



**HAL**  
open science

# Contrôle optimal et planification de trajectoire pour le guidage des systèmes aérospatiaux

Bruno Hérisse

► **To cite this version:**

Bruno Hérisse. Contrôle optimal et planification de trajectoire pour le guidage des systèmes aérospatiaux. Automatique / Robotique. Université Paris - Saclay, 2023. tel-04095485

**HAL Id: tel-04095485**

**<https://theses.hal.science/tel-04095485>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER DES  
RECHERCHES

présentée par

**Bruno HÉRISSE**

Contrôle optimal et planification de trajectoire  
pour le guidage des systèmes aérospatiaux

Soutenue publiquement le **17 mars 2023** devant le jury composé de

<i>Président</i>	Yacine CHITOUR	Professeur, Université Paris-Saclay
<i>Rapporteurs</i>	Nicolas PETIT Jean-Baptiste POMET Hasnaa ZIDANI	Professeur, Mines Paris PSL Directeur de Recherche, INRIA Professeur, INSA Rouen Normandie
<i>Examineurs</i>	Jean-Baptiste CAILLAU Frédéric JEAN Emmanuel TRÉLAT	Professeur, Université Côte d'Azur Professeur, ENSTA Paris Professeur, Sorbonne Université



---

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement Nicolas Petit, Jean-Baptiste Pomet et Hasnaa Zidani d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire. Je remercie Yacine Chitour de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Mes remerciements vont aussi à Jean-Baptiste Caillau qui a accepté de faire partie de ce jury.

J'adresse ma plus grande reconnaissance à Emmanuel Trélat et Frédéric Jean. Emmanuel m'a fait partager son expérience en contrôle optimal, autant sur les aspects théoriques que sur les techniques numériques. J'ai aujourd'hui une collaboration très fructueuse avec Frédéric, ses suggestions sont d'une grande importance dans mon travail. Je les remercie tous les deux pour leur disponibilité.

Je remercie une nouvelle fois Tarek Hamel, qui a dirigé ma thèse, de m'avoir initié au monde de la recherche avec exigence.

J'ai la chance de travailler dans une ambiance très stimulante avec les membres de mon département. Je remercie évidemment tous mes collègues (passés et actuels) de l'unité NGPA pour l'ambiance tout autant professionnelle qu'amicale. Patrice Pierrat, qui a permis mon arrivée à l'ONERA, Frédéric Damongeot et Valérie Haemmerle m'ont tous les trois donné du temps pour développer mes activités de recherche, je les remercie pour leur confiance et leur compréhension. En particulier, je tiens à remercier Romain Pepy avec qui j'ai démarré mes travaux de recherche à l'ONERA dans un domaine nouveau pour moi, nos échanges m'ont été très profitables. Je remercie chaleureusement Karim Dahia, que je côtoie souvent, pour nos nombreuses discussions et nos collaborations. Je remercie également Elliot Brendel pour les travaux que nous avons réalisés ensemble. Merci également à Jean-Michel Allard, Gyslain Hervieux, Julien Marzat et Sylvain Bertrand.

J'ai eu grand plaisir à travailler avec Yasmina Bestaoui, Alexandre Chapoutot et Julien Alexandre dit Sandretto, je les remercie. Mes remerciements vont aussi aux ingénieurs de la direction des lanceurs du CNES (aujourd'hui direction du transport spatial) pour leur accueil chaleureux lors de mon passage en 2017, je remercie en particulier Éric Bourgeois.

Bien sûr, je remercie l'ensemble des étudiants que j'ai encadrés et co-encadrés en stage et surtout en thèse de doctorat. Merci donc à Pawit Pharpata, Riccardo Bonalli, Émilien Flayac, Étienne Bertin et Clara Leparoux. Merci également à Duc Kien Phung et Prince Edorh qui ont effectué leur post-doctorat sous ma supervision.

Enfin, je tiens à remercier Édith pour son soutien au quotidien.



---

# Table des matières

---

<b>Table des matières</b>	<b>4</b>
<b>1 Résumé des travaux de recherche</b>	<b>7</b>
1.1 Curriculum Vitæ . . . . .	8
1.2 Synthèse des travaux de recherche . . . . .	9
1.3 Rayonnement et responsabilités scientifiques . . . . .	10
1.3.1 Participations principales à des projets . . . . .	10
1.3.2 Activités de relecture et d'expertise . . . . .	11
1.4 Liste des publications . . . . .	11
1.4.1 Mémoires . . . . .	11
1.4.2 Articles soumis . . . . .	12
1.4.3 Journaux internationaux à comité de lecture . . . . .	12
1.4.4 Conférences internationales à comité de lecture (avec actes) . . . . .	12
1.4.5 Conférences internationales sur résumé (avec actes) . . . . .	14
1.4.6 Brevets et Logiciels . . . . .	14
1.4.7 Conférences sur invitation et séminaires . . . . .	14
1.5 Encadrement . . . . .	15
1.5.1 Thèses . . . . .	15
1.5.2 Stages de fin d'études . . . . .	15
1.5.3 Postdoctorats . . . . .	16
1.6 Enseignement . . . . .	16
<b>2 Guidage des systèmes aérospatiaux</b>	<b>19</b>
2.1 Modèle dynamique pour le guidage . . . . .	19
2.1.1 Modèle dynamique d'un système aérospatial . . . . .	19
2.1.2 Forces utilisées pour la commande . . . . .	22
2.1.3 Contraintes principales d'un véhicule aérospatial . . . . .	24
2.1.4 Boucle de GNC et modèles pour le guidage . . . . .	25
2.2 Problèmes de guidage et méthodes . . . . .	29
2.2.1 Principes du guidage et méthodes . . . . .	29
2.2.2 Méthodes linéaires pour le guidage . . . . .	32
2.2.3 Méthodes optimales pour le guidage . . . . .	34
2.3 Quelques enjeux pour le guidage des systèmes aérospatiaux . . . . .	38

---

<b>3</b>	<b>Contrôle optimal par méthodes de tir indirect pour le guidage</b>	<b>41</b>
3.1	Méthode de continuation pour les systèmes avec retards . . . . .	41
3.2	Guidage d'un intercepteur . . . . .	43
3.2.1	Modélisation . . . . .	44
3.2.2	Résultats et simulation . . . . .	44
3.3	Guidage pour le retour de lanceurs réutilisables . . . . .	47
3.3.1	Modélisation . . . . .	48
3.3.2	Résultats pour le concept VTVL . . . . .	49
3.3.3	Résultats pour le concept VTHL . . . . .	53
3.4	Perspectives et projets de recherche . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Planification et commande en environnement contraint et incertain</b>	<b>61</b>
4.1	Planification optimale sous contraintes d'état . . . . .	61
4.1.1	Rappel sur les méthodes de planification à échantillonnage . . . . .	62
4.1.2	Une méthode par échantillonnage pour la planification . . . . .	63
4.1.3	Méthode incrémentale pour la planification embarquée . . . . .	68
4.2	Méthodes couplées d'estimation et de commande . . . . .	72
4.3	Perspectives et projets de recherche . . . . .	76
	<b>Bibliographie</b>	<b>88</b>

## CHAPITRE 1

---

# Résumé des travaux de recherche

---

## 1.1 Curriculum Vitæ

### Bruno HÉRISSE

Ingénieur de recherche permanent au DTIS, ONERA, centre de Palaiseau

Date de naissance : 28/01/1984

Page personnelle : <http://herisse.bruno.free.fr>

### FORMATION

---

- 2007–2010 **Doctorat** – Université Nice–Sophia–Antipolis  
Automatique, traitement du signal et des images.  
*Asservissement et Navigation Autonome d’un drone en environnement incertain par flot optique.*  
Sous la direction de Prof. Tarek Hamel, I3S-CNRS, Université Côte d’Azur.  
Thèse soutenue le 19/11/2010 devant le jury composé de Philippe Souères, François Chaumette, Pascal Morin, Stéphane Viollet, Eva Crück, Tarek Hamel, François-Xavier Russotto.
- 2007 **M2 Recherche** – Supélec, en habilitation conjointe avec l’Université de Rennes 1  
Optimisation, détection, estimation, filtrage de Kalman et filtrage particulaire.
- 2004–2007 **Diplôme d’ingénieur** – Supélec  
Commande des systèmes, traitement du signal, systèmes temps-réel.

### EXPERIENCE PROFESSIONNELLE

---

- 2011– **ONERA – Ingénieur de recherche**, Palaiseau  
Participation à des études et recherches pour la DGA.  
Participation à des recherches pour le CNES (PIC RLV CNES–ONERA).  
Porteur du projet de recherche ANGE (2015–2018).  
Encadrement de 5 thèses et 9 stages de fin d’études.
- 2018– **ENSTA Paris – Enseignant**, Palaiseau  
Automatique (*Cours, TDs, TPs*).
- 2013–2020 **Sorbonne Université – Enseignant**, Paris  
Informatique temps réel (*Cours, TDs, TPs*).
- 2017 **CNES/DLA – Ingénieur en détachement**, Paris  
Participation au projet *CALLISTO* de démonstrateur d’un lanceur réutilisable.
- 2007–2010 **CEA List – Doctorant**, Fontenay-aux-Roses  
Travaux de recherche en commande basée vision de mini-drones.

## 1.2 Synthèse des travaux de recherche

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués au département DTIS de l'ONERA à Palaiseau. Ces travaux sont regroupés en quatre chapitres. Le présent chapitre résume les activités de recherche, le deuxième chapitre présente le problème général du guidage des systèmes aérospatiaux auquel je m'intéresse à l'ONERA. Le troisième chapitre traite le problème du contrôle optimal par méthodes de tir indirect pour le guidage. Enfin, le quatrième chapitre présente les travaux sur la planification et la commande en environnement contraint et incertain. Des enjeux et projets de recherche sont présentés en fin de chaque chapitre.

Une première partie de mes travaux porte sur l'application des techniques de contrôle optimal pour le guidage des systèmes aérospatiaux. Pour cela, les méthodes de tir indirect sont utilisées. Les applications traitées concernent principalement les missiles intercepteurs et les lanceurs réutilisables. Suite au travail mené dans le cadre de la thèse de R. Bonalli, j'ai développé un logiciel de calcul de trajectoires de guidage pour les missiles intercepteurs. En utilisant ce logiciel, des simulations avec ordinateur dans la boucle (*Processor-In-the-Loop*) ont été menées pour évaluer les performances globales de l'algorithme dans un contexte opérationnel temps réel (projet ANGE, voir section 1.3). Ces résultats ont permis d'améliorer l'expertise de l'ONERA sur ce sujet et ont abouti à une exploitation dans un cadre contractuel au profit de la DGA.

Suite à ma participation (en détachement au CNES) au projet **CALLISTO** de démonstrateur à petite échelle d'un lanceur réutilisable, je m'intéresse également au contrôle optimal de différents concepts de récupération d'étages. En particulier, ces travaux tentent d'apporter des solutions numériques pour être en mesure d'embarquer ces algorithmes dans les futurs lanceurs, avec des premiers résultats prometteurs déjà obtenus (projets HERACLES et PIC RLV CNES-ONERA).

Une autre partie de mes travaux se concentre sur des problèmes de planification de trajectoires en environnement fortement contraint pour lesquels les techniques de contrôle optimal utilisées seules sont trop difficiles à mettre en œuvre. Effectivement, en présence de nombreuses contraintes sur l'état du véhicule (typiquement, en présence d'obstacles), des techniques probabilistes sont utilisées pour explorer l'espace d'état et fournir un chemin vers l'objectif (thèse de P. Pharpata). Un problème intéressant consiste alors à développer des algorithmes de planification basés modèles et des algorithmes de guidage permettant de garantir un suivi robuste de ce chemin par le système réel (projet COPERNIC). On s'est également intéressé au couplage entre estimation et commande pour les systèmes non-linéaires. Dans la thèse de E. Flayac, des algorithmes combinant filtrage particulière et commande prédictive ont été développés et appliqués à la navigation par corrélation de terrain.

Tous ces travaux ont donné lieu à la publication de 8 articles de journaux et à la publication de 18 articles de conférences à comité de lecture sur la période 2008–2022. De plus, 4 articles de journaux ont été soumis sur les résultats obtenus récemment. J'ai également participé à la rédaction de 20 rapports techniques concernant principalement les études contractuelles réalisées au profit de la DGA et du CNES. Par ailleurs, j'ai participé à l'élaboration de 3 brevets et d'un logiciel (voir section 1.4).

J'ai contribué à l'encadrement de 5 thèses, dont deux sont en cours, en lien avec ces travaux de recherche. La plupart de ma production scientifique est liée aux travaux effectués dans le cadre de ces thèses. J'ai également co-encadré les travaux de postdoctorat de Duc-Kien

Phung (2015–2016) sur l’apport du calcul GPU pour la commande prédictive. J’ai également encadré les travaux de postdoctorat de Prince Etorh (2019–2021) sur le contrôle optimal appliqué à un concept de lanceur réutilisable. De plus, j’ai contribué à l’encadrement de 9 stages de Master 2 sur la période 2009-2022, dont l’un a débouché sur le dépôt des trois brevets (voir section 1.5).

L’ensemble de mes activités scientifiques sont listées en section 1.3. De plus, je suis membre du GdR Robotique (GT véhicules autonomes), du GdR MACS et de la SAGIP (GT UAV), ainsi que de l’institut iCODE (Institut pour le Contrôle et la décision de l’Université Paris Saclay) devenu H-CODE. Dans ce cadre, j’ai participé à différentes réunions et séminaires (GT UAV, PGM Days).

## 1.3 Rayonnement et responsabilités scientifiques

### 1.3.1 Participations principales à des projets

- Responsable de l’activité guidage dans le projet ONERA intitulé **HERACLES** - Hypersonic, Efficient and Reusable Aerospace Concepts for Launcher Evolution Strategies (2018–2021)  
Sujet : Guidage optimal temps réel pour le retour du premier étage d’un lanceur réutilisable.  
Montant total :  $\approx 1.5$  M€.
- Responsable d’études en guidage pour différents projets au profit de la **DGA** (2011–2022)  
Montant total :  $> 3$  M€.
- Participation au projet ONERA intitulé **COSMOS** - Collective dynamics of Swarms : MOdels and Simulation (2019–2022)  
Sujet : Utilisation du flux optique pour le vol en essaim sans collisions.  
Montant total :  $\approx 1$  M€.
- Co-responsable d’un projet financé par l’institut iCODE (2019–2020)  
Sujet : Réalisation d’un banc d’essai 2D de satellite en microgravité simulé par un système aéroglesseur.  
Montant total : 12 k€.
- Responsable de l’activité GNC-1 dans le **PIC RLV CNES–ONERA** (2018–2019)  
Sujet : Guidage optimal temps réel pour le retour du premier étage d’un lanceur réutilisable de type VTVL (*Vertical Take-off Vertical Landing*).  
Montant total :  $\approx 0.3$  M€
- Détachement au CNES pour participation au projet **CALLISTO** - *Cooperative Action Leading to Launcher Innovation in Stage Toss-back Operations* (2017)  
Sujet : Détermination d’un critère pour le déclenchement de la phase de retour d’un démonstrateur de lanceur réutilisable de type VTVL.  
Montant total :  $> 30$  M€.

- Coordinateur du projet ONERA intitulé **ANGE** - Algorithmes de Navigation et Guidage Embarqués (2015–2018)  
Sujet : Implémentation d’algorithmes de GNC avancés sur calculateurs embarqués.  
Montant total :  $\approx 1.3$  M€.
- Contribution au projet ONERA intitulé **COPERNIC** - *COntrol and PERception for autonomous Navigation and Inter vehicles Cooperation* (2014–2017)  
Sujet : Implémentation d’algorithmes de planification et de commande à partir de données visuelles.  
Montant total :  $\approx 1.3$  M€.
- Doctorant sur le projet intitulé **FNRAE NAVIFLOW** - *Assistance à la NAVigation par Flux Optique* (2007–2010)  
Sujet : Navigation Autonome d’un drone en environnement incertain par flux optique.  
Montant total :  $\approx 0.5$  M€.

### 1.3.2 Activités de relecture et d’expertise

#### Relectures

- IEEE Transactions on Robotics.
- IEEE Transactions on Control Systems Technology.
- IEEE/ASME Transactions on Mechatronics.
- ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis.
- The International Journal of Robotics Research.
- IFAC Control Engineering Practice.
- IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.
- Autonomous Robots.
- AIAA Journal on Guidance, Control and Dynamics.
- International Journal of Micro-Air Vehicles.
- Conférences IFAC : World Congress, Automatic Control in Aerospace.
- Conférences IEEE : CDC, IROS, ICRA, ACC, ECMR.

#### Évaluations

- Proposition de projet ANR (2014)
- Proposition de projet à la Technology Foundation STW, Pays-Bas (2015).
- Évaluation quadriennale de l’équipe **McTAO** de l’INRIA (2022).

## 1.4 Liste des publications

### 1.4.1 Mémoires

- [1] B. Hérissey. – *Asservissement et Navigation Autonome d’un drone en environnement incertain par flot optique*. – PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, novembre 2010

### 1.4.2 Articles soumis

- [4] R. Bonalli, C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – On the accessibility and controllability of statistical linearization for stochastic control: Algebraic rank conditions and their genericity. *arXiv preprint arXiv:2207.10944*, 2022
- [3] A. Maupoux, G. Dufour, B. Hérisse. – Collisionless drone swarm dynamics through optical flow control. *preprint ONERA*, 2022
- [2] P. Edoth, E. Brendel, B. Hérisse, E. Bourgeois. – Optimal guidance for glide-back concepts of reusable launch vehicles. *preprint ONERA*, 2022
- [1] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérisse, F. Jean. – A unifying vision of particle filtering and explicit dual control. *preprint HAL*, 2020

### 1.4.3 Journaux internationaux à comité de lecture

- [8] C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – Structure of optimal control for planetary landing with control and state constraints. *ESAIM: COCV*, 28:67, 2022
- [7] E. Bertin, E. Brendel, B. Hérisse, J. A. D. Sandretto, A. Chapoutot. – Prospects on solving an optimal control problem with bounded uncertainties on parameters using interval arithmetic. *Acta Cybernetica*, 2021
- [6] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Continuity of pontryagin extremals with respect to delays in nonlinear optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(2):1440–1466, 2019
- [5] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Optimal control of endo-atmospheric launch vehicle systems: geometric and computational issues. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1–1, 2019
- [4] P. Pharpatara, B. Hérisse, Y. Bestaoui. – 3-D trajectory planning of aerial vehicles using RRT\*. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(3):1116–1123, mai 2017
- [3] B. Hérisse, G. Hervieux, K. Dahia, J.-M. Allard, J.-C. Sarrazin. – Component-Based Simulation for Real-Time Experiments of Advanced Aerospace Systems. *AerospaceLab Journal*, (12):pages 1–9, décembre 2016
- [2] B. Hérisse, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – Landing a vtol unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1):77–89, février 2012
- [1] B. Hérisse, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A terrain-following control approach for a vtol unmanned aerial vehicle using average optical flow. *Autonomous Robots*, 29(3):381–399, novembre 2010

### 1.4.4 Conférences internationales à comité de lecture (avec actes)

- [18] C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – Optimal planetary landing with pointing and glide-slope constraints. – *2022 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, décembre 2022

- 
- [17] E. Bertin, B. Hérissé, J. A. D. Sandretto, A. Chapoutot. – Spatio-temporal constrained zonotopes for validation of optimal control problems. – *2021 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, décembre 2021
- [16] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérissé, F. Jean. – Dual particle output feedback control based on Lyapunov drifts for nonlinear systems. – *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 250–255, décembre 2018
- [15] D.-K. Phung, B. Hérissé, J. Marzat, S. Bertrand. – Model predictive control for autonomous navigation using embedded graphics processing unit. – vol. 50, pp. 11883 – 11888, 2017. – 20th IFAC World Congress
- [14] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérissé, F. Jean. – Nonlinear fisher particle output feedback control and its application to terrain aided navigation. – *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1566–1571, décembre 2017
- [13] R. Bonalli, B. Hérissé, E. Trélat. – Solving optimal control problems for delayed control-affine systems with quadratic cost by numerical continuation. – *2017 American Control Conference (ACC)*, pp. 649–654, mai 2017
- [12] R. Bonalli, B. Hérissé, E. Trélat. – Analytical initialization of a continuation-based indirect method for optimal control of endo-atmospheric launch vehicle systems. – vol. 50, pp. 482 – 487, 2017. – 20th IFAC World Congress
- [11] P. Pharpatara, B. Hérissé, R. Pepy, Y. Bestaoui. – Shortest path for aerial vehicles in heterogeneous environment using RRT\*. – *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 6388–6393, mai 2015
- [10] P. Pharpatara, B. Hérissé, Y. Bestaoui. – 3D-shortest paths for a hypersonic glider in a heterogeneous environment. – vol. 48, pp. 186 – 191, 2015. – 1st IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles ACNAAV’15
- [9] R. Pepy, B. Hérissé. – An indirect method for optimal guidance of a glider. – vol. 47, pp. 5097 – 5102, 2014. – 19th IFAC World Congress
- [8] P. Pharpatara, R. Pepy, B. Hérissé, Y. Bestaoui. – Missile trajectory shaping using sampling-based path planning. – *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2533–2538, novembre 2013
- [7] P. Pharpatara, B. Hérissé, R. Pepy, Y. Bestaoui. – Sampling-based path planning: a new tool for missile guidance. – vol. 46, pp. 131 – 136, 2013. – 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace
- [6] F.-X. Marmet, S. Bertrand, B. Hérissé, M. Carton. – A low-cost integrated system for indoor and outdoor navigation of miniature uavs. – *EuroGNC 2013, 2nd CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation & Control*, avril 2013
- [5] B. Hérissé, R. Pepy. – Shortest paths for the Dubins’ vehicle in heterogeneous environments. – *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4504–4509, décembre 2013
- [4] B. Hérissé, S. Oustrières, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A general optical flow based terrain-following strategy for a vtol uav using multiple views. – *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3341–3348, mai 2010
- [3] B. Hérissé, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – The landing problem of a vtol unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. – *2010 IEEE/RSJ*

*International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1600–1605, octobre 2010

- [2] B. Hérissé, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A nonlinear terrain-following controller for a vtol unmanned aerial vehicle using translational optical flow. – *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3251–3257, mai 2009
- [1] B. Hérissé, F.-X. Russotto, T. Hamel, R. Mahony. – Hovering flight and vertical landing control of a vtol unmanned aerial vehicle using optical flow. – *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 801–806, septembre 2008

#### 1.4.5 Conférences internationales sur résumé (avec actes)

- [2] P. Eдорh, B. Hérissé, E. Bourgeois. – Glide back recovery of a winged reusable launch vehicle with wind estimate. – *EUCASS 2022*, Lille, France, juin 2022
- [1] E. Brendel, B. Hérissé, E. Bourgeois. – Optimal guidance for toss back concepts of Reusable Launch Vehicles. – *EUCASS 2019*, Madrid, Spain, juillet 2019

#### 1.4.6 Brevets et Logiciels

- [4] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérissé, J.-M. Allard. – Patent number wo/2021/115993 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2021
- [3] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérissé, J.-M. Allard. – Patent number wo/2021/115998 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2021
- [2] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérissé, J.-M. Allard. – Patent number wo/2020/233906 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2020
- [1] B. Hérissé, R. Bonalli. – Software – SOCP (Shooting for Optimal Control Problems), 2016. Available at <https://github.com/bherisse/socp>

#### 1.4.7 Conférences sur invitation et séminaires

- [4] B. Hérissé, P. Eдорh. – Optimal control of reusable launch vehicles : an indirect shooting approach. – *Robotics : Science and Systems (Workshop in Space Robotics)*, sur invitation du Dr. Riccardo Bonalli, Juin 2019
- [3] B. Hérissé. – Real-time optimal control of aerospace systems with state-control constraints and delays. – *PGMO Days*, sur invitation du Dr. J.-B. Caillau, Novembre 2018
- [2] B. Hérissé. – A terrain-following strategy for a vtol uav using translational optical flow. – *Séminaire à Australian National University*, sur invitation du Dr. R. Mahony, Janvier 2010
- [1] B. Hérissé, T. Hamel. – Optical flow based navigation for a vtol uav. – *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (Workshop on Micro Aerial Vehicles from Technologies to Commercialization : Ready or not ready ?)*, sur invitation du Dr. S. Bouabdallah, Octobre 2009

## 1.5 Encadrement

### 1.5.1 Thèses

- **Clara Leparoux** (2020–2023)  
Thèse de l’Institut Polytechnique de Paris, démarrée le 01/09/2020.  
Co-encadrement (50%) avec Frédéric Jean (ENSTA Paris).  
Sujet : Commande sous incertitudes pour l’atterrissage d’un premier étage de lanceur réutilisable.
- **Étienne Bertin** (2019–2022)  
Thèse de l’Institut Polytechnique de Paris, démarrée le 01/10/2019.  
Co-encadrement (30%) avec Julien Alexandre dit Sandretto (ENSTA Paris) et Alexandre Chapoutot (ENSTA Paris).  
Sujet : Contrôle optimal robuste aux incertitudes pour le guidage de véhicules autonomes.
- **Émilien Flayac** (2016–2019)  
Thèse de l’Université Paris-Saclay, démarrée le 01/10/2016 et soutenue le 25/11/2019.  
Co-encadrement (40%) avec Karim Dahia (ONERA) et Frédéric Jean (ENSTA Paris).  
Sujet : Méthodes d’estimation et de contrôle non-linéaires couplées avec application à la navigation par corrélation de terrain.  
Poste actuel : Enseignant/Chercheur à l’ISAE-SUPAERO.
- **Riccardo Bonalli** (2015–2018)  
Thèse de Sorbonne Université, démarrée le 01/04/2015 et soutenue le 13/07/2018.  
Co-encadrement (50%) avec Emmanuel Trélat (Sorbonne Université).  
Sujet : Contrôle optimal de systèmes aérospatiaux avec contraintes sur le contrôle et sur l’état et avec retards (**Prix de thèse ONERA**).  
Poste actuel : Chargé de recherche au L2S, CNRS, Université Paris Saclay.
- **Pawit Pharpata** (2012–2015)  
Thèse de l’Université Paris-Saclay, démarrée le 01/10/2012 et soutenue le 22/09/2015.  
Co-encadrement (50%) avec Yasmina Bestaoui (Université d’Evry).  
Sujet : Planification de trajectoire sous contraintes d’aéronefs.  
Poste actuel : Data scientist à DTAC (Thaïlande).

### 1.5.2 Stages de fin d’études

- **Clara Leparoux** (2020)  
École/université : ENS Paris-Saclay  
Sujet : Commande sous incertitudes pour l’atterrissage d’un premier étage de lanceur réutilisable.
- **Étienne Bertin** (2019)  
École/université : ENSTA Paris  
Sujet : Guidage optimal robuste - Application à un lanceur réutilisable.

- **Thomas Perrin** (2018)  
École/université : UPMC  
Sujet : Mise en œuvre d'une stratégie de planification de trajectoire robuste pour un drone.
- **Quentin Chan-Wai-Nam** (2017)  
École/université : MINES ParisTech  
Sujet : Commande prédictive par méthodes de tir.
- **Clément Audebert** (2016)  
École/université : Grenoble INP–Phelma  
Sujet : Parallélisation d'un algorithme avancé de guidage/navigation et portage sur carte FPGA.
- **Felipe Esteves** (2014)  
École/université : CentraleSupélec  
Sujet : Optimisation de trajectoires par méthodes de tir indirect et continuation.
- **Pawit Pharpatara** (2012)  
École/université : ISAE–ENSICA  
Sujet : Élaboration de trajectoires sous contraintes pour la préparation de mission d'aéronefs autonomes.
- **François-Xavier Marmet** (2011)  
École/université : ENAC  
Sujet : Filtrage, estimation et hybridation pour la reconstruction d'état d'un drone miniature.
- **Sophie Oustrière** (2009)  
École/université : ENSTA Paris  
Sujet : Navigation autonome d'un drone en environnement inconnu par flux optique.

### 1.5.3 Postdoctorats

- **Prince Edorh** (2019–2021)  
Collaboration : ONERA, CNES  
Sujet : Planification de trajectoires pour le guidage de lanceurs réutilisables.
- **Duc-Kien Phung** (2015–2016)  
Sujet : Implémentation d'un algorithme MPC sur GPU pour un robot aérien.

## 1.6 Enseignement

Durant les 10 dernières années, j'ai enseigné en tant que vacataire dans différentes écoles d'ingénieurs et universités en automatique, traitement du signal et informatique temps réel. De 2013 à 2020, j'ai été responsable du cours d'informatique temps réel du M2 d'informatique industrielle à Sorbonne Université. Depuis 2019, je suis responsable du cours d'automatique dans la voie apprentissage à l'ENSTA Paris (niveau M1). Mes principales activités d'enseignement passées et présentes sont listées ci-dessous.

- **Automatique** (2018–2022)  
Niveau : M1 (2<sup>e</sup> année à l'ENSTA).  
Volume horaire : 23h par an.  
Documents : **Cours, TDs, TPs.**
- **Informatique temps réel** (2013–2019)  
Niveau : M2 (Sorbonne Université).  
Volume horaire : 44h par an.  
Documents : **Cours, TDs, TPs.**
- **DroMOOC** (2019)  
Niveau : Master.  
Documents : **Cours.**
- **Traitement du signal** (2008–2009)  
Niveau : M1 (2<sup>e</sup> année à Supélec).  
Volume horaire : 162h au total.  
Documents : TPs



---

# Guidage des systèmes aérospatiaux

---

Le guidage correspond à l'une des trois disciplines dans l'étude de la boucle de commande d'un système aérospatial avec le pilotage et la navigation. Il est difficile d'en donner une définition précise adaptée aux spécificités de tous les systèmes concernés. De façon la plus commune, le guidage consiste à déterminer les manœuvres (forces ou accélérations) permettant de déplacer le véhicule vers un objectif (position et vitesse) en garantissant que la trajectoire respecte des contraintes de vol et, éventuellement, optimise un critère de performance [Lu 21]. Précisons que le guidage ne s'intéresse qu'au déplacement du centre de masse (translation) de l'aéronef, le déplacement autour du centre de masse (rotation) étant géré par le pilotage (ou contrôle d'attitude). La commande de guidage est calculée à partir de l'état courant du véhicule, plus précisément à partir de l'état estimé par la navigation. Un exemple typique de problème de guidage est la commande de la poussée et de l'angle d'attitude d'un lanceur spatial permettant d'atteindre les conditions d'injection désirées de la charge utile, garantissant que la pression dynamique reste inférieure à une limite fixée au départ, et minimisant la consommation de carburant.

Dans ce chapitre, une vue d'ensemble de la problématique de guidage est présentée afin d'introduire le contexte dans lequel les activités de recherche sont menées. La section 2.1 présente les modèles utilisés en aérospatiale pour étudier le problème de guidage. Les principales méthodes de guidage sont rappelées dans la section 2.2. Une synthèse et quelques enjeux sur le guidage des systèmes aérospatiaux sont présentés dans la section 2.3.

## 2.1 Modèle dynamique pour le guidage

### 2.1.1 Modèle dynamique d'un système aérospatial

En toute généralité, un véhicule aérospatial est gouverné par la force de gravité, des forces de propulsion et des forces aérodynamiques. Dans le repère ECEF (*Earth-Centered Earth-Fixed*) lié à la Terre et dont l'origine est au centre de celle-ci (voir Figure 2.1), la dynamique du centre de masse (dynamique du point) s'écrit de façon générale

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = v, \\ \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{f_t}{m} + \frac{f_a}{m} + g - 2(\omega_E \times v) - (\omega_E \times (\omega_E \times r)), \\ \dot{m} = \frac{dm}{dt} = -q_t, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $r \in \mathbb{R}^3$  est la position,  $v \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse et  $m \geq 0$  est la masse. Les forces dépendantes de la vitesse de rotation  $\omega_E$  de la Terre sont les forces d'inertie de Coriolis et d'inertie d'entraînement. Le vecteur  $g \in \mathbb{R}^3$  est l'accélération de gravité terrestre. Les forces  $f_t \in \mathbb{R}^3$  et  $f_a \in \mathbb{R}^3$  sont les forces de propulsion et les forces aérodynamiques. La grandeur  $q_t \geq 0$  est le débit de perte de masse dû au système de propulsion.

