



Caractérisation fine de l'influence de la viscoélasticité sur un processus d'atomisation

Louise Cottier

► To cite this version:

Louise Cottier. Caractérisation fine de l'influence de la viscoélasticité sur un processus d'atomisation. Polymères. Normandie Université, 2022. Français. ⟨NNT : 2022NORMIR40⟩. ⟨tel-04103415⟩

HAL Id: tel-04103415

<https://theses.hal.science/tel-04103415v1>

Submitted on 23 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Energétique

Préparée à l'INSA de Rouen Normandie

CARACTÉRISATION FINE DE L'INFLUENCE DE LA VISCOÉLASTICITÉ SUR UN PROCESSUS D'ATOMISATION

présentée et soutenue par

Louise COTTIER

Thèse soutenue publiquement le 15 Décembre 2022
devant le jury composé de

M. RABAUD	Professeur à l'Université Paris Saclay, FAST	Rapporteur
N. LATRACHE	Maître de Conférence à l'Université de Bretagne Occidentale, IRLD	Rapporteur
I. MUTABAZI	Professeur à l'Université Le Havre Normandie, LOMC	Examinateur
S. LEROUGE	Professeure à l'Université Paris Cité, LMSC	Examinatrice
N. MACHICOANE	Chargé de Recherche à l'Université Grenoble Alpes, LEGI - CNRS	Examinateur
M.-C. RENOULT	Maître de Conférence à l'INSA Rouen Normandie, CORIA	Encadrante de thèse
C. DUMOUCHEL	Directeur de recherche CNRS, CORIA - CNRS	Directeur de thèse
G. BRENN	Professeur à l'Université de Graz, ISW	Membre Invité

■ Thèse dirigée par Christophe DUMOUCHEL et Marie-Charlotte RENOULT,
laboratoire CORIA (UMR 6614 CNRS)

Résumé :

L'influence de la viscoélasticité sur le processus d'atomisation de jets cylindriques libres basse-vitesse est étudiée. Une analyse temporelle de stabilité faiblement non-linéaire est effectuée. Le cas viscoélastique se distingue du cas Newtonien par la nature dynamique et non-linéaire de l'équation rhéologique constitutive. Ceci implique l'existence d'une solution supplémentaire de la relation de dispersion et la nécessité d'une condition initiale supplémentaire à la fermeture du problème aux valeurs initiales. Les résultats de cette analyse montrent que l'ajout de viscoélasticité tend à réduire la stabilité des jets et la production de gouttes secondaires.

Une étude expérimentale est également effectuée. Les paramètres étudiés sont la vitesse d'injection et de la masse molaire des polymères contenus dans la solution. Un large nombre d'images hautement résolues en espace et non-corrélées dans le temps est pris en des positions successives du jet. A partir de l'analyse statistique de ces images et en utilisant l'outil de description multi-échelles, l'évolution de la déformation des jets est étudiée. Les résultats mettent en évidence l'existence d'un mécanisme de dégradation des polymères par le processus d'injection et durant le régime élasto-capillaire. Cette dégradation augmente avec la vitesse d'injection et avec la masse molaire des polymères. L'ajout de viscoélasticité a également pour conséquence d'augmenter la longueur de rupture des jets, d'augmenter le diamètre des gouttes principales, et de diminuer la proportion de gouttes satellites.

Mots-clés : jet libre, instabilité capillaire, viscoélasticité, dégradation des polymères, description multi-échelles

Abstract :

The influence of viscoelasticity upon the atomization process of free cylindrical low-velocity jets is studied. A weakly nonlinear temporal stability analysis is carried out. The viscoelastic case distinguishes from the Newtonian case by the dynamical and nonlinear nature of the rheological constitutive equation. This implies the existence of a supplementary solution to the dispersion relation and the need of a supplementary initial condition to close the initial-value problem. The results of this analysis show that viscoelasticity tends to reduce jets' stability and the production of secondary drops.

An experimental study is also carried out. The studied parameters are the injection velocity and the molar mass of the polymers contained in the solution. For each jet, a large amount of high spatial resolution and time uncorrelated images is taken at successive positions downstream the jet. The evolution of the jet's deformation is studied through statistical analysis of the images and using the multi-scale description tool. The results demonstrate the existence of a polymer degradation mechanism occurring during the injection process and during the elasto-capillary regime. This degradation increases with the injection velocity and the polymers' molar mass. Addition of viscoelasticity also causes an increase in the jets' break up length, an increase in the main drops' diameter and a decrease in the satellite drops' proportion.

Keywords : free jet, capillary instability, viscoelasticity, polymer degradation, multi-scale description

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes encadrants Christophe et Marie-Charlotte. Merci de m'avoir fait confiance pour réaliser ce travail de thèse. Merci de m'avoir accompagnée tout au long de ce projet, même lorsque j'ai rencontré des difficultés. J'ai énormément appris et évolué à vos côtés. Merci aussi à Christophe Tirel pour m'avoir guidée au commencement de mes travaux. Je vous souhaite à tous trois le meilleur pour la suite. Je remercie les membres du jury d'avoir pris le temps et l'énergie d'évaluer ce travail de thèse et de m'avoir aidée, au travers de relectures, à délivrer une version convenable de ce manuscrit. Je remercie le Professeur Günter Brenn pour avoir permis une collaboration avant et pendant la thèse, et pour m'avoir apporté son soutien durant la rédaction de mon manuscrit.

Je remercie plus largement l'ensemble des personnes travaillant au laboratoire CORIA. C'était un vrai plaisir de faire votre connaissance, d'échanger, de prendre plein de cafés ensemble.

Avec beaucoup d'amour je remercie ma famille, pour toujours être là, dans les bons moments comme dans les moins bons. Je vous embrasse, Papa et Maman, Sophie, Camille, Kader, Suzanne, Ismael et Chris. Merci aussi à Mamie, Claire et Dédé pour vos encouragements.

Je remercie très très chaleureusement Keb, Yann et Gab, a.k.a le gang de la KYG. L'amitié qu'on a formée m'est très précieuse. Merci pour tous ces moments extras passés ensemble. J'en redemande (ccqdt). Merci aux autres copains du labo, j'ai nommé Benz, Froggy, Serge, Téo, Camille, Robin, Clément, Antoine, Ghis, Pier, Turtle, Léa, Julien, Andréa, Dilip, Cleante, Nicolò, Marie-Eve, Sylvains (les deux). Je vous souhaite à tous le meilleur, et plein de courage pour ceux qui ont encore le nez dans la thèse :) Merci à Alex et Zouzou pour le ravitaillement. Merci mais non merci au Rendez-Vous..

Merci à mes très chers amis Hajar, Rand, Ibrahim et Chaimae. Je vous embrasse !

Merci aux amies de toujours, les amies de St-Phil, Margaux, Marlène, Lulu et Titi. On se voit pas assez souvent je trouve ; on va rattraper ça.

Vous ne rentrez dans aucune case mais je vous dis comme même merci : Nelly, Barbara, Olfa et Amine. Merci aussi aux personnes que j'ai malencontreusement dû oublier de citer.

"Dans un voyage, ce n'est pas la destination qui compte mais toujours le chemin parcouru, et les détours surtout."

Philippe POLLET-VILLARD

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Notions de mécanique des fluides	12
1.1.1	Equations bilans	12
1.1.2	Classification des différents types de fluides	14
1.2	Viscoélasticité des solutions polymériques	18
1.2.1	Constitution et caractérisation	18
1.2.2	Temps caractéristiques des polymères	22
1.2.3	Modèles rhéologiques	25
1.3	Instabilités et atomisation	29
1.3.1	Instabilités hydrodynamiques	29
1.3.2	Dynamiques des jets capillaires	34
1.3.3	Méthodes de mesure du temps de relaxation	39
1.3.4	Mécanismes de dégradation des polymères	41
1.4	Cadre de travail et objectifs	45
2	Etude théorique de l'instabilité d'un jet de liquide viscoélastique	47
2.1	Définition du problème et objectifs	48
2.1.1	Formulation du problème	48
2.1.2	Mise en équations	50
2.2	Analyse faiblement non-linéaire	56
2.2.1	Méthode de résolution	56
2.2.2	Résolution du système d'ordre 1	58
2.2.3	Résolution du système d'ordre 2	63
2.2.4	Résolution des relations de dispersion	76
2.3	Résultats de l'étude théorique	77
2.3.1	Solutions des relations de dispersion	77
2.3.2	Intabilité linéaire du jet	79
2.3.3	Instabilité faiblement non-linéaire des jets	83
2.4	Conclusion de l'étude théorique	93
3	Etude expérimentale de jets libres de liquides viscoélastiques	95
3.1	Expériences	96
3.1.1	Dispositif expérimental	96
3.1.2	Points de fonctionnement	98
3.2	Traitements d'images	102
3.2.1	Binarisation du système diphasique	102
3.2.2	Définition de fenêtres d'analyse	103

3.3	Mesures et analyses	104
3.3.1	Zone de latence du jet	104
3.3.2	Longueur de rupture du jet	113
3.3.3	Evolutions morpho-topologiques du jet	115
3.3.4	Tailles de gouttes	131
3.3.5	Schématisation des éléments mesurés	134
3.4	Resultats	135
3.4.1	Régimes d'évolution des jets	135
3.4.2	Processus d'injection et dégradation associée	138
3.4.3	Développement de l'instabilité	140
3.4.4	Propriétés élongationnelles et dégradation dans le REC	146
3.4.5	Distributions de taille de gouttes et mécanismes de coalescence	148
4	Conclusions et Perspectives	153
	Annexes	159
A	Annexe A : Fonctions de Bessel	159
B	Annexe B : Mesures expérimentales	161
	Table des Figures	163
	Liste des tableaux	169
	References	171

Nomenclature

Abbreviations

Symbole	Description
C	Carbone
CaBER	Capillary Breakup Extensional Rheometer
DR	Relation de Dispersion
FENE	Finite Extensible Nonlinear Elastic
H	Hydrogène
KLD	Karhunen–Loève Decomposition
O	Oxygène
PEO	Poly(Ethylene) Oxyde
PCA	Principal Component Analysis
POD	Proper Orthogonal Decomposition
REC	Régime Elasto-Capillaire
RIC	Régime Inertio-Capillaire
ROJER	Rayleigh Ohnesorge Jet Elongational Rheometer
RVC	Régime Visco-Capillaire
SVD	Singular Value Decomposition

Lettres latines

Symbole	Description	Unité
a	Rayon du jet	$[m]$
$a_{j,k}$	Coefficient de reconstruction de l'évènement j associé au mode k	$[-]$
A	Aire d'une section du jet	$[m^2]$
b	Longueur moyenne d'une liaison entre deux éléments principaux d'un polymère	$[m]$
c	Concentration massique en polymère	$[kg.m^{-3}]$
c^*	Concentration de recouvrement	$[kg.m^{-3}]$

C	Coefficient de correction	$[-]$
\mathcal{C}	Contour d'un objet	$[-]$
d	Echelle d'érosion	$[m]$
d_M	Echelle d'érosion associée au max d'un objet	$[m]$
d_R	Echelle d'érosion associée au reach d'un objet	$[m]$
\mathbf{D}	Tenseur des taux de déformations (Chap. 2)	$[s^{-1}]$
D_{jet}	Diamètre du jet non-perturbé	$[m]$
D_{min}	Diamètre minimal du jet ou du ligament	$[m]$
D_{or}	Diamètre d'orifice de sortie d'injecteur	$[m]$
D^p	Diamètre d'une goutte principale	$[m]$
D^{sat}	Diamètre d'une goutte satellite	$[m]$
e_2	Distribution d'échelles surfacique	$[m^{-1}]$
E_2	Distribution d'échelles cumulative surfacique	$[-]$
E_{ϕ_k}	Energie du mode k	$[-]$
f_0	Distribution numérique	$[m^{-1}]$
F_0	Distribution cumulative numérique	$[-]$
g	Accélération de la pesanteur terrestre	$[m.s^{-2}]$
\mathbf{g}	Force de gravité	$[m.s^{-2}]$
H	Courbure moyenne d'un objet	$[m^{-1}]$
H_w	Hauteur de fenêtre d'analyse d'image	$[m]$
I_n	Fonction de Bessel modifiée de première espèce d'argument n	$[-]$
$IL(x, y)$	Intensité Lumineuse du pixel (x, y) de l'image brute	$[-]$
$IL_b(x, y)$	Intensité lumineuse du pixel (x, y) de l'image de bruit du capteur	$[-]$
$IL_f(x, y)$	Intensité lumineuse du pixel (x, y) de l'image de fond lumineux	$[-]$
$IL_n(x, y)$	Intensité lumineuse du pixel (x, y) de l'image normalisée	$[-]$
IS_{inj}	Indice de scission associé au processus d'injection	$[-]$
IS_{REC}	Indice de scission associé au REC	$[-]$
k	Nombre d'onde de perturbation	$[m^{-1}]$
k_B	Constante de Boltzmann	$[m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}]$
k_c	Nombre d'onde de coupure de la perturbation	$[m^{-1}]$
k_{opt}	Nombre d'onde du mode de perturbation le plus instable	$[m^{-1}]$
k_{trans}	Nombre d'onde de transition du jet de la configuration I à la configuration II ou III	$[m^{-1}]$

k_*	Nombre d'onde minimal transition du régime oscillatoire	$[m^{-1}]$
K_n	Fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'argument n	$[-]$
l_v	Nombre d'onde modifié de la perturbation	$[m^{-1}]$
L	Circonférence d'un objet	$[m]$
L_{bu}	Longueur de rupture du jet	$[m]$
$LD(x)$	Largeur sans dimension de la distribution x	$[-]$
$LMH(X)$	Largeur à mie-hauteur de la grandeur $\langle X \rangle$	$[X]$
L_{or}	Longueur de l'orifice de sortie d'injecteur	$[-]$
m_p	Masse de polymères	$[kg]$
\mathcal{M}	Max d'un objet	$[m]$
M_v	Masse molaire d'une solution polymérique	$[kg.mol^{-1}]$
M'_v	Masse molaire d'un monomère	$[kg.mol^{-1}]$
n	Nombre de cusps d'un objet	$[-]$
n	Nombre de monomères constituant un polymère	$[-]$
\mathbf{n}	Vecteur unitaire normal à la surface d'un objet liquide, dirigé vers l'extérieur	$[m]$
N	Indice d'approximation des fonctions de Bessel modifiées (Chap. 2)	$[-]$
N	Nombre d'éléments principaux constituant un polymère (Chap. 1 et 3)	$[-]$
N'	Nombre d'éléments principaux constituant un monomère	$[-]$
N_A	Constante d'Avogadro	$[mol^{-1}]$
N_{seuil}	Seuil de segmentation d'une image	$[-]$
p	Pression	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$
p^{sat}	Proportion de gouttes satellites présentes dans le spray final	$[-]$
\mathcal{P}	Pression modifiée	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$
Q_v	Débit volumique d'injection du jet	$[m^3.s^{-1}]$
r	Coordonnée radiale	$[m]$
r_s	Position de l'interface du jet	$[m]$
R	Longueur d'une chaîne polymérique	$[m]$
\mathcal{R}	Reach d'un objet	$[m]$
S	Surface d'un objet	$[m^2]$
t	Coordonnée de temps	$[s]$
t_{bu}	Temps de rupture du jet (Chap. 2)	$[s]$
t_c	Temps capillaire du jet	$[s]$

t_D	Temps de retardation	[s]
t_r	Temps de relaxation	[s]
t_{ri}	Temps de relaxation de la solution associé au début du REC	[s]
t_{rf}	Temps de relaxation de la solution associé à la fin du REC	[s]
$t_{r,Zimm}$	temps de relaxation de Zimm	[s]
t_s	Temps de transition du jet de la configuration I à la configuration II ou III	[s]
t_v	Temps de validité à 5% de conservation de volume du jet	[s]
t_Γ	Temps de validité à 1% de l'approximation à un mode	[s]
T	Température d'une solution	[K]
T_{bu}	Temps de rupture du jet (Chap. 3)	[s]
T_{jet}	Force de tension du jet adimensionnée	[—]
T_γ	Contribution fixe de T_{jet}	[—]
Te	Contribution variable de T_{jet}	[—]
T_{onset}	Temps associé au déclenchement des instabilités capillaires	[s]
T_{REC}^i	Temps associée au début du REC	[s]
T_{REC}^f	Temps associée à la fin du REC	[s]
u	Vitesse radiale d'un élément fluide	[m.s ⁻¹]
\mathbf{v}	Vecteur vitesse d'un élément fluide	[m.s ⁻¹]
V'	Volume occupé par un monomère	[m ³]
V_{inj}	Vitesse d'injection	[m.s ⁻¹]
V_{jet}	Vitesse du jet	[m.s ⁻¹]
V_{pen}	Volume pénétré d'un polymère	[m ³]
V_{sol}	Volume de solution	[m ³]
w	Vitesse axiale d'un élément fluide	[m.s ⁻¹]
w_p	Fonction de perturbation initiale du débit	[m.s ⁻¹]
\tilde{w}_p	Paramètre de contrôle de la perturbation initiale du débit	[—]
\mathbf{W}	Tenseur de vorticité	[m.s ⁻¹]
z	Coordonnée axiale	[m]
Z_{onset}	Position (à la buse) du déclenchement des instabilités capillaires	[m]
Z_{REC}^i	Position (à la buse) associée au début du REC	[m]
Z_{REC}^f	Position (à la buse) associée à la fin du REC	[m]

Lettres Grecques

Symbole	Description	Unité
α	Taux de croissance des instabilités	$[s^{-1}]$
α_M	Taux de croissance des instabilités relatif à d_M	$[s^{-1}]$
α_{opt}	Taux de croissance associé au mode le plus instable	$[s^{-1}]$
α_R	Taux de croissance des instabilités relatif à d_R	$[s^{-1}]$
α_η	Taux de croissance des instabilités relatif à η	$[s^{-1}]$
β_M	Amplitude initiale de déformation du jet relative à d_M	$[m]$
β_R	Amplitude initiale de déformation du jet relative à d_R	$[m]$
β_η	Amplitude initiale de déformation du jet relative à η	$[m]$
ΔH_w	Espacement des fenêtres d'analyses	$[m]$
γ	Coefficient de dégradation temporel dans le REC (Chap. 3)	$[-]$
$\dot{\gamma}$	Tenseur des taux de déformations (Chap. 1)	$[s^{-1}]$
Γ	Fonction d'évaluation de validité de l'approximation à un mode	$[-]$
ϵ	Paramètre d'amplitude de perturbation initiale	$[-]$
$\dot{\epsilon}$	Taux de déformation	$[s^{-1}]$
$\dot{\epsilon}_f$	Taux de déformation critique de dégradation	$[s^{-1}]$
$\dot{\epsilon}_{inj}$	Taux de déformation dans l'injecteur	$[s^{-1}]$
ζ	Paramètre correcteur d'intensité lumineuse	$[-]$
η	Déformation de l'interface du jet	$[m]$
$[\eta]$	Viscosité intrinsèque de la solution	$[m^3.kg^{-1}]$
$\eta_{E,app}$	Viscosité élongationnelle apparente	$[Pa.s]$
$\eta_{E,t}$	Viscosité élongationnelle terminale	$[Pa.s]$
η_p	Fonction de perturbation initiale de la déformation du jet	$[m]$
$\tilde{\eta}_p$	Paramètre de contrôle de la perturbation initiale de la déformation du jet	$[-]$
θ	Angle moyen des liaisons entre éléments principaux d'un polymère	$[rad]$
κ	Courbure locale	$[m^{-1}]$
κ_d	Viscosité de dilatation	$[m^2.s^{-1}]$
λ	Longueur d'onde de perturbation	$[m]$
λ_{opt}	Longueur d'onde associée au mode le plus instable	$[m]$
λ_i	Longueur d'onde relative à l'échelle d'érosion d_i	$[m]$
λ_{eq}	Longueur d'onde équivalente	$[m]$

Λ	Fonction d'évaluation de validité de conservation de volume du jet	$[-]$
μ_s	Viscosité du solvant	$[Pa.s]$
μ_0	Viscosité de cisaillement nul de la solution	$[Pa.s]$
ν	Coefficient de Flory	$[-]$
ξ	Pourcentage de coalescence	$[-]$
ξ_{max}	Pourcentage de coalescence maximal	$[-]$
π	Tenseur des contraintes totales	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$
ρ	Masse volumique de la solution	$[kg.m^{-3}]$
ρ_p	Densité polymérique	$[kg.m^{-3}]$
σ	Tension de surface de la solution	$[N.m^{-1}]$
τ	Tenseur des contraintes visqueuses	$[kg.m^{-1}.s^{-2}]$
ϕ	Fraction volumique	$[-]$
ϕ^*	Fraction volumique de recouvrement	$[-]$
ϕ_k	Vecteur propre k de la POD	$[-]$
χ	Caractéristique d'Euler d'un objet	$[-]$
ψ	Fonction de courant de Stokes	$[m^2.s^{-1}]$

Opérateurs Mathématiques

Symbol	Description
$\overset{\circ}{\bullet}$	Dérivée convective
$\ \bullet\ _2$	Norme Euclidienne
$\langle\bullet\rangle$	Moyenne arithmétique

Nombre Adimensionnels

Symbol	Description
De_1	Nombre de Deborah 1
De_2	Nombre de Deborah 2
Fr	Nombre de Froude
Oh_0	Nombre d'Ohnesorge à cisaillement nul
Oh_v	Nombre d'Ohnesorge à cisaillement nul modifié
Re	Nombre de Reynolds
We	Nombre de Weber

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Notions de mécanique des fluides	12
1.1.1	Equations bilans	12
1.1.1.1	Bilan de masse	12
1.1.1.2	Bilan de quantité de mouvement	13
1.1.2	Classification des différents types de fluides	14
1.1.2.1	Fluides parfaits / Fluides réels	14
1.1.2.2	Fluides Newtoniens / Fluides non-Newtoniens	14
1.1.2.3	Rhéologie	15
1.2	Viscoélasticité des solutions polymériques	18
1.2.1	Constitution et caractérisation	18
1.2.1.1	Structure moléculaire	18
1.2.1.2	Solution monodisperse ou polydisperse	19
1.2.1.3	Concentration et enchevêtrement	19
1.2.1.4	Qualité du solvant	20
1.2.1.5	Conformation des polymères	21
1.2.2	Temps caractéristiques des polymères	22
1.2.2.1	Temps de relaxation	22
1.2.2.2	Temps de retardation	24
1.2.3	Modèles rhéologiques	25
1.2.3.1	Modèle linéaire de Maxwell	25
1.2.3.2	Modèle linéaire de Jeffreys	27
1.2.3.3	Modèle quasi linéaire d'Oldroyd B	28
1.2.3.4	Autres modèles	28
1.3	Instabilités et atomisation	29
1.3.1	Instabilités hydrodynamiques	29
1.3.1.1	Généralités	29
1.3.1.2	Analyses de stabilité temporelle	31
1.3.2	Dynamiques des jets capillaires	34
1.3.2.1	Régime Neutre	34
1.3.2.2	Régime Inertio-Capillaire	36
1.3.2.3	Régime Elasto-Capillaire	36
1.3.2.4	Régime Visco-Capillaire	36
1.3.2.5	Rupture du jet et gouttes	37

1.3.3	Méthodes de mesure du temps de relaxation	39
1.3.3.1	Méthode du CaBER	39
1.3.3.2	Méthode du ROJER - jets forcés	40
1.3.3.3	Méthode du ROJER - jets libres	40
1.3.3.4	Autres méthodes	41
1.3.4	Mécanismes de dégradation des polymères	41
1.3.4.1	Dégradation par le processus d'injection	41
1.3.4.2	Dégradation dans un écoulement élongationnel	44
1.4	Cadre de travail et objectifs	45

Les écoulements multiphasiques sont des écoulements comportant plusieurs phases : gazeuses, liquides, et/ou solides. Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux écoulements non-réactifs comportant une phase liquide et une phase gazeuse. Dans de tels écoulements, la phase liquide est sujette à deux phénomènes physiques principaux : l'évaporation et l'atomisation. L'évaporation est une transition progressive de l'état liquide à l'état gazeux. L'atomisation est la fragmentation d'un volume liquide en un spray (Yarin, 1993). Ces deux phénomènes impliquent différents transferts d'énergie et influent sur la dynamique d'écoulement du système diphasique. Les mécanismes d'évaporation et d'atomisation dépendent à la fois des propriétés physiques et thermodynamiques des phases gazeuses et liquides et de la dynamique de l'écoulement. Certains de ces derniers facteurs sont amenés à varier au cours de ces processus, rendant l'étude de ces deux mécanismes plus difficile.

Cette thèse porte exclusivement sur les mécanismes d'atomisation. Au quotidien, les mécanismes d'atomisation sont visibles lorsqu'on ouvre le robinet, lorsqu'on prend une douche ou lorsqu'on se parfume par exemple. D'autres applications sont moins visibles mais tout aussi présentes : injection de carburant dans les moteurs, impression à encres liquides, éternuements... Ces exemples de mécanismes amènent tous à la production de gouttes, mais se différencient sur plusieurs points :

- La distribution de taille des gouttes produites.
- La distribution de vitesse de ces gouttes.
- L'angle de propagation de ces gouttes.
- La distance de formation et de propagation de ces gouttes.

Ces caractéristiques peuvent être décisives vis-à-vis de l'efficacité d'une application. L'attention de la communauté scientifique et industrielle a alors été suscitée par la compréhension des mécanismes qui induisent la fragmentation du volume liquide. Ceux-ci dépendent de la géométrie de l'injecteur, des propriétés du liquide et de la vitesse d'injection (Eggers et Villermaux (2008), Dumouchel (2008)). Afin de comprendre ces mécanismes et de prédire les caractéristiques du spray, trois approches coexistent et se complètent : les approches expérimentales, théoriques, et numériques.

Dans cette thèse, une approche théorique et une approche expérimentale ont été choisies afin de comprendre les mécanismes induisant la rupture de jets de liquide basse vitesse. Un diagnostic a également été développé afin de caractériser le spray. La particularité de cette étude repose sur la nature viscoélastique des liquides injectés. La viscoélasticité est une propriété non-Newtonienne spécifique aux liquides constitués de longues chaînes de molécules (Rubinstein *et al.*, 2003). Dû à leur structure macromoléculaire, le comportement de ces liquides s'éloigne des comportements

de fluides usuels comme l'eau, et ne répond pas aux conclusions et prédictions réalisées dans le cadre de la mécanique des fluides Newtonienne (Weissenberg (1947), Bird *et al.* (1987a)). Les liquides viscoélastiques sont présents dans un certain nombre de domaines :

- Domaine biomédical : salive, sang.
- Domaine agro-alimentaire : œufs, produits phytosanitaires.
- Domaines automobile et aéronautique : carburants additivés.
- Domaine cosmétique : laque, gels douche.

Lorsque le liquide est viscoélastique, les mécanismes d'atomisation et les caractéristiques du spray changent de façon considérable. Ceci est observé expérimentalement (Schümmer et Tebel (1983), Christanti et Walker (2001), Keshavarz *et al.* (2015), Bourouiba (2021)) mais aussi théoriquement (Goldin *et al.* (1969), Goren et Gottlieb (1982), Ardekani *et al.* (2010)) et numériquement (Li et Fontelos (2003), Ashgriz et Yarin (2011)). Plusieurs modèles théoriques ont été développés depuis le XIX^{ème} siècle pour les représenter (Giacomin et Saengow, 2022). Cependant, ces modèles ne permettent pas de décrire tous les comportements rencontrés dans la réalité. Pour cause, la structure moléculaire de ces liquides est amenée à évoluer au sein de l'écoulement par la modification de la géométrie des chaînes moléculaires et/ou par leur scission (Merrill et Leopairat (1980), Tirel *et al.* (2020), Rognin *et al.* (2021)). L'étude du comportement de tels fluides s'en retrouve d'autant plus délicate. Afin de comprendre l'influence mutuelle de l'écoulement et de ces chaînes moléculaires, l'étude de jets cylindriques à basse vitesse a été choisie. L'étude des écoulements produits par de tels jets est plus accessible que d'autres, de par leur géométrie, leur laminarité et leur facilité d'observation. Cette accessibilité se retrouve tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique.

L'étude de ces jets consiste en un suivi temporel des déformations de l'interface liquide/gaz. Plusieurs régimes d'évolution de cet interface sont identifiés depuis la phase d'injection jusqu'à la rupture. Chaque régime est modélisé par une loi d'évolution dynamique de l'interface dépendante des caractéristiques géométriques du jet et des propriétés du liquide (Middleman (1965), Stelter *et al.* (2000), Clasen *et al.* (2012), Mathues *et al.* (2018)). Dans le cadre de cette thèse, ces déformations d'interface seront étudiées :

- Théoriquement au moyen d'une analyse de stabilité faiblement non-linéaire. Cette approche, initiée par Rayleigh (1878), se focalise sur les premiers instants de développement des instabilités capillaires. En outre, la méthodologie développée par Renoult *et al.* (2018) permet de traiter une partie des non-linéarités qui caractérisent la déformation d'un jet.
- Expérimentalement au moyen d'une prise d'images de jet et de l'application de l'outil multi-échelles. Cet outil, développé par Dumouchel *et al.* (2017), permet d'extraire les caractéristiques géométriques et morphologiques du jet et se révèle particulièrement adapté à l'étude de l'atomisation (Tirel *et al.*, 2020).

Ce premier chapitre introductif présente dans un premier temps les notions générales de mécaniques des fluides. Dans un second temps, les caractéristiques des liquides viscoélastiques sont décrites. Dans un troisième temps, les notions d'instabilités et d'atomisation sont présentées, et un descriptif des différents régimes de jets capillaires viscoélastiques est réalisé. Enfin, les objectifs de la thèse et le plan du manuscrit sont annoncés.

1.1 Notions de mécanique des fluides

1.1.1 Equations bilans

La mécanique des fluides est l'étude du mouvement des fluides, aussi appelé *écoulement*. L'écoulement d'un fluide peut se décrire à l'échelle macroscopique par des *bilans* appliqués à une région mathématique que l'on désigne sous le terme de *volume de contrôle*, auquel est associé une *surface de contrôle* (Figure 1.1). Le bilan d'une quantité/grandeur appliqué au volume de contrôle consiste alors à identifier et mettre en équation les sources de *création*, d'*échange*, de *consommation* de cette quantité/grandeur au sein et au travers du volume de contrôle.

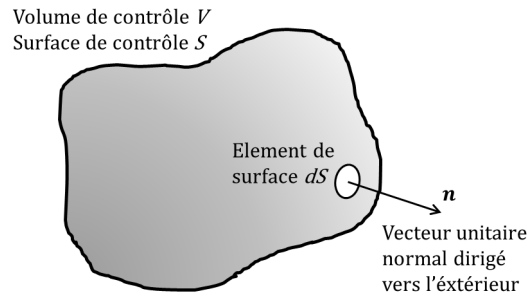


FIGURE 1.1 – Schéma d'un volume de contrôle.

Trois bilans sont classiquement appliqués : le *bilan de masse*, le *bilan de quantité de mouvement*, et le *bilan d'énergie*. L'intérêt de ces travaux ne se portant que sur des écoulements *isothermes*, le troisième de ces bilans ne sera pas développé par la suite. Les bilans de masse et de quantité de mouvement sont exposés ci-après, selon la présentation faite par Bird *et al.* (1987a). Ces bilans font intervenir les quantités physiques suivantes :

- V : le volume de contrôle.
- S : la surface de contrôle.
- ρ : la masse volumique du volume fluide.
- t : le temps.
- \mathbf{v} : le vecteur vitesse d'un élément fluide.
- \mathbf{g} : le vecteur force de gravité.
- $\boldsymbol{\pi}$: le tenseur des contraintes d'un élément fluide.

Les quantités vectorielles et tensorielles sont ici notées en gras. Cette convention s'appliquera par ailleurs au reste du manuscrit.

1.1.1.1 Bilan de masse

Selon la loi de la conservation de la masse, une variation de la masse au sein du volume de contrôle n'est due qu'à un échange de fluide au travers de la surface de contrôle :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho dV}_{\text{Taux de variation de masse de fluide au sein de } V} = - \underbrace{\int_S (\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v}) dS}_{\text{Taux d'échange de masse de fluide au travers de } S} \quad (1.1)$$

En utilisant le théorème de divergence de Gauss et en choisissant un volume de contrôle de façon arbitraire, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (1.2)$$

Il s'agit de l'équation de continuité. Cette équation est scalaire, et si le fluide est considéré incompressible, elle se réduit à :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \quad (1.3)$$

1.1.1.2 Bilan de quantité de mouvement

Selon la loi de conservation de la quantité de mouvement, la variation de quantité de mouvement du fluide au sein du volume de contrôle provient de trois contributions :

- Un transport de quantité de mouvement au travers de la surface de contrôle, dû à l'écoulement même.
- Un transfert de quantité de mouvement au travers de la surface de contrôle, dû aux mouvements et aux interactions des molécules constituant le fluide.
- Une variation de quantité de mouvement liée à d'éventuelles forces externes de volume agissant sur le fluide. On s'intéressera ici exclusivement à la force de gravité.

Ainsi, on a :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV}_{\text{Taux de variation de quantité de mouvement au sein de } V} = - \underbrace{\int_S [\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] dS}_{\text{Taux d'échange de quantité de mouvement au travers de } S \text{ dû à l'écoulement}} - \underbrace{\int_S [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}] dS}_{\text{Taux d'échange de quantité de mouvement au travers de } S \text{ dû aux mouvements et interactions des molécules}} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{g} dV}_{\text{Force de gravité appliquée sur le fluide au sein de } V} \quad (1.4)$$

avec \mathbf{g} la force par unité de masse due à la gravité.

De même que pour le bilan de masse, en utilisant le théorème de divergence de Gauss et en choisissant un volume de contrôle fixe de façon arbitraire, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - [\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}] + \rho \mathbf{g} \quad (1.5)$$

Il s'agit de l'équation de mouvement. Cette équation est vectorielle, et si le fluide est considéré incompressible, elle se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}] - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}] + \mathbf{g}} \quad (1.6)$$

La composante π_{ij} est la force par unité de surface exercée dans la direction j sur l'élément de surface perpendiculaire à la direction i . Ce tenseur peut être exprimée en faisant apparaître la *pression* p de la manière suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\tau}} \quad (1.7)$$

où p désigne la pression thermodynamique, $\boldsymbol{\delta}$ désigne le tenseur unité et $\boldsymbol{\tau}$ désigne le *tenseur des contraintes visqueuses*, associé comme son nom l'indique aux effets visqueux qu'opposerait le liquide à un écoulement. Les composantes de ce tenseur sont illustrées en Figure 1.2. Une équation renseignant la valeur du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est appelée *équation constitutive*. Jusqu'à présent, les bilans et équations énoncées dans ce document ont été des équations générales, valables pour tous les fluides. C'est par l'énonciation de l'équation constitutive que le type de fluide sera désigné.

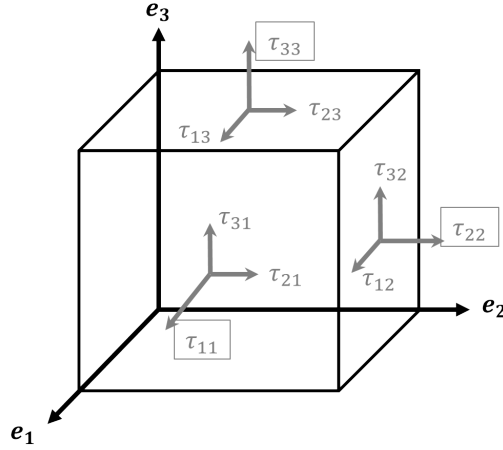


FIGURE 1.2 – Schématisation des composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ sur un élément fluide dans un repère arbitraire (e_1, e_2, e_3) .

1.1.2 Classification des différents types de fluides

1.1.2.1 Fluides parfaits / Fluides réels

Un *fluide parfait* est un fluide qui ne dissipe aucune énergie. Dans une telle approximation, la viscosité est nulle. Le mouvement d'un tel fluide est décrit par les *équations d'Euler*, établies à partir des équations de continuité et de mouvement, en considérant le tenseur des contraintes visqueuses τ nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (1.9)$$

Les équations d'Euler pour un fluide incompressible s'écrivent :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -[\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}] - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1.11)$$

A contrario des fluides parfaits, les *fluides réels* dissipent de l'énergie et ne peuvent pas être décrits par les équations d'Euler.

1.1.2.2 Fluides Newtoniens / Fluides non-Newtoniens

Parmi les fluides réels, deux familles se distinguent, les fluides *Newtoniens* et les fluides *non-Newtoniens*.

Un fluide Newtonien est un fluide pour lequel il existe une relation linéaire entre la contrainte et le gradient de vitesse. Si la masse volumique du milieu ne varie pas considérablement, la constante de proportionnalité caractérisant cette relation est la viscosité μ . A pression et

température constantes, la viscosité est une constante propre au milieu. Tous les fluides Newtoniens répondent alors à la relation constitutive suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu [\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v})^T] + \left(\frac{2}{3} \mu - \kappa_d \right) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} \quad (1.12)$$

avec κ_d la viscosité de dilatation. La quantité $\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}$ est un tenseur qui s'obtient par le produit dyadique des vecteurs $\boldsymbol{\nabla}$ et \mathbf{v} . Le produit dyadique est défini pour tout vecteur \mathbf{a} et \mathbf{b} par : $\mathbf{a}\mathbf{b}_{ij} = a_i b_j$. En considérant un fluide incompressible, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mu [\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v})^T] = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \quad (1.13)$$

avec $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ le tenseur des taux de déformation.

Le mouvement d'un tel fluide est alors décrit par les *équations de Navier-Stokes* incompressibles, établies à partir des équations de continuité et de mouvement, en remplaçant $\boldsymbol{\tau}$ par l'expression (1.13) :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0} \quad (1.14)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho} \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{g}} \quad (1.15)$$

Pour les fluides *non-Newtoniens*, à température et pression données, la contrainte n'est *pas* une fonction linéaire du gradient de vitesse. Parce que cette définition n'en est pas une, parce qu'on ne peut pas se résoudre à définir ce qu'est un certain fluide seulement à partir de ce qu'il n'est pas, l'étude des fluides non-Newtoniens a donné naissance à un nouveau domaine d'étude : la *rhéologie*.

1.1.2.3 Rhéologie

Le mot "rhéologie" provient du grec ancien "rhéo / couler" et de "logos / étude" ; il désigne l'étude de l'écoulement de la matière et des déformations. C'est en 1928 que le professeur américain Eugène Bingham introduit ce terme sur la constatation d'un manque de compréhension et de capacité de représentation des liquides non-Newtoniens par la communauté scientifique à partir de la mécanique des fluides classique. La rhéologie, cependant, n'est pas une simple extension de la mécanique des fluides Newtonienne ; il s'agit plutôt d'un alliage entre ce dernier domaine et la mécanique des solides. En effet, selon les conditions de travail, les temps de sollicitation et d'observation, un matériau subit *plus ou moins* de déformations, et s'écoule alors *plus ou moins*. Selon la prophétesse Deborah (XII^{ème} siècle av. J.-C. selon la Bible) :

"Les montagnes s'écoulèrent devant Dieu."

L'interprétation qui est communément faite de cette énonciation biblique est la suivante : Les montagnes, entités rocheuses a priori solides, finissent par s'écouler devant un temps infini, représenté par Dieu. Cette pensée se rapproche également de celle du philosophe grecque Héraclite (VI^{ème} siècle av. J.-C.), qui déclarait :

"Panta rhei / Toutes les choses coulent"



FIGURE 1.3 – Photographie de l’expérience de la goutte de poix, en 1990, avec son responsable de l’époque le Professeur John Manstone.

Pour illustrer ce propos à ses étudiants, le Professeur Thomas Parnell entreprend en 1927 l’*expérience de la goutte de poix* (Figure 1.3). L’expérience a consisté dans un premier temps à disposer un échantillon de poix chaude (matière se rapprochant du goudron) dans un entonnoir bouché et de le laisser reposer pendant 3 ans. Le dispositif est placé sous cloche de façon à maintenir les conditions de pression et de température aussi constantes que possible. En 1930, le bouchon est retiré, laissant la poix s’écouler. L’écoulement est si lent que la première goutte ne se détache qu’en 1938 et qu’il faut compter environ une décennie pour qu’une goutte ne se forme et ne se détache. A partir des conditions de l’expérience et de la datation des gouttes successives, la viscosité dynamique de la poix a été estimée à environ 230 milliards de fois celle de l’eau (Edgeworth et Parnell, 1984).

En première approche, la description rhéologique d’un matériau peut s’effectuer sur la base de trois comportements élémentaires :

- Le comportement d’un *liquide de Newton* : la vitesse de déformation est une fonction linéaire de la contrainte. Cet élément est représenté par un *amortisseur*.
- Le comportement d’un *solide de Hooke* : la déformation est une fonction linéaire de la contrainte. Cet élément est représenté par un *ressort*.
- Le comportement d’un *solide rigide-plastique* : la déformation n’a lieu qu’au-delà d’un certain seuil de contrainte, qui ne peut alors être dépassé. La déformation n’est donc pas une fonction linéaire de la contrainte. Cet élément est représenté par un *patin*.

Des comportements élasto-plastiques, visco-plastiques, visco-élastiques et élasto-visco-plastiques peuvent alors être reconstruits par combinaisons de ces trois éléments, comme schématisé en Figure 1.4.

La loi constitutive de certains liquides non-Newtoniens peut alors être modélisée de façon satisfaisante par montage en série et/ou en parallèle de ressorts, d’amortisseurs et de patins. Pour d’autres, cette représentation n’est pas optimale et la loi constitutive est construite de façon empirique. Finalement, deux classes de liquides non-Newtoniens se distinguent : ceux dont le comportement est indépendant du temps et ceux dont celui-ci est dépendant du temps. En Tableau 1.1 est dressée une classification des fluides non-Newtoniens.

Dans la section suivante, l’intérêt est exclusivement porté sur les liquides viscoélastiques.

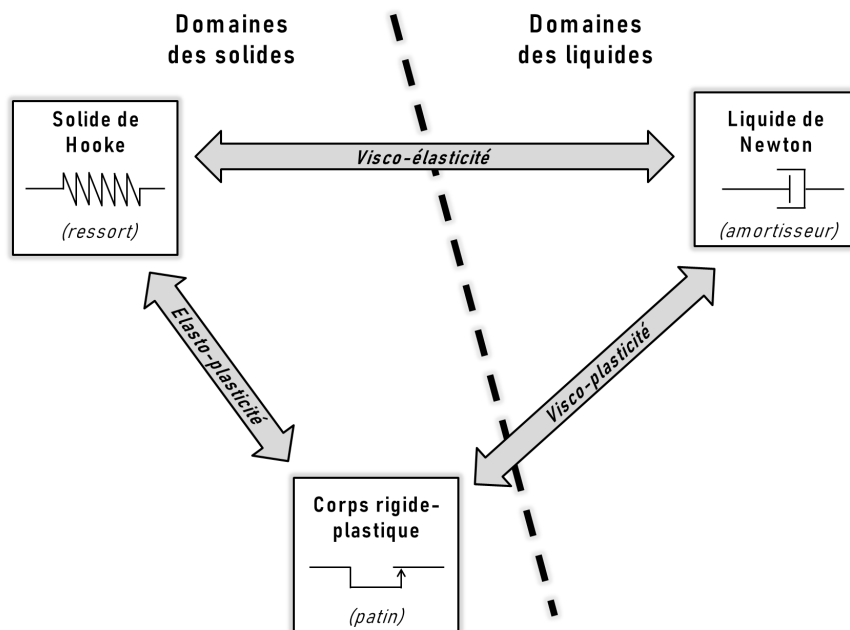


FIGURE 1.4 – Classification des matériaux.

Classe	Type de liquide	Description du comportement	Exemple
Comportement indépendant du temps	Rhéofluidifiants ou pseudo-plastiques	La viscosité diminue lorsque la contrainte augmente.	Moutarde
	Rhéopéaississants ou dilatants (rares)	La viscosité augmente lorsque la contrainte augmente.	Empois
	A seuil ou viscoplastiques	L'écoulement n'a lieu qu'au-delà d'un certain seuil de contrainte, où un comportement rhéofluidifiant est généralement observé.	Mayonnaise
Comportement dépendant du temps	Thixotropes	Sous une contrainte constante, la viscosité diminue au cours du temps.	Ketchup
	Anti-thixotropes (très rares)	Sous une contrainte constante, la viscosité augmente au cours du temps.	Crème Fouettée
	Viscoélastiques	Le matériau se comporte comme un solide élastique lorsque le temps de sollicitation est court et comme un liquide lorsque celui-ci est long.	Blanc d'oeuf

TABLE 1.1 – Classification des fluides non-Newtoniens.

1.2 Viscoélasticité des solutions polymériques

Les liquides viscoélastiques sont dans la très grande majorité des cas des *solutions polymériques*. Dans cette section, on se propose d'analyser la constitution de ces solutions, comment les caractériser et comment modéliser leurs écoulements.

1.2.1 Constitution et caractérisation

1.2.1.1 Structure moléculaire

Une solution polymérique est constituée d'un *solvant* et de *polymères*. Le solvant est un liquide Newtonien constitué de molécules de petite taille. Un polymère est une *macromolécule*, c'est-à-dire une molécule de grande taille et donc de masse molaire importante. Le mot "polymère" vient du grec "polus / plusieurs" et "meros / partie" et fait référence à une molécule constituée par la répétition de molécules de faible masse molaire, alors appelées *monomères* ou *unités constitutives*.

On parle d'*homopolymère* lorsque le polymère est constitué par la répétition d'un même monomère, et d'*hétéropolymère* lorsqu'il est constitué de monomères différents. Les polymères biologiques sont pour la plupart des hétéropolymères, en contraste avec les polymères synthétiques qui sont généralement des homopolymères.

La structure moléculaire d'un polymère est également caractérisée par son architecture. On distingue alors trois types d'architectures principales comme schématisé en Figure 1.5 :

- Les polymères *linéaires* : chaque monomère est connecté à deux monomères seulement.
- Les polymères *branchés* : certains monomères sont connectés à plus que deux monomères. Ces connections demeurent relativement faibles.
- Les *réseaux polymériques* : certains monomères sont connectés à plus que deux monomères. Ces connections sont relativement importantes.

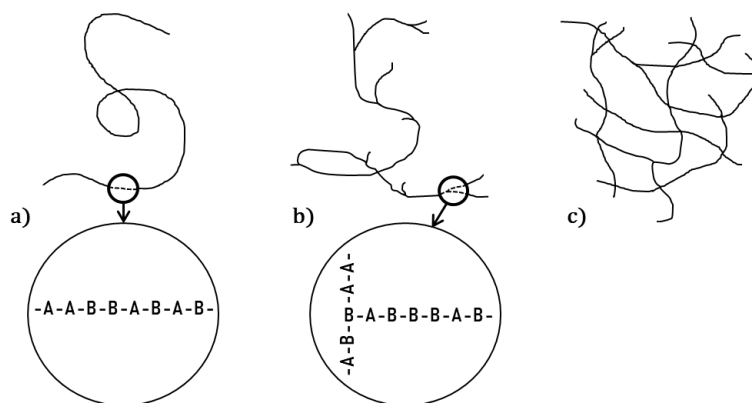


FIGURE 1.5 – Schématisation de : a) un polymère linéaire, b) un polymère branché, c) un réseau polymérique. Les lettre A et B représentent deux types de monomères différents.

1.2.1.2 Solution monodisperse ou polydisperse

Chaque polymère peut être caractérisé par sa masse molaire M_v à partir des atomes le constituant. On distingue alors deux types de solutions polymériques :

- Les solutions *monodisperses* : Les polymères contenus dans la solution ont la même masse molaire.
- Les solutions *polydisperses* : Les polymères contenus dans la solution n'ont pas tous la même masse molaire.

1.2.1.3 Concentration et enchevêtrement

Le niveau de dilution d'une solution polymérique est une autre caractéristique importante. Il se mesure par l'intermédiaire de la *concentration en polymères*, notée c et définie comme (Rubinstein *et al.*, 2003) :

$$c = \frac{m_p}{V_{sol}} \quad (1.16)$$

où m_p correspond à la masse de polymères dissoute dans la solution et V_{sol} au volume de la solution. La *concentration de recouvrement* est une valeur critique de concentration définie par :

$$c^* = \frac{\rho_p n V'}{V_{pen}} \quad (1.17)$$

avec ρ_p la densité polymérique, n le nombre de monomères dont le polymère est constitué, V' étant le volume occupé par un monomère et V_{pen} le *volume pénétré* du polymère, correspondant au volume sur lequel le polymère s'étend. La densité polymérique s'exprime à partir de la masse molaire d'un monomère M'_v et de V' :

$$\rho_p = \frac{M'_v}{N_A V'} \quad (1.18)$$

où N_A désigne la constante d'Avogadro. La valeur du volume pénétré vaut approximativement cube de la longueur de la chaîne polymérique R :

$$V_{pen} \approx R^3 \quad (1.19)$$

Ainsi, la concentration de recouvrement s'écrit :

$$c^* = \frac{n M'_v}{N_A V_{pen}} \approx \frac{n M'_v}{N_A R^3} \quad (1.20)$$

La concentration de recouvrement c^* est une concentration critique qui sert à distinguer deux types de solutions, comme illustré en Figure 1.6 :

- Les solutions *diluées*, pour lesquelles $c < c^*$. La distance moyenne séparant les chaînes polymériques est inférieure à leur taille et leur taux d'interactions est très faible, si bien que les polymères ont une influence relativement faible sur les propriétés physiques de la solution comme la viscosité.
- Les solutions *semi-diluées*, pour lesquelles $c > c^*$. Les chaînes polymériques se chevauchent et ont une influence relativement forte sur les propriétés physiques de la solution.

Il existe également des solutions *concentrées*, pour lesquelles la fraction volumique est bien plus élevée que celle des solutions semi-diluées, et supérieure à une deuxième concentration c^{**} critique qui ne sera pas introduite en détail dans ce manuscrit (se référer à Rubinstein *et al.* (2003) pour plus de détails).

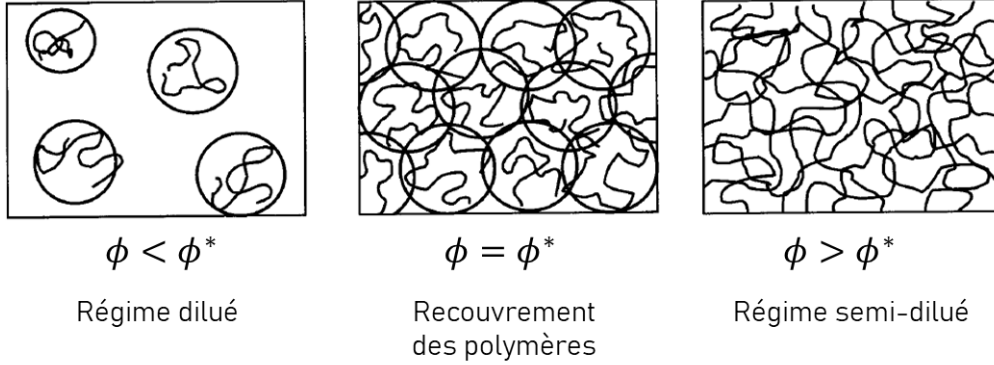


FIGURE 1.6 – Schématisation des niveaux de dilution d’une solution polymérique (inspiré de Rubinstein *et al.* (2003)).

1.2.1.4 Qualité du solvant

Comme présenté par Rubinstein *et al.* (2003) et repris par Addison *et al.* (2004), le comportement des polymères en solution dépend des forces d’attraction et de répulsion entre monomères (appartenant à une même chaîne polymérique ou non). Ces forces sont plus ou moins importantes selon la température T de la solution. On distingue trois *qualités de solvant* différentes :

- On parle de *bons solvants* lorsque l’énergie thermique de la solution est supérieure à l’énergie d’attraction entre monomères. Les chaînes polymériques sont alors dits *gonflées*.
- On parle de *solvants theta* (aussi notés *solvants θ*) lorsque les forces d’attraction et de répulsion entre monomères sont comparables. En particulier, ces forces s’annulent à la *température theta*, notée T_θ . Un solvant est un solvant theta lorsque sa température est comprises entre les température T_B et T_c . Dans un tel solvant, les chaînes polymériques sont davantage contractées que dans un bon solvant.
- On parle de *solvants pauvres* lorsque les forces d’attraction prévalent sur les forces d’attraction. Dans un tel solvant, les chaînes polymériques sont très contractées et forment des *globules*.

Les températures T_θ , T_B et T_c dépendent de la composition du solvant.

Le volume pénétré V_{pen} d’un monomère étant dépendant de la température de la solution, les différents régimes de dilution présentés en sous-section 1.2.1.3 sont également dépendant de la température. Un diagramme de phase exposé en Figure 1.7 permet d’identifier les différents régimes de dilution associés aux différents types de solvant.

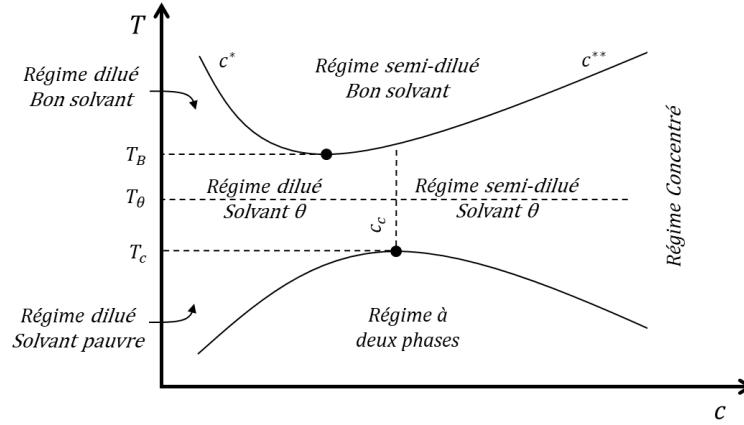


FIGURE 1.7 – Diagramme de phase d'une solution polymérique. (inspiré de Rubinstein *et al.* (2003) et de Addison *et al.* (2004)).

1.2.1.5 Conformation des polymères

L'étalement spatiale, le niveau de dépliement ainsi que l'orientation d'un polymère sont des caractéristiques que l'on regroupe sous le terme de *conformation*. La conformation d'un polymère est déterminée par la localisation spatiale des monomères qui le constituent. Comme exposé par Rubinstein *et al.* (2003), la conformation adoptée par un polymère dépend de trois facteurs :

- La flexibilité de la chaîne polymérique, dépendante de sa longueur et de la nature des liaisons qui lient les éléments chimiques constituant le polymère.
- Les interactions entre monomères (d'une même chaîne) par forces répulsives et/ou attractives.
- Les interactions de la chaîne polymérique avec son environnement, c'est-à-dire avec le solvant et éventuellement d'autres chaînes polymériques voisines.

Ces trois facteurs dépendent des caractéristiques évoquées précédemment dans la section 1.2.1, à savoir la structure moléculaire des polymères, la largeur de distribution de masse molaire des polymères, la concentration de la solution en polymères et la qualité du solvant. Cependant, la conformation d'un polymère évoluant dans une solution est également amenée à évoluer lorsqu'un écoulement est induit. On peut alors dans un premier temps définir deux états de conformation d'une chaîne polymérique :

- L'état dit de *pelote* : c'est l'état d'équilibre d'une chaîne polymérique dans une solution au repos. Dans cet état, les monomères sont relativement tous proches les uns des autres, et la chaîne polymérique occupe un volume sphérique correspondant au volume pénétré définie en sous-section 1.2.1.3, à savoir : $V_p \approx R^3$. Cette conformation est schématisée en Figure 1.8-a).
- L'état dit *complètement étiré* : c'est l'état d'une chaîne polymérique qu'on aurait étiré à son maximum. On définit alors R_{max} la longueur maximum de la chaîne polymérique dans cet état. Comme illustré en Figure 1.8-b), cette longueur est évaluée à partir du nombre d'éléments principaux N du polymère, de la longueur moyenne b des liaisons covalente reliant ces éléments, et de l'angle moyen θ formé par ces liaisons covalentes :

$$R_{max} = Nb \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.21)$$

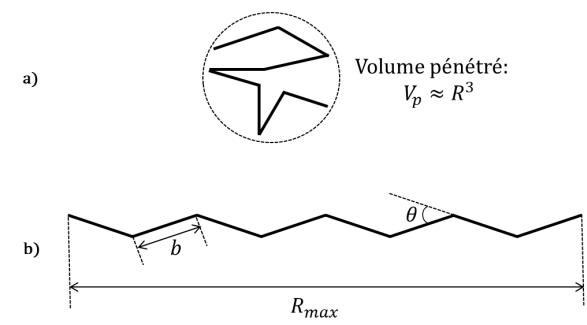


FIGURE 1.8 – Schéma de deux conformations d’une chaîne polymérique, d’après (Rubinstein *et al.*, 2003) : a) en pelote, b) complètement étirée.

C’est par les mécanismes de changements de conformation des chaînes polymériques qu’un écoulement de liquide viscoélastique se distingue d’un écoulement de liquide Newtonien. Ces mécanismes ont fait l’objet de nombreuses théories et expérimentations et ne sont à ce jour pas complètement maîtrisés. Néanmoins, des temps caractéristiques ont été introduits pour caractériser le changement de conformation d’un polymère.

1.2.2 Temps caractéristiques des polymères

Deux temps caractéristiques des polymères sont décrits dans cette section : le *temps de relaxation* et le *temps de retardation*. Ces temps caractéristiques sont introduits à partir des modèles théoriques mais aussi au travers des expériences de *relaxation* et de *fluage* comme décrites dans l’ouvrage de Mezger (2020) et dans le rapport de Guazzelli (2001).

1.2.2.1 Temps de relaxation

Le *temps de relaxation*, que l’on notera t_r , est le temps caractéristique d’un polymère soumis à une expérience de *relaxation*. Dans cette expérience, on considère un matériau initialement à l’équilibre avec une déformation nulle ou quasi-nulle. Au temps $t = t_0$, une déformation est appliquée au matériau et maintenue constante, comme présenté en Figure 1.9-a). En $t = t_0$, en réponse à l’application d’une déformation, la contrainte augmente, et le matériau retourne à un état d’équilibre. Ce retour à un état d’équilibre n’est pas systématiquement immédiat, selon la nature du matériau :

- Pour un solide de Hooke (Figure 1.9-b)), en t_0 , la contrainte prend une valeur constante proportionnelle à la déformation.
- Pour un liquide Newtonien (Figure 1.9-c)), la réponse de la contrainte à l’augmentation de la déformation en t_0 est linéaire au cours du temps. Une forte décroissance de la contrainte est observée, jusqu’à atteindre une valeur nulle en t_1 . Cette décroissance est directement régie par la viscosité du liquide.
- Pour un liquide viscoélastique (Figure 1.9-d)), la réponse de la contrainte à l’augmentation de la déformation en t_0 n’est pas linéaire au cours du temps. Une décroissance de la contrainte est observée, jusqu’à converger vers une valeur nulle en t_2 . Cette décroissance est moins rapide que pour un liquide Newtonien de même viscosité. Un délai supplémentaire est nécessaire au liquide pour retrouver un état d’équilibre. Le temps de relaxation peut alors être extrait à partir de ce délai.

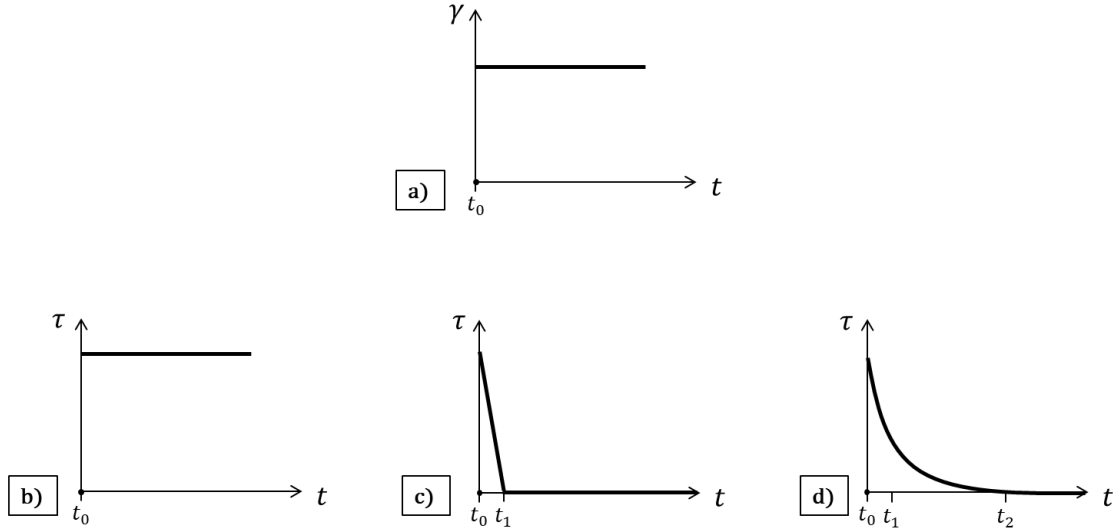


FIGURE 1.9 – Expérience de relaxation : a) déformation appliquée en fonction du temps, b) réponse de contrainte d'un solide de Hooke, c) réponse de contrainte d'un liquide Newtonien, d) réponse de contrainte d'un liquide viscoélastique. Inspiré de Mezger (2020).

Le *modèle de Zimm* est un modèle théorique décrivant le comportement des chaînes polymériques en régime dilué en prenant en compte les interactions hydrodynamiques avec le solvant, comme exposé par Doi *et al.* (1988). Ainsi, une chaîne polymérique évoluant dans une solution polymérique diluée avec un bon solvant est caractérisée par un temps de relaxation qui s'exprime comme :

$$t_r^{Zimm} = \frac{\mu_s N^{3\nu} b^3}{k_B T} \quad (1.22)$$

avec μ_s la viscosité du solvant, N le nombre d'éléments principaux de la chaîne polymérique, b la longueur des liaisons entre ces éléments, k_B la constante de Boltzmann, T la température de la solution, et ν un exposant désigné sous le terme d'*exposant de Flory*. Les modèles relatifs au comportement des chaînes polymériques linéaires font varier le paramètre ν entre 0,5 et 0,6 (Rubinstein *et al.*, 2003). Néanmoins, des développements plus sophistiqués ont permis d'évaluer la valeur ν à 0,588 (Cotton, 1980). Des expérimentations ont été effectuées sur plusieurs polymères différents et ont donné une valeur de ν très proche de 0,588 (Fetters *et al.*, 1994).

L'équation (1.22) peut être réécrite de façon à exprimer la dépendance du taux de relaxation de Zimm en fonction de la masse molaire M_v du polymère (Doi *et al.*, 1988) :

$$t_r^{Zimm} = \frac{\mu_s N'^{3\nu} b^3}{M_v'^{3\nu} k_B T} M_v^{3\nu} \quad (1.23)$$

avec M_v' la masse molaire d'un monomère et N' le nombre d'éléments principaux que comporte un monomère.

Le temps de relaxation de Zimm peut également s'exprimer en fonction de la *viscosité intrinsèque* de la solution $[\eta]$ et de la masse molaire M_v du polymère :

$$t_r^{Zimm} = \frac{\mu_s[\eta]M_v}{N_A k_B T} \quad (1.24)$$

La viscosité intrinsèque peut être mesurée mais aussi évaluée à partir de l'équation suivante utilisant les caractéristiques chimiques du polymère :

$$[\eta] = \frac{N_A}{M_v} N^{3\nu} b^3 \quad (1.25)$$

Il est important de noter que lorsque la solution polymérique présente une distribution de masse molaire de polymères, cela implique l'existence d'un *spectre* de temps de relaxation.

1.2.2.2 Temps de retardation

Le *temps de retardation*, que l'on notera t_D , est le temps caractéristique d'un polymère soumis à une expérience de *fluage*. Comme présenté en Figure 1.10-a), cette expérience consiste à appliquer au temps $t = t_3$ une contrainte constante à un matériau à l'équilibre. En $t = t_4$, la contrainte est soudainement relâchée et la solution retourne à un état d'équilibre. Ce retour à un état d'équilibre n'est pas systématiquement immédiat ; cela dépend de la nature du matériau :

- Pour un solide de Hooke (Figure 1.10-b)), la réponse de la déformation à l'application d'une contrainte en t_3 est immédiate et complète. Il en est de même pour la réponse de la déformation au relâchement de la contrainte en t_4 . Au relâchement de la contrainte, le solide retourne à son état d'équilibre initial.
- Pour un liquide Newtonien (Figure 1.10-c)), la réponse de la déformation à l'application d'une contrainte t_3 en est linéaire au cours du temps. La déformation prend une valeur non-nulle en t_3 et en t_4 , lorsque la contrainte est subitement relâchée, la déformation ne varie pas. Le liquide ne garde pas en mémoire les événements passés.
- Pour un liquide viscoélastique (Figure 1.10-d)), la réponse de la déformation à l'application d'une contrainte en t_3 n'est pas linéaire au cours du temps. Au relâchement de la contrainte en t_4 , la déformation observe une diminution progressive jusqu'à converger vers une valeur constante non-nulle au temps t_5 . Le retour à un nouvel état d'équilibre est alors "retardé". Le temps de retardation correspond alors à ce retard.

Le temps de retardation peut également être évalué à partir du temps de relaxation du polymère ainsi que des viscosités de solvant μ_s et de la solution polymérique μ_0 (Denn, 1990) :

$$t_D = t_r \frac{\mu_s}{\mu_0} \quad (1.26)$$

Au même titre que l'existence d'un spectre de temps de relaxation est imposé lorsqu'il existe une distribution de masse molaire de polymères au sein de la solution, il existe également un spectre de temps de retardation.

