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$.

on impose que la hauteur d'eau soit égale à h_0 lorsque le flux est sous-critique, c'est-à-dire lorsque le nombre de Froude $Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$ est inférieur à 1, et qu'elle suive une condition de Neumann homogène sinon. On utilise une condition de Neumann homogène pour le débit sur le bord droit dans tous les cas.

Détaillons à présent les différents paramètres utilisés dans chaque cas :

- GM1 : $h_0 = 2$, $q_0 = 4.42$, $N = 200$, $T_{\max} = 500$.
- GM2 : $h_0 = 0.66$, $q_0 = 1.53$, $N = 200$, $T_{\max} = 250$.
- GM3 : $h_0 = 0.33$, $q_0 = 0.18$, $N = 1000$, $T_{\max} = 1000$.

Les paramètres GM1 correspondent à un flux sous-critique, pour lequel le nombre de Froude reste inférieur à un. Les paramètres GM2 correspondent à un flux transcritique sans choc, et GM3 à un flux transcritique avec choc. On représente sur la Figure 5.19 les résultats obtenus pour GM1, sur la Figure 5.20 les résultats pour GM2, et sur la Figure 5.21 ceux pour GM3. Le paramètre a utilisé dans le schéma QV1 a été fixé égal à 0.1 pour GM1 et GM2, et égal à 0.01 pour GM3.

Il est clair que le schéma LT ne capture pas de façon précise ces états stationnaires en mouvement, tandis que les schémas fully well-balanced donnent des solutions approchées qualitativement proches. Dans le Tableau 5.2, on peut remarquer que le schéma QTF est plus proche d'une solution stationnaire que les schémas LTF et LDF pour le cas transcritique sans choc (GM2), mais n'est pas plus performant pour le cas transcritique avec choc (GM3). Les décrochages que l'on observe dans les deux cas transcritiques pour les schémas LTF et QTF localisés en $x = 10$ ont lieu au plus haut de la topographie lors du changement de régime. Ce comportement est

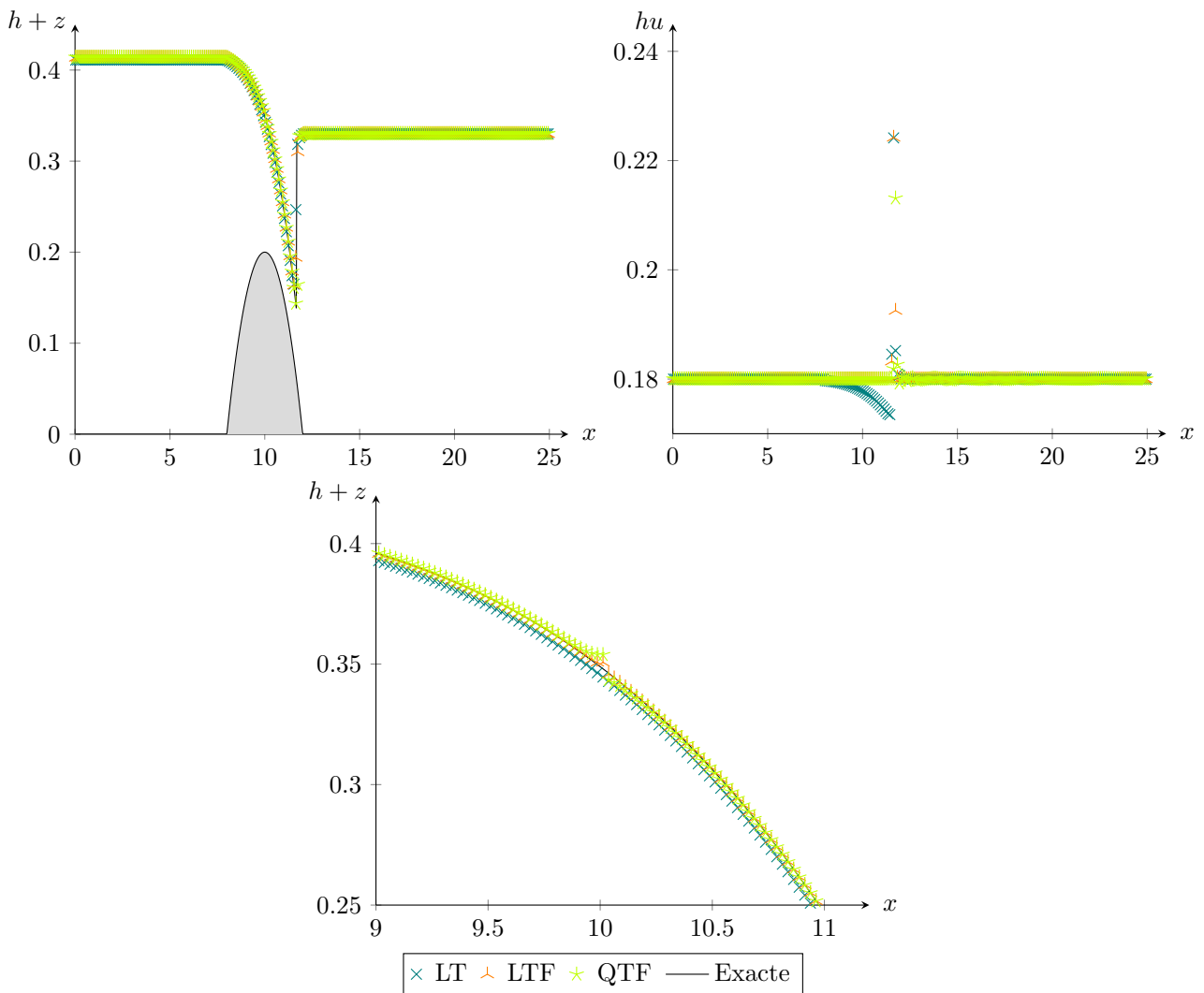


FIGURE 5.21 – Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM3 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$.

caractéristique des schémas fully well-balanced (voir [55] ou [12]) puisque, comme on l'a vu dans la section 5.2, des problèmes de définition apparaissent lorsque le nombre de Froude vaut 1.

Remarque 5.7.1. Si l'on choisit des valeurs différentes pour le paramètre a du schéma QTF, le comportement du schéma au voisinage de $\overline{Fr} = 1$ est très peu précis. Il semble que pour ces exemples, le choix $a = 0.1$ soit le plus approprié.

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$		
	GM1	GM2	GM3
LT	$1.93E-02$	$3.12E-01$	$3.03E-01$
LTF	$2.03E-14$	$1.79E-04$	$2.75E-01$
QTF	$8.13E-15$	$5.38E-15$	$3.81E-01$

TABLEAU 5.2 – Modèle SW : capture d'états stationnaires 5.7.1.3. Erreurs calculées au temps T_{\max} .

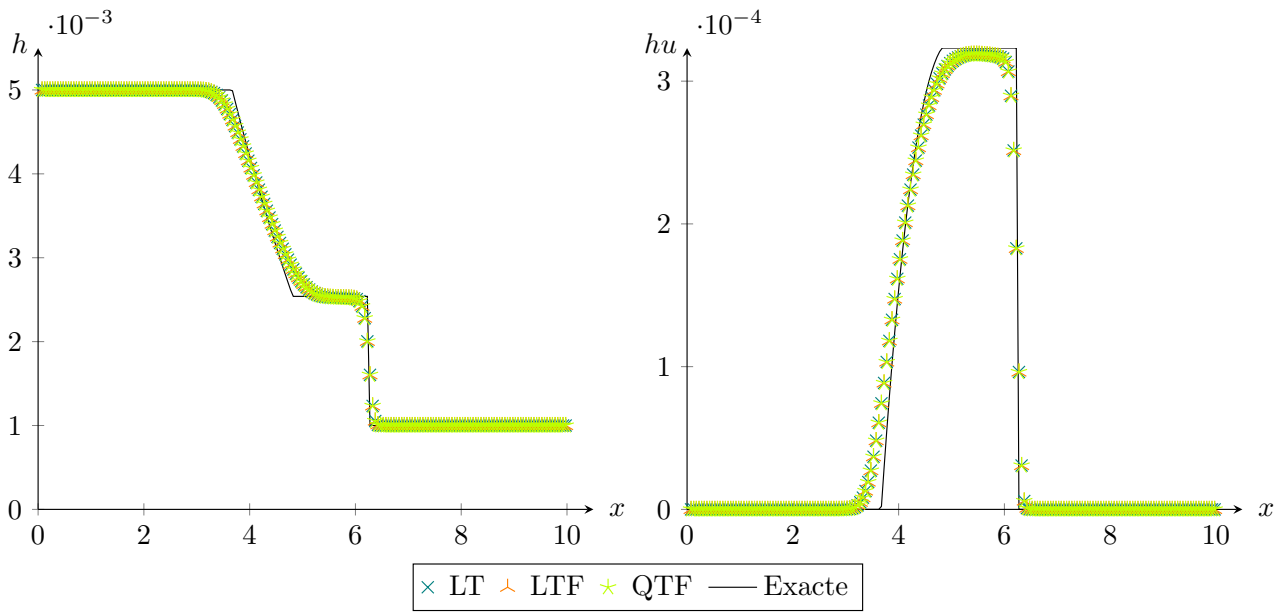


FIGURE 5.22 – Modèle SW : Rupture de barrage sur fond plat 5.7.1.4. Hauteur (à gauche) et débit (à droite).

5.7.1.4 Rupture de barrage sur fond plat

On teste maintenant le comportement des schémas dans une situation de rupture de barrage, pour évaluer leur capacité à reproduire un choc en mouvement. On peut retrouver ce cas-test dans [23], ou une version antérieure similaire dans [38].

On se place sur le domaine $[0, 10]$, et on positionne le barrage en $x = 5$. Le paramètre g est fixé à 9.81. La condition initiale pour la hauteur est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} 0.005 & \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ 0.001 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le débit initial est nul et la topographie est plate.

On présente dans la Figure 5.22 les solutions obtenues au temps $T_{\max} = 6$. Le choc est bien approché par les quatre schémas numériques, qui ont tous un comportement similaire, en accord avec les résultats de [23].

5.7.1.5 Problème de Riemann à l'équilibre

Pour ce dernier cas-test issu de [53], concernant le modèle SW, on teste les limites de nos différents schémas en considérant un problème de Riemann particulier. En effet, les états \tilde{w}_L à gauche et \tilde{w}_R à droite sont choisis à l'équilibre local (5.52). En pratique, on se place sur le domaine $[-5, 5]$, on fixe $g = 9.81$, et on pose

$$\begin{aligned} h_L &= 1, & q_R &= 1, \\ q_L &= 1, & z_R &= 0,001, \\ z_L &= 0, \end{aligned}$$

La hauteur d'eau h_R est choisie de façon à ce que le couple $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ soit à l'équilibre local, c'est-à-dire tel que

$$\frac{q_R^2}{2h_R^2} + g(h_R + z_R) = \frac{q_L^2}{2h_L^2} + g(h_L + z_L).$$

On l'obtient en résolvant une équation du type $f(h_R) = 0$ avec une méthode de Newton. On obtient $h_R \approx 0.25458536248285629$. Ce cas-test peut être vu comme une rupture de barrage à topographie plate perturbée. Comme mentionné dans [53], la solution entropique liée à ce problème évolue au cours du temps, tandis que la solution stationnaire est une solution non entropique.

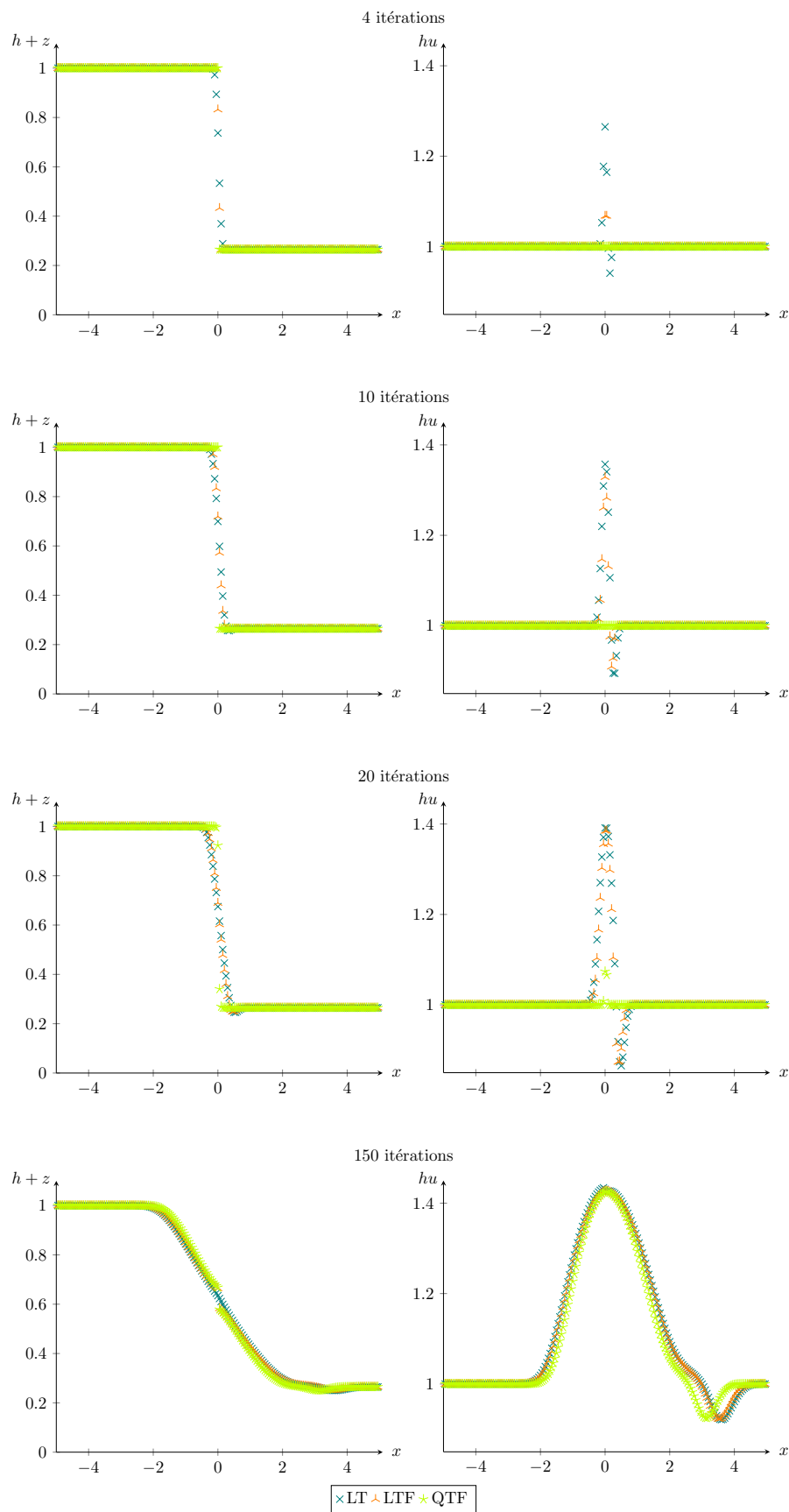


FIGURE 5.23 – Modèle SW : Problème de Riemann à l'équilibre 5.7.1.5. Surface libre (à gauche) et débit (à droite). Solutions approchées calculées après 4, 10, 20 et 150 itérations.

Sur la [Figure 5.23](#), on a représenté les solutions obtenues après 4, 10, 20 et 150 itérations. De façon générale, on observe que les schémas fully well-balanced restent à l'équilibre pendant quelques itérations. Le schéma LT qui ne préserve que les solutions stationnaires au repos évolue dès la première itération. Le schéma LTF fluctue de manière significative à partir de la quatrième itération, tandis que le schéma QTF reste à l'équilibre un peu plus longtemps et commence à évoluer au bout de 10 itérations. Il en résulte un décalage dans le temps des solutions obtenues grâce aux différents schémas, comme le montre la simulation obtenue après 150 itérations. La solution stationnaire est instable et les schémas convergent peu à peu vers la solution entropique. C'est le même comportement qui est obtenu avec les schémas fully well-balanced de [\[53\]](#).

5.7.2 Modèle TSW

On s'intéresse à présent au comportement des schémas numériques pour le modèle TSW, c'est-à-dire au modèle de Saint-Venant avec température variable. On ne prend pas en compte la force de Coriolis, et la vitesse transverse v est nulle. Encore une fois, les schémas LDF et LTF sont identiques et donnent les mêmes résultats numériques, donc seuls les résultats de LTF seront présentés.

On commence par perturber des états d'équilibre avec une température non triviale et on vérifie que les différents schémas ne créent pas d'oscillations numériques.

5.7.2.1 Petite perturbation d'un lac au repos à température constante

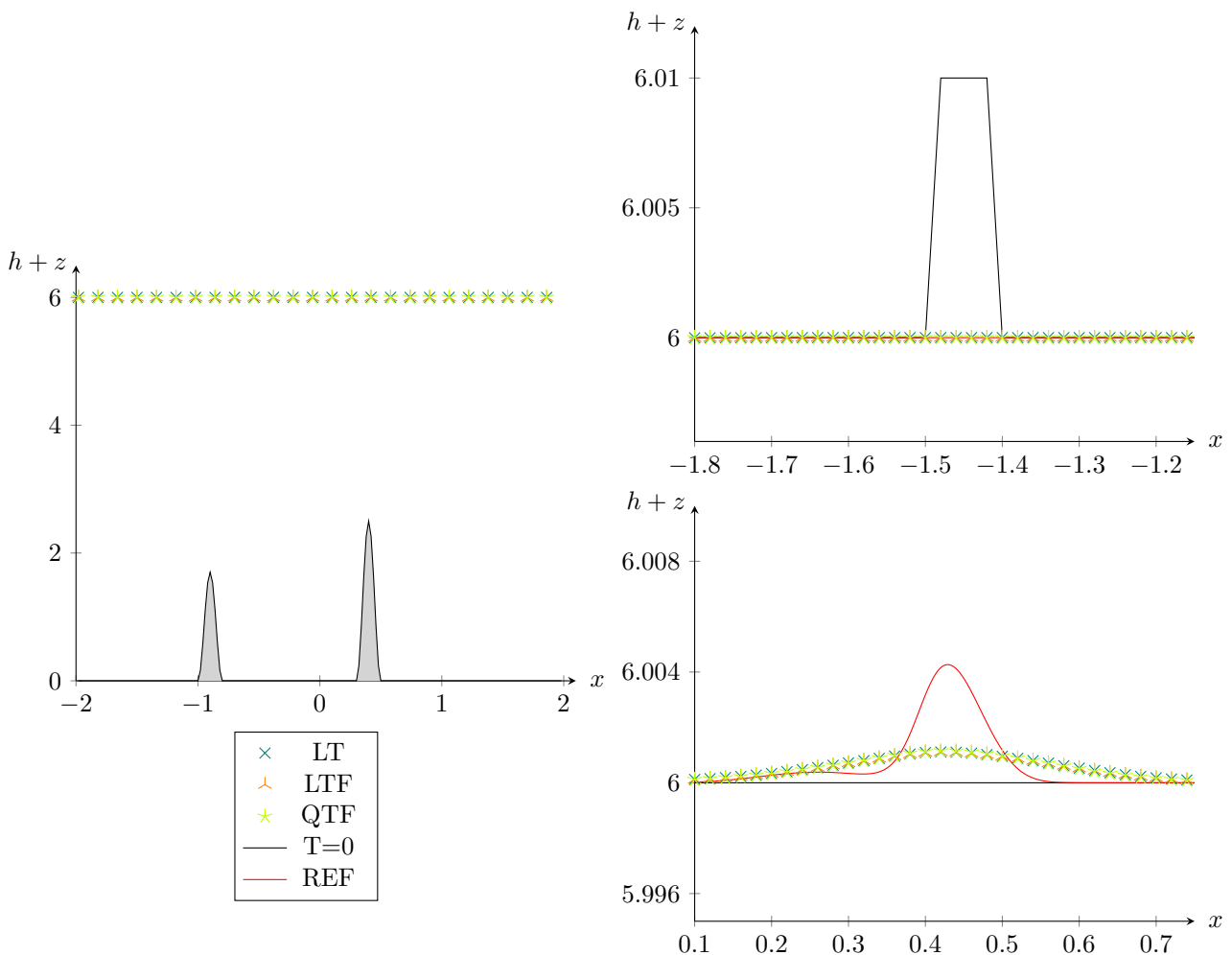


FIGURE 5.24 – Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos [5.7.2.1](#) avec les données P1 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).

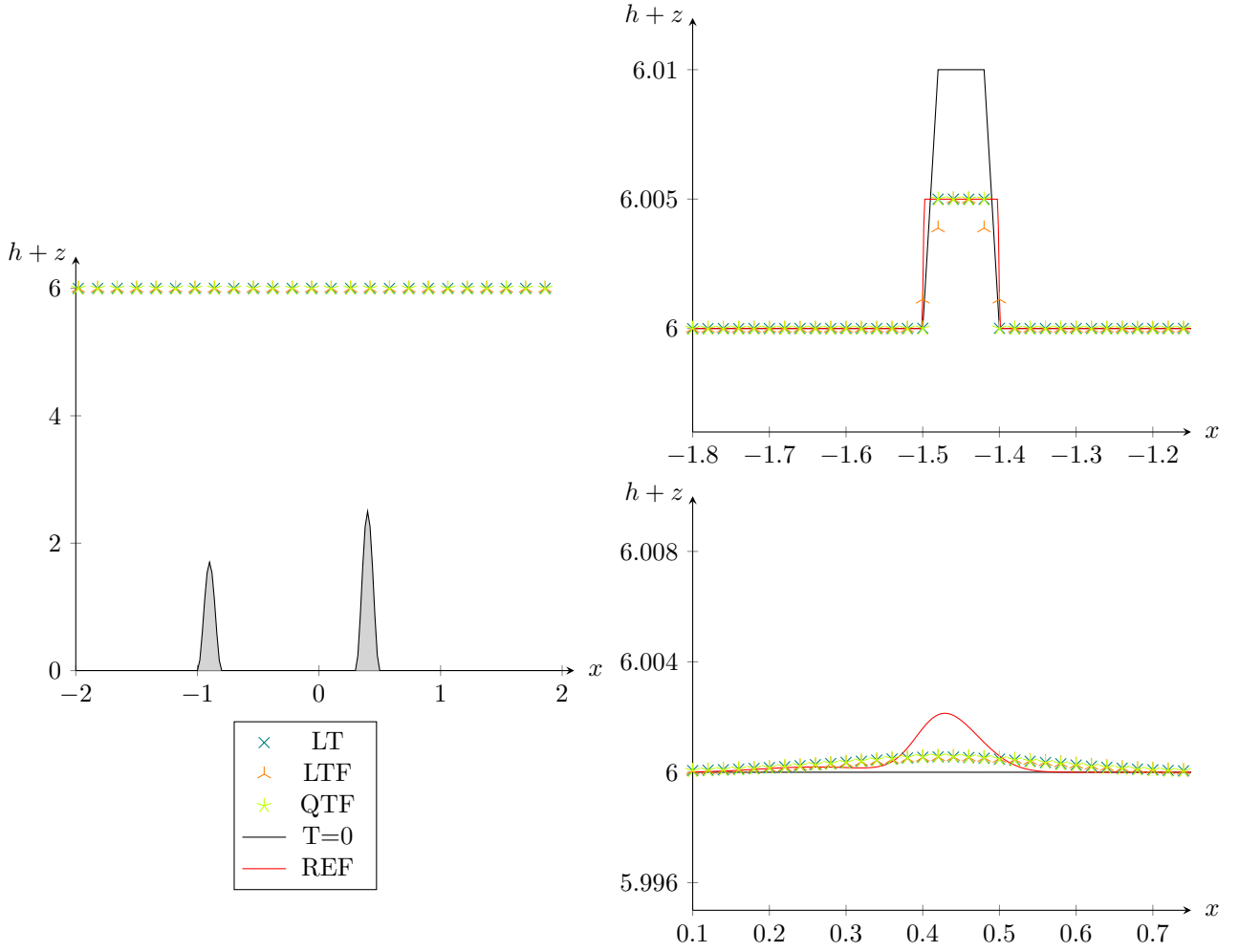


FIGURE 5.25 – Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.2.1 avec les données P2 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).

Pour cet exemple proposé dans [17], on se place sur le domaine $[-2, 2]$, le paramètre g est fixé à 9.812, on se donne une topographie comprenant deux bosses

$$z(x) = \begin{cases} 0.85(\cos(10\pi(x+0.9)) + 1) & \text{si } -1 \leq x \leq -0.8, \\ 1.25(\cos(10\pi(x-0.4)) + 1) & \text{si } 0.3 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la condition initiale

$$h_0(x) = 6 - z(x), \quad u_0(x) = 0, \quad \theta_0(x) = 4. \quad (5.128)$$

La discrétisation de cette donnée initiale donne $\mathcal{E}_\infty(0) = 2.48 \times 10^{-14}$. Les trois schémas préservent exactement cet équilibre d'après le Tableau 5.3 obtenu pour $T_{\max} = 0.125$.

On perturbe la hauteur d'eau et la température du lac au repos. On notera ε_h et $\varepsilon_{h\theta}$ la taille respective des perturbations des variables h et $h\theta$. On modifie alors la donnée initiale (5.128) ainsi

$$(h(x), h\theta(x)) = \begin{cases} (h_0(x) + \varepsilon_h, h_0(x)\theta_0(x) + \varepsilon_{h\theta}) & \text{si } -1.5 \leq x \leq -1.4, \\ (h_0(x), h_0(x)\theta_0(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère les trois perturbations suivantes :

— P1 : $\varepsilon_h = 0.01$, $\varepsilon_{h\theta} = 0.04$,

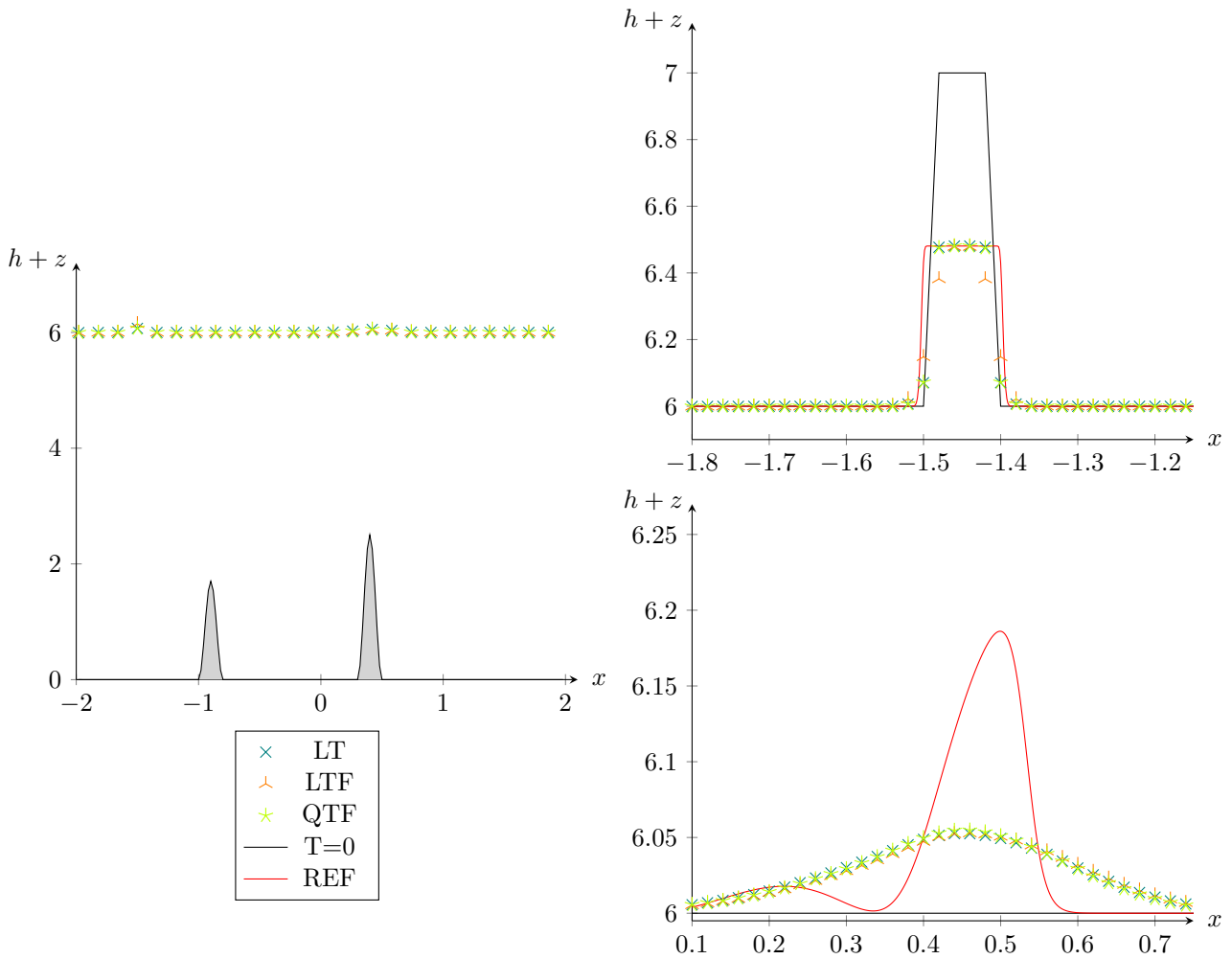


FIGURE 5.26 – Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.2.1 avec les données P3 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).

Schéma	$\mathcal{E}_{\infty}(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^{∞}	
		h	u	h	u
LT	$3.60E-14$	$2.74E-15$	$5.96E-15$	$1.78E-15$	$1.05E-14$
LTF	$2.80E-14$	$8.88E-18$	$4.15E-16$	$4.44E-16$	$2.97E-15$
QTF	$4.69E-14$	$2.22E-16$	$7.88E-16$	$1.33E-15$	$3.70E-15$

TABLEAU 5.3 – Modèle TSW : lac au repos à température constante non perturbé 5.7.2.1. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 0.125$.

- P2 : $\varepsilon_h = 0.01$, $\varepsilon_{h\theta} = 0$,
- P3 : $\varepsilon_h = 1$, $\varepsilon_{h\theta} = 0$.

On effectue les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 0.125$. La première perturbation crée deux ondes qui se propagent dans des directions opposées. Au temps T_{\max} , l'onde de gauche a quitté le domaine, et l'onde de droite a dépassé les deux bosses de la topographie. Les perturbations P2 et P3 créent trois ondes : deux ondes qui se propagent dans des directions opposées et finissent par sortir du domaine, ainsi qu'une troisième onde stationnaire dans la région perturbée. On a représenté les résultats obtenus sur les Figure 5.24, Figure 5.25, Figure 5.26 pour les perturbations P1, P2 et P3, respectivement. La solution de référence a été calculée avec le schéma LT pour $N = 3000$ cellules.

Les différents schémas ne créent pas d'oscillations numériques. Le comportement des solutions dans la zone

$[-1.5, -1.4]$, qui correspondent à des équilibres isobares puisque $h^2\theta$ y est constant, est bien capturé par les trois schémas, avec une précision meilleure pour les schémas LT et QTF. Dans la zone $[0.1, 0.7]$, les trois schémas se comportent de façon similaire, mais manquent de précision. Encore une fois, une augmentation de l'ordre du schéma peut permettre de retrouver des résultats similaires à ceux de [17] qui utilisent des schémas d'ordre élevé.