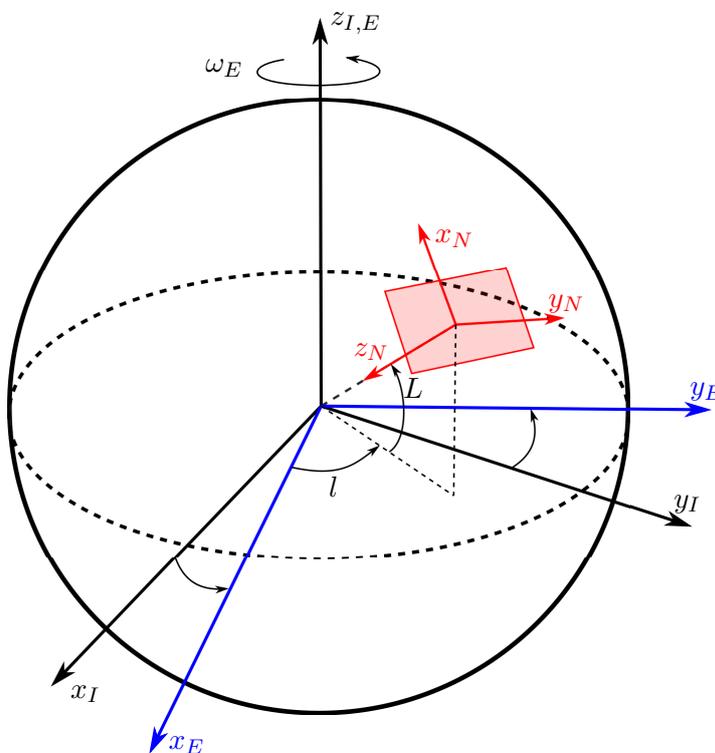


FIGURE 2.1 – Représentation des repères ECI (noir), ECEF (bleu) et NED (rouge).

Il est parfois plus commode de travailler dans un système de coordonnées locales. On utilise donc très souvent le repère NED (*North-East-Down*) dont l'axe  $x_N$  est dirigé vers le Nord, l'axe  $y_N$  est dirigé vers l'Est, l'axe  $z_N$  est dirigé vers le centre de la Terre et dont l'origine est le centre de masse  $O_b$  du véhicule (voir Figures 2.1 et 2.2). Ainsi, la latitude  $L$  et la longitude  $l$  sont les coordonnées sphériques utilisées pour définir la rotation du repère ECEF vers le repère NED. De plus, on définit la pente  $\gamma$  et l'angle d'azimut  $\chi$  pour repérer le vecteur vitesse dans le repère NED en coordonnées sphériques. Dans ce système de coordonnées standard [Carrou 95, Tewari 07], la dynamique (2.1) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} = \nu \sin \gamma, \\ \dot{L} = \frac{\nu}{\rho} \cos \gamma \cos \chi, \\ \dot{i} = \frac{\nu \cos \gamma \sin \chi}{\rho \cos L}, \\ \dot{\nu} = \frac{\langle f_t + f_a, x_v \rangle}{m} - G \sin \gamma + \Omega_E^2 \rho \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \cos \chi \sin L), \\ \dot{\gamma} = -\frac{\langle f_t + f_a, z_v \rangle}{m \nu} + \left( \frac{\nu}{\rho} - \frac{G}{\nu} \right) \cos \gamma + 2 \Omega_E \sin \chi \cos L \\ \quad + \Omega_E^2 \frac{\rho}{\nu} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \cos \chi \sin L), \\ \dot{\chi} = \frac{\langle f_t + f_a, y_v \rangle}{m \nu \cos \gamma} + \frac{\nu}{\rho} \cos \gamma \sin \chi \tan L + 2 \Omega_E (\sin L - \tan \gamma \cos \chi \cos L) \\ \quad + \Omega_E^2 \frac{\rho \sin \chi \sin L \cos L}{\nu \cos \gamma}, \\ \dot{m} = -q_t, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où  $\rho = \|r\|$ ,  $\nu = \|v\|$ ,  $\Omega_E = \|\omega_E\|$ ,  $G = \|g\|$  et  $(x_v, y_v, z_v)$  est la base du repère vitesse correspondant à la rotation de la base  $(x_N, y_N, z_N)$  du repère NED par les angles  $\gamma$  et  $\chi$ .

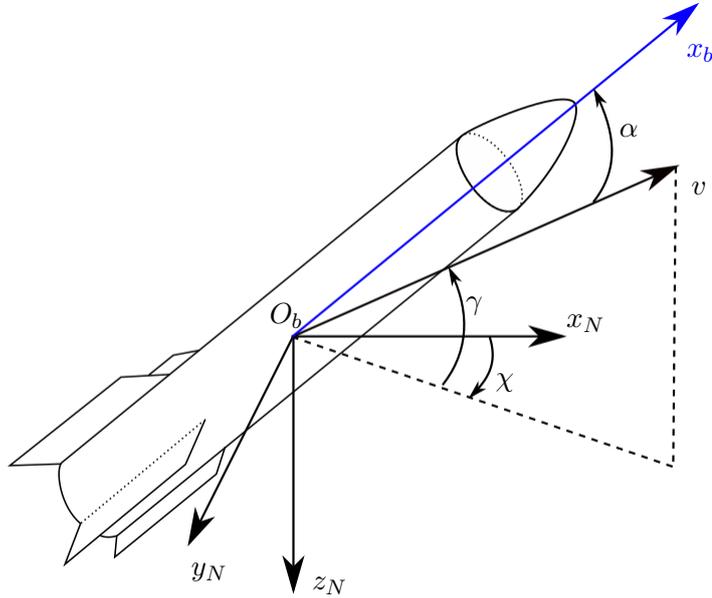


FIGURE 2.2 – Vecteur vitesse dans le repère NED.

Les forces de propulsion et les forces aérodynamiques permettent également de générer des moments ( $m_t$  et  $m_a$ ) qui s'appliquent au véhicule. La dynamique autour du centre de masse (dynamique du solide), qu'on appelle généralement dynamique d'attitude, peut s'écrire

en toute généralité

$$\begin{cases} \dot{R} = R\Omega_{\times}, \\ I\dot{\omega} = m_t + m_a - (\omega \times I\omega), \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $R \in SO(3)$  est la matrice rotation du véhicule par rapport à un repère inertiel tel que le repère ECI (*Earth-Centered Inertial*). Cette matrice est souvent paramétrée à l'aide des angles d'Euler : roulis, tangage et lacet. Le vecteur  $\omega \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse de rotation du véhicule exprimée dans un repère lié à celui-ci. La matrice  $\Omega_{\times}$  est la matrice antisymétrique représentant le produit vectoriel avec le vecteur  $\omega$  :  $\forall a \in \mathbb{R}^3, \omega \times a = \Omega_{\times}a$ . La matrice d'inertie est notée  $I$  (matrice symétrique définie positive), elle dépend du temps au même titre que la masse.

## 2.1.2 Forces utilisées pour la commande

### 2.1.2.1 Forces de propulsion

Les forces de propulsion peuvent être générées de plusieurs manières et pour différentes fonctions selon le véhicule considéré. Cependant, pour la plupart des systèmes aérospatiaux (lanceurs spatiaux et missiles), la principale force de propulsion est fournie par les moteurs fusées en queue du véhicule. La force de poussée  $f_t$ , dite vectorielle, est alors obtenue par perte de masse de carburant (propergols liquides ou solides) en éjectant les gaz produits par la combustion [Sutton 16]. De façon générale, elle peut s'exprimer

$$f_t = (T_v - A_e P_a(r)) x_t = T(r) x_t, \quad (2.4)$$

où  $T_v \geq 0$  est la force de propulsion dans le vide,  $T(r)$  est la poussée totale,  $x_t \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur unitaire dans la direction de la poussée,  $A_e \geq 0$  est l'aire totale en sortie des tuyères des moteurs et  $P_a(r) \geq 0$  est la pression ambiante de l'air à la position  $r$ . La force  $T_v$  peut s'exprimer en fonction de l'impulsion spécifique dans le vide, du débit de masse et de l'accélération de gravité  $G_0$  au niveau du sol :

$$T_v = I_s G_0 q_t.$$

Les moteurs fusées ont des régimes de fonctionnement limités, ce qui peut se caractériser par des limites sur le débit propulsif :

$$q_m \leq q_t \leq q_M. \quad (2.5)$$

En particulier, si le moteur est allumé,  $q_m$  est tel que  $T(r) \geq 0$ .

À condition que le centre de masse et le point de poussée se situent sur l'axe principal du véhicule (dirigé selon le vecteur  $x_b$  sur la Figure 2.2), la force de propulsion ne génère aucun moment lorsque  $x_t$  est aligné avec  $x_b$ . Pour certains véhicules (par exemple les lanceurs), le braquage des tuyères permet d'orienter le vecteur de poussée autour de  $x_b$  afin de générer des moments de propulsion  $m_t$  en exploitant le bras de levier entre le centre de masse  $O_b$  et le point de poussée. Des gouvernes de jet en sortie de tuyère peuvent également être utilisées pour générer ces moments. Aussi, des systèmes spécifiques de contrôle d'attitude utilisent des RCS (*Reaction Control System*) exploitant le même principe de propulsion par jet de gaz.

### 2.1.2.2 Forces aérodynamiques

De même que les forces de propulsion, les forces aérodynamiques peuvent être utilisées à la fois pour le déplacement du véhicule et pour le contrôle de son attitude. Elles sont effectives seulement en milieu endo-atmosphérique où la densité d'air est suffisamment élevée pour avoir un effet sur la structure de l'aéronef composée du corps principal, d'ailes et de gouvernes. Elle ne sont pas directement liées à la vitesse du véhicule puisqu'elles dépendent de la vitesse relative du corps par rapport à l'air. On décompose ces forces en une composante colinéaire à la vitesse air, la traînée, et une composante normale à la vitesse air, la portance. La force totale peut s'exprimer

$$f_a = -D(r, v_a)x_{v_a} + L(r, v_a)(\sin \mu y_{v_a} - \cos \mu z_{v_a}), \quad (2.6)$$

où  $D(r, v_a) \geq 0$  est la force de traînée s'opposant au déplacement du corps dans l'air et  $L(r, v_a) \in \mathbb{R}$  est la force de portance. Ces deux forces dépendent de la position du véhicule, plus précisément de son altitude, et de la vitesse air  $v_a = v - w$ , avec  $w$  la vitesse du vent. La base  $(x_{v_a}, y_{v_a}, z_{v_a})$  est définie de la même façon que la base  $(x_v, y_v, z_v)$  par rapport au repère NED. L'angle  $\mu$ , appelé angle de gîte aérodynamique, sert à distinguer les deux composantes de la force de portance (composantes dans le plan horizontal et dans le plan vertical). Les forces  $D$  et  $L$  s'expriment en fonction de la densité de l'air  $\rho_a(r)$  à la position  $r$ , de la norme de la vitesse  $v_a$ , d'une surface de référence  $S > 0$ , ainsi que des coefficients de traînée  $C_D \geq 0$  et de portance  $C_L$  :

$$\begin{cases} D(r, v_a) = \frac{1}{2}\rho_a(r) \|v_a\|^2 SC_D, \\ L(r, v_a) = \frac{1}{2}\rho_a(r) \|v_a\|^2 SC_L. \end{cases} \quad (2.7)$$

Les coefficients aérodynamiques peuvent être obtenus par des calculs CFD (mécanique des fluides numérique) ou par des essais en soufflerie à partir d'une maquette à échelle réduite. De façon générale, ils dépendent du nombre de Mach  $M$ , de l'altitude  $h = \|r\| - R_E$  ( $R_E$  : rayon de la Terre) et de l'angle d'incidence  $\alpha$  du véhicule. Cet angle est formé par l'axe du véhicule  $x_b$  et la vitesse air  $v_a$ . Lorsque le vent est d'intensité nulle, il s'agit de l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe du véhicule (comme sur la Figure 2.2). Par exemple, pour un profil aérodynamique à symétrie axiale de révolution et pour des incidences faibles, ces coefficients peuvent généralement s'exprimer

$$\begin{cases} C_D(h, M, \alpha) = C_{D_0}(h, M) + C_{D_2}(h, M) \alpha^2, \\ C_L(h, M, \alpha) = C_{L_1}(h, M) \alpha, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $C_{D_0}$ ,  $C_{D_2}$  et  $C_{L_1}$  sont des coefficients positifs.

Pour générer des moments aérodynamiques, il suffit d'orienter des gouvernes mobiles positionnées à l'avant (plan canard) ou à l'arrière du véhicule, ce qui permet de créer une force aérodynamique locale. Avec le bras de levier, on obtient ainsi des moments aérodynamiques qui dépendent de l'angle de braquage des gouvernes et qui sont donc commandables. Le moment aérodynamique total  $m_a$  est donc composé de termes non commandables dus au positionnement d'éléments fixes (empennage fixe, ailes fixes) et de termes commandables qui permettent le contrôle d'attitude.

**Remarque 1.1 :** On remarque tout l'intérêt de travailler dans le plan tangent local (équation 2.2) lorsque la vitesse du vent est nulle ou négligée. En effet, les projections des forces aérodynamiques s'expriment alors simplement

$$\begin{cases} \langle f_a, x_v \rangle = -D(r, v, \alpha), \\ \langle f_a, y_v \rangle = L(r, v, \alpha) \sin \mu, \\ \langle f_a, z_v \rangle = L(r, v, \alpha) \cos \mu. \end{cases}$$

De plus, si le vecteur de poussée  $f_t$  est aligné avec l'axe  $x_b$  du véhicule, on a simplement

$$\begin{cases} \langle f_t, x_v \rangle = T(r, q_t) \cos \alpha, \\ \langle f_t, y_v \rangle = T(r, q_t) \sin \alpha \sin \mu, \\ \langle f_t, z_v \rangle = T(r, q_t) \sin \alpha \cos \mu. \end{cases}$$

Dans ces deux écritures, trois variables apparaissent clairement : l'angle d'incidence  $\alpha$ , l'angle de gîte aérodynamique  $\mu$  et le débit de masse  $q_t$ . Ce sont les trois commandes utilisées pour le guidage comme nous le verrons plus loin (voir la section 2.1.4). Notons que pour un profil aérodynamique à symétrie axiale de révolution, il est tout à fait équivalent de commander l'axe  $x_b$  du véhicule (i.e. son attitude sans le roulis) ou le couple d'angles  $(\alpha, \mu)$ , cependant, il peut être plus pratique d'utiliser l'une ou l'autre des représentations en fonction du problème considéré.

### 2.1.3 Contraintes principales d'un véhicule aérospatial

Les équations dynamiques (2.1) et (2.3) ne suffisent pas à décrire complètement la trajectoire d'un véhicule aérospatial. Outre les contraintes liées aux actionneurs générant les forces aérodynamiques et propulsives, les limites physiques du véhicule en matière de tenue structurale doivent être prises en compte pour la réalisation de la mission [Bonnard 05, LaurentVarin 05].

**Facteur de charge :** Pour assurer que la structure ne casse pas, une limite sur les forces subies par le véhicule doit être appliquée. On définit pour cela le facteur de charge

$$n = \frac{f_t + f_a}{m G_0}. \quad (2.9)$$

On parlera de facteur de charge longitudinal pour les forces dans l'axe du véhicule :

$$\eta_x = |\langle n, x_b \rangle| \leq \eta_{x_{\max}}, \quad (2.10)$$

où  $\eta_{x_{\max}} \geq 0$  est le facteur de charge longitudinal maximal. On parlera de facteur de charge latéral pour les forces normales à l'axe de l'engin :

$$\eta_z = \|n \times x_b\| \leq \eta_{z_{\max}}, \quad (2.11)$$

où  $\eta_{z_{\max}} \geq 0$  est le facteur de charge latéral maximal.

**Pression dynamique :** Toujours dans l'objectif d'assurer la tenue structurale du véhicule, une limite de pression dynamique peut être imposée :

$$Q = \frac{1}{2} \rho_a \|v_a\|^2 \leq Q_{\max}, \quad (2.12)$$

où  $Q_{\max} \geq 0$  est la pression dynamique maximale. Puisque les forces aérodynamiques dépendent directement de la pression dynamique (voir l'équation (2.7)), cette contrainte permet d'en garder la maîtrise, surtout au niveau des gouvernes aérodynamiques.

**Flux thermique :** Pour limiter les échauffements de la structure du véhicule, une contrainte sur le flux thermique peut être considérée. Il n'existe pas de formule générale pour le calcul du flux thermique, cependant, la formule simplifiée suivante est généralement utilisée pour calculer l'échauffement au niveau du nez de l'appareil (lanceur, véhicule de rentrée) en supposant un écoulement laminaire :

$$\phi = C_q \sqrt{\rho_a} \|v_a\|^3 \leq \phi_{\max}, \quad (2.13)$$

où  $\phi_{\max} \geq 0$  est le flux thermique maximal. Pour les véhicules de rentrée atmosphérique tels que la navette spatiale américaine, il est également nécessaire de tenir compte du flux total qu'on cherche généralement à minimiser :

$$\min \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_f} \phi(t) dt. \quad (2.14)$$

**Incidence :** Une étude des performances aérodynamiques de l'aéronef à l'équilibre permet de calculer les incidences maximales que celui-ci peut stabiliser en fonction de l'efficacité maximale de ses gouvernes. Cependant, du fait qu'il est toujours très difficile de parfaitement maîtriser l'aérodynamique du véhicule, surtout autour de Mach 1, il est nécessaire de considérer des marges de fonctionnement. Ainsi, un couloir d'incidence en fonction du Mach est généralement défini :

$$|\alpha| \leq \alpha_{\max}(M). \quad (2.15)$$

## 2.1.4 Boucle de GNC et modèles pour le guidage

### 2.1.4.1 Navigation, Guidage et Pilotage

Dans le domaine aérospatial, la boucle d'estimation et de commande est généralement appelée boucle de NGP (Navigation, Guidage, Pilotage), ou GNC (*Guidance, Navigation and Control*) en anglais, pour distinguer ses trois fonctions principales : la navigation s'occupe de l'estimation de l'état à partir des données capteurs ; le guidage permet la réalisation de la mission en calculant les manœuvres de déplacement du véhicule vers l'objectif de position et de vitesse souhaité ; le pilotage envoie les commandes aux actionneurs pour assurer la stabilisation du véhicule (voir Figure 2.3).

**Navigation :** Cette composante de la boucle de commande a pour objectif d'estimer l'état du véhicule  $(\hat{r}, \hat{v}, \hat{R}, \hat{\omega})$  à partir d'un ensemble de mesures  $y_m \in \mathbb{R}^p$  de la sortie

$$y = h(t, r, v, R, \omega), \quad (2.16)$$

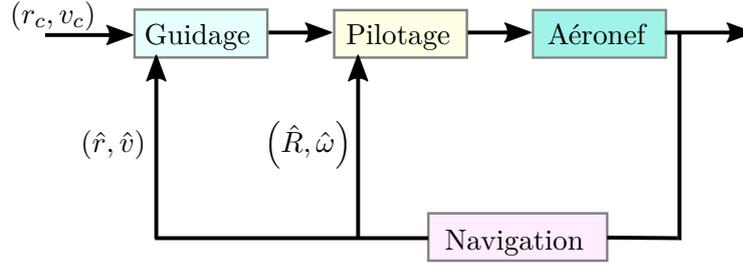


FIGURE 2.3 – Boucle de GNC.

où  $h(\cdot)$  est la fonction sortie. La centrale à inertie, qui comporte trois gyromètres pour mesurer  $\omega$  et trois accéléromètres pour mesurer l'accélération spécifique, est l'élément de mesure principal utilisé en aérospatiale pour cette estimation. Effectivement, en intégrant successivement ces six mesures, l'état complet peut être calculé [Britting 10]. Cependant, même avec les meilleures centrales à inertie, cette estimation dérive dans le temps. Pour corriger l'erreur de navigation qui en découle, d'autres capteurs peuvent être utilisés pour mettre en œuvre un algorithme d'hybridation [Dahia 05]. Par exemple, le filtre de Kalman permet d'estimer les biais des capteurs inertiels grâce à d'autres mesures de position ou de vitesse (GPS, capteurs de vitesse air, capteurs de position sol ou de vitesse sol, etc.). Pour gérer les fortes non-linéarités, l'utilisation de méthodes avancées telles que le filtre particulaire est parfois nécessaire. C'est le cas pour l'application de recalage de navigation par corrélation de terrain pour laquelle la fonction de sortie  $h(\cdot)$  peut présenter des ambiguïtés. Des travaux menés à l'ONERA sur cette application ont donné lieu au dépôt de trois brevets [Merlinge 20, Merlinge 21a, Merlinge 21b].

**Guidage :** Le guidage s'occupe de la commande du centre de masse  $O_b$  de l'aéronef de sorte que celui-ci atteigne l'objectif fixé par la mission en matière de position et de vitesse. Pour cela, on définit tout ou partie des forces de propulsion et des forces aérodynamiques en fonction de l'état courant du centre de masse. De manière générale, cela revient à définir une force de commande

$$f_t + f_a = \text{guid}(r, v), \quad (2.17)$$

où  $\text{guid}(\cdot)$  est la fonction de guidage qui prend généralement comme entrées les estimés de position courante  $\hat{r}$  et de vitesse courante  $\hat{v}$  issues de la navigation. Par exemple, si l'objectif consiste à réguler la vitesse autour d'une consigne  $v_c$  constante, on choisira

$$f_t + f_a = -m k_g (v - v_c) - m g, \quad (2.18)$$

avec  $k_g > 0$  un gain constant. En ignorant la vitesse de rotation de la Terre dans l'équation (2.1), cela donne une équation différentielle du premier ordre  $\dot{v} = -k_g (v - v_c)$  qui assure la stabilisation de  $v$  autour de  $v_c$ . La suite de ce mémoire se concentre principalement sur cette fonction de guidage.

**Pilotage :** L'allocation de la commande de guidage ne peut se faire de manière instantanée et parfaite car il est nécessaire de tenir compte de la dynamique de rotation (2.3) de l'engin dans le problème de contrôle. Il s'agit donc pour le pilotage de déterminer la somme des

moments permettant d'atteindre cette consigne de guidage. Pour cela, on définit un moment de commande

$$m_t + m_a = \text{pil}(R, \omega, \text{guid}(r, v)), \quad (2.19)$$

avec  $\text{pil}(\cdot)$  la fonction de pilotage, de sorte que l'accélération de commande atteigne la consigne de guidage. Par exemple, supposons que l'objectif de guidage consiste à réguler l'accélération spécifique du véhicule autour d'une accélération constante et non nulle, i.e.  $\text{guid}(r, v) = m a_c$  avec  $a_c \neq 0$  constante. Considérons également que les forces aérodynamiques sont nulles ou négligeables et réglons le débit propulsif de sorte que

$$\left\| \frac{f_t}{m} \right\| = \|a_c\|.$$

L'objectif du pilote consiste alors à stabiliser l'axe  $x_b$  du véhicule autour de la direction de consigne  $a_c/\|a_c\|$ , ce qui assure l'alignement de  $f_t$  avec la direction de consigne tout en stabilisant l'orientation du véhicule puisque le moment propulsif est nul seulement lorsque  $f_t$  et  $x_b$  sont colinéaires (on suppose ici que le centre de masse et le point de poussée se situent sur l'axe principal du véhicule). Pour cela, on peut utiliser la loi de pilotage

$$m_t = -k_{p_1} \omega - k_{p_2} R^\top \left( \frac{a_c}{\|a_c\|} \times x_b \right), \quad (2.20)$$

avec  $(k_{p_1}, k_{p_2})$  des gains positifs constants. En supposant que la matrice d'inertie varie lentement ( $\dot{I} \cong 0$ ), on vérifie que

$$L = \frac{1}{2} \langle \omega, I\omega \rangle + k_{p_2} \left( 1 - \left\langle \frac{a_c}{\|a_c\|}, x_b \right\rangle \right)$$

est une fonction de Lyapunov pour cette loi de commande avec des gains  $(k_{p_1}, k_{p_2})$  bien choisis (on obtient la stabilité semi-globale ici). Le lecteur intéressé pourra se référer à [Hua 09] pour plus de détails sur ce type de loi de commande non-linéaire. Notons que des lois de pilotage plus classiques sont généralement utilisées en aérospatiale [Devaud 00]. Le contrôle d'attitude constitue un sujet important qui n'est pas abordé dans la suite du document.

#### 2.1.4.2 Stabilité de la boucle de GNC

Les réglages des deux composantes (guidage et pilotage) de la boucle de commande sont très souvent effectués de manière indépendante. Du point de vue du pilote, la consigne de guidage  $\text{guid}(\cdot)$  est considérée comme constante ou variant lentement. De même, du point de vue des actionneurs (braquage des gouvernes, débit de carburant), la consigne de pilotage  $\text{pil}(\cdot)$  est considérée comme constante. Cette technique de synthèse hiérarchique en cascade n'est possible que si la réponse de la boucle interne (la boucle de pilotage) est beaucoup plus rapide que la réponse de la boucle externe (la boucle de guidage). Pour justifier cela, il existe des conditions génériques de stabilisation des structures en cascade [Sepulchre 12], la théorie des perturbations singulières peut également être utilisée en regardant la loi de pilotage comme un contrôleur grands gains [Kokotović 99].

Reprenons les deux exemples de la section précédente pour les combiner. On cherche donc à réguler la vitesse d'un véhicule qui n'est pas soumis aux forces aérodynamiques. La

commande en cascade consiste simplement à remplacer la consigne d'accélération constante  $a_c$  par la consigne de guidage (2.18) dans la loi de pilotage (2.20), ce qui donne

$$\begin{cases} \left\| \frac{f_t}{m} \right\| = \left\| -k_g (v - v_c) - g \right\|, \\ m_t = -k_{p1} \omega - k_{p2} R^\top \left( \frac{-k_g (v - v_c) - g}{\left\| -k_g (v - v_c) - g \right\|} \times x_b \right). \end{cases} \quad (2.21)$$

En supposant que les gains  $(k_{p1}, k_{p2})$  sont très grands devant le gain  $k_g$ , la stabilité de la commande est assurée : la vitesse converge asymptotiquement vers la consigne  $v_c$  et l'axe du véhicule  $x_b$  s'aligne avec la verticale locale  $-g$  ( $x_b \rightarrow -z_N$  et  $\omega \rightarrow 0$ ).

L'approche en cascade permet ainsi de faciliter la synthèse des lois de commande en séparant le problème en sous-systèmes plus simples à traiter. Cela évite d'avoir à chercher des lois de commande associées à des fonction Lyapunov pour le problème complet, ce qui peut s'avérer complexe. Notons que l'approche par Backstepping [Khalil 02] est intéressante dans certains cas mais la commande qui en résulte peut être inutilement complexe à écrire et à analyser en matière de performance et de robustesse. Lorsqu'un contrôleur grand gain peut être utilisé pour le pilotage, la commande hiérarchisée présente l'autre avantage d'assurer une grande robustesse aux perturbations et aux incertitudes. Ainsi, si des moments perturbateurs apparaissent dans la dynamique de rotation du véhicule, ceux-ci auront une faible influence sur la dynamique de guidage. Bien sûr, cette amélioration de la robustesse s'obtient souvent au prix d'une plus forte sollicitation des actionneurs. Il faut toutefois noter que les actionneurs, quitte à augmenter leur qualité et leur prix, sont toujours choisis pour garantir le niveau de performance attendu de la boucle de GNC. De plus, les techniques de pilotage robuste utilisées aujourd'hui dans l'industrie aérospatiale permettent de garantir le niveau de performance et de robustesse désirés en limitant la sollicitation des actionneurs autant que possible. Elles consistent souvent à construire une table de gains calculés à l'aide d'une synthèse  $H_\infty$  [Apkarian 95, Clement 05]. Cela permet par exemple de gérer efficacement les modes flexibles et les modes de ballottements des lanceurs spatiaux [GanetSchoeller 17, NavarroTapia 22].

Remarquons tout de même que lorsqu'il existe de forts couplages entre les dynamiques de translation (2.1) et de rotation (2.3), ou lorsque les contraintes de la mission sont trop fortes pour pouvoir séparer les échelles de temps du guidage et du pilotage (rendez-vous spatial, mise à poste de satellites, réorientation du véhicule en temps minimal, etc.), l'approche hiérarchisée n'est pas possible ou ne permet pas d'obtenir des performances satisfaisantes. Il est alors nécessaire de construire une loi de commande pour le problème global [Zhu 16a, Zhu 17].

L'état de l'aéronef étant généralement mesuré de manière partielle et imparfaite, la composante de navigation est essentielle pour estimer l'état complet utilisé en entrée des lois de pilotage et de guidage. L'influence de la navigation sur la performance globale de la boucle de commande dépend de la qualité (vitesse de convergence, niveaux de bruit) du filtre d'estimation utilisé pour atteindre l'état vrai du système. Dans le même esprit que pour le guidage et le pilotage, on cherche généralement à minimiser cette influence de façon à pouvoir élaborer les lois de guidage et de pilotage en ignorant le bloc de navigation (l'état est supposé parfaitement connu). Cette contrainte impose d'élaborer des filtres d'estimation à grands gains et donc de choisir des capteurs de qualité adaptée à la performance désirée [Khalil 17].

### 2.1.4.3 Modèles pour le guidage

Dans ce chapitre, on ne traitera que des problèmes pour lesquels on peut faire l'hypothèse que la dynamique du centre de masse est indépendante de la dynamique de rotation. On suppose donc qu'une loi de pilotage à temps de réponse rapide est utilisée dans une démarche de commande en cascade. Cela permet de nous focaliser uniquement sur des problèmes de guidage pour la dynamique (2.1) à trois degrés de liberté (3ddl). En reprenant les notations précédentes (voir la section 2.1.2), les variables de commande pour le problème de guidage sont le débit propulsif  $q_t$  permettant de fixer l'amplitude de la force de poussée et l'attitude du véhicule représentée ici par l'axe  $x_b$  ou par le couple d'angles  $(\alpha, \mu)$  lorsqu'on travaille relativement au vecteur vitesse.

Dans certaines applications exigeant un haut niveau de performance, bien que le pilotage soit étudié indépendamment, il peut être intéressant dans la conception du guidage de tenir compte du temps de réponse du système piloté pour atteindre une attitude de consigne. La dynamique de guidage est alors étendue en ajoutant des dynamiques supplémentaires, par exemple une dynamique du premier ordre de la forme

$$\dot{u} = -\frac{1}{\tau_p} (u - u_c), \quad (2.22)$$

où  $u$  représente indifféremment un angle d'attitude, l'angle d'incidence  $\alpha$  ou l'angle de gîte  $\mu$ . Le paramètre  $\tau_p > 0$  est la constante de temps du système piloté. La constante  $u_c \in \mathbb{R}$  représente la nouvelle consigne de guidage à déterminer. Puisque deux angles suffisent à décrire le comportement du pilote (pour un système à symétrie axiale de révolution, le roulis peut être ignoré par exemple), on dit dans ce cas qu'on travaille avec un modèle pseudo-5ddl (3 positions du centre de masse et 2 angles décrivant la rotation).

Enfin, on considèrera que l'état  $(r, v, R, \omega)$  est toujours parfaitement connu en supposant qu'un estimateur permet d'atteindre rapidement l'état vrai à partir des mesures.

En conclusion, les modèles utilisés pour le guidage de la plupart des systèmes aérospatiaux sont constitués des équations (2.1) ou (2.2) selon le système de coordonnées utilisé, des contraintes listées dans la section 2.1.3 et, éventuellement, des dynamiques supplémentaires sur l'attitude et la propulsion (équation (2.22)).