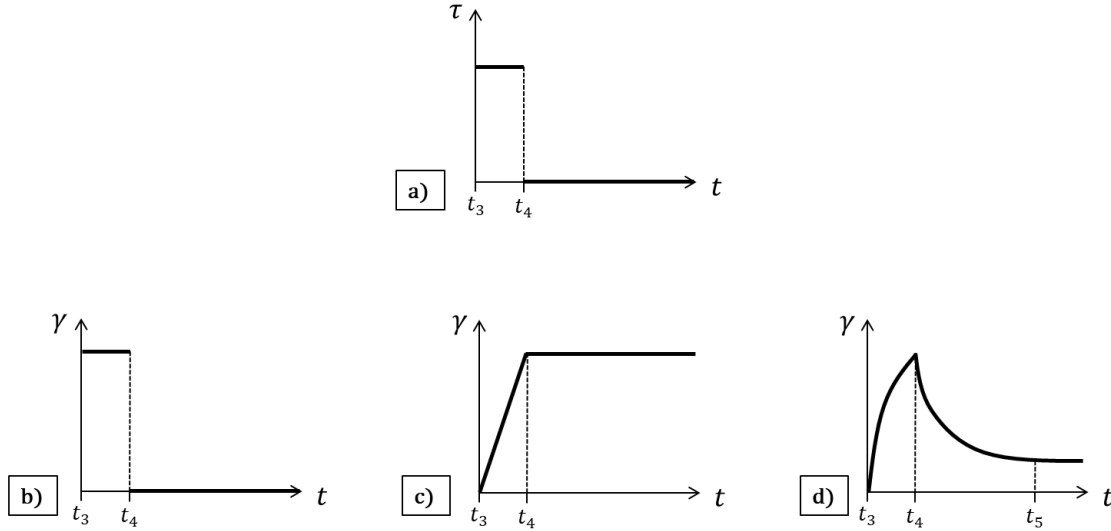


FIGURE 1.10 – Expérience de fluage : a) contrainte appliquée en fonction du temps, b) réponse de déformation d'un solide de Hooke, c) réponse de déformation d'un liquide Newtonien, d) réponse de déformation d'un liquide viscoélastique. Inspiré de Mezger (2020).

1.2.3 Modèles rhéologiques

Les expériences de relaxation et de fluage exposées en section 1.2.2 laissent à penser que le comportement d'un liquide viscoélastique se situe entre celui d'un solide de Hooke et d'un liquide Newtonien. C'est ainsi qu'afin de décrire le comportement des liquides viscoélastiques dans les écoulements, de nombreux modèles rhéologiques ont été proposés sur la base d'un alliage entre comportements solides et comportements liquides, comme introduit en sous-section 1.1.2.3. Dans cette section, trois modèles sont présentés par ordre chronologique et par ordre de complexité croissante dans un objectif pédagogique. Une présentation plus approfondie des modèles rhéologiques décrivant les solutions polymériques est accessible dans l'ouvrage de Bird *et al.* (1987a).

1.2.3.1 Modèle linéaire de Maxwell

J.-C. Maxwell a été le premier à proposer une équation constitutive pour les liquides viscoélastiques (Maxwell, 1867). Ce modèle est établi sur le cas particulier du cisaillement en combinant le comportement d'un solide de Hooke et d'un liquide Newtonien. Ces deux comportements sont dans un premier temps étudiés de façon distincte :

- Le cisaillement dans la direction x d'un liquide Newtonien de viscosité μ entre deux plaques parallèles est décrit en Figure 1.11-a). La contrainte de cisaillement exercée par le liquide s'écrit :

$$\tau_{yx}^l = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \dot{\gamma}_{yx}^l(t) \quad (1.27)$$

avec τ_{yx}^l la contrainte de cisaillement et $\dot{\gamma}^l = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$ le tenseur des taux de déformation. Au temps t , la contrainte est proportionnelle au gradient de vitesse.

- Le cisaillement dans la direction x d'un solide de Hooke entre deux plaques est décrit en Figure 1.11-b). La contrainte de cisaillement exercée par le solide s'écrit :

$$\tau_{yx}^s = G \frac{\partial v_x}{\partial y} = G \gamma_{yx}^s(t_0, t) \quad (1.28)$$

avec G le module élastique du solide, et t_0 le temps initial auquel le solide ne subit aucune contrainte autre que la pression ambiante. Il est important de noter que le tenseur des taux de déformation dépend de deux temps ; t_0 est un temps de référence auquel $\gamma_{yx}^s(t_0, t_0) = 0$. Ainsi, au temps t , la contrainte est proportionnelle à la déformation, en gardant en référence le temps t_0 . Le solide de Hooke garde alors en mémoire l'état qui le caractérisait en t_0 , en contraste avec le liquide Newtonien qui lui ne garde aucun événement en mémoire.

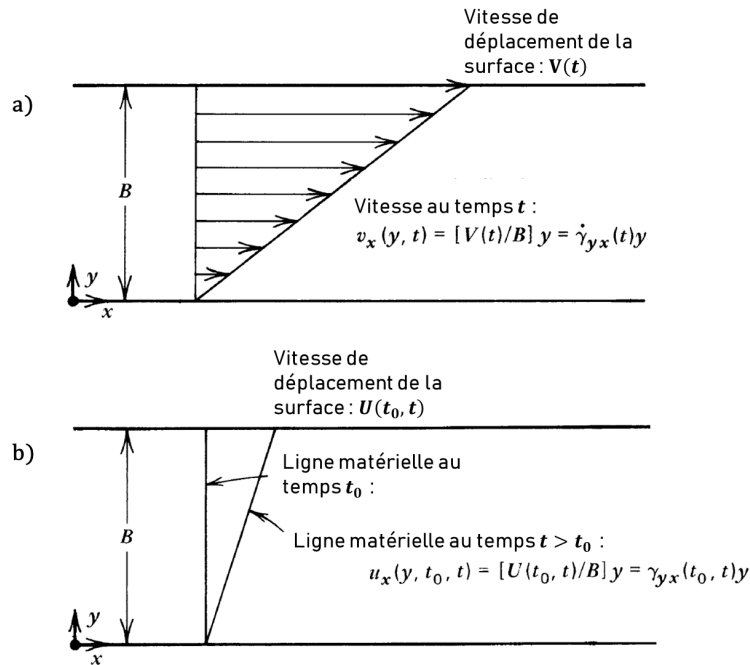


FIGURE 1.11 – Schématisation a) du cisaillement d'un liquide Newtonien et b) du cisaillement d'un solide de Hooke au cours du temps (Bird *et al.*, 1987a).

Le modèle de Maxwell consiste en un montage en série d'un solide de Hooke (représenté par un ressort) et d'un liquide Newtonien (représenté par un amortisseur) comme représenté en Figure 1.12.



FIGURE 1.12 – Représentation du modèle de Maxwell par assemblage d'un ressort et d'un amortisseur.

La contrainte et le taux de déformation de ce système résultant s'écrivent alors, respectivement :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^l + \boldsymbol{\tau}^s \quad (1.29)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^l = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^s \quad (1.30)$$

En reprenant le cas du cisaillement simple exposé précédemment, le système résultant est décrit par l'équation :

$$\tau_{yx} + \frac{\mu}{G} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} = \mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (1.31)$$

Pour un mouvement stationnaire, cette équation se réduit à celle d'un liquide Newtonien. En considérant une soudaine variation temporelle du mouvement, le terme lié à la dérivée temporelle de la contrainte est dominant et une intégration de l'équation dans le temps se réduit alors à l'équation du solide de Hooke. C'est ainsi que sur un temps de sollicitation long (régime permanent), le système viscoélastique se comporte comme un liquide Newtonien, et que sur un temps de sollicitation court, le système se comporte comme un solide de Hooke.

Une généralisation de l'étude est effectuée en considérant un mouvement arbitraire de faible amplitude du matériau viscoélastique. L'équation (1.31) est mise sous la forme tensorielle :

$$\boldsymbol{\tau} + t_r \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \mu_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.32)$$

où μ est remplacé par μ_0 la *viscosité à cisaillement nul* et le ratio μ/G par t_r le *temps de relaxation*. Cette équation est une équation différentielle et linéaire entre les tenseurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

1.2.3.2 Modèle linéaire de Jeffreys

Suite à l'introduction du modèle de Maxwell, un autre modèle, également linéaire, est proposé : le modèle de Jeffreys (Jeffreys, 1929). Ce modèle est proche de celui de Maxwell et consiste au montage équivalent illustré en Figure 1.13.

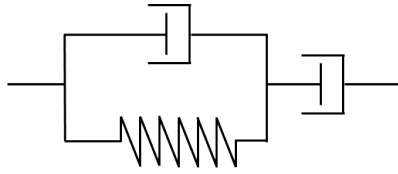


FIGURE 1.13 – Représentation du modèle de Maxwell par assemblage d'un ressort et de deux amortisseurs.

L'équation constitutive correspondant à ce modèle s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} + t_r \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \mu_0 \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}} + t_D \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial t} \right) \quad (1.33)$$

Cette équation constitutive se différencie de celle du modèle de Maxwell (Eq. 1.33) par la présence d'une dérivée temporelle du tenseur des taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ dont le facteur t_D est le *temps de retardation*. La mise en forme de ce modèle sous sa forme intégrale impose l'inégalité suivante (Jeffreys, 1929) :

$$t_D < t_r \quad (1.34)$$

1.2.3.3 Modèle quasi linéaire d'Oldroyd B

Afin de représenter la déviation des fluides viscoélastiques par rapport à un comportement Newtonien, Oldroyd (1950) propose trois *critères d'admissibilité des équations constitutives*, qui reposent sur l'indépendance des équations constitutives vis-à-vis :

- d'un cadre de référence.
- de la position dans l'espace, des mouvements de translation et rotationnels de l'élément fluide.
- de la déformation et de la contrainte propres aux éléments fluides voisins.

Afin de respecter ces trois critères, l'utilisation du *système de coordonnées convectées*, développées par Hencky (1925) est plus appropriée que l'utilisation d'un système cartésien classique. Un tel système de coordonnées se modifie avec l'élément fluide et garde en mémoire les déformations passées de celui-ci. En utilisant ce système de coordonnées, Oldroyd (1950) génère un modèle dit quasi-linéaire sur la base du modèle de Jeffreys en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées convectives. Le modèle obtenu est le *modèle d'Oldroyd B* et répond à l'équation constitutive suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} + t_r \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mu_0 \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}} + t_D \overset{\circ}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right)} \quad (1.35)$$

où l'opérateur $\overset{\circ}{\bullet}$ désigne l'opérateur de dérivée convective, défini par :

$$\overset{\circ}{\bullet} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \bullet - [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \bullet + \bullet \cdot (\nabla \mathbf{u})] \quad (1.36)$$

On notera que lorsque l'égalité $t_r = t_D$ est vérifiée, cette relation constitutive se réduit à celle d'un liquide Newtonien (Eq. 1.13). Le modèle d'Oldroyd B est un modèle qui comporte trois constantes μ_0 , t_r et t_D . Il permet de décrire certains aspects non-linéaires de la viscosité tout en conservant une certaine simplicité d'accès en vue de calculs théoriques ou d'analyses de résultats expérimentaux.

1.2.3.4 Autres modèles

Il existe néanmoins d'autres modèles rhéologiques faisant intervenir d'autres opérateurs différentiels et/ou des constantes supplémentaires. Comme présenté par Giacomini et Saengow (2022), ces modèles sont obtenus sur la base du modèle d'Oldroyd à 8 constantes développé par Oldroyd (1958) et sont plus ou moins sollicités selon les types d'applications concernés.

Les trois modèles rhéologiques présentés ci-avant ainsi que ceux découlant du modèle d'Oldroyd à 8 constantes sont basés sur le modèle moléculaire d'*haltères de Hooke*. Dans ce modèle moléculaire, une chaîne polymérique est représentée par des billes reliées entre elles par des forces de rappel linéaires qui permettent alors une extension infinie de la chaîne par le biais d'une viscosité élongationnelle infinie, ce qui n'est pas physiquement représentatif. Dans le *modèle FENE* (Finite Extensible Nonlinear Elastic), la force de rappel est formulée différemment, de telle sorte à ce qu'elle puisse être considérée linéaire pour de faibles taux d'extension de la chaîne polymérique, et non-linéaire pour des taux d'extension plus importants. Cette force de rappel est également finie, ne permettant pas une extension infinie de la chaîne. Une approximation rendant plus aisée l'utilisation de l'équation constitutive découlant de ce modèle est introduite par Peterlin (1961), donnant la dénomination *FENE-P*. Ce modèle est plus amplement détaillé dans l'ouvrage de Bird *et al.* (1987b) et le rapport de Bereaux (2004), notamment.

1.3 Instabilités et atomisation

Les équations de continuité, de mouvement, et constitutives décrites en section 1.1 servent à décrire au mieux les écoulements fluides. Trouver les solutions à ces équations n'est pas une chose acquise, et quand bien même celles-ci sont déterminées, elles ne sont pas toutes systématiquement observées dans la réalité. En effet, la stabilité des solutions joue alors un rôle majeur dans leur représentativité. Selon les physiciens Landau et Lifshitz (1959) :

”Malgré tout, toutes les solutions des équations de mouvement, même si elles sont exactes, ne peuvent se produire réellement dans la Nature. Les écoulements se produisant dans la Nature doivent non seulement obéir aux équations de la mécanique des fluides, mais aussi être stables.”

1.3.1 Instabilités hydrodynamiques

1.3.1.1 Généralités

Depuis près de deux siècles, les instabilités hydrodynamiques suscitent un intérêt particulier dans la communauté scientifique. C'est au cours du XIX^{ème} siècle que les premières observations, questionnements et concepts ont été posés, notamment par Reynolds, Helmholtz, Kelvin et Rayleigh. En particulier, les expérimentations de Reynolds (1883) ont permis de mettre en évidence la destabilisation d'un écoulement *laminaire*. Ces expérimentations ont consisté en l'observation de la dynamique d'un écoulement d'encre de viscosité cinématique ν dans un tuyau de diamètre a immergé d'eau au repos.

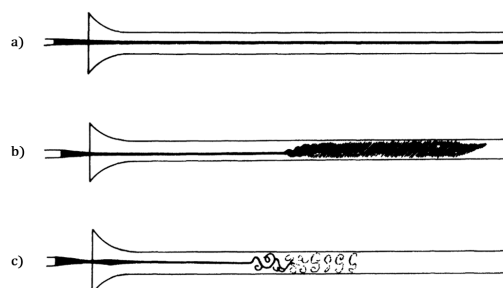


FIGURE 1.14 – Croquis de l'expérimentation de Reynolds (1883) : a) écoulement laminaire de l'encre dans le tuyau d'eau, b) transition vers la turbulence, c) transition vers la turbulence avec éclairage de l'écoulement d'encre.

Reynolds observe que pour de faibles vitesses V d'injection, une ligne d'encre distincte se propage sans perturbation (Figure 1.14-a)). En augmentant la vitesse d'injection de l'encre, la ligne d'encre vient à se mélanger à l'eau à partir d'une certaine distance de la sortie du tube (Figure 1.14-b)). Un éclairage de l'écoulement (Figure 1.14-c)) permet de mettre en évidence la formation de structures de différentes échelles dont le mouvement est chaotique et désordonné, caractéristique d'un écoulement *turbulent*. Il observe que cette destructuration du jet laminaire se produit lorsque le ratio Va/ν excède une certaine valeur critique. Ce nombre adimensionné est alors retenu comme le *nombre de Reynolds*, noté Re , spécifiant ainsi pour n'importe quel écoulement son régime dynamique : laminaire ou turbulent, par comparaison d'un nombre de Reynolds *critique* dont la valeur est approximativement 2400 (Reynolds, 1883).

Les travaux de Reynolds illustrent alors l'objectif premier de l'étude des instabilités hydrodynamiques : établir les conditions sous lesquelles un écoulement laminaire est "instable". D'un point de vue général, une instabilité hydrodynamique d'un système fluide se produit lorsque une perturbation de l'équilibre des forces extérieures, de l'inertie ou des contraintes visqueuses a lieu sur et/ou au sein du système. On qualifie le système de *stable* si celui-ci revient à un état d'équilibre et d'*instable* dans le cas contraire. La notion de stabilité d'un système est définie de manière plus approfondie avec une terminologie plus précise par Drazin et Reid (1981). En Figure 1.15, quatre types d'instabilités hydrodynamiques sont photographiées, elles correspondent à :

- L'instabilité de Rayleigh-Plateau d'un jet laminaire de liquide dans de l'air en Figure 1.15-a). L'effet destabilisateur de la tension de surface à faible vitesse engendre une déformation de la surface du jet amenant le jet à se rompre en gouttes.
- L'instabilité de Kelvin-Helmoltz d'un nuage dans l'atmosphère en Figure 1.15-b). Deux couches de fluides superposées de propriétés différentes se déplaçant à des vitesses différentes donnent naissance à des structures en forme de rouleaux sous l'effet destabilisateur de l'inertie.
- L'instabilité de Rayleigh-Bénard d'un volume liquide chauffée par le bas en Figure 1.15-c). Lorsque la différence de température entre deux plans horizontaux d'un volume fluide devient trop importante, le fluide se met en mouvement et forme des cellules de convections sous l'effet destabilisateur de la température.
- L'instabilité de Rayleigh-Taylor de deux couches fluides superposées en Figure 1.15-d). Lorsqu'un fluide plus dense est placé au dessus d'un fluide de moindre densité, l'effet destabilisateur de la gravité met en mouvement les deux fluides de façon à interchanger les deux couches fluides.

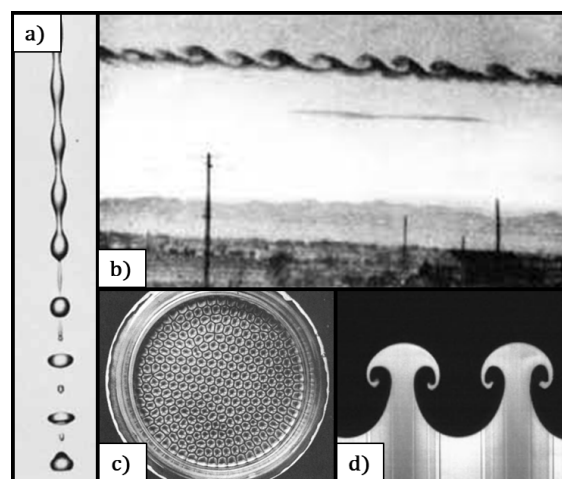


FIGURE 1.15 – Photographies de : a) une instabilité de Rayleigh-Plateau (Rutland et Jameson, 1971), b) une instabilité de Kelvin-Helmoltz (Drazin et Reid, 1981), c) une instabilité de Rayleigh-Bénard (Koschmieder et Pallas, 1974), d) une instabilité de Rayleigh-Taylor (Waddell *et al.*, 2001).

1.3.1.2 Analyses de stabilité temporelle

Il est théoriquement possible d'étudier la stabilité de tels systèmes au moyen d'*analyses de stabilité*. Après avoir convenu précisément d'un système d'étude, il convient de définir un *état de base* et une *perturbation*. L'état de base est un état d'équilibre laminaire du système. La perturbation est une modification infinitésimale de cet état de base. Elle est infinitésimale dans le sens où l'amplitude de la perturbation, qu'on notera ϵ , reste faible par rapport à l'amplitude associée à l'état de base.

Le *problème aux valeurs propres* est formulé et mis en équation au moyen de l'équation de continuité, de l'équation de mouvement, de l'équation constitutive et d'équations aux limites. Ces équations sont adimensionnées au moyen des échelles caractéristiques de longueur et de temps, respectivement le rayon a du jet non-perturbé et le temps capillaire $t_c = \sqrt{(\rho a^3)/\sigma}$. Dans la grande majorité des cas, le problème ainsi posé, qui peut être qualifié d'exact, comporte des *non-linéarités* qui rendent sa résolution exacte impossible. L'approximation la plus accessible consiste en la linéarisation du problème ; on parle alors d'analyse de stabilité *linéaire*.

Afin de résoudre le problème linéaire, l'approche classiquement adoptée est l'analyse en *modes normaux*. Elle consiste à attribuer une dépendance temporelle exponentielle à la perturbation. Les grandeurs physiques du problèmes sont alors proportionnelles à $e^{(-\alpha t)}$, où α est un nombre imaginaire dont la partie réelle correspond au *taux de croissance temporel* de l'instabilité et la partie imaginaire est liée à la *fréquence d'oscillation* associée. La présence d'un signe négatif dans cette dépendance exponentielle relève d'un choix de convention.

La résolution du système d'équation linéaire débouche sur une *relation de dispersion*. Cette relation de dispersion relie l'inconnue α aux autres paramètres du problèmes. Rayleigh (1878) est le premier à effectuer l'analyse de stabilité linéaire d'un jet de liquide, en considérant le liquide non-visqueux et en négligeant toute influence de l'air ambiant. La relation de dispersion résultante est alors la suivante :

$$\alpha^2 = k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \quad (1.37)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde de la perturbation et λ sa longueur d'onde. I_n désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'argument n , définie en Annexe A.

Cette relation comporte deux solutions que l'on notera α_1 et α_2 , et dont les parties réelles et imaginaires sont présentées en Figure 1.16. On peut remarquer que pour des nombres d'onde k inférieurs à l'unité, $Re(\alpha_1) < 0$ et $Re(\alpha_2) > 0$ est positif. Ainsi, pour $k < 1$, le mode associé à α_1 , évoluant avec une dépendance temporelle en $e^{(-\alpha_1 t)}$, est instable. De même, le mode associé à α_2 est stable pour $k < 1$. Pour des nombres d'onde supérieurs à l'unité, $Re(\alpha_1) = Re(\alpha_2) = 0$ ce qui permet de conclure en la stabilité du système. Le nombre d'onde $k_c = 1$ délimite le domaine stable du domaine instable ; il est appelé *nombre d'onde de coupure*.

Les parties imaginaires de ces solutions renseignent la fréquence d'oscillation de l'instabilité : $f_i = -Im(\alpha)/2\pi$. Lorsque cette fréquence n'est pas nulle, le régime est dit *oscillatoire*.

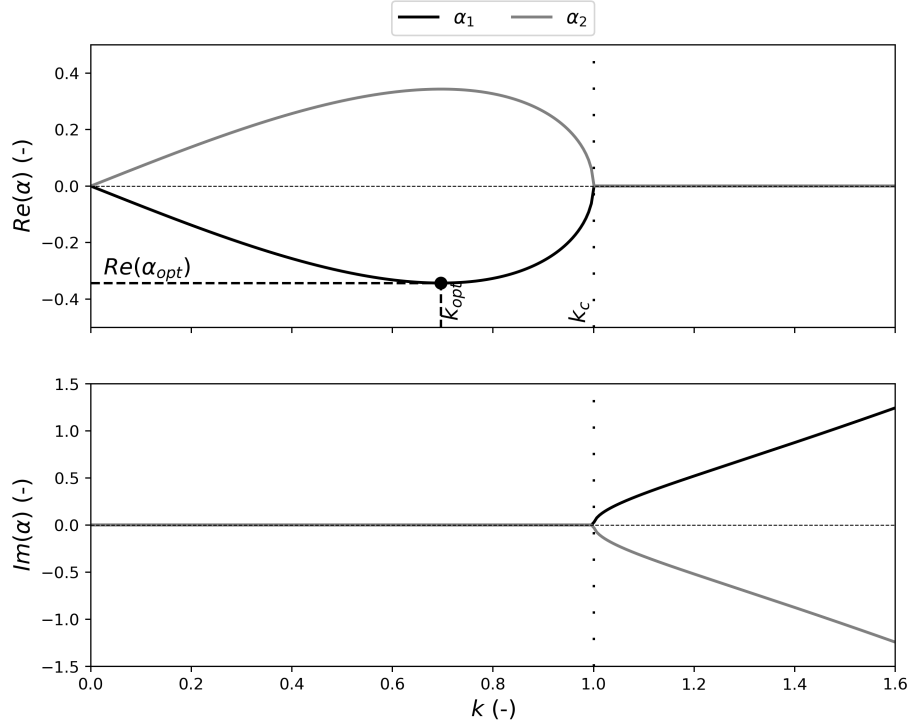


FIGURE 1.16 – Graphe de dispersion de la relation de dispersion (Eq. 1.37) établie par (Rayleigh, 1892) dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité temporelle d'un jet de liquide non-visqueux dans un milieu gazeux inerte.

Dans le cas d'un *jet libre*, la perturbation initiale n'est pas contrôlée, tous les modes associés aux solutions α sont susceptibles de se développer. Les modes stables sont amenés à être amortis dans le temps alors que l'amplitude des modes instables observe une croissance temporelle. Parmi les modes instables, le *mode optimal*, associé à la solution α_{opt} , se distingue par le taux de croissance le plus important, comme visible en Figure 1.16. Ce mode est caractérisé par un nombre d'onde optimal k_{opt} , auquel est associé la longueur d'onde optimale λ_{opt} . On a :

$$-Re(\alpha_{opt}) \simeq \frac{0.393}{t_c} \quad (1.38)$$

$$k_{opt} \simeq 0.696a \quad (1.39)$$

$$\lambda_{opt} = \frac{2\pi}{k_{opt}} \simeq 4.51(2a) \quad (1.40)$$

Dans le cas de *jets forcés*, la perturbation initiale est contrôlée au travers du nombre d'onde k , imposant ainsi un certain jeu de valeurs propres α .

En imposant des conditions initiales relatives aux grandeurs physiques du jet, il est possible de résoudre le *problème aux valeurs initiales*, visant à exprimer dans l'espace et le temps les grandeurs physiques relatives au jet, à savoir la déformation du jet et les champs de vitesses et de pression.

De multiples analyses de stabilité temporelles ont été réalisées depuis Rayleigh (1878), prenant en compte différents systèmes d'études. Parmi ces travaux :

- Rayleigh (1892) effectue l'analyse de stabilité linéaire d'un jet de liquide Newtonien dans une atmosphère au repos et d'influence négligée. Il établit la relation de dispersion d'un tel système et la résout numériquement pour des valeurs de viscosité très faibles. Une gamme de viscosité plus large est par la suite étudiée notamment par Weber (1931) et Chandrasekhar (2013). L'ensemble de ces travaux permettent de conclure à un effet stabilisateur de la viscosité du liquide, c'est-à-dire que le taux de croissance optimal est plus faible que celui trouvé dans le cas d'un liquide non-visqueux.
- Weber (1931) prend en compte les effets aérodynamiques dans son analyse de stabilité linéaire et conclut sur l'influence destabilisatrice d'une vitesse importante du jet, avec un nombre d'onde optimal plus important.
- Tomotika (1935) étudie l'influence de la viscosité du gaz ambiant sur la stabilité linéaire d'un jet de liquide Newtonien. Ces travaux sont repris et complétés par Meister et Scheele (1967) et concluent à un effet stabilisateur de la viscosité du gaz ambiant.
- Goldin *et al.* (1969) effectuent l'analyse de stabilité linéaire d'un jet de liquide viscoélastique dans une atmosphère au repos et d'influence négligée. Le liquide est représenté par le modèle Oldroyd-B exposé en section 1.2.3.3. Ils concluent à un effet moins stabilisateur de la viscoélasticité par rapport à l'effet de la viscosité.
- Goren et Gottlieb (1982) reprennent le travail de Goldin *et al.* (1969) en considérant l'existence d'une tension axiale non relaxée dans la phase liquide. Leur résultat montrent un effet stabilisateur de cette tension.
- Sterling et Sleicher (1975) reprennent l'analyse de Weber (1931) et y propose une correction portant sur la relaxation du profil de vitesses. La prise en compte d'un état initialement non-relaxé du profil de vitesse atténue l'influence destabilisatrice des effets aérodynamiques.
- García et González (2008) effectue l'analyse de stabilité linéaire d'un jet de liquide Newtonien dans une atmosphère au repos et d'influence négligée. Les auteurs formulent leurs résultats en distinguant deux types de perturbations initiales, l'une portant sur la surface du jet et l'autre sur le champ de vitesses. La formulation de la déformation de la surface en fonction du temps est effectuée en prenant en compte l'intégralité des modes associés aux solutions de la relation de dispersion et non pas seulement le mode optimal.
- Renoult *et al.* (2018) effectuent une analyse faiblement non-linéaire de la stabilité d'un jet de liquide Newtonien dans une atmosphère au repos et d'influence négligée. L'intégralité des modes associés aux solutions de la relation de dispersion est là aussi prise en compte. Le problème aux valeurs initiales est résolu.

Un plus large descriptif de ce panel d'analyses de stabilité est disponible dans l'article d'Eggers et Villiermaux (2008). De telles analyses de stabilité apportent des informations importantes relatives à l'influence de la nature du liquide et du milieu environnant sur le comportement d'un jet. Toutefois, ces analyses ne sont seulement valables que durant un faible laps de temps suivant le déclenchement de l'instabilité et ne permettent pas l'étude du jet dans son intégralité, c'est-à-dire de sa formation en sortie d'injecteur à sa rupture en gouttes. Une vue globale du jet est proposée dans la section suivante.

1.3.2 Dynamiques des jets capillaires

Le comportement de jets capillaires de liquides viscoélastiques peut être décomposé en différentes zones spatiales. Sous certaines conditions opératoires, ces zones sont au nombre de cinq : le régime neutre, le régime inertio-capillaire, le régime élasto-capillaire, le régime visco-capillaire, et le régime de gouttes qui survient après la rupture du jet. Ces différentes zones sont identifiées en Figure 1.17. Ci-après, un descriptif de ces cinq zones est proposé. Les observations et mécanismes mis en évidence dans la littérature existantes y sont exposés.

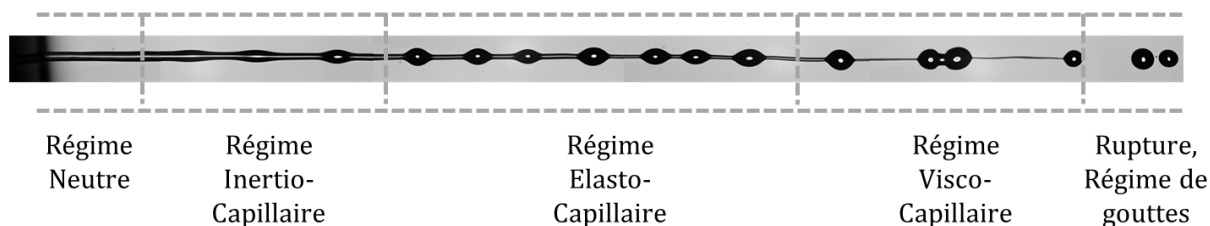


FIGURE 1.17 – Reconstitution d'un jet de liquide viscoélastique (eau, isopropanol 5 %, PEO 5ppm) à partir d'un assemblage d'images prises en différentes positions dans le cadre de cette thèse.

1.3.2.1 Régime Neutre

La *zone neutre* ou *zone de latence* d'un jet est introduite par Blaisot et Adeline (2003) dans le cadre d'études expérimentales de jets capillaires de liquides Newtoniens. Les auteurs définissent la zone neutre comme une zone du jet dans laquelle aucune croissance d'instabilité capillaire n'est observée. Ainsi, dans cette zone, il n'est pas exclu que des déformations de la surface du jet puissent être observées. Cependant, si celles-ci sont statiques et/ou qu'elles ne sont pas de type sinusoïdale, alors elles ne peuvent être considérées comme des déformations amorties par la capillarité. En effet, les déformations liées à une instabilité capillaire sont définies et connues comme étant instationnaires et sinusoïdales dans les premiers temps qui suivent son déclenchement. Cette zone est visible en Figure 1.17. Une telle zone a également été reportée dans les travaux expérimentaux de Christanti et Walker (2001) pour des liquides Newtoniens et également pour des liquides viscoélastiques.

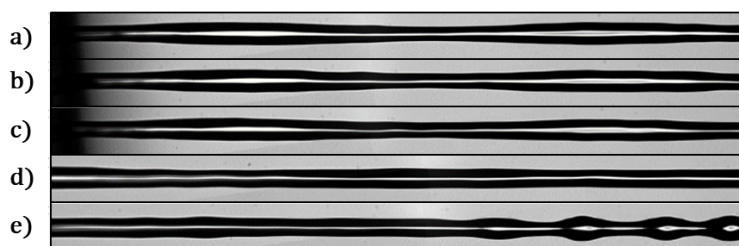


FIGURE 1.18 – Images d'un jet de liquide viscoélastique (eau, isopropanol 5 %, PEO 20ppm) à plusieurs distances z de l'injecteur : a), b), c) $z = 0$ mm, d) $z = 4$ mm, e) $z = 8$ mm. Images issues de Tirel (2019).

De légères variations de diamètre peuvent être observées entre le début de la zone de latence, correspondant à la sortie de l'injecteur, et la fin de cette zone, correspondant au déclenchement de l'instabilité capillaire. Tirel (2019) observe une déformation statique des jets de liquides viscoélastiques en sortie d'injecteur, comme visible en Figure 1.18. Cette déformation statique est due à une *perte de cylindricité* du jet, et témoigne de la relaxation du profil de vitesse interne du jet. La perturbation azimuthale du jet étant stable (Rayleigh, 1892), cette déformation est amortie.

D'autre part, à la sortie de l'injecteur, le jet de liquide n'a pas systématiquement un diamètre de l'ordre de celui de l'orifice de sortie. On observe (Figure 1.19) :

- Un phénomène de *contraction* pour des nombres de Reynolds relativement faibles : en sortie d'injecteur le diamètre du jet est moins important que celui de l'orifice de sortie.
- Un phénomène d'*expansion* pour des nombres de Reynolds relativement élevés : en sortie d'injecteur le diamètre du jet est plus important que celui de l'orifice de sortie.

Les phénomènes de contraction et d'expansion sont observés sur des jets de liquides Newtoniens et viscoélastiques. Cependant, Tanner (1983) met en évidence une bien plus grande amplitude de ces phénomènes lorsque le liquide est viscoélastique.

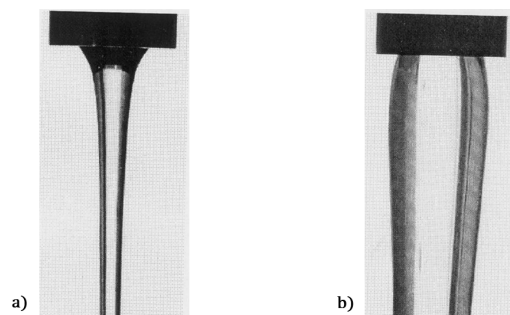


FIGURE 1.19 – Images de jets à la sortie de l'orifice (Liang *et al.*, 1999), observant : a) un phénomène de contraction, b) un phénomène d'expansion.

L'interprétation commune de cette forte différence est donnée par Weissenberg (1947) qui met en évidence l'existence d'une tension le long des lignes de courant d'un écoulement de liquide viscoélastique. Cette tension est créée par l'élongation et l'alignement des chaînes moléculaires en amont de l'orifice de sortie, dans la direction de l'écoulement. Les chaînes moléculaires agiraient alors comme des élastiques émettant une résistance à leur changement de conformation. Lors de l'éjection du liquide par l'orifice, cette tension se relaxe brutalement, produisant une contraction du liquide dans la direction axiale, et une expansion dans la direction radiale.

Un réarrangement du profil de vitesse a également lieu en sortie d'orifice dû à la relaxation des contraintes subies par l'écoulement dans le capillaire.

Ainsi, le régime neutre est caractérisé par des modifications de vitesses, de contraintes, et de conformations des chaînes polymériques. L'interprétation et la formulation de ces modifications dans la littérature actuelle ne sont cependant pas précises et unanimes et demeurent incomplètes.

1.3.2.2 Régime Inertio-Capillaire

Le *Régime Inertio-Capillaire*, qu'on pourra aussi noter RIC, est caractérisé par le déclenchement et le développement de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, introduits en section 1.3.1.2. Cette instabilité se déclenche par une perturbation de vitesse, de pression et/ou de surface du jet. Elle se manifeste par une déformation de la surface du jet de type sinusoïdale ou quasi-sinusoïdale dans les premiers instants qui suivent la perturbation, comme visible en Figure 1.17. Lord Rayleigh élabore un premier travail d'analyse linéaire de stabilité d'un jet de liquide non-visqueux en négligeant l'influence de l'air environnant (Rayleigh, 1878). Cette analyse linéaire suppose une décroissance temporelle exponentielle du diamètre du jet au niveau du cou D_{min} selon la formulation :

$$D_{min}(t) = 2a - \mu_0 e^{\left(-\alpha \frac{t}{t_c}\right)} \quad (1.41)$$

avec α le taux de croissance temporel de l'instabilité, a le rayon du jet non-perturbé et $t_c = \sqrt{(\rho a^3)/\sigma}$ le temps capillaire.

1.3.2.3 Régime Elasto-Capillaire

Dans le *Régime Elasto-Capillaire*, qu'on pourra aussi noter REC, les chaînes polymériques changent de conformation sous la contrainte induite par l'écoulement élongationnel. Des structures dites de *perles-sur-ficelle* se contruisent durant ce régime (McKinley, 2005). Ces structures sont caractérisées par des perles relativement sphériques reliées entre elles par un ligament de diamètre considérablement moindre, comme visible en Figure 1.17. La description théorique de l'émergence de ces structure est formulée par Entov et Yarin (1984) et Yarin (1993). Les ligaments sont le siège d'un *écoulement élongationnel*, au sein duquel le liquide est expulsé vers les perles. Durant le REC, le drainage du liquide est contrôlé par les forces élastiques provenant du déroulement des polymères. La viscoélasticité élongationnelle apparente du liquide augmente, et la dynamique d'amincissement de jet est exponentielle, avec un temps caractéristique qui est celui de la relaxation des polymères, selon la relation (Mathues *et al.*, 2018) :

$$D_{min}(t) = 2a e^{\left(-\frac{t}{2t_r}\right)} \quad (1.42)$$

D_{min} désignant le diamètre de ces ligaments.

1.3.2.4 Régime Visco-Capillaire

A la sortie du REC, les chaînes polymériques ont été déroulées et étirées à leur maximum. Dans le *Régime Visco-Capillaire*, qu'on pourra aussi noter RVC, la dynamique d'amincissement d'un ligament est alors linéaire et répond à l'équation (Stelter *et al.*, 2000) :

$$D_{min}(t) = 2a - \frac{\sigma}{\eta_{E,t}} t \quad (1.43)$$

avec $\eta_{E,t}$ la *viscosité élongationnelle terminale* et σ la *tension de surface*.

Au niveau du raccordement des perles et du ligament, un *pincement* ou *pinch-off* est susceptible de se former.

Sous certaines conditions opératoires, une deuxième instabilité capillaire se produit sur le filament. Comme l'exposent Li et Fontelos (2003), la tension de surface de la solution doit être

suffisamment forte pour que ces instabilités secondaires se produisent et donnent naissance à des perles secondaires, de moindre tailles que celles principales. Ce processus est illustré en Figure 1.20-a) d'après les travaux numériques de Li et Fontelos (2003).

Les mêmes auteurs étudient numériquement la stabilité des structures de perles-sur-ficelle, qu'elles soient constituées seulement de perles principales ou non. En particulier, la migration des perles les unes vers les autres, désignée sous le terme de *coalescence*, est étudiée et illustrée en Figure 1.20-b). Selon les auteurs, l'occurrence de ce phénomène est liée à un déséquilibre des forces au sein de la structures de perles-sur-ficelle, se traduisant par un gain de quantité de mouvement pour certaines perles. Les auteurs soulèvent deux sources de production de ce déséquilibre :

- Une axisymétrie des structures de perles-sur-ficelles.
- Une transformation de l'énergie capillaire en énergie cinétique lors de la formation des structures de perles-sur-ficelles.

Il est important de noter que le phénomène de coalescence ne modifie pas la dynamique d'amin-cissement du filament, auparavant décrite.

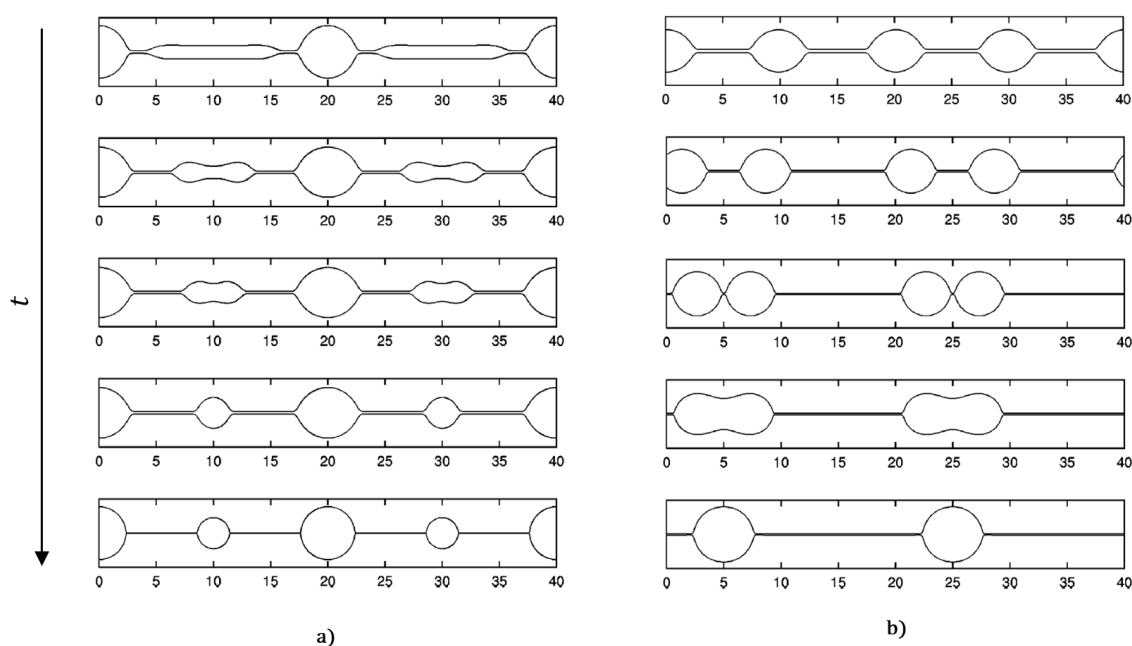


FIGURE 1.20 – Images extraites des travaux numériques de Li & Fontelos (2003) : a) Développement d'instabilités capillaires secondaires sur le filament. b) Coalescence de perles principales.

1.3.2.5 Rupture du jet et gouttes

A la fin du Régime Visco-Capillaire, les pincements cèdent sous les forces de tension de surface, marquant ainsi la *rupture* du jet. Des *gouttes* plus ou moins grosses et plus ou moins sphériques se forment. La séparation définitive des structures liquides en gouttes marque la fin du processus d'*atomisation*. L'ensemble des gouttes obtenues forme un *spray*. On distingue trois types de gouttes par ordre décroissant de diamètres (Christanti et Walker, 2001) :

- Les *gouttes principales* : Elles résultent de l'existence des perles dans le régime Visco-Capillaire et ont donc un diamètre comparable (plus élevé dans le cas de coalescence).
- Les *gouttes secondaires* : Comme exposé en section 1.3.2.4, le filament connectant les perles peut être le siège d'instabilités capillaires donnant naissance à des perles secondaires de moindre tailles. Ces dernières perles sont alors susceptibles d'évoluer en gouttes secondaires selon le mécanisme de rupture.
- Les *gouttes satellites* : Elles sont constituées du volume liquide contenu dans le filament, lorsque celui-ci ne se rétracte pas vers les gouttes principales ou secondaires.

La dénomination ici utilisée est celle de Christanti et Walker (2001) mais il est à noter qu'elle n'est pas adoptée par toute la communauté scientifique.

Ces trois types de gouttes ne sont pas systématiquement présents dans le spray et leur proportion varie selon les conditions de fonctionnement suivantes : géométrie de l'injecteur, propriétés du liquide et vitesse d'injection. En particulier, comme visible en Figure 1.21, les mesures expérimentales sur jets libres de Christanti et Walker (2001) donnent les conclusions suivantes :

- Pour les liquides viscoélastiques, la proportion des gouttes secondaires diminue lorsque la concentration en polymères est diminuée et lorsque la masse molaire du polymère est diminuée. Elle est quasi-nulle pour les liquides Newtoniens.
- Pour les liquides viscoélastiques, la proportion des gouttes satellites augmente lorsque la concentration en polymères est diminuée et lorsque la masse molaire du polymère est diminuée. Cette proportion est importante pour les liquides Newtonien.

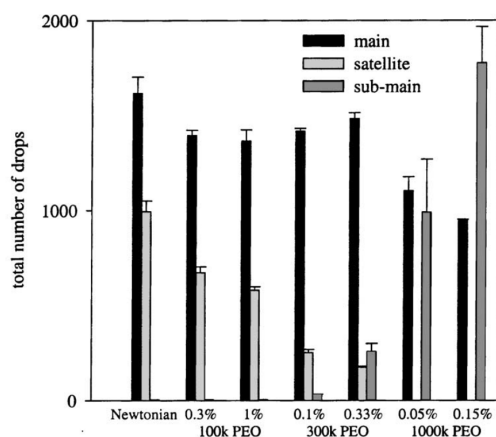


FIGURE 1.21 – Mesures expérimentales des proportions de gouttes principales ("main"), secondaires ("sub-main"), et satellites ("satellite") issues de la rupture de jets libres d'un liquide Newtonien et de différents liquides viscoélastiques (PEO à masse molaire et concentration variable) (Christanti et Walker, 2001).

D'autre part, les analyses non-linéaires de Ardekani *et al.* (2010) montrent que pour un jet de liquide viscoélastique, une augmentation du nombre d'onde de l'instabilité annihile le déclenchement d'une instabilité capillaire secondaire sur le filament, et amène donc la suppression de gouttes secondaires dans le spray.

Des prédictions de la longueur de rupture L_{bu} d'un jet et du diamètre D des gouttes principales sont effectuées à partir des résultats de l'analyse linéaire de stabilité d'un jet :

$$L_{bu} = \frac{U}{\alpha} \ln \left(\frac{a}{\epsilon} \right) \quad (1.44)$$

$$D = (6\lambda a^2)^{\frac{1}{3}} \quad (1.45)$$

avec U la vitesse moyenne du jet, α le taux de croissance temporel de l'instabilité, a le rayon du jet non-perturbé, ϵ l'amplitude de la perturbation initiale et λ la longueur d'onde de la perturbation. Ces prédictions s'avèrent satisfaisantes pour les liquides Newtoniens, même si souvent peu accessibles du fait de la difficulté de mesure du paramètre ϵ . En revanche, pour les liquides viscoélastiques elles ne peuvent s'appliquer du fait de la présence supplémentaire du régime élasto-capillaire qui retarde grandement la rupture.

1.3.3 Méthodes de mesure du temps de relaxation

Le temps de relaxation des polymères est un paramètre physique jouant un rôle important dans la dynamique d'amincissement des ligaments. Plusieurs méthodes et techniques d'analyse ont été développées permettant l'extraction de ce paramètre. Ces méthodes et techniques sont basées sur l'observation de l'écoulement d'un liquide viscoélastique dans différentes configurations.

1.3.3.1 Méthode du CaBER

Le *CaBER* (Capillary Breakup Extensional Rheometer) est un rhéomètre développé par Dinic *et al.* (2015). Il met en oeuvre la mesure du temps de relaxation d'un liquide par l'étude temporelle de l'amincissement d'un filament de liquide viscoélastique. Ce filament est formé de la façon suivante : au temps initial, un volume de liquide viscoélastique est disposé entre deux plaques au repos, formant un pont liquide. Très rapidement la plaque supérieure est écartée de la plaque inférieure puis remise au repos. En conséquence de ce mouvement, un écoulement élongationnel est observé, donnant naissance à un filament. Cette expérience est illustrée en Figure 1.22.

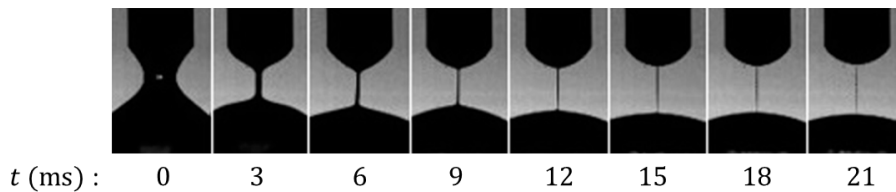


FIGURE 1.22 – Observations de l'amincissement d'un filament de liquide viscoélastique entre deux plaques par le rhéomètre CaBER (Dinic *et al.*, 2015).

Le temps de relaxation du liquide est extrait à partir du suivi temporel du diamètre du ligament, qui évolue en $\exp(-t/3t_r)$, tel que présenté par Stelter *et al.* (2000). L'utilisation du CaBER est très adaptée pour des solutions polymériques visqueuses contenant des polymères de masse molaire importante. Cependant, cette méthode est très limitée pour des solutions peu visqueuses. En effet, pour ces solutions, la dynamique d'amincissement du filament est trop rapide. De plus, un affaissement et une asymétrie des structures sous l'effet de la gravité compromettent les mesures.

1.3.3.2 Méthode du ROJER - jets forcés

La méthode du *ROJER* (Rayleigh Ohnesorge Jet Elongational Rheometer) basée sur l'étude de jets forcés et développée par Keshavarz *et al.* (2015) contourne ces limites. Le procédé consiste en la formation et l'excitation d'un jet de liquide viscoélastique à un nombre d'onde suffisamment élevé pour annihiler le développement d'instabilités capillaires secondaires sur la structure de perles-sur-ficelle. Le jet est éclairé par stroboscopie et une prise d'images permet le suivi temporel du diamètre du filament (Figure 1.23). La décroissance temporelle de cette échelle est fittée en $\exp(-t/3t_r)$ prédite selon les développements théoriques effectués par Bousfield *et al.* (1986). Cependant, comme le soulignent Mathues *et al.* (2018), les conditions expérimentales qui sont mises en oeuvre par la méthode du ROJER font apparaître un phénomène de *dripping* : au bout de la structure de perles-sur-ficelle se forme une perle de taille plus importante qui modifie légèrement la dynamique d'amincissement du filament en $\exp(-t/2t_r)$, selon Clasen *et al.* (2006). La méthode du ROJER est adaptée pour des solutions de faible viscosité. Lorsque l'élasticité augmente, le régime élasto-capillaire s'étend sur une zone spatiale plus importante, et la dynamique d'amincissement du jet ne peut alors être correctement mesurée par la méthode du ROJER.

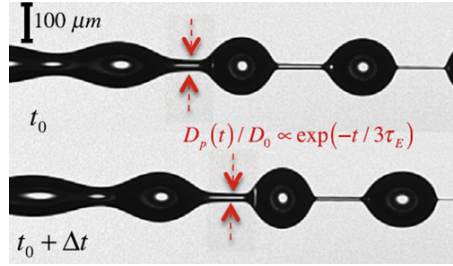


FIGURE 1.23 – Visualisation du jet par stroboscopie et repérage du diamètre du filament (Keshavarz *et al.*, 2015).

1.3.3.3 Méthode du ROJER - jets libres

Dans le cadre de ses travaux de thèse, Tirel (2019) met en oeuvre un protocole expérimental permettant la mesure du temps de relaxation à partir de l'étude de *jets libres*. La méthode de mesure du temps de relaxation est la même que celle du ROJER exposée ci-avant, mais la technique du suivi temporel de l'amincissement du ligament diffère. Les jets libres étant relativement moins reproductibles que des jets forcés, une approche statistique est nécessaire à l'étude de leur évolution. D'autre part, Tirel (2019) utilise une *méthode multi-échelles* permettant d'identifier différentes échelles caractéristiques du jet (Dumouchel *et al.*, 2017). Cette description multi-échelles requérant une haute résolution spatiale des images, un suivi temporel des structures liquides n'est pas permis par le système d'imagerie. Néanmoins, des analyses statistiques adaptées d'un large nombre d'images du jet telles que décrites par Tirel *et al.* (2017) et Tirel *et al.* (2020) permettent un suivi temporel des échelles caractéristiques moyennes. Un fit de ce suivi en $\exp(-t/2t_r)$ permet la mesure du temps de relaxation et de la viscosité élongationnelle terminale. Cette méthode multi-échelle a été appliquée sur des jets de liquides viscoélastiques (Eau, isopropanol 5%, PEO à concentration massique variable) en faisant varier le nombre de Reynolds du jet et le diamètre d'orifice de la buse d'injection. Les résultats obtenus par Tirel *et al.* (2020) pour plusieurs conditions d'expériences sont cohérents et en accord avec la corrélation empirique établie par Stelter *et al.* (2002), comme montré sur la Figure 1.24.

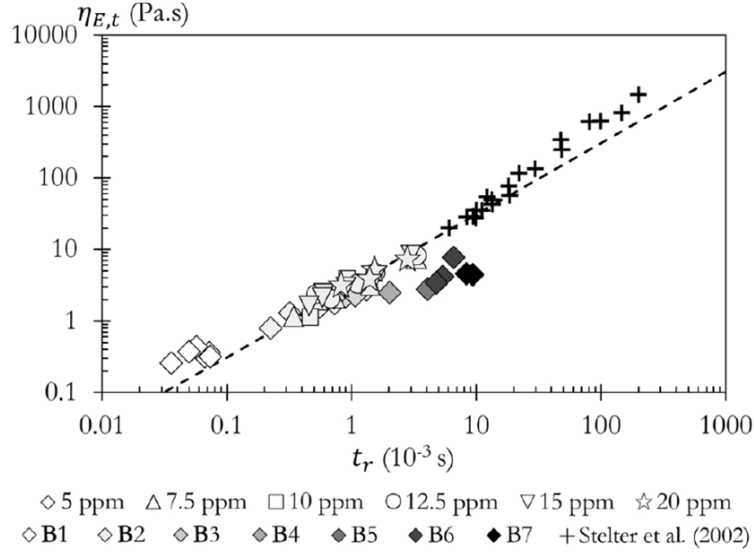


FIGURE 1.24 – Viscosité élongationnelle terminale en fonction du temps de relaxation pour différentes conditions opératoires (Tirel *et al.*, 2020).

1.3.3.4 Autres méthodes

D'autres méthodes de mesure de temps de relaxation et de viscosités élongationnelles ont également été développées par Fuller *et al.* (1987), James *et al.* (1990), Tirtaatmadja et Sridhar (1993), Rothstein (2003).

1.3.4 Mécanismes de dégradation des polymères

Comme décrit en section 1.2.1, les polymères sont des macromolécules ; sous certaines conditions, les liaisons ralliant les éléments de la chaîne polymérique peuvent être amenées à se rompre. On parle alors de *dégradation*. Il existe plusieurs types de processus causant la dégradation d'un polymère : chimique, enzymatique, radiative, ultrasonique et mécanique. Dans le cadre de la formation et l'évolution de jets de liquide viscoélastique tels qu'exposés précédemment, la *dégradation mécanique* est considérée, et les autres types de dégradation sont négligés. Selon Rognin *et al.* (2021), la dégradation d'une chaîne polymérique est fortement liée à trois paramètres :

- la solidité des liaisons qui forment la chaîne polymérique.
- le taux de déformation auquel la chaîne polymérique est sujette.
- la conformation de la chaîne polymérique.

Deux zones de l'écoulement sont à priori susceptibles d'observer de forts taux de déformation : la zone d'injection et la zone de Régime Elasto-Capillaire décrite en section 1.3.2.3.

1.3.4.1 Dégradation par le processus d'injection

Merrill et Leopairat (1980) effectuent des travaux expérimentaux visant à étudier l'influence des conditions d'injections sur la dégradation mécanique des polymères. Cette dégradation est évaluée à partir de la modification des distributions de masse molaires mesurées sur les liquides viscoélastiques avant et après injection, par la méthode de chromatographie par perméation de

gel. Les auteurs identifient alors les facteurs influant sur la dégradation des polymères dans l'injecteur et ceux dont l'influence est négligeable. Voici leurs principaux résultats :

- Le taux de scission des polymères est nulle pour des valeurs de vitesses d'écoulement à l'orifice en deçà d'une certaine valeur de vitesse critique. Cette vitesse critique varie comme l'inverse de la racine carrée de la masse molaire du polymère utilisé.
- Le taux de scission des polymères est proportionnel au nombre de passage du fluide dans l'injecteur (jusqu'à une limite d'environ cinq passages).
- En régime dilué, les interactions entre différentes chaînes polymériques sont très faibles si bien que leur contribution à la dégradation des chaînes polymériques dans l'injecteur est négligeable.
- En revanche, des interactions dites intramoléculaires sont susceptibles d'avoir lieu. La conformation initiale des chaînes polymériques est assimilée à des pelotes sphériques, et celles-ci sont contraintes de se dérouler dans une fenêtre temporelle d'environ 0,1 ms. Pendant ce laps de temps, des enchevêtrements peuvent alors survenir au sein d'une chaîne polymérique. L'écoulement élongationnel étant caractérisé dans cette zone par une transition du taux de déformation de 0 à environ 1 ms^{-1} , il est plausible que des liaisons covalentes reliant les éléments principaux de la chaîne polymérique puissent se rompre.
- Ni la longueur de l'orifice de décharge, ni la concentration en polymères de la solution ne semblent avoir d'influence sur le phénomène de dégradation dans l'injecteur.

Au-delà de ces résultats, les auteurs mesurent et comparent les distributions de masse molaire des solutions polymériques avant et après dégradation. Les résultats montrent que la scission des chaînes polymériques n'a pas lieu en leur milieu, et qu'il est probable que l'endroit de la scission soit aléatoire. Pour les auteurs, ce résultats est le signe que la scission des polymères n'a pas lieu lorsqu'ils sont entièrement déroulés, car dans le cas d'une telle configuration la scission aurait lieu au milieu. D'autres travaux expérimentaux tels que ceux de Nghe *et al.* (2010) et Garrepally *et al.* (2020) mettent également en évidence la scission des polymères et la dépendance de cette dégradation mécanique aux conditions d'injection et d'écoulement.

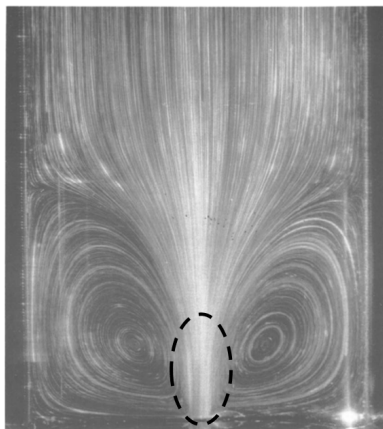


FIGURE 1.25 – Visualisation des lignes de courant d'un écoulement de liquide viscoélastique à l'intérieur d'un injecteur (Cartalos et Piau, 1992). La zone de taux de scission maximale selon Rognin *et al.* (2021) est représentée en point-tillés.

Dans leur travaux expérimentaux, Cartalos et Piau (1992) étudient les comportements des écoulements de liquides Newtoniens et viscoélastiques en proche amont de l'orifice de sortie d'injection. Cette zone est le siège de forts taux de déformation. Ces forts taux de déformation sont à la fois dus à la réduction brutale de la section de passage et à l'émergence sous certaines conditions de vitesses de zones de recirculation dans le corps de l'injecteur. Ces zones de recirculations sont visibles en Figure 1.25. Les simulations numériques de Rognin *et al.* (2021) désignent la zone en proche amont de l'orifice de sortie d'injecteur comme la zone caractérisée par un taux de scission maximal des chaînes polymériques. Cette zone est qualitativement représentée en point-tillés sur la Figure 1.25.

Dans leurs expériences de jets capillaires de liquides viscoélastiques (eau, isopropanol 5 % et PEO à concentration variable), Tirel *et al.* (2020) ont également reporté une dépendance des temps de relaxation mesurés aux conditions d'injections. La dégradation mécanique des polymères traduisant une réduction du temps de relaxation, les auteurs en déduisent l'existence d'une dégradation au niveau du processus d'injection. Ils évaluent le taux de déformation dans l'injecteur par le rapport $8Q_v/(\pi D_{or}^3)$ avec Q_v le débit volumique d'injection et D_{or} le diamètre de l'orifice de sortie de l'injecteur. Comme visible en Figure 1.26, leurs résultats confirment une augmentation de la dégradation dans l'injecteur avec une augmentation de la vitesse d'injection et une diminution du diamètre d'orifice. La concentration en polymères ne semble pas influencer ce processus de dégradation.

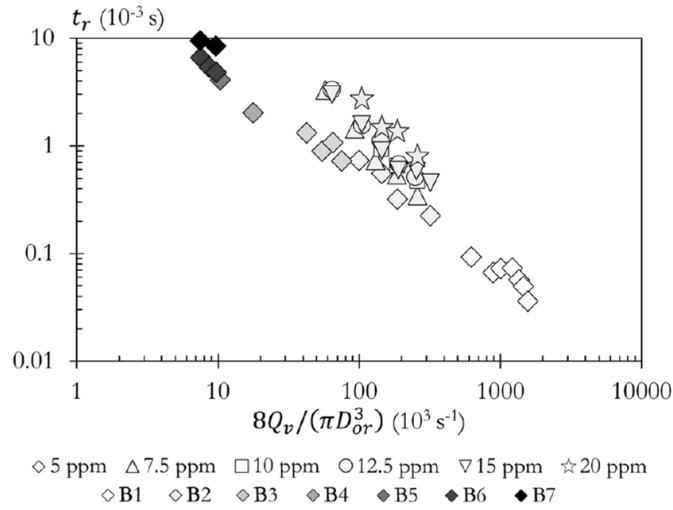


FIGURE 1.26 – Tracé des temps de relaxation mesurés en fonction du taux de déformation dans l'injecteur pour plusieurs conditions d'injection (Tirel *et al.*, 2020).

D'après les travaux expérimentaux de Dupas (2012), le mécanisme de dégradation mécanique des polymères engendré par le processus d'injection dépend du régime de dilution et de la qualité du solvant :

- En régime dilué, la qualité du solvant n'a pas d'effet. Cette observation vérifie par ailleurs les résultats de Horn et Merrill (1987).
- En régime semi-dilué, la dégradation est plus importante avec un bon solvant.

1.3.4.2 Dégradation dans un écoulement élongationnel

Un écoulement élongationnel peut être également le siège de forts taux de déformation pouvant amener une dégradation mécanique des chaînes polymériques. Les résultats expérimentaux de Nguyen et Kausch (1988) et Odell *et al.* (1990) montrent que la dégradation mécanique des polymères a lieu dans un écoulement élongationnel à deux conditions principales :

- Le taux de déformation doit être plus élevée qu'une valeur critique, notée $\dot{\epsilon}_f$, liée à la masse molaire des polymères par : $\dot{\epsilon}_f \propto M^{-0.95}$. Au-delà de cette valeur critique, le taux de scission augmente quasi-linéairement avec le taux de déformation.
- Le temps de résidence du polymère doit être supérieur à son temps de relaxation. Si cette condition n'est pas respectée mais que le taux de déformation est très élevé, une dégradation est tout de même susceptible de se produire mais le polymère n'est pas entièrement étiré.

D'après les travaux expérimentaux de Dupas (2012), le mécanisme de dégradation mécanique des polymères en régime stationnaire ne dépend pas de la qualité du solvant mais dépend du régime de dilution : cette dégradation est plus importante en régime semi-dilué qu'en régime dilué.

On note d'autre part qu'une dégradation se produisant dans l'écoulement élongationnel est moins accessible au diagnostic en comparaison avec une dégradation par le processus d'injection. En effet, cette deuxième potentielle dégradation ayant lieu après l'injection, il est difficile de mesurer les effets dégradant de l'écoulement en s'affranchissant de ceux potentiellement créés par l'injection.

1.4 Cadre de travail et objectifs

Les travaux de thèse décrits dans ce manuscrit ont pour objectifs de caractériser l'influence de la viscoélasticité sur le processus d'atomisation des jets capillaires. Cette thèse comprend un axe d'étude théorique et un axe d'étude expérimental et le manuscrit se décline en quatre chapitres dont le premier était l'introduction.

L'axe théorique consiste en l'analyse faiblement non-linéaire de stabilité temporelle d'un jet de liquide viscoélastique. La résolution du problème aux valeurs propres et du problème aux valeurs initiales est effectuée. Les résultats de cette analyse renseignent sur les conditions d'instabilité, sur ses caractéristiques (longueur d'onde et taux de croissance), et sur une formulation spatio-temporelle des grandeurs physiques relatives au jet (déformation de la surface du jet, champs de vitesses et de pression). Ce travail a été conduit en étroite collaboration avec le Professeur Günter Brenn de l'Institut de Mécanique des Fluides et d'Echanges Thermiques de Graz (Autriche). Ce travail a fait l'objet de deux communications orales en conférences internationales (Cottier *et al.* (2019a), Cottier *et al.* (2019b)) et de deux articles scientifiques publiés (Cottier *et al.* (2019b), Cottier *et al.* (2021)). Un article est également en cours d'écriture. Cet axe théorique est exposé en **Chapitre 2**.

L'axe expérimental consiste en l'analyse statistique de données expérimentales relatives à l'évolution de jets libres cylindriques de liquide viscoélastique dans de l'air au repos. La première partie de ces données correspond à des séries d'images de jets prises en des positions successives, et non-corrélées dans le temps. Pour chaque situation, un nombre suffisant d'images a été enregistré pour produire une analyse statistique des comportements. A partir de ces images, la distribution d'échelle des jets est mesurée, apportant des informations sur sa géométrie, sa morphologie, et sa topologie. Cette distribution a la particularité de faire abstraction de la localisation des structures dans l'image, ce qui constitue un avantage lorsqu'on souhaite ne s'intéresser qu'aux formes des structures observées. Alors que l'analyse de Tirel *et al.* (2020) était centrée sur l'évolution des distributions d'échelles moyennes, celle entreprise dans le cadre de cette thèse s'intéresse à la distribution de ces distributions. Des études statistiques sont alors effectuées d'une part sur les images, et d'autre part sur les distributions d'échelles instantanées. Les différents régimes décrits en section 1.3.2 sont identifiés et les propriétés rhéologiques des liquides sont mesurées. En outre, les caractéristiques de l'instabilité capillaire sont également mesurées, ainsi que les longueurs de ruptures et tailles de gouttes. Ces résultats sont présentés en corrélation avec l'aspect théorique et la littérature existante. En particulier, la tension axiale et les mécanismes de dégradation et de coalescence évoqués en section 1.3.2 sont discutés. Ce travail a fait l'objet de quatre communications orales, l'une durant une journée des doctorants et les trois autres durant des conférences internationales (Cottier *et al.* (2019c), Cottier *et al.* (2020), Dumouchel *et al.* (2021)). Un article de conférence a été publié (Dumouchel *et al.*, 2021) et un article dans un journal international est en préparation. Cet axe expérimental est exposé en **Chapitre 3**.

Enfin, le **Chapitre 4** contient les conclusions de ce travail de thèse. Pour chacun des deux axes qui le constitue, les mérites et les limites des méthodes mises en oeuvres sont énoncés. Une ouverture vers de nouveaux questionnements est réalisée et des perspectives de travail sont proposées afin d'y répondre.