5.7.2.2 Perturbation d'un lac au repos à température variable.

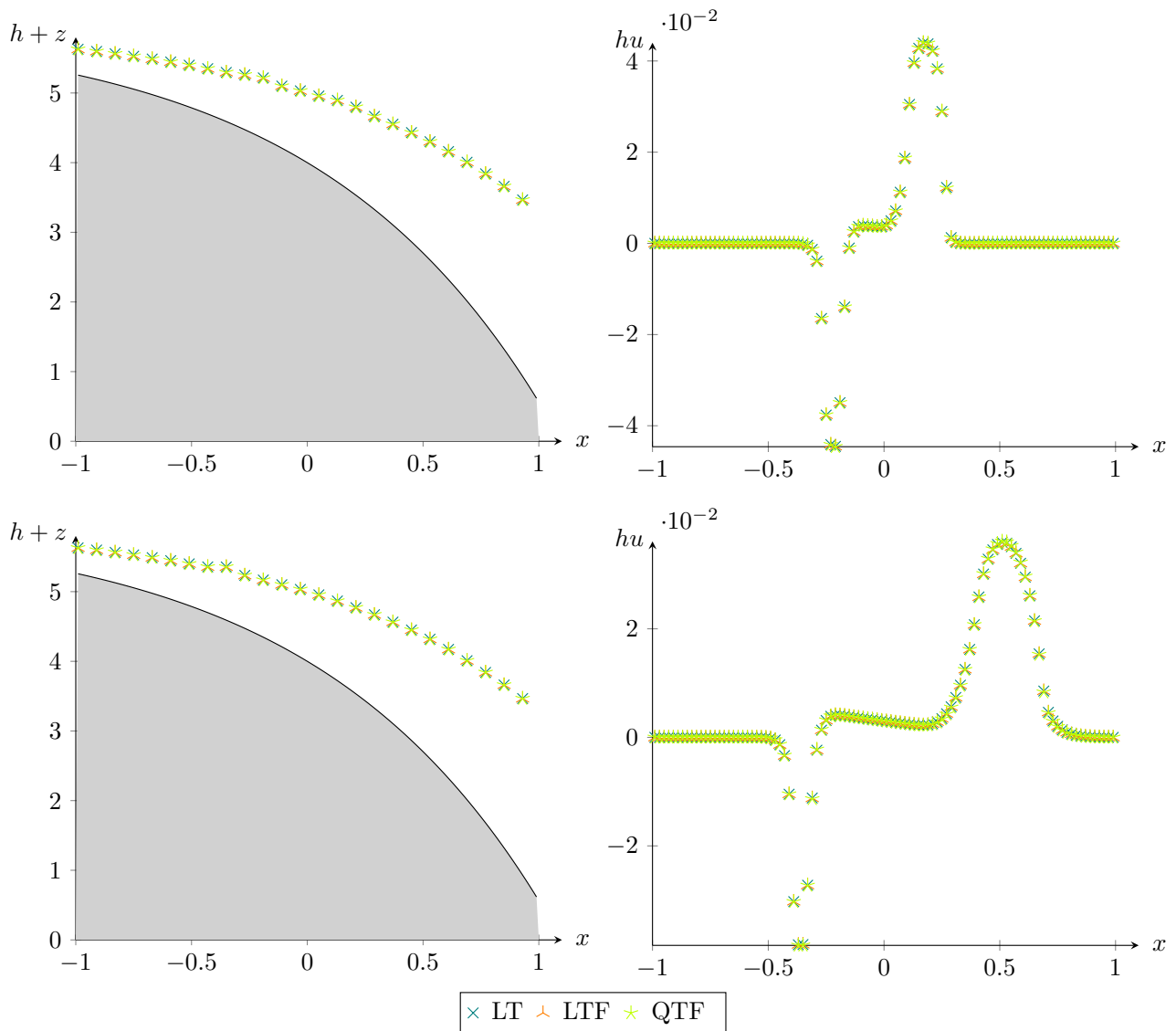


FIGURE 5.27 – Modèle TSW : Perturbation d'un lac au repos à température variable 5.7.2.2. Surface libre (à gauche) et débit (à droite). Simulations au temps $T_{\max} = 0.2$ (haut) et $T_{\max} = 0.4$ (bas).

On réalise une perturbation d'un état d'équilibre où la température n'est pas triviale et on vérifie que le schéma ne crée pas d'oscillations numériques. Ce cas-test a été par exemple utilisé dans [25]. On se place sur le domaine $[-1, 1]$. On se donne une topographie de la forme

$$z(x) = 6 - 2\exp(x).$$

La donnée initiale

$$h_0(x) = \exp(x), \quad u_0(x) = 0, \quad \theta_0(x) = \exp(2x), \quad (5.129)$$

est un état stationnaire continu au repos, puisque

$$\frac{g}{2} \partial_x (h^2 \theta) = -gh\theta \partial_x z.$$

Les schémas préservent exactement cette solution, pourvu que la discrétisation de la condition initiale soit bien choisie. En pratique, on la définit telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les couples $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1})$ soient à l'équilibre local, c'est-à-dire

$$\frac{g}{2} (h_{i+1}^2 \theta_{i+1} - h_i^2 \theta_i) = -g \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \hat{\theta}_{i+1/2} (z_{i+1} - z_i),$$

où $\hat{\theta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\ln(\theta_{i+1}) - \ln(\theta_i)}$. On peut constater dans le [Tableau 5.4](#) que les schémas ne s'écartent pas de cet équilibre, même si cela induit une erreur de l'ordre de 10^{-5} vis-à-vis de la solution exacte discrétisée naïvement. Cette erreur provient de l'écart entre la discrétisation naïve de la donnée initiale, et la discrétisation décrite ci-dessus. En discrétisant la solution exacte comme la condition initiale, on retrouve de l'erreur machine lorsqu'on calcule les erreurs L^1 et L^∞ discrètes. On perturbe légèrement la donnée initiale (5.129) en posant

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x) + 0.1 & \text{si } -0.1 \leq x \leq 0, \\ h_0(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$u(x) = u_0(x), \quad \theta(x) = \theta_0(x).$$

Sur la [Figure 5.27](#), on observe les résultats aux temps $T_{\max} = 0.2$ et $T_{\max} = 0.4$. Deux ondes créées par la perturbation se propagent dans des directions opposées, et aucune oscillation numérique n'est présente pour aucun des schémas. Les résultats sont similaires à ceux présentés dans [25]. Après un temps suffisamment long, la perturbation quitte le domaine et les schémas convergent vers l'état stationnaire au repos (5.129).

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	θ	h	θ
LT	$2.41E-15$	$6.73E-05$	$8.66E-17$	$8.80E-05$	$8.88E-16$
LTF	$2.55E-15$	$6.73E-05$	$7.77E-17$	$8.80E-05$	$8.88E-16$
QTF	$2.55E-15$	$6.73E-05$	$7.77E-17$	$8.80E-05$	$8.88E-16$

TABLEAU 5.4 – Modèle TSW : lac au repos à température variable non perturbé 5.7.2.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 0.4$.

5.7.2.3 Capture d'états stationnaires en mouvement.

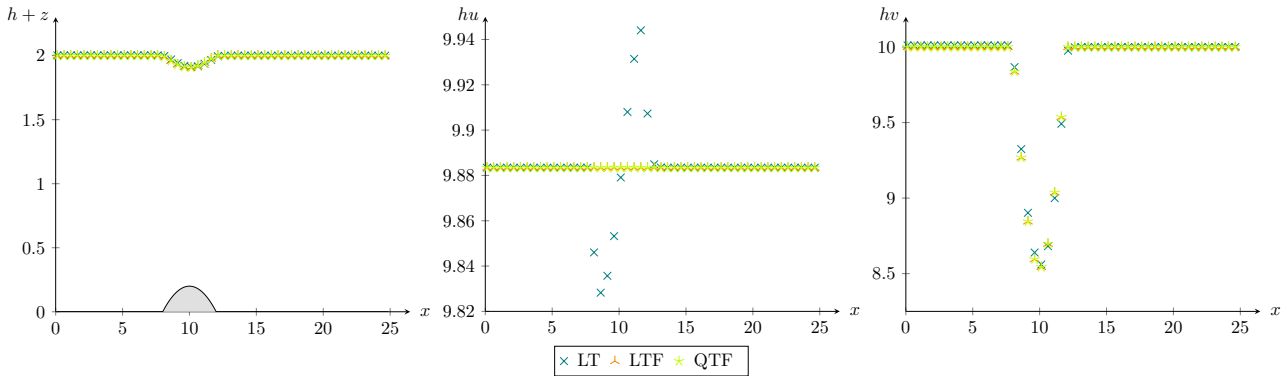


FIGURE 5.28 – Modèle TSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Cas sous-critique. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

On s'intéresse ici à des états stationnaires en mouvement, étudiés dans [17], qui sont une version en mouvement et avec température de 5.7.1.3. On se place sur le domaine $[0, 25]$ et on pose $g = 9.812$. On considère

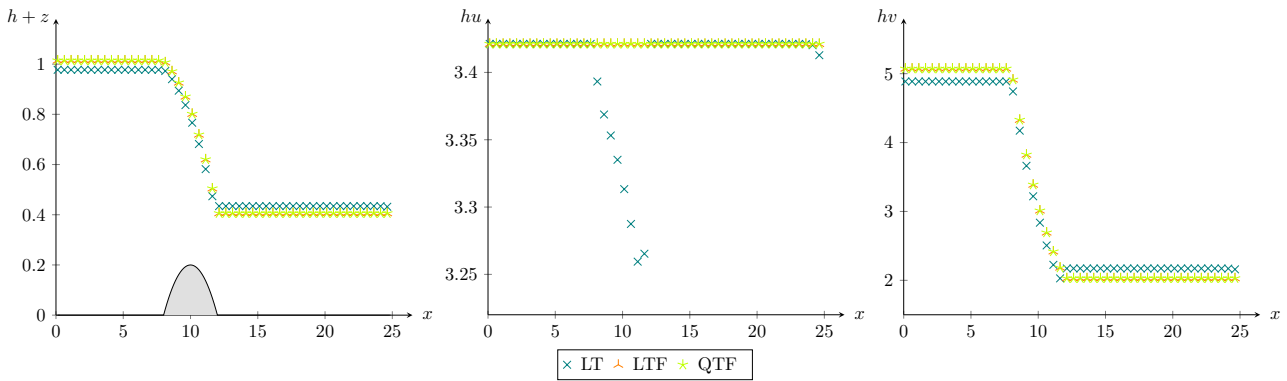


FIGURE 5.29 – Modèle TSW : Capture d’un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Cas transcritique. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

la même topographie que dans l’exemple 5.7.1.3, à savoir

$$z(x) = \begin{cases} 0.25(\cos(10\pi(x - 1.5)) + 1) & \text{si } 1.4 \leq x \leq 1.6, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On considère deux données initiales à l’équilibre en mouvement, et des conditions de bord telles que à gauche le débit soit fixé égal à q_0 , et à droite la hauteur d’eau soit fixée égale à h_0 . On définit $E = \frac{q^2}{2h^2} + g\theta(h + z)$. Dans un premier cas, on se donne une condition initiale telle que

- $hu = 4.42\sqrt{5}$,
- $E = 22.06605 \times 5$,
- $\theta = 5$,

et les conditions de bord suivantes $q_0 = 4.42\sqrt{5}$ et $h_0 = 2$. Cela mène à un régime sous-critique. Dans le second cas, la condition initiale est donnée par

- $hu = 1.53\sqrt{5}$,
- $E = 11.09098731433671 \times 5$,
- $\theta = 5$,

et les conditions de bord sont $q_0 = 1.53\sqrt{5}$ et $h_0 = 0.405737258401203$. Le flux passe d’un régime sous-critique à un régime sur-critique en $x = 10$.

Les simulations réalisées jusqu’au temps $T_{\max} = 50$ donnent les solutions approchées des Figure 5.28 et Figure 5.29. On peut observer que le schéma LT construit pour préserver les états stationnaires au repos ne capture pas bien cette solution stationnaire en mouvement. Le Tableau 5.5 permet également de montrer que le schéma QTF capture la solution stationnaire avec une bien meilleure précision que le schéma LTF, dans les cas sous-critique et transcritique.

Schéma	Cas sous-critique	Cas transcritique
LT	1.19×10^{-1}	2.36
LTF	1.09×10^{-4}	1.17×10^{-3}
QTF	1.96×10^{-14}	2.69×10^{-14}

TABLEAU 5.5 – Modèle TSW : Capture d’un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Détecteurs d’équilibre global au temps $T_{\max} = 50$.

5.7.2.4 Rupture de barrage sur fond plat.

On propose maintenant d’étudier le comportement des schémas dans le cas d’une rupture de barrage avec une température variable. Pour cet exemple qu’on peut retrouver dans [27], la topographie z est nulle. On se

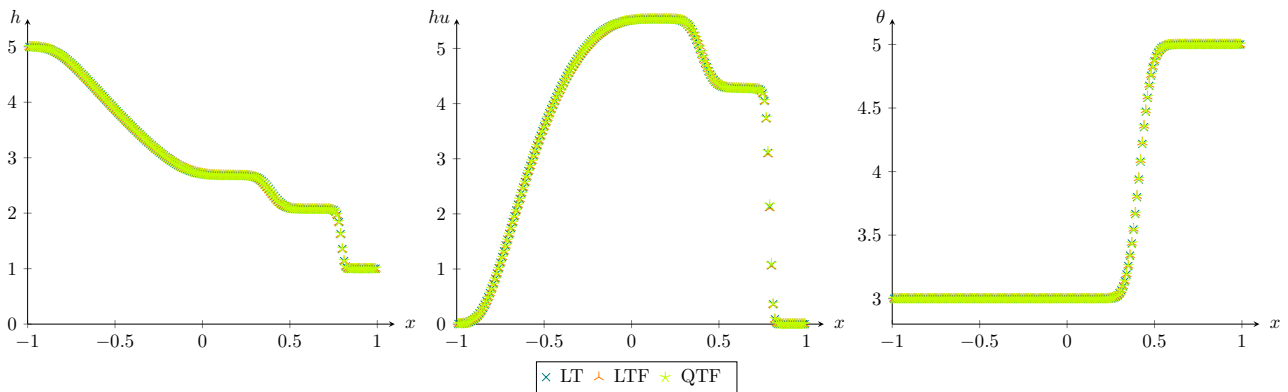


FIGURE 5.30 – Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond plat 5.7.2.4. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

place sur l'intervalle $[-1, 1]$, on fixe la constante $g = 1$, et on considère une condition initiale donnée par

$$(h(x), u(x), \theta(x)) = \begin{cases} (5, 0, 3) & \text{si } x \leq 0, \\ (1, 0, 5) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Les simulations sont réalisées jusqu'au temps $T_{\max} = 0.2$ et représentées sur la Figure 5.30. La solution exacte est composée d'une détente, puis d'une discontinuité de contact, puis d'un choc. Les quatre schémas numériques capturent le choc et fournissent des solutions approchées similaires à celles obtenues dans [27]. Nous verrons dans la sous-section 5.7.5 que le schéma d'ordre deux permet de capturer plus précisément le choc de cette solution.

5.7.2.5 Rupture de barrage sur fond en relief.

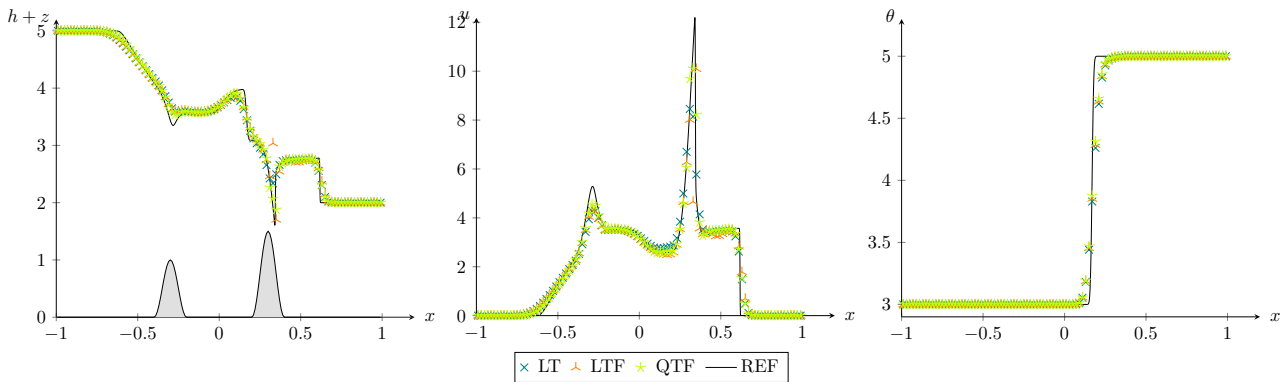


FIGURE 5.31 – Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond en relief 5.7.2.5. Surface libre (gauche), vitesse tangentielle (centre), température (droite).

On teste cette fois la capacité des schémas à reproduire une rupture de barrage avec une topographie variable. Cet exemple est issu de [17]. On se place sur le domaine $[-1, 1]$, on fixe $g = 9.81$ et on définit une topographie avec deux bosses par

$$z(x) = \begin{cases} 0.5(\cos(10\pi(x+0.3)) + 1) & \text{si } -0.4 \leq x \leq -0.2, \\ 0.75(\cos(10\pi(x-0.3)) + 1) & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

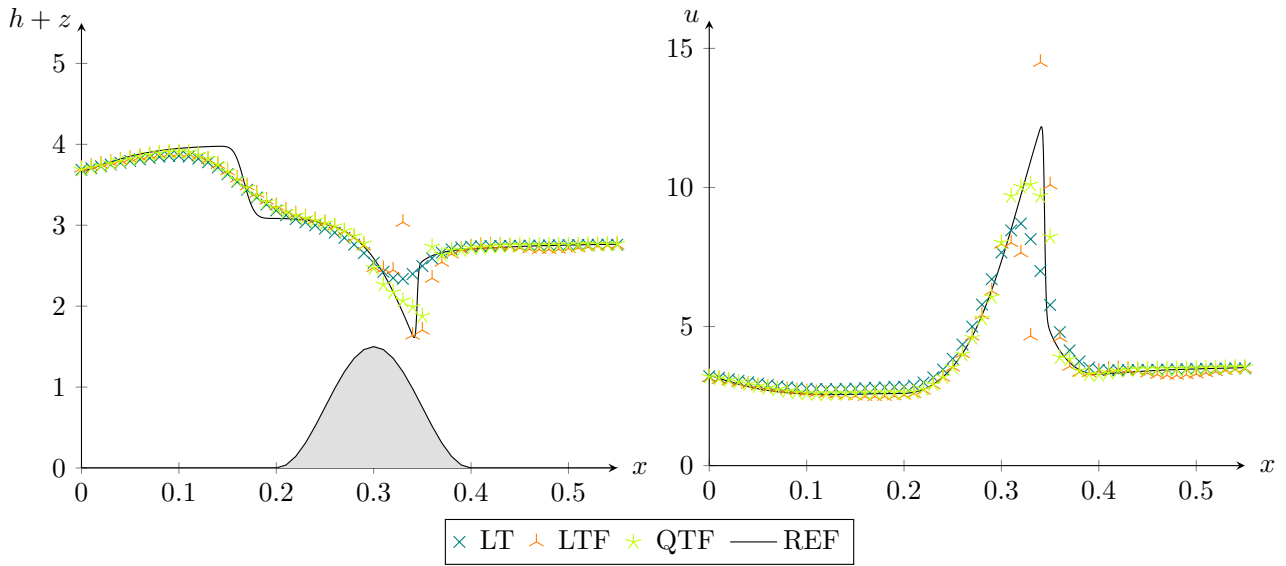


FIGURE 5.32 – Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond en relief 5.7.2.5. Surface libre (gauche), vitesse tangentielle (centre). Zoom pour x dans l'intervalle $[0, 0.5]$.

On choisit comme donnée initiale les valeurs

$$(h(x), u(x), \theta(x)) = \begin{cases} (5 - z(x), 0, 3) & \text{si } x \leq 0, \\ (2 - z(x), 0, 5) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On réalise les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 0.05$. Les résultats sont tracés dans la Figure 5.31. La solution de référence a été calculée avec le schéma LT pour $N = 4000$ cellules. Le paramètre a utilisé dans le schéma QTF a été fixé égal à 0.001. Au dessus de la seconde bosse de la topographie, un changement de régime se crée. Le schéma QTF semble gérer ce changement de régime de façon plus précise que le schéma LTF, puisque même si ce dernier gère mieux l'amplitude de la solution, il présente un défaut en un point, que l'on peut clairement identifier sur la Figure 5.32. Les solutions de [17], n'ont d'ailleurs pas ce défaut. Les chocs sont mieux capturés par le schéma d'ordre élevé proposé dans [17], ou le schéma "interface tracking" de [20] qui utilise un cas-test très similaire, mais l'allure générale de la solution est respectée par les schémas LT et QTF.

5.7.3 Modèle RSW

Dans cette partie, on propose plusieurs cas-tests qui permettent de vérifier le bon comportement des différents schémas lorsque la force de Coriolis est prise en compte. Contrairement aux cas précédents, les schémas LTF et LDF sont différents et donc les quatre schémas seront comparés. On considère encore pour le moment, la température θ constante égale à un.

On commence par valider le caractère well-balanced des différents schémas sur des cas-tests simples.

5.7.3.1 Préservation d'état stationnaire géostrophique 1.

Pour ce premier exemple, on se place sur l'intervalle $[1, 2]$, on se fixe un paramètre $g = 1$ et une force de Coriolis constante $f = 10$. La topographie est nulle, et la condition initiale est donnée par

$$h(x) = x, \quad hu = 0, \quad hv = \frac{x}{f},$$

ce qui correspond bien à un état stationnaire géostrophique 1D. On effectue les simulations pour $T_{\max} = 10$. On peut constater sur la Figure 5.33 et le Tableau 5.6 que les quatre schémas numériques préservent cet état stationnaire.

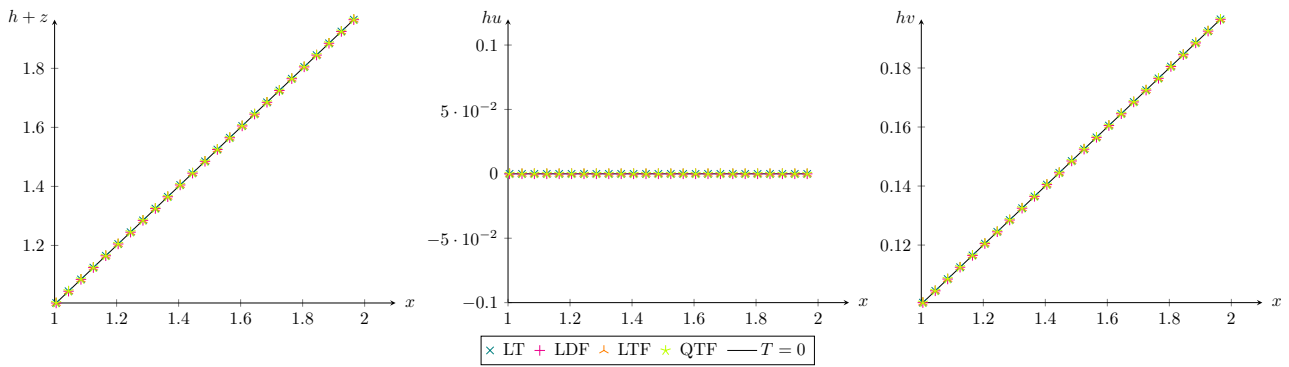


FIGURE 5.33 – Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 1 5.7.3.1. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$3.12E-16$	$0.00E+00$	$3.11E-17$	$0.00E+00$	$5.37E-15$
LDF	$3.11E-16$	$0.00E+00$	$4.23E-18$	$0.00E+00$	$2.78E-17$
LTF	$3.11E-16$	$0.00E+00$	$4.23E-18$	$0.00E+00$	$2.78E-17$
QTF	$6.83E-16$	$3.99E-17$	$3.28E-15$	$0.00E+00$	$4.07E-14$

TABLEAU 5.6 – Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 1 5.7.3.1. Erreur calculées au temps $T_{\max} = 10$.

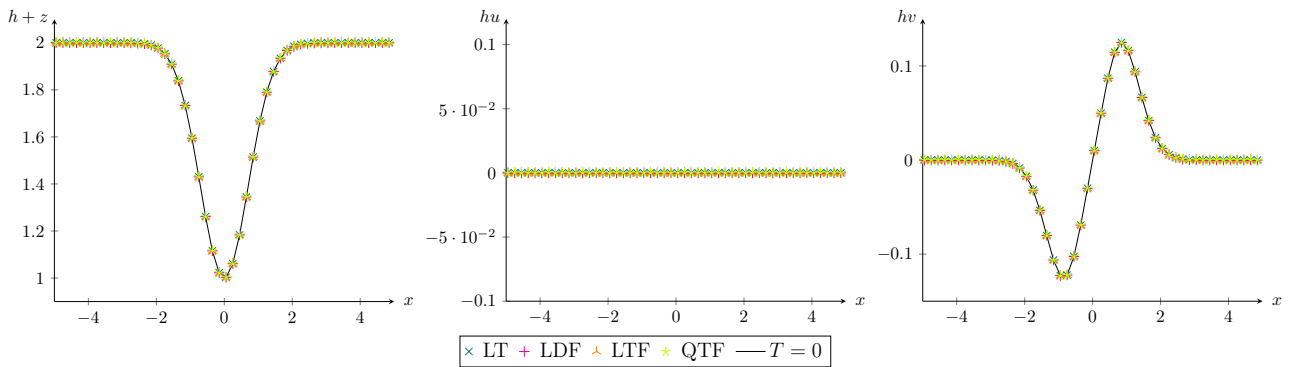


FIGURE 5.34 – Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 2 5.7.3.2. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

5.7.3.2 Préservation d'état stationnaire géostrophique 2.

Ce deuxième exemple, que l'on peut retrouver dans [18, 19], est également un état stationnaire géostrophique 1D. On se place sur l'intervalle $[-5, 5]$ et on fixe le paramètre $g = 1$ et la force de Coriolis constante $f = 10$. La topographie est nulle, et la condition initiale est donnée par

$$h(x) = \frac{2}{g} \exp(-x^2), \quad u(x) = 0, \quad v(x) = \frac{2g}{f} x \exp(-x^2).$$

Une discrétisation naïve de la donnée initiale ne donne pas une solution stationnaire discrète. On préfère alors utiliser la discrétisation suivante : on discrétise de façon naturelle la solution sur la première cellule K_1 c'est-à-dire

$$h_1 = \frac{2}{g} \exp(-x_1^2) \text{ et } v_1 = \frac{2g}{f} x_1 \exp(-x_1^2).$$

On définit ensuite récursivement pour $i > 1$,

$$v_{i+1} = v_i - \frac{2f}{g} x_{i+1} \exp(-x_{i+1}^2) \quad \text{et} \quad h_{i+1} = h_i + \frac{f}{g} \Delta x \frac{v_i + v_{i+1}}{2}.$$

Ainsi, les couple $(\tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1})$ sont bien à l'équilibre local. Pour $N = 200$ cellules, la différence entre les approximations h_i données par la formule précédente et $h(x_i)$ est d'au plus 10^{-5} .

On effectue les simulations pour $T_{\max} = 10$. Une fois encore, on peut constater sur la [Figure 5.34](#) et dans le [Tableau 5.7](#) que les quatre schémas numériques préservent cet état stationnaire. L'erreur commise sur la variable h lors de la discrétisation initiale est conservée au cours du temps par les quatre schémas, comme on peut le voir dans le [Tableau 5.7](#), ce qui est en accord avec l'erreur calculée dans [18]. Pour les autres variables, on est proche de l'erreur machine, tout comme [19].

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$3.91E-16$	$7.15E-04$	$1.96E-14$	$4.17E-04$	$6.42E-15$
LDF	$4.72E-16$	$7.15E-04$	$2.16E-15$	$4.17E-04$	$9.16E-16$
LTF	$9.06E-15$	$7.15E-04$	$5.57E-14$	$4.17E-04$	$1.66E-14$
QTF	$2.78E-16$	$7.15E-04$	$7.51E-15$	$4.17E-04$	$3.86E-15$

TABLEAU 5.7 – Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 2 5.7.3.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$.

5.7.3.3 Préservation d'état stationnaire au repos avec topographie.

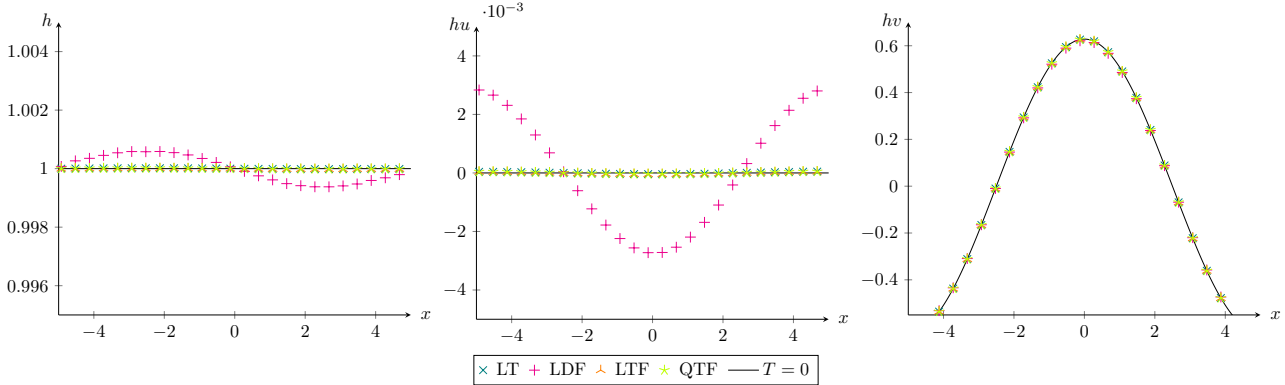


FIGURE 5.35 – Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie 5.7.3.3. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 1$. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

Le cas-test qui suit, que l'on peut retrouver dans [19], est un état stationnaire au repos avec une topographie périodique de la forme

$$z(x) = \frac{f}{g} \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right).$$

On se place sur le domaine $[-5, 5]$, on pose $g = 1$ et $f = 1$. La condition initiale est donnée par

$$h(x) = 1, \quad u(x) = 0, \quad v(x) = \frac{\pi}{5} \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right),$$

ce qui correspond bien à un état stationnaire au repos. On utilise des conditions de bord périodiques pour effectuer les simulations.

Dans [19], cette solution est préservée à l'erreur machine près. Cependant, dans notre cas, la discrétisation naïve de la condition initiale n'est pas exactement à l'équilibre, puisque le détecteur d'équilibre global au temps $t = 0$ vaut $\mathcal{E}_\infty(0) = 2.58 \times 10^{-6}$. Même après un temps long, on peut remarquer que les trois schémas LT, LTF et QTF préservent cet état stationnaire, au sens où ils ne s'éloignent pas de la condition initiale, au vu des

détecteurs d'équilibre global calculés aux temps $T_{\max} = 1$ et $T_{\max} = 100$ et présentés dans le [Tableau 5.9](#). On note cependant que le schéma *LDF* est moins performant puisqu'il induit une erreur plus grande vis-à-vis de la solution stationnaire, même si elle évolue peu au cours du temps. On peut observer cette différence de précision sur la [Figure 5.35](#) et avec les calculs d'erreur du [Tableau 5.8](#).