## 2.2 Problèmes de guidage et méthodes

### 2.2.1 Principes du guidage et méthodes

Les problèmes de guidage de systèmes aérospatiaux consistent à réaliser une trajectoire menant à un objectif défini comme une position et une vitesse à atteindre. Pour réaliser cet objectif, la mission se décompose souvent en plusieurs phases de vol. Par exemple, les fusées et les missiles sont souvent constitués de plusieurs étages propulsifs pour fournir une vitesse suffisante au véhicule. De plus, les actionneurs et capteurs utilisés peuvent être différents pour chacune de ces phases. Un missile intercepteur peut utiliser la propulsion comme moyen d'actionnement et la navigation inertielle comme moyen de localisation dans la première phase de vol puis, dans une deuxième phase de vol, utiliser des gouvernes aérodynamiques et un auto-directeur embarqué (composé d'un capteur électromagnétique ou infrarouge) pour

accrocher la cible. L'algorithme de guidage doit donc être adapté à chacune de ces phases en fonction de l'objectif, des informations disponibles et des actionnements possibles. En toute généralité, on peut considérer qu'une trajectoire de guidage permettant de réaliser une mission complète se décompose en deux principales étapes. La première étape consiste à former une trajectoire permettant d'approcher suffisamment l'objectif pour être en mesure de démarrer une seconde étape de guidage de précision.

L'enjeu de la première étape est principalement d'assurer que les contraintes soient respectées (pression dynamique, flux thermiques, facteur de charge, etc.), que les performances soient optimisées (minimisation de la consommation de carburant, minimisation du temps de parcours, etc.) et que des conditions terminales soient assurées (positions et vitesses proches de la cible) pour que le système de guidage final puisse être activé. Cette phase constitue la majeure partie du vol, la dynamique du véhicule présente donc souvent de fortes non-linéarités et instationnarités le long de la trajectoire. La complexité du problème justifie alors généralement l'utilisation d'une approche de guidage consistant à suivre une trajectoire de référence pré-calculée en préparation de mission.

Pour la seconde étape, la recherche de précision et de robustesse constitue l'enjeu principal. C'est pourquoi des capteurs supplémentaires ou différents sont utilisés (proximètres, caméras visibles ou infrarouges, GPS différentiel, etc.) pour l'approche finale. De plus, cette phase étant de durée relativement courte, le système peut souvent être modélisé de façon simplifiée par une dynamique linéaire, ce qui permet d'explicitier des lois de commande à la fois robustes, précises et exigeant peu de calculs embarqués. La phase de guidage terminal d'un missile intercepteur utilise ainsi une simple loi de navigation proportionnelle pour détruire une cible [Zarchan 12]. De même, la commande d'alunissage du module Apollo est traitée comme un problème en temps fini à partir d'un modèle linéaire [Bennett 70, Klumpp 74].

Deux grandes approches de commande sont donc utilisées classiquement en aérospatiale selon la phase de vol considérée : le suivi de trajectoire et la commande explicite.

Le suivi d'une trajectoire de référence définie avant le vol lors de la préparation de mission (voir Figure 2.4) est l'approche la plus communément rencontrée lorsqu'il s'agit de réaliser un objectif complexe. Cette trajectoire de référence est calculée de façon à ce que l'ensemble des contraintes et critères de performance soient pris en compte. Cette approche présente l'intérêt de garantir que le véhicule respectera toutes les exigences de vol, à la condition que l'algorithme de commande permette de suivre au plus près la trajectoire prédéfinie. Cette trajectoire peut être spécifiée de différentes manières. Il peut s'agir d'une suite de phases de régulation consistant à maintenir une ou plusieurs sorties à une valeur de consigne. Par exemple, le vol d'un avion inclut une phase d'ascension et une phase de descente réalisées en maintenant une pente de consigne. Pendant la phase de croisière, le cap, la vitesse et l'altitude sont régulées autour des valeurs définies par le plan de vol. La trajectoire peut également être définie comme une fonction du temps ou comme une fonction d'une partie de l'état. Le guidage consiste alors à résoudre un problème d'asservissement sur cette trajectoire. Par exemple, pour le problème de rentrée atmosphérique de la navette spatiale, il s'agit de suivre un profil de force de traînée pour atteindre l'objectif tout en garantissant le respect des contraintes de vol [Harpold 79].

Lorsqu'il est possible d'explicitier directement une commande permettant d'atteindre l'objectif à partir de l'état courant du véhicule, tout en garantissant les contraintes spécifiées, l'étape de suivi de trajectoire n'est pas toujours nécessaire. Cela permet généralement d'obte-

nir de meilleures performances globales puisqu'il n'est pas nécessaire, en présence de perturbations, de corriger les écarts à la trajectoire de référence. Cependant, sauf exception, cette approche est plus difficile à mettre en œuvre en embarqué car elle demande de plus grandes capacités de calculs, alors que la méthode de suivi de trajectoire est plus exigeante sur la taille de la mémoire puisque qu'il faut stocker la trajectoire de référence et les paramètres de la loi d'asservissement. Par exemple, le guidage par matrice de sensibilité (ou  $\Gamma$ -guidance) est utilisée pour la phase de vol hors atmosphère du lanceur Ariane 5. Ce guidage consiste à corriger les paramètres de la commande, par une méthode de Newton avec un nombre fixé d'itérations, pour assurer le respect de contraintes intermédiaires (flux thermique, contrainte de visibilité, etc.) et finales (orbite visée à l'injection de la charge utile) [Hardtla 78]. Pour les missiles balistiques, la position de la cible visée au sol détermine la vitesse de la charge utile (non propulsée) à l'éjection. Une stratégie de guidage en "vitesse à gagner" ( $Q$ -guidance) est utilisée pour atteindre cette vitesse d'éjection désirée [Battin 82, Battin 99].

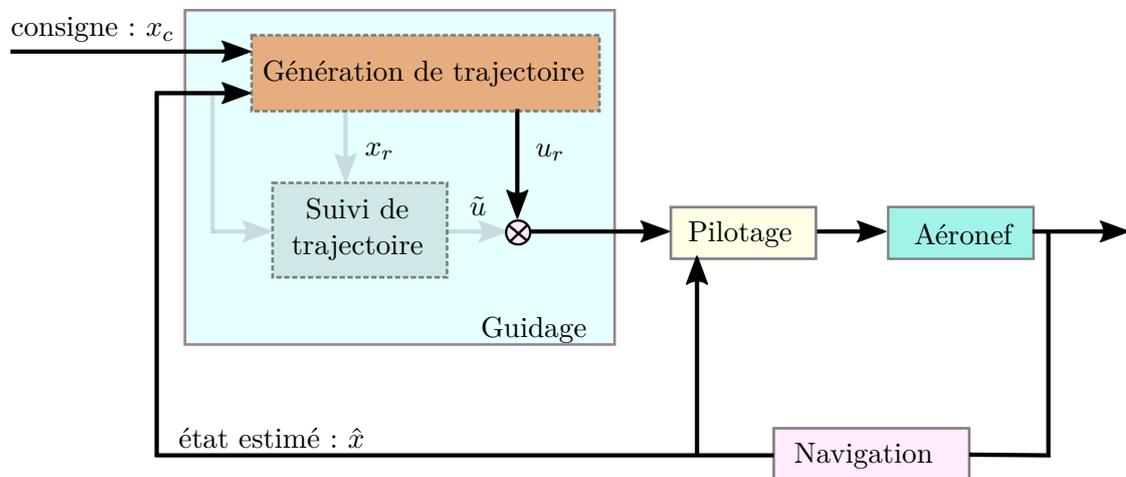


FIGURE 2.4 – Boucle de GNC avec une approche de guidage standard. Une trajectoire de référence  $(x_r, u_r)$  est calculée à partir de la consigne  $x_c$  et de l'état initial (ou à partir de l'état courant estimé en cas de mise à jour durant le vol). Pendant le vol, une correction  $\tilde{u}$  est calculée à partir de l'écart entre l'état de référence et l'état courant estimé. La commande totale combine la commande de référence  $u_r$  (commande boucle ouverte) et la correction  $\tilde{u}$  (commande boucle fermée).

On voit donc que la méthode de guidage, qui doit être adaptée aux spécificités et exigences de chaque phase de vol, dépend de l'approche choisie.

Lorsqu'il s'agit de suivre une trajectoire pré-calculée, il suffit généralement de stabiliser le linéarisé du système autour de celle-ci. Cela peut être réalisé par des correcteurs classiques de type PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) [Harpold 79], par un retour d'état réglé avec un placement de pôles ou une commande LQ (Linéaire Quadratique) [Webb 16], ou toute autre méthode avancée :  $H_\infty$  [Savkin 03], commande linéarisante [Bharadwaj 98], etc. Notons que lorsque la trajectoire est générée de façon assez grossière en utilisant un modèle très simplifié du système (contraintes non prises en compte ou seulement partiellement, modèle dynamique très simplifié, etc.), celle-ci ne peut pas être suivie parfaitement. Dans ce cas, l'utilisation de méthodes de commande prédictives de type NMPC (*Nonlinear Model Predictive Control*) à horizon glissant peut être intéressante [Chai 18].

Lorsque la dynamique complète peut être approchée par un simple système linéaire non contraint, typiquement lors de la phase d'approche finale, aucune génération de trajectoire n'est nécessaire puisque la commande peut facilement être explicitée comme une fonction de l'état courant et de l'état final désiré. La méthode la plus couramment utilisée pour traiter ce problème est la commande LQ en temps fini [Lu 19, Shaferman 08]. Cette technique est présentée succinctement dans le paragraphe 2.2.2.

Avec l'amélioration constante des capacités des calculateurs embarqués (calculs et mémoire), il devient envisageable d'expliciter en temps réel une commande permettant de satisfaire toutes les contraintes d'un problème non-linéaire complexe. Concrètement, cela revient à réitérer l'étape de génération de trajectoire directement dans le calculateur embarqué. Si le calcul de cette commande peut être effectué à une cadence suffisante, il n'est alors même plus nécessaire d'y adjoindre une correction de suivi de trajectoire (on retire la boîte "suivi de trajectoire" dans le schéma 2.4). Sachant qu'un critère de performance accompagne souvent ce type de problème (consommation de carburant, échauffement de la structure, etc.), le formalisme le plus couramment utilisé est celui du contrôle optimal. Dans l'idéal, une méthode globale de détermination du contrôle optimal doit être adoptée. Ainsi, la méthode HJB (*Hamilton-Jacobi-Bellman*), qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles, est suffisante pour obtenir le contrôle optimal sous forme de boucle fermée. Cependant, cette approche est très coûteuse en calculs pour des problèmes de grande dimension (fléau de la dimension en programmation dynamique), ce qui la rend bien souvent inutilisable dans un contexte embarqué [Bourgeois 15, Bokanowsky 16]. Pour y remédier, les approches locales utilisant uniquement des conditions nécessaires d'optimalité sont préférées. Il en existe deux principales : les approches directes par optimisation en dimension finie [Betts 10] et les approches indirectes utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [Pontryagin 62], elles sont présentées dans le paragraphe 2.2.3.

### 2.2.2 Méthodes linéaires pour le guidage

Dans ce paragraphe, on s'intéresse principalement à la phase de guidage terminal permettant d'atteindre l'objectif de la mission avec précision. Cette phase se caractérise par une faible durée de vol restante par rapport à la trajectoire complète et des variations de vitesse relativement faibles. Les principales contraintes d'état, qui dépendent fortement de la vitesse (pression dynamique, facteur de charge), ne nécessitent donc plus d'être prises en compte. Ainsi, Une partie de la dynamique (2.1), celle qui nous intéresse pour la réalisation de l'objectif, peut être modélisée par une dynamique linéaire avec contrainte uniquement sur le contrôle. Par exemple, la dynamique d'interception d'une cible par un missile intercepteur se modélise comme un double intégrateur à deux dimensions (les deux dimensions du plan normal à la vitesse de rapprochement avec la cible) [Zarchan 12]. Il en est de même pour la dynamique du module lunaire Apollo qui se modélise comme un double intégrateur à trois dimensions [Lu 19].

Pour l'exemple du module lunaire, en reprenant les notations de l'équation (2.1), la dynamique simplifiée s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = a, \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $a$  représente l'accélération totale fournie par la force de propulsion et la gravité. L'objectif

du problème de rendez-vous est d'atteindre une position désirée  $r_c$  et une vitesse désirée  $v_c$  en un temps  $t_f$  prédéfini à partir d'un instant  $t_0$  de déclenchement de la phase de guidage terminal. L'idée initialement développée consiste à écrire le contrôle  $a$  comme une simple fonction affine du temps à deux paramètres. La résolution du problème permet de calculer la commande boucle fermée en fonction de l'état courant  $(r, v)$  du véhicule, de l'état final désiré  $(r_c, v_c)$ , et du temps restant  $t_{go} = t_f - t$  :

$$a(t) = -2 \frac{v_c - v(t)}{t_{go}} + 6 \frac{r_c - r(t) - v(t)t_{go}}{t_{go}^2}. \quad (2.24)$$

La loi de guidage qui a réellement été implémentée sur le module Apollo est un peu différente. Elle est élaborée avec un modèle temporel quadratique à trois paramètres, ce qui permet de spécifier l'accélération finale  $a_f$  pour une meilleure maîtrise de l'alunissage [Lu 19] :

$$a(t) = -6 \frac{v_c - v(t)}{t_{go}} + 12 \frac{r_c - r(t) - v(t)t_{go}}{t_{go}^2} + a_f. \quad (2.25)$$

Il a été observé plus tard que ces deux lois de commande ne sont autres que les solutions à un problème linéaire quadratique dont la fonction coût est

$$C_{n,t}^\infty(a) = \int_t^{t_f} \frac{\|a(\tau) - a_f\|^2}{(t_f - \tau)^n} d\tau, \quad (2.26)$$

avec  $n \geq 0$  un entier. On a  $n = 0$  pour la première loi (2.24) et  $n = 1$  dans la seconde (2.25). En effet, en appliquant la théorie de la commande LQ, on vérifie que

$$a^{(2+n)}(t) = \frac{d^{2+n}}{dt^{2+n}} a(t) = 0. \quad (2.27)$$

Dans le problème d'interception, l'objectif consiste à atteindre une position  $r_c$  en un temps  $t_f$  prédéfini (la vitesse finale n'est pas fixée). La solution au problème (2.26) avec cette contrainte finale et  $a_f = 0$  donne directement :

$$a(t) = (3 + n) \frac{r_c - r(t) - v(t)t_{go}}{t_{go}^2}. \quad (2.28)$$

Notons que lorsque cette commande d'interception est exprimée dans les deux dimensions du plan normal à la vitesse de rapprochement entre un missile intercepteur et une cible, elle correspond exactement à la loi NP (Navigation Proportionnelle), très utilisée pour l'interception de cibles dans le domaine de la défense [Zarchan 12].

De manière plus générale, le problème de rendez-vous pour la dynamique (2.1) consiste à minimiser le coût suivant :

$$C_{n,t}(a) = \|x(t_f) - x_c\|_S^2 + \int_t^{t_f} \frac{\|a(\tau) - a_f\|^2}{(t_f - \tau)^n} d\tau, \quad (2.29)$$

où  $x = (r, v)$ ,  $S \geq 0$ ,  $\|a\|_S^2 = a^\top S a, \forall a$ . L'accélération de guidage qui s'en déduit s'écrit toujours de la forme

$$a(t) = -K_v(t_{go}) \frac{v_c - v(t) - a_f t_{go}}{t_{go}} + K_r(t_{go}) \frac{r_c - r(t) - v(t)t_{go} - a_f t_{go}^2/2}{t_{go}^2} + a_f, \quad (2.30)$$

où les matrices de gains  $(K_v, K_r)$  dépendent de  $t_{go}$ , de l'entier  $n$  et de la matrice  $S$ .

Lorsque la loi de guidage (2.30) est utilisée sur un système réel, les retards liés à la dynamique de pilotage ne permettent pas d'obtenir parfaitement les performances désirées. En particulier, la commande calculée a tendance à diverger [Lee 13], ce qui engendre une saturation de l'accélération en fin de trajectoire. Pour y remédier, il est possible d'étendre le système (2.23) en y ajoutant une dynamique d'accélération. Pour une dynamique du premier ordre, le système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = a, \\ \dot{a} = -\frac{1}{\tau_p} (a - a_c), \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $a_c$  est la nouvelle commande représentant la consigne d'accélération. En considérant le même coût (2.29), une expression de la commande peut être obtenue. Sa forme est similaire à la précédente (2.30) avec des termes supplémentaires dépendant de l'accélération instantanée  $a(t)$  [Zarchan 12].

Notons que la loi (2.30) ne tient pas compte des contraintes du moteur propulsif (2.5) ou de la contrainte aérodynamique (2.15). Par conséquent, la commande peut venir à saturer lorsque les bornes sont atteintes, et les performances peuvent être dégradées.

De plus, on remarque qu'une singularité peut intervenir dans la loi (2.30) lorsque  $t_{go} = 0$ . Celle-ci apparaît seulement lorsque certaines pondérations dans la matrice  $S$  sont infinies, ce qui revient à exiger que l'état du véhicule atteigne exactement l'état de consigne comme cela est le cas avec les lois (2.24), (2.25) et (2.28).

Le choix de  $t_f$  est important pour assurer la réalisation de la mission. Dans le problème d'alunissage du module Apollo, ce choix a une incidence directe sur la consommation de carburant, il convient donc de choisir un temps permettant de rester proche de la solution qui consomme le moins de carburant [Lu 19]. Dans le problème d'interception d'une cible par un missile intercepteur, la vitesse de rapprochement avec la cible est rarement contrôlable, le temps  $t_f$  ne peut donc pas être fixé à l'avance puisqu'il est gouverné par une dynamique libre. L'enjeu réside alors davantage dans l'estimation de ce paramètre en cours de vol pour garantir le bon fonctionnement de la loi de guidage [Hull 91, Tahk 02, Dhananjay 14].

### 2.2.3 Méthodes optimales pour le guidage

Dans ce paragraphe, on s'intéresse principalement à la phase de guidage mi-course qui permet d'atteindre une zone proche de la cible en assurant le respect de contraintes (voir 2.1.3) et l'optimisation d'un critère de performance. En toute généralité, le problème se formalise mathématiquement comme un problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \min & C_t(u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_t^{t_f} f^0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \\ \text{t.q.} & \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)), \\ & c(\tau, x(\tau), u(\tau)) \geq 0, \quad \forall \tau \in [t, t_f], \\ & x(t) = x_t, \quad x(t_f) \in M_f, \end{cases} \quad (2.32)$$

où,  $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u(\tau) \in U \subset \mathbb{R}^m$  est le contrôle. Les fonctions  $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f^0(\cdot) \in \mathbb{R}$ ,  $g(\cdot) \in \mathbb{R}$  et  $c(\cdot) \in \mathbb{R}^r$  ( $r$  étant le nombre de contraintes d'inégalité) sont supposées suffisamment régulières (au moins  $C^1$ ). L'ensemble  $M_f \subset \mathbb{R}^n$  est la zone de l'espace d'état à atteindre. Contrairement à un problème d'optimisation de trajectoire hors-ligne classique, pour lequel seul le problème initial  $C_0(u)$  est considéré avant le lancement de la mission, le problème de guidage s'intéresse au problème  $C_t(u)$  à chaque instant  $t$  à partir de l'état courant  $x_t$ , ce qui permet d'appliquer une commande  $u(t)$  constamment mise à jour pendant le vol. Cette technique s'apparente à une technique de commande prédictive sur un horizon de temps qui décroît petit à petit puisque la taille de l'intervalle  $[t, t_f]$  diminue au cours du temps [Mayne 14].

Pour résoudre le problème (2.32), il existe deux grandes classes de méthodes locales : les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle pour se ramener à la résolution numérique d'un problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes en dimension finie ; les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement un problème aux limites déduit de l'application du principe du maximum de Pontryagin [Trélat 12].

### 2.2.3.1 Méthodes directes

De façon générale, quelle que soit la technique de discrétisation utilisée (technique de collocation telle que la méthode de Runge-Kutta ou la méthode pseudo-spectrale, etc.), le problème (2.32) devient

$$\begin{cases} \min & C_k(\{x_j, u_j\}_{j \in k, \dots, N}), \\ \text{t.q.} & c_e(\{x_j, u_j\}_{j \in k, \dots, N}) = 0, \\ & c_i(\{x_j, u_j\}_{j \in k, \dots, N}) \geq 0, \\ & x_k = x_t, \quad x_N \in M_f, \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $\{x_j, u_j\}_{j \in k, \dots, N}$  sont les états et les contrôles discrétisés sur une subdivision  $t = t_k < t_{k+1} < \dots < t_N = t_f$  de l'intervalle  $[t, t_f]$ . Les fonctions  $c_e(\cdot)$  et  $c_i(\cdot)$  représentent les contraintes d'égalité et d'inégalité, respectivement. On remarque en particulier que l'équation de la dynamique, après application d'une méthode d'Euler par exemple, devient une contrainte d'égalité dans le problème d'optimisation non-linéaire [Trélat 12, Malyuta 21b].

Une fois le problème mis sous la forme (2.33), un algorithme d'optimisation non-linéaire disponible sur étagère, basé par exemple sur la méthode du point intérieur ou la méthode de programmation séquentielle quadratique, peut être utilisé pour obtenir la solution (voir [Betts 10] par exemple). Cette simplicité d'implémentation constitue l'attrait principal de cette approche puisqu'aucun a priori sur la solution du problème de contrôle optimal n'est nécessaire à la résolution numérique. De plus, la plupart des algorithmes sont relativement peu sensibles au problème d'initialisation des paramètres à optimiser. Cependant, malgré l'amélioration constante des méthodes numériques et l'augmentation des capacités de calculs embarqués, il est difficile de respecter les contraintes du temps réel pour les applications aérospatiales avec la plupart des algorithmes d'optimisation non-linéaire existants aujourd'hui.

Lorsque le problème (2.33) peut se mettre sous certaines formes, il existe néanmoins des algorithmes très performants permettant d'envisager du calcul embarqué. En particulier, si le problème d'optimisation est sous forme convexe, on a la garantie de trouver un optimum global et on a des informations sur le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtention de la solution avec une précision donnée [Peng 02]. Pour cette classe de problème, il existe des sol-

veurs très performants codés en langage C : FORCES [Zanelli 20], CVXGEN [Mattingley 12] et G-FOLD pour les applications spatiales [Scharf 17]. Lorsque le problème est non-convexe, une idée très utilisée consiste à linéariser les fonctions non-linéaires du problème de contrôle optimal (2.32) autour d'une trajectoire d'initialisation. Cette procédure permet de construire localement un problème d'optimisation convexe qui peut être résolu efficacement. A partir de la solution obtenue, la méthode est réitérée autour de la nouvelle trajectoire jusqu'à ce que l'algorithme converge. Cette approche de programmation convexe séquentielle (SCP) permet d'obtenir très rapidement une solution au problème d'optimisation, bien que l'obtention d'un optimum global ne soit pas assurée et que le nombre d'itérations nécessaires ne soit pas maîtrisé [Malyuta 21a].

### 2.2.3.2 Méthodes indirectes

Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes consistent à exprimer les conditions d'optimalité préalablement à l'étape de discrétisation. Pour cela, le principe du maximum de Pontryagin est généralement utilisé pour fournir des conditions nécessaires du premier ordre [Vinter 10, Trélat 12]. Le problème (2.32) est alors reformulé en un problème aux limites (*Boundary Value Problem*). Pour simplifier, considérons le cas sans contraintes sur l'état (la fonction  $c(\cdot)$  n'existe pas), le contrôle optimal  $u(\tau)$  vérifie pour presque tout  $\tau \in [t, t_f]$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)), \\ \dot{p}(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\tau, x(\tau), p(\tau), p^0, u(\tau)), \\ H(\tau, x(\tau), p(\tau), p^0, u(\tau)) = \max_{v \in U} H(\tau, x(\tau), p(\tau), p^0, v), \\ b(t_f, x(t_f), p(t_f)) = 0, \\ x(t) = x_t, \quad p(t) = p_t \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.34)$$

où

$$H(\tau, x, p, p^0, u) = \langle p, f(\tau, x, u) \rangle + p^0 f^0(\tau, x, u)$$

est le Hamiltonien du système,  $p^0 \leq 0$  et  $p(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  est une fonction absolument continue appelée vecteur adjoint ou co-état. La fonction  $b(\cdot)$  est obtenue en écrivant les conditions finales et les conditions de transversalité (conditions aux limites). Dans notre cas d'utilisation pour le guidage, l'état courant  $x(t)$  du véhicule est nécessairement fixé. En présence de contraintes sur l'état, le vecteur adjoint peut être discontinu aux instants où la trajectoire entre en contact avec celles-ci. Il est alors nécessaire d'ajouter des conditions intermédiaires pour tenir compte de ces sauts, ce qui a pour principale conséquence d'augmenter la dimension de la fonction  $b(\cdot)$ .

Résoudre le problème (2.34) consiste à déterminer le vecteur adjoint  $p_t$  à l'instant courant permettant d'annuler la fonction  $b(\cdot)$ . Pour cela, une méthode de tir est généralement utilisée. La première étape de cette méthode numérique consiste à intégrer la dynamique de l'état et la dynamique du vecteur adjoint pour calculer leur valeur à l'instant final, ce qui peut être effectué avec une méthode de Runge-Kutta par exemple. Ceci permet d'évaluer la fonction  $b(\cdot)$  qui devient une fonction de  $p_t$  et  $t_f$  uniquement :  $b(t_f, x(t_f), p(t_f)) = \tilde{b}(t_f, p_t)$ . Une méthode de Newton ou quasi-Newton est alors utilisée pour obtenir les valeurs de  $t_f$  et de  $p_t$

qui annulent  $\tilde{b}(t_f, p_t)$ . Remarquons que le temps final peut également être fixé, seule la valeur de  $p_t$  est recherchée dans ce cas.

La précision et la rapidité d'exécution de la méthode de tir indirect constituent son principal attrait en pratique. Cependant, une analyse préalable du problème est généralement nécessaire pour déterminer la structure du contrôle, qui doit être connue à l'avance, en particulier lorsqu'elle est de type Bang-Bang ou lorsque la trajectoire entre en contact avec une contrainte d'état. Une étude géométrique du problème permet parfois d'obtenir cette structure, elle peut également être intuitée à partir de la solution obtenue par une méthode directe. De plus, la méthode de tir est très sensible à l'initialisation du paramètre  $p_t$  et son domaine de convergence est souvent très petit. Cela nécessite donc de la combiner avec d'autres techniques numériques [Trélat 12]. Enfin, des conditions d'optimalité du second ordre doivent être vérifiées pour s'assurer que la solution est bien un maximum local [Maurer 79].

Pour pallier la sensibilité de la méthode et gérer des contraintes intermédiaires, une méthode de tir multiple peut être utilisée [Stoer 13]. Celle-ci consiste à subdiviser l'intervalle de temps  $[t, t_f]$  en  $N$  sous-intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ , avec  $t_0 = t$  et  $t_N = t_f$ , et à intégrer la dynamique sur chaque sous-intervalle en introduisant comme nouveaux paramètres inconnus les états  $\{x_i, p_i\}_{i=1, \dots, N-1}$ . Des conditions de recollement sont ajoutées, le problème revient alors à trouver le zéro d'une fonction  $b(\{t_i, x(t_i), p(t_i)\}_{i=1, \dots, N})$ .

Pour gérer le problème de domaine de convergence, les méthodes de continuation (ou méthodes d'homotopie [Allgower 03]) sont souvent employées [Graichen 08, Hermant 11]. Cela consiste à construire un problème paramétré plus général  $(\mathcal{P}_\lambda)_{0 \leq \lambda \leq 1}$  tel que le problème initial (2.34) corresponde à  $\mathcal{P}_1$ . En supposant que la solution de  $\mathcal{P}_0$  est connue ou facile à calculer, alors la solution de  $\mathcal{P}_1$  peut être obtenue efficacement en résolvant séquentiellement une suite de problèmes. Par exemple, on peut choisir  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq 1 = \lambda_K$  une séquence de  $K$  paramètres de continuation, il s'agit alors d'une continuation discrète. Bien sûr, pour assurer la convergence de la méthode, un chemin lisse de solutions doit exister pour atteindre  $\mathcal{P}_1$  à partir de  $\mathcal{P}_0$ . On peut montrer une telle existence lorsqu'aucune extrémale anormale, aucun contrôle singulier et aucun point conjugué ne sont rencontrés le long de ce chemin (voir [Bonnard 06, Zhu 17] pour plus de détails). De plus, cette technique est plus difficile à utiliser lorsque la structure du contrôle change le long du chemin, mais cela reste faisable dans certains cas [Hermant 10, Hermant 11].

Il n'existe aujourd'hui que très peu de solveurs génériques pour résoudre des problèmes de contrôle optimal par méthode indirecte. Ceci est certainement dû au fait que chaque problème de contrôle optimal possède ses propres spécificités (structure du contrôle, sensibilité, domaine de convergence, etc.). On peut néanmoins citer le logiciel HamPath [Caillaud 12] qui est l'un des plus aboutis en ce sens. Il a été implémenté en langage Fortran (avec des interfaces disponibles pour une utilisation sur MATLAB, Octave ou Python). Cependant, comme dans le cas des méthodes directes, une implémentation spécifique au problème traité constitue encore la norme pour une utilisation en contexte embarqué où des contraintes d'exécution doivent être assurées pour garantir un fonctionnement temps réel dur. Dans le cadre d'un projet de recherche interne à l'ONERA (projet de recherche ANGE), nous avons également proposé une implémentation C++ de la méthode indirecte pour nos travaux [Hérissé 16a]. Néanmoins, une analyse préalable de chaque problème doit être faite avant son utilisation, en particulier pour déterminer la structure du contrôle optimal.

## 2.3 Quelques enjeux pour le guidage des systèmes aérospatiaux

Tout d'abord, notons que les applications qui émergent, telles que la réutilisation des étages de lanceurs spatiaux, imposent des niveaux d'exigences toujours plus élevés pour le guidage en matière de contraintes à gérer, de précision et de robustesse. De ce fait, les méthodes classiques se retrouvent assez souvent limitées. Par exemple, les lois de guidage explicites vues en section 2.2.2 ne tiennent nullement compte des contraintes d'état. Ainsi, rien ne garantit avec ce guidage qu'un module d'atterrissage ne rentrera pas en collision avec le sol si les conditions au moment du déclenchement de la manœuvre sont peu favorables (vitesse de descente élevée et/ou véhicule éloigné du point d'atterrissage). Pour y remédier, des techniques hybrides sont parfois développées. Dans [Wang 21] une décomposition de la trajectoire en deux morceaux est effectuée, avec un point de passage intermédiaire le long de la contrainte d'état. Néanmoins, la méthode nécessite une optimisation paramétrique réalisée en ligne pour déterminer le point de passage. De plus, les inconvénients de la loi de guidage utilisée existent toujours (non optimalité, non prise en compte des contraintes sur le contrôle, difficulté pour déterminer la durée de la manœuvre, etc.).

Dans ce contexte, les méthodes de guidage basées sur l'optimisation embarquée sont de plus en plus pertinentes. Ainsi, les méthodes de commande prédictive sur horizon de temps glissant, en assurant la prise en compte des contraintes du système, permettent d'assurer un meilleur suivi de la trajectoire de référence dans des conditions trop dégradées pour les méthodes linéaires. Lorsque le système subit de fortes dispersions au cours de la mission, il devient même crucial de recalculer en ligne une nouvelle trajectoire de référence sur certaines phases de vol (phase de retour d'un lanceur réutilisable par exemple). Certains algorithmes d'optimisation très performants vont jusqu'à permettre dans certains cas d'envisager le calcul de trajectoire à la même cadence que le guidage, en boucle fermée.