Chapitre 2

Etude théorique de l'instabilité d'un jet de liquide viscoélastique

Sommaire

2.1	Définition du problème et objectifs	48
2.1.1	Formulation du problème	48
2.1.1.1	Présentation du système d'étude	48
2.1.1.2	Hypothèses de travail et simplifications	49
2.1.2	Mise en équations	50
2.1.2.1	Equations gouvernantes et d'état	50
2.1.2.2	Conditions de saut	50
2.1.2.3	Conditions initiales	51
2.1.2.4	Adimensionnalisation	55
2.2	Analyse faiblement non-linéaire	56
2.2.1	Méthode de résolution	56
2.2.1.1	Méthode de perturbation aux petites amplitudes	56
2.2.1.2	Introduction d'un taux de croissance temporel des perturbations	56
2.2.1.3	Utilisation de la fonction de courant de Stokes	57
2.2.1.4	Développement en série de Taylor des conditions de saut	57
2.2.2	Résolution du système d'ordre 1	58
2.2.2.1	Etablissement du système d'équations d'ordre 1	58
2.2.2.2	Resolution du problème aux valeurs propres	58
2.2.2.3	Résolution du problème aux valeurs initiales	61
2.2.3	Résolution du système d'ordre 2	63
2.2.3.1	Etablissement du système d'équations d'ordre 2	63
2.2.3.2	Resolution du problème aux valeurs propres	64
2.2.3.3	Résolution du problème aux valeurs initiales	74
2.2.4	Résolution des relations de dispersion	76
2.3	Résultats de l'étude théorique	77
2.3.1	Solutions des relations de dispersion	77
2.3.2	Intabilité linéaire du jet	79
2.3.2.1	Etat initial du jet	79
2.3.2.2	Mode optimal de perturbation	81
2.3.2.3	Régime oscillatoire	82
2.3.3	Instabilité faiblement non-linéaire des jets	83

2.3.3.1	Rupture de jets	83
2.3.3.2	Prédiction de gouttes secondaires	85
2.3.3.3	Influences des modes subdominants	88
2.3.3.4	Validité des prédictions	91
2.4	Conclusion de l'étude théorique	93

Dans ce deuxième chapitre, une analyse de stabilité faiblement non-linéaire est effectuée. Dans une première section, le problème est formulé et traduit sous forme d'équations. La méthode de résolution de ce problème est ensuite exposée dans une deuxième section, après quoi la résolution du problème est effectuée en distinguant *problème aux valeurs propres* et *problème aux valeurs initiales* :

- La prédiction du domaine de stabilité d'un système en fonction des caractéristiques de la perturbation est accessible par la résolution seule d'un *problème aux valeurs propres*.
- La caractérisation complète de l'évolution physique du système dans l'espace au cours du temps est accessible par la résolution d'un *problème aux valeurs initiales*.

Dans une troisième section, les résultats de cette analyse sont exploités afin de caractériser les effets de la viscoélasticité sur le comportement du jet. Pour plusieurs cas d'application, l'évolution temporelle de son interface est tracée et étudiée. Les temps de rupture et la formation de gouttes secondaires sont prédits. L'influence des différents modes de perturbation est analysée. La validité des prédictions est commentée.

Les développements théoriques présentés dans ce chapitre ont été réalisés à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica.

2.1 Définition du problème et objectifs

2.1.1 Formulation du problème

2.1.1.1 Présentation du système d'étude

Le *système d'étude* est constitué d'une phase liquide et d'une phase gazeuse. La phase liquide consiste en un liquide représenté par le modèle rhéologique Oldroyd-B, et dont les propriétés sont : ρ la densité, μ_0 la viscosité à cisaillement nul, σ la tension de surface, t_r le temps de relaxation et t_D le temps de retardation. La phase gazeuse consiste en un gaz inerte de densité et viscosité négligeables comparées à celles de la phase liquide.

L'*état de base* du système consiste en une colonne cylindrique de liquide de longueur infinie et de rayon a . Aucun écoulement n'existe dans la phase liquide. La pression associée à la phase liquide se réduit donc à la pression capillaire, et le tenseur des contraintes visqueuses est nul. La phase gazeuse environnant cette colonne de liquide est au repos.

La *perturbation* de l'état de base du système peut porter sur n'importe(s) quelle(s) grandeur(s) physique(s) du système et être de n'importe quelle forme. Il convient toutefois de choisir une perturbation représentative de ce qui est susceptible de se produire dans la réalité. C'est ainsi que dans le cadre de l'étude de jets capillaires, deux types de perturbation classiques se distinguent, d'après García et González (2008) :

- La perturbation de type *pure-deformation* : cette perturbation porte exclusivement sur la surface libre de la phase liquide du système, dans la direction radiale.
- La perturbation de type *pure-impulse* : cette perturbation porte exclusivement sur le champ de vitesses associé à la phase liquide du système. Elle exprime généralement une modification du débit.

Dans cette étude, les grandeurs physiques du système se réduisent exclusivement à celles associées à la phase liquide. Ces grandeurs X sont exprimées comme la superposition des grandeurs X^* dites "propres à l'état de base" et des grandeurs X' dites "propres à la perturbation" :

$$X = X^* + X'$$

Au vu de la géométrie du système et de son axisymétrie, les grandeurs sont décrites spatialement par les coordonnées cylindriques r et z dans le plan $(0, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$, et temporellement par la variable de temps t . Les variables et opérateurs de nature vectorielle ou tensorielle sont ici notés en gras. Les grandeurs physiques intervenant dans le problème étudié sont :

- La vitesse : $\mathbf{v}(r, z, t) = \mathbf{v}^*(r, z) + \mathbf{v}'(r, z, t) = \mathbf{v}'(r, z, t)$
- La pression : $p(r, z, t) = p^*(r, z) + p'(r, z, t) = \sigma/a + p'(r, z, t)$
- Les contraintes visqueuses : $\boldsymbol{\tau}(r, z, t) = \boldsymbol{\tau}^*(r, z) + \boldsymbol{\tau}'(r, z, t) = \boldsymbol{\tau}'(r, z, t)$
- La position de l'interface : $r_s(z, t) = r_s^*(z) + \eta'(z, t) = a + \eta'(z, t)$

Le système d'étude dans son état de base est schématisé en Figure 2.1.

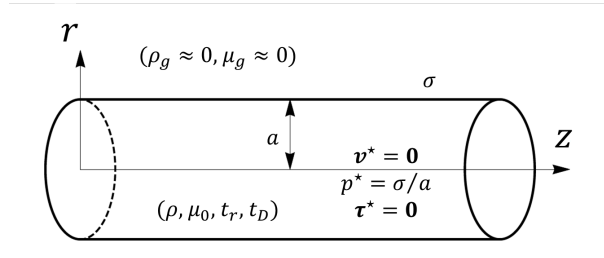


FIGURE 2.1 – Schéma de l'état de base du système d'étude.

2.1.1.2 Hypothèses de travail et simplifications

Les hypothèses et simplifications de travail adoptées dans le cadre de cette étude théorique sont les suivantes :

- Le système évolue dans des conditions isothermes.
- La phase liquide du système est incompressible.
- Les propriétés du liquide et du gaz sont considérées constantes.
- Les forces volumiques ne sont pas prises en compte, le nombre de Froude associé à la phase liquide étant supposé très large tout au long de l'évolution de celle-ci : $Fr = v^2/(g.a) \gg 1$
- Les effets de bords du système ne sont pas considérés : la colonne de liquide est supposée de longueur infinie et le milieu environnement est considéré de profondeur infinie.
- Le système liquide évolue de façon axisymétrique.
- La perturbation est considérée périodique monochrome de nombre d'onde k .

2.1.2 Mise en équations

Les opérateurs de dérivation partielle seront annotés à droite de la grandeur considérée :

$$X_{,y} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

Pour faciliter la lecture, on notera :

$$X_{,yz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

2.1.2.1 Equations gouvernantes et d'état

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

L'équation d'équilibre de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho (\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.2)$$

La projection de cette dernière équation sur \mathbf{e}_r s'écrit :

$$\rho (u_{,t} + uu_{,r} + wu_{,z}) = -p_{,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{rr})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \tau_{rz,z} \quad (2.3)$$

et sa projection sur \mathbf{e}_z s'écrit :

$$\rho (w_{,t} + uw_{,r} + ww_{,z}) = -p_{,z} + \frac{1}{r} (r\tau_{rz})_{,r} + \tau_{zz,z} \quad (2.4)$$

L'équation rhéologique constitutive s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} + t_r \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu_0 (\mathbf{D} + t_D \overset{\circ}{\mathbf{D}}) \quad (2.5)$$

où $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) / 2$ désigne le tenseur des taux de déformation. L'opérateur "°" désigne l'opérateur de dérivée convective défini en section 1.2.3.3 par l'équation (1.36). Il peut également s'écrire sous la forme :

$$\overset{\circ}{\bullet} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bullet + \mathbf{W} \cdot \bullet - \bullet \cdot \mathbf{W} - (\mathbf{D} \cdot \bullet + \bullet \cdot \mathbf{D}) \quad (2.6)$$

avec $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) / 2$ le tenseur de vortacité.

2.1.2.2 Conditions de saut

Les conditions de saut sont au nombre de trois et découlent d'un bilan de masse et de quantité de mouvement effectués à l'interface entre la phase liquide et la phase gazeuse, c'est-à-dire en $r = r_s$. Ces deux bilans donnent, respectivement :

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - v_n) = 0 \quad (2.7)$$

$$(p + \sigma \kappa) \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

où $\mathbf{n}(z, t)$ est le vecteur unitaire normal à l'interface liquide/gaz et dirigé vers la phase gazeuse, $v_n(z, t)$ est la vitesse normale à l'interface d'un élément de liquide situé à l'interface, $\kappa(z, t)$

désigne la courbure locale de l'interface et correspond à la somme des deux courbures principales de l'interface. Ces trois grandeurs s'expriment respectivement :

$$\mathbf{n}(z, t) = \frac{\nabla(r - r_s)}{|\nabla(r - r_s)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + r_{s,z}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -r_{s,z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$v_n(z, t) = \frac{-(r - r_s)_{,t}}{|\nabla(r - r_s)|} = \frac{r_{s,t}}{\sqrt{1 + r_{s,z}^2}} \quad (2.10)$$

$$\kappa(z, t) = \frac{r_{s,zz}}{(1 + r_{s,z}^2)^{3/2}} - \frac{1}{r_s(1 + r_{s,z}^2)^{1/2}} \quad (2.11)$$

Ainsi, l'équation (2.7) se réécrit, en $r = r_s$:

$$u - w\eta'_{,z} - \eta'_{,t} = 0 \quad (2.12)$$

Il s'agit de la première condition de saut qu'on désigne sous le nom de condition cinématique. En chaque point de l'interface, la vitesse radiale équivaut au taux de déformation matériel de l'interface en ce point.

L'équation vectorielle (2.8) est exploitée d'une part dans la direction normale à la surface et d'autre part dans la direction tangente à la surface, donnant ainsi naissance à deux conditions de saut supplémentaires.

Dans la première de ces directions, le terme $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$ correspond à la contrainte de cisaillement tangente à la surface. La deuxième condition de saut impose alors que ce terme soit nul du fait que l'influence dynamique de la phase gazeuse ambiante soit ici négligée. On a alors, en $r = r_s$:

$$\tau_{zr} - r_{s,z}(\tau_{zz} - \tau_{rr}) - r_{s,z}^2 \tau_{rz} = 0 \quad (2.13)$$

Dans la deuxième direction, le terme $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ correspond à la contrainte axiale normale à la surface. La troisième condition de saut impose alors que cette contribution ne diffère de la pression p induite par l'écoulement que par la contribution de tension de surface $\sigma\kappa$. On a alors, en $r = r_s$:

$$(1 + r_{s,z}^2)(p + \sigma\kappa) = \tau_{rr} - 2r_{s,z}\tau_{rz} + r_{s,z}^2\tau_{zz} \quad (2.14)$$

2.1.2.3 Conditions initiales

Les conditions initiales sont au nombre de trois et elles sont directement liées à la nature et à la forme de la perturbation imposée à l'état de base en $t = 0$. La formulation de ces conditions a fait l'objet d'un article (Cottier *et al.*, 2021) dont cette sous-section est inspirée. Cette formulation a été réalisée sur la base des travaux de García et Castellanos (1994) et García et González (2008) relatifs au cas Newtonien. Les conditions initiales sont ici exprimées de façon générale sans présumer du choix d'un type de perturbation (pure-impulse ou pure-déformation). Pour cela, deux paramètres de contrôle sont introduits : $\tilde{\eta}_p$ et \tilde{w}_p .

■ La **première condition initiale** correspond à la conservation du volume de liquide entre l'état de base et l'état perturbé au temps initial. On note $\eta_p(z)$ la perturbation de surface appliquée sur l'état de base. Cette perturbation consiste en une légère déformation sinusoidale monochrome de l'interface de la forme $\epsilon\tilde{\eta}_p \cos(kz)$ où $\epsilon\tilde{\eta}_p$ et k correspondent à l'amplitude et

au nombre d'onde de cette perturbation, respectivement. La condition initiale de conservation du volume nécessite la présence supplémentaire d'un terme correctif dans la fonction $\eta_p(z)$ égal à :

$$a \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon \tilde{\eta}_p}{a} \right)^2 \right]^{1/2} - a \quad (2.15)$$

Ainsi, la fonction de perturbation de l'interface s'écrit :

$$\eta_p(z) = \epsilon \tilde{\eta}_p \cos(kz) + a \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon \tilde{\eta}_p}{a} \right)^2 \right]^{1/2} - a \quad (2.16)$$

Au temps initial, les décompositions $r_s(z, 0) = a + \eta_p(z)$ et $r_s(z, 0) = a + \eta'(z, 0)$ sont équivalentes, et en conséquence la première condition initiale s'écrit :

$$\eta'(z, 0) = \epsilon \tilde{\eta}_p \cos(kz) + a \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon \tilde{\eta}_p}{a} \right)^2 \right]^{1/2} - a \quad (2.17)$$

■ La **deuxième condition initiale** correspond à la conservation du débit volumique entre l'état de base et l'état perturbé au temps initial. On note $w_p(r, z)$ la perturbation de vitesse axiale appliquée sur l'état de base. La dépendance axiale de cette perturbation de vitesse est supposée sinusoïdale, étant données la nature cosinusoidale de la dépendance axiale de la déformation de la surface et la formulation de l'équation de continuité en dimension 1 (Brenn, 2016) :

$$A_{,t} + (\bar{w}A)_{,z} = 0 \quad (2.18)$$

où A désigne l'aire de la section du jet et \bar{w} la vitesse axiale moyennée sur une section du jet.

La vitesse axiale moyenne de perturbation s'exprime par :

$$\bar{w}_p(z) = \epsilon \tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.19)$$

Au temps initial, les décompositions $w(r, z, 0) = w^* + w'(r, z, 0)$ et $w(r, z, 0) = w^* + w_p(r, z)$ sont équivalentes, et on a alors :

$$w'(r, z, 0) = w_p(r, z) \quad (2.20)$$

Cette équation intégrée sur une section du jet donne :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} w'(r, z, 0) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} w_p(r, z) r dr d\theta \quad (2.21)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} w'(r, z, 0) r dr d\theta = \bar{w}_p(z) \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} r dr d\theta \quad (2.22)$$

En considérant l'axisymétrie du problème et en utilisant l'expression de $\bar{w}_p(z)$, la deuxième condition initiale s'écrit :

$$\int_{r=0}^{r_s(z,0)} w'(r, z, 0) r dr = \frac{r_s^2(z, 0)}{2} \epsilon \tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.23)$$

■ La **troisième condition initiale** porte sur l'équation rhéologique constitutive du liquide, et plus précisément sur la composante $-zz$ du tenseur des contraintes visqueuses, que l'on désignera sous le terme de contrainte visqueuse axiale normale. On note $\tau_{zzp}(r, z)$ la contrainte visqueuse axiale normale de perturbation sur l'état de base. Cette grandeur peut être exprimée en fonction de la vitesse axiale de perturbation $w_p(r, z)$ au moyen d'une équation constitutive. La troisième condition initiale repose sur l'approximation de cette équation constitutive par celle d'un liquide Newtonien analogue. Elle se justifie par une vitesse nulle du jet dans son état de base et par une faible amplitude de perturbation de la vitesse axiale. On a alors :

$$\tau_{zzp}(r, z) = 2 \mu_0 w_{p,z}(r, z) \quad (2.24)$$

Cette équation, moyennée sur une section du jet, donne :

$$\overline{\tau_{zzp}}(z) = 2 \eta_0 \mu_0 k \tilde{w}_p \cos(kz) \quad (2.25)$$

Au temps initial, les décompositions $\tau_{zz}(r, z, 0) = \tau_{zz}^* + \tau'_{zz}(r, z, 0)$ et $\tau_{zz}(r, z, 0) = \tau_{zz}^* + \tau_{zzp}(r, z)$ sont équivalentes, et on a alors :

$$\tau'_{zz}(r, z, 0) = \tau_{zzp}(r, z) \quad (2.26)$$

Cette équation intégrée sur une section du jet donne :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} \tau'_{zz}(r, z, 0) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} \tau_{zzp}(r, z) r dr d\theta \quad (2.27)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} \tau'_{zz}(r, z, 0) r dr d\theta = \overline{\tau_{zzp}}(z) \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_s(z,0)} r dr d\theta \quad (2.28)$$

En considérant l'axisymétrie du problème et en utilisant l'expression de $\overline{\tau_{zzp}}(z)$, la troisième condition initiale s'écrit :

$$\int_{r=0}^{r_s(z,0)} \tau'_{zz}(r, z, 0) r dr = r_s^2(z, 0) \epsilon \mu_0 k \tilde{w}_p \cos(kz) \quad (2.29)$$

Le diagramme présenté en Figure 2.2 résume la formulation des conditions initiales selon le choix du type de perturbation appliquée sur l'état de base du jet.

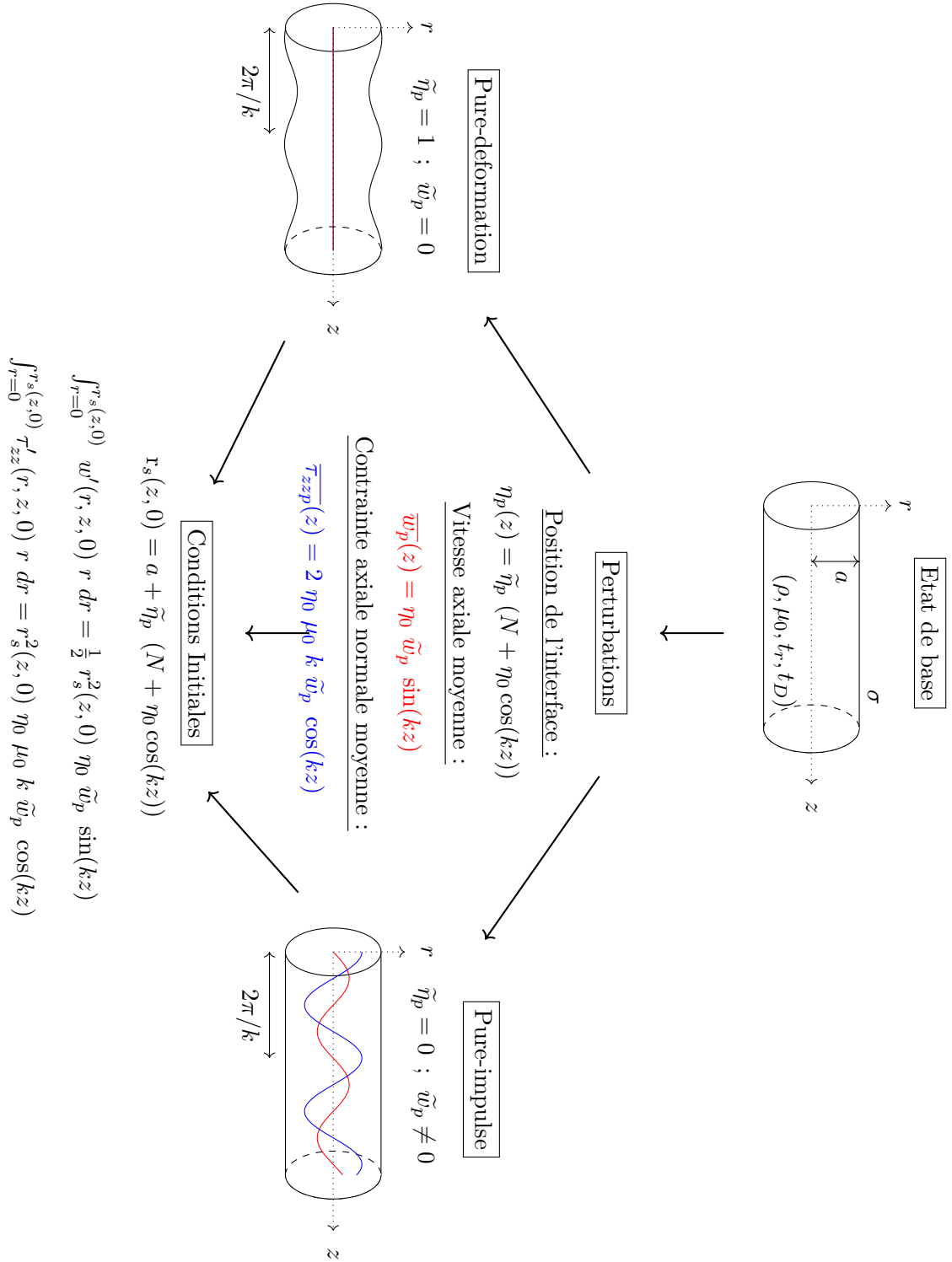


FIGURE 2.2 – Diagramme résumant la formulation générale des conditions initiales (Cottier *et al.*, 2021).

2.1.2.4 Adimensionnalisation

Les variables et équations du problème sont adimensionnalisées avec les échelles caractéristiques suivantes :

- Echelle caractéristique de longueur : a le rayon du jet non-déformé.
- Echelle caractéristique de pression : σ/a la pression capillaire.
- Echelle caractéristique de temps : $t_C = \sqrt{(\rho a^3)/\sigma}$ le temps capillaire.
- La contrainte visqueuse de référence : $\mu_0 \sqrt{(\sigma/(\rho a^3))}$.

Pour des questions de facilité de lecture, les grandeurs physiques adimensionnées seront notées de la même façon que les grandeurs dimensionnées. Le système d'équations complet adimensionné s'écrit :

Equations principales (en $r \leq r_s$) :

$$u_{,r} + \frac{1}{r}u + w_{,z} = 0 \quad (2.30)$$

$$u_{,t} + uu_{,r} + wu_{,z} = -p_{,r} + \frac{1}{r}(r\tau_{rr})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \tau_{rz,z} \quad (2.31)$$

$$w_{,t} + uw_{,r} + ww_{,z} = -p_{,z} + \frac{1}{r}(r\tau_{rz})_{,r} + \tau_{zz,z} \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\tau} + De_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2Oh_0(\mathbf{D} + De_2 \dot{\mathbf{D}}) \quad (2.33)$$

Conditions de saut (en $r = r_s$) :

$$u - w\eta_{,z} - \eta_{,t} = 0 \quad (2.34)$$

$$\tau_{zr} - r_{s,z}(\tau_{zz} - \tau_{rr}) - r_{s,z}^2 \tau_{rz} = 0 \quad (2.35)$$

$$(1 + r_{s,z}^2)(p + \sigma\kappa) = \tau_{rr} - 2r_{s,z}\tau_{rz} + r_{s,z}^2 \tau_{zz} = 0 \quad (2.36)$$

Conditions initiales :

$$\eta'(z, 0) = \epsilon\tilde{\eta}_p \cos(kz) + \left[1 - \frac{1}{2}(\epsilon\tilde{\eta}_p)^2\right]^{1/2} - 1 \quad (2.37)$$

$$\int_{r=0}^{r_s(z,0)} w'(r, z, 0) r dr = \frac{r_s^2(z, 0)}{2} \epsilon \tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.38)$$

$$\int_{r=0}^{r_s(z,0)} \tau'_{zz}(r, z, 0) r dr = r_s^2(z, 0) Oh_0 k \epsilon \tilde{w}_p \cos(kz) \quad (2.39)$$

Ce système d'équations est exact et est donc noté (S_{Exacte}). Six nombres adimensionnels apparaissent dans ce système : Oh_0 , De_1 , De_2 , k , $\epsilon\tilde{\eta}_p$ et $\epsilon\tilde{w}_p$.

- Les trois premiers nombres sont relatifs aux propriétés du liquide et à la géométrie de l'écoulement : Le nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = \mu_0 \sqrt{(\rho a^3)/\sigma}$ caractérise l'effet de la viscosité à cisaillement nulle. Les deux nombres de Deborah $De_1 = t_r/t_C$ et $De_2 = t_D/t_C$ représentent les temps de relaxation et de retardation adimensionnés, respectivement.
- Les trois derniers nombres sont relatifs à la perturbation initiale : k est le nombre d'onde adimensionné de la perturbation initiale. Les valeurs des paramètres sans dimension $\epsilon\tilde{\eta}_p$ et $\epsilon\tilde{w}_p$ sont relatives au choix de la perturbation initiale et à son amplitude : $\tilde{w}_p = 0$ pour le type pure-deformation et $\tilde{\eta}_p = 0$ pour le type pure-impulse.

2.2 Analyse faiblement non-linéaire

2.2.1 Méthode de résolution

2.2.1.1 Méthode de perturbation aux petites amplitudes

Le problème explicité par le système (S_{Exacte}) comporte des non-linéarités qui rendent sa résolution exacte inopérable. Afin d'approcher au mieux les solutions analytiques de ce système, la méthode des perturbation aux petites amplitudes est employée. Cette méthode consiste à développer le système (S_{Exacte}) en série de puissance du paramètre de perturbation ϵ . Pour ce faire, chaque grandeur physique X du problème est développée en série de puissance de ϵ :

$$X = \sum_{j=0}^{+\infty} X_j \epsilon^j$$

Chaque équation du système (S_{Exacte}) peut alors être exprimée en série de puissance de ϵ , ce qui amène à la décomposition suivante :

$$(S_{Exacte}) = \sum_{j=0}^{+\infty} (S_j) \epsilon^j$$

Pour $j = 0$, la grandeur X_0 est celle associée à l'état de base ($X_0 = X^*$), et le système S_0 correspond à l'état de base. Pour $j = 1$, le système S_1 est linéaire et peut être résolu de façon exacte. Pour $j = 2$, le système S_2 est non-linéaire. Cependant, les termes non-linéaires présents proviennent du produit de grandeurs $X_{(j=1)}$, dont l'expression a pu être déterminée lors de la résolution du système S_1 . Pour $j = 3$, le système S_3 est de même non-linéaire. Cependant, les termes non-linéaires présents proviennent du produit de grandeurs $X_{(j=1)}$ et de grandeurs $X_{(j=2)}$, dont les expressions ont pu être déterminées lors de la résolution des systèmes S_1 et S_2 . Ainsi, les systèmes S_j peuvent être résolus indépendamment par ordre j croissant. L'ordre d'un système désigne la puissance la plus élevée du paramètre ϵ contenue dans celui-ci.

La solution approchée est alors supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte que l'ordre résolu est grand et que l'amplitude de la perturbation ϵ est faible. Pour Poincaré (1892), la « série » de perturbation doit être comprise mathématiquement comme un développement asymptotique au voisinage de 0, et non comme une série ordinaire convergente uniformément.

2.2.1.2 Introduction d'un taux de croissance temporel des perturbations

Le système d'équations obtenu est constitué d'équations différentielles autonomes par rapport à la variable de temps t . Pour conséquence, la dépendance temporelle des grandeurs physiques impliquées est recherchée sous la forme exponentielle $e^{(-\alpha t)}$. La variable introduite α est de nature complexe ; sa partie réelle correspond au taux de croissance temporel de l'instabilité et sa partie imaginaire est reliée à la fréquence d'oscillation associée. L'expression de cette dépendance temporelle découle directement du choix d'une perturbation de type spatiale et de l'étude de l'instabilité d'un point de vue temporel. La configuration inverse est également possible et imposerait alors un nombre d'onde k complexe inconnu et la variable α imposée et réelle. Cette dernière configuration a été choisie dans certains travaux, mais présente plus de difficultés mathématiques. Pour cette raison, l'étude de stabilité temporelle est choisie de façon plus fréquente.

2.2.1.3 Utilisation de la fonction de courant de Stokes

L'utilisation d'une fonction de courant de Stokes ψ telle que :

$$u(r, z, t) = -\frac{1}{r}\psi_{,z}(r, z, t) \quad (2.40)$$

$$w(r, z, t) = \frac{1}{r}\psi_{,r}(r, z, t) \quad (2.41)$$

permet de satisfaire automatiquement de l'équation de conservation de la masse (2.30). Etant données l'axisymétrie du problème et l'absence de vitesse azimuthale, cette fonction permet également d'exprimer le débit volumique $Q_v(z, t)$ au travers de la section du jet située en z au temps t :

$$Q_v(z, t) = 2\pi (\psi(r_s, z, t) - \psi(0, z, t)) \quad (2.42)$$

On applique la décomposition aux fonctions de courants et de débit volumique :

$$\psi(r, z, t) = \psi^*(r, z, t) + \psi'(r, z, t) \quad (2.43)$$

$$Q_v(z, t) = Q_v^*(z, t) + Q_v'(z, t) \quad (2.44)$$

avec $\psi^*(r, z, t) = 0$ et $Q_v^*(z, t) = 0$.

Ainsi, la deuxième condition initiale (2.38) s'exprime de façon plus directe de la façon suivante :

$$\psi'(r_s, z, 0) - \psi'(0, z, 0) = \frac{r_s^2(z, 0)}{2} \epsilon \tilde{w}_p \sin(kz)$$

i.e.

$$Q_v'(z, 0) = \pi r_s^2(z, 0) \epsilon \tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.45)$$

2.2.1.4 Développement en série de Taylor des conditions de saut

Afin de faciliter l'exploitation des trois conditions de saut (2.34 - 2.36) valables à l'interface, i.e. en $r = r_s$, celles-ci sont exprimées en $r = 1$ à l'aide de développements en série de Taylor :

$$X|_{r=r_s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{(n)}|_{r=1}}{n!} (r_s - 1)^n = X|_{r=1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^{(n)}|_{r=1}}{n!} \eta^n \quad (2.46)$$

Ainsi, les trois conditions de saut se réécrivent, en $r = 1$:

$$u - w\eta_{,z} - \eta_{,t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{u^{(n)} + w^{(n)}\eta_{,z}}{n!} \right] \eta^n = 0 \quad (2.47)$$

$$\tau_{zr} - \eta_{,z}(\tau_{zz} - \tau_{rr}) - \eta_{,z}^2 \tau_{rz} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\tau_{zr}^{(n)} - \eta_{,z}(\tau_{zz}^{(n)} - \tau_{rr}^{(n)}) - \eta_{,z}^2 \tau_{rz}^{(n)}}{n!} \right] \eta^n = 0 \quad (2.48)$$

$$\tau_{rr} - \eta_{,z}(\tau_{rz} + \tau_{zr}) + \eta_{,z}^2 \tau_{zz} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\tau_{rr}^{(n)} - \eta_{,z}(\tau_{rz}^{(n)} + \tau_{zr}^{(n)}) + \eta_{,z}^2 \tau_{zz}^{(n)}}{n!} \right] \eta^n = 0 \quad (2.49)$$

2.2.2 Résolution du système d'ordre 1

2.2.2.1 Etablissement du système d'équations d'ordre 1

Le système d'équation d'ordre 1 s'écrit :

Equations principales (en $r \leq 1$) :

$$\frac{1}{r} (ru_1)_{,r} + w_{1,z} = 0 \quad (2.50)$$

$$u_{1,t} = -p_{1,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{rr1})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta 1}}{r} + \tau_{rz1,z} \quad (2.51)$$

$$w_{1,t} = -p_{1,z} + \frac{1}{r} (r\tau_{rz1})_{,r} + \tau_{zz1,z} \quad (2.52)$$

$$\tau_1 + De_1 \tau_{1,t} = 2Oh_0 (D_1 + De_2 D_{1,t}) \quad (2.53)$$

Conditions de saut (en $r = 1$) :

$$u_1 = \eta_{1,t} \quad (2.54)$$

$$\tau_{rz1} = 0 \quad (2.55)$$

$$-p_1 + \tau_{rr1} - (\eta_1 + \eta_{1,zz}) = 0 \quad (2.56)$$

Conditions initiales :

$$\eta_1(z, 0) = \tilde{\eta}_p \cos(kz) \quad (2.57)$$

$$Q_{v1}(z, 0) = \pi \tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.58)$$

$$\left[\int_{r=0}^{1+\epsilon\eta_1(z,0)} \epsilon \tau_{zz1}(r, z, 0) r dr \right]_{\epsilon} = Oh_0 k \tilde{w}_p \cos(kz) \quad (2.59)$$

2.2.2.2 Resolution du problème aux valeurs propres

L'objectif de la résolution du problème aux valeurs propres est de déterminer sous quelles conditions de perturbation le jet évolue de façon instable. Pour cela, le système constitué des équations gouvernantes, d'état et de saut est résolu en admettant une dépendance temporelle des grandeurs de perturbation en $e^{-\alpha t}$ et une dépendance vis-à-vis de la coordonnée axiale z en e^{ikz} . Une relation reliant α aux autres paramètres est recherchée. La résolution de ce problème aux valeurs propres a fait l'objet d'un article de conférence (Cottier *et al.*, 2019b) dont cette sous-section est inspirée.

Etant donné la dépendance temporelle des grandeurs physiques, la relation constitutive de premier ordre (2.53) s'écrit :

$$\tau_1 = 2 \frac{1 - \alpha_1 De_2}{1 - \alpha_1 De_1} Oh_0 \mathbf{D}_1 := 2Oh_{v1} \mathbf{D}_1 \quad (2.60)$$

Ce résultat signifie que le tenseur des contraintes visqueuses de premier ordre ne diffère de celui d'un liquide Newtonien que par un facteur multiplicatif qui ne dépend que des deux nombres de Deborah De_1 et De_2 et du taux de croissance de premier ordre α_1 . Par conséquent, la résolution du problème aux valeurs propres à l'ordre 1 peut s'effectuer en suivant une même méthodologie que pour le cas Newtonien, comme celle exposée dans les travaux de Renoult *et al.* (2018).

En premier lieu, l'opérateur rotationnel est appliqué à l'équation vectorielle d'équilibre de la quantité de mouvement. En utilisant la définition de la fonction de courant ψ (section 2.2.1.3), cette équation peut se réécrire :

$$\left(\frac{1}{Oh_{v1}} \frac{\partial}{\partial t} - E^2 \right) (E^2 \psi_1) = 0 \quad (2.61)$$

où l'opérateur différentiel E^2 est défini de la façon suivante :

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.62)$$

Comme exposé dans l'ouvrage de Brenn (2016), la solution à l'équation (2.61) est de la forme :

$$\psi_1(r, z, t) = [C_1 r I_1(kr) + C_2 r K_1(kr) + C_3 r I_1(l_{v1}r) + C_4 r K_1(l_{v1}r)] e^{ikz - \alpha_1 t} \quad (2.63)$$

où $l_{v1}^2 = k^2 - \alpha_1 / Oh_{v1}$ définit le nombre d'onde modifié de premier ordre et C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes à déterminer. I_ν et K_ν désignent les fonctions de Bessel modifiées de première espèce et de seconde espèce d'argument ν , respectivement. Ces fonctions sont définies en Annexe A. La fonction de Bessel modifiée de second espèce K_1 étant divergente en 0, les constantes C_2 et C_4 sont annulées afin que la solution (2.63) soit définie partout dans le jet, y compris sur son axe, en $r = 0$. Les deux constantes restantes, C_1 et C_3 , sont déterminées par les conditions de saut (2.34) et (2.35) et sachant la nature cosinusoidale de la déformation de premier ordre de l'interface :

$$\eta_1(z, t) = \hat{\eta}_1 e^{ikz - \alpha_1 t} \quad (2.64)$$

avec $\hat{\eta}_1$ l'amplitude initiale de la déformation de premier ordre.

L'expression de ces deux constantes est :

$$C_1 = -\frac{i\alpha_1 \hat{\eta}_1}{k I_1(k)} \frac{l_{v1}^2 + k^2}{l_{v1}^2 - k^2} = \frac{i\hat{\eta}_1}{k I_1(k)} (2k^2 Oh_{v1} - \alpha_1) \quad (2.65)$$

$$C_3 = \frac{i2\alpha_1 \hat{\eta}_1}{I_1(l_{v1})} \frac{k}{l_{v1}^2 - k^2} = -\frac{i2\hat{\eta}_1 Oh_{v1} k}{I_1(l_{v1})} \quad (2.66)$$

Ainsi, la fonction de courant de premier ordre s'exprime :

$$\psi_1(r, z, t) = [C_1 r I_1(kr) + C_3 r I_1(l_{v1}r)] e^{ikz - \alpha_1 t} := \psi_{1a}(r, z, t) + \psi_{1b}(r, z, t) \quad (2.67)$$

A partir de cette expression, les vitesses radiale et axiale de premier ordre sont déterminées :

$$u_1 = \hat{\eta}_1 Oh_{v1} \left[(l_{v1}^2 + k^2) \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} - 2k^2 \frac{I_1(l_{v1}r)}{I_1(l_{v1})} \right] e^{ikz - \alpha_1 t} \quad (2.68)$$

$$w_1 = i\hat{\eta}_1 Oh_{v1} \left[(l_{v1}^2 + k^2) \frac{I_0(kr)}{I_1(k)} - 2kl_{v1} \frac{I_0(l_{v1}r)}{I_1(l_{v1})} \right] e^{ikz - \alpha_1 t} \quad (2.69)$$

L'expression de la pression de premier ordre $p_1(r, z, t)$ dans la phase liquide peut être obtenue à partir de l'équation d'équilibre de la quantité de mouvement projetée sur \mathbf{e}_r (2.51) ou sur \mathbf{e}_z (2.52). Pour cette étude, l'utilisation de l'équation projetée sur \mathbf{e}_z offre plus de facilité vis-à-vis de l'intégration par rapport à la variable z . On trouve :

$$p_1(r, z, t) = -i\alpha_1 C_1 I_0(kr) e^{ikz - \alpha_1 t} + f(t, r) \quad (2.70)$$

La fonction d'intégration f est annulée afin de satisfaire la condition de saut (2.56).

En développant cette dernière condition de saut, la relation de dispersion du jet s'écrit :

$$DR_1 : \alpha_1^2 + \alpha_1 B_1(\alpha_1, k, Oh_0, De_1, De_2) + C_1(\alpha_1, k, Oh_0, De_1, De_2) = 0 \quad (2.71)$$

$$\text{avec : } B_1(\alpha_1, k, Oh_0, De_1, De_2) = -2k^2 Oh_{v1} \left[1 - \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \left(\frac{1}{k} + \frac{2kl_{v1}}{l_{v1}^2 + k^2} \left(\frac{I_1(l_{v1})}{I_0(l_{v1})} - \frac{1}{l_{v1}} \right) \right) \right]$$

$$C_1(\alpha_1, k, Oh_0, De_1, De_2) = -k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \frac{l_{v1}^2 - k^2}{l_{v1}^2 + k^2}$$

La relation de dispersion a été énoncée pour la première fois par Goldin *et al.* (1969). Comme le prédit le modèle d'Oldroyd-B présenté en section 1.2.3.3, lorsque $De_1 = De_2$, le facteur Oh_{v1} vaut Oh_0 et cette relation de dispersion se réduit à celle d'un jet de liquide Newtonien, présentée pour la première fois par Rayleigh (1892).

De part la nature transcendente de la relation de dispersion et la nature complexe de son inconnue α_1 , sa résolution présente des difficultés à la convergence, et fait alors elle-même l'objet de recherches d'optimisation de calcul. La méthode qui a été employée dans le cadre de cette thèse est basée sur le théorème intégrale de Cauchy et développée par Luck *et al.* (2015). Cette méthode sera plus largement exposée en section 2.2.4.

Cette relation de dispersion admet quatre solutions complexes distinctes, continues vis-à-vis de la variable k , dont une identiquement nulle que nous omettrons dans la suite de l'analyse. Les trois autres solutions sont notées α_{1d} , α_{1sa} et α_{1sb} . Ces trois dernières solutions sont désignées sous le terme de *solutions capillaires* ; il existe une infinité d'autres solutions appelées *solutions hydrodynamiques*, dont les amplitudes sont si faibles qu'elles peuvent être ignorées, d'autant plus que ces solutions sont associées à des modes stables, d'après les travaux de García et González (2008). Les caractéristiques des solutions capillaires seront discutées en section 2.3.2.

En comptabilisant les trois solutions non-identiquement nulles de la relation de dispersion, la surface du jet est exprimée de la façon suivante :

$$\eta_1(z, t) = (\hat{\eta}_{1sa} e^{-\alpha_{1sa} t} + \hat{\eta}_{1sb} e^{-\alpha_{1sb} t} + \hat{\eta}_{1d} e^{-\alpha_{1d} t}) \cos kz = \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \cos(kz) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.72)$$

La fonction de courant, la vitesse radiale, la vitesse axiale et la pression de premier ordre s'expriment alors, respectivement :

$$\psi_1(r, z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} -\frac{r I_1(kr)}{k I_1(k)} \hat{\eta}_{1u} (2k^2 O h_{v1u} - \alpha_{1u}) \sin(kz) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.73)$$

$$+ \sum_{u=d,sa,sb} 2k O h_{v1u} r \hat{\eta}_{1u} \frac{I_1(l_{v1u} r)}{I_1(l_{v1u})} \sin(kz) e^{-\alpha_{1u} t}$$

$$:= \sum_{u=d,sa,sb} \psi_{1a}^u(r, z, t) + \sum_{u=d,sa,sb} \psi_{1b}^u(r, z, t)$$

$$u_1(r, z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left[(2k^2 O h_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} - 2 O h_{v1u} k^2 \frac{I_1(l_{v1u} r)}{I_1(l_{v1u})} \right] \cos(kz) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.74)$$

$$:= - \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} f_u^u(r) \cos(kz) e^{-\alpha_{1u} t}$$

$$w_1(r, z, t) = - \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left[(2k^2 O h_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{I_0(kr)}{I_1(k)} - 2 O h_{v1u} k l_{v1u} \frac{I_0(l_{v1u} r)}{I_1(l_{v1u})} \right] \sin(kz) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.75)$$

$$:= - \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} f_w^u(r) \sin(kz) e^{-\alpha_{1u} t}$$

$$p_1(r, z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} \frac{\hat{\eta}_{1u} \alpha_{1u}}{k} \frac{I_0(kr)}{I_1(k)} (2k^2 O h_{v1u} - \alpha_{1u}) \cos(kz) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.76)$$

Dans ces expressions, seules les amplitudes de déformation initiales $\hat{\eta}_{1sa}$, $\hat{\eta}_{1sb}$ et $\hat{\eta}_{1d}$ sont inconnues.

2.2.2.3 Résolution du problème aux valeurs initiales

La résolution du problème aux valeurs initiales a pour but de déterminer une expression complète des grandeurs physiques du problème. La résolution du problème aux valeurs propres en section 2.2.2.2 ne laisse que trois variables inconnues dans l'expression de ces grandeurs : $\hat{\eta}_{1sa}$, $\hat{\eta}_{1sb}$ et $\hat{\eta}_{1d}$. Ces amplitudes sont déterminées à partir des trois conditions initiales de premier ordre (2.57 - 2.59) :

■ La **première condition initiale** de premier ordre (2.57) associée à l'expression de la déformation de la surface de premier ordre (2.72) donne :

$$\sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} = \tilde{\eta}_p \quad (2.77)$$

■ La **deuxième condition initiale** de premier ordre (2.58) se réécrit en utilisant la définition du débit volumique (2.42) :

$$\psi_1(1 + \epsilon \eta_1(z, 0), z, 0) - \psi_1(0, z, 0) = \frac{\tilde{w}_p}{2} \sin(kz) \quad (2.78)$$

En utilisant l'expression de $\psi_1(r, z, t)$ (2.73) et sachant que $I_1(0) = 0$, on a :

$$\sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left(\begin{array}{c} (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{r I_1(kr)}{k I_1(k)} \\ -2 Oh_{v1u} k \frac{r I_1(l_{v1u} r)}{I_1(l_{v1u})} \end{array} \right) \sin(kz) = -\frac{\tilde{w}_p}{2} \sin(kz) \quad (2.79)$$

En utilisant l'expansion en série de Taylor (A.1), la deuxième condition initiale se réduit à :

$$\sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \alpha_{1u} = \frac{1}{2} k \tilde{w}_p \quad (2.80)$$

■ Afin d'exploiter la **troisième condition initiale** de premier ordre (2.59), il convient d'exprimer $\tau_{zz1}(r, z, t)$ en utilisant l'équation constitutive de de premier ordre (2.53) :

$$\tau_{zz1}(r, z, t) + De_1 \tau_{zz1,t}(r, z, t) = 2 Oh_0 (w_{1,z}(r, z, t) + De_2 w_{1,z,t}(r, z, t)) \quad (2.81)$$

En considérant la dépendance temporelle exponentielle de la vitesse axiale de premier ordre selon trois modes, on peut décomposer τ_{zz1} de la façon suivante :

$$\tau_{zz1}(r, z, t) := \sum_{u=d,sa,sb} \tau_{zz1u}(r, z) e^{-\alpha_{1u} t} \quad (2.82)$$

Ainsi, l'équation (2.53) peut s'écrire sous la forme des trois équations :

$$\tau_{zz1u}(r, z) = 2 Oh_0 \frac{1 - \alpha_1 De_2}{1 - \alpha_1 De_1} w_{1u,z}(r, z) = 2 Oh_{v1u} w_{1u,z}(r, z) \quad \forall u \in (d, sa, sb) \quad (2.83)$$

Le terme de gauche de l'équation (2.59) s'écrit alors :

$$\left[\int_{r=0}^{1+\epsilon \eta_1(z,0)} \sum_{u=d,sa,sb} 2\epsilon Oh_{v1u} w_{1u,z}(r, z) r dr \right]_{\epsilon} \quad (2.84)$$

et en utilisant l'expression de la vitesse axiale de premier ordre (2.75) :

$$\left[-2 \epsilon \int_{r=0}^{1+\epsilon \eta_1(z,0)} \sum_{u=d,sa,sb} Oh_{v1u} \hat{\eta}_{1u} k \left(\begin{array}{c} (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{r I_0(kr)}{I_1(k)} \\ -2 Oh_{v1u} k l_{v1u} \frac{r I_0(l_{v1u} r)}{I_1(l_{v1u})} \end{array} \right) \cos(kz) dr \right]_{\epsilon} \quad (2.85)$$

En utilisant la formule d'intégration (A.2) et l'expansion en série de Taylor (A.1) relatives à la fonction de Bessel I_ν , la troisième condition initiale s'écrit finalement :

$$\sum_{u=d,sa,sb} Oh_{v1u} \hat{\eta}_{1u} \alpha_{1u} = \frac{1}{2} Oh_0 k \tilde{w}_p \quad (2.86)$$

A partir de l'expression des trois conditions initiales au premier ordre obtenues, les trois amplitudes de déformations initiales sont exprimées :

$$\hat{\eta}_{1d} = \frac{\alpha_{1sb} \alpha_{1sa} \tilde{\eta}_p (Oh_{v1sb} - Oh_{v1sa}) + \frac{1}{2} k \tilde{w}_p [\alpha_{1sb} (Oh_0 - Oh_{v1sb}) - \alpha_{1sa} (Oh_0 - Oh_{v1sa})]}{M} \quad (2.87)$$

$$\hat{\eta}_{1sa} = \frac{\alpha_{1d} \alpha_{1sb} \tilde{\eta}_p (Oh_{v1d} - Oh_{v1sb}) + \frac{1}{2} k \tilde{w}_p [\alpha_{1d} (Oh_0 - Oh_{v1d}) - \alpha_{1sb} (Oh_0 - Oh_{v1sb})]}{M} \quad (2.88)$$

$$\hat{\eta}_{1sb} = \frac{\alpha_{1sa} \alpha_{1d} \tilde{\eta}_p (Oh_{v1sa} - Oh_{v1d}) + \frac{1}{2} k \tilde{w}_p [\alpha_{1sa} (Oh_0 - Oh_{v1sa}) - \alpha_{1d} (Oh_0 - Oh_{v1d})]}{M} \quad (2.89)$$

avec M le dénominateur commun défini par :

$$M = (\alpha_{1d} - \alpha_{1sb}) \alpha_{1sa} Oh_{v1sa} + (\alpha_{1sa} - \alpha_{1d}) \alpha_{1sb} Oh_{v1sb} + (\alpha_{1sb} - \alpha_{1sa}) \alpha_{1d} Oh_{v1d} \quad (2.90)$$

2.2.3 Résolution du système d'ordre 2

2.2.3.1 Etablissement du système d'équations d'ordre 2

Le système d'équation d'ordre 2 s'écrit :

Equations principales (en $r \leq 1$) :

$$\frac{1}{r} (ru_2)_{,r} + w_{2,z} = 0 \quad (2.91)$$

$$u_{2,t} + u_1 u_{1,r} + w_1 u_{1,z} = -p_{2,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{rr2})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta 2}}{r} - \tau_{rz2,z} \quad (2.92)$$

$$w_{2,t} + u_1 w_{1,r} + w_1 w_{1,z} = -p_{2,z} + \frac{1}{r} (r\tau_{rz2})_{,r} + \tau_{zz2,z} \quad (2.93)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 + De_1 \boldsymbol{\tau}_{2,t} = 2Oh_0 (\boldsymbol{D}_2 + De_2 \boldsymbol{D}_{2,t}) \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} & -De_1 [(\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{W}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{W}_1 - (\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1)] \\ & + 2De_2 [(\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{W}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{W}_1 - \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{W}_1 - 2\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1] \\ & := 2Oh_0 (\boldsymbol{D}_2 + De_2 \boldsymbol{D}_{2,t}) + \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

Conditions de saut (en $r = 1$) :

$$u_2 = \eta_{2,t} + w_1 \eta_{1,z} - \eta_1 u_{1,r} \quad (2.95)$$

$$\tau_{rz2} + \eta_1 \tau_{rz1,r} + (\tau_{rr1} - \tau_{zz1}) \eta_{1,z} = 0 \quad (2.96)$$

$$-p_2 + \tau_{rr2} - \eta_2 + \eta_{2,zz} = \eta_1 p_{1,r} + \eta_1 \tau_{rr1,r} - 2\eta_{1,z} \tau_{rz1} - \eta_{1,z}^2 / 2 + \eta_1^2 \quad (2.97)$$

Conditions initiales :

$$\eta_2(z, 0) = -\frac{1}{4}\tilde{\eta}_p \quad (2.98)$$

$$[\epsilon Q_{v1}(z, 0) + \epsilon^2 Q_{v2}(z, 0)]_{\epsilon^2} = 2\pi\eta_1(z, 0)\tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.99)$$

$$\left[\int_{r=0}^{1+\epsilon\eta_1(z,0)+\epsilon^2\eta_2(z,0)} (\epsilon\tau_{zz1}(r, z, 0) + \epsilon^2\tau_{zz2}(r, z, 0)) r dr \right]_{\epsilon^2} = 2\eta_1(z, 0) Oh_0 k \tilde{w}_p \cos(kz) \quad (2.100)$$

2.2.3.2 Resolution du problème aux valeurs propres

Afin de résoudre le système d'équations d'ordre 2, la méthodologie adoptée est la même que celle utilisée par Renoult et al. (2018) pour traiter le cas Newtonien. Cette méthodologie consiste à distinguer pour chaque quantité de deuxième ordre X_2 :

- les contributions X_{22} provenant des termes linéaires d'ordre 2. Leur dépendance temporelle s'exprime par $e^{-\alpha_2 t}$.
- les contributions X_{21} provenant des termes non-linéaires d'ordre 1. Leur dépendance temporelle s'exprime par $e^{-(\alpha_{1i}+\alpha_{1j})t}$ où α_{1i} et α_{1j} sont deux solutions de la relation de dispersion de premier ordre (Eq. (2.71)).

On a ainsi :

$$X_2 = X_{22} + X_{21} \quad (2.101)$$

Le problème aux valeurs propres de deuxième ordre peut alors se décomposer en deux problèmes aux valeurs propres pouvant être résolus indépendamment l'un de l'autre. Le problème aux valeurs propres relatif aux grandeurs X_{22} est décrit par le système d'équations :

Equations principales (en $r \leq 1$) :

$$\frac{1}{r} (ru_{22})_{,r} + w_{22,z} = 0 \quad (2.102)$$

$$u_{22,t} = -p_{22,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{rr22})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta 22}}{r} - \tau_{rz22,z} \quad (2.103)$$

$$w_{22,t} = -p_{22,z} + \frac{1}{r} (r\tau_{rz22})_{,r} + \tau_{zz22,z} \quad (2.104)$$

$$\tau_{22} + De_1\tau_{22,t} = 2Oh_0 (D_{22} + De_2 D_{22,t}) \quad (2.105)$$

Conditions de saut (en $r = 1$) :

$$u_{22} = \eta_{22,t} \quad (2.106)$$

$$\tau_{rz22} = 0 \quad (2.107)$$

$$-p_{22} + \tau_{rr22} - \eta_{22} + \eta_{22,zz} = 0 \quad (2.108)$$

Ce problème aux valeurs propres est caractérisé par la même structure d'équations que celui d'ordre 1. Pour cette raison, il est possible de déduire l'expression des grandeurs X_{22} directement à partir des grandeurs X_1 en remplaçant :

- α_1 par α_2 .
- k par $2k$.
- Oh_{v1} par $Oh_{v2} = (1 - \alpha_2 De_2)/(1 - \alpha_2 De_1) Oh_0$.
- l_{v1}^2 par $l_{v2}^2 = 4k^2 - \alpha_2/Oh_{v2}$.

Ainsi, les quantités physiques X_{22} s'écrivent :

$$\eta_{22}(z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} \cos(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \psi_{22}(r, z, t) = & \sum_{u=d,sa,sb} -\frac{rI_1(2kr)}{2kI_1(2k)} \hat{\eta}_{22u} (8k^2 Oh_{v2u} - \alpha_{2u}) \sin(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \\ & + \sum_{u=d,sa,sb} 4k Oh_{v2u} r \hat{\eta}_{22u} \frac{I_1(l_{v1u}r)}{I_1(l_{v1u})} \sin(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$u_{22}(r, z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} \left[(8k^2 Oh_{v2u} - \alpha_{2u}) \frac{I_1(2kr)}{I_1(2k)} - 8 Oh_{v2u} k^2 \frac{I_1(l_{v2u}r)}{I_1(l_{v2u})} \right] \cos(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \quad (2.111)$$

$$w_{22}(r, z, t) = - \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} \left[(8k^2 Oh_{v2u} - \alpha_{2u}) \frac{I_0(2kr)}{I_1(2k)} - 4 Oh_{v2u} k l_{v2u} \frac{I_0(l_{v2u}r)}{I_1(l_{v2u})} \right] \sin(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \quad (2.112)$$

$$p_{22}(r, z, t) = \sum_{u=d,sa,sb} \frac{\hat{\eta}_{22u} \alpha_{22u}}{k} \frac{I_0(2kr)}{I_1(2k)} (8k^2 Oh_{v2u} - \alpha_{2u}) \cos(2kz) e^{-\alpha_{2u}t} \quad (2.113)$$

Les trois variables α_{2u} sont les solutions capillaires de la relation de dispersion de deuxième ordre (2.114). Cette relation est également obtenue à partir de la relation de dispersion (2.71) d'ordre 1 en procédant par ces mêmes remplacements de variables :

$$DR_2 : \alpha_2^2 + \alpha_2 B_2(\alpha_2, k, Oh_0, De_1, De_2) + C_2(\alpha_2, k, Oh_0, De_1, De_2) = 0 \quad (2.114)$$

$$\text{avec : } B_2(\alpha_1, k, Oh_0, De_1, De_2) = -8k^2 Oh_{v2} \left[1 - \frac{I_1(2k)}{I_0(2k)} \left(\frac{1}{2k} + \frac{4kl_{v2}}{l_{v2}^2 + 4k^2} \left(\frac{I_1(l_{v2})}{I_0(l_{v2})} - \frac{1}{l_{v2}} \right) \right) \right]$$

$$C_2(\alpha_2, k, Oh_0, De_1, De_2) = -2k(1 - 4k^2) \frac{I_1(2k)}{I_0(2k)} \frac{l_{v2}^2 - 4k^2}{l_{v2}^2 + 4k^2}$$

Les amplitudes $\hat{\eta}_{22u}$ présentes dans les équations (2.109 - 2.113) sont à ce stade inconnues et seront déterminées lors de la résolution du problème initial d'ordre 2.

Le problème aux valeurs propres relatif aux grandeurs X_{21} est décrit par le système d'équations :

Equations principales (en $r \leq 1$) :

$$\frac{1}{r} (ru_{21})_{,r} + w_{21,z} = 0 \quad (2.115)$$

$$u_{21,t} + u_1 u_{1,r} + w_1 u_{1,z} = -p_{21,r} + \frac{1}{r} (r\tau_{rr21})_{,r} - \frac{\tau_{\theta\theta 21}}{r} - \tau_{rz21,z} \quad (2.116)$$

$$w_{21,t} + u_1 w_{1,r} + w_1 w_{1,z} = -p_{21,z} + \frac{1}{r} (r \tau_{rz21})_{,r} + \tau_{zz21,z} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \tau_{21} + De_1 \tau_{21,t} &= 2Oh_0 (\mathbf{D}_{21} + De_2 \mathbf{D}_{21,t}) \\ &\quad - De_1 [(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \tau_1 + \mathbf{W}_1 \cdot \tau_1 - \tau_1 \cdot \mathbf{W}_1 - (\mathbf{D}_1 \cdot \tau_1 + \tau_1 \cdot \mathbf{D}_1)] \\ &\quad + 2De_2 [(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{D}_1 + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{W}_1 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{W}_1 - 2\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_1] \\ &:= 2Oh_0 (\mathbf{D}_{21} + De_2 \mathbf{D}_{21,t}) + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Conditions de saut (en $r = 1$) :

$$u_{21} = \eta_{21,t} + w_1 \eta_{1,z} - \eta_1 u_{1,r} \quad (2.119)$$

$$\tau_{rz21} + \eta_1 \tau_{rz1,r} + (\tau_{rr1} - \tau_{zz1}) \eta_{1,z} = 0 \quad (2.120)$$

$$-p_{21} + \tau_{rr21} - \eta_{21} + \eta_{21,zz} = \eta_1 p_{1,r} + \eta_1 \tau_{rr1,r} - 2\eta_{1,z} \tau_{rz1} - \eta_{1,z}^2 / 2 + \eta_1^2 \quad (2.121)$$

Deux types de contributions sont peuvent être distingués vis-à-vis de la dépendance temporelle des grandeurs X_{21} . On introduit ainsi la décomposition suivante :

$$X_{21} = \sum_{A=d,sa,sb} X_{21}^A e^{-2\alpha_A t} + \sum_{AB=sa,sb; sa,d; sb,d} X_{21}^{AB} e^{-(\alpha_A + \alpha_B)t} \quad (2.122)$$

La première étape de résolution de ce problème aux valeurs propres consiste en la construction d'une équation différentielle sur la pression p_{21} par le réarrangement des deux composantes de l'équations de mouvement (2.116) et (2.117) et par l'utilisation de l'équation de continuité (2.115) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (r p_{21,r})_{,r} + p_{21,zz} &= -\frac{1}{r} [r (u_1 u_{1,r} + w_1 u_{1,z})]_{,r} - [u_1 w_{1,r} + w_1 w_{1,z}]_{,z} \\ &\quad + \tau_{rr21,rr} + \frac{2}{r} \tau_{rr21,r} - \frac{1}{r} \tau_{\theta\theta21,r} + 2\tau_{rz21,rz} + \frac{2}{r} \tau_{rz21,z} \end{aligned} \quad (2.123)$$

qui peut être réécrite sous une forme plus compacte :

$$\Delta p_{21} = -\text{div} [(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1] + \nabla \cdot [\nabla \cdot \tau_{21}] \quad (2.124)$$

où l'on rappelle que \mathbf{v}_1 représente le vecteur vitesse de premier ordre. En utilisant l'identité de Lamé au terme de dérivée convective de \mathbf{v}_1 , l'équation (2.124) devient :

$$\Delta p_{21} = -\text{div} [\nabla \mathbf{v}_1^2 / 2 - \mathbf{v}_1 \times (\nabla \times \mathbf{v}_1)] + \nabla \cdot [\nabla \cdot \tau_{21}] \quad (2.125)$$

où l'opérateur \times désigne l'opérateur rotationnel. En utilisant les expressions de premiers ordres (2.73 - 2.75), on trouve le résultat suivant :

$$\mathbf{v}_1 \times (\nabla \times \mathbf{v}_1) = - \left(\sum_{u=d,sa,sb} \frac{\alpha_{1u}}{Oh_{v1u}} \frac{\psi_{1b}^u}{r^2} \right) \nabla \psi_1 \quad (2.126)$$

D'autre part, on a :

$$\nabla \cdot [\nabla \cdot \tau_{21}] = \nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{R}] \quad (2.127)$$

Ainsi, l'équation (2.125) peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta [p_{21} + \frac{\mathbf{v}_1^2}{2}] = -\nabla \cdot \left[\left(\sum_{u=d,sa,sb} \frac{\alpha_{1u}}{Oh_{v1u}} \frac{\psi_{1b}^u}{r^2} \right) \nabla \psi_1 \right] + \nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{R}] \quad (2.128)$$

Il s'agit d'une équation de Poisson sur la pression modifiée définie par :

$$\mathcal{P}_{21} = p_{21} + \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} \quad (2.129)$$

La solution à cette équation s'obtient en sommant la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation inhomogène :

$$\mathcal{P}_{21}(r, z, t) = \mathcal{P}_{21}^H(r, z, t) + \mathcal{P}_{21}^I(r, z, t) \quad (2.130)$$

En appliquant la décomposition (2.122) aux grandeurs $\mathcal{P}_{21}^H(r, z, t)$ et $\mathcal{P}_{21}^I(r, z, t)$, on a :

$$\mathcal{P}_{21}^H(r, z, t) = \sum_{A=d,sa, sb} \mathcal{P}_{21}^{AH}(r, z) e^{-2\alpha_{1A}t} + \sum_{AB=sa, sb; sa, d; sb, d} \mathcal{P}_{21}^{ABH}(r, z) e^{-(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})t} \quad (2.131)$$

$$\mathcal{P}_{21}^I(r, z, t) = \sum_{A=d,sa, sb} \mathcal{P}_{21}^{AI}(r, z) e^{-2\alpha_{1A}t} + \sum_{AB=sa, sb; sa, d; sb, d} \mathcal{P}_{21}^{ABI}(r, z) e^{-(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})t} \quad (2.132)$$

La résolution de l'équation homogène nous donne :

$$\mathcal{P}_{21}^{AH}(r, z) = [C_{21}^A I_0(2kr) + C_4^A K_0(2kr)] \cos(2kz) \quad (2.133)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{ABH}(r, z) = [C_{21}^{AB} I_0(2kr) + C_4^{AB} K_0(2kr)] \cos(2kz) \quad (2.134)$$

La fonction de Bessel modifiée de second type K_0 étant divergente en 0, les constantes C_4^A et C_4^{AB} sont annulées.

Afin de trouver une solution particulière à l'équation de Poisson, le terme de droite est évalué à partir des expressions des grandeurs d'ordre 1 données par les équations (2.73 - 2.76). Ce terme de droite contient des produits des fonctions $\cos(kz)$ et $\sin(kz)$ qui peuvent être exprimés au moyen des fonctions $\cos(2kz)$ et $\sin(2kz)$. D'autre part, ce terme de droite comporte également des produits de fonctions de Bessel qui rendent la détermination d'une solution exacte impossible. Afin de contourner cet obstacle, une approximation de ces produits est effectuée; cette approximation est présentée en Annexe A. Différentes puissances de la coordonnée radiale r résultent de ces approximations et sont distinguées si bien que $\Delta \mathcal{P}_{21}^A$ et $\Delta \mathcal{P}_{21}^{AB}$ s'expriment par :

$$\Delta \mathcal{P}_{21}^A(r, z) = \sum_{i=1}^N \left[\begin{aligned} &(\gamma_{czm2}^A(i) r^{-2} + \gamma_{czm4}^A(i) r^{-4} + \gamma_{czm6}^A(i) r^{-6}) \cos(2kz) \\ &+ \gamma_{szm3}^A(i) r^{-3} \sin(2kz) \\ &+ \gamma_{\phi zm2}^A(i) r^{-2} + \gamma_{\phi zm4}^A(i) r^{-4} + \gamma_{\phi zm6}^A(i) r^{-6} \end{aligned} \right] r^{2i} \quad (2.135)$$

$$\Delta \mathcal{P}_{21}^{AB}(r, z) = \sum_{i=1}^N \left[\begin{aligned} &(\gamma_{czm2}^{AB}(i) r^{-2} + \gamma_{czm4}^{AB}(i) r^{-4} + \gamma_{czm6}^{AB}(i) r^{-6}) \cos(2kz) \\ &+ \gamma_{szm3}^{AB}(i) r^{-3} \sin(2kz) \\ &+ \gamma_{\phi zm2}^{AB}(i) r^{-2} + \gamma_{\phi zm4}^{AB}(i) r^{-4} + \gamma_{\phi zm6}^{AB}(i) r^{-6} \end{aligned} \right] r^{2i} \quad (2.136)$$

où les expressions des coefficients γ ne sont pas données dans ce document par souci de place.