Schéma	Erreur L^1			Erreur L^∞		
	h	u	v	h	u	v
LT	$1.01E-04$	$2.61E-04$	$1.50E-04$	$1.53E-05$	$4.71E-05$	$2.98E-05$
LDF	$4.06E-03$	$1.74E-02$	$3.34E-02$	$6.22E-04$	$2.85E-03$	$6.23E-03$
LTF	$1.01E-04$	$2.61E-04$	$1.50E-04$	$1.53E-05$	$4.71E-05$	$2.99E-05$
QTF	$1.01E-04$	$2.62E-04$	$1.49E-04$	$1.52E-05$	$4.72E-05$	$2.96E-05$

TABLEAU 5.8 – Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie [5.7.3.3](#). Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 1$.

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(1)$	$\mathcal{E}_\infty(100)$
LT	2.87×10^{-6}	1.58×10^{-6}
LDF	2.87×10^{-4}	5.01×10^{-4}
LTF	2.87×10^{-6}	1.58×10^{-6}
QTF	2.84×10^{-6}	1.59×10^{-6}

TABLEAU 5.9 – Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie [5.7.3.3](#). Détecteurs d'équilibre global calculés aux temps $T_{\max} = 1$ et $T_{\max} = 100$.

À présent, on vérifie que les schémas fully well-balanced préservent bien les états stationnaires en mouvement. On comparera également les résultats obtenus avec ceux donnés par le schéma well-balanced LT.

5.7.3.4 Préservation d'état stationnaire en mouvement 1.

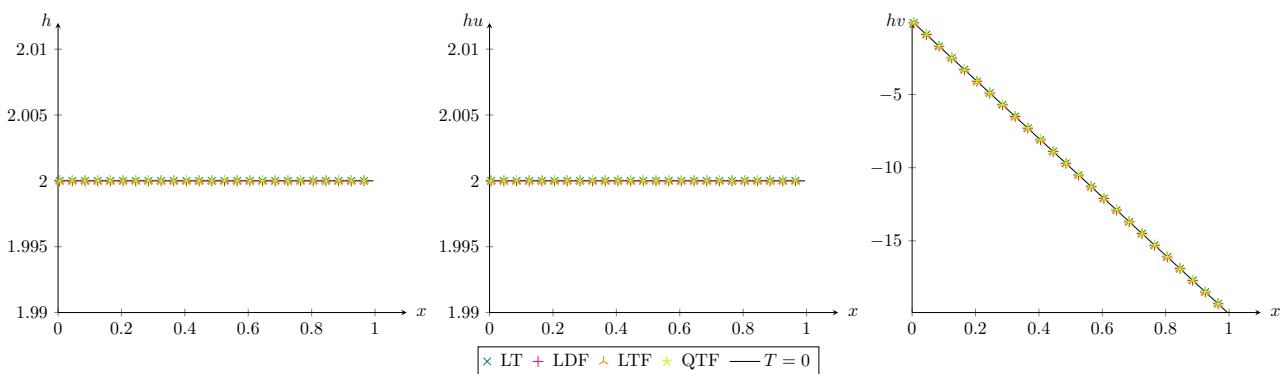


FIGURE 5.36 – Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 1 [5.7.3.4](#). Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 10$. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

On commence par un cas-test simple, pour lequel la hauteur d'eau et le débit sont constants. On se place sur le domaine $[0, 1]$, on pose $g = 1$ et $f = 10$. La condition initiale est donnée par

$$h(x) = 2, \quad hu(x) = 2, \quad v(x) = -fx.$$

Avec une topographie de la forme

$$z(x) = -\frac{f^2}{2}x^2,$$

il s'agit bien d'un état stationnaire continu.

On effectue les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 10$. Au temps initial $t = 0$, le détecteur d'équilibre global vaut $\mathcal{E}_{\infty}(0) = 1.66 \times 10^{-14}$. On représente les solutions approchées au temps T_{\max} dans la Figure 5.36 et erreurs calculées au temps T_{\max} dans le Tableau 5.10. Les quatre schémas préservent cet équilibre en mouvement avec une bonne précision. Puisqu'il s'agit d'un équilibre particulièrement simple en les variables h et hu , même le schéma LT qui est seulement well-balanced arrive à préserver cet état stationnaire en mouvement. Ce n'est pas le cas pour des états stationnaires en mouvement plus complexes, comme le montre le prochain exemple.

Schéma	$\mathcal{E}_{\infty}(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^{∞}	
		h	v	h	v
LT	$1.51E-14$	$1.53E-13$	$1.94E-14$	$2.08E-13$	$1.12E-13$
LDF	$5.69E-14$	$1.07E-13$	$2.61E-14$	$2.09E-13$	$1.21E-13$
LTF	$2.94E-14$	$2.02E-13$	$1.89E-14$	$3.07E-13$	$1.10E-13$
QTF	$2.26E-14$	$1.26E-13$	$1.48E-14$	$1.92E-13$	$1.10E-13$

TABLEAU 5.10 – Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 1 5.7.3.4. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$.

5.7.3.5 Préservation d'état stationnaire en mouvement 2.

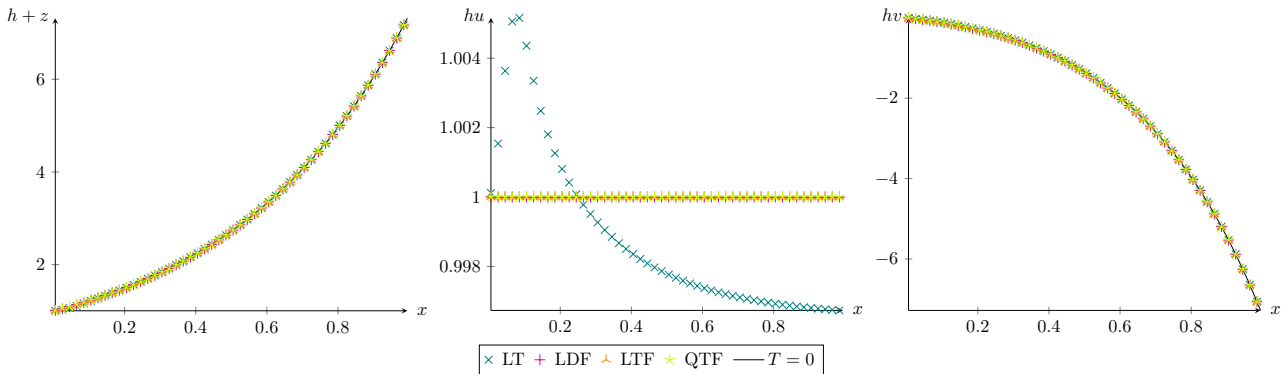


FIGURE 5.37 – Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 2 5.7.3.5. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 1$. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).

On considère cette fois l'intervalle $[0, 1]$, et les paramètres g et f sont fixés égaux à un. La topographie est donnée par

$$z(x) = -\frac{f^2}{2}x^2 - \frac{1}{2}\exp(-2\beta x) - \exp(\beta x).$$

La condition initiale suivante

$$h(x) = \exp(\beta x), \quad hu(x) = 1, \quad v(x) = -fx,$$

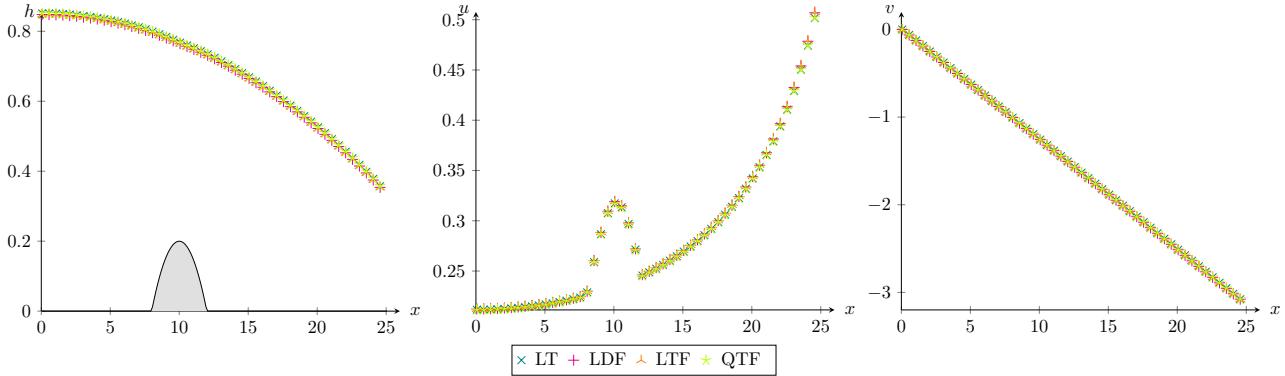
est alors une solution continue à l'équilibre. En pratique, on prendra $\beta = 2$.

Le détecteur d'équilibre au temps $t = 0$ vaut $\mathcal{E}_{\infty}(0) = 8.93 \times 10^{-16}$. Dans le Tableau 5.11, on peut constater qu'après un temps $T_{\max} = 1$, les trois schémas fully well-balanced mènent à une solution approchée à l'équilibre tandis que le schéma well-balanced LT crée de l'erreur. On peut également observer ce phénomène sur la Figure 5.37, notamment pour le débit hu où l'échelle permet d'observer la différence entre les solutions calculées avec les schémas fully well-balanced et le schéma LT. Ainsi, même si dans l'exemple précédent, on a vu que le schéma LT était capable de préserver un état stationnaire en mouvement, ce n'est pas le cas en toute généralité pour des états stationnaires plus complexes.

5.7.3.6 Capture d'état stationnaire en mouvement

Dans cet exemple, issu de [72], on teste la stabilité et la convergence vers des états stationnaires en mouvement, avec force de Coriolis. Cela correspond à une modification du cas-test GM2 5.7.1.3. On se place sur

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$7.35E-04$	$4.23E-03$	$2.83E-16$	$3.10E-02$	$1.88E-15$
LDF	$2.14E-14$	$1.13E-15$	$1.45E-14$	$1.86E-14$	$7.70E-14$
LTF	$7.17E-15$	$7.73E-16$	$5.43E-15$	$4.44E-15$	$4.47E-14$
QTF	$4.63E-15$	$7.26E-16$	$6.01E-15$	$3.55E-15$	$5.15E-14$

TABLEAU 5.11 – Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 2 5.7.3.5. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 1$.FIGURE 5.38 – Modèle RSW : Capture d'état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 200$. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (centre), vitesse transverse (droite).

l'intervalle $[0, 25]$, on pose $g = 9.81$ et $f = \frac{2\pi}{50}$. La topographie est la même que dans l'exemple 5.7.1.3, c'est-à-dire

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 12, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La donnée initiale est

$$h(x) = 0.33, \quad hu(x) = 0.18, \quad hv(x) = 0.$$

Les conditions de bord utilisées à gauche correspondent à une condition de Neumann homogène pour h , et des conditions de Dirichlet pour hu et hv , où l'on pose $hu = 0.18$ et $hv = 0$. Au bord droit, c'est hu et v qui suivent une condition de Neumann homogène, et on pose $h = 0.33$.

On effectue les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 200$ et on représente les résultats obtenus sur la Figure 5.38. Sur la Figure 5.39, on a représenté les quantités préservées à l'équilibre, à savoir hu et $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + g(h+z)$. Les quatre schémas se comportent différemment comme on peut le voir au niveau de la variable hu . Le schéma LT qui n'est pas conçu pour préserver les solutions stationnaires en mouvement présente des oscillations numériques là où la topographie n'est pas nulle. Les trois autres schémas n'ont pas ce défaut puisqu'ils sont fully well-balanced. Néanmoins, c'est le schéma QTF qui donne la meilleure approximation, comme on peut le voir notamment dans le Tableau 5.12 qui donne les valeurs des détecteurs d'équilibre au temps T_{\max} . Vis-à-vis des résultats obtenus dans [72], le schéma QTF donne des résultats sensiblement meilleurs. Il semble que la condition de bord à droite puisse être améliorée pour obtenir de meilleurs résultats. Les tests de [72] utilisant les mêmes conditions de bord présentent le même défaut.

5.7.3.7 Ajustement de Rossby

On s'intéresse ici à un cas-test physique proposé dans [15] et repris dans [52, 19] appelé l'ajustement de Rossby. Pour cet exemple, la condition initiale mène à une solution qui converge en temps long vers un équilibre géostrophique 1D. La convergence est lente puisque certaines ondes mettent du temps à se propager.

On considère le problème sur un domaine ouvert. En pratique, on se place sur $[-250, 250]$. On pose $f = g = 1$ et on considère un fond plat ($z = 0$). La donnée initiale est de la forme

$$h(x) = 1, \quad u(x) = 0, \quad v(x) = 2\Gamma(x),$$

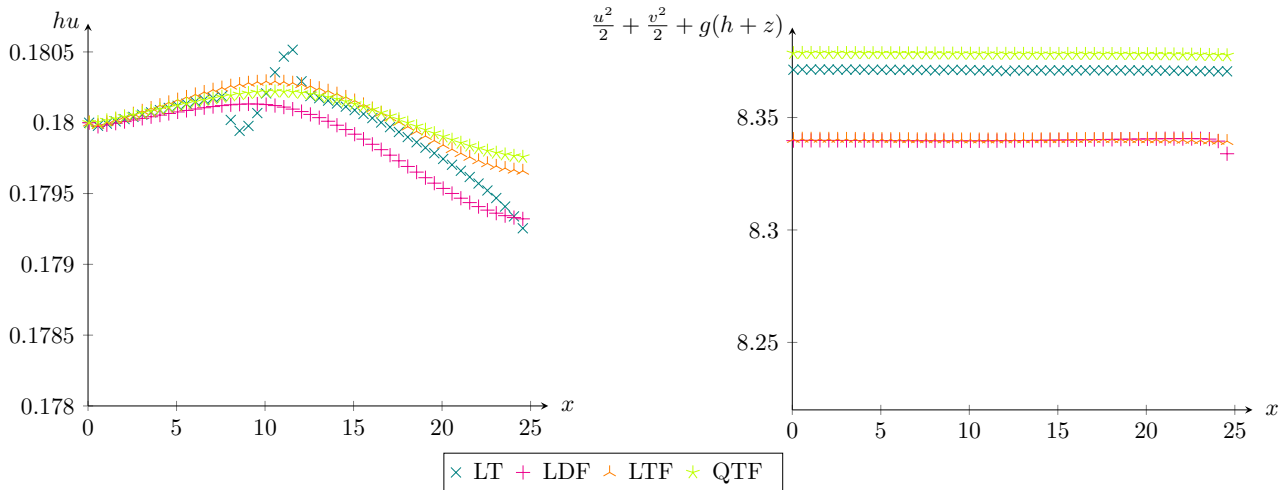


FIGURE 5.39 – Modèle RSW : Capture d'état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 200$. Débit (gauche), invariant $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + g(h + z)$ (droite).

Schéma	$\mathcal{E}_{\infty}(T_{\max})$
LT	1.8×10^{-3}
LDF	7.95×10^{-3}
LTF	7.88×10^{-3}
QTF	2.97×10^{-5}

TABLEAU 5.12 – Modèle RSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Détecteurs d'équilibre global calculés au temps $T_{\max} = 200$.

où la fonction $N(x)$ est définie par

$$\Gamma(x) = \frac{(1 + \tanh(2x + 2))(1 - \tanh(2x - 2))}{(1 + \tan(2)^2)}.$$

On calcule les solutions approchées fournies par les différents schémas pour $N = 20000$ cellules, et on les représente sur la Figure 5.40 sur l'intervalle $[-10, 10]$ pour différents temps. Les résultats sont similaires à ceux proposés dans [15]. Au temps $t = 0.4\pi$, on a un changement de régime autour de $x = -0.7$ où l'on passe d'un flux sous-critique à sur-critique, puis autour de $x = 1.1$, on repasse à un régime sous-critique. Le paramètre a utilisé dans le schéma QTF a été fixé à 0.001. Pour le schéma LT, ces différents changements ne sont pas visibles sur la solution. Les trois autres schémas ont le même comportement au niveau du deuxième changement de régime. Par contre, le schéma QTF semble plus performant au niveau du premier changement de régime car son comportement se rapproche de celui du schéma LT, comme on peut le voir sur la Figure 5.41 où on a zoomé sur l'intervalle $[-2, 2]$. Si des erreurs sont produites à $t = 0.4\pi$, le comportement des schémas aux temps $t = 0.8\pi$, $t = 1.2\pi$, $t = 1.6\pi$ et $t = 2\pi$ sont similaires et en accord avec les résultats obtenus dans [15].

Comme mentionné dans [15], après un temps suffisamment long, les ondes gravito-inertielles se sont propagées et la solution converge vers l'équilibre géostrophique. Dans la Figure 5.42, on a représenté pour les quatre schémas les variables fv et $g\partial_x h$ au temps $T_{\max} = 69.2\pi$. On commence à observer une compensation de ces variables, ce qui indique que l'équilibre géostrophique va être atteint. On note tout de même de petites oscillations dans le calcul de la dérivée discrète de h pour le schéma QTF, et un comportement éloigné des résultats de [15] pour le schéma LDF. Les résultats donnés par schémas LT et LTF sont plus cohérents.

5.7.3.8 État stationnaire en espace

On s'intéresse ici à une solution un peu particulière liée à la force de Coriolis. Il s'agit non pas d'une solution stationnaire en temps, qui vérifie $\partial_t h = \partial_t hu = \partial_t hv = 0$, mais d'une solution stationnaire en espace, telle que $\partial_x h = \partial_x hu = \partial_x hv = 0$.

Étant donnée une condition initiale du type

$$h(x) = h_0, \quad u(x) = u_0, \quad v(x) = v_0,$$

et une topographie plane, la solution exacte est donnée par

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_0, \\ u(x, t) &= u_0 (\cos(ft) + \sin(ft)), \\ v(x, t) &= v_0 (\cos(ft) - \sin(ft)). \end{aligned}$$

Elle est donc constante en espace. On considère ici l'intervalle $[0, 1]$ et on fixe $g = f = 1$. La condition initiale que l'on se donne est

$$h_0 = 2, \quad u_0 = 1, \quad v_0 = 1.$$

On utilise des conditions de bord périodiques et on effectue les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 1$. On montre sur la [Figure 5.43](#) les solutions obtenues à $T_{\max} = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Même si les valeurs diffèrent selon les schémas utilisés, ils donnent tous une solution approchée constante en espace. Sur la [Figure 5.44](#), on choisit de représenter les solutions calculées en $x = 0.5$ au cours du temps, ainsi que la solution exacte. En choisissant un point différent, on obtiendrait exactement les mêmes tracés. Les solutions approchées données par les quatre schémas sont proches de la solution exacte.

5.7.4 Modèle TRSW

On s'intéresse à présent à des cas-tests pour lesquels on prend en compte à la fois la force de Coriolis et une température variable.

5.7.4.1 Rupture de régularité

On se donne une solution à l'équilibre thermo-géostrophique : il s'agit d'une solution stationnaire au repos où c'est le gradient de température qui compense les effets de la force de Coriolis. Pour cela, on considère une topographie plane, une hauteur h constante et des fonctions v et θ satisfaisant

$$\frac{g}{2} \partial_x (h^2 \theta) = f h v.$$

On utilise le cas-test présenté dans [\[44\]](#). On considère sur l'intervalle $[-50, 50]$ une topographie nulle, les paramètres $g = 1$ et $f = -1$ et la donnée initiale

$$h(x) = 1, \quad u(x) = 0, \quad v(x) = 3 - 3 \tanh(x)^2, \quad \theta(x) = 10 - 6 \tanh(x). \quad (5.130)$$

En prenant une discrétisation bien choisie, de façon à ce que n'importe quel couple $(\widetilde{w}_i, \widetilde{w}_{i+1})$ vérifie

$$\frac{g}{2} (\theta_{i+1} - \theta_i) = f \Delta x \frac{v_i + v_{i+1}}{2},$$

les quatre schémas préservent cet état stationnaire. En effet, en procédant ainsi, et en considérant $N = 150$ cellules, on a $\mathcal{E}_\infty(0) = 1.24 \times 10^{-14}$, et on peut vérifier l'affirmation précédente sur la [Figure 5.45](#) et le [Tableau 5.13](#) où $T_{\max} = 10$. Remarquons que l'erreur, calculée entre la solution exacte discrétisée naïvement et les solutions approchées est assez grande pour la variable v , mais provient uniquement de la discrétisation initiale. Avec des maillages plus fins, on peut réduire significativement cette erreur.

On modifie maintenant la vitesse $u(x)$ en posant

$$u(x) = \begin{cases} 0.1 \exp(-x^2) - 0.1 \exp(-0.25) & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On représente dans la [Figure 5.46](#) les solutions approchées pour $N = 4000$ cellules à différents temps. On observe la création de deux ondes qui se propagent dans des directions opposées. Bien que les données initiales soient régulières, des discontinuités apparaissent au cours du temps. La première discontinuité apparaît sur l'onde de droite. Elle est visible au temps $t = 0.36\pi$, tandis que la seconde discontinuité apparaît sur l'onde de gauche au temps $t = 3.4\pi$. Les comportements des schémas LT, LTF et QTF sont similaires et en adéquation avec les résultats issus de [\[44\]](#). Cependant, le schéma LDF semble beaucoup moins précis.

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	2.99×10^{-15}	$8.65E-14$	$4.24E-01$	$3.68E-14$	$3.18E-01$
LDF	1.65×10^{-14}	$5.00E-14$	$4.24E-01$	$1.31E-14$	$3.18E-01$
LTF	1.87×10^{-14}	$7.66E-14$	$4.24E-01$	$2.73E-14$	$3.18E-01$
QTF	2.20×10^{-14}	$3.30E-14$	$4.24E-01$	$1.35E-14$	$3.18E-01$

TABLEAU 5.13 – Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse nulle 5.7.4.1. Détecteurs d'équilibre global et erreurs calculés au temps $T_{\max} = 10$ pour $N = 150$ cellules.

5.7.4.2 Rupture de barrage avec fond en relief.

On présente une rupture de barrage avec une topographie non nulle, une température variable et une force de Coriolis non nulle. On se place sur le domaine $[-1, 1]$, on pose $f = 1$ et $g = 9.81$. La topographie est nulle partout, sauf sur l'intervalle $[-0.4, -0.2]$ où l'on a une bosse

$$z(x) = \begin{cases} 0.5 \cos(10\pi(x + 0.3) + 1) & \text{si } -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La donnée initiale est

$$(h(x), u(x), v(x), \theta(x)) = \begin{cases} (5 - z(x), 0, 1, 3) & \text{si } x \leq 0, \\ (2 - z(x), 0, 4, 5) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On effectue les simulations jusqu'au temps $T_{\max} = 0.05$. Les résultats obtenus sont affichés dans la Figure 5.47. Les quatre schémas capturent bien le choc créé par la solution. On peut noter une différence d'approximation de la variable hv par le schéma LDF, un comportement déjà observé dans les précédents cas-tests.

5.7.5 Schémas d'ordre deux

A présent, on réalise quelques tests pour vérifier que les extensions des différents schémas à l'ordre deux décrites dans la section 5.6 préservent les mêmes états stationnaires que les schémas d'ordre un dont ils sont issus, et ont l'ordre de précision attendu. On pourra également constater le meilleur comportement des schémas d'ordre deux au niveau des chocs.

5.7.5.1 Meilleure approximation des chocs

Qualitativement parlant, les schémas d'ordre deux approchent mieux les chocs que les schémas d'ordre un. C'est ce qu'on peut vérifier ici à travers un exemple. On se place dans le contexte du cas-test 5.7.2.4, dans lequel on réalise une rupture de barrage sur fond plat. On compare dans la Figure 5.48 les schémas d'ordre un et d'ordre deux. On observe que les schémas d'ordre deux approchent le choc avec moins de points que le schéma d'ordre un.

5.7.5.2 État stationnaire géostrophique

On considère l'état stationnaire géostrophique 5.7.3.2. On a vu que pour un tel exemple, une discrétisation de la donnée initiale inhabituelle doit être choisie afin que le détecteur d'équilibre repère qu'il s'agit d'une solution stationnaire discrète. On vérifie que cette discrétisation est bien préservée par le schéma d'ordre deux, comme le montre le Tableau 5.14, obtenu au temps $T_{\max} = 10$. On rappelle que les erreurs observées sur la variable h sont dues à la discrétisation naïve de la solution exacte face à une discrétisation well-balanced de la donnée initiale.

5.7.5.3 État stationnaire en mouvement

Pour vérifier numériquement que les schémas d'ordre deux issus de LDF, LTF et QTF sont fully well-balanced, on considère le cas-test 5.7.3.5 qui est un état stationnaire en mouvement exactement préservé à l'ordre un par ces différents schémas. On représente les solutions approchées obtenues dans la Figure 5.49. Les calculs de détecteur d'équilibre du Tableau 5.15 montrent que les schémas fully well-balanced d'ordre deux

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$3.39E-16$	$7.14E-05$	$3.36E-16$	$4.16E-04$	$1.51E-15$
LDF	$3.14E-16$	$7.14E-05$	$2.82E-16$	$4.16E-04$	$9.85E-16$
LTF	$5.92E-16$	$7.14E-05$	$5.66E-16$	$4.16E-04$	$3.08E-15$
QTF	$3.37E-16$	$7.14E-05$	$3.25E-16$	$4.16E-04$	$1.60E-15$

TABLEAU 5.14 – Ordre 2 : État stationnaire géostrophique 5.7.5.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$ avec le schéma d'ordre deux.

préservent aussi bien la solution que le schéma d'ordre un. En comparant les erreurs du [Tableau 5.11](#) et du [Tableau 5.15](#), on peut noter que le schéma well-balanced LT est plus précis à l'ordre deux.

Schéma	$\mathcal{E}_\infty(T_{\max})$	Erreur L^1		Erreur L^∞	
		h	v	h	v
LT	$5.78E-10$	$4.01E-03$	$6.48E-06$	$2.78E-02$	$1.95E-05$
LDF	$9.11E-15$	$0.00E+00$	$1.54E-15$	$0.00E+00$	$1.19E-14$
LTF	$2.45E-15$	$0.00E+00$	$6.74E-17$	$0.00E+00$	$1.44E-15$
QTF	$2.45E-15$	$7.77E-18$	$3.51E-17$	$6.66E-16$	$1.22E-15$

TABLEAU 5.15 – Ordre 2 : État stationnaire en mouvement 5.7.5.3. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$ avec le schéma d'ordre deux.

5.7.5.4 État stationnaire non détecté

N	Erreur L^1				Erreur L^∞			
	h		v		h		v	
200	$4.06E-04$		$3.33E-03$		$6.21E-04$		$6.23E-03$	
400	$1.98E-04$	1.03	$1.66E-03$	0.99	$3.14E-04$	0.98	$2.97E-03$	1.06
800	$9.77E-05$	1.02	$8.34E-04$	1.00	$1.58E-04$	0.99	$1.43E-03$	1.05
1600	$4.85E-05$	1.01	$4.17E-04$	1.00	$7.90E-05$	0.99	$6.99E-04$	1.03
3200	$2.41E-05$	1.00	$2.08E-04$	1.00	$3.95E-05$	1.00	$3.43E-04$	1.02
6400	$1.20E-05$	1.00	$1.04E-04$	1.00	$1.97E-05$	1.00	$1.69E-04$	1.01
200	$4.74E-04$		$3.15E-03$		$1.19E-03$		$5.21E-03$	
400	$2.31E-04$	1.03	$1.61E-03$	0.96	$6.31E-04$	0.92	$2.70E-03$	0.95
800	$1.13E-04$	1.02	$8.18E-04$	0.98	$3.27E-04$	0.95	$1.39E-03$	0.95
1600	$5.63E-05$	1.01	$4.13E-04$	0.99	$1.68E-04$	0.96	$7.16E-04$	0.97
3200	$2.79E-05$	1.00	$2.08E-04$	0.99	$8.54E-05$	0.97	$3.64E-04$	0.98
6400	$1.39E-05$	1.00	$1.04E-04$	0.99	$4.32E-05$	0.99	$1.84E-04$	0.98

TABLEAU 5.16 – Ordre 2 : État stationnaire 5.7.5.4. Erreurs et ratios calculés au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma LDF. Le cadre du haut correspond aux résultats fournis par le schéma d'ordre un, celui du bas au schéma d'ordre deux.

On s'intéresse cette fois à un état stationnaire qui n'est pas complètement détecté par le schéma. On prend comme exemple le cas-test de la [sous-sous-section 5.7.3.3](#), qui est un état stationnaire continu au repos avec une topographie périodique. La discrétisation de la donnée initiale n'est pas un état stationnaire discret puisque $\mathcal{E}_\infty(0) = 2.58 \times 10^{-6}$. Ainsi, il est possible de réaliser un calcul d'erreur pour les différents schémas. On présente

N	Erreur L^1 et ratios				Erreur L^∞ et ratios			
	h		v		h		v	
200	1.00E-05		1.49E-05		1.51E-05		2.95E-05	
400	2.40E-06	2.01	3.69E-06	2.01	3.76E-06	2.01	6.62E-06	2.15
800	5.87E-07	2.00	9.17E-07	2.01	9.37E-07	2.00	1.54E-06	2.09
1600	1.45E-07	2.00	2.28E-07	2.00	2.33E-07	2.00	3.80E-07	2.02
3200	3.61E-08	2.00	5.70E-08	2.00	5.83E-08	2.00	9.49E-08	2.00
6400	9.00E-09	2.00	1.42E-08	2.00	1.45E-08	2.00	2.37E-08	2.00
200	9.98E-06		1.37E-05		1.94E-05		2.48E-05	
400	2.51E-06	1.98	3.44E-06	1.99	5.10E-06	1.92	6.14E-06	2.01
800	6.30E-07	1.99	8.62E-07	1.99	1.30E-06	1.96	1.52E-06	2.00
1600	1.57E-07	1.99	2.15E-07	2.00	3.30E-07	1.98	3.80E-07	2.00
3200	3.95E-08	1.99	5.38E-08	2.00	8.31E-08	1.99	9.49E-08	2.00
6400	9.88E-09	1.99	1.34E-08	2.00	2.08E-08	1.99	2.37E-08	2.00

TABLEAU 5.17 – Ordre 2 : État stationnaire 5.7.5.4. Erreurs et ratios calculés au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma QTF. Le cadre du haut correspond aux résultats fournis par le schéma d'ordre un, celui du bas au schéma d'ordre deux.

dans le [Tableau 5.16](#) les erreurs obtenues pour le schéma LDF et dans le [Tableau 5.17](#) les erreurs pour le schéma QTF. Dans les deux cas, on compare le schéma d'ordre un et d'ordre deux. On observe que le schéma QTF d'ordre un a une meilleure précision que celle attendue pour cet exemple particulier. À l'inverse, le schéma LDF d'ordre deux a une précision moins bonne que celle souhaitée. Cela peut s'expliquer ainsi : le détecteur d'équilibre étant tout de même assez proche de zéro, la procédure de reconstruction mène à des états reconstruits proches de l'approximation constante par cellules. Ainsi, la montée en ordre peut échouer pour ce genre de problème, suffisamment proche de l'équilibre pour que ce soit le schéma d'ordre un qui soit utilisé, mais pas assez pour être préservé exactement.