Cependant, toutes les méthodes faisant appel à des routines d'optimisation itératives (méthode de type Newton) sont complexes à mettre en œuvre en embarqué pour assurer le respect des contraintes déterministes du temps réel. Effectivement, excepté dans de rares cas simples, le nombre d'itérations nécessaires pour l'atteinte d'un niveau de précision donné dépend des paramètres initiaux et n'est pas connu à l'avance. Ainsi, le nombre d'itérations maximum considéré pour la méthode de guidage  $\Gamma$ -*guidance*, qui consiste in fine à utiliser une méthode de Newton, est généralement fixé à l'avance à partir de résultats de simulations réalisées au sol, en préparation de mission. De plus, l'existence de solution dans les conditions d'utilisation de la méthode doit être garantie. Lorsque les conditions d'utilisation sont fortement variables, une technique consiste à stocker en mémoire un jeu de solutions pré-calculées et à initialiser l'algorithme d'optimisation à partir de la solution la plus proche des conditions courantes. Dans les travaux présentés en chapitre 3, nous avons étudié cette technique pour le guidage basé sur les méthodes de tir indirect.

Par ailleurs, les méthodes basées sur le contrôle optimal non-linéaire ne garantissent pas la robustesse. Par exemple, un problème de minimisation de consommation de carburant génère des contrôles saturants de type Bang-Bang. De même, lorsqu'une contrainte d'état s'applique, la trajectoire optimale peut atteindre les bords de l'ensemble de contrainte. En pratique, pour éviter que la trajectoire du véhicule entre en contact avec ces contraintes d'état et de contrôle, il est courant de définir des marges qui dépendent des incertitudes sur

---

le système. Cependant, il est important de ne pas surestimer ces marges pour conserver un bon niveau de performance. Un autre problème de robustesse intervient lorsque la qualité de la navigation et la qualité du guidage sont couplés non-linéairement. Par exemple, on trouve ce problème lorsque l'observabilité de l'état dépend de la position du système (voir chapitre [4](#)). Des méthodes systématiques restent donc à développer pour assurer le meilleur compromis entre robustesse et performance.



---

# Contrôle optimal par méthodes de tir indirect pour le guidage

---

Dans ce chapitre, on présente des applications de la méthode de tir indirect pour le guidage de systèmes étudiés à l'ONERA sur différents projets au profit de la DGA et du CNES. Tout d'abord, la section 3.1 présente un résultat de continuité sur les systèmes dynamiques avec retards permettant de justifier l'utilisation d'une méthode de continuation dans ce cadre. Dans la section 3.2, on applique la méthode de continuation pour le guidage d'un intercepteur. Dans la section 3.2, le guidage des lanceurs réutilisables est étudié.

## 3.1 Méthode de continuation pour les systèmes avec retards

Dans cette section, on présente les résultats obtenus dans la thèse de R. Bonalli (2015–2018) en collaboration avec E. Trélat [Bonalli 17b, Bonalli 19a]. On s'intéresse à un problème de contrôle optimal avec retards sur le contrôle et sur l'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_r(u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), x(t-r_x), u(t), u(t-r_u)) dt, \\ \text{t.q.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r_x), u(t), u(t-r_u)), \\ \quad \quad \forall t \in [-\Delta, 0], x(t) = \phi_x(t), u(t) = \phi_u(t), \\ \quad \quad x(t_f) \in M_f, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec les mêmes notations que dans le chapitre précédent. Les fonctions  $\phi_x(\cdot)$  et  $\phi_u(\cdot)$  sont des fonctions prédéfinies représentant les valeurs passées de l'état et du contrôle sur l'intervalle  $[-\Delta, 0]$ ,  $\Delta > 0$ . Le paramètre de retard  $r = (r_x, r_u) \in [0, \Delta]^2$  est constant.

Ce type de système se rencontre très souvent dans l'étude des réactions chimiques [Oh 76, Dadebo 92], les retards pouvant être dus au délai d'acheminement d'un produit chimique entre deux réservoirs dans lesquels se produisent les réactions. En aérospatiale, il est moins courant de rencontrer des dynamiques avec retard. Néanmoins, le phénomène de déphasage non

minimal (la fonction de transfert du système possède des zéros à partie réelle positive ou des retards purs) peut se modéliser par une dynamique avec retards. Ce phénomène classique en aéronautique apparaît lorsque le véhicule possède des gouvernes arrières, le moment cinétique généré par braquage des gouvernes pour prendre de l'incidence provoque temporairement une force dans le sens opposé au mouvement désiré. La force de portance désirée est donc obtenue après un léger délai.

Le principe du maximum fournit dans ce cas des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre [Göllmann 14, Boccia 17, Bonalli 18]. En particulier, l'évolution du vecteur adjoint s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = & -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), x(t-r_x), p(t), p^0, u(t), u(t-r_u)) \\ & - \mathbb{1}_{[0, t_f-r_x]}(t) \frac{\partial H}{\partial y}(t+r_x, x(t+r_x), x(t), p(t+r_x), p^0, u(t+r_x), u(t+r_x-r_u)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$H(t, x, y, p, p^0, u, v) = \langle p, f(t, x, y, u, v) \rangle + p^0 f^0(t, x, y, u, v).$$

On remarque que l'équation dynamique du vecteur adjoint fait intervenir des données temporelles à la fois vers l'avant et vers l'arrière. Ceci empêche l'utilisation des méthodes d'intégration standards où seules les conditions initiales sont nécessaires. Pour résoudre le problème aux limites qui en résulte, la méthode de tir nécessite donc d'être initialisée avec une bonne estimation du vecteur adjoint  $p(\cdot)$  sur l'ensemble de l'intervalle de temps, alors que seule une estimation de la valeur initiale suffit d'habitude. La dimension du problème numérique est alors multipliée par le nombre de points de discrétisation du vecteur adjoint, ce qui rend la méthode beaucoup plus coûteuse.

Le problème qu'on se pose est le suivant : peut-on réaliser une continuation sur le paramètre de retard  $r$  pour le problème (3.1) ? Plus précisément, connaissant la solution du problème sans retard ( $r = 0$ ), on se demande s'il est possible d'initialiser une procédure de continuation telle que décrite dans la section 2.2.3.2 pour obtenir la solution au problème avec retard ( $r \in [0, \Delta]^2$ ).

Le résultat principal que nous avons montré répond positivement à cette question. Plus précisément, nous prouvons que, sous des hypothèses raisonnables, la trajectoire optimale et le vecteur adjoint associé sont uniformément continus par rapport au paramètre  $r$  autour de la solution connue en  $r = 0$ . Le résultat est assez technique, nous ne donnerons donc pas plus de détails dans ce document (le lecteur intéressé pourra se référer à [Bonalli 19a]). Le point crucial est que ce résultat garantit le caractère bien posé du schéma numérique proposé précédemment : tout chemin de continuation pour les retards converge vers la solution recherchée.

Nous avons utilisé ce résultat pour calculer la trajectoire optimale de systèmes avec retard uniquement sur l'état ( $r = (r_x, 0)$ ). Comme indiqué plus haut, il est nécessaire d'avoir une bonne initialisation du vecteur adjoint sur l'intervalle de temps tout entier. Pour cela, on utilise la solution supposée connue au problème non retardé. L'algorithme de continuation fonctionne alors de la même façon que dans le cas habituel, la seule différence intervient dans l'intégration du système dynamique. Pour cela nous avons justement besoin d'exploiter la continuité de la trajectoire  $(x_r(\cdot), p_r(\cdot))$  par rapport au paramètre  $r$ . En effet, la dynamique

de l'état (voir l'équation (3.1)), qui ne fait intervenir que des données temporelles courantes et passées, doit être intégrée avant la dynamique du vecteur adjoint de façon à pouvoir évaluer l'état aux instants futurs dans l'équation (3.2). Ce mode d'intégration ne peut donc fonctionner que si l'estimation initiale du vecteur adjoint est proche de la vraie solution.

Plusieurs applications numériques de l'algorithme ont été réalisées dans [Bonalli 18] pour montrer son efficacité. En particulier, l'algorithme de continuation a été appliqué sur un modèle de véhicule intercepteur pour la phase de guidage mi-course.

**Remarque 1.1 :** Dans le cas de retards à la fois sur l'état et le contrôle, notre résultat n'est montré que pour des systèmes affines (les fonctions  $f(\cdot)$  et  $f^0(\cdot)$  sont affines par rapport aux contrôles) et pour un temps final fixé. L'extension à des systèmes plus généraux reste donc ouverte.

Dans ce travail, nous avons considéré des retards constants, on pourrait également s'intéresser à des retards qui sont fonctions du temps et de l'état :  $(t, x) \mapsto r(t, x)$ . En effet, il existe des formulations du principe du maximum pour ce type de retards plus généraux [Asher 71], de sorte qu'un schéma de continuation numérique peut encore être défini.

## 3.2 Guidage d'un intercepteur

Dans cette section, on présente les résultats obtenus dans la thèse de R. Bonalli (2015–2018) en collaboration avec E. Trélat [Bonalli 17a, Bonalli 19b]. On s'intéresse au problème de guidage mi-course d'un missile contrôlé par des gouvernes aérodynamiques pour l'interception d'une cible mobile.

L'interception d'une cible se déroule en deux phases. La phase de guidage mi-course, également appelée phase de guidage inertiel, permet d'amener l'intercepteur dans les meilleures conditions d'interception jusqu'à ce que le capteur embarqué (système de pointage de cible avec capteur radar ou lidar, appelé autodirecteur) puisse détecter et accrocher la cible. La deuxième phase, dite de guidage terminal où d'autoguidage, a pour objectif de corriger l'erreur d'interception. Cette dernière phase est généralement d'une durée faible (quelques secondes) et ne corrige que de faibles erreurs, on utilise donc généralement une loi de guidage boucle fermée de type Navigation Proportionnelle [Zarchan 12].

La manœuvrabilité d'un tel véhicule est assurée par la force de portance, elle dépend donc fortement de sa vitesse. Pour cette raison, on cherche une trajectoire qui maximise la vitesse au moment de l'interception, c'est-à-dire à l'instant où le missile est au plus près de la cible. De plus, une vitesse maximale permet de transférer davantage d'énergie cinétique au moment de l'impact pour les systèmes à collision directe (*hit-to-kill missiles*). Les contraintes principales pour ce problème sont les contraintes d'incidence et de facteur de charge latéral présentées en section 2.1.3.

La trajectoire de la cible étant également incertaine, il est de plus nécessaire de mettre à jour la trajectoire de guidage de façon régulière (toutes les secondes environ) en fonction des nouvelles informations obtenues sur la cible, à l'aide d'un radar au sol par exemple. L'objectif est donc d'obtenir une méthode de contrôle optimal qui soit embarquable, donc rapide.

### 3.2.1 Modélisation

Le vol d'un véhicule intercepteur piloté par des gouvernes aérodynamiques peut comporter plusieurs étages propulsifs et un dernier étage non propulsé, chacun ayant ses caractéristiques aérodynamiques propres. Les forces propulsives ne sont pas contrôlées (le débit n'est pas modulé et il n'y a pas de braquage des tuyères), l'évolution de la masse de l'engin est donc totalement déterminée avant le lancement du véhicule. Le temps de vol étant relativement court, l'effet de la rotation de la Terre peut également être négligé. Le modèle dynamique (2.2) devient alors

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \nu \sin \gamma, \\ \dot{L} = \frac{\nu}{\rho} \cos \gamma \cos \chi, \\ \dot{l} = \frac{\nu \cos \gamma \sin \chi}{\rho \cos L}, \\ \dot{\nu} = \frac{T(t, \rho)}{m(t)} \cos \alpha - \frac{1}{2m(t)} \rho_a(\rho) \nu^2 SC_D(t, \rho, \nu, \alpha) - G \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \left( \frac{T(t, \rho)}{m(t) \nu} \sin \alpha + \frac{1}{2m(t)} \rho_a(\rho) \nu SC_L(t, \rho, \nu, \alpha) \right) \cos \mu + \left( \frac{\nu}{\rho} - \frac{G}{\nu} \right) \cos \gamma, \\ \dot{\chi} = \left( \frac{T(t, \rho)}{m(t) \nu} \sin \alpha + \frac{1}{2m(t)} \rho_a(\rho) \nu SC_L(t, \rho, \nu, \alpha) \right) \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} + \frac{\nu}{\rho} \cos \gamma \sin \chi \tan L. \end{cases} \quad (3.3)$$

Les contrôles sont l'angle d'incidence  $\alpha$  et l'angle de gîte aérodynamique  $\mu$ .

Le problème de guidage en temps final  $t_f$  libre que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} \min & C_t(\alpha, \mu) = g(t_f, \rho(t_f), L(t_f), l(t_f), \nu(t_f), \gamma(t_f), \chi(t_f)), \\ \text{t.q.} & (3.3), \\ & \forall \tau \in [t, t_f], |\alpha(\tau)| \leq \alpha_{\max}(\tau, \nu(\tau)), \eta_z(\tau) \leq \eta_{z_{\max}}(\tau), \\ & (\rho(t), L(t), l(t), \nu(t), \gamma(t), \chi(t)) = (\rho_t, L_t, l_t, \nu_t, \gamma_t, \chi_t), \\ & (\rho(t_f), L(t_f), l(t_f), \nu(t_f), \gamma(t_f), \chi(t_f)) \in M_f \subset \mathbb{R}^6. \end{cases} \quad (3.4)$$

On remarque l'existence d'une singularité dans les équations du système (3.3) lorsque  $\cos \gamma = 0$  (voir la dernière équation), ce qui se produit lorsque le vecteur vitesse est à la verticale. Bien qu'il ne s'agisse que d'un effet dû à la modélisation, ceci peut poser des problèmes si la singularité est rencontrée lors de l'intégration numérique de l'équation dynamique. Nous avons montré que ce problème peut être réglé simplement en modifiant temporairement le système de coordonnées lorsque  $\cos \gamma$  s'approche de zéro. Il suffit donc d'utiliser deux systèmes de coordonnées ayant des points de singularité différents et de passer de l'un à l'autre si la trajectoire traverse une zone proche d'une singularité. La stabilité de l'intégration numérique de l'état et du co-état, et donc de la méthode de tir, est alors assurée.

### 3.2.2 Résultats et simulation

En appliquant le principe du maximum, une analyse des extrémales permet d'explicitier le contrôle optimal en fonction de l'état et du co-état associé au problème (3.4). Il apparaît

qu'une simple saturation de cette expression permet de tenir compte des contraintes d'incidence et de facteur de charge. En ajoutant quelques hypothèses raisonnables, une étude géométrique permet également de caractériser le contrôle  $\mu$  sur les arcs singuliers.

L'objectif étant de calculer le contrôle optimal à bord du véhicule, la méthode numérique doit être efficace. En particulier, il est nécessaire de remédier au problème d'initialisation pour utiliser une méthode indirecte. Pour cela, l'idée est de calculer une table de solutions qui sera embarquée dans le calculateur de bord afin d'initialiser au mieux l'algorithme en fonction de l'état courant du système.

**Loi de guidage solution d'un problème simplifié.** Pour utiliser la méthode de continuation présentée en section 2.2.3.2, la solution à un problème simplifié doit être calculée dans un premier temps. Ceci nous a amené à étudier le problème (3.4) pour une force de propulsion nulle et pour des forces de gravité et d'inertie négligeables devant les forces aérodynamiques. Ainsi, seules les forces aérodynamiques (portance et traînée) dans l'équation (3.3) sont considérées avec le coût  $C_t(\alpha, \mu) = -v(t_f)$  maximisant la vitesse finale. De plus, nous ignorons les contraintes sur le contrôle dans ce problème simplifié. En appliquant le principe du maximum et en effectuant quelques approximations du premier ordre sur les variables du problème, nous avons montré par le calcul que le contrôle optimal peut se mettre sous une forme boucle fermée similaire à la loi de guidage (2.30), où un terme supplémentaire apparaît pour tenir compte de la décroissance de la pression atmosphérique avec l'altitude [Bonalli 17a]. Remarquons que cette loi de guidage est très intéressante pour une utilisation embarquée puisque son évaluation ne nécessite que quelques opérations simples en fonction de l'état courant du missile. Cependant elle reste approximative car valable uniquement pour des petites valeurs du contrôle.

Nous pouvons ensuite utiliser cette loi explicite pour initialiser une méthode de tir afin d'obtenir une solution optimale au problème simplifié, sans approximations et en tenant compte cette fois-ci des contraintes sur le contrôle. Il suffit pour cela d'exploiter le fait que le vecteur adjoint s'exprime en fonction du contrôle (et des ses dérivées) et de supposer que la solution optimale est proche de celle donnée par la loi de guidage. Cette approche a montré son efficacité en pratique. La figure 3.1 illustre cela, on observe que la trajectoire issue de la loi de guidage est très proche de la trajectoire optimale, malgré une contrainte imposée sur l'incidence.

**Construction d'une table de solutions pour le guidage.** A partir de la solution obtenue pour le problème simplifié, une méthode de continuation sur les différents paramètres du système peut être réalisée pour obtenir la solution au problème (3.4) posé initialement. Ainsi, les forces de propulsion et de gravité sont ajoutées progressivement par continuation discrète. Ensuite, une continuation sur les paramètres de la mission (état final) est réalisée pour obtenir la solution désirée. La figure 3.2 présente les trajectoires obtenues à chaque étape.

Bien que rapide dans la majorité des cas, il ne peut être envisagé de réaliser cette procédure complète de continuation à bord du véhicule. En effet, il existe trop d'incertitudes sur le nombre d'itérations de l'algorithme de tir nécessaires pour obtenir la solution. Une manière simple de remédier à ce problème est de construire une table de solutions couvrant l'ensemble des missions possibles. Concrètement, cela consiste à résoudre le problème de contrôle optimal dans l'ensemble des états initiaux et finaux possibles et de sauvegarder la solution (état et

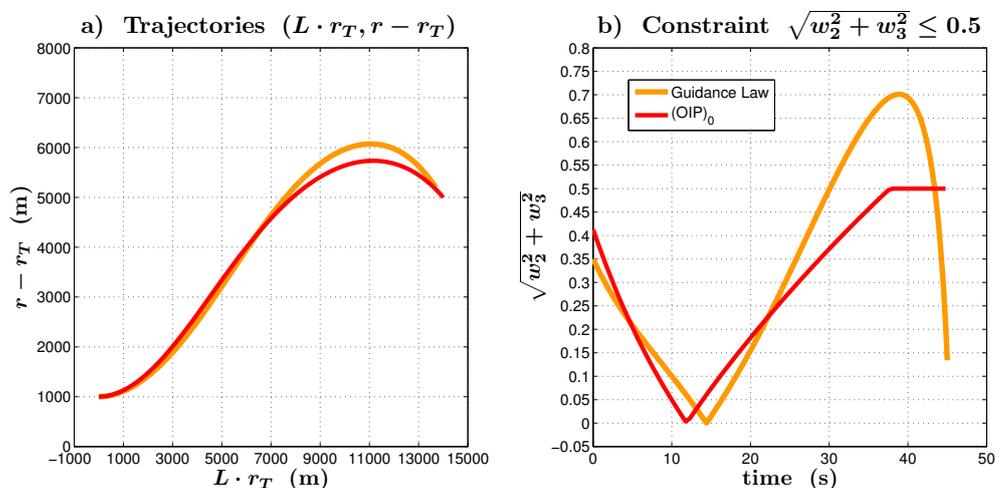


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la loi de guidage (orange) et la trajectoire optimale du problème simplifié (rouge). A gauche la trajectoire (portée et altitude). A droite le contrôle (incidence) [Bonalli 18].

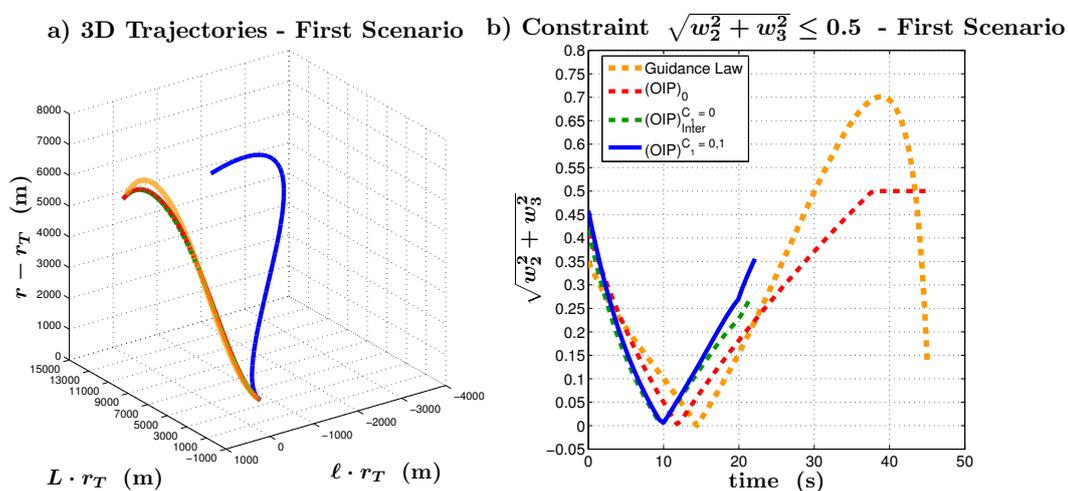


FIGURE 3.2 – Trajectoires à chaque étape de l'algorithme de continuation : loi de guidage boucle fermée (orange), solution optimale au problème simplifié (rouge), solution optimale pour le système réel avec gravité et propulsion (vert), solution optimale pour le système réel avec paramètres de mission désirés (bleu) [Bonalli 18].

co-état initial, état final) dans une table de données qui est embarquée dans le calculateur du véhicule. Au cours du vol, à chaque mise à jour de la mission, il suffit de résoudre un problème de tir initialisé avec la solution connue la plus proche. Des simulations ont permis de montrer que l'efficacité de cette méthode augmente avec la densité de données sauvegardées. Ainsi, pour que les temps de calcul soient compatibles d'un fonctionnement temps réel, il suffit d'adapter la quantité de données sauvegardées.

Dans le cadre du projet de recherche ANGE (projet interne ONERA), cette approche a été implémentée dans un processeur de laboratoire représentatif d'un vrai calculateur de vol afin d'évaluer la faisabilité d'un fonctionnement en condition réelles. Des tests de validation par simulation PIL (*Processor-In-the-Loop*) ont été réalisés en intégrant ce processeur dans un simulateur d'interception de cible <sup>1</sup> [Hérissé 16b].

**Remarque 2.1 :** La taille mémoire nécessaire pour stocker la table de solutions augmente très vite avec la dimension du problème, ce qui peut être très contraignant pour les calculateurs utilisés habituellement sur les intercepteurs. Si une liaison avec une station sol existe, il est toujours possible de déporter une partie des calculs au sol, comme la recherche de la solution la plus proche dans la table. Une autre solution pour réduire la quantité de données à stocker consiste à construire un métamodèle par apprentissage supervisé (régression par polynômes, régression par splines, etc.).

### 3.3 Guidage pour le retour de lanceurs réutilisables

Dans cette section, on présente les résultats obtenus dans différents projets en collaboration avec le CNES [Brendel 19, Eдорh 22a, Eдорh 22b]. On s'intéresse au problème de guidage pour le retour du premier étage d'un lanceur réutilisable vers le site de lancement.

La trajectoire de retour diffère selon le concept de véhicule choisi [Baiocco 16]. Les deux approches de réutilisation que nous avons étudiées, à savoir le VTVL (*Vertical-Takeoff-Vertical-Landing*) et le planeur VTHL (*Vertical-Takeoff-Horizontal-Landing*), comportent une première phase propulsée faisant suite à la séparation et au basculement du premier étage du lanceur. Ensuite, une phase balistique précède la phase de rentrée atmosphérique. La phase terminale se déclenche lorsque le véhicule est suffisamment proche du site d'atterrissage. Cette dernière étape n'a pas été considérée dans notre étude. L'objectif considéré consiste donc simplement à approcher une zone permettant de placer le véhicule dans les meilleures conditions d'atterrissage.

Pour limiter la pression dynamique sur la trajectoire de retour, le concept VTVL comporte une deuxième phase de freinage propulsée avant l'entrée dans les couches basses de l'atmosphère. Ensuite, le véhicule est contrôlé à l'aide de surfaces portantes jusqu'aux troisième allumage des moteurs pour la phase d'atterrissage. Le concept VTHL ne comporte qu'une seule phase propulsée, le reste de la trajectoire étant contrôlé à l'aide des surfaces portantes. Ainsi, le concept VTVL nécessite plus de carburant que le concept VTHL, mais moins de surfaces portantes. Dans les deux cas, on cherche une trajectoire qui minimise la consommation de carburant. Les contraintes principales pour ce problème sont les contraintes de pression

---

1. <http://herisse.bruno.free.fr/video/ANGE.mp4>

dynamique, éventuellement les contraintes de flux thermique, les contraintes d'incidence et les contraintes de facteur de charge latéral.

La trajectoire d'ascension du lanceur est très dispersée en raison des différentes incertitudes du système (incertitudes aérodynamiques et propulsives), l'état du premier étage peut donc être relativement éloigné de l'état nominal calculé en préparation de mission. Il est donc nécessaire de mettre à jour la trajectoire de retour avant le premier rallumage des moteurs pour assurer la performance et le respect des contraintes. Comme dans le problème d'interception, il est donc crucial d'obtenir une méthode de contrôle optimal embarquable.

### 3.3.1 Modélisation

Le vol de retour d'un premier étage de lanceur réutilisable exploite à la fois les forces propulsives et les forces aérodynamiques. Le modèle complet (2.1) s'applique donc dans ce problème. Une modélisation particulière des coefficient aérodynamiques présentée dans [Pucci 15] permet d'obtenir une écriture plus compacte de la dynamique. Ainsi, en remplaçant (2.8) par

$$\begin{cases} C_D(r, v, \alpha) = C_{D_0}(r, v) + 2 C_{L_1}(r, v) \sin^2 \alpha, \\ C_L(r, v, \alpha) = C_{L_1}(r, v) \sin 2\alpha, \end{cases} \quad (3.5)$$

on obtient,

$$\begin{cases} \dot{r} = v, \\ \dot{v} = \frac{T(q_t, r)}{m} x_b + \frac{1}{2m} \rho_a(r) \|v\| S (2 C_{L_1}(r, v) \langle x_b, v \rangle x_b - C_{N_\alpha}(r, v) v) + g(r) \\ \quad - 2 (\omega_E \times v) - (\omega_E \times (\omega_E \times r)), \\ \dot{m} = -q_t, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec  $C_{N_\alpha} = C_{D_0} + 2 C_{L_1}$ , le gradient du coefficient de portance en repère engin. Les contrôles sont la direction de l'axe engin  $x_b$  et le débit propulsif  $q_t$ .

Le problème de guidage en temps final  $t_f$  libre que nous considérons est le suivant :

$$\begin{cases} \min & C_t(x_b, q_t) = g(t_f, r(t_f), v(t_f), m(t_f)), \\ \text{t.q.} & (3.6), \\ & \forall \tau \in [t, t_f], \cos \langle x_b(\tau), x_v(\tau) \rangle \geq \cos \alpha_{\max}(r(\tau), v(\tau)), \\ & Q(\tau) \leq Q_{\max}, \phi(\tau) \leq \phi_{\max} \\ & \eta_z(\tau) \leq \eta_{z_{\max}}, \eta_x(\tau) \leq \eta_{x_{\max}}, \\ & (r(t), v(t), m(t)) = (r_t, v_t, m_t), \\ & (r(t_f), v(t_f), m(t_f)) \in M_f \subset \mathbb{R}^7. \end{cases} \quad (3.7)$$

Contrairement au modèle intercepteur considéré dans la section précédente, l'équation (3.6) ne présente pas de singularité, il n'est donc pas nécessaire de considérer plusieurs systèmes de coordonnées. Cependant, on remarque que la contrainte d'incidence doit être gérée comme une contrainte mixte état-contrôle avec cette modélisation. Bien que cela semble plus complexe en théorie, ce n'est pas un problème en pratique.

### 3.3.2 Résultats pour le concept VTVL

Dans le problème considéré, à la fois la force de propulsion et la force de portance sont contrôlés, ce qui constitue la difficulté principale. La plupart des travaux existants ne gèrent que l'une des deux forces. Dans le problème de Goddard, qui est un problème simplifié de lancement de fusée, seule la force de propulsion est contrôlée sous l'hypothèse d'incidence nulle [Bonnans 08]. Dans le problème de rentrée atmosphérique de la navette spatiale, c'est principalement l'angle de gîte aérodynamique qui est utilisé, l'incidence étant supposée constante [Harpold 79, Bonnard 03]. Dans le cas du lanceur réutilisable, il s'agit de gérer en même temps la propulsion, l'incidence et le gîte aérodynamique.

Pour déterminer la structure du contrôle optimal, une analyse géométrique des trajectoires extrémales peut être effectuée à partir des conditions nécessaires données par le principe du maximum avec contraintes sur l'état. Une autre approche consiste à utiliser la méthode de continuation [Hermant 11]. Une première trajectoire non contrainte est d'abord calculée, puis une continuation sur la borne de la contrainte est effectuée jusqu'à obtenir la valeur désirée. Ainsi, la structure de la solution peut être obtenue numériquement sans analyse préalable. Cette technique fonctionne à condition que les changements de structure soient réguliers pendant la procédure de continuation (apparition d'un seul arc frontière) [Hermant 10].

Une méthode de continuation a donc été utilisée pour obtenir une solution optimale approchée, sous contrainte de pression dynamique. L'évolution du signe d'une fonction de commutation construite à partir du principe du maximum permet de déterminer l'apparition de deux arcs propulsifs : un arc Bang (force propulsive maximale) au début de la trajectoire de retour et un arc permettant de gérer la contrainte d'état au début de la rentrée atmosphérique. Jusqu'à la fin du deuxième arc propulsif, le contrôle de la direction  $x_b$  est approché en négligeant la force de portance. Après extinction des moteurs, seul l'axe du véhicule  $x_b$  est contrôlé ( $q_t = 0$ ) pendant la rentrée atmosphérique. L'écriture (3.5) des coefficients aérodynamiques permet d'explicitier très simplement le contrôle  $x_b$  en fonction de l'état et du co-état [Brendel 19].

**Calcul de la trajectoire de référence.** Dans ce paragraphe, on s'intéresse au calcul de la trajectoire de référence en résolvant le problème (3.7) pour  $t = 0s$ . Cette génération de trajectoire est effectuée avant le lancement du véhicule, en préparation de mission, dans les conditions de vol nominales. Dans les résultats présentés ici, on considère le problème de minimisation de la consommation de carburant ou, de façon équivalente, de maximisation de la masse finale :  $g(t_f, r(t_f), v(t_f), m(t_f)) = -m(t_f)$ . On fixe la contrainte de pression dynamique  $Q_{\max} = 50kPa$ . Une contrainte d'incidence  $\alpha_{\max} = 5^\circ$  n'est imposée que pour les altitudes inférieures à 60km. Pour simplifier, les contraintes de flux thermiques et de facteur de charge sont ignorées. La position finale est fixée à 1km de distance horizontale et à 3km d'altitude du site d'atterrissage.

La solution au problème est présentée dans la figure 3.3. On identifie bien les deux phases propulsives. La contrainte de pression dynamique est gérée par un arc frontière sur lequel la pression dynamique reste constante. Pendant la rentrée atmosphérique, l'incidence reste à son maximum. Effectivement, l'utilisation des capacités maximales de portance lors de la rentrée permet d'économiser davantage de carburant.

En réalité, il apparaît que le modèle aérodynamique utilisé dans le résultat précédent n'est pas exact. En effet, puisque le véhicule entre dans l'atmosphère par l'arrière (côté

moteurs) pour pouvoir gérer la contrainte de pression dynamique par rallumage des moteurs, la structure de l'onde de choc est différente lorsque les moteurs sont allumés. Ce phénomène aéro-propulsif est dû à l'éjection des gaz dans le sens opposé au déplacement du flux d'air. Ainsi, On observe que la force de traînée aérodynamique est réduite lorsque les moteurs sont allumés [Finley 66]. Pour tenir compte de cela, le modèle aérodynamique (3.5) a été modifié comme suit.

$$\begin{cases} C_D(r, v, \alpha, q_t) = \left(1 - \frac{q_t}{q_M}\right) \left(C_{D_0}(r, v) + 2 C_{L_1}(r, v) \sin^2 \alpha\right), \\ C_L(r, v, \alpha, q_t) = \left(1 - \frac{q_t}{q_M}\right) C_{L_1}(r, v) \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (3.8)$$

Notons que cette nouvelle modélisation reste cohérente du modèle (3.5) lorsque les moteurs sont éteints. La dépendance affine en  $q_t$  des forces aérodynamique permet d'appliquer la même démarche pour le calcul du contrôle optimal en analysant le signe d'une fonction de commutation modifiée. Cependant, on observe dans la figure 3.4 que la structure de la solution optimale est différente. La phase de freinage est antérieure au pic de pression dynamique et correspond à un arc Bang. Il n'y a donc plus d'arc frontière mais un simple point de contact avec la contrainte. Dans ce cas d'application, l'utilisation d'un seul moteur sur les trois disponibles est imposée pour la phase propulsive intermédiaire, c'est pourquoi l'arc Bang est limité à un tiers des capacités maximales.