A partir de ces expressions, les fonctions solutions particulières $\mathcal{P}_{21}^{A^I}$ et $\mathcal{P}_{21}^{AB^I}$ s'expriment par :

$$\mathcal{P}_{21}^{A^I}(r, z) = \sum_{i=1}^N (\delta_{cz}^A(i) r^{-4} \cos(2kz) + \delta_{sz}^A(i) r^{-1} \sin(2kz) + \delta_{\emptyset z}^A(i) r^{-4}) r^{2i} + P_{21}^A \quad (2.137)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{AB^I}(r, z) = \sum_{i=1}^N (\delta_{cz}^{AB}(i) r^{-4} \cos(2kz) + \delta_{sz}^{AB}(i) r^{-1} \sin(2kz) + \delta_{\emptyset z}^{AB}(i) r^{-4}) r^{2i} + P_{21}^{AB}$$

où les termes P_{21}^A et P_{21}^{AB} demeurent inconnus à ce stade du développement. En appliquant l'opérateur laplacien à ces dernières fonctions et en confrontant le résultat aux expressions (2.135) et (2.136), une relation de récurrence est trouvée entre les coefficients δ et γ :

$$\bullet \delta_{cz}(i) = \frac{\gamma_{czm2}(i-1) + \gamma_{czm4}(i) + \gamma_{czm6}(i+1) + 4k^2 \delta_{cz}(i-1)}{4i^2} \quad \forall i \geq 2 \quad (2.138)$$

$$\delta_{cz}(1) = \frac{\gamma_{czm4}(1) + \gamma_{czm6}(2)}{4}$$

$$\bullet \delta_{sz}(i) = \frac{\gamma_{szm3}(i) + 4k^2 \delta_{sz}(i-1)}{4i(i-1) - 1} \quad \forall i \geq 2 \quad (2.139)$$

$$\delta_{sz}(1) = -\gamma_{szm3}(1)$$

$$\bullet \delta_{\emptyset z}(i) = \frac{\gamma_{\emptyset zm2}(i-2) + \gamma_{\emptyset zm4}(i-1) + \gamma_{\emptyset zm6}(i)}{4(2-i)^2} \quad \forall i > 2 \quad (2.140)$$

$$\delta_{\emptyset z}(2) = 0$$

$$\delta_{\emptyset z}(1) = \frac{\gamma_{\emptyset zm6}(1)}{4}$$

A partir de l'expression de la pression modifiée (Eq. (2.135) et (2.136)) et de l'expression du champs de vitesse de premier ordre (Eq. (2.74) et (2.75)), le champs de pression s'exprime :

$$p_{21}^A(r, z) = \left[-\frac{1}{4} \hat{\eta}_1^{A^2} \left(f_u^A(r)^2 - f_w^A(r)^2 \right) + C_{21}^A I_0(2kr) + \sum_{i=1}^N \delta_{cz}^A(i) r^{2i-4} \right] \cos(2kz) \quad (2.141)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \delta_{sz}^A(i) r^{2i-1} \sin(2kz)$$

$$- \frac{1}{4} \hat{\eta}_1^{A^2} \left(f_u^A(r)^2 + f_w^A(r)^2 \right) + \sum_{i=1}^N \delta_{\emptyset z}^A(i) r^{2i-4} + P_{21}^A$$

$$p_{21}^{AB}(r, z) = \left[-\frac{1}{2} \hat{\eta}_1^A \hat{\eta}_1^B \left(f_u^A(r) f_u^B(r) - f_w^A(r) f_w^B(r) \right) + C_{21}^{AB} I_0(2kr) + \sum_{i=1}^N \delta_{cz}^{AB}(i) r^{2i-4} \right] \cos(2kz) \quad (2.142)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \delta_{sz}^{AB}(i) r^{2i-1} \sin(2kz)$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\eta}_1^A\hat{\eta}_1^B(f_u^A(r)f_u^B(r)+f_w^A(r)f_w^B(r))+\sum_{i=1}^I\delta_{\phi z}^{AB}(i)r^{2i-4}+P_{21}^{AB}$$

La deuxième étape de résolution de ce problème aux valeurs propres s'effectue par la construction d'une équation différentielle de la vitesse radiale u_{21} par l'injection de l'équation de continuité (2.115) et de l'équation constitutive (2.118) dans l'équation de mouvement projetée dans la direction radiale (2.116). En appliquant la décomposition (2.122) à la vitesse radiale u_{21} , on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} r^2 u_{21,rr}^A + r u_{21,r}^A + r^2 u_{21,zz}^A - \left(1 - r^2 \frac{2\alpha_{1A}(1 - 2\alpha_{1A}De_1)}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)}\right) u_{21}^A \\ = \\ \frac{(1 - 2\alpha_{1A}De_1)}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} \left(\frac{\alpha_{1A}}{Oh_{v1A}} \psi_{1b}^A \psi_{1,r}^A + r^2 \mathcal{P}_{21,r}^A \right) \\ - \frac{1}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} (r^2 R_{rr,r}^A + r R_{rr}^A - r R_{\theta\theta}^A + r^2 R_{rz,z}^A) \end{aligned} \quad (2.143)$$

et :

$$\begin{aligned} r^2 u_{21,rr}^{AB} + r u_{21,r}^{AB} + r^2 u_{21,zz}^{AB} - \left(1 - r^2 \frac{(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1)}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)}\right) u_{21}^{AB} \\ = \\ \frac{(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1)}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} \left(\frac{\alpha_{1A}}{Oh_{v1A}} \psi_{1b}^A \psi_{1,r}^B + \frac{\alpha_{1B}}{Oh_{v1B}} \psi_{1b}^B \psi_{1,r}^A + r^2 \mathcal{P}_{21,r}^{AB} \right) \\ - \frac{1}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} (r^2 R_{rr,r}^{AB} + r R_{rr}^{AB} - r R_{\theta\theta}^{AB} + r^2 R_{rz,z}^{AB}) \end{aligned} \quad (2.144)$$

La même méthodologie que celle employée pour la résolution de l'équation de Poisson sur la pression modifiée (2.128) est adoptée.

Les solutions générales des équations homogènes s'écrivent :

$$u_{21}^{AH}(r, z, t) = [D_{21}^A I_1(2m^A r) + D_4^A K_1(2m^A r)] \cos(2kz) e^{-2\alpha_{1A}t} \quad (2.145)$$

$$u_{21}^{ABH}(r, z, t) = [D_{21}^{AB} I_1(2m^{AB} r) + D_4^{AB} K_1(2m^{AB} r)] \cos(2kz) e^{-2(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})t} \quad (2.146)$$

avec :

$$m^{A^2} = k^2 - \frac{\alpha_{1A}(1 - 2\alpha_{1A}De_1)}{2Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} \quad (2.147)$$

$$m^{AB^2} = k^2 - \frac{(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1)}{4Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} \quad (2.148)$$

La fonction de Bessel modifiée de seconde espèce K_1 étant divergente en 0, les constantes D_4^A et D_4^{AB} sont annulées.

Afin de rechercher des solutions particulières aux équations inhomogènes, les termes de droites sont évalués et les produits de fonctions de Bessel sont approximés. On a :

$$\begin{aligned}
& r^2 u_{21,rr}^A + r u_{21,r}^A + r^2 u_{21,zz}^A - \left(1 - r^2 \frac{2\alpha_{1A}(1 - 2\alpha_{1A}De_1)}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} \right) u_{21}^A \\
& = \\
& \frac{1 - 2\alpha_{1A}De_1}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} 2kr^2 C_{21}^A I_1(2kr) \cos(2kz) \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\begin{aligned} & (\varepsilon_{czm3}^A(i) r^{-3} + \varepsilon_{czm1}^A(i) r^{-1}) \cos(2kz) \\ & + \varepsilon_{sz}^A(i) \sin(2kz) \\ & + \varepsilon_{\emptyset zm3}^A(i) r^{-3} + \varepsilon_{\emptyset zm1}^A(i) r^{-1} \end{aligned} \right] r^{2i}
\end{aligned} \tag{2.149}$$

et :

$$\begin{aligned}
& r^2 u_{21,rr}^{AB} + r u_{21,r}^{AB} + r^2 u_{21,zz}^{AB} - \left(1 - r^2 \frac{(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1)}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} \right) u_{21}^{AB} \\
& = \\
& \frac{1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} 2kr^2 C_{21}^{AB} I_1(2kr) \cos(2kz) \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\begin{aligned} & (\varepsilon_{czm3}^{AB}(i) r^{-3} + \varepsilon_{czm1}^{AB}(i) r^{-1}) \cos(2kz) \\ & + \varepsilon_{sz}^{AB}(i) \sin(2kz) \\ & + \varepsilon_{\emptyset zm3}^{AB}(i) r^{-3} + \varepsilon_{\emptyset zm1}^{AB}(i) r^{-1} \end{aligned} \right] r^{2i}
\end{aligned} \tag{2.150}$$

où les expressions des coefficients ε ne sont pas données dans ce document par souci de place.

Les solutions particulières des équations inhomogènes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
u_{21}^{AI}(r, z) &= Y^A \frac{k}{\alpha_{1A}} C_{21}^A I_1(2kr) \cos(2kz) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\zeta_{cz}^A(i) r^{-3} \cos(2kz) + \zeta_{sz}^A(i) \sin(2kz) + \zeta_{\emptyset z}^A(i) r^{-3}) r^{2i}
\end{aligned} \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned}
u_{21}^{ABI}(r, z) &= Y^{AB} \frac{2k}{\alpha_{1A} + \alpha_{1B}} C_{21}^{AB} I_1(2kr) \cos(2kz) \\
&+ \sum_{i=1}^N (\zeta_{cz}^{AB}(i) r^{-3} \cos(2kz) + \zeta_{sz}^{AB}(i) \sin(2kz) + \zeta_{\emptyset z}^{AB}(i) r^{-3}) r^{2i}
\end{aligned} \tag{2.152}$$

avec :

$$Y^A = \frac{1 - 2\alpha_{1A}De_1}{Oh_0(1 - 2\alpha_{1A}De_2)} \quad (2.153)$$

$$Y^{AB} = \frac{1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_1}{Oh_0(1 - (\alpha_{1A} + \alpha_{1B})De_2)} \quad (2.154)$$

Les relations de récurrence liant les coefficients ε et ζ s'écrivent :

$$\bullet \zeta_{cz}(i) = \frac{\varepsilon_{czm1}(i-1) + \varepsilon_{czm3}(i) + (4k^2 - Y)\zeta_{cz}(i-1)}{4(i-2)(i-1)} \quad \forall i > 2 \quad (2.155)$$

$$\zeta_{cz}(2) = 0$$

$$\zeta_{cz}(1) = \frac{\varepsilon_{czm1}(1) + \varepsilon_{czm3}(2)}{-4k^2 + Y}$$

$$\bullet \zeta_{sz}(i) = \frac{\varepsilon_{sz}(i) + (4k^2 - Y)\delta_{sz}(i-1)}{4i^2 - 1} \quad \forall i \geq 2 \quad (2.156)$$

$$\zeta_{sz}(1) = \frac{\varepsilon_{szm3}(1)}{3}$$

$$\bullet \zeta_{\emptyset z}(i) = \frac{\varepsilon_{\emptyset zm1}(i-1) + \varepsilon_{\emptyset zm3}(i) - Y\delta_{\emptyset z}(i-1)}{4(i-2)(i-1)} \quad \forall i > 2 \quad (2.157)$$

$$\zeta_{\emptyset z}(2) = 0$$

$$\zeta_{\emptyset z}(1) = \frac{\varepsilon_{\emptyset zm1}(1) + \varepsilon_{\emptyset zm3}(2)}{Y}$$

Les fonctions de vitesses radiales u_{21}^A et u_{21}^{AB} sont finalement obtenues en sommant les solutions des équations homogènes (Eq. (2.145) et (2.146)) et les solutions des équations inhomogènes (Eq. (2.151) et (2.152)) :

$$u_{21}^A(r, z) = \left[\begin{aligned} & D_{21}^A I_1(2m^A r) + Y^A \frac{k}{\alpha_{1A}} C_{21}^A I_1(2kr) \\ & + \sum_{i=1}^N \zeta_{cz}^A(i) r^{2i-3} \end{aligned} \right] \cos(2kz) \\ + \sum_{i=1}^N \zeta_{sz}^A(i) r^{2i-3} \sin(2kz) \\ + \sum_{i=1}^N \zeta_{\emptyset z}^A(i) r^{2i-3} \quad (2.158)$$

$$u_{21}^{AB}(r, z) = \left[\begin{aligned} & D_{21}^{AB} I_1(2m^{AB} r) + Y^{AB} \frac{2k}{\alpha_{1A} + \alpha_{1B}} C_{21}^{AB} I_1(2kr) \\ & + \sum_{i=1}^N \zeta_{cz}^{AB}(i) r^{2i-3} \end{aligned} \right] \cos(2kz) \\ + \sum_{i=1}^N \zeta_{sz}^{AB}(i) r^{2i-3} \sin(2kz) + \sum_{i=1}^N \zeta_{\emptyset z}^{AB}(i) r^{2i-3} \quad (2.159)$$

La troisième étape de résolution du problème aux valeurs propres consiste en la détermination de l'expression de la vitesse axiale w_{21} à partir de l'équation de continuité (2.115) et de l'expression de la vitesse radiale u_{21} (Eq. (2.151) et (2.152)). On a :

$$w_{21,z} = -u_{21,r} - \frac{1}{r}u_{21} \quad (2.160)$$

En différenciant les types de dépendances temporelles par la décomposition (2.122) et en procédant par intégration par rapport à la coordonnée z on a :

$$w_{21}^A(r, z) = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^N (2i+1) \zeta_{sz}^A(i) r^{2i-1} \cos(2kz) - \frac{1}{k} \left[\begin{aligned} & D_{21}^A m^A I_0(2m^A r) + Y^A \frac{k^2}{\alpha_{1A}} C_{21}^A I_0(2kr) \\ & + \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{cz}^A(i) r^{2i-4} \end{aligned} \right] \sin(2kz) - 2 \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{\phi z}^A(i) r^{2i-4} z \quad (2.161)$$

$$w_{21}^{AB}(r, z) = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^N (2i+1) \zeta_{sz}^{AB}(i) r^{2i-1} \cos(2kz) - \frac{1}{k} \left[\begin{aligned} & D_{21}^{AB} m^{AB} I_0(2m^{AB} r) + 2Y^{AB} \frac{k^2}{\alpha_{1A} + \alpha_{1B}} C_{21}^{AB} I_0(2kr) \\ & + \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{cz}^{AB}(i) r^{2i-4} \end{aligned} \right] \sin(2kz) - 2 \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{\phi z}^{AB}(i) r^{2i-4} z \quad (2.162)$$

En appliquant la décomposition (2.122), les fonctions de courant ψ_{21}^A et ψ_{21}^{AB} s'obtiennent à partir des fonctions u_{21}^A et u_{21}^{AB} suivant :

$$\psi_{21}^A(r, z) = -r \int u_{21}^A(r, z) dz \quad (2.163)$$

$$\psi_{21}^{AB}(r, z) = -r \int u_{21}^{AB}(r, z) dz \quad (2.164)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \psi_{21}^A(r, z) = & \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^N (2i+1) \zeta_{sz}^A(i) r^{2i+1} \cos(2kz) \\ & - \frac{1}{2k} \left[D_{21}^A r I_1(2m^A r) + Y^A \frac{r}{2\alpha_{1A}} C_{21}^A I_1(2kr) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{cz}^A(i) r^{2i-2} \right] \sin(2kz) \\ & - \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{\phi z}^A(i) r^{2i-2} z \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} \psi_{21}^{AB}(r, z) = & \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^N (2i+1) \zeta_{sz}^{AB}(i) r^{2i+1} \cos(2kz) \\ & - \frac{1}{2k} \left[D_{21}^{AB} r I_1(2m^{AB} r) + Y^{AB} \frac{r}{\alpha_{1A} + \alpha_{1B}} C_{21}^{AB} I_1(2kr) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{cz}^{AB}(i) r^{2i-2} \right] \sin(2kz) \\ & - \sum_{i=1}^N (i-1) \zeta_{\phi z}^{AB}(i) r^{2i-2} z \end{aligned} \quad (2.166)$$

En appliquant la décomposition (2.122) à la déformation de la surface de deuxième ordre η_{21} et en considérant les dépendances des quantités physiques par rapport à la coordonnée axiale z , on a :

$$\eta_{21}(z, t) = \sum_{A=d, sa, sb} \eta_{21}^A(z) e^{-2\alpha_A t} + \sum_{AB=sa, sb; sa, d; sb, d} \eta_{21}^{AB}(z) e^{-(\alpha_A + \alpha_B)t} \quad (2.167)$$

avec :

$$\hat{\eta}_{21}^A(z) = F_{21}^A \cos(2kz) + G_{21}^A \sin(2kz) + H_{21}^A \quad (2.168)$$

$$\hat{\eta}_{21}^{AB}(z) = F_{21}^{AB} \cos(2kz) + G_{21}^{AB} \sin(2kz) + H_{21}^{AB} \quad (2.169)$$

où les constantes F_{21} , G_{21} et H_{21} sont inconnues à ce stade du développement.

Les trois conditions de saut (2.119 - 2.119) projetées sur le vecteur $(1, \cos(2kz), \sin(2kz))$ permettent de déterminer l'expression des six constantes C_{21} , D_{21} , P_{21} , F_{21} , G_{21} et H_{21} . Leurs expressions ne sont pas données dans ce document par souci de place.

2.2.3.3 Résolution du problème aux valeurs initiales

La résolution du problème aux valeurs propres en section 2.2.2.2 ne laisse que 3 variables inconnues dans l'expression de ces grandeurs : $\hat{\eta}_{22sa}$, $\hat{\eta}_{22sb}$ et $\hat{\eta}_{22d}$. Ces amplitudes sont déterminées à partir des trois conditions initiales de deuxième ordre (2.98 - 2.100).

■ En appliquant la décomposition (2.101), la **première condition initiale** (Eq. 2.98) se réécrit :

$$\eta_{22}(z, 0) + \eta_{21}(z, 0) = -\frac{1}{4}\tilde{\eta}_p \quad (2.170)$$

En utilisant les expressions de $\eta_{21}(z, t)$ (Eq. (2.168) et (2.169)) ainsi que l'expression de $\eta_{21}(z, t)$ (Eq. 2.109), on a :

$$\sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} = - \sum_{A=d,sa,sb} F_{21}^A - \sum_{AB=sa,sb; sa,d; sb,d} F_{21}^{AB} \quad (2.171)$$

■ En appliquant la décomposition (2.101), la **deuxième condition initiale** s'écrit (Eq. 2.99) :

$$[\epsilon Q_{v1}(z, 0)]_{\epsilon^2} + [\epsilon^2 Q_{v21}(z, 0)]_{\epsilon^2} + [\epsilon^2 Q_{v22}(z, 0)]_{\epsilon^2} = 2\pi\eta_1(z, 0)\tilde{w}_p \sin(kz) \quad (2.172)$$

Suivant la définition de $Q_{v1}(z, t)$ selon l'équation (2.42), le premier terme de gauche s'écrit :

$$\epsilon Q_{v1}(z, 0) = 2\pi\epsilon (\psi_1(r_s, z, 0) - \psi_1(0, z, 0)) \quad (2.173)$$

En reprenant la définitions de ψ_1 (Eq. (2.73)) et en sachant que $I_1(0) = 0$, on a :

$$\epsilon Q_{v1}(z, 0) = -2\pi\epsilon \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left(\begin{array}{l} (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{r_s I_1(kr_s)}{k I_1(k)} \\ -2Oh_{v1u} k \frac{r_s I_1(l_{v1u} r_s)}{I_1(l_{v1u})} \end{array} \right) \quad (2.174)$$

Avec $r_s = 1 + \epsilon\eta_1(z, 0) + \epsilon^2\eta_2(z, 0)$ et connaissant le développement en série de Taylor de $r_s I_1(kr_s)$ présenté en Annexe A, on a :

$$[\epsilon Q_{v1}(z, 0)]_{\epsilon^2} = -\pi\tilde{\eta}_p \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left(\begin{array}{l} (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{r_s I_0(k)}{I_1(k)} \\ -2Oh_{v1u} k l_{v1u} \frac{r_s I_0(l_{v1u})}{I_1(l_{v1u})} \end{array} \right) \quad (2.175)$$

Suivant la définition de $Q_{v21}(z, t)$ selon l'équation (2.42), le deuxième terme de gauche s'écrit :

$$\epsilon^2 Q_{v21}(z, 0) = 2\pi\epsilon^2 (\psi_{21}(r_s, z, 0) - \psi_{21}(0, z, 0))$$

Dans l'expression de ψ_{21} (Eq. (2.165) et (2.166)), les contributions proportionnelles à ϵ^2 provenant des sommes de coefficients ζ évaluées en $r_s = 1 + \epsilon\eta_1(z, 0) + \epsilon^2\eta_2(z, 0)$ et en 0 s'annulent. En appliquant le même développement que pour l'évaluation du premier terme de gauche :

$$[\epsilon^2 Q_{v21}(z, 0)]_{\epsilon^2} = -2\pi \left[\begin{array}{l} \sum_{A=d,sa,sb} \frac{D_{21}^A}{2k} I_1(2m^A) + Y^A C_{21} \frac{I_1(2k)^A}{2\alpha_{1A}} \\ + \sum_{AB=sa,sb; sa,d; sb,d} \frac{D_{21}^{AB}}{2k} I_1(2m^{AB}) + Y^{AB} C_{21}^{AB} \frac{I_1(2k)}{(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})} \end{array} \right] \sin(2kz) \quad (2.176)$$

En suivant le même développement que pour le premier terme de droite avec l'expression de ψ_{22} donnée en équation (2.110), le troisième terme de gauche s'écrit :

$$[\epsilon^2 Q_{v22}(z, 0)]_{\epsilon^2} = \frac{\pi}{k} \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} \alpha_{2u} \sin(2kz) \quad (2.177)$$

En utilisant l'expression de $\eta_1(z, t)$ donnée en équation (2.72) et en considérant la première condition initiale de premier ordre donnée en équation (2.77), le terme de droite se réécrit :

$$2\pi\eta_1(z, 0)\tilde{w}_p \sin(kz) = \pi\tilde{\eta}_p\tilde{w}_p \sin(2kz) \quad (2.178)$$

Ainsi la deuxième condition initiale de deuxième ordre s'écrit :

$$\sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{22u} \alpha_{2u} = \left[\begin{aligned} & \sum_{A=d,sa,sb} D_{21}^A I_1(2m^A) + Y^A C_{21} \frac{k I_1(2k)^A}{\alpha_{1A}} \\ & + \sum_{AB=sa,sb; sa,d; sb,d} D_{21}^{AB} I_1(2m^{AB}) + Y^{AB} C_{21}^{AB} \frac{2k I_1(2k)}{(\alpha_{1A} + \alpha_{1B})} \end{aligned} \right] \\ + \tilde{\eta}_p k \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_{1u} \left[\begin{aligned} & (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{I_0(k)}{I_1(k)} \\ & - 2Oh_{v1u} k l_{v1u} \frac{I_0(l_{v1u})}{I_1(l_{v1u})} \end{aligned} \right] + k\tilde{\eta}_p\tilde{w}_p \quad (2.179)$$

■ En appliquant la décomposition (2.101), la **troisième condition initiale** s'écrit (Eq. 2.100) :

$$\left[\int_{r=0}^{1+\epsilon\eta_1(z,0)+\epsilon^2\eta_2(z,0)} \epsilon\tau_{1zz}(r, z, 0) + \epsilon^2\tau_{21zz}(r, z, 0) + \epsilon^2\tau_{22zz}(r, z, 0) r dr \right]_{\epsilon^2} = 2\eta_1(z, 0) Oh_0 k \tilde{w}_p \cos(kz)$$

En procédant de même que pour le traitement de la deuxième condition initiale et en s'intéressant exclusivement à la dépendance en $\cos(2kz)$, on trouve que la troisième condition initiale de deuxième ordre s'écrit :

$$\sum_{u=d,sa,sb} Oh_{v2u} \hat{\eta}_{22u} = \frac{1}{2} \tilde{\eta}_p \sum_{u=d,sa,sb} Oh_{v1u} k \hat{\eta}_{1u} \left[\begin{aligned} & (2k^2 Oh_{v1u} - \alpha_{1u}) \frac{I_0(k)}{I_1(k)} \\ & - 2Oh_{v1u} k l_{v1u} \frac{I_0(l_{v1u})}{I_1(l_{v1u})} \end{aligned} \right] \\ + \sum_{A=d,sa,sb} \frac{2}{Y^A} \left[\begin{aligned} & D_{21}^A m^A I_1(2m^A) \\ & + Y^A \frac{k^2}{\alpha_{1A}} C_{21}^A I_1(2k) \end{aligned} \right] \cos(2kz) \\ + \sum_{A=d,sa,sb} \frac{2}{Y^{AB}} \left[\begin{aligned} & D_{21}^{AB} m^{AB} I_1(2m^{AB}) \\ & + Y^{AB} \frac{2k^2}{\alpha_{1A} + \alpha_{1B}} C_{21}^{AB} I_1(2k) \end{aligned} \right] + \frac{1}{2} Oh_0 k \tilde{\eta}_p \tilde{w}_p \quad (2.180)$$

Les trois conditions initiales d'ordre 2 (Eq. (2.171), (2.179) et (2.180)) permettent d'exprimer trois amplitudes $\hat{\eta}_{22u}$, $\hat{\eta}_{22sa}$ et $\hat{\eta}_{22sb}$, qui ne sont pas données ici pour des questions de place.

2.2.4 Résolution des relations de dispersion

Les relations de dispersion de premier ordre (Eq. 2.71) et de deuxième ordre (Eq. 2.114) sont des équations *transcendantes* : elles contiennent des fonctions non-algébriques des inconnues α_1 et α_2 . Ces fonctions non-algébriques apparaissent plusieurs fois dans les relations de dispersion et rendent ainsi leur résolution difficile. Cette difficulté est d'autant plus importante que les inconnues α_1 et α_2 sont de nature complexe. Des méthodes graphiques telles que la méthode de Newton ou la méthode de la sécante permettent difficilement d'obtenir toutes les solutions de ces équations. Une méthode alternative, développée par Luck *et al.* (2015), a été employée dans le cadre de cette thèse. Elle consiste à déterminer un polynôme, qu'on notera p , présentant les mêmes racines que la fonction de dispersion, qu'on notera f . On note N_f le nombre exacte de racines de f et N'_f le nombre de racines présumées de f dans l'intervalle Int_f . L'utilisation du théorème intégral de Cauchy et de séries de Fourier complexes permet d'établir un système matriciel de dimension $N'_f \times N'_f$ dont la résolution permet de déterminer les coefficients du polynôme p . Une fois ces coefficients connus, les racines de p et donc les racines de f , sont facilement déterminées.

Cette méthode compte de nombreux avantages :

- Le nombre de racines N_f n'a pas à être nécessairement connu pour mettre en application cette méthode. Si $N'_f > N_f$, l'ensemble des racines déterminées contient les N_f racines effectives de f et $N'_f - N_f$ nombres qui ne sont pas des racines. Une implémentations de ces nombres dans la fonction f permet rapidement de les identifier. Si $N'_f < N_f$, certaines racines ne peuvent être déterminées.
- La procédure de détermination des racines n'est pas itérative et est immédiate pour toutes les racines à la fois.
- Le temps de calcul nécessaire à la détermination des racines est très rapide, ne dépend pas de la nature de la fonction f , ne dépend pas de la nature des racines, et dépend très peu du nombre présumé de racines N'_f . Il n'est ainsi pas pénalisant de surestimer le nombre de racines de f en choisissant N'_f grand.
- La précision de calcul des racines est très élevée (environ 10^{-8}).

Cependant, l'application de cette méthode présente deux inconvénients :

- Elle nécessite de connaître l'intervalle Int_f contenant les racines de f . Un tracé graphique de la fonction peut néanmoins aider à déterminer cet intervalle.
- Dans l'intervalle Int_f , il est nécessaire que le rapport $p(x)/f(x)$ soit analytique pour appliquer le théorème de Cauchy intégral. Si cette condition n'est pas vérifiée, aucune racine n'est déterminée. Neanmoins, parce que l'application de cette méthode est très rapide, une détermination itérative d'un intervalle Int_f remplissant cette condition peut être effectuée. Cependant, lorsque les racines effectives sont très éloignées les unes des autres, il n'existe possiblement pas d'intervalle contenant toutes les racines et remplissant la condition d'analyticité. L'intervalle doit alors être scindé en plusieurs intervalles et la méthode appliquée dans chacun de ces intervalles.

Dans le cadre de cette thèse, cette procédure a été implémentée sur Python en utilisant les bibliothèques Numpy et SciPy.

2.3 Résultats de l'étude théorique

Dans cette section, les résultats de l'analyse de stabilité faiblement non-linéaire d'un jet de liquides viscoélastiques sont présentés. Dans un premier temps, la nature des solutions des équations de dispersion (2.71) et (2.114) est présentée. La stabilité linéaire du jet est ensuite étudiée par la description de son état initial et la caractérisation de son mode optimal. Par la suite, la stabilité faiblement non-linéaire du jet est étudiée. Des prédictions de temps de rupture du jet et de formation de gouttes satellites sont exposées. La nature de la dépendance temporelle de la déformation du jet est ensuite étudiée. En dernier lieu la validité de cette étude théorique est discutée.

Afin de caractériser au mieux l'influence de la viscoélasticité du liquide, plusieurs cas d'application ont été réalisés, faisant varier les nombres d'Ohnesorge Oh_0 et de Deborah De_1 et De_2 suivant le Tableau 2.1.

Cas	De_1 (-)	De_2 (-)	De_1/De_2 (-)
A	1	0.001	1000
B	100	1	100
C	10	1	10
D	10	8	1.25

TABLE 2.1 – Caractéristiques des cas d'applications testés.

2.3.1 Solutions des relations de dispersion

Les relations de dispersion (2.71) et (2.114) admettent chacune trois solutions capillaires non identiquement nulles. Parmi ces trois solutions, une est d'un intérêt particulier : quelque soit la valeur des paramètres Oh_0 , De_1 et De_2 , sa partie imaginaire est nulle, elle est négative pour des nombre d'onde k inférieurs à 1, et change de signe en $k = 1$. Cette solution est notée α_{1d} et les deux autres sont notées α_{1sa} et α_{1s} .

Il est rappelé que dans le cas Newtonien, la relation de dispersion analogue ne présente que deux solutions capillaires non-identiquement nulles (dont une présentant les mêmes caractéristiques que α_{1d}). L'existence d'une solution supplémentaire dans le cas viscoélastique est liée à la dépendance du nombre d'Ohnesorge modifié Oh_v à l'inconnue α . Plus largement, elle tire son existence de la nature dynamique de l'équation rhéologique constitutive du liquide viscoélastique. C'est par ailleurs pour cette même raison et au travers de l'existence de cette solution supplémentaire qu'une troisième condition initiale a été nécessaire pour la fermeture du problème aux valeurs initiales.

En figure 2.3-a) sont tracées les solutions de la relation de dispersion de premier ordre pour le cas d'application C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$) avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$. Parmi les trois solutions, α_{1d} présente une partie réelle négative pour $0 < k < 1$, nulle en $k = 1$ et positive pour $k > 1$. De par la dépendance temporelle de la déformation du jet en $e^{-\alpha t}$, cette solution est associée à un mode instable que l'on désignera aussi sous le terme de *mode dominant*. Sa partie réelle présente un minimum noté $Re(\alpha_{1opt})$ atteint en $k = k_{opt}$ et caractérisant le mode

le plus instable de la perturbation, que l'on désignera sous le terme de *mode optimal*. La partie imaginaire de la solution α_{1d} est nulle quelque soit k . Les deux autres solutions, α_{1sa} et α_{1sb} , présentent une partie réelle positive quelque soit k . Elles sont donc associées à deux modes stables que l'on désignera aussi sous le terme de *modes subdominants*. Pour certains nombres d'onde, leurs parties imaginaires sont nulles et leurs parties réelles sont non-nulles et différentes. Le régime est dit *non-oscillatoire*. Pour d'autres nombres d'ondes, leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont non-nulles et opposées. Le régime est dit *oscillatoire*. Le *nombre de coupure* k_c désigne le nombre d'onde au delà duquel toutes les solutions présentent une partie réelle positive, caractéristique d'un jet stable. Le nombre de coupure de premier ordre vaut $k_{c1} = 1$.

En figure 2.3-b) sont tracées les solutions de la relation de dispersion de deuxième ordre pour le même cas d'application au même nombre d'Ohnesorge. Les solutions présentent les mêmes caractéristiques qu'au premier ordre excepté que la valeur du nombre de coupure vaut $k_{c2} = 0.5$.

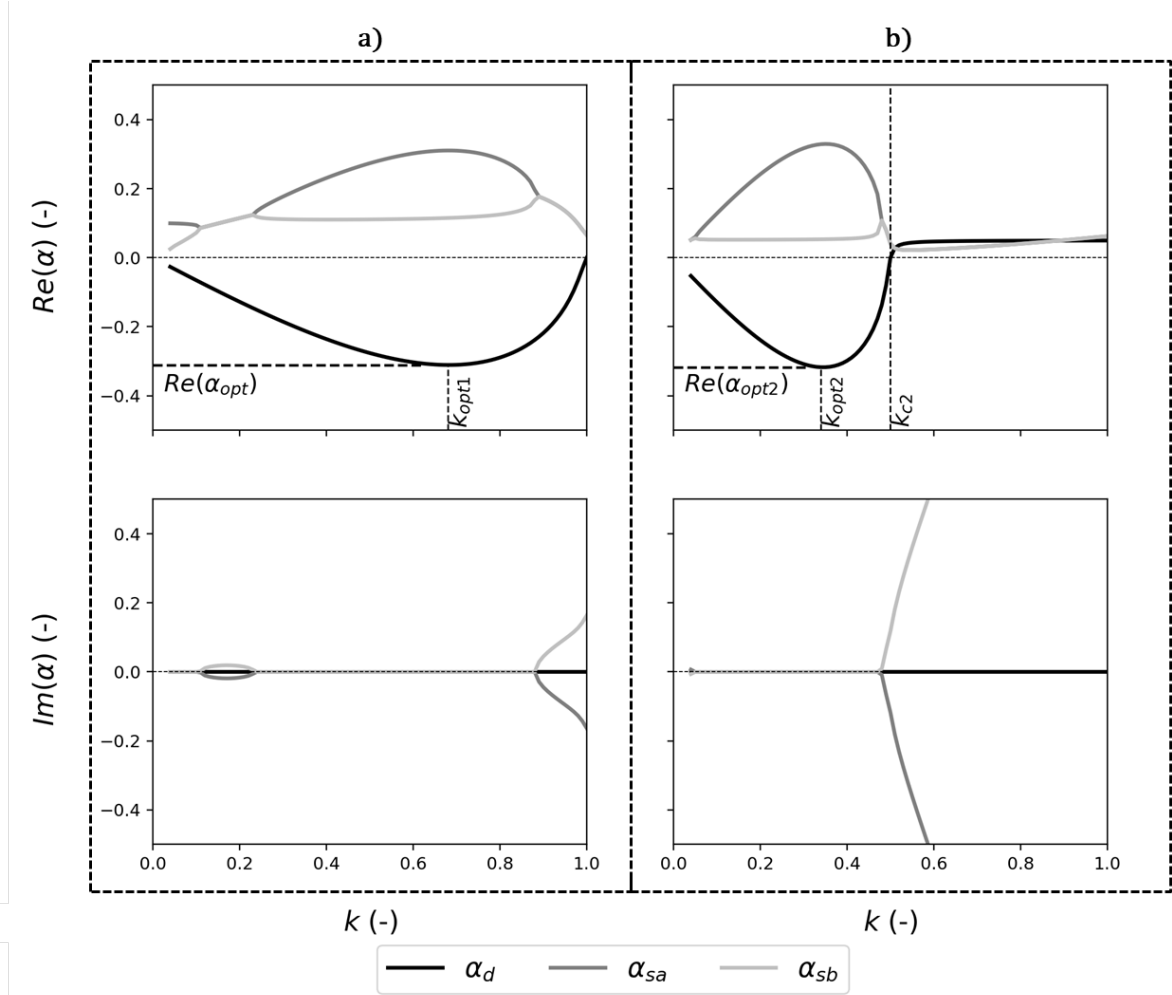


FIGURE 2.3 – Solutions α de la relation de dispersion a) de premier ordre et b) de deuxième ordre pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$.

2.3.2 Intabilité linéaire du jet

2.3.2.1 Etat initial du jet

Dans cette sous-section, l'état initial du jet est présenté en reprenant les résultats énoncés par Cottier *et al.* (2021). Les configurations pure-déformation et pure-impulse sont comparées pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$. La configuration pure-déformation est obtenue en fixant $\tilde{\eta}_p = 1$ et $\tilde{w}_p = 0$; la configuration pure-impulse est obtenue en fixant $\tilde{\eta}_p = 0$ et $\tilde{w}_p = 1$. Les distributions initiales de vitesse axiale w_1 , de pression p_1 et de contrainte axiale normale τ_{zz1} sont tracées pour les deux configurations en Figures 2.4, 2.5 et 2.6, respectivement.

Pour chacune des configurations et chacune des quantités tracées, les cas viscoélastique et Newtonien présentent les mêmes caractéristiques. Cette observation est cohérente avec le fait que la formulation des conditions initiales faite en section 2.1.2.3 reste valide lorsque l'étude se réduit au cas Newtonien.

En comparant les Figures 2.5-a) et 2.5-b), on constate que la variation spatiale de pression est la même d'une configuration à l'autre. Ce n'est pas le cas pour la vitesse axiale (Figures 2.4-a) et 2.4-b)) et pour la contrainte axiale normale (Figures 2.6-a) et 2.6-b)). Ceci est dû au fait que les deuxième et troisième conditions initiales portent sur ces deux dernières quantités.

Dans la configuration pure-impulse, le paramètre de contrôle est \tilde{w}_p et influence exclusivement le gradient axial de vitesse et de contrainte axiale normale, laissant nul le gradient radial de ces deux quantités. Ceci peut être constaté en Figures 2.4-b) et 2.6-b).

Dans la configuration pure-déformation, le paramètre de contrôle est $\tilde{\eta}_p$ et influence à la fois les gradients axial et radial de vitesse et de contrainte axiale normale, comme il peut être constaté en Figures 2.4-a) et 2.6-a). L'origine de ces gradients repose sur la satisfaction de l'équation de continuité en réponse à l'existence d'une déformation de la surface du jet.

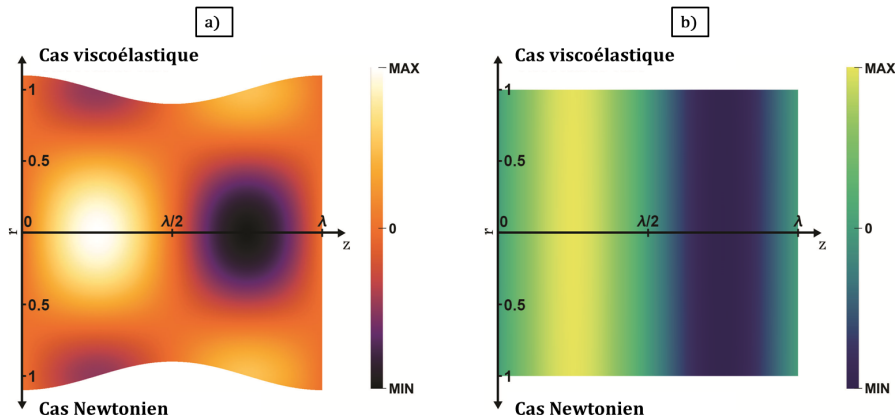


FIGURE 2.4 – Distribution initiale de vitesse axiale w_1 dans la phase liquide dans les configurations a) pure-déformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier *et al.*, 2021).

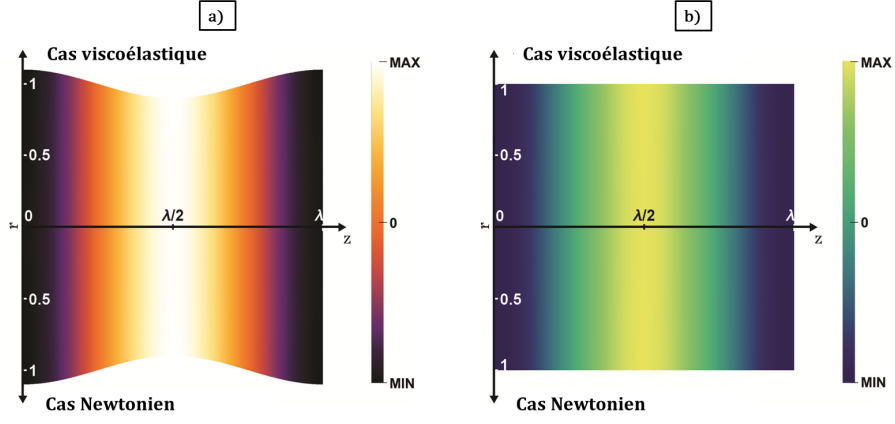


FIGURE 2.5 – Distribution initiale de pression axiale p_1 dans la phase liquide dans les configurations a) pure-deformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier *et al.*, 2021).

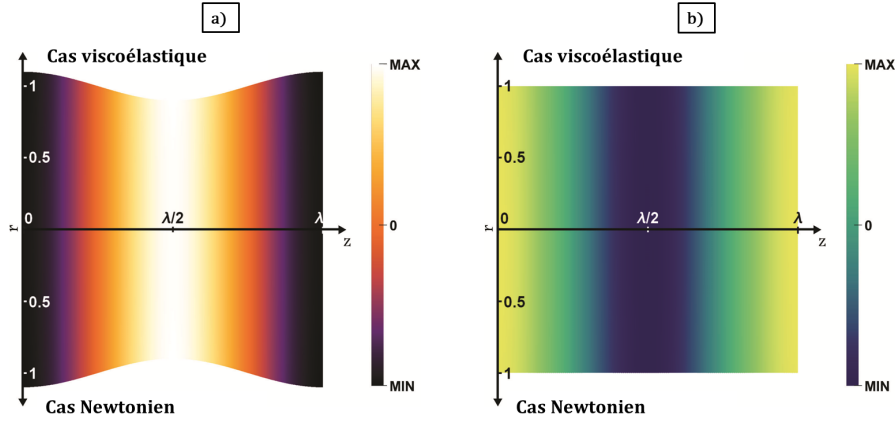


FIGURE 2.6 – Distribution initiale de contrainte axiale normal τ_{zz1} dans la phase liquide dans les configurations a) pure-deformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier *et al.*, 2021).

2.3.2.2 Mode optimal de perturbation

La relation de dispersion de premier ordre a été résolue numériquement pour les quatre cas d'applications en faisant varier le nombre d'onde k de 0 à 1.2 avec un pas de 0.01 et le nombre d'Ohnesorge Oh_0 de 0.02 à 1.2 avec un pas de 0.084. Le mode optimal est associé à la solution dont la partie réelle est la plus faible. Le taux de croissance optimal $-Re(\alpha_{opt})$ et le nombre d'onde optimal k_{opt} sont ainsi extraits et tracés en Figures 2.7-a) et 2.7-b) respectivement.

Pour chacun des quatre cas d'application, on constate que lorsque Oh_0 augmente, $Re(\alpha_{opt})$ diminue en valeur absolue et k_{opt} diminue. Ces deux diminutions sont moins importantes lorsque le rapport De_1/De_2 augmente, comme observé sur les cas B, C et D. Le cas A, dont le rapport De_1/De_2 est élevé, ne vérifie cependant pas cette observation. Les résultats relatifs aux cas A et D sont très proches et permettent d'affirmer que dans la zone de développement de l'instabilité :

- Lorsque les nombres de Deborah De_1 et De_2 sont très faibles (et même si leur rapport est élevé), le mode optimal est comparable à celui d'un liquide Newtonien.
- Lorsque le rapport des nombres de Deborah est faible, le mode optimal est comparable à celui d'un liquide Newtonien.

L'ajout de viscoélasticité augmente le taux de croissance des instabilités et augmente le nombre d'onde du mode optimal. Selon les prédictions réalisées à partir des analyses linéaires (Eq. (1.44) et (1.45)), la longueur de rupture du jet serait inversement proportionnelle au taux de croissance des instabilités, et le diamètre des gouttes résultantes serait inversement proportionnel à la racine cubique du nombre d'onde des instabilités. Ainsi, l'ajout de viscoélasticité diminuerait la longueur des jets ainsi que la taille des gouttes résultantes.

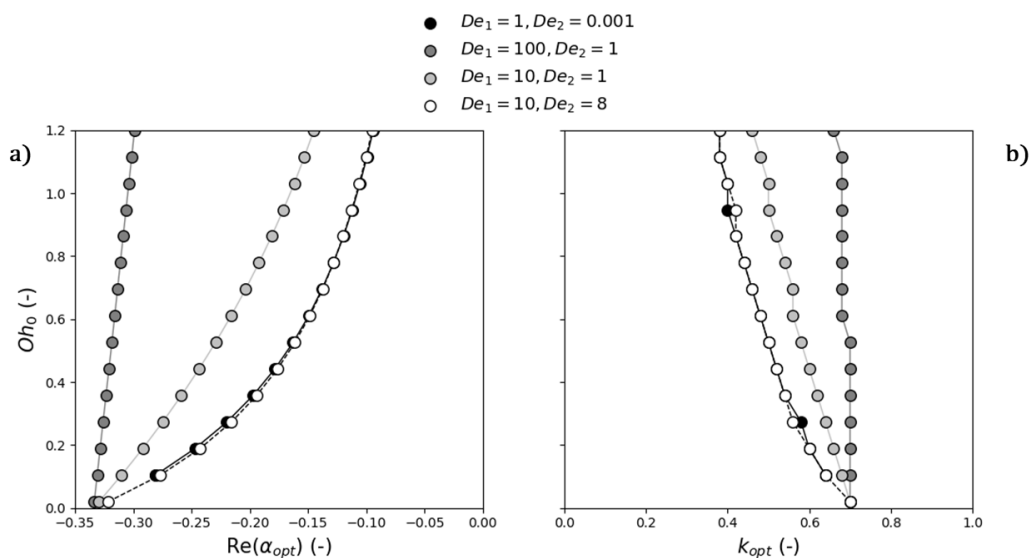


FIGURE 2.7 – Tracés a) des taux de croissance $-Re(\alpha_{opt})$ et b) des nombres d'onde k_{opt} pour les quatre cas d'application en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 .

2.3.2.3 Régime oscillatoire

En Figure 2.8 sont identifiées les plages de nombres d'onde pour lesquels le régime est oscillatoire. En notant k^* le nombre d'onde le plus faible à partir duquel un régime oscillatoire est observé, on constate que :

- Une diminution du rapport De_1/De_2 contribue à une diminution de k^* et à la formation d'une plage oscillatoire pour des nombres d'ondes $k > k^*$. Cette deuxième plage existe en deçà d'une certaine valeur de nombre d'Ohnesorge Oh_0 qui diminue lorsque De_1/De_2 augmente.
- Une diminution des nombre de Deborah De_1 et De_2 en maintenant leur rapport constant contribue à une diminution de k^* , cette diminution étant plus marquée lorsque Oh_0 augmente.

En Figures 2.8-a) et 2.8-c), le mode optimal caractérisé par k_{opt} se situe dans le régime oscillatoire pour un nombre d'Ohnesorge suffisamment élevé. Cette observation n'est pas vérifiée pour les autres cas d'application.

Ces deux prédictions sont exclusivement basées sur les résultats d'une analyse de stabilité linéaire. Dans les sous-sections suivantes, une méthode de prédiction basée sur les résultats de l'analyse faiblement linéaire est développée et mise en oeuvre pour les différents cas d'application. Au-delà de la caractérisation de l'influence de la viscoélasticité, les effets de la prise en compte des non-linéarités seront étudiés et discutés.

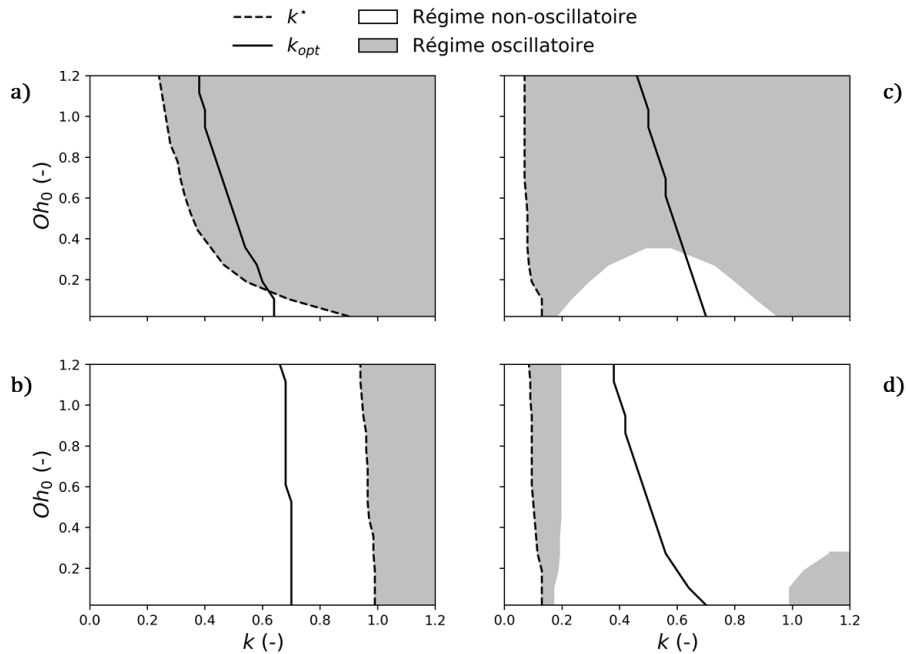


FIGURE 2.8 – Identification du régime oscillatoire en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour les solutions viscoélastiques : a) cas A ($De_1 = 1$ et $De_2 = 0.001$), b) cas B ($De_1 = 100$ et $De_2 = 1$), c) cas C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$), d) cas D ($De_1 = 10$ et $De_2 = 8$).

2.3.3 Instabilité faiblement non-linéaire des jets

Afin de décrire l'instabilité faiblement non-linéaires des jets, les interfaces positives $r_{s1}(z, t)$ et $r_{s2}(z, t)$

$$r_{s1}(z, t) = 1 + \epsilon \eta_1(z, t) \quad (2.181)$$

$$r_{s2}(z, t) = 1 + \epsilon \eta_1(z, t) + \epsilon^2 \eta_2(z, t) \quad (2.182)$$

sont tracées en fonction du temps à partir des résultats de l'analyse faiblement non-linéaire obtenus en section 2.2 et des solutions aux relations de dispersion d'ordre 1 et 2. Pour cela, les paramètres suivants ont été choisis :

- Le mode de perturbation choisi est le mode pure-deformation, en fixant $\tilde{\eta}_p = 1$ et $\tilde{w}_p = 0$.
- L'indice de sommation N est pris égal à 3.
- L'amplitude de perturbation initiale est choisie égale à $\epsilon = 0.03$.
- Le pas de temps est pris égal à 0.56.

2.3.3.1 Rupture de jets

La rupture du jet est identifiée dès lors que $r_s(z, t) \leq 0$. On note t_{bu1} et t_{bu2} les temps de de ruptures propres à l'analyse linéaire et à l'analyse faiblement non-linéaire, respectivement. On note t_{bu1d} le temps de rupture propre à l'analyse linéaire prenant en compte exclusivement le mode instable caractérisé par la solution α_{1d} et étant défini par :

$$t_{bu1d} = \frac{1}{|Re(\alpha_{1d})|} \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \quad (2.183)$$

En Figure 2.9, les temps de rupture t_{bu1d} , t_{bu1} et t_{bu2} sont tracés en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$) avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$. On constate que les trois temps de rupture sont proches et suivent la tendance suivante : lorsque le nombre d'onde k est au voisinage de 0 et de 1, les temps de ruptures sont les plus importants. Ils sont minimaux lorsque $k = k_{opt}$.

Le temps de rupture t_{bu1d} est plus faible que t_{bu1} . Ce résultat est cohérent puisqu'à la différence de t_{bu1} , t_{bu1d} ne prend pas en compte les modes relatifs aux solutions α_{1sa} et α_{1sb} , dont les parties réelles sont positives et qui tendent alors à amortir l'instabilité dans le temps. L'écart $t_{bu1} - t_{bu1d}$ est minimal pour $k = k_{opt1}$. La négligence des modes stables implique une sur-estimation du temps de rupture. En comparant les temps de rupture t_{bu1} et t_{bu2} , on constate que pour k approchant de 0, l'écart $t_{bu2} - t_{bu1}$ est très important. Il diminue jusqu'à être quasiment nul en $k = k_{opt2}$. Au-delà de k_{opt2} , l'écart prend des valeurs plus importantes et connaît un point d'inflexion en $k = k_{opt1}$. L'écart continue d'augmenter et prend des valeurs très importantes à l'approche de $k = 1$. Ainsi, la négligence des contributions non-linéaires implique une sur-estimation du temps de rupture. Cette sur-estimation est d'autant plus importante lorsqu'on s'éloigne du mode optimal.

Ces observations sont vérifiées sur les autres cas d'applications. On note que l'écart entre les temps t_{bu1} et t_{bu2} est de façon générale plus important pour les cas A et D et d'autant plus lorsque le nombre d'Ohnesorge Oh_0 augmente. Ce résultat indique que les non-linéarités induites par l'ajout de viscoélasticité tendent à amortir les instabilités.

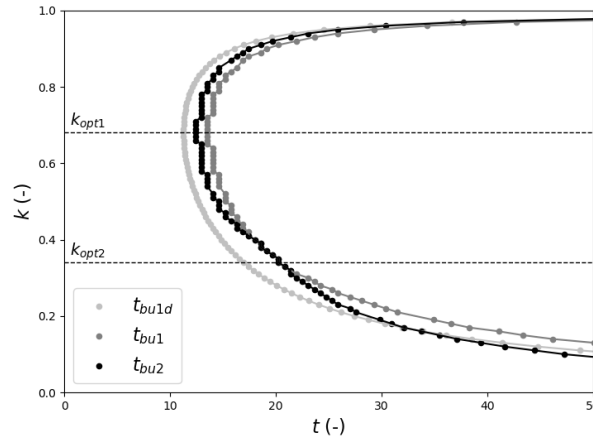


FIGURE 2.9 – Tracé des temps de rupture t_{bu1d} , t_{bu1} et t_{bu2} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$.

Cette conclusion est par ailleurs confirmée en Figure 2.10 où sont tracés les temps de ruptures t_{bu2} en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 avec $k = k_{opt}$ pour tous les cas d'application. On constate que :

- Comme visible pour tout les cas d'application, une augmentation du nombre d'Ohnesorge Oh_0 implique une augmentation du temps de rupture t_{bu2} ($k = k_{opt}$). Cette variation est quasi-proportionnelle.
- Une augmentation du rapport De_1/De_2 implique une diminution de t_{bu2} ($k = k_{opt}$), comme le suggère la comparaison des cas B, C et D. Cette variation est quasiment inversement proportionnelle.
- Cette dernière constatation n'est pas vérifiée pour le cas A : lorsque les temps de Deborah sont très faibles, t_{bu2} ($k = k_{opt}$) est important.

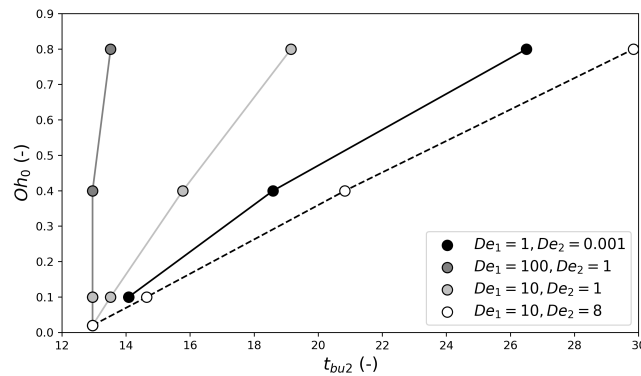


FIGURE 2.10 – Tracé des temps de rupture t_{bu2} ($k = k_{opt}$) en fonction d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

2.3.3.2 Prédiction de gouttes secondaires

On s'intéresse ici à la géométrie de l'interface au temps de la rupture du jet t_{bu} . En procédant à un changement de variable, l'interface de second ordre peut être exprimée comme :

$$r_{s2}(u, t) = 1 + \epsilon B_{11}(t) \cos(u) + \epsilon^2 B_{22}(t) \cos(2u) + \epsilon^2 B_{22s}(t) \sin(2u) + \epsilon^2 B_{20}(t) \quad (2.184)$$

Ainsi, $r_{s2}(u, t)$ est une fonction de nature cosinusoidale multi-modale. Chaque mode est associé à un facteur B dépendant du temps t et exprimé grâce aux résultats de l'analyse faiblement non-linéaires. Ces modes sont représentés en Figure 2.11-a) avec des amplitudes de valeur absolue égale à l'unité.

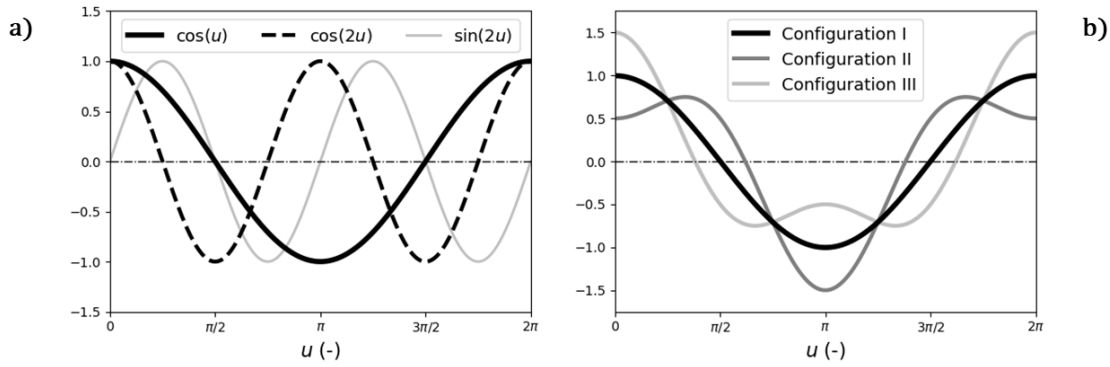


FIGURE 2.11 – Tracés a) des modes constituant la position de l'interface $r_{s2}(z, t)$ et b) des trois configurations géométriques possiblement adoptées par l'interface $r_{s2}(z, t)$.

Les valeurs des coefficients G_{21} dont dépend le facteur $B_{21s}(t)$ associé au mode $\sin(2u)$ ont été trouvées infinitésimales pour tous les cas d'applications traités dans cette étude. Ainsi, le facteur $B_{21s}(t)$ sera négligé dans le développement suivant. Par ailleurs, le facteur $B_{11}(t)$ est strictement positif et le facteur $B_{20}(t)$ est strictement négatif pour tous les cas d'applications traités dans cette étude. Seul le signe du facteur $B_{22}(t)$ est amené à varier suivant la valeur de k et des propriétés du liquide. Suivant les valeurs des facteurs $B_{11}(t)$ et $B_{22}(t)$ et du signe de $B_{22}(t)$, l'interface du jet peut adopter trois types de géométries différentes, représentées en Figure 2.11-b). Pour u appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$:

- La configuration I présente un minimum local et un maximum local. La contribution en $\cos(u)$ est prédominante.
- La configuration II présente deux minimums locaux centrés l'un sur le maximum local propre à la configuration I et l'autre sur le minimum local propre à la configuration I.
- La configuration III présente deux maximums locaux centrés l'un sur le maximum local propre à la configuration I et l'autre sur le minimum local propre à la configuration I. Cette configuration implique théoriquement la production de gouttes secondaires.

Dans le cadre d'une analyse de stabilité faiblement non-linéaire d'un jet de liquide Newtonien, Renoult *et al.* (2018) effectuent un développement permettant d'établir le lien entre ces configurations et les différentes contributions présentes dans l'expression de $r_{s2}(z, t)$. En négligeant

le facteur $B_{21s}(t)$, les résultats de ce développement sont valides dans le cas viscoélastique et se formulent de la façon suivante :

$$q_{22}(t) = \frac{-B_{11}(t)}{4\epsilon B_{22}(t)} \quad (2.185)$$

- La configuration I est adoptée si $|q_{22}(t)| \geq 1$.
- La configuration II est adoptée si $|q_{22}(t)| < 1$ et si $q_{22}(t)$ est positif.
- La configuration III est adoptée si $|q_{22}(t)| < 1$ et si $q_{22}(t)$ est négatif.

L'interface du jet évolue en premier lieu dans la configuration I puis connaît une transition vers la configuration II ou la configuration III aux temps critiques t_s^{II} et t_s^{III} , respectivement. En Figure 2.12, ces temps sont tracés en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$) avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$. On constate que pour $k > k_{trans}$, l'interface du jet adopte la configuration II et que pour $k < k_{trans}$ la configuration III est adoptée. Lorsque $k < k^*$, t_s^{II} est quasi-nul. Au dépassement de k^* , t_s^{II} augmente fortement, puis diminue, puis réaugmente progressivement jusqu'en $k = k_{trans}$. Le nombre d'onde k_{trans} est le siège d'une discontinuité de t_s . Lorsque le nombre d'onde dépasse k_{trans} , la configuration II est adoptée. Le temps t_s^{II} connaît une diminution progressive jusqu'à atteindre un minimum, puis réaugmente jusqu'en $k = 1$.

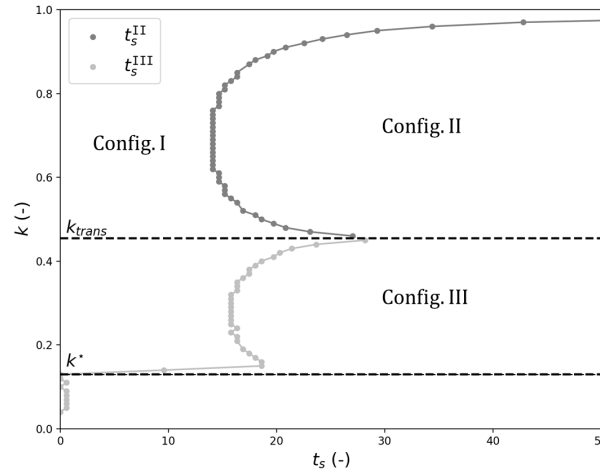


FIGURE 2.12 – Tracé des temps de transition t_s^{II} et t_s^{III} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$.

Ces tendances sont observées pour tous les cas d'application traités dans cette étude. Le comportement de k^* a été précédemment étudié en sous-section 2.3.2.3. En Figure 2.13-a), le nombre d'onde de transition k_{trans} est tracé en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application. On constate que lorsque Oh_0 est faible, on a $0.46 \leq k_{trans} \leq 0.48$. Pour tous les cas d'applications, lorsque Oh_0 augmente, k_{trans} connaît une diminution puis une augmentation. Un ajout viscoélasticité n'a pas un effet clairement identifiable sur k_{trans} pour de faibles viscosités. Il semblerait que pour des viscosités plus importantes, les solutions plus viscoélastiques présentent un nombre d'onde de transition k_{trans} plus faible.

En Figure 2.13-b), la différence $k_{trans} - k_{opt}$ est tracée pour tous les cas d'application. Lorsque $k_{trans} > k_{opt}$, cette différence est positive et implique une forte probabilité que l'interface du jet libre adopte la configuration II, où la formation de gouttes secondaires est prédite. Pour tous les cas d'application, lorsque Oh_0 est faible, la différence $k_{trans} - k_{opt}$ est relativement éloignée de la valeur 0, impliquant une faible probabilité de formation de gouttes secondaires. Cette probabilité augmente avec l'augmentation de Oh_0 . Pour $Oh_0 \geq 0.4$, les cas A et D, peu viscoélastiques, semblent plus propices à la formation de gouttes secondaires. Pour $Oh_0 = 0.8$, on a $k_{trans} \geq k_{opt}$ pour tous les cas d'applications.

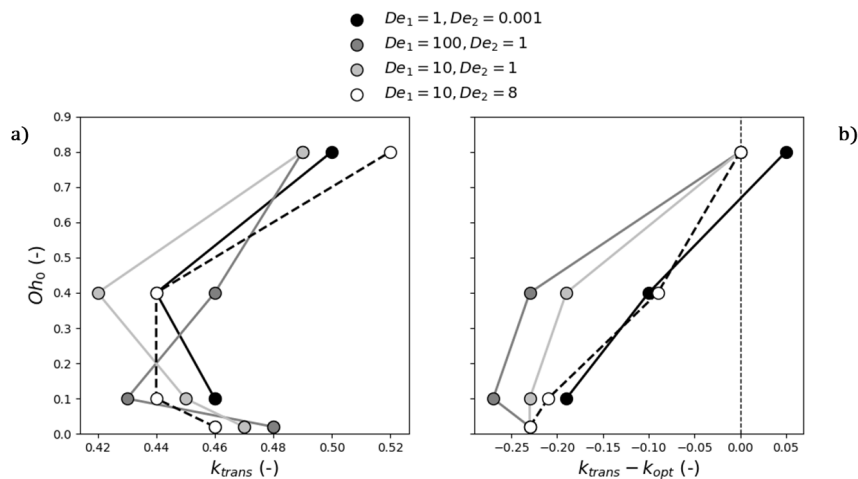


FIGURE 2.13 – Tracés a) du nombre d'onde de transition k_{trans} et b) de la différence $k_{trans} - k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

En Figure 2.14, le temps de transition t_s de la configuration I à la configuration II ou III en $k = k_{opt}$ est tracé en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application. Pour de faibles nombres d'Ohnesorge, ce temps est quasiment le même pour toutes les solutions traitées. Lorsque Oh_0 augmente, ce temps devient presque nul pour le cas D. Pour les autres cas, on constate une augmentation de ce temps. L'influence de la viscosité sur le temps t_s apparaît moins importante lorsque la viscoélasticité augmente.

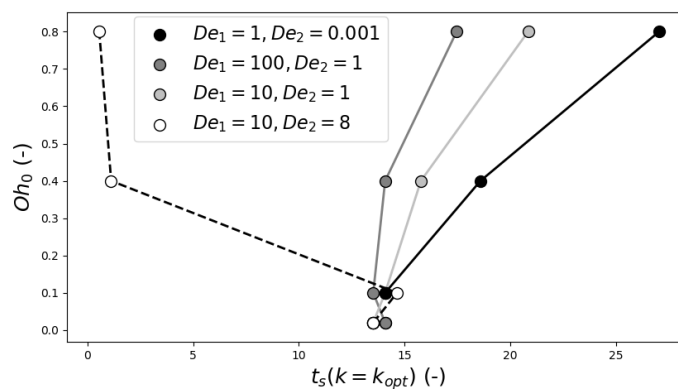


FIGURE 2.14 – Tracé du temps de transition t_s ($k = k_{opt}$) en fonction du nombre d'Ohnesorge pour tous les cas d'application.