5.7.6 Bilan

Dans le Chapitre 5, nous avons présenté la construction des quatre schémas numériques LT, LDF, LTF et QTF, dans cet ordre. Chacun d'entre eux a été créé pour pallier un défaut du précédent. Puis nous les avons testés sur divers exemples. L'apport des schémas LDF, LTF et QTF se situe au niveau de la préservation et de la capture d'états stationnaires en mouvement, avec force de Coriolis. Ainsi, pour les cas-tests numériques faisant intervenir des états stationnaires au repos ou des discontinuités, l'objectif était de vérifier que les schémas se comportaient de façon similaire à ce que l'on peut trouver dans la littérature. Pour les solutions à l'équilibre en mouvement, nous avons comparé nos résultats au schéma LT simplement well-balanced, afin de mettre en avant les bénéfices de l'utilisation de schémas fully well-balanced dans de tels contextes.

Nous avons effectivement constaté au travers de cas-tests stationnaires en mouvement que le schéma LT n'est pas efficace pour préserver ([Figure 5.37](#)) ou capturer ([Figure 5.19](#), [Figure 5.28](#), [Figure 5.39](#)) ce type de solution sur des maillages grossiers. Le premier schéma fully well-balanced (LDF) préserve bien ces états stationnaires, mais présente des pertes de précision vis-à-vis du schéma LT sur certains états stationnaires au repos, comme sur la [Figure 5.35](#). C'est ce qui nous a poussé à traiter l'évolution de la variable v différemment. Les imprécisions du schéma LDF obtenues pour les cas-tests 5.7.3.3 (voir [Figure 5.35](#)), 5.7.4.1 (voir [Figure 5.46](#)) et 5.7.4.2 (voir [Figure 5.47](#)), sont certainement dues au problème de continuité présent dans la définition des vitesses transverses intermédiaires v_L^* et v_R^* . Nous pouvons d'ailleurs observer que le schéma LTF, dans lequel nous avons traité la variable v de la même façon que dans le schéma LT, se comporte bien mieux sur de tels cas-tests, et donne de manière générale des résultats plutôt satisfaisants. Avec le schéma QTF, nous avons cherché à éliminer le problème de continuité présent dans la définition du terme source \mathcal{S}^{hu} et des hauteurs d'eau h_L^* et h_R^* . Ce problème de continuité apparaît lors des changements de régimes, comme on peut l'observer sur la [Figure 5.32](#). Pour ce cas-test, le schéma QTF donne de meilleurs résultats, bien que le problème de définition de h lorsque $\text{Fr} = 1$ soit toujours présent à la limite quand le terme source s'annule. Il semble également que ce schéma capture mieux les états stationnaires (voir [Tableau 5.2](#)), soit plus précis (voir [Figure 5.25](#), [Figure 5.43](#)),

et gère correctement les changements de régime (voir [Figure 5.41](#)), même s'il reste quelques défauts (pour l'instant d'origine inexpliquée) à corriger (voir [Figure 5.42](#)).

Pour finir, nous avons vérifié que les schémas d'ordre deux issus des différents schémas d'ordre un préservent les états stationnaires attendus (voir cas-tests [5.7.5.2](#) et [5.7.5.3](#)). Nous avons également souligné que lorsqu'une solution continue à l'équilibre n'est pas tout à fait une solution stationnaire discrète, l'extension à l'ordre deux du schéma ne donne pas forcément la précision recherchée (voir [Tableau 5.16](#)). Un travail sur l'expression du détecteur d'équilibre peut être mené pour tenter d'obtenir de meilleurs résultats.

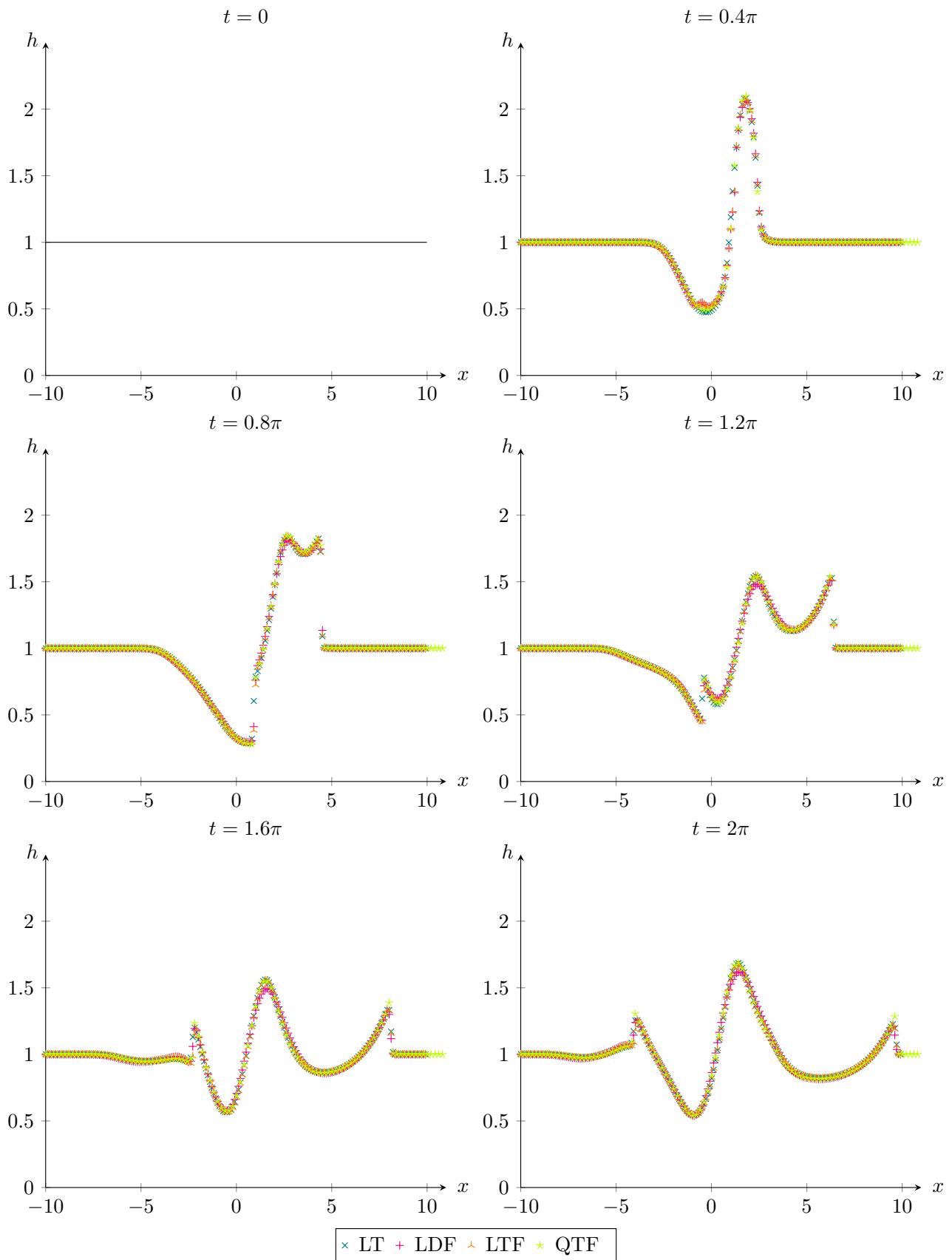


FIGURE 5.40 – Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Hauteur d'eau aux temps $t = 0, 0.4\pi, 0.8\pi, 1.2\pi, 1.6\pi, 2\pi$. Zoom sur l'intervalle $[-10, 10]$.

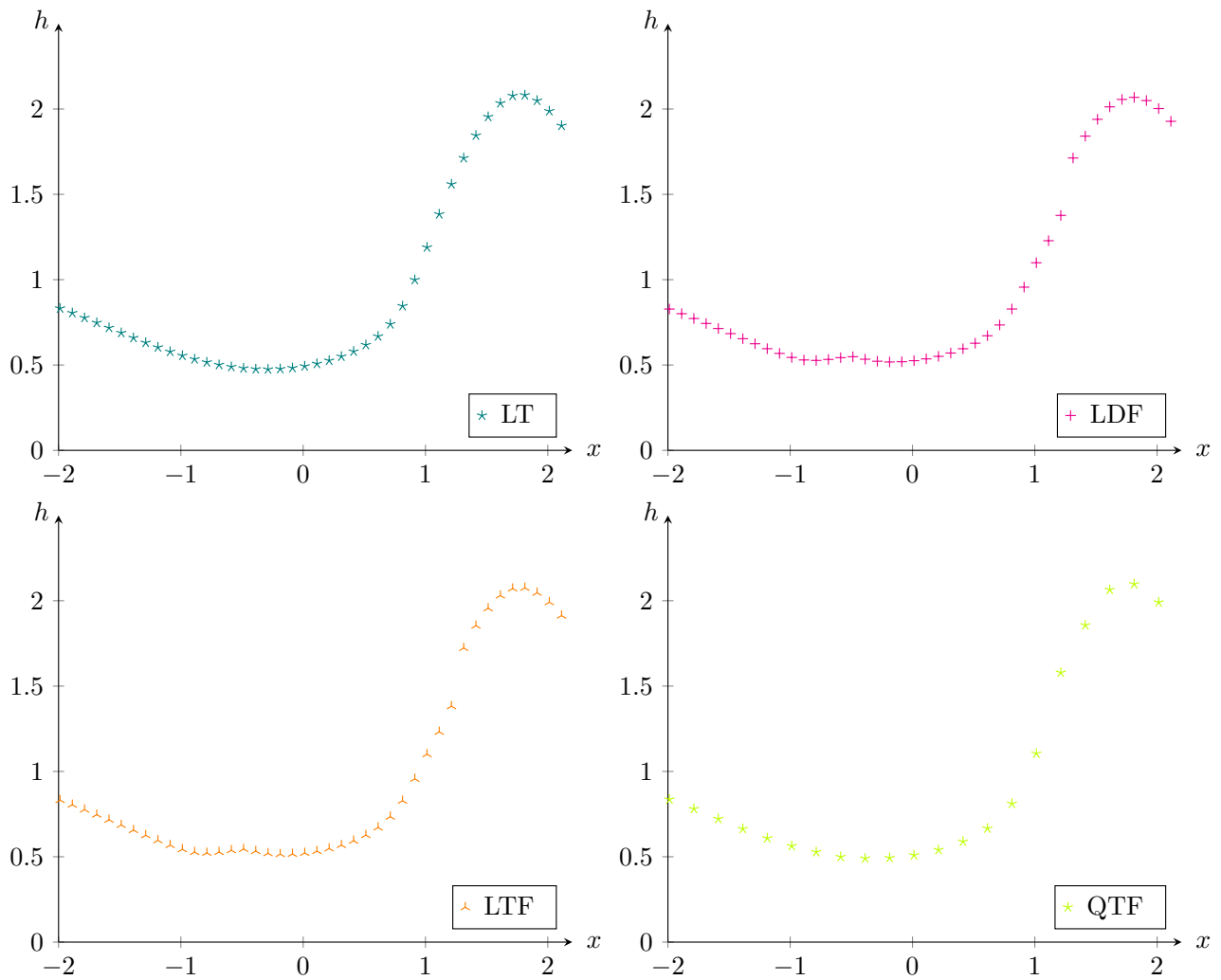


FIGURE 5.41 – Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Hauteur au temps $T_{\max} = 0.4\pi$. Comparaison des différents schémas sur l'intervalle $[-2, 2]$. Dans cette zone, le régime est sous-critique, sur-critique puis de nouveau sous-critique.

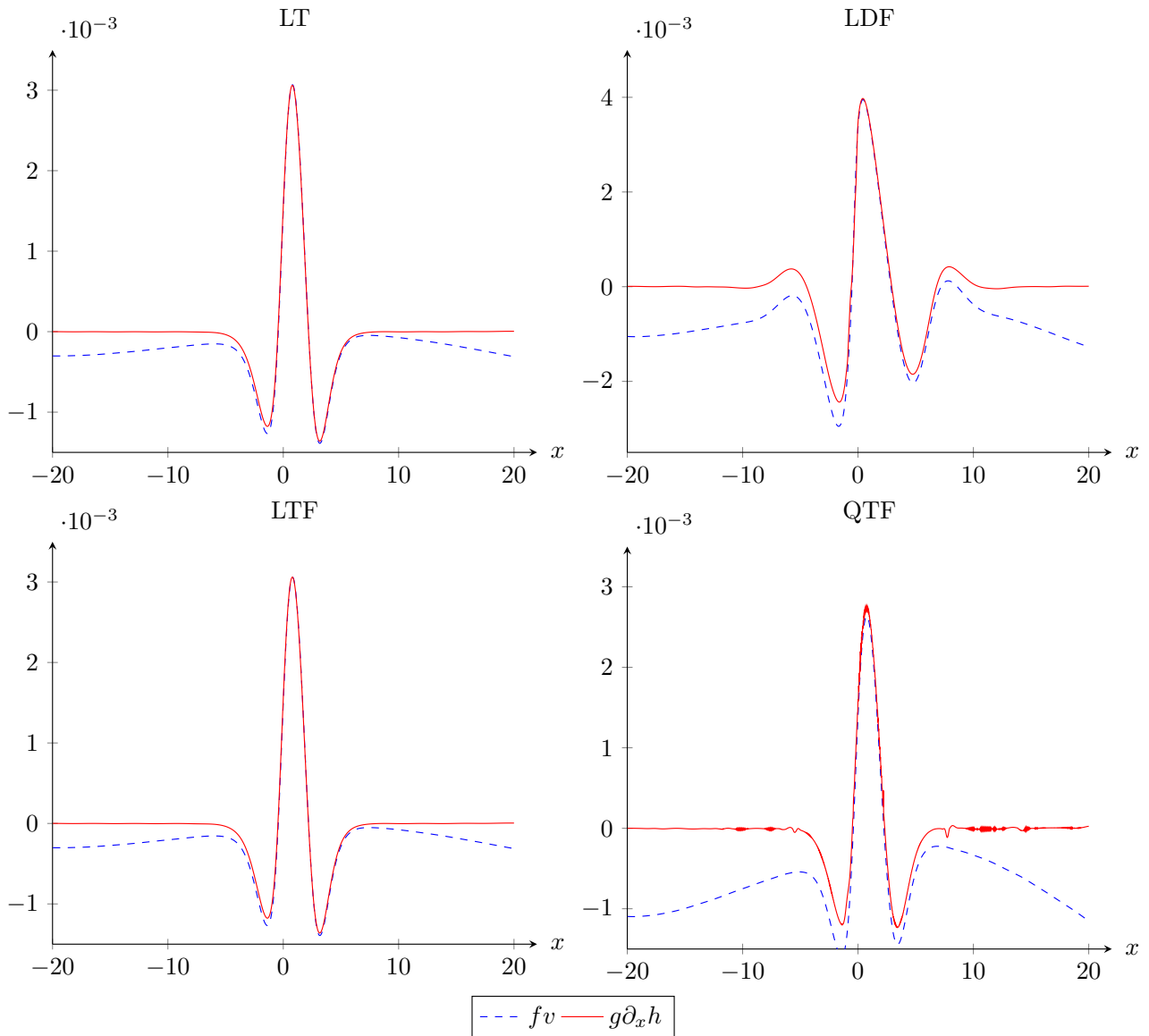


FIGURE 5.42 – Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Quantités fv et $\partial_x h$ au temps $T_{\max} = 69.2\pi$. Comparaison des différents schémas sur l'intervalle $[-20, 20]$.

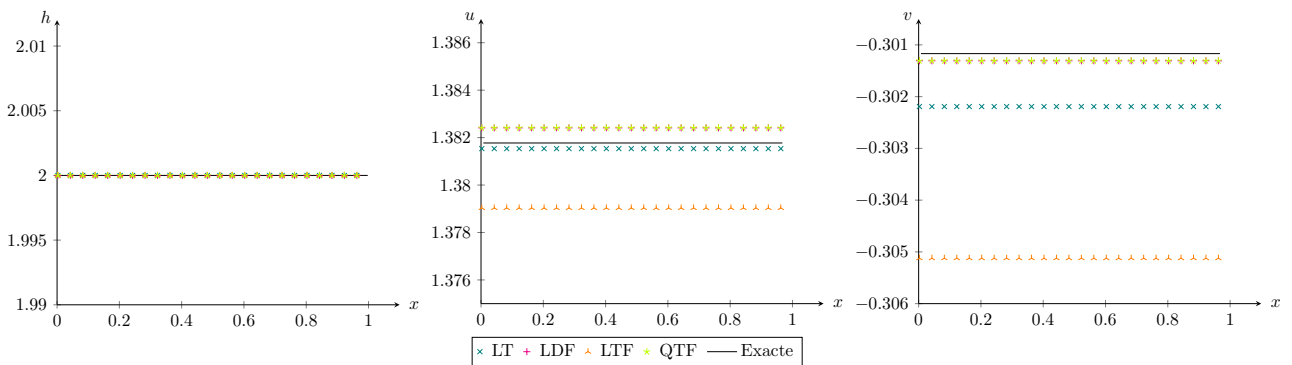


FIGURE 5.43 – Modèle RSW : État stationnaire en espace 5.7.3.8. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (milieu), vitesse transverse (droite) au temps $T_{\max} = 1$.

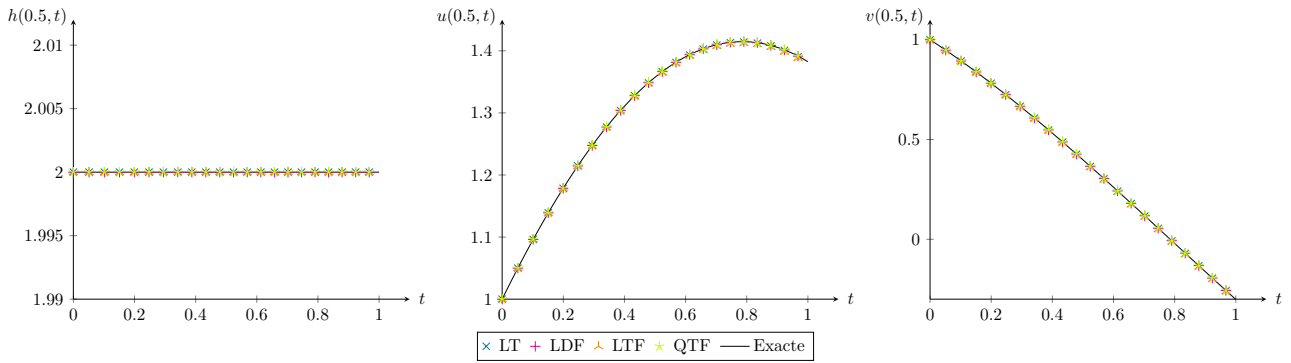


FIGURE 5.44 – Modèle RSW : État stationnaire en espace 5.7.3.8. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (milieu), vitesse transverse (droite) calculées au point $x = 0.5$ pour $t \in [0, 1]$.

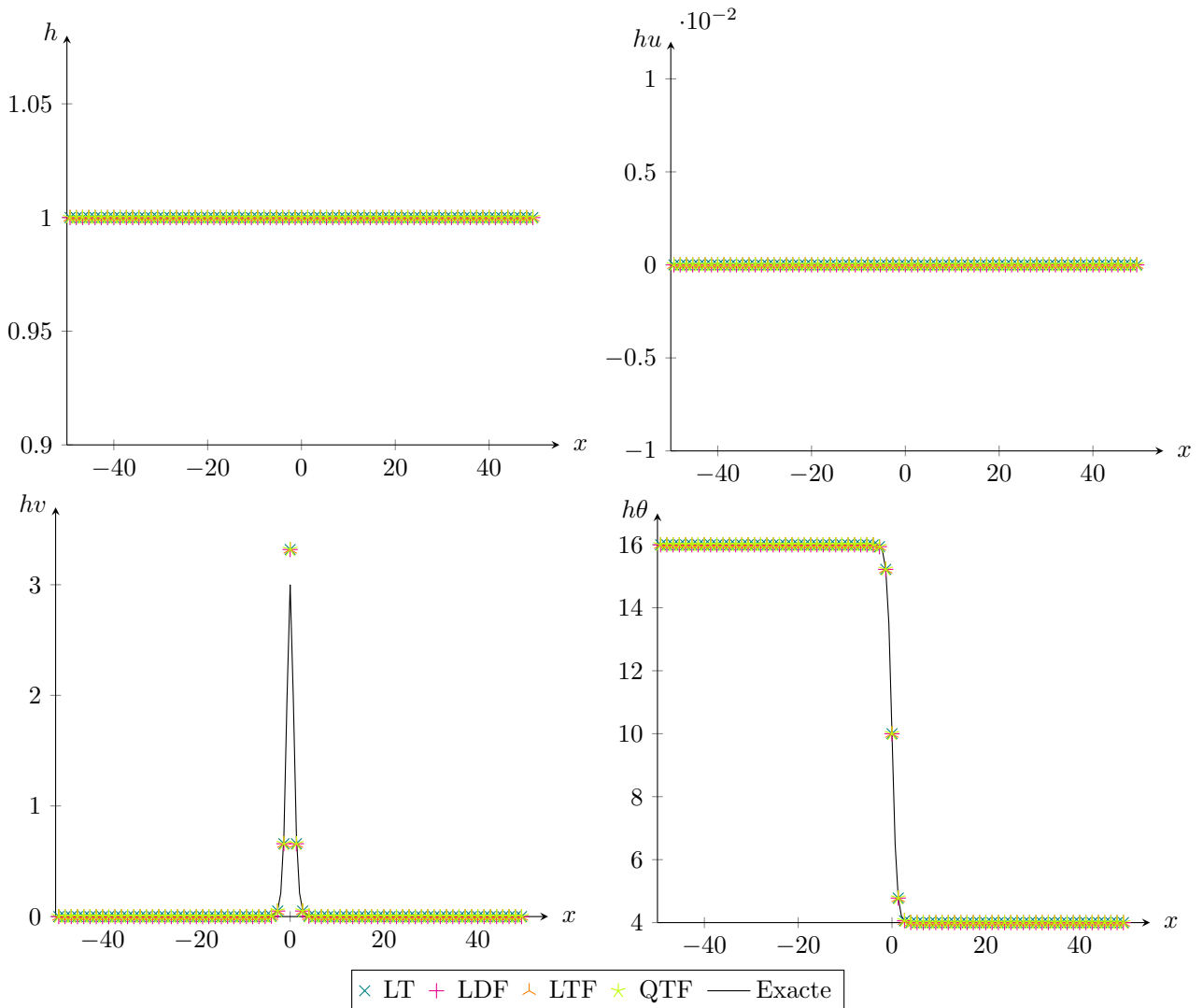


FIGURE 5.45 – Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse nulle 5.7.4.1. Hauteur (en haut à gauche), débit (en haut à droite), débit transverse (en bas à gauche), variable $h\theta$ (en bas à droite).

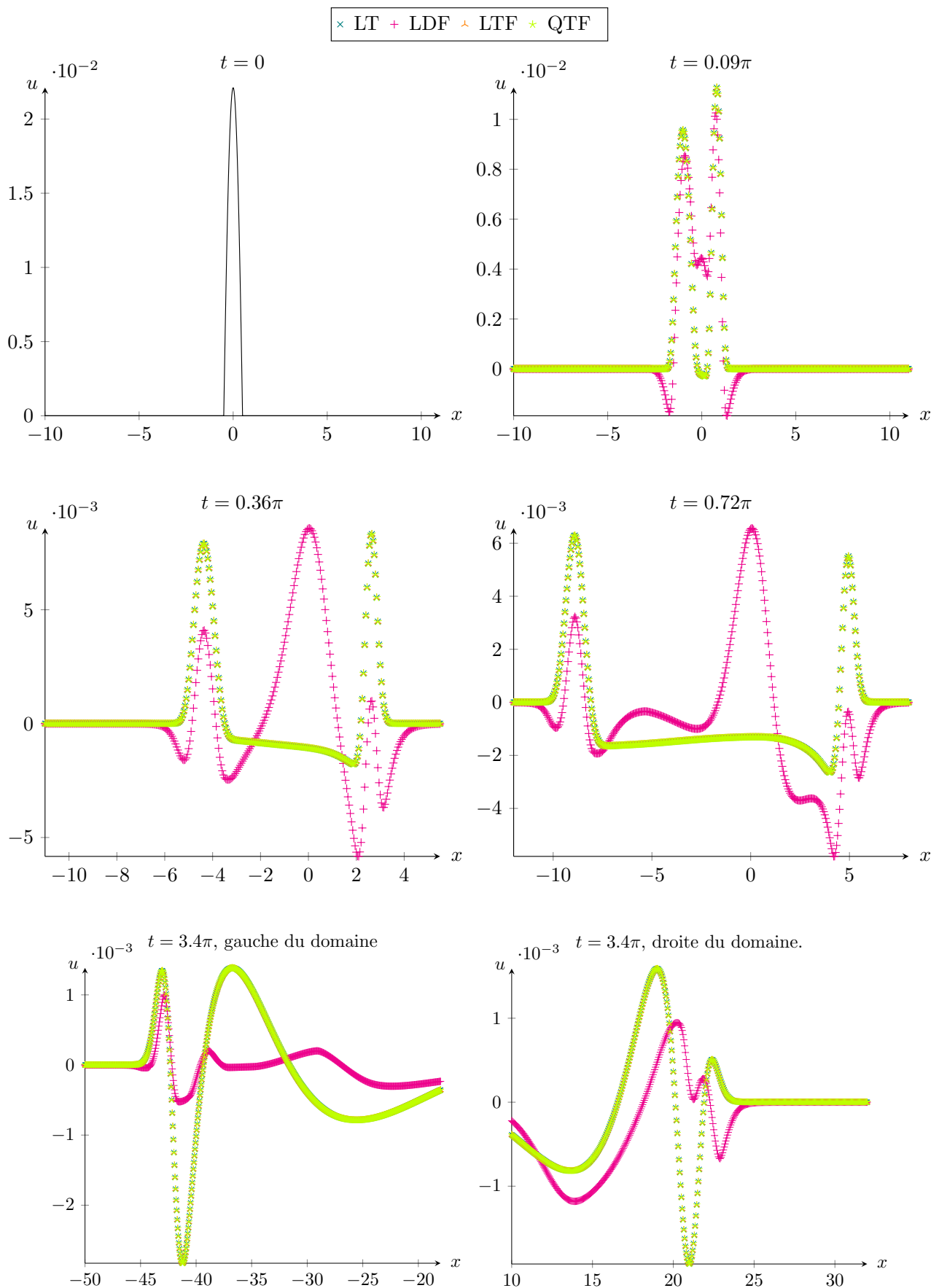


FIGURE 5.46 – Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse non nulle 5.7.4.1. Vitesse tangentielle calculée aux temps $t = 0, 0.09\pi, 0.36\pi, 0.72\pi, 3.4\pi$.

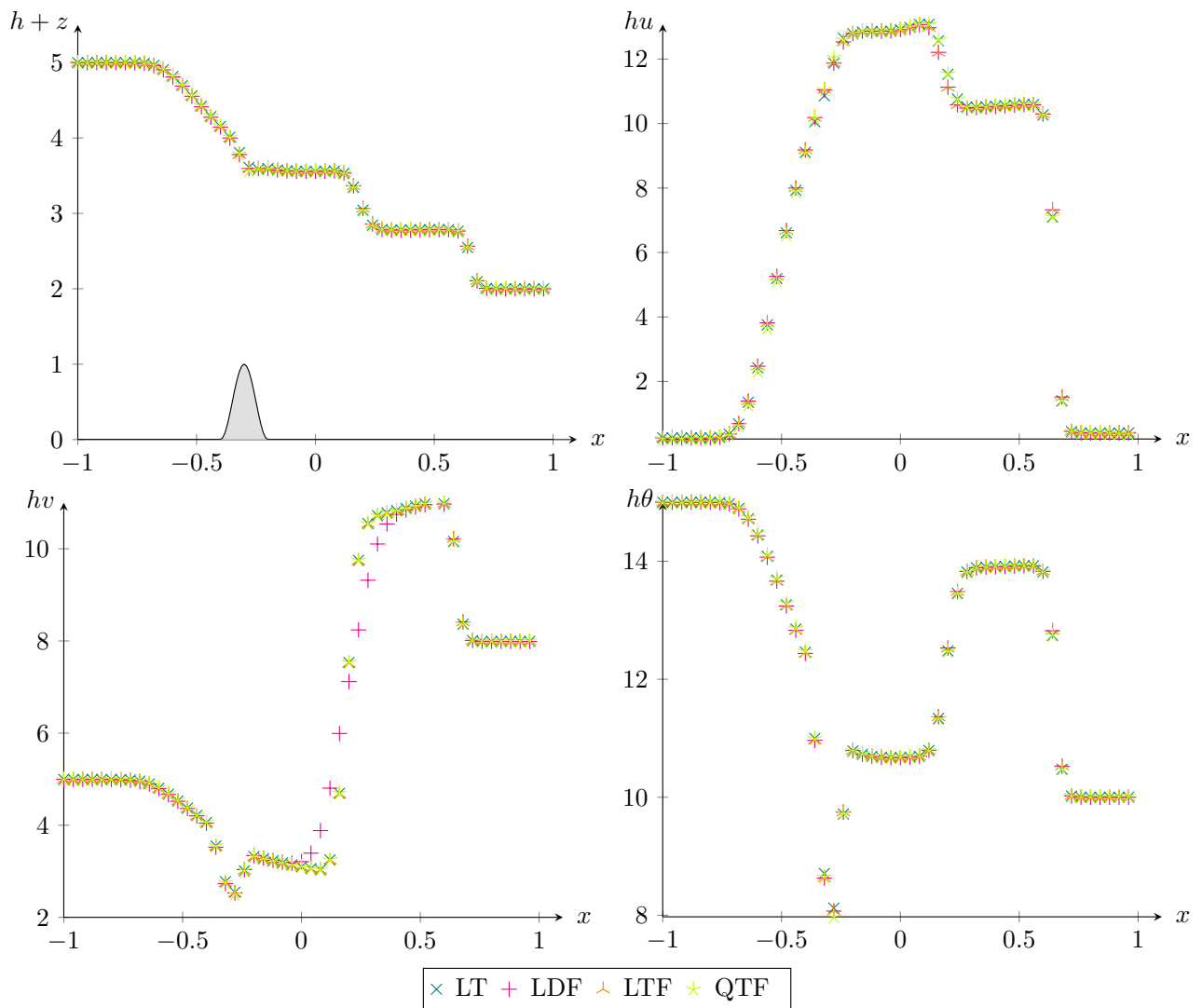


FIGURE 5.47 – Modèle TRSW : Rupture de barrage avec fond en relief 5.7.4.2. Hauteur (en haut à gauche), débit (en haut à droite), débit transverse (en bas à gauche), variable $h\theta$ (en bas à droite) au temps $T_{\max} = 0.05$.