**Robustesse de la méthode de guidage.** On s'intéresse maintenant à la mise à jour de la trajectoire en cours de vol (pour  $t \geq 0s$ ). Ce calcul est effectué en embarqué après la séparation du premier étage du lanceur. La première correction de trajectoire (à  $t = 0s$ ) est la plus importante pour tenir compte des dispersions de position et de vitesse du véhicule qui se sont accumulées pendant la phase d'ascension. Il peut également être intéressant de remettre à jour la trajectoire plusieurs fois pendant le retour du lanceur afin de corriger les erreurs dues à la fois aux incertitudes de modèle et aux mauvaises estimations de l'état. En particulier, la masse du lanceur est souvent difficile à estimer avec précision en cours de vol. Dans les résultats présentés ici, la trajectoire est mise à jour toutes les secondes. Pour plus de robustesse, le coût considéré est modifié de façon à relaxer les contraintes sur l'état final du véhicule :

$$g(t_f, r(t_f), v(t_f), m(t_f)) = -m(t_f) + k_v \|v(t_f) - v_f\|^2 + k_r \|r(t_f) - r_f\|^2,$$

où  $(r_f, v_f)$  sont les positions et vitesses désirées en fin de retour et  $(k_r, k_v)$  sont des paramètres de pénalisation. De même, la contrainte d'incidence est relaxée dans le problème de guidage, on prend donc  $\alpha_{\max} = 20^\circ$  pendant le vol pour les altitudes inférieures à 60km. On conserve la même contrainte de pression dynamique  $Q_{\max} = 50kPa$ .

Une méthode de continuation est encore utilisée pour la mise à jour de la trajectoire. Elle consiste à considérer l'estimation de l'état courant du véhicule comme paramètre de continuation. La trajectoire calculée à la précédente mise à jour est utilisée pour initialiser la procédure. A l'instant initial  $t = 0s$ , c'est la trajectoire de référence calculée avant le lancement qui est utilisée pour l'initialisation.

Pour démontrer la robustesse de l'approche, une campagne de simulations a été menée en ajoutant des incertitudes aléatoires sur certains paramètres de modèle (état initial, coefficients aérodynamiques, poussée maximale, débit maximal, modèle d'atmosphère, etc.). Mille

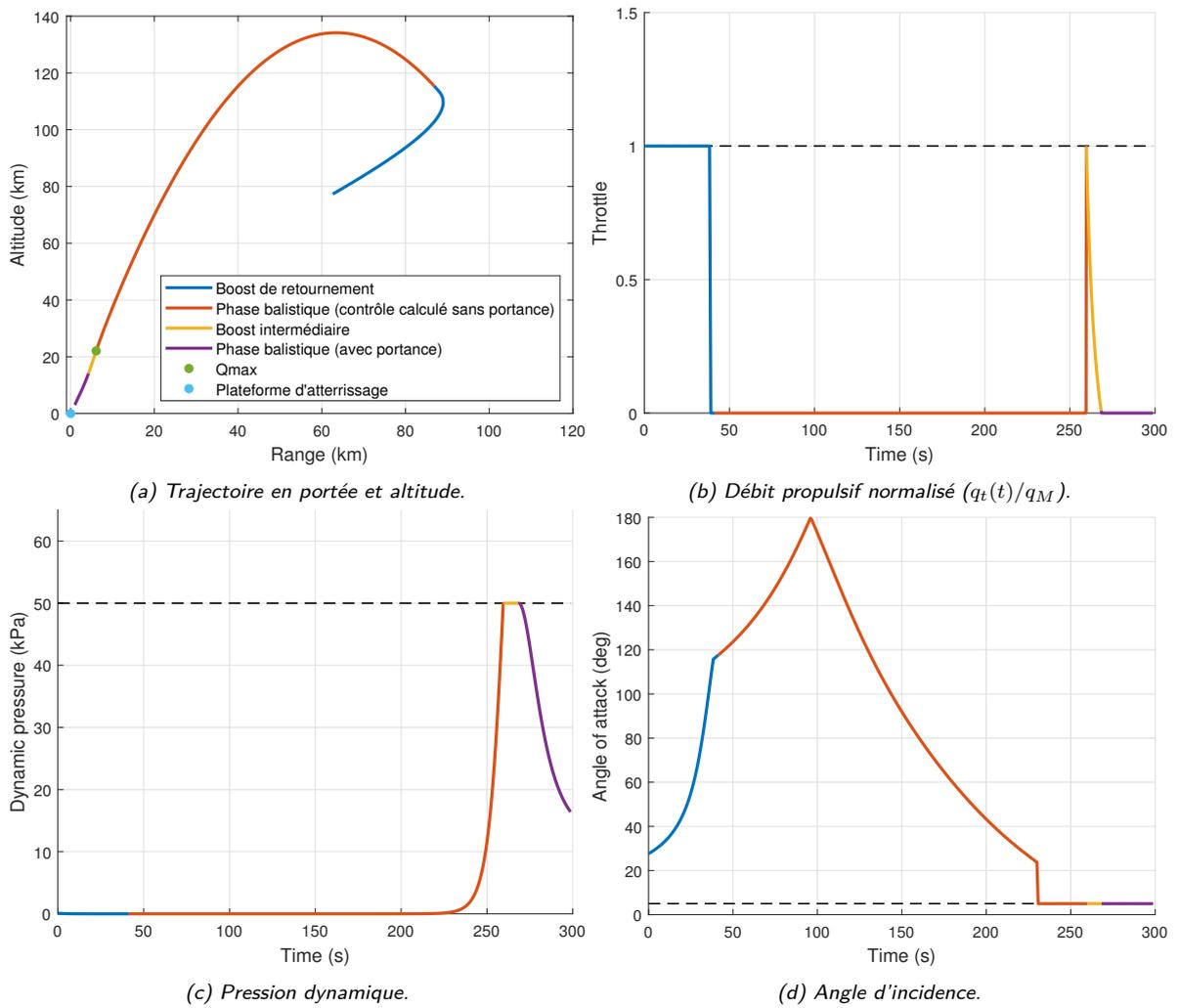


FIGURE 3.3 – Trajectoire optimale pour le concept VTVL avec modèle aérodynamique indépendant de la propulsion.

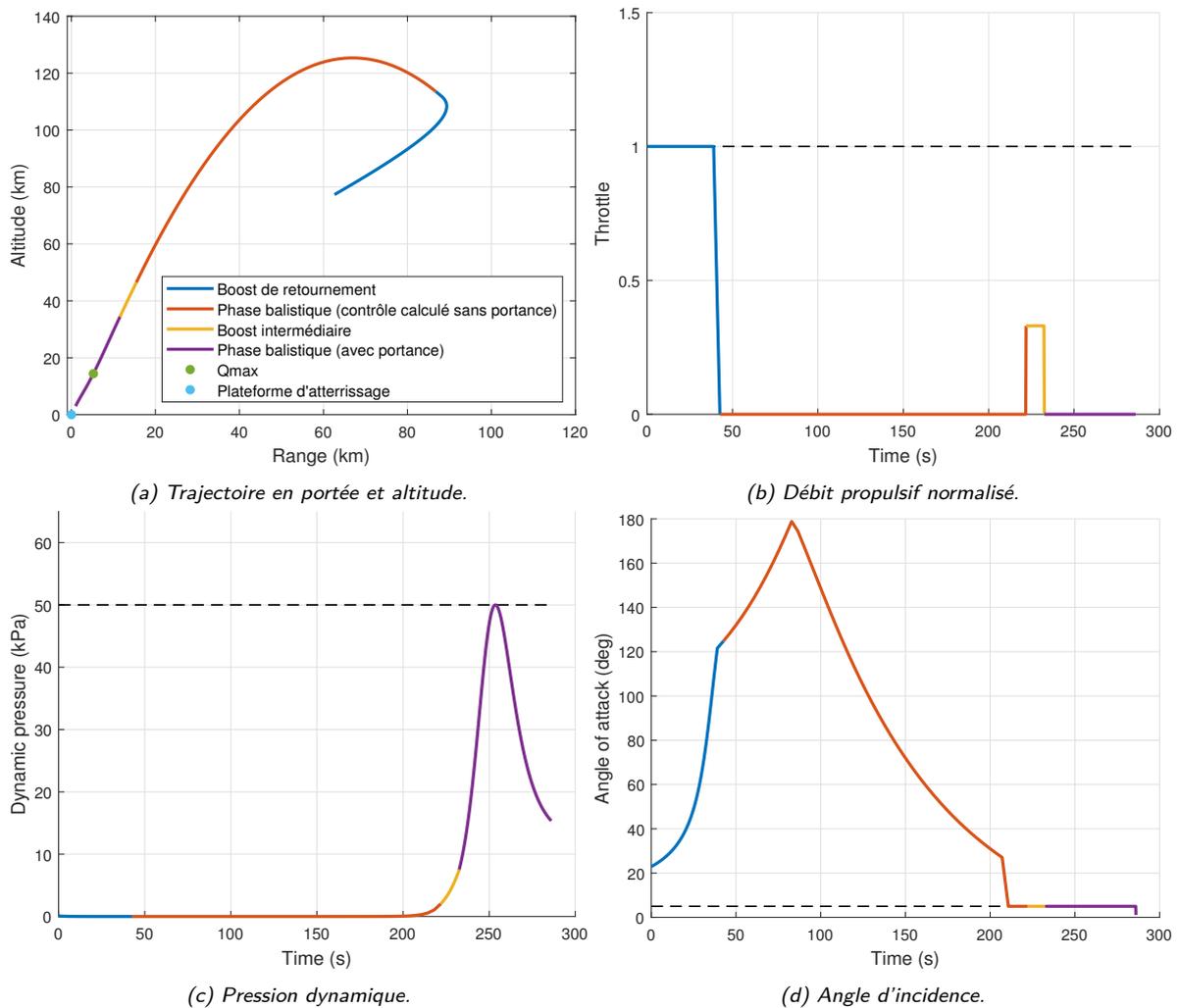


FIGURE 3.4 – Trajectoire optimale pour le concept VTVL avec modèle aérodynamique dépendant de la propulsion.

simulations de Monte-Carlo ont été réalisées, elles sont présentées en figure 3.5. La courbe rouge représente la simulation du retour dans le cas nominal, sans incertitudes sur les paramètres de modèle. Les courbes de couleur bleue représentent les simulations avec incertitudes. Dans tous les cas, la trajectoire a pu être mise à jour avec succès avec des temps de calculs compatibles d'un fonctionnement temps réel. La précision obtenue à l'instant final est de 100m autour de la position désirée et de 10m/s autour de la vitesse désirée, ce qui assure des conditions très satisfaisante pour la phase d'atterrissage final. De plus, la consommation de carburant reste proche du cas nominal à  $\pm 4\%$ , ce qui permet de limiter les réserves de carburant à embarquer dans le lanceur. On remarque également que la structure de contrôle reste inchangée dans tous les cas, seuls les temps de commutation varient pour chaque cas. Cependant, on constate une plus grande variation de la pression dynamique qui dépasse assez largement la pression maximale fixée au départ. Ces écarts sont dus aux grandes incertitudes sur le modèle aérodynamique du véhicule. Pour assurer que la contrainte ne soit pas violée dans tous les cas d'incertitudes, une solution simple consiste à diminuer le paramètre  $Q_{\max}$  du problème de contrôle optimal. Il existe d'autres solutions plus rigoureuses et systématiques, comme la méthode minimax du pire cas ou les méthodes stochastiques [Caillau 18], elles sont envisagées en perspectives de travaux.

**Remarque 3.1 :** Le modèle aéro-propulsif (3.8) utilisé ici est artificiel et n'a pas été validé par des experts en aérodynamique. Une modélisation plus fine serait donc nécessaire pour améliorer la solution au problème. Cependant, on observe en pratique que le résultat est très cohérent des observations effectuées sur les retour du lanceur Flacon 9 de la société américaine SpaceX. De plus, on constate que la consommation de carburant reste faible sur cette phase de vol, relativement à la consommation sur la première phase propulsive. Une meilleure modélisation ne permettra donc pas d'obtenir un gain de performance majeur.

La fonction de coût utilisée pour les simulations de robustesse réalisées dans cette étude ne dépend que de l'état final du véhicule. Par conséquent, les trajectoires mises à jours pendant le vol peuvent parfois différer substantiellement entre deux cycles de calcul successifs. Une manière d'y remédier est d'ajouter un terme intégral dans le coût afin de limiter les variations de la commande. Ainsi, l'ajout d'un terme quadratique sur l'incidence a été testé avec succès, avec un niveau de performance comparable constaté.

### 3.3.3 Résultats pour le concept VTHL

La même méthode de continuation a été exploitée pour le concept VTHL, sous contraintes de pression dynamique et de facteur de charge. La finesse (rapport entre force de portance et force de traînée) du véhicule étant beaucoup plus élevée que pour le concept VTVL, la phase de retournement du vecteur vitesse est plus courte et une phase de vol plané apparaît naturellement. Ainsi, un seul arc Bang (force propulsive maximale) au début de la trajectoire de retour est nécessaire, le reste du vol étant contrôlé à l'aide des forces de portance. Cependant, la phase de vol atmosphérique étant plus longue, une modélisation plus fine des coefficients aérodynamiques en fonction de l'incidence est nécessaire, ce qui induit des calculs plus complexes pour déterminer le contrôle optimal [Edorh 22a].

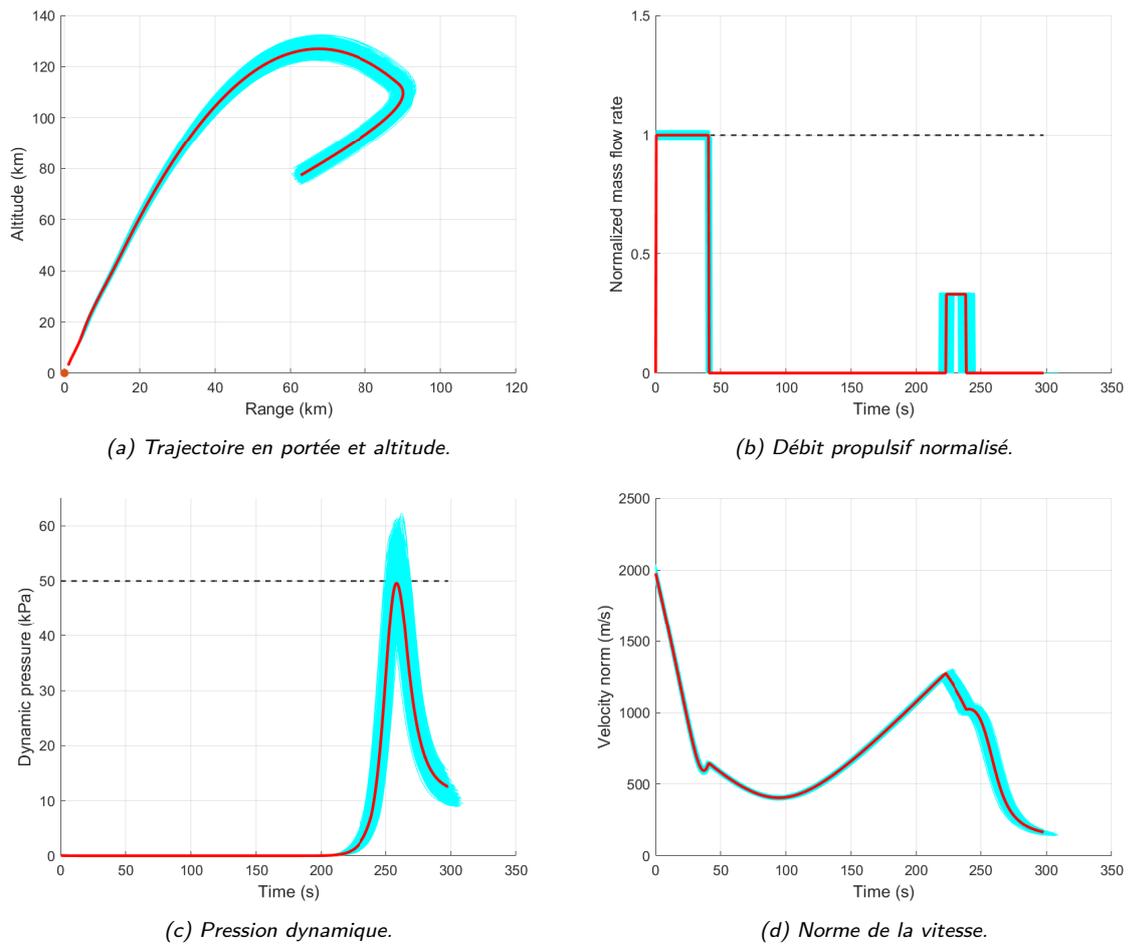


FIGURE 3.5 – Simulations du retour pour le concept VTVL avec incertitudes et méconnaissances sur les paramètres du modèle (méthode de Monte-Carlo).

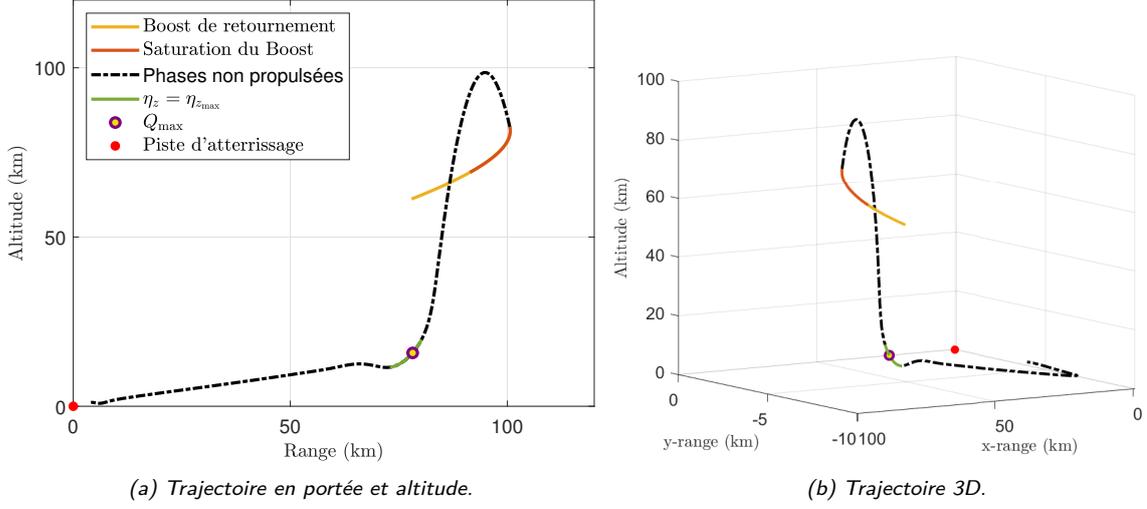


FIGURE 3.6 – Trajectoire optimale pour le concept VTHL.

**Calcul de la trajectoire de référence.** Pour le calcul de la trajectoire de référence, on considère le problème de minimisation de la consommation de carburant. On fixe la contrainte de pression dynamique  $Q_{max} = 50\text{kPa}$  et les contraintes de facteur de charge  $\eta_{x_{max}} = \eta_{z_{max}} = 5$ . Une contrainte d'incidence  $\alpha_{max} = 20^\circ$  n'est imposée que pour les altitudes inférieures à 60km. La contrainte de flux thermiques est ignorée. La position finale est fixée à 4km de distance horizontale et à 1km d'altitude de la piste d'atterrissage. L'orientation du vecteur vitesse est fixée de façon à garantir l'alignement avec la piste.

La solution au problème est présentée dans les figures 3.6 et 3.7. On identifie la phase propulsive en début de trajectoire, avec un arc contraint lorsque le facteur de charge longitudinal atteint sa limite. La limite de pression dynamique est atteinte en un point de contact pendant la manœuvre de redressement du vecteur vitesse précédant la phase de plané. La limite de facteur de charge latéral est atteinte sur cette même phase très exigeante pour le véhicule. Pendant la phase de plané, la finesse reste proche de sa valeur maximale pour garantir une efficacité optimale de la manœuvre. On observe alors que le facteur de charge reste proche d'une valeur constante et que la pente de la trajectoire est quasi-constante également. On observe sur la figure 3.6b la manœuvre effectuée en fin de vol par le planeur pour s'aligner avec la piste d'atterrissage qui est dirigée d'Ouest vers l'Est (axe *y-range* sur la figure).

**Robustesse de la méthode de guidage.** On s'intéresse maintenant à la mise à jour de la trajectoire en cours de vol (pour  $t \geq 0\text{s}$ ). Ce calcul est effectué en embarqué après la séparation du premier étage du lanceur. La même méthode de continuation que pour le concept VTVL est utilisée pour la mise à jour de la trajectoire, avec le même critère de performance :

$$g(t_f, r(t_f), v(t_f), m(t_f)) = -m(t_f) + k_v \|v(t_f) - v_f\|^2 + k_r \|r(t_f) - r_f\|^2,$$

où  $(r_f, v_f)$  sont les positions et vitesses désirées en fin de retour et  $(k_r, k_v)$  sont des paramètres de pénalisation.

Les simulations de Monte-Carlo sont présentées en figure 3.8. La courbe rouge représente la simulation du retour dans le cas nominal, sans incertitudes sur les paramètres de modèle.

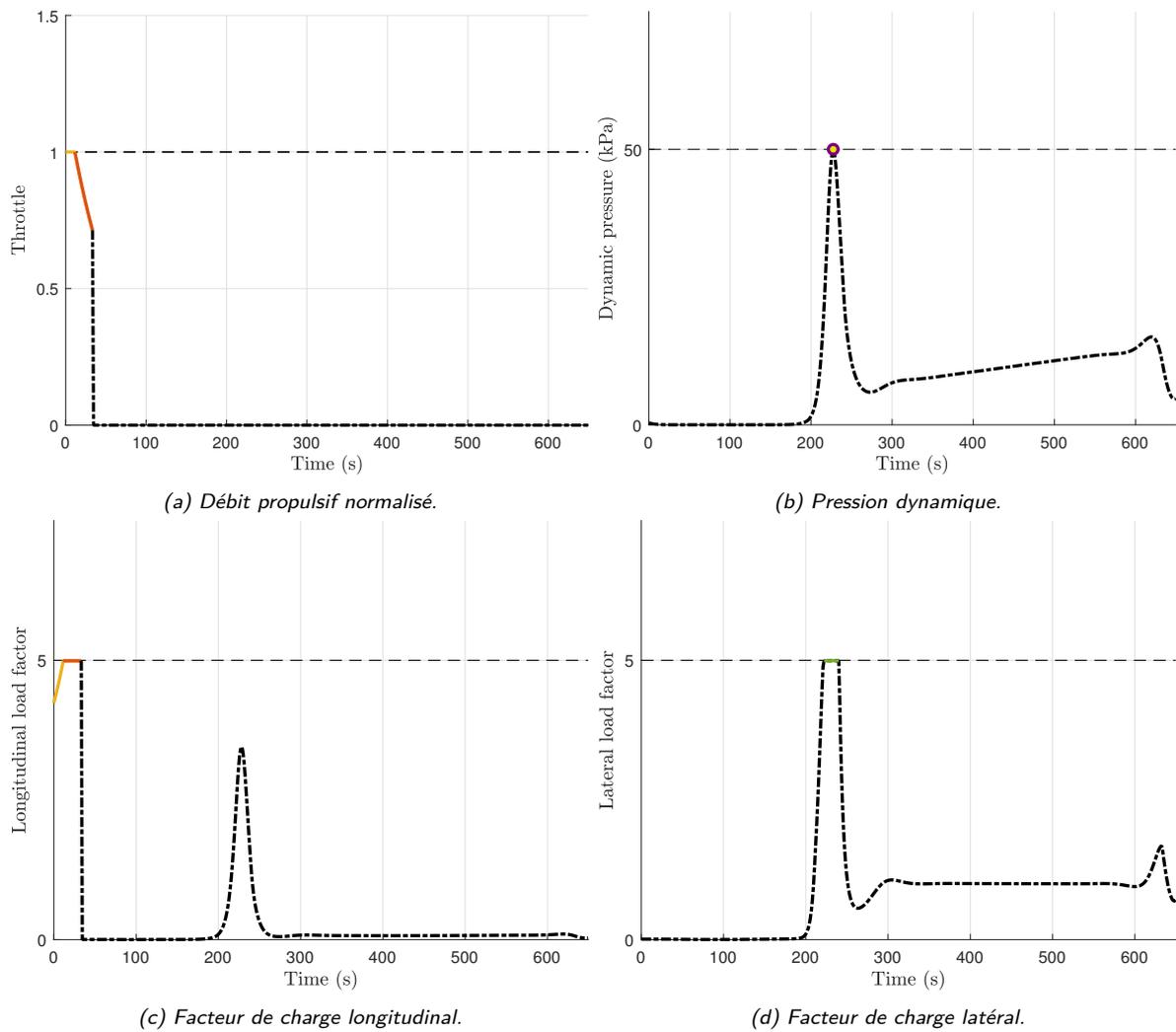


FIGURE 3.7 – Contraintes pour le concept VTHL.

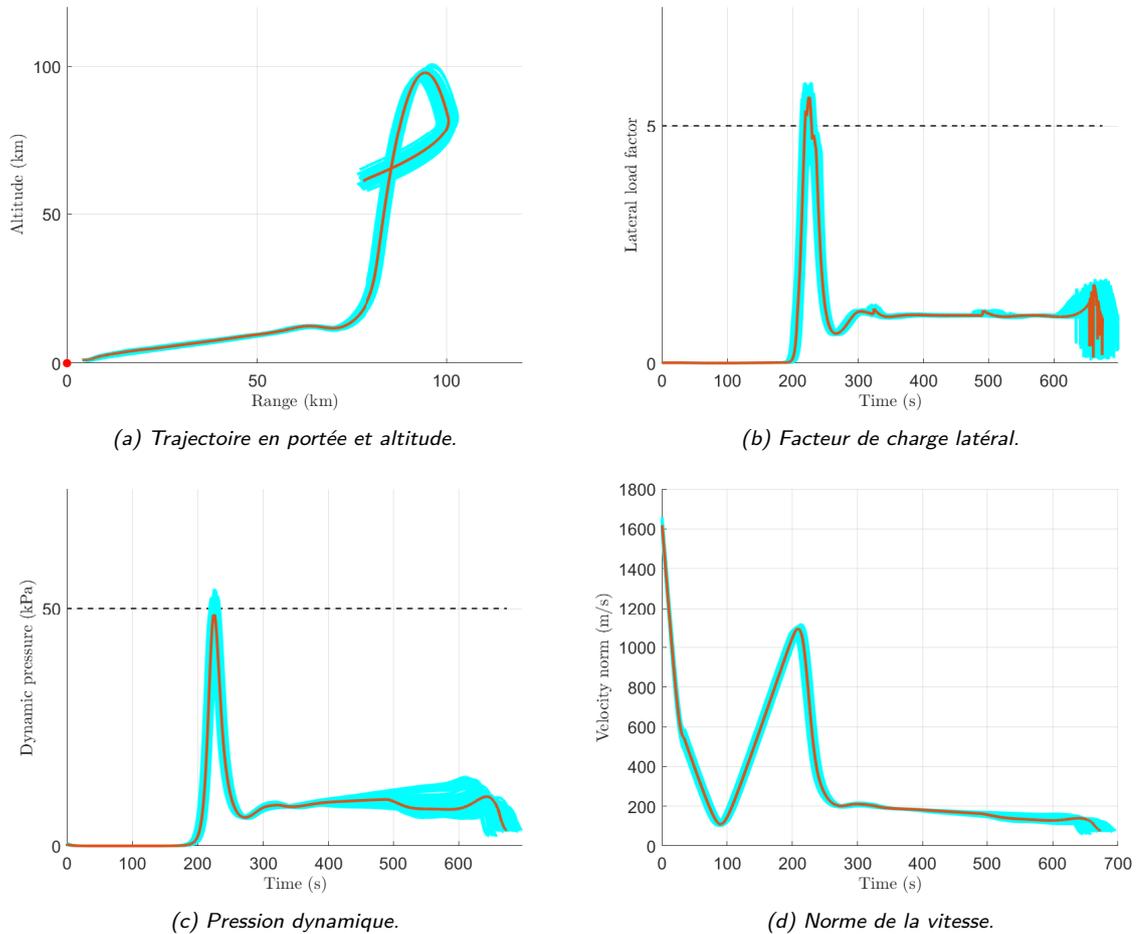


FIGURE 3.8 – Simulations du retour pour le concept VTHL avec incertitudes et méconnaissances sur les paramètres du modèle (méthode de Monte-Carlo).

Les courbes de couleur bleue représentent les simulations avec incertitudes. Dans tous les cas, la trajectoire a été mise à jour avec succès avec des temps de calculs compatibles d'un fonctionnement temps réel. La précision obtenue à l'instant final est de 50m autour de la position désirée et de 6m/s autour de la vitesse désirée. De plus, la consommation de carburant reste proche du cas nominal à  $\pm 5\%$ . On remarque également que la structure de contrôle reste inchangée dans tous les cas, seuls les temps de commutation varient pour chaque cas. Les mêmes remarques que dans le cas du VTVL peuvent être faites concernant les contraintes de pression dynamique et de facteur de charge.

### 3.4 Perspectives et projets de recherche

Les travaux menés à l'ONERA montrent que la méthode indirecte, lorsqu'elle est combinée à la technique de continuation, constitue un candidat sérieux pour le guidage des systèmes aérospatiaux de part sa rapidité d'exécution. De plus, les nombreuses simulations effectuées en présence de dispersions dues aux incertitudes montrent sa robustesse, bien que cela nécessite de définir des marges de sécurité sur les contraintes d'état et de contrôle pour le calcul de la trajectoire de référence. Il reste cependant des points à développer ou à améliorer.

L'utilisation embarquée d'une méthode indirecte nécessite de connaître la structure de la commande quelles que soient les conditions courantes du véhicule. Lorsque les dispersions sont suffisamment faibles, comme dans les résultats de la section 3.3, on vérifie souvent en pratique que la structure reste inchangée. Cependant, dans un cadre plus général, une analyse plus précise de la structure semble nécessaire. Par exemple, dans les travaux récents sur la phase d'atterrissage d'un premier étage de lanceur réutilisable, on arrive à montrer que la structure Max-Min-Max est générique en présence de contraintes d'état [Leparoux 22a, Leparoux 22b].

L'utilisation des techniques de continuation constitue le point crucial permettant d'envisager l'implémentation embarquée des méthodes indirectes pour le guidage. Cependant, la robustesse numérique que cela apporte au problème d'initialisation se fait au prix de calculs supplémentaires. De plus, bien qu'une amélioration substantielle du taux de succès est observée en pratique, il n'existe ni de garantie théorique de convergence de l'algorithme, ni de résultats de complexité algorithmique. Cela peut être résolu en pratique à l'aide de campagnes de simulations intensives, par exemple pour déterminer la taille et la finesse de la table des solutions à pré-enregistrer (voir section 3.2). Notons que plutôt qu'une table, qui peut rapidement occuper une grande taille mémoire, un modèle d'apprentissage pourrait tout à fait être envisagé en utilisant les méthodes d'intelligence artificielle par exemple (réseau de neurones, métamodèle, etc.). Un autre axe de travail complémentaire consiste à effectuer une analyse détaillée des contrôles singuliers, des extrémales anormales et des points conjugués [Trélat 12].