2.3.3.3 Influences des modes subdominants

Dans le cadre d'analyses linéaires et faiblement non-linéaires, nombre d'auteurs ne prennent en considération que les modes instables (ici associés aux solutions α_d) et négligent les contributions liées aux modes stables (ici associés aux solutions α_{sa} et α_{sb}). Ce choix peut se justifier par les raisons suivantes :

- De par la nature exponentielle de la dépendance temporelle des différentes contributions, le mode instable dominant relativement rapidement les modes stables.
- La prise en compte des modes stables complexifie l'analyse de stabilité effectuée en 2.2. Cette complexification est accentuée d'une part lorsque l'analyse est réalisée à l'ordre 2, et d'autre part au travers de l'existence d'un mode stable supplémentaire lorsque le liquide considéré est viscoélastique.
- La résolution des relations de dispersion constitue une difficulté qui est accentuée pour les solutions associées aux modes stables. En effet, alors que α_d est purement réelle pour tout nombre d'onde k , les autres solutions présentent des parties imaginaires non-nulles selon k . La résolution de telles relations a été grandement facilitée par le développement d'outils numériques.

Afin de caractériser les conséquences de cette approximation dans le cadre d'une étude linéaire, García et González (2008) introduisent la fonction $\Gamma_1(t)$ définie par :

$$\Gamma_1(t) = \frac{\eta_{1,t}(z, t)}{-\alpha_d \eta_1(z, t)} - 1 \quad (2.186)$$

qui se développe ici comme :

$$\Gamma_1(t) = \frac{\sum_{u=d,sa,sb} \alpha_1^u \hat{\eta}_1^u e^{-\alpha_1^u t}}{\alpha_d \sum_{u=d,sa,sb} \hat{\eta}_1^u e^{-\alpha_1^u t}} - 1 \quad (2.187)$$

Cette fonction est une fonction décroissante du temps. Le temps noté t_{Γ_1} correspond au temps auquel $\Gamma_1(t) = 0,01$ et signifie que jusqu'à ce temps, l'erreur relative due à l'approximation est inférieure à 1%. García et González (2008) parviennent à exprimer analytiquement ce temps à partir des taux de croissance et des amplitudes de déformation pour le cas Newtonien. Dans le cas viscoélastique, la présence d'un mode supplémentaire ne le permet pas et pour cette raison ce temps est déterminé numériquement seulement.

Par ailleurs, on introduit dans cette étude non-linéaire la fonction analogue $\Gamma_2(t)$ définie par :

$$\Gamma_2(t) = \frac{\epsilon \eta_{1,t}(z, t) + \epsilon^2 \eta_{2,t}(z, t)}{-\epsilon \alpha_{1d} \eta_1(z, t) - 2\epsilon^2 \alpha_{1d} \eta_{21}(z, t) - \epsilon^2 \alpha_{2d} \eta_{22}(z, t)} - 1 \quad (2.188)$$

De même qu'au premier ordre, le temps noté t_{Γ_2} correspond au temps auquel $\Gamma_2(t) = 0,01$ et signifie que jusqu'à ce temps, l'erreur relative dû à l'approximation est inférieure à 1%.

En Figure 2.15, les temps t_{Γ_1} et t_{Γ_2} sont tracés en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$) avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$. On constate d'un premier abord une augmentation globale des temps t_{Γ_1} et t_{Γ_2} lorsque le nombre d'onde k diminue, indiquant une influence plus importante des modes subdominants vis-à-vis de l'évolution temporelle de la déformation de la surface du jet. Cette influence est peu importante pour le mode optimal ($k = k_{opt}$). La comparaison des t_{Γ_1} et t_{Γ_2} amène aux observations suivantes :

- Pour des nombre d'ondes $k < k_{opt2}$: $t_{\Gamma 2} < t_{\Gamma 1}$. La prise en compte des non-linéarités impliquant les modes subdominants écourte l'intervalle de temps dans lequel les modes subdominants ont une influence considérable.
- Pour des nombre d'ondes $k > k_{opt2}$: $t_{\Gamma 2} > t_{\Gamma 1}$. La prise en compte des non-linéarités impliquant les modes subdominants allonge l'intervalle de temps dans lequel les modes subdominants ont une influence considérable.

Ces dernières observations, ainsi que la présence de fluctuations des fonctions $t_{\Gamma 1}(k)$ et $t_{\Gamma 2}(k)$ laissent penser que ces temps dépendent de la nature des solutions aux relations de dispersion.

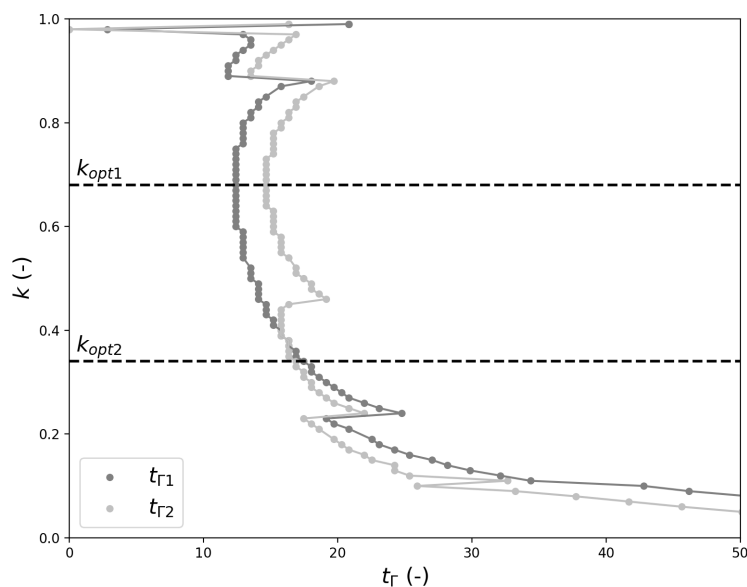


FIGURE 2.15 – Tracé des temps $t_{\Gamma 1}$ et $t_{\Gamma 2}$ en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$.

En Figure 2.16-a), le temps $t_{\Gamma 2}$ déterminé en $k = k_{opt}$ est tracé pour tous les points de fonctionnement en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 . On constate que pour de faibles nombres d'Ohnesorge, les cas B, C et D présentent des temps $t_{\Gamma 2}$ très proches les uns des autres. Pour le cas A, ce temps est plus faible. Lorsque le nombre d'Ohnesorge augmente, seul le cas C voit son temps $t_{\Gamma 2}$ varier significativement. Une comparaison des cas A, B et C montre que $t_{\Gamma 2}(k = k_{opt})$ diminue avec la viscoélasticité par le biais de la valeur de De_1 . Cette observation n'est cependant pas vérifiée pour le cas D.

En Figure 2.16-b), l'écart relatif de $t_{\Gamma 2}$ par rapport à $t_{\Gamma 1}$ est tracé. On constate que lorsque le nombre d'Ohnesorge augmente, cet écart augmente également puis diminue voire se stabilise à partir d'un certain Oh_0 qui semble différer d'un cas d'application à l'autre. En l'état actuel de ce travail, ce résultat n'aboutit pas à une conclusion concernant l'influence de la viscoélasticité sur l'importance de la prise en compte des contributions non-linéaires des modes subdominants. Il peut être seulement dit que les non-linéarités liées aux modes subdominants rallongent jusqu'à environ 35 % leur temps d'influence vis-à-vis de la déformation de l'interface.

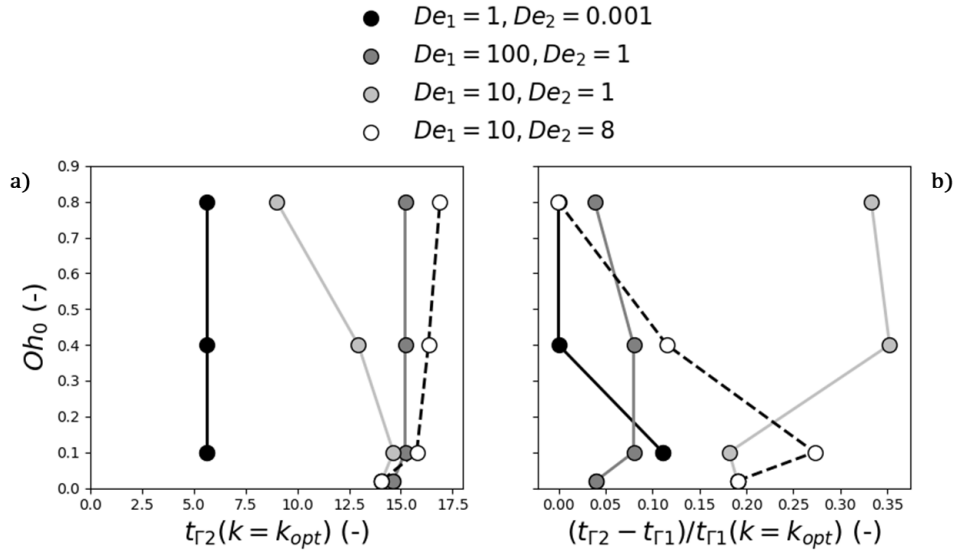


FIGURE 2.16 – Tracés de a) $t_{\Gamma 2}(k = k_{opt})$ et b) $t_{\Gamma 2} - t_{\Gamma 1}(k = k_{opt})$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

En Figures 2.17-a) et 2.17-b), les différences de temps $t_{\Gamma 2} - t_{s2}$ et $t_{\Gamma 2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$, respectivement, sont tracées pour tous les cas d'application en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 . On constate que ces deux différences de temps sont systématiquement positives ou nulles. Ce résultat indique que les prédictions relatives à la formation de gouttes secondaires et au temps de ruptures des jets sont réalisées alors que la dynamique d'évolution de la déformation du jet est encore impactée par les modes subdominants. La prise en compte de ceux-ci se révèle donc nécessaire.

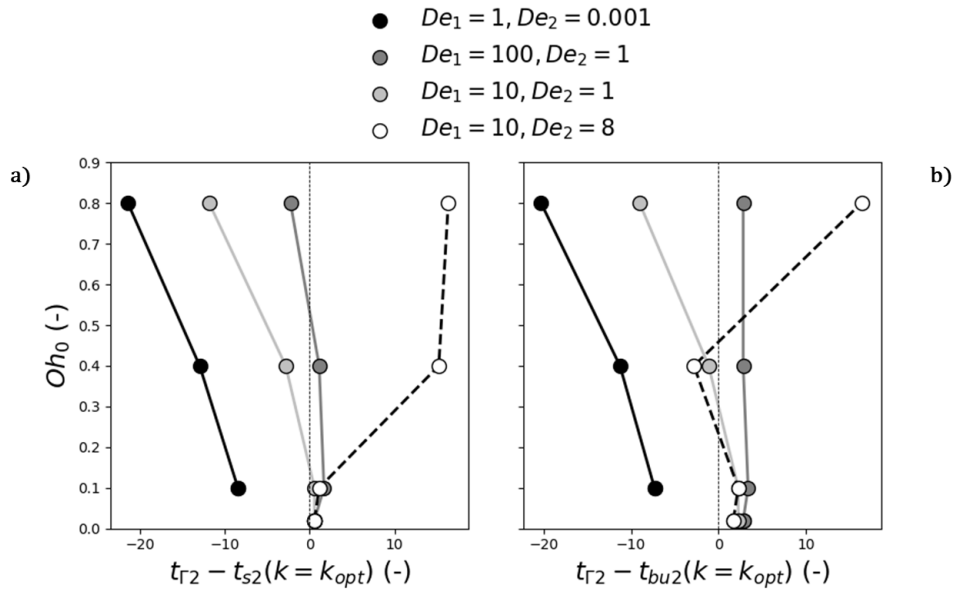


FIGURE 2.17 – Tracés de a) la différence de temps $t_{\Gamma 2} - t_{s2}$ et b) la différence de temps $t_{\Gamma 2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

2.3.3.4 Validité des prédictions

Afin de caractériser la validité des prédictions présentées ci-avant, un critère de validité est établi sur la base de la conservation du volume liquide contenu dans le jet. En s'inspirant des travaux de Renoult *et al.* (2018) sur les jets Newtoniens, on introduit la fonction suivante :

$$\Lambda(t) = \frac{V(t)}{V_0} - 1 \quad (2.189)$$

où V_0 et $V(t)$ correspondent au volume de liquide contenu dans la colonne non-perturbée et au volume de liquide contenu dans le jet au temps t , respectivement. La fonction Λ est une fonction croissante du temps représentative de la non-conservation du volume de liquide au cours du temps. On note t_v le temps auquel $\Lambda(t) = 0.05$, correspondant à une augmentation de 5 % du volume initial de liquide. Cette étude de validité est réalisée :

- Sur le jet résultant de l'analyse linéaire, auquel on associe le volume $V_1(t)$ et le temps t_{v1} .
- Sur le jet résultant de l'analyse faiblement non-linéaire, auquel on associe le volume $V_2(t)$ et le temps t_{v2} .

Les volumes V_0 , $V_1(t)$ et $V_2(t)$ sont déterminés par intégration volumique sur une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Ils s'écrivent :

$$V_0 = \frac{2\pi^2}{k} \quad (2.190)$$

$$V_1(t) = \frac{\pi^2}{k} \int_{z=0}^{\lambda} (1 + \epsilon\eta_1(z, t))^2 dz \quad (2.191)$$

$$V_2(t) = \frac{\pi^2}{k} \int_{z=0}^{\lambda} (1 + \epsilon\eta_1(z, t) + \epsilon^2\eta_2(z, t))^2 dz \quad (2.192)$$

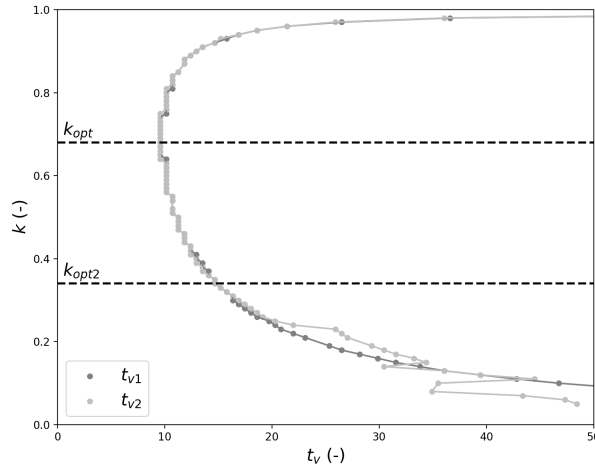


FIGURE 2.18 – Tracé des temps de transition t_{v1} et t_{v2} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$.

En Figure 2.18, les temps t_{v1} et t_{v2} sont tracés en fonction du nombre k pour le cas d'application C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$) avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$. On constate que ces deux

temps sont très proches même si cependant, aux faibles nombres d'ondes, t_{v2} présente des fluctuations dont l'origine est inconnue dans l'état actuel des travaux. D'autre part, on remarque que les temps t_{v1} et t_{v2} sont minimaux en $k = k_{opt}$, ce qui est cohérent puisque c'est pour ce nombre d'onde que l'instabilité présente un taux de croissance maximale. Ces observations sont vérifiées pour tous les cas de fonctionnement.

En Figure 2.19, le temps t_{v2} est tracé en fonction du nombre d'Ohnesorge pour tous les points de fonctionnement. Lorsque la solution est très peu visqueuse ($Oh_0 = 0.01$), tous les cas d'applications présentent un même temps t_{v2} . Pour les cas A, C et D, on constate une augmentation quasi-proportionnelle du temps t_{v2} avec le nombre d'Ohnesorge Oh_0 . Cette augmentation est plus importante pour les solutions peu viscoélastiques (cas C et D). Lorsque la viscoélasticité est importante (cas B), t_{v2} est constant.

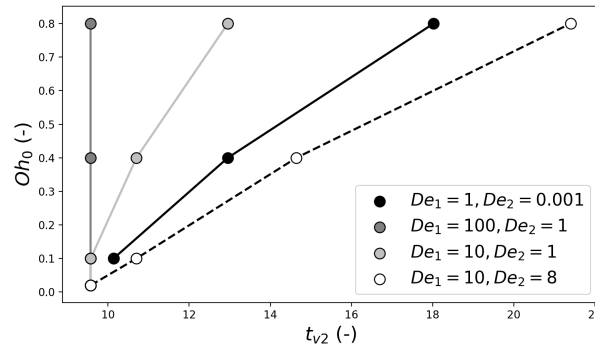


FIGURE 2.19 – Tracé du temps t_{v2} en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

En Figures 2.20-a) et 2.20-b), les différences de temps $t_{v2} - t_{s2}$ et $t_{v2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$, respectivement, sont tracées pour tous les cas d'application en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 . On constate que ces deux différences de temps sont systématiquement négatives (sauf pour un point de fonctionnement du cas D). Ce résultat indique que les prédictions relatives à la formation de gouttes secondaires et au temps de ruptures des jets sont réalisées alors que le volume du jet a déjà augmenté de 5 % par rapport à son volume initial.

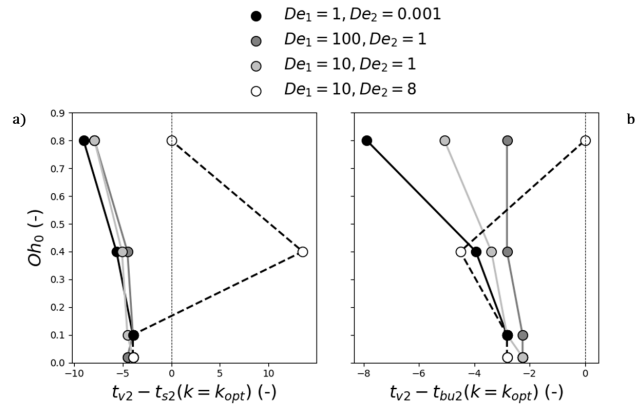


FIGURE 2.20 – Tracé de a) la différence de temps $t_{v2} - t_{s2}$ et b) la différence de temps $t_{v2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.

2.4 Conclusion de l'étude théorique

Une analyse faiblement non-linéaire d'un jet de liquide viscoélastique a été effectuée. Le problème a été formulé de façon générale en ne presumant pas d'un choix spécifique concernant le type de perturbation appliquée sur l'état de base. La résolution du problème aux valeurs propres et aux valeurs initiales a été effectuée jusqu'au deuxième ordre. A partir des expressions analytiques obtenues par cette analyse, l'évolution temporelle de la déformation du jet a été étudiée pour quatre liquides viscoélastiques et pour des viscosités différentes dans une configuration de type pure-deformation. Des prédictions de temps de rupture de ces jets et de la formation de gouttes secondaires ont été réalisées. Les résultats principaux montrent que pour un jet libre régi par le mode optimal de perturbation :

- L'ajout de viscoélasticité réduit le temps de rupture du jet.
- L'ajout de viscoélasticité tend à réduire la probabilité de formation de gouttes secondaires.

Par ailleurs, l'importance relative de la prise en compte des modes stables a été caractérisée. La conclusion de cette caractérisation n'est pas unanime mais pour un nombre considérable des applications réalisées, les résultats montrent que la prise en compte des modes subdominants est nécessaire aux prédictions évoquées précédemment.

En dernier lieu, la limite de cette étude a été caractérisée au travers du suivi temporel du volume de liquide contenu dans le jet. Ce volume n'est pas conservé ; il augmente au cours du temps. Les résultats montrent que les prédictions évoquées précédemment sont réalisées alors que le volume du jet a déjà augmenté de 5 % par rapport à son volume initial.

Chapitre 3

Etude expérimentale de jets libres de liquides viscoélastiques

Sommaire

3.1	Expériences	96
3.1.1	Dispositif expérimental	96
3.1.1.1	Présentation du banc expérimental	96
3.1.1.2	Description de l'injecteur	97
3.1.1.3	Imagerie	97
3.1.2	Points de fonctionnement	98
3.1.2.1	Préparation et caractérisation des solutions	98
3.1.2.2	Conditions d'expériences	100
3.2	Traitements d'images	102
3.2.1	Binarisation du système diphasique	102
3.2.2	Définition de fenêtres d'analyse	103
3.3	Mesures et analyses	104
3.3.1	Zone de latence du jet	104
3.3.1.1	Présentation de la POD	104
3.3.1.2	Application de la POD à un ensemble statistique d'images synthétiques	107
3.3.1.3	Application de la POD aux images expérimentales	110
3.3.2	Longueur de rupture du jet	113
3.3.3	Evolutions morpho-topologiques du jet	115
3.3.3.1	Description multi-échelles	115
3.3.3.2	Mesures d'échelles d_R et d_M du jet	122
3.3.3.3	Diamètre moyen du jet	124
3.3.3.4	Taux de croissance des instabilités capillaires	124
3.3.3.5	Longueurs d'onde de perturbations	126
3.3.3.6	Propriétés élongationnelles du liquide	127
3.3.3.7	Coalescence	130
3.3.4	Tailles de gouttes	131
3.3.4.1	Méthode multi-échelles	131
3.3.4.2	Méthode directe	132
3.3.4.3	Comparatif des deux méthodes	133
3.3.5	Schématisation des éléments mesurés	134

3.4	Resultats	135
3.4.1	Régimes d'évolution des jets	135
3.4.2	Processus d'injection et dégradation associée	138
3.4.3	Développement de l'instabilité	140
3.4.4	Propriétés élongationnelles et dégradation dans le REC	146
3.4.5	Distributions de taille de gouttes et mécanismes de coalescence	148

Dans ce troisième chapitre, l'approche expérimentale d'étude des jets capillaires de liquides viscoélastiques est présentée. Des images de jets hautement résolues en espace sont prises en plusieurs positions des jet. A partir de ces images et d'une description multi-échelles, des informations sur la géométrie et la morphologie des jets sont extraites. Des analyses statistiques adaptés permettent alors d'identifier les différents régimes d'évolution des jets et de mesurer les propriétés élongationnelles des liquides ainsi que l'occurrence de phénomènes de coalescence. La taille des gouttes produites est également mesurée.

En premier lieu, le dispositif expérimental est décrit et les points de fonctionnement étudiés sont caractérisés. Les opérations de traitement des images sont brièvement présentées. Les éléments de mesures et d'analyses de ces images sont ensuite détaillés. Dans une dernière partie, les résultats expérimentaux sont présentés. La question de l'influence de la viscoélasticité et des conditions d'injection sur les différentes dynamiques des jets et sur la taille des gouttes produites est traitée. En particulier, deux mécanismes de dégradation mécanique sont mis en évidence. Ces résultats sont mis en perspective avec les résultats théoriques de l'étude expérimentale réalisée en section 2 ainsi qu'avec les éléments de la littérature.

3.1 Expériences

Les expériences qui ont été menées dans le cadre de cette thèse sont très proches de celles réalisées au cours de la thèse de Tirel (2019). Elles consistent en la production et prise d'images de jets libres basses vitesses, aussi appelés *jets capillaires*. Dans cette section, le dispositif expérimental est présenté, suivi des différents points de fonctionnement étudiés.

3.1.1 Dispositif expérimental

3.1.1.1 Présentation du banc expérimental

Le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de cette thèse a été mis en place durant la thèse de Tirel (2019) ; seuls quelques éléments ont été changés. Ce dispositif est schématisé en Figure 3.1.

Un jet est formé par extrusion d'un liquide au travers d'un injecteur doté d'une buse cylindrique. L'extrusion du liquide est effectuée en utilisant 4 seringues de contenance 50 mL actionnées par un pousse-seringues Nexus 6000 de la marque Chemyx, permettant la génération d'un débit constant, dont la valeur peut être comprise entre 1,8 et $50 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$. L'utilisation d'un pousse-seringue permet la génération constante et précise d'un faible débit.

L'injecteur est disposé de telle sorte que le jet évolue verticalement dans l'air ambiant au repos.

De part et d'autre du jet, une caméra et une source lumineuse sont disposées et synchronisées via l'utilisation d'un générateur de signaux. Le jet est illuminé par une lumière pulsée cohérente, permettant la visualisation de son ombre sur le capteur de la caméra. Un diffuseur permet d'homogénéiser le signal lumineux. Une lunette de visée lointaine fixée au devant de la caméra permet d'ajuster le champ de visualisation et la résolution spatiale des images.

L'injecteur est relié à un appareil de déplacement micrométrique motorisé dans les trois directions, permettant d'ajuster la mise au point et de visualiser le jet en plusieurs positions (jusqu'à 20 cm de course possible dans la direction du jet). Il s'agit du modèle T-LSM050A de la marque Zaber.

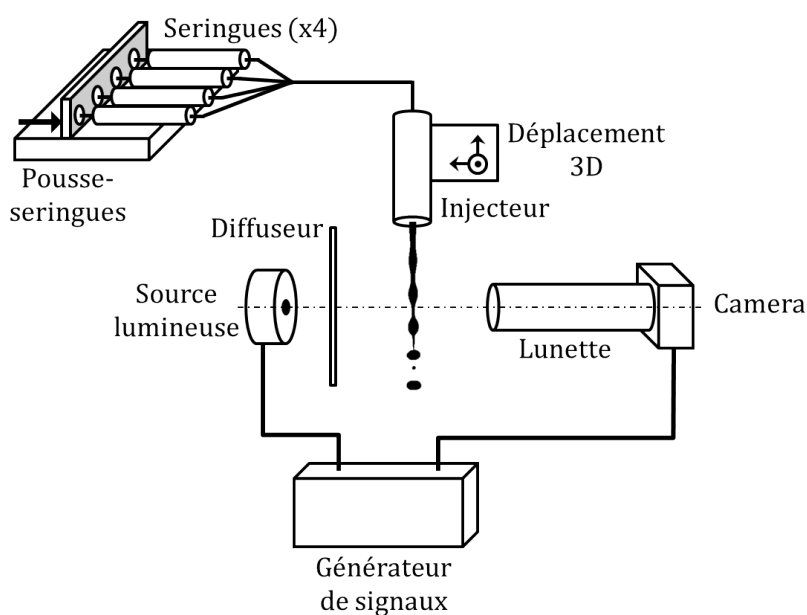


FIGURE 3.1 – Schéma du dispositif expérimental.

3.1.1.2 Description de l'injecteur

Le corps de l'injecteur constitue une chambre cylindrique de diamètre interne 5 mm et de longueur 85 mm.

La buse d'injection consiste en une pastille de laiton d'épaisseur $L_{or} = 300 \pm 9 \mu m$ dans laquelle un orifice de diamètre $D_{or} = 200 \pm 6 \mu m$ est localisé approximativement au centre de la pastille. Cette pastille est placée au bout de l'injecteur et maintenue par un capuchon vissable.

3.1.1.3 Imagerie

Le système d'imagerie est constitué des éléments suivants :

- La caméra de marque Baumer et de modèle LXG-500M. Il s'agit d'un capteur de type CMOS dont la définition est de $7920 \times 6004 px$. La taille de pixel est de $4.6 \times 4.6 \mu m$. La fréquence d'acquisition maximale des images est de 5 fps. Les images sont acquises au format TIFF en niveaux de gris sur 8 bits.

- La lunette de visée lointaine de marque Infinity et de modèle K2 DistaMax formée de deux TR tubes, d’une bague allonge, d’un zoom manuel et d’un objectif CF $\times 2$. Cette lunette a été assemblée dans le but de contenir le diamètre du jet en sortie de buse dans approximativement 200 px . La résolution spatiale résultante est de $1.215 \mu m/px$, donnant un champs de visualisation de $9.623 \times 7.295 mm$.
- La source lumineuse de marque Cavitar et de modèle CAVILUX Smart 400W. Cette source émet une raie de longueur d’onde 640 nm .
- Un générateur de signaux alimente la caméra et la source lumineuse. Deux signaux TTL mettent en phase l’exposition du capteur de la caméra et le pulse de la source lumineuse. La fréquence du signal d’activation de la tension est réglée à 5 Hz , celle-ci étant limitée par la fréquence d’acquisition maximale de la caméra.

Le champ de visualisation ne couvrant pas la totalité du jet, l’acquisition des images se fait sur plusieurs positions par déplacements de l’injecteur de 8 mm dans la direction verticale. En chaque position de l’injecteur, un nombre N_t d’images compris entre 600 et 620 est pris. Ce nombre a été choisi afin d’assurer une consistance statistique à l’étude des jets et sera commenté dans la suite du document.

3.1.2 Points de fonctionnement

3.1.2.1 Préparation et caractérisation des solutions

Quatre solutions polymériques ont été testées dans le cadre de cette étude expérimentale. Ces solutions polymériques ont été préparées dans le cadre de cette thèse. Elles sont chacune constituées d’eau déminéralisée, d’isopropanol à une concentration massique de 5 % et d’une poudre de polyéthylène d’oxide (PEO) à une concentration massique de 5 ppm . L’utilisation de l’isopropanol abaisse la tension de surface et facilite ainsi la pénétration des molécules de PEO dans le volume liquide. Seule la masse molaire M_v du polymère varie dans la composition des quatres solutions.

Les quatres poudres de PEO proviennent du fournisseur Sigma-Aldrich. La poudre de PEO nécessaire à l’élaboration d’une solution est pesée à l’aide d’une balance analytique Sartorius Secura de précision 0.1 mg . Chaque solution ayant été préparée sur la base d’un kilogramme de solvant, la pesée de 5 mg de PEO a été itérée plusieurs fois.

La caractérisation des solutions viscoélastiques a été effectuée : la masse volumique, la viscosité dynamique et la tension de surface avec l’air ont été mesurées. Lors des mesures, la température des fluides a également été mesurée ; elle est restée comprise entre 24 et 24.6°C. Les résultats sont présentés en Tableau 3.1.

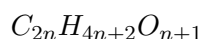
	Solution	S06	S1	S5	S8
M_v	Masse molaire ($10^3 kg.mol^{-1}$)	0.6	1	5	8
ρ	Masse volumique ($\pm 0.1\% kg.m^{-3}$)	0.988	0.988	0.988	0.988
μ	Viscosité de cisaillement ($\pm 1\% mPa.s$)	1.14	1.21	1.17	1.23
σ	Tension de surface avec l’air ($\pm 1\% mN.m^{-1}$)	42.0	46.5	46.3	46.5

TABLE 3.1 – Propriétés des quatre solutions viscoélastiques testées.

La viscosité de cisaillement du solvant (Eau et isopropanol 5 %) a également été mesurée ; elle vaut $\mu_s = 1.1 \text{ mPa.s}$. Une brève description des appareils de mesure utilisés pour la caractérisation des solutions est fournie ci-après :

- La masse volumique est mesurée à l'aide du densimètre électronique DMA 35 de la marque Anton Paar, dont le principe de fonctionnement est basé sur le maintien en oscillation d'un tube en U rempli de la solution à caractériser. La mesure de la masse volumique de la solution est alors effectuée par l'intermédiaire de la mesure de la fréquence résultante de l'oscillation.
- La viscosité de cisaillement est mesurée à l'aide du rhéomètre rotationnel MCR 302e de la marque Anton Paar. L'appareil est constitué de deux cylindres concentriques entre lesquels la solution à caractériser est disposée. Le cylindre extérieur est mis en rotation. La mesure de la viscosité de la solution est alors effectuée par l'intermédiaire de la mesure du couple nécessaire au maintien au repos du cylindre intérieur. Ce viscosimètre, alors dit "de Couette", est particulièrement adapté aux solutions à faible viscosité.
- La tension de surface est mesurée à l'aide du tensiomètre TVT2 de la marque Lauda, dont le principe de fonctionnement est basé sur la formation d'une goutte de la solution à caractériser au bout d'un capillaire. Le maintien de cette goutte au capillaire est rendue possible par des forces de tensions de surface. La mesure de la tension de surface de la solution est alors effectuée par l'intermédiaire de la mesure du volume critique de la goutte nécessaire au détachement de celle-ci.

Outre la mesure de ces trois propriétés, une caractérisation des solutions est effectuée sur la base des éléments présentés en section 1.2.1 et à partir de la structure chimique du PEO. Le temps de relaxation de Zimm a été calculé pour chacune des quatres solutions à partir de la structure chimique du polymère utilisé et du modèle de Zimm présenté en section 1.2.2.1. Le PEO est un polymère linéaire dont la formulation chimique brute est :



avec n le nombre de monomères C_2H_4O constituant le polymère. En Figure 3.2, une formulation semi-développée de cette chaîne polymérique est donnée, dans laquelle le monomère est identifié entre crochets.

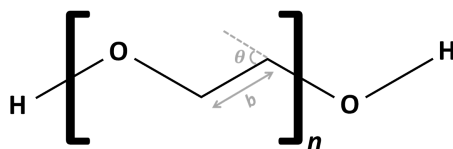


FIGURE 3.2 – Formulation semi-développée de la molécule de PEO.

La masse molaire M'_v de ce monomère est calculée à partir des masses molaires des éléments chimiques le constituant :

$$\begin{aligned}
 M'_v &= 2.M_v(C) + 4.M_v(H) + 1.M_v(O) \\
 M'_v &= 2 \times 12.01 + 4 \times 1.01 + 1 \times 16.00 \\
 M'_v &= 44.06 \text{ g.mol}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

A partir de la connaissance de la masse molaire du PEO, il est alors possible d'évaluer le nombre n de monomères constituant chaque polymère utilisé :

$$n = \frac{M_v}{M'_v} \quad (3.2)$$

Le monomère C_2H_4O est constitué de $N' = 3$ éléments principaux qui sont deux atomes de carbone et un atome d'oxygène. Les quatre atomes d'hydrogène sont secondaires dans le sens où ils ne jouent pas un rôle majeur dans la géométrie de la chaîne moléculaire. Ainsi, la chaîne polymérique est constituée de $N = nN'$ éléments principaux.

Ces atomes principaux sont liés les uns aux autres par des liaisons covalentes principales. Une liaison $C - C$ a une longueur de 154 pm et une liaison $C - O$ a une longueur moyenne de 143 pm . Le monomère C_2H_4O est ainsi caractérisé par la présence de 3 liaisons principales : une liaison $C - C$ et deux liaisons $C - O$. On définit alors b la longueur de liaisons principales moyenne, qui vaut :

$$b = \frac{1}{3}(154 + 2 \times 143) = 146.7 \text{ pm} \quad (3.3)$$

L'angle moyen formé par les liaisons principales de cette chaîne moléculaire tel que schématisé en Figure 3.2 vaut environ $\theta = 65.7^\circ$.

Ainsi, le rapport c/c^* est calculé par l'équation (1.20), la longueur maximale R_{max} des polymères à partir de l'équation (1.21), et leur temps de relaxation de Zimm à partir de l'équation (1.22). Les résultats de ces calculs sont répertoriés en Tableau 3.2. Pour les solutions S1, S5 et S8 le rapport c/c^* est supérieur à l'unité, indiquant que ces solutions sont en régime semi-dilué, alors que la solution S06 est en régime dilué. D'après les tabulations effectuées par Rubinstein *et al.* (2003) et les travaux de Dupas (2012), il est estimé que le solvant utilisé est un bon solvant.

Solution	c/c^* (-)	R_{max} (μm)	t_r^{Zimm} (ms)
S8	71	67	10.23
S5	27	42	4.46
S1	1.11	8.37	0.261
S06	0.4	5.02	0.106

TABLE 3.2 – Caractérisation du niveau de dilution des solutions, de la taille des polymères et de leur temps de relaxation de Zimm.

3.1.2.2 Conditions d'expériences

Les expériences ont été réalisées à température ambiante (jet et air).

Pour chacune des quatre solutions présentées en section 3.1.2.1, plusieurs jets ont été étudiés en faisant varier le débit imposé au travers du pousse-seringues. Lors de chaque expérience de jet, le débit a été mesuré par récupération et pesée du liquide extrudé. C'est ce dernier débit, noté Q_v , qui est choisi pour qualifier les différents points de fonctionnement étudiés. Les conditions d'expériences sont répertoriées dans le Tableau 3.3. Chaque point de fonctionnement se voit attribué une dénomination comportant une information sur la solution du liquide utilisé et une

lettre différenciant les différents débits (cette lettre n'étant pas corrélée à une valeur numérique de débit). La vitesse d'injection est définie par :

$$V_{inj} = \frac{4Q_v}{\pi D_{or}^2} \quad (3.4)$$

Le nombre de Reynolds est défini par :

$$Re = \frac{\rho V_{inj} D_{or}}{\mu} \quad (3.5)$$

Solution	Point de fonctionnement	Q_v ($\times 10^{-8} m^3/s$)	V_{inj} (m/s)	Re ($-$)
S06	S06QA	11.39	3.63	628.4
	S06QB	13.08	4.16	721.7
	S06QC	15.22	4.84	839.7
	S06QD	17.16	5.46	946.8
	S06QE	19.08	6.07	1052.7
	S06QF	20.14	6.41	1111.2
	S06QG	22.33	7.11	1232.0
S1	S1QA	13.99	4.45	727.2
	S1QB	14.97	4.77	778.2
	S1QC	17.29	5.50	898.8
	S1QD	19.31	6.15	1003.8
	S1QE	21.02	6.69	1092.7
	S1QF	23.15	7.37	1203.4
	S1QG	24.13	7.68	1254.3
S5	S5QA	13.03	4.15	700.5
	S5QB	15.03	4.78	808.0
	S5QC	17.11	5.45	919.8
	S5QD	19.06	6.07	1024.7
	S5QE	20.18	6.42	1084.9
	S5QF	21.94	6.98	1179.5
	S5QG	23.49	7.48	1262.8
S8	S8QA	13.20	4.15	675
	S8QB	15.09	4.78	771.7
	S8QC	17.13	5.45	876.0
	S8QD	19.19	6.07	980.0
	S8QE	20.42	6.42	1044.2
	S8QF	23.83	6.98	1218.6

TABLE 3.3 – Conditions d'expérience des points de fonctionnement étudiés.

3.2 Traitements d'images

3.2.1 Binarisation du système diphasique

Une première étape de *normalisation* a pour but de s'affranchir de l'influence des fluctuations d'intensité lumineuse qui peuvent survenir d'une image à l'autre, provenant de la source lumineuse, du capteur, et/ou du milieu environnant. Cette étape requiert une image de fond lumineux et une image de bruit du capteur. L'intensité lumineuse de chaque pixel $IL(x, y)$ de l'image brute est normalisée par la transformée suivante :

$$IL_n(x, y) = \zeta \frac{IL(x, y) - IL_b(x, y)}{IL_f(x, y) - IL_b(x, y)} \quad (3.6)$$

avec IL_n , IL_f et IL_b les intensités de l'image normalisée, de l'image de fond lumineux et de l'image de bruit du capteur, respectivement. Le paramètre ζ corrige les éventuelles fluctuations temporelles d'intensité lumineuse de la source. Sa valeur correspond au rapport du niveau de gris le plus peuplé de l'image de fond lumineux et de celui d'une zone de l'image brute ne comportant pas d'objet liquide.

Une seconde étape de *segmentation* consiste en l'identification des phases liquide et gazeuse. Le niveau de gris des pixels appartenant à des objets liquides est ramené à 0 et celui des pixels appartenant à la phase gazeuse est ramené à 1. Au vu des images normalisées qui ont été obtenues à l'étape de traitement précédente, un seuil de segmentation permettant ce traitement a été fixé à une valeur constante de $N_{seuil} = 0.5$:

$$IL_l(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } IL_n(x, y) < N_{seuil} \quad (\text{phase liquide}) \\ 1 & \text{si } IL_n(x, y) \geq N_{seuil} \quad (\text{phase gazeuse}) \end{cases}$$

avec IL_l l'intensité lumineuse de l'image binarisée.

Au cours des expériences, l'illumination des objets liquides donne lieu à des phénomènes de réfraction. Dû à la courbure des interfaces liquide/gaz, les objets liquides se comportent localement comme des micro-lentilles. L'illumination de ces objets donne lieu à des points de focalisation de la lumière localisés sur l'axe du jet, faisant apparaître des zones lumineuses dans les objets liquides. Au cours de l'étape de segmentation, les pixels situés dans ces zones ont donc été assimilés à tort comme des pixels appartenant à la phase gazeuse. Une dernière étape de traitement, le *remplissage*, vise donc à changer la valeur de ces pixels de sorte à ce qu'ils soient considérés comme appartenant à la phase liquide. Ces zones sont facilement repérables puisqu'elles sont entourées (sauf potentiellement sur les bords de l'image) par la phase liquide identifiée dans l'étape précédente.

Ces trois étapes de traitement sont illustrées en Figure 3.3. Ces traitements d'images ont été développés par Jean-Bernard Blaisot et Christophe Tirel sous le logiciel ImageJ. Pour plus de détails sur les étapes de traitements d'images présentées ci-avant, le lecteur est invité à consulter la section 3.2 du manuscrit de thèse de Tirel (2019).

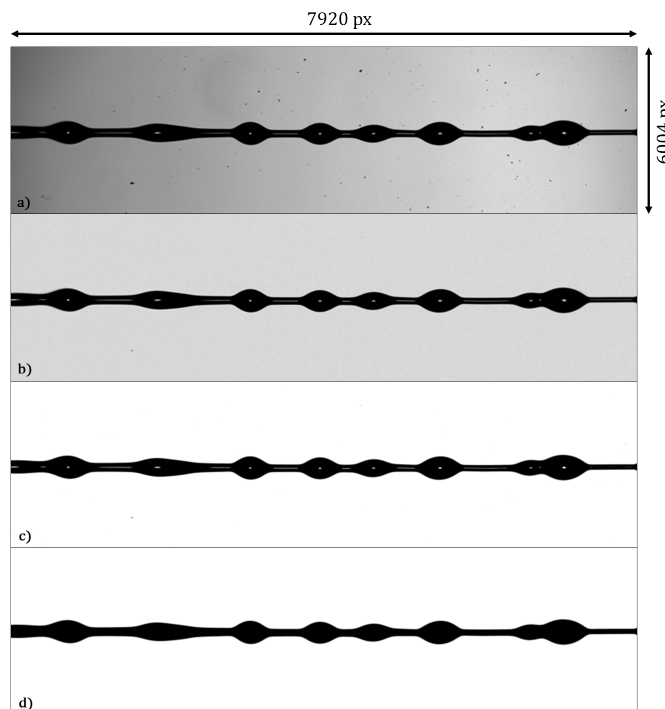


FIGURE 3.3 – Exemple d'une image : a) brute, b) après normalisation, c) après segmentation, et d) après remplissage.

3.2.2 Définition de fenêtres d'analyse

Les images traitées en section 3.2.1 sont découpées en fenêtres d'analyse de hauteur H_w et espacées de ΔH_w , comme visible en Figure 3.4. La valeur de H_w est choisie de façon à contenir environ une longueur d'onde λ de la déformation de surface du jet. Cette longueur d'onde est estimée à partir des résultats de la théorie linéaire de perturbation de jet :

$$\lambda = \frac{\pi D_{or}}{k_{opt}} \quad (3.7)$$

avec k_{opt} le nombre d'onde (adimensionné) associé au mode le plus instable de la perturbation d'un jet de liquide non-visqueux : $k_{opt} \approx 0.696$. La longueur d'onde résultante est de $\lambda \approx 743 px$. Afin de s'assurer qu'une fenêtre d'analyse contienne bien une longueur d'onde et pour reprendre une valeur H_w précédemment choisi par Tirel *et al.* (2020), celle-ci a été fixée à $H_w = 822px$. L'espacement ΔH_w entre les fenêtre est choisi égal à $H_w/2$. Au vu des vitesses d'injections présentées en Tableau 3.3, cet espacement correspond à intervalle de temps variant entre 65 *ms* et 137 *ms*.

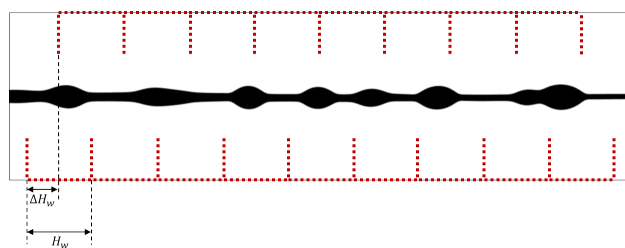


FIGURE 3.4 – Schéma de la division d'une image en fenêtres d'analyse.

3.3 Mesures et analyses

3.3.1 Zone de latence du jet

La zone de latence d'un jet est définie par Blaisot et Adeline (2003) comme une zone dans laquelle aucune croissance d'instabilité capillaire n'est observée (section 1.3.2.1). Ainsi, dans cette zone, il n'est pas exclu que des déformations de la surface du jet puissent être observées. Cependant, si celles-ci sont statiques et/ou qu'elles ne sont pas de type sinusoïdale, alors elles ne peuvent être considérées comme des déformations engendrées par une instabilité capillaire, définies et connues comme étant instationnaires et sinusoïdales dans les premiers temps qui suivent son déclenchement. Il s'agit alors d'identifier une position notée Z_{onset} correspondant à l'endroit du déclenchement des instabilités capillaires. La zone de latence est alors définie comme la zone spatiale située entre la sortie de la buse d'injection et Z_{onset} .

Afin d'identifier la zone de latence, la *décomposition en modes propres*, aussi connue sous le nom de POD (Proper Orthogonal Decomposition) a été choisie parmi plusieurs outils statistiques possibles. Cette procédure offre la possibilité de décomposer l'ensemble des données dans une nouvelle base optimisée (Liang *et al.*, 2002). A partir du profil des vecteurs propres de cette nouvelle base et de leur taux de sollicitation, il est alors possible d'identifier des comportements moyens, des similitudes, mais aussi des déviations au sein de l'ensemble de données. Cette procédure est utilisée dans plusieurs domaines, notamment en informatique pour la compression d'images (Chatterjee, 2000) et en mécanique des fluides pour la détermination de modèle réduits de turbulence (Berkooz *et al.*, 1993). Cette méthode a également été utilisée par Yon *et al.* (2004) afin d'extraire les taux de croissance et longueur d'onde de perturbation de jets forcés. Une présentation générale de cette procédure est présentée ci-après. Afin d'illustrer les intérêts que présente l'utilisation de la POD dans le cadre de cette étude expérimentale, une application de cette procédure à un ensemble statistique d'images synthétiques de jets est ensuite proposée. Enfin, la POD est appliquée aux images expérimentales ; les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus sur les images synthétiques, et un critère de détection de la position Z_{onset} est établi.

3.3.1.1 Présentation de la POD

La décomposition en modes propres (POD) est une procédure linéaire d'analyse d'un ensemble de données permettant d'identifier les caractéristiques principales d'un système au travers d'un changement de base. Comme exposé par (Liang *et al.*, 2002), trois méthodes de Décomposition en Modes Propres peuvent être distinguées :

- La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD).
- La Décomposition en Composantes Principales (PCA).
- La Décomposition de Karhunen-Loève (KLD).

La Décomposition en Valeurs Singulières a été choisie dans le cadre de cette étude car elle présente plus de simplicité de mise en oeuvre sous Python. Ces trois méthodes sont cependant très proches et consistent toutes trois en la détermination d'une base de fonctions optimisée maximisant la projection de l'ensemble des données du système sur celle-ci.

Le problème d'*optimisation* de la nouvelle base recherchée est équivalent à un problème de *maximisation*. On note N_t le nombre de réalisations constituant l'ensemble de données associées au système dont on cherche à optimiser la description. Chaque réalisation est repérée par son indice i . Ainsi, la réalisation i est notée u_i et le système est constitué de l'ensemble : $\{u_i | i \in [1, N_t]\}$. Chaque réalisation est décrite par M variables, ordonnées dans un vecteur \mathbf{x} . On note $B = (\phi_1, \dots, \phi_{N_k})$ la nouvelle base orthonormée constituée de N_k fonctions ϕ_k de M variables. Ainsi, chaque réalisation u_i s'exprime dans la base B par :

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_k} a_{i,k} \phi_k(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

où le coefficient $a_{i,k}$, appelé *coefficient de reconstruction* de la réalisation i par le vecteur $\phi_k(\mathbf{x})$, correspond à la projection de $u_i(\mathbf{x})$ sur le vecteur $\phi_k(\mathbf{x})$. Ce coefficient d'amplitude est obtenu par le produit scalaire de $u_i(\mathbf{x})$ par $\phi_k(\mathbf{x})$:

$$\int u_i(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (u_i(\mathbf{x}), \phi_k(\mathbf{x})) \quad (3.9)$$

La base B n'est pas unique à ce stade de la procédure. Elle est rendue unique par la minimisation de la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_t} \left\| u_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{N_k} a_{i,k} \phi_k(\mathbf{x}) \right\|_2^2$$

qui vaut :

$$\sum_{i=1}^{N_t} \left\| u_i(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{N_k} (u_i(\mathbf{x}), \phi_k(\mathbf{x})) \phi_k(\mathbf{x}) \right\|_2^2$$

où $\|\bullet\|_2$ désigne la norme Euclidienne. Par utilisation de l'inégalité triangulaire, la quantité à maximiser est :

$$\sum_{i=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{N_k} (u_i(\mathbf{x}), \phi_k(\mathbf{x}))^2 \quad (3.10)$$

L'optimisation d'une nouvelle base d'expression du système de données se réduit donc à un problème de maximisation. Il convient alors d'utiliser un système matriciel. On introduit A la *matrice des réalisations*, qui est construite à partir des coordonnées des N_t réalisations dans la base d'origine de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} u_1(x_1) & \cdots & u_{N_t}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(x_M) & \cdots & u_{N_t}(x_M) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Il s'agit d'une matrice de dimension $M \times N_t$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est exclusivement relative à la réalisation particulière u_j . Cette matrice peut être factorisée de la façon suivante :

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (3.12)$$

avec :

- U une matrice de dimension $M \times M$.
- Σ une matrice de dimension $M \times N_t$.
- V une matrice de dimension $N_t \times N_t$.

Le produit de la matrice A avec sa transposée A^T donne la matrice de dimension $N_t \times N_t$ suivante :

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} u_1(x_1)^2 + \dots + u_1(x_M)^2 & \dots & \text{crossed-components} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{crossed-components} & \dots & u_{N_t}(x_1)^2 + \dots + u_{N_t}(x_M)^2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Cette matrice est souvent référencée par le terme matrice-noyau dans la littérature. On observe alors que :

- La matrice $A^T \cdot A$ est symétrique, et donc diagonalisable.
- L'objectif de maximisation de la procédure, explicitée par la maximisation de la quantité (3.10), équivaut à la maximisation de la trace de la matrice $A^T \cdot A$.

Parallèlement, selon la factorisation (3.12), la matrice $A^T \cdot A$ s'exprime également par :

$$A^T \cdot A = V \cdot \Sigma^T \cdot U^T \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (3.14)$$

En imposant U comme étant une matrice unitaire, c'est-à-dire en imposant $U \cdot U^T = U^T \cdot U = I$ (I désignant la matrice identité), on a :

$$A^T \cdot A = V \cdot \Sigma^T \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (3.15)$$

Par ailleurs, la matrice $A^T \cdot A$ étant diagonalisable, elle peut être exprimée sous la forme :

$$A^T \cdot A = W \cdot \Lambda \cdot W^T \quad (3.16)$$

où W est une matrice de dimension $N_t \times N_t$.

Par comparaison de cette dernière décomposition de $A^T \cdot A$ avec la décomposition (3.15), et par unicité de décomposition dans une même base, on identifie :

$$V = W \quad \text{et} \quad \Sigma^T \cdot \Sigma = \Lambda \quad (3.17)$$

La matrice diagonale Λ et la matrice V contiennent les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A^T \cdot A$, respectivement. A partir de la connaissance de Σ , de V , et de l'expression (3.12), la matrice U peut être numériquement déterminée. A partir de l'expression (3.8), on a :

$$a_{i,k} = \Sigma_{kk} V_{ik} \quad (3.18)$$

$$\phi_k(x_i) = U_{ik} \quad (3.19)$$

Le coefficient $a_{i,k}$ indique avec quelle intensité ϕ_k est utilisée pour exprimer la réalisation u_i dans la nouvelle base B .

L'énergie du mode k , notée $E(\phi_k)$, caractérise le taux d'utilisation du mode k pour exprimer le système dans son intégralité. On attribue ici une valeur relative aux énergies des différents modes, qui seront donc exprimées en pourcentage. L'énergie du mode k s'exprime alors :

$$E(\phi_k) = \frac{100}{\sum_{m=1}^{N_k} \frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} a_{j,m}^2} \left[\frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} a_{i,k}^2 \right]$$

i.e.

$$E(\phi_k) = 100 \frac{\sum_{i=1}^{N_t} a_{i,k}^2}{\sum_{m=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_t} a_{j,m}^2} \quad (3.20)$$

La comparaison des énergies des différents modes permet alors d'identifier ceux qui sont les plus nécessaires à la représentation des événements dans leur ensemble. Le profil des modes propres permet de mieux comprendre les caractéristiques de l'ensemble des événements. La comparaison des coefficients de reconstruction associés aux modes les plus énergétiques permet d'identifier la déviation de certains événements par rapport à la tendance globale adoptée.

3.3.1.2 Application de la POD à un ensemble statistique d'images synthétiques

Afin de mieux comprendre quels intérêts présente la procédure POD dans le cadre de l'étude de jets libres, celle-ci a été appliquée à un ensemble statistique d'images synthétiques représentant une portion de jet dont la surface est déformée de façon sinusoïdale. Ces images devant s'apparenter à des images expérimentales, elles sont donc binaires et de même dimension, à savoir $L = 950 \text{ px}$ de largeur et $l = 822 \text{ px}$ de longueur. Ces images ont été construites à partir de la bibliothèque PIL de Python de la façon suivante :

La phase liquide est construite au travers de deux sinusoïdes positionnées en opposition de phase à partir des caractéristiques suivantes :

- Un espacement entre les sinusoïdes représentatif de celui des jets observée, estimé à $D_{or} = 165 \text{ px}$.
- Une amplitude constante fixée à une valeur arbitraire de 20 px .
- Une longueur d'onde constante fixée à la longueur de l'image i.e. 822 px .
- Une phase p (par rapport à un point de référence fixe arbitraire) dont la valeur en pixel est imposée entière.

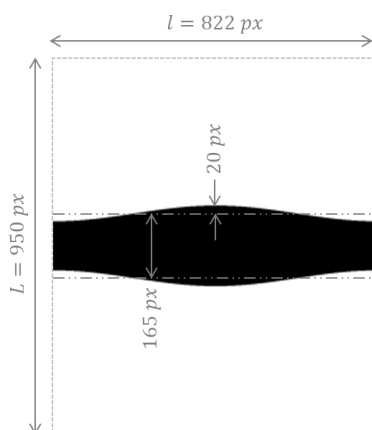


FIGURE 3.5 – Exemple d'une image synthétique annotée des dimensions relatives à sa construction.

La valeur des pixels de l'image localisés entre les deux sinusoïdes est alors fixée à 0 (noir) et celle des pixels restant est fixée à 255 (blanc). Les images obtenues s'apparentent à la figure 3.5. Afin de construire un ensemble statistique d'images, c'est-à-dire contenant toutes les configurations géométriques du jet avec le même poids, une image synthétique est créée pour chaque valeur entière de phase p des interfaces comprise entre 1 et 822 px . L'ensemble d'images synthétiques est alors constitué de 822 images.

On introduit la POD-image comme la procédure POD appliquée à un ensemble de N_t images matricielles de largeur L et de longueur l . Pour reprendre les définitions et notations utilisées en section 3.3.1.1, la réalisation u_i correspond à l'image i de cet ensemble. La base originelle d'expression des réalisations consiste en un vecteur de $L \times l$ composantes, correspondant aux valeurs des pixels constituant l'image. Les composantes de ce vecteur sont ordonnées de la façon arbitraire suivante : les L premiers pixels correspondent à la première ligne de pixels de l'image (de gauche à droite), les L pixels suivants correspondent à la deuxième ligne, etc.

La procédure de décomposition en modes propres est ainsi appliquée à la matrice des réalisations de dimension $(L \times l) \times N_t$. Pour ce faire, la fonction *svd* de la bibliothèque *linalg* du module NumPy de Python est utilisée. Cette fonction retourne les matrices U , Σ et V^T telles que définies lors de la factorisation de la matrice des réalisation en équation (3.12). La $k^{ième}$ colonne de la matrice U contient l'expression du vecteur propre ϕ_k de la nouvelle base optimisée. Les coefficients de reconstructions $a_{i,k}$ sont déterminés à partir des matrices Σ et V^T :

$$a_{i,k} = \Sigma_{kk} V_{ik} \quad (3.21)$$

A partir des valeurs de ces coefficients, les énergies relatives des vecteurs propres sont calculées à partir de l'équation (3.20). Les vecteurs propres obtenus sont normalisés, et dans le but de visualiser leur profil, une application de changement d'échelle est appliquée à chaque vecteur propre ϕ_k , selon laquelle :

- La valeur 255 est attribuée au coefficient maximal du vecteur ϕ_k .
- La valeur 0 est attribuée au coefficient minimal du vecteur ϕ_k .
- Les coefficients de ϕ_k de valeur intermédiaire se voient attribuer une valeur entière comprise entre 0 et 255, proportionnellement à leur valeur initiale.

Suite à ce changement d'échelle, le vecteur ϕ_k est redimensionné en une matrice de la façon suivante : les L premiers éléments de ϕ_k constituent la première ligne de la matrice (de gauche à droite), les L éléments suivants constituent à la deuxième ligne, etc. On applique en fait la transformation inverse de celle qui a permise de constituer la matrice des réalisations en début de procédure. Ainsi, le vecteur ϕ_k peut être visualisé tel une image matricielle binaire codée en 8 bits.

On illustre ici les résultats de l'application de la POD au set d'images synthétiques. En Figure 3.6, les sept premiers modes propres ϕ_k sont représentés et les énergies $E(\phi_k)$ associées y sont renseignées. En Figure 3.7, les coefficients de reconstruction $a_{i,k}$ associés aux sept premiers modes propres ϕ_k sont tracés en fonction de la phase p de la déformation d'interface.

En Figure 3.6, on constate que $E(\phi_1)$ est extrêmement importante. On voit aussi sur la même figure que le profil de ϕ_1 montre une sollicitation maximale au voisinage de l'axe du jet (zone rectangulaire noire). De part et d'autre de cette zone, deux rectangles d'un même niveau de gris uniforme sont visibles et montrent une sollicitation moindre. Chaque pixel de cette zone est occupé par la phase liquide pour certaines réalisations, et par la phase gazeuse pour certaines autres réalisations.

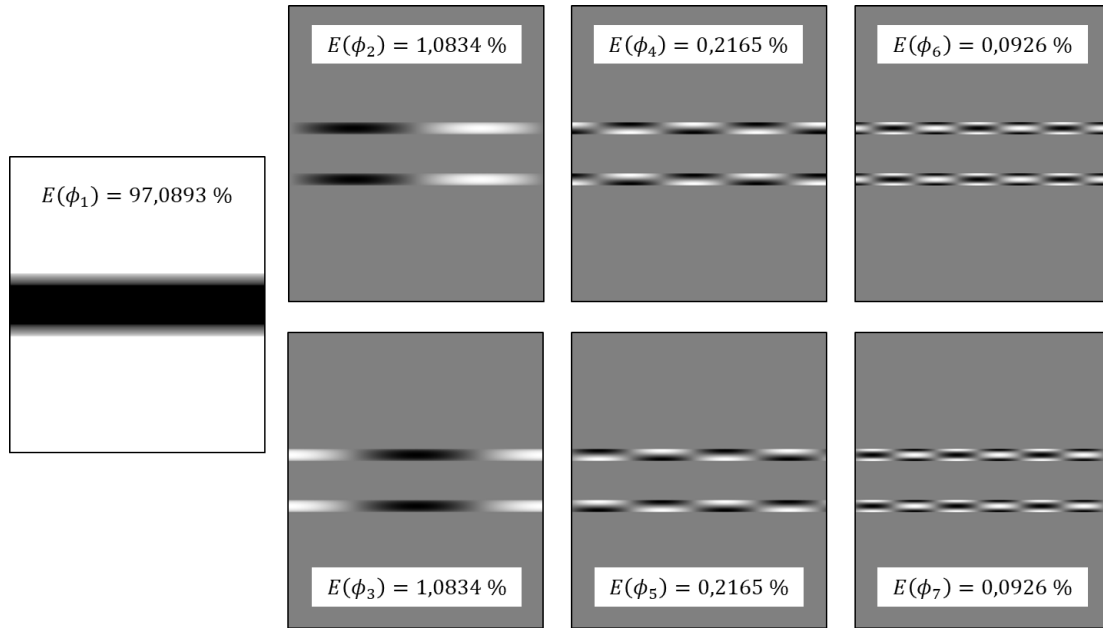


FIGURE 3.6 – Représentation des sept premiers modes propres ϕ_k annotées de leur énergie $E(\phi_k)$.

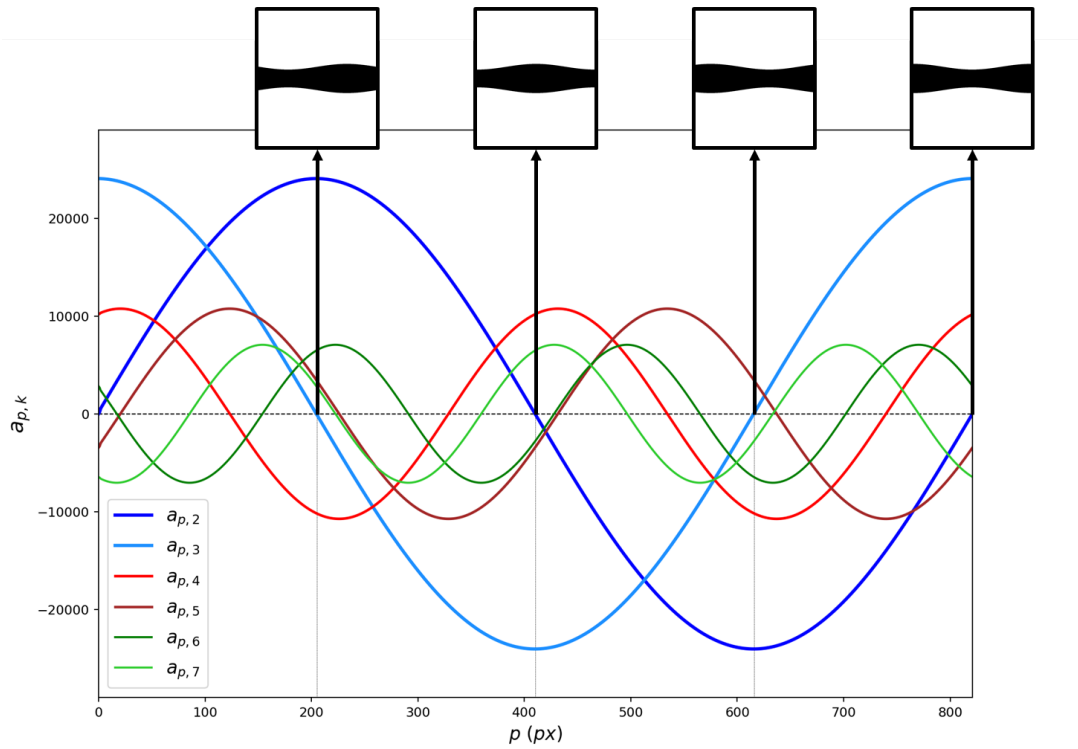


FIGURE 3.7 – Tracé des coefficients de reconstruction $a_{i,k}$ associés aux sept premiers vecteurs propres ϕ_k en fonction de la phase p de la déformation d'interface.

S'agissant des vecteurs propres suivants, on constate que $E(\phi_2) = E(\phi_3)$, $E(\phi_4) = E(\phi_5)$, et $E(\phi_6) = E(\phi_7)$. En fait, la relation $E(\phi_{2i}) = E(\phi_{2(i+1)})$ (à partir de $i = 1$) est vérifiée. Sur cette même figure, il est également possible de constater qu'aucun de ces modes ($k > 1$) n'est sollicité au centre du jet : en effet dans cette zone, les pixels ont le même niveau de gris que dans la phase gazeuse. On note aussi que la différence de profils entre les modes d'un même couple consiste en une parfaite translation axiale du motif de déformation (alternance de zones blanches et de zones noires), indiquant une complémentarité des modes d'un même couple à la représentation du motif de déformation. Cette interprétation est cohérente avec l'égalité des énergies au sein d'un même couple.

Cette interprétation est également cohérente avec la distribution des coefficients de reconstruction $a_{i,k}$ en fonction de la phase du motif de perturbation, visible en Figure 3.7. En effet, on peut constater que pour les modes représentés, $a_{2i,k}$ est nul lorsque $a_{2(i+1),k}$ (à partir de $i = 1$), et vice-versa : ϕ_{2i} et $\phi_{2(i+1)}$ agissent en quadrature.

3.3.1.3 Application de la POD aux images expérimentales

La procédure POD est ici appliquée à des images expérimentales ayant été traitées et ayant subi une division en fenêtres d'analyse tel que décrit en section 3.2. La POD est appliquée en chaque position du jet. Pour s'affranchir des effets liés à d'éventuelles translations du jet dans la direction normale à l'écoulement, un axe moyen du jet est déterminé en chaque position, et toutes les images associées à cette position subissent une translation faisant correspondre leur axe propre à cet axe moyen. Les résultats de la POD obtenus pour le point de fonctionnement S8QB sont présentés ci-après. En particulier, l'attention est portée sur quatre positions successives du jet, notées z_1 , z_2 , z_3 et z_4 .

En Figure 3.8, les cinq premiers vecteurs propres obtenus en z_1 , z_2 , z_3 et z_4 sont représentés. En Figure 3.9, les énergies des trois premiers vecteurs propres sont tracées en fonction de z .

Les profils obtenus dans le cas expérimental montrent globalement les mêmes caractéristiques que dans le cas synthétique (Figure 3.6) à quelques différences près :

- Le premier vecteur propre ϕ_1 montre un profil similaire à ϕ_1^{synth} , avec une zone instationnaire qui croît avec la distance à l'injecteur z . Ce vecteur propre concentre une grande partie de l'énergie, même si celle-ci diminue avec z .
- Parmi les vecteurs propres suivants, on reconnaît deux vecteurs dont les profils montrent les mêmes caractéristiques que ϕ_2^{synth} et ϕ_3^{synth} . Ces vecteurs sont encadrés en bleu sur la Figure 3.8, et ne sont pas systématiquement positionnés en deuxième et troisième positions par rang d'énergie. On parlera par la suite de vecteurs dits *de Rayleigh*.
- Un vecteur dit *de translation/rotation* est éventuellement présent parmi les cinq premiers vecteurs propres. Celui-ci est encadré en rouge sur la Figure 3.8. Comme le montre la répartition des zones blanches et des zones noires, la sollicitation de ce vecteur est liée à la translation et/ou à la rotation de l'axe des jets dans la direction normale à celle de l'écoulement.
- Un vecteur dit *d'expansion/contraction* est éventuellement présent parmi les cinq premiers vecteurs propres. Celui-ci est encadré en orange sur la Figure 3.8. Comme le montre la répartition des zones blanches et des zones noires, la sollicitation de ce vecteur est liée à l'expansion ou à la contraction du jet dans la direction normale à celle de l'écoulement.