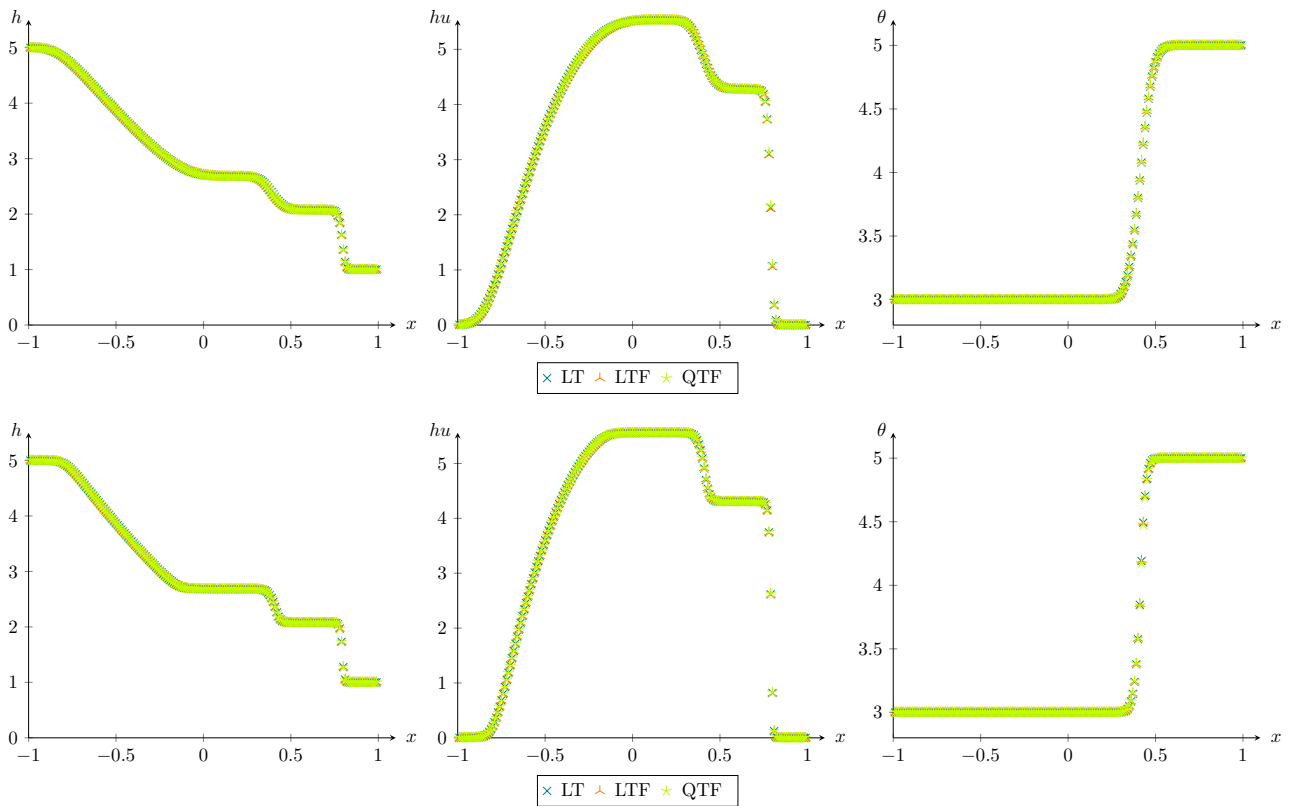


FIGURE 5.48 – Ordre 2 : Rupture de barrage avec un fond plat 5.7.5.1 au temps $T_{\max} = 0.05$. Schémas d'ordre un (haut) et schémas d'ordre un (bas). Hauteur (gauche), débit (centre), température (droite).

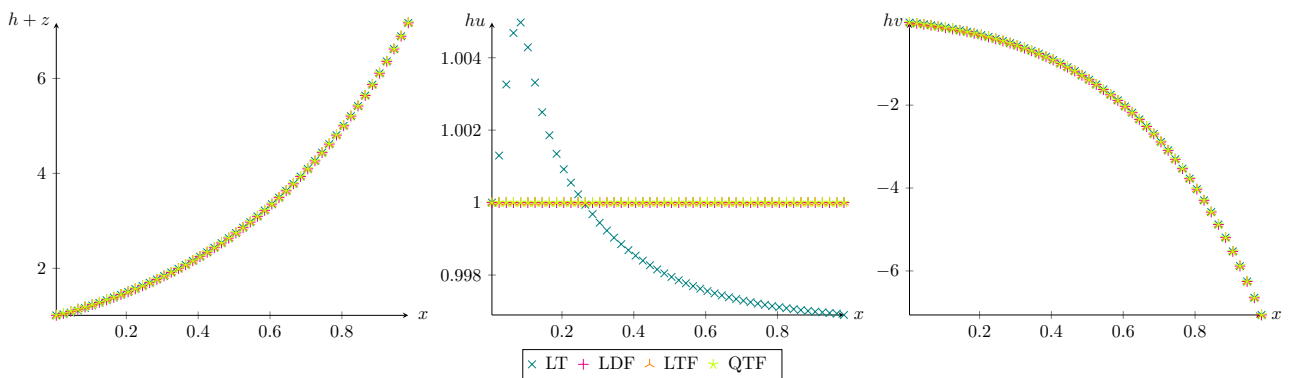


FIGURE 5.49 – Ordre 2 : État stationnaire en mouvement 5.7.5.3 au temps $T_{\max} = 1$.

Schémas numériques pour les modèles 2D

Sommaire du présent chapitre

6.1 Généralités sur les schémas 2D avec terme source	131
6.2 Schéma 2D issu d'un flux 1D de type Godunov	134
6.3 Maillage cartésien	137
6.3.1 Notations cartésiennes et réécriture du schéma 2D	137
6.3.2 Extension à l'ordre deux	139
6.4 Résultats numériques	141
6.4.1 Équilibre géostrophique par direction	141
6.4.2 Équilibre en mouvement	142
6.4.3 Perturbation d'un lac au repos	143
6.4.4 Vortex stationnaire	143

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la construction de schémas numériques pour les systèmes 2D (1.21) et (1.22). Ainsi, nous commencerons par rappeler le contexte des schémas 2D avec termes sources, dont on peut retrouver une description dans [35, 48, 13]. On présentera ces schémas en considérant l'espace \mathbb{R}^2 tout entier, bien qu'en pratique les simulations numériques se font sur un domaine borné et nécessitent d'introduire des conditions de bord. Nous travaillerons plus particulièrement sur les schémas de type Godunov 2D, issus de ceux obtenus en 1D, grâce à l'invariance par rotation des systèmes étudiés. Pour ces schémas, nous établirons que sur des maillages non structurés, une CFL optimale du même type que celle de [10] pour des systèmes sans terme source peut être obtenue. Puis, nous aborderons la question de la préservation des états stationnaires en 2D. Nous nous restreindrons alors au cas des maillages cartésiens pour lesquels on peut donner des résultats de préservation d'états stationnaires par direction. Enfin, nous proposerons une montée en ordre du schéma par la méthode MUSCL standard, afin de proposer des résultats numériques plus précis.

6.1 Généralités sur les schémas 2D avec terme source

On considère un système hyperbolique 2D de la forme

$$\partial_t w + \nabla \cdot F(w) = \mathfrak{S}(w, Z), \tag{6.1}$$

avec $F = (F, G)$ le flux 2D et \mathfrak{S} le terme source 2D, et une condition initiale

$$w(x, 0) = w_0(x). \tag{6.2}$$

Ici, le vecteur $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est la variable d'espace, $w(x, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ est le vecteur des inconnues, $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont les flux respectifs dans les directions x et y , $\mathfrak{S} : \Omega \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ est le terme source, et $Z(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un vecteur de fonctions données et indépendantes du temps. L'espace Ω des états admissibles est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d convexe et invariant, au sens où, si la condition initiale w_0 est à valeurs dans Ω ,

alors la solution $w(x, t)$ du problème de Cauchy (6.1)-(6.2) reste dans Ω . Pour les équations de Saint-Venant, l'espace des états admissibles est donné par

$$\Omega = \{(h, hu, hv) \in \mathbb{R}^3, h > 0\}, \quad \text{ou} \quad \Omega = \{(h, hu, hv, h\theta) \in \mathbb{R}^4, h > 0, \theta > 0\}.$$

Une fois de plus, les termes sources que l'on considérera ici sont la topographie z et la force de Coriolis f . Comme dans le cas 1D, on introduira une fonction auxiliaire ι afin de réécrire le terme de Coriolis comme une dérivée, et on posera $Z = (z, \iota)^T$. Cette manipulation sera effectuée localement à chaque interface et détaillée par la suite.

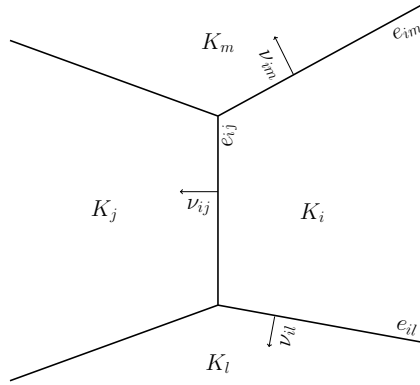


FIGURE 6.1 – Maillage 2D non structuré.

On introduit maintenant la discrétisation du problème 2D. On note K_i la i -ème cellule du maillage, dont l'aire est notée $|K_i|$. L'arête commune à deux cellules K_i et K_j est notée e_{ij} , et sa longueur $|e_{ij}|$. Le vecteur ν_{ij} désigne la normale sortante unitaire de l'arête e_{ij} allant de K_i vers K_j (voir Figure 6.1). On note $\gamma(i)$ l'ensemble des indices des cellules voisines de K_i . Le temps est discrétisé par une suite $(t^n)_{n \geq 0}$ où $t^0 = 0$ et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, avec Δt un pas de temps qui sera choisi selon une condition CFL précisée plus tard. Enfin, on discrétise les variables sources et la condition initiale en les moyennant sur chaque cellule

$$Z_i = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} Z(x) dx, \quad w_i^0 = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} w(x, 0) dx.$$

Le vecteur w_i^n désigne l'approximation de la moyenne de la solution sur la cellule K_i au temps t^n

$$w_i^n \approx \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} w(x, t^n) dx.$$

On note $\tilde{w}_i^n := (w_i^n, Z_i)$ et $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^p$. Étant donnée une telle approximation, on cherche à déterminer l'approximation sur la cellule K_i au temps suivant : w_i^{n+1} . Pour cela, on intègre le système (6.1) sur $K_i \times [t^n, t^{n+1}]$, ce qui donne

$$\frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} w(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} w(x, t^n) dx - \frac{1}{|K_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} \nabla \cdot \mathbb{F}(w(x, t)) dx dt + \frac{1}{|K_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} \mathfrak{S}(w(x, t), Z(x)) dx dt.$$

D'après le théorème de flux-divergence, on peut réécrire le terme faisant intervenir le flux 2D comme

$$\int_{K_i} \nabla \cdot \mathbb{F}(w(x, t)) dx = \sum_{j \in \gamma(i)} \int_{e_{ij}} \mathbb{F}(w(x, t)) \cdot \nu_{ij} ds.$$

À chaque interface e_{ij} on considère que l'on a localement un problème 1D à résoudre. Ainsi, on utilise l'approximation

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{e_{ij}} \mathbb{F}(w) \cdot \nu_{ij} ds \approx \Delta t |e_{ij}| \varphi(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij}), \quad (6.3)$$

où $\varphi(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij})$ est un flux numérique 1D dans la direction ν_{ij} . Cela revient à approcher l'intégrale en temps

et en espace du flux 2D par

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} \nabla \cdot \mathcal{F}(w(x, t)) dx dt \approx \Delta t \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \varphi(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij}).$$

Concernant le terme source, on choisit d'approcher sa double intégrale en temps et en espace sur une cellule K_i en faisant une somme des contributions de termes sources 1D à chaque interface de K_i . Cela donne

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K_i} \mathcal{S}(w(x, t), Z(x)) dx dt \approx \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \sigma(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij})(Z_j - Z_i),$$

avec $\sigma(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij})$ un terme source numérique 1D dans la direction ν_{ij} , et $Z_i = (z_i, t_i)$ et $Z_j = (z_j, t_j)$. La fonction $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, localement définie à l'interface e_{ij} , est telle que sa dérivée dans la direction ν_{ij} vaut un. Finalement, on obtient le schéma 2D sous la forme

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \varphi(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij}) + \frac{\Delta t}{2|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \sigma(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij})(Z_j - Z_i). \quad (6.4)$$

En l'absence de termes source, le schéma (6.4) doit être conservatif, c'est-à-dire qu'il doit vérifier

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |K_i| w_i^{n+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |K_i| w_i^n,$$

ou de façon équivalente

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \varphi(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n, \nu_{ij}) = 0, \quad (6.5)$$

ce qui nous mène à la définition suivante.

Définition 6.1.1. Un schéma numérique 2D de la forme (6.4) est dit conservatif si

$$\varphi(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu) = -\varphi(\tilde{w}_R, \tilde{w}_L, -\nu), \quad (6.6)$$

pour tout $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \in \tilde{\Omega}^2$ tels que $Z_L = Z_R$.

On vérifie facilement que (6.6) suffit à assurer (6.5), puisqu'à chaque interface on a deux flux qui se compensent.

D'autre part, les flux et terme source numériques $\varphi(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu)$ et $\sigma(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu)$ doivent être consistants avec les flux et terme source continus au sens suivant.

Définition 6.1.2. Soient $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \tilde{w}) \in \tilde{\Omega}^3$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{S}^1$. Le schéma 2D (6.4) est consistant avec le système (6.1) si

$$\varphi(\tilde{w}, \tilde{w}, \nu) = \nu_1 F(w) + \nu_2 G(w),$$

et

$$\frac{1}{2} (\sigma(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu)(Z_R - Z_L) + \sigma(\tilde{w}_R, \tilde{w}_L, -\nu)(Z_L - Z_R)) = \nu_1 S(w)[Z] + \nu_2 T(w)[Z] + o([Z]),$$

quand $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) \rightarrow (\tilde{w}, \tilde{w})$.

Cette définition de consistance suffit pour assurer que lorsque l'on raffine le maillage, le schéma (6.4) approche la le problème (6.1)-(6.2) (voir [13]).

Il reste à définir les flux et termes source numériques. En pratique, pour des systèmes invariants par rotation comme ceux que l'on étudie ici (voir sous-section 2.4.2), on peut définir les flux ϕ et termes sources σ dans n'importe quelle direction à partir des flux et termes sources 1D définis dans une direction donnée. Pour cela, on considère un schéma numérique 1D de la forme

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1}^n, \tilde{w}_i^n)) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1}^n, \tilde{w}_i^n)(Z_i - Z_{i-1}) + \mathcal{S}(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_{i+1}^n)(Z_{i+1} - Z_i)). \quad (6.7)$$

Soient e une arête quelconque du maillage et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ sa normale sortante unitaire. On introduit la matrice

de rotation

$$\mathcal{R}^\nu := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & -\nu_2 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}^\nu := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & -\nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ lorsque la température est variable,}$$

et on définit le flux 2D et le terme source 2D entre deux états \tilde{w}_L et \tilde{w}_R à l'interface e par

$$\varphi(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu) = \mathcal{R}^\nu \mathcal{F}(\tilde{w}_L^\nu, \tilde{w}_R^\nu), \quad (6.8)$$

$$\sigma(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu)(Z_R - Z_L) = \mathcal{R}^\nu (\mathcal{S}(\tilde{w}_L^\nu, \tilde{w}_R^\nu))(Z_R - Z_L), \quad (6.9)$$

où l'on note $\tilde{w}^\nu = ((\mathcal{R}^\nu)^{-1} w, Z)$. Cette opération consiste à effectuer une rotation pour se retrouver localement dans le cas d'un problème de Riemann 1D à résoudre, calculer les flux et termes sources qui en découlent, puis revenir à la position initiale. Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement au cas où le schéma 1D utilisé est un schéma de type Godunov.

6.2 Schéma 2D issu d'un flux 1D de type Godunov

La partie précédente donne un moyen de définir des schémas numériques 2D à partir de n'importe quel flux 1D. Dans notre cas, nous utiliserons les flux et termes sources 1D définis au Chapitre 5, issus de schémas de type Godunov. Précisons que dans ce cadre, le flux 1D $\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ peut s'écrire de façon centrée, comme dans la Proposition 4.4.1, ou de façon décentrée, comme dans la Remarque 4.4.1. Pour les schémas 2D sur maillage non structuré, une écriture décentrée du flux permet d'obtenir une CFL optimale, en un sens qui sera précisé par la suite. Ainsi, pour obtenir l'expression de φ , nous utiliserons l'expression décentrée (4.22) du flux que l'on rappelle ici

$$\mathcal{F}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R) = F(w_L) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} w_L - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t} \tilde{w}_L, \tilde{w}_R \right) dx + \frac{\mathcal{S}(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)(Z_R - Z_L)}{2}. \quad (6.10)$$

valable si la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_L|, |\lambda_R|) \leq \frac{1}{2}, \quad (6.11)$$

est vérifiée. Remarquons que la dimension Δx qui intervient dans les deux expressions précédentes n'a pas d'équivalent clair en 2D. Pour le moment, nous nous contenterons de noter δ la donnée du maillage 2D qui joue le rôle de Δx en 1D, et qui sera définie plus loin. On désignera dans la suite le solveur de Riemann approché dans la direction ν par

$$\widehat{\mathcal{W}}_R^\nu \left(\frac{x}{\Delta t}, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R \right) := \mathcal{R}^\nu \widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{\Delta t}, ((\mathcal{R}^\nu)^{-1} w_L, Z_L), ((\mathcal{R}^\nu)^{-1} w_R, Z_R) \right),$$

et on notera

$$h^\nu(w) := \nu_1 F(w) + \nu_2 G(w),$$

le flux 2D dans la direction $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. L'invariance par rotation du système 2D (6.1) se traduit notamment par la relation

$$\mathcal{R}^\nu F((\mathcal{R}^\nu)^{-1} w) = h^\nu(w).$$

Ainsi, sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\delta} \max(|\lambda_L|, |\lambda_R|) \leq \frac{1}{2},$$

où λ_L et λ_R désignent les vitesses d'ondes maximales du solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R^\nu$, le flux numérique 2D (6.8) associé au flux décentré (6.10) s'écrit

$$\varphi(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu) = h^\nu(w_L) + \frac{\delta}{2\Delta t} w_L - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\delta/2}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^\nu \left(\frac{x}{\Delta t}, \tilde{w}_L, \tilde{w}_R \right) dx + \frac{1}{2} \sigma(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R, \nu)(Z_R - Z_L). \quad (6.12)$$

Nous allons maintenant vérifier que cette définition du flux mène à un schéma qui a de bonnes propriétés. Tout d'abord, on s'intéresse à la conservativité. Il suffit de vérifier que le solveur de Riemann approché satisfait

un certain critère pour obtenir cette propriété.

Proposition 6.2.1. *Si le solveur de Riemann approché vérifie*

$$\int_{-\delta/2}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^v \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) dx = \int_0^{\delta/2} \widehat{\mathcal{W}}_R^{-v} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right) dx, \quad (6.13)$$

alors le flux numérique φ défini par (6.12) est conservatif au sens de la Définition 6.1.1.

Démonstration. On veut montrer que le flux φ vérifie la relation de conservativité (6.6). Commençons par remarquer que le solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R^v$ calculé dans la direction v vérifie la relation de consistance faible

$$\frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \widehat{\mathcal{W}}_R^v \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) = \frac{w_L + w_R}{2} - \frac{\Delta t}{\delta} (h^v(w_R) - h^v(w_L)) + \frac{\Delta t}{\delta} \sigma(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R, v)(Z_R - Z_L), \quad (6.14)$$

analogue à la relation de consistance faible (4.16) satisfaite par le solveur $\widehat{\mathcal{W}}_R$. On suppose que les termes sources sont nuls i.e $Z_L = Z_R$. Par définition du flux, on a

$$\varphi(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L, -v) = h^{-v}(w_R) + \frac{\delta}{2\Delta t} w_R - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\delta/2}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^{-v} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right) dx,$$

qui peut aussi s'écrire

$$\varphi(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L, -v) = h^{-v}(w_R) + \frac{\delta}{2\Delta t} w_R - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \widehat{\mathcal{W}}_R^{-v} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right) dx + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\delta/2} \widehat{\mathcal{W}}_R^{-v} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right) dx.$$

Grâce à la consistance faible (6.14), on obtient

$$\varphi(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L, -v) = -h^v(w_L) - \frac{\delta}{2\Delta t} w_L + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\delta/2} \widehat{\mathcal{W}}_R^{-v} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right) dx.$$

On utilise la propriété (6.13) pour conclure que

$$\varphi(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L, -v) = -\varphi(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R, v).$$

□

Remarque 6.2.1. Les solveurs de Riemann construits dans le Chapitre 5 vérifient la condition (6.13), puisqu'ils vérifient en particulier que

$$\widehat{\mathcal{W}}_R \left(\frac{x}{t}, \widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R \right) = -\widehat{\mathcal{W}}_R \left(-\frac{x}{t}, \widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L \right).$$

Vérifions désormais que le schéma 2D issu d'un schéma de type Godunov 1D est consistant au sens de la Définition 6.1.2. On montre facilement la consistance du schéma 2D avec le système (6.1), puisque d'après la définition (6.12) du flux, on a

$$\varphi(\widetilde{w}, \widetilde{w}, v) = h^v(w) = v_1 F(w) + v_2 G(w).$$

La consistance du terme source est vérifiée dès lors que le terme source 1D est consistant strictement au sens de la Définition 4.2.1, puisque l'on peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma(\widetilde{w}_L, \widetilde{w}_R, v)(Z_R - Z_L) + \frac{1}{2} \sigma(\widetilde{w}_R, \widetilde{w}_L, -v)(Z_L - Z_R) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{R}^v \left(\mathcal{S}(\widetilde{w}_L^v, \widetilde{w}_R^v) \right) (Z_R - Z_L) + \frac{1}{2} \mathcal{R}^{-v} \left(\mathcal{S}(\widetilde{w}_R^{-v}, \widetilde{w}_L^{-v}) \right) (Z_L - Z_R) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{R}^v \left(\mathcal{S}((\mathcal{R}^v)^{-1} w) \right) (Z_R - Z_L) + \frac{1}{2} \mathcal{R}^{-v} \left(\mathcal{S}((\mathcal{R}^{-v})^{-1} w) \right) (Z_L - Z_R) + o([Z]) \\ &= v_1 S(w)[Z] + v_2 T(w)[Z] + o([Z]). \end{aligned}$$

lorsque \widetilde{w}_L et \widetilde{w}_R tendent vers \widetilde{w} . Soulignons que cette suite d'égalités est vraie si le terme source continu vérifie la relation d'invariance par rotation

$$\mathcal{R}^v \left(\mathcal{S}((\mathcal{R}^v)^{-1} w) \right) = v_1 S(w) + v_2 T(w),$$

où $S(w)$ et $T(w)$ correspondent à un certain découpage du terme source $\mathfrak{S}(w, Z)$ du type

$$\mathfrak{S}(w, Z) = S(w)\partial_x Z + T(w)\partial_y Z.$$

Si le terme source 1D est simplement consistant, on obtient le même résultat mais avec un terme négligeable du type $o(|w_L - w| + |w_R - w| + |Z_L - Z| + |Z_R - Z|)$.

Pour finir, pour montrer que le schéma 2D dont le flux défini par (6.12) est robuste, nous allons le réécrire comme une combinaison convexe de termes bien choisis. Cela nous permettra de fixer la dimension δ du maillage, et donc par conséquent, la condition CFL à vérifier. Nous suivons les mêmes étapes que la démonstration proposée dans [10] pour un schéma 2D sans terme source.

Proposition 6.2.2. *On suppose que le solveur de Riemann approché $\widehat{\mathcal{W}}_R$ est robuste au sens de la Définition 4.4.2. Alors, sous la condition CFL*

$$\Delta t \frac{P_i}{|K_i|} \max_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in \gamma(i)}} \left(\left| \lambda^\pm(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_j^n) \right| \right) \leq 1, \quad (6.15)$$

où P_i représente le périmètre de la cellule K_i , le schéma 2D (6.4) dont le flux numérique est défini par (6.12) est robuste.

Démonstration. En utilisant l'expression (6.12) dans le schéma (6.4), on obtient

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \left(h^v(w_i^n) + \frac{\delta}{2\Delta t} w_i^n - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\delta/2}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^{v_{ij}} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_j^n \right) dx \right).$$

En posant $\delta = \frac{2|K_i|}{P_i}$, on peut simplifier l'expression précédente en

$$w_i^{n+1} = - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| \left(h^v(w_i^n) - \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{|K_i|}{P_i}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^{v_{ij}} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_j^n \right) dx \right).$$

Puis, en utilisant le théorème de flux-divergence, on obtient

$$\sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| h^v(w_i^n) = \begin{pmatrix} F(w_i^n) \\ G(w_i^n) \end{pmatrix} \cdot \sum_{j \in \gamma(i)} |e_{ij}| v_{ij} = \begin{pmatrix} F(w_i^n) \\ G(w_i^n) \end{pmatrix} \cdot \int_{\partial K_i} n_{ext} ds = 0.$$

Finalement, en définissant les états

$$w_{ij} := \frac{P_i}{|K_i|} \int_{-\frac{|K_i|}{P_i}}^0 \widehat{\mathcal{W}}_R^{v_{ij}} \left(\frac{x}{\Delta t}, \widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_j^n \right) dx, \quad (6.16)$$

on peut réécrire le schéma sous la forme

$$w_i^{n+1} = \sum_{j \in \gamma(i)} \frac{|e_{ij}|}{P_i} w_{ij}, \quad (6.17)$$

c'est-à-dire comme combinaison convexe de moyennes de solveurs de Riemann approchés, qui appartiennent à l'ensemble Ω par convexité. \square

Remarque 6.2.2. Une démonstration similaire utilisée dans [10, 25] pour des schémas sans terme source permet d'obtenir la même CFL. L'écriture décentrée du flux a toute son importance puisqu'avec une écriture centrée, le même raisonnement ne permet pas d'écrire directement w_i^{n+1} comme une combinaison convexe. Il est également possible d'adopter la démonstration de [60] qui s'applique aux schémas 2D issus de schémas 1D quelconques (pas forcément de type Godunov) et qui consiste à ajouter artificiellement un terme nul dans le calcul. Cela mène à une CFL deux fois plus restrictive que (6.15), c'est-à-dire

$$\Delta t \frac{P_i}{|K_i|} \max_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in \gamma(i)}} \left(\left| \lambda^\pm(\widetilde{w}_i^n, \widetilde{w}_j^n) \right| \right) \leq \frac{1}{2}.$$

On peut souligner que sur maillage cartésien, lorsque $\Delta x = \Delta y$, la CFL (6.15) se réécrit

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in \gamma(i)}} \left(\left| \lambda^\pm(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n) \right| \right) \leq \frac{1}{4}. \quad (6.18)$$

et coïncide alors avec la CFL "cartésienne" obtenue en considérant le schéma 2D comme une combinaison convexe de schémas 1D dans la direction x et la direction y (voir section 6.3), tandis que la condition de [60] s'écrit dans ce cadre

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in \gamma(i)}} \left(\left| \lambda^\pm(\tilde{w}_i^n, \tilde{w}_j^n) \right| \right) \leq \frac{1}{8}.$$

C'est pour ces raisons que la condition (6.15) est qualifiée d'optimale.

6.3 Maillage cartésien

On se restreint désormais au cas des maillages cartésiens pour deux raisons. La première concerne la propriété well-balanced que nous n'avons pas encore abordée dans le cadre 2D. En effet, il est difficile de préserver les états stationnaires 2D en toute généralité, et d'autant plus sur des maillages non structurés. La seconde concerne la procédure de reconstruction nécessaire pour obtenir des schémas d'ordre deux, qui est bien plus facile à mettre en place sur des maillages cartésiens. Ainsi, nous commencerons par introduire de nouvelles notations adaptées à ces maillages. Puis, nous établirons quels états stationnaires il est possible de préserver. Enfin, nous étendrons les schémas précédents à l'ordre deux grâce à la méthode MUSCL.

6.3.1 Notations cartésiennes et réécriture du schéma 2D

Commençons par donner les notations liées aux maillages cartésiens. On pose K_{ij} la cellule

$$K_{ij} = \left[x_{ij} - \frac{\Delta x}{2}, x_{ij} + \frac{\Delta x}{2} \right] \times \left[y_{ij} - \frac{\Delta y}{2}, y_{ij} + \frac{\Delta y}{2} \right],$$

où le point (x_{ij}, y_{ij}) désigne le centre de K_{ij} , et Δx et Δy sont les pas de discrétisation respectivement dans les directions horizontale et verticale, supposés constants. Le vecteur w_{ij}^n désigne une approximation de la moyenne de la solution au temps t^n sur la cellule K_{ij} . Le vecteur Z_{ij} indépendant du temps désigne la moyenne du vecteur source Z sur la cellule K_{ij} . En adoptant ces notations, le schéma 2D (6.4) se réécrit

$$\begin{aligned} w_{ij}^{n+1} = & w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1j}^n, \tilde{w}_{ij}^n) \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathcal{G}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n) - \mathcal{G}(\tilde{w}_{ij-1}^n, \tilde{w}_{ij}^n) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n)(Z_{i+1j} - Z_{ij}) + \mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1j}^n, \tilde{w}_{ij}^n)(Z_{ij} - Z_{i-1j}) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(\mathcal{T}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n)(Z_{ij+1} - Z_{ij}) + \mathcal{T}(\tilde{w}_{ij-1}^n, \tilde{w}_{ij}^n)(Z_{ij} - Z_{ij-1}) \right), \quad (6.19) \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}(w_L, w_R)$ et $\mathcal{S}(w_L, w_R)$ sont les flux et termes source numériques 1D horizontaux, et $\mathcal{G}(w_L, w_R)$ et $\mathcal{T}(w_L, w_R)$ sont les flux et terme source 1D verticaux qui vérifient les relations (6.8) et (6.9) pour $v = (0, 1)^T$. Cette formulation est valable à condition que la CFL suivante soit vérifiée

$$\Delta t \frac{2(\Delta x + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} \max_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \left(\left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n) \right|, \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n) \right| \right) \leq 1, \quad (6.20)$$

qui n'est rien d'autre que la condition CFL 2D (6.15) réécrite avec les notation cartésiennes.

Une autre façon d'obtenir ce schéma est de le considérer comme une combinaison convexe de schémas 1D. Dans le détail, on pose

$$w_{ij}^{x,1} = w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1j}^n, \tilde{w}_{ij}^n) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n)(Z_{i+1j} - Z_{ij}) + \mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1j}^n, \tilde{w}_{ij}^n)(Z_{ij} - Z_{i-1j}) \right),$$

qui correspond au schéma dans la direction x , et

$$w_{ij}^{y,1} = w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y/2} \left(\mathcal{G}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n) - \mathcal{G}(\tilde{w}_{ij-1}^n, \tilde{w}_{ij}^n) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathcal{T}(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n)(Z_{ij+1} - Z_{ij}) + \mathcal{T}(\tilde{w}_{ij-1}^n, \tilde{w}_{ij}^n)(Z_{ij} - Z_{ij-1}) \right),$$

qui correspond au schéma dans la direction y . Ainsi, le schéma (6.19) se réécrit comme

$$w_{ij}^{n+1} = \frac{w_{ij}^{x,1} + w_{ij}^{y,1}}{2}. \quad (6.21)$$

Cette formulation est valable si les conditions CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n) \right| \leq \frac{1}{4},$$

et

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} \max_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n) \right| \leq \frac{1}{4},$$

sont vérifiées. Nous préférons utiliser cette façon de construire le schéma 2D puisque son extension à l'ordre deux suivra une procédure similaire. Notons que si $\Delta x = \Delta y$ alors il est équivalent de vérifier ces deux conditions ou la condition CFL (6.20).

On définit dès lors les états stationnaires que nous pourrions préserver en dimension deux.

Définition 6.3.1. On dit qu'un vecteur $(\tilde{w}_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ est un état stationnaire dans la direction x si

- $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \tilde{w}_{ij} = \tilde{w}_{ij+1}$,
- $\forall j \in \mathbb{Z}$ fixé, le vecteur $(\tilde{w}_{ij})_{i \in \mathbb{Z}}$ est une solution stationnaire au sens de la Définition 4.2.4.