Comme indiqué dans le chapitre précédent, les problèmes de guidage sont très souvent constitués d'une phase d'approche et d'une phase où la précision est recherchée. La plupart des travaux se focalisent sur l'une des deux phases de manière indépendante. Dans les problèmes présentés dans ce chapitre, on ne s'intéresse effectivement qu'à la phase mi-course de l'intercepteur (indépendamment du guidage terminal) ou à la phase de rentrée du lanceur réutilisable (indépendamment de l'atterrissage). L'objectif intermédiaire de cette première phase est défini à l'avance par l'utilisateur, à partir de son expertise ou de simulations réalisées en préparation de mission, de façon à garantir le succès de la seconde phase. Cependant, il peut exister un point de commutation assurant à la fois une meilleure performance de la première phase et le même niveau de précision exigé pour la phase finale. Le développement d'une méthode plus globale semble donc constituer un axe de recherche intéressant. De façon plus large, une telle approche pourrait permettre de mieux tenir compte des incertitudes de modèle, voire de pannes matérielles. Cette problématique est actuellement considérée dans la thèse de C. Leparoux (2020–2023).

Enfin, pour améliorer les performances du guidage de certains systèmes aérospatiaux, la prise en compte de la dynamique d'attitude est nécessaire. Cela implique d'augmenter la dimension de l'état du système. Or, les problèmes de contrôle optimal deviennent plus difficiles à analyser dans ce cas en raison des trajectoires singulières et du phénomène de Fuller qui

---

peuvent apparaître en plus grande dimension [Kupka 90, Zhu 17]. Pour traiter ces problèmes, la recherche de solutions sous-optimales [Zhu 16b] ou une régularisation du problème peuvent être opérés.



---

# Planification et commande en environnement contraint et incertain

---

Dans ce chapitre, on étudie des méthodes de planification pour des problèmes de commande en milieux contraints, soit par la présence d'obstacles (contraintes sur l'état du véhicule) dans la section 4.1, soit par le manque d'observabilité de l'état dans certaines zone de l'espace (section 4.2). Ces méthodes sont appliquées pour la commande de véhicules aériens (drones, missiles).

## 4.1 Planification optimale sous contraintes d'état

Le lecteur intéressé pourra se référer au livre [LaValle 06] qui donne un très bon panorama des algorithmes de planification. On s'intéresse ici à la planification dans un espace libre continu  $\mathcal{X}_{\text{free}} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\text{obs}}$ , où  $\mathcal{X}$  est l'espace d'état et  $\mathcal{X}_{\text{obs}}$  est l'espace des obstacles. On distinguera la planification de chemin (*path planning*), qui consiste à déterminer une fonction continue  $x^p : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}_{\text{free}}$  vérifiant  $x^p(0) = x_0$  et  $x^p(1) \in \mathcal{X}_{\text{goal}}$ , de la planification de trajectoire (*trajectory planning*) qui consiste à déterminer une fonction temporelle  $x : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{X}_{\text{free}}$  vérifiant  $x(0) = x_0$  et  $x(t_f) \in \mathcal{X}_{\text{goal}}$  et vérifiant les contraintes dynamiques du système (équation dynamique, contraintes sur l'état et le contrôle).

Cette section présente deux méthodes de planification optimale de trajectoire reposant sur l'utilisation de méthodes à échantillonnage conçues à l'origine pour la planification de chemin. La première méthode présentée dans le paragraphe 4.1.2 consiste à intégrer les contraintes de manœuvrabilité du système en modifiant l'algorithme RRT optimal (RRT\*). Dans le paragraphe 4.1.3, un algorithme incrémental par méthode de tir utilisant un chemin pré-planifié est présenté.

### 4.1.1 Rappel sur les méthodes de planification à échantillonnage

De façon générale, les algorithmes à échantillonnage cherchent à construire un graphe dans l'espace d'état en échantillonnant celui-ci. Seuls les états échantillonnés appartenant à l'espace libre  $\mathcal{X}_{\text{free}}$  sont conservés. Chaque échantillon est relié à au moins un autre échantillon par un chemin qui doit être entièrement contenu dans  $\mathcal{X}_{\text{free}}$ . Lorsqu'un chemin complet passant par plusieurs échantillons et reliant deux échantillons suffisamment proches de l'état initial et de l'état final, l'algorithme le renvoie. En cas d'échecs, soit il n'existe pas de solution faisable, soit le nombre d'échantillons doit être augmenté.

Ces algorithmes présentent l'avantage de bien fonctionner pour des espaces de haute dimension car, contrairement aux algorithmes combinatoires, leur temps d'exécution ne dépend pas exponentiellement de la dimension de  $\mathcal{X}$ . Ils sont également beaucoup plus faciles à mettre en œuvre et sont complets d'un point de vue probabiliste, ce qui signifie que la probabilité qu'ils produisent une solution s'approche de 1 en ajoutant des échantillons indéfiniment, à la condition qu'une telle solution existe. Ainsi, elles ne permettent pas de déterminer l'existence de solutions et elles ne sont pas efficaces pour produire des solutions optimales sans adaptations.

Deux algorithmes à échantillonnage sont succinctement décrits ci-dessous : le planificateur PRM (*probabilistic roadmap*) et le planificateur RRT (*rapidly-exploring random trees*). Les versions optimales de ces deux algorithmes sont rappelées dans un troisième paragraphe.

**Planificateur PRM.** Le PRM est l'un des algorithmes les plus connus de planification de chemin incrémental par échantillonnage aléatoire [Kavraki 96]. Il s'agit d'une méthode de planification de chemin composée d'une première phase de construction de graphe et d'une seconde phase de recherche du chemin le plus court qui est solution au problème (voir figure 4.1). Les nœuds du graphe sont reliés à l'aide d'un planificateur local pendant la phase de construction. Il n'est pas nécessaire d'exécuter séquentiellement ces deux phases, plusieurs étapes d'échantillonnage peuvent être appelées successivement pour augmenter la taille du graphe avant de rechercher une solution dans celui-ci.

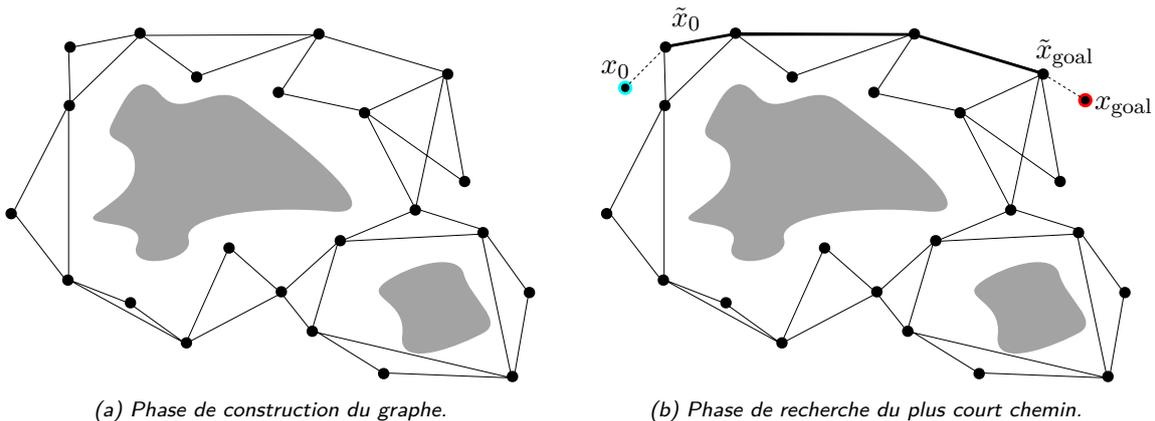


FIGURE 4.1 – Fonctionnement de l'algorithme PRM [Pharpatara 15a].

**Planificateur RRT.** Contrairement au PRM, l'algorithme RRT construit un arbre d'exploration et fournit une solution en une seule phase [LaValle 98]. Au départ, l'arbre est

constitué d'un seul nœud correspondant à l'état initial  $x_0$ . A chaque itération, la méthode consiste à ajouter un nœud  $x_{\text{new}}$  dans l'arbre d'exploration qui rapproche un état  $x_{\text{rand}}$  généré aléatoirement dans l'espace  $\mathcal{X}$  (supposé borné) et son plus proche voisin  $x_{\text{near}}$  appartenant à l'arbre courant. Le chemin reliant  $x_{\text{near}}$  et  $x_{\text{new}}$  ne doit pas croiser  $\mathcal{X}_{\text{obs}}$  pour que  $x_{\text{new}}$  soit ajouté à l'arbre. Dès qu'une itération telle que  $x_{\text{new}} \in \mathcal{X}_{\text{goal}}$  est atteinte, l'algorithme retourne une solution. Le RRT ne dépend pas d'un planificateur local puisque l'algorithme ne cherche pas à connecter directement  $x_{\text{near}}$  et  $x_{\text{rand}}$ . Ceci permet de tenir plus facilement compte de contraintes dynamiques qu'avec le PRM, puisque qu'il suffit d'intégrer l'équation du mouvement sur une durée  $\Delta t$  à partir d'un contrôle  $u$  choisi pour diriger le système vers  $x_{\text{rand}}$  (voir figure 4.2). Il existe des variantes de l'algorithme RRT pour accélérer l'obtention d'une solution, en biaisant le tirage des échantillons par exemple [LaValle 01].

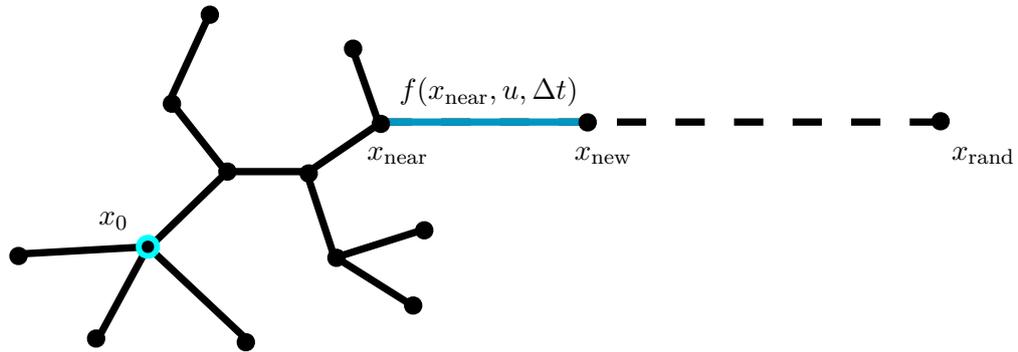


FIGURE 4.2 – Fonctionnement de l'algorithme RRT [Pharpatara 15a].

**Planificateurs optimaux.** Il existe des versions asymptotiquement optimales (la probabilité que la solution soit optimale s'approche de 1 lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini) aux deux planificateurs PRM et RRT, ils sont généralement notés PRM\* et RRT\* respectivement [Karaman 11]. Par exemple, dans le cas de l'algorithme RRT\*, cela consiste à ajouter une étape de reconnexion locale après avoir ajouté le nouveau nœud  $x_{\text{new}}$  dans l'arbre. Si le coût pour atteindre  $x_{\text{new}}$  à partir de  $x_{\text{near}}$  est plus élevé qu'en passant par un autre nœud voisin, le nœud parent de  $x_{\text{new}}$  est modifié (voir figure 4.3a). Ensuite, si le coût pour atteindre un point voisin à partir de  $x_{\text{new}}$  est plus faible qu'en passant par le parent, alors  $x_{\text{new}}$  devient son nouveau parent (voir figure 4.3b). Dans des travaux plus récents, l'optimalité asymptotique est obtenue en utilisant un simple RRT pour un système étendu intégrant le coût intégral directement dans l'état [Hauser 16, Kleinbort 20]. Dans cette dernière méthode, aucun planificateur local n'est utilisé contrairement au RRT\* qui en a besoin pour les étapes de reconnexion.

#### 4.1.2 Une méthode par échantillonnage pour la planification

Dans cette section, on présente les résultats obtenus dans la thèse de P. Pharpatara (2013–2016) en collaboration avec Y. Bestaoui [Pharpatara 17, Pharpatara 15a]. On s'intéresse au problème de planification optimale d'un aéronef dans un environnement contenant des zones à éviter (obstacles), en tenant compte des contraintes dynamiques du système. On se retrouve

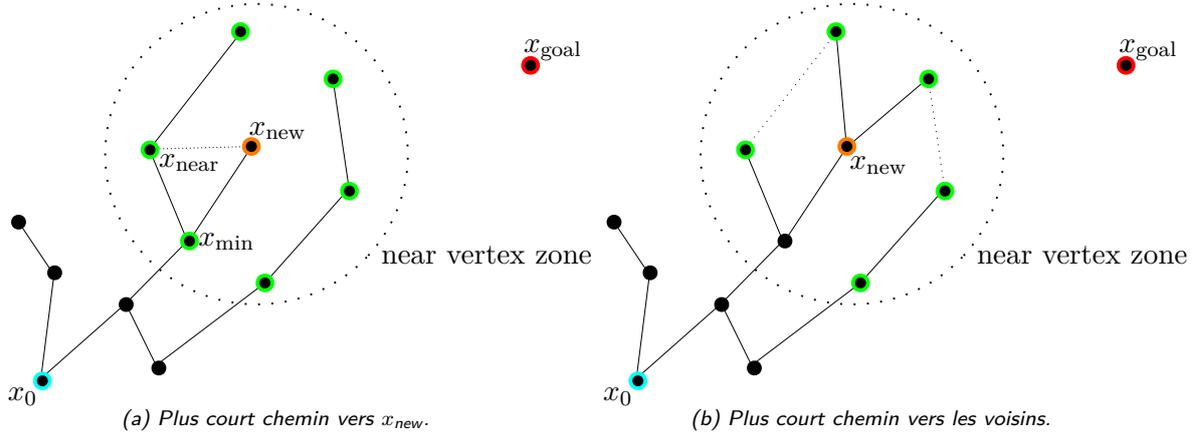


FIGURE 4.3 – Fonctionnement de la phase de reconnexion locale dans l'algorithme RRT\* [Pharpatara 15a].

donc avec un problème de contrôle optimal en boucle ouverte qui peut s'exprimer

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt, \\ \text{t.q.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \quad \quad c(t, x(t), u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \\ \quad \quad c_{\text{obs}}(x(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \\ \quad \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) \in \mathcal{X}_{\text{goal}}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où,  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$  est le contrôle. Les fonctions  $f(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f^0(\cdot) \in \mathbb{R}$ ,  $g(\cdot) \in \mathbb{R}$ ,  $c(\cdot) \in \mathbb{R}^r$  ( $r$  étant le nombre de contraintes du système) et  $c_{\text{obs}}(\cdot) \in \mathbb{R}^{r_{\text{obs}}}$  ( $r_{\text{obs}}$  étant le nombre d'obstacles) sont supposées suffisamment régulières (au moins  $C^1$ ). Les contraintes inégalités  $c_{\text{obs}}(x(t)) \geq 0$  représentent de façon équivalente la condition  $x(t) \notin \mathcal{X}_{\text{obs}}$ .

Le problème ainsi posé n'est généralement pas convexe car l'ensemble  $\mathcal{X}_{\text{obs}}$  formé par les obstacles n'est pas un ensemble connexe en général. Une méthode d'optimisation (directe ou indirecte) n'est donc pas adaptée pour calculer un optimum global. Un planificateur à échantillonnage tel que le RRT permet de gérer les contraintes liées aux obstacles. Cependant, la métrique basée sur la distance euclidienne, souvent utilisée pour sa simplicité dans l'étape de recherche du nœud le plus proche dans l'arbre d'exploration, n'est pas adaptée pour des systèmes complexes tels que les véhicules aériens dont l'état évolue dans l'espace des positions et des vitesses. De même, le planificateur local utilisé pour la phase de reconnexion dans l'algorithme RRT\* nécessite de tenir compte des contraintes dynamiques.

La contribution principale que nous avons apportée repose sur l'élaboration et l'utilisation d'un planificateur local adapté à des véhicules aériens commandés par gouvernes aérodynamiques (missiles, planeurs). Celui-ci a été intégré dans un algorithme RRT\* pour la planification de chemin d'un missile intercepteur.

**Un planificateur local pour les planeurs** Considérons un véhicule aérien non propulsé et évoluant à grande vitesse. Dans le modèle (2.2), ignorons les forces de propulsion, négligeons la force de gravité et négligeons la rotondité de la Terre ainsi que sa vitesse de rotation. Pour

simplifier, considérons de plus que le gradient du coefficient de portance est constant. Alors, en considérant l'abscisse curviligne  $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ , le modèle peut s'écrire

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{ds} = \cos \gamma \cos \chi, \\ y' = \frac{dy}{ds} = \cos \gamma \sin \chi, \\ z' = \frac{dz}{ds} = \sin \gamma, \\ \gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = c(z) u_1, \\ \chi' = \frac{d\chi}{ds} = c(z) \frac{u_2}{\cos \gamma}, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $(x, y, z)$  sont les positions dans un repère inertiel (modèle Terre plate ici) et  $(u_1, u_2)$  sont les contrôles normalisés tels que  $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ . Le paramètre  $c(z)$  représente la courbure maximale réalisable par le véhicule à l'altitude  $z$ . Pour un modèle simplifié d'atmosphère, celui-ci peut s'exprimer  $c(z) = c_0 e^{-z/z_r}$  avec  $c_0, z_r > 0$ .

Dans l'équation (4.2), on reconnaît la version tridimensionnelle du modèle utilisé dans le problème de Dubins consistant à trouver le plus court chemin de courbure bornée entre deux configurations (positions et orientations) fixées [Dubins 57, Boissonnat 94]. Lorsque la courbure maximale est une constante, il a été montré dans le cas bidimensionnel que les chemins optimaux comportent des arcs de cercle (arcs de type C) et des segments de droite (arcs de type S). Plus précisément, seulement 6 chemins sont des candidats possibles entre deux configurations données, 4 sont de type CSC et 2 sont de type CCC selon la direction choisie pour chaque arc de cercle. Pour déterminer le plus court chemin, il suffit donc d'évaluer le coût de chacun de ces 6 candidats. Lorsque la courbure  $c(\cdot)$  est monotone par rapport à l'une des variables de position (l'altitude  $z$  dans notre cas), nous avons montré que des chemins comportant des réflexions (arcs de type CSCSC où les deux segments de droite ont des directions opposées) peuvent être optimaux dans certaines configurations bien spécifiques [Hérissé 13].

Dans le cas tridimensionnel, il a été montré que des chemins hélicoïdaux peuvent être plus courts que des chemins de type CSC lorsque les positions initiales et finales sont assez proches [Sussmann 95]. Cependant, en considérant ces positions suffisamment éloignées, seuls les chemins de type CSC sont optimaux. Dans ce cas, une méthode géométrique simple permet de calculer les 4 candidats possibles [Hota 10]. Nous l'avons adaptée pour traiter la courbure variable  $c(z)$  qui nous intéresse, les arcs de type C (courbure maximale) n'étant plus de simples arcs de cercle [Pharpatara 15b]. Néanmoins, la méthode de calcul reste simple et rapide, idéale pour être utilisée comme métrique dans le planificateur RRT\*. La figure 4.4 montre les 4 courbes de type CSC calculées pour une configuration donnée.

**Application à un modèle simplifié de missile intercepteur** L'algorithme RRT associé au planificateur local présenté dans le paragraphe précédent a été utilisé pour générer un chemin sous-optimal (au sens de la distance totale parcourue) évitant des zones de l'espace. Le modèle considéré est celui d'un missile intercepteur simplifié identique au modèle du planeur (4.2). Le scénario considéré est présenté en figure 4.5a, l'état de départ est  $(x_0, y_0, z_0, \gamma_0, \chi_0) = (1\text{km}, 1\text{km}, 1\text{km}, \pi/2, 0)$  et l'objectif est d'atteindre un cône d'une ouverture de  $10^\circ$  au point

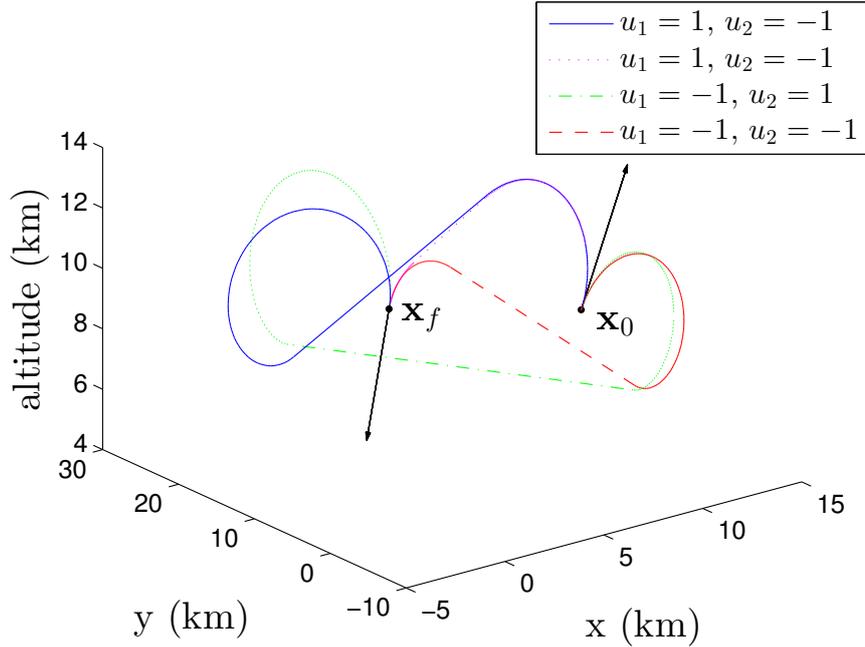


FIGURE 4.4 – Les 4 chemins de type CSC entre deux configurations 3D pour le système (4.2).

$(x_{\text{goal}}, y_{\text{goal}}, z_{\text{goal}}, \gamma_{\text{goal}}, \chi_{\text{goal}}) = (90\text{km}, 90\text{km}, 25\text{km}, 0, -\pi/8)$ . Les obstacles sont modélisés par des volumes cylindriques et demi-sphériques représentés dans la figure 4.5a. Les résultats de trois algorithmes ont été comparés, ils sont présentés dans les figures 4.5.

Le premier test a été réalisé avec l’algorithme RRT en utilisant comme métrique la distance du plus court chemin de type CSC parmi les quatre possibles. Ce même chemin est utilisé pour connecter les états  $x_{\text{rand}}$  et  $x_{\text{near}}$ . On a donc  $x_{\text{rand}} = x_{\text{new}}$  puisque le modèle dynamique utilisé dans le planificateur local est le même que le modèle du véhicule. Un biais dans la génération des états aléatoires a également été considéré, il consiste à choisir un point dans le cône d’arrivée avec une probabilité de 10%. La figure 4.5b montre un résultat obtenu après 1000 itérations. Au moins une solution vers l’objectif a été trouvée. Cependant, la trajectoire la plus courte n’est clairement pas optimale puisque des boucles et virages superflus sont observés. Ceci est le résultat de la non-optimalité asymptotique de l’algorithme RRT.

Dans la figure 4.5c, un résultat après 200 itérations de l’algorithme RRT\* est présenté. Le planificateur local est utilisé à la fois comme métrique dans la recherche du plus proche voisin (comme pour l’algorithme RRT précédent) et dans les phases de reconnections. Le même biais vers l’objectif à atteindre est utilisé avec la même probabilité de 10%. On remarque que la qualité de la solution obtenue est bien meilleure que dans le cas précédent.

Dans le dernier algorithme étudié, le même RRT\* est utilisé en ajoutant un second biais d’échantillonnage (voir figure 4.5d). Ce biais consiste à exploiter un champs de potentiel artificiel composé de champs répulsifs (atour des obstacles et de l’état de départ) et d’un champ attractif (autour de l’objectif à atteindre). A chaque échantillonnage d’un état, son orientation est choisie dans un cône dirigé selon le gradient du champs de potentiel. Cela permet de contraindre la trajectoire à se diriger vers l’objectif et à éviter les obstacles. Ainsi,

l'algorithme nécessite moins d'itérations pour trouver une solution satisfaisante.

Le tableau 4.1 présente les résultats obtenus après 100 exécutions indépendantes de chacun des trois algorithmes. Ceux-ci confirment que l'algorithme RRT\* associé à un biais d'échantillonnage utilisant des champs de potentiel permet d'obtenir une solution de meilleure qualité avec un nombre d'itérations plus faible.

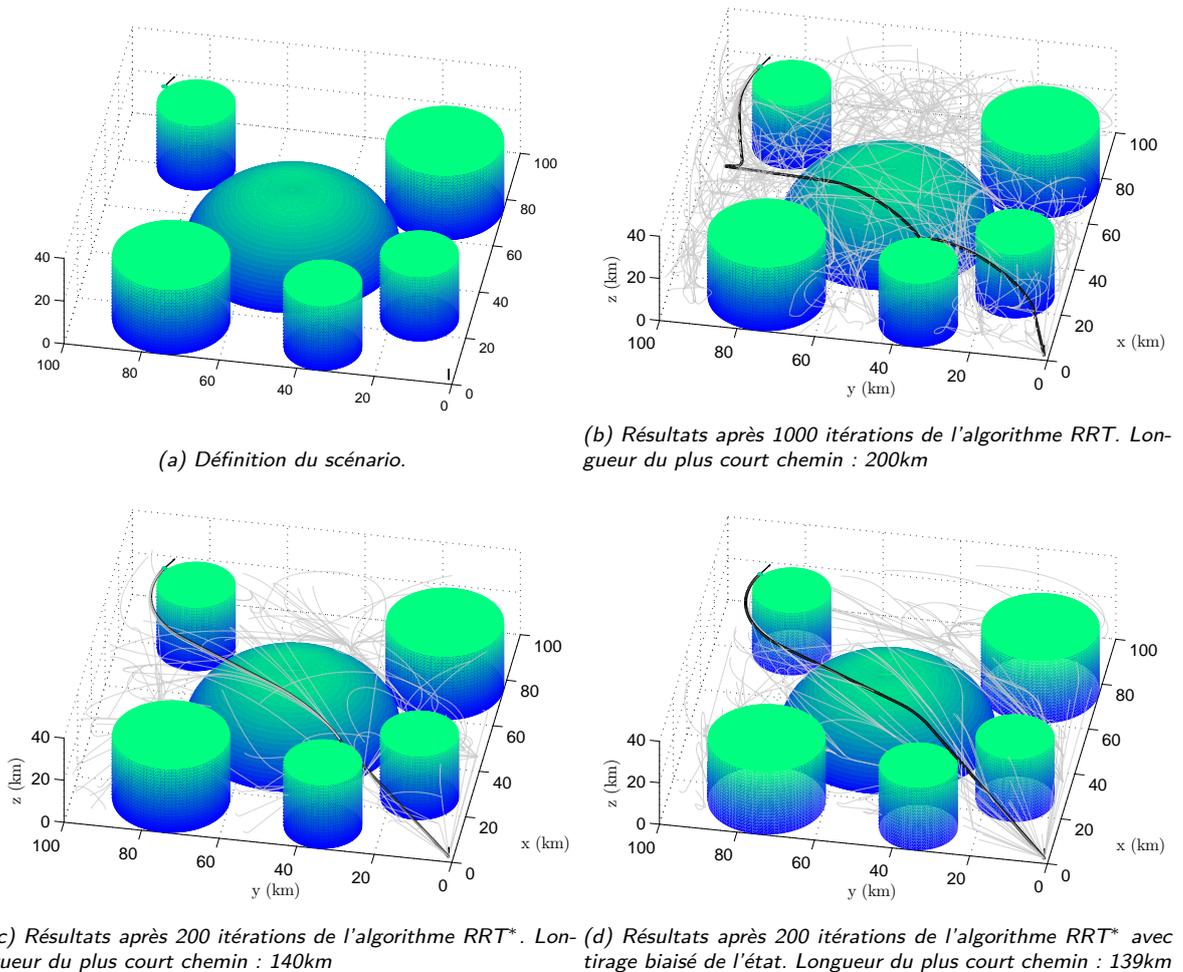


FIGURE 4.5 – Résultats de trois algorithmes de type RRT pour la planification de chemin d'un intercepteur.

**Remarque 1.1 :** Le modèle de missile considéré ici reste simple et n'est pas complètement fidèle à la réalité. Cependant, il est tout à fait envisageable d'implémenter un algorithme d'asservissement pour que le missile suive au mieux le chemin planifié.

Le type d'algorithme présenté ici est dit *anytime* dans le sens où une première solution est obtenue rapidement et peut ensuite être améliorée en ajoutant des itérations. Cette propriété est très intéressante pour des applications embarquées où le calculateur possède des capacités de calculs limitées.

Méthode	itération moyenne de la 1 <sup>ère</sup> solution	longueur moyenne de la 1 <sup>ère</sup> solution	longueur moyenne de la solution finale
RRT	85	241km	239km
RRT*	82	197km	185km
RRT* biaisé	46	169km	155km

TABLE 4.1 – Résultat de 100 exécutions de l’algorithme après 200 itérations.

### 4.1.3 Méthode incrémentale pour la planification embarquée

Dans la méthode présentée en section précédente, le planificateur local est intégré comme un élément de base d’un algorithme à échantillonnage. Le principal problème de cette méthode est sa possible lenteur d’exécution en raison du nombre élevé d’appels au planificateur. En effet, lorsque le modèle du véhicule considéré est complexe, un unique appel à la planification de trajectoire peut exiger beaucoup de calculs. Pour une utilisation embarquée, cette approche peut donc parfois s’avérer inutilisable. Dans cette section, on s’intéresse à une approche dans laquelle ces deux algorithmes fonctionnent en parallèle. En résumé, l’objectif de l’algorithme à échantillonnage est de déterminer un simple chemin entre le point de départ et le point d’arrivée en utilisant la distance euclidienne comme métrique. Ce chemin ne constitue aucunement une trajectoire réalisable par le véhicule considéré mais il fournit très rapidement une route à suivre. Dans un second temps, le planificateur cherche de façon incrémentale une trajectoire optimale admissible en suivant ce chemin. L’objectif de cette approche incrémentale est de pouvoir assurer que le calculateur embarqué fournisse une solution à tout moment même si celle-ci est incomplète.

La première étape de la méthode consiste à obtenir un chemin  $x^p : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}_{\text{free}}$ , passant éventuellement par des points prédéfinis de sorte que

$$x^p(\lambda_k) = x_k, \quad k = 0, \dots, n_{\text{vp}} + 1,$$

où  $0 \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq 1$  et  $n_{\text{vp}}$  est le nombre de points de passage. Les points  $x_0$  et  $x_1$  correspondent respectivement aux points de départ et d’arrivée. Un algorithme probabiliste tel que le PRM ou le RRT permet d’obtenir un tel chemin de manière efficace puisque qu’aucune contrainte dynamique n’est prise en compte à ce stade. On considère donc dans la suite qu’un tel chemin est disponible.