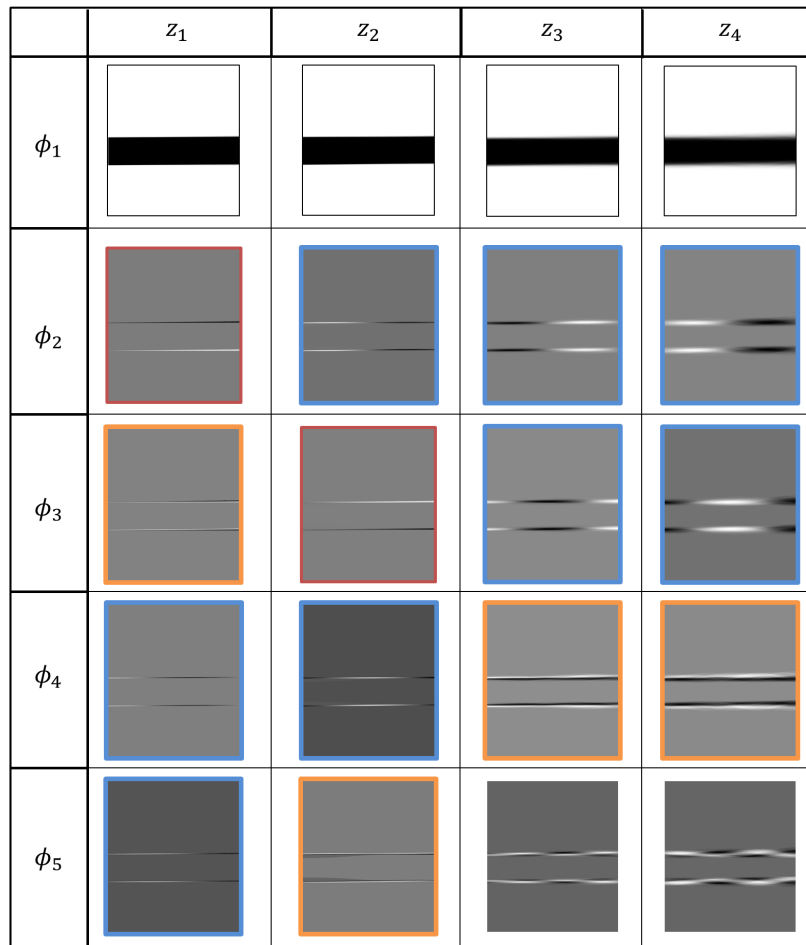


FIGURE 3.8 – Représentation des cinq premiers vecteurs propres obtenus en z_1 , z_2 , z_3 et z_4 par application de la POD aux images expérimentales du point de fonctionnement S8QB.

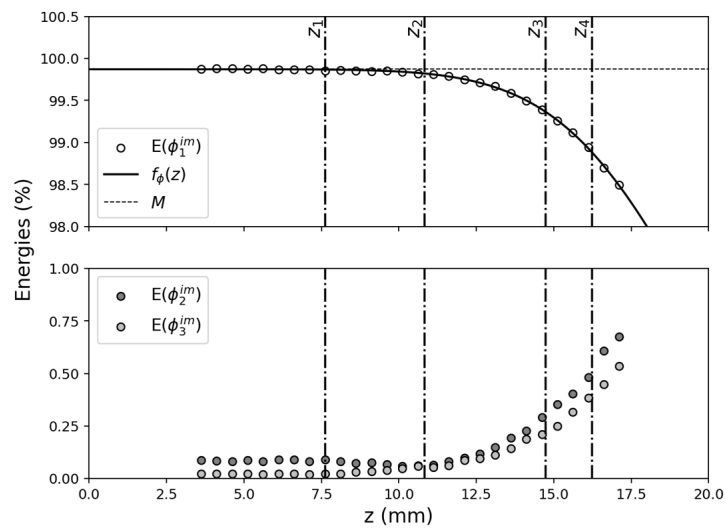


FIGURE 3.9 – Evolution spatiale des énergies associées aux trois premiers vecteurs propres obtenus par application de la POD aux images expérimentales du point de fonctionnement S8QB.

Les vecteurs propres de translation/rotation et d'expansion/contraction ne sont pas présents dans la décomposition POD de l'ensemble synthétique puisque les images synthétiques ont été construites sur la base d'une colonne de liquide de diamètre fixe et d'axe fixe. Lorsque le jet subit les déformations dues à l'instabilité capillaire, $E(\phi_1)$ diminue au profit des vecteurs de Rayleigh qui supplantent progressivement les vecteurs de translation/rotation et d'expansion/contraction, comme on peut le constater en Figure 3.9. On constate que proche de l'injecteur, $E(\phi_1)$ est maximale et stagne sur un plateau avant d'observer une diminution progressive avec z . Cette diminution est associée à une augmentation progressive des énergies des modes de Rayleigh $E(\phi_2)$ et $E(\phi_3)$ qui restent très proches. D'après les observations faites des résultats obtenus par la POD sur des images synthétiques et sur des images expérimentales de jet, le déclenchement des instabilités capillaires correspond à la position où $E(\phi_1)$ quitte le plateau. La détermination de cette position n'est pas directe ; on se propose dans un premier temps d'appliquer un fit mathématique de $E(\phi_1)(z)$ selon la fonction définie par :

$$f_\phi(z) = m + \frac{M - m}{1 + \left(\frac{z}{E}\right)^{-h}} \quad (3.22)$$

Cette fonction dépend de 4 paramètres : m , M , E et h . Pour des valeurs de z positives, l'image de f_ϕ varie entre un plateau haut de valeur M et un plateau bas de valeur m . Le signe du paramètre h définit le sens de cette variation : pour $h < 0$, $f_\phi(z)$ décroît du plateau haut jusqu'au plateau bas lorsque z augmente ; pour $h > 0$, $f_\phi(z)$ croît du plateau bas jusqu'au plateau haut lorsque z augmente. La valeur absolue de h indique la raideur de cette transition. Le paramètre E indique dans quel domaine de z cette transition a lieu :

$$f_\phi(z = E) = m + \frac{m + M}{2} \quad (3.23)$$

On précise que ce fit est réalisé à partir de la fonction *curve_fit* de la bibliothèque **optimize** du module SciPy de Python. A partir de la valeur des paramètres du fit effectué, la position Z_{onset} est déterminée selon le critère suivant :

$$f_\phi(Z_{onset}(c)) = c M \quad (3.24)$$

avec c inférieur et proche à l'unité. Trois valeurs de c ont été prises pour tester la consistance de la méthode de détermination de Z_{onset} : 99,95%, 99,50% et 99,00%, en référence aux résultats présentés et analysés ci-avant en Figures 3.8 et 3.9 :

$$\begin{aligned} f_\phi(z_1) &\approx M \\ f_\phi(z_2) &= 99,95\% M \\ f_\phi(z_3) &= 99,50\% M \\ f_\phi(z_4) &= 99,00\% M \end{aligned} \quad (3.25)$$

En Figure 3.10, les positions $Z_{onset}(c)$ sont tracées selon les 3 valeurs du paramètre c pour tous les points de fonctionnement de la solution S8. On observe qu'entre les différents point de fonctionnement, les espacements des 3 différentes positions $Z_{onset}(c)$ sont du même ordre de grandeur. Le choix de la valeur du paramètre c s'est finalement porté sur 99,95%, conduisant à l'assimilation de la position de déclenchement de l'instabilité capillaire comme $Z_{onset}(99,95\%)$, qui sera plus simplement notée Z_{onset} dans la suite de l'étude. La zone de latence correspond alors à la zone spatiale $[0, Z_{onset}]$.

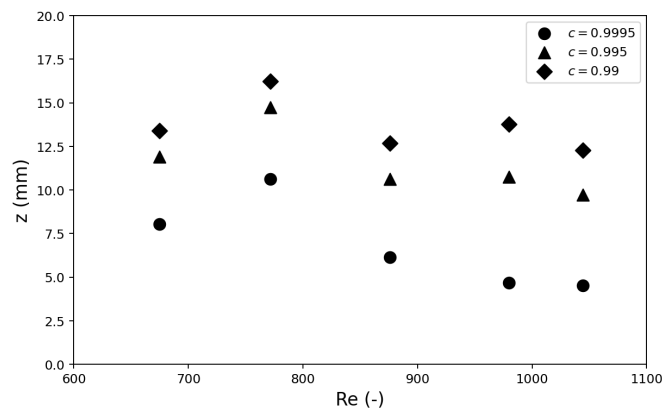


FIGURE 3.10 – Tracé des positions $Z_{onset}(c)$ selon 3 valeurs du paramètre c : 99,95%, 99,50% et 99,00% pour les points de fonctionnement de la solution S8 en fonction de leur nombre de Reynolds associé.

3.3.2 Longueur de rupture du jet

L'intégralité des jets n'étant pas visualisée dans les images, la mesure de leur longueur de rupture est effectuée par l'analyse des objets liquides contenus dans les images en chaque fenêtre d'analyse. La détection de la présence de plusieurs objets liquides distincts ou de l'absence d'objets liquides dans une image révèle l'occurrence d'au moins une rupture à la position associée de la fenêtre d'analyse. L'application de cette procédure de détection en chaque fenêtre d'analyse pour les N_t images prises permet d'obtenir l'évolution spatiale de l'occurrence de ruptures de jet, noté $N_{bu}(z)$. Cette évolution est tracée en Figure 3.11 pour le point de fonctionnement S5QB.

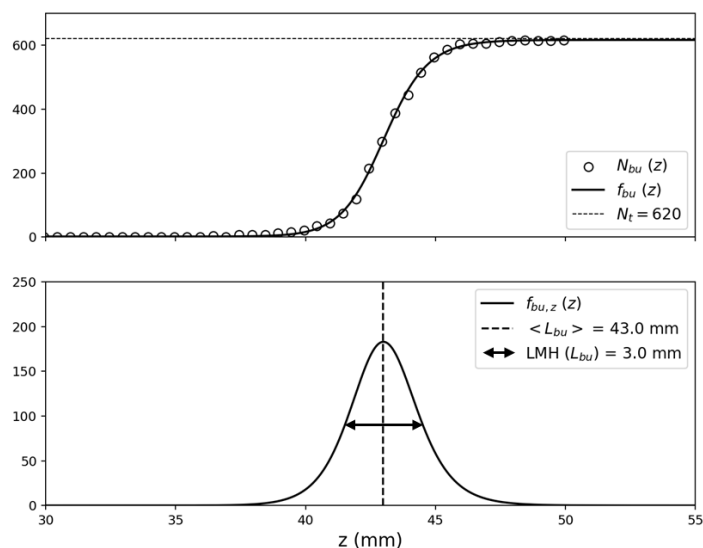


FIGURE 3.11 – Evolution spatiale du pourcentage d'occurrences de ruptures de jets pour le point de fonctionnement S5QB. Distribution de longueurs de rupture du jet, extraction de la longueur de rupture moyenne L_{bu} et de la largeur à mie-hauteur $LMH(L_{bu})$ associées.

Cette évolution peut alors être assimilée à la fonction cumulative d'occurrences de ruptures, dérivée de laquelle correspond la distribution de longueurs de rupture du jet. La fonction cumulative est obtenue à partir des mesures par l'application d'un fit mathématique selon la fonction à 4 paramètres définie en section 3.3.1, à savoir :

$$f_{bu}(z) = m + \frac{M - m}{1 + \left(\frac{z}{E}\right)^{-h}} \quad (3.26)$$

grâce à la fonction `curve_fit` de la bibliothèque `optimize` du module SciPy de Python. La distribution de longueurs de rupture obtenue est symétrique, caractéristique d'un jet libre. Cette symétrie a lieu en $z = E$, correspondant à la valeur moyenne de la distribution, notée $\langle L_{bu} \rangle$. La largeur à mie-hauteur de cette distribution, notée $LMH(L_{bu})$, est extraite afin de qualifier la dispersion des mesures de longueurs de rupture.

Au cours de ce travail expérimental, des tentatives d'application de cette procédure ont été réalisées sur des jets de solvants (Eau et isopropanol 5 %). Ces tentatives se sont révélées infructueuses, ceci étant dû à l'occurrence de *ruptures prématurées* des jets. Lors d'une rupture prématurée, le jet se fragmente et forme une portion de jet, qui à son tour sera sujet à une fragmentation formant les gouttes finales du spray. Un exemple de rupture prématurée est présenté en Figure 3.12. Les ruptures prématurées ont lieu en des positions variables du jet et ne sont pas reproductibles. Pour ces jets, la distribution N_{bu} ne peut être assimilée à une distribution cumulative, et aucune longueur moyenne de rupture n'a donc pu être extraite.

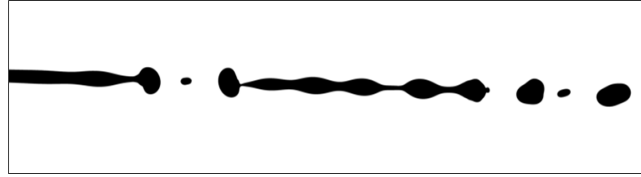


FIGURE 3.12 – Image normalisée de la rupture prématurée d'un jet de solvant (Eau et isopropanol 5 %).

3.3.3 Evolutions morpho-topologiques du jet

3.3.3.1 Description multi-échelles

On considère un système de dimension 2 défini par l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que l'on cherche à décrire. Une description géométrique du système consiste à localiser tous les éléments de Ω dans un repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Une telle description est accessible par une image matricielle.

Une description morpho-topologique de l'objet (connectivité, courbure géométrique, tortuosité) est accessible aux travers des quantités/éléments suivants, référés sur l'exemple présenté en Figure 3.13 :

- La *surface* S de l'objet.
- La *circonférence* L de l'objet, s'écrivant :

$$L = \int_{\mathcal{C}(\Omega)} dl \quad (3.27)$$

où $\mathcal{C}(\Omega)$ est le sous-ensemble de Ω constitué des éléments localisés sur le bord de l'objet.

- La *courbure moyenne* H de l'objet, s'écrivant :

$$H = \int_{\mathcal{C}(\Omega)} \kappa dl \quad (3.28)$$

avec κ la courbure locale.

- L'*axe médian* (ou squelette morphologique), étant défini par le sous-ensemble $\mathcal{A}(\Omega)$ de Ω constitué de tous les éléments de Ω équidistants d'au moins deux éléments distincts de $\mathcal{C}(\Omega)$. On peut alors définir pour chaque élément x de $\mathcal{C}(\Omega)$ la longueur $dist(x, \mathcal{A})$ du segment normale à l'interface qui sépare l'élément x de l'axe médian.
- Le *Reach*, noté \mathcal{R} , étant la distance minimale normale à la surface de l'objet relevée entre l'axe médian et le bord de l'objet : $\mathcal{R} = \min(\{dist(x, \mathcal{A})\}, x \in \mathcal{C}(\Omega))$.
- Le *Max*, noté \mathcal{M} , étant la distance maximale normale à la surface de l'objet relevée entre l'axe médian et le bord de l'objet : $\mathcal{M} = \max(\{dist(x, \mathcal{A})\}, x \in \mathcal{C}(\Omega))$.

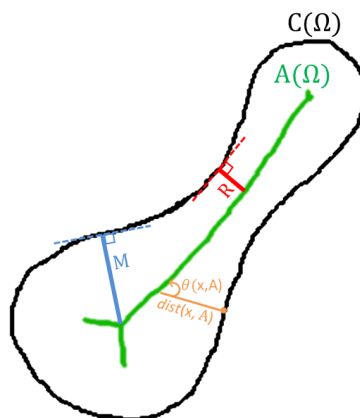


FIGURE 3.13 – Schéma d'une description morpho-topologique d'un objet 2D.

Les quantités L , S et H sont appelées *fonctionnelles de Minkowski*. Elles présentent plusieurs caractéristiques parmi lesquelles :

- Etant propres à la géométrie intégrale du système, elles sont invariantes par homothétie et rotation du système.
- Elles sont additives i.e. les fonctionnelles de Minkowski d'un ensemble de sous-systèmes équivalent à la somme des fonctionnelles de chaque sous-système.
- En dimension 2, H est directement relié à la *caractéristique d'Euler* χ par la relation :

$$H = 2\pi\chi \quad (3.29)$$

χ prenant la valeur 0 ou 1 si l'objet est homéomorphe à un cylindre 2D ou à un disque, respectivement.

Les fonctionnelles de Minkowski d'un système ainsi que \mathcal{A} , \mathcal{R} et \mathcal{M} peuvent être déterminées par calcul, si des équations paramétriques décrivant Ω le permettent, ou par mesure numérique. Nous allons voir à présent qu'une description dite *multi-échelles* du système est particulièrement bien adaptée pour cette mesure. Cette description est obtenue au moyen d'érosions successives du système par un élément structurant, ici un disque de diamètre d , comme illustré en Figure 3.14. A chaque échelle d'érosion d correspond un système parallèle $\Omega(d)$ de circonférence $L(d)$, de surface $S(d)$, de courbure moyenne $H(d)$ (L_0 , S_0 et H_0 désignant les fonctionnelles du système initial). On introduit d_R l'échelle d'érosion signant l'atteinte du Reach, valant $2\mathcal{R}$, et de même d_M l'échelle d'érosion signant l'atteinte du Max, valant $2\mathcal{M}$.

Deux types de systèmes se distinguent :

- Les systèmes *réguliers* : le gradient de courbure est défini et continu en chaque élément de $\mathcal{C}(\Omega)$. En Figure 3.14, le système initial est régulier, ainsi que les systèmes parallèles obtenus après érosions aux échelles $d = 10[L]$ et $d = 25[L]$. Thiesset *et al.* (2019) montrent que pour tout système $\Omega(d)$ régulier, les fonctionnelles de Minkowski sont dépendantes les unes des autres par les relations :

$$\begin{aligned} L(d) &= -2S(d)_{,d} \\ H(d) &= -2L(d)_{,d} \end{aligned} \quad (3.30)$$

- Les systèmes *non-réguliers* : il existe des éléments de $\mathcal{C}(\Omega)$, appelés *singularités*, pour lesquels le gradient de courbure n'est pas défini ou n'est pas continu. Une singularité est appelée *cusp* lorsque les points l'avoisinant présentent une courbure locale négative. En Figure 3.14, le système érodé à l'échelle $d = 45[L]$ n'est pas régulier, il présente deux cusps. Dumouchel *et al.* (2022) démontrent que si le système $\Omega(d)$ présente un ou plusieurs cusps, la relation (3.30) n'est plus valable, à moins d'y apporter à l'équation (3.30) un terme de correction pour chacun des cusps :

$$L(d) = -2S(d)_{,d} \quad (3.31)$$

$$H(d) + \sum_{i=1}^{n(d)} C_i(d) = -2L(d)_{,d} \quad (3.32)$$

avec $n(d)$ le nombre de cusp(s) que présente le système érodé à l'échelle d , pouvant prendre la valeur 0 si ce système est régulier.

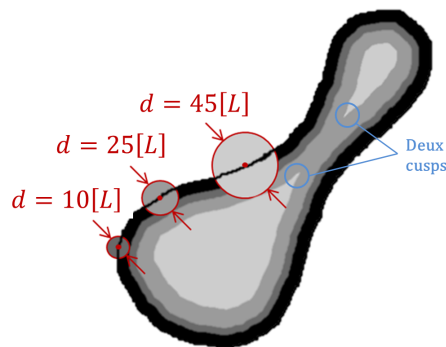


FIGURE 3.14 – Schéma représentant l'érosion d'un système à 3 échelles différentes ($[L]$ désigne une unité arbitraire de longueur).

Une carte des distances euclidiennes (aussi appelée "EDM") du système est obtenue par la fonction *Distance Map* du logiciel FIJI. Comme visible sur la Figure 3.15, cette opération attribue à chaque pixel x du système une valeur de niveau de gris égale à la valeur entière de $dist(x, \mathcal{A})$. Ainsi, les systèmes parallèles correspondant aux différents niveaux d'érosion du système initial sont identifiés : le système parallèle $\Omega(d)$ est constitué de tous les pixels dont la valeur est inférieure ou égale à d .



FIGURE 3.15 – Carte des distances euclidiennes du système.

La mesure de la distribution d'échelles cumulative surfacique E_2 est alors réalisée ; cette distribution est définie par :

$$E_2(d) = \frac{S_0 - S(d)}{S_0} \quad (3.33)$$

La dérivée spatiale de cette distribution cumulative correspond à la distribution d'échelles surfacique e_2 :

$$e_2(d) = E_{2,d}(d) = \frac{L(d)}{2S_0} \quad (3.34)$$

A partir de ces mesures et du système d'équations (3.31 - 3.32), une description morphotopologique multi-échelles du système est possible, par le système d'équations :

$$\begin{cases} L(d) &= 2S_0 e_2(d) \\ H(d) + \sum_{i=1}^{n(d)} C_i(d) &= -4S_0 e_{2,d}(d) \end{cases} \quad (3.35)$$

où les quantités $H(d)$ ainsi que $C_i(d)$ sont inconnues à ce stade du développement.

Ainsi, les jets étudiés dans cette étude expérimentale sont étudiés au travers d'une description morpho-topologique multi-échelles répondant aux équations :

$$\begin{cases} L(d) = 2S_0e_2(d) \\ 2\pi\chi(d) + \sum_{i=1}^{n(d)} \tan(\theta_i(d)) - \theta_i(d) = -4S_0e_{2,d}(d) \end{cases} \quad (3.36)$$

En Figure 3.16, la projection d'une colonne liquide déformée de façon sinusoidale est représentée dans un plan (x, y) . Quatre échelles d'érosion d sont schématisées :

- $d = 0$: il s'agit du système original. On note que ce système est régulier car il ne comporte aucun cusp.
- $d = d_R$: le reach du système est atteint et deux cusps apparaissent sur l'image synthétique.
- $d = d_3 > d_R$: deux cusps sont présents sur l'image synthétique.
- $d = d_M > d_3$: l'échelle maximale du système est atteinte. Les deux cusps évoqués précédemment disparaissent.

Le système original est régulier et son axe médiant est linéaire. Pour un tel système, Dumouchel *et al.* (2022) expriment la fonction de correction C comme :

$$C_i(d) = C(\theta_i(d)) = \tan(\theta_i(d)) - \theta_i(d) \quad (3.37)$$

avec $\theta_i(d)$ le petit angle entre la normale à l'interface au point donnant le cusp i après érosion à l'échelle d , et l'axe médiant du système, tel que schématisé en Figure 3.16.

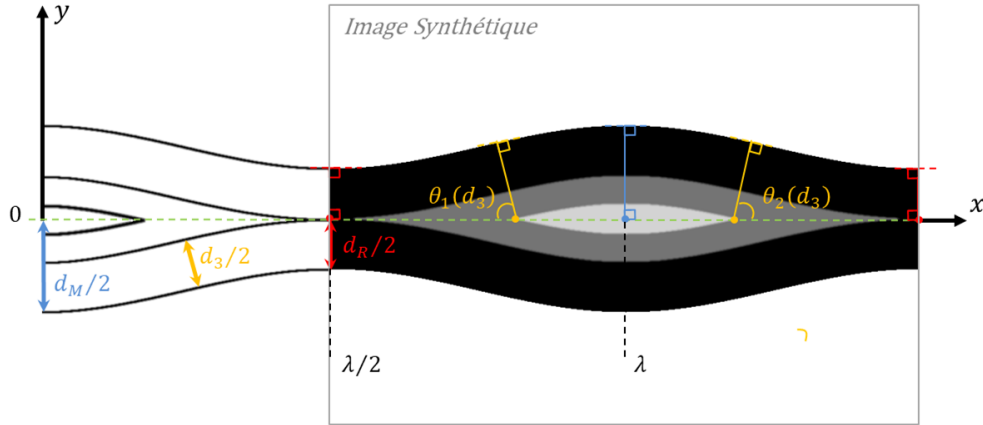


FIGURE 3.16 – Schématisation de l'érosion d'une image synthétique de jet dans un plan (x, y) .

En considérant la symétrie du système étudié, cette fonction de correction doit être considérée deux fois : une fois pour la partie supérieure du système ($y > 0$) et une fois pour la partie inférieure du système ($y < 0$). Par ailleurs, on observe que si le système érodé est homéomorphe à un disque, alors on a $n = 2$ et $H(d) = 2\pi$. Cette observation se généralise en écrivant : $H(d) = n\pi$. En prenant en compte ces éléments ainsi que l'expression 3.37, le système d'équations (3.36) devient :

$$\begin{cases} L(d) = 2S_0e_2(d) \\ -2L_{,d}(d) = n\pi + 2n [\tan(\theta(d)) - \theta(d)] \end{cases} \quad (3.38)$$

A partir des coordonnées du système étudié dans le plan (x, y) , une équation paramétrique de la fonction $L_{,d}$ est établie. Pour ce faire, l'interface supérieure du système s'exprime par :

$$y = a + \eta \cos(kx) \quad (3.39)$$

où a désigne le rayon de la colonne non-perturbée, η désigne l'amplitude de la perturbation et $k = 2\pi / \lambda$ désigne le nombre d'onde de cette perturbation.

Il est précisé que pour que tous les cusps se situe bien sur l'axe médian, la condition suivante est imposée :

$$\eta < \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2} - \frac{a}{2} \quad (3.40)$$

Cette approche découle sur le système d'équations paramétrique suivant :

$$\begin{cases} d &= 2(a + \eta \cos(kx))\sqrt{1 + (K \sin(kx))^2} \\ L(d) &= 2S_0 e_2(d) \\ -2L_{,d}(d) &= n\pi + 2n \left[\frac{1}{K \sin(kx)} - \arctan\left(\frac{1}{K \sin(kx)}\right) \right] \end{cases} \quad (3.41)$$

avec $K = \eta k$.

L'application numérique de ce développement est réalisée sur l'image synthétique présente en Figure 3.16. Cette image comprend 822 px de largeur et représente une colonne de rayon $a = 100\text{ }px$ déformée selon une perturbation de longueur d'onde $\lambda = 822\text{ }px$ et d'amplitude $\eta = 30\text{ }px$. Les échelles maximale et de reach du système sont théoriquement données par :

$$\begin{aligned} d_M &= 2(a + \eta) = 260\text{ }px \\ d_R &= 2(a - \eta) = 140\text{ }px \end{aligned}$$

En Figure 3.20, la distribution $e_{2,d}$ théorique est tracée à partir du système d'équations (3.53) et des caractéristiques de l'image énoncées précédemment. D'autre part, la distribution E_2 est mesurée sur la carte des distances euclidiennes par l'équation (3.33). Cette distribution lissée une première fois par une moyenne mobile sur cinq points. La distribution e_2 est obtenu par dérivée centrée selon l'échelle d'érosion d . La distribution e_2 subit également un lissage et une dérivation. Une dernière opération de lissage permet l'obtention de la mesure de $e_{2,d}$. Celle-ci est également tracée en Figure 3.20. On observe que :

- Pour des échelles d'érosion $d < d_R$, le résultat théorique donne $e_{2,d}(d) = 0$ puisque le système érodé reste homéomorphe à un cylindre, donnant $H(d) = 0$ et $n(d) = 0$ dans l'équation (3.35). Ce résultat confirme le fait qu'aucune rupture topologique n'est créée par les érosions aux échelles plus petites que celle du reach. Dans ces échelles, la mesure de $e_{2,d}$ présente des fluctuations autour de la valeur 0. L'origine de ces fluctuations est attribuée à la pixellisation de l'image et à une amplification due aux opérations de dérivation successives nécessaires à la mesure de $e_{2,d}$.
- Aux échelles d_R et d_M , une discontinuité de la distribution $e_{2,d}$ est visible sur la courbe théorique. Ces deux échelles correspondent à l'apparition et la disparition de cusps, respectivement. Ainsi, pour ces deux échelles, l'angle θ associé est de $\pi/2$, et le terme correctif associé $C(\theta)$ tend alors vers l'infini. De ce fait, selon l'équation (3.38), la distribution $e_{2,d}$ tend également vers l'infini. La présence de deux pics sur la mesure de $e_{2,d}$ est représentative de ces deux discontinuités.

- Pour des échelles d'érosions $d_R < d < d_M$, les angles θ associés aux cusps diminuent et le terme correctif associé $C(\theta)$ est fini et non-nulle. La courbe théorique présente une forme en U et atteint une valeur minimale en $d_m = 2a\sqrt{1+K^2}$. La courbe de mesure reproduit également cette forme en U mais présente cependant des fluctuations au niveau de ce minimum. Ces fluctuations sont également attribuées à la pixellisation de l'image et aux opérations de dérivation.
- Pour des échelles d'érosions $d > d_M$, le résultat trivial $e_{2,d}(d) = 0$ se vérifie par la théorie et la mesure.

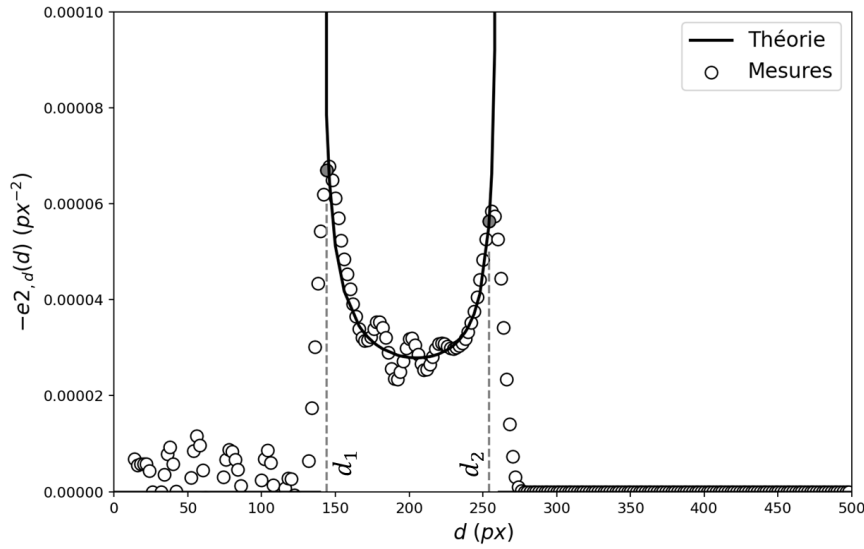


FIGURE 3.17 – Tracés des distributions $e_{2,d}$ théorique et mesurée associées au système synthétique présenté en Figure 3.16.

Cette procédure a été effectuée sur d'autres cas d'études, faisant varier plusieurs paramètres :

- La phase de la perturbation : ce paramètre n'altère ni le résultat théorique, ni la mesure. Ceci est cohérent puisque les fonctionnelles de Minkowski sont issues des éléments de géométrie intégrale du système étudié.
- Le rapport η/a : ce paramètre influe sur la qualité de la mesure pour des échelles d'érosions $d_R \leq d \leq d_M$. On note que l'écart entre la théorie et la mesure est acceptable lorsque ce rapport est compris entre 10 % et 40 %.
- Le nombre de longueur d'onde compris dans l'image : ce paramètre n'a pas d'influence significative sur la qualité de la mesure.

Ces applications ont montré que la description multi-échelles permet d'accéder aux caractéristiques morpho-topologiques des jets. Une expression analytique des fonctionnelles de Minkowski propres à un cylindre et à une sphère est également déterminée en dimension 2 (Dumouchel *et al.*, 2017). L'érosion de la projection 2D d'un cylindre de diamètre D_c et de longueur L_c est schématisée en Figure 3.18 ; on précise que la projection des surfaces latérales ne subit pas d'érosion. Pour un tel système, on a :

$$e_2(d) = \begin{cases} \frac{1}{D_c} & \text{pour } d < D_c \\ 0 & \text{pour } d \geq D_c \end{cases} \quad (3.42)$$

La distribution e_2 propre à ce système est tracée en Figure 3.18. Il s'agit d'une fonction échelon qui n'est pas continue ni dérivable en $d = D_c$. Ainsi, la distribution $e_{2,d}$ est nulle pour toute échelle d'érosion d sauf en $d = D_c$ où elle prend une valeur infinie. L'érosion de la projection 2D d'une sphère de diamètre D_s est schématisée en Figure 3.18. Pour un tel système, on a :

$$e_2(d) = \begin{cases} \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) & \text{pour } d < D_s \\ 0 & \text{pour } d \geq D_s \end{cases} \quad (3.43)$$

La distribution e_2 propre à ce système est tracée en Figure 3.18. Il s'agit d'une fonction linéaire de d pour $d < D_s$. Cette fonction n'est pas dérivable en $d = D_s$. Ainsi, $e_{2,d}$ est constante et non-nulle pour toute échelle $d < D_s$.

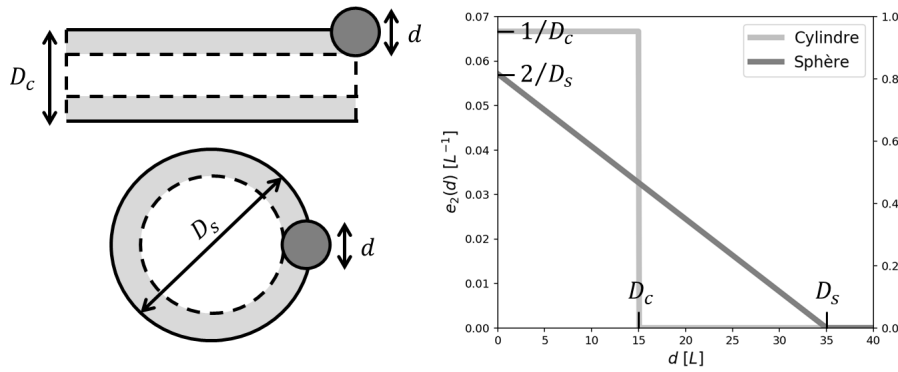


FIGURE 3.18 – Schéma de l'érosion d'un cylindre et d'une sphère (à gauche). Tracés des distributions e_2 et $e_{2,d}$ associées avec : $D_c = 15[L]$, $D_s = 35[L]$, $L_c = 60[L]$ (à droite).

Les objets liquides constituant un jet liquide peuvent être décrits par l'assemblage de cylindres et de sphères. L'assemblage de ces deux types de système se fait au moyen d'une jonction circulaire, comme visible en Figure 3.19. Un tel système est représentatif de la géométrie de perle-sur-ficelle et son étude constitue alors un intérêt particulier dans le cadre de l'étude des jets viscoélastiques. Pour un tel système, Tirel (2019) montre qu'on a :

$$e_2(d) = \begin{cases} S_r \frac{1}{D_c} + (1 - S_r) \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) & \text{pour } d \leq D_c \\ (1 - S_r) \frac{2}{D_s} \left(1 - \frac{d}{D_s}\right) & \text{pour } D_c < d \leq D_s \\ 0 & \text{pour } d \geq D_s \end{cases} \quad (3.44)$$

avec

$$S_r = \frac{L_c D_c}{L_c D_c + \frac{\pi D_s^2}{4}} \quad (3.45)$$

Les distributions e_2 et $e_{2,d}$ propres à ce système sont tracées en Figure 3.19. Pour $d < D_c$, $e_2(d)$ est constante et est représentative de la partie cylindrique du système. Pour $d > D_c$, $e_2(d)$ présente une décroissance progressive comme en témoigne l'évolution $-e_{2,d}(d)$ qui décroît de l'infini pour $d = D_c$ jusqu'à converger vers une valeur constante au voisinage de $d = D_s$. En $d = D_s$, la fonction $e_{2,d}(d)$ présente un échelon, caractéristique de la présence d'une sphère (Eq. (3.43)). Ainsi cette application montre que la forme du pic de la distribution $e_{2,d}$ est directement liée à la géométrie de la jonction liant la partie cylindrique de la partie sphérique du système.

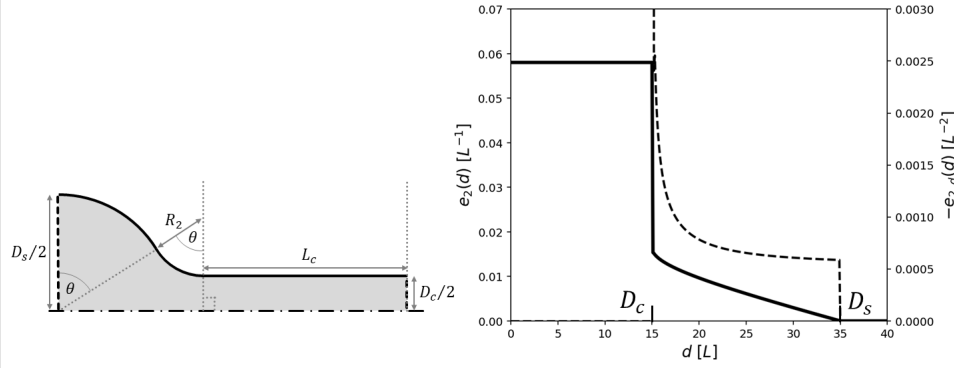


FIGURE 3.19 – Schéma de l'assemblage d'un cylindre et d'une sphère avec jonction circulaire (à gauche). Tracés des distributions e_2 (trait plein) et $e_{2,d}$ (point-tillés) associées avec : $D_c = 15[L]$, $D_s = 35[L]$, $L_c = 60[L]$ et $R_2 = 8.75[L]$ (à droite).

Par ailleurs, les fonctionnelles de Minkowski étant additives, elles sont adaptées à la description multi-échelles d'un ensemble de systèmes. En particulier, Thiesset *et al.* (2019) établissent une expression analytique des fonctionnelles propres à un ensemble de cylindres et à un ensemble de sphères dont les diamètres D se répartissent selon la distribution cumulative numérique F_0 . La distribution d'ensemble $e_{2,d}^{Tot}$ s'exprime :

$$\begin{cases} \text{Ensemble de cylindres : } 2S^{Tot}e_{2,d}^{Tot}(d) = -NLf_0(D) \\ \text{Ensemble de sphères : } 2S^{Tot}e_{2,d}^{Tot}(d) = -\frac{N\pi}{2}(1 - F_0(D)) \end{cases} \quad (3.46)$$

où N désigne le nombre de systèmes contenus dans l'ensemble, S^{tot} désigne la somme des surfaces des systèmes contenus dans l'ensemble et $f_0(D) = F_{0,D}(D)$.

Les différentes dynamiques des jets sont étudiées par l'évolution temporelle de leurs caractéristiques morpho-topologiques. On s'intéresse en particulier à l'évolution temporelle de deux échelles, qui sont le Reach \mathcal{R} et le Max \mathcal{M} .

3.3.3.2 Mesures d'échelles d_R et d_M du jet

Afin d'identifier les deux échelles d'érosion caractéristiques d_R et d_M , les distributions E_2 , e_2 sont étudiées. En Figure 3.20, les distributions associées à l'image synthétique présentée en Figure 3.16 sont tracées. Comme évoqué précédemment, l'érosion du système aux échelles d_R et d_M signe l'apparition d'un premier cusp et la disparition d'un dernier cusp, causant deux discontinuités de la distribution $e_{2,d}$. Ces discontinuités sont visibles sur les distributions E_2 et e_2 , tracées en Figure 3.20. Ainsi, ces échelles peuvent être repérées sur les distributions E_2 et e_2 comme l'échelle la plus petite et l'échelle la plus grande auxquelles survient une discontinuité, respectivement. En pratique, ces deux échelles sont mesurées de la façon suivante :

- L'échelle d_M est la plus petite échelle d'érosion pour laquelle $E_2(d) = 1$, comme présenté en Figure 3.20.

- L'échelle d_R est déterminée à partir de la distribution e_2 . En raison de la forte pixellisation des images dans les petites échelles d'érosion, la distribution E_2 est préalablement lissée par une moyenne mobile sur cinq points avant dérivation, puis lissée une deuxième fois après dérivation par rapport à d . L'échelle d_R est alors détectée sur la distribution e_2 (Figure 3.20) de façon itérative suivant deux critères :
 - $e_2(d_R)$ doit être compris entre 95% et 105% de $e_{2,max}$, $e_{2,max}$ étant la valeur maximale de la distribution e_2 . Cette valeur est obtenue en moyennant les distributions d'échelles associées aux 4 premières échelles d'érosion non nulles : $e_{2,max} = \langle e_2(i) \rangle_{i=4,6,8,10}$, repérées en noir sur la Figure 3.20.
 - En aval de l'échelle d_R , la pente relative de la distribution e_2 doit excéder une certaine valeur qu'on notera ici y :

$$\frac{e_2(d_R) - e_2(d_R + 1)}{e_{2,max}} > y$$

Cette procédure de détection est appliquée pour toutes les échelles d'érosion d à partir de d_M jusqu'à $d = 4$. Lorsque aucune échelle d'érosion ne satisfait les deux critères présentés ci-dessus, la valeur du paramètre y est abaissée pour une itération suivante. Cette procédure itérative est nécessaire du fait d'un bruit de mesure de la distribution E_2 aux petites échelles et également de la présence éventuelle d'un point d'inflexion entre les échelles d_R et d_M , comme visible en Figure 3.20.

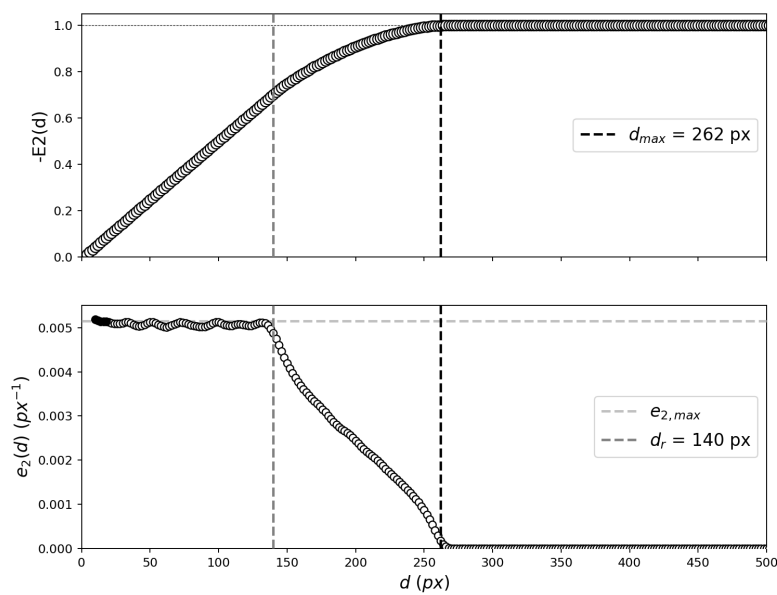


FIGURE 3.20 – Tracés des distributions E_2 , e_2 mesurées sur le système synthétique présenté en Figure 3.16. Repérage des échelles d_R et d_M .

L'application de cette procédure sur le système synthétique donne $d_R = 140 \text{ px}$ pour 140 px en théorie et $d_M = 262 \text{ px}$ pour 260 px en théorie. L'erreur de mesure relevée lors de l'application de la procédure sur différents systèmes synthétiques reste inférieure ou égale à 4 px . Ce niveau de précision est satisfaisant, le pas de précision de la mesure multi-échelle par carte des distances euclidiennes étant de 2 px .

3.3.3.3 Diamètre moyen du jet

Entre la sortie de la buse d'injection et le déclenchement des instabilités capillaires, la phase liquide est soumise à un réarrangement du champ de contraintes et du champ de vitesses, et subit l'influence de l'air ambiant. Cette zone a été définie comme la zone de latence du jet et mesurée en section 3.3.1. Dans cette zone, bien qu'aucune perturbation ne croisse au cours du temps, des déformations de la surface du jet peuvent se manifester. Le diamètre local du jet peut alors différer de celui de la buse d'injection D_{or} . Afin de prendre en compte ces effets, on introduit un diamètre moyen du jet non-perturbé D_{jet} . Sa valeur est calculée en Z_{onset} par :

$$\langle D_{jet} \rangle = \frac{1}{2} \langle d_M(Z_{onset}) + d_R(Z_{onset}) \rangle \quad (3.47)$$

où $\langle \bullet \rangle = \sum_{i=1}^{N_t} \bullet_i / N_t$. A la même position, une valeur moyenne de l'amplitude de perturbation initiale η est mesurée par :

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{4} \langle d_M(Z_{onset}) - d_R(Z_{onset}) \rangle \quad (3.48)$$

A partir de la mesure de $\langle D_{jet} \rangle$ et du débit volumique Q_v , une vitesse de jet V_{jet} est déterminée par :

$$V_{jet} = \frac{4Q_v}{\pi \langle D_{jet} \rangle^2} \quad (3.49)$$

Cette vitesse diffère légèrement de la vitesse d'injection V_{inj} , qui elle est calculée à partir du diamètre d'orifice de buse D_{or} . A chaque position z du jet, un temps équivalent t est associé par la relation :

$$t(z) = \frac{1}{g} \left[\sqrt{V_{jet}^2 + 2gz} - V_{jet} \right] \quad (3.50)$$

Cette relation s'appuie sur la formule de la chute libre, permettant ainsi la prise en compte des effets de gravité sur le jet.

3.3.3.4 Taux de croissance des instabilités capillaires

La mesure du taux de croissance des instabilités capillaires s'effectue à partir de l'évolution temporelle de la déformation de la surface des jets. Cette dernière est accessible à partir de deux échelles moyennes différentes : $\langle d_R \rangle(t)$ et $\langle d_M \rangle(t)$. Par construction, elle est également accessible par $\langle \eta \rangle(t) = \frac{1}{4} \langle d_M - d_R \rangle(t)$. L'évolution temporelle de ces trois grandeurs moyennes est tracée en Figure 3.21 pour le point de fonctionnement S5QA. Le temps de déclenchement des instabilités, noté T_{onset} et mesuré en section 3.3.1, est également repéré sur cette figure. On peut constater qu'une croissance/décroissance de type exponentielle de ces trois grandeurs prend forme en T_{onset} ou en son voisinage.

On remarque que pour des temps inférieurs à T_{onset} , c'est-à-dire dans la zone de latence, ces grandeurs évoluent légèrement, mais leur évolution n'est pas exponentielle. En ce sens, pour tous les cas de fonctionnement étudiés, T_{onset} apparaît comme le point de déclenchement des instabilités capillaires et confirme la consistance de la procédure POD introduite en section 3.3.1. De ce fait, l'évolution temporelle des quantités $\ln(\langle d_R \rangle + \langle D_{jet} \rangle)$, $\ln(\langle d_M \rangle - \langle D_{jet} \rangle)$, et $\ln(\langle \eta \rangle)$ est tracée afin de repérer un intervalle de temps correspondant au régime de Rayleigh, en Figure 3.21.

Dans cet intervalle de temps, un fit mathématique de $\langle d_R \rangle(t)$, $\langle d_M \rangle(t)$, et $\langle \eta \rangle(t)$ est appliqué selon les fonctions :

$$\begin{aligned}\langle d_M \rangle(t) &\rightarrow f_M(t) = \beta_M e^{\alpha_M(t-T_{onset})} + \delta_M \\ \langle d_R \rangle(t) &\rightarrow f_R(t) = \beta_R e^{\alpha_R(t-T_{onset})} + \delta_R \\ \langle \eta \rangle(t) &\rightarrow f_\eta(t) = \beta_\eta e^{\alpha_\eta(t-T_{onset})} + \delta_\eta\end{aligned}\quad (3.51)$$

grâce à la fonction *curve_fit* de la bibliothèque *optimize* du module SciPy de Python. Cette fonction comporte trois paramètres : α , β et δ . α est le taux de croissance temporelle des instabilités. Le paramètre β correspond à l'amplitude initiale de la perturbation. Le paramètre δ est une constante, dont la valeur est proche de $\langle D_{jet} \rangle$ lorsque le fit est appliqué à $\langle d_R \rangle(t)$ et à $\langle d_M \rangle(t)$, et proche de 0 lorsque le fit est appliqué à $\langle \eta \rangle(t)$. Ces trois fits sont visibles en Figure 3.21.

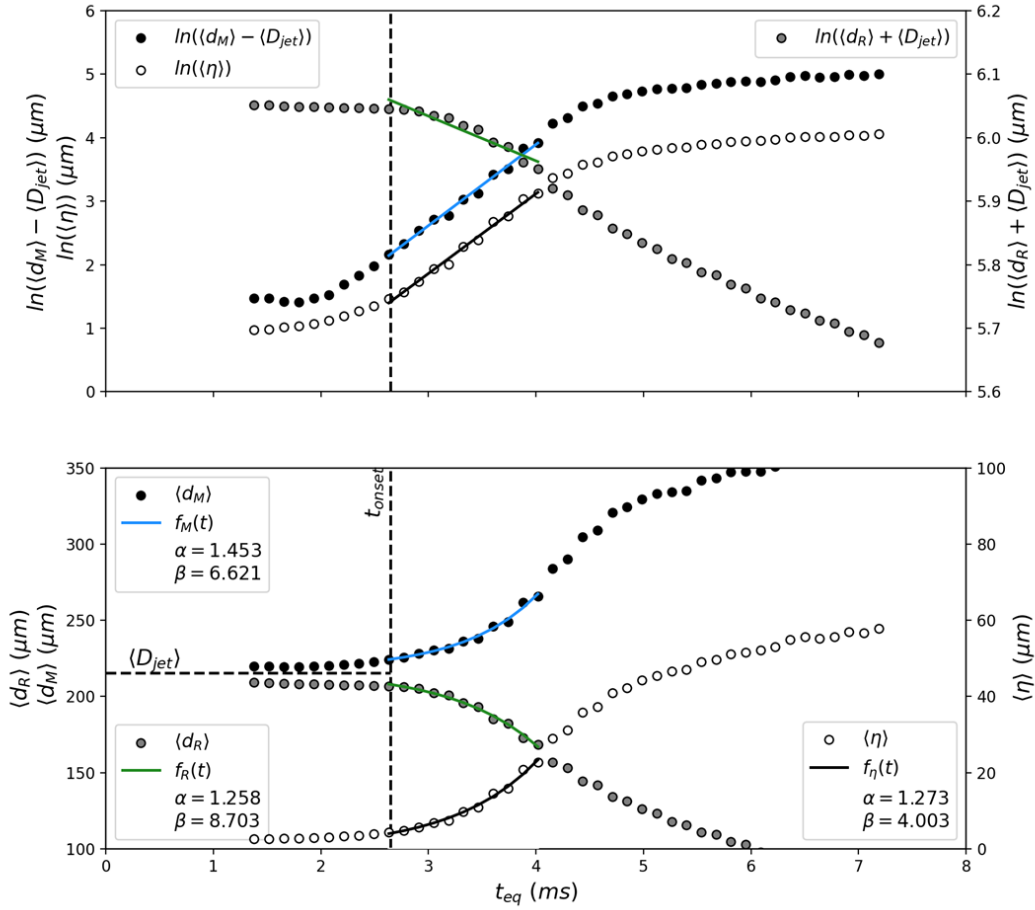


FIGURE 3.21 – Mesures du taux de croissance temporelle des instabilités capillaires sur l'évolution temporelle de $\langle d_{max} \rangle$, $\langle d_R \rangle$ et $\langle \eta \rangle$ pour le point de fonctionnement S5QA. Les taux de croissance α sont exprimés en ms^{-1} et les amplitudes initiales de déformations β en μm .

3.3.3.5 Longueurs d'onde de perturbations

La détermination de la longueur d'onde de perturbation des jets est effectuée à partir de la mesure de la distribution $e_{2,d}$ et à partir du système d'équations (3.53) établi en section 3.3.3.1 et rappelé ci-après :

$$\begin{cases} d &= 2(a + \eta \cos(kx))\sqrt{1 + (K \sin(kx))^2} \\ L(d) &= 2S_0 e_2(d) \\ -2L_{,d}(d) &= n\pi + 2n \left[\frac{1}{K \sin(kx)} - \arctan \left(\frac{1}{K \sin(kx)} \right) \right] \end{cases} \quad (3.52)$$

avec $K = \eta k$. Ce système d'équations se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} y(kx) &= a + \eta \cos(kx) \\ -e_{2,d}(d) &= \frac{n(d)}{2S_0} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2y(kx)}\right)^2 - 1}} - \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2y(kx)}\right)^2 - 1}} \right] \right] \\ K &= \frac{1}{\sin(kx)} \sqrt{\left(\frac{d}{2y(kx)}\right)^2 - 1} \end{cases} \quad (3.53)$$

Pour différentes images synthétiques, la comparaison des distributions $e_{2,d}$ théoriques et mesurées montrent que de façon générale, les échelles d_1 et d_2 sont les échelles qui présentent un écart minimal entre la théorie et la mesure. Ces deux échelles sont repérées comme les échelles d'érosion précédant les pics de mesure de $e_{2,d}$, comme visible en Figure 3.20. Ainsi, la résolution numérique du système d'équation (3.53) est effectuée pour les échelles d'érosion d_1 et d_2 . Les nombres de cusps $n(d_1)$ et $n(d_2)$ associés à ces échelles sont déterminés en utilisant les modules cv2 et skimage de traitements d'images de Python. En appliquant la procédure de détermination de la longueur d'onde sur l'image synthétique présentée en Figure 3.16, on trouve :

$$\lambda_1 = 683.8 \text{ px}$$

$$\lambda_2 = 949.8 \text{ px}$$

L'image synthétique ayant été construite sur la base d'une perturbation de longueur d'onde 822 px, les résultats de mesures montrent une sous-estimation de 16.8 % à l'échelle d_1 et une sur-estimation de 15.5 % à l'échelle d_2 . On introduit la longueur d'onde équivalente λ_{eq} correspondant à la moyenne des deux longueurs d'ondes déterminées :

$$\lambda_{eq} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (3.54)$$

Pour le cas synthétique étudié, on a $\lambda_{eq} = 816.8 \text{ px}$, correspondant à une sous-estimation de seulement 0.6 %. Ce résultat valide la mesure de la longueur d'onde par la description multi-échelles.

La procédure de détermination des longueurs d'onde est appliquée aux images expérimentales. Au vu d'un manque de précision sur la détermination de $e_{2,d}(d)$ lorsque l'amplitude η est trop faible, les conditions suivantes sont établies :

$$\eta_1 = \frac{\langle D_{jet} \rangle - d_R}{2} > 18 \text{ } \mu\text{m} \quad (3.55)$$

$$\eta_2 = \frac{d_R - \langle D_{jet} \rangle}{2} > 18 \text{ } \mu\text{m} \quad (3.56)$$

La condition d'un axe médian linéaire (3.40) doit également être vérifiée aux deux échelles, i.e. :

$$\eta_i < \sqrt{\frac{\langle D_{jet} \rangle^2}{16} + \left(\frac{\lambda_i}{2\pi}\right)^2} - \frac{\langle D_{jet} \rangle}{4} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.57)$$

Les images ne vérifiant pas les condition (3.55), (3.56) et (3.57) ne sont pas considérées.

3.3.3.6 Propriétés élongationnelles du liquide

Dans cette section, la zone de régime élasto-capillaire (REC) du jet décrite en section 1.3.2.3 est identifiée. Une mesure du temps de relaxation et de la viscosité élongationnelle terminale du liquide est réalisée. Ces mesures sont illustrées en Figure 3.22 sur le cas de fonctionnement S5QD. Elles sont réalisées sur l'appui des éléments de la littérature suivant :

- Durant le REC, le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ subit par le jet est constant et peut se mesurer comme :

$$\dot{\epsilon} = -2 \frac{\langle \dot{d}_R \rangle}{\langle d_R \rangle} \quad (3.58)$$

Afin de mesurer cette quantité, l'évolution de l'échelle moyenne $\langle d_R \rangle$ est étudiée. Pour s'affranchir au mieux du bruit expérimental que comporte l'évolution temporelle de $\langle d_R \rangle$, un lissage paramétrique de type Lowess est préalablement effectué sur $\langle d_R \rangle(t)$. Pour ce faire, la fonction `smoothers_lowess` de la bibliothèque `nonparametric` du module Statsmodels de Python est utilisée (Figure 3.22-a)). Une dérivation centrée de cette fonction lissée permet l'obtention de $\langle \dot{d}_R \rangle(t)$. Le rapport $-2 \frac{\langle \dot{d}_R \rangle}{\langle d_R \rangle}(t)$ est tracé en Figure 3.22-b).

- Durant le REC, la dynamique d'amincissement du jet suit une décroissance temporelle en $e^{\frac{-1}{2t_r}}$ (Mathues et al., 2018), imposant :

$$\frac{\langle \dot{d}_R \rangle}{\langle d_R \rangle} = -\frac{1}{2t_r} \quad (3.59)$$

Cette équation, associée à la définition de $\dot{\epsilon}$ en équation (3.58), permet la détermination du temps de relaxation par :

$$t_r = \frac{1}{\dot{\epsilon}} \quad (3.60)$$

Cette quantité est tracée en Figure 3.22-c).

- Durant le REC, la viscosité élongationnelle apparante $\eta_{E,app}$ est caractérisée par une évolution temporelle croissante. A la sortie du REC, les chaînes polymériques ont été déroulées et étirées à leur maximum. Dans le régime visco-capillaire (RVC), la dynamique d'amincissement d'un ligament est alors linéaire et caractérisée par la viscosité élongationnelle terminale définie par :

$$\eta_{E,t} = -\frac{\sigma}{\langle \dot{d}_R \rangle} \quad (3.61)$$

Cette quantité est tracée en Figure 3.22-d).

- La largeur de distribution sans dimension $LD(d_R)$ est un indicateur de la dispersion des valeurs de d_R . Elle est définie par :

$$LD(d_R) = \frac{d_{R42}^2}{d_{R32}^2} - 1 \quad (3.62)$$

Durant le REC, Tirel *et al.* (2020) montrent qu'en supposant qu'au début du REC tous les polymères sont caractérisés par le même temps de relaxation, une variation temporelle de $LD(d_R)$ correspond à une variation du temps de relaxation des polymères t_r . Cette quantité est tracée en Figure 3.22-e).

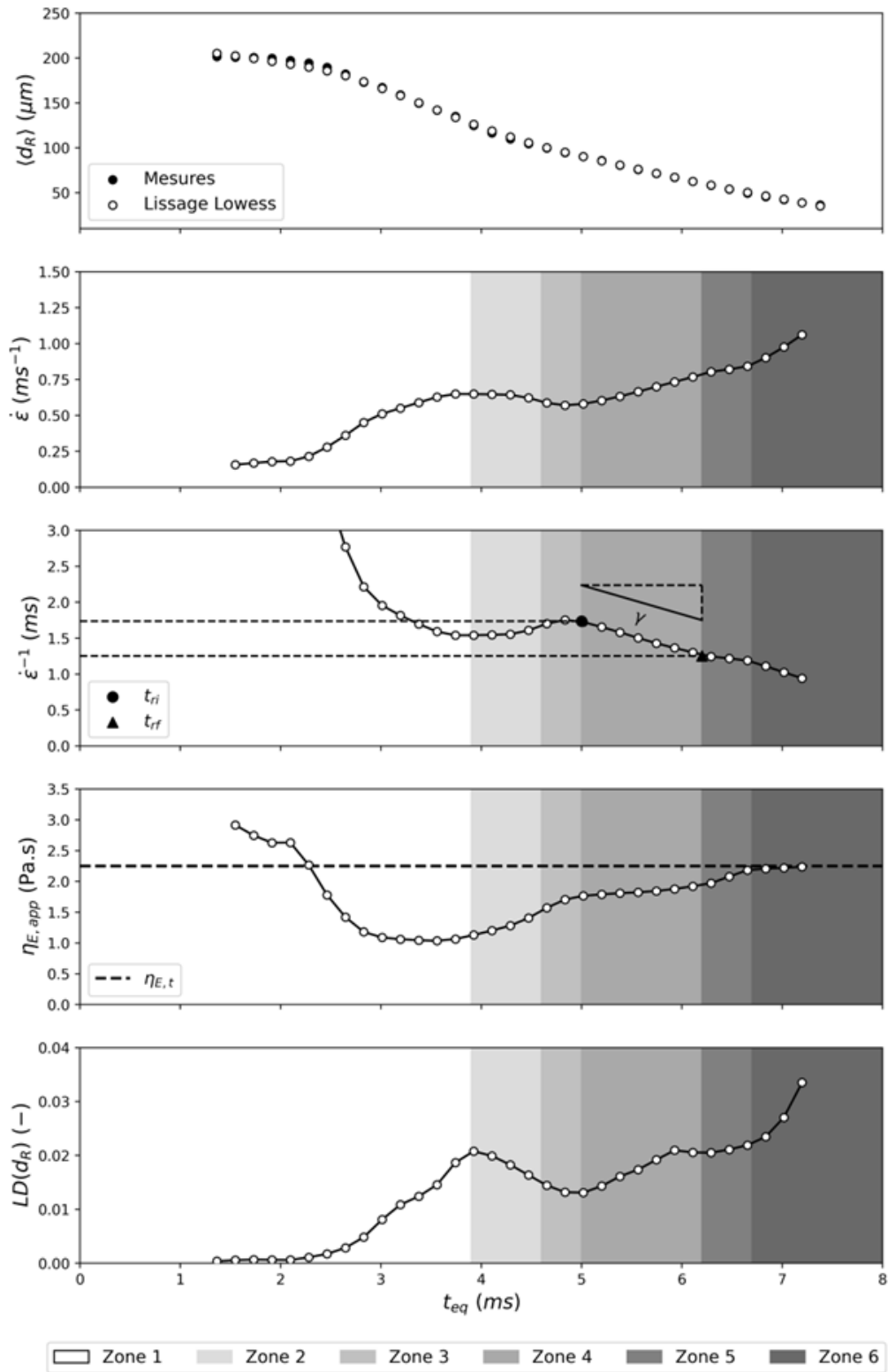


FIGURE 3.22 – Tracé des évolutions temporelles de $\langle d_R \rangle$, de $\dot{\epsilon}$, de $\dot{\epsilon}^{-1}$, de $\eta_{E,app}$, et de $LD(d_R)$ mesurées sur le cas de fonctionnement S5QD.

Comme visible en Figure 3.22, l'évolution temporelle des quantités présentées ci-avant fait apparaître 6 zones temporelles, numérotées de 1 à 6 par ordre d'apparition :

Dans la zone 1 : L'absence de croissance de $\eta_{E,app}$ indique que le REC n'a pas débuté.

Dans la zone 2 : Une croissance de $\eta_{E,app}$ indique le début du REC. Cependant, l'observation d'une décroissance de $\dot{\epsilon}$, et donc d'une croissance de t_r , est incohérente physiquement. La présence d'un pic de $LD(d_R)$ dans cette zone indique une forte dispersion des valeurs de d_R . On en déduit que la zone 2 est une zone de recouvrement entre la zone de RIC et la zone de REC. Cette déduction s'est confirmée par la diversité des profils d'interfaces visualisés sur les images : au temps correspondant au pic de $LD(d_R)$, des déformations sinusoïdales sont observées sur certaines images alors que sur d'autres images la formation de structures de perles sur ficelle est visiblement déjà avancée. La position du pic de $LD(d_R)$ est choisie pour délimiter la fin de la zone de régime inertio-capillaire (RIC) et le début du REC. On note cette position Z_{REC}^i .

Dans la zone 3 : Une croissance de $\eta_{E,app}$ accompagnée d'une stagnation de $\dot{\epsilon}$, de t_r et de $LD(d_R)$ indiquent une zone de REC dite "pure" (pas de recouvrement avec un autre régime). La position de début de ce régime pur est désignée par Z_{RECp}^i .

Dans la zone 4 : Une croissance de $\eta_{E,app}$ indique que le REC n'est pas terminé. Cependant, une croissance de $\dot{\epsilon}$, et donc une décroissance de t_r sont observées, ainsi qu'une croissance de $LD(d_R)$. On attribue ces variations à la présence de mécanismes de dégradation des chaînes polymériques, entraînant une diminution du temps de relaxation de t_{ri} à t_{rf} . La pente γ de cette diminution est extraite par l'application d'une régression linéaire de $t_r(t)$ dans la zone 4.

Dans la zone 5 : Les quantités étudiées observent les mêmes variations que dans la zone 3. On en déduit que la zone 5 est également une zone de REC pure.

Dans la zone 6 : Une stagnation de $\eta_{E,app}$ à la valeur $\eta_{E,t}$ est observée. On en déduit que le commencement de la zone 6 correspond à la fin de la zone de REC et au début de la zone de RVC. On note cette position Z_{REC}^f .

Ainsi, l'étude de l'évolution temporelle des grandeurs $\langle d_R \rangle$, $\dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}^{-1}$, et $LD(d_R)$ permet d'affirmer que la considération systématique d'un temps de relaxation constant dans la zone de REC n'est pas correcte.

La procédure d'identification exposée ci-avant pour le cas de fonctionnement S5QD est appliquée pour les jets de solutions S8 et S5. On note par ailleurs que les zones 3, 4 et 5 sont de taille variable, et que la zone 5 n'est pas systématiquement présente. Pour les jets de solutions S1 et S06, sauf exception, aucune zone de REC n'a pu être détectée par cette procédure, témoignant de la très faible viscoélasticité de ces solutions. Lorsqu'une zone de REC est détectée, ses position de début Z_{REC}^i et de fin Z_{REC}^f sont identifiées. Les temps de relaxation t_{ri} et t_{rf} sont déterminés, ainsi que le coefficient de dégradation temporel γ associé. La viscosité élongationnelle terminale du liquide $\eta_{E,t}$ est également mesurée.

3.3.3.7 Coalescence

Lorsque le jet présente des structures de perles sur ficelle, le phénomène de coalescence de perles peut survenir. Ce phénomène, notamment étudié par Li et Fontelos (2003), est décrit comme un coulisement d'une perle vers une autre ou de deux perles le long du ligament. Ce phénomène donne alors naissance à une perle d'échelle plus importante (3.23-b)), mais aussi à un ligament plus long (3.23-c)).