On dit qu'un vecteur $(\tilde{w}_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ est un état stationnaire dans la direction y si

- $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \tilde{w}_{ij} = \tilde{w}_{i+1j}$,
- $\forall i \in \mathbb{Z}$ fixé, le vecteur $(\tilde{w}_{ij})_{j \in \mathbb{Z}}$ est une solution stationnaire au sens de la Définition 4.2.4.

Muni de cette définition, on peut établir le théorème suivant.

Théorème 6.3.1. Sous les conditions CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{i+1j}^n) \right| \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{\Delta t}{\Delta y} \max_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^n, \tilde{w}_{ij+1}^n) \right| \leq \frac{1}{4}, \quad (6.22)$$

le schéma 2D (6.19) issu d'un schéma 1D de type Godunov robuste et well-balanced est également robuste et préserve les états stationnaires dans la direction x et dans la direction y .

Démonstration. La robustesse découle directement de la combinaison convexe (6.21) de schémas 1D robustes. D'autre part, on se donne $(\tilde{w}_{ij}^n)_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ un état stationnaire dans la direction x . Montrons que cet état est préservé par le schéma. La famille $(\tilde{w}_{ij}^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un état stationnaire discret au sens de la Définition 4.2.4, donc est préservé par le schéma 1D, d'où $w_{ij}^{x,1} = w_{ij}^n$. Puisque à i fixé, la suite $(\tilde{w}_{ij}^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ est constante, alors par consistance du schéma 1D on a $w_{ij}^{y,1} = w_{ij}^n$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Le choix de i étant arbitraire, on a $w_{ij}^{y,1} = w_{ij}^n$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Finalement, d'après la combinaison convexe (6.21) on a $w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. On démontre de façon analogue que le schéma préserve les états stationnaires dans la direction y . \square

En pratique, on utilisera les schémas fully well-balanced 1D construits au Chapitre 5 pour obtenir des schémas 2D. Les états stationnaires par direction sont alors les états stationnaires au repos, comme par exemple

$$\begin{array}{lll} u = 0, & u = 0, & u = 0, \\ v = 0, & v = 0, & v = 0, \\ \theta = cst, & z = cst, & h = cst, \\ h + z = cst, & h^2 \theta = cst, & 2z + h \ln(\theta) = cst, \end{array}$$

et les états stationnaires avec un vecteur vitesse $\mathbf{v} = (u, v)$ de la forme $(0, cst)$ ou $(cst, 0)$, ce qui correspond aux états d'équilibres géostrophiques 1D

$$\begin{aligned}
u &= 0, & v &= 0, \\
v &= cst, & u &= cst, \\
\theta &= cst, & \theta &= cst, \\
g\theta\partial_x(h+z) &= fv, & \partial_x h &= \partial_x z = 0, \\
\partial_y h &= \partial_y z = 0, & g\theta\partial_y(h+z) &= -fu,
\end{aligned} \tag{6.23} \tag{6.24}$$

et aux solutions stationnaires à température variable du type

$$\begin{aligned}
u &= 0, & v &= 0, \\
v &= cst, & u &= cst, \\
\partial_y \theta &= \partial_y h = \partial_y z = 0, & \partial_x \theta &= \partial_x h = \partial_x z = 0, \\
\partial_x \left(\frac{gh^2\theta}{2} \right) &= fhv - gh\theta\partial_x z, & \partial_y \left(\frac{gh^2\theta}{2} \right) &= -fhu - gh\theta\partial_y z.
\end{aligned} \tag{6.25} \tag{6.26}$$

Les états stationnaires 2D faisant intervenir des vitesses plus complexes ne peuvent pas se discrétiser comme des états stationnaires par direction, ce qui signifie que rien n'assure que le schéma 2D puisse les préserver exactement.

6.3.2 Extension à l'ordre deux

Le principe général pour obtenir un schéma 2D d'ordre deux avec la méthode MUSCL est le même qu'en 1D : on reconstruit la solution au milieu des interfaces de chaque cellule, puis on applique un schéma d'ordre un à ces états reconstruits. Étant donnée une approximation constante \tilde{w}_{ij} de la solution sur la cellule K_{ij} , définissons la procédure de reconstruction. On omet ici les dépendances en temps pour alléger les notations. On note $\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{ij}^W, \tilde{w}_{ij}^N, \tilde{w}_{ij}^S$ les états reconstruits au milieu des interfaces de K_{ij} comme sur la [Figure 6.2](#).

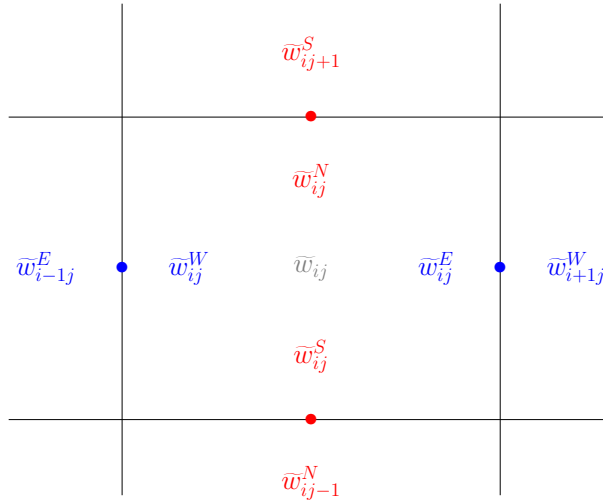


FIGURE 6.2 – Reconstruction sur maillage cartésien. En gris, l'approximation constante sur la cellule. En bleu, la reconstruction horizontale, en rouge la reconstruction verticale.

Ils sont obtenus grâce à deux reconstructions indépendantes : une reconstruction verticale et une reconstruction horizontale, définies de façon similaire au cas 1D décrit dans la [sous-section 5.6.1](#). Ainsi, on a d'une part

$$\tilde{w}_{ij}^E = \tilde{w}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\Delta x}{2}, \quad \tilde{w}_{ij}^W = \tilde{w}_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\Delta x}{2}, \tag{6.27}$$

pour les états reconstruits horizontaux et d'autre part

$$\tilde{w}_{ij}^N = \tilde{w}_{ij} + \rho_{ij} \frac{\Delta y}{2}, \quad \tilde{w}_{ij}^S = \tilde{w}_{ij} - \rho_{ij} \frac{\Delta y}{2}, \tag{6.28}$$

pour les états reconstruits verticaux. Comme dans le cas 1D, les pentes σ_{ij} et ρ_{ij} , sont définies en utilisant le limiteur minmod suivant

$$\min\text{mod}(\sigma_L, \sigma_R) = \begin{cases} \min(\sigma_L, \sigma_R) & \text{si } \sigma_L > 0 \text{ et } \sigma_R > 0, \\ \max(\sigma_L, \sigma_R) & \text{si } \sigma_L < 0 \text{ et } \sigma_R < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et une sur-limitation assure la positivité des hauteurs et températures reconstruites. Autrement dit, si on note \mathcal{V} l'une des variables reconstruites et $\sigma_{ij}^{\mathcal{V}}$ et $\rho_{ij}^{\mathcal{V}}$ les pentes associées, alors elles sont définies par

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{V}} = \min\text{mod}\left(\frac{\mathcal{V}_{ij} - \mathcal{V}_{i-1j}}{\Delta x}, \frac{\mathcal{V}_{i+1j} - \mathcal{V}_{ij}}{\Delta x}\right), \quad \rho_{ij}^{\mathcal{V}} = \min\text{mod}\left(\frac{\mathcal{V}_{ij} - \mathcal{V}_{ij-1}}{\Delta y}, \frac{\mathcal{V}_{ij+1} - \mathcal{V}_{ij}}{\Delta y}\right),$$

et on impose de plus que

$$\left|\sigma_{ij}^h\right| \leq \frac{2h_{ij}}{\Delta x}, \quad \left|\sigma_{ij}^{h\theta}\right| \leq \frac{2h_{ij}\theta_{ij}}{\Delta x}, \quad \text{et} \quad \left|\rho_{ij}^h\right| \leq \frac{2h_{ij}}{\Delta y}, \quad \left|\rho_{ij}^{h\theta}\right| \leq \frac{2h_{ij}\theta_{ij}}{\Delta y}. \quad (6.29)$$

Décrivons à présent l'obtention du schéma 2D d'ordre deux. On rappelle que le schéma 2D d'ordre un peut être vu comme la combinaison convexe de deux schémas 1D d'ordre un. Cela nous amène à définir le schéma 2D d'ordre deux comme une combinaison convexe de schémas 1D d'ordre deux. On pose alors d'une part

$$\begin{aligned} w_{ij}^{x,2} = w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} & \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1j}^E, \tilde{w}_{ij}^W) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1j}^E, \tilde{w}_{ij}^W)(Z_{ij}^W - Z_{i-1j}^E) + \mathcal{S}_c(\tilde{w}_{ij}^W, \tilde{w}_{ij}^E)(Z_{ij}^E - Z_{ij}^W) + \mathcal{S}(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W)(Z_{i+1j}^W - Z_{ij}^E) \right), \end{aligned}$$

qui correspond au schéma 1D d'ordre deux dans la direction x , et d'autre part

$$\begin{aligned} w_{ij}^{y,2} = w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y/2} & \left(\mathcal{G}(\tilde{w}_{ij}^N, \tilde{w}_{ij+1}^S) - \mathcal{G}(\tilde{w}_{ij-1}^N, \tilde{w}_{ij}^S) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathcal{T}(\tilde{w}_{ij-1}^N, \tilde{w}_{ij}^S)(Z_{ij}^S - Z_{ij-1}^N) + \mathcal{T}_c(\tilde{w}_{ij}^S, \tilde{w}_{ij}^N)(Z_{ij}^N - Z_{ij}^S) + \mathcal{T}(\tilde{w}_{ij}^N, \tilde{w}_{ij+1}^S)(Z_{ij+1}^S - Z_{ij}^N) \right), \end{aligned}$$

qui correspond au schéma 1D d'ordre deux appliqué dans la direction y . Le schéma 2D d'ordre deux s'obtient en posant

$$w_{ij}^{n+1} = \frac{w_{ij}^{x,2} + w_{ij}^{y,2}}{2}, \quad (6.30)$$

ce qui donne plus précisément

$$\begin{aligned} w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left(\mathcal{F}(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W) - \mathcal{F}(\tilde{w}_{i-1j}^E, \tilde{w}_{ij}^W) \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathcal{G}(\tilde{w}_{ij}^N, \tilde{w}_{ij+1}^S) - \mathcal{G}(\tilde{w}_{ij-1}^N, \tilde{w}_{ij}^S) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathcal{S}(\tilde{w}_{i-1j}^E, \tilde{w}_{ij}^W)(Z_{ij}^W - Z_{i-1j}^E) + \mathcal{S}_c(\tilde{w}_{ij}^W, \tilde{w}_{ij}^E)(Z_{ij}^E - Z_{ij}^W) + \mathcal{S}(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W)(Z_{i+1j}^W - Z_{ij}^E) \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(\mathcal{T}(\tilde{w}_{ij-1}^N, \tilde{w}_{ij}^S)(Z_{ij}^S - Z_{ij-1}^N) + \mathcal{T}_c(\tilde{w}_{ij}^S, \tilde{w}_{ij}^N)(Z_{ij}^N - Z_{ij}^S) + \mathcal{T}(\tilde{w}_{ij}^N, \tilde{w}_{ij+1}^S)(Z_{ij+1}^S - Z_{ij}^N) \right). \quad (6.31) \end{aligned}$$

On peut montrer que ce schéma, vu comme combinaison convexe de schémas 1D est robuste et préserve les états stationnaires par direction.

Théorème 6.3.2. *On considère des procédures de reconstruction horizontale et verticale conservatives, robustes et well-balanced au sens de la Définition 5.6.1. Alors, sous les conditions CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i,j \in \mathbb{Z}^2} \left(\left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^E, w_{i+1j}^W) \right|, \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^W, w_{ij}^E) \right| \right) \leq \frac{1}{8}, \quad (6.32)$$

et

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} \max_{i,j \in \mathbb{Z}^2} \left(\left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^N, w_{i+1j}^S) \right|, \left| \lambda^\pm(\tilde{w}_{ij}^S, w_{ij}^N) \right| \right) \leq \frac{1}{8}, \quad (6.33)$$

le schéma d'ordre deux (6.31) est robuste et préserve les états stationnaires par direction.

Démonstration. Soit $(w_{ij}^n)_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ un état stationnaire dans la direction x . Puisque la reconstruction horizontale est well-balanced, alors les couples d'états reconstruits $(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W)$ et $(\tilde{w}_{ij}^W, \tilde{w}_{ij}^E)$ sont à l'équilibre pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi, d'après le Théorème 5.6.1, le schéma 1D d'ordre deux dans la direction x préserve cet état stationnaire, donc $w_{ij}^{x,2} = w_{ij}^n$. D'autre part, puisque $\tilde{w}_{ij}^n = \tilde{w}_{ij+1}^n$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, il s'agit d'un état stationnaire vertical et la reconstruction verticale well-balanced assure que $\tilde{w}_{ij}^N = \tilde{w}_{ij}^S = \tilde{w}_{ij}^n$, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. On en déduit que $w_{ij}^{y,2} = w_{ij}^n$. Ainsi, d'après la combinaison convexe (6.30), on obtient $w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. La démonstration est tout à fait analogue si l'on prend un état stationnaire dans la direction y .

La robustesse du schéma découle immédiatement de la combinaison convexe de schémas 1D robustes appliqués à des états reconstruits qui appartiennent à l'ensemble Ω . \square

Comme énoncé précédemment, les états stationnaires par direction qui correspondent à notre système 2D sont ceux au repos, ou qui vérifient $\mathbf{v} = (0, cst)$ ou $(cst, 0)$, donnés par (6.25) et (6.26). Puisqu'au moins l'une des composantes de la vitesse est nulle, il n'est pas nécessaire d'utiliser des reconstructions horizontales et verticales qui préservent les états stationnaires en mouvement. Il suffit qu'elles soient well-balanced au sens où elles préservent les états stationnaires au repos 1D. Pour fixer les idées, concentrons-nous sur la reconstruction dans la direction x . L'équilibre local à préserver est donné par

$$\begin{aligned} u_L = u_R = 0, \\ g\bar{h}\bar{\theta}[h] + g\bar{h}\bar{\theta}[z] + \frac{g\bar{h}^2}{2}[\theta] = \bar{h}\bar{v}[\iota]. \end{aligned}$$

Si l'on considère une température constante, la discrétisation de l'équilibre dans la direction x est simplement donnée par

$$\begin{aligned} u_L = u_R = 0, \\ g\theta[h+z] = \bar{v}[\iota]. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de reconstruire les variables h, hu, hv et $g\theta(h+z) - V$ où la variable V est définie de façon à ce que $[V] = \bar{v}[\iota]$. Si l'on considère une température variable, alors on reconstruit toujours les variables conservatives $h, hu, hv, h\theta$, et on détermine les topographies reconstruites $z_{ij}^{W,E}$ de la façon suivante : on se donne une première valeur z_{1j}^W , puis on définit de proche en proche les états z_{ij}^E et z_{i+1j}^W de façon à ce que les couples d'états reconstruits $(\tilde{w}_{ij}^E, \tilde{w}_{i+1j}^W)$ et $(\tilde{w}_{ij}^W, \tilde{w}_{ij}^E)$ soient à l'équilibre local.

6.4 Résultats numériques

On souhaite maintenant tester nos différents schémas 2D sur des exemples. On va donc vérifier que les schémas d'ordre un et d'ordre deux préservent les états stationnaires par direction. On cherchera également à vérifier que la montée en ordre obtenue grâce à la méthode MUSCL est effective. Enfin, on analysera les résultats obtenus pour un état stationnaire géostrophique purement 2D, au sens où il ne s'agit pas d'un état stationnaire par direction.

6.4.1 Équilibre géostrophique par direction

Dans cet exemple, on s'intéresse à un équilibre géostrophique par direction, qui correspond à l'équilibre géostrophique 1D étudié dans la sous-sous-section 5.7.3.1. On se place sur le domaine $[1, 2] \times [1, 2]$, on pose $f = 10$ et $g = 1$. On considère la donnée initiale

$$h(x, y) = x, \quad hu(x, y) = 0, \quad hv(x, y) = \frac{x}{f}, \quad \theta(x, y) = 1,$$

avec une topographie plate. Il s'agit d'une solution stationnaire 2D dans la direction x que nos schémas peuvent préserver. La condition initiale est représentée dans la Figure 6.3

On considère un maillage grossier avec $Nx = Ny = 32$. On a calculé les erreurs L^1 discrètes pour les variables h, u , et v , pour les schémas d'ordre un et d'ordre deux. Elles sont reportées dans le Tableau 6.1. Cela confirme

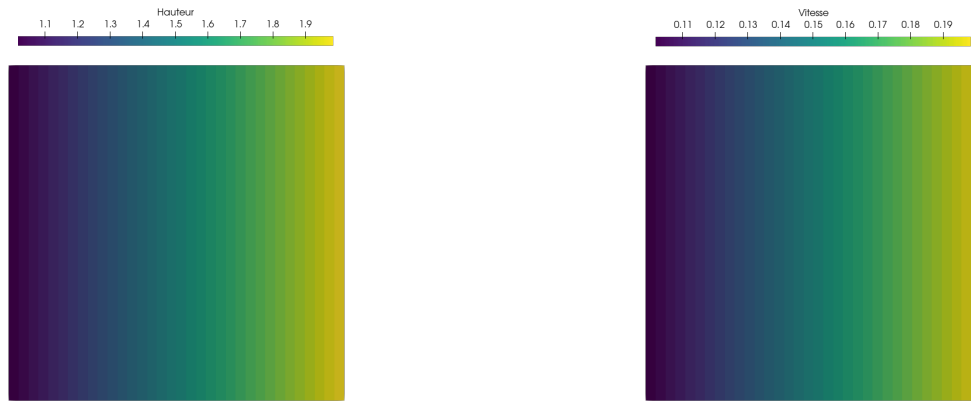


FIGURE 6.3 – Schémas 2D : condition initiale de l'état stationnaire géostrophique par direction 6.4.1.

que cette solution est préservée par les schémas 2D à l'ordre un et l'ordre deux. On obtient les mêmes résultats pour l'analogie de cet état d'équilibre dans la direction y .

Schéma	Schémas d'ordre un			Schémas d'ordre deux		
	h	u	v	h	u	v
LT	$4.72E-13$	$5.86E-13$	$2.18E-13$	$8.58E-14$	$2.07E-13$	$1.22E-13$
LDF	$1.64E-12$	$1.27E-12$	$1.48E-12$	$2.25E-13$	$8.22E-13$	$2.34E-13$
LTF	$1.79E-12$	$2.21E-11$	$1.85E-12$	$8.58E-14$	$2.07E-13$	$1.22E-13$
QTF	$5.09E-13$	$6.26E-13$	$2.23E-13$	$8.61E-14$	$2.02E-13$	$1.29E-13$

TABLEAU 6.1 – Schéma 2D : État stationnaire géostrophique 6.4.1. Erreurs L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$.

6.4.2 Équilibre en mouvement

On s'intéresse maintenant au comportement des schémas face à un état stationnaire en mouvement par direction. On entend par là un état stationnaire 1D, pour lequel les deux vitesses u et v sont non nulles, et que les schémas 1D fully well-balanced sont capables de préserver. On choisit de considérer l'exemple présenté dans la sous-sous-section 5.7.3.5. Ici, la température θ est constante égale à un, et les paramètres choisis sont $f = g = 1$. La donnée initiale est la suivante

$$h(x, y) = \exp(\beta x), \quad hu(x, y) = 1, \quad hv(x, y) = -fx \exp(\beta x),$$

et on considère une topographie de la forme

$$z(x, y) = \frac{-f^2}{2} x^2 - \frac{1}{2} \exp(-2\beta x) - \exp(\beta x).$$

Soulignons qu'il ne s'agit pas d'un état stationnaire par direction au sens de la Définition 6.3.1, et que rien ne garantit que les schémas 2D sont capables de le préserver.

On se place sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$. On se donne $Nx = Ny = 200$ et on calcule les erreurs commises au temps $T_{\max} = 1$. Dans le Tableau 6.2, on indique les erreurs L^1 obtenues avec le schéma d'ordre un. On observe que les schémas ne préservent pas exactement cet état stationnaire. Il est intéressant de souligner que les schémas LDF et QTF qui préservent exactement cette solution en dimension un ont tout de même un meilleur comportement que le schéma LT, qui même en dimension un est loin de la solution exacte. Néanmoins, en deux dimensions, il semble que le schéma LTF donne une erreur plus grande que le schéma LT.

Schéma	h	u	v
LT	$4.33E-03$	$2.37E-03$	$8.21E-04$
LDF	$4.10E-08$	$4.29E-08$	$5.17E-08$
LTF	$4.18E-02$	$2.33E-02$	$1.45E-02$
QTF	$2.85E-08$	$1.35E-08$	$8.13E-09$

TABLEAU 6.2 – Schéma 2D : équilibre en mouvement 6.4.2. Erreur L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma d'ordre un.

Schéma	Schémas d'ordre un			Schémas d'ordre deux		
	h	u	v	h	u	v
LT	$6.37E-17$	$2.90E-16$	$3.33E-16$	$2.01E-17$	$2.05E-16$	$2.06E-16$
LDF	$4.14E-16$	$2.22E-15$	$2.19E-15$	$4.09E-17$	$6.38E-16$	$7.20E-16$
LTF	$6.05E-17$	$6.64E-16$	$8.31E-16$	$4.07E-17$	$6.39E-16$	$7.23E-16$
QTF	$2.54E-16$	$1.70E-15$	$1.17E-15$	$8.33E-17$	$7.89E-16$	$8.37E-16$

TABLEAU 6.3 – Schéma 2D : lac au repos 6.4.3 non perturbé. Erreurs L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$.

6.4.3 Perturbation d'un lac au repos

On s'intéresse maintenant à la perturbation d'un lac au repos 2D. On peut retrouver le cas-test qui suit dans [69]. On se donne une topographie de la forme

$$z(x, y) = 0.8 \exp(-0.5(x - 0.9)^2 - 50(y - 0.5)^2),$$

et on choisit comme donnée initiale le lac au repos perturbé

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 - z(x, y) + \varepsilon & \text{si } 0.05 \leq x \leq 0.15 \\ 1 - z(x, y) & \text{sinon.} \end{cases},$$

$$u(x, y) = v(x, y) = 0, \quad \theta(x, y) = 1.$$

La force de Coriolis f est nulle et $g = 1$. On se place sur le domaine $[0, 2] \times [0, 1]$ et on considère un maillage tel que $N_x = 200$ et $N_y = 200$. Si $\varepsilon = 0$ alors les quatre schémas 2D d'ordre un et d'ordre deux préservent exactement la solution, comme le montre le Tableau 6.3 où l'on donne les erreurs L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$. Avec une perturbation $\varepsilon = 0.01$, on présente les résultats obtenus pour le schéma LT dans la Figure 6.4, pour le schéma LDF dans la Figure 6.5, pour le schéma LTF dans la Figure 6.6, et pour le schéma QTF dans la Figure 6.7. Les résultats obtenus montrent que les perturbations sont capturées. Ils sont en accord avec ceux de la littérature ([69, 47]).

6.4.4 Vortex stationnaire

On s'intéresse ici à l'utilisation des schémas sur une solution stationnaire 2D radiale avec une topographie plate. On considère que la température est constante, et que la force de Coriolis f est non nulle. Les variables h, u et v vérifient

$$\begin{aligned} h(r) &= \psi(r), \\ u(r) &= -r \sin(\alpha) \phi(r), \\ v(r) &= r \cos(\alpha) \phi(r), \end{aligned}$$

où $r^2 = x^2 + y^2$. Pour qu'il s'agisse d'une solution stationnaire, il faut que $\partial_x F(w) + \partial_y G(w) = \mathfrak{S}(w)$, ce qui revient à demander que

$$\psi'(r) = \frac{r}{g} \phi(r) (f + \phi(r)).$$

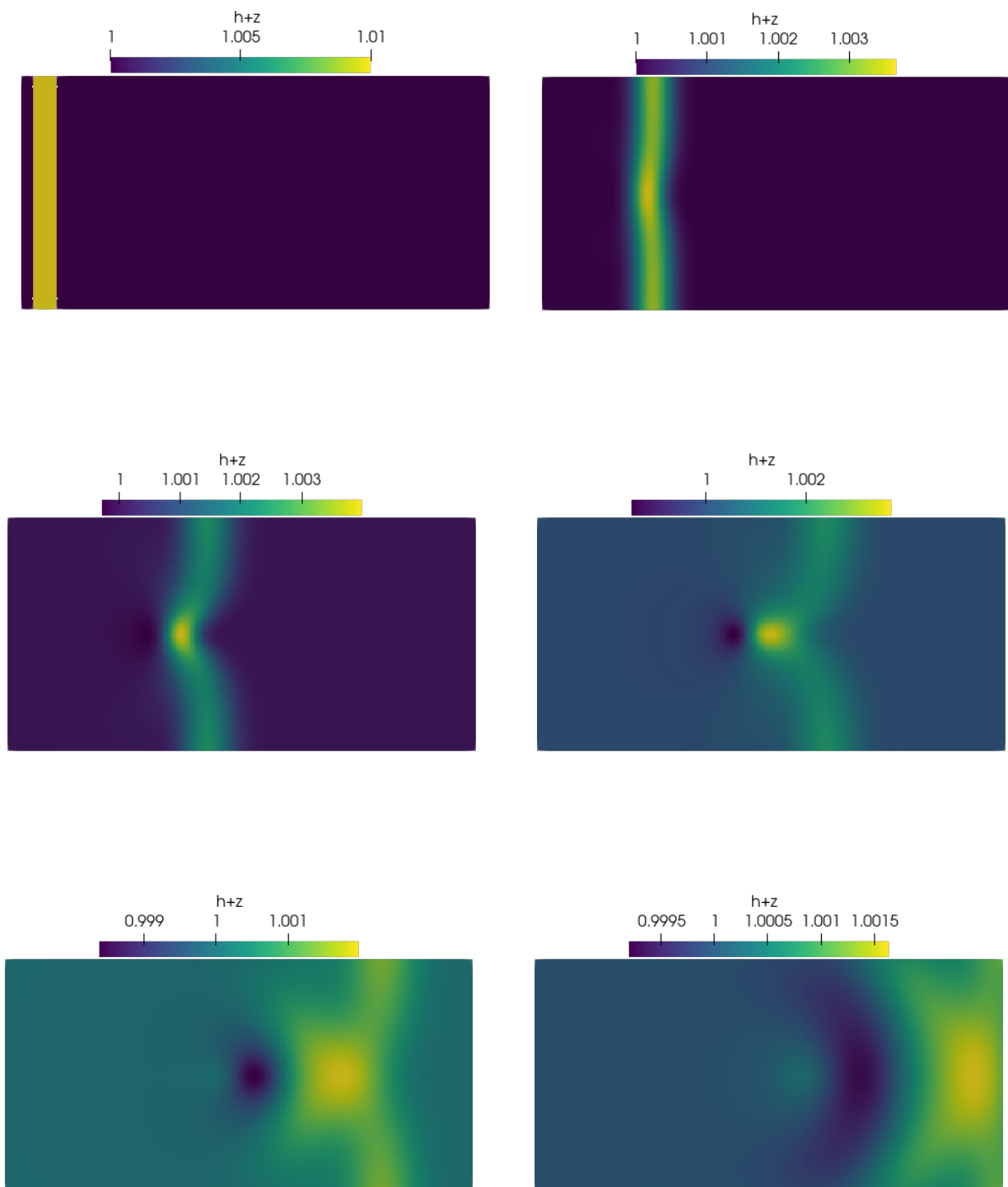


FIGURE 6.4 – Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LT aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.

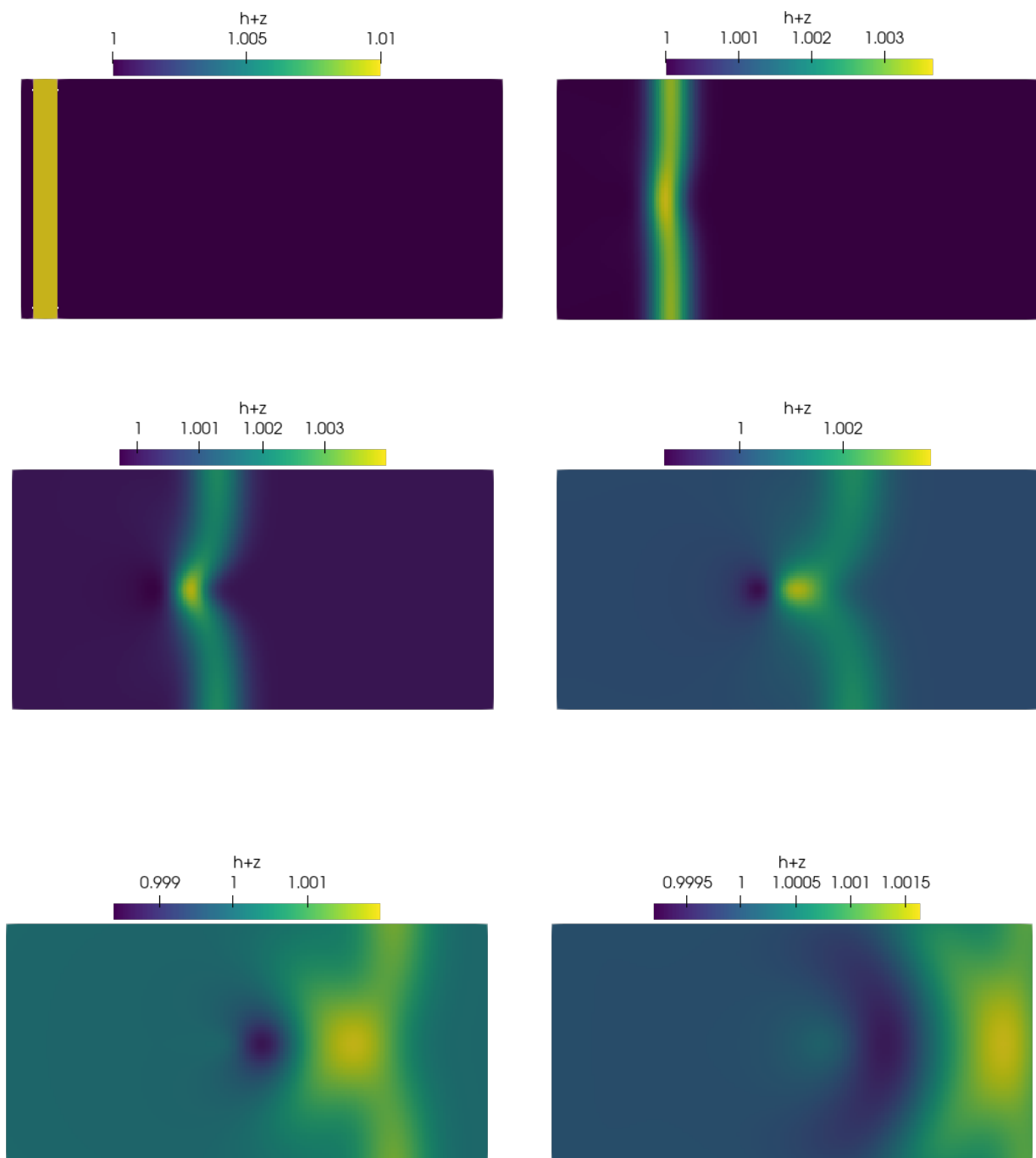


FIGURE 6.5 – Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LDF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.