Dans un deuxième temps, on s’intéresse à la résolution du problème général de planification (4.1). Pour faciliter la gestion des contraintes d’état, on préfère les pénaliser directement

dans la fonction de coût [Denham 64, Zhu 17]. Le problème est donc approximé par le suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_\lambda(u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_\lambda} f^0(t, x(t), u(t)) dt \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2\sigma} \sum_{k \in N_\lambda} \|S(x(t_k) - x_k)\|^2 + \int_0^{t_\lambda} \phi(c_{\text{obs}}(x(t))) dt, \\ \text{t.q.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \quad \quad \quad c(t, x(t), u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, t_f], \\ \quad \quad \quad x(0) = x_0, \quad S_f(x(t_\lambda) - x^p(\lambda)) = 0, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où  $N_\lambda = \{k \in \llbracket 1, n_{\text{vp}} \rrbracket : \lambda_k < \lambda\}$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ , et  $t_\lambda \geq t_k$  pour  $k \in N_\lambda$ . Les matrices  $S, S_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont introduites pour modéliser la contrainte au niveau des points de passage et la contrainte finale. Le paramètre  $\sigma > 0$  est utilisé pour pondérer la pénalisation sur les points de passage. On remarque que cette pénalisation s'approchera d'autant plus près de zéro que  $\sigma$  sera faible. La fonction  $\phi(\cdot)$  est utilisée pour pénaliser les contraintes d'état. En pratique, toute fonction  $C^1$  qui s'annule lorsque le véhicule s'éloigne des obstacles et devient élevée à l'intérieur des obstacles peut convenir. Par exemple,

$$\phi(s) = \phi_0 \sum_{i=1}^{r_{\text{obs}}} \frac{1 - \tanh\left(\frac{s_i}{\mu}\right)}{2}, \quad s = (s_1, \dots, s_{r_{\text{obs}}}) \in \mathbb{R}^{r_{\text{obs}}}, \quad (4.4)$$

avec  $\phi_0 > 0$  et  $\mu > 0$ , vérifie cette propriété. Intuitivement, on remarque que la solution à ce nouveau problème s'approche d'une solution locale au problème (4.1) lorsque  $(\sigma, \mu)$  tend vers  $(+\infty, 0)$ , à condition que  $\phi_0 > 0$  soit suffisamment grand. De même, on remarque que lorsque  $(\sigma, \mu)$  tend vers  $(0, 0)$ , on obtient la solution au problème (4.1) avec les contraintes additionnelles sur les points de passage :  $S(x(t_k) - x_k) = 0$ . L'objectif de cette deuxième étape est de résoudre séquentiellement, par méthode de continuation, le problème (4.3) paramétré par  $\lambda$ . Pour cela, une méthode de tir peut être implémentée à partir des conditions nécessaires obtenues par le principe du maximum avec contraintes intermédiaires [Dmitruk 11, Olivier 18].

L'intérêt de l'approche est de pouvoir résoudre rapidement un problème de planification de trajectoire, de sorte que le calculateur embarqué soit en mesure de fournir une solution malgré des capacités de calculs limitées. En effet, on s'attend à ce que le temps de calcul pour la résolution numérique de (4.3) soit faible pour des petits  $\lambda$  et augmente lorsque le paramètre  $\lambda$  tend vers 1. Ainsi, on peut supposer empiriquement qu'il existe  $\lambda_{\min} > 0$  pour lequel on est sûr que la solution  $(x(t), u(t))$  au problème soit disponible sur l'intervalle de temps  $[0, t_{\lambda_{\min}}]$ . Ce paramètre  $\lambda_{\min}$  dépend lui-même des capacités de calculs sur un cycle d'utilisation de l'algorithme de planification embarquée. Cet algorithme a donc la capacité d'être utilisé en temps réel pour fournir une solution partielle. En fonction de l'évolution de la mission, cette solution peut être complétée et améliorée sur les cycles suivants. Dans tous les cas, l'utilisation du chemin pré-calculé  $x^p(\cdot)$  assure que le véhicule se dirige toujours vers la cible puisque  $S_f x(t_\lambda) = S_f x^p(\lambda)$ . Pour assurer le fonctionnement temps réel, l'approche consiste donc à faire un compromis entre l'obtention d'une trajectoire admissible pour le véhicule et la réalisation de la mission.

La méthode a été validée en simulation pour un drone de type VTOL (*Vertical Take-Off and Landing*) [Hérissé 12]. Le modèle dynamique en translation est

$$\dot{r} = v, \quad m\dot{v} = u + mg - c_a \|v_a\| v_a, \quad (4.5)$$

où  $g$  correspond à l'accélération de gravité et  $u$  est la commande en poussée. Le terme  $c_a \|v_a\| v_a$  correspond à la force de traînée avec  $v_a$  la vitesse relative à l'air. Dans la suite on considère qu'il n'y a pas de vent, donc  $v_a = v$ . On prend  $c_a = 0.05 \text{ kg.m}^{-1}$ . Pour la fonction coût on choisit  $g(t_f, x(t_f)) = 0.05 t_f$ ,  $f^0(t, x(t), u(t)) = \|u(t) + mg\|^2$ , et  $(\phi_0, \mu) = (1, 1)$  dans l'équation (4.4). Deux valeurs sont considérées dans la suite pour  $\sigma$ . On a de plus une contrainte sur le contrôle :  $\|u(t) + mg\| \leq 0.3 N$ . Pour les points de passage, on choisit de ne contraindre que la position :  $S = \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ . Pour l'état final, on prend  $S_f = I_6$  de sorte que  $x(t_f) = x^p(1)$ . Pour la planification du chemin  $x^p(\cdot)$ , nous avons utilisé l'algorithme PRM\* implémenté dans la bibliothèque C++ OMPL (*Open Motion Planning Library*) [Şucan 12]. Pour l'étape de génération de trajectoire, une méthode de tir multiple implémentée avec la bibliothèque **SOCP** a été utilisée [Hérissé 16a].

Dans la figure 4.6, la carte 3D d'environnement est présentée. Elle a été partiellement reprise d'un exemple fourni dans la boîte à outils MATLAB® *Robotics Toolbox* [Corke 17]. Elle est composée de murs modélisés par des rectangles noirs et d'une fenêtre de couleur bleue. Le drone démarre à la position  $r_0 = (x_0, y_0, z_0) = (20, 8, 5)$  avec une vitesse nulle (point vert sur la figure) et doit arriver à la position  $r_f = (x_f, y_f, z_f) = (47, 30, 33)$  avec une vitesse nulle (point rouge sur la figure). Le chemin bleu représente une réalisation du planificateur PRM\* et les points noirs correspondent à des points de passage. Notons que seule la position est planifiée, pour la vitesse on impose par défaut  $v^p(\lambda) = 0, \forall \lambda \in [0, 1]$ . La figure 4.7 présente deux trajectoires obtenues pour  $\sigma = 2$  et  $\sigma = 20$  lorsque la méthode de continuation se termine, c'est-à-dire lorsque la solution de (4.3) pour  $\lambda = 1$  est obtenue. On peut vérifier que la trajectoire approche de plus près les points de passage pour la plus faible valeur de  $\sigma$ . Dans la figure 4.8, la vitesse et le contrôle sont présentés et comparés à la valeur optimale obtenue pour  $\sigma \rightarrow 0$ . En particulier on peut observer que la contrainte sur le contrôle est bien respectée.

La figure 4.9 présente les temps de calculs moyens de l'algorithme sur 1000 tirages du chemin  $x^p(\cdot)$  fournis par le PRM\* en fonction du paramètre de continuation  $\lambda$ . Pour  $\lambda = 0$ , le temps moyen est de  $0.15 \text{ s}$ , ce qui correspond à la durée de calcul du chemin  $x^p(\cdot)$ . On observe ensuite que le temps moyen et l'écart type sont des fonctions cubiques de  $\lambda$ , ce qui s'explique par la combinaison de trois briques algorithmiques de complexité quasi-linéaires avec  $\lambda$  : la méthode d'intégration numérique, la méthode de Newton utilisée par le tir multiple et la procédure de continuation. Clairement, les 10 secondes nécessaires pour obtenir la solution complète ( $\lambda = 1$ ) ne permettent pas une utilisation embarquée pour cette application. Cependant, pour de nombreuses applications, notamment la navigation dans un environnement encombré, il n'est pas essentiel pour le succès de la mission que la trajectoire soit entièrement calculée à chaque fois qu'une mise à jour est effectuée. En supposant par exemple que la trajectoire doit être mise à jour sur un cycle de durée  $T_s = 1 \text{ s}$ , on observe sur la figure 4.9a qu'environ  $\lambda_{\min} = 40\%$  de la trajectoire peut être calculée. Cela garantit qu'une partie de la trajectoire admissible sera toujours disponible pour la commande du véhicule. De plus, dans le cas où il n'est pas nécessaire de mettre à jour la trajectoire à chaque cycle, par exemple si la mission n'a pas changé ou si l'environnement ne contient que des obstacles statiques, les cycles suivants peuvent être utilisés pour compléter les calculs afin que la trajectoire complète soit disponible au dixième cycle.

Cet algorithme a également été validé dans le cadre du projet de recherche **COPERNIC** sur des données réelles d'environnement.

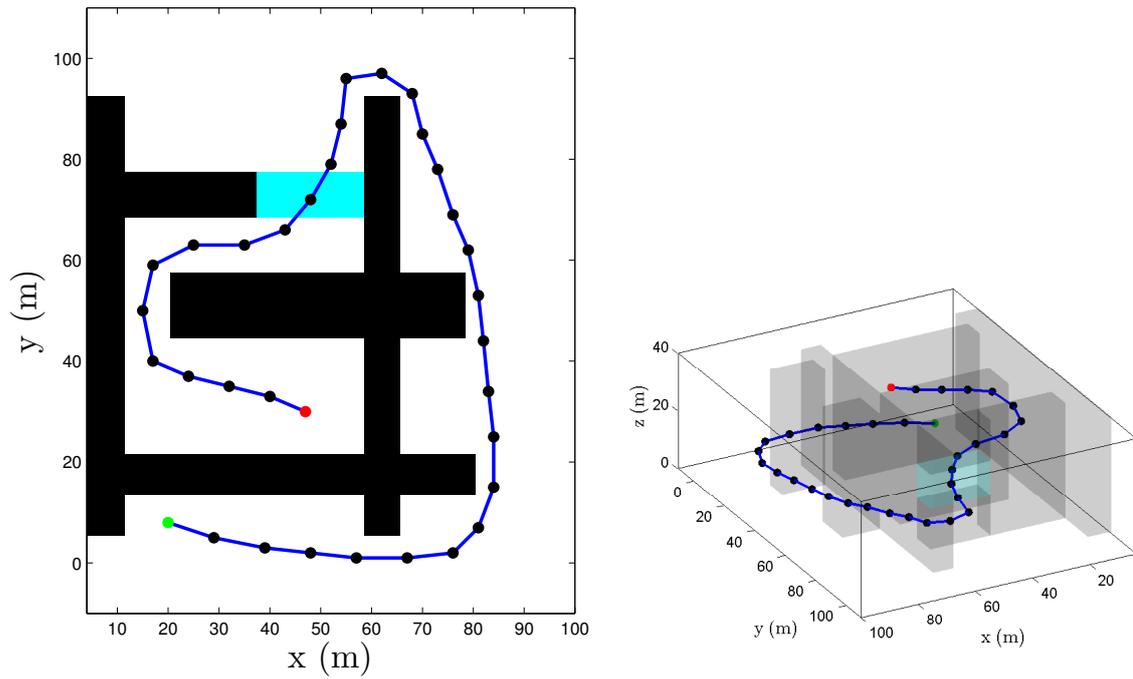
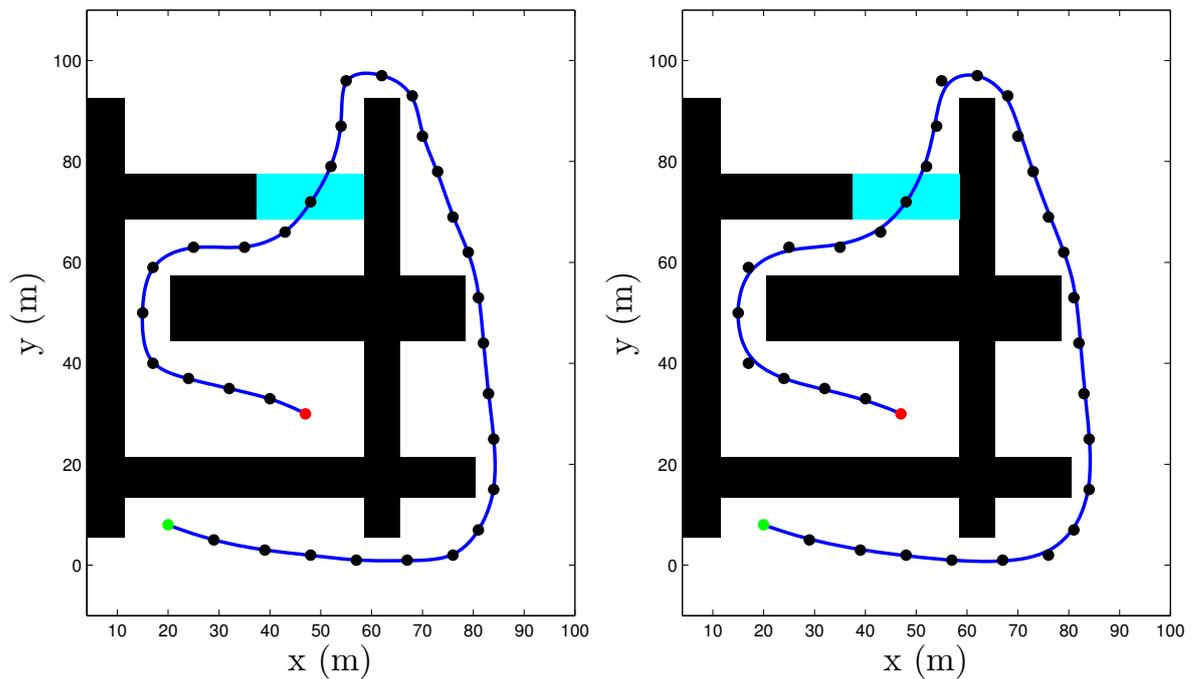


FIGURE 4.6 – Carte 3D d'environnement avec une réalisation du planificateur de chemin.

(a) Trajectoire complète pour  $\sigma = 2$ .(b) Trajectoire complète pour  $\sigma = 20$ .FIGURE 4.7 – Trajectoires obtenues pour  $\lambda = 1$  avec deux valeurs de  $\sigma$ .

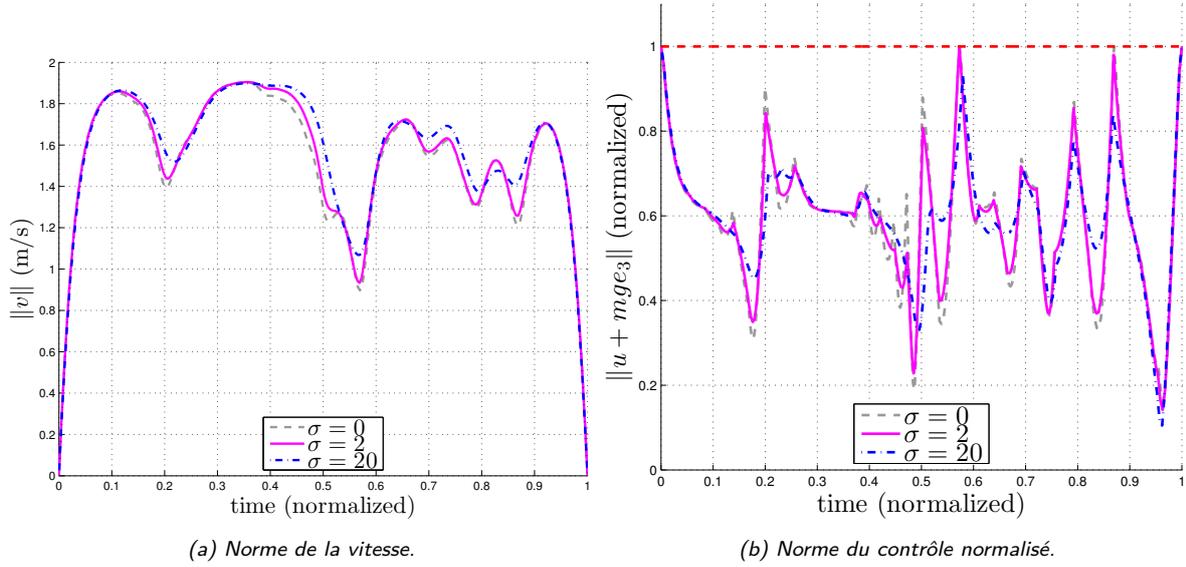
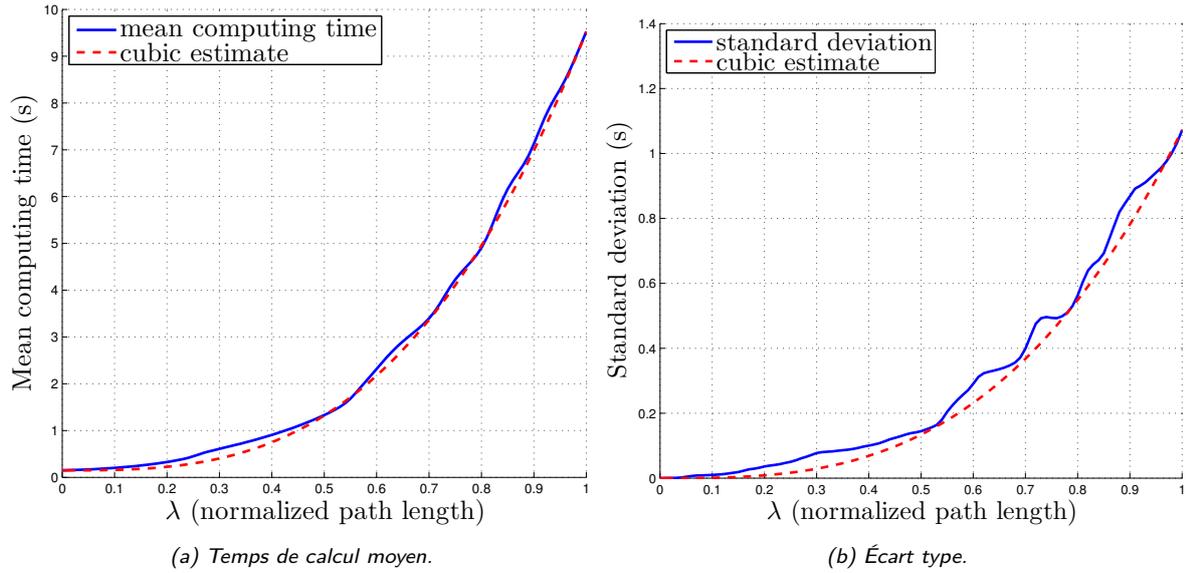
FIGURE 4.8 – Comparaison des normes de la vitesse et du contrôle pour  $\sigma \in \{0, 2, 20\}$ .

FIGURE 4.9 – Temps de calcul en fonction de la longueur du chemin.

## 4.2 Méthodes couplées d'estimation et de commande

Dans cette section, on présente les résultats obtenus dans la thèse de E. Flayac (2016–2019) en collaboration avec K. Dahia et F. Jean [Flayac 20, Flayac 19]. On s'intéresse au problème couplé d'estimation et de contrôle non-linéaires qui apparaît lorsque la qualité de l'estimation dépend directement de la politique de contrôle. L'application considérée est la navigation par corrélation de terrain d'un aéronef pour laquelle seules sont disponibles la mesure de la vitesse du véhicule, la mesure de hauteur par rapport au sol et une carte du

relief de la zone survolée. Il s'agit alors de déterminer un contrôle permettant à la fois l'atteinte d'un objectif et l'estimation de l'état complet du système (position et vitesse dans l'espace à trois dimensions).

Pour modéliser ce type de problème, on considère une formulation stochastique du système de contrôle en modélisant les perturbations par des variables aléatoires. En représentation discrète, on considère donc le système suivant.

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \\ y_k = h(x_k, v_k), \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $w_k$  et  $v_k$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Les variables aléatoires  $x_k$  et  $y_k$  représentent l'état et la mesure à l'instant  $k$ . On voit bien dans l'équation de mesure que si le véhicule se situe dans une zone de faible observabilité (par exemple, en présence de forts bruits de mesure ou en cas de non-observabilité d'une partie de l'état), alors aucune estimation précise de l'état n'est possible. Il s'agit donc de déterminer le contrôle permettant d'éviter ces zones, on dit alors qu'il a la propriété d'effet dual. Pour traiter le problème, on introduit classiquement un problème de contrôle optimal stochastique. De plus, on utilise généralement une formulation dans l'espace des mesures probabilistes en introduisant la distribution de filtrage [Bertsekas 96]. Le problème à résoudre peut alors s'écrire de la façon suivante.

$$\begin{cases} \min & C(\pi) = E \left[ g(\mu_N) + \sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(\mu_k, u_k) \mid \mu_0 \right], \\ \text{t.q.} & \mu_{k+1} = F(\mu_k, y_{k+1}, u_k), \\ & u_k = \pi_k(\mu_k), \forall k = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $\mu_k$  est la distribution conditionnelle de la variable  $x_k$  étant données les informations connues à l'instant  $k$  (l'ensemble des contrôles et des mesures entre l'instant initial et l'instant  $k$ ). Les éventuelles contraintes sur l'état sont ignorées ici pour simplifier la présentation. La politique de contrôle, notée  $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{N-1})$ , est donc ce qu'on cherche à optimiser sachant la distribution initiale  $\mu_0$  de l'état. Rappelons que dans le cas des systèmes linéaires avec un coût quadratique en l'état et le contrôle, la solution de (4.7) correspond à la commande LQG.

Pour résoudre le problème (4.7) en toute généralité, on utilise la méthode de programmation dynamique reposant sur l'équation de Bellman [Bellman 66]. Cela permet d'obtenir une politique de contrôle en boucle fermée qui possède naturellement la propriété d'effet dual, contrairement à une politique boucle ouverte qui ne tiendrait pas compte des observations le long de la trajectoire calculée. Cependant, avec cette méthode de résolution, l'effet dual n'est obtenu que de façon implicite. En effet, dans le problème d'optimisation (4.7), c'est uniquement la performance de la trajectoire (au sens de la minimisation du coût) qui est recherchée. Ainsi, bien que cela soit souvent admis, rien n'assure que la qualité de l'estimation sera satisfaisante pour autant. De plus, la résolution numérique de ce problème implicite nécessite de mettre en œuvre une méthode de propagation de la distribution  $\mu_k$ , ce qui résulte en un problème d'optimisation complexe et très coûteux [Subramanian 15, Hanssen 15]. Pour y remédier, une solution consiste à ne considérer que la prédiction  $\mu_{k|0}$  de la distribution dans le problème d'optimisation, sans tenir compte des observations  $y_k$  futures, de la même façon que dans le problème boucle ouverte. L'effet dual peut alors être imposé explicitement par contrainte (par exemple, une persistance d'excitation) ou par ajout de termes supplémentaires

dans le coût (par exemple, la covariance d'un filtre d'estimation). Cette approche explicite du contrôle dual permet d'assurer un compromis entre la performance de la trajectoire et la qualité de l'estimation.

Le contrôle dual explicite prend tout son sens lorsqu'il est indispensable de conserver une bonne estimation de l'état du système sur toute la trajectoire pour assurer une bonne performance. C'est typiquement le cas pour l'application de navigation par corrélation de terrain. L'approche que nous avons adoptée consiste donc à utiliser la prédiction de la distribution de l'état  $\mu_{k|0}$  pour évaluer la performance de la trajectoire et la matrice d'information de Fisher (FIM), dont l'inverse est directement liée à la borne de Cramér-Rao du système, pour évaluer la performance de l'estimation. La performance totale considérée est constituée de la somme de ces deux termes. Le coût considéré est donc de la forme

$$C(\pi) = E \left[ g(\mu_{N|0}) + g^{FIM}(\mu_{N|0}) + \sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(\mu_{k|0}, u_k) + f_k^{FIM}(\mu_{k|0}) \mid \mu_0 \right], \quad (4.8)$$

où les contrôles  $u_k$  ne dépendent également que des  $\mu_{k|0}$ . De plus,  $g^{FIM}(\cdot)$  et  $f_k^{FIM}(\cdot)$  sont des fonctions de la matrice d'information de Fisher. On remarque bien que le problème (4.7) avec le nouveau coût (4.8) ne fait plus intervenir les observations futures. Généralement, pour simplifier les calculs numériques, ce nouveau problème est vu comme un problème boucle ouverte. Le contrôle optimal obtenu est donc un contrôle boucle ouverte  $(u_0, \dots, u_{N-1})$ . De plus, ce problème d'optimisation peut être vu soit comme un problème de génération de trajectoire en temps fini ( $N$  est alors la longueur de la trajectoire), ou alors comme la brique d'optimisation d'un algorithme de commande prédictive à horizon glissant ( $N$  est alors l'horizon de prédiction). Dans le premier cas, le problème est purement boucle ouverte puisque la suite de commandes ne dépend que de la distribution initiale de l'état du système. Dans le deuxième cas, il y a un retour d'information puisque la suite de commandes optimales est recalculée à chaque itération de l'algorithme MPC à partir de la distribution courante de l'état et seul le premier contrôle  $u_0$  est utilisé. Dans notre étude, l'algorithme MPC a été utilisé avec l'approche par contrôle dual explicite. Pour estimer la distribution  $\mu_0$  à chaque itération de l'algorithme, un filtre particulaire a été utilisé. En effet, le problème de navigation par corrélation de terrain est fortement non-linéaire et connu pour mettre en échec les filtres non-linéaires habituels (EKF, UKF, etc.) [Dahia 05]. Au contraire, sous certaines hypothèses sur le système (4.6), le filtre particulaire présente l'avantage d'assurer la convergence de l'erreur quadratique moyenne vers la valeur optimale lorsque le nombre de particules utilisées tend vers l'infini [Flayac 19]. Ce dernier point est très important pour justifier pleinement l'utilisation de la solution au problème (4.8) puisqu'on sait que la borne de Cramér-Rao sera approchée d'assez près par le filtre particulaire.

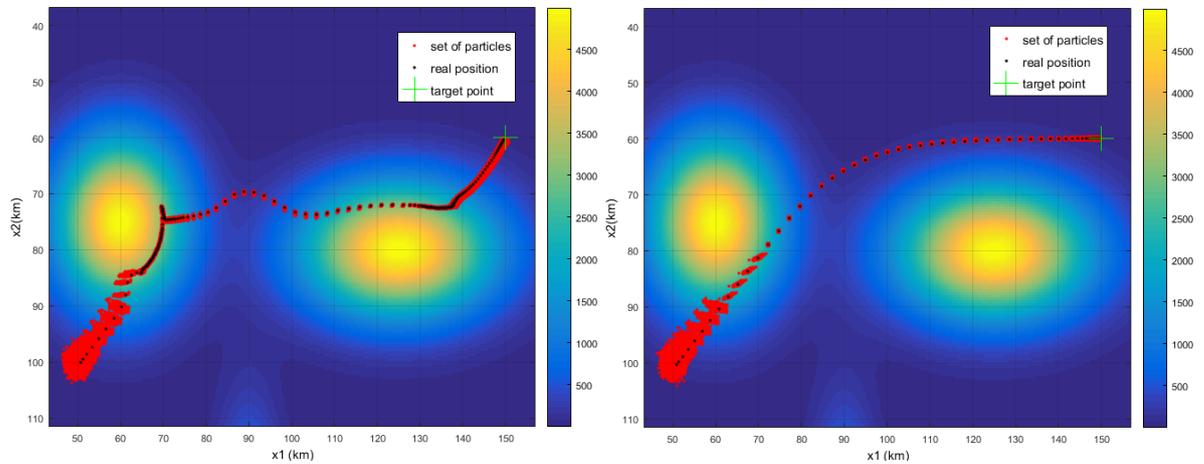
Deux techniques de commande prédictive appliquées à notre problème de navigation par corrélation de terrain ont été développées. Dans les deux cas, on profite de l'utilisation d'un filtre particulaire pour approximer l'espérance conditionnelle dans (4.8). On remplace donc l'espérance vraie par une somme pondérée sur un sous-ensemble des particules du filtre. Le terrain artificiel considéré ici est constitué de deux montagnes (voir figures 4.10 et 4.11).

Le premier algorithme utilisé considère le problème (4.8) sur un horizon de temps  $N$  avec un coût quadratique sur le contrôle, un coût final, et un coût sur l'information de Fisher [Flayac 17]. Afin d'assurer la convergence asymptotique vers la cible désirée, le coût

sur l'information de Fisher est diminué (strictement vers 0) à chaque nouvelle itération de l'algorithme. La figure 4.10 représente les trajectoires obtenues avec deux taux de décroissance différents pour l'information de Fisher. Sur la figure 4.10a, la décroissance est faible et le véhicule s'attarde longuement le long du relief avant d'atteindre la cible. Sur la figure 4.10b, la décroissance est plus forte et le véhicule se dirige plus rapidement vers la cible.

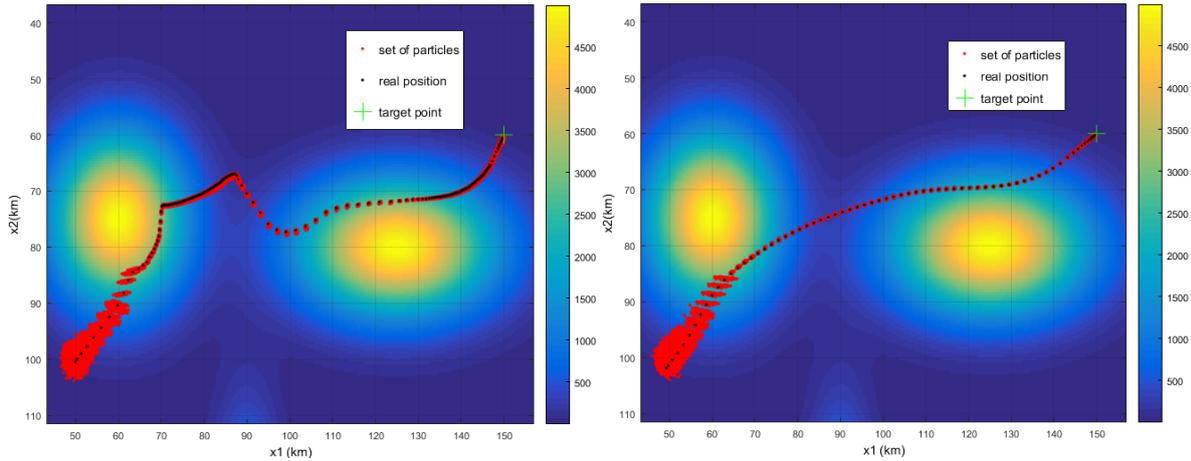
Pour le deuxième algorithme, le même problème est considéré [Flayac 18]. La convergence asymptotique vers la cible désirée est cette fois-ci assurée en ajoutant une contrainte de stabilisation, comme dans [Homer 17]. La figure 4.11 représente les trajectoires obtenues avec deux vitesses de stabilisation différentes. Sur la figure 4.11a, la vitesse est faible, et sur la figure 4.11b, la vitesse est rapide. On observe le même type de comportement qu'avec l'algorithme précédent.

Ces deux algorithmes ont également été validés sur des reliefs réels dans la thèse d'E. Flayac [Flayac 19].



(a) Trajectoire avec un poids sur l'information de Fisher faible- (b) Trajectoire avec un poids sur l'information de Fisher fortement décroissant.

FIGURE 4.10 – Trajectoire de navigation par corrélation de terrain avec le premier algorithme MPC.



(a) Trajectoire avec un poids faible sur la contrainte de stabilisation. (b) Trajectoire avec un poids fort sur la contrainte de stabilisation.

FIGURE 4.11 – Trajectoire de navigation par corrélation de terrain avec le deuxième algorithme MPC.

### 4.3 Perspectives et projets de recherche

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent qu'il est possible d'obtenir des algorithmes performants pour la planification de trajectoires et la commande dans des environnements fortement contraints et incertains. Ceux-ci utilisent et combinent différentes méthodes issues de la robotique, du contrôle optimal non linéaire et du contrôle optimal stochastique. Cependant, leur complexité de mise en œuvre ou le manque de robustesse des solutions obtenues laissent encore de la place à des améliorations et à des développements d'autres techniques plus adaptées.