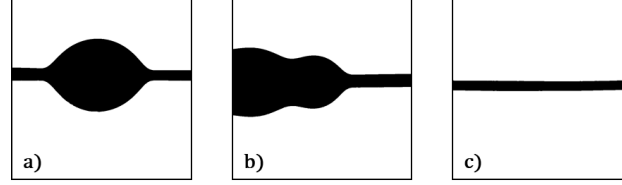


FIGURE 3.23 – Exemple d'une image : a) sans coalescence, b) avec coalescence mais non comptabilisée dans le calcul de ξ , c) avec coalescence comptabilisée dans le calcul de ξ .

Une procédure de détection d'occurrence de coalescence est effectuée, se basant sur la détection de ligament ne comportant pas de perle. Pour se faire, les échelles caractéristiques d_R et d_M sont mesurées et comparées. Un cas d'occurrence de coalescence est comptabilisé lorsque :

$$d_M - d_R < 0.3 \langle D_{jet} \rangle \quad (3.63)$$

Cette procédure de détection est appliquée en chaque fenêtre d'analyse. Les images présentant une rupture de jet, repérées en section 3.3.2 dans le cadre de la mesure de longueur de rupture du jet, sont écartées de cette analyse. Par position, un pourcentage d'occurrence de coalescence est alors extrait, et noté ξ . En Figure 3.24, $\xi(z)$ est tracé pour le point de fonctionnement S8QC. Seuls les positions z situées en aval de Z_{REC}^i sont étudiées.

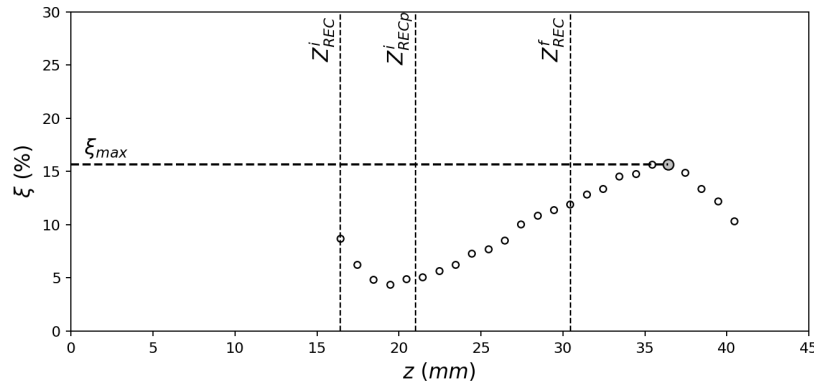


FIGURE 3.24 – Tracé de l'évolution spatiale du pourcentage d'occurrence de coalescence $\xi(z)$ et mesure de ξ_{max} pour le point de fonctionnement S8QC.

On constate que le pourcentage de coalescence augmente linéairement à partir d'une position $Z_{REC}^i \leq z \leq Z_{REC}^f$. Cette observation est cohérente puisque la coalescence n'est attendue que sur des structures de perles-sur-ficelle. Par ailleurs, on remarque que $\xi(z)$ continue sa croissance au-delà du REC. Le pourcentage de coalescence prend une valeur maximale ξ_{max} dans le RVC.

3.3.4 Tailles de gouttes

La mesure de tailles de gouttes est effectuée suivant deux techniques :

- La méthode dite *multi-échelles* basée sur les mesures de la distribution d'échelles E_2 .
- La méthode dite *directe* basée sur l'analyse d'images.

Ces deux méthodes sont appliquées sur les images traitées complètes, c'est-à-dire sans procéder à une division en fenêtre d'analyses comme décrit en section 3.2.2.

3.3.4.1 Méthode multi-échelles

Comme montré en section 3.3.3.1, la distribution $e_{2,d,d}$ contient les caractéristiques des distributions de sphères d'un système. Sachant la propriété d'additivité des fonctionnelles de Minkowski et l'équation (3.46) propre à un ensemble de sphères, on a :

$$\begin{cases} S^{Tot} E_2^{Tot}(d) = \sum_i^{N_t} S_i E_2^i(d) \\ 2S^{Tot} e_{2,d}^{Tot}(d) = -\frac{N\pi}{2}(1 - F_0(D)) \end{cases} \quad (3.64)$$

Ainsi, la procédure de détermination de la distribution de taille de gouttes consiste en la mesure de E_2^{Tot} et en l'application d'une triple dérivée. En Figure 3.25, la distribution $e_{2,d}^{Tot}$ est tracée pour le point de fonctionnement **S8QC**. Dans les faibles échelles d'érosion, un bruit de mesure est présent, et ne permet pas d'identifier correctement une éventuelle distribution de gouttes satellites. De plus, les images analysées pour cette application contiennent dans certains cas encore des objets liquides qui ne sont pas totalement atomisés, comportant ainsi des structures liquides de petite échelle. Pour ces raisons, l'attention est ici exclusivement portée sur les gouttes principales, d'échelles D^p plus importantes. Un intervalle d'échelles $[D_{min}^d; D_{max}^d]$ de la distribution de tailles de gouttes principales est identifié :

- L'échelle D_{min}^p correspond à la séparation de $e_{2,d}^{Tot}$ de la valeur plateau $e_{2,d}^{Tot,drops}$.
- L'échelle D_{max}^p correspond à l'échelle la plus grande à partir de laquelle $e_{2,d}^{Tot} = 0$ pour toute échelle supérieure.

La distribution $e_{2,d}^{Tot}$ contenue dans l'intervalle de ces échelles est tracée en Figure 3.25. Le diamètre moyen D_{10}^p des gouttes principales est mesuré. Le nombre totale de gouttes mesurées N_{drops} est estimé à partir de la deuxième équation du système (3.64) :

$$N_{drops} = -\frac{2}{\pi} S^{Tot} e_{2,d}^{Tot,drops} \quad (3.65)$$

$e_{2,d}^{Tot,drops}$ étant la valeur plateau repérée tel que sur la Figure 3.25.

Pour l'exemple présentée en Figure 3.25, on trouve $N_{drops} = 1209$. Ce résultat nous donne une indication sur la consistance de la mesure de taille de gouttes. Pour tous les cas de fonctionnement étudiés, on a $N_{drops} > 1000$. La consistance de la mesure est évaluée en comparant la surface mesurée S^{Tot} des objets liquides contenus dans les images analysées à la surface S^{drops} calculée à partir du diamètre moyen D_{10}^p des grosses gouttes considérées alors comme sphériques :

$$S^{drops} = N_{drops} \frac{\pi D_{10}^p}{4} \quad (3.66)$$

On trouve ainsi l'écart relatif suivant :

$$\frac{S^{drops} - S^{Tot}}{S^{Tot}} \approx 3,1\% \quad (3.67)$$

Cet écart relatif est faible et reste inférieur à 6% pour tous les cas de fonctionnement étudiés. On en déduit d'une part que les éventuels objets liquides de faible échelle ne constitue pas une source d'erreur importante dans la mesure de tailles de grosses gouttes, et que ces dernières sont relativement sphériques.

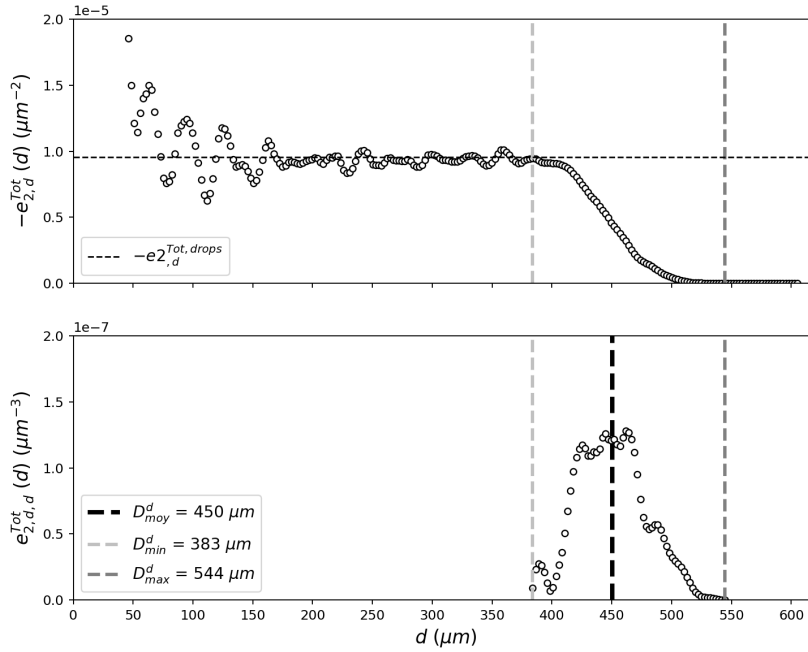


FIGURE 3.25 – Tracé des distributions $e_{2,d}^{Tot}$ et $e_{2,d}^{Tot}$ pour le point de fonctionnement S8QC. Repérage de $e_{2,d}^{Tot,drops}$, D_{min}^d , D_{max}^d et $e_{2,d}^{Tot,drops}$. Mesure de D_{10}^p .

3.3.4.2 Méthode directe

Cette méthode consiste à analyser la forme des objets liquides par traitement d'images. Comme visible en Figure 3.26, les objets localisés sur les bords de l'images ne sont pas considérés (objets 1 et 8). Un fit est appliqué au contour des objets liquides restants : il consiste à associer à chaque contour l'ellipse la plus proche possible du contour original et dont la surface équivaut à la surface de l'objet original. Ce traitement est réalisé sur le logiciel FIJI en utilisant les fonctions *Analyze Particles* et *Fit Ellipse*. Pour chaque objet considéré, la longueur de l'axe majeur L et de l'axe mineur l de l'ellipse équivalente sont extraites, permettant l'analyse suivante :

- Si $L < 200 \mu m$: L'objet est considéré petit et automatiquement sphérique (objets 3 et 5).
- Si $L \geq 200 \mu m$: L'objet est considéré grand, et il est considéré sphérique si $\frac{l}{L} \leq 0.9$ (objets 4, 6 et 7).

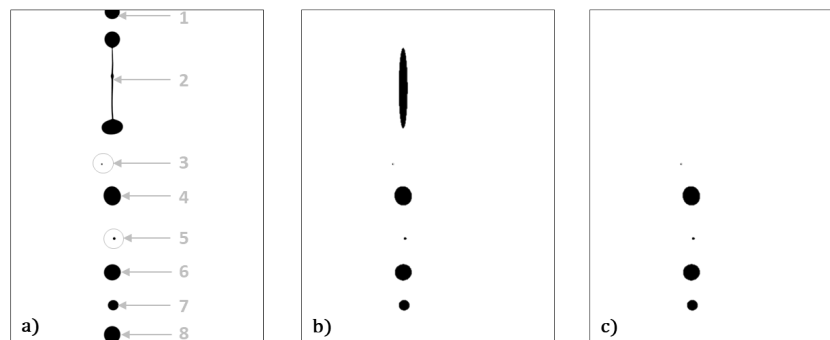


FIGURE 3.26 – a) Exemple d’une image originale, b) Elimination des objets liquides localisés en bord d’image et application d’un fit elliptique aux objets restants, c) Elimination des objets considérés non sphériques.

Comme on peut le voir en Figure 3.26, cette procédure vise à écarter les objets non-sphériques, qu’il s’agisse de gouttes déformées ou d’objets liquides encore connectés par un ligament. On associe aux objets considérés sphériques un diamètre équivalent défini par :

$$D = \frac{1}{2}(L + l) \quad (3.68)$$

En Figure 3.27 est présentée la distribution de taille de gouttes obtenue par la méthode directe pour le cas de fonctionnement S8QC. Deux distributions se distinguent : l’une traite des gouttes principales (en gris) caractérisée par un diamètre moyen D_{10}^p , et l’autre traite des gouttes satellites (en blanc) caractérisée par un diamètre moyen D_{10}^{sat} . La proportion en gouttes satellites p_{sat} est calculée ; elle vaut ici 18.5 %.

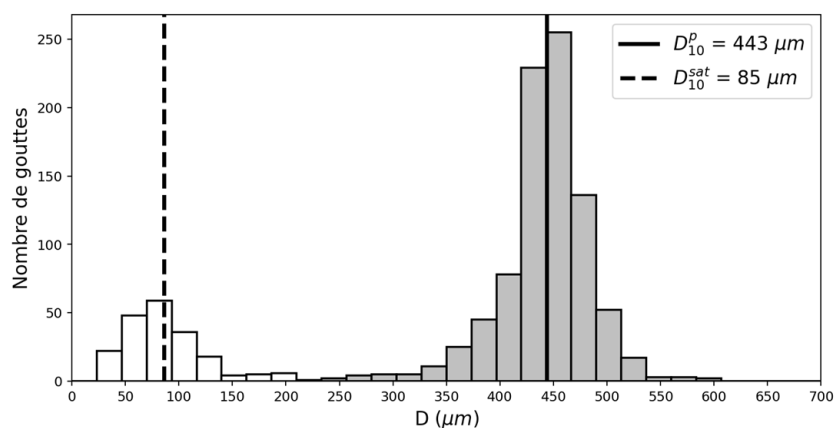


FIGURE 3.27 – Distribution de tailles de gouttes obtenues par la méthode directe sur le cas de fonctionnement S8QC.

3.3.4.3 Comparatif des deux méthodes

La méthode multi-échelles ne permet pas une mesure fiable des gouttes satellites. Cependant, une superposition des deux distribution de tailles de gouttes principales en Figure 3.28 nous montre une bonne fiabilité concernant la mesure de celles-ci. En effet, les distributions sont très proches l’une de l’autre, avec un écart de diamètre moyen de $7 \mu m$ seulement. On note tout de même que la méthode multi-échelles n’est pas tout à fait fiable sur les bords de cette

distribution. En particulier, l'échelle D_{min}^p n'est pas correctement déterminée, elle est surévaluée. Cette erreur est attribuée au bruit induit par la mesure de la distribution E_2 , et amplifié par trois opérations de dérivation successives par rapport à l'échelle d'érosion d .

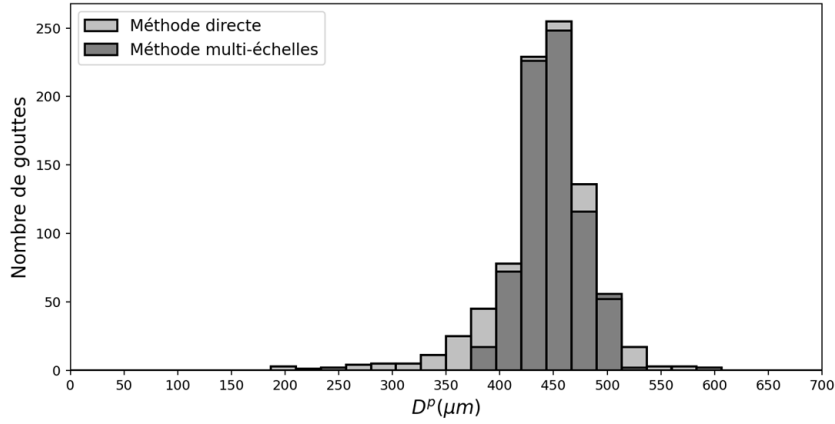


FIGURE 3.28 – Comparaison des distributions de tailles de gouttes principales obtenues sur le cas de fonctionnement S8QC par la méthode multi-échelle et par la méthode directe.

3.3.5 Schématisation des éléments mesurés

En Figure 3.29, une vue schématique des différentes mesures exposées ci-avant est présentée.

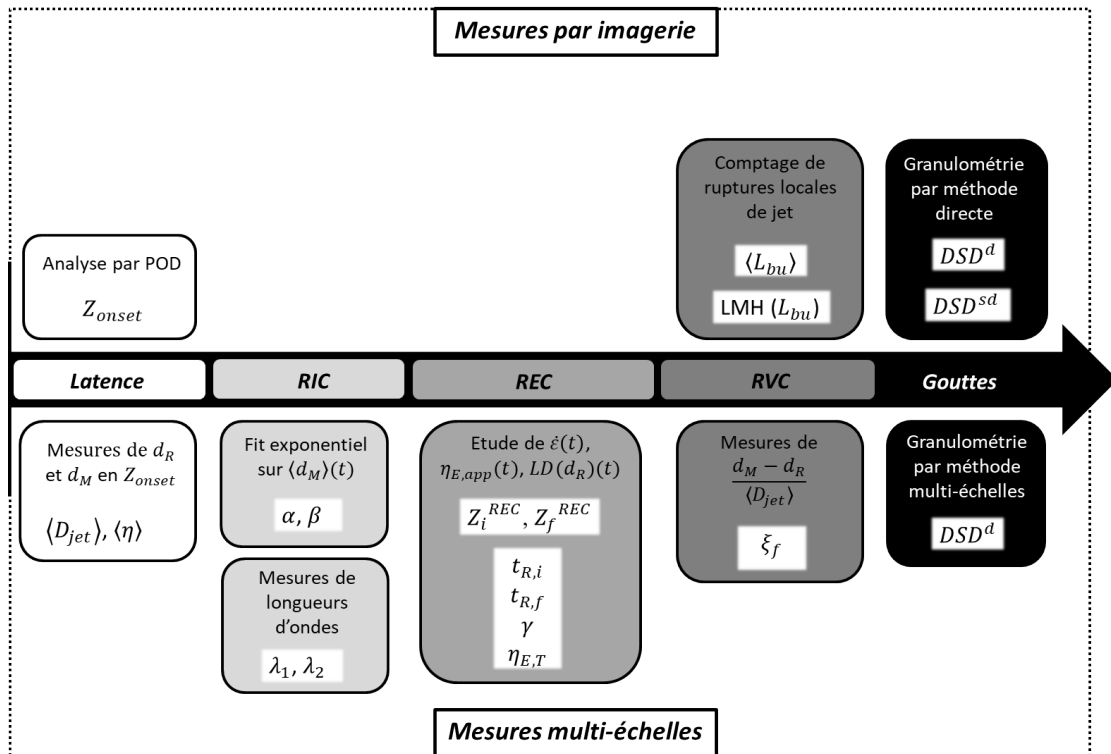


FIGURE 3.29 – Schématisation des différentes mesures effectuées sur les jets.

3.4 Resultats

Dans cette section, les éléments mesurés précédemment sont présentés pour tous les cas de fonctionnement. Les différents régimes d'évolution des jets sont exposés et chaque phase d'évolution des jets est analysée dans l'ordre suivant : le processus d'injection et le mécanisme de dégradation associé, le déclenchement et le développement des instabilités capillaires, l'écoulement élongationnel du REC et un second mécanisme de dégradation associé, et les caractéristiques des gouttes résultantes, associées au phénomène de coalescence.

Les valeurs numériques des principales mesures effectuées en section 3.3 sont présentées dans trois tableaux différents situés en Annexe B : le tableau B.1 contient les résultats relatifs à la zone neutre et au régime inertio-capillaire des jets, le tableau B.2 contient les résultats relatifs aux régimes élasto-capillaire et visco-capillaire des jets, et le tableau B.3 contient les résultats relatifs à la rupture des jets et aux gouttes résultantes.

3.4.1 Régimes d'évolution des jets

Pour chaque point de fonctionnement, en Figure 3.30 et 3.31, les zones associées à chaque régime sont représentées spatialement et temporellement, respectivement. Les jets de solutions S5 et S8 se distinguent par la présence d'un régime élasto-capillaire qui a pu être détecté en section 3.3.3.6. La procédure utilisée a permis entre autres d'établir un intervalle de temps $[t_{REC}^i; t_{REC}^f]$ et d'espace $[Z_{REC}^i; Z_{REC}^f]$ associés au REC, et donc indirectement les positions et temps associés à la fin du RIC et au début du RVC. Ainsi, pour ces jets, trois régimes ont pu être identifiés à la suite de la zone de latence : le régime inertio-capillaire, le régime élasto-capillaire, et le régime visco-capillaire. Pour les jets de solutions S06 et S1, cette procédure n'a pas permis d'identifier un régime élasto-capillaire. Ainsi, pour ces jets, seulement deux zones ont été distinguées : la zone de latence, et la zone suivante, désignée sous le terme de *zone active*.

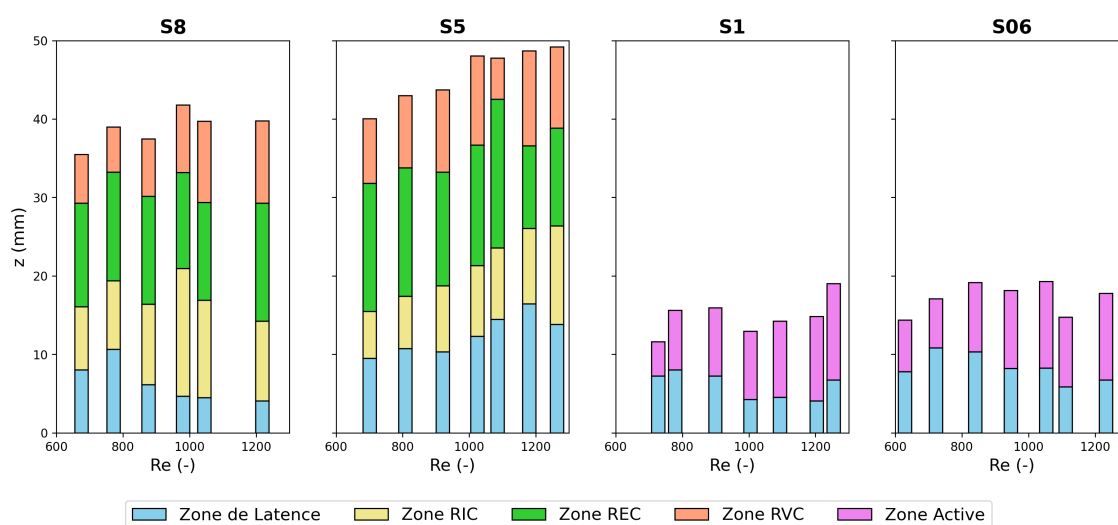


FIGURE 3.30 – Représentation spatiale des jets par zones pour tous les points de fonctionnement étudiés.

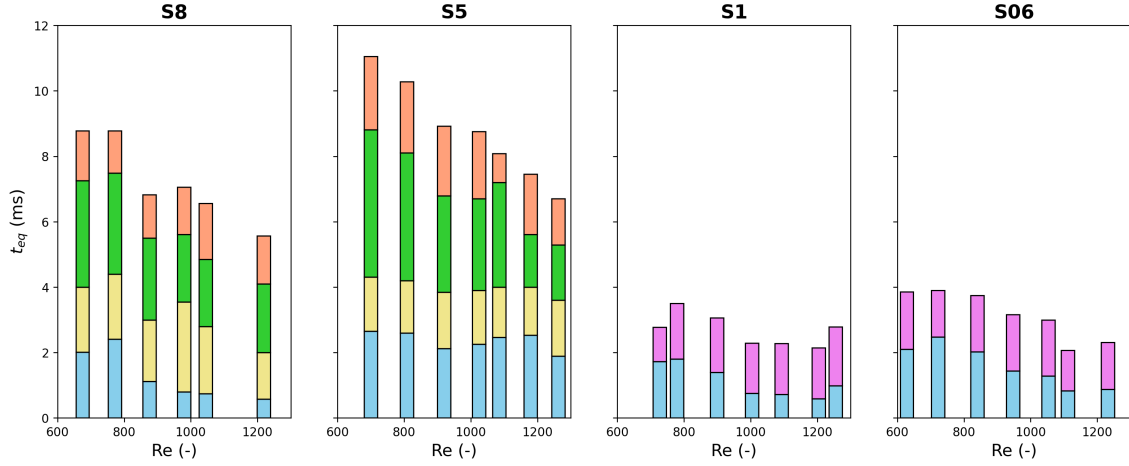


FIGURE 3.31 – Représentation temporelle des jets par zones pour tous les points de fonctionnement étudiés. La légende est la même qu'en Figure 3.30.

Après avoir exposé la méthode de détermination des échelles d_R et d_M , l'intérêt est porté sur leur évolution. En Figure 3.32, les distributions de d_R et d_M mesurées sur 600 images sont tracées en différentes positions du jet, pour le point de fonctionnement **S5QA**. Superposée à ces distributions, la distribution moyenne $\langle e_{2,d} \rangle$ est également tracée. Quatre positions différentes ont été choisies, appartenant à la zone neutre du jet, à la zone de régime inertio-capillaire (RIC), à la zone de régime élasto-capillaire (REC), et enfin à la zone de régime visco-capillaire (RVC). Les observations sont les suivantes :

Dans la zone neutre, les distributions de d_R et de d_M sont quasiment confondues. Ces distributions sont très étroites, de même que la distribution $\langle e_{2,d} \rangle$, qui est localisée aux mêmes échelles. En effet, dans cette zone, les déformations de surface du jet sont minimales. Dans cette zone, $\langle e_{2,d} \rangle$ caractérise presque exclusivement une distribution de taille de cylindre.

Dans la zone de régime inertio-capillaire, les distributions de d_R et de d_M restent centrées mais s'élargissent de façon comparable, et leur valeur moyenne s'éloigne l'une de l'autre. Cela saurait s'expliquer par le développement dans cette zone de perturbations de surface de type sinusoïdale. La distribution $\langle e_{2,d} \rangle$ s'élargit également tout en restant centrée. Cependant, l'échelle d caractérisant son pic semble inchangée. De même que dans la zone neutre, $\langle e_{2,d} \rangle$ caractérise ici une distribution de taille de cylindre.

Dans la zone de régime élasto-capillaire, la distribution de d_R s'amincit et se déplace dans les petites échelles. Elle n'est pas centrée : une traîne du pic de distribution est visible dans le sens de l'augmentation de d . La distribution de d_M quant à elle s'est élargie et déplacée vers les plus grandes échelles. Elle n'est pas non plus centrée : une traîne du pic de distribution est visible dans le sens de la diminution de d . Le régime élasto-capillaire est caractérisé par la formation de structures de perles-sur-ficelles. La distribution de $\langle e_{2,d} \rangle$ présente un pic très étroit dans les petites échelles. Le pic de cette distribution ne correspond pas tout à fait au pic de la distribution de d_R . C'est la portion montante de ce pic qui est associée à la distribution de diamètre de ligaments, la portion descendante étant associée à la distribution de taille des

éléments de raccordements. La présence de ces éléments indique que les pinch-off ne sont pas (encore) présents sur les ligaments. Ce pic est suivi d'un plateau dans les échelles médianes et d'une diminution progressive dans les grandes échelles, qui quant à elle est associée à la distribution de taille de perles.

Dans la zone de régime visco-capillaire, les trois distributions observent un profil similaire que celles de la zone de régime élasto-capillaire. Cependant, on note que la traîne associée à la distribution de d_R a quasiment disparu, signant la réduction des éléments de raccordement et l'apparition de pinch-off sur les ligaments. D'autre part, la traîne associée à la distribution de d_M est toujours présente, et rencontre même la distribution de d_R . Cette caractéristique est le signe de l'occurrence de phénomènes de coalescence : certaines gouttes se déplacent le long du ligament jusqu'à coalescer avec une autre perle, laissant ainsi une ficelle sans perle, qui se trouve être caractérisé par deux échelles d_R et d_M voisines. Cet élément d'analyse a été exploitée par la procédure exposée en section 3.3.3.7.

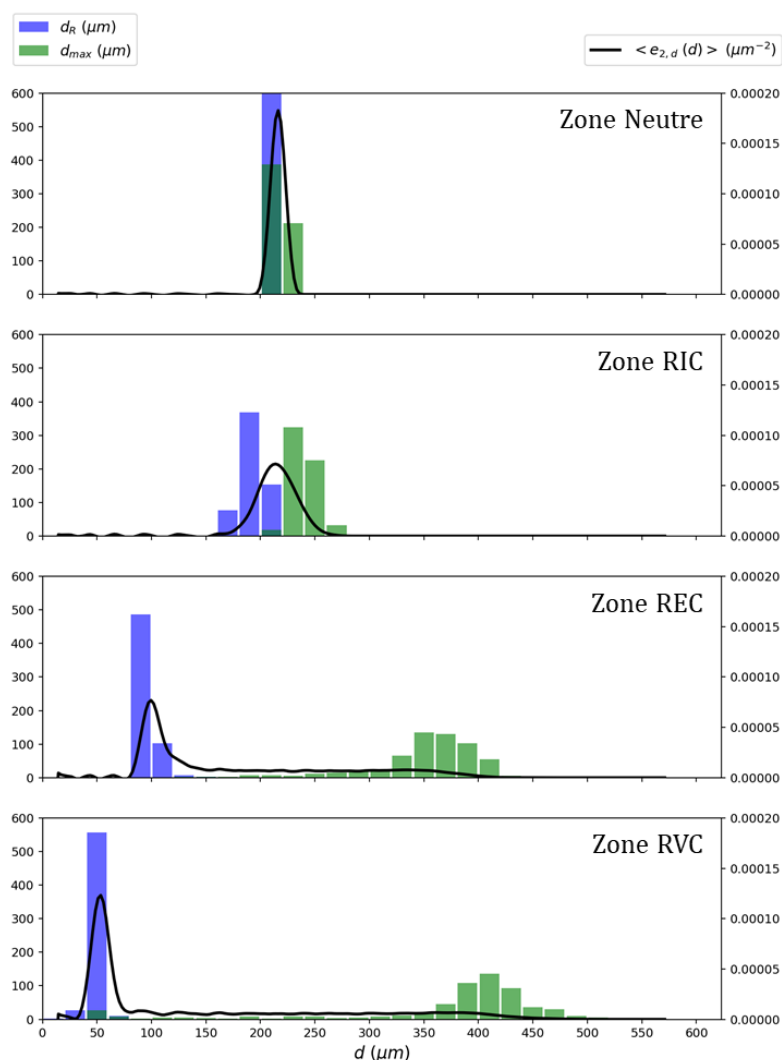


FIGURE 3.32 – Distributions de d_R , de d_M , et $\langle e_{2,d} \rangle(d)$ mesurées sur 600 images dans la zone neutre, la zone de régime inertio-capillaire (RIC), la zone de régime élasto-capillaire (REC), et la zone de régime visco-capillaire (RVC) pour le point de fonctionnement S5QA.

En Figure 3.33 sont tracées les longueurs d'instabilité capillaire des jets, définies par $\langle L_{bu} \rangle - Z_{onset}$, en fonction du nombre de Reynolds. Pour les solutions S1 et S06, ces longueurs sont proportionnelles au nombre de Reynolds, comme prévu par la théorie, permettant deux régressions linéaires satisfaisantes et très proches l'une de l'autre. Ce n'est pas le cas pour les solutions S5 et S8 pour lesquelles une déviation de ces longueurs vers de plus faibles valeurs est observée pour les points de fonctionnement de nombre de Reynolds plus importants. Cette déviation est également observée dans les travaux de Mun *et al.* (1998). Pour les solutions S5 et S8, les régressions linéaires sont réalisées en ne prenant en compte que les cinq et quatre premiers points de fonctionnement, respectivement. On note par ailleurs que pour de faibles nombres de Reynolds, la longueur des instabilités est plus importante pour les solutions S5 que pour les solutions S8 et que cette tendance s'inverse en augmentant le nombre de Reynolds.

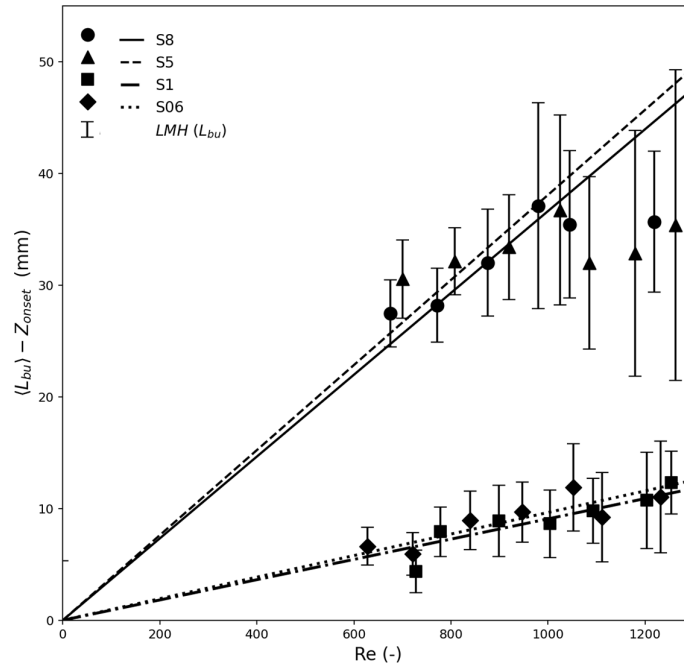


FIGURE 3.33 – Diagramme de stabilité des jets pour tous les points de fonctionnement étudiés.

3.4.2 Processus d'injection et dégradation associée

En Figure 3.34-a), les temps de relaxation t_{ri} sont tracés en fonction du taux de déformation dans l'injecteur, défini par $\dot{\epsilon}_{inj} = 8Q_v / (\pi D_{or}^3)$. Ces temps de relaxation sont mesurés par la procédure décrite en section 3.3.3.6 et caractérisent le liquide ayant subi une éventuelle dégradation dans l'injecteur sans avoir encore été dégradé par l'écoulement élongationnel prenant place dans le REC. On constate dans un premier temps que t_{ri} est systématiquement plus élevé pour la solution S5 que pour la solution S8. La solution S8 est caractérisée par des chaînes moléculaires plus longues et un plus grand volume pénétré. De ce fait, cette solution est plus susceptible d'être dégradée lors du processus d'injection. On constate ensuite que t_{ri} diminue avec le taux de déformation. Pour les deux solutions, cette diminution semble linéaire.

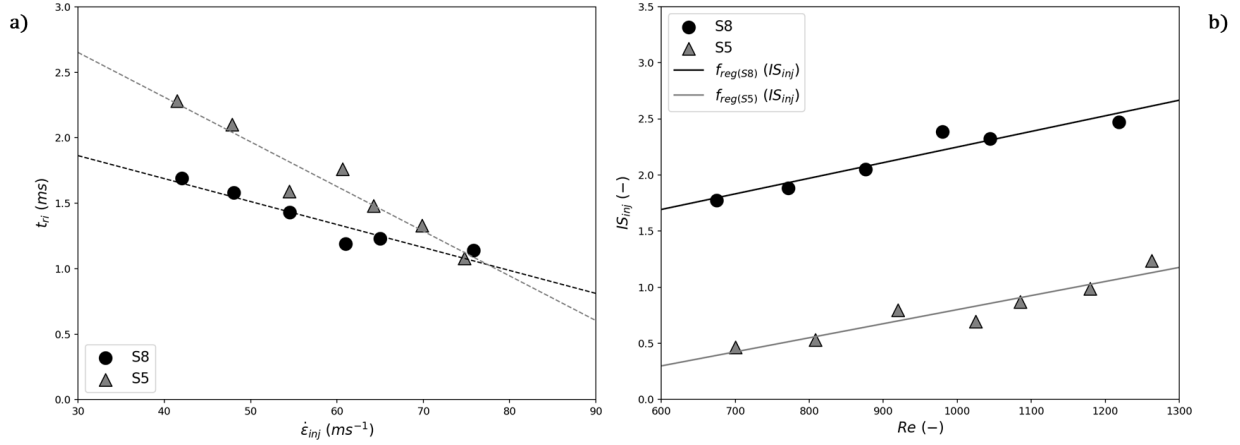


FIGURE 3.34 – Tracés : a) du temps de relaxation t_{ri} en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) de l'indice de scission IS_{inj} en fonction du nombre de Reynolds Re pour S5 et S8.

Ces résultats sont mis en perspective avec ceux obtenus expérimentalement par Merrill et Leopaïrat (1980). Dans leurs expériences, les auteurs font passer des liquides viscoélastiques à plusieurs reprises dans un injecteur. Les distributions de masses molaires sont mesurées à chacun des passages, permettant une analyse de la dégradation des fluides par le processus d'injection. Parmi leurs résultats (énoncés en section 1.3.4.1), on note que cette dégradation est dépendante de la vitesse d'injection V_{inj} de façon linéaire et de la masse molaire initiale du liquide M_0 par une loi de puissance selon la formulation :

$$\frac{d \left[\frac{\overline{M}_{v,0}}{\overline{M}_v} - 1 \right]}{dV_{inj}} = A \overline{M}_{v,0}^{2.23} \quad (3.69)$$

où $\overline{M}_{v,0}$ et \overline{M} sont les masses molaires moyennes en nombre du liquide avant et après injection, respectivement. A est une constante. La quantité $\overline{M}_0 / \overline{M} - 1$ est appelé *indice de scission*. Les distribution de masse molaires des solutions n'ayant pas été mesurées au cours des expériences de thèse, cette quantité n'est pas accessible. Néanmoins, selon le modèle de Zimm décrit en section 1.2.2.1 :

$$M_v = \left(\frac{t_{r,Zimm} k_B T M_v'^{3\nu}}{\mu_s N'^{3\nu} b^3} \right)^{\frac{1}{3\nu}} := f_M(t_r) \quad (3.70)$$

Les approximations suivantes sont réalisées :

$$\overline{M}_{v,0} = f_M(t_{r,Zimm}) \quad (3.71)$$

$$\overline{M}_v = f_M(t_{ri}) \quad (3.72)$$

Dans ces approximations :

- Le temps de relaxation de Zimm $t_{r,Zimm}$ s'assimile au temps de relaxation de la solution avant injection.
- Le temps de relaxation t_{ri} s'assimile au temps de relaxation de la solution une fois le processus d'injection terminé.
- Les temps de relaxation $t_{r,Zimm}$ et t_{ri} sont supposés être caractéristiques du comportement moyen adopté par l'ensemble des polymères contenus par la solution.

En exprimant la vitesse d'injection au moyen du nombre de Reynolds, l'équation (3.69) se réécrit :

$$\frac{dIS_{inj}}{dRe} = A \frac{\mu_0}{\rho_{or}} \left(\frac{k_B T M_v'^{3\nu} t_{r,Zimm}}{\mu_s N'^{3\nu} b^3} \right)^{\frac{2.23}{3\nu}} \quad (3.73)$$

avec IS_{inj} l'indice de scission propre au processus d'injection, défini comme :

$$IS_{inj} = \left(\frac{t_{r,Zimm}}{t_{ri}} \right)^{\frac{1}{3\nu}} - 1 \quad (3.74)$$

L'équation (3.73) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} IS_{inj} &= A \frac{\mu_0}{\rho_{or}} \left(\frac{k_B T M_v'^{3\nu}}{\mu_s N'^{3\nu} b^3} \right)^{\frac{2.23}{3\nu}} Re + C \\ &:= A B Re + C \end{aligned} \quad (3.75)$$

Les données graphiques contenues dans les travaux de Merrill et Leopairat (1980) permettent d'obtenir $A \approx 2,918.10^{-16}$. En Figure 3.34-b), l'indice de scission IS_{inj} est tracé en fonction du nombre de Reynolds Re pour les points de fonctionnement propres aux solutions S8 et S5. Cet indice augmente avec le nombre de Reynolds, confirmant la tendance des polymères à se dégrader de façon plus importante lorsque la vitesse d'injection augmente. Une régression de type affine est tracée pour les deux séries de mesures. Dans les deux cas, cette régression satisfait correctement les mesures expérimentales. Ces régressions s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_{reg(S8)}(IS_{inj}) &= s_{(S8)} A B_{(S8)} Re + C_{(S8)} \\ f_{reg(S5)}(IS_{inj}) &= s_{(S5)} A B_{(S5)} Re + C_{(S5)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

où $s_{(S8)}$ et $s_{(S5)}$ sont deux corrections appliquées à la constante A provenant des travaux de Merrill et Leopairat (1980). Ces deux quantités valent :

$$\begin{aligned} s_{(S8)} &\approx 457 \\ s_{(S5)} &\approx 489 \end{aligned}$$

Ces valeurs sont élevées, indiquant un large écart avec le facteur A déterminé par Merrill et Leopairat (1980). L'origine de cet écart est inconnue dans l'état actuel de ces recherches. En revanche, les valeurs $s_{(S8)}$ et $s_{(S5)}$ sont très proches l'une de l'autre, validant la nature de la corrélation liant l'indice de scission des polymères à la masse molaire initiale de la solution et la vitesse d'injection (Eq. 3.69).

3.4.3 Développement de l'instabilité

En Figure 3.35, les diamètres moyens des jets non-perturbés $\langle D_{jet} \rangle$, définis en section 3.3.3.3, sont tracés pour tous les points de fonctionnement en fonction du nombre de Reynolds Re . Ces diamètres de jets sont proches du diamètre de sortie de buse d'injection D_{or} ; l'écart maximal relevé entre ces deux diamètres est de $15 \mu m$. Pour les points de fonctionnement de solution S06, les mesures de $\langle D_{jet} \rangle$ sont systématiquement inférieures à D_{or} , contrairement aux points de solution S1, S5 et S8. On note une diminution globale de $\langle D_{jet} \rangle$ avec l'augmentation du nombre de Reynolds pour les solutions S06 et S5. Cette tendance n'est pas observée pour les solutions S1 et S8.

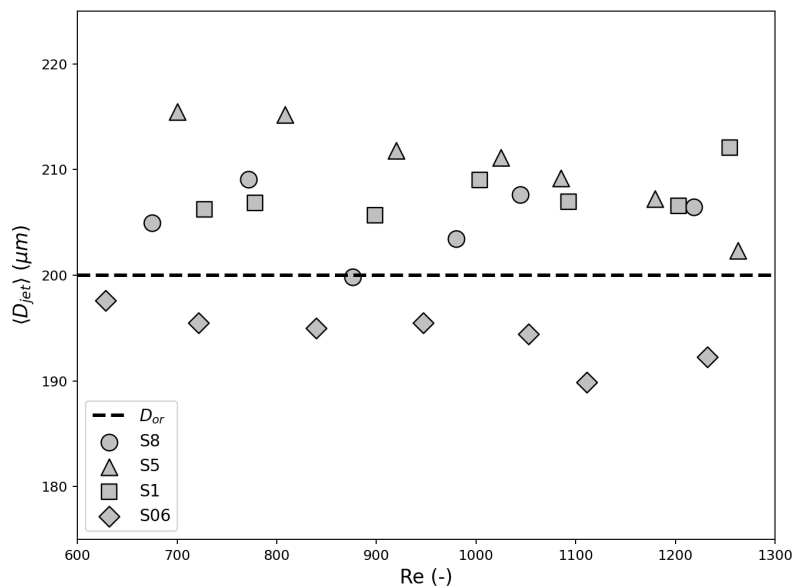


FIGURE 3.35 – Tracé des diamètres moyens des jets non-perturbés $\langle D_{jet} \rangle$ en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement étudiés. Comparaison avec le diamètre d’orifice D_{or} .

En ce qui concerne les taux de croissance et amplitudes initiales de déformation du jet, les mesures effectuées sur les évolutions temporelles de $\langle d_M \rangle$, $\langle d_R \rangle$ et $\langle \eta \rangle$ montrent que :

- Les taux de croissance α_R et α_η sont proches et légèrement inférieurs à α_M .
- L’amplitude β_R est légèrement supérieure à β_M . L’amplitude β_η avoisine $(\beta_R + \beta_M)/4$, ce qui est cohérent au vu de la définition de $\langle \eta \rangle$.

Les observations énoncées ci-avant sont valables pour la majorité des points de fonctionnement étudiés. Les différences de taux de croissance relevées peuvent s’expliquer par les contributions non-linéaires à la déformation du jet. Les travaux théoriques effectués en section 2.3.3.2 (voir la Figure 2.11) permettent les prédictions suivantes :

- Lorsque l’interface du jet adopte la configuration II, $\alpha_M < \alpha_R$.
- Lorsque l’interface du jet adopte la configuration III, $\alpha_M > \alpha_R$.

D’autre part, les travaux de simulations numériques sur jets capillaires de Dumouchel *et al.* (2017) ont également eu pour résultat : $\alpha_M > \alpha_R$. Dans leurs travaux, le faible écart des taux de croissance α_M avec les prédictions de la théorie de Rayleigh laisse supposer que l’échelle d_M , au travers de α_M , est l’échelle la plus appropriée pour caractériser le développement des instabilités. Cependant, la procédure de détermination de la longueur d’onde de perturbation appliquée sur des images synthétiques a démontré que la longueur d’onde λ_2 , déterminée à partir d’une érosion à l’échelle d_2 (très proche de d_M), constitue une sur-estimation de la mesure de longueur d’onde.

En Figure 3.36, les longueurs d'onde moyennes $\langle \lambda_1 \rangle$, $\langle \lambda_2 \rangle$ et $\langle \lambda_{eq} \rangle$ sont tracées en fonction de la coordonnée z pour les points de fonctionnement **S06QC** et **S5QA**. Dans la première partie du régime de Rayleigh, l'amplitude de déformation de la surface du jet est trop faible si bien que la procédure ne peut être correctement appliquée. Les premières positions de mesures sont caractérisées par $\langle \lambda_2 \rangle > \langle \lambda_1 \rangle$. La différence entre ces deux longueurs d'onde indique que la déformation de la surface du jet n'est pas sinusoïdale. Cette différence décroît progressivement avec z . A la fin du régime de Rayleigh, $\langle \lambda_1 \rangle \approx \langle \lambda_2 \rangle$ pour **S5QA**, indiquant une sinusoïdalité de la déformation. Par la suite, $\langle \lambda_1 \rangle > \langle \lambda_2 \rangle$, indiquant la formation de structures de perles sur ficelle. En $z = Z_{REC}^i$, la différence $\langle \lambda_1 \rangle - \langle \lambda_2 \rangle$ semble se stabiliser. Ce comportement est globalement observé sur les points de fonctionnements S5 et S8. En revanche, les solutions peu viscoélastiques S06 et S1 ne vérifient pas ce comportement. Pour ces solutions, la décroissance de la différence $\langle \lambda_1 \rangle - \langle \lambda_2 \rangle$ est moins marquée, et pour la plupart des points de fonctionnement, l'égalité $\langle \lambda_1 \rangle = \langle \lambda_2 \rangle$ n'est pas observée. Ce résultat est cohérent avec le fait que le REC est quasi-inexistant pour ces jets. Concernant l'évolution de $\langle \lambda_{eq} \rangle$ par rapport à z , les résultats montrent une croissance ou une stagnation, indépendamment de la vitesse d'injection et de la solution. La longueur d'onde retenue dans la suite du document est noté simplement λ et correspond à la moyenne des longueurs d'onde équivalentes mesurées dans le régime de Rayleigh.

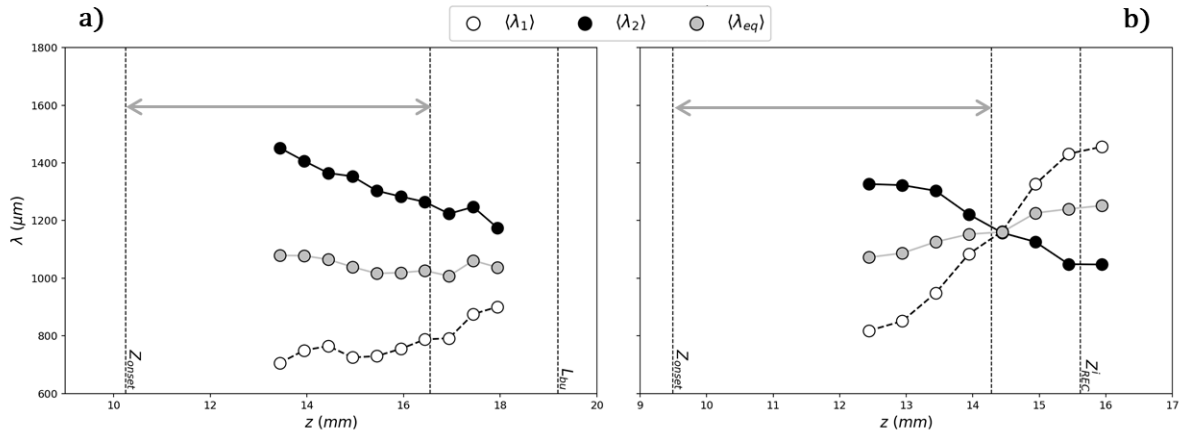


FIGURE 3.36 – Tracé des longueurs d'onde moyennes $\langle \lambda_1 \rangle$, $\langle \lambda_2 \rangle$ et $\langle \lambda_{eq} \rangle$ en fonction de la coordonnée z pour les points de fonctionnement : a) **S06QC** et b) **S5QA**. La zone spatiale contenant une flèche correspond au régime de Rayleigh.

Le graphe de dispersion présenté en Figure 3.37 présente les taux de croissance α_M adimensionnés par le temps capillaire t_c en fonction du nombre d'onde adimensionné $k = 2\pi/\lambda$ par le rayon du jet non-perturbé $\langle D_{jet} \rangle/2$. La relation de dispersion (2.71) a été résolue pour le cas Newtonien avec un nombre d'Ohnoesorge $Oh_0 = 0.178$ d'une part et pour le point de fonctionnement **S5QA** d'autre part. L'écart relatif maximal relevé entre les valeurs de la solution associé au mode instable est inférieur à 1.5 % pour tous nombres d'onde k confondus. Ce calcul théorique indique que les quatres solutions testées devraient présenter des taux de croissance et des longueurs d'ondes comparables. Au vu de ce graphe de dispersion, cette attente est vérifiée, excepté pour la solution S1 pour laquelle une déviation vers des nombres d'onde plus élevés est notable. Le mode optimal théorique est caractérisé par $k_{opt} \approx 0.69$ et $\alpha_{opt} \approx 0.32$.

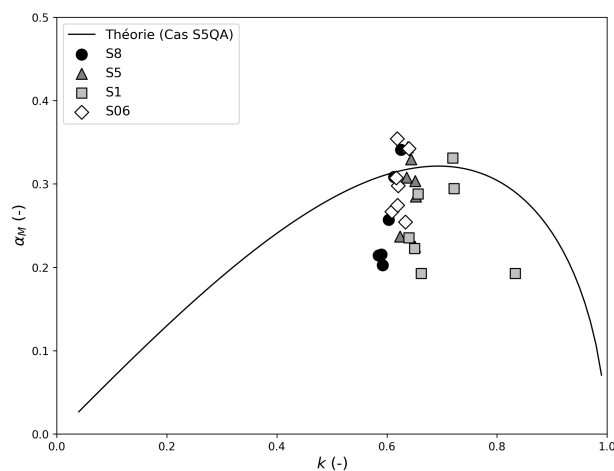


FIGURE 3.37 – Graphe de dispersion présentant les taux de croissance adimensionnés α_M en fonction du nombre d'onde adimensionné k .

En Figure 3.38-a) et 3.38-b), les taux de croissance α_M et longueurs d'onde adimensionnées λ sont tracés en fonction du nombre de Reynolds, respectivement. On constate qu'en grande partie :

- Les taux de croissance diminuent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. D'autre part, ils sont inférieurs à la valeur théorique α_{opt} associée au mode optimal. Ce constat peut s'expliquer notamment par l'influence des modes subdominants qui, étant des modes stables, ne peuvent qu'abaisser la valeur d'un taux de croissance mesuré.
- Les longueurs d'onde augmentent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. D'autre part, elles sont supérieures à la valeur théorique λ_{opt} associée au mode optimal.

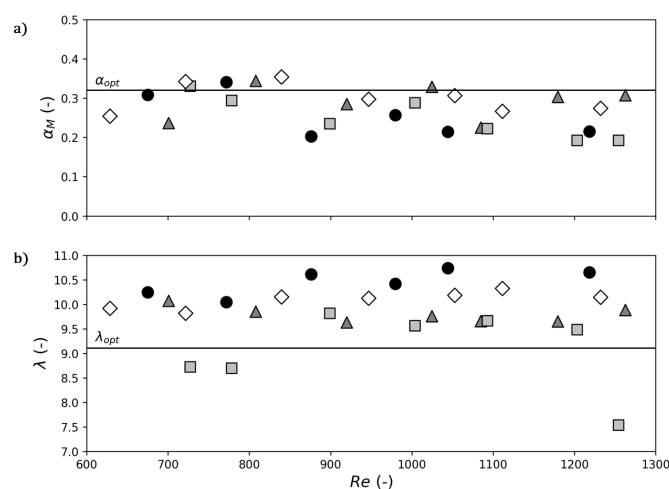


FIGURE 3.38 – Tracés : a) des taux de croissance α_M et b) des longueurs d'onde λ en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement.

Dans leurs travaux théoriques, Goren et Gottlieb (1982) démontrent que l'existence d'une *tension axiale* non-relaxée lors du déclenchement des instabilités abaisse le taux de croissance et élève la longueur d'onde associés au mode optimal de l'instabilité. Ainsi, l'existence d'une tension axiale pourrait expliquer les écarts relevés entre les valeurs expérimentales et théoriques de taux de croissance et de longueur d'onde. La tension axiale est une force agissant colinéairement à l'axe du jet. Selon les travaux de Gavis et Gill (1956), la tension axiale peut s'exprimer sous la forme d'une somme de deux contributions :

$$T_{jet}(z) = T_\sigma + Te(z) \quad (3.77)$$

où T_σ est une contribution constante provenant directement de la création de l'interface liquide/gaz du jet. Cette contribution vaut σ/a soit 1 après adimensionnalisation. $Te(z)$ est une contribution liée à la relaxation des contraintes axiales lors de la création du jet. Selon Goren et Gottlieb (1982), il s'agit d'une fonction décroissante de la coordonnée z qui se formule par :

$$Te(z) = T_0 \exp \left[-\frac{z}{t_r V_{jet}} \right] \quad (3.78)$$

où T_0 est une constante. Ainsi, la contribution variable $Te(z)$ diminue de façon plus rapide lorsque le temps de relaxation t_r augmente et lorsque V_{jet} augmente. Selon Bousfield *et al.* (1986), la constante T_0 dépend à la fois de la géométrie du jet, des propriétés du liquide et des conditions d'injection par la formulation :

$$T_0 = \frac{32\mu(t_r - t_D)V_{jet}^2}{3\sigma\langle D_{jet} \rangle} \quad (3.79)$$

La constante T_0 est d'autant plus importante que la solution est viscoélastique et que la vitesse du jet est importante.

Selon Goren et Gottlieb (1982) et Christanti et Walker (2001), le déclenchement de l'instabilité capillaire se produit dès lors que la tension axiale $T_{jet}(z)$ est suffisamment faible. Il ne semble qu'aucune valeur numérique n'ait été proposée dans la littérature pour quantifier cette valeur. Néanmoins, la formulation de cette tension axiale telle que proposée ci-avant préconise une augmentation de Z_{onset} avec le temps de relaxation t_r et avec la vitesse du jet V_{jet} . En Figure 3.40, $Te(Z_{onset})$ est tracée en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement. Cette quantité a été déterminée à partir des équations (3.78) et (3.79) avec $t_r = t_{ri}$ pour les solutions S5 et S8 et avec $t_r = t_{r,Zimm}$ pour les solutions S06 et S1. On constate que pour les points propres à la solution S5, cette tension est proche de l'unité (légèrement inférieure globalement), indiquant que pour ces jets, l'instabilité capillaire se déclenche lorsque la contribution variable de la tension axiale est comparable à sa contribution constante, T_σ . C'est également le cas pour les points S8 caractérisés par les deux plus faibles débits d'injection. En revanche, les quatre débits suivant ne vérifient pas cette observation. Pour ces derniers débits, l'instabilité capillaire se déclenche alors que la contribution variable vaut encore plus du triple de T_σ . On constate en Figure 3.40 que pour les solutions S06 et S1, la contribution variable de la tension axiale est complètement ou quasiment complètement relaxée lors du déclenchement de l'instabilité capillaire.

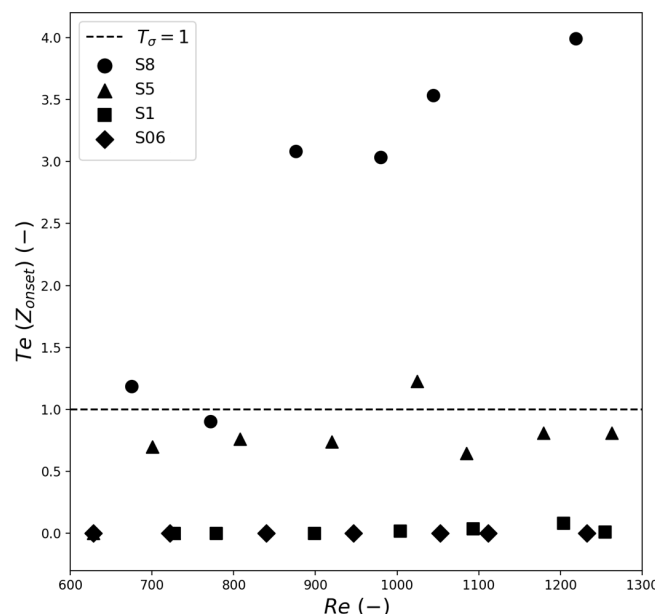


FIGURE 3.39 – Tracé de $Te(Z_{onset})$ en fonction du nombre de Reynolds Re .

En Figure 3.40, trois classes de longueurs sont tracées :

- La longueur $L_{bu,theo} = t_{bu2} t_c V_{jet}$, où t_{bu2} est la longueur de rupture théorique calculée en section 2.3.3.1 par l'exploitation des résultats de l'analyse faiblement non-linéaire du cas d'application D avec $Oh_0 = 0.02$. Ce cas d'application est le plus proche des points de fonctionnement étudiés expérimentalement.
- La longueur $Z_{REC}^i - Z_{onset}$ pour les solutions S5 et S8. Cette longueur correspond à la longueur du RIC.
- La longueur $\langle L_{bu} \rangle - Z_{onset}$ pour les solutions S06 et S1. Ces solutions ne présentant pas ou quasiment pas de REC, on peut affirmer que cette longueur correspond approximativement à celle du RIC.

Une courbe point-tillée d'équation linéaire par rapport au nombre de Reynolds Re a également été tracée. On remarque que les points de même classe et de même solution présentent globalement un alignement parallèle à cette courbe. Cette première observation indique que les différentes classes sont relativement représentative du RIC. Les marqueurs bleus sont alignés entre eux, excepté pour la solution S06 qui présente des $L_{bu,theo}$ moins importantes. Pour S06 et S8, les marqueurs rouge et bleu sont relativement proches (sauf pour le point de fonctionnement S8QD). Pour un certain nombre de points de fonctionnement, les marqueurs rouges et bleus sont proches. Ceci indique une bonne corrélation entre $L_{bu,theo}$ et $Z_{REC}^i - Z_{onset}$ pour les solutions viscoélastiques et entre $L_{bu,theo}$ et $\langle L_{bu} \rangle - Z_{onset}$ pour les solutions peu viscoélastiques. Pour la majorité des cas, la longueur $L_{bu,theo}$ est la plus élevée. Cet écart peut provenir d'une sur-estimation de Z_{onset} .

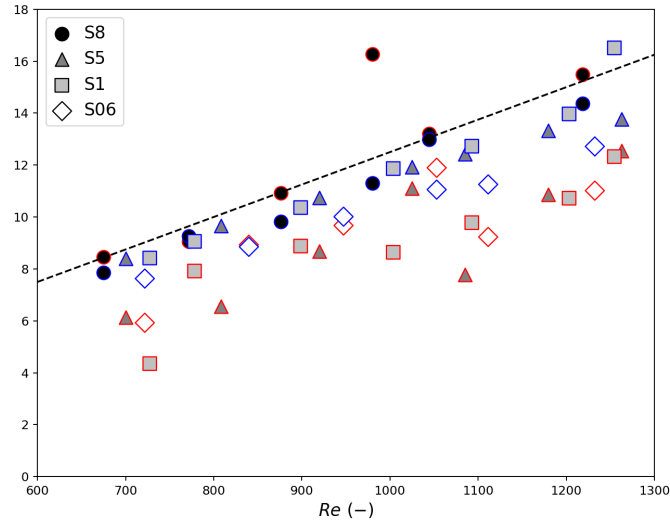


FIGURE 3.40 – Tracé de la longueur $L_{bu,theo}$ (en bleu), de $Z_{REC}^i - Z_{onset}$ (en rouge) pour les solutions S5 et S8, et de $\langle L_{bu} \rangle - Z_{onset}$ (en rouge) pour les solutions S06 et S1. La ligne point-tillée est la courbe d'équation $y = 0.0125Re$.

3.4.4 Propriétés élongationnelles et dégradation dans le REC

En Figure 3.41-a), le temps de relaxation t_{rf} associé à la fin du REC est tracé en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ pour les solutions S5 et S8. On constate dans un premier temps que la solution S5 présente des t_{rf} plus élevés que la solution S8. Ce résultat indique qu'après deux processus de dégradation, l'un dans l'injecteur et l'autre au cours du REC, la solution S8 apparaît en fin de parcours comme la solution la moins viscoélastique. On constate dans un second temps une diminution des temps t_{rf} avec le taux de déformation $\dot{\epsilon}_{inj}$.

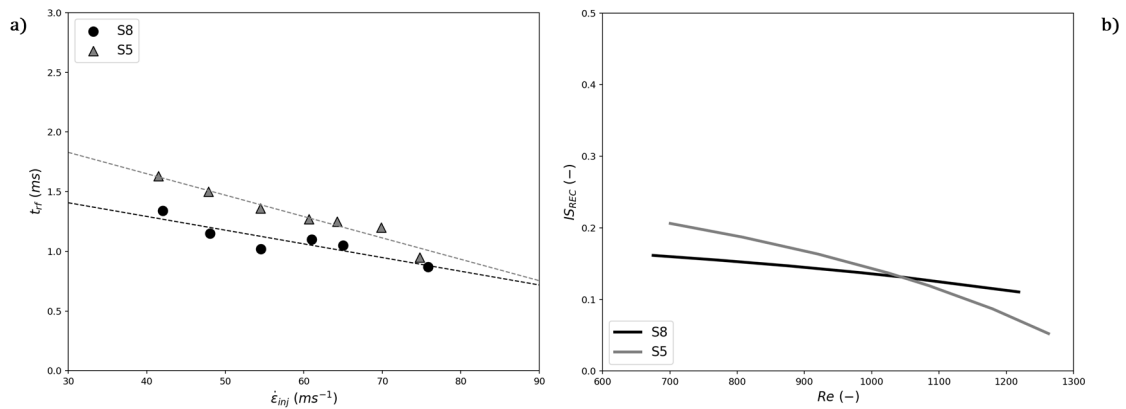


FIGURE 3.41 – Tracé : a) du temps de relaxation t_{rf} en fonction de $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) du taux de scission IS_{REC} en fonction du nombre de Reynolds Re pour les solutions S8 et S5.

En analogie avec le mécanisme de dégradation relatif au processus d'injection (section 3.4.2), un indice de scission relatif au REC est introduit :

$$IS_{REC} = \left(\frac{t_{ri}}{t_{rf}} \right)^{\frac{1}{3\nu}} - 1 \quad (3.80)$$

Afin de mesurer cet indice, les temps de relaxation t_{ri} et t_{rf} ont été réévaluées à partir des régressions affines $t_{ri} = f(\dot{\epsilon}_{inj})$ (Figure 3.34-a)) et $t_{rf} = f(\dot{\epsilon}_{inj})$ (Figure 3.41-a)). Pour chaque point de fonctionnement, une correspondance entre le taux de déformation $\dot{\epsilon}_{inj}$ et le nombre de Reynolds Re est connue. Ainsi, l'indice de scission IS_{REC} est tracé en fonction du nombre de Reynolds en Figure 3.41-b). On remarque pour les deux solutions une diminution de cet indice avec le nombre de Reynolds. Ce résultat est cohérent : pour les jets de plus grande vitesse, les polymères ont été sujets à plus de dégradation au cours de l'injection, et offrent donc moins de potentiel à une dégradation supplémentaire. Cette interprétation se confirme au vu des valeurs des indices de scission, qui sont plus faibles dans le REC qu'au cours de l'injection. Aux plus faibles Re , l'indice IS_{REC} est plus élevé pour S5 que pour S8. Ce résultat confirme l'observation précédente, sachant $IS_{inj}(S5) < IS_{inj}(S8)$ (Figure 3.34-b)). En revanche, à partir de $Re \approx 1050$, l'indice de dégradation IS_{REC} devient plus élevé pour S8 que pour S5, alors que l'inégalité $IS_{inj}(S5) < IS_{inj}(S8)$ est toujours vérifiée. Le raisonnement effectué jusqu'alors ne suffit pas à expliquer ce comportement. L'exploitation de ces résultats n'est pas complète. La mesure des distributions de masses molaires des polymères avant injection, après injection et après le régime élasto-capillaire permettrait de mieux caractériser la scission des polymères et de mieux comprendre les mécanismes de dégradations relatifs à l'injection et au REC.

En Figure 3.42-a), les coefficients de dégradation temporels γ sont tracés en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ pour tous les cas de fonctionnement propres aux solutions S8 et S5. Aucune tendance particulière ne semble se dégager de ces résultats. Cela semble indiquer que le mécanisme de dégradation, son intensité mise à part, ne dépend ni des propriétés du liquide, ni de la vitesse d'injection.

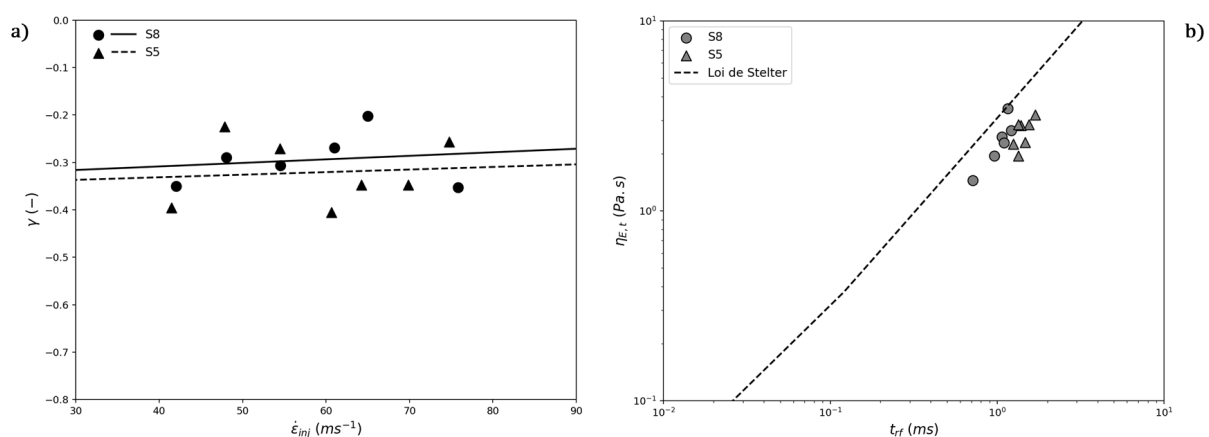


FIGURE 3.42 – Tracé : a) du coefficient de dégradation temporel γ en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) de la viscosité élongationnelle terminale $\eta_{E,t}$ en fonction du temps de relaxation t_{rf} pour les points de fonctionnement S8 et S5.