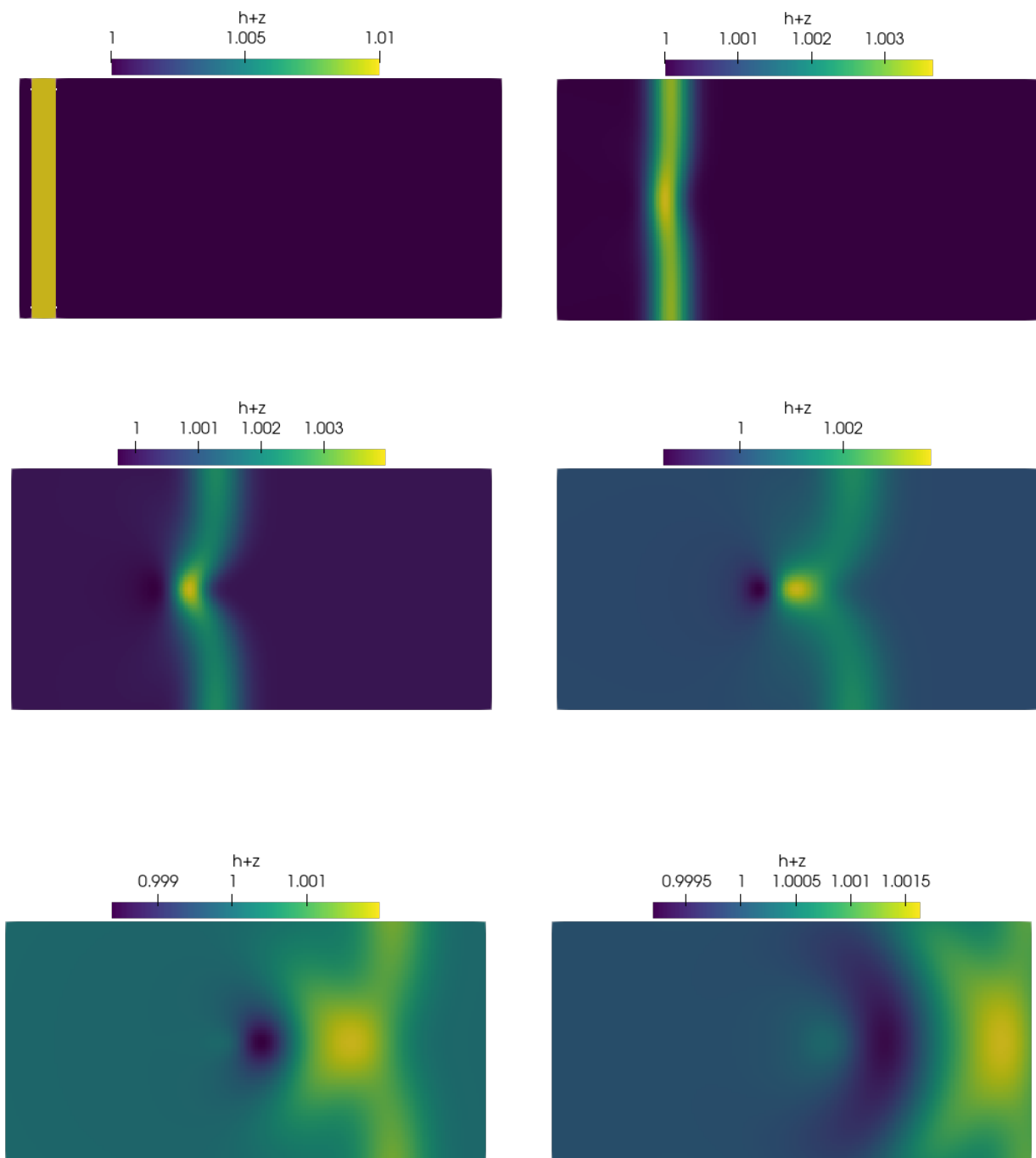


FIGURE 6.6 – Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LTF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.

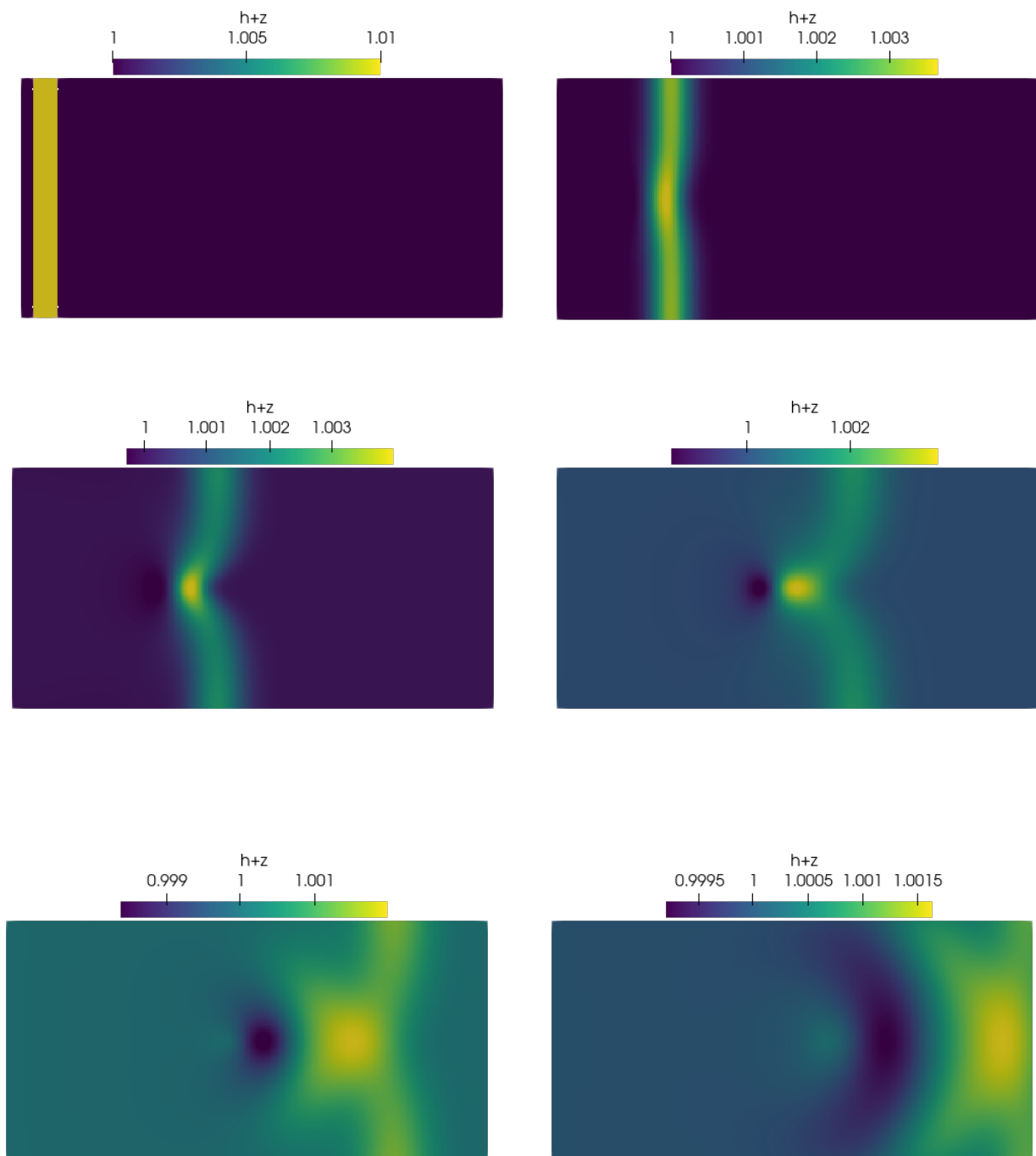


FIGURE 6.7 – Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma QTF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.

Un tel cas-test a déjà été proposé dans [5], [19] ou encore [3]. Dans [50], les auteurs proposent de considérer le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$, les paramètres $f = \frac{1}{\varepsilon}$, $g = \frac{1}{\varepsilon^2}$ et la fonction

$$\phi(r) = \varepsilon \Gamma(r),$$

avec

$$\Gamma(r) = \begin{cases} 5 & \text{si } r < \frac{1}{5}, \\ \frac{2}{r} - 5, & \text{si } \frac{1}{5} \leq r \leq \frac{2}{5}, \\ 0 & \text{si } r \geq \frac{2}{5}. \end{cases}$$

L'expression de la hauteur initiale h est alors donnée par

$$h(r) = 1 + \varepsilon^2 \begin{cases} \frac{5}{2}(1 + 5\varepsilon^2)r^2 & \text{si } r < \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{10}(1 + 5\varepsilon^2) + 2r - \frac{3}{10} - \frac{5}{2}r^2 + \varepsilon^2(4\ln(5r) + \frac{7}{2} - 20r + \frac{25}{2}r^2) & \text{si } \frac{1}{5} \leq r \leq \frac{2}{5}, \\ \frac{1}{5}(1 - 10\varepsilon^2 + 20\varepsilon^2 \ln(2)) & \text{si } r \geq \frac{2}{5}. \end{cases} \quad (6.34)$$

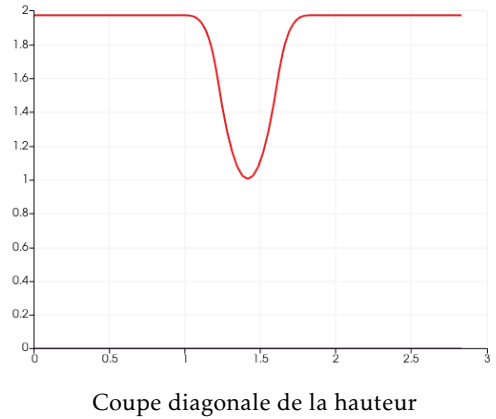
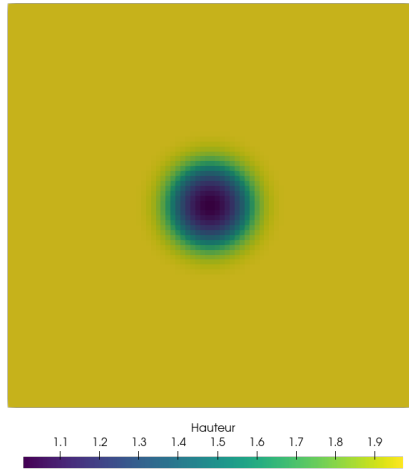


FIGURE 6.8 – Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Hauteur initiale.

On a représenté sur la Figure 6.8 la condition initiale calculée sur le maillage uniforme $N_x = N_y = 80$ pour $\varepsilon = 1$. Sur la Figure 6.9, on compare les résultats obtenus avec les schémas LTF d'ordre un et deux au temps $T_{\max} = 1$. On observe que la montée en ordre réduit de manière significative la diffusion. Cela est vrai également pour les autres schémas LT, LDF et QTF.

Dans le Tableau 6.4, on donne les erreurs calculées au temps $T_{\max} = 1$ sur différents maillages uniformes et on calcule les pentes obtenues avec les schémas d'ordre un et deux. Même si les ordres obtenus sont légèrement inférieurs aux ordres théoriques, on peut tout de même noter une nette amélioration de l'approximation par les schémas LT, LTF et QTF d'ordre deux. Une gestion plus fine des conditions de bords pourrait permettre de retrouver exactement l'ordre de précision attendu. On peut noter que le schéma LDF d'ordre deux fournit une approximation moins précise que les autres.

Pour des valeurs de ε plus petites, le nombre de Froude est petit également, et les schémas diffusent beaucoup la solution. C'est une caractéristique des schémas de type Godunov, qui a été étudiée notamment dans [3] et [29], où les auteurs ont proposé des schémas préservant l'asymptotique pour les équations quasi-géostrophiques, ou encore dans [50] pour le modèle RSW. Plus récemment encore, [4] ont proposé une méthode linéairement well-balanced pour capturer les solutions à l'équilibre géostrophiques et obtiennent pour ce cas-test des résultats précis, même pour de nombres de Froude petits.

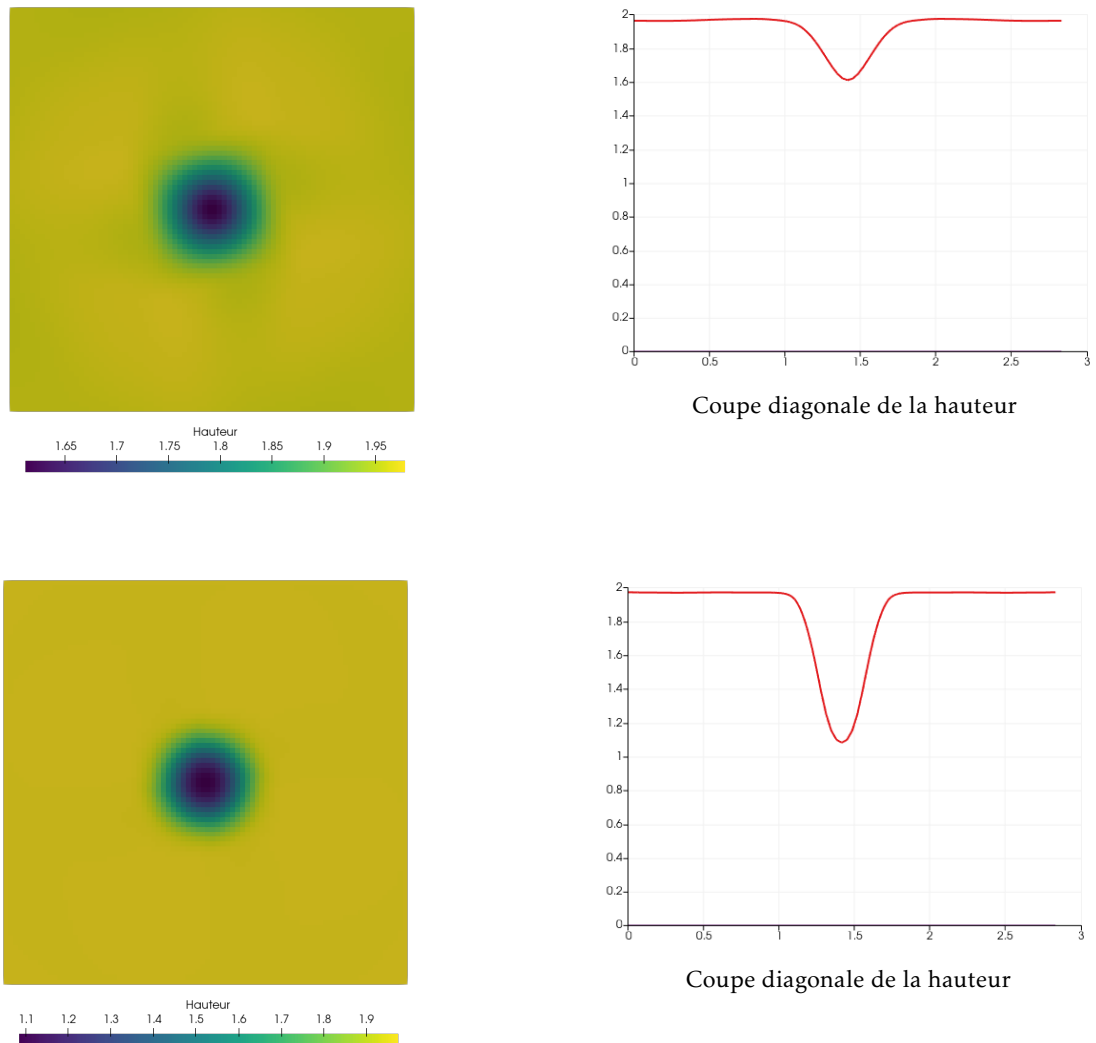


FIGURE 6.9 – Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Hauteurs calculées au temps $T_{\max} = 1$ avec les schémas LTF d’ordre un (en haut) et d’ordre deux (en bas).

$N_x \times N_y$	Schéma							
	LT		LDF		LTF		QTF	
40 × 40	2.77E-02		2.56E-02		2.81E-02		2.77E-02	
80 × 80	2.15E-02	0.37	1.84E-02	0.49	2.21E-02	0.35	2.14E-02	0.38
160 × 160	1.53E-02	0.49	1.19E-02	0.63	1.59E-02	0.47	1.52E-02	0.50
320 × 320	9.08E-03	0.67	9.79E-03	0.82	1.03E-02	0.66	9.71E-03	0.68
40 × 40	1.29E-02		1.15E-02		1.35E-02		1.28E-02	
80 × 80	4.73E-03	1.50	4.70E-03	1.33	4.95E-03	1.51	4.67E-03	1.51
160 × 160	1.44E-03	1.75	2.20E-03	1.11	1.50E-03	1.75	1.42E-03	1.74
320 × 320	4.47E-04	1.70	1.12E-03	0.99	4.62E-04	1.72	4.42E-04	1.70

TABLEAU 6.4 – Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Erreurs L^1 et ratios calculés en la variable h et obtenus avec les schémas d’ordre un (haut) et d’ordre deux (bas).

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette troisième partie, nous avons proposé plusieurs schémas numériques pour le système de Saint-Venant avec effets rotatifs et thermiques, avec pour objectif majeur de préserver un maximum d'états stationnaires. Nous avons pour cela utilisé les schémas de type Godunov, dont le principe a été rappelé dans le Chapitre 4. En dimension un, cela a mené à la construction d'un premier schéma qui préserve les états stationnaires au repos (LT), et de trois schémas qui préservent tous les états stationnaires (LDF, LTF, QTF). Les performances de ces schémas ont été comparées sur de nombreux exemples numériques permettant de tester leur efficacité. Nous avons pu souligner l'intérêt de l'utilisation de schémas fully well-balanced au travers d'états stationnaires en mouvement que le schéma LT ne préserve pas. Nous avons également étudié le comportement des schémas fully well-balanced lorsque le nombre de Froude est proche de 1. Dans l'objectif d'améliorer la précision des résultats, nous avons proposé une montée en ordre fondée sur la méthode MUSCL, qui a été adaptée afin de préserver tous les états stationnaires. Des tests numériques ont également été proposés pour valider expérimentalement les résultats énoncés sur cette méthode. Enfin, nous nous sommes intéressés à la construction de schémas numériques en deux dimensions d'espace dans le Chapitre 6. Les schémas 2D sur maillages non structurés ont été construits en utilisant le point de vue habituel de résolution de problèmes 1D par interface, et une condition CFL optimale a été proposée. Puis nous nous sommes restreints aux maillages cartésiens, afin d'établir clairement quels sont les états stationnaires préservés par les schémas, et pour implémenter une montée en ordre facile à mettre en œuvre. Nous avons établi que les schémas 2D proposés préservent les états stationnaires par direction, propriété que l'on a vérifiée numériquement.

Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour approfondir les travaux présentés ici. Premièrement, on pourrait adapter les schémas proposés afin de gérer les zones sèches et les transitions sec-mouillé, en modifiant la condition de robustesse $h > 0$ en $h \geq 0$. Pour cela il faut que les expressions des inconnues des solveurs de Riemann approchés et des termes sources discrets ne fassent pas intervenir de division par h . Il faut également veiller à ce qu'ils préservent les états stationnaires au niveau des zones sèches, du type

$$h_R = 0, \quad h_L + z_L \leq z_R,$$

ou

$$h_L = 0, \quad h_R + z_R \leq z_L.$$

On pourrait adapter des résultats de [55] ou encore [12] appliqués au modèle de Saint-Venant.

Deuxièmement, on pourrait s'intéresser au caractère entropique des différents schémas, afin de s'assurer qu'ils convergent vers des solutions physiquement admissibles. En effet, le théorème de Lax-Wendroff assure que si un schéma satisfait une inégalité d'entropie discrète et converge, alors il converge vers la solution entropique du problème. Cela a été fait pour le modèle de Saint-Venant avec topographie dans [12], où une inégalité d'entropie partielle a été établie. Ce résultat devrait se généraliser, puisque la force de Coriolis n'est présente dans l'inégalité d'entropie des modèles RSW et TRSW que par l'intermédiaire de la vitesse v , qui se comporte comme la vitesse u . Ainsi, la prise en compte de la force de Coriolis ne modifie pas drastiquement l'inégalité d'entropie à établir, puisqu'il s'agit d'un terme source bien moins complexe que la topographie à prendre en compte.

D'autre part, tous les schémas proposés traitent l'évolution de la température de la même façon. Il pourrait être intéressant d'envisager une configuration différente. Par exemple, en supprimant l'hypothèse simplificatrice de conservation de h et u à travers l'onde de vitesse \hat{u} , en choisissant de préserver plutôt l'invariant de Riemann $h^2\theta$. Cela aboutirait à un solveur approché plus complexe, constitué de quatre états intermédiaires, mais probablement plus proche de la solution exacte. De plus, la variable θ est transportée à la vitesse \hat{u} . Or cette

vitesse n'est pas consistante avec la vitesse réelle u , puisqu'elle est nulle seulement si le débit est nul et la hauteur est constante. Dans une configuration où le débit est nul mais la hauteur varie, la vitesse \hat{u} est non nulle. C'est un défaut que l'on pourrait également chercher à corriger, par exemple en utilisant un schéma de transport passif (voir [46] et [13]).

Nous avons déjà évoqué quelques pistes d'améliorations possibles pour les différents schémas. Pour le schéma QTF spécifiquement, nous avons observé sur plusieurs cas-tests numériques qu'un bon ajustement du paramètre a intervenant dans la définition (5.111) de \mathcal{H} est nécessaire pour obtenir de bons résultats au voisinage de $\overline{\text{Fr}} = 1$. Les différents tests que nous avons effectués semblent montrer que la valeur optimale de a est du même ordre que Δx . Une étude plus précise de l'influence de ce paramètre doit être menée pour confirmer ou infirmer cette conjecture et comprendre plus précisément son rôle dans ce type de situation.

Concernant la montée en ordre décrite dans la section 5.6 qui permet d'obtenir des schémas fully well-balanced d'ordre deux, il pourrait être pertinent d'étudier plus en détail l'influence du détecteur d'équilibre k_i^n . Ce détecteur n'utilise pas de bornes arbitraires à définir selon le cas test considéré. Néanmoins, nous avons pu constater que lorsqu'un état stationnaire n'est pas exactement détecté, l'ordre deux peut ne pas être atteint (voir 5.7.5.4). Il est difficile de définir clairement les valeurs pour lesquelles on souhaite appliquer le schéma d'ordre un fully well-balanced et celles pour lesquelles on souhaite appliquer le schéma d'ordre deux. On pourrait tout de même envisager d'autres détecteurs, par exemple en posant

$$k(x) = \frac{x^k}{x^k + \Delta x^k},$$

et en prenant $k > 2$ afin d'obtenir à Δx fixé un profil qui transite plus rapidement de l'état 0 vers l'état 1. Une étude comparative de différents détecteurs est nécessaire pour déterminer s'il existe une définition optimale de la fonction k .

Concernant la force de Coriolis en elle-même, notons tout d'abord que même si les tests numériques ont été réalisés pour f constant, les schémas 1D et 2D qui ont été construits ici peuvent s'appliquer pour une force de Coriolis variable. Enfin, parmi les enjeux majeurs liés à ce terme source figure la préservation des équilibres géostrophiques, décrits par la relation

$$\nabla(h+z) = -f(v, -u)^T.$$

En dimension un, ces équilibres sont des états stationnaires au repos. Les différents schémas que nous avons construits permettent donc de les préserver. En dimension deux en revanche, les équilibres géostrophiques ne sont pas nécessairement des états stationnaires, même si c'est le cas en première approximation pour des nombres de Froude et de Rossby petits. Les schémas 2D que l'on a construits ne permettent pas de préserver de telles solutions. Nous pensons qu'une approche différente doit être utilisée pour y parvenir. On peut par exemple mentionner les travaux de [50] qui propose des schémas préservant l'asymptotique (*asymptotic preserving schemes*) ou ceux de [3], où les auteurs proposent d'introduire une diffusion artificielle pour forcer le schéma à préserver les équilibres géostrophiques.

Bibliographie

- [1] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M. BRISTEAU, R. KLEIN et B. PERTHAME. « A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 25.6 (2004), p. 2050-2065.
- [2] E. AUDUSSE, C. CHALONS et P. UNG. « A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system ». In : *Commun. Math. Sci.* 13.5 (2015), p. 1317-1332.
- [3] E. AUDUSSE, V. DUBOS, A. DURAN, N. GAVEAU, Y. NASSERI et Y. PENEL. « Numerical approximation of the shallow water equations with Coriolis source term ». In : *CEMRACS 2019—geophysical fluids, gravity flows*. T. 70. ESAIM Proc. Surveys. EDP Sci., Les Ulis, 2021, p. 31-44.
- [4] E. AUDUSSE, V. DUBOS, N. GAVEAU et Y. PENEL. « Energy stable and linearly well-balanced numerical schemes for the non-linear Shallow Water equations with Coriolis force ». 2022.
- [5] E. AUDUSSE, R. KLEIN, D. D. NGUYEN et S. VATER. « Preservation of the discrete geostrophic equilibrium in shallow water flows ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*. Springer, 2011, p. 59-67.
- [6] S. BENZONI-GAVAGE et D. SERRE. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations : First-order Systems and Applications*. OUP Oxford, 2006.
- [7] A. BERMUDEZ et M. E. VAZQUEZ. « Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms ». In : *Comput. & Fluids* 23.8 (1994), p. 1049-1071. ISSN : 0045-7930.
- [8] C. BERTHON. « Stability of the MUSCL schemes for the Euler equations ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 3.2 (2005), p. 133-157.
- [9] C. BERTHON et C. CHALONS. « A fully well-balanced, positive and entropy-satisfying Godunov-type method for the shallow-water equations ». In : *Mathematics of Computation* 85.299 (2016), p. 1281-1307.
- [10] C. BERTHON, Y. COUDIÈRE et V. DESVEAUX. « Second-order MUSCL schemes based on dual mesh gradient reconstruction (DMGR) ». In : *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 48.2 (2014), p. 583-602.
- [11] C. BERTHON, V. DESVEAUX, A. MASSET et V. MICHEL-DANSAC. « A fully well-balanced scheme for TRSW1D equations based on a quadratic approximation of steady states ».
- [12] C. BERTHON, M. M'BAYE, M. H. LE et D. SECK. « A well-defined moving steady states capturing Godunov-type scheme for shallow-water model ». In : *Int. J. Finite Vol.* 15 (2020), p. 33.
- [13] F. BOUCHUT. *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws : And Well-Balanced schemes for sources*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [14] F. BOUCHUT, J. LE SOMMER et V. ZEITLIN. « Breaking of balanced and unbalanced equatorial waves ». In : *Chaos* 15.1 (2005), p. 013503, 19. ISSN : 1054-1500.
- [15] F. BOUCHUT, J. LE SOMMER et V. ZEITLIN. « Frontal geostrophic adjustment and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. Part 2. High-resolution numerical simulations ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 514 (2004), p. 35.
- [16] H. BRÉZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. T. 2. 3. Springer, 2011.
- [17] J. BRITTON et Y. XING. « High order still-water and moving-water equilibria preserving discontinuous Galerkin methods for the Ripa model ». In : *J. Sci. Comput.* 82.2 (2020), Paper No. 30, 37.
- [18] M. J. CASTRO, J. A. LÓPEZ et C. PARÉS. « Finite volume simulation of the geostrophic adjustment in a rotating shallow-water system ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 31.1 (2008), p. 444-477.
- [19] A. CHERTOCK, M. DUDZINSKI, A. KURGANOV et M. LUKÁČOVÁ-MEDVID'OVÁ. « Well-balanced schemes for the shallow water equations with Coriolis forces ». In : *Numerische Mathematik* 138.4 (2018), p. 939-973.

- [20] A. CHERTOCK, A. KURGANOV et Y. LIU. « Central-upwind schemes for the system of shallow water equations with horizontal temperature gradients ». In : *Numerische Mathematik* 127.4 (2014), p. 595-639.
- [21] K. N. CHUEH, C. C. CONLEY et J. A. SMOLLER. « Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations ». In : *Indiana University Mathematics Journal* 26.2 (1977), p. 373-392.
- [22] C. M. DAFERMOS. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. T. 4. Springer, 2005.
- [23] O. DELESTRE. « Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ». Thèse de doct. Université d'Orléans, 2010.
- [24] O. DELESTRE, C. LUCAS, P-A. K SINANT, F. DARBOUX, C. LAGUERRE, T. N. T. VO, F. JAMES et S. CORDIER. « SWASHES : a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies ». In : *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 72.3 (2013), p. 269-300. ISSN : 0271-2091.
- [25] V. DESVEAUX. « Contribution à l'approximation numérique des systèmes hyperboliques ». Thèse de doct. Université de Nantes Angers Le Mans, 2013.
- [26] V. DESVEAUX et A. MASSET. « A fully well-balanced scheme for shallow water equations with Coriolis force ». In : *Comm. Math. Sci.* 20.7 (2022), p. 1875-1900.
- [27] V. DESVEAUX, M. ZENK, C. BERTHON et C. KLINGENBERG. « Well-balanced schemes to capture non-explicit steady states : Ripa model ». In : *Mathematics of Computation* 85.300 (2016), p. 1571-1602.
- [28] R. J. DiPERNA. « Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics ». In : *Communications in mathematical physics* 91.1 (1983), p. 1-30.
- [29] M. H. DO. « Analysis of finite volume schemes for the quasi-geostrophic flows at low Froude number ». Thèse de doct. Université Sorbonne Paris Cité, 2017.
- [30] L. C. EVANS. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. T. 74. American Mathematical Soc., 1990.
- [31] G. GALLICE. « Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 334.8 (2002), p. 713-716.
- [32] B. GHITTI, C. BERTHON, M. H. LE et E. F. TORO. « A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term ». In : *J. Comput. Phys.* 421 (2020), p. 109750, 33. ISSN : 0021-9991.
- [33] J. GLIMM. « Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 18.4 (1965), p. 697-715.
- [34] E. GODLEWSKI et P-A. RAVIART. *Hyperbolic systems of conservation laws*. T. 3/4. Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]. Ellipses, Paris, 1991, p. 252.
- [35] E. GODLEWSKI et P-A. RAVIART. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. T. 118. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] S. K. GODUNOV. « A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics ». In : *Mat. Sb. (N.S.)* 47 (89) (1959), p. 271-306.
- [37] L. GOSSE. « A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms ». In : *Comput. Math. Appl.* 39.9-10 (2000), p. 135-159.
- [38] N. GOUTAL et F. MAUREL. *Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation*. Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale, 1997.
- [39] J. M. GREENBERG et A. Y. LEROUX. « A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations ». In : *SIAM J. Numer. Anal.* 33.1 (1996), p. 1-16. ISSN : 0036-1429.
- [40] A. HARTEN, P. D. LAX et B. VAN LEER. « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws ». In : *SIAM review* 25.1 (1983), p. 35-61.
- [41] S. JIN. « A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 35.04 (2001), p. 631-645.
- [42] H-O. KREISS et J. LORENZ. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. SIAM, 2004.
- [43] S. N. KRŽKOV. « First order quasilinear equations in several independent variables ». In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 10.2 (1970), p. 217.
- [44] A. KURGANOV, Y. LIU et V. ZEITLIN. « A well-balanced central-upwind scheme for the thermal rotating shallow water equations ». In : *Journal of Computational Physics* 411 (2020), p. 109414.
- [45] D. LANNES. *The water waves problem : mathematical analysis and asymptotics*. T. 188. American Mathematical Soc., 2013.

- [46] B. LARROUTUROU. « How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows ». In : *Journal of computational physics* 95.1 (1991), p. 59-84.
- [47] R. J. LEVEQUE. « Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm ». In : *Journal of computational physics* 146.1 (1998), p. 346-365.
- [48] R. J. LEVEQUE. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, p. xx+558. ISBN : 0-521-81087-6; 0-521-00924-3.
- [49] J-L. LIONS. « Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique ». In : *Annals of Mathematics* (1956), p. 207-239.
- [50] X. LIU, A. CHERTOCK et A. KURGANOV. « An asymptotic preserving scheme for the two-dimensional shallow water equations with Coriolis forces ». In : *Journal of Computational Physics* 391 (2019), p. 259-279.
- [51] C. LUCAS. « Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes, des conditions au fond et à la surface sur les équations de Saint-Venant ». Thèse de doct. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2007.
- [52] M. LUKÁČOVÁ-MEDVID'OVÁ, S. NOELLE et M. KRAFT. « Well-balanced finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations ». In : *Journal of computational physics* 221.1 (2007), p. 122-147.
- [53] M. M'BAÏE. « Contributions aux schémas préservant des solutions stationnaires à vitesse non nulle pour les équations shallow-water. » Thèse de doct. Nantes, 2022.
- [54] V. MICHEL-DANSAC. « Development of high order well-balanced schemes for geophysical flows ». Thèse de doct. Université Bretagne Loire, 2016.
- [55] V. MICHEL-DANSAC, C. BERTHON, S. CLAIN et F. FOUCHER. « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography ». In : *Computers & Mathematics with Applications* 72.3 (2016), p. 568-593.
- [56] V. MICHEL-DANSAC, C. BERTHON, S. CLAIN et F. FOUCHER. « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography or Manning friction ». In : *J. Comput. Phys.* 335 (2017), p. 115-154. ISSN : 0021-9991.
- [57] F. MURAT. « Compacité par compensation ». In : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 5.3 (1978), p. 489-507. ISSN : 0391-173X.
- [58] S. NOELLE, Y. XING et C-W. SHU. « High-order well-balanced schemes ». In : *Numerical Methods for Balance Laws. Quaderni di Matematica* 24 (2010), p. 1-66.
- [59] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. T. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [60] B. PERTHAME et C-W. SHU. « On positivity preserving finite volume schemes for Euler equations ». In : *Numerische Mathematik* 73.1 (1996), p. 119-130.
- [61] SAINT-VENANT. « Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit ». In : *Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences* (1871).
- [62] D. SERRE. *Systems of conservation laws. 1*. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. ISBN : 0-521-58233-4.
- [63] D. SERRE. *Systems of conservation laws. 2*. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. ISBN : 0-521-63330-3.
- [64] W. STRAUSS. « On continuity of functions with values in various Banach spaces ». In : *Pacific journal of Mathematics* 19.3 (1966), p. 543-551.
- [65] L. SUNDBYE. « Global existence for the Cauchy problem for the viscous shallow water equations ». In : *Rocky Mountain J. Math.* 28.3 (1998), p. 1135-1152. ISSN : 0035-7596.
- [66] L. TARTAR. « Compensated compactness and applications to partial differential equations ». In : *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt symposium*. T. 4. 1979, p. 136-212.
- [67] E. F. TORO. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [68] B. VAN LEER. « Towards the ultimate conservative difference scheme. A second-order sequel to Godunov's method ». In : *Journal of computational Physics* 32.1 (1979), p. 101-136.
- [69] Y. XING et C-W. SHU. « High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations ». In : *J. Comput. Phys.* 208.1 (2005), p. 206-227. ISSN : 0021-9991.

-
- [70] Y. XING, C-W. SHU et S. NOELLE. « On the advantage of well-balanced schemes for moving-water equilibria of the shallow water equations ». In : *Journal of scientific computing* 48.1-3 (2011), p. 339-349.
- [71] V. ZEITLIN. *Geophysical fluid dynamics : understanding (almost) everything with rotating shallow water models*. Oxford University Press, 2018.
- [72] V. ZETILIN, G. M. REZNIK, S. B. MEDVEDEV, F. BOUCHUT et A. STEGNER. *Nonlinear Dynamics of Rotating Shallow Water Methods and Advances, Volume 2*. Edited Series on Advances in Nonlinear Science et Complexity, 2007.

Compléments de la section 3.3

Dans cette annexe, on présente deux lemmes qui complètent les résultats de la section 3 et qui font le lien entre la variable λ utilisée pour symétriser le système à température constante et la variable d'origine h . On rappelle que l'on travaille sous l'hypothèse que $h_0(x) \geq \underline{h} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le premier lemme montre que la variable $\lambda = 2\sqrt{gh}$ est bien définie puisque h reste positif strictement.

Lemme A.0.1. *On considère la solution du problème initial (1.23) définie sur $[0, T_0]$. Alors il existe une constante α dépendant de la donnée initiale telle que*

$$0 < \alpha \leq h(t, x) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration. Commençons par souligner que h appartient à $H^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ donc h est majoré par une constante. Il suffit de montrer que h est minoré. Pour cela, on s'intéresse à la première équation du système (1.23) donnée par

$$h_t + (hu)_x = 0. \quad (\text{A.1})$$

En la multipliant par $\text{sgn}(h)$ on obtient

$$|h|_t + (|h|u)_x = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, on a que

$$\int_{\mathbb{R}} (|h(t, x)| - h(t, x)) dx = \int_{\mathbb{R}} (|h_0(x)| - h_0(x)) dx = 0,$$

ce qui permet d'établir que $h(t, x)$ est positif ou nul.

On introduit maintenant le temps

$$T = \inf\{t \in (0, +\infty); \exists x \in \mathbb{R}; h(t, x) \leq 0\}.$$

Nous allons montrer que $T \geq T_0$, ce qui permettra de conclure quand à la stricte positivité de h . Puisque $h_0 > 0$ par hypothèse, alors $h(t)$ est positif pour tout $t \in [0, T)$. La fonction $\ln(h)$ est donc bien définie sur cet intervalle de temps. Si $T < T_0$ alors la norme L^∞ de $\ln(h)$ explose. Or, d'après (A.1), on a pour $t < \min(T, T_0)$

$$[\ln(h)]_t + u[\ln(h)]_x + u_x = 0. \quad (\text{A.3})$$

En multipliant cette égalité par $\ln(h) - \ln(h)_{xx}$ et en procédant à une intrégration par parties, on trouve

$$\frac{d}{dt} \|\ln(h)\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} u_x (\ln(h)^2 - (\ln(h)_x)^2) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} u_{xx} \ln(h)_x dx - 2 \int_{\mathbb{R}} u_x \ln(h) dx. \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d}{dt} \|\ln(h)\|_{H^1} \leq \|u_x\|_{L^\infty} \|\ln(h)\|_{H^1} + 2\|u_x\|_{H^1}. \quad (\text{A.5})$$

Intégrer cette dernière inégalité en temps donne une borne H^1 de $\ln h$, donc $\ln h$ reste borné dans L^∞ par injection de Sobolev. On a donc $T \geq T_0$, ce qui conclut la démonstration. \square

Le second lemme fait le lien entre la régularité de $h - \bar{h}$ et $\sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}}$. Nous allons montrer que ces deux

variables ont la même régularité $H^2(\mathbb{R})$, pourvu que $h \geq \underline{h} > 0$.

Lemme A.0.2. *Si l'on suppose que $0 < \alpha \leq h \leq \frac{1}{\alpha}$, alors $h - \bar{h}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Si l'on suppose que $0 < \alpha \leq h$, alors $h - \bar{h}$ appartient à $H^m(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}}$ appartient à $H^m(\mathbb{R})$ pour $m = 1, 2$.*

Démonstration. Commençons par le premier résultat. On écrit que $h - \bar{h} = (\sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}})(\sqrt{h} + \sqrt{\bar{h}})$. Cela donne

$$\left| \sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}} \right| \leq \frac{|h - \bar{h}|}{\sqrt{\bar{h}}},$$

d'une part, et

$$|h - \bar{h}| \leq \left| \sqrt{h} - \sqrt{\bar{h}} \right| \left(\sqrt{\bar{h}} + \left\| \sqrt{h} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right),$$

d'autre part. Ces inégalités suffisent pour établir l'équivalence voulue.

Pour traiter le cas $m = 1$, on écrit

$$(\sqrt{h})_x = \frac{h_x}{2\sqrt{h}}. \quad (\text{A.6})$$

Puisque h ou \sqrt{h} appartient à $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ on a que h est borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$, donc le cas $m = 0$ s'applique. Ainsi, \sqrt{h} est minoré et majoré. D'après (A.6) cela donne l'équivalence entre h_x appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et $(\sqrt{h})_x$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Pour $m = 2$, on utilise que

$$(\sqrt{h})_{xx} = \frac{h_{xx}}{2\sqrt{h}} - \frac{h_x^2}{4h^{3/2}}. \quad (\text{A.7})$$

Puisque h est minoré et majoré, on a que $(\sqrt{h})_{xx}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $h_{xx} - \frac{(h_x)^2}{2h}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Grâce au plongement $H^1(\mathbb{R}) \subset L^4(\mathbb{R})$, on a que $h \in H^2(\mathbb{R})$ implique $h_{xx} - \frac{(h_x)^2}{2h}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Réciproquement, on écrit

$$\left\| h_{xx} - \frac{(h_x)^2}{2h} \right\|_{L^2}^2 = \|h_{xx}\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} \frac{h_{xx}(h_x)^2}{h} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{(h_x)^4}{4h^2} dx. \quad (\text{A.8})$$

Une intégration par parties donne

$$- \int_{\mathbb{R}} \frac{h_{xx}(h_x)^2}{h} dx = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} \frac{(h_x)^4}{h^2} dx.$$

En utilisant le cas $m = 1$, on a que $(\sqrt{h})_x$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$, et donc $\frac{h_x}{\sqrt{h}}$ appartient à $L^4(\mathbb{R})$. Par conséquent, on a la majoration suivante

$$\|h_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left\| h_{xx} - \frac{(h_x)^2}{2h} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{12} \int_{\mathbb{R}} \frac{(h_x)^4}{h^2} dx,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Compléments de la section 3.4

Dans cette annexe, on complète le résultat du Théorème 3.1.2 sur l'existence d'une solution locale pour le système TRSW2D (1.22). Il s'agit de démontrer que les variables h et θ sont majorées et minorées. On rappelle que par hypothèse, la donnée initiale du problème de Cauchy vérifie $h_0(x) \geq \underline{h} > 0$ et $\theta_0(x) \geq \underline{\theta} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Lemme B.0.1. *On considère la solution du problème de Cauchy lié au système TRSW2D (1.22) définie sur $[0, T_0]$. Il existe une constante α qui dépend de la donnée initiale telle que*

$$0 < \alpha \leq h(t, x) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Démonstration. On a directement que h est majoré par une constante du fait de sa régularité $H^3(\mathbb{R}^2)$, et on peut montrer comme dans le Lemme A.0.1 que h est positif ou nul. On va montrer que h est strictement positif. Posons $\zeta = \frac{1}{h} - 1$ et $\mathbf{v} = (u, v)^T$. On introduit le temps T défini par

$$T = \inf\{t \in (0, +\infty); \exists x \in \mathbb{R}; h(t, x) \leq 0\}.$$

Nous allons montrer que $T \geq T_0$. Puisque $h_0 > 0$, alors $h(t)$ est positif pour tout $t \in [0, T)$. Ainsi, $\zeta(t)$ est bien définie pour tout $t \in [0, T)$. Si $T < T_0$ alors la norme L^∞ de $\zeta(t)$ explose. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas. Soit $t < \min(T, T_0)$. On a

$$\zeta_t - \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \zeta = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

En multipliant cette relation par ζ^{p-1} puis en l'intégrant par parties on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\zeta\|_{L^p}^p = (1+p) \int_{\mathbb{R}^2} \zeta^p \nabla \cdot \mathbf{v} + p \int_{\mathbb{R}^2} \zeta^{p-1} \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

On utilise l'inégalité de Hölder qui donne

$$\frac{d}{dt} \|\zeta\|_{L^p}^p \leq (1+p) \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\zeta\|_{L^p}^p + p \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^p} \|\zeta^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}.$$

On divise cette inégalité par $p \|\zeta\|_{L^p}^{p-1}$ pour obtenir la majoration

$$\frac{d}{dt} \|\zeta\|_{L^p} \leq 2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^\infty} \|\zeta\|_{L^p} + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^p},$$

à laquelle on applique le lemme de Gronwall pour avoir

$$\|\zeta(t)\|_{L^p} \leq \exp\left(\int_0^t 2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^\infty} ds\right) \|\zeta(0)\|_{L^p} + \int_0^t \exp\left(\int_0^s 2 \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^\infty} d\sigma\right) \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^p} ds.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on a montré que pour $0 \leq t \leq \min(T, T_0)$, on a

$$\|\zeta(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\left(T_0 \sup_{t \in [0, T_0]} \|V\|_{\mathbb{H}^3}\right) \left(\|\zeta(0)\|_{L^\infty} + T_0 \sup_{t \in [0, T_0]} \|V\|_{\mathbb{H}^3} \right),$$

et donc $T > T_0$. □

On va montrer le même résultat pour la variable θ .

Lemme B.0.2. *On considère la solution du problème de Cauchy lié au système TRSW2D (1.22) définie sur $[0, T_0]$. Il existe une constante β qui dépend de la donnée initiale telle que*

$$0 < \beta \leq \theta(t, x) \leq \frac{1}{\beta}.$$

Démonstration. La variable θ est majoré par une constante du fait de sa régularité $H^3(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrons que θ est minorée par une constante strictement positive. La température θ vérifie l'équation de transport

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0. \quad (\text{B.1})$$

On définit le flot de cette équation par

$$\begin{aligned} \partial_1 F(t, t_0, x_0) &= \mathbf{v}(t, F(t, t_0, x_0)), \\ F(t_0, t_0, x_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Puisqu'on a l'inclusion $H^3(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\mathbb{R}^2)$, le vecteur \mathbf{v} est C^1 par rapport à la variable x , donc globalement lipschitzien par rapport à cette variable. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (B.2) admet une unique solution globale. On peut alors montrer que la solution de l'équation de transport s'écrit

$$\theta(x, t) = \theta_0(F(0, t, x)).$$

Avant de vérifier cette affirmation, montrons que cela permet d'achever la démonstration du résultat, puisque par hypothèse on $\theta_0 \geq \underline{\theta}$. Ainsi θ est minorée par une constante strictement positive.

Montrons que $\theta(x, t) = \theta_0(F(0, t, x))$ est bien la solution de (B.1). Commençons par souligner que θ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 . On peut donc calculer ses dérivées en temps et en espace, ce qui donne

$$\partial_t \theta(x, t) = \partial_2 F(0, t, x) \cdot \nabla \theta_0(F(0, t, x)),$$

et

$$\nabla \theta(x, t) = DF^T(0, t, x) \nabla \theta_0(F(0, t, x)).$$

Pour calculer $\partial_2 F(0, t, x)$ et $DF(0, t, x)$, on introduit la fonction $g(x, t) := F(t, t, x) = x$ qui vérifie

$$\partial_t g(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \nabla g(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par propriété de semi-groupe, $g(x, t) = F(t, 0, F(0, t, x))$. Ainsi, on peut également calculer les dérivées temporelles et spatiales de g à partir de cette formulation, ce qui donne

$$\partial_1 F(t, 0, F(0, t, x)) + DF(t, 0, F(0, t, x)) \partial_2 F(0, t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

et

$$DF(t, 0, F(0, t, x)) DF(0, t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Cette dernière relation exprime d'une part l'inversibilité de la matrice $DF(t, 0, F(0, t, x))$, et permet d'autre part d'écrire que

$$DF(t, 0, F(0, t, x)) DF(0, t, x) \mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(x, t).$$

En combinant les deux relations (B.3) et (B.4), on a alors que

$$\partial_2 F(0, t, x) = -DF^{-1}(t, 0, F(0, t, x)) \cdot \partial_1 F(t, 0, F(0, t, x))$$

Par définition du flot, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_2 F(0, t, x) &= -DF^{-1}(t, 0, F(0, t, x)) \mathbf{v}(F(t, t, x), t) \\ &= -DF^{-1}(t, 0, F(0, t, x)) \mathbf{v}(x, t) \\ &= -DF^{-1}(t, 0, F(0, t, x)) DF(t, 0, F(0, t, x)) DF(0, t, x) \mathbf{v}(x, t) \\ &= -DF(0, t, x) \mathbf{v}(x, t). \end{aligned}$$

On peut donc écrire que

$$\begin{aligned} \partial_t \theta(x, t) + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta(x, t) &= \partial_2 F(0, t, x) \cdot \nabla \theta_0(F(0, t, x)) + \mathbf{v}(x, t) \cdot DF^T(0, t, x) \nabla \theta_0(F(0, t, x)) \\ &= -DF(0, t, x) \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla \theta_0(F(0, t, x)) + \mathbf{v}(x, t) \cdot DF(0, t, x)^T \nabla \theta_0(F(0, t, x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Liste des tableaux

2.1	Récapitulatif des propriétés du modèle RSW1D.	20
2.2	Récapitulatif des propriétés du modèle TRSW1D.	20
5.1	Modèle SW : Préservation du lac au repos 5.7.1.1. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$	96
5.2	Modèle SW : capture d'états stationnaires 5.7.1.3. Erreurs calculées au temps T_{\max}	101
5.3	Modèle TSW : lac au repos à température constante non perturbé 5.7.2.1. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 0.125$	106
5.4	Modèle TSW : lac au repos à température variable non perturbé 5.7.2.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 0.4$	108
5.5	Modèle TSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Détecteurs d'équilibre global au temps $T_{\max} = 50$	109
5.6	Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 1 5.7.3.1. Erreur calculées au temps $T_{\max} = 10$	112
5.7	Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 2 5.7.3.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$	113
5.8	Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie 5.7.3.3. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 1$	114
5.9	Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie 5.7.3.3. Détecteurs d'équilibre global calculés aux temps $T_{\max} = 1$ et $T_{\max} = 100$	114
5.10	Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 1 5.7.3.4. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$	115
5.11	Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 2 5.7.3.5. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 1$	116
5.12	Modèle RSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Détecteurs d'équilibre global calculés au temps $T_{\max} = 200$	117
5.13	Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse nulle 5.7.4.1. Détecteurs d'équilibre global et erreurs calculés au temps $T_{\max} = 10$ pour $N = 150$ cellules.	119
5.14	Ordre 2 : État stationnaire géostrophique 5.7.5.2. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$ avec le schéma d'ordre deux.	120
5.15	Ordre 2 : État stationnaire en mouvement 5.7.5.3. Erreurs calculées au temps $T_{\max} = 10$ avec le schéma d'ordre deux.	120
5.16	Ordre 2 : État stationnaire 5.7.5.4. Erreurs et ratios calculés au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma LDF. Le cadre du haut correspond aux résultats fournis par le schéma d'ordre un, celui du bas au schéma d'ordre deux.	120
5.17	Ordre 2 : État stationnaire 5.7.5.4. Erreurs et ratios calculés au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma QTF. Le cadre du haut correspond aux résultats fournis par le schéma d'ordre un, celui du bas au schéma d'ordre deux.	121
6.1	Schéma 2D : État stationnaire géostrophique 6.4.1. Erreurs L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$	142
6.2	Schéma 2D : équilibre en mouvement 6.4.2. Erreur L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$ avec le schéma d'ordre un.	143
6.3	Schéma 2D : lac au repos 6.4.3 non perturbé. Erreurs L^1 calculées au temps $T_{\max} = 1$	143
6.4	Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Erreurs L^1 et ratios calculés en la variable h et obtenus avec les schémas d'ordre un (haut) et d'ordre deux (bas).	149

Table des figures

4.1	Solution du problème de Riemann (4.1)-(4.7)-(4.8) dans le plan (x, t) . La zone grise représente la zone dans laquelle la solution évolue. Les valeurs λ_L^{ex} et λ_R^{ex} sont les vitesses maximales des ondes développées par la solution.	50
4.2	Approximation de la solution au temps t^n constante par cellule. À chaque interface, on a localement la donnée initiale d'un problème de Riemann.	51
4.3	La condition CFL assure que le pas de temps Δt est suffisamment petit pour que les solutions des problèmes de Riemann ne se recontrent pas.	51
4.4	Solveurs de Riemann exact et approché. La zone gris foncé correspond au cône du solveur exact. La zone gris clair au cône du solveur de Riemann approché.	52
5.1	Solveur de Riemann approché général.	58
5.2	Solveur HLL.	59
5.3	Configuration well-balanced que l'on souhaite atteindre lorsque $(\tilde{w}_L, \tilde{w}_R)$ est à l'équilibre local.	59
5.4	Transport de la variable θ dans un solveur comprenant déjà trois ondes de vitesse $\lambda_L, 0$ et λ_R : la variable θ évolue uniquement à travers l'onde de vitesses \tilde{u}	61
5.5	Configurations possibles du solveur de Riemann approché.	63
5.6	Configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v . Les ondes en pointillés n'ont pas d'effet sur la variable v	63
5.7	Une configuration possible du solveur de Riemann approché pour les variables h et u . L'onde \tilde{u} peut être positionnée différemment mais elle n'a pas d'effet sur les variables h et u	63
5.8	Quelques configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable θ . L'onde \tilde{u} peut avoir une position différente, mais elle n'influence pas <i>a priori</i> l'évolution de θ	70
5.9	Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h et u , similaire à un solveur à deux états intermédiaires.	71
5.10	Quelques configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v . L'onde de vitesse \tilde{u} peut avoir une position différente.	72
5.11	Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h, u, v	76
5.12	Configuration du solveur de Riemann approché pour les variables h et u , similaire à un solveur à deux états intermédiaires.	83
5.13	Configurations possibles du solveur de Riemann approché pour la variable v	83
5.14	Reconstruction de la solution sur chaque cellule. En gris clair et pointillés, la solution constante par cellule. En bleu, les reconstructions affines.	92
5.15	Schéma d'ordre 2 MUSCL. On considère les reconstructions de la solution sur des demi-cellules.	94
5.16	Modèle SW : Préservation d'un lac au repos 5.7.1.1. Surface libre(gauche) et débit (droite). Cet état stationnaire est préservé par les trois schémas.	97
5.17	Modèle SW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.1.2. Surfaces libres initiales pour $\varepsilon = 0.2$ (gauche) et $\varepsilon = 0.001$ (droite).	97
5.18	Modèle SW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.1.2 : surface libre (à gauche) et débit (à droite) pour les paramètres $\varepsilon = 0.2$ (haut) et $\varepsilon = 0.001$ (bas).	98
5.19	Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM1 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$	99
5.20	Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM2 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$	100
5.21	Modèle SW : Capture de l'état stationnaire GM3 5.7.1.3. En haut à gauche : surface libre. En haut à droite : débit. En bas : zoom de la surface libre sur l'intervalle $[9, 11]$	101
5.22	Modèle SW : Rupture de barrage sur fond plat 5.7.1.4. Hauteur (à gauche) et débit (à droite).	102

5.23	Modèle SW : Problème de Riemann à l'équilibre 5.7.1.5. Surface libre (à gauche) et débit (à droite). Solutions approchées calculées après 4, 10, 20 et 150 itérations.	103
5.24	Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.2.1 avec les données P1 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).	104
5.25	Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.2.1 avec les données P2 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).	105
5.26	Modèle TSW : Petite perturbation d'un lac au repos 5.7.2.1 avec les données P3 au temps $T_{\max} = 0.125$. À gauche, surface libre sur le domaine $[-2, 2]$. À droite, zoom sur l'intervalle $[-1.8, -1.2]$ (haut) et l'intervalle $[0.1, 0.7]$ (bas).	106
5.27	Modèle TSW : Perturbation d'un lac au repos à température variable 5.7.2.2. Surface libre (à gauche) et débit (à droite). Simulations au temps $T_{\max} = 0.2$ (haut) et $T_{\max} = 0.4$ (bas).	107
5.28	Modèle TSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Cas sous-critique. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	108
5.29	Modèle TSW : Capture d'un état stationnaire en mouvement 5.7.2.3. Cas transcritique. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	109
5.30	Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond plat 5.7.2.4. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	110
5.31	Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond en relief 5.7.2.5. Surface libre (gauche), vitesse tangentielle (centre), température (droite).	110
5.32	Modèle TSW : Rupture de barrage sur fond en relief 5.7.2.5. Surface libre (gauche), vitesse tangentielle (centre). Zoom pour x dans l'intervalle $[0, 0.5]$	111
5.33	Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 1 5.7.3.1. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	112
5.34	Modèle RSW : État stationnaire géostrophique 2 5.7.3.2. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	112
5.35	Modèle RSW : État stationnaire au repos avec topographie 5.7.3.3. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 1$. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	113
5.36	Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 1 5.7.3.4. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 10$. Hauteur (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	114
5.37	Modèle RSW : État stationnaire en mouvement 2 5.7.3.5. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 1$. Surface libre (gauche), débit (centre), débit transverse (droite).	115
5.38	Modèle RSW : Capture d'état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 200$. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (centre), vitesse transverse (droite).	116
5.39	Modèle RSW : Capture d'état stationnaire en mouvement 5.7.3.6. Simulations effectuées jusqu'au temps $T_{\max} = 200$. Débit (gauche), invariant $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + g(h+z)$ (droite).	117
5.40	Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Hauteur d'eau aux temps $t = 0, 0.4\pi, 0.8\pi, 1.2\pi, 1.6\pi, 2\pi$. Zoom sur l'intervalle $[-10, 10]$	123
5.41	Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Hauteur au temps $T_{\max} = 0.4\pi$. Comparaison des différents schémas sur l'intervalle $[-2, 2]$. Dans cette zone, le régime est sous-critique, sur-critique puis de nouveau sous-critique.	124
5.42	Modèle RSW : Ajustement de Rossby 5.7.3.7. Quantités fv et $\partial_x h$ au temps $T_{\max} = 69.2\pi$. Comparaison des différents schémas sur l'intervalle $[-20, 20]$	125
5.43	Modèle RSW : État stationnaire en espace 5.7.3.8. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (milieu), vitesse transverse (droite) au temps $T_{\max} = 1$	125
5.44	Modèle RSW : État stationnaire en espace 5.7.3.8. Hauteur (gauche), vitesse tangentielle (milieu), vitesse transverse (droite) calculées au point $x = 0.5$ pour $t \in [0, 1]$	126
5.45	Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse nulle 5.7.4.1. Hauteur (en haut à gauche), débit (en haut à droite), débit transverse (en bas à gauche), variable $h\theta$ (en bas à droite).	126
5.46	Modèle TRSW : Rupture de régularité à vitesse non nulle 5.7.4.1. Vitesse tangentielle calculée aux temps $t = 0, 0.09\pi, 0.36\pi, 0.72\pi, 3.4\pi$	127
5.47	Modèle TRSW : Rupture de barrage avec fond en relief 5.7.4.2. Hauteur (en haut à gauche), débit (en haut à droite), débit transverse (en bas à gauche), variable $h\theta$ (en bas à droite) au temps $T_{\max} = 0.05$	128
5.48	Ordre 2 : Rupture de barrage avec un fond plat 5.7.5.1 au temps $T_{\max} = 0.05$. Schémas d'ordre un (haut) et schémas d'ordre un (bas). Hauteur (gauche), débit (centre), température (droite).	129
5.49	Ordre 2 : État stationnaire en mouvement 5.7.5.3 au temps $T_{\max} = 1$	129

6.1	Maillage 2D non structuré.	132
6.2	Reconstruction sur maillage cartésien. En gris, l'approximation constante sur la cellule. En bleu, la reconstruction horizontale, en rouge la reconstruction verticale.	139
6.3	Schémas 2D : condition initiale de l'état stationnaire géostrophique par direction 6.4.1.	142
6.4	Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LT aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.	144
6.5	Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LDF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.	145
6.6	Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma LTF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.	146
6.7	Schéma 2D : perturbation d'un lac au repos 6.4.3. Schéma QTF aux temps $t = 0, 0.12, 0.24, 0.36, 0.48, 0.6$ (de gauche à droite, puis de haut en bas). L'échelle est adaptée sur chaque figure pour mieux observer la solution approchée.	147
6.8	Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Hauteur initiale.	148
6.9	Schéma 2D : vortex stationnaire 6.4.4. Hauteurs calculées au temps $T_{\max} = 1$ avec les schémas LTF d'ordre un (en haut) et d'ordre deux (en bas).	149

Résumé

Dans cette thèse, on étudie de façon théorique et numérique le système des équations de Saint-Venant en prenant en compte la force de Coriolis et les effets thermiques. La première partie est dédiée à la dérivation du modèle à partir des équations primitives, et à l'étude générale de ses propriétés. Dans la deuxième partie, on s'intéresse au problème de Cauchy, i.e à la question de l'existence et de l'unicité d'une solution des équations. Pour cela, on propose d'utiliser deux techniques de démonstration : l'une fondée sur l'ajout d'un terme diffusif, l'autre utilisant une suite de problèmes hyperboliques linéaires à résoudre. On étudie plus en détail les méthodes de symétrisation qui permettent d'établir des estimations *a priori* indispensables pour obtenir la régularité souhaitée de la solution. Sur le plan numérique, l'objectif majeur consiste à préserver les états stationnaires du modèle en proposant des schémas dits *well-balanced*. C'est l'objet de la troisième partie. On commence par rappeler le principe des schémas de type Godunov pour des systèmes hyperboliques 1D avec terme source. On propose ensuite une stratégie de construction de solveurs de Riemann approchés, qui aboutit à l'obtention de trois schémas préservant toutes les solutions stationnaires. On considère également une méthode de montée en ordre pour améliorer leur précision. De nombreux cas-tests sont proposés pour valider la prise en compte de chacune des spécificités du modèle, et comparer les performances des schémas. Enfin, le dernier chapitre concerne l'extension de ces schémas en deux dimensions d'espace, toujours avec l'objectif de préserver le maximum d'états stationnaires. Là encore, une meilleure précision est obtenue en augmentant l'ordre des schémas, et des exemples numériques viennent illustrer leurs propriétés.

Mots clés : écoulement géophysique, équations de saint-venant, force de coriolis, edp hyperboliques, méthode volumes finis, schéma complètement équilibré

Abstract

In this thesis, we focus on theoretical and numerical aspects of the thermal rotating shallow water (TRSW) model. The first part is dedicated to the derivation of the model from the primitive equations and to the study of its properties. In the second part, we consider the initial value problem related to the TRSW model. We handle the IVP with two different proofs : the first one consists in adding a diffusion term to the system, and the second one is based on a sequence of linear hyperbolic systems to solve. Several symmetrisation techniques allow us to get the essential *a priori* estimates. From a numerical point of view, the main goal is to build *well-balanced* schemes that preserve as many stationary solutions as possible. This problem is handled in the third part. We start by recalling the Godunov-type schemes principle for 1D hyperbolic systems with source terms. Next, we present a general strategy to build approximate Riemann solvers that leads to three fully *well-balanced* schemes that preserve all steady states. We also consider a second-order extension procedure to improve their accuracy. Many test cases are used to validate the behaviour of the schemes on various situations and to compare them. Finally, the last chapter provides a two-dimensional extension in space of the previous schemes, always with the main objective to preserve the maximum of steady states. Here again, a better accuracy is obtained with a second-order extension, and numerical tests show their good properties.

Keywords: geophysical flow, shallow water equations, coriolis force, hyperbolic pde, finite volume method, fully *well-balanced* scheme