Pour tenir compte d'incertitudes paramétriques et de bruits de diffusion dans la dynamique du système, une modélisation par des équations différentielles stochastiques est tout à fait appropriée. Le problème de contrôle optimal devient alors un problème de contrôle optimal stochastique dont la solution sera robuste aux aléas. Par exemple, une contrainte probabiliste sur l'état permet de garantir, avec un niveau de confiance donné, une non-collision avec un obstacle. Cependant, comme nous l'avons vu, la résolution d'un tel problème par programmation dynamique fait face au fléau de la dimension. Lorsqu'on s'intéresse uniquement au problème boucle ouverte de planification de trajectoire, une technique bien répandue consiste à approximer le problème dans un cadre gaussien par linéarisation statistique [Berret 20, Patil 12]. On se retrouve alors en présence d'un problème déterministe, dont l'état est augmenté de sa covariance, qui peut être résolu efficacement avec les méthodes numériques existantes [Bonalli 20]. Par exemple, cette approche est utilisée pour traiter des problèmes avec contraintes en probabilité [Lew 20]. Par ailleurs, il devient envisageable avec cette méthode de chercher un contrôle boucle ouverte permettant de minimiser la covariance finale de l'état. Pour cela, des conditions d'accessibilité de la covariance par le contrôle, qui ne sont jamais vérifiées dans le cas de systèmes linéaires par exemple, sont nécessaires. Des travaux sont en cours dans la thèse de C. Leparoux, encadrée avec F. Jean, pour déterminer des conditions suffisantes d'accessibilité et de contrôlabilité de la covariance, avec des premiers résultats déjà obtenus [Bonalli 22]. De plus, la linéarisation statistique n'ayant de sens que si

elle approxime bien le problème stochastique initial, il semble important d'étudier l'existence de bornes sur l'erreur d'approximation afin de mieux qualifier les résultats obtenus par cette approche.

Comme nous l'avons vu en section 4.2, pour les systèmes non linéaires, la qualité de l'estimation peut également dépendre de la trajectoire suivie par le véhicule. Notre méthode de commande duale explicite, combinant du filtrage particulière avec la commande prédictive, donne une première solution à ce problème complexe pour une utilisation en boucle fermée. Cependant, la méthode reste inadaptée pour de la planification en boucle ouverte puisque l'étape de prédiction ne tient pas compte des observations futures, le coût réel de la trajectoire est donc mal évalué. La manière la plus simple d'y remédier est d'augmenter l'état avec la covariance d'un observateur choisi au départ (filtre EKF, etc.). Cette technique a déjà été utilisée en commande prédictive [Hovd 04] et dans un planificateur à échantillonnage [Pepy 06, Pepy 09a]. Il serait intéressant de considérer cette dernière approche dans le cadre de la linéarisation statistique pour obtenir des trajectoires performantes et robustes de manière efficace.

L'analyse de robustesse constitue un autre aspect important lorsqu'on considère des incertitudes. Par exemple, dans le domaine des lanceurs spatiaux, il est essentiel de vérifier que la trajectoire reste dans un couloir assurant à la fois la réussite de la mission et la sauvegarde des biens et des personnes. Les méthodes d'analyse par intervalles sont adaptées à cette problématique et sont déjà considérées dans certaines méthodes de planification [Pepy 09b]. Notons qu'une thèse est en cours sur l'étude de robustesse en contrôle optimal à l'aide de méthodes ensemblistes (thèse de E. Bertin, que j'encadre avec A. Chapoutot et J. Alexandre dit Sandretto).

Certains systèmes rencontrés dans le domaine aérospatial utilisent des actionneurs n'autorisant que des contrôles tout ou rien (système de contrôle d'attitude par exemple). Les contrôles optimaux de type Bang-Bang, qui apparaissent systématiquement dès qu'un coût sur la consommation de carburant est considéré, sont tout à fait compatibles de ces actionneurs. Cependant, il est plus difficile de traiter les problèmes de robustesse dans ce cas. Une technique consiste à insérer des arcs Bang supplémentaires dans la séquence de contrôle de façon à ajouter de la robustesse par redondance [Olivier 19]. Cependant, cette technique complique la résolution du problème d'optimisation. Une autre technique pourrait consister à modifier la dynamique de façon à forcer la structure Bang-Bang dans le système. Par exemple, cela peut être réalisé en définissant un contrôle en fonction du signe d'une variable virtuelle, dans le même esprit que la commande par mode glissant. Le problème de robustesse se reporte alors sur cette nouvelle variable de contrôle.

On peut même imaginer de généraliser cette approche de modification de la dynamique par le contrôle dans les problèmes de planification robuste. Par exemple, pour la planification en présence d'obstacles, des méthodes réactives existent et sont connues pour garantir l'anti-collision, c'est ce que j'ai montré dans mes travaux de thèse [Hérissé 10a, Hérissé 12]. Une stratégie consiste alors à définir deux termes dans le contrôle, l'un s'occupe de gérer la non-collision avec les obstacles et l'autre est optimisé pour garantir la performance de la trajectoire. Notons que cela pourrait être appliqué à la navigation de flottes de véhicules, sujet sur lequel nous développons actuellement des lois de contrôle par flot optique [Maupoux 22].



---

# Bibliographie

---

- [Allgower 03] E. L. Allgower, K. Georg. – *Introduction to numerical continuation methods*. – SIAM, 2003.
- [Apkarian 95] P. Apkarian, J.-M. Biannic, P. Gahinet. – Self-scheduled h-infinity control of missile via linear matrix inequalities. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(3) :532–538, 1995.
- [Asher 71] R. B. Asher, H. R. Sebesta. – Optimal control of systems with state-dependent time delay. *International Journal of Control*, 14(2) :353–366, 1971.
- [Baiocco 16] P. Baiocco, C. Bonnal. – Technology demonstration for reusable launchers. *Acta Astronautica*, 120 :43–58, 2016.
- [Battin 82] R. H. Battin. – Space guidance evolution-a personal narrative. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 5(2) :97–110, 1982.
- [Battin 99] R. H. Battin. – *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. – Aiaa, 1999.
- [Bellman 66] R. Bellman. – Dynamic programming. *Science*, 153(3731) :34–37, 1966.
- [Bennett 70] F. V. Bennett. – Apollo lunar descent and ascent trajectories. *NASA technical memorandum, NASA TM X-58040*, 1970.
- [Berret 20] B. Berret, F. Jean. – Efficient computation of optimal open-loop controls for stochastic systems. *Automatica*, 115 :108874, 2020.
- [Bertin 21a] E. Bertin, E. Brendel, B. Hérisse, J. A. D. Sandretto, A. Chapoutot. – Prospects on solving an optimal control problem with bounded uncertainties on parameters using interval arithmetic. *Acta Cybernetica*, 2021.
- [Bertin 21b] E. Bertin, B. Hérisse, J. A. D. Sandretto, A. Chapoutot. – Spatio-temporal constrained zonotopes for validation of optimal control problems. – *2021 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, décembre 2021.
- [Bertsekas 96] D. Bertsekas, S. E. Shreve. – *Stochastic optimal control : the discrete-time case*. – Athena Scientific, vol. 5, 1996.
- [Betts 10] J. T. Betts. – *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*. – SIAM, 2010.
- [Bharadwaj 98] S. Bharadwaj, A. V. Rao, K. D. Mease. – Entry trajectory tracking law via feedback linearization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(5) :726–732, 1998.

- [Boccia 17] A. Boccia, R. B. Vinter. – The maximum principle for optimal control problems with time delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(5) :2905–2935, 2017.
- [Boissonnat 94] J.-D. Boissonnat, A. Cérézo, J. Leblond. – Shortest paths of bounded curvature in the plane. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 11(1) :5–20, 1994.
- [Bokanowsky 16] O. Bokanowsky, E. Bourgeois, A. Désilles, H. Zidani. – HJB approach for a multi-boost launcher trajectory optimization problem. *IFAC-PapersOnLine*, 49(17) :456–461, 2016. – 20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, ACA 2016.
- [Bonalli 17a] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Analytical initialization of a continuation-based indirect method for optimal control of endo-atmospheric launch vehicle systems. – vol. 50, pp. 482 – 487, 2017. – 20th IFAC World Congress.
- [Bonalli 17b] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Solving optimal control problems for delayed control-affine systems with quadratic cost by numerical continuation. – *2017 American Control Conference (ACC)*, pp. 649–654, mai 2017.
- [Bonalli 18] R. Bonalli. – *Optimal control of aerospace systems with control-state constraints and delays*. – PhD. Thesis, Sorbonne Université, UPMC University of Paris 6, Laboratoire Jacques-Louis, 2018.
- [Bonalli 19a] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Continuity of pontryagin extremals with respect to delays in nonlinear optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(2) :1440–1466, 2019.
- [Bonalli 19b] R. Bonalli, B. Hérisse, E. Trélat. – Optimal control of endo-atmospheric launch vehicle systems : geometric and computational issues. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1–1, 2019.
- [Bonalli 20] R. Bonalli, T. Lew, M. Pavone. – Sequential convex programming for non-linear stochastic optimal control. *arXiv preprint arXiv :2009.05182*, 2020.
- [Bonalli 22] R. Bonalli, C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – On the accessibility and controllability of statistical linearization for stochastic control : Algebraic rank conditions and their genericity. *arXiv preprint arXiv :2207.10944*, 2022.
- [Bonnans 08] F. Bonnans, P. Martinon, E. Trélat. – Singular arcs in the generalized Goddard’s problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 139(2) :439–461, 2008.
- [Bonnard 03] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, E. Trélat. – Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 9(2) :155–199, 2003.
- [Bonnard 05] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat. – Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations with multiple-shooting method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(01) :109–140, 2005.
- [Bonnard 06] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat. – *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. – Springer Science & Business Media, vol. 51, 2006.

- [Bourgeois 15] E. Bourgeois, O. Bokanowski, H. Zidani, A. Désilles. – Optimization of the launcher ascent trajectory leading to the global optimum without any initialization : the breakthrough of the HJB approach. – *6th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS)*, vol. 29, 2015.
- [Brendel 19] E. Brendel, B. Hérisse, E. Bourgeois. – Optimal guidance for toss back concepts of Reusable Launch Vehicles. – *EUCASS 2019*, Madrid, Spain, juillet 2019.
- [Britting 10] K. R. Britting. – *Inertial navigation systems analysis*. – 2010.
- [Caillau 12] J.-B. Caillau, O. Cots, J. Gergaud. – Differential continuation for regular optimal control problems. *Optimization Methods and Software*, 27(2) :177–196, 2012.
- [Caillau 18] J.-B. Caillau, M. Cerf, A. Sassi, E. Trélat, H. Zidani. – Solving chance constrained optimal control problems in aerospace via kernel density estimation. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(5) :1833–1858, 2018.
- [Carrou 95] J.-P. Carrou. – *Space flight dynamics*. – 1995.
- [Chai 18] R. Chai, A. Savvaris, A. Tsourdos, S. Chai, Y. Xia. – Optimal tracking guidance for aeroassisted spacecraft reconnaissance mission based on receding horizon control. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 54(4) :1575–1588, 2018.
- [Clement 05] B. Clement, G. Duc, S. Mauffrey. – Aerospace launch vehicle control : a gain scheduling approach. *Control Engineering Practice*, 13(3) :333–347, 2005.
- [Corke 17] P. Corke. – *Robotics, vision and control : fundamental algorithms In MATLAB®*. – Springer, second, completely revised édition, vol. 118, 2017. <http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox>.
- [Dadebo 92] S. Dadebo, R. Luus. – Optimal control of time-delay systems by dynamic programming. *Optimal Control Applications and Methods*, 13(1) :29–41, 1992.
- [Dahia 05] K. Dahia. – *Nouvelles méthodes en filtrage particulière-Application au recalage de navigation inertielle par mesures altimétriques*. – PhD. Thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2005.
- [Denham 64] W. F. Denham, A. E. Bryson Jr. – Optimal programming problems with inequality constraints. ii-solution by steepest-ascent. *AIAA Journal*, 2(1) :25–34, 1964.
- [Devaud 00] E. Devaud, H. Siguerdidjane, S. Font. – Some control strategies for a high-angle-of-attack missile autopilot. *Control Engineering Practice*, 8(8) :885–892, 2000.
- [Dhananjay 14] N. Dhananjay, D. Ghose. – Accurate time-to-go estimation for proportional navigation guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 37(4) :1378–1383, 2014.
- [Dmitruk 11] A. V. Dmitruk, A. M. Kaganovich. – Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints. *Computational Mathematics and Modeling*, 22(2) :180–215, 2011.
- [Dubins 57] L. E. Dubins. – On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of mathematics*, 79(3) :497–516, 1957.

- [Edorh 22a] P. Eдорh, E. Brendel, B. Hérisse, E. Bourgeois. – Optimal guidance for glide-back concepts of reusable launch vehicles. *preprint ONERA*, 2022.
- [Edorh 22b] P. Eдорh, B. Hérisse, E. Bourgeois. – Glide back recovery of a winged reusable launch vehicle with wind estimate. – *EUCASS 2022*, Lille, France, juin 2022.
- [Finley 66] P. J. Finley. – The flow of a jet from a body opposing a supersonic free stream. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(2) :337–368, 1966.
- [Flayac 17] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérisse, F. Jean. – Nonlinear fisher particle output feedback control and its application to terrain aided navigation. – *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1566–1571, décembre 2017.
- [Flayac 18] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérisse, F. Jean. – Dual particle output feedback control based on Lyapunov drifts for nonlinear systems. – *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 250–255, décembre 2018.
- [Flayac 19] E. Flayac. – *Coupled methods of nonlinear estimation and control applicable to terrain-aided navigation*. – PhD. Thesis, Université Paris-Saclay, 2019.
- [Flayac 20] E. Flayac, K. Dahia, B. Hérisse, F. Jean. – A unifying vision of particle filtering and explicit dual control. *preprint HAL*, 2020.
- [GanetSchoeller 17] M. Ganet-Schoeller, J. Desmariaux, C. Combier. – Structured control for future european launchers. *Aerospace Lab*, (13), 2017.
- [Göllmann 14] L. Göllmann, H. Maurer. – Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 10(2) :413, 2014.
- [Graichen 08] K. Graichen, N. Petit. – A continuation approach to state and adjoint calculation in optimal control applied to the reentry problem. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :14307–14312, 2008.
- [Hanssen 15] K. G. Hanssen, B. Foss. – Scenario based implicit dual model predictive control. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23) :416–421, 2015.
- [Hardtla 78] J. Hardtla. – Gamma guidance for the inertial upper stage/ius. – *Guidance and Control Conference*, p. 1292, 1978.
- [Harpold 79] J. C. Harpold, C. A. Graves. – Shuttle entry guidance. *Journal of the Astronautical Sciences*, 27 :239–268, 1979.
- [Hauser 16] K. Hauser, Y. Zhou. – Asymptotically optimal planning by feasible kinodynamic planning in a state–cost space. *IEEE Transactions on Robotics*, 32(6) :1431–1443, 2016.
- [Hérisse 08] B. Hérisse, F.-X. Russotto, T. Hamel, R. Mahony. – Hovering flight and vertical landing control of a vtol unmanned aerial vehicle using optical flow. – *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 801–806, septembre 2008.
- [Hérisse 09] B. Hérisse, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A nonlinear terrain-following controller for a vtol unmanned aerial vehicle using translational optical flow. – *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3251–3257, mai 2009.

- [Hérissé 10a] B. Hérissé. – *Asservissement et Navigation Autonome d'un drone en environnement incertain par flot optique*. – PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, novembre 2010.
- [Hérissé 10b] B. Hérissé, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – The landing problem of a vtol unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. – *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1600–1605, octobre 2010.
- [Hérissé 10c] B. Hérissé, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A terrain-following control approach for a vtol unmanned aerial vehicle using average optical flow. *Autonomous Robots*, 29(3) :381–399, novembre 2010.
- [Hérissé 10d] B. Hérissé, S. Oustrieres, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – A general optical flow based terrain-following strategy for a vtol uav using multiple views. – *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3341–3348, mai 2010.
- [Hérissé 12] B. Hérissé, T. Hamel, R. Mahony, F.-X. Russotto. – Landing a vtol unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1) :77–89, février 2012.
- [Hérissé 13] B. Hérissé, R. Pepy. – Shortest paths for the Dubins' vehicle in heterogeneous environments. – *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4504–4509, décembre 2013.
- [Hérissé 16a] B. Hérissé, R. Bonalli. – Software – SOCP (Shooting for Optimal Control Problems), 2016. Available at <https://github.com/bherisse/socp>.
- [Hérissé 16b] B. Hérissé, G. Hervieux, K. Dahia, J.-M. Allard, J.-C. Sarrazin. – Component-Based Simulation for Real-Time Experiments of Advanced Aerospace Systems. *AerospaceLab Journal*, (12) :pages 1–9, décembre 2016.
- [Hermant 10] A. Hermant. – Homotopy algorithm for optimal control problems with a second-order state constraint. *Applied Mathematics and Optimization*, 61(1) :85–127, 2010.
- [Hermant 11] A. Hermant. – Optimal control of the atmospheric reentry of a space shuttle by an homotopy method. *Optimal Control Applications and Methods*, 32(6) :627–646, 2011.
- [Homer 17] T. Homer, P. Mhaskar. – Output-feedback lyapunov-based predictive control of stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(2) :571–577, 2017.
- [Hota 10] S. Hota, D. Ghose. – Optimal path planning for an aerial vehicle in 3d space. – *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4902–4907. IEEE, 2010.
- [Hovd 04] M. Hovd, R. R. Bitmead. – Interaction between control and state estimation in nonlinear mpc. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(9) :119–124, 2004.
- [Hua 09] M. D. Hua. – *Contributions to the automatic control of aerial vehicles*. – Theses, Université Nice Sophia Antipolis, décembre 2009.

- [Hull 91] D. G. Hull, J. J. Radke, R. E. Mack. – Time-to-go prediction for homing missiles based on minimum-time intercepts. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(5) :865–871, 1991.
- [Karaman 11] S. Karaman, E. Frazzoli. – Sampling-based algorithms for optimal motion planning. *The international journal of robotics research*, 30(7) :846–894, 2011.
- [Kavraki 96] L. E. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe, M. H. Overmars. – Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces. *IEEE transactions on Robotics and Automation*, 12(4) :566–580, 1996.
- [Khalil 02] H. K. Khalil. – *Nonlinear systems*. – Prentice hall, 2002.
- [Khalil 17] H. K. Khalil. – *High-gain observers in nonlinear feedback control*. – SIAM, 2017.
- [Kleinbort 20] M. Kleinbort, E. Granados, K. Solovey, R. Bonalli, K. E. Bekris, D. Halperin. – Refined analysis of asymptotically-optimal kinodynamic planning in the state-cost space. – *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 6344–6350. IEEE, 2020.
- [Klumpp 74] A. R. Klumpp. – Apollo lunar descent guidance. *Automatica*, 10(2) :133–146, 1974.
- [Kokotović 99] P. Kokotović, H. K. Khalil, J. O’reilly. – *Singular perturbation methods in control : analysis and design*. – SIAM, 1999.
- [Kupka 90] I. A. K. Kupka. – The ubiquity of fuller’s phenomenon. *Nonlinear controllability and optimal control*, pp. 313–350. – H. J. Sussmann, Ed. New York : Marcel Dekker édition, 1990.
- [LaurentVarin 05] J. Laurent-Varin. – *Calcul de trajectoires optimales de lanceurs spatiaux réutilisables par une méthode de point intérieur*. – PhD. Thesis, Ecole doctorale de polytechnique, 2005.
- [LaValle 98] S. M. LaValle. – *Rapidly-exploring random trees : A new tool for path planning*. – Rapport de recherche, Computer Science Dept., Iowa State University, 1998.
- [LaValle 01] S. M. LaValle, J. J. Kuffner. – Rapidly-exploring random trees : Progress and prospects. *Algorithmic and computational robotics : new directions*, éd. par D. Rus B. R. Donald, K. M. Lynch, pp. 293–308. – A. K. Peters, Wellesley, MA, 2001.
- [LaValle 06] S. M. LaValle. – *Planning algorithms*. – Cambridge university press, 2006.
- [Lee 13] Y.-I. Lee, S.-H. Kim, J.-I. Lee, M.-J. Tahk. – Analytic solutions of generalized impact-angle-control guidance law for first-order lag system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36(1) :96–112, 2013.
- [Leparoux 22a] C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – Optimal planetary landing with pointing and glide-slope constraints. – *2022 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, décembre 2022.
- [Leparoux 22b] C. Leparoux, B. Hérisse, F. Jean. – Structure of optimal control for planetary landing with control and state constraints. *ESAIM : COCV*, 28 :67, 2022.
- [Lew 20] T. Lew, R. Bonalli, M. Pavone. – Chance-constrained sequential convex programming for robust trajectory optimization. – *2020 European Control Conference (ECC)*, pp. 1871–1878. IEEE, 2020.

- [Lu 19] P. Lu. – Augmented apollo powered descent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42(3) :447–457, 2019.
- [Lu 21] P. Lu. – What is guidance? *Journal of Guidance, control, and Dynamics*, 44(7), 2021.
- [Malyuta 21a] D. Malyuta, T. P. Reynolds, M. Szmuk, T. Lew, R. Bonalli, M. Pavone, B. Acikmese. – Convex optimization for trajectory generation. *arXiv preprint arXiv :2106.09125*, 2021.
- [Malyuta 21b] D. Malyuta, Y. Yu, P. Elango, B. Açıkmeşe. – Advances in trajectory optimization for space vehicle control. *Annual Reviews in Control*, 2021.
- [Marmet 13] F.-X. Marmet, S. Bertrand, B. Hérisse, M. Carton. – A low-cost integrated system for indoor and outdoor navigation of miniature uavs. – *EuroGNC 2013, 2nd CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation & Control*, avril 2013.
- [Mattingley 12] J. Mattingley, S. Boyd. – Cvxgen : A code generator for embedded convex optimization. *Optimization and Engineering*, 13(1) :1–27, 2012.
- [Maupoux 22] A. Maupoux, G. Dufour, B. Hérisse. – Collisionless drone swarm dynamics through optical flow control. *preprint ONERA*, 2022.
- [Maurer 79] H. Maurer, J. Zowe. – First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. *Mathematical programming*, 16(1) :98–110, 1979.
- [Mayne 14] D. Q. Mayne. – Model predictive control : Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12) :2967–2986, 2014.
- [Merlinge 20] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérisse, J.-M. Allard. – Patent number wo/2020/233906 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2020.
- [Merlinge 21a] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérisse, J.-M. Allard. – Patent number wo/2021/115993 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2021.
- [Merlinge 21b] N. Merlinge, C. Audebert, K. Dahia, B. Hérisse, J.-M. Allard. – Patent number wo/2021/115998 – Filtrage particulaire et centrale de navigation à corrélation de mesure, 2021.
- [NavarroTapia 22] D. Navarro-Tapia, A. Marcos, S. Bennani. – The VEGA launcher atmospheric control problem : A case for linear parameter-varying synthesis. *Journal of the Franklin Institute*, 359(2) :899–927, 2022.
- [Oh 76] S. H. Oh, R. Luus. – Optimal feedback control of time-delay systems. *AIChE Journal*, 22(1) :140–147, 1976.
- [Olivier 18] A. Olivier. – *Contrôle optimal et robuste de l’attitude d’un lanceur. Aspects théoriques et numériques*. – PhD. Thesis, Sorbonne université, 2018.
- [Olivier 19] A. Olivier, T. Haberkorn, E. Trélat, E. Bourgeois, D.-A. Handschuh. – Redundancy implies robustness for bang-bang strategies. *Optimal Control Applications and Methods*, 40(1) :85–104, 2019.
- [Patil 12] S. Patil, J. Van De Berg, R. Alterovitz. – Estimating probability of collision for safe motion planning under gaussian motion and sensing uncertainty. – 2012

- IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3238–3244. IEEE, 2012.
- [Peng 02] J. Peng, C. Roos, T. Terlaky. – Primal-dual interior-point methods for second-order conic optimization based on self-regular proximities. *SIAM Journal on Optimization*, 13(1) :179–203, 2002.
- [Pepy 06] R. Pepy, A. Lambert. – Safe path planning in an uncertain-configuration space using rrt. – *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 5376–5381. IEEE, 2006.
- [Pepy 09a] R. Pepy. – *Vers une planification robuste et sûre pour les systèmes autonomes*. – PhD. Thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2009.
- [Pepy 09b] R. Pepy, M. Kieffer, E. Walter. – Reliable robust path planning. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(3) :413–424, 2009.
- [Pepy 14] R. Pepy, B. Hérisse. – An indirect method for optimal guidance of a glider. – vol. 47, pp. 5097 – 5102, 2014. – 19th IFAC World Congress.
- [Pharpatara 13a] P. Pharpatara, B. Hérisse, R. Pepy, Y. Bestaoui. – Sampling-based path planning : a new tool for missile guidance. – vol. 46, pp. 131 – 136, 2013. – 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace.
- [Pharpatara 13b] P. Pharpatara, R. Pepy, B. Hérisse, Y. Bestaoui. – Missile trajectory shaping using sampling-based path planning. – *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2533–2538, novembre 2013.
- [Pharpatara 15a] P. Pharpatara. – *Trajectory planning for aerial vehicles with constraints*. – PhD. Thesis, Université Paris-Saclay ; Université d’Evry-Val-d’Essonne, 2015.
- [Pharpatara 15b] P. Pharpatara, B. Hérisse, Y. Bestaoui. – 3D-shortest paths for a hypersonic glider in a heterogeneous environment. – vol. 48, pp. 186 – 191, 2015. – 1st IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles ACNAAV’15.
- [Pharpatara 15c] P. Pharpatara, B. Hérisse, R. Pepy, Y. Bestaoui. – Shortest path for aerial vehicles in heterogeneous environment using RRT\*. – *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 6388–6393, mai 2015.
- [Pharpatara 17] P. Pharpatara, B. Hérisse, Y. Bestaoui. – 3-D trajectory planning of aerial vehicles using RRT\*. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(3) :1116–1123, mai 2017.
- [Phung 17] D.-K. Phung, B. Hérisse, J. Marzat, S. Bertrand. – Model predictive control for autonomous navigation using embedded graphics processing unit. – vol. 50, pp. 11883 – 11888, 2017. – 20th IFAC World Congress.
- [Pontryagin 62] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. – *The mathematical theory of optimal processes*. – Interscience, 1962.
- [Pucci 15] D. Pucci, T. Hamel, P. Morin, C. Samson. – Nonlinear feedback control of axisymmetric aerial vehicles. *Automatica*, 53 :72–78, 2015.
- [Savkin 03] A. V. Savkin, P. N. Pathirana, F. A. Faruqi. – Problem of precision missile guidance : LQR and  $H^\infty$  control frameworks. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(3) :901–910, 2003.

- [Scharf 17] D. P. Scharf, B. Açıkmeşe, D. Dueri, J. Benito, J. Casoliva. – Implementation and experimental demonstration of onboard powered-descent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 40(2) :213–229, 2017.
- [Sepulchre 12] R. Sepulchre, M. Jankovic, P. V. Kokotovic. – *Constructive nonlinear control*. – Springer Science & Business Media, 2012.
- [Shaferman 08] V. Shaferman, T. Shima. – Linear quadratic guidance laws for imposing a terminal intercept angle. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(5) :1400–1412, 2008.
- [Stoer 13] J. Stoer, R. Bulirsch. – *Introduction to numerical analysis*. – Springer Science & Business Media, vol. 12, 2013.
- [Subramanian 15] S. Subramanian, S. Lucia, S. Engell. – Economic multi-stage output feedback nmpc using the unscented kalman filter. *IFAC-PapersOnLine*, 48(8) :38–43, 2015.
- [Şucan 12] I. A. Şucan, M. Moll, L. E. Kavraki. – The Open Motion Planning Library. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(4) :72–82, December 2012. – <http://ompl.kavrakilab.org>.
- [Sussmann 95] H. Sussmann. – Shortest 3-dimensional paths with a prescribed curvature bound. – *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3306–3312. IEEE, 1995.
- [Sutton 16] G. P. Sutton, O. Biblarz. – *Rocket propulsion elements*. – John Wiley & Sons, 2016.
- [Tahk 02] M.-J. Tahk, C.-K. Ryoo, H. Cho. – Recursive time-to-go estimation for homing guidance missiles. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, 38(1) :13–24, 2002.
- [Tewari 07] A. Tewari. – *Atmospheric and space flight dynamics*. – Springer, 2007.
- [Trélat 12] E. Trélat. – Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(3) :713–758, 2012.
- [Vinter 10] R. B. Vinter. – *Optimal control*. – Springer, 2010.
- [Wang 21] P. Wang, Y. Guo, G. Ma, B. Wie. – Two-phase zero-effort-miss/zero-effort-velocity guidance for mars landing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 44(1) :75–87, 2021.
- [Webb 16] K. D. Webb, P. Lu. – Entry guidance by onboard trajectory planning and tracking. – *AIAA atmospheric flight mechanics conference*, p. 0279, 2016.
- [Zanelli 20] A. Zanelli, A. Domahidi, J. Jerez, M. Morari. – Forces nlp : an efficient implementation of interior-point methods for multistage nonlinear nonconvex programs. *International Journal of Control*, 93(1) :13–29, 2020.
- [Zarchan 12] P. Zarchan. – *Tactical and strategic missile guidance*. – American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2012.
- [Zhu 16a] J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf. – Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(1) :391–422, 2016.

- [Zhu 16b] J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf. – Planar tilting maneuver of a spacecraft : singular arcs in the minimum time problem and chattering. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 16(4) :1347–1388, 2016.
- [Zhu 17] J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf. – Geometric optimal control and applications to aerospace. *Pacific Journal of Mathematics for Industry*, 9(1) :1–41, 2017.



## **Contrôle optimal et planification de trajectoire pour le guidage des systèmes aérospatiaux**

Dans la boucle de Navigation-Guidage-Pilotage des systèmes aéronautiques et spatiaux, le guidage porte spécifiquement sur la commande du centre de masse du véhicule. En raison de la complexité des problèmes rencontrés, une approche classique consiste tout d'abord à calculer une trajectoire de référence par méthode d'optimisation. Un algorithme d'asservissement est ensuite appliqué pour suivre cette trajectoire. Bien que simple à mettre en œuvre et peu coûteuse en calculs, cette technique n'autorise aucun imprévu (e.g. un changement d'objectif ou une déviation de trajectoire due à la présence de fortes incertitudes). Une première partie des travaux présentés dans cette HDR porte sur l'étude de nouveaux algorithmes de guidage permettant de conserver optimalité et robustesse dans de tels cas. Pour cela, les méthodes du contrôle optimal sont utilisées afin d'analyser la structure de la commande et les méthodes numériques de tir et de continuation sont combinées pour obtenir un algorithme embarqué. Ces développements ont été appliqués à des problèmes d'interception de cible et à des problèmes de retour de lanceurs réutilisables. Une deuxième partie des travaux se concentre sur des problèmes de planification de trajectoire et de commande en environnement fortement contraint pour lesquels les techniques de contrôle optimal utilisées seules sont impossibles à mettre en œuvre (e.g. en présence d'obstacles ou de forts aléas). Des méthodes probabilistes sont utilisées avec des méthodes de contrôle optimal pour la planification de trajectoire d'un drone. Dans le problème de navigation par corrélation de terrain, une méthode de commande prédictive robuste basée sur un formalisme stochastique a été développée pour pallier le problème de couplage entre l'estimation et la commande.

**Mots-clés :** Guidage des systèmes aérospatiaux, contrôle optimal, planification de trajectoire

### **Optimal control and trajectory planning for guidance of aerospace systems**

In the Guidance-Navigation-Control loop of aeronautical and space systems, guidance specifically concerns the control of the vehicle's center of mass. Due to the complexity of the problems encountered, a classical approach consists first of calculating a reference trajectory by optimization method. A servo-control algorithm is then applied to follow this trajectory. Although simple to implement and computationally inexpensive, this technique does not allow for any unforeseen events (e.g. a change of objective or a deviation of trajectory due to the presence of strong uncertainties). A first part of the work presented in this HDR (accreditation to supervise research) deals with the study of new guidance algorithms ensuring both optimality and robustness in such cases. For this, optimal control methods are used to analyze the structure of the control and numerical shooting methods and continuation techniques are combined to obtain an embedded algorithm. These developments have been applied to target interception problems and to reusable launch vehicle guidance problems. A second part of the work focuses on trajectory planning and control problems in highly constrained environments for which the optimal control techniques used alone are impossible to implement (e.g. in the presence of obstacles or strong hazards). Probabilistic methods are used with optimal control methods for UAV trajectory planning. For terrain-based navigation problem, a robust predictive control method based on a stochastic formalism has been developed to overcome the nonlinear coupling between estimation and control.

**Keywords :** Guidance of aerospace systems, optimal control, trajectory planning