En Figure 3.42-b), la viscosité élongationnelle terminale $\eta_{E,t}$ est tracée en fonction du temps de relaxation t_{rf} associée à la fin du REC. Comme attendu, la viscosité élongationnelle terminale augmente avec le temps de relaxation. Les mesures réalisées sur les solutions S5 et S8 décrivent une tendance proche de la loi empiriquement établie par Stelter *et al.* (2002), cette loi s'écrivant :

$$\eta_{E,t} = 3074.9t_r + 0.003 \quad (3.81)$$

L'écart entre les points expérimentaux et cette loi indiquerait une sur-estimation de t_{rf} ou une sous-estimation de $\eta_{E,t}$. Néanmoins, on note qu'un écart du même ordre de grandeur est obtenu par Tirel (2019) avec une solution de même masse molaire et concentration que S8 (Figure 1.24).

3.4.5 Distributions de taille de gouttes et mécanismes de coalescence

Comme présenté en section 3.3.4.3, la détermination des distributions de diamètres de gouttes par les méthodes multi-échelles et directe amènent des résultats comparables concernant les gouttes dites principales. La méthode directe reste plus appropriée pour la mesure des gouttes de plus faible diamètre (gouttes satellites et secondaires). Pour chacun des points de fonctionnement, les distributions obtenues montrent deux classes de gouttes :

- Une classe de gouttes principales caractérisée par un diamètre moyen D_{10}^p .
- Une classe de gouttes de moindres diamètres qui, après visualisation d'images, sont identifiées comme étant des gouttes satellites. En effet, celles-ci sont pour la plupart formées au proche voisinage de la rupture et non pas en amont comme il aurait été le cas pour des gouttes secondaires. Cette classe de gouttes se caractérise par un diamètre moyen D_{10}^{sat} et une proportion p^{sat} calculée parmi l'ensemble des gouttes diagnostiquées.

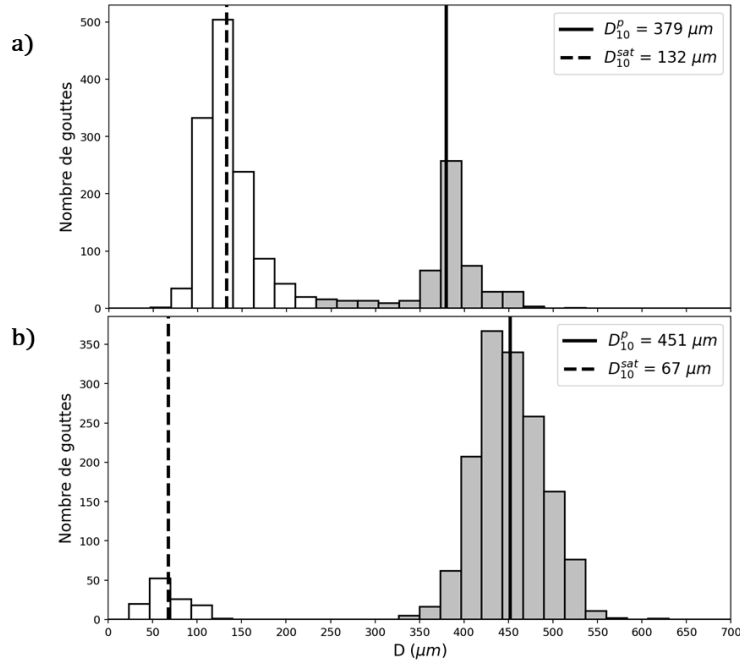


FIGURE 3.43 – Tracé des distributions de tailles de gouttes pour a) le cas S1QA et b) le cas S5QC.

Deux exemples de distributions de gouttes obtenues par la méthode directe sont présentés en Figure 3.43. La Figure 3.43-a) est représentative des distributions propres aux solutions S1 et S06, en comparaison avec la Figure 3.43-b) qui est représentative des distributions propres aux solutions S8 et S5. Sur la première distribution, les deux classes se joignent et la présence de cette jointure peut être assimilée à la présence de gouttes secondaires dans le spray final. Cette jointure n'est pas présente pour les solutions viscoélastiques comme en témoigne la seconde distribution. Cette observation est en accord avec le résultat théorique obtenu en section 2.3.3.2 : l'ajout de viscoélasticité rend moins probable la formation de gouttes secondaires. Ce résultat est par ailleurs vérifié par les distributions obtenues expérimentalement par Christanti et Walker (2001). Dans un second temps, on constate que la proportion de gouttes satellites est bien plus importante pour le cas S1QA que pour le cas S5QC. Ce constat est commenté par la suite pour l'ensemble des points de fonctionnement.

En Figures 3.44-a) et 3.44-b), les diamètres moyens de gouttes principales D_{10}^p et de gouttes satellites D_{10}^{sat} adimensionnés par le diamètre du jet non perturbé $\langle D_{jet} \rangle$ sont tracés en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement. Les prédictions faites à partir de la théorie linéaires annoncent $D_{10}^p / \langle D_{jet} \rangle = 1.89$. Sur la Figure 3.44-a), on constate que cette valeur est dépassée pour les solution S5 et S8 ; ce n'est pas le cas des solutions peu viscoélastiques S06 et S1. Concernant les diamètres de gouttes satellites, ils sont plus élevés pour les solutions peu viscoélastiques. Ces résultats sont en accord avec ceux de Christanti et Walker (2001), qui observent que l'ajout de viscoélasticité augmente le diamètre moyen des gouttes principales et diminue celui des gouttes satellites. La dépendance des diamètres de gouttes principales et satellites envers le nombre de Reynolds n'est pas forte, ce qui est cohérent avec la théorie. On remarque toutefois une légère augmentation de D_{10}^p et une légère diminution de D_{10}^{sat} en augmentant le nombre de Reynolds.

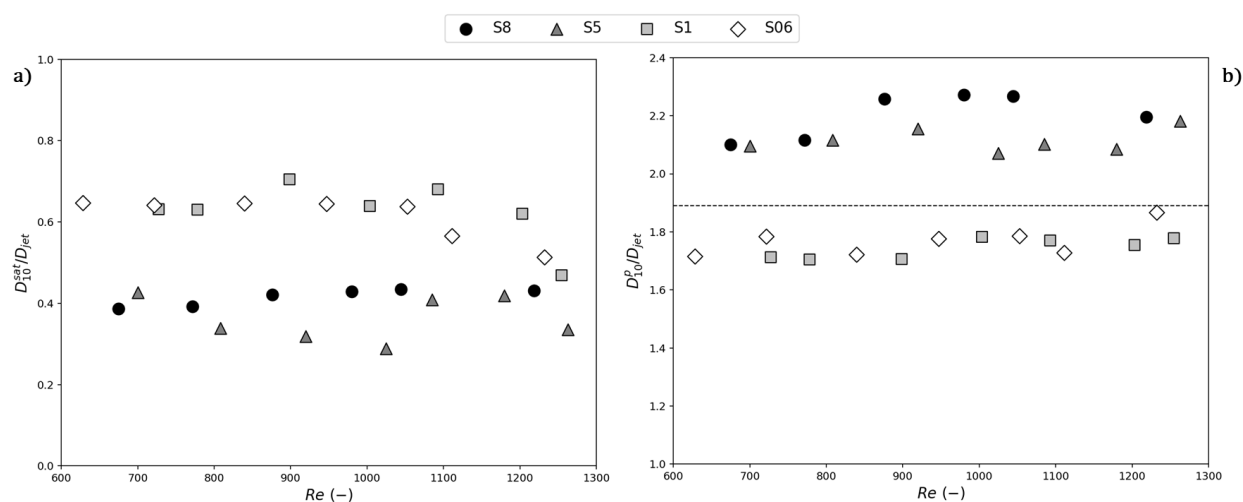


FIGURE 3.44 – Tracés : a) des diamètres moyens de gouttes principales D_{10}^p et b) diamètres moyens de gouttes satellites D_{10}^{sat} adimensionnés par $\langle D_{jet} \rangle$, en fonction du nombre de Reynolds Re .

En Figure 3.45-a), la proportion de gouttes satellites p^{sat} est tracée en fonction du nombre de Reynolds. Cette proportion est environ quatre fois moins importante pour les solutions S5 et S8 que pour les solutions S06 et S1. Ce résultat est en accord avec les travaux de Christanti et Walker (2001) qui montrent une diminution de la production de gouttes satellites avec l'ajout de viscoélasticité. Le nombre de Reynolds ne semble pas influencer la valeur de cette proportion.

En Figure 3.45-b), le diamètre moyen adimensionné des gouttes principales D_{10}^p est tracé en fonction du pourcentage de coalescence maximal ξ_{max} pour les solutions S5 et S8. On constate que le diamètre des gouttes principales augmente avec le pourcentage de coalescence. Aucune corrélation n'a été identifiée entre l'occurrence du mécanisme de coalescence et la proportion de gouttes satellites.

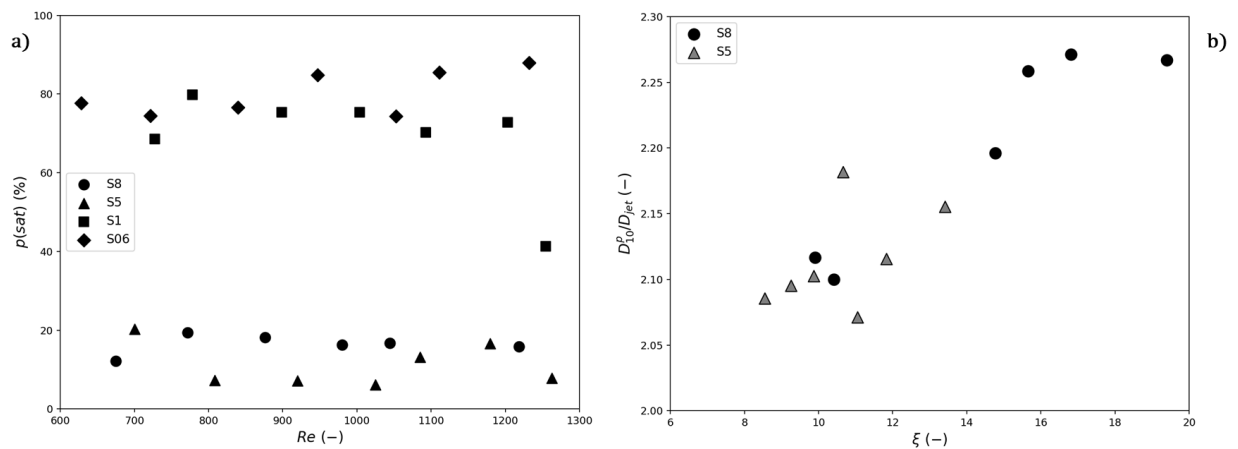
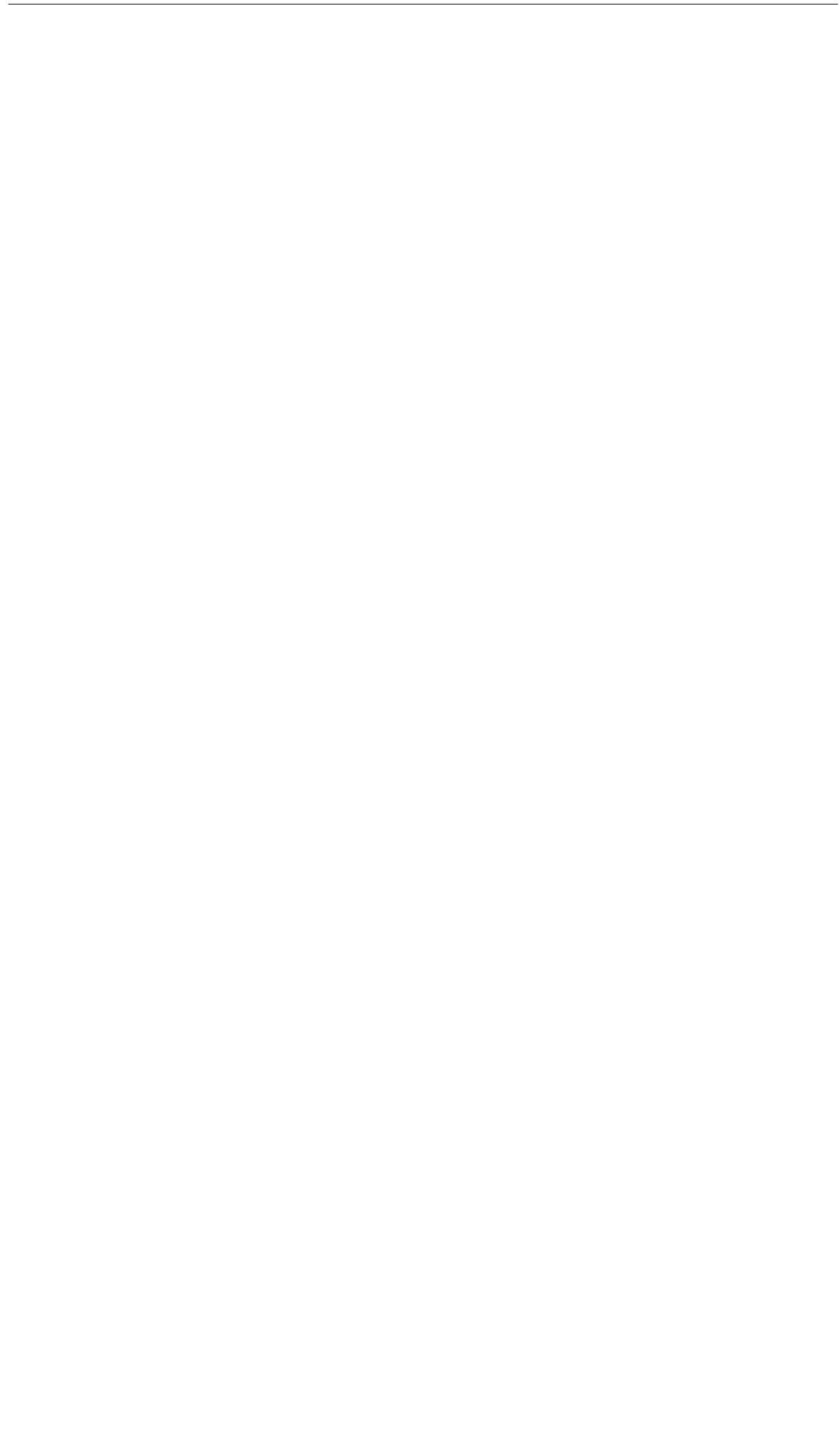


FIGURE 3.45 – Tracé : a) de la proportion de gouttes satellites p^{sat} en fonction du nombre de Reynolds Re et b) du diamètre moyen adimensionné des gouttes principales $D_{10}^p / \langle D_{jet} \rangle$ par rapport au pourcentage de coalescence maximal ξ_{max} .



Chapitre 4

Conclusions et Perspectives

La caractérisation de l'influence de la viscoélasticité sur le processus d'atomisation d'un jet libre basse-vitesse a été réalisée au cours de cette thèse. Deux approches ont été adoptées : l'une théorique et l'autre expérimentale.

L'**approche théorique** a consisté en l'analyse faiblement non-linéaire de stabilité temporelle d'une colonne cylindrique sujette à une perturbation. Cette analyse s'inspire principalement des travaux de García et González (2008) et de Renoult *et al.* (2018) traitant du cas Newtonien. La formulation du problème ainsi que sa résolution ont été effectuées indépendamment du type de la perturbation : pure-déformation (déformation de l'interface) ou pure-impulse (perturbation du débit). La résolution du problème posé met en œuvre la méthode de perturbation aux petites amplitudes. Cette méthode consiste à exprimer toutes les grandeurs physiques du problème sous la forme d'une série de puissance du petit paramètre de perturbation initiale. De par la nature des équations décrivant le problème, chaque grandeur physique s'exprime selon une dépendance temporelle exponentielle fonction d'un taux de croissance. Ces deux éléments de méthodologie permettent de subdiviser le problème général en sous-problèmes selon les non-linéarités présentes dans les équations régissant le problème général. Ainsi, un sous-problème linéaire et un sous-problème faiblement non-linéaire ont été distingués. Pour chacun de ces sous-problèmes, deux types de résolution ont été introduits :

- La résolution du problème aux valeurs propres. Son objectif est de déterminer sous quelles conditions le jet évolue de façon instable. La résolution de ce problème repose sur la détermination d'une relation de dispersion reliant le taux de croissance temporel aux autres paramètres du problème (paramètres propres à la géométrie de l'état de base, à la perturbation et aux propriétés du liquide). Cette résolution fait intervenir les équations d'état et les conditions de saut du problème.
- La résolution du problème aux valeurs initiales. Son objectif est d'obtenir une expression complète des grandeurs physiques du problème posé. Cette résolution fait intervenir les résultats de la résolution du problème aux valeurs propres ainsi que les conditions initiales du problème.

De façon globale, la résolution du problème comporte d'importantes similitudes avec le cas Newtonien analogue, traité par Renoult *et al.* (2018). Les principales déviations reposent sur deux points :

- En raison de la nature dynamique de l'équation constitutive du liquide viscoélastique, la nature de la relation de dispersion est changée. Le nombre de solutions non-identiquement nulles passe de deux pour le cas Newtonien à trois pour le cas viscoélastique. L'existence d'une solution supplémentaire dans le cas viscoélastique implique la nécessité d'une condition initiale supplémentaire pour la fermeture du problème aux valeurs initiales.
- En raison de la nature non-linéaire de l'équation constitutive du liquide viscoélastique, d'importantes complications de calculs sont ajoutées à la résolution du problème aux valeurs initiales.

L'analyse faiblement non-linéaire effectuée dans cette thèse se distingue de la littérature sur les deux points principaux suivants :

- Le problème a été formulé et résolu en ne présupposant pas d'un choix spécifique concernant le type de perturbation appliquée sur l'état de base.
- Les modes stables (au nombre de deux) appelés aussi modes subdominants ont été considérés dans l'intégralité de l'analyse, alors que ces modes ont habituellement été négligés par le passé.

Les résultats de cette analyse ont été exploités par l'étude de l'évolution temporelle de l'interface d'une colonne de liquide sujette à une perturbation initiale de type pure-déformation. Plusieurs points de fonctionnement ont été testés, faisant varier les propriétés du liquide et les caractéristiques de la perturbation initiale. Des prédictions de temps de rupture de ces jets et de la formation de gouttes secondaires ont été réalisées. Les résultats principaux montrent que pour un jet libre régi par le mode optimal (i.e. le plus instable) de perturbation :

- L'ajout de viscoélasticité réduit le temps de rupture du jet.
- L'ajout de viscoélasticité tend à réduire la probabilité de formation de gouttes secondaires.

Par ailleurs, l'importance relative de la prise en compte des modes stables a été caractérisée. La conclusion de cette caractérisation n'est pas unanime mais pour un nombre non-négligeable d'applications réalisées, les résultats montrent que la prise en compte des modes subdominants est nécessaire aux prédictions évoquées précédemment.

En dernier lieu, la limite de cette étude a été caractérisée au travers du suivi temporel du volume de liquide contenu dans le jet. Ce volume n'est pas conservé ; il augmente au cours du temps. Les résultats montrent que les prédictions évoquées précédemment sont réalisées alors que le volume du jet a déjà augmenté de 5 % par rapport à son volume initial. En conséquence, les principales conclusions énoncées précédemment doivent être considérées avec modération.

Les perspectives de travail qui permettraient de compléter cette approche théorique sont :

- Une exploitation des résultats considérant un mode de perturbation pure-impulse permettrait d'étudier l'influence du type de perturbation initiale imposée.
- La prise en compte d'un ordre supplémentaire de non-linéarités permettrait d'augmenter la précision des prédictions effectuées et évoquées précédemment. Elle augmenterait en revanche de façon importante le niveau de complexité de résolution du problème.
- L'étude d'un nombre plus important de points de fonctionnement permettrait de confirmer avec plus d'assurance les tendances observées et les conclusions réalisées quant à l'influence de la viscoélasticité.

L'**approche expérimentale** a consisté en la formation et l'étude de jets libres de liquides viscoélastiques basses-vitesses dans de l'air au repos. Plusieurs points de fonctionnement ont été mis en œuvre, faisant varier la viscoélasticité du liquide et le débit d'injection. En chaque position du jet, un large nombre d'images haute-résolution spatiale du jet a été pris. Pour chaque point de fonctionnement, l'analyse de ces images par méthode dite directe a permis la détermination :

- D'une position correspondant au déclenchement des instabilités capillaires.
- D'une longueur de rupture.
- D'une distribution de tailles de gouttes.

A partir de ces images, une description multi-échelles du jet est effectuée. Cette description, dernièrement présentée par Dumouchel *et al.* (2022), permet d'étudier la morphologie d'objets sans tenir compte de leur orientation ni de leur position dans un plan donné. En chaque position du jet, deux échelles caractéristiques sont déterminées à partir de cette description : l'échelle maximale du jet et l'échelle du pincement du jet. L'évolution temporelle de ces deux échelles est étudiée et permet de déterminer :

- Le taux de croissance des instabilités capillaires.
- La longueur d'onde de la perturbation du jet.
- Un intervalle de temps correspondant au régime élasto-capillaire du jet. A partir des éléments de la littérature, des temps de relaxation initial et final sont mesurés ainsi que la viscosité élongationnelle terminale.
- Un pourcentage d'occurrence de coalescence.
- Une granulométrie des gouttes du spray final est également effectuée. Néanmoins, du fait de la pixellisation des images, cette granulométrie s'avère défailante pour les faibles échelles de gouttes.

Tous les éléments mesurés par méthode directe et multi-échelles permettent une description détaillée du jet et des mécanismes mis en jeu :

- Globalement, les mesures montrent que la longueur des instabilités capillaires évolue linéairement avec la vitesse d'injection, comme prévu par la théorie.
- La dégradation des polymères au cours du processus d'injection est étudiée. Cette dégradation augmente avec la masse molaire des polymères (et donc leur longueur) et avec la

vitesse d'injection. Les tendances observées confirment les conclusions de Merrill et Leopairat (1980) et Nguyen et Kausch (1988) : à un même taux de déformation, les longues chaînes polymériques sont plus susceptibles de se rompre.

- La position de déclenchement des instabilités capillaires varie avec la vitesse d'injection. Suite au processus d'injection du liquide, le profil de vitesse se relaxe et une force colinéaire à l'axe du jet, appelée tension axiale, se relaxe également (Goren et Gottlieb, 1982). La majeure partie des résultats de cette thèse montre que le déclenchement des instabilités se produit à condition que la tension axiale soit suffisamment relaxée. Ceci se traduit par une augmentation de la zone neutre avec la vitesse et le temps de relaxation. Cependant, une partie des résultats ne vérifient pas cette tendance : une perturbation (de débit ou d'interface) élevée pourrait alors être suffisante au déclenchement des instabilités sans pour autant que le profil de vitesses et la tension axiale soient relaxés.
- La caractérisation expérimentale du développement de ces instabilités capillaires par la mesure du taux de croissance et d'une longueur d'onde moyenne de perturbation est effectuée. Une diminution des taux de croissance et une augmentation des longueurs d'onde avec la vitesse d'injection ont globalement été observées. Ces deux tendances ont été vérifiées indépendamment des solutions testées, indiquant que ces comportements ne sont pas exclusivement liés à l'ajout de viscoélasticité. Selon le travail théorique de Goren et Gottlieb (1982), la présence d'une tension axiale non relaxée au déclenchement des instabilités augmente leur taux de croissance et leur longueur d'onde. D'autre part, les mesures de longueurs d'onde sur deux échelles distinctes du jet montrent une non-sinusoïdalité de la déformation de la surface du jet lors du développement des instabilités. Cette non-sinusoïdalité évolue au cours de la propagation du jet jusqu'à l'atteinte du régime-élasto-capillaire avec la formation de perles-sur-ficelles.
- Au cours du régime élasto-capillaire, les polymères sont exposés à des taux de déformation suffisamment élevés pour causer une seconde dégradation. Cette seconde dégradation est moins importante que la première et décroît avec la vitesse d'injection. Ce résultat s'explique par le fait que suite à l'injection, les chaînes polymériques sont plus courtes et donc moins susceptibles de casser par la suite. D'autre part, les mesures réalisées montrent que la viscosité élongationnelle terminale diminue quasi-linéairement avec le temps de relaxation final, confirmant ainsi les résultats de Tirel *et al.* (2020) et Stelter *et al.* (2002).
- Les résultats concernant le mécanisme de coalescence montrent qu'une augmentation du nombre de coalescences est à l'origine d'une augmentation de la taille moyenne des gouttes principales du spray final. Aucun lien entre le mécanisme de coalescence et le mécanisme de dégradation des polymères n'a été effectué.
- La mesure des tailles de gouttes a montré l'existence de deux classes de gouttes : une classe de gouttes principales et une classe de gouttes satellites, de moindres diamètres. Les gouttes secondaires sont inexistantes dans les sprays finaux. Ce résultat confirme les prédictions effectuées lors de l'étude théorique ainsi que celles réalisées par Ardekani *et al.* (2010). La proportion de gouttes satellites diminue avec l'ajout de viscoélasticité. Cette observation confirme les résultats expérimentaux obtenus par Christanti et Walker (2001). D'autre part, les résultats montrent que l'ajout de viscoélasticité augmente le diamètre moyen des gouttes principales et diminue celui des gouttes satellites. Ces observations confirment de nouveau les résultats de Christanti et Walker (2001). Enfin, aucune tendance n'est clairement identifiée quant à la variation du diamètre des gouttes principales et des gouttes satellites avec la vitesse d'injection. Cette observation est en accord avec

les prédictions théoriques.

Ainsi, l'analyse statistique des images de jets et de leur description multi-échelles a permis d'étudier le comportement de plusieurs jets, de leur formation à leur rupture. Les résultats de ce travail expérimental ont permis de valider l'utilisation de la description multi-échelles et de caractériser l'influence de la viscoélasticité sur la propagation du jet. Ces résultats confirment et complètent ceux de la littérature et apportent des éléments supplémentaires.

Les perspectives de travail qui permettraient de compléter cette étude expérimentales sont les suivantes :

- Une mesure de la distribution de masse molaire des polymères présents dans le liquide permettrait de caractériser de façon plus précise le mécanisme de dégradation des polymères. Afin de distinguer la dégradation due au processus d'injection et celle ayant lieu dans le régime élasto-capillaire, cette mesure devrait être effectuée avant injection du liquide, entre la sortie de l'injecteur et le régime élasto-capillaire, et après le régime élasto-capillaire. Ainsi, pour chacune des deux dégradations, les mesures permettraient d'évaluer en quel endroit des chaînes polymériques une scission a lieu et la proportion de polymères ayant subi une scission .
- Une variation plus importante de la masse molaire des polymères, une variation de la concentration en polymères et une variation de la géométrie de l'injecteur permettraient de compléter la compréhension des mécanismes de dégradation.
- La mise en place de systèmes optiques et d'imagerie supplémentaires sur le banc expérimental pourrait permettre d'obtenir des informations sur le changement de conformation des chaînes polymériques au cours de l'évolution du jet. De telles informations permettraient en particulier de mieux comprendre comment se comportent les chaînes polymériques dans la zone neutre et au cours du régime élasto-capillaire.
- Une amélioration de la mesure des longueurs d'onde et une étude plus approfondie de leur dynamique pourraient apporter d'importantes informations sur le comportement des polymères et de l'écoulement dans les régimes inertio-capillaire et élasto-capillaire.
- L'étude expérimentale de jets forcés permettrait d'étendre et éventuellement de confirmer les résultats (expérimentaux et théoriques) propres aux taux de croissance, aux longueurs d'onde et aux distributions de tailles de gouttes. Une telle étude permettrait également de vérifier la méthode du ROJER sur jets forcés utilisée par Keshavarz *et al.* (2015) pour déterminer le temps de relaxation de solutions viscoélastiques.

Annexe A : Fonctions de Bessel

Définitions :

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(\nu+p)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2p+\nu} \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \end{aligned}$$

Valeurs notables :

$$\begin{aligned} I_0(0) &= 1 \\ I_1(0) &= 0 \\ K_1(0) &= +\infty \end{aligned}$$

Propriétés notables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_0(x)}{\partial x} &= -I_1(x) \\ \frac{\partial I_1(x)}{\partial x} &= I_0(x) - \frac{I_1(x)}{x} \end{aligned}$$

$$(1 + a\epsilon + b\epsilon^2)I_1(x((1 + a\epsilon + b\epsilon^2))) = I_1(x) + \epsilon ax I_0(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{x=0}^L x I_0(yx) dx = \frac{L}{y} I_1(yL) \quad (\text{A.2})$$

Approximations polynômiales :

Comme exposé par Newman (1984), $I_0(x)$ peut être exprimé sous la forme polynômiale suivante :

$$I_0(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} q_{2(i-1)} x^{2(i-1)}$$

où la valeurs des 9 premiers coefficients est donnée dans le Tableau A.1. La fonction $I_1(x)$ étant la dérivée de $I_0(x)$ par rapport à x , on a :

$$I_1(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2(i-1) q_{2(i-1)} x^{2(i-2)}$$

Lorsqu'il sera nécessaire, les produits de ces fonctions de Bessel seront approximées par les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} I_0(ax)I_0(bx) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i q_{2(j-1)} q_{2(i-j)} x^{2(i-1)} a^{2(j-1)} b^{2(i-j)} \\ I_1(ax)I_1(bx) &= 4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i j(i-j) q_{2j} q_{2(i-j)} x^{2(i-1)} a^{2j-1} b^{2(i-j)-1} \\ I_0(ax)I_1(bx) &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i (j-1) q_{2(j-1)} q_{2(i-j)} x^{2i-3} a^{2(i-j)} b^{2j-3} \end{aligned}$$

où la précision de ces approximations est régie par la valeur du paramètre N .

i	$1/ q_{2(i-1)}$
1	1
2	4
3	64
4	2304
5	147456
6	14745600
7	2123366400
8	416179814400
9	106542032486400

TABLE A.1 – Tableau des Coefficients $q_{2(i-1)}$

Annexe B : Mesures expérimentales

Solution	Point de fonct.	$\langle D_{jet} \rangle$ (μm)	V_{jet} (m/s)	Z_{onset} (mm)	α ($1/ms$)	λ (μm)
S06	S06QA	198	3.7	7.8	1.69	-
	S06QB	196	4.4	11.2	2.31	964
	S06QC	195	5.1	10.2	2.40	985
	S06QD	195	5.7	8.5	2.01	967
	S06QE	194	6.4	7.4	2.09	983
	S06QF	190	7.1	5.5	1.88	906
	S06QG	192	7.7	6.8	1.90	918
S1	S1QA	206	4.2	7.3	2.17	967
	S1QB	207	4.5	7.7	1.92	934
	S1QC	206	5.2	7.1	1.55	1019
	S1QD	209	5.6	4.3	1.85	972
	S1QE	207	6.3	4.5	1.45	1002
	S1QF	207	6.3	4.5	1.26	950
	S1QG	212	6.8	6.7	1.21	817
S5	S5QA	215	3.6	9.5	1.45	1036
	S5QB	215	4.1	10.9	2.11	1026
	S5QC	212	4.9	10.3	1.79	1063
	S5QD	211	5.4	11.3	2.08	969
	S5QE	209	6.9	15.8	1.44	929
	S5QF	207	6.5	15.8	1.97	1016
	S5QG	202	7.3	13.8	2.07	983
S8	S8QA	205	4.0	8.0	2.04	1047
	S8QB	209	4.4	10.8	2.19	1019
	S8QC	200	5.5	5.5	1.39	1060
	S8QD	203	5.9	4.7	1.72	1012
	S8QE	208	6.0	4.3	1.39	1137
	S8QF	206	7.1	4.1	1.41	1088

TABLE B.1 – Résultats relatifs à la zone neutre et au régime inertio-capillaire des jets.

Solution	Point de fonct.	t_i^{REC} (ms)	t_f^{REC} (ms)	$t_{r,i}$ (ms)	$t_{r,f}$ (ms)	$\eta_{E,t}$ (Pa.s)	γ (-)	ξ_{max} (%)
S5	S5QA	44	8.7	2.28	1.77	2.85	0.31	9.3
	S5QB	42	8.1	2.10	1.65	2.75	0.39	11.8
	S5QC	39	6.5	1.59	1.36	2.75	0.36	13.4
	S5QD	41	7.1	1.76	1.27	2.40	0.47	11.1
	S5QE	40	6.9	1.48	1.25	2.70	0.29	9.9
	S5QF	41	5.6	1.40	1.29	1.62	0.23	8.6
	S5QG	36	5.3	1.08	0.95	1.65	0.21	10.7
S8	S8QA	4.1	7.0	1.69	1.34	2.30	0.31	10.4
	S8QB	4.5	7.1	1.58	1.15	2.17	0.42	9.9
	S8QC	3.0	5.6	1.43	1.02	2.05	0.31	15.7
	S8QD	3.6	5.2	1.19	1.10	1.65	0.12	16.8
	S8QE	2.9	5.0	1.23	1.05	1.95	0.40	19.4
	S8QF	2.8	4.2	1.14	0.87	1.60	0.29	14.8

TABLE B.2 – Résultats relatifs aux régimes élasto-capillaire et visco-capillaire des jets.

Solution	Point de fonct.	$\langle L_{bu} \rangle$ (mm)	$LMH(L_{bu})$ (mm)	D_{10}^p (μm)	D_{10}^{sat} (μm)	$p(sat)$ (%)
S06	S06QA	14.4	1.7	339	128	78
	S06QB	17.1	1.9	349	125	75
	S06QC	19.2	2.6	336	126	76
	S06QD	18.1	2.7	347	126	85
	S06QE	19.3	3.9	347	124	74
	S06QF	14.7	4.0	328	108	86
	S06QG	17.8	5.0	359	99	88
S1	S1QA	11.6	1.9	353	130	68
	S1QB	15.6	2.2	352	130	80
	S1QC	15.9	3.2	351	145	75
	S1QD	12.9	3.0	372	134	75
	S1QE	14.2	2.9	366	141	70
	S1QF	14.8	4.3	362	128	73
	S1QG	19.0	2.8	377	100	41
S5	S5QA	40.0	3.5	451	92	21
	S5QB	43.0	3.0	455	73	7
	S5QC	43.7	4.7	456	67	7
	S5QD	48.0	8.5	437	61	6
	S5QE	47.8	7.7	440	86	13
	S5QF	48.0	7.5	432	87	17
	S5QG	49.2	13.9	441	68	8
S8	S8QA	35.5	3.0	430	79	12
	S8QB	39.0	3.3	442	82	19
	S8QC	37.5	4.8	451	84	18
	S8QD	41.8	9.2	462	87	16
	S8QE	39.7	6.6	471	90	17
	S8QF	39.8	6.3	453	89	16

TABLE B.3 – Résultats relatifs à la rupture des jets et aux gouttes résultantes.

Table des figures

1.1	Schéma d'un volume de contrôle.	12
1.2	Schématisation des composantes du tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ sur un élément fluide dans un repère arbitraire $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$	14
1.3	Photographie de l'expérience de la goutte de poix, en 1990, avec son responsable de l'époque le Professeur John Manstone.	16
1.4	Classification des matériaux.	17
1.5	Schématisation de : a) un polymère linéaire, b) un polymère branché, c) un réseau polymérique. Les lettre A et B représentent deux types de monomères différents.	18
1.6	Schématisation des niveaux de dilution d'une solution polymérique (inspiré de Rubinstein <i>et al.</i> (2003)).	20
1.7	Diagramme de phase d'une solution polymérique. (inspiré de Rubinstein <i>et al.</i> (2003) et de Addison <i>et al.</i> (2004)).	21
1.8	Schéma de deux conformations d'une chaîne polymérique, d'après (Rubinstein <i>et al.</i> , 2003) : a) en pelote, b) complètement étirée.	22
1.9	Expérience de relaxation : a) déformation appliquée en fonction du temps, b) réponse de contrainte d'un solide de Hooke, c) réponse de contrainte d'un liquide Newtonien, d) réponse de contrainte d'un liquide viscoélastique. Inspiré de Mezger (2020).	23
1.10	Expérience de fluage : a) contrainte appliquée en fonction du temps, b) réponse de déformation d'un solide de Hooke, c) réponse de déformation d'un liquide Newtonien, d) réponse de déformation d'un liquide viscoélastique. Inspiré de Mezger (2020).	25
1.11	Schématisation a) du cisaillement d'un liquide Newtonien et b) du cisaillement d'un solide de Hooke au cours du temps (Bird <i>et al.</i> , 1987a).	26
1.12	Représentation du modèle de Maxwell par assemblage d'un ressort et d'un amortisseur.	26
1.13	Représentation du modèle de Maxwell par assemblage d'un ressort et de deux amortisseurs.	27
1.14	Croquis de l'expérimentation de Reynolds (1883) : a) écoulement laminaire de l'encre dans le tuyau d'eau, b) transition vers la turbulence, c) transition vers la turbulence avec éclairage de l'écoulement d'encre.	29
1.15	Photographies de : a) une instabilité de Rayleigh-Plateau (Rutland et Jameson, 1971), b) une instabilité de Kelvin-Helmoltz (Drazin et Reid, 1981), c) une instabilité de Rayleigh-Bénard (Koschmieder et Pallas, 1974), d) une instabilité de Rayleigh-Taylor (Waddell <i>et al.</i> , 2001).	30

1.16	Graphes de dispersion de la relation de dispersion (Eq. 1.37) établie par (Rayleigh, 1892) dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité temporelle d'un jet de liquide non-visqueux dans un milieu gazeux inerte.	32
1.17	Reconstitution d'un jet de liquide viscoélastique (eau, isopropanol 5 %, PEO 5ppm) à partir d'un assemblage d'images prises en différentes positions dans le cadre de cette thèse.	34
1.18	Images d'un jet de liquide viscoélastique (eau, isopropanol 5 %, PEO 20ppm) à plusieurs distances z de l'injecteur : a), b), c) $z = 0$ mm, d) $z = 4$ mm, e) $z = 8$ mm . Images issues de Tirel (2019).	34
1.19	Images de jets à la sortie de l'orifice (Liang <i>et al.</i> , 1999), observant : a) un phénomène de contraction, b) un phénomène d'expansion.	35
1.20	Images extraites des travaux numériques de Li & Fontelos (2003) : a) Développement d'instabilités capillaires secondaires sur le filament. b) Coalescence de perles principales.	37
1.21	Mesures expérimentales des proportions de gouttes principales ("main"), secondaires ("sub-main"), et satellites ("satellite") issues de la rupture de jets libres d'un liquide Newtonien et de différents liquides viscoélastiques (PEO à masse molaire et concentration variable) (Christanti et Walker, 2001).	38
1.22	Observations de l'amincissement d'un filament de liquide viscoélastique entre deux plaques par le rhéomètre CaBER (Dinic <i>et al.</i> , 2015).	39
1.23	Visualisation du jet par stroboscopie et repérage du diamètre du filament (Keshavarz <i>et al.</i> , 2015).	40
1.24	Viscosité élongationnelle terminale en fonction du temps de relaxation pour différentes conditions opératoires (Tirel <i>et al.</i> , 2020).	41
1.25	Visualisation des lignes de courant d'un écoulement de liquide viscoélastique à l'intérieur d'un injecteur (Cartalos et Piau, 1992). La zone de taux de scission maximale selon Rognin <i>et al.</i> (2021) est représentée en point-tillés.	42
1.26	Tracé des temps de relaxation mesurés en fonction du taux de déformation dans l'injecteur pour plusieurs conditions d'injection (Tirel <i>et al.</i> , 2020).	43
2.1	Schéma de l'état de base du système d'étude.	49
2.2	Diagramme résumant la formulation générale des conditions initiales (Cottier <i>et al.</i> , 2021).	54
2.3	Solutions α de la relation de dispersion a) de premier ordre et b) de deuxième ordre pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$	78
2.4	Distribution initiale de vitesse axiale w_1 dans la phase liquide dans les configurations a) pure-deformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier <i>et al.</i> , 2021).	79
2.5	Distribution initiale de pression axiale p_1 dans la phase liquide dans les configurations a) pure-deformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier <i>et al.</i> , 2021).	80
2.6	Distribution initiale de contrainte axiale normal τ_{zz1} dans la phase liquide dans les configurations a) pure-deformation et b) pure-impulse pour le cas d'application A avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.8$ et un nombre d'onde $k = 0.2$ (Cottier <i>et al.</i> , 2021).	80

2.7	Tracés a) des taux de croissance $-Re(\alpha_{opt})$ et b) des nombres d'onde k_{opt} pour les quatres cas d'application en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0	81
2.8	Identification du régime oscillatoire en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour les solutions viscoélastiques : a) cas A ($De_1 = 1$ et $De_2 = 0.001$), b) cas B ($De_1 = 100$ et $De_2 = 1$), c) cas C ($De_1 = 10$ et $De_2 = 1$), d) cas D ($De_1 = 10$ et $De_2 = 8$).	82
2.9	Tracé des temps de rupture t_{bu1d} , t_{bu1} et t_{bu2} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$	84
2.10	Tracé des temps de rupture t_{bu2} ($k = k_{opt}$) en fonction d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	84
2.11	Tracés a) des modes constituant la position de l'interface $r_{s2}(z, t)$ et b) des trois configurations géométriques possiblement adoptées par l'interface $r_{s2}(z, t)$	85
2.12	Tracé des temps de transition t_s^{II} et t_s^{III} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$	86
2.13	Tracés a) du nombre d'onde de transition k_{trans} et b) de la différence $k_{trans} - k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	87
2.14	Tracé du temps de transition t_s ($k = k_{opt}$) en fonction du nombre d'Ohnesorge pour tous les cas d'application.	87
2.15	Tracé des temps $t_{\Gamma 1}$ et $t_{\Gamma 2}$ en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$	89
2.16	Tracés de a) $t_{\Gamma 2}$ ($k = k_{opt}$) et b) $t_{\Gamma 2} - t_{\Gamma 1}$ ($k = k_{opt}$) en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	90
2.17	Tracés de a) la différence de temps $t_{\Gamma 2} - t_{s2}$ et b) la différence de temps $t_{\Gamma 2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	90
2.18	Tracé des temps de transition t_{v1} et t_{v2} en fonction du nombre d'onde k pour le cas d'application C avec un nombre d'Ohnesorge $Oh_0 = 0.1$	91
2.19	Tracé du temps t_{v2} en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	92
2.20	Tracé de a) la différence de temps $t_{v2} - t_{s2}$ et b) la différence de temps $t_{v2} - t_{bu2}$ en $k = k_{opt}$ en fonction du nombre d'Ohnesorge Oh_0 pour tous les cas d'application.	92
3.1	Schéma du dispositif expérimental.	97
3.2	Formulation semi-développée de la molécule de PEO.	99
3.3	Exemple d'une image : a) brute, b) après normalisation, c) après segmentation, et d) après remplissage.	103
3.4	Schéma de la division d'une image en fenêtres d'analyse.	103
3.5	Exemple d'une image synthétique annotée des dimensions relatives à sa construction.	107
3.6	Représentation des sept premiers modes propres ϕ_k annotées de leur énergie $E(\phi_k)$	109
3.7	Tracé des coefficients de reconstruction $a_{i,k}$ associés aux sept premiers vecteurs propres ϕ_k en fonction de la phase p de la déformation d'interface.	109
3.8	Représentation des cinq premiers vecteurs propres obtenus en z_1 , z_2 , z_3 et z_4 par application de la POD aux images expérimentales du point de fonctionnement S8QB.	111
3.9	Evolution spatiale des énergies associées aux trois premiers vecteurs propres obtenus par application de la POD aux images expérimentales du point de fonctionnement S8QB.	111

3.10	Tracé des positions $Z_{onset}(c)$ selon 3 valeurs du paramètre c : 99, 95%, 99, 50% et 99, 00% pour les points de fonctionnement de la solution S8 en fonction de leur nombre de Reynolds associé.	113
3.11	Evolution spatiale du pourcentage d'occurrences de ruptures de jets pour le point de fonctionnement S5QB. Distribution de longueurs de rupture du jet, extraction de la longueur de rupture moyenne L_{bu} et de la largeur à mie-hauteur $LMH(L_{bu})$ associées.	113
3.12	Image normalisée de la rupture prématurée d'un jet de solvant (Eau et isopropanol 5 %).	114
3.13	Schéma d'une description morpho-topologique d'un objet 2D.	115
3.14	Schéma représentant l'érosion d'un système à 3 échelles différentes ($[L]$ désigne une unité arbitraire de longueur).	117
3.15	Carte des distances euclidiennes du système.	117
3.16	Schématisation de l'érosion d'une image synthétique de jet dans un plan (x, y)	118
3.17	Tracés des distributions $e_{2,d}$ théorique et mesurée associées au système synthétique présenté en Figure 3.16.	120
3.18	Schéma de l'érosion d'un cylindre et d'une sphère (à gauche). Tracés des distributions e_2 et $e_{2,d}$ associées avec : $D_c = 15[L]$, $D_s = 35[L]$, $L_c = 60[L]$ (à droite).	121
3.19	Schéma de l'assemblage d'un cylindre et d'une sphère avec jonction circulaire (à gauche). Tracés des distributions e_2 (trait plein) et $e_{2,d}$ (point-tillés) associées avec : $D_c = 15[L]$, $D_s = 35[L]$, $L_c = 60[L]$ et $R_2 = 8.75[L]$ (à droite).	122
3.20	Tracés des distributions E_2 , e_2 mesurées sur le système synthétique présenté en Figure 3.16. Repérage des échelles d_R et d_M	123
3.21	Mesures du taux de croissance temporel des instabilités capillaires sur l'évolution temporelle de $\langle d_{max} \rangle$, $\langle d_R \rangle$ et $\langle \eta \rangle$ pour le point de fonctionnement S5QA. Les taux de croissance α sont exprimés en ms^{-1} et les amplitudes initiales de déformations β en μm	125
3.22	Tracé des évolutions temporelles de $\langle d_R \rangle$, de $\dot{\epsilon}$, de $\dot{\epsilon}^{-1}$, de $\eta_{E,app}$, et de $LD(d_R)$ mesurées sur le cas de fonctionnement S5QD.	128
3.23	Exemple d'une image : a) sans coalescence, b) avec coalescence mais non comptabilisée dans le calcul de ξ , c) avec coalescence comptabilisée dans le calcul de ξ	130
3.24	Tracé de l'évolution spatiale du pourcentage d'occurrence de coalescence $\xi(z)$ et mesure de ξ_{max} pour le point de fonctionnement S8QC.	130
3.25	Tracé des distributions $e_{2,d}^{Tot}$ et $e_{2,d,d}^{Tot}$ pour le point de fonctionnement S8QC. Repérage de $e_{2,d}^{Tot,drops}$, D_{min}^p , D_{max}^p et $e_{2,d}^{Tot,drops}$. Mesure de D_{10}^p	132
3.26	a) Exemple d'une image originale, b) Elimination des objets liquides localisés en bord d'image et application d'un fit elliptique aux objets restants, c) Elimination des objets considérés non sphériques.	133
3.27	Distribution de tailles de gouttes obtenues par la méthode directe sur le cas de fonctionnement S8QC.	133
3.28	Comparaison des distributions de tailles de gouttes principales obtenues sur le cas de fonctionnement S8QC par la méthode multi-échelle et par la méthode directe.	134
3.29	Schématisation des différentes mesures effectuées sur les jets.	134

3.30	Représentation spatiale des jets par zones pour tous les points de fonctionnement étudiés.	135
3.31	Représentation temporelle des jets par zones pour tous les points de fonctionnement étudiés. La légende est la même qu'en Figure 3.30.	136
3.32	Distributions de d_R , de d_M , et $\langle e_{2,d} \rangle(d)$ mesurées sur 600 images dans la zone neutre, la zone de régime inertio-capillaire (RIC), la zone de régime élasto-capillaire (REC), et la zone de régime visco-capillaire (RVC) pour le point de fonctionnement S5QA.	137
3.33	Diagramme de stabilité des jets pour tous les points de fonctionnement étudiés. .	138
3.34	Tracés : a) du temps de relaxation t_{ri} en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) de l'indice de scission IS_{inj} en fonction du nombre de Reynolds Re pour S5 et S8.	139
3.35	Tracé des diamètres moyens des jets non-perturbés $\langle D_{jet} \rangle$ en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement étudiés. Comparaison avec le diamètre d'orifice D_{or}	141
3.36	Tracé des longueurs d'onde moyennes $\langle \lambda_1 \rangle$, $\langle \lambda_2 \rangle$ et $\langle \lambda_{eq} \rangle$ en fonction de la coordonnée z pour les points de fonctionnement : a) S06QC et b) S5QA. La zone spatiale contenant une flèche correspond au régime de Rayleigh.	142
3.37	Graphe de dispersion présentant les taux de croissance adimensionnés α_M en fonction du nombre d'onde adimensionné k	143
3.38	Tracés : a) des taux de croissance α_M et b) des longueurs d'onde λ en fonction du nombre de Reynolds Re pour tous les points de fonctionnement.	143
3.39	Tracé de $Te(Z_{onset})$ en fonction du nombre de Reynolds Re	145
3.40	Tracé de la longueur $L_{bu,theo}$ (en bleu), de $Z_{REC}^i - Z_{onset}$ (en rouge) pour les solutions S5 et S8, et de $\langle L_{bu} \rangle - Z_{onset}$ (en rouge) pour les solutions S06 et S1. La ligne point-tillée est la courbe d'équation $y = 0.0125Re$	146
3.41	Tracé : a) du temps de relaxation t_{rf} en fonction de $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) du taux de scission IS_{REC} en fonction du nombre de Reynolds Re pour les solutions S8 et S5.	146
3.42	Tracé : a) du coefficient de dégradation temporel γ en fonction du taux de déformation dans l'injecteur $\dot{\epsilon}_{inj}$ et b) de la viscosité élongationnelle terminale $\eta_{E,t}$ en fonction du temps de relaxation t_{rf} pour les points de fonctionnement S8 et S5.	147
3.43	Tracé des distributions de tailles de gouttes pour a) le cas S1QA et b) le cas S5QC. .	148
3.44	Tracés : a) des diamètres moyens de gouttes principales D_{10}^p et b) diamètres moyens de gouttes satellites D_{10}^{sat} adimensionnés par $\langle D_{jet} \rangle$, en fonction du nombre de Reynolds Re	149
3.45	Tracé : a) de la proportion de gouttes satellites p^{sat} en fonction du nombre de Reynolds Re et b) du diamètre moyen adimensionné des gouttes principales $D_{10}^p / \langle D_{jet} \rangle$ par rapport au pourcentage de coalescence maximal ξ_{max}	150

Liste des tableaux

1.1	Classification des fluides non-Newtoniens.	17
2.1	Caractéristiques des cas d'applications testés.	77
3.1	Propriétés des quatre solutions viscoélastiques testées.	98
3.2	Caractérisation du niveau de dilution des solutions, de la taille des polymères et de leur temps de relaxation de Zimm.	100
3.3	Conditions d'expérience des points de fonctionnement étudiés.	101
A.1	Tableau des Coefficients $q_{2(i-1)}$	160
B.1	Résultats relatifs à la zone neutre et au régime inertio-capillaire des jets.	161
B.2	Résultats relatifs aux régimes élasto-capillaire et visco-capillaire des jets.	162
B.3	Résultats relatifs à la rupture des jets et aux gouttes résultantes.	162

Bibliographie

- ADDISON, C., LOUIS, A. et HANSEN, J. (2004). Influence of solvent quality on polymer solutions : A monte carlo study of bulk and interfacial properties. *The Journal of chemical physics*, 121(1):612–620.
- ARDEKANI, A., SHARMA, V. et MCKINLEY, G. (2010). Dynamics of bead formation, filament thinning and breakup in weakly viscoelastic jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 665:46–56.
- ASHGRIZ, N. et YARIN, A. (2011). Capillary instability of free liquid jets. In *Handbook of atomization and sprays*, pages 3–53. Springer.
- BEREAUX, Y. (2004). *Viscoélasticité Non-Linéaire*. Thèse de doctorat, INSA-LYON.
- BERKOOZ, G., HOLMES, P. et LUMLEY, J. L. (1993). The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of fluid mechanics*, 25(1):539–575.
- BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. et HASSAGER, O. (1987a). Dynamics of polymeric liquids. vol. 1 : Fluid mechanics.
- BIRD, R. B., CURTISS, C. F., ARMSTRONG, R. C. et HASSAGER, O. (1987b). *Dynamics of polymeric liquids, volume 2 : Kinetic theory*. Wiley.
- BLAISOT, J. et ADELIN, S. (2003). Instabilities on a free falling jet under an internal flow breakup mode regime. *International journal of multiphase flow*, 29(4):629–653.
- BOUROUBA, L. (2021). The fluid dynamics of disease transmission. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 53:473–508.
- BOUSFIELD, D., KEUNINGS, R., MARRUCCI, G. et DENN, M. (1986). Nonlinear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 21(1):79–97.
- BRENN, G. (2016). *Analytical solutions for transport processes*. Springer.
- CARTALOS, U. et PIAU, J. (1992). Creeping flow regimes of low concentration polymer solutions in thick solvents through an orifice die. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 45(2):231–285.
- CHANDRASEKHAR, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.
- CHATTERJEE, A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current science*, pages 808–817.
- CHRISTANTI, Y. et WALKER, L. M. (2001). Surface tension driven jet break up of strain-hardening polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 100(1-3):9–26.
- CLASEN, C., PHILLIPS, P. M., PALANGETIC, L., VERMANT et JAN (2012). Dispensing of rheologically complex fluids : The map of misery. *AIChE Journal*, 58(10):3242–3255.

- CLASEN, C., PLOG, J., KULICKE, W.-M., OWENS, M., MACOSKO, C., SCRIVEN, L., VERANI, M. et MCKINLEY, G. H. (2006). How dilute are dilute solutions in extensional flows? *Journal of Rheology*, 50(6):849–881.
- COTTIER, L., BRENN, G. et RENOULT, M.-C. (2019a). Weakly nonlinear instability of a viscoelastic liquid jet. In *BIFD*, Limerick, Ireland.
- COTTIER, L., BRENN, G. et RENOULT, M.-C. (2019b). Weakly nonlinear instability of a viscoelastic liquid jet. In *ILASS–Europe 2019*.
- COTTIER, L., BRENN, G. et RENOULT, M.-C. (2021). Initial conditions to study the temporal behavior of a viscoelastic liquid jet under perturbation. *Atomization and Sprays*, 31(5).
- COTTIER, L., DUMOUCHEL, C., RENOULT, M.-C., ATOMIZATION, C. et TEAM, S. (2020). Experimental study of capillary jets of viscoelastic liquids. In *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, pages H04–003.
- COTTIER, L., RENOULT, M.-C. et DUMOUCHEL, C. (2019c). Proper orthogonal decomposition of viscoelastic liquid jets. In *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, pages B33–004.
- COTTON, J. (1980). Polymer excluded volume exponent ν : An experimental verification of the n vector model for $n=0$. *Journal de Physique Lettres*, 41(9):231–234.
- DENN, M. M. (1990). Issues in viscoelastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1):13–32.
- DINIC, J., ZHANG, Y., JIMENEZ, L. N. et SHARMA, V. (2015). Extensional relaxation times of dilute, aqueous polymer solutions. *ACS Macro Letters*, 4(7):804–808.
- DOI, M., EDWARDS, S. F. et EDWARDS, S. F. (1988). *The theory of polymer dynamics*, volume 73. oxford university press.
- DRAZIN, P. et REID, W. (1981). Hydrodynamic stability. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 82:17950.
- DUMOUCHEL, C. (2008). On the experimental investigation on primary atomization of liquid streams. *Experiments in fluids*, 45(3):371–422.
- DUMOUCHEL, C., ANISZEWSKI, W., VU, T.-T. et MÉNARD, T. (2017). Multi-scale analysis of simulated capillary instability. *International Journal of Multiphase Flow*, 92:181–192.
- DUMOUCHEL, C., RENOULT, M.-C., TIREL, C. et COTTIER, L. (2021). Influence of injection conditions on viscoelastic ligament dynamics. In *International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems (ICLASS)*, volume 1.
- DUMOUCHEL, C., THIESSET, F. et MÉNARD, T. (2022). Morphology of contorted fluid structures. *International Journal of Multiphase Flow*, 152:104055.
- DUPAS, A. (2012). *Dégradation mécanique de solutions de polymères et ses impacts en récupération assistée d'hydrocarbures*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale - Brest.
- EDGEWORTH, R., D. B. J. et PARNELL, T. (1984). The pitch drop experiment. *European Journal of Physics*, 5(4):198.
- EGGERS, J. et VILLERMAUX, E. (2008). Physics of liquid jets. *Reports on progress in physics*, 71(3):036601.
- ENTOV, V. et YARIN, A. (1984). Influence of elastic stresses on the capillary breakup of jets of dilute polymer solutions. *Fluid Dynamics*, 19(1):21–29.

- FETTERS, L., HADJICHRISTIDIS, N., LINDNER, J. et MAYS, J. (1994). Molecular weight dependence of hydrodynamic and thermodynamic properties for well-defined linear polymers in solution. *Journal of physical and chemical reference data*, 23(4):619–640.
- FULLER, G. G., CATHEY, C. A., HUBBARD, B. et ZEBROWSKI, B. E. (1987). Extensional viscosity measurements for low-viscosity fluids. *Journal of Rheology*, 31(3):235–249.
- GARCÍA, F. et GONZÁLEZ, H. (2008). Normal-mode linear analysis and initial conditions of capillary jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 602:81–117.
- GARCÍA, F. J. et CASTELLANOS, A. (1994). One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets. *Physics of Fluids*, 6(8):2676–2689.
- GARREPALLY, S., JOUENNE, S., OLMSTED, P. D. et LEQUEUX, F. (2020). Scission of flexible polymers in contraction flow : predicting the effects of multiple passages. *Journal of Rheology*, 64(3):601–614.
- GAVIS, J. et GILL, S. J. (1956). Tensile stress in jets of viscoelastic fluids. ii. *Journal of Polymer Science*, 21(99):353–362.
- GIACOMIN, A. J. et SAENGOW, C. (2022). Ongoing relevance of oldroyd 8-constant fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 299:104653.
- GOLDIN, M., YERUSHALMI, J., PFEFFER, R. et SHINNAR, R. (1969). Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(4):689–711.
- GOREN, S. L. et GOTTLIEB, M. (1982). Surface-tension-driven breakup of viscoelastic liquid threads. *Journal of Fluid Mechanics*, 120:245–266.
- GUZZELLI, E. (2001). Rhéologie des fluides complexes. Lecture.
- HORN, A. et MERRILL, E. (1987). Extensional flow-induced chain scission of macromolecules in dilute solution : effect of solvent power in a mixed solvent system. *Polymer communications (Guildford)*, 28(6):172–173.
- JAMES, D., CHANDLER, G. et ARMOUR, S. (1990). Measurement of the extensional viscosity of ml in a converging channel rheometer. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 35(2-3):445–458.
- JEFFREYS, H. (1929). *The Earth*.
- KESHAVERZ, B., SHARMA, V., HOUZE, E. C., KOERNER, M. R., MOORE, J. R., COTTS, P. M., THRELFALL-HOLMES, P. et MCKINLEY, G. H. (2015). Studying the effects of elongational properties on atomization of weakly viscoelastic solutions using rayleigh ohnesorge jetting extensional rheometry (rojer). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 222:171–189.
- KOSCHMIEDER, E. et PALLAS, S. (1974). Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17(9):991–1002.
- LANDAU, L. D. et LIFSHITZ, E. M. (1959). *Fluid Mechanics : Course of theoretical physics*, volume 6. Elsevier.
- LI, J. et FONTELOS, M. A. (2003). Drop dynamics on the beads-on-string structure for viscoelastic jets : A numerical study. *Physics of fluids*, 15(4):922–937.
- LIANG, Y., LEE, H., LIM, S., LIN, W., LEE, K. et WU, C. (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications—part i : Theory. *Journal of Sound and vibration*, 252(3):527–544.
- LIANG, Y., OZTEKIN, A. et NETI, S. (1999). Dynamics of viscoelastic jets of polymeric liquid extrudate. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 81(1-2):105–132.

- LUCK, R., ZDANIUK, G. J. et CHO, H. (2015). An efficient method to find solutions for transcendental equations with several roots. *Intl J. Engng Maths*, 2015:1–4.
- MATHUES, W., FORMENTI, S., MCILROY, C., HARLEN, O. G. et CLASEN, C. (2018). Caber vs rojer—different time scales for the thinning of a weakly elastic jet. *Journal of Rheology*, 62(5):1135–1153.
- MAXWELL, J. C. (1867). *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A157:49–88.
- MCKINLEY, G. H. (2005). Visco-elasto-capillary thinning and break-up of complex fluids.
- MEISTER, B. J. et SCHEELE, G. F. (1967). Generalized solution of the tomotika stability analysis for a cylindrical jet. *AIChE Journal*, 13(4):682–688.
- MERRILL, E. et LEOPAIRAT, P. (1980). Scission of non-interpenetrating macromolecules in transient extensional flows. *Polymer Engineering & Science*, 20(7):505–511.
- MEZGER, T. (2020). *The rheology handbook : for users of rotational and oscillatory rheometers*. European Coatings.
- MIDDLEMAN, S. (1965). Stability of a viscoelastic jet. *Chemical Engineering Science*, 20(12):1037–1040.
- NEWMAN, J. (1984). Approximations for the bessel and struve functions. *Mathematics of Computation*, 43(168):551–556.
- NGHE, P., TABELING, P. et AJDARI, A. (2010). Flow-induced polymer degradation probed by a high throughput microfluidic set-up. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(7-8):313–322.
- NGUYEN, T. Q. et KAUSCH, H.-H. (1988). Chain scission in transient extensional flow kinetics and molecular weight dependence. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 30(2-3):125–140.
- ODELL, J. A., MULLER, A. J., NARH, K. A. et KELLER, A. (1990). Degradation of polymer solutions in extensional flows. *Macromolecules*, 23(12):3092–3103.
- OLDROYD, J. (1958). Non-newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 245(1241):278–297.
- OLDROYD, J. G. (1950). On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200(1063):523–541.
- PETERLIN, A. (1961). Streaming birefringence of soft linear macromolecules with finite chain length. *Polymer*, 2:257–264.
- POINCARÉ, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, par H. Poincaré*. Gauthier-Villars et fils.
- RAYLEIGH, L. (1878). On the instability of jets. *Proceedings of the London mathematical society*, 1(1):4–13.
- RAYLEIGH, L. (1892). Xvi. on the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(207):145–154.
- RENOULT, M.-C., BRENN, G., PLOHL, G. et MUTABAZI, I. (2018). Weakly nonlinear instability of a newtonian liquid jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 856:169–201.
- REYNOLDS, O. (1883). Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, (174):935–982.

- ROGNIN, E., WILLIS-FOX, N., ZHAO, T. Z., ALJOHANI, T. A. et DALY, R. (2021). Laminar flow-induced scission kinetics of polymers in dilute solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, 924.
- ROTHSTEIN, J. P. (2003). Transient extensional rheology of wormlike micelle solutions. *Journal of Rheology*, 47(5):1227–1247.
- RUBINSTEIN, M., COLBY, R. H. et al. (2003). *Polymer physics*, volume 23. Oxford university press New York.
- RUTLAND, D. et JAMESON, G. (1971). A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(2):267–271.
- SCHÜMMER, P. et TEBEL, K. (1983). A new elongational rheometer for polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 12(3):331–347.
- STELTER, M., BRENN, G., YARIN, A., SINGH, R. et DURST, F. (2000). Validation and application of a novel elongational device for polymer solutions. *Journal of Rheology*, 44(3):595–616.
- STELTER, M., BRENN, G., YARIN, A., SINGH, R. et DURST, F. (2002). Investigation of the elongational behavior of polymer solutions by means of an elongational rheometer. *Journal of Rheology*, 46(2):507–527.
- STERLING, A. M. et SLEICHER, C. (1975). The instability of capillary jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3):477–495.
- TANNER, R. (1983). Extrudate swell. In *Computational analysis of polymer processing*, pages 63–91. Springer.
- THIESSET, F., DUMOUCHEL, C., MÉNARD, T., ANISZEWSKI, W., VAUDOR, G. et BERLEMONT, A. (2019). Probing liquid atomization using probability density functions, the volume-based scale distribution and differential geometry. In *ILASS-Europe*.
- TIREL, C. (2019). *Etude expérimentale de l'atomisation de structures ligamentaires viscoélastiques*. Thèse de doctorat, Normandie.
- TIREL, C., RENOULT, M.-C. et DUMOUCHEL, C. (2020). Measurement of extensional properties during free jet breakup. *Experiments in fluids*, 61(2):1–14.
- TIREL, C., RENOULT, M.-C., DUMOUCHEL, C., LISIECKI, D., CRUMEYROLLE, O. et MUTABAZI, I. (2017). Multi-scale analysis of a viscoelastic liquid jet. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 245:1–10.
- TIRTAATMADJA, V. et SRIDHAR, T. (1993). A filament stretching device for measurement of extensional viscosity. *Journal of Rheology*, 37(6):1081–1102.
- TOMOTIKA, S. (1935). On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 150(870):322–337.
- WADDELL, J., NIEDERHAUS, C. et JACOBS, J. W. (2001). Experimental study of rayleigh–taylor instability : low atwood number liquid systems with single-mode initial perturbations. *Physics of Fluids*, 13(5):1263–1273.
- WEBER, C. (1931). Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 11(2):136–154.
- WEISSENBERG, K. (1947). A continuum theory of rheological phenomena. *Nature*, 159(4035):310–311.
- YARIN, A. L. (1993). *Free liquid jets and films : hydrodynamics and rheology*. Longman Publishing Group.

- YON, J., LALIZEL, G. et BLAISOT, J.-B. (2004). A statistical morphological determination of the growth rate of the interfacial disturbance of an excited rayleigh jet. *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, 11(3